# Differential Geometry

Yury Holubeu *

September 9, 2024

This note is not intended for distribution.

I worked on differential geometry much less than enough, so it is not recommended to read this note.

Differential geometry and applications are discussed in details. Links below show contents of solved problems, summary of other topics. I used the following literature.

Цели: 1) Требуются 2 недели активных обычных тренировок.

## Contents

**1 Preface and main motivation 7**

**I —— Typical Differential Geometry in a Nutshell —— 8**

**2 Основные конструкции диффгема в двух словах 8**
- 2.1 Основные конструкции . . . 8
  - 2.1.1 Basic Concepts Differential Geometry . . . 8
  - 2.1.2 Основные свойства дифференциальных форм . . . 13
  - 2.1.3 Tangent Spaces . . . 17
  - 2.1.4 О векторах, ковекторах и векторных полях . . . 18
  - 2.1.5 On Tensors, Tensor Fields . . . 18
  - 2.1.6 On Lie Derivative . . . 18
  - 2.1.7 On $\mathrm{div}, \mathrm{rot}, \mathrm{grad}, \Box$ . . . 19
  - 2.1.8 О вращениях (!?) . . . 22
- 2.2 Дифференциальные формы в двух словах . . . 22
  - 2.2.1 On Integration of Diff Forms . . . 22
  - 2.2.2 О когомологиях и гармонических формах (??) . . . 22
- 2.3 On Riemannian, Pseudo-Riemannian Geometry . . . 23
  - 2.3.1 О криволинейных координатах . . . 23
  - 2.3.2 О первой фундаментальной форме . . . 26
  - 2.3.3 О второй фундаментальной форме . . . 26
  - 2.3.4 On Metric . . . 30
  - 2.3.5 On Connections, Covariant Derivative . . . 31
  - 2.3.6 On Geodesics, Geodesic Deviation . . . 35
  - 2.3.7 On Parallel Transport (!???) . . . 37
  - 2.3.8 On Killing vectors and tensors (!?) . . . 38
  - 2.3.9 On Riemann Tensor, Ricci scalar, etc. . . . 38
  - 2.3.10 On Non-Euclidean and Lobachevsky Geometry . . . 40
  - 2.3.11 More on the Riemann Tensor and applications . . . 44
  - 2.3.12 Other about surfaces (!!?!???!?) . . . 44
- 2.4 Curves in a Nutshell . . . 44
  - 2.4.1 On flat curves . . . 44
  - 2.4.2 On curves in 3D, Frenet–Serret formulas . . . 44
  - 2.4.3 Other about curves . . . 45
- 2.5 On typical spaces, manifolds . . . 45
  - 2.5.1 On spacetimes in general relativity . . . 45
  - 2.5.2 Geometry of Friedmann's Universe . . . 45
- 2.6 Об особых типичных конструкциях . . . 49
  - 2.6.1 О векторных расслоениях . . . 49
  - 2.6.2 О гомотопических группах . . . 49
  - 2.6.3 О связности в расслоении . . . 49

---

*yuri.holubev@gmail.com

2.6.4 Geometry and topology paradoxes in a nutshell . . . . . 49
2.6.5 О геометрии по Тёрстону (!?!??!) . . . . . 49

# II Fundamentals of Differential Geometry 50

3 Дифференциальные формы 50
3.1 Касательное пространство и дифференциал . . . . . 50
3.2 Интегрирование дифференциальный форм . . . . . 50
3.2.1 Разбиение единицы . . . . . 50
3.2.2 Формула Стокса . . . . . 50
3.3 Векторный анализ . . . . . 56
3.3.1 векторные поля . . . . . 56
3.3.2 векторные операторы через дифференциальные формы . . . . . 56
3.3.3 дивергенция . . . . . 57
3.4 гомологический анализ форм . . . . . 57
3.4.1 замкнутые и точные формы . . . . . 57
3.4.2 когомологии де рама . . . . . 59

4 Основы римановой геометрии 59
4.1 Метрика . . . . . 59
4.1.1 Интуитивное понимание метрики . . . . . 59
4.1.2 Индуцированная метрика . . . . . 62
4.1.3 изометрии метрик . . . . . 62
4.1.4 метрики . . . . . 62
4.1.5 Обзор метрики . . . . . 62
4.1.6 примеры актуальных многообразий и метрик . . . . . 62
4.2 Аффинная связность (!!!) . . . . . 62
4.2.1 Основная конструкция . . . . . 62
4.2.2 Дополнения о ковариантной производной . . . . . 65
4.2.3 Дополнения о ковариантной производной (??) . . . . . 65
4.2.4 символы Кристоффеля . . . . . 65
4.3 Кривизна Римана . . . . . 65
4.3.1 суть кручения и кривизны . . . . . 65
4.3.2 О кручении . . . . . 69
4.3.3 Римановы многообразия . . . . . 70
4.3.4 римановы объемы . . . . . 70
4.3.5 Интегральные кривые . . . . . 70
4.4 Производная Ли (????) . . . . . 70
4.4.1 Производная Ли в двух словах . . . . . 70
4.4.2 Алгебраические свойства производной Ли . . . . . 71
4.4.3 производная Ли от различных объектов . . . . . 74
4.4.4 Геометрический смысл производной Ли . . . . . 75
4.4.5 Некоторые типичные применения производной Ли . . . . . 80
4.5 Прямой и обратный образы . . . . . 80
4.5.1 Конструкция . . . . . 80
4.5.2 Обзор применений и связей с другими конструкциями . . . . . 82
4.6 О когомологиях и схожих конструкциях . . . . . 82
4.6.1 О конструкции коголомологий . . . . . 83
4.6.2 Примеры типичных коголомологий . . . . . 85
4.6.3 Об эйлеровой характеристике . . . . . 85
4.6.4 О гомологиях . . . . . 86
4.6.5 О фундаментальной группе . . . . . 86
4.6.6 Нетипичные коголомологии . . . . . 86

4.7 Поля Киллинга . . . . . . 86
    4.7.1 Конструкция . . . . . . 86
    4.7.2 Обзор применений полей Киллинга (???) . . . . . . 86

**5 Поверхности и кривые** **86**
5.1 Системы координат . . . . . . 86
5.2 Риманово многообразие . . . . . . 89
5.3 кривые . . . . . . 89
    5.3.1 определения кривых . . . . . . 89
    5.3.2 длина и характеристики . . . . . . 90
    5.3.3 кривизна . . . . . . 90
    5.3.4 плоские кривые . . . . . . 91
    5.3.5 пространственные кривые . . . . . . 91
    5.3.6 дополнения и задачи про плоские кривые . . . . . . 91
    5.3.7 кривые в пространстве . . . . . . 91
5.4 Описание поверхностей . . . . . . 91
    5.4.1 вторая фундаментальная форма поверхностей . . . . . . 91
    5.4.2 Тензор кривизны Римана для поверхностей . . . . . . 91
5.5 Типичные поверхности (????) . . . . . . 92

**III Problems of Differential Geometry** **94**

**6 Каталог задач** **94**
6.1 Общие вопросы . . . . . . 94
    6.1.1 Вопросы на понимание сути диффгема . . . . . . 94
    6.1.2 Типичные вопросы и задачи на проверку знаний . . . . . . 94
    6.1.3 Вопросы на понимание типичных деталей . . . . . . 94
6.2 Типичные технические задачи . . . . . . 94
    6.2.1 Задачи на свойства дифференциальных форм . . . . . . 94
    6.2.2 Задачи на определение параметров поверхностей (???) . . . . . . 94
    6.2.3 Задачи на векторные операции в искривленных координатах (??) . . . . . . 95
    6.2.4 Задачи на понимании многообразий . . . . . . 95
    6.2.5 Задачи на векторы Киллинга и симметрии . . . . . . 97
    6.2.6 Задачи на отображения . . . . . . 98
    6.2.7 Задачи на топологию многообразий . . . . . . 101
6.3 Задачи других тем . . . . . . 102
    6.3.1 Задачи о кольцах и дифференциалах . . . . . . 102
    6.3.2 Задачи гомологической алгебры (??) . . . . . . 102
    6.3.3 Задачи линейной алгебры для диффгема . . . . . . 103
6.4 Задачи о приложениях дифференциальной геометрии (???) . . . . . . 104
    6.4.1 Задачи на диффгем в механике . . . . . . 105
    6.4.2 Задачи на диффгем в теории поля . . . . . . 105
    6.4.3 Задачи на диффгем в теории струн . . . . . . 105

**IV —– Special Differential Geometry in a Nutshell —–** **106**

**7 О других методах и конструкциях** **106**
    7.0.1 О тетрадах и системах отсчета . . . . . . 106
    7.0.2 О характеристических классах . . . . . . 106
    7.0.3 Другое о расслоениях, гомотопиях . . . . . . 106
7.1 О других конструкциях . . . . . . 107
    7.1.1 О многообразиях в общем случае . . . . . . 107

7.1.2 О симплектической структуре и геометрии . . . 108
7.1.3 О спин-структуре на многообразиях (!?!?) . . . 109
7.1.4 О топологических пространствах . . . 109
7.1.5 О гомологиях . . . 109
7.1.6 О супергеометрии . . . 109

**8 О приложениях диффгема в физике 109**
8.1 О механике и квантовой механике . . . 109
8.1.1 Об основах механики . . . 109
8.1.2 О других свойствах механики (!!!??) . . . 111
8.1.3 О квантовой механике . . . 118
8.2 О теориях полей . . . 118
8.2.1 Об электродинамике . . . 118
8.2.2 О теориях поля . . . 119
8.2.3 On gravity . . . 120
8.2.4 О КТП и схожих полевых теориях . . . 120
8.3 О другой физике . . . 120
8.3.1 On gravitational lensing (??????) . . . 120
8.3.2 On thermodynamics . . . 120

**V Other Constructions of Differential Geometry 122**

**9 Каталог геометрических объектов (??) 122**

**10 Различные геометрии 122**
10.1 Кэлерова геометрия (????) . . . 122
10.2 Гиперболическая геометрия . . . 122
10.2.1 Hypercycles and horocycles . . . 122
10.2.2 Геометрия Пуанкаре . . . 122
10.2.3 Геометрия Лобачевского . . . 122
10.2.4 The Beltrami–Klein model . . . 122
10.2.5 The Poincare half-plane model . . . 122
10.2.6 The hyperboloid model . . . 122
10.2.7 On other models of hyperbolic spaces (??) . . . 122
10.2.8 Однородные мозаики на гиперболической плоскости . . . 122
10.3 Типичные поверхности и многообразия . . . 123
10.3.1 Пространства (анти-) де Ситтера . . . 123
10.3.2 Поверхность Бельтрами . . . 123
10.3.3 Лента Мебиуса . . . 123

**11 Введение в теорию многообразий 123**
11.1 Manifolds . . . 123
11.2 Smooth Maps on a Manifold . . . 124
11.3 Quotients . . . 124
11.4 Симплектические и пуассоновы многообразия . . . 124
11.4.1 Многообразие Калаби Яу . . . 124
11.4.2 бутылка Клейна . . . 124
11.5 Отображения . . . 124
11.5.1 отображения . . . 124
11.5.2 гомотопические инварианты . . . 124
11.5.3 степень отображения . . . 125
11.5.4 связки с механикой . . . 125
11.6 Тензорные поля . . . 125

11.7 Гомотопические инварианты . . . 127
11.7.1 Теория . . . 127
11.7.2 Обзор применений (!) . . . 127

**12 Когомологии** **128**
12.1 Теория . . . 128
12.1.1 Теория . . . 128
12.2 Другое о когомологиях . . . 128
12.2.1 Обзор применений (!) . . . 128

**13 Гомологии (???)** **128**
13.1 В двух словах . . . 128
13.1.1 Теория . . . 128
13.1.2 Обзор применений (!) . . . 128

**14 Введение в другие разделы** **128**
14.0.1 Добавление искривленного пространства в физические теории (??) . . . 128
14.1 Супергеометрия . . . 128
14.2 Расслоенные пространства . . . 128
14.2.1 Теория . . . 128
14.2.2 Обзор применений (!) . . . 128
14.2.3 Общая теоряя расслоенных пространств . . . 128
14.3 K-теория . . . 129
14.3.1 теория . . . 129
14.3.2 применения (??) . . . 129
14.4 Моделирование геометрии и численные методы . . . 129

**VI Applications of Differential Geometry** **130**

**15 Типичные математические приложения** **130**
15.1 Геометрия в дифференциальных уравнения . . . 130
15.2 Геометрия в функциональном анализе . . . 130

**16 Типичные физические приложения** **130**
16.1 Геометрия в механике . . . 130
16.1.1 Механика на языке форм . . . 130
16.1.2 Примеры . . . 130
16.1.3 Определения и построение механики . . . 131
16.2 Геометрия в квантовой механике . . . 132
16.3 Геометрия в типичной теории поля . . . 132
16.3.1 Некоторые темы (???) . . . 132
16.3.2 Спинорные поля на римановом многообразии . . . 133
16.3.3 ковариантная производная в теории поля . . . 134
16.3.4 Электродинамика на языке форм . . . 134
16.3.5 Уравнения Максвелла с геометрической точки зрения . . . 134
16.3.6 Электромагнитное поле в дифференциальных формах . . . 134
16.4 Geometry of gravity and relativity . . . 150
16.4.1 Суть ОТО . . . 150
16.4.2 Examples of Manifolds in GR and SR . . . 150

**17 Другие физические приложения** **151**
17.1 Геометрия в особых теориях поля . . . 151
17.2 Геометрия в гравитационном линзировании . . . 151

18 Другие приложения 151
18.1 философские приложения . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 151

VII Дополнения 152

A Введение и обзор диффгема 152
A.1 Еще мотивация к дифференциальной геометрии . . . . . . . . . . . . . . . 152
A.1.1 Другая общая мотивация . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 152
A.1.2 Мотивация к разделам и к изучению особенностей диффгема . . . . . . 152
A.2 Мышление профессионалов геометрии . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 153
A.2.1 Взгляд на дифференциальную геометрию . . . . . . . . . . . . . . . . 153
A.2.2 Способы догадаться до главных идей геометрии . . . . . . . . . . . . 154
A.2.3 О настоящей важности диффгема в физике . . . . . . . . . . . . . . . 154
A.2.4 Удивительные факты . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 154
A.2.5 Мышление для эффективного изучения геометрии . . . . . . . . . . . . 154
A.2.6 How one should not study differential geometry? (!!!) . . . . . . . . . . 156
A.3 Литература по дифференциальной геометрии . . . . . . . . . . . . . . . . . 156
A.3.1 Основная . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 156
A.3.2 Дополнительная и глубленная литература . . . . . . . . . . . . . . . 157
A.3.3 Литература по приложениям в физике и математика . . . . . . . . . . 158
A.4 Обзор дифференциальной геометрии . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 158
A.4.1 Геометрия в двух словах . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 158
A.4.2 обзор теоретических подходов . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 158
A.4.3 обзор приложений . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 159
A.4.4 Обзор дальнейших развитий геометрии . . . . . . . . . . . . . . . . . 159
A.4.5 Короткий исторический обзор . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 159
A.4.6 Связи с другими математическими науками . . . . . . . . . . . . . . . 159
A.5 Описание записи . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 159
A.5.1 Особенности записи в целом . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 159
A.5.2 Описание частей . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 159
A.5.3 Обозначения . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 160
A.5.4 О терминологии . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 160
A.6 Головоломки дифференциальной геометрии . . . . . . . . . . . . . . . . . . 160
A.6.1 Интересные головоломки . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 160
A.6.2 Головоломки для задротов . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 160

B Математика для диффгема 161
B.1 Элементы алгебры для диффгема . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 161
B.1.1 О двойственности . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 161
B.1.2 Полилинейные формы . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 162
B.1.3 Билинейные формы . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 162
B.1.4 Тензорная алгебра . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 163
B.1.5 О градуированных алгебрах . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 165
B.2 супералгебра . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 165
B.3 Элементы топологии . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 165
B.3.1 Основы топологии . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 165
B.4 Элементы математического анализа . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 165
B.4.1 Теорема об обратном отображении . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 165
B.4.2 разные операторы??? . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 165
B.5 Другие математические конструкции . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 165
B.5.1 Элементы теории категорий . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 165

Bibliography 166

# 1 Preface and main motivation

Let's discuss some minimum knowledge and motivation that would be good to understand for studying the subject.

### В самой разной теоретической физике то дифференциальные формы, то кривизна встречаются периодически, так что без подготовки по ним будут постоянно тормоза

И не так сложно в этом разобраться, просто некоторое количество конструкций, которые можно прописать просто - и при случае не тормозить на разных свойствах.

(напишу с примерами, что в гравитации, в механике, в теориях поля они встречаются)

### Лучшие идейные головоломки (???)

(как-то соберу, пока хз)

### Лучшие технические головоломки (???)

(как-то соберу, пока хз)

# Part I

# —— Typical Differential Geometry in a Nutshell ——

## 2 Основные конструкции диффгема в двух словах

### 2.1 Основные конструкции

#### 2.1.1 Basic Concepts Differential Geometry

**Topological Spaces**

(полстраницы определений коротко, чтобы не возвращаться к этому.)

**Differentiable Manifolds**

(полстраницы определений коротко, чтобы не возвращаться к этому.)

**Definitions of tensors and forms**

**1-form** At each point $p \in M$, we have a vector space $T_p(M)$. The dual of this space, $T_p^*(M)$ is called the cotangent space at $p$, and an element of this space is called a cotangent vector, sometimes shortened to covector. Given a basis $\{e_\mu\}$ of $T_p(M)$, we can introduce the dual basis $\{f^\mu\}$ for $T_p^*(M)$ and expand any co-vector as $\omega = \omega_\mu f^\mu$.

(сокращу то, что ниже!)

We can also construct fields of cotangent vectors, by picking a member of $T_p^*(M)$ for each point $p$ in a smooth manner. Such a cotangent field is better known as a one-form; they map vector fields to real numbers. The set of all one-forms on $M$ is denoted $\Lambda^1(M)$.

There is a particularly simple way to construct a one-form. Take a function $f \in C^\infty(M)$ and define $df \in \Lambda^1(M)$ by

$$df(X) = X(f)$$

We can use this method to build a basis for $\Lambda^1(M)$. If we introduce coordinates $x^\mu$ on $M$ with the corresponding coordinate basis $e_\mu = \partial/\partial x^\mu$ of vector fields, which we often write in shorthand as $\partial/\partial x^\mu \equiv \partial_\mu$. We then we simply take the functions $f = x^\mu$ which, from (2.16), gives

$$dx^\mu(\partial_\nu) = \partial_\nu(x^\mu) = \delta^\mu_\nu$$

This means that $f^\mu = dx^\mu$ provides a basis for $\Lambda^1(M)$, dual to the coordinate basis $\partial/\partial_\mu$. In general, an arbitrary one-form $\omega \in \Lambda^1(M)$ can then be expanded as

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu$$

If we exchange the basis:

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu = \tilde{\omega}_\mu d\tilde{x}^\mu \quad \text{with} \quad \tilde{\omega}_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu}\omega_\nu$$

(строчка док-ва)

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} dx^\alpha$$

$$df(v) = v^\beta df \left( \frac{\partial}{\partial x^\beta} \right) = v^\beta \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial x^\beta} \right)$$

$$dx^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial x^\beta} \right) = \delta^\alpha_\beta$$

$$df(v) = v^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$$

$$df(v) = v(f)$$

$$\omega = \omega_1 dx^1 + \ldots + \omega_n dx^n = \omega_\alpha dx^\alpha$$

$$\omega = \omega_\alpha(x) dx^\alpha = \omega'_\beta (x') \, dx'^\beta = \omega'_\beta (x') \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha} dx^\alpha, \quad \omega_\alpha(x) = \omega'_\beta (x') \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha}$$

**Tensors** A tensor of rank$(r, s)$ at a point $p \in M$ is defined to be a multi-linear map

$$T : T^*_{p_1}(M) \times \ldots \times T^*_{p_r}(M) \times T_{p_1}(M) \times \ldots \times T_{p_s}(M) \to \mathbf{R}$$

Such a tensor is said to have total rank $r + s$. We've seen some examples already. A cotangent vector in $T^*_p(M)$ is a tensor of type $(0, 1)$, while a tangent vector in $T_p(M)$ is a tensor of type $(1, 0)$ (using the fact that $T_p(M) = T^{**}_p(M)$).

Given a basis $\{e_\mu\}$ for vector fields and a dual basis $\{f^\mu\}$ for one-forms, the components of the tensor are defined to be

$$T^{\mu_1 \ldots \mu_r}_{\nu_1 \ldots \nu_s} = T\left(f^{\mu_1}, \ldots, f^{\mu_r}, e_{\nu_1}, \ldots, e_{\mu_s}\right)$$

Given a tensor $S$ of rank $(p, q)$ and a tensor $T$ of rank $(r, s)$, we can form the tensor product, $S \otimes T$ which a new tensor of rank $(p + r, q + s)$, defined by

$$\begin{aligned} S \otimes T & \left(\omega_1, \ldots, \omega_p, \eta_1, \ldots, \eta_r, X_1, \ldots X_q, Y_1, \ldots, Y_s\right) \\ & = S\left(\omega_1, \ldots, \omega_p, X_1, \ldots X_q\right) T\left(\eta_1, \ldots, \eta_r, Y_1, \ldots, Y_s\right) \end{aligned}$$

In terms of components:

$$(S \otimes T)^{\mu_1 \ldots \mu_p \nu_1 \ldots \nu_r}{}_{\rho_1 \ldots \rho_q \sigma_1 \ldots \sigma_s} = S^{\mu_1 \ldots \mu_p}{}_{\rho_1 \ldots \rho_q} T^{\nu_1 \ldots \nu_r}{}_{\sigma_1 \ldots \sigma_s}$$

(тут обозначения из линала добавлю, сперва там их напишу, тоже мб по Тонгу, типичные тензорные обозначения.)

(маленький абзац про базисы, какой и почему где базисы, тут!!!)

**p-forms and wedge** Totally anti-symmetric $(0, p)$ tensors fields are called $p$-forms . The set of all $p$-forms over a manifold $M$ is denoted $\Lambda^p(M)$.

Given a $p$-form $\omega$ and a $q$-form $\eta$, we can take the tensor product to construct a $(p+q)$-tensor. If we anti-symmetrise this, we then get a $(p+q)$-form. This construction is called the wedge product , and is defined by

$$(\omega \wedge \eta)_{\mu_1 \ldots \mu_p \nu_1 \ldots \nu_q} = \frac{(p+q)!}{p!q!} \omega_{[\mu_1 \ldots \mu_p} \eta_{\nu_1 \ldots \nu_q]}$$

$$(\omega \wedge \eta)_{\mu\nu} = \omega_\mu \eta_\nu - \omega_\nu \eta_\mu$$

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \omega$$

$$\omega \wedge (\eta \wedge \lambda) = (\omega \wedge \eta) \wedge \lambda.$$

$$\omega_p \wedge \omega_q = (-1)^{pq} \omega_q \wedge \omega_p$$

$$d\left(\omega_p \wedge \omega_q\right) = d\omega_p \wedge \omega_q + (-1)^p \omega_p \wedge d\omega_q$$

$$\wedge : \Omega^k(U) \times \Omega^m(U) \to \Omega^{k+m}(U)$$

$$(\omega \wedge \lambda)\left(v_1, \ldots, v_{k+m}\right) = \frac{1}{k!m!} \sum_{\sigma \in \hat{\zeta}_{k+m}} (\operatorname{sgn} \sigma) \omega\left(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}\right) \cdot \lambda\left(v_{\sigma(k+1)}, \ldots, v_{\sigma(k+m)}\right)$$

$$(f\omega)\left(v_1, \ldots, v_k\right) = f \cdot \omega\left(v_1, \ldots, v_k\right)$$

$$\omega = \sum_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_k} \omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_k}$$

$$\omega\left(v_1, \ldots, v_i + w_i, \ldots, v_k\right) = \omega\left(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k\right) + \omega\left(v_1, \ldots, w_i, \ldots, v_k\right)$$

$$\omega\left(f_1 v_1, \ldots, f_k v_k\right) = f_1 \ldots f_k \omega\left(v_1, \ldots, v_k\right)$$

**Поднятие индекса: создание дифференциальной формы по вектору** Наличие полуримановой структуры позволяет преобразовать вектор в дифференциальную форму первой степени по формуле

$$\xi^b(\eta) = \mathfrak{g}(\xi, \eta)$$

Например, для вектора с координатами $\xi^\alpha$ получается форма с координатами

$$\xi^b_\alpha = g_{\alpha\beta} \xi^\beta$$

**Опускание индекса: создание вектора по дифференциальной форме** Возможна и обратная операция, делающая из формы первой степени вектор в соответствии с формулой

$$\omega(\eta) = \mathfrak{g}\left(\omega^{\#}, \eta\right)$$

Если речь идёт о стандартной евклидовой структуре в $\mathbb{R}^3$ и работе в ортонормированной системе координат, то подняте и опускание индексов оставляют те же самые координаты векторов и форм, ведь $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$; в этом случае верхние и нижние индексы можно не различать.

**Связь метрики и обратной метрики:** $g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma} = \delta^\gamma_\alpha$ Наличие (полу)римановой структуры порождает билинейные симметрические формы на всех связанных с касательным пространством в точке пространствах. Так, форма (полу)римановой структуры $\mathfrak{g}$ может рассматриваться как отображение

$$\mathfrak{g} : T_pM \otimes T_pM \to \mathbb{R}$$

а также как элемент $T^\star_pM \otimes T^\star_pM$, или как отображение $T_pM \to T^\star_pM$ (опускание индексов) с обратным отображением $T^\star_pM \to T_pM$ (поднятие индексов). Композиция $\mathfrak{g}$ и двух поднятий индексов на её аргументах даёт билинейное отображение

$$\bar{\mathfrak{g}} : T^\star_pM \otimes T^\star_pM \to \mathbb{R}$$

то есть симметричную билинейную форму на кокасательном пространстве.

Определим, как связаны матрицы $g_{\alpha\beta}$ и $\bar{g}_{\alpha\beta}$ (последнюю в теоретической физике пишут как $g^{\alpha\beta}$), представляющие (полу)риманову структуру на исходном касательном пространстве и соответствующую билинейную форму на двойственном к нему кокасательном пространстве.

По построению очевидно, что

$$\bar{\mathfrak{g}}\left(\xi^b, \eta^b\right) = \mathfrak{g}(\xi, \eta) \qquad \Leftrightarrow \qquad g^{\alpha\beta}\xi^b_\alpha\eta^b_\beta = g_{\mu\nu}\xi^\mu\eta^\nu$$

Подставляя в последнее выражение формулу $\xi^b(\eta) = \mathfrak{g}(\xi, \eta)$, имеем $g^{\alpha\beta}g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} = g_{\mu\nu}$. Отсюда

$$g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma} = \delta^\gamma_\alpha$$

то есть матрица $\bar{g}_{\alpha\beta} := g^{\alpha\beta}$ является обратной к $g_{\alpha\beta}$, в силу чего $g^{\alpha\beta}$ часто называют обратной метрикой.

$\bar{\mathfrak{g}}$ даёт изоморфизм между $\Omega^{n-k}(M)$ в точке и его двойственным.

(?? это пока не так уж понимаю, потом лучше подумаю, почему. перенесу в раздел про метрикук)

**Метрика на $\Omega^k_p(M)$ (?)** Тензорно перемножая $\bar{\mathfrak{g}}$ на себя и, группируя тензорные множители, можно расширить её до отображения

$$\bar{\mathfrak{g}} : \underbrace{T^\star_pM \otimes \ldots \otimes T^\star_pM}_{k} \otimes \underbrace{T^\star_pM \otimes \ldots \otimes T^\star_pM}_{k} \to \mathbb{R}$$

Вкладывая пространство $\Omega^k_p(M)$ дифференциальных форм степени $k$ в точке $p$ в тензорное произведение

$$\Omega^k_p(M) \subseteq \underbrace{T^\star_pM \otimes \ldots \otimes T^\star_pM}_{k}$$

мы таким образом можем рассмотреть $\bar{\mathfrak{g}}$ как билинейную форму на $\Omega^k_p(M)$. Поскольку кососимметричные формы по разному вкладываются в полилинейные формы (с точностью до умножения на зависящую от $k$ постоянную), то нам надо внести определённость и нормировать произведение $\bar{\mathfrak{g}}_p(\omega, \lambda)$.

Мы будем нормировать так, что если линейные формы $\omega_1, \ldots, \omega_n \in \Omega^1(M)$ образуют (почти) ортонормированный базис в точке $p$, то есть

$$\bar{\mathfrak{g}}_p\left(\omega_i, \omega_j\right) = \pm\delta_{ij}$$

то формы $\omega_{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{i_k}$ будут образовывать (почти) ортонормированный базис относительно $\bar{\mathfrak{g}}_p$.

**Невырожденное спаривание** Рассмотрим многообразие $M$ размерности $n$. Внешнее умножение между $\Omega^k(M)$ и $\Omega^{n-k}(M)$ в точке $p$ является невырожденным спариванием, то есть для всякой ненулевой $\omega \in \Omega^k(M)$ можно найти $\lambda \in \Omega^{n-k}(M)$ так, что $\omega \wedge \lambda$ не будет равна нулю в точке $p$.

(?? почему?? потом подробнее напишу)

(?? как это на англ назвается??)

### Maps Between Manifolds

#### Push-Foward and Pull-Back

Function: $f : N \to \mathbb{R}$.   Map, diffeomorphism: $\varphi : M \to N$.   $M, N$ – manifolds

The pull-back drags objects originally defined on $N$ onto $M$:

$$\forall f : N \to \mathbb{R} \qquad (\varphi^* f)(p) = f(\varphi(p)), \qquad \text{so} \quad (\varphi^* f) : M \to \mathbb{R}$$

Basically it is like $\varphi^{-1}$, but for functions. In coordinates $x^\mu$ on $M$ and $y^\alpha$ on $N$, then the map is $\varphi(x) = y^\alpha(x)$, and the pull-back is $(\varphi^* f)(x) = f(y(x))$.

The push-forward maps a vector field $Y$ on $M$ to a new vector field $(\varphi_* Y)$ on $N$.

$$f : N \to \mathbb{R} \qquad (\varphi_* Y)(f) = Y(\varphi^* f). \qquad \text{or} \ \ [(\varphi_* Y)(f)](\varphi(p)) = [Y(\varphi^* f)](p)$$

Basically we are just plugging in functions-coordinates of a new manifold by the inverse map. If $Y = Y^\mu \partial/\partial x^\mu$ is the vector field on $M$,

$$(\varphi_* Y)(f) = Y^\mu \frac{\partial f(y(x))}{\partial x^\mu} = Y^\mu \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial f(y)}{\partial y^\alpha} \qquad \text{on} N$$

Written in components, $(\varphi_* Y) = (\varphi_* Y)^\alpha \, \partial/\partial y^\alpha$, we then have

$$(\varphi_* Y)^\alpha = Y^\mu \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}$$

The pushforward is always denoted as $\varphi_*$ and goes in the same way as the original map, the pull-back is always denoted as $\varphi^*$ and goes in the opposite direction.

(???? wiki. later I'll learn also the below) The differential of a smooth map $\varphi$ induces, in an obvious manner, a bundle map (in fact a vector bundle homomorphism) from the tangent bundle of $M$ to the tangent bundle of $N$, denoted by $d\varphi$, which fits into the following commutative diagram:

$$\begin{tikzcd}
TM \arrow[r, "\mathrm{d}\varphi"] \arrow[d, "\pi_M"'] & TN \arrow[d, "\pi_N"] \\
M \arrow[r, "\varphi"'] & N
\end{tikzcd}$$

where $\pi_M$ and $\pi_N$ denote the bundle projections of the tangent bundles of $M$ and $N$ respectively. $\mathrm{d}\varphi$ induces a bundle map from $TM$ to the pullback bundle $\varphi^* TN$ over $M$ via

$$(m, v_m) \mapsto (m, \ \mathrm{d}\varphi(m, v_m)),$$

where $m \in M$ and $v_m \in T_m M$. The latter map may in turn be viewed as a section of the vector bundle $\operatorname{Hom}(TM, \varphi^* TN)$ over $M$. The bundle map $\mathrm{d}\varphi$ is also denoted by $T\varphi$ and called the tangent map. In this way, $T$ is a functor.

Under a map $\varphi : M \to N$, we saw that a vector field $X$ on $M$ can be pushed forwards to a vector field $\varphi_* X$ on $N$. In contrast, one-forms go the other way: given a one-form $\omega$ on $N$, we can pull this back to a one-form $(\varphi^* \omega)$ on $M$, defined by

$$(\varphi^* \omega)(X) = \omega(\varphi_* X)$$

(??? додумаю) If we introduce coordinates $x^\mu$ on $M$ and $y^\alpha$ on $N$ then the components of the pull-back are given by

$$(\varphi^* \omega)_\mu = \omega_\alpha \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}$$

The push-forward of a tensor $T$ from $M$ to $N$ acts on one-forms $\omega \in \Lambda^1(N)$ and vector fields $X \in \mathfrak{X}(N)$ and is given by

$$(\varphi_* T)(\omega_1, \ldots, \omega_r, X_1, \ldots, X_s) = T\left(\varphi^* \omega_1, \ldots, \varphi^* \omega_r, \left(\varphi_*^{-1} X_1\right), \ldots, \left(\varphi_*^{-1} X_s\right)\right)$$

Here $\varphi^* \omega$ are the pull-backs of $\omega$ from $N$ to $M$, while $\varphi_*^{-1} X$ are the push-forwards of $X$ from $N$ to $M$.

### 2.1.2 Основные свойства дифференциальных форм

#### Основные операции

**Переход обратно в координатный язык (????)** (потренируюсь чуть, потом пропишу вроде это вообще не проблемно!)

**Внешний дифференциал** $d$

$$d : \Omega^k(U) \ \to \Omega^{k+1}(U)$$

у него три свойства:
(1) на функциях он является обычными дифференциалом
(2) нильпотентность $d^2 = 0$
(3) $d(\omega \wedge \lambda) = d\omega \wedge \lambda$

$$d\omega = \sum_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_k} d\omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} \wedge dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_k} + \sum_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_k} \omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} d^2 x^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_k} + \ldots$$

$$d\omega = \sum_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_k} d\omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_k} \wedge dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_k}$$

$$d\omega = \sum_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_k, \beta \neq \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}} \frac{\partial \omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}}{\partial x^\beta} dx^\beta \wedge dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_k}$$

$$= \sum_{\alpha_1 < \ldots < \alpha_k, \alpha < \beta} \left( \frac{\partial^2 \omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta + \frac{\partial^2 \omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} dx^\beta \wedge dx^\alpha \right) \wedge dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_k}$$

$$\frac{\partial^2 \omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = \frac{\partial^2 \omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_k}}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}$$

Второй дифференциал от любой формы - всегда ноль.

$$d : \Lambda^p(M) \to \Lambda^{p+1}(M)$$

$$(d\omega)=\frac{1}{p!}\frac{\partial\omega_{\mu_1\ldots\mu_p}}{\partial x^\nu}dx^\nu\wedge dx^{\mu_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\mu_p}$$

$$(d\omega)_{\mu_1\ldots\mu_{p+1}}=(p+1)\partial_{[\mu_1}\omega_{\mu_2\ldots\mu_{p+1}]}$$

$d^2=0$

$d(\omega\wedge\eta)=d\omega\wedge\eta+(-1)^p\omega\wedge d\eta$, where $\omega\in\Lambda^p(M)$

$d\left(\varphi^*\omega\right)=\varphi^*(d\omega)$ where $\varphi^*$ is the pull-back associated to the map between manifolds, $\varphi: M\to N$

Because the exterior derivative commutes with the pull-back, it also commutes with the Lie derivative. This ensures that we have $d\left(\mathcal{L}_X\omega\right)=\mathcal{L}_X(d\omega)$.

Example: for a one-form $\omega=\omega_\mu dx^\mu$, the exterior derivative gives a 2-form:

$$(d\omega)_{\mu\nu}=\partial_\mu\omega_\nu-\partial_\nu\omega_\mu\Rightarrow d\omega=\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\omega_\nu-\partial_\nu\omega_\mu\right)dx^\mu\wedge dx^\nu$$

**Внутренее умножение** (суть этого приведу тут)

Внутреннее умножение (внутреннее дифференцирование). определяется как отображение $\imath_X:\Omega^k(M)\to\Omega^{k-1}(M)$ по формуле

$$\imath_X\omega\left(X_2,\ldots,X_k\right)=\omega\left(X,X_2,\ldots,X_k\right)$$

(?? тут в явном виде сразу пример напишу!) При умножении $X$ или $\omega$ на функцию $f$ выражение $\imath_X\omega$ просто умножается на функцию $f$.

Внутреннее умножение по определению линейно по вектору и по форме.

$$\imath_X(\omega\wedge\lambda)=\imath_X\omega\wedge\lambda+(-1)^{\deg\omega}\omega\wedge\imath_X\lambda\qquad\text{(Leibnitz rule)}$$

(???? напишу ниже док-во короче, додумаю его!!!) Из определения внутреннего умножения и внешнего умножения форм следует, что должна выполняться какая-то такая формула с точностью до знаков и множителей. Проверить знаки и множители по линейности достаточно на базисных элементах.

$$\imath_{\partial\beta}dx^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\alpha_k}=(-1)^{\ell-1}dx^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\alpha_{\ell-1}}\wedge dx^{\alpha_{\ell+1}}\wedge\ldots\wedge dx^{\alpha_k},\quad\beta=\alpha_\ell$$

и

$$\imath_{\partial_\beta}dx^{\alpha_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\alpha_k}=0$$

если $\beta$ не встречается среди $\alpha_\ell$. После этого проверка правила Лейбница становится понятной: внутреннему умножению на $\partial_\beta$ необходимо «добраться» до своего $dx^\beta$, причём при «перепрыгивании» через неподходящие $dx^\beta$ знак выражения меняется.

$$\left[\imath_X,l_Y\right]_+\omega=i^2_XY\omega+\imath_Y\imath_X\omega=0$$

Ибо $\left[\imath_X,l_Y\right]_+\omega=\omega(X,Y)+\omega(Y,X)=0$.

### Об операторе Ходжа

(мб в другой раздел передвину)

**Суть и основные свойства** Звезда Ходжа превращает форму, двойственную к -форме, в $(n-p)$-форму в $n$-мерном пространстве:

$$*\left(dx^{\mu_1}\wedge\ldots\wedge dx^{\mu_p}\right)=\frac{|g|^{1/2}}{(n-p)!}\varepsilon^{\mu_1}_{\mu_{p+1}}\mu_{p_n}dx^{\mu_{p+1}}\wedge\ldots\wedge dx^{\mu_*}$$

$$**\omega_p=(-1)^{p(n-p)}\omega_p$$

$$\omega_p\wedge*\omega_q=\omega_q\wedge*\omega_p$$

Определяется так. В присутствии (полу)римановой структуры $g$ на ориентированном многообразии $M^n$ (чтобы $\operatorname{vol} g$ можно было считать элементом $\Omega^n(M)$) для любой формы $\beta\in\Omega^k(M)$ формула

$$\alpha\wedge*\beta=\widetilde{g}(\alpha,\beta)\operatorname{vol}_g,\forall\alpha\in\Omega^k(M),$$

определяет форму $*\beta\in\Omega^{n-k}(M)$ и определяет линейное преобразование $*:\Omega^k(M)\to\Omega^{n-k}(M)$, звёздочку Ходжа.

Точнее можно сказать, что $*$ определяется как композиция изоморфизмов в каждой точке

$$\Omega^k_p(M)\longrightarrow\left(\Omega^k_p(M)\right)^*\longrightarrow\Omega^{n-k}_p(M),$$

в которой первый возникает из невырожденного спаривания $\widetilde{g}$ между формами $k$ степени, а второй - из спаривания, заданного внешним умножением с делением на $\operatorname{vol}_g$.

The Hodge dual allows us to define an inner product on each $\Lambda^p(M)$. If $\omega,\eta\in\Lambda^p(M)$, we define

$$\langle\eta,\omega\rangle=\int_M\eta\wedge\star\omega$$

which makes sense because $\star\omega\in\Lambda^{n-p}(M)$ and so $\eta\wedge\star\omega$ is a top form that can be integrated over the manifold.

(??? доучивать нужно!!)

Оператор звёздочки является поточечным, то есть линейным относительно умножения на функцию, $*(f\alpha)=f(*\alpha)$. Например, для $\mathbb{R}^3$ со стандартной евклидовой струк-

На $n$-мерном (полу)римановом многообразии для звёздочки $*:\Omega^k(M)\to\Omega^{n-k}(M)$ выполняется

$$**\alpha=(-1)^{k(n-k)}\operatorname{sgn}\det g\cdot\alpha.$$

Для положительно определённой $g$ звёздочка Ходжа является изометрией для скалярного произведения $\widetilde{g}$ на внешних формах касательного пространства в точке.

Связь формы с полиномами (?)

(чет я хз в этом)

Всякий инвариантный полином является одновременно замкнутой и точной формой

(укажу в абзац док-во, пока не особо думал)

Определение. В присутствии (полу)римановой структуры $\mathfrak{g}$ на ориентированном многообразии $M$ формула

$$\omega\wedge\star\lambda=\overline{\mathfrak{g}}(\omega,\lambda)\tau_{\mathfrak{g}}$$

корректно определяет линейный оператор $\star:\Omega^k(M)\to\Omega^{n-k}(M)$, т.н. звёздочку Ходжа.

(?????) Это определение корректно, потому что $\overline{\mathfrak{g}}$ даёт изоморфизм между $\Omega^{n-k}(M)$ в точке и его двойственным, мы можем обосновать корректность следующего определения.

Точнее можно сказать, что $\star$ определяется как композиция изоморфизмов в каждой точке

$$\Omega^k_p(M)\to\left(\Omega^k_p(M)\right)^\star\to\Omega^{n-k}_p(M),$$

в которой первый возникает из невырожденного спаривания $\overline{\mathfrak{g}}$ между формами $k$-степени, а второй - из спаривания, заданного внешним умножением с делением на форму риманова объёма $\tau_{\mathfrak{g}}$.

(?? где там моя схема отображений, которую уже я рисовал в этом файле?)

Например, для $\mathbb{R}^3$ со стандартной евклидовой структурой и координатами $x, y, z$ мы получим

$$\star 1 = dx \wedge dy \wedge dz, \quad \star(dx \wedge dy \wedge dz) = 1 \quad \star\, dx = dy \wedge dz, \quad \star dy = dz \wedge dx,$$
$$\star dz = dx \wedge dy \quad \star\,(dx \wedge dy) = dz, \quad \star(dy \wedge dz) = dx, \quad \star(dz \wedge dx) = dy$$

Действительно, по определению

$$dx \wedge \star dx = \bar{\mathfrak{g}}(dx, dx) dx \wedge dy \wedge dz = g^{11} dx \wedge dy \wedge dz = dx \wedge dy \wedge dz$$
$$\star dx = dy \wedge dz$$

Остальные тождества получаются аналогичными вычислениями.

(потренируюсь позже!)

На $n$-мерном римановом многообразии $M$ с полуримановой структурой $\mathfrak{g}$ для звёздочки $\star : \Omega^k(M) \to \Omega^{n-k}(M)$ выполняется

$$\star \star \omega = (-1)^{k(n-k)} \operatorname{sgn} \det \mathfrak{g} \cdot \omega$$

(тут предлагается доказать это самому, пока не до этого, потом потренируюсь)

[Проверьте в координатах, в которых $\mathfrak{g}$ имеет диагональный вид $c \pm 1$ на диагонали.]

**Обзор применений оператора Ходжа** (по идее много где она нужна, 2/3 страницы планируется отсылок к разным формулам в физике.)

**О дуальности Ходжа** (просто утверждение и суть о простом, подробнее - скорее всего во 2й 1й части будет. примерно на 1/2 страницы планируется)

Hodge's Theorem: There is an isomorphism

$$\operatorname{Harm}^p(M) \cong H^p(M)$$

where $H^p(M)$ is the de Rham cohomology group (????). In particular, the Betti numbers can be computed by counting the number of linearly independent harmonic forms,

$$B_p = \dim \operatorname{Harm}^p(M)$$

(идею док-ва укажу тоже)

#### внутреннее умножение

также известно как внутреннее дифференцирование

**вкратце о внутреннем умножении**

**примеры применения**

$$i_{\frac{\partial}{\partial z}} \omega_E = E_y dx + E_x dy$$

если бы наше поле умножалось на любую функцию - то внутреннее

**случаи применения внутреннее умножения (??)**

### 2.1.3 Tangent Spaces

Consider a function $f : M \to \mathbb{R}$. To differentiate the function at some point $p$, we introduce a chart $\phi = (x^1, \ldots, x^n)$ in a neighbourhood of $p$. So construct the map $f \circ \phi^{-1} : U \to \mathbb{R}$ with $U \subset \mathbb{R}^n$ and by knowing how to differentiate functions on $\mathbb{R}^n$ and this gives us a way to differentiate functions on $M$, namely

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\right|_p := \left.\frac{\partial \left(f \circ \phi^{-1}\right)}{\partial x^\mu}\right|_{\phi(p)}$$

(тут много определений и формул потом будет)

#### Tangent Vectors

A tangent vector $X_p$ is an object that differentiates functions at a point $p \in M$. Specifically, $X_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ satisfying

i) Linearity: $X_p(f + g) = X_p(f) + X_p(g)$ for all $f, g \in C^\infty(M)$.

ii) $X_p(f) = 0$ when $f$ is the constant function.

iii) Leibnizarity: $X_p(fg) = f(p)X_p(g) + X_p(f)g(p)$ for all $f, g \in C^\infty(M)$. This, of course, is the product rule.

The set of all tangent vectors at point $p$ forms an $n$-dimensional vector space. We call this the tangent space $T_p(M)$. The tangent vectors $\partial_\mu|_p$ provide a basis for $T_p(M)$. This means that we can write any tangent vector as

$$X_p = X^\mu \partial_\mu|_p$$

with $X^\mu = X_p\left(x^\mu\right)$ the components of the tangent vector in this basis. (??? потом док-во изучу, но это в теории, пока не понимаю, почему это не очевидно? мб предложение про суть док-ва добавлю.)

#### Vector Fields

A vector field $X$ is defined to be a smooth assignment of a tangent vector $X_p$ to each point $p \in M$. So if you feed a function to a vector field, then it spits back another function, which is the differentiation of the first. In symbols, a vector field is therefore a map $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$. The function $X(f)$ is defined by

$$(X(f))(p) = X_p(f)$$

The space of all vector fields on $M$ is denoted $\mathfrak{X}(M)$.

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$
$$[X, Y] = \left(X^\mu \frac{\partial Y^\nu}{\partial x^\mu} - Y^\mu \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\mu}\right) \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

#### Integral Curves

We can then define a vector field by taking the tangent to the streamlines at each point. In a given coordinate system, the components of the vector field are

$$X^\mu\left(x^\mu(t)\right) = \frac{dx^\mu(t)}{dt}$$

Vector fields which generate a flow for all $t \in \mathbf{R}$ are called complete . It turns out that all vector fields on a manifold $M$ are complete if $M$ is compact . Roughly speaking, “compact” means that $M$ doesn't "stretch to infinity". More precisely, a topological space $M$ is compact if, for any family of open sets covering $M$ there always exists a finite sub-family which also cover $M$. So $\mathbf{R}$ is not compact because the family of sets $\{(-n,n), n \in \mathbf{Z}^+\}$covers $\mathbf{R}$ but has no finite sub-family. Similarly, $\mathbf{R}^n$ is non-compact. However, $\mathbf{S}^n$ and $\mathbf{T}^n$ are compact manifolds.)

### 2.1.4 О векторах, ковекторах и векторных полях

#### Определения и основные свойства вектора

(тут потом куча слов будет)

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(p+\epsilon \mathbf{v}) - f(p)}{\epsilon}$$

$$\frac{\partial (fg)}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} g + f \frac{\partial g}{\partial \mathbf{v}}$$

$$v(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \equiv \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f\left(p+\epsilon v^\alpha \mathbf{e}_\alpha\right) - f(p)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(p) + \epsilon v^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + \mathcal{O}\left(\epsilon^2\right) - f(p)}{\epsilon} = v^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}$$

$$v = v^\beta(x) \frac{\partial}{\partial x^\beta}$$

$$v = v'^\alpha\left(x'\right) \frac{\partial}{\partial x'^\alpha}$$

$$v'^\alpha\left(x'\right) \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} = v^\beta(x) \frac{\partial}{\partial x^\beta} = v^\beta(x) \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} \frac{\partial}{\partial x'^\alpha}$$

$$v'^\alpha\left(x'\right) = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} v^\beta(x) = \Lambda^\alpha_\beta v^\beta(x)$$

Действие вектора на функцию есть

$$X(f) = df(X)$$

(???)

(тут четко пишу, почему так)

**О ковекторном поле** (хз, что это и почему, вообще такой язык не нужен)

ковекторное поле - элемент пространства $\mathrm{Hom}_{C^\infty)\mathbb{R}^n)}(\mathrm{Vect})\mathbb{R}^n), C^\infty)\mathbb{R}^n))$

то есть $\forall \alpha$ и $\forall v \in \mathrm{Vect})\mathbb{R}^n)$ определено $\alpha(v) \in C^\infty)\mathbb{R}^n)$ так что $\forall \in C^\infty)\mathbb{R}^n)$, $\alpha(fv) = f\alpha(v)$

### 2.1.5 On Tensors, Tensor Fields

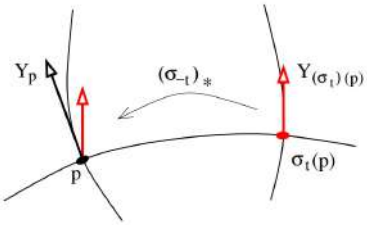
#### 2.3.1 Covectors and One-Forms

#### 2.3.3 Tensors and Tensor Fields

### 2.1.6 On Lie Derivative

#### The Lie Derivative

Suppose that we are given a vector field $X$ on $M$. This generates a flow $\sigma_t : M \to M$, which is a map between manifolds, now with $N = M$. This means that we can use $(\varphi_* Y)^\alpha = Y^\mu \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}$ to generate a pushforward map from $T_p(M)$ to $T_{\sigma_t(p)}(M)$. But this is exactly what we need if we want to compare tangent vectors at neighbouring points. The resulting differential operator is called the Lie derivative and is denoted $\mathcal{L}_X$.



For functions:

$$\mathcal{L}_X f = \lim_{t\to 0}\frac{f(\sigma_t(x)) - f(x)}{t} = \left.\frac{df(\sigma_t(x))}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{dt}\right|_{t=0} = X^\mu(x)\frac{\partial f}{\partial x^\mu} = X(f).\ \frac{dx^\mu}{dt} \equiv X^\mu.$$

For a vector field $Y$

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$$

Proof: $\mathcal{L}_X Y = \lim_{t\to 0}\frac{\left((\sigma_{-t})_* Y\right)_p - Y_p}{t}$ For a coordinate basis $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ we have $\mathcal{L}_X\partial_\mu = \lim_{t\to 0}\frac{(\sigma_{-t})_*\partial_\mu - \partial_\mu}{t}$,

$$(\sigma_{-t})_*\,\partial_\mu = \left(\delta^\nu_\mu - t\frac{\partial X^\nu}{\partial x^\mu} + \ldots\right)\partial_\nu$$

Acting on a coordinate basis, we then have

$$\mathcal{L}_X\partial_\mu = -\frac{\partial X^\nu}{\partial x^\mu}\partial_\nu$$

$$\mathcal{L}_X\left(Y^\mu\partial_\mu\right) = \left(\mathcal{L}_X Y^\mu\right)\partial_\mu + Y^\mu\left(\mathcal{L}_X\partial_\mu\right)$$

$$\mathcal{L}_X\left(Y^\mu\partial_\mu\right) = X^\nu\frac{\partial Y^\mu}{\partial x^\nu}\partial_\mu - Y^\mu\frac{\partial X^\nu}{\partial x^\mu}\partial_\nu$$

(?? досмотрю и додумаю позже это еще!)

The Lie derivative act on a general one-form $\omega = \omega_\mu dx^\mu$ by

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X\omega &= \left(\mathcal{L}_X\omega_\mu\right)dx^\mu + \omega_\nu\mathcal{L}_X\left(dx^\nu\right)\\ &= \left(X^\nu\partial_\nu\omega_\mu + \omega_\nu\partial_\mu X^\nu\right)dx^\mu\end{aligned}$$

(?? пара строчке док-ва, подумаю потом, в принципе похожая идея на Ли от векторов. в теории напишу подробно.) Remember $(\varphi^*\omega)(X) = \omega(\varphi_* X)$ or $(\varphi^*\omega)_\mu = \omega_\alpha\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}$

### Свойства

Формула Картана:

$$L_X = i_X d + d i_X$$

### 2.1.7 On $\mathrm{div}, \mathrm{rot}, \mathrm{grad}, \Box$

**О градиенте** grad

(!!! все указания о нем именно тут! выпишу многое уже очень скоро!!!)

$$\mathrm{grad}\, f = (df)^\sharp$$

где

**О дивергенции** div

(!!! все указания о ней именно тут! выпишу многое уже очень скоро!!!)

**Конструкция дивергенции**

$$d\imath_X\tau = (\operatorname{div} X)\cdot\tau \qquad -\text{def of div}$$

Это оператор, который берет форму наибольшей степени, делает ее степенью меньше, потом снова больше.

$$\operatorname{div} X = *d\left(*X^b\right)$$

$*1 = \mathrm{vol}_g$

Определение дивергенции для риманова многообразия согласовано с определением дивергенции относительно формы объёма как $\operatorname{div} X \,\mathrm{vol}_g = L_X\left(\mathrm{vol}_g\right)$.

Смысл следующий. На $\mathbb{R}^3$ определена нигде не нулевая форма высшей степени - форма объёма $\tau = dx\wedge dy\wedge dz$. Пусть на $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $X = X_x\partial_x + X_y\partial_y + X_z\partial_z$ По векторному полю $X\in\mathrm{Vect}\left(\mathbb{R}^3\right)$ можно построить 2-форму посредством применения внутреннего умножения к форме объёма: $\imath_X\tau$. Из неё мы получим 3-форму (форму высшей степени на $\mathbb{R}^3$) путём взятия внешнего дифференциала $d$. Но, пространство 3-форм на $\mathbb{R}^3$ имеет единственный базисный вектор - форму объёма $\tau$. Значит, полученная нами 3-форма $d_X\tau$ есть некоторая гладкая функция, помноженная на форму объёма. Эту гладкую функцию и назовём дивергенцией $\operatorname{div} X$ векторного поля $X$, то есть

$$d\imath_X\tau = (\operatorname{div} X)\cdot\tau$$

она не зависит от системы координат, потому что определяли мы составляющие дивиргенции в бескоординатном способе

форма потока

$$i_x\tau = X_x dy\wedge dz + X_y dz\wedge dx + X_z dx\wedge dy$$

**О другом про дивергенцию** дивергенция на искривленном многообразии (???) через звездочку ходжа он попробует там.

В координатах:

$$\begin{aligned}\imath_X\tau =& \tau(X) = dx\wedge dy\wedge dz\left(X_x\partial_x + X_y\partial_y + X_z\partial_z\right) = \\ =& X_x dx\wedge dy\wedge dz\left(\partial_x\right) + X_y dx\wedge dy\wedge dz\left(\partial_y\right) + X_z dx\wedge dy\wedge dz\left(\partial_z\right) = \\ =& X_x dy\wedge dz + X_y dz\wedge dx + X_z dx\wedge dy\end{aligned}$$

Дифференциал получившейся 2-формы мы уже находили (см. формулу для $d\omega_E$). Значит

$$d\tau_X\tau = \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right)\tau \quad\Rightarrow\quad \operatorname{div} X = \partial_x X_x + \partial_y X_y + \partial_z X_z \text{ or } \operatorname{div} X = \partial_\alpha X^\alpha$$

**Инвариантность дивергенции только при заменах координат с постоянным якобианом (??)** Заметим, что внутреннее произведение и дифференциал по построению никак не зависят от выбора системы координат. Значит, от выбора системы координат зависит только форма объёма. (????)

Выясним, при каких заменах координат дивергенция не меняется.

Как мы покажем в параграфе 3.4, форма высшей степени на $\mathbb{R}^n$ при криволинейной замене координат преобразуется как

$$\tau' = \det\left(\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\right) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \equiv \det \Lambda^{\alpha}_{\beta} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

где $\tau = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n, \det \Lambda^{\alpha}_{\beta} = \mathcal{J}_{\varphi}-$ якобиан замены.

Поэтому

$$d\imath_X \tau' = d\left(\mathcal{J}_{\varphi} \imath_X \tau\right) = d\mathcal{J}_{\varphi} \wedge \imath_X \tau + \mathcal{J}_{\varphi} d_X \tau$$

В силу произвольности векторного поля $X$ получаем, что дивергенция не меняется лишь при таких заменах координат, для которых

$$d\mathcal{J}_{\varphi} = 0, \quad \mathcal{J}_{\varphi} = \text{ const.}$$

(?? пример тут неплохо бы вставить.)

При инверсии координатных осей $x^{\alpha} \mapsto x'^{\alpha} = -x^{\alpha}$, дивергенция векторного поля $X$ не изменяется.

Как это согласуется с формулой (2.52)?

(я хз, но и не интересно в этом копаться)

**О роторе** rot

$$\operatorname{rot} X = \left(*d\left(X^b\right)\right)^{\sharp},$$

(тут еще раз пояснение операций!)

(потом допишу, многое можно указать будет, пока не до него)

**On Laplacian** $\triangle$

We can combine $d$ and $d^{\dagger}$ to construct the Laplacian, $\triangle : \Lambda^p(M) \to \Lambda^p(M)$, defined as

$$\triangle = \left(d + d^{\dagger}\right)^2 = dd^{\dagger} + d^{\dagger}d$$

(??? что за даггер???)

Example: by acting on functions $f$, we have $d^{\dagger}f = 0$ (because $\star f$ is a top form so $d \star f = 0$) so,

$$\begin{aligned}
\triangle(f) &= -\star d \star \left(\partial_{\mu} f dx^{\mu}\right) \\
&= -\frac{1}{(n-1)!} \star d\left(\left(\partial_{\mu} f\right) g^{\mu\nu} \sqrt{|g|} \epsilon_{\nu\rho_1\ldots\rho_{n-1}} dx^{\rho_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\rho_{n-1}}\right) \\
&= -\frac{1}{(n-1)!} \star \partial_{\sigma}\left(\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_{\mu} f\right) \epsilon_{\nu\rho_1\ldots\rho_{n-1}} dx^{\sigma} \wedge dx^{\rho_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\rho_{n-1}} \\
&= -\star \partial_{\nu}\left(\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_{\mu} f\right) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \\
&= -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_{\nu}\left(\sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_{\mu} f\right)
\end{aligned}$$

There is a particularly nice story involving $p$-forms $\gamma$ that obey

$$\triangle \gamma = 0$$

Such forms are said to be harmonic. An harmonic form is necessarily closed, meaning $d\gamma = 0$, and co-closed, meaning $d^{\dagger}\gamma = 0$. This follows by writing $\langle \gamma, \Delta\gamma \rangle = \langle d\gamma, d\gamma \rangle + \left\langle d^{\dagger}\gamma, d^{\dagger}\gamma \right\rangle = 0$ and noting that the inner product is positive-definite.

### 2.1.8 О вращениях (!?)

(соберу потом про это всё тут, мб еще какая-то теория добавится.)

#### Конструкция вращений

(потом пропишу нормально описание)
Рассмотрим типичные вращения

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta$$

$$\Lambda(\phi) = \mathbf{1} - \mathrm{i} s \cdot \phi, \quad \phi \to 0$$

$$s^\alpha = \mathrm{i} \cdot \lim_{\phi \to 0} \frac{\partial \Lambda(\phi)}{\partial \phi^\alpha}$$

$$v'^\alpha(x) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} v^\beta\left(x'\right) = \left[\delta^\alpha_\beta + \mathrm{i}\left(s^\gamma\right)^\alpha_\beta \phi_\gamma\right] v^\beta\left(x'\right) = \left[\delta^\alpha_\beta + \mathrm{i}\left(s^\gamma\right)^\alpha_\beta \phi_\gamma\right] \cdot \left[v^\beta(x) + \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\lambda} \delta x^\lambda\right]$$

$$\left(\hat{\ell}^\gamma\right)^\alpha_\beta = -\mathrm{i} \delta^\alpha_\beta \epsilon_{\lambda\mu\nu} x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

$$v'^\alpha(x) = v^\alpha(x) + \mathrm{i}\left(\hat{\ell}^\gamma + s^\gamma\right)^\alpha_\beta \phi_\gamma v^\beta(x)$$

$$\delta v^\alpha = \mathrm{i}\left(\hat{j}^\gamma\right)^\alpha_\beta \phi_\gamma v^\beta(x), \quad \hat{j} = \hat{\ell} + s$$

#### Вращения в пространстве Минковского

(потом соберу их)

#### О применении вращений векторных полей

(указание на 1/2 страницы)

## 2.2 Дифференциальные формы в двух словах

(??? не знаю, что писать, по идее из большого учебника по диффгему суть будет.)

### 2.2.1 On Integration of Diff Forms

#### On Stokes' Theorem

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega,$$

где $\partial M$ есть граница многообразия $M$.

### 2.2.2 О когомологиях и гармонических формах (??)

#### Суть когомологий де Рама (???)

(напишу позже.)

## 2.3 On Riemannian, Pseudo-Riemannian Geometry

### 2.3.1 О криволинейных координатах

(пока раздел, а там посмотрим)

### 7.1 Определение криволинейной системы координат

Пусть $\Omega$ - некоторая область в $\mathbb{R}^n$, и $(x^1,\dots,x^n)$ - стандартные координаты в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим еще один экземпляр $\mathbb{R}^n$ (мы его обозначим через $\mathbb{R}^n_1$) со стандартными координатами $(y^1,\dots,y^n)$. Система из $n$ функций $y^i = y^i\left(x^1,\dots,x^n\right), i = 1,\dots,n$, заданных на $\Omega$, называется непрерьвной системой координат, если отображение $\psi : \Omega \to \mathbb{R}^n_1$, заданное в виде

$$\begin{cases} y^1 = y^1\left(x^1,\dots,x^n\right), \\ \dots \\ y^n = y^1\left(x^1,\dots,x^n\right) \end{cases}$$

Если все функции $x^i\left(y^1,\dots,y^n\right)$ - гладкие, то координаты $y^i$ называются гладкими. Отметим, что из гладкости системы координат не вытекает гладкость отображения $\psi$ (достаточно рассмотреть пример замены координат на прямой $\mathbb{R}^1$, заданное в виде $x = y^3$; в точке $y = 0$ обратное отображение, т.е. отображение $\phi$, гладким не является).

Для гладкой системы координат определена матрича Якоби J, составленная из частных производных $\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)$, и якобиан $|J|$, равный определителю матрицы Якоби.

Гладкая система координат называется регулярной, если ее якобиан всюду отличен от нуля, иными словами, матрица Якоби всюду невырождена. Из теоремы об обратной функции вытекает, что для регулярной криволинейной системы координат отображение $\psi$ также гладкое, и его матрица Якоби равна $J^{-1}$, поэтому, в частности, матрица Якоби отображения $\psi$ невырождена.

Пусть $(y^1_0,\dots,y^n_0)$ - криволинейные координаты некоторой точки $P \in \Omega$. Для каждого $i$ рассмотрим кривую $\delta_i(t)$, определенную для $t$, близких к $y^i_0$ так:

$$\begin{cases} x^1(t) = x^1\left(y^1_0,\dots,y^{i-1}_0, t, y^{i+1}_0,\dots,y^n_0\right), \\ \dots \\ x^n(t) = x^n\left(y^1_0,\dots,y^{i-1}_0, t, y^{i+1}_0,\dots,y^n_0\right). \end{cases}$$

Кривая $\delta_i(t)$ называется $i$-ой координатной кривой, проходящей через точку $P$. Отметим, что если координаты регулярны, то кривая $\delta_i(t)$ также регулярна (докажите).

Аналогично определим $k$-мерные координатные поверхности. Для этого выберем $k < n$ индексов $(i_1,\dots,i_k)$ и для $t^{i_p}$, близких к $y^{i_p}_0$, зададим параметрически $k$-мерную поверхность так:

$$\begin{cases} x^1\left(t^{i_1},\dots,t^{i_p}\right) = x^1\left(y^1_0,\dots,t^{i_1},\dots,t^{i_p},\dots,y^n\right), \\ \dots \\ x^n\left(t^{i_1},\dots,t^{i_p}\right) = x^n\left(y^1_0,\dots,t^{i_1},\dots,t^{i_p},\dots,y^n\right). \end{cases}$$

Если $k = n - 1$, то $k$-мерные координатные поверхности называются ординатными гиперповерхностями.

### 7.4.1 Закон изменения компонент метрики при замене координат

Посмотрим, как меняются компоненты метрики $g_{ij}$ при замене регулярных координат $y^i$ на регулярные координаты $z^i$. Обозначим через $h_{ij}$ компоненты евклидовой метрики в координатах $z^i$. По определению, $h_{ij} = \langle \partial_{z^i}, \partial_{z^j} \rangle$. Имеем

$$h_{ij} = \langle \partial_{z^i}, \partial_{z^j} \rangle = \left\langle \sum_k \frac{\partial y^k}{\partial z^i} \partial_{y^k}, \sum_l \frac{\partial y^l}{\partial z^j} \partial_{y^l} \right\rangle =$$
$$\sum_{k,l} \frac{\partial y^k}{\partial z^i} \frac{\partial y^l}{\partial z^j} \left\langle \partial_{y^k}, \partial_{y^l} \right\rangle = \sum_{k,l} \frac{\partial y^k}{\partial z^i} \frac{\partial y^l}{\partial z^j} g_{kl}.$$

Иными словами, если $G = (g_{ij})\,, H = (h_{ij})$, то $H = J(y,z)^T G J(y,z)$, где $(\cdot)^T$ обозначает транспонирование матрицы. Снова отметим, что мы получили точно такую же формулу, как в теории поверхностей.

## 7.6 Стереографические координаты на сфере

Для простоты, рассмотрим двумерную сферу радиуса $R$. Пусть $(x, y, z)$ - стандартные координаты в $\mathbb{R}^3$, тогда сфера $S^2$ задается уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Обозначим через $N$ северный полюс сферы $S^2$, т.е. точку с координатами $(0, 0, R)$, а через $S$ - южный полюс, т.е. точку с координатами $(0, 0, -R)$. Пусть $\Pi-$ координатная плоскость $z = 0$. Зададим отображение

$$\nu : S^2 \backslash \{N\} \to \Pi$$

следующим образом. Для каждой точки $P \in S^2 \backslash \{N\}$ рассмотрим точку $P'$ пересечения прямой $NP$ с плоскостью $\Pi$. Положим по определению $\nu(P) = P'$. Отображение $\nu$ называется стереографической проекиией из северного полюса $N$. Отметим, что аналогично можно определить стереографическую проекцию из южного полюса.

Стереографическая проекция $\nu$ задает координаты на сфере $S^2$ без северного полюса. Эти координаты называются стереографическими. Вычислим в явном виде стереографические координаты.

Итак, в стереографических координатах $(u, v)$ сфера $S^2$ радиуса $R$ без северного полюса $N$ записывается так:

$$\left( x = \frac{2R^2 u}{u^2 + v^2 + R^2}, y = \frac{2R^2 v}{u^2 + v^2 + R^2}, z = R\frac{u^2 + v^2 - R^2}{u^2 + v^2 + R^2} \right),$$

или, в полярных координатах $(\rho, \varphi)$, так:

$$\left( x = \frac{2R^2 \rho \cos\varphi}{\rho^2 + R^2}, y = \frac{2R^2 \rho \sin\varphi}{\rho^2 + R^2}, z = R\frac{\rho^2 - R^2}{\rho^2 + R^2}. \right)$$

Теорема 7.1 Индуцированнал метрика $d\sigma^2$ на сфере $S^2$ радиуса $R$ в стереографических координатах $(u, v)$ или $(\rho, \varphi)$ имеет вид:

$$d\sigma^2 = \frac{4R^4}{(u^2 + v^2 + R^2)^2} \left( du^2 + dv^2 \right) = \frac{4R^4}{(\rho^2 + R^2)^2} \left( d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 \right)$$

Утверждение 7.1 Предположим, ито в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ заданы две римановых метрики $ds^2$ u $d\sigma^2$, отличающиеся на положительную функиию $\lambda^2$, т.е. $d\sigma^2 = \lambda^2 ds^2$. Тогда угль между парой пересекающихся кривых, вычисленные по отношению к обеим этим метрикам, одинаковы.

Следствие 7.1 Стереографическая проекиия сохраняет угль между кривылми на сфере $S^2$.

Добавление 7.3. Нормальные координаты. С помощью геодезических мы определим на поверхности так называемые нормальные координаты, которые оказываются удобными для многих вычислений. Итак, пусть $M = \{r : U \to \mathbb{R}^{n+1}\}$ - регулярная поверхность, заданная в параметрическом виде, $P$ - некоторая точка на $M$, и $T_PM$ - касательное пространство к поверхности $M$ в точке $P$. Пусть $V$ - произвольный касательный вектор из $T_PM$. Тогда, в силу следствия 6.1, существует и единственна геодезическая $\xi_V(s)$, удовлетворяющая начальным условиям $\xi_V(0) = P$, и $\dot{\xi}_V(0) = V$ (здесь точкой обозначено дифференцирование по $s$). Пусть $a$ - произвольное вещественное число. Тогда для вектора $aV$ существует своя такая геодезическая $\xi_{aV}(s)$. Оказывается геодезические $\xi_V(s)$ и $\xi_{aV}(s)$ отличаются на перепараметризацию. Лемма 7.1 В сделанных выше обозначениях,

$$\xi_{aV}(s) = \xi_V(as)$$

в общей области определения.

Пусть в некоторой нормальной окрестности точки $P$ фиксированы нормальные координаты. Рассмотрим в касательном пространстве $T_PM$ сферу $S^n(\varepsilon)$ радиуса $\varepsilon$, целиком лежащую в нормальной окрестности точки $0 \in T_PM$. Образ $\exp_P(S^n(\varepsilon))$ сферы $S^n(\varepsilon)$ при экспоненциальном отображении называется геодезической сферой с иентром в точке $P$ и радиуса $\varepsilon$. Имеет место следующее интересное утверждение.

Предложение 7.2 (Лемма Гаусса) Пусть $Q$ - произвольная точка геодезической сферы $\Sigma$ с иентром в точке $P$. Тогда геодезическая, соединяющая точки $P$ и $Qu$ челиком лежащая в нормальной окрестности точки $P$, – единственна. Более того, эта геодезическая приходит на геодезическую сферу $\Sigma$ под прямым углом. Последнее означает, ито геодезическая перпендикулярна любой регулярной кривой, проходящей через $Q$ и лежащей в $\Sigma$.

Добавление 7.4. Полугеодезические координаты на двумерной поверхности. Нормальные координаты, которые мы определили в предыдущем разделе, являются весьма частным случаем так называемых координат Ферми. Координаты Ферми мы определим в следующем семестре для подмногообразия в римановом многообразии, а сейчас ограничимся еще одним частным случаем - так называемыми полугеодезическими координатами на двумерной поверхности.

Итак, пусть $M = \{r : U \to \mathbb{R}^3\}$ - регулярная двумерная поверхность, и $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ регулярная кривая на $M$. Пусть $E(t)$ - гладкое касательное векторное поле единичной длины, заданное в точках кривой $\gamma$ и перпендикулярное вектору скорости $\dot{\gamma}(t)$ в точке $\gamma(t)$. Построим отображение некоторой окрестности отрезка $I \times \{0\}$ в прямом произведении $I \times \mathbb{R}^1$ в поверхность $M$. В каждой точке $\gamma(t)$ кривой $\gamma$ мы построим геодезическую $\nu_t(s)$, определенную на некотором интервале $[-s_0(t), s_0(t)]$, и удовлетворяющую начальным условиям $\nu_t(0) = \gamma(t), \nu_t'(0) = E(t)$. Точке $(t, s) \in I \times \mathbb{R}^1$ мы поставим в соответствие точку $\nu_t(s)$ поверхности $M$. Построенное отображение мы обозначим через $\exp_\gamma$ и назовем экспоненииальным отображением нормалей вдоль $\gamma$.

Предложение 7.3 (Обобщенная лемма Гаусса) Полугеодезические координаты в окрестности регулярной натурально параметризованной кривой на неособой двумерной поверхности ортогональныl.

### 2.3.2 О первой фундаментальной форме

#### Параметрические поверхности

#### 3.2 Поверхности-графики и неявные поверхности

#### 3.3 Определение регулярной поверхности

#### 3.4 Отображения регулярной поверхности

#### 3.5 Кривые, координатные линии, касательное пространство и канонический репер на регулярной поверхности

#### 3.6 Индуцированная метрика или первая фундаментальная форма регулярной поверхности

#### 3.7 Изометрии поверхностей

### 2.3.3 О второй фундаментальной форме

#### 4.1 Определение второй фундаментальной формы регулярной поверхности

Предложение 4.1 Соотношение $\mathfrak{q}(\xi) = \langle \ddot{\gamma}, N \rangle, \xi \in T_P M$, корректно определяет в произвольной точке $P$ гиперповерхности $M$ некоторую квадратичную форму q на касательном пространстве $T_P M$. Если $(u^1, \ldots, u^{n-1})$ - координаты на $M$, то матрица квадратичной формы $\mathfrak{q}$ в базисе $(\partial_{u^i})$ имеет вид $q_{ij} = \langle r_{u^i u^j}, N \rangle$.

Определение. Квадратичная форма q на касательном пространстве $T_P M$ называется второй фундаментальной формой или второй квадратичной формой гиперповерхности $M$ в точке $P$ (по отношению к нормали $N$).

Замечание. В отличие от первой фундаментальной формы поверхности, вторая фундаментальная форма, вообще говоря, не обязана быть ни невырожденной, ни положительно определенной.

Замечание. Вторую фундаментальную форму также часто записывают в дифференциальном виде так:

$$dq^2 = \sum_{ij} q_{ij} du^i du^j$$

Пример. Пусть двумерная гиперповерхность задана в виде графика $z = f(x, y)$. Тогда соответствующее параметрическое представление имеет вид

$$r = (x, y, f(x, y)), \quad r_x = (1, 0, f_x), \quad r_y = (0, 1, f_y),$$
$$r_{xx} = (0, 0, f_{xx}), \quad r_{xy} = (0, 0, f_{xy}), r_{yy} = (0, 0, f_{yy}),$$
$$N = \frac{[r_x, r_y]}{\|[r_x, r_y]\|} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}},$$

и, значит, матрица второй фундаментальной формы в координатах $(x, y)$ выглядит так:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

#### 4.2 Геометрический смысл второй формы - кривизны плоских сечений

Пусть $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ - произвольная проходящая через $P \in M$ двумерная аффинная плоскость, не лежащая в $T_P M$. Несложно показать, что $\Pi$ пересекает поверхность $M$ около точки $P$ по некоторой регулярной кривой $\gamma$. Каждая такая кривая называется плоским сечением, проходящим через $P$. Если плоскость $\Pi$ проходит через нормаль $N$ к поверхности $M$ в точке $P$, то плоское сечение $\gamma$ называется нормальным. Если $t-$

произвольный параметр на $\gamma$, такой что $\gamma(t_0) = P$, то будем говорить, что сечение $\gamma$ проведено в направлении вектора $\dot{\gamma}(t_0)$.

Теорема 4.1 (Об отношении форм) Пусть $\xi \in T_PM-$ произвольный ненулевой вектор, $\gamma$ - плоское сечение, проведенное через $P$ в направлении $\xi$,, $k$ - кривизна сечения $\gamma$ в точке $P$. Тогда или $k$ и $\mathfrak{q}(\xi)$ одновременно равнь нулю, или

$$k\cos\theta = \frac{\mathfrak{q}(\xi)}{\mathfrak{G}(\xi)},$$

где $\theta$ - угол между главной нормалью $m\kappa$ сечению $\gamma$ и нормалью $N\kappa$ поверхности $M$ в точке $P$ (напомним, ито вторая фундаментальная форма вычисляется по отношению $\kappa N$).

Следствие 4.2 Значение q $(\xi)$ второй фундаментальной формь поверхности $M$ на единичном векторе $\xi \in T_PM$ равно плюс или минус кривизне $k$ плоского нормального сечения $\gamma$, проведенного через $P$ в направлении $\xi$. При этом знак "плюс" вьбирается тогда и только тогда, когда $N$ является главной нормалью сечения $\gamma$. В частности, $k = |\mathfrak{q}(\xi)|$.

Обозначим через $\gamma_n$ плоское нормальное сечение, проведенное через $P$ в направлении $\xi$, и пусть $k_n$ - кривизна сечения $\gamma_n$ в точке $P$. Приводимое ниже следствие из теоремы 4.1 называется теоремой Менье.

Следствие 4.3 (Теорема Менье) Пусть $\xi \in T_PM$ - ненулевой вектор, а $\gamma$ и $\gamma_n$ - некоторое плоское сечение и плоское нормальное сечение, проведенньe через $P$ в одном и том же направлении $\xi$. Тогда или одновременно $k = 0$ и $k_n = 0$, или $k_n = k\cos\theta$, где $\theta-$ угол между главными нормалями и к сечениям $\gamma$ и $\gamma_n$ соответственно.

### 4.3 Главные кривизны и главные направления

Предложение 4.2 Пусть в линейном пространстве $\mathbb{R}^n$, в котором фиксирован произвольный базис, задано скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ с помощью симметричной невьрожденной положительно определенной матриць G. Пусть, кроме того, задана квадратичнал форма q. Тогда в $\mathbb{R}^n$ сущеествует базис $(e_i)$, ортонормальньй относительно указанного скалярного произведения, и такой что форма q имеет в нем диагональный вид. При этом, если $Q$ - эта матрица бормы q в исходном базисе, то базис $(e_i)$ и соответствующие собственнье числа формь $Q$ относительно формь $G$ могут быть найдень из следующего характеристического уравнения:

$$\det(Q - \lambda G) = 0$$

Определение. Пусть $G$ и $Q$ - матрицы первой и второй фундаментальных форм регулярной гиперповерхности $M$ в некоторой ее точке $P$. Корни уравнения $\det(Q - \lambda G) = 0$ называются главными кривизнами поверхности $M$ в точке $P$. Если $\lambda_0$ - главная кривизна, то векторы из $T_PM$ соответствующе нетривиальным решениям линейного уравнения $(Q - \lambda_0 G)\, X = 0$, которые, очевидно, существуют, называются главными направлениями поверхности $M$ в точке $P$.

Следствие 4.4 Пусть $P$ - произвольная точка регулярной гиперповерхности $M$. Тогда в касательном пространстве $T_PM$ можно выбрать такой базис, что первал и вторал фундаментальные формы поверхности в этом базисе будут иметь вид

$$ds^2 = \sum_i \left(du^i\right)^2, \quad dq^2 = \sum_i \lambda_i \left(du^i\right)^2$$

соответственно. При этом, указанный базис состоит из векторов главных направлений, а числа $\lambda_i$ являются главньли кривизнами поверхности $M$ в точке $P$.

Из следствия 4.2 вытекает следующий результат, поясняющий геометрический смысл главных кривизн.

Следствие 4.5 Главная кривизна $\lambda_i$ поверхности $M$ в точке $P$ равна, $c$ точностью до знака, кривизне нормального сечения поверхности в точке P вдоль соответствующего главного направления.

Кривизна $k_n(V)$ нормального сечения поверхности в точке $P$ в направлении $V$ может быть вычислена следующим образом:

$$\pm k_n(V) = dq^2(V,V) = \sum_i \lambda_i \left(\cos\varphi_i\right)^2$$

Например, в R3: Следствие 4.6 (Формула Эйлера) Пусть $M^2-$ двумерная регулярная поверхность в $\mathbb{R}^3$, и $P$ - точка из $M$. Тогда кривизна $k_n(V)$ нормального сечения в точке $P$ в направлении $V \in T_P M$ может быть вычислена так:

$$\pm k_n(V) = \lambda_1(\cos\varphi)^2 + \lambda_2(\sin\varphi)^2$$

где $\lambda_1, \lambda_2$ - главнье кривизны поверхности в точке $M$, а $\varphi-$ - уголмежду вектором $V$ и главным направлением, соответствующим главной кривизне $\lambda_1$.

Следствие 4.7 I лавнье кривизны и главнье направления двумерной регулярной поверхности в точке $P$ соответствуют наибольшему и наименьшему значениям функиии $\lambda_1(\cos\varphi)^2 + \lambda_2(\sin\varphi)^2$, значение которой равно кривизне нормального сечения, взятой со знаком $\langle m, N >$, где $m$ - главная нормаль этого сечения, а $N$ - та нормаль $\kappa$ поверхности, относительно которой определена ее вторая фундаментальная форма.

## 4.4 Средняя и гауссова кривизна гиперповерхности

В предыдущем пункте мы в каждой точке регулярной гиперповерхности $M \subset \mathbb{R}^n$ определили базис из главных направлений и главные кривизны. Однако, как и в линейной алгебре, иногда бывает полезно изучать инвариантные функции главных кривизн, а не сами главные кривизны. Мы рассмотрим две такие функции - так называемые среднюю и гауссову кривизны.

Определение. Сумма главных кривизн поверхности $M$ в точке $P$ называется средней кривизной поверхности $M$ в точке $P$ и обозначается через $H(P)$. Произведение главных кривизн называется гауссовой кривизной и обозначается через $K(P)$.

Утверждение 4.2 Средняя кривизна и гауссова кривизна поверхности не зависят от выбора параметризачии поверхности. При этом, если $G$ и - матриць первой и второй квадратичных форм поверхности в точке $P$, то средняя и гауссова кривизны могут быть вычислены так:

$$H(P) = \operatorname{trace}\left(G^{-1}Q\right), \quad K(P) = \det\left(G^{-1}Q\right) = \frac{\det Q}{\det G}$$

Знак гауссовой кривизны двумерной поверхности имеет простой геометрический смысл.

Предложение 4.3 Пусть $P$ - произвольная точка двумерной регулярной поверхности $M \subset \mathbb{R}^3$. Если в точке $P$ гауссова кривизна $K(P)$ поверхности $M$ положительна, то достаточно малая окрестность точки $P$ поверхности челиком лежит в одном из двух полупространств, определяемьх касательной плоскостью $T_P M$, рассматриваемой как аффинная гиперплоскость, проходящал через точку $P$ пространства $\mathbb{R}^3$. Если же $K(P) < 0$, то это не так, а именно, любая окрестность точки $P$ пересекается с внутренностью обоих полупространств.

Геом смысл средней кривизны: Предложение 4.4 Пусть $P$ - произвольная точка гиперповерхности $M \subset \mathbb{R}^n, uN$ - нормаль $\kappa M$ в точке $P$. Пусть $v_1, \ldots, v_{n-1}$ - произвольный набор попарно ортогональных единичных векторов из $T_P M$. Обозначим через $k_i$ кривизну нормального сечения поверхности $M$ вдоль направления $v_i$, умноженную на знак $\langle m_i, N\rangle$, где $m_i-$ главная нормаль этого сечения. Тогда сумма чисел $k_i$ равна средней кривизне поверхности $M$ в точке $P$.

## Основные примеры

Добавление 4.5. Средняя и гауссова кривизны двумерной поверхности. Пусть двумерная поверхность задана параметрически, $(u, v)$ - координаты на этой поверхности, и пусть метрика $ds^2$ и вторая форма $d\sigma^2$ имеют вид:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \quad d\sigma^2 = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2.$$

Отметим, что такие буквенные обозначения для компонент первой и второй фундаментальных форм являются традиционными в классической теории поверхностей.

Вернемся к нашим вычислениям. Матрица, обратная к матрице метрики, имеет вид:

$$\frac{1}{EG - F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$$

поэтому

$$H = \frac{GL - 2FM + EN}{EG - F^2}, \quad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

Пример. Пусть поверхность задана графиком функции $z = f(x, y)$. Тогда, как мы уже вычисляли, первая и вторая фундаментальные формы имеют вид:

$$G = \begin{pmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix},$$

поэтому

$$G^{-1} = \frac{1}{1 + f_x^2 + f_y^2}\begin{pmatrix} 1 + f_y^2 & -f_x f_y \\ -f_x f_y & 1 + f_x^2 \end{pmatrix}$$

и, значит, средняя и гауссова кривизны, в соответствие с утверждением 4.2, имеют вид:

$$H = \frac{\left(1 + f_y^2\right) f_{xx} - 2 f_x f_y f_{xy} + \left(1 + f_x^2\right) f_{yy}}{\left(1 + f_x^2 + f_y^2\right)^{3/2}}, \quad K = \frac{f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2}{\left(1 + f_x^2 + f_y^2\right)^2}.$$

Пример. Пусть $M = S^2$ - стандартная сфера радиуса $R$. В качестве $N$ выберем внутренние нормали к $S^2$, т.е. нормали, направленные в противоположную сторону по отношению к соответствующим радиус-векторам. Так как каждое плоское нормальное сечение является окружностью радиуса $R$, кривизна каждого такого сечения равна $1/R$. Поэтому кривизны главных нормальных сечений также равны $1/R$, и, значит, средняя кривизна равна $2/R$, а гауссова - равна $1/R^2$.

## О другом про вторую форму и с ней связанное

**4.5 О теореме Бонне** Теорема 4.2 (Бонне, 1867) Если заданнье на $\Omega$ положительно определеннал квадратичнал форма $g$ и произвольная квадратичнал форма q удовлетворяют условиям Петерсона-Кодачии, то существует единственная (с точностью до движения объемлющего пространства) регулярная поверхность на $\Omega$, такая что ее первая квадратичная форма совпадает с g, а вторая квадратичная форма совпадает с q.

(там еще есть отсылки на это)

**О теореме Лапласа-Пуассона** Добавление 4.4. Теорема Лапласа-Пуассона. Понятие средней кривизны двумерной поверхности было впервые определено Томасом Юнгом (1805), а затем независимо Пьером Симоном Лапласом (1806). Лаплас изучал форму поверхности раздела двух физических сред, находящихся в равновесии, и выяснил что средняя кривизна поверхности раздела пропорциональна разности давлений в разделяемых средах. Этот результат в механике сплошной среды называется теоремой Лапласа. Коэффициент пропорциональности называется коэффииентом поверхностного натяэения.

Теорема 4.3 (Лаплас-Пуассон) Средняя кривизна поверхности раздела двух равновесных физических сред пропориональна разности давлений в этих средах вблизи поверхности раздела.

### 2.3.4 On Metric

#### О метрике по Иванову Тужилину

$$\langle v, w\rangle = g_{ij}v^i w^j$$

Утверждение 8.1 Определенное выше скалярное произведение не зависит от выбора координат.

Рассмотрим пример псевдоримановой метрики в $\mathbb{R}^n$, заданной в стандартных координатах в виде

$$ds^2 = -\sum_{i=1}^{s}\left(dx^i\right)^2 + \sum_{j=s+1}^{n}\left(dx^j\right)^2.$$

Такая метрика называется псевдоевклидовой метрикой индекса s. Эта метрика порождает в каждом касательном пространстве $T_P\mathbb{R}^n$ псевдоскалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle_s$: если $v = (v^1,\dots,v^n)$ и $w = (w^1,\dots,w^n)$ - два вектора из $T_P\mathbb{R}^n$, то

$$\langle v, w\rangle_s = -\sum_{i=1}^{s} v^i w^i + \sum_{j=s+1}^{n} v^j w^j$$

#### О пространстве Минковского

(пока по Иванову Тужилину, вообще, важное указание, с теорией поля потом согласую)

Псевдоевклидово расстояние между точками $P$ и $Q$, т.е. величина, равная $\sqrt{\langle P-Q, P-Q\rangle_1}$, называется пространственно-временныл интервалом между событиями $P$ u $Q$; нулевые векторы, т.е. векторы $V$, такие что $\langle V, V\rangle_1 = 0$, называются световыли (поэтому изотропный конус называется световым), векторы $P$, для которых $\langle P, P\rangle_1 < 0$, называются времениподобными, а векторы $P$, для которых $\langle P, P\rangle_1 > 0-$ пространственноподобньми.

Пример. Рассмотрим в пространстве Минковского $\mathbb{R}_1^{n+1}$ псевдосферу $S_1^n$ чисто мнимого радиуса $iR$. По определению, псевдосфера $S_1^n$ задается уравнением

$$-\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 + \cdots + \left(x^{n+1}\right)^2 = -R^2.$$

Ясно, что псевдосфера $S_1^n$ состоит из двух компонент, разделенных координатной гиперплоскостью $x^1 = 0$ (скажем, при $n = 2$ это обычный двуполостный гиперболоид). Точка $N = (R, 0, \dots, 0)$ называется северныйм полюсом псевдосферы, а точка $S = (-R, 0, \dots, 0)$ - южным полюсом. Определим стереографическую проекиию $\sigma$ половинки псевдосферы $S_1^n$, однозначно определенной неравенством $x^1 > 0$, в координатную плоскость $x^1 = 0$ так. Произвольную точку $P$ из $S_1^n$ соединим с южным полюсом отрезком $SP$. Этот отрезок, очевидно, пересекает плоскость $x^1 = 0$ в некоторой точке, которую мы обозначим через $\sigma(P)$. Определим отображение $\sigma$, положив $\sigma : P \mapsto \sigma(P)$. Если мы обозначим через $(u^1, \dots, u^n)$ стандартные координаты в плоскости $x^1 = 0$ (для точек плоскости $x^1 = 0$ по определению положим $x^i = u^{i-1}, i = 2, \dots, n+1$). В этих координатах стереографическая проекция псевдосферы выглядит так.

Лемма 8.1 *В сделанных выше обозначениях, если* $(u^1, \dots, u^n)-$ точки $\sigma(P)$, то координаты $(x^1, \dots, x^{n+1})$ точки $P$ могут быть вычислены так:

$$x^1 = R\frac{R^2 + \sum_i (u^i)^2}{R^2 - \sum_i (u^i)^2},$$
$$x^{i+1} = \frac{2R^2u^i}{R^2 - \sum_i (u^i)^2}, \quad i = 1, \dots, n$$

Утверждение 8.2 Псевдосфера чисто мнимого радиуса $iR$ с чентром в начале координат в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{n+1}_1$ является пространственно подобной поверхностью. Индуцированная на ней первая квадратичная форма в координатах стереографической проекиии (соответствующая риманова метрика в шаре радиуса $R$) имеет вид:

$$ds^2 = \frac{4R^4}{\left(R^2 - \sum_i (u^i)^2\right)^2} \sum_i \left(du^i\right)^2.$$

Открытый шар радиуса $R$ в $\mathbb{R}^n$ с метрикой

$$ds^2 = \frac{4R^4}{\left(R^2 - \sum_i (u^i)^2\right)^2} \sum_i \left(du^i\right)^2$$

называется шаром Пуанкаре (при $n = 2$ - кругом Пуанкаре).

### 3.1.1 Riemannian Manifolds

### 3.1.2 Lorentzian Manifolds

### 3.1.3 The Joys of a Metric

### 3.1.4 A Sniff of Hodge Theory

### 2.3.5 On Connections, Covariant Derivative

### 3.2.1 The Covariant Derivative

(абзац про суть ее!)

Компоненты связности - по определению это коэффициенты в выражении

$$\nabla_{e_\rho} e_\nu = \Gamma^\mu_{\rho\nu} e_\mu.$$

В случае связности Леви-Чивиты они называются символами Кристоффеля.

$$A^i{}_{;l} = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kl} A^k$$
$$A_{i;l} = \frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma^k_{il} A_k$$

$$A^{ik}{}_{;l} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ml} A^{mk} + \Gamma^k_{ml} A^{im}$$

$$A^i_{k;l} = \frac{\partial A^i_k}{\partial x^l} - \Gamma^m_{kl} A^i_m + \Gamma^i_{ml} A^m_k$$
$$A_{ik;l} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma^m_{il} A_{mk} - \Gamma^m_{kl} A_{im}$$

Или в общем виде

$$T^{\mu_1 \dots \mu_p}{}_{\nu_1 \dots \nu_q;\rho} = T^{\mu_1 \dots \mu_p}{}_{\nu_1 \dots \nu_q,\rho} + \Gamma^{\mu_1}_{\rho\sigma} T^{\sigma\mu_2 \dots \mu_p}{}_{\nu_1 \dots \nu_q} + \dots + \Gamma^{\mu_p}_{\rho\sigma} T^{\mu_1 \dots \mu_{p-1}\sigma}{}_{\nu_1 \dots \nu_q} - \\ - \Gamma^{\sigma}_{\rho\nu_1} T^{\mu_1 \dots \mu_p}{}_{\sigma\nu_2 \dots \nu_q} - \dots - \Gamma^{\sigma}_{\rho\nu_q} T^{\mu_1 \dots \mu_p}{}_{\nu_1 \dots \nu_{q-1}\sigma}$$

Ковариантная производная хорошо написана у Дэвида Тонга и по запросу мы можем обсудить её после прохождения курса базовой электродинамики.

## 5.1 Деривационные формулы Вейнгартена-Гаусса

Предложение 5.1 Для вторых производных радиус вектора неособой поверхности $M$ имеют место следующие деривационные формулы Гаусса-Вейнгартена:

$$\frac{\partial}{\partial u^j} \partial_{u^i} = r_{ij} = \sum_\alpha \Gamma^\alpha_{ij} r_\alpha + q_{ij} N,$$

где $q_{ij}$ - матрича второй квадратичной формь поверхности, а $\Gamma^k_{ij}$ символь Кристоффеля поверхности M. Символь Кристоффеля вычисляются в терминах первой квадратичной формы поверхности и ее первых производных так:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} \sum_\alpha \left( g^{k\alpha} \left( \frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{\alpha i}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\alpha} \right) \right).$$

Производные нормального векторного поля $N$ вдоль на поверхности имеют вид

$$\frac{\partial N}{\partial u^i} = \sum_\alpha b^\alpha_i \partial_{u^\alpha}$$

где коэффичиенты $b^\alpha_i$ выражаются через первую и вторую квадратичные формы поверхности так:

$$b^\alpha_i = - \sum_k q_{ik} g^{k\alpha}$$

Введение: В практических задачах часто приходится рассматривать на поверхностях семейства векторов, зависящих от точки поверхности. Такие семейства называются векторными полями. Особый интерес представляют так называемые касательные векторные поля - семейства векторов $X = X(P)$ из касательных плоскостей $T_P M$ к поверхности.

Если на поверхности $M$ фиксированы координаты $\left(u^1, \dots, u^k\right)$ то, каждое касательное векторное поле $X$ может быть задано как набор функций $X^i \left(u^1, \dots, u^k\right), i = 1, \dots, k$. По этим функциям однозначно восстанавливается вектор их $T_P M$ как линейная комбинация векторов канонического базиса с коэффициентами $X^i$:

$$X = X^1 \partial_{u^1} + \dots + X^k \partial_{u^k}$$

Функции $X^i$ называются компонентами касательного векторного поля $X$ в координатах $\left(u^1, \dots, u^k\right)$. Ясно, что если изменить координаты, то изменятся и функции, задающие компоненты данного векторного поля.

Наша ближайшая цель - научиться дифференцировать векторные поля на поверхности. Для простоты изложения мы вновь ограничимся случаем гиперповерхностей, т.е. $k = n - 1$. Пусть поверхность задана параметрически в виде $r : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Чтобы продифференцировать поле $X$ записанное в виде $X = \sum_i X^i \partial_{u^i}$, нужно, очевидно, научиться дифференцировать векторы канонического репера. Напомним, что вектор $\partial_{u^i}$ канонического репера в точке $P$ - это производная $\partial r/\partial u^i$ радиус вектора поверхности по координате $u^i$ в точке $P$. Поэтому производная вектора $\partial_{u^i}$ по координате

$u^j$ - это вектор, равный второй производной радиус вектора:

$$\frac{\partial}{\partial u^j}\partial_{u^i} = \frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j}.$$

Для краткости, мы будем обозначать дифференцирование по $u^i$ нижним индексом $i$, например, $\frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j} = r_{ij}$, а $\partial_{u^i} = r_i$. Как и любой другой вектор в точке $P$, вектор $r_{ij}$ раскладывается по базису объемлющего пространства $\mathbb{R}^n$, составленного из векторов $r_i$ канонического репера и вектора $N$ нормали к гиперповерхности. Соответствующие формулы и называются деривачионными формулами Гаусса-Вейнгартена. Выведем их. Разложим вектор $r_{ij}$ по векторам базиса $r_1, \ldots, r_{n-1}, N$:

$$r_{ij} = \sum_\alpha \Gamma^\alpha_{ij} r_\alpha + q_{ij} N$$

(преобразования в страницу)

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} \sum_\alpha \left( g^{k\alpha} \left( \frac{\partial g_{j\alpha}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{\alpha i}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\alpha} \right) \right)$$

Определение. Набор чисел $\Gamma^k_{ij}$, заданный только что выписанными формулами, называется символами Кристоффеля поверхности $M$ в точке $P$ в системе координат $(u^1, \ldots, u^{n-1})$.

## 5.2 Теорема Гаусса

Теорема 5.1 (C. F. Gauss) Гауссова кривизна двумерной поверхности не меняется при изометрии. Другими словами, двумерные изометричные поверхности имеют в соответствующих точках одинаковую гауссову кривизну.

Идея доказательства состоит в том, чтобы получить из деривационных формул уравнения Гаусса, приравняв коэффициенты в выражениях для третьих производных радиус вектора поверхности. Уравнения Гаусса позволяют выразить гауссову кривизну поверхности через элементы ее первой квадратичной формы и их производные, откуда и вытекает утверждение теоремы. Действительно, напомним, что на изометричных поверхностях можно выбрать такие координаты, что их первые квадратичные формы будут просто совпадать, т.е. будут совпадать элементы соответствующих матриц. Поэтому, в таких координатах, будут совпадать и соответствующие производные первых квадратичных форм. Таким образом, в этих координатах совпадают все функции, входящие в выражения для гауссовой кривизны, а значит совпадают и сами гауссовы кривизны.

Следствие 5.1 Никакую часть стандартной двумерной сферь нельзя изометрично отобразить на плоскость.

Доказательство. Действительно, в противном случае их гауссовы кривизны совпадали бы. Однако, гауссова кривизна сферы радиуса $R$ равна $1/R^2$, а гауссова кривизна плоскости равна нулю. Доказательство закончено.

### 5.3 Ковариантная производная касательного векторного поля

**Основная теория по Иванову** Определение. Ковариантной производной $\nabla_i X$ касательного векторного поля $X$ по координате $u^i$ называется касательное векторное поле, полученное в каждой точке из вектора $\frac{\partial X}{\partial u^i}$ ортогональной проекцией на касательную плоскость:

$$\nabla_i X = \left(\frac{\partial X}{\partial u^i}\right)^T,$$

где через $(\cdot)^T$ обозначена операция ортогонального проектирования на касательную плоскость.

Непосредственно из определения получаем следующее выражение для координат векторного поля $\nabla_i X$.

Предложение 5.2 Пусть в окрестности точки $P$ реаулярной аиперповерхности $M$ задано касательное векторное поле $X$, имеющее в координатах $(u^1, \dots, u^{n-1})$ вид $X = \sum_\alpha X^\alpha \partial_{u^\alpha}$. Тогда координаты касательного векторного поля $\nabla_i X$ относительно $(u^1, \dots, u^{n-1})$ могут быть вьчислены так:

$$(\nabla_i X)^j = \frac{\partial X^j}{\partial u^i} + \sum_\alpha \Gamma^j_{i\alpha} X^\alpha.$$

Здесь $\Gamma^k_{ij}$– символь Кристоффеля поверхности $M$.

Замечание. Операция ковариантного дифференцирования определяется только первой квадратичной формой поверхности.

Предложение 5.3 Ковариантное дифферениирование сохраняет первую квадратичную форму поверхности в следующем смысле: если X и Y произвольные касательные векторные поля на поверхности, то

$$\nabla_i \langle X, Y\rangle = \langle \nabla_i X, Y\rangle + \langle X, \nabla_i Y\rangle .$$

Утверждение 5.1 Пусть $X$ и $Y$ - касательные векторные поля на регулярной гиперповерхности $M$ с координатами $(u^1, \dots, u^{n-1})$. Тогда $\nabla_X Y$ - это векторное поле, $i$-ая координата которого имеет вид

$$(\nabla_X Y)^i = \sum_\alpha \frac{\partial Y^i}{\partial u^\alpha} X^\alpha + \sum_{k\alpha} \Gamma^i_{\alpha k} X^\alpha Y^k$$

Следствие 5.2 Пусть на поверхности $M$ задано три касательньх векторных поля $X_1, X_2$ и $Y$. Тогда имеет место следующее соотношение:

$$\nabla_Y \langle X_1, X_2\rangle = \langle \nabla_Y X_1, X_2\rangle + \langle X_1, \nabla_Y X_2\rangle .$$

В дальнейшем нам также понадобятся следующие обозначения. Пусть $X$ - векторное поле на поверхности $M$, и $\gamma$ - регулярная кривая на $M$, параметризованная параметром $t$. Рассмотрим ограничение $X(t)$ векторного поля $X$ на кривую $\gamma$. Обозначим через $\nabla_t X$ ковариантную производную поля $X$ вдоль касательного к кривой поля $\dot{\gamma}$. Геометрический смысл этой операции ясен: мы дифференцируем поле $X(t)$ по $t$ и результат дифференцирования ортогонально проектируем на $M$. Если $(u^1, \dots, u^{n-1})$ – регулярные координаты на $M$, то поле $\nabla_t X$ имеет вид:

$$(\nabla_t X)^k = \sum_i \frac{\partial X^k}{\partial u^i} \dot{u}^i + \sum_{ip} \Gamma^k_{ip} \dot{u}^i X^p.$$

**On geometrical meaning of tursion (!???!!)**

**On physical meaning of tursion in some models (!???!!)** (указание, очень интересное)

**7.13. Ковариантная производная по Карасеву** Мы продолжаем рассматривать многообразие $(M, g)$ с (полу)римановой структурой $g$ (невырожденной, но необязательно положительно определённой). Мы хотим установить существование операции ковариантного дифференцирования векторных полей и, аналогично внешнему дифференцированию, мы сначала перечислим требуемые свойства этой операции $\nabla_X Y$, которая из двух векторных полей делает третье (в этих формулах $f-$ любая гладкая функция): - $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$ (линейность по первому аргументу); - $\nabla_X f Y = X(f) Y + f \nabla_X Y$ (правило $\Lambda$ ейбница для второго аргумента); - $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (отсутствие кручения); - $X(g(Y, Z)) = g\left(\nabla_X Y, Z\right) + g\left(Y, \nabla_X Z\right)$ (совместимость с (полу)римановой структурой $g$). Существование и единственность ковариантной производной для данной (полу)римановой структуры устанавливает следующая теорема. Теорема 7.127 (Формула Козюля и существование ковариантной производной). Из условий на ковариантное дифференцирование следует формула

$$\begin{aligned}
&2 g\left(\nabla_X Y, Z\right)= \\
&\quad = X(g(Y, Z))+Y(g(Z, X))-Z(g(X, Y))+g([X, Y], Z)-g([Y, Z], X)+g([Z, X], Y) .
\end{aligned}$$

Если сиитать правую иасть формуль определением левой иасти, то построенное так ковариантное диффереиирование будет иметь требуемьге свойства.

Отличие ковариантной производной $\nabla_X Y$ от производной $\Lambda$ и $L_X Y$ заключается в том, что ковариантная производна $C^{\infty}$-линейна по вектору $X$,

$$\nabla_{f X} Y=f \nabla_X Y$$

иначе говоря значение $\nabla_X Y$ в точке зависит только от значения $X$ в той же точке, но не от производных $X$. Свойство отсутствия кручения при этом показывает, что некоторая связь с производной Аи у ковариантной производной всё же имеется.

### 3.2.3 The Levi-Civita Connection

### 3.2.4 The Divergence Theorem

### 3.2.5 The Maxwell Action

## 2.3.6 On Geodesics, Geodesic Deviation

### 6.1 Определение и простейшие свойства геодезических

Пусть $M$ - регулярная гиперповерхность заданная параметрически в виде $r: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, и пусть $\gamma$ - регулярная кривая на $M$, параметризованная параметром $s$. Фиксируем на $M$ какие-нибудь координаты $\left(u^1, \ldots, u^{n-1}\right)$, и пусть $u^i(s), i=1, \ldots, n$, - координатные функции кривой $\gamma$. Обозначим через $x^k\left(u^1, \ldots, u^{n-1}\right)$ координатные функции поверхности $M$. Как и выше, будем обозначать дифференцирование по $u^i$ нижним индексом $i$, и точкой - дифференцирование по параметру $s$. Тогда вектор скорости $\dot{\gamma}$ кривой $\gamma$ как элемент касательного пространства к поверхности имеет вид:

$$\dot{\gamma}=\sum_\alpha r_\alpha \dot{u}^\alpha$$

$$\ddot{\gamma}=\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}+\mathfrak{q}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) N$$

где через q обозначена вторая квадратичная форма поверхности.

Утверждение 6.1 Вектор ускорения кривой $\gamma$ на гиперповерхности в каждой точке раскладьвается в сумму касательного вектора $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma$ и нормального вектора $\mathfrak{q}(\dot\gamma,\dot\gamma)$.

Утверждение 6.2 Регулярная кривая $\gamma$ на поверхности $M$ является геодезической, если и только если в каждой точке из $\gamma$ имеет место равенство

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0$$

Если на поверхности фиксировань координаты $(u^1,\ldots,u^{n-1})$, то последнее равенство эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\ddot u^k + \sum_{\alpha\beta}\Gamma^k_{\alpha\beta}\dot u^\alpha \dot u^\beta = 0, \quad k = 1,\ldots,n-1.$$

Следствие 6.1 Пусть $M$ - регулярная гиперповерхность, $P-$ ее произвольная точка, и $v \in T_PM-$ произвольный касательный вектор $\kappa M$ в точке P. Тогда на $M$ существует геодезическая $\gamma$, выходящая из $P$ и такая, что ее вектор скорости в точке P равен $v$. Более того, геодезическая $\gamma$ единственна в том смысле, что любые две такие геодезических совпадают в пересечении областей определения.

Вернемся к выражению для вектора $\ddot\gamma$ ускорения произвольной натурально параметризованной кривой $\gamma$ на поверхности. Напомним, что модуль вектора $\ddot\gamma$ называется кривизной кривой. Из утверждения 6.1 и теоремы Пифагора вытекает, что кривизна $k(P)$ натурально параметризованной кривой $\gamma$ в произвольной точке $P$ может быть вычислена так:

$$k(P) = \sqrt{\|\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\|^2 + (\mathfrak{q}(\dot\gamma,\dot\gamma))^2}.$$

Поскольку вектор $\dot\gamma$ имеет единичную длину, то $\mathfrak{q}(\dot\gamma,\dot\gamma)-$ это в точности кривизна $k_N(P)$ нормального сечения в направлении $\dot\gamma$, см. следствие 4.5. Величину $\|\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\|$ обычно обозначают через $k_g(P)$ и называют геодезической кривизной кривой $\gamma$ в точке $P$. Непосредственно из определений и утверждения 6.2 вытекает следующий результат.

Утверждение 6.3 Регулярная кривая $\gamma$ на поверхности является геодезической если и только если ее геодезическая кривизна равна нулю в каждой точке.

Утверждение 6.4 Кривизна $k$ регулярной кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^n$, лежащей на поверхности $M$, может быть вычислена так:

$$k = \sqrt{k_g^2 + k_N^2},$$

где $k_g$ - геодезическая кривизна кривой $\gamma$, а $k_N$ - кривизна нормального сечения в направлении вектора $\dot\gamma$.

## 6.2 Примеры геодезических, теорема Клеро

Утверждение 6.6 Геодезические на стандартной евклидовой плоскости - это всевозможные прямье линии.

Утверждение 6.7 Пусть $M \subset \mathbb{R}^3$ - поверхность вращения графика положительной гладкой функции $f(z)$. Тогда каждый меридиан на $M$ является геодезической. Среди параллелей геодезическими являются те и только те, которые соответствуют критическим точкам функиии $f$.

Следствие 6.2 Геодезические на стандартной двумерной сфере - это большие круги и только они.

Для доказательства вводим метрику, считаем кристоффеля, В итоге, уравнения геодезических имеют вид:

$$\begin{cases} 0 = \ddot\varphi + 2\frac{\rho'(\tau)}{\rho(\tau)}\dot\varphi\dot\tau, \\ 0 = \ddot\tau + \frac{\rho'(\tau)}{\rho(\tau)}\left(\dot\tau^2 - \dot\varphi^2\right). \end{cases}$$

$$\dot{c}(s)=\frac{d}{ds}\left(\frac{\rho(\tau)\dot{\varphi}}{\sqrt{\dot{\varphi}^2+\dot{\tau}^2}}\right)=\frac{\left(\rho'\dot{\tau}\dot{\varphi}+\rho\ddot{\varphi}\right)\left(\dot{\varphi}^2+\dot{\tau}^2\right)-\rho\dot{\varphi}(\dot{\varphi}\ddot{\varphi}+\dot{\tau}\ddot{\tau})}{\left(\dot{\varphi}^2+\dot{\tau}^2\right)^{3/2}}$$

Перепишем числитель последнего выражения в виде

$$\rho\dot{\tau}^2\left(\ddot{\varphi}+2\frac{\rho'}{\rho}\dot{\varphi}\dot{\tau}\right)-\rho\dot{\varphi}\dot{\tau}\left(\ddot{\tau}+\frac{\rho'}{\rho}\left(\dot{\tau}^2-\dot{\varphi}^2\right)\right).$$

Так как выражения в больших скобках равны нулю в силу уравнений геодезических, заключаем, что $c(s)=\mathrm{const}$ вдоль произвольной геодезической. Этот факт носит название теоремы Клеро.

Теорема 6.1 (Клеро) Пусть $\gamma(s)$ - произвольная геодезическая на поверхности, полученной вращением плоской регулярной кривой вокруг прямой, лежащей в той же плоскости, причем ось вращения и кривая не пересекаются. Тогда произведение c(s) расстояния от оси вращения до точки $\gamma(s)$ на синус угла между $\gamma(s)$ и соответствующим меридианом есть величина постоянная вдоль $\gamma$:

$$c(s)=\rho(\tau(s))\sin\alpha(s)=\text{ const}$$

С помощью теоремы Клеро можно решить, например, следующую задачу.

Упражнение 6.4. Описать все поверхности вращения, на которых имеются замкнутые геодезические.

### Main Formulas of Geodesics

A geodesic is a curve tangent to a vector field $X$ that obeys

$$\nabla_X X=0$$

Along the curve $C$, we can substitute the expression (3.25) into (3.27) to find

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}+\Gamma^\mu_{\rho\nu}\frac{dx^\rho}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}=0$$

This is precisely the geodesic equation (1.30) that we derived in Section 1 by considering the action for a particle moving in spacetime. In fact, we find that the condition (3.28) results in geodesics with affine parameterisation.

For the Levi-Civita connection, we have $\nabla_X g=0$. This ensures that for any vector field $Y$ parallely transported along a geodesic $X$, so $\nabla_X Y=\nabla_X X=0$, we have

$$\frac{d}{d\tau}g(X,Y)=0$$

This tells us that the vector field $Y$ makes the same angle with the tangent vector along each point of the geodesic.

## 3.3.1-Tong Geodesics Revisited

### Normal Coordinates

(!!??!? это нужно переучивать!!!)

Geodesics lend themselves to the construction of a particularly useful coordinate system. On a Riemannian manifold, in the neighbourhood of a point $p\in M$, we can always find coordinates such that

$$g_{\mu\nu}(p)=\delta_{\mu\nu}\quad\text{and}\quad g_{\mu\nu,\rho}(p)=0$$

The same holds for Lorentzian manifolds, now with $g_{\mu\nu}(p) = \eta_{\mu\nu}$. These are referred to as normal coordinates.

We can also see why we shouldn't expect to set the second derivative of the metric to zero. Requiring $g_{\mu\nu,\rho\sigma} = 0$ is $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ constraints. Meanwhile, the next term in the Taylor expansion is $\partial^3\tilde{x}^\rho/\partial x^\mu \partial x^\nu \partial x^\lambda$ which has $\frac{1}{6}n^2(n+1)(n+2)$ independent coefficients. We see that the numbers no longer match. This time we fall short, leaving

$$\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{6}n^2(n+1)(n+2) = \frac{1}{12}n^2\left(n^2-1\right)$$

### 3.3.4 Geodesic Deviation

### Some Typical Examples of Geodesics

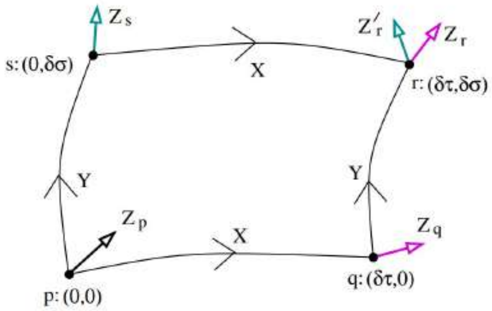
### 3.3.3-Tong Path Dependence: Curvature and Torsion

## 2.3.7 On Parallel Transport (!???)

(!! напишу уже скоро, нужно просто сесть и подумать про это!)

### Construction

$$\begin{aligned}\Delta Z^\mu_r = Z^\mu_r - Z^\mu_r &= -\left(\Gamma^\mu_{\rho\nu,\sigma} - \Gamma^\mu_{\rho\sigma,\nu}\right)_p (Y^\nu Z^\rho X^\sigma)_p \,\delta\sigma\delta\tau + \dots \\ &= \left(R^\mu{}_{\rho\sigma\nu} Y^\nu Z^\rho X^\sigma\right)_p \delta\sigma\delta\tau + \dots\end{aligned}$$



(Тут примерно компактно указания на док-ва.)

## 2.3.8 On Killing vectors and tensors (!?)

### Main properties of Killing vectors

(тут опр и обоснование)

$$\nabla_{(\sigma}\xi_{\mu\nu)} = 0$$

(тут про тензора Киллинга)

$$\nabla_\sigma\nabla_\rho\xi_\mu = R^\lambda{}_{\sigma\rho\mu}\xi_\lambda$$

Это следует из применения свойств вектора Киллинга к уравнению на тензор Римана, небольших преобразований, а также свойств Бьянки.

For $U_\mu = (1,0,0,0)$

$$\xi_{\mu\nu} = a^2\left(g_{\mu\nu} + U_\mu U_\nu\right) \qquad \text{(in mostly plus signature)}$$

is a Killing tensor in a cosmological spacetime, i.e., $\nabla_{(\sigma}\xi_{\mu\nu)} = 0$.

**On applications of Killing vectors**

(тут абзац как по геодезической и векторам Киллинга находить отклонение света, типичное явление)

### 2.3.9 On Riemann Tensor, Ricci scalar, etc.

**О двумерных поверхностях постоянной гауссовой кривизны.** В данном разделе мы применим разработанную нами технику для изучения поверхностей постоянной кривизны.

Знаменитая теорема Гаусса, доказанная нами выше, утверждает, что изометричные двумерные поверхности имеют одинаковую гауссову кривизну. В данном разделе мы покажем, что если гауссова кривизна поверхности постоянна, то верно и обратное, т.е. две поверхности одинаковой постоянной гауссовой кривизны локально изометричны.

Лемма 8.2 Пусть $\exp_\gamma : (t,s) \to M$ - полугеодезические координаты на регулярной поверхности $M$, ассочиированнье с натурально параметризованной геодезической $\gamma(t)$. Первая квадратичная форма поверхности в этих координатах имеет вид:

$$ds^2 + G(t,s)dt^2$$

причем функиия $G$ удовлетворяет следующим соотношения.м:

$$G(t,0) = 1, \quad \frac{\partial G(t,0)}{\partial s} = 0.$$

Вычислим теперь гауссову кривизну поверхности в координатах $(t,s)$. Для этого воспользуемся формулой Гаусса:

$$\sum_\beta g_{\beta 2} \left\{ \frac{\partial \Gamma^\beta_{11}}{\partial u^2} - \frac{\partial \Gamma^\beta_{12}}{\partial u^1} + \sum_k \left( \Gamma^k_{11}\Gamma^\beta_{k2} - \Gamma^k_{12}\Gamma^\beta_{k1} \right) \right\} = \det Q,$$

где $Q$ - матрица второй квадратичной формы поверхности, $g_{ij}$ - матрица первой квадратичной формы, и $\Gamma^k_{ij}$ - символы Кристоффеля. В силу диагональности матрицы первой квадратичной формы, получаем для гауссовой кривизны $K$ следующее выражение:

$$K = \frac{g_{22}}{\det(g_{ij})} \left\{ \frac{\partial \Gamma^2_{11}}{\partial u^2} - \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial u^1} + \sum_k \left( \Gamma^k_{11}\Gamma^2_{k2} - \Gamma^k_{12}\Gamma^2_{k1} \right) \right\}$$

Лемма 8.3 Пусть метрика двумерной поверхности $M$ в регулярных координатах $(u,v)$ имеет вид $du^2 + G(u,v)dv^2$. Тогда гауссова кривизна $K$ поверхности $M$ может быть вычислена так:

$$K = -\frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}}$$

Теорема 8.1 Пусть $M_1$ и $M_2$ - двумерные регулярные поверхности постоянной гауссовой кривизны $K$, и пусть $P_i-$ произвольная точка на $M_i, i = 1,2$. Тогда у точек $P_i$ на $M_i, i = 1,2$, существуют изометричные окрестности. Другими словами, поверхности $M_1$ и $M_2$ локально изометричны.

Поверхности нулевой и положительной постоянной гауссовой кривизны нам уже встречались - это, соответственно, плоскость и сфера.

Следствие 8.1 Двумерная поверхность нулевой гауссовой кривизны локально изометрична плоскости.

Двумерная поверхность положительной гауссовой кривизны $a^2$ локально изометрична стандартной сфере радиуса $1/a$.

(???? не плоскость???) Для псевдосферы в трехмерном пространстве Минковского $\mathbb{R}^3_1$ метрика в открытом круге с центром в нуле радиуса $R$ в стандартных координатах $(u^1, u^2)$ имеет вид

$$ds^2 = \frac{4R^4}{\left(R^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2\right)^2}\left(\left(du^1\right)^2 + \left(du^2\right)^2\right)$$

и называется метрикой Лобачевского в координатах стереографической проекиии. Иногда удобно записывать эту метрику в полярных координатах $(r, \varphi)$ на плоскости, в которых она, очевидно, имеет вид

$$ds^2 = \frac{4R^4}{\left(R^2 - r^2\right)^2}\left((dr)^2 + r^2(d\varphi)^2\right)$$

Круг радиуса $R$ с введенной на нем метрикой Лобачевского называется моделью Пуанкаре геометрии Лобачевского, или, как мы уже говорили, кругом Пуанкаре, см. комментарии в следующем разделе.

Нам, однако, будет удобно переписать эту метрику в других координатах. Для этого мы сначала введем на пространстве Минковского так называемые псевдосферические координатьи, положив:

$$\begin{aligned} x^1(\rho, \chi, \varphi) &= \rho \cosh \chi, \\ x^2(\rho, \chi, \varphi) &= \rho \sinh \chi \cos \varphi, \\ x^3(\rho, \chi, \varphi) &= \rho \sinh \chi \sin \varphi \end{aligned}$$

Предложение 8.1 Гауссова кривизна псевдосферы $S^2_1$ радиуса $iR$ в $\mathbb{R}^3_1$ постоянна равна $-1/R^2$.

Следствие 8.2 Двумерная поверхность отричательной гауссовой кривизны $-a^2$ локально изометрична псевдосфере радиуса $i/a$.

### 2.3.10 On Non-Euclidean and Lobachevsky Geometry

#### Неевклидовы геометрии

#### 9.1.1 Эллиптическая геометрия

**9.1.2 Плоскость Лобачевского (гиперболическая геометрия)** Школьная геометрия, или евклидова геометрия, была аксиоматизирована в знаменитых "Началах" Евклида (яобы 3 век до н.э.) Свои построения Евклид базировал на пяти основных постулатах.

1) через две точки можно провести прямую,

2) любой отрезок можно неограниченно продолжить,

3) данным радиусом из данной точки можно провести окружность,

4) все прямые углы равны между собой (обеспечивается единственность продолжения прямой),

5) если две прямые, лежащие в одной плоскости, пересечены третьей, и если сумма внутренних односторонних углов меньше суммы двух прямых, то прямые пересекаются при неограниченном продолжении с той стороны, с которой эта сумма меньше.

У Евклида были, впрочем, и другие аксиомы (например, аксиомы равенства и порядка).

Обычно пятый постулат формулируют в следующем (эквивалентном) виде:

5') через данную точку вне прямой можно провести единственную параллельную ей (т.е. не пересекающуюся с ней) прямую.

Начнем с примера геометрии, в которой пятый постулат не выполнен, а из остальных аксиом выполняются почти все. Рассмотрим стандартную сферу $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ единичного радиуса с центром в нуле. Точками будут точки из $S^2$, прямыми - большие круги (пересечение сферы $S^2$ с плоскостями, проходящими через ее центр), а движениями - преобразования сферы, индуцированные ортогональными преобразованиями пространства $\mathbb{R}^3$. Ясно, что в такой геометрии вообще нет параллельных прямых. Недостаток через диаметрально противоположные точки сферы проходит больше одной (фактически, бесконечно много) прямых. От этого неприятного обстоятельства можно легко избавиться, отождествив противоположные точки $x$ и $-x$. В результате мы получим проективную плоскость $\mathbb{RP}^2$ и естественную проекцию $\pi : S^2 \to \mathbb{RP}^2$. В качестве прямых на $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ рассмотрим образы больших кругов при проекции $\pi$. Теперь через две разные точки проходит ровно одна прямая, однако имеется еще одно неприятное обстоятельство: как на сфере, так и на $\mathbb{RP}^2$ не определено корректно понятие "между". Можно показать, что на $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ выполняются все аксиомы евклидовой геометрии, за исключением аксиомы параллельности и аксиом порядка. Построенная только что геометрия на $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ называется эллиптической или проективной геометрией.

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^3_1$. В координатах $(x, y, z)$ псевдосфера мнимого радиуса $iR$ (двуполостный гиперболоид) задается уравнением

$$-x^2 + y^2 + z^2 = -R^2.$$

Обозначим половинку этой псевдосферы, выделенную условием $x > 0$, через $L^2(R)$, и рассмотрим на $L^2(R)$ геометрию, в которой прямье - это пересечения $L^2(R)$ с плоскостями, проходящими через начало координат в $\mathbb{R}^3_1$, а движения - преобразования $L^2(R)$, индуцированные преобразованиями пространства $\mathbb{R}^3_1$, сохраняющими псевдоскалярное произведение и переводящими $L^2(R)$ в себя. Поверхность $L^2(R)$ называется плоскостью Лобачевского, а определенная на ней геометрия - геометрией Лобачевского или гиперболической геометрией.

### 9.2 Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского

Следствие 9.1 Угль между кривьли на плоскости Лобачевского в модели Пуанкаре совпадают с евклидовьми углами, т.е. углами, измеренньими в евклидовой метрике.

Утверждение 9.1 Стереографическая проекиия $\sigma : L^2(R) \to \Pi$ переводит каждую прямую Лобачевского в дугу окружности, перпендикулярную абсолюту, или в диаметр диска $D^2(R)$.

Теперь невыполнимость аксиомы параллельных становится еще более наглядной, см. рис. 20.

Через точку P проходит бесконечно много прямых, параллельных прямой 1.

### 9.3 Дробно линейные преобразования плоскости

Пусть теперь $a, b, c$ и $d$ - комплексные числа. Определим дробнолинейное преобразование так:

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}.$$

Каждому дробно-линейному преобразованию поставим в соответствие комплексную матрицу $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Легко проверяется, что это отображение есть отображение в точку если и только если матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ вырождена (это в точности условие того, что пары комплексных чисел $(a, b)$ и $(c, b)$ пропорциональны с некоторым комплексным коэффициентом, поэтому отношение числителя к знаменателю дробно-линейного отображения постоянно).

Предложение 9.1 Каждое дробно-линейное преобразование представимо в одном из двух видов:

$$z \mapsto Az + B \quad \text{или } z \mapsto \frac{A}{z+B} + C,$$

где $A, B, C$ и D - некоторье комплексные числа. Поэтому каждое дробно-линейное преобразование есть или композиииия поворота, растяжения и сдвига (в первом случае), или композичия сдвига, инверсии, осевой симметрии, поворота, растяжения и сдвига (во втором случае).

Предложение 9.2 Каждое дробно-линейное преобразование переводит окружности в окружности.

Предложение 9.3 Отображение $\psi$ из группы комплексных невырожденных $2 \times 2$-матрии в группу дробно-линейных преобразований плоскости является гомоморфизмом на всю группу преобразований, т.е. является эпиморфизмом.

Предложение 9.4 Группа дробно-линейных отображений плоскости изоморфна аруппе $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})/\mathbb{C}^*$.

### 9.4 О метрики в комплексной форме

В комплексном виде удобно записывать метрику и работать с ней. Особенно удобно работать с конформно-евклидовыми метриками, т.е. метриками, заданными в виде $ds^2 = \lambda(u,v)\,(du^2 + dv^2)$. Для того, чтобы записать метрику в комплексной форме, введем следующие комплексные дифференциалы:

$$dz = du + idv, \quad d\bar{z} = du - idv.$$

Легко видеть, что $du^2 + dv^2 = dzd\bar{z}$, поэтому конформно-евклидова метрика $ds^2 = \lambda(u,v)\,(du^2 + dv^2)$ в комплексном виде выглядит так: $ds^2 = \lambda(z, \bar{z})dzd\bar{z}$

Пусть $z = \frac{aw+b}{cw+d}$– дробно-линейное преобразование. Тогда

$$dz = \frac{a(cw+d) - c(aw+b)}{(cw+d)^2}dw = \frac{ad-cb}{(cw+d)^2}dw, \quad d\bar{z} = \frac{\overline{ad-cb}}{\overline{(cw+d)^2}}d\bar{w}$$

поэтому

$$ds^2 = \lambda dzd\bar{z} = \lambda\frac{|ad-cb|^2}{|cw+d|^4}dwd\bar{w},$$

т.е. метрика по-прежнему имеет конформно-евклидов вид. Итак, мы доказали следующий результат. Предложение 9.6 Дробно-линейнье преобразования сохраняют конформноевклидов вид метрики. В частности, для конформно-евклидовых метрик, дробно-линейнье преобразования сохраняют услыи между кривьли.

Приведем пример комплексной записи метрики евклидовой плоскости, сферы и плоскости Лобачевского: 1) $ds^2 = dzd\bar{z}$ (метрика плоскости), $z = u + iv, (u,v)$ - стандартные евклидова координаты; 2) $ds^2 = \frac{4R^4dzd\bar{z}}{(R^2+|z|^2)^2}$ (метрика сферы радиуса $R)\,, z = u + iv, (u,v)$ стереографические координаты; 3) $ds^2 = \frac{4R^4dzd\bar{z}}{(R^2-|z|^2)^2}$ (метрика плоскости Лобачевского $L^2(R)$ в модели Пуанкаре), $z = u + iv, (u,v)$ - стереографические координаты.

### 9.5 Модель верхней полуплоскости

Построим теперь новую модель плоскости Лобачевского. Рассмотрим дробно-линейное преобразование плоскости, заданное так: $w = -iR\frac{z+iR}{z-iR}$. Это дробно-линейное преобразование задает новые координаты на круге Пуанкаре

Предложение 9.7 В модели верхней полуплоскости метрика Лобачевского имеет вид:

$$ds^2 = R^2\frac{du^2+dv^2}{v^2} = -\frac{4R^2dwd\bar{w}}{(w-\bar{w})^2},$$

аде $w = u + iv-$ соответствующая комплексная координата.

### 9.6 Изометрии плоскости Лобачевского

Для понимания геометрии Лобачевского, а также для конкретных вычислений в этой геометрии очень полезно выяснить, как устроены движения в этой геометрии. Для этого мы воспользуемся моделью верхней полуплоскости. Напомним, что в этой модели

$$ds^2 = -\frac{4R^2dzd\bar{z}}{(z-\bar{z})^2},$$

где $z = u + iv$. Будем искать движения в виде дробно-линейных преобразований:

$$z = \frac{aw+b}{cw+d}.$$

Для простоты, в дальнейших вычислениях положим $R = 1$.

Теорема 9.1 Вещественное дробно-линейное преобразование $z = \frac{aw+b}{cw+d}$ сохраняет верхнюю полуплоскость если и только если матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ этого преобразования имеет положительный определитель.

Предложение 9.8 Каждое вещественное дробно-линейное преобразование, сохраняющее верхнюю полуплоскость, можно представить матричей $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ из $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Обратно, каждое дробно-линейное преобразование вида $z = \frac{aw+b}{cw+d}$, где $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$-матрица из $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, сохранлет верхнюю полуплоскость.

Предложение 9.9 Вещественные дробно-линейные преобразования, сохраняющие верхнюю полуплоскость, являются движениями плоскости Лобачевского.

Далее, легко видеть, что вещественные дробно-линейные преобразования, сохраняющие верхнюю полуплоскость, образуют группу.

Лемма 9.1 Отображение $\nu$, ставящее в соответствие каждой матрице $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ из $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ дробно-линейное преобразование $z = \frac{aw+b}{cw+d}$, является эпиморфизмом групп.

Теорема 9.2 Подгруппа группь движений плоскости Лобачевского, составленная из всех вещественных дробно-линейных преобразований, изоморфна $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\{E,-E\}$.

**О движениях плоскости Лобачевского** Дробно-линейные преобразования, сохраняющие единичный круг, являются движениями метрики Лобачевского в модели Пуанкаре. Матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ таких преобразований удовлетворяют следующим условиям:

$$|a|^2 - |c|^2 = 1, \quad |b|^2 - |d|^2 = -1, \quad a\bar{b} - c\bar{d} = 0,$$

и, поэтому, записываются в виде

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \text{ где } |a|^2 - |b|^2 = 1.$$

Группа таких матриц обозначается через SU$(1, 1)$. Другое удобное представление дробнолинейных преобразований, сохраняющих единичный круг:

$$z \mapsto e^{i\varphi} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}, \quad \varphi \in \mathbb{R}, \quad |z_0| < 1.$$

Чтобы получить полную группу движений плоскости Лобачевского, необходимо добавить сопряжение $z \mapsto \bar{z}$.

**О треугольниках** Предложение 9.10 (Неравенство треугольника) Пусть $BC-$ произвольный треугольник на плоскости Лобачевского. Тогда имеет место следующее неравенство:

$$|AB|_L + |BC|_L \geq |AC|_L$$

Утверждение 9.2 Косинус отношения длинь дуги AB псевдоокружности к ее радиусу равен псевдоскалярному произведению радиус-векторов точек A и B, деленному на квадрат радиуса окружности. В этом смысле, отношение длины дуги окружности $\kappa$ радиусу может играть роль меры угла между радиус-векторами кониевых точек этой дуги.

Предложение 9.11 Сумма углов произвольного треугольника ABC на плоскости Лобачевского строго меньше чем $\pi$.

Предложение 9.12 Пусть ABC - произвольный треугольник на плоскости Лобатреугольника $BC$, то

$$S = R^2(\pi - \alpha - \beta - \gamma)$$

### 2.3.11 More on the Riemann Tensor and applications

(это перенесу в приложения скорее всего, пока тут. по Тонгу конечно же все.)

#### 3.4.1 The Ricci and Einstein Tensors

#### 3.4.2 Connection 1-forms and Curvature 2-forms

#### 3.4.3 An Example: the Schwarzschild Metric

#### 3.4.4 The Relation to Yang-Mills Theory

### 2.3.12 Other about surfaces (!!?!???!?)

(то же, что и в матане тут, как считать площади?)

## 2.4 Curves in a Nutshell

### 2.4.1 On flat curves

### 1.1 Параметрические кривые

### 1.2 Кривые-графики и неявные кривые

### 1.3 Определение регулярной кривой

### 1.4 Длина кривой, натуральный параметр

### 1.5 Кривизна регулярной кривой

### 1.6 Плоские кривые

**Добавление 1.8. Эволюты и эвольвенты.** Рассмотрим следующую известную задачу. Пусть $\gamma$ - регулярная кривая на плоскости, и $\varepsilon \in \mathbb{R}$ - некоторое число. Построим новую кривую $\gamma_\varepsilon$, заменив каждую точку $\gamma(s)$ точкой, полученной из $\gamma(s)$ смещением на вектор $\varepsilon\nu_o(s)$, т.е. $\gamma_\varepsilon(s) = \gamma(s) + \varepsilon\nu_o(s)$. Эта кривая называется $\varepsilon$-эквидистантной кривой $\gamma$. Ясно, что $\gamma_\varepsilon$ при малых $\varepsilon$ по-прежнему является регулярной кривой. Однако, когда $\varepsilon$ возрастает, у эквидистант могут появляться особые точки. Опишем эти точки. Пусть кривая $\gamma$ параметризована натуральным параметром $s$. Тогда вектор скорости $\varepsilon$-эквидистанты, в силу формул Френе, имеет вид:

$$\dot\gamma_\varepsilon(s) = \dot\gamma(s) + \varepsilon\dot\nu_o(s) = (1 - \varepsilon k_o(s))\,\tau(s),$$

### 2.4.2 On curves in 3D, Frenet–Serret formulas

(Иванов Тужилин глава 2)

### 2.1 Формулы Френе

Итак, пусть $\gamma(s)$ - натурально параметризованная бирегулярная кривая в $\mathbb{R}^3$. Обозначим через $\tau$ вектор скорости $\dot\gamma(s)$; через $\nu$ - нормированный вектор ускорения $\ddot\gamma(s)/\|\ddot\gamma(s)\|$, который также называется элавной нормалью $\kappa\gamma$ в точке $\gamma(s)$; а через $\beta$ - векторное произведение $[\tau, \nu]$, называемое бинормалью $\kappa\gamma$ в точке $\gamma(s)$. Тройка $(\tau, \nu, \beta)$ образует ортонормальный репер, называемый репером Френе. Продифференцируем бинормаль $\beta$. По формуле Лейбница, имеем

$$\dot\beta = [\tau, \nu]^\cdot = [\dot\tau, \nu] + [\tau, \dot\nu] = [\tau, \dot\nu],$$

где последнее равенство справедливо, так как вектор $\dot\tau$, равный $\ddot\gamma$, колинеарен $\nu$, и, значит, $[\dot\tau, \nu] = 0$. Отсюда, в частности, вытекает, что вектор $\dot\beta$ ортогонален $\tau$. Далее, так как вектор $\beta(s)$ - единичный при каждом $s$, то $\dot\beta$ перпендикулярен $\beta$. Следовательно, $\dot\beta$ колинеарен вектору $\nu$. Положим $\varkappa = -\langle\dot\beta, \nu\rangle$, т.е. $\dot\beta = -\varkappa\nu$. Величина $\varkappa$ называется кручением кривой $\gamma$ в точке $\gamma(s)$. Ясно, что кручение $\varkappa$ является гладкой функцией параметра $s$. Теорема 2.1 (Формулы Френе) В сделанных предположениях, имеет место следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \dot\tau = k\nu, \\ \dot\nu = -k\tau + \varkappa\beta, \\ \dot\beta = -\varkappa\nu. \end{cases}$$

аде $k$ и обозначают соответственно кривизну и кручение кривой $\gamma$ в точке $\gamma(s)$.

Теорема 2.2 Пусть $\gamma(t)$ - бирегулярная кривая. Тогда

$$k = \frac{\|[\dot\gamma, \ddot\gamma]\|}{\|\dot\gamma\|^3}, \quad \varkappa = \frac{(\dot\gamma, \ddot\gamma, \dddot\gamma)}{\|[\dot\gamma, \ddot\gamma]\|^2},$$

где через $(u, v, w)$ мы обозначили смешенное произведение векторов $u, vu$ w uз $\mathbb{R}^3$.

### 2.2 Натуральные уравнения

Теорема 2.3 Пусть $f(s)$ и $g(s)$ - две гладкие функиии на отрезке $[a, b]$, причем функиия $f(s)$ везде положительна. Тогда, с точностью до сохраняющего ориентаиию движения пространства, существует единственная натурально параметризованная кривая $\gamma(s)$, такая ито ее кривизна $k(s)$ и кручение $\varkappa(s)$ равны соответственно $f(s)$ и $g(s)$.

### 2.4.3 Other about curves

## 2.5 On typical spaces, manifolds

(заготовка свойств самых типичных моделей, чтобы чуть что с них и начать.)

### 2.5.1 On spacetimes in general relativity

(потом допишу)

### 2.5.2 Geometry of Friedmann's Universe

#### Robertson-Walker Metric

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - a^2(t)\gamma_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j$$

$$\Gamma^{\mu}_{00} = \Gamma^{0}_{0\beta} = 0$$

$$\Gamma^0_{ij} = a\dot a\gamma_{ij}, \qquad \Gamma^i_{0j} = \frac{\dot a}{a}\delta^i_j, \qquad \Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\gamma^{il}\left(\partial_j\gamma_{kl} + \partial_k\gamma_{jl} - \partial_l\gamma_{jk}\right)$$

$$R_{00} = -3\frac{\ddot a}{a}, R_{ij} = -\left[\frac{\ddot a}{a} + 2\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 + 2\frac{k}{a^2}\right]g_{ij}.$$

$$R = -6\left[\frac{\ddot a}{a} + \left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right].$$

Метрика:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - a^2(t)\left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1 - kr^2} + r^2\,\mathrm{d}\Omega^2\right]$$

or

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - a^2(t)\left[\mathrm{d}\chi^2 + S_k^2(\chi)\mathrm{d}\Omega^2\right]$$

$$\mathrm{d}s^2 = a^2(\tau)\left[\mathrm{d}\tau^2 - \left(\mathrm{d}\chi^2 + S_k^2(\chi)\mathrm{d}\Omega^2\right)\right] \quad \text{with conformal time } \mathrm{d}\tau := \frac{\mathrm{d}t}{a(t)}$$

Symmetry

$$a \to \lambda a, \quad r \to r/\lambda, \quad k \to \lambda^2 k.$$

$x^i := \{x^1, x^2, x^3\}$ - comoving coordinates
$x^i_{\text{phys}} = a(t)x^i$ - physical coordinates

$$v_{\text{phys}}^{i} := \frac{dx_{\text{phys}}^{i}}{dt} = a(t)\frac{dx^{i}}{dt} + \frac{da}{dt}x^{i} := v_{\text{pec}}^{i} + Hx_{\text{phys}}^{i} \qquad \text{(physical velocity)}$$

$$v_{\text{pec}}^{i} := a(t)\dot{x}^{i} \qquad \text{(peculiar velocity)}$$

$$H := \frac{\dot{a}}{a}$$

### Уравнения Фридмана

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^{2} = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^{2}},$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P).$$

where $\rho$ and $P$ - the sum of all contributions to the energy density and pressure in the universe. По сути это уравнения Эйнштейна для метрики Фридмана $G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$, если подставить (??? выведу еще раз!) Два уравнения зависимые: второе получается из первого, однако уравнение второго порядка требует больше начальных условий, так что если решили 1-е, то следует проверить, выполняется ли 2-е (?? встречу в задаче - напишу точнее.)

Аналогичные формы:

$$H^{2} = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^{2}}. \qquad H := \dot{a}/a$$

$$H^{2} = \rho/\left(3M_{\text{pl}}^{2}\right) \qquad \text{(flat space)}$$

$$\rho_{\text{crit },0} = \frac{3H_{0}^{2}}{8\pi G} = 1.9 \cdot 10^{-29}h^{2} \text{ grams cm }^{-3}$$
$$= 2.8 \cdot 10^{11}h^{2}M_{\odot}\text{Mpc}^{-3}$$
$$= 1.1 \cdot 10^{-5}h^{2} \text{ protons cm}^{-3}.$$

After defining $\Omega_{I,0} := \frac{\rho_{I,0}}{\rho_{\text{crit },0}}$, $\Omega_{k,0} := -k/\left(a_{0}H_{0}\right)^{2}$ we will have

$$H^{2}(a) = H_{0}^{2}\left[\Omega_{r,0}\left(\frac{a_{0}}{a}\right)^{4} + \Omega_{m,0}\left(\frac{a_{0}}{a}\right)^{3} + \Omega_{k,0}\left(\frac{a_{0}}{a}\right)^{2} + \Omega_{\Lambda,0}\right],$$

or with normalization

$$\frac{H^{2}}{H_{0}^{2}} = \Omega_{r}a^{-4} + \Omega_{m}a^{-3} + \Omega_{k}a^{-2} + \Omega_{\Lambda}.$$

$$|\Omega_{k}| \leq 0.01, \quad \Omega_{r} = 9.4 \cdot 10^{-5}, \quad \Omega_{m} = 0.32, \quad \Omega_{\Lambda} = 0.68$$

### Geodesics in FRW

$$\frac{dU^{\mu}}{ds} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}U^{\alpha}U^{\beta} = 0, \qquad \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} := \frac{g^{\mu\lambda}}{2}\left(\partial_{\alpha}g_{\beta\lambda} + \partial_{\beta}g_{\alpha\lambda} - \partial_{\lambda}g_{\alpha\beta}\right)$$

Or after $\frac{d}{ds}U^{\mu}\left(X^{\alpha}(s)\right) = \frac{dX^{\alpha}}{ds}\frac{\partial U^{\mu}}{\partial X^{\alpha}} = U^{\alpha}\frac{\partial U^{\mu}}{\partial X^{\alpha}}$,

$$U^{\alpha}\left(\frac{\partial U^{\mu}}{\partial X^{\alpha}} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}U^{\beta}\right) = 0.$$

$$P^\alpha \frac{\partial P^\mu}{\partial X^\alpha} = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta. \qquad P^\mu := mU^\mu$$

The homogeneity of the FRW background implies $\partial_i P^\mu = 0$, so

$$P^0 \frac{dP^\mu}{dt} = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta, = -\left(2\Gamma^\mu_{0j} P^0 + \Gamma^\mu_{ij} P^i\right) P^j,$$

so

$$P^j = 0 \Rightarrow \frac{dP^i}{dt} = 0.$$

for $\mu = 0$ because of $\Gamma^0_{0j} = 0$, we have $E\frac{dE}{dt} = -\Gamma^0_{ij} P^i P^j = -\frac{\dot a}{a} p^2$, so

$$\frac{\dot p}{p} = -\frac{\dot a}{a} \quad \Rightarrow \quad p \propto \frac{1}{a}.$$

$$p = E \propto \frac{1}{a} \quad \text{(massless particles)} \ ,$$

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2}} \propto \frac{1}{a} \quad \text{(massive particles)}$$

**О времени (????)**

**О конформном времени (?!)**

$$\eta := \int dt/a = \int \frac{da}{a} \frac{1}{H} \frac{a_0}{a}.$$

Note that in these $c = 1$ units, the conformal time doubles as the comoving size of the horizon. In an open universe, it is also related to the development angle by

$$\chi = \sqrt{-K}\eta$$

Asymptotic relations are often useful for converting values. Before curvature or $\Lambda$ domination, the conformal time

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{2\sqrt{2}}{k_{eq}} \left(\sqrt{1 + a/a_{eq}} - 1\right) \\ &= 2\left(\Omega_0 H_0^2\right)^{-1/2} \left(a_{eq}/a_0\right)^{1/2} \left(\sqrt{1 + a/a_{eq}} - 1\right) \end{aligned}$$

Back, the coordinate time (????? this might be wrong)

$$t = \int \frac{da}{a} \frac{1}{H}.$$

It also takes on simple asymptotic forms, e.g.

$$t = \frac{2}{3} \left(\Omega_0 H_0^2\right)^{-1/2} a_0^{-3/2} \left[\left(a + a_{eq}\right)^{1/2} \left(a - 2a_{eq}\right) + 2a_{eq}^{3/2}\right]. \quad \text{RD/MD}$$

### О расстояниях

**О метриках в космологии** Negatively (-) and positively (+) curved space:

$$\mathrm{d}\ell^2 = a^2\left[\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}^2 + k\frac{(\boldsymbol{x}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x})^2}{1-k\boldsymbol{x}^2}\right] := a^2\gamma_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j$$

$$\gamma_{ij} := \delta_{ij} + k\frac{x_i x_j}{1-k\cdot x_k x^k}, \qquad k := \begin{cases} 0 & \text{Euclidean} \\ +1 & \text{spherical} \\ -1 & \text{hyperbolic} \end{cases}$$

this is from $\mathrm{d}\ell^2 = a^2\left[\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}^2 \pm \mathrm{d}u^2\right], \quad \boldsymbol{x}^2 \pm u^2 = \pm 1.$

Or in polar coordinates:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\left(\,\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2\right),$$

$$\mathrm{d}\ell^2 = a^2\left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2} + r^2\,\mathrm{d}\Omega^2\right],$$

where $\mathrm{d}\Omega^2 := \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2$.

Or by $\chi$, which simplifies radial part

$$\mathrm{d}\chi := \mathrm{d}r/\sqrt{1-kr^2}$$

$$\mathrm{d}\ell^2 = a^2\left[\,\mathrm{d}\chi^2 + S_k^2(\chi)\mathrm{d}\Omega^2\right], \qquad S_k(\chi) := \left\{\begin{array}{cl} \operatorname{sh}\chi & k=-1 \\ \chi & k=0 \\ \sin\chi & k=+1 \end{array}\right. .$$

**On metric distance $d_m = S_k(\chi)$**

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - a^2(t)\left[\mathrm{d}\chi^2 + S_k^2(\chi)\mathrm{d}\Omega^2\right],$$

$$S_k(\chi) := \left\{\begin{array}{cl} R_0\operatorname{sh}(\chi/R_0) & k=-1 \\ \chi & k=0 \\ R_0\sin(\chi/R_0) & k=+1 \end{array}\right. .$$

$$\chi(z) = \int_{t_1}^{t_0}\frac{\mathrm{d}t}{a(t)} = \int_0^z\frac{\mathrm{d}z}{H(z)}$$

**On luminosity distance $d_L$ (??????)**

$$d_L = d_m(1+z)$$

$$F = \frac{L}{4\pi\chi^2}.$$

$$F = \frac{L}{4\pi d_m^2(1+z)^2} := \frac{L}{4\pi d_L^2},$$

**On angular diameter distance**

$$d_A = \frac{D}{\delta\theta} = \frac{d_L}{(1+z)^2}$$

$$d_A = \frac{d_m}{1+z}.$$

because $D = a\left(t_1\right)S_k(\chi)\delta\theta = \frac{d_m}{1+z}\delta\theta$

(вставлю мб картинку потом)

## 2.6 Об особых типичных конструкциях

(надежда, что есть такие гораздо более важные конструкции, чем все, что во 2й 1й части. Пока на всякий случай побудет раздел этот.)

### 2.6.1 О векторных расслоениях

(Лекции 1-2 Рослый)

### 2.6.2 О гомотопических группах

(Лекции 3-4 Рослый)

### 2.6.3 О связности в расслоении

(Лекции 5-6 Рослый)

### 2.6.4 Geometry and topology paradoxes in a nutshell

- Banach-Tarski paradox: A ball can be cut into a finite number of pieces and re-assembling the pieces will get two balls, each of equal size to the first. The von Neumann paradox is a two-dimensional version.

- Paradoxical set: A set that can be partitioned into two sets, each of which is equivalent to the original.

- Coastline paradox: the perimeter of a landmass is in general ill-defined.

- Coin rotation paradox: a coin rotating along the edge of an identical coin will make a full revolution after traversing only half of the stationary coin's circumference. The Banach-Tarski paradox: A ball can be decomposed and reassembled into two balls the same size as the original.

- Gabriel's Horn: or Torricelli's trumpet: A simple object with finite volume but infinite surface area. Also, the Mandelbrot set and various other fractals are covered by a finite area, but have an infinite perimeter (in fact, there are no two distinct points on the boundary of the Mandelbrot set that can be reached from one another by moving a finite distance along that boundary, which also implies that in a sense you go no further if you walk "the wrong way" around the set to reach a nearby point).

- Hausdorff paradox: There exists a countable subset C of the sphere S such that S\C is equidecomposable with two copies of itself.

- Hooper's paradox: An image with many pieces whose size is 32 $\mathrm{m}^2$, but drops down to 30 $\mathrm{m}^2$ when its pieces are rearranged

- Nikodym set: A set contained in and with the same Lebesgue measure as the unit square, yet for every one of its points there is a straight line intersecting the Nikodym set only in that point.

- Sphere eversion: A sphere can, topologically, be turned inside out.

### 2.6.5 О геометрии по Тёрстону (!?!??!)

(почитаю его книгу. мб даже увеличу раздел про темы его, там много интересного!)

# Part II
# Fundamentals of Differential Geometry

(!! эту часть переписывать просто полностью буду, пока над 1 частью работать буду)

## 3 Дифференциальные формы

### 3.1 Касательное пространство и дифференциал

(я удалил кучу теории, потому что потом лучше выгружу из нормальных лекций, это гораздо проще, чем переписывать то, что было.)

### 3.2 Интегрирование дифференциальный форм

(скорее всего по катанаеву писать буду)

#### 3.2.1 Разбиение единицы

(у иванова она вообще в топологии кстати.)

#### 3.2.2 Формула Стокса

**Теорема Стокса в двух словах** (тут же и укажу идею док-ва, пока про неё хз)

**Определение интеграла от формы** (тут давно вопрос был, типа мы так выходим к многообразию от евклидового пространства, да? то есть изначально всё в евклидовом задается, да?)

Интеграл дифференциальной формы $\nu \in \Omega^n_c(M)$ с компактным носителем по ориентированному $n$-мерному многообразию $M$ определяется с помощью разбиения единицы в окрестности носителя $\nu$

$$\rho_1 + \cdots + \rho_m = 1,$$

подчинённого некоторому набору положительно ориентированных карт как

$$\int_M \nu = \sum_i \int_M \rho_i \nu$$

где интегралы справа рассматриваются в координатных картах, содержащих носители соответствующих $\rho_i$.

что при сравнении интеграмов каждого слагаемого $\rho_i \sigma_j \nu$ в карте $U_i$ и в карте $V_j$ мы используем независимость интеграла от замены одних координат на другие (отображением $\psi_j \circ \varphi_i^{-1}$) с положительным якобианом, таким образом подтверждая корректность выражения.

Для ориентированного многообразия с краем $(M, \partial M)$ (край рассматривается с согласованной ориентацией) размерности n и формы $\alpha \in \Omega^{n-1}_c(M)$ выполняется

$$\int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha.$$

В этой формуле мы рассматриваем естественное гладкое вложение многообразий $i : \partial M \to M$ (см.

также задачу 6.107) и, строго говоря, в правой части равенства интегрируем $i^*\alpha$ по краю $\partial M$. Напомним, что в координатном представлении мы просто требуем продолжимости $\alpha$ на окрестность края и таким образом $i^*\alpha$ корректно опремелена.

Такое же соглашение применяется всякий раз, когда мы хотим интегрировать дифференциальную форму, заданную на одном многообразии, по его подмногообразию, то есть рассматривать образ некоторого гладкого инъективного (или даже необязательно инъективного) отображения $i : N \to M$ одного многообразия в другое и брать форму $i^*\alpha\,\text{На}\,N$

**идея замены переменных в интеграле от формы** Правила замены переменных в интеграле от формы говорят, что если мы хотим проинтегрировать форму в карте, отрицательной относительно данной ориентации многообразия, то мы можем это сделать, но нам нужно будет поменять знак получившегося выражения.

Также уточним, что такое интеграм формы нулевой степени с компактным носителем, то есть на самом деле функций с конечным носителем, по 0мерному многообразию.

Это просто сумма значений этой функции в точках 0-мерного многообразия, взятых со знаками, происходяшими из ориентации точек данного многообразия.

На практике форму по многообразию можно интегрировать без разбиения единицы, если если интегрировать её в карте, которая покрывает всё многообразие кроме множества меры нуль.

Например, сферу радиуса $R$ в $\mathbb{R}^3$ можно параметризовать почти всю как

$$x = R\cos\varphi\sin\vartheta, \quad y = R\sin\varphi\sin\vartheta, \quad z = R\cos\vartheta$$

при $0 < \varphi < 2\pi, 0 < \vartheta < \pi$ и интегрировать в указанном диапазоне. С учётом определения интеграла формы по многообразию и сделанных замечаний мы готовы доказать основную формулу про интегрирование дифференциальных форм.

**Определение интеграла не зависит от выбора системы положительных карт в данной ориентации и подчинённого им разбиения единицы** есть лемма о том, что определение интеграла не зависит от выбора системы положительных карт в данной ориентации и подчинённого им разбиения единицы.

Действительно.

Пусть у нас были карты $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ с подчинённым разбиением единицы $\rho_i : M \to \mathbb{R}^+$ и новые карты $\psi_j : V_j \to \mathbb{R}^n$ с подчинённым разбиением единицы $\sigma_j : M \to \mathbb{R}^+$.

Если мы выбрали другую систему с той же ориентацией, то якобианы переходов от старых к новым должны быть положительными.

Выпишем формулу

$$\sum_i \rho_i \left(\sum_j \sigma_j\right) = \sum_{i,j} \rho_i\sigma_j = \sum_j \sigma_j \left(\sum_i \rho_i\right)$$

которая позволяет от $\Delta$ вух разбиений единицы перейти к их обшему «подразбиению» $\{\rho_i\sigma_j\}_{i,j}$, и умножим её на $\nu$. Тогда мы можем написать

$$\sum_i \int_M \rho_i\nu = \sum_i \int_M \rho_i \left(\sum_j \sigma_j\right)\nu = \sum_i\sum_j \int_M \rho_i\sigma_j\nu = \sum_j \int_M \left(\sum_i \rho_i\right)\sigma_j\nu = \sum_j \int_M \sigma_j\nu$$

Внутренние знаки равенства интерпретируются как уже известная нам аддитивность интеграла в пределах координатной карты.

Выражение посередине подразумевает,

**Доказательство формулы Стокса** Используя разбиение единицы в окрестности носитемя $\alpha$ по лемме 6.123, подчинённое покрытию носителя $\alpha$ координатными окрестностями, мы сведём задачу к вопросу в коорАинатах, то есть к случаю $M=(-\infty,0]\times\mathbb{R}^{n-1}$ и $\partial M=\{0\}\times\mathbb{R}^{n-1}$ Рассмотрим случай $\alpha=f dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n$ И $d\alpha=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n$. Начав интегри- ровать по $x_1$, мы получим по теореме Фубини и формуле Ньютона- $\Lambda$ ейбница

$$\int_M\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n=\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left(\int_{-\infty}^0\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1\right)dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n=\int_{\partial M}f\left(0,x_2,\ldots,x_n\right)dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n$$

что доказывает теорему в этом случае.

Мы можем считать, что мы рассматривали связные координатные карты некоторого знака.

Отрицательность координатной карты могла внести знак «-» в левую часть формулы, но по определению ориентации на

краю в правой части тоже появится «-», так что формула в любом случае остаётся верной.

Если же $\alpha=f dx_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\cdots\wedge dx_n$ при $i>1$, то уже интегрирование по $x_i$ обнуляет мевую часть (по формуле Ньютона- $\wedge$ ейбница), а в правой части будет стоять нуль по определению, так как ограничение формы $\alpha$ на $\partial M$ окажется нулевым в силу того, что $dx_1\equiv 0$ на краю. Также заметим, что в координатной окрестности, в которой края не видно, левая часть равенства обрашается в нуль, как мы уже видели в доказательстве независимости определения интеграла дифференциальной формы от замены координат с положительным якобианом.

Правая часть в таких координатных окрестностях очевидно нулевая.

**формула Стокса для многообразий с углами (???)** карасев тупо упомянул, ничего не знаю)

Задача 6.140.

Распространите формулу Стокса на парамлелепипед в $\mathbb{R}^n$ и на симплекс

$$\{(x_1,\ldots,x_n):x_1,\ldots,x_n\geqslant 0,x_1+\cdots+x_n\leqslant 1\}$$

считая интеграл по краю как сумму интеграмов по граням с правимьной ориентацией. [[ Можно обобшить рассуждение в основном доказательстве на случай, когда локамьно множество, по которому интегрируют $d\alpha$, устроено как $(-\infty,0]^k\times\mathbb{R}^{n-k}$.]]

**формулировка для мнгообразий (??? хз, да чего пока что)** от мб Катанаева

формулу Стокса можно записать в виде

$$\int_{\partial\mathbb{U}}X^\alpha ds_\alpha=\int_{\mathbb{U}}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n\sqrt{|g|}\widetilde{\nabla}_\alpha X^\alpha$$

где ориентированный элемент площади гиперповерхности:

$$ds_\alpha:=\frac{1}{(n-1)!}dx^{\alpha_2}\wedge\cdots\wedge dx^{\alpha_n}\varepsilon_{\alpha\alpha_2\ldots\alpha_n}$$

Действительно

Пусть на многообразии задано векторное поле $X=X^\alpha\partial_\alpha$.

Тогда ему можно взаимно однозначно поставить в соответствие $(n-1)$ -форму:

$$A:=*X=\frac{1}{(n-1)!}dx^{\alpha_2}\wedge\cdots\wedge dx^{\alpha_n}\varepsilon_{\beta\alpha_2\ldots\alpha_n}X^\beta$$

Внешний дифференциал этой формы равен

$$\begin{aligned} dA &= \frac{1}{(n-1)!} dx^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_n} \partial_{\alpha_1} \left( \varepsilon_{\beta\alpha_2\ldots\alpha_n} X^\beta \right) = \\ &= dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \sqrt{|g|} \widetilde{\nabla}_\alpha X^\alpha \end{aligned}$$

Отсюда следует,

что формулу Стокса можно записать в виде

$$\int_{\partial \mathbb{U}} X^\alpha ds_\alpha = \int_{\mathbb{U}} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \sqrt{|g|} \widetilde{\nabla}_\alpha X^\alpha$$

где ориентированный элемент площади гиперповерхности:

$$ds_\alpha := \frac{1}{(n-1)!} dx^{\alpha_2} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_n} \varepsilon_{\alpha\alpha_2\ldots\alpha_n}$$

### частные случаи формулы Стокса

Рассмотрим частные случаи формулы Стокса.

**обзор частных случаев** Пример 3.7.7.

Пусть задана 1 -форма $A = dx^\alpha A_\alpha$ в трехмерном евклидовом про- сочно гладкой границей $\partial$ U.

Тогда обшая формула Стокса (3.86) принимает вид

$$\begin{aligned} &\oint_{\partial \mathbb{U}} dx^\alpha A_\alpha = \\ &= \int_{\mathbb{U}} \left[ dx^1 \wedge dx^2 \left( \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \right) + dx^1 \wedge dx^3 \left( \partial_1 A_3 - \partial_3 A_1 \right) + dx^2 \wedge dx^3 \left( \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 \right) \right] \end{aligned}$$

Если поверхность задана параметрически $x^\alpha = x^\alpha(u, v)$, то последний интеграл можно преобразовать к виду

$$\oint_{\partial \mathbb{U}} dx^\alpha A_\alpha = \int_{\mathbb{U}} du \wedge dv \sqrt{|g|} (\operatorname{rot} A, N)$$

где введен роток (3.65) 1-формы: $[\operatorname{rot} A]^\alpha := \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta A_\gamma$ и $N = N^\alpha \partial_\alpha$ - единичный вектор нормали.

Таким образом,

получена формула Стокса.

**обзор вычислительных формул**

**формула Ньютона-Лейбница** хз

6.20.

Частные случаи формулы Стокса и её применения.

Обсудим интеграл по многообразию и формулу Стокса в малых размерностях.

Одномерное компактное многообразие с краем (см.

задачу 6.111) - это просто набор кривых, диффеоморфных отрезкам или окружностям.

$\Delta$ мя определённости мы будем рассматривать кривую, параметризованную отрезком.

Формула Стокса для ориентированной кривой с начамом в точке $p$ и концом в точке $q$ сводится к утверждению

$$\int_\gamma df = f(q) - f(p)$$

которое конечно можно было бы доказать и непосредственно, рассмотрев интеграл в параметризации кривой и применив формулу Ньютона- $\Lambda$ ейбница.

**понятия ориентации нормальные** Задача 6.141.

Проверьте, что ориентация кривой, которую мы определяли при изучении кривых, и ориентация вложенной кривой как одномерного многообразия дают по сути одно и то же понятие.

**формула Грина** Отметим, что формально кривая не доджна иметь самопересечений, чтобы считаться вложенным многообразием в евклиовом пространстве, но выписанная формула очевидно верна без этого предположения, если мы интегрируем обратный образ $df$ по отрезку в параметризации.

Также кривую можно считать не бесконечно гладкой, а всего мишь кусочно непрерывно дифференцируемой, формула всё равно остаётся верной.

Перейдём к менее тривиамьному случаю.

$\Delta_{\text{ля компактной области}}$ $G \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей (представляющей из себя вложенное одномерное гладкое многообразие в $\mathbb{R}^2$), ориентированной так, что при движении по $\partial G$ область $G$ оказывается слева (это и есть правильная ориентация края $G$ в двумерном случае), верна формула Грина

$$\int_{\partial G} P dx + Q dy = \int_G \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

С помощью аккуратного предельного перехода можно обобшить это утверждение на области с кусочно-гладкой (или даже кусочно один раз непрерывно дифференцируемой) границей, многие полезные для практики обобшения можно получить в духе задачи 6.140. $\Delta_{1\text{ я компактной области}}$ $G \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей (то есть представляюшей из себя вложенное трёхмерное гладкое многообразие с краем в $\mathbb{R}^3$) верна формула ГауссаОстроградского

$$\int_{\partial G} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \int_G \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

Задача 6.142.

Проверьте, что ориентация $\partial G$ в формуле Гаусса-Остроградского должна быть такая, что в положительной карте на $\partial G$ с координатами $(u, v)$ вектор $[r'_u \times r'_v]$ торчит вовне $G$. для компактной двумерной поверхности с краем (то есть вложенного двумерного многообразия с краем) $S \subset \mathbb{R}^3$ верна формула Стокса в узком смысле

$$\int_{\partial S} P dx + Q dy + R dz = \int_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

Ориентация в данном случае в простых терминах может быть описана аналогично предыдущему случаю:

Задача 6.143.

Проверьте, что при согласованной ориентации поверхности и её края в трёхмерной формуле Стокса ориентирующий касательный вектор $\partial S$, ориентирующая нормамь $S$ (вида $[r'_u \times r'_v]$ для некоторых положительных координат $(u, v)$), и касательный вектор к $S$, направленный перпендикулярно $\partial S$ от $S$, должны образовывать правую тройку.

**о поверхностях и применимости формулы Стокса** Заметим, что на самом деле формула Стокса в $\mathbb{R}^3$ (а на самом деле и в больших размерностях) верна не только для вложенных двумерных многообразий, но и вообще $_\triangle$ всякого образа гладкого отображения $f : D \to \mathbb{R}^3$ области $D \subset \mathbb{R}^2$ с кусочно гладкой границей (даже не инъективного), если интеграмы мы понимаем как интеграмы обратных образов $f^*(\alpha)$ и $f^*(d\alpha)$ по $\partial D$ и $D$ соответственно.

Собственно, в такой формулировке вопрос сводится к формуле Грина на пмоскости.

$\Delta_{\text{ия практических применений}}$ полезно ослабить условия гладкости $f_{\Delta 0}$ непрерывной дифференцируемости, тогда $f$ надо равномерно приближать вместе с его первыми производными последовательностью гладких отображений $(f_k)$ по теореме 6.19 и переходить к пределу в интеграле, замечая, что в его координатном представлении используются производные $f$ не более чем первого порядка.

Поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$ в формуле Стокса в узком смысле может быть кусочно-гладкой, то есть «склеенной» из ориентированных кусков $S_i$ с кусочно гладкими краями так, что все минии склейки участвуют в двух из частей $\partial S_i$ с разными ориентациями.

Краем склеенной поверхности тогда считаются те части из $\partial S_i$, которые не участвовали в склейке.

При таком определении при сложении формул Стокса будут складываться и правые части, и левые части, с сокрашением интегралов по линиям склейки.

Формула Гаусса-Остроградского тоже может быть с некоторыми усилиями обобшена на случай, когда $\partial G$ является кусочно-гладкой поверхностью в описанном смысле, читатель может поразмышлять над этим самостоятельно, а также проверить, что у поверхности $\partial G$ не будет края в описанном выше кусочно-гладком смысле и убедиться, что бесконечную гладкость поверхности $S$ можно заменить на её однократную непрерывную дифференцируемость в параметрическом представлении.

**площадь области (??)** Задача 6.144.

$\Delta$ окажите, что площадь области, ограниченной замкнутой гладкой кривой без самопересечений $C \subset \mathbb{R}^2$, можно посчитать по формуле:

$$A = \pm \int_C x dy$$

где знак выбирается в зависимости от ориентации кривой. Задача 6.145.

* Четыре замкнутые кривые на плоскости

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$$

не имеют самопересечений и ограничивают области площадей $S_\alpha, S_\beta, S_\gamma, S_\delta$. Также оказалось, что в любой момент времени точки $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t), \delta(t)$ образуют квадрат в указанном порядке, ориентированный по часовой стрелке.

Как найти площадь одной из этих областей, зная площади трёх других? [[ Выпишите плошади по формуле Грина.

]]

**формула объема области** Задача 6.146.

$\Delta$ окажите, что объём области в $\mathbb{R}^3$, ограниченной гладкой связной вложенной поверхностью без края $S \subset \mathbb{R}^3$, можно посчитать по формуле:

$$A = \pm \int_S x dy \wedge dz$$

где знак выбирается в зависимости от ориентации поверхности, не забывая про положительность объёма.

При определении дифференциамьных форм на многообразии с краем мы требовами, чтобы в координатных картах дифференциамьная форма «чуть-чуть» продолжамась за край.

Иногда это ограничение может быть чрезмерным, в следуюшей задаче мы намечаем способ ослабить такое ограничение.

**Теорема Гаусса-Остароградского с точки зрения теоремы Стокса** Пример 3.7.8.

Пусть в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ с декартовыми координатами $x^\alpha$ задана 2 -форма $A = \frac{1}{2} dx^\alpha \wedge dx^\beta A_{\alpha\beta}$.

Рассмотрим двумерную компактную поверхность $\mathbb{U} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ с кусочно гладкой границей $\partial\mathbb{U}$.

Будем считать,

что поверхность задана параметрически $x^\alpha = x^\alpha(u, v)$.

Тогда общая формула Стокса (3.86) принимает вид

$$\frac{1}{2} \int_{\partial\mathbb{U}} dx^\alpha \wedge dx^\beta A_{\alpha\beta} = \int_{\mathbb{U}} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \left(\partial_1 A_{23} + \partial_2 A_{31} + \partial_3 A_{12}\right)$$

Как уже отмечалось 2-форма в трехмерном пространстве взаимно однозначно определяется векторным полем $A_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} X^\gamma$.

Интеграл в левой части равенства сводится к интегралу по поверхности от скалярного произведения вектора $X^\alpha$ на единичную нормаль $N = N^\alpha \partial_\alpha$ к поверхности (3.85).

Подынтегральное выражение в правой части (3.91) представляет собой дивергенцию от векторного поля

$$\partial_1 A_{23} + \partial_2 A_{31} + \partial_3 A_{12} = \partial_\alpha X^\alpha$$

Таким образом, окончательно получаем равенство

$$\int_{\partial\mathbb{U}} du \wedge dv \sqrt{|g|} X^\alpha N_\alpha = \int_{\mathbb{U}} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \partial_\alpha X^\alpha$$

где $\sqrt{|g|}$ - квадратный корень из индуцированной метрики (см.

пример [3.7.4).

Это есть формула Гаусса-Остроградского в трехмерном евклидовом пространстве.

**примеры работы с** $\mathbb{R}^4$ типа как раз с механикой много связи и настоящие приложения

круто, на этом этапе можно радоваться, так как теория кратного интеграла сделана, вот, научились ее применять и вводить.

основа на формах, ну и на общих определениях.

так что на этом моменте как раз приложения прорабатываем.

## 3.3 Векторный анализ

### 3.3.1 векторные поля

**pull-back**

**push-forward**

### 3.3.2 векторные операторы через дифференциальные формы

**сама конструкция** Имеется два отображения: $d$ - внешнее дифференцирование, которое переводит форму в форму степенью выше, и $*$ - звездочка Ходжа, которая из формы $n-$ой степени сделает форму $(N-n)$-ой.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "d"] & \Lambda^1 \arrow[r, "d"] \arrow[rr, bend left, "*"] & \Lambda^2 \arrow[r, "d"] & \Lambda^3 \arrow[r, "d"] \arrow[ll, bend left, "*"] & 0
\end{tikzcd} \tag{1}$$

**дивергенция на языке форм** Функции - это формы нулевой степени.

Попробуем обратно к ней же и прийти, погуляв по нашей схеме.

Сделать это можно следующей последовательностью, которую обозначим оператором Лапласа:

$$\Delta f = *d(*df)$$

### 3.3.3 дивергенция

Пусть имеется форма третьей степени

$$\tau = dx \wedge dy \wedge dz$$

$$A = A_x\partial_x + A_y\partial_y + A_z\partial_z$$

$$d_{\imath A}\tau = (\operatorname{div} A)\cdot\tau$$

$$\begin{gathered}
{}^2A^\top = \tau(A) = dx \wedge dy \wedge dz\,(A_x\partial_x + A_y\partial_y + A_z\partial_z) = A_x dx \wedge dy \wedge dz\,(\partial_x) + \\
+A_y dx \wedge dy \wedge dz\,(\partial_y) + A_z dx \wedge dy \wedge dz\,(\partial_z) = A_x dy \wedge dz + A_y dz \wedge dx + A_z dx \wedge dy
\end{gathered}$$

$$dz_A\tau = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\tau, \quad \operatorname{div} A = \partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z$$

$$\tau' = \det\left(\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta}\right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \equiv \det \Lambda^\alpha_\beta dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

## 3.4 гомологический анализ форм

### 3.4.1 замкнутые и точные формы

#### Всякий инвариантный полином является одновременно замкнутой и точной формой

(?? не вникал особо)

В оставшейся части этого раздела мы докажем утверждение о том, что всякий инвариантный полином является одновременно замкнутой и точной формой.

Определим инвариантный полином как такой полином, который удовлетворяет условию $P(\alpha) = P\left(g^{-1}\alpha g\right)$ Начнем с определения однородного инвариантного полинома степени $r$, зависяшего от форм $\alpha_i$: $P = P\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\right)$

Продифференцируем этот полином, тщательно выписывая производные каждой формы, содержашейся в $P$:

$$dP = \sum_{1 \le i \leqslant r} (-1)^{d_1+\ldots+d_i-1} P\left(\alpha_1, \ldots, d\alpha_i, \ldots, \alpha_r\right)$$

Всякий раз, когда оператор производной $d$ проходит над формой $\alpha_i$, он приобретает соответствующий множитель:

$$d\alpha_i = (d\alpha_i) + \alpha_i d(-1)^{d_i}$$

Теперь предположим, что

$$\alpha \to g^{-1}\alpha g$$

Для $g$, близких к единице, всегда можно записать $g = 1 + \omega$

$$\delta\alpha = -\omega \wedge \alpha + \alpha \wedge \omega$$

Вычислим вариацию однородного полинома $P$ степени $r$ при таком сДвиге:

$$\delta P\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\right) = 0 = \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} (-1)^{d_1 + \ldots d_{i-1}} \left[P\left(\alpha_1 \alpha_2, \ldots, \omega \wedge \alpha_i, \ldots, \alpha_r\right)\right.$$
$$\left.-(-1)^{d_i} P\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i \wedge \omega, \ldots, \alpha_r\right)\right] (\text{П.3.}$$

Фокус теперь будет состоять в том, что мы сложим вклады от $dP$ и от $\delta P$:

$$dP + \delta P = \sum_{1 \leq i \leqslant r} (-1)^{d_1 + \ldots + d_i} P\left(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, D\alpha_i, \ldots, \alpha_r\right)$$

Теперь положим, что каждая $\alpha_i$ является формой кривизны, подчиняюшейся тождеству Бьянки $D\alpha_i = 0$. Таким образом, получаем $dP(\Omega) = 0$ что и утверждалось.

Вторая часть доказательства несколько сложнее.

Определим $\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$ $\Omega = d\omega' + \omega \wedge \omega'$ Теперь наш план состоит в том, чтобы для некоторой формы показать выполнение равенства

$$P\left(\Omega'\right) - P(\Omega) = dQ$$

Сначала мы хотим выписать форму кривизны, позволяюшую непрерывно интерполировать между $\Omega$ и $\Omega'$. Пусть

$$\omega_t = \omega + t\eta$$

$\eta^{-} = \omega' - \omega.$

Заметим, что переменная $t$ позволяет интерполировать между этими двумя формами:

$$t = 0 \to \omega_t = \omega$$
$$t = 1 \to \omega_t = \omega'$$

Теперь легко найти форму кривизны, осуществляюшую эту интерполяцию, как функцию $t$:

$$\Omega_t = d\omega_t + \omega_t \wedge \omega_t$$

где

$$t = 0 \to \Omega_t = \Omega$$

Эта форма изменяется между $\Omega$ и $\Omega'$, когда $t$ изменяется от нуля до единицы.

Теперь выпишем форму $q$, такую что

$$q(\beta, \alpha) = rP(\beta, \alpha, \alpha \ldots (r - 1\text{раз}) \ldots \alpha)$$

где форма $\alpha$ повторяется $r - 1$ раз в инвариантном полиноме.

Эта форма $q$ будет играть ключевую роль в доказательстве того, что $P$ является точной формой. В силу приведенного выше рассуждения при дифференцировании

$q$ получим

$$\begin{aligned} dq\left(\eta,\Omega_t\right) =& rdP\left(\eta,\Omega_t\ldots(r-1\text{раз})\ldots\Omega_t\right) = q\left(D\eta,\Omega_t\right) - \\ & - r(r-1)tP\left(\eta,\Omega_t\wedge\eta-\eta\wedge\Omega_t,\Omega_t\ldots,\Omega_t\right). \end{aligned}$$

Но в силу того факта, что $q$ является инвариантным полиномом, мы получаем также тождество

$$2q\left(\eta\wedge\eta,\Omega_t\right)+r(r-1)P\left(\eta,\Omega_t\wedge\eta-\eta\wedge\Omega_t,\ldots,\Omega_t\right)=0$$

В (П.3.43) мы использовали

$$q=1+\eta$$

Собирая вместе оба эти уравнения, находим

$$dq\left(\eta,\Omega_t\right)=q\left(D\eta,\Omega_t\right)+2tq\left(\eta\wedge\eta,\Omega_t\right)=\frac{dP\left(\Omega_t\right)}{dt}$$

Таким образом, мы приходим к следующему результату:

$$\int_0^1\frac{dP\left(\Omega_t\right)}{dt}=P\left(\Omega'\right)-P(\Omega)=d\int_0^1 q\left(\omega'-\omega,\Omega_t\right)dt=dQ$$

Итак, мы получили наш окончательный результат:

$$\begin{gathered} P\left(\Omega'\right)-P(\Omega)=dQ \\ Q=\int_0^1 q\left(\omega'-\omega,\Omega_t\right)dt+\text{замкнутые формы} \end{gathered}$$

Таким образом, инвариантный полином, основанный на два-формах кривизны, является одновременно замкнутой и точной формой.

### 3.4.2 когомологии де рама

# 4 Основы римановой геометрии

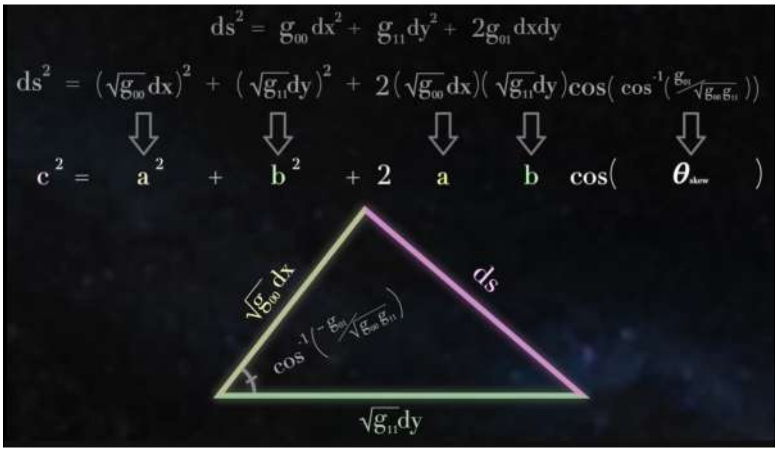
(потом изменю деление на главы)

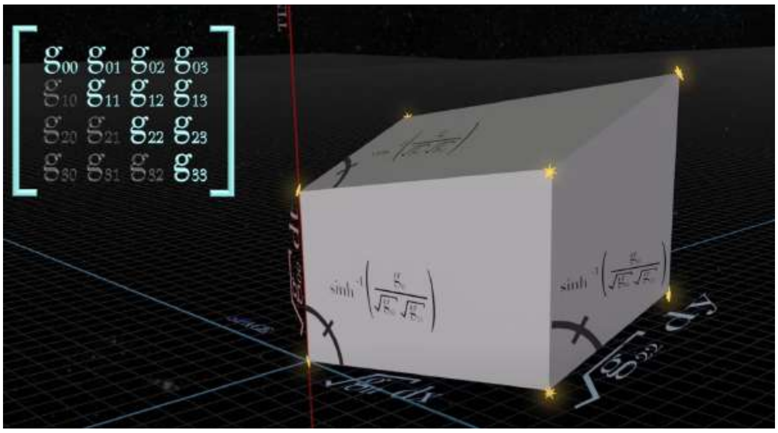
## 4.1 Метрика

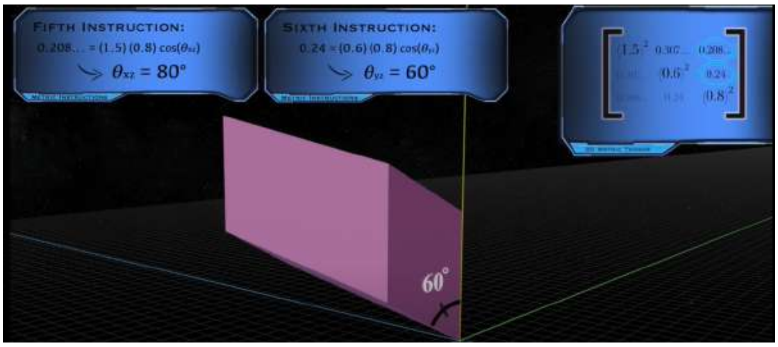
### 4.1.1 Интуитивное понимание метрики

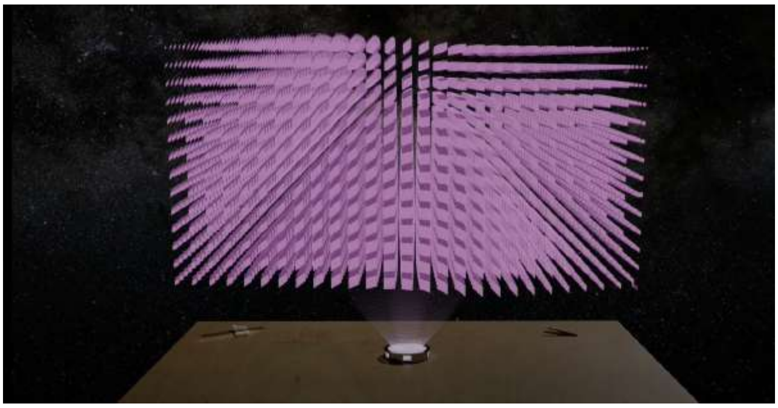
(потом напишу четко, книги по диффгему проверить лучше бы)

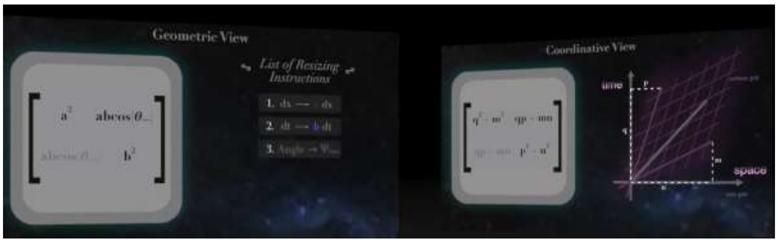
## Иллюстрация метрики

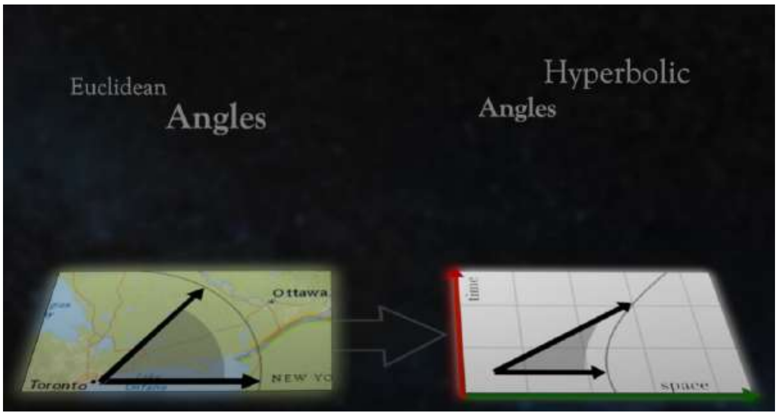




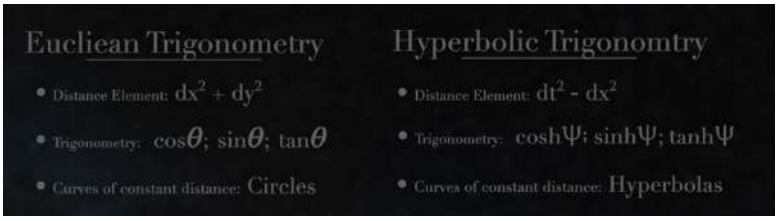







Euclidean Angles

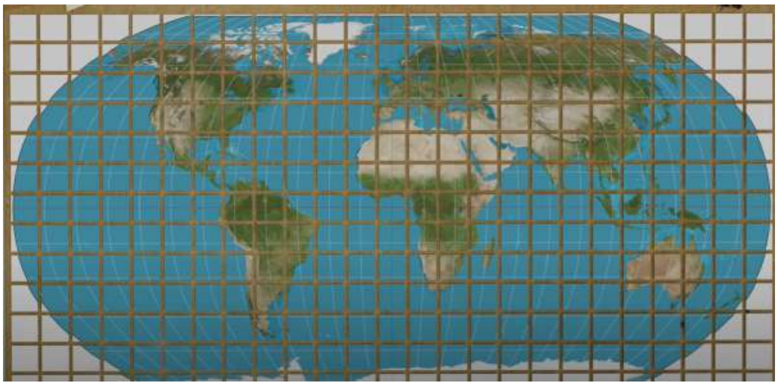
Hyperbolic Angles

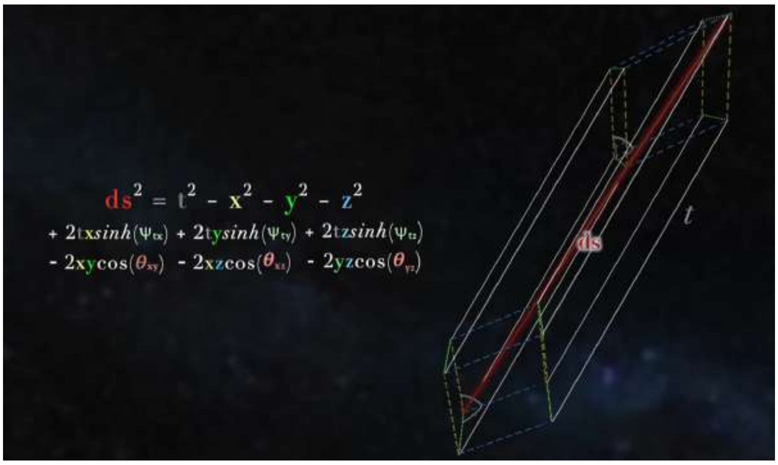

Eucliean Trigonometry

- Distance Element: $dx^2 + dy^2$
- Trigonometry: $\cos\theta$; $\sin\theta$; $\tan\theta$
- Curves of constant distance: Circles

Hyperbolic Trigonomtry

- Distance Element: $dt^2 - dx^2$
- Trigonometry: $\cosh\Psi$; $\sinh\Psi$; $\tanh\Psi$
- Curves of constant distance: Hyperbolas





### 4.1.2 Индуцированная метрика

#### типичные способы получения индуцированной метрики

#### индуцированная метрика с помощью разбиения единицы (???)

### 4.1.3 изометрии метрик

#### определение

легко написать, потом напишу.

#### обзор применений

### 4.1.4 метрики

#### метрика на сфере

#### обзор метрик в общей теории относительности

### 4.1.5 Обзор метрики

#### связь метрики с топологией

### 4.1.6 примеры актуальных многообразий и метрик

#### сфера

наиболее простая фигура, которая отражает происходящее - это сфера.

**итоговые свойства** ???

**получение индуцированной метрики** Необходимо посчитать формулу:

$$g_{\alpha\beta} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}, \frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\right)$$

Где $g = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} \otimes dx^{\beta}$
имеем координаты сферы.
.....
таким образом, считаем
....

## 4.2 Аффинная связность (!!!)

(конспект Володи тут)

### 4.2.1 Основная конструкция

#### определение аффинной связности

Аффинной связностью $\nabla$ называется билинейное отображение векторных полей $\varkappa(M)$ на дифференцируемом многообразии $M$

$$\nabla : \varkappa(M) \times \varkappa(M) \to \varkappa(M),$$

такое, что для любых гладких функций $f, g \in C^\infty(M)$ и для любых векторных полей $X, Y, Z \in \varkappa(M)$ справедливо:

(1) $f$-линейность по первому аргументу: $\nabla(fX + gY, Z) = f\nabla(X, Z) + g\nabla(Y, Z)$,

(2) правило Лейбница по второму аргументу: $\nabla(X, fY) = f\nabla(X, Y) + X(f)Y$.

Эти правила естественные, потому что это мы и видим в производной (? тут хз, я не настолько хорошо разбираюсь в производных, чтобы эти вещи были естественными)

Далее ковариантную производную будем обозначать посредством $\nabla(X, Y) := \nabla_X Y$.

(?? что там про симметричность ков. пр?)

#### О тензорности ковариантной производной

ковариантная производная функции есть простое дифференцирование по направлению, но в случае тензорных полей это не так

(????)

Из правила Лейбница ясно, что ковариантная производная функции есть простое дифференцирование по направлению, то есть

$$\nabla_X f = X(f) = df(X) = \text{Ł}_X f$$

(? а что такое дифференцирование по направлению?)

(????) В общем случае произвольных тензорных полей ковариантная производная и производная Ли не совпадают. (???) что видно уже из того, что ковариантная производная векторного поля $\nabla_X Y$ является $f$ -линейной по вектору $X$, в отличие от производной Ли $\text{Ł}_X Y$.

Иначе говоря, значение $\nabla_X Y$ в точке зависит только от значения $X$ в той же точке, но не от производных $X$.

(?? тут подробнее пропишу, когда умным стану)

Кроме того, видно, что хотя символы аффинной связности не являются компонентами тензора, но их антисимметричная часть $\Gamma^\alpha_{[\mu\nu]}$ образует смешанный анти-симметричный по перестановке нижних индексов тензор.

#### Компоненты аффинной связности или кристоффеля

(?? это ведь самое настоящее их определение??? не через геодезические?)

Часто используются так называемые символы Кристоффеля $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$, определяемые как:

$$\nabla_\alpha e_\beta \equiv \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} e_\gamma$$

Кристоффеля полезны для записи ковариантной производной векторного поля $\nabla_X Y$ в координатах. Запишем его, помня, что базис в пространстве векторный полей $\varkappa(M)$, как известно, имеет вид $\{e_\alpha\} = \{\partial_\alpha\}$:

$$\nabla_X Y = \nabla_X \left(Y^\beta e_\beta\right) = \nabla_X \left(Y^\beta\right) e_\beta + Y^\beta \left(\nabla_X e_\beta\right) = X^\alpha \partial_\alpha Y^\beta e_\beta + X^\alpha Y^\beta \nabla_{e_\alpha} e_\beta$$

введем $\nabla_{e_\alpha} := \nabla_\alpha$, и получаем

$$\nabla_X Y = X^\alpha \nabla_\alpha Y = X^\alpha \left(\partial_\alpha Y^\gamma + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} Y^\beta\right) e_\gamma$$

или

$$(\nabla_\alpha Y)^\gamma := \nabla_\alpha Y^\gamma = \partial_\alpha Y^\gamma + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} Y^\beta$$

(тут пара слов про то, что с того, что так записали?)

#### Кристоффеля не тензор (?)

Символы Кристоффеля не являются компонентами какого-нибудь смешанного тензора третьего ранга. Действительно, в новых координатах ковариантную производную базисного вектора можно записать как

$$\nabla'_\alpha e'_\beta = \Gamma'^\gamma_{\alpha\beta} e'_\gamma$$

Имея в виду, что $e'_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} e_\beta$, получаем

$$\Gamma'^\gamma_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\gamma} e_\lambda = \nabla'_\alpha e'_\beta = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} e_\lambda + \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta} e_\lambda$$

#### Ковариантная производная дифференциальной формы

Ковариантная производная от дифференциальной формы $\omega$ первой степени на $M$ имеет вид:

???.

Действие ковариантной производной $\nabla_X$ на дифференциальных формах первой степени определяется из требования выполнения правила Лейбница для канонического умножения 1-форм на векторные поля:

$$\left(\nabla_X \omega\right)(Y) = \nabla_X(\omega(Y)) - \omega\left(\nabla_X Y\right) = X(\omega(Y)) - \omega\left(\nabla_X Y\right)$$

Перепишем последнюю формулу в терминах локальных координат.

$$X^\mu \nabla_\mu \omega_\nu Y^\nu = X^\mu \partial_\mu \left(Y^\nu \omega_\nu\right) - X^\mu \omega_\nu \left(\nabla_\mu Y^\nu\right) = X^\mu \left(\partial_\mu \omega_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \omega_\lambda\right) Y^\nu,$$

откуда

$$\nabla_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \omega_\lambda.$$

Нетрудно заметить, что эта формула отличается от ковариантной производной векторного поля знаком при компонентах аффинной связности.

На формы высшей степени коваринатную производную тоже можно распространить, потребовав выполнения правила Лейбница для внешнего умножения форм.

#### Ковариантная производная тензорных полей

Также можно распространить определение ковариантной производной по правилу Лейбница на тензорные поля:

$$\begin{gathered}\nabla_\alpha t^{\mu_1 \ldots \mu_p}{}_{\nu_1 \ldots \nu_q} = \partial_\alpha t^{\mu_1 \ldots \mu_p}{}_{\nu_1 \ldots \nu_q} + \gamma^{\mu_1}_{\alpha\beta_1} t^{\beta_1 \mu_2 \ldots \mu_p}{}_{\nu_1 \ldots \nu_q} + \ldots + \gamma^{\mu_p}_{\alpha\beta_p} t^{\mu_1 \cdots \mu_{p-1} \beta_p} \nu_1 \ldots \nu_q - \\ -\Gamma^{\gamma_1}_{\alpha\nu_1} t^{\mu_1 \ldots \mu_p} \Gamma_1 \nu_2 \ldots \nu_q - \ldots - \Gamma^{\gamma_q}_{\alpha\nu_q} t^{\mu_1 \ldots \mu_p} \nu_1 \ldots \nu_{q-1} {\Gamma_q}'\end{gathered}$$

(??? я хз, зачем это нужно и что тут происходит, не до этого)

#### Сама по себе ковариантная производная не тензор

Замечание. Несмотря на то, что значение оператора ковариантной производной на каждом тензорном поле является тензором, (???? что есть сам по себе оператор?) сам по себе оператор ковариантной производной тензором не является.

я не понял, почему так.

#### Обзор обобщений аффинной связности

(?? говорят, есть обобщения,)

а может и нет, узнаю что-то - пропишу сюда.

### 4.2.2 Дополнения о ковариантной производной

(тут разные идеи, которые пока не смотрел, ибо они не актуальные)

#### Ковариантная производная спин-тензорных полей

хз вообще.

#### О заблуждениях про ковариантную производную

(Соберу их, наверняка их много)

### 4.2.3 Дополнения о ковариантной производной (??)

(то, что пока подвисло, как сделаю основное, поищу, что же это)

#### упорядоченная экспонента

#### Группа голономии, локальная и глобальная

#### Плоская связность

#### Ковариантная производная связывает два многообразия

прослушал

### 4.2.4 символы Кристоффеля

Приведем короткую теорию, которая их описывает.

#### мотивация

очень важно взять и пройти их наконец-то!

#### основные формулы

#### примеры кристоффелей

## 4.3 Кривизна Римана

### 4.3.1 суть кручения и кривизны

(?? пока плаваю в этом)

### Определение кривизны

Кривизной аффинной связности называется отображение $R : x(M) \times x(M) \to x(M)$, определяемое формулой

$$R(X,Y) = \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$$

Для некоторой формы $\omega$ первой степени и векторных полей $X, Y, Z$ определим

$$R(\omega, X, Y, Z) = \omega \left( \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \right)$$

### О евклидовой связности

Аффинная связность с нулевой кривизной называется евклидовой.
и что с ними?

### Алгебраически определенные кручение и кривизна действительно тензоры

(!!! см ниже нормальную верстку Тонга этого вопроса!!!)
Явными вычислениями проверим, что $T$ и $R$ действительно являются тензорами.
Для этого необходимо показать, что они линейны по всем аргументам.
$\mathbb{R}$ -линейность $T$ и $R$ по всем аргументам ясна из последних формул.
Посмотрим, что происходит при умножении на гладкую функцию $f$.
Для кручения имеем

$$\begin{gathered} T(f\omega, X, Y) = f\omega \left( \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \right) = fT(\omega, X, Y) \\ T(\omega, fX, Y) = \omega \left( f\nabla_X Y - f\nabla_Y X - Y(f)X - f[X,Y] + Y(f)X \right) = fT(\omega, X, Y). \end{gathered}$$

В последнем выражении учтено, что $[fX, Y] = f[X,Y] - Y(f)X$.

Аналогично

$$T(\omega, X, fY) = \omega \left( f\nabla_X Y + X(f)Y - f\nabla_Y X - f[X,Y] - X(f)Y \right) = fT(\omega, X, Y)$$

Для кривизны получаем

$$\begin{aligned} & R(f\omega, X, Y, Z) = f\omega \left( \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \right) = fR(\omega, X, Y, Z) \\ & \quad R(\omega, fX, Y, Z) = R(\omega, X, fY, Z) = \omega \left( f\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \left( f\nabla_X Z \right) - \nabla_{(f[X,Y]-Y(f)X)} Z \right) = \\ & = \omega \left( f\nabla_X \nabla_Y Z - f\nabla_Y \nabla_X Z - Y(f)\nabla_X Z - f\nabla_{[X,Y]} Z + Y(f)\nabla_X Z \right) = fR(\omega, X, Y, Z) \\ & R(\omega, X, Y, fZ) = \omega \left( f\nabla_X \nabla_Y Z + X(f)\nabla_Y Z + Y(f)\nabla_X Z + X(Y(f))Z - \right. \\ & \quad - f\nabla_Y \nabla_X Z - Y(f)\nabla_X Z - Y(X(f))Z - X(f)\nabla_Y Z - \\ & \quad \left. - f\nabla_{[X,Y]} Z - X(Y(f))Z + Y(X(f)) \right) = fR(\omega, X, Y, Z). \end{aligned}$$

Таким образом, и кручение, и кривизна являются тензорами.

To demonstrate that $T$ and $R$ are indeed tensors, we need to show that they are linear in all arguments. Linearity in $\omega$ is straightforward. For the others, there are some small calculations to do. For example, we must show that $T(\omega; fX, Y) = fT(\omega; X, Y)$. To see this, we just run through the definitions of the various objects,

$$T(\omega; fX, Y) = \omega \left( \nabla_{fX} Y - \nabla_Y (fX) - [fX, Y] \right)$$

We then use $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$ and $\nabla_Y (fX) = f\nabla_Y X + Y(f)X$ and $[fX, Y] = f[X,Y] - Y(f)X$. The two $Y(f)X$ terms cancel, leaving us with

$$\begin{aligned} T(\omega; fX, Y) &= f\omega \left( \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \right) \\ &= fT(\omega; X, Y) \end{aligned}$$

Similarly, for the curvature tensor we have

$$\begin{aligned} R(\omega; fX, Y, Z) &= \omega\left(\nabla_{fX}\nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_{fX} Z - \nabla_{[fX,Y]} Z\right. \\ &= \omega\left(f\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \left(f\nabla_X Z\right) - \nabla_{(f[X,Y]-Y(f)X)} Z\right) \\ &= \omega\left(f\nabla_X \nabla_Y Z - f\nabla_Y \nabla_X Z - Y(f)\nabla_X Z - \nabla_{f[X,Y]} Z + \nabla_{Y(f)X} Z\right) \\ &= \omega\left(f\nabla_X \nabla_Y Z - f\nabla_Y \nabla_X Z - Y(f)\nabla_X Z - f\nabla_{[X,Y]} Z + Y(f)\nabla_X Z\right) \\ &= f\omega\left(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z\right) \\ &= fR(\omega; X, Y, Z) \end{aligned}$$

Linearity in $Y$ follows from linearity in $X$. But we still need to check linearity in $Z$,

$$\begin{aligned} R(\omega; X, Y, fZ) =& \omega\left(\nabla_X \nabla_Y (fZ) - \nabla_Y \nabla_X (fZ) - \nabla_{[X,Y]}(fZ)\right) \\ =& \omega\left(\nabla_X \left(f\nabla_Y Z + Y(f)Z\right) - \nabla_Y \left(f\nabla_X Z + X(f)Z\right)\right. \\ & \quad \left. - f\nabla_{[X,Y]} Z - [X,Y](f)Z\right) \\ =& \omega\left(f\nabla_X \nabla_Y + X(f)\nabla_Y Z + Y(f)\nabla_X Z + X(Y(f))Z\right. \\ & \quad - f\nabla_Y \nabla_X Z - Y(f)\nabla_X Z - X(f)\nabla_Y Z - Y(X(f))Z \\ & \quad \left. - f\nabla_{[X,Y]} Z - [X,Y](f)Z\right) \\ =& fR(\omega; X, Y, Z) \end{aligned}$$

Thus, both torsion and curvature define new tensors on our manifold.

### Компоненты кривизны и кручения

Вы пишем компоненты этих тензоров в координатном базисе.

Компонентами кручения являются

$$T^\alpha_{\mu\nu} = T\left(dx^\alpha, e_\mu, e_\nu\right) = dx^\alpha\left(\nabla_\mu e_\nu - \nabla_\nu e_\mu - [e_\mu, e_\nu]\right) = \gamma^\alpha_{\mu\nu} - \gamma^\alpha_{\nu\mu} = 2\gamma^\alpha_{[\mu\nu]} = -T^\alpha_{\nu\mu}$$

В последнем выражении учтено, что $[e_\mu, e_\nu] = [\partial_\mu, \partial_\nu] = 0$.

Кроме того, видно, что хотя символы аффинной связности не являются компонентами тензора, но их антисимметричная часть $\Gamma^\alpha_{[\mu\nu]}$ образует смешанный анти-симметричный по перестановке нижних индексов тензор.

### Связности, свободные от кручения

Аффинные связности, компоненты которых симметричны по перестановкам нижних индексов: $\gamma^\alpha_{\mu\nu} = \gamma^\alpha_{\nu\mu}$, имеют нулевое кручение $T^\alpha_{\mu\nu} = 0$.

Такие аффинные связности называются связностями, свободными от кручения.

### Тензор Римана через производные (????)

откуда формула ниже: (???)

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = 2\partial_{[\mu}\Gamma^\alpha_{\nu]\beta} + 2\Gamma^\alpha_{[\mu|\lambda|}\Gamma^\lambda_{\nu]\beta}$$

Компоненты тензора кривизны в координатном базисе определяются согласно

$$\begin{aligned} R^\alpha_{\beta\mu\nu} =& R\left(dx^\alpha, e_\mu, e_\nu, e_\beta\right) = \\ =& dx^\alpha\left(\nabla_\mu \nabla_\nu e_\beta - \nabla_\nu \nabla_\mu e_\beta\right) = dx^\alpha\left(\nabla_\mu\left(\Gamma^\sigma_{\nu\beta} e_\sigma\right) - \nabla_\nu\left(\Gamma^\sigma_{\mu\beta} e_\sigma\right)\right) = \\ =& dx^\alpha\left(\partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\beta} e_\lambda + \Gamma^\lambda_{\nu\beta}\Gamma^\sigma_{\mu\lambda} e_\sigma - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\beta} e_\lambda - \Gamma^\lambda_{\mu\beta}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} e_\sigma\right) = \\ =& \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\nu\beta} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\beta} + \Gamma^\lambda_{\nu\beta}\Gamma^\alpha_{\mu\lambda} - \Gamma^\lambda_{\mu\beta}\Gamma^\alpha_{\nu\lambda} = \\ =& - R^\alpha_{\beta\nu\mu} \end{aligned}$$

Из последнего выражения видно, что $R^\alpha_{\beta\mu\nu} = R^\alpha_{\beta[\mu\nu]^*}$.

### О тождестве Риччи в общем случае

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\, Z^\sigma = R^\sigma_{\rho\mu\nu} Z^\rho - T^\rho_{\mu\nu} \nabla_\rho Z^\sigma$$

зачем оно - да хз пока что.

### Вывод тождества Риччи

Для вывода тождества Риччи, раскроем коммутатор $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\, Z^\sigma = 2\nabla_{[\mu}\nabla_{\nu]} Z^\sigma$: (?? проверю, если будет нужно)

$$\begin{aligned} \nabla_{[\mu}\nabla_{\nu]} Z^\sigma =& \partial_{[\mu} \left(\nabla_{\nu]} Z^\sigma\right) + \Gamma^\sigma_{[\mu|\lambda|} \nabla_{\nu]} Z^\lambda - \Gamma^\rho_{[\mu\nu]} \nabla_\rho Z^\sigma = \\ =& \partial_{[\mu}\partial_{\nu]} Z^\sigma + \left(\partial_{[\mu}\Gamma^\sigma_{\nu]\rho}\right) Z^\rho + \left(\partial_{[\mu} Z^\rho\right) \Gamma^\sigma_{\nu]\rho} + \Gamma^\sigma_{[\mu|\lambda|}\partial_{\nu]} Z^\lambda + \Gamma^\sigma_{[\mu|\lambda|}\Gamma^\lambda_{\nu]\rho} Z^\rho - \Gamma^\rho_{[\mu\nu]} \nabla_\rho Z^\sigma, \end{aligned}$$

и в этом выражении

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = 2\partial_{[\mu}\Gamma^\alpha_{\nu]\beta} + 2\Gamma^\alpha_{[\mu|\lambda|}\Gamma^\lambda_{\nu]\beta}, \quad T^\alpha_{\mu\nu} = 2\Gamma^\alpha_{[\mu\nu]},$$

так что имеем тождество Риччи

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\, Z^\sigma = R^\sigma_{\rho\mu\nu} Z^\rho - T^\rho_{\mu\nu} \nabla_\rho Z^\sigma.$$

### О фундаментальной теоремы римановой геометрии, утверждающей существование связности Леви-Чивита

Фундаментальная теорема римановой геометрии утверждает следующее.

**Теорема 1.** *В случае связности Леви-Чивита при наличии (полу)римановой структуры $g$ на многообразии $M$ существует единственная аффинная связность, свободная от кручения и совместимая в метрикой $g$, то есть*

$$\nabla_X g = 0$$

*для любого векторного поля $X$ на римановом многообразии $M$.*

*(о деталях этой теоремы потом подумаю)*

Такая аффинная связность называется связностью Леви-Чивита.

### доказательство фундаментальной теоремы римановой геометрии

(чет пока максимально лень смотреть)

Доказательство фундаментальной теоремы римановой геометрии начнем с записи ковариантных производных

$$\nabla_X (g(Y,Z)) = (\nabla_X g)\,(Y,Z) + g\,(\nabla_X Y, Z) + g\,(Y, \nabla_X Z) = g\,(\nabla_X Y, Z) + g\,(Y, \nabla_X Z)$$

Совершая циклическую перестановку векторных полей, получаем

$$\begin{aligned} X(g(Y,Z)) &= g\,(\nabla_X Y, Z) + g\,(Y, \nabla_X Z) \\ Y(g(Z,X)) &= g\,(\nabla_Y Z, X) + g\,(Z, \nabla_Y X) \\ Z(g(X,Y)) &= g\,(\nabla_Z X, Y) + g\,(X, \nabla_Z Y) \end{aligned}$$

Поскольку кручение отсутствует, то $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y] \quad \forall X, Y \in \kappa(M)$, а значит

$$\begin{aligned} X(g(Y,Z)) =& g\,(\nabla_Y X, Z) + g\,(Y, \nabla_X Z) + g([X,Y],Z) \\ Y(g(Z,X)) =& g\,(\nabla_Z Y, X) + g\,(Z, \nabla_Y X) + g([Y,Z],X) \\ Z(g(X,Y)) =& g\,(\nabla_X Z, Y) + g\,(X, \nabla_Z Y) + g([Z,X],Y) \end{aligned}$$

Отсюда

$$g\left(\nabla_Y X, Z\right) = \frac{1}{2}\big[X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) - g([X,Y],Z) - g([Y,Z],X) + g([Z,X],Y)\big].$$

В силу невырожденности (полу)римановой метрики последняя формула однозначно определяет аффинную связность на римановом многообразии и называется формулой Козюля.

(?? зачем формула Козюля???)

Действительно, проверим, например, свойство $f$-линейности ковариантной производной по первому аргументу:

$$\begin{aligned} g\left(\nabla_{fY} X, Z\right) =& \frac{1}{2}[fX(g(Y,Z)) + X(f)g(Y,Z) + fY(g(Z,X)) - \\ & -fZ(g(X,Y)) - Z(f)g(X,Y) - fg([X,Y],Z) - X(f)g(Y,Z) - \\ & -fg([Y,Z],X) + Z(f)g(X,Y) + fg([Z,X],Y)] = \\ =& g\left(f\nabla_Y X, Z\right) \end{aligned}$$

Остальные свойства аффинной связности проверяются аналогично.

Запишем формулу Козюля для базисных векторных полей, то есть вычислим

$$g\left(\nabla_\mu e_\nu, e_\alpha\right) = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} g_{\lambda\alpha} := \Gamma_{\alpha|\mu\nu}$$

Учитывая, что $[e_\alpha, e_\beta] = [\partial_\alpha, \partial_\beta] = 0$, получаем

$$\Gamma_{\alpha|\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}\right)$$

Поднимая индексы обратной метрикой $g^{\lambda\alpha}$ находим, что

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha}\left(\partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}\right)$$

Компоненты связности Леви- Чивита $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ или $\Gamma_{\lambda|\mu\nu}$ называются символами Кристоффеля.

Они, очевидно, симметричны по перестановке индексов $\mu$ и $\nu$.

### Тождество Риччи для связности Леви-Чивита

Тождество Риччи для связности Леви-Чивита имеет вид

$$\left[\nabla_\mu, \nabla_\nu\right] Z^\sigma = R^\sigma_{\rho\mu\nu} Z^\rho$$

### О проверке многообразия на евклидовость

Чтобы узнать, является ли пространство евклидовым в заданных координатах, необходимо вычислить тензор кривизны Римана: риманова кривизна евклидова пространства тождественно равна нулю, во всех точках.

Если многообразие $M$ являет собой просто евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, то существует глобальный базис, в котором риманова метрика имеет диагональный вид: $g_{\mu\nu} = \delta_{\alpha\beta}$, а символы Кристоффеля и тензор кривизны Римана обращаются в нуль во всех точках пространства; ковариантная производная в этом случае сводится к частной производной $\nabla_\mu \mapsto \partial_\mu$. значит

$$\left[\nabla_\mu, \nabla_\nu\right] Z^\sigma \mapsto \left[\partial_\mu, \partial_\nu\right] Z^\sigma \equiv 0,$$

поскольку частное дифференцирование перестановочно.

### обзор применений кривизны

### 4.3.2 О кручении

(тут всё про него)

### Определение кручения

Кручением аффинной связности $\nabla$ называется отображение $T : x(M) \times x(M) \to x(M)$, определяемое формулой

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y],$$

где через $[\bullet, \bullet]$ обозначается скобка Ли векторных полей.

Для неё необходимо, чтобы была задана связность.

Для некоторой формы $\omega$ первой степени и векторных полей $X, Y, Z$ определим

$$T(\omega, X, Y) = \omega\left(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]\right)$$

### обзор применений кручения

а хз, где нужна она.

### 4.3.3 Римановы многообразия

### 4.3.4 римановы объемы

### риманов объем шара

### риманов объем трехмерной сферы

### 4.3.5 Интегральные кривые

(пока с этим связка совсем слабая, знаю, что они только есть и всё)

## 4.4 Производная Ли (????)

(??? почему она второй раз написана уже???)

### 4.4.1 Производная Ли в двух словах

(пока просто разбираю, что написано, потом связно собирать буду. ставить раздел этот следует только после d и i!!!)

### Основные формулы производной Ли

### Суть производной Ли

(хз)

### Обзор определений производной Ли и связи между ними

(давно хотел бы написать)

### Алгебраическое определение производной Ли

Производная Ли $Ł_\xi$ вдоль векторного поля $\xi$ на дифференциальных формах определяется как антикоммутатор

$$Ł_\xi \equiv \{\imath_\xi, d\} = \imath_\xi d + d\imath_\xi$$

### Связь производной Ли и ковариантной производной (???)

Володя говорил, что в общем случае не существует, потом подробнее пропишу.

явное отличие следущее:

?? тут формула

Совпадают они тогда, когда (???)

## 4.4.2 Алгебраические свойства производной Ли

### Основные свойства производной Ли

Эта операция, очевидно, $\mathbb{R}$-линейна по векторным полям и дифференциальным формам, то есть $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ выносятся:

$$\begin{aligned}\text{Ł}_\xi\left(\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2\right) &= \lambda_1 \text{Ł}_\xi \omega_1 + \lambda_2 \text{Ł}_\xi \omega_2, \\ \text{Ł}_{(\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2)}\omega &= \lambda_1 \text{Ł}_{\xi_1}\omega + \lambda_2 \text{Ł}_{\xi_2}\omega,\end{aligned}$$

(проверю, как овладею d и i)

Однако, она не $f$-линейна: при умножении векторного поля $\xi$ или формы $\omega$ на гладкую функцию $f$, эта функция не просто выносится за скобки, а возникает дополнительный член $df \wedge \omega(\xi)$. Действительно,

$$\begin{aligned}\text{Ł}_{f\xi}\omega &= \imath_{f\xi} d\omega + d\imath_{f\xi}\omega \\ &= d\omega(f\xi) + d(\omega(f\xi)) = \\ &= f d\omega(\xi) + d(f\omega(\xi)) = \\ &= f d\imath_\xi \omega + f d\imath_\xi \omega + df \wedge \omega(\xi).\end{aligned}$$

### Правило Лейбница для производной Ли для обычного умножения (?)

(?? в общем виде??)

Правило Лейбница в частности есть способ действия производной Ли на произведение функций и форму:

$$\text{Ł}_\xi f\omega = f \text{Ł}_\xi \omega + \omega \cdot \xi(f)$$

Действительно, (????)

$$\begin{aligned}\text{Ł}_{f\xi}\omega &= f\text{Ł}_\xi\omega + df \wedge \iota_\xi \omega \\ \text{Ł}_\xi f\omega &= \imath_\xi d(f\omega) + d\imath_\xi(f\omega) = \\ &= \imath_\xi(df \wedge \omega + f d\omega) + d(f\imath\xi\omega) = \\ &= df(\xi)\cdot\omega - df \wedge \imath_\xi\omega + f \cdot \imath_\xi d\omega + df \wedge \tau_\xi\omega + f d\upsilon_\xi\omega = \\ &= f \cdot \text{Ł}_\xi\omega + \xi(f)\cdot\omega,\end{aligned}$$

то есть

$$\text{Ł}_\xi f\omega = f \text{Ł}_\xi \omega + \omega \cdot \xi(f)$$

Формула (1.73) выражает частный случай формулы Лейбница для производной Ли вдоль векторного поля $\xi$ от внешнего умножения дифференциальньх форм (здесь, 0-формы $f$ и дифференциальной формы $\omega$).

### Производная Ли гладкой функции (?)

Действительно, производная Ли гладкой функции по определению

$$\text{Ł}_\xi f = \imath_\xi df + di_\xi f = \imath_\xi df = df(\xi) = \xi(f)$$

поэтому формула (1.73) принимает вид

$$\text{Ł}_\xi(f \wedge \omega) = f \wedge \text{Ł}_\xi\omega + \text{Ł}_\xi f \wedge \omega$$

### Правило Лейбница для производной Ли в общем случае

В общем случае правило Лейбница для дифференциальных форм следует из соответствующих правил для внутреннего умножения и внешнего дифференцирования:

$$\begin{aligned} \imath_\xi(\omega\wedge\lambda) =& \imath_\xi\omega\wedge\lambda+(-1)^{\deg\omega}\omega\wedge z_\xi\lambda, \\ d(\omega\wedge\lambda) =& d\omega\wedge\lambda+(-1)^{\deg\omega}\omega\wedge d\lambda \\ \text{Ł}_\xi(\omega\wedge\lambda) =& \text{Ł}_\xi\omega\wedge\lambda+\omega\wedge \text{Ł}_\xi\lambda \end{aligned}$$

### Производная Ли от дифференциала *df*

Полезно также посмотреть действие производной Ли на дифференциал $df$:

$$\text{Ł}_\xi df = \imath_\xi d^2 f + d\imath_\xi df = dv_\xi df = d(df(\xi)) = d\text{Ł}_\xi f$$

(??? зачем это??)

(вроде тут как раз все свойства, их не так вроде много)

### Коммутирование производной Ли с внешним дифференцированием

Равенство (1.76) можно описать как коммутирование операции $\text{Ł}_\xi$ с внешним дифференцированием $d$ для функции, то есть

$$\left[\text{Ł}_\xi, d\right] f = \text{Ł}_\xi df - d\text{Ł}_\xi f = 0$$

Нетрудно показать равенство нулю коммутатора $[\text{Ł}_\xi, d]$ для форм любой степени.

Действительно,

$$\left[\text{Ł}_\xi, d\right]\omega = \text{Ł}_\xi d\omega - d\text{Ł}_\xi\omega = \imath_\xi d^2\omega + d\imath_\xi d\omega - di_\xi d\omega - d^2\imath_\xi\omega = 0$$

(потом посмотрю)

### Коммутирование производной Ли с внутренним умножением

Производная Ли $\text{Ł}_\xi$ коммутирует с операцией внутреннего умножения $\imath_\xi$ для форм любой степени, то есть:

$$\left[\text{Ł}_\xi, \iota_\xi\right]\omega = \text{Ł}_\xi\imath_\xi\omega - \imath_\xi\text{Ł}_\xi\omega = \imath_\xi d\imath_\xi\omega + di^\imath_\xi\omega\omega - i_\xi\imath_\xi d\omega - \imath_\xi d\imath_\xi\omega = 0.$$

Найдём выражение для производной Ли дифференциальной 1-формы $\lambda = \lambda_\mu dx^\mu$ вдоль векторного поля $\xi = \xi^\mu\partial_\mu$ в координатах.

$$\text{Ł}_\xi\lambda = \text{Ł}_{\xi^\nu\partial_\nu}\left(\lambda_\mu dx^\mu\right)$$

Из (???) (1.72) и (1.73) получаем

$$\begin{aligned} \text{Ł}_\xi\lambda =& \lambda_\mu\text{Ł}_\xi dx^\mu + \xi\left(\lambda_\mu\right)dx^\mu = \\ =& \lambda_\mu\xi^\nu\text{Ł}_{\partial_\nu}dx^\mu + \lambda_\mu d\xi^\nu\wedge dx^\mu\left(\partial_\nu\right) + \xi^\nu\frac{\partial\lambda_\mu}{\partial x^\nu}dx^\mu = \\ =& \lambda_\mu\frac{\partial\xi^\mu}{\partial x^\nu}dx^\nu + \xi^\mu\frac{\partial\lambda_\nu}{\partial x^\mu}dx^\nu = \\ =& \left(\lambda_\nu\partial_\mu\xi^\nu + \xi^\nu\partial_\nu\lambda_\mu\right)dx^\mu = \\ =& \text{Ł}_\xi\lambda_\mu dx^\mu \end{aligned}$$

$$\text{Ł}_\xi\lambda_\mu = \lambda_\nu\partial_\mu\xi^\nu + \xi^\nu\partial_\nu\lambda_\mu$$

(хз, потом посмотрю это)

### пример: производная Ли от 1-формы

$$L_X\omega_\gamma = \omega_\beta \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\gamma} + X^\beta \frac{\partial \omega_\gamma}{\partial x^\beta}$$

### производная Ли одного векторного поля вдоль другого

(??? тут я пока вообще хз)

Определим теперь производную Ли одного векторного поля вдоль другого векторного поля.

Для этого воспользуемся двойственностью между касательным и кокасательным пространствами в точке и определим векторное поле $\text{Ł}_\xi\eta$ (производная Ли $\eta$ по $\xi$) через его каноническое произведение на некоторую линейную 1-форму $\omega$: по сути потребуем выполнения формулы Лейбница

$$\text{Ł}_\xi(\omega(\eta)) = \xi(\omega(\eta)) = \left(\text{Ł}_\xi\omega\right)(\eta) + \omega\left(\text{Ł}_\xi\eta\right).$$

Из формулы (1.78) получаем

$$\omega\left(\text{Ł}_\xi\eta\right) = \imath_\xi d\imath_\eta\omega - \imath_\eta d\imath_\xi\omega - \imath_\eta\imath_\xi d\omega$$

Важно отметить, что при умножении 1-формы $\omega$ на функцию $f$ в выражении (1.79) правая часть равенства также умножается на функцию $f$. Для того, чтобы проверить данное утверждение, совершим в (1.79) замену $\omega \mapsto f\omega$:

$$f\omega\left(\text{Ł}_\xi\eta\right) = \imath_\xi d\imath_\eta(f\omega) - \imath_\eta d\imath_\xi(f\omega) - \imath_\eta^\imath\xi d(f\omega) = f\imath_\xi\imath_\xi d\imath_\eta\omega - f\imath_\eta d\imath_\xi\omega - fi_\eta^l\xi d\omega +$$

$$+\left(\imath_\xi(df)\right)\left(\imath_\eta\omega\right) - \left(\imath_\eta(df)\right)\left(\imath_\xi\omega\right) - \imath_\eta\imath_\xi(df\wedge\omega) = f\imath_\xi d\imath_\eta\omega - f\imath_\eta d\imath_\xi\omega -$$

$$-f\imath_\eta^2\xi d\omega + \left(\imath_\xi(df)\right)\left(\imath_\eta\omega\right) - \left(\imath_\eta(df)\right)\left(\imath_\xi\omega\right) - \left(\imath_\eta\omega\right)\left(\imath_\xi(df)\right) + \left(\imath_\eta(df)\right)\left(u_\xi\omega\right)$$

откуда, очевидно, получаем, что и требовалось.

Значит, зная выражение в правой части (1.79) для базисных форм $dx^\mu\left(\text{Ł}_\xi\eta\right)$, мы для произвольной 1-формы $\omega = \omega_\mu dx^\mu$ запишем его в виде

$$\omega\left(\text{Ł}_\xi\eta\right) = \omega_\mu dx^\mu\left(\text{Ł}_\xi\eta\right)$$

Это означает, что (1.80) корректно определяет производную Ли $\text{Ł}_\xi\eta$ в каждой точке $p \in M$ многообразия $M$ как линейный функционал на $T_p^\star M$ Координаты векторного поля $\text{Ł}_\xi\eta_{\text{в}}$ данной системе координат равны

$$\left(\text{Ł}_\xi\eta\right)^\mu = dx^\mu\left(\text{Ł}_\xi\eta\right) = \imath_\xi d\left(dx^\mu(\eta)\right) - \imath_\eta d\left(dx^\mu(\xi)\right)$$

$$\text{Ес}\,\eta = \eta^\nu\partial_\nu, \xi = \xi^\nu\partial_\nu, \text{ то}$$

$$\text{Ł}_\xi\eta^\mu = \imath_\xi d\eta^\mu - \imath_\eta d\xi^\mu = \partial_\nu\eta^\mu\cdot dx^\nu(\xi) - \partial_\nu\xi^\mu\cdot dx^\nu(\eta) = \xi^\nu\partial_\nu\eta^\mu - \eta^\nu\partial_\nu\xi^\mu,$$

окончательно,

$$\text{Ł}_\xi\eta^\mu = \xi^\nu\partial_\nu\eta^\mu - \eta^\nu\partial_\nu\xi^\mu$$

Если применить векторное поле $\text{Ł}_\xi\eta$ как дифференцирование функции $f$, то получим

$$\left(\text{Ł}_\xi\eta\right)f = df\left(\text{Ł}_\xi\eta\right) = \imath_\xi d\left(\imath_\eta df\right) - \imath_\eta d\left(\imath_\xi df\right) = \xi(\eta(f)) - \eta(\xi(f))$$

Видно, что с точки зрения дифференциальных операторов на функциях, производная Ли $\text{Ł}_\xi\eta$ - это коммутатор векторных полей $[\xi,\eta]$, то есть коммутатор соответствующих им дифференциальных операторов.

### кососимметричность и тождество Якоби (???)

Несложно проверить справедливость следующих свойств производной Ли $[\xi, \eta]$: кососимметричность:

$$[\xi, \eta] = -[\eta, \xi],$$

тождество Якоби:

$$[\xi, [\eta, \lambda]] + [\lambda, [\xi, \eta]] + [\eta, [\lambda, \xi]] = 0.$$

(????) Поэтому векторные поля образуют алгебру Ли относительно коммутатора (скобки Ли)

$$Ł_\xi \eta = [\xi, \eta]$$

### Скобка Ли от умножения векторных полей на функции (???)

Посмотрим теперь как ведёт себя скобка Ли векторных полей $[\xi, \eta]$ при умножении их на функции $f$ и $g$, то есть исследуем выражение $[f\xi, g\eta]$.

Для этого подействуем этой скобкой Ли на пробную функцию $\varphi$:

$$\begin{gathered}[f\xi, g\eta](\varphi) = f\xi(g\eta(\varphi)) - g\eta(f\xi(\varphi)) = f\xi(g)\eta(\varphi) + fg\xi(\eta(\varphi)) - \\ -g\eta(f)\xi(\varphi) - gf\eta(\xi(\varphi)) = fg[\xi, \eta](\varphi) - g\eta(f)\xi(\varphi) + f\xi(g)\eta(\varphi),\end{gathered}$$

откуда находим, что

$$[f\xi, g\eta] = fg[\xi, \eta] + f\xi(g)\eta - g\eta(f)\xi.$$

(??? и что с этого???)

## 4.4.3 производная Ли от различных объектов

### Производная Ли скалярного поля $Ł_\xi f$ есть производная по направлению $\xi(f)$

Производная Ли скалярного поля $Ł_\xi f$ есть производная по направлению $\xi(f)$.

(тут напишу, почему это так и мб комментарии)

### производная Ли от функций

### производная Ли от векторного поля

.....

$$(L_X Y)f = [X, Y]f$$

окажется, что она определяет алгебру Ли (?)

### Производная Ли от тензорного поля

Для тензорного поля у производной Ли есть "тензорное правило Лейбница" по аналогии с случаем форм и векторов. То есть для произвольных тензорных полей $\mathbf{S}$ и $\mathbf{T}$ должно выполняться равенство

$$Ł_\xi(\mathbf{S} \otimes \mathbf{T}) = Ł_\xi \mathbf{S} \otimes \mathbf{T} + \mathbf{S} \otimes Ł_\xi \mathbf{T}.$$

Таким образом, производная Ли тензорных полей полностью определяется следующими свойствами:

- Производная Ли скалярного поля $Ł_\xi f$ есть производная по направлению $\xi(f)$.

Производная Ли векторного поля $Ł_\xi \eta$ есть скобка Ли $Ł_\xi \eta = [\xi, \eta]$. - Для произвольных векторных полей и 1-формы выполняется тождество

$$(Ł_\xi \omega)(\eta) = (d\omega)(\xi, \eta) + \eta\omega(\xi)$$

- Для произвольных тензорных полей $S$ и $T$ выполняется

$$Ł_\xi(\mathbf{S}\otimes\mathbf{T}) = Ł_\xi\mathbf{S}\otimes\mathbf{T}+\mathbf{S}\otimes Ł_\xi\mathbf{T}$$

Найдём выражение для производной Ли $Ł_\xi\mathbf{T}$ произвольного тензорного поля типа $(p,q)$ вдоль векторного поля $\xi$:

$$\mathbf{T} = T^{\mu_1\ldots\mu_p}{}_{\nu_1\ldots\nu_q} e_{\mu_1}\otimes\ldots\otimes e_{\mu_p}\otimes\mathfrak{h}^{\nu_1}\otimes\ldots\otimes\mathfrak{h}^{\nu_q}$$

в координатах.

**производная Ли от тензорного поля типа** $(1,1)$

Рассмотрим случай смешанного тензорного поля $\mathbf{W}$ типа $(1,1)$:

$$\mathbf{W} = W^\alpha_\beta e_\alpha\otimes\mathfrak{h}^\beta = W^\alpha_\beta\partial_\alpha\otimes dx^\beta$$

Распишем ее по правилу Лейбница:

$$Ł_\xi\mathbf{W} = Ł_\xi\left(W^\alpha_\beta\partial_\alpha\right)\otimes dx^\beta + W^\alpha_\beta\partial_\alpha\otimes Ł_\xi dx^\beta$$

Для вычисления второго слагаемого воспользуемся формулой Картана (1.71), а с первым слагаемым разберёмся с помощью (1.84).

Тогда

$$\begin{aligned}Ł_\xi\mathbf{W} = W^\alpha_\beta\xi^\gamma\left[\partial_\gamma,\partial_\alpha\right]\otimes dx^\beta+\xi^\gamma\left(\partial_\gamma W^\alpha_\beta\right)\partial_\alpha\otimes dx^\beta-\\ -W^\gamma_\beta\left(\partial_\gamma\xi^\alpha\right)\partial_\alpha\otimes dx^\beta+W^\alpha_\gamma\left(\partial_\beta\xi^\gamma\right)\partial_\alpha\otimes dx^\beta\end{aligned}$$

откуда окончательно получаем

$$Ł_\xi\mathbf{W} = (Ł_\xi\mathbf{W})^\alpha{}_\beta\partial_\alpha\otimes dx^\beta,\quad Ł_\xi W^\alpha_\beta = \xi^\gamma\partial_\gamma W^\alpha_\beta - W^\gamma_\beta\partial_\gamma\xi^\alpha + W^\alpha_\gamma\partial_\beta\xi^\gamma$$

Теперь нетрудно понять, что для произвольного тензорного поля (1.86) производная Ли в координатах будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}Ł_\xi T^{\mu_1\ldots\mu_p}{}_{\nu_1\ldots\nu_q} = \xi^\gamma\partial_\gamma T_1^{\mu_1\ldots\mu_p}{}_{\nu_1\ldots\nu_q} - \partial_{\alpha_1}\xi^{\mu_1}T_1^{\alpha_1\mu_2\ldots\mu_p}\nu_1\ldots\nu_q-\\ -\ldots-\partial_{\alpha_p}\xi^{\mu_p}T^{\mu_1\ldots\mu_{p-1}\alpha_p}\nu_1\ldots\nu_q+\partial_{\nu_1}\xi^{\beta_1}T^{\mu_1\ldots\mu_p}\beta_1\nu_2\ldots\nu_q+\ldots+\partial_{\nu_q}\xi^{\beta_q}T^{\mu_1\ldots\mu_p}_{\nu_1\ldots\nu_{q-1}\beta_q}\end{aligned}$$

Если вам эта формула не очевидна, проверьте её самостоятельно (по определению).

Ближайшей нашей целью будет дать другое (геометрическое) определение производной Ли.

Для этого необходимо посмотреть на интегрирование векторных полей.

Начнём с того, что определим прямой и обратный образы тензорных полей при гладком отображении $\varphi$ между многообразиями.

### 4.4.4 Геометрический смысл производной Ли

(пока это разбирать лень, потому что не актуально)

#### Суть геометрического смысла

хз

#### Обзор применений геометрического определения производной Ли

(пока хз, потом узнаю)

### интегральные кривые для векторного поля

Пусть на многообразии $M$ задано векторное поле $\xi$.

Найдём на $M$ интегральные кривые $\gamma(t)$ векторного поля $\xi$, т.е. кривые, касательные векторы к которым в каждой точке совпадают с векторным полем $\xi$.

При этом нас будет интересовать задача о нахождении интегральной кривой $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, проходящей через точку $p \in M$.

По сути речь идёт о решении дифференциального уравнения

$$\frac{d\gamma}{dt} = \xi_{\gamma(t)}, \quad \gamma\left(t_0\right) = p, \quad t_0 \in [a, b]$$

Здесь производную кривой по $t$ можно определить как прямой образ вектора $\partial_t$ в точке $\gamma(t)$, то есть

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma_\star\left(\partial_t\right)$$

или, что то же самое, как дифференцирование гладких функций на $M$ в точке $\gamma(t)$

$$\gamma_\star \partial_t(f) = \partial_t(f \circ \gamma(t)) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))$$

Вводя координаты на многообразии нетрудно понять, что локально это и есть нахождение решения автономного дифференциального уравнения

$$\frac{dx^\mu(t)}{dt} = \xi^\mu(\gamma(t)), \quad \gamma\left(t_0\right) = p, \quad t_0 \in [a, b]$$

Предполагается, что $\xi$ не зависит явно от $t$.

Если векторному полю $\xi$ разрешить зависеть от $t$ явно, то это уже будет нахождение решения неавтономного уравнения.

Далее нас будет интересовать только автономный случай, когда векторное поле не зависит явно от $t$.

$\xi$ в точке $p \in M$ не равно нулю, то в некоторой криволинейной системе координат $x_1, \ldots, x_n$ в окрестности точки $p$ оно может быть выпрямлено, то есть приведено к виду $\xi = \partial_{x_1}$.

Эта теорема позволила бы нам в нужный момент (к примеру) быстро вывести формулу Картана (1.71) для производной Ли из её геометрического определения.

Хотя мы в напем курсе это сделаем другим путём, теорема о выпрямлении векторного поля остаётся весьма полезным вычислительным инструментом дифференциальной геометрии.

Вернёмся к глобальному интегрированию векторных полей на многообразиях и рассмотрим вопрос о возможности продолжения интегральной кривой векторного поля.

### конструкция непродолжаемого решения - максимальную кривую векторного поля (???)

Пусть на многообразии $M$ (без края) задано векторное поле $\xi$. Тогда $\forall t_0$ и точки $p \in M$ существует интегральная кривая $\gamma$, определённая на некотором интервале $(a, b)$, содержащем $t_0$ и удовлетворяющая условию $\gamma\left(t_0\right) = p$. Она максимальная, то есть любая другая интегральная кривая $\gamma'$ векторного поля $\xi$, удовлетворяющая тому же условию $\gamma'\left(t_0\right) = p$, является ограничением $\gamma$ на некоторый интервал $\left(a', b'\right) \subseteq (a, b)$, то есть $\gamma' = \left.\gamma\right|_{\left(a', b'\right)}$

(??? и что?? потом разберусь)

### Теорема о непродолжаемости для максимальной интегральной кривой (???)

Пусть на многообразии $M$ (без края) задано векторное поле $\xi,$ а$\gamma:(a,b)\rightarrow M$ - его максимальная интегральная кривая, не продолжающаяся за пределы интервала $(a,b)$. Если $b$ конечно, то кривая $\gamma$ покидает любой компакт при $t\rightarrow b-0$ в следующем смысле: $\forall$ компактного множества $K\subseteq M\exists t_K\in(a,b):\gamma(t)\notin K$ при $t>t_K$ Аналогичное утверждение формулируется для конечного $a$ (сделайте ЭТО camh).

следствие.

Пусть на многообразии $M$ (без края) задано векторное поле $\xi$ с компактным носителем.

Тогда все интегральные кривые векторного поля $\xi$ продолжаются по времени неограниченно в обе стороны. По следствию, решая задачу Коши, можно сопоставить векторному полю $\xi$ семейство диффеоморфизмов $\varphi_{t,t_0}:M\rightarrow M$, удовлетворяющее соотношению

$$\frac{d}{dt}\varphi_{t,t_0}(x)=\xi_{\varphi_{t,t_0}},\quad \varphi_{t_0,t_0}=\mathrm{id}_M$$

Смысл $\varphi_{t,t_0}(x)$ можно объяснить как нахождение интегральной кривой $\gamma(t)$ векторного поля $\xi$ с начальным условием $\gamma\left(t_0\right)=x$ и определение

$\varphi_{t,t_0}(x)=\gamma(t)$; причём верна следующая формула композиции

$$\varphi_{t_2,t_1}\circ\varphi_{t_1,t_0}=\varphi_{t_2,t_0}$$

В автономном случае, когда наше векторное поле не зависит явно от времени, нетрудно заметить, что если $\gamma(t)$ является решением дифференциального уравнения, то и $\gamma(t+\tau)$ тоже является решением.

Значит,

$$\varphi_{t,t_0}=\varphi_{t+\tau,t_0+\tau},\quad\forall\tau$$

Без потери общности веберем $\tau$ таким образом, чтобы $\varphi_{t,t_0}=\varphi_{t,0}\equiv\varphi_t$; тогда $\varphi_{t_1}\circ\varphi_{t_2}=\varphi_{t_1+t_2}$, в частности $\varphi_t^{-1}=\varphi_{-t}$. Таким образом век- торное поле порождает на многообразии однопараметрическую группу диффеоморфизмов. В терминах диффеоморфизмов $\varphi_t$ можно дать другое, т.н.

### Геометрическое определение производной Ли от гладких функций

Построим его последовательно, начиная с производной Ли вдоль векторного поля от гладких функций.

Определим производную Ли вдоль векторного поля $\xi$ гладкой функции $f$ через обратный образ функции при отображении $\varphi_t$ по формуле

$$Ł_\xi f=\lim_{t\rightarrow0}\frac{\varphi_t^\star f-f}{t}=\left.\frac{d}{dt}\varphi_t^\star f\right|_{t=0}$$

В локальных координатах (1.101) примет вид

$$Ł_\xi f=\left.\frac{df\left(\varphi_t(x)\right)}{dt}\right|_{t=0}=\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\alpha}{dt}=\xi^\alpha\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}=\xi(f)=df(\xi)$$

Здесь мы воспользовались координатной записью уравнения (1.97) и учли, что $\dot{x}^\alpha=\xi^\alpha$.

Из формулы (1.102) видно, что производная Ли от функции есть простое дифференцирование $f$ по направлению $\xi$, что в точности совпадает с выражением для производной Ли от 0-формы (гладкой функции), полученным из формулы Картана - алгебраического определения производной Ли.

Производная Ли векторного поля $\eta$ вдоль векторного поля $\xi$ определяется аналогично

$$Ł_\xi \eta = \frac{d}{dt}\varphi_t^\star \eta\bigg|_{t=0}, \quad \varphi_t^\star \eta = \left(\varphi_{-t}\right)_\star \eta$$

Рис.

8: Кривая, на которой лежат точки $p$ и $q = \varphi_t(p)$, как нетрудно понять, являет собой интегральную кривую векторного поля $\xi$, проходяшую через точку $p$. Кривые, пересекающие интегральную кривую векторного поля $\xi$ - суть интегральные кривые векторного поля $\eta$, проходящие через точки $p$ и $q$ соответственно.

Чтобы иметь возможность сравнения векторов в разных точках многообразия $M$ (хоть и расположенных вдоль одной интегральной кривой), в результате которого мы снова получим векторное поле на $M$, необходимо совершить параллельный перенос в точку $p$ посредством $\left(\varphi_{-t}\right)_\star$. При этом, результат параллельного переноса, вообще говоря, не совпадает с исходным вектором в этой точке, а различие определяется производной Ли. Геометрическое определение (1.103) производной Ли $Ł_\xi \eta$ наглядней всего расшифровывает рисунок 1. Вычислим производную Ли векторного поля $\eta$ вдоль другого $-\xi$ в координатной карте по определению (1.103).

Для начала найдём производную Ли векторного поля $\eta = \partial_\alpha$ вдоль $\xi$:

$$Ł_\xi \partial_\alpha = \frac{d}{dt}\left(\varphi_{-t}\right)_\star \partial_\alpha\bigg|_{t=0}$$

Прямой образ $\left(\varphi_{-t}\right)_\star \partial_\alpha$ определяется, как известно, по формуле

$$\left[\left(\varphi_{-t}\right)_\star \partial_\alpha\right] f = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(f \circ \varphi_{-t}\right)$$

Согласно уравнению (1.99), записанному в локальных координатах,

$$\varphi_t\left(x^\beta\right) = x^\beta(t) = x^\beta(0) + t\xi^\beta + \mathcal{O}\left(t^2\right), \quad t \to 0$$

Значит,

$$\varphi_{-t}\left(x^\beta\right) = x^\beta(0) - t\xi^\beta + \mathcal{O}\left(t^2\right), \quad t \to 0$$

Отсюда при $t \to 0$ находим

$$\left[\left(\varphi_{-t}\right)_\star \partial_\alpha\right] f = \partial_\beta f\left(\delta_\alpha^\beta - t\partial_\alpha \xi^\beta + \mathcal{O}\left(t^2\right)\right)$$

Из формулы (1.106) окончательно получаем, что производная Ли

$$Ł_\xi \partial_\alpha = \frac{d}{dt}\left(\varphi_{-t}\right)_\star \partial_\alpha\bigg|_{t=0} = -\partial_\alpha \xi^\beta \partial_\beta$$

Заметим, что согласно геометрическому определению производной Ли от функций и векторных полей должно выполняться обычное правило Лейбница (если вам это не очевидно, будет полезно доказать данное утверждение самостоятельно)

$$Ł_\xi(f\eta) = fŁ_\xi \eta + \eta Ł_\xi f.$$

В силу (1.108) имеем

$$Ł_\xi\left(f \cdot \partial_\alpha\right) = f \cdot Ł_\xi \partial_\alpha + \left(Ł_\xi f\right)\partial_\alpha = f \cdot Ł_\xi \partial_\alpha + \xi(f)\partial_\alpha$$

Из последнего тождества можно легко выписать выражение для производной Ли произвольного векторного поля $\eta = \eta^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ вдоль векторного поля $\xi = \xi^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta}$:

$$\text{Ł}_\xi \eta = -\eta^\alpha \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta} + \xi^\alpha \frac{\partial \eta^\beta}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta}$$

то есть

$$\text{Ł}_\xi \eta^\alpha = \xi^\beta \partial_\beta \eta^\alpha - \eta^\beta \partial_\beta \xi^\alpha$$

что в точности совпадает с выражением (1.82) для производной Ли одного векторного поля вдоль другого, которое мы получили из алгебраического определения производной Ли.

Геометрическое определение производной Ли вдоль векторного поля $\xi$ от дифференциальных форм строится абсолютно аналогично.

Так, для произвольной дифференциальной формы $\omega$ имеем

$$\text{Ł}_\xi \omega = \left. \frac{d}{dt} \varphi_t^\star \omega \right|_{t=0}$$

Непосредственно из определения (1.109) следует справедливость обычного правила Лейбница для внешнего умножения форм (если это не очевидно, докажите данное утверждение самостоятельно):

$$\text{Ł}_\xi (\omega \wedge \lambda) = \text{Ł}_\xi \omega \wedge \lambda + \omega \wedge \text{Ł}_\xi \lambda$$

Найдём для примера производную Ли от дифференциальной 1-формы $\omega = \omega_\alpha dx^\alpha$ из её геометрического определения.

Для этого поступим также, как для случая векторного поля и вычислим сначала

$$\text{Ł}_\xi dx^\alpha = \left. \frac{d}{dt} \varphi_t^\star dx^\alpha \right|_{t=0}$$

Как мы уже показывали ранее (когда рассматривали производную Ли от векторных полей),

$$\varphi_t \left( x^\alpha \right) = x^\alpha(t) = x^\alpha(0) + t\xi^\alpha + \mathcal{O}\left(t^2\right), \quad t \to 0$$

Значит, при $t \to 0$

$$\varphi_t^\star dx^\alpha = \left( \delta_\beta^\alpha + t \partial_\beta \xi^\alpha + \mathcal{O}\left(t^2\right) \right) dx^\beta$$

Подставляя полученное выражение в (1.111), получаем

$$\text{Ł}_\xi dx^\alpha = \left. \frac{d}{dt} \varphi_t^\star dx^\alpha \right|_{t=0} = \partial_\beta \xi^\alpha dx^\beta$$

Имея ввиду справедливость правила Лейбница (1.110), находим

$$\text{Ł}_\xi \left( f dx^\alpha \right) = f \cdot \text{Ł}_\xi dx^\alpha + \xi(f) dx^\alpha$$

Тогда производная Ли произвольной 1-формы $\omega = \omega_\alpha dx^\alpha$

$$\text{Ł}_\xi \omega = \xi^\beta \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x^\beta} dx^\alpha + \omega_\beta \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\alpha} dx^\alpha$$

то есть

$$\text{Ł}_\xi \omega_\alpha = \xi^\beta \partial_\beta \omega_\alpha + \omega_\beta \partial_\alpha \xi^\beta$$

что в точности совпадает с выражением для производной Ли для 1формы, полученной из формулы Картана.

Таким образом мы показали, что геометрическое определение производной Ли эквивалентно её алгебраическому определению - формуле Картана, ведь для доказательства этого факта достаточно было рассматривать только формы нулевой и первой степени, так как обе части равенства удовлетворяют правилу Лейбница без знаков относительно внешнего умножения.

#### (?!!) Эквивалентность геометрического и алгебраического определений производной Ли

(тут пока что не порешал, усвою - обязательно четко пропишу.)

#### Геометрическое определение производной Ли от тензорного поля

Производная Ли произвольного тензорного поля $\mathbf{T}$ вдоль векторного поля $\xi$ определяется следующим образом. Пусть на многообразии $M$ задано векторное поле $\xi$ и тензорное поле $\mathbf{T}$. Тогда производная Ли от $\mathbf{T}$ вдоль векторного поля $\xi$ есть

$$Ł_\xi \mathbf{T} = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi_t^\star \mathbf{T} - \mathbf{T}}{t} = \frac{d}{dt} \varphi_t^\star \mathbf{T} \bigg|_{t=0},$$

причём из этого определения понятно, что должно выполняться правило Лейбница для тензорного произведения

$$Ł_\xi (\mathbf{S} \otimes \mathbf{T}) = Ł_\xi \mathbf{S} \otimes \mathbf{T} + \mathbf{S} \otimes Ł_\xi \mathbf{T}$$

#### иллюстрация (?!!)

(хз)

#### доказательство эквивалентности определений

### 4.4.5 Некоторые типичные применения производной Ли

(соберем их тут, ибо для этого её и изучаем)

## 4.5 Прямой и обратный образы

(пока как подраздел, потом мб компактнее сделаю, но по идее тут всё и раскрою сполна про это!)

### 4.5.1 Конструкция

#### суть и применения прямого и обратного образа (????!!!)

!! тут самое главное, что я хочу узнать, главные формулы!!!

Суть обратного образа, что имеются два многообразия и мы в функцию, действующую на втором многообразии, подставляем координаты первого.

#### определение гладкого многообразия

Гладким отображением между многообразиями $\varphi : M \to N$ размерностей $m$ и $n$ называется непрерывное отображение, которое в окрестности каждой точки, в достаточно малых координатных картах, выглядит как гладкое отображение области из $\mathbb{R}^m$ в область в $\mathbb{R}^n$.

#### обратный образ функции

суть обратного образа в том, что он подставляет в функции на многообразии-образе координаты многообразия-прообраза (?).

Рассмотрим два многообразиями $M$ и $N$, между которыми задано гладкое отображение $\varphi : M \to N$.

Обратный образ $\varphi^\star f : M \to \mathbb{R}$ можно определить для функции $f : N \to \mathbb{R}$ при отображении $\varphi : M \to N$ согласно формуле

$$\left(\varphi^\star f\right)(p) = f(q), \quad \text{где} \quad p \in M, \; q = \varphi(p) \in N.$$

В локальных координатах $x^\alpha$ на многообразии $M$ и координатах $y^\beta$ на многообразии $N$, получаем

$$\left(\varphi^\star f\right)(x) = f(\varphi(x)) = f(y(x))$$

Формально, действие $\varphi^\star$ на функцию $f$ можно записать в виде композиции

$$\varphi^\star f = f \circ \varphi$$

**прямой образ векторного поля**

Суть прямого образа в том, что он отображает поля вместе с самим многообразием (???)

Пусть $\varphi = N$ является гладким отображением между многообразиями $M$ и $N$ с обратным гладким, т.е. является диффеоморфизмом.

для функции $f : N \to \mathbb{R}$

Рассмотрим векторное поле $v$ на $M$, $v \in \mathrm{Vect}(M)$.

Тогда можно определить прямой образ векторного поля $\varphi_\star v \in \mathrm{Vect}(N)$ при отображении $\varphi$ как

$$\left(\varphi_\star v\right)(f)\big|_{\varphi(p)} = v\left(\varphi^\star f\right)\big|_p$$

Формально это можно записать как

$$\left(\varphi_\star v\right)(f) = v(f \circ \varphi) = v \circ \varphi^\star f, \quad \varphi_\star v = v \circ \varphi^\star$$

В координатной карте прямой образ векторного поля

$$\left(\varphi_\star v\right)(f)\big|_{y(x)} = v^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(f \circ \varphi) = v^\alpha \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\alpha}\frac{\partial f}{\partial y^\beta}$$

где

$$v = v^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \quad \varphi_\star v = \left(\varphi_\star v\right)^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$$

Значит, координаты векторного поля $\varphi_\star v$ представляются в виде

$$\left(\varphi_\star v\right)^\alpha = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta} v^\beta.$$

Определим обратный образ дифференциальной формы $\varphi^\star \omega$ при гладком отображении многообразий $\varphi : M \to N$.

Для всякого гладкого отображения $\varphi : M \to N$ между гладкими многообразиями определено отображение пространств дифференциальных форм

$$\varphi^\star : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$$

действующее по формуле (для некоторых векторов $v_1, \ldots, v_k$ в одной и той же точке $p \in M$)

$$\varphi^\star \omega\left(v_1, \ldots, v_k\right) = \omega\left(\varphi_\star v_1, \ldots, \varphi_\star v_k\right)$$

В этом определении следует понимать, что когда левая часть вычисляется в точке $p \in M$, то правая вычисляется в точке $q = \varphi(p) \in N$.

Важно понимать, что в отличие от векторных полей, для дифференциальных форм (в частности, для функций) любое гладкое отображение порождает отображение пространства дифференциальных форм в обратную сторону.

#### взятие обратного образа дифференциальных форм коммутирует с внешним умножением и внешним дифференцированием

Покажем, что взятие обратного образа дифференциальных форм коммутирует с внешним умножением и внешним дифференцированием.

(???) то

### 4.5.2 Обзор применений и связей с другими конструкциями

(пока не применял, хз, какие применения)

#### связь обратного образа и детерминанта

Связь обратного образа и детерминанта имеет вид:

$$\varphi^\star f(y)dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n = f(y(x)) \cdot \det\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}\right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

то есть в общем случае просто вылезает якобиан замены.

Чтобы лучше понять абстрактную формулу????(1.94) для обратного образа дифференциальной формы при гладком отображении многообразий,

Выпишем в явном виде действие $\varphi^\star$ на дифференциальные формы высшей степени $\nu$ в областях $\mathbb{R}^n$, где $\varphi$ криволинейная замена координат.

Сделаем это, решив задачу для $\mathbb{R}^2$, где общий вид формы высшей степени в координатах имеет вид $\nu = f(y)dy_1 \wedge dy_2$

Запишем согласно (???) (1.92) и (1.94):

$$\begin{aligned}\varphi^\star\nu =& f(y(x)) \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x^\alpha}dx^\alpha \wedge \frac{\partial y_2}{\partial x^\beta}dx^\beta = \\ =& f(y(x)) \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial y_1}{\partial x_2}dx_2\right) \wedge \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial y_2}{\partial x_2}dx_2\right) = \\ =& f(y(x)) \cdot \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} - \frac{\partial y_1}{\partial x_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right) dx_1 \wedge dx_2 = \\ =& f(y(x)) \cdot \det\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}\right) dx_1 \wedge dx_2\end{aligned}$$

то есть просто по определению замены координат, подставляем, приводим слагаемые, вот и все.

В случае произвольного $n$, как нетрудно понять, в правой части также появится якобиан замены $J_\varphi = \det\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}\right)$, то есть

$$\varphi^\star f(y)dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n = f(y(x)) \cdot \det\left(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}\right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

#### Связь прямого и обратного образа с производной Ли (???)

(хз прямо пока что, Володя точно знает)

## 4.6 О когомологиях и схожих конструкциях

(потом буду разбирать, пока не актуально. мб тут слишком подробно для первой части, скорее всего в другие части перекину эту теорию, тут самую суть оставлю только!)

### 4.6.1 О конструкции когомологий

(пока выгрузки)

#### Суть (??)

#### Лемма Пуанкаре

(тут про неё подробненько)

#### Комплекс де Рама

Важным свойством внешнего дифференциала $d$ является его нильпотентность:

$$d^2 = 0.$$

Рассмотрим дифференциальную форму $\omega \in \Omega^k(M)$ на некотором многообразии $M$.

Форма $\omega$ называется замкнутой, если $d\omega = 0$.

Форма $\omega$ называется точной, если для дифференциальной формы $\omega \in \Omega^k(M)$ найдётся форма $\lambda \in \Omega^{k-1}(M)$, для которой $d\lambda = \omega$.

Очевидно, что всякая точная форма является замкнутой (это мгновенно следует из свойства нильпотентности оператора внешнего дифференцирования).

Однако не всякая точна. Для того, чтобы понять это, рассмотрим 1-форму

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

на её естественной области определения: $\mathbb{R}^2 \backslash \{0, 0\}$. Покажем, что $\omega$ замкнута:

$$d\omega = \frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} dx \wedge dy - \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} dy \wedge dx = 0$$

Если бы 1-форма $\omega$ была точна, то существовала бы функция $f$, такая что $\omega = df$. В этом случае интеграл от $df$ по любой замкнутой кривой $\gamma$, лежащей в $\mathbb{R}^2 \backslash \{0, 0\}$ согласно формуле Ньютона-Лейбница равнялся бы нулю:

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma df = 0$$

Возьмём в качестве замкнутой кривой положительно ориентированную единичную окружность $\gamma = \mathbb{S}^1$с центром в начале координат и найдём интеграл от дифференциальной 1-формы $\omega$. Ограничение формы $\omega$ на $\mathbb{S}^1$, очевидно, равно

$$\omega|_{\mathbb{S}^1} = xdy - ydx$$

Перепишем последнюю формулу в полярных координатах:

$$\omega|_{\mathbb{S}^1} = \left(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi\right) d\phi = d\phi$$

Тогда интеграл (2.54):

$$\int_{\mathbb{S}^1} \omega = \int_{\mathbb{S}^1} d\phi = 2\pi \neq 0 = \int_{\mathbb{S}^1} df$$

То есть, мы пришли к противоречию. Значит, 1-форма $\omega$ не является точной на своей естественной области определения: $\mathbb{R}^2 \backslash \{0, 0\}$.

Этот пример показывает нам, что не всякая замкнутая форма является точпой па мпогообразии $M$. Причём, всё зависит пе только от самой формы, но и от топологии многообразия. Если многообразие $M$ представляет собой просто евклидово пространство $M = \mathbb{R}^n$, то согласно лемме Пуанкаре любая замкнутая форма на $\mathbb{R}^n$ будет обязательно точной. Если же топология многообразия более интересная и сложная, то такого однозначного утверждения (типа леммы Пуанкаре) сделать уже нельзя.

Рассмотрим гладкое многообразие $M$. Множество замкнутых дифференциальных форм степени $k$ на $M$ обозначим через $\mathrm{Z}^k(M)$. Формально можно записать, что

$$\mathrm{Z}^k(M) = \operatorname{Ker} d, \quad d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$$

Множество точных форм обозначим через $\mathrm{B}^k(M)$:

$$\mathrm{B}^k(M) = \operatorname{Im} d, \quad d : \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M)$$

Отклассифицируем замкнутые формы на многообразии $M$ следующим образом: две замкнутые формы $\omega, \omega' \in \mathrm{Z}^k(M)$ называются когомологичными, если они отличаются на точную форму, то есть их разность $\omega - \omega' \in \mathrm{B}^k(M)$. Это определение порождает отношение эквивалентности на множестве замкнутых форм в $\Omega^k(M)$ :

$$\omega \sim \omega' \Longleftrightarrow \omega = \omega' + \lambda, \quad \lambda \in \mathrm{B}^k(M)$$

### Когомологичный класс

Когомологичным классом $[\omega]$ формы $\omega$ называется множество всех замкнутых форм, отличающихся от $\omega$ на точную форму.

В связи с вышесказанным, естественно дать следующее определение. Когомологии де Рама $H^k_{\mathrm{dR}}$ гладкого многообразия $M$ - это факторпространства

$$H^k_{\mathrm{dR}}(M) = \left(\operatorname{Ker} d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k|1}(M)\right) / d\Omega^{kk}(M)$$

При $k = 0$ в этом определении мы считаем $d\Omega^{-1}(M)$ нулевым пространством и на самом деле рассматриваем функции $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$, такие что $df = 0$ - то есть локально постоянные функции.

### О градуировке когомологий

Когомологии де Рама градуированны, то есть распадаются в прямую сумму $k$-мерных когомологий

$$H^\star(M) = \bigoplus_{k \geqslant 0} H^k_{\mathrm{dR}}(M)$$

Кроме того, пространство когомологий является абелевой группой с законом сложения

$$[\omega_1] + [\omega_2] = [\omega_1 + \omega_2]$$

причём $k$-мерные когомологии де Рама, очевидно, образуют подгруппу $H^k_{\mathrm{dR}}(M)$, а операция внешнего умножения дифференциальных форм порождает умножение на группе когомологий:

$$[\omega_1] \smile [\omega_2] = [\omega_1 \wedge \omega_2]$$

которое ассоциативно и обладает следующими свойствами:

$$H^k_{\mathrm{dR}}(M) \smile H^m_{\mathrm{dR}}(M) \subset H^{k+m}_{\mathrm{dR}}(M)$$

$$a \smile b = (-1)^{km} b \smile a, \quad a \in H^k_{\text{dR}}(M), b \in H^m_{\text{dR}}(M)$$

Действительно, докажем корректность определённой таким образом операции умножения (алгебраические свойства автоматически вытекают из свойств внешнего умножения дифференциальных форм). Для этого необходимо показать, что класс эквивалентности $[\omega_1] \smile [\omega_2]$ не зависит от выбора замкнутых форм $\omega_1$ и $\omega_2$

$$\begin{aligned}(\omega_1 + d\alpha_1) \wedge (\omega_2 + d\alpha_2) = \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge d\alpha_2 + d\alpha_1 \wedge \omega_2 + d\alpha_1 \wedge d\alpha_2 = \\ = \omega_1 \wedge \omega_2 + d\left((-1)^k \omega_1 \wedge \alpha_2 + \alpha_1 \wedge \omega_2 + \alpha_1 \wedge d\alpha_2\right) := \omega_1 \wedge \omega_2 + d\lambda\end{aligned}$$

Отсюда получаем требуемое, то есть

$$[(\omega_1 + d\alpha_1) \wedge (\omega_2 + d\alpha_2)] = [\omega_1 \wedge \omega_2] = [\omega_1] \smile [\omega_2]$$

(???? и зачем это нужно????)

### О применениях когомологий (!!?)

(пока хз, потом узнаю лучше.)

### О когомологиях не де Рама (??)

(хз, есть ли такие вообще)

## 4.6.2 Примеры типичных коголомологий

### Когомологии на окружности

хз
и аналогичные вопросы - тоже хз.
потом когда-то буду досматривать.

### Когомологии Бетти

(хз, зачем это)
Числа Бетти многообразия $M$ определяются по формуле

$$B_k = \dim H^k_{\text{dR}}(M)$$

Число Бетти может принимать неотрицательные целые значения или бесконечность. Для разумно устроенного конечномерного пространства все числа Бетти конечны и, начиная с некоторого номера, равны нулю. Нетрудно заметить, что нулевое число Бетти

$$B_0 = \dim H^0_{\text{dR}}(M)$$

совпадает с числом компонент связности многообразия $M$. Так, для любого связного многообразия $B_0 = 1$.

## 4.6.3 Об эйлеровой характеристике

### Основная теория

Наконец, удобно ввести эйлерову характеристику многообразия $M$, которая является гомотопическим инвариантом и определяется как знакопеременная (альтернированная) сумма чисел Бетти, то есть

$$\chi(M) = \sum_k (-1)^k B_k$$

и что?

#### Характеристика окружности

Найти эйлерову характеристику стандартной единичной *окружности* $\mathbb{S}^1$.
хз

### 4.6.4 О гомологиях

пока я не знаю, куда это вставить, так что просто тут эти темы будут висеть и всё.

#### Гомологии

#### Двойственность Пуанкаре и потоки

### 4.6.5 О фундаментальной группе

пока буду считать, что они связаны с когомологиями, может, это не так.

#### Фундаментальная группа Накрытия

#### Связь фундаментальной группы и одномерных гомологий

### 4.6.6 Нетипичные коголомологии

(вообще, хз, что это, но заниматься этим я и не буду, ибо пока основы слишком слабые, просто знаю, что какие-то там еще есть)

## 4.7 Поля Киллинга

(пока вообще не до них, есть - и хорошо)

### 4.7.1 Конструкция

### 4.7.2 Обзор применений полей Киллинга (???)

(хз)

# 5 Поверхности и кривые

Приведем полную теорию поверхностей и кривых.
(у иванова с мехмата скорее всего возьму потом)

## 5.1 Системы координат

(мб в первую часть перекину, пока тут)

#### Сферические координаты

Обсудим в деталях сферические координаты.

**Основные формулы сферической системы координат** Базисные векторы имеют вид:

$$\mathbf{e}_r = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}, \quad \mathbf{e}_\vartheta = \frac{1}{r}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta}, \quad \mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}$$

$$v_r = (\mathbf{v}, \mathbf{e}_r) = \dot{x}\sin\vartheta\cos\varphi + \dot{y}\sin\vartheta\sin\varphi + \dot{z}\cos\vartheta$$

$$\begin{cases} \dot{x} = & \dot{r}\sin\vartheta\cos\varphi + r\dot{\vartheta}\cos\vartheta\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\varphi \\ \dot{y} = & \dot{r}\sin\vartheta\sin\varphi + r\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi + r\dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\varphi \\ \dot{z} = & \dot{r}\cos\vartheta - r\dot{\vartheta}\sin\vartheta \end{cases}$$

$$v_r = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_r) = (\dot{r}\sin\vartheta\cos\varphi + r\dot{\vartheta}\cos\vartheta\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\varphi)\sin\vartheta\cos\varphi + (\dot{r}\sin\vartheta\sin\varphi + \\ + r\dot{\vartheta}\cos\vartheta\sin\varphi + r\dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\varphi)\sin\vartheta\sin\varphi + (\dot{r}\cos\vartheta - r\dot{\vartheta}\sin\vartheta)\cos\vartheta = \dot{r}$$

$$v_r = \dot{r}, v_\varphi = r\dot{\varphi}\sin\vartheta, v_\vartheta = r\dot{\vartheta}$$

$$\ddot{x} = \left(\ddot{r} - r\left(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2\right)\right)\sin\vartheta\cos\varphi + (2\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta})\cos\vartheta\cos\varphi - (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\sin\vartheta\sin\varphi - 2r\dot{\varphi}\dot{v}\cos\vartheta\sin\varphi$$

$$rd^2\omega = \sum_{\alpha_1<\ldots<\alpha_k, \alpha\neq\beta} \frac{\partial^2\omega_{\alpha_1\ldots\alpha_k}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_k} =$$

$$\ddot{y} = \left(\ddot{r} - r\left(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2\right)\right)\sin\vartheta\sin\varphi + (2\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta})\cos\vartheta\sin\varphi + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\sin\vartheta\cos\varphi + \\ + 2r\dot{\varphi}\dot{v}\cos\vartheta\cos\varphi$$

$$\ddot{z} = \left(\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2\right)\cos\vartheta - (2\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta})\sin\vartheta$$

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta,$$

$$w_\vartheta = (2\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta}) - r\dot{\varphi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta$$

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad w_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}$$

**Признаки применения сферической системы координат** (?? пока не могу четко сказать, где нужны они)

### Параболические координаты

**Основные формулы параболической системы координат** Параболические координаты через декартовы имеют вид:

$$\begin{cases} x = \sqrt{\kappa\eta}\cos\varphi \\ y = \sqrt{\kappa\eta}\sin\varphi \\ z = \dfrac{1}{2}(\kappa - \eta) \end{cases}$$

Из цилиндрических в параболические переход имеет вид:

$$\begin{cases} \rho = & \sqrt{\kappa\eta} \\ \varphi = & \varphi \\ z = & \dfrac{1}{2}(\kappa - \eta) \end{cases}$$

$$\mathbf{e}_\kappa = \frac{1}{H_\kappa}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \kappa}, \quad \mathbf{e}_\eta = \frac{1}{H_\eta}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta}, \quad \mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{H_\varphi}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \kappa} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \kappa} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \kappa} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \kappa} = \mathbf{e}_x\frac{\partial x}{\partial \kappa} + \mathbf{e}_y\frac{\partial y}{\partial \kappa} + \mathbf{e}_z\frac{\partial z}{\partial \kappa}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \kappa} = \frac{x}{2\kappa}, \quad \frac{\partial y}{\partial \kappa} = \frac{y}{2\kappa}, \quad \frac{\partial z}{\partial \kappa} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \kappa} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{e}_x\frac{x}{\kappa} + \mathbf{e}_y\frac{y}{\kappa} + \mathbf{e}_z\right] = \frac{1}{2}\left[\mathbf{e}_x\sqrt{\frac{\eta}{\kappa}}\cos\varphi + \mathbf{e}_y\sqrt{\frac{\eta}{\kappa}}\sin\varphi + \mathbf{e}_z\right]$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{x}{2\eta}, \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{y}{2\eta}, \frac{\partial z}{\partial \eta} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial \mathrm{r}}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{e}_x\sqrt{\frac{\kappa}{\eta}}\cos\varphi + \mathbf{e}_y\sqrt{\frac{\kappa}{\eta}}\sin\varphi - \mathbf{e}_z\right]$$

**Коэффициенты Ламе параболической системы координат**

$$\begin{aligned}
H_\kappa =& \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \kappa}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \kappa}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \kappa}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{\eta}{\kappa}} \\
H_\eta =& \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{\kappa}{\eta}} \\
H_\varphi =& \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{\kappa\eta}
\end{aligned}$$

(?? откуда??)

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_x =& e_x\sqrt{\frac{\eta}{\kappa+\eta}}\cos\varphi + \mathbf{e}_y\sqrt{\frac{\eta}{\kappa+\eta}}\sin\varphi + \mathbf{e}_z\sqrt{\frac{\kappa}{\kappa+\eta}} \\
\mathbf{e}_\eta =& \mathbf{e}_x\sqrt{\frac{\kappa}{\kappa+\eta}}\cos\varphi + \mathbf{e}_y\sqrt{\frac{\kappa}{\kappa+\eta}}\sin\varphi - \mathbf{e}_z\sqrt{\frac{\eta}{\kappa+\eta}} \\
\mathbf{e}_\varphi =& -\mathbf{e}_x\sin\varphi + \mathbf{e}_y\cos\varphi
\end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\eta}{\kappa+\eta}}\cos\varphi & \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa+\eta}}\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sqrt{\frac{\eta}{\kappa+\eta}}\sin\varphi & \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa+\eta}}\sin\varphi & \cos\varphi \\ \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa+\eta}} & -\sqrt{\frac{\eta}{\kappa+\eta}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}$$

$$\begin{cases}
\dot{x} =& \frac{\dot{k}}{2}\sqrt{\frac{\eta}{\kappa}}\cos\varphi + \frac{\dot{\eta}}{2}\sqrt{\frac{\kappa}{\eta}}\cos\varphi - \dot{\varphi}\sqrt{\kappa\eta}\sin\varphi \\
\dot{y} =& \frac{\dot{r}}{2}\sqrt{\frac{\eta}{\kappa}}\sin\varphi + \frac{\eta}{2}\sqrt{\frac{\kappa}{\eta}}\sin\varphi + \dot{\varphi}\sqrt{\kappa\eta}\cos\varphi \\
\dot{z} =& \frac{1}{2}(\dot{\kappa} - \dot{\eta})
\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_\kappa &= \left( \sqrt{\frac{\eta}{\kappa+\eta}} \cos\varphi \quad \sqrt{\frac{\eta}{\kappa+\eta}} \sin\varphi \quad \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa+\eta}} \right) \\
\mathbf{e}_\eta &= \left( \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa+\eta}} \cos\varphi \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa+\eta}} \sin\varphi - \sqrt{\frac{\eta}{\kappa+\eta}} \right), \\
\mathbf{e}_\varphi &= (-\sin\varphi \quad \cos\varphi \quad 0)
\end{aligned}$$

(?? зачем то, что ниже??)

$$\begin{aligned}
v_\kappa &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_\kappa) = \frac{\dot{\kappa}}{2}\sqrt{1+\frac{\eta}{\kappa}}, \\
v_\eta &= \frac{\dot{\eta}}{2}\sqrt{1+\frac{\kappa}{\eta}}, \\
v_\varphi &= \dot{\varphi}\sqrt{\kappa\eta}
\end{aligned}$$

**Признаки применения параболической системы координат (??)** (?? пока хз, где нужны они)

где-то мб нужны в механике.

## 5.2 Риманово многообразие

(вообще хз, что о них известно)

**определение риманово многообразия**

## 5.3 кривые

**параметры кривых**

**способы задания кривых - обзор**

$$\begin{cases} x = f_1\left(x^1, x^2, x^3\right) \\ y = f_2\left(x^1, x^2, x^3\right) \\ z = f_3\left(x^1, x^2, x^3\right) \end{cases}$$

**локальный базис** то се, коэффициенты Ламе
$\mathbf{e}_\mu = \frac{1}{H_\mu}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\mu}$,

**коэффициенты Ламе - обзор** $H_\mu = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\mu}\right|$

### 5.3.1 определения кривых

**мотивация изучать кривые** (????)

Кривые нужны для метрик и работы с формами, и вообще по мехмату начинается все с этой темы.

**кривые в $\mathbb{R}^n$ (??)** работа идет в $\mathbb{R}^n$.

в этом весь интерес. поэтому нужно вводить то, что для $\mathbb{R}^3$ было очевидно.

**определение $\mathbb{R}^n$** начинаем с определения $\mathbb{R}^n$ - н мерное евклидово пространство, то есть множество упорядоченных н вещественных чисел, на котором введена

1) естественная структура линейного пространства и

2) стандартное скалярное произведение.

говорят, что определенные векторы образуют в нем базис.

а еще, что скалярное произведение порождает норму, и далее определяется функция расстояния между двумя элементами и далее можно определить шары, сферы.

**определение параметрической кривой** Определяется параметрическая кривая.

**Определение 5.1.** *регулярная кривая, сингулярные точки, гладкая кривая*

**способы задания кривых** если у нас зависимость от параметра, то это множество называется кривой-графиком.

в общем, тут 2 варианта, как задавать это все можно, второй вариант - через неявные кривые.

и типа множество решений такой-то системы уравнений - неявная кривая.

в общем, на этом этапе нужно понимать, что у нас 3 типа задания кривой, и нужно сказать пару слов об эквивалентности.

**натуральная параметризация**

### 5.3.2 длина и характеристики

**определение длины и формулы для разных случаев**

**Определение 5.2.** *длина - это* $\int_a^b \|\dot{\gamma(t)}\|dt$ $\gamma : [a,b] - \mathbb{R}^n$.

**натуральный параметр**

**вектор ускорения - свойства** Свойства вектора ускорения следующие:

**Теорема 2.** *в каждой точке вектор ускорения перпендикуляен скорости.*

(я пока не пришел. как это связано с ускорением и скоростью в физике?)

возможно, тут дело в том, что именно от параметризации зависит перпендикулярность.

но в общем, простые разделы, научились мы длину кривой считать.

### 5.3.3 кривизна

после длины логично перейти к форме.

Определим кривизну.

**Определение 5.3.** *кривизна* $k() = \|\ddot{\gamma(s)}\|$

**Определение 5.4.** *радиус кривизны -* $R(s) = 1/k$

**свойства кривизны (???)** дальше прикольные формулы про кривизну, которые позже обязательно напишу и пойму

ну и явный вид кривизны для $\mathbb{R}^2$.

### 5.3.4 плоские кривые

#### репер Френе

#### формулы френе

**Определение 5.5.** *формулы френе*

### 5.3.5 пространственные кривые

и это самое интересное.

#### Формулы Френеля

### 5.3.6 дополнения и задачи про плоские кривые

я позже порешаю их.
и про механику тут можно на самом деле многое написать.
и там связка с интегралом френеля, вообще интересное очень место!!!!!
Также в этом разделе много примеров.

### 5.3.7 кривые в пространстве

вот тут спешить вообще не нужно, нужно четко усвоить формулы френе, потому что они главные при работе с кривыми, а кривые прямо много где появляются.

## 5.4 Описание поверхностей

#### параметрическая поверхность - определение

**Определение 5.6.** *Параметрическая поверхность размерности к в н мерном пространстве* $\mathbb{R}^n$ *- это непрерывное отображение из области в к мерном подпространстве в* $\mathbb{R}^n$*.*

что кстати заставляет задуматься, что поверхность - отображение.

(прямо такое место задуматься кстати, тут как в многообразиях, только координатно, ну и интересно конечно очень)

#### касательный вектор - определение

**Определение 5.7.** *касательный вектор определяем*

### 5.4.1 вторая фундаментальная форма поверхностей

**суть второй фундаментальной формы** ???

**конструкция** ???

### 5.4.2 Тензор кривизны Римана для поверхностей

(?? хз, почему он в этом разделе, но пока выгрузки про него тут будут)
судя по [**?** ] это частный случай тензора кривизны.

**смысл тензора кривизны Римана (???)**

**получение тензора кривизны Римана** Главная идея в том, что нам нужно получить значение коммутатора двух ковариантных производных:

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]a_\gamma = a_\lambda R^\lambda_{\alpha\gamma\beta}$$

в декартовых координатах ковариантная производная сводится к частной производной: $\nabla_\alpha \to \partial_\alpha$

Поэтому в Евклидовом пространстве: $\nabla_\alpha a_\gamma \to \partial_\alpha a_\gamma$ и $\nabla_\alpha \nabla_\beta a_\Gamma \to \partial_\alpha \partial_\beta a_\gamma$

поэтому если построить: $(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) a_\Gamma = 0$ так как частное дифференцирование перестановочно.

И если так происходит во всем пространстве тождественно, то значит, мы имеем дело с Евклидовым пространством.

А если где-то отлично от нуля, то значит силы инерции будут отличны от нуля.

Посмотрим в криволинейном пространстве:

$$\nabla_\beta = \partial_\beta a_\gamma - a_\lambda \Gamma^\lambda_{\beta\gamma}$$

посмотрим, как действует $(\nabla_\alpha \nabla_\beta a_\gamma)$

так как?????? (?? тут произведение кристоффелей нужно бы знать судя по всему) $\nabla_\alpha t_{\beta\gamma} = \partial_\alpha t_{\beta\gamma} - \Gamma^{\lambda'}_{\alpha\beta} t_{jj} - \Gamma^\lambda_{\gamma\alpha} t_{\beta\lambda'}$, то

$$(\nabla_\alpha \nabla_\beta a_\gamma) = \partial_\alpha(\partial_\beta a_\Gamma - a_\lambda \Gamma^\lambda_{\beta\Gamma}) - \Gamma^{\lambda'}_{\alpha\beta}(\partial_{\lambda'} a_\gamma - a_\lambda \Gamma^\lambda_{\lambda'\gamma}) - \Gamma^{\lambda'}_{\alpha\gamma}(\partial_\beta a_{\lambda'} - a_\lambda \Gamma^\lambda_{\beta\lambda'})$$

и то же самое:

$$(\nabla_\beta \nabla_\alpha a_\gamma) = \partial_\beta(\partial_\alpha a_\gamma - a_\lambda \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma}) - \Gamma^{\lambda'}_{\alpha\beta}(\partial_{\lambda'} a_\gamma - a_\lambda \Gamma^\lambda_{\lambda'\gamma}) - \Gamma^{\lambda'}_{\beta\gamma}(\partial_\alpha a_{\lambda'} - a_\lambda \Gamma^\lambda_{\alpha\lambda'})$$

поэтому после разницы выражений выше у нас каждое слагаемое с каждым сокращается, и в итоге получаем 0.

Поэтому

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]a_\Gamma = a_\lambda) - \partial_\alpha \Gamma^\lambda_{\beta\Gamma} + \partial_\beta \Gamma^\lambda_{\alpha\Gamma} + \Gamma^{\lambda'}_{\alpha\Gamma} \Gamma^\lambda_{\beta\lambda'} - ....)$$

и это ковариантный тензор 3го ранга.

введем тензор кривизны Римана:

$$R^\lambda_{\alpha\gamma\beta}$$

таким образом, если тензор Римана равен нулю, то это Евклидово пространство, а если отличен от нуля, то

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta]a_\Gamma = a_\lambda R^\lambda_{\alpha\Gamma\beta}$$

и мы получаем Риманово пространство.

**Свойства тензора кривизны Римана** потом впишу

**геометрический смысл тензора кривизны Римана** рассмторим параллельны перенос...

см семинар Киселева, потом.

## 5.5 Типичные поверхности (????)

Для полноты приведем описание поверхностей, которые мне встречались по жизни.

(тут решаю задачи и вписываю свойства того, что наисследовал)

### Многомерные параллелограммы (?!!!)

(тут потренирую формулы выше. пока опыта слишком мало для того, чтобы зарешать задачи эти. что-то с внешним произведением связано..)

**Площадь 3-мерной поверхности в 3-мерном пространстве** давно интересно это было бы научиться считать.

**Площадь 2-мерного параллелограмма в 3-мерном пространстве**

**Площадь 3-мерной поверхности в 4-мерном пространстве** давно интересно это было бы научиться считать.

**Площадь 2-мерного параллелограмма в 4-мерном пространстве**

### Многомерные сферы

**Площадь 3-мерной сферы в 4-мерном пространстве**

### Поверхность Бельтрами

(потом потренируюсь)

**Свойства** Приведем свойства, которые ниже будет доказывать.

**Обзор применений поверхности Бельтрами** хз

# Part III

# Problems of Differential Geometry

## 6 Каталог задач

(Р - значит задачу давал рослый, когда я был на 3 курсе. потом мб переобозначу.)

### 6.1 Общие вопросы

#### 6.1.1 Вопросы на понимание сути диффгема

#### 6.1.2 Типичные вопросы и задачи на проверку знаний

**как понимать, что такое $\Gamma - \theta\phi^{\phi}$?**

(потом разберусь, см. диалект, пока не актуально это понимать.)

#### 6.1.3 Вопросы на понимание типичных деталей

### 6.2 Типичные технические задачи

#### 6.2.1 Задачи на свойства дифференциальных форм

#### 6.2.2 Задачи на определение параметров поверхностей (???)

(нарешаю тут потом это.)

ИТ-4.1. Вычислить вторую фундаментальную форму для поверхности, заданной неявной функцией $F(x, y, z)$.

ИТ-4.2. Вычислить среднюю и гауссову кривизны для поверхности, заданной неявной функцией $F(x, y, z)$.

ИТ-4.3. Вычислить среднюю и гауссову кривизны для гиперповерхности, заданной графиком: $x^n = f\left(x^1, \ldots, x^{n-1}\right)$.

ИТ-4.4. Вычислить среднюю и гауссову кривизны для поверхности, заданной неявной функцией $F\left(x^1, \ldots, x^n\right)$.

ИТ-4.5. Вычислить вторую фундаментальную форму следующих поверхностей вращения:

1) $r = (R\cos u\cos v, R\cos u\sin v, R\sin u)(c\oint epa)$;

2) $r = ((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u)(mop)$;

3) $r = \left(a\operatorname{ch}\frac{u}{a}\cos v, a\operatorname{ch}\frac{u}{a}\sin v, u\right)$ (катеноид).

ИТ-4.6. Вычислить среднюю и гауссову кривизны сферы, тора и катеноида.

ИТ-4.7. Вычислить среднюю и гауссову кривизны поверхности, полученной вращением графика функции $x = f(z) > 0$ вокруг оси $z$.

ИТ-4.8. Пусть $S$ - некоторая данная поверхность. Отложим на нормалях к поверхности $S$ в одном направлении отрезки постоянной длины. Концы отложенных отрезков описывают поверхность $S^*$, "параллельную" поверхности $S$. Если уравнение поверхности $S$ есть $r = r(u, v)$, то уравнение $S^*$

$$\rho = r(u, v) + an(u, v),$$

где $n(u, v)$ - единичный вектор нормали к $S$. Выразить коэффициенты первой и второй фундаментальных форм поверхности $S^*$ через коэффициенты первой и второй фундаментальных форм поверхности $S$.

ИТ-4.9. Выразить гауссову кривизну $K^*$ поверхности $S^*$, "параллельной" поверхности $S$, через гауссову и среднюю кривизны поверхности $S$.

ИТ-4.10. Выразить среднюю кривизну $H^*$ поверхности $S^*$, "параллельной" поверхности $S$, через гауссову и среднюю кривизны поверхности $S$.

### 6.2.3 Задачи на векторные операции в искривленных координатах (??)

(придумаю задачи в духе "посчитать градиент/дивергенцию в таких-то искривленных координатах")

### 6.2.4 Задачи на понимании многообразий

**Рослый-2020-4.4**

Для стандартной метрики на $S^2$, записанной в координатах стереографической проекции ($z = x + iy$):

$$g = 4\frac{dx^2 + dy^2}{(1 + |z|^2)^2},$$

найти $\int_{\mathbb{R}^2} \sqrt{g}$. То же в угловых координатах:

$$g = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2.$$

**Рослый-2020-4.5**

Доказать, что $\dim T_pM = \dim M, \forall p \in M$.

**Рослый-2020-4.6**

Доказать изоморфизм

$$\Lambda^1(M) = \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}\left(\mathrm{Vect}(M), C^\infty(M)\right),$$

где $\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}$ обозначает гомоморфизм $\mathcal{R}$-модулей над каким-то кольцом $\mathcal{R}$. (Можно сначала рассмотреть случай $M = \mathbb{R}^n$, а потом использовать разбиение единицы.)

**ИТ-12.1.**

Показать, что объединение двух координатных осей не является многообразием.

**ИТ-12.2.**

Задать на двумерном торе $T^2 = S^1 \times S^1$ структуру двумерного топологического многообразия.

**ИТ-12.3.**

Привести пример различных гладких структур на прямой $\mathbb{R}^1$.

**ИТ-12.4.**

Проверить эквивалентность двух описанных выше атласов на стандартной сфере.

### ИТ-12.5.

Рассмотрим на прямой $\mathbb{R}$ атлас, состоящий из двух карт: $(\mathbb{R}, \varphi : x \mapsto x)$ и $(\mathbb{R}, \psi : x \mapsto x^3)$. Так как $\varphi$ и $\psi$, очевидно, гомеоморфизмы, мы задали на $\mathbb{R}$ структуру топологического многообразия. Показать, что оно не является гладким. Модифицировать предыдущий пример так, чтобы получилось многообразие класса $C^2$, но не $C^3$.

**Решение**

### ИТ-12.6.

Показать, что комплексное проективное пространство $\mathbb{CP}^n$ является комплексно аналитическим многообразием комплексной размерности $n$.

**Решение**

### ИТ-12.7.

Показать, что гладкие многообразия $\mathbb{R}^1(x)$ с картой $(\mathbb{R}^1, \varphi(x) = x)$ и $\mathbb{R}^1(y)$ с картой $(\mathbb{R}^1, \varphi(y) = y^3)$ диффеоморфны.

**Решение**

### ИТ-12.8.

Показать, что любое некомпактное связное одномерное многообразие диффеоморфно $\mathbb{R}^1$, а любое компактное связное одномерное многообразие диффеоморфно окружности $S^1$.

**Решение**

### ИТ-12.9.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^4$ поверхность, заданную системой уравнений

$$\begin{cases} (x^1)^2 + (x^2)^2 = 1, \\ (x^3)^2 + (x^4)^2 = 1. \end{cases}$$

Показать, что эта поверхность в $\mathbb{R}^4$ является гладким многообразием размерности 2, и это многообразие диффеоморфно двумерному тору $T^2 = S^1 \times S^1$.

**Решение**

### ИТ-12.10. Многообразия по группе

Показать, что следующие матричные группы являются гладкими многообразиями и определить их размерность:

$$\begin{aligned} GL(n,\mathbb{R}) &= \left\{X \in \mathbb{R}^{n^2} \mid \det X \neq 0\right\}, \\ O(n,\mathbb{R}) &= \left\{X \in \mathbb{R}^{n^2} \mid XX^T = E\right\}, \\ SO(n,\mathbb{R}) &= \left\{X \in \mathbb{R}^{n^2} \mid XX^T = E, \quad \det X = 1\right\}, \\ U(n,\mathbb{R}) &= \left\{X \in \mathbb{C}^{n^2} = \mathbb{R}^{2n^2} \mid X\bar{X}^T = E\right\}, \\ SU(n,\mathbb{R}) &= \left\{X \in \mathbb{C}^{n^2} = \mathbb{R}^{2n^2} \mid X\bar{X}^T = E, \quad \det X = 1\right\}. \end{aligned}$$

Исследовать эти матричные группы на компактность и линейную связность.

**Решение**

### 6.2.5 Задачи на векторы Киллинга и симметрии

### Leuven-cosmo-2023hw-1.1. Killing vectors

**a)** Let $\xi$ be a Killing vector field. Show that $\nabla_\sigma \nabla_\rho \xi_\mu = R^\lambda{}_{\sigma\rho\mu}\xi_\lambda$.
**b)** For $U_\mu = (1,0,0,0)$, verify that (in mostly plus signature)

$$\xi_{\mu\nu} = a^2\left(g_{\mu\nu} + U_\mu U_\nu\right)$$

is a Killing tensor in a cosmological spacetime $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}t^2 - a^2(t)\left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2} + r^2\,\mathrm{d}\Omega^2\right]$, and $a \equiv a(t)$ i.e., show that $\nabla_{(\sigma}\xi_{\mu\nu)} = 0$.

**Solution to a)** We put the Killing vector equation $\nabla_\rho \xi_\sigma + \nabla_\sigma \xi_\rho = 0$ in the Riemann tensor equation $\nabla_\sigma \nabla_\rho \xi_\mu - \nabla_\rho \nabla_\sigma \xi_\mu = R^d{}_{\mu bc}\xi_d$ and write for different indices:

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma \nabla_\rho \xi_\mu + \nabla_\rho \nabla_\mu \xi_\sigma &= R^d{}_{\mu\rho\sigma}\xi_d \\ \nabla_\mu \nabla_\sigma \xi_b + \nabla_\sigma \nabla_\rho \xi_\mu &= R^d{}_{b\sigma\mu}\xi_d \\ \nabla_\rho \nabla_\mu \xi_\sigma + \nabla_\mu \nabla_\sigma \xi_\rho &= R^d{}_{\sigma\mu\rho}\xi_d \end{aligned}$$

We add the first two equations and subtract the third, then

$$\nabla_\sigma \nabla_\rho \xi_\mu + \nabla_\rho \nabla_\mu \xi_\sigma + \nabla_\mu \nabla_\sigma \xi_\rho + \nabla_\sigma \nabla_\rho \xi_\mu - \nabla_\rho \nabla_\mu \xi_\sigma - \nabla_\mu \nabla_\sigma \xi_\rho = R^d{}_{\mu\rho\sigma}\xi_d + R^d{}_{\rho\sigma\mu}\xi_d - R^d{}_{\sigma\mu\rho}\xi_d.$$

Then from $R_{dabc} + R_{dbca} + R_{dcab} = 0$ we have $R_{dabc} + R_{dbca} = -R_{dcab}$, so:

$$\begin{aligned} 2\nabla_\sigma \nabla_\rho \xi_\mu &= \left(R^d{}_{\mu\rho\sigma} + R^d{}_{\rho\sigma\mu} - R^d{}_{\sigma\mu\rho}\right)\xi_d \\ &= \left(-R^d{}_{\sigma\mu\rho} - R^d{}_{\sigma\mu\rho}\right)\xi_d \\ &= -2R^d{}_{\sigma\mu\rho}\xi_d \qquad\qquad (R_{d\sigma ab} = -R_{d\sigma ba}) \\ &= 2R^d{}_{\sigma\rho\mu}\xi_d \end{aligned}$$

So

$$\nabla_\sigma \nabla_\rho \xi_\mu = R^d{}_{\sigma\rho\mu}\xi_d$$

**Solution to b)**
For this metric

$$\Gamma^{\mu}_{00} = \Gamma^{0}_{0\beta} = 0, \quad \Gamma^{0}_{ij} = a\dot{a}\gamma_{ij}, \quad \Gamma^{i}_{0j} = \frac{\dot{a}}{a}\delta^{i}_{j}, \qquad \Gamma^{i}_{jk} = \frac{1}{2}\gamma^{il}\left(\partial_j\gamma_{kl} + \partial_k\gamma_{jl} - \partial_l\gamma_{jk}\right).$$

We have $K_{00} = a^2(-1+1) = 0$ and because of $\nabla_\sigma K_{\mu\nu} + \nabla_\nu K_{\sigma\mu} + \nabla_\mu K_{\nu\sigma} = 0$ and symmetricity of $K_{ij}$

$$K_{0\mu} = 0 \qquad \text{for all} \ \ \mu.$$

Also

$$g_{ij} = -a^2\gamma_{ij} \equiv -a^2\gamma_{ii}\delta_{ij},$$
$$K_{ij} = -a^4\gamma_{ij} \equiv -a^4\gamma_{ii}\delta_{ij}$$

We need to prove that

$$\nabla_{(\sigma}K_{\mu\nu)} = 0,$$
$$\nabla_\sigma K_{\mu\nu} \equiv \partial_\sigma K_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\mu}K_{\lambda\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma\nu}K_{\mu\lambda}.$$

Because $K_{\mu\nu}$ is symmetric, $\nabla_{(\sigma}K_{\mu\nu)} = 0$ is proportional to itself with any position of indices, so for proof we can choose just one option of them, which is the most comfortable for us.

We have different cases of indices:

- If all three indices are timelike ($\mu \equiv 0, \nu \equiv 0, \sigma \equiv 0$), every term in our expression is either $\partial_0 K_{00} = 0$ or proportional to $K_{0\lambda} = 0$. Hence, the whole term is zero.

Note that in general it doesn't follows from from $K_{00} = 0$ that $\nabla_\sigma K_{00} \equiv 0$, since in there could be metrics and $K_{0\mu} \neq 0$, for which $\nabla_\sigma K_{00} = -\Gamma^{\lambda}_{\sigma 0}K_{\lambda 0} - \Gamma^{\lambda}_{\sigma 0}K_{0\lambda} \neq 0$. But it is not our case.

- If only two indices are timelike ($\mu \equiv 0, \nu \equiv 0, \sigma \equiv i$), the same way because of $K_{0\mu} = 0$ all terms become zero, except the term of the form $\Gamma^{\lambda}_{00}K_{\lambda i}$. However, in FRLW $\Gamma^{\mu}_{00} = 0$, so the total result is still zero.
- If one index is timelike ($\mu \equiv 0, \nu \equiv i, \sigma \equiv j$):

$$\nabla_0 K_{ij} = \partial_0 K_{ij} - \Gamma^{\lambda}_{0i}K_{j\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{0j}K_{i\lambda};$$
$$\nabla_j K_{0i} = \partial_j K_{0i} - \Gamma^{\lambda}_{j0}K_{\lambda i} - \Gamma^{\lambda}_{ji}K_{0\lambda};$$
$$\nabla_i K_{0j} = \partial_i K_{j0} - \Gamma^{\lambda}_{ij}K_{\lambda 0} - \Gamma^{\lambda}_{i0}K_{j\lambda};$$

Also $\Gamma^{i}_{0j} = \frac{\dot{a}}{a}\delta_{ij}$, so $\lambda \to k$ where $(k = 1, 2, 3)$, so

$$\nabla_{(0}K_{ij)} = -\partial_0\left(a^4\right)\gamma_{ii}\delta_{ij} - 2(-a^4)\left(\Gamma^{j}_{0i}\gamma_{jj} + \Gamma^{i}_{0j}\gamma_{ii}\right) = -\gamma_{ii}\delta_{ij}\left[a^3\dot{a} - 2(-a^4)\Bigg)\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{a}}{a}\Bigg)\right] = 0$$

- If all indexes are spacelike:

$$\nabla_k K_{ij} = \partial_k K_{ij} - \Gamma^{l}_{ki}K_{jl} - \Gamma^{l}_{kj}K_{il},$$
$$\nabla_j K_{ki} = \partial_j K_{ki} - \Gamma^{l}_{jk}K_{li} - \Gamma^{l}_{ji}K_{kl},$$
$$\nabla_i K_{kj} = \partial_i K_{jk} - \Gamma^{l}_{ij}K_{lk} - \Gamma^{l}_{ik}K_{jl};$$

After using $K_{ij} = -a^4\gamma_{ii}\delta_{ij}$ we have

$$\nabla_{(i}K_{jk)} = -a^4\left(\partial_i\gamma_{jk} + \partial_k\gamma_{ij} + \partial_j\gamma_{ki}\right) - 2(-a^4)\left(\Gamma^{k}_{ij}\gamma_{kk} + \Gamma^{j}_{ik}\gamma_{jj} + \Gamma^{i}_{kj}\gamma_{ii}\right) \quad \text{(no summ. by } k\text{)}$$

Since the metric is diagonal,

$$\Gamma^{k}_{ij} = \frac{1}{2}\gamma^{kk}\left(\partial_i\gamma_{jk} + \partial_j\gamma_{ik} - \partial_k\gamma_{ij}\right) \qquad k \text{ is fixed,}$$

$$\Gamma^k_{ij}\gamma_{kk} + \Gamma^j_{ik}\gamma_{jj} + \Gamma^i_{kj}\gamma_{ii} = \ldots = \frac{1}{2}\left(\partial_i\gamma_{jk} + \partial_k\gamma_{ij} + \partial_j\gamma_{ki}\right)$$

and because of it

$$\nabla_{(i}K_{jk)}.$$

So for all possibilities $K_{\mu\nu}$ is a Killing tensor.

### 6.2.6 Задачи на отображения

**Рослый-2020-4.7**

Даны многообразия и гладкие отображения:

$$M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3.$$

Для отображений обратного образа на гладких функциях $\varphi^* : C^\infty(M_2) \to C^\infty(M_1)$ и $\psi^* : C^\infty(M_3) \to C^\infty(M_2)$ показать, что

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*.$$

**Рослый-2020-4.8**

Для гладкого отображения $\varphi : M_1 \to M_2$ записать в локальных координатах отображение касательных пространств

$$D_p\varphi : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2.$$

**Рослый-2020-4.9**

Для гладкого отображения $\varphi : M_1 \to M_2$ и для $f \in C^\infty(M_2)$ показать, что

$$\varphi^*(df) = d\left(\varphi^* f\right).$$

То же для $k$-формы $\omega \in \Lambda^k(M_2)$:

$$\varphi^*(d\omega) = d\left(\varphi^*\omega\right).$$

**Рослый-2020-4.10**

Пусть $\varphi : M \to M$ - диффеоморфизм, и $f \in C^\infty(M), v \in \mathrm{Vect}(M), \alpha \in \Lambda^1(M)$. Доказать, что

$$\langle\varphi^* v, \varphi^*\alpha\rangle = \varphi^*\langle v, \alpha\rangle,$$
$$\varphi^*(v(f)) = (\varphi^* v)(\varphi^* f).$$

**Рослый-2020-4.11**

Пусть $f : M \to \mathbb{R}^k$ - гладкое отображение. Иначе говоря, нам даны гладкие функции $f^1, \ldots, f^k \in C^\infty(M)$. Показать, что в любой точке $p \in M$ имеем conm ношение

$$\mathrm{rk}(Df) = k \Leftrightarrow df^1 \wedge \ldots \wedge df^k \neq 0,$$

где $Df$ - отображение касательных пространств.

**Рослый-2020-4.12**

Привести простейшие примеры многообразий, на которых есть глобальный голономный репер. В каких из этих случаев также имеется глобальная система координат.

## Рослый-2020-4.13

Пусть $\{e_a\}$ – произвольный репер на многообазии $M, a = 1, \ldots, \dim M$, и

$$[e_a, e_b] = f^c_{ab} e_c.$$

Пусть $\{e^a\}$ – двойственный корепер (двойственный базис 1-форм). Показать, что тогда

$$de^c = -\frac{1}{2} f^c_{ab} e^a \wedge e^b$$

## Рослый-2020-4.14*

Пусть $\alpha \in \Lambda^1(M)$ - поле 1-форм, нигде не обращающихся в ноль на $M$. Определим распределение $\mathcal{D} \subset TM$ коразмерности 1 в касательном расслоении:

$$\mathcal{D}_p := \{\xi \in T_pM \mid \alpha_p(\xi) = 0\}.$$

Доказать, что $\mathcal{D}$ инволютивно тогда, и только тогда, когда

$$\alpha \wedge d\alpha = 0.$$

## Рослый-2020-4.15

Пусть $v, u \in \mathrm{Vect}(M)$– два векторных поля на мноообразии $M$. Производная Ли вдоль векторного поля обозначается $L_v$. Показать, что

$$[L_v, L_u] = L_{[v,u]}.$$

Напомним, что $[v, u]$ обозначает коммутатор (или скобку Ли) векторньг полей и что при действии производной Ли, в частности, на векторные поля имеем $L_v u = [v, u]$.

## Рослый-2020-4.16

Формой объема на многообразии $M$ называется такая форма старшей степени $\mathrm{vol} \in \Lambda^n(M)$, где $n = \dim M$, которая нигде не обращается в ноль. Если на $M$ задана форма объема vol, то для любого векторного поля $v \in \mathrm{Vect}(M)$ делена его дивиргенция $\mathrm{div}\, v \in C^\infty(M)$ - функция, однозначно определ 5 соотношением $L_v \mathrm{vol} = \mathrm{div}\, v \cdot \mathrm{vol}$. Имеет смысл запись

$$\mathrm{div}\, v = \frac{L_v \mathrm{vol}}{\mathrm{vol}}.$$

Чаще всего мы пользуемся таким определением на римановом многообразии по отношению к метрической форме объема $\mathrm{vol} = \sqrt{g}$, определенной равенством (21) в задаче 4.3. Тогда $\mathrm{div}_g\, v := L_v \sqrt{g}/\sqrt{g}$. Докажите, что в локальных координатах

$$\mathrm{div}_g\, v = \frac{1}{\sqrt{\det{(g_{\mu\nu})}}} \partial_\lambda \left( \sqrt{\det{(g_{\mu\nu})}} v^\lambda \right).$$

## Рослый-2020-4.17

Докажите, что для $\forall \mathrm{vol} \in \Lambda^n(M)$ и $\forall v, u \in \mathrm{Vect}(M)$ имеем

$$\mathrm{div}[v, u] = v\, \mathrm{div}\, u - u\, \mathrm{div}\, v.$$

### Рослый-2020-4.19

Привести пример такого тензорного поля $t \neq 0$ на многообразии $M$, что $\forall v \in \mathrm{Vect}(M)$ : $L_v t = 0$.

### Рослый-2020-4.20*

Пусть отображение $\varphi : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ задано формулой

$$\varphi(x) = \frac{x}{\|x\|}.$$

Рассмотрим $(n-1)$-форму

$$\omega = \varepsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} x^{i_1} dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_n}.$$

Докажите, что $d\left(\varphi^* \omega\right) = 0$.

### Рослый-2020-4.21*

Пусть $v_1, v_2 \in \mathrm{Vect}(M), \alpha \in \bigwedge^1(M)$. Напомним формулу

$$d\alpha\left(v_1, v_2\right) = v_1\left(\alpha\left(v_2\right)\right) - v_2\left(\alpha\left(v_1\right)\right) - \alpha\left(\left[v_1, v_2\right]\right).$$

Придумать и доказать аналогичную формулу для $d\omega\left(v_1, v_2, v_3\right)$ в случае, если $\omega \in \Lambda^2(M)$

### Рослый-2020-4.22

На многообразии $\mathbb{R}^2$ рассмотрим три векторных поля, которые запишем в терминах комплексной координаты $z = x + iy$ (черта обозначает комплексное сопряжение):

$$\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad z\frac{\partial}{\partial z} + \bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad z^2\frac{\partial}{\partial z} + \bar{z}^2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

Какие из этих векторных полей являются полными на $\mathbb{R}^2$, а какие нет?

4.23*

На сфере $S^2$ рассмотрим три векторных поля, заданных формулой (45) в координатах стереографической проекции (в одной из двух карт).

- Покажите, что этим определяются векторные поля на всей сфере, то есть, что в другой карте с координатой $u = z^{-1}$ эти векторные поля регулярны при $u = 0$.

- Поскольку $S^2$ - компактное многообразие, каждое из этих векторных полей полное, то есть интегрируется до однопараметрической группы диффеоморфизмов. Покажите, что все вместе они порождают трехпараметрическую группу преобразований сферы $S^2$. Назовите эту группу.

- Преобразования этой группы вообще говоря не оставляют северный полюс $\{z = \infty\}$ на месте. Поэтому рассматриваемая группа не действует на $\mathbb{R}^2 = S^2 \backslash \{z = \infty\}$. Только ее подгруппа, сохраняющая $\{z = \infty\}$, действует на $\mathbb{R}^2$. Как из этих соображений можно сразу получить ответ на вопрос предыдущей задачи?

## 6.2.7 Задачи на топологию многообразий

### 5.5

Пусть на замкнутом ориентируемом многообразии дана форма старшей степени $\omega \in \Lambda^n(M)$, где $n = \dim M$, которая нигде не обращается в ноль. Покажите, что такая форма не может быть точной.

### 5.6

Пусть $M = S^2$. Двойственноть Пуанкаре дает нам изомнорфизм $H_k(M,\mathbb{R}) \cong H^{2-k}(M,\mathbb{R})$. Пусть $[\{p\}] \in H_0(M,\mathbb{R})$, где $p$ - любая точка $M$, а $[M] \in H_2(M,\mathbb{R})$ - двумерный класс гомологий, отвечающий самому замкнутому многообразию $M$

- Показать, что класс гомологий $[\{p\}]$ не зависит от выбора точки $p$.

- Предъявить класс когомологий (его представитель) в $H^2(M,\mathbb{R})$, отвечающий 0-циклу $\{p\}$.

- Предъявить класс когомологий (его представитель) в $H^0(M,\mathbb{R})$, отвечающий 2-циклу $M$.

5.7*

Доказать, что на замкнутом многообразии каждое векторное поле является полным.

### 5.8*

На компактном многообразии любое бесконечное множество точек содержит нетривиальную (то есть не постоянную) сходящуюся последовательность (или, что то же самое, имеет предельную точку). Равносильное утверждение: на компактном многообразии любое замкнутое подмножество, состоящее из изолированных точек, конечно. Докажите все это.

### 5.9*

Рассмотрим двумерный тор $M = S^1 \times S^1$. Рассмотрим 1-цикл в $M$ вида $S^1 \times \{p\}$, где $p$ - любая точка второй окружности. Показать, что класс гомологий такого цикла не зависит от точки $p$, т.е. другой подобный цикл $S^1 \times \{p'\}$ гомологичен первому. Пусть $a \in H_1(M)$ - класс гомологий, представленный любым из этих 1-циклов. По двойственности Пуанкаре ему отвечает класс $[\alpha] \in H^1(M,\mathbb{Z}) \subset H^1(M,\mathbb{R})$. Найдите 1-форму $\alpha$, представляющую этот класс когомологий. (Используйте любое удобное описание тора, любые координаты.)

## 6.3 Задачи других тем

### 6.3.1 Задачи о кольцах и дифференциалах

### 2.2*

$\mathcal{R}-$ кольцо, $\mathrm{Drv}(\mathcal{R})-$ пространство дифференцирований этого кольца. Каково определение $\mathrm{Drv}(\mathcal{R})$? Показать, что $\mathrm{Drv}(\mathcal{R})-$ алгебра Ли.

Пусть теперь $\mathcal{R}$ - это $\mathbb{Z}_2$-градуированное суперкоммутативное кольцо, $\mathrm{arv}(\mathcal{R})$ - пространство супердифференцирований этого кольца. Каково определение $\mathrm{Drv}(\mathcal{R})$? Показать, что $\mathrm{Drv}(\mathcal{R})-$ супералгебра Ли. (Надо, в частности, продемонстрировать знание того, что такое супералгебра Ли.)

### 2.3

$V$ - векторное пространство размерности $n$. Показать, что

$$S^\bullet(V^*) = \{\text{ polynomial functions on V}\} \cong \mathbb{R}\left[\mathrm{x}^1, \ldots, \mathrm{x}^\mathrm{n}\right],$$

где первый изоморфизм колец канонический, а второй не канонический (почему?). Здесь $\mathbb{R}\left[x^1, \ldots, x^n\right]$ обозначает кольцо полиномов от $n$ переменных с коэффициентами в поле $\mathbb{R}$. Кольцо (алгебру) $S^\bullet(V^*)$ полиномов с вещественными коэффициентами на $V$

можно/нужно также обозначать $\mathbb{R}[V]$. Описать алгебру Ли дифференцирований колец (15).

### 6.3.2 Задачи гомологической алгебры (??)

Пусть $C^\bullet$ - ограниченный коцепной комплекс векторных пространств с дифференциалом $d$, такой что $\dim C^k < \infty, \forall k$, и $H^\bullet$ - его группы (векторные пространстве когомологий.

#### Рослый-2020-3.1

Показать, что

$$\sum_k (-1)^k \dim H^k = \sum_k (-1)^k \dim C^k$$

Как называется сумма в левой части выше?

#### Рослый-2020-3.2

Пусть $L : C^\bullet \to C^\bullet -$ линейное отображение, сохраняющее градуировку и дифференциал, $L \circ d = d \circ L$. Показать, что тогда $L$ индуцирует отображение пространств когомологий, которое обозначим тем же символом:

$$L : H^\bullet \to H^\bullet.$$

Тогда величина

$$\Lambda_L = \sum_k (-1)^k \operatorname{tr}_{H^k} L$$

называется числом Лефшеца отображения $L$. В частности, при $L = \mathrm{id}_{C^\cdot}$ получается, что $\Lambda_{\mathrm{id}} = \chi\,(C^\bullet)$.

Показать, что при наших предположениях (конечномерность) выполняется равенство

$$\sum_k (-1)^k \operatorname{tr}_{H^k} L = \sum_k (-1)^k \operatorname{tr}_{C^k} L$$

#### Рослый-2020-3.3

В тех же обозначениях, что и в задаче 3.2 показать, что

$$\prod_k \left(\det_{H^k} L\right)^{(-1)^k} = \prod_k \left(\det_{C^k} L\right)^{(-1)^k}$$

### 6.3.3 Задачи линейной алгебры для диффгема

В данном разделе слова “векторное пространство” подразумевают “конечномерное”, если не сказано противное.

#### 1.1

$V$ - векторное пространство. Опишите каноноческий изомрфизм $(V^*)^* \cong V$.

#### 1.2

$V, W -$ векторные пространства, $\dim V = n, \dim W = m$. Какова размерность векторных пространств $\mathrm{Hom}(V, W)$ и $V \otimes W$?

Пусть $\{e_i\}$ – басис в $V$, а $\{f_j\}$ - басис в $W$. Тогда $\{e_i \otimes f_j\}$ - басис в $V \otimes W$.

1.3

Опишите канонические изоморфизмы конечномерных векторных пространств

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{R}, W) = W, \quad \mathrm{Hom}\left(V^{*}, \mathbb{R}\right) = V,$$

$$\mathrm{Hom}(V, W) \cong V^{*} \otimes W.$$

1.4$V \subset W-$ векторные пространства, $V^{\perp} \subset W^{*}-$ аннулятор $V$. Показать / найти:

$$V^{*} \cong W^{*}/V^{\perp}$$
$$\left(V^{\perp}\right)^{*} = ?$$
$$\dim V + \dim W/V = \dim W$$
$$\dim V + \dim V^{\perp} = \dim W$$

### 1.5

$V$ - векторное пространство, $e_1, \ldots e_k \in V, \quad \dim V = n \geqslant k$, а $f^1, \ldots, f^k \in V^{*}$ таковы, что $\langle f^i, e_j\rangle = \delta^i_j$. Показать, что тогда и векторы $e_1, \ldots, e_k$, и ковекторы $f^1, \ldots, f^k$ линейно независимы.

### 1.6

$V$ - векторное пространство, $v_1, \ldots v_k \in V, \dim V = n \geqslant k$. Показать, что $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \neq 0 \Leftrightarrow \{v_1, \ldots, v_k$ линейно независимы $\}$. В частности, при $n = k : \{v_1, \ldots, v_n \quad -$ базис в $V\} \Leftrightarrow v_1 \wedge \ldots \wedge v_n \neq 0$.

1.7

Даны векторные пространства и линейные отображения:

$$V_1 \xrightarrow{A} V_2 \xrightarrow{B} V_3.$$

Показать, что

$$(B \circ A)^{*} = A^{*} \circ B^{*}.$$

### 1.8

$V$ - векторное пространство, $V^{*}$ - двойственное пространство, $\Lambda^{\bullet} V$ - кольцо поливекторов, $\Lambda^{\bullet} V^{*}$ - кольцо внешних форм. (Это суперкоммутативные кольца.) $\Lambda^{\bullet} V$ и $\Lambda^{\bullet} V^{*}-$ двойственные пространства, то есть $\Lambda^{\bullet}\left(V^{*}\right) \cong \left(\Lambda^{\bullet} V\right)^{*}$, но нужна точность в определении спаривания. Точнее, это вопрос удобства, но, сделав какой-то выбор, лучше во всех формулах потом уже придерживаться выбранного определения. Поступим следующим образом. Сначала определим оператор внутреннего умножения на (свертку с) вектром $v \in V$ как супердифференцирование степени (-1) кольца внешних форм:

$$\iota_v : \Lambda^{\bullet}\left(V^{*}\right) \rightarrow \Lambda^{\bullet}\left(V^{*}\right),$$

так что для $\alpha \in \Lambda^1\left(V^{*}\right) = V^{*}$ будет $\iota_v \alpha = \alpha(v)$. Определим теперь спаривание

$$\Lambda^{\bullet} V \otimes \Lambda^{\bullet} V^{*} \rightarrow \mathbb{R}$$

таким образом, что для $v_1, \ldots, v_p \in V$ и $\omega \in \Lambda^p\left(V^{*}\right)$:

$$\langle v_1 \wedge \ldots \wedge v_p, \omega\rangle \equiv \omega\left(v_1, \ldots, v_p\right) := \iota_{v_p} \circ \ldots \circ \iota_{v_1}(\omega).$$

Тогда, например, для $v, v_1, v_2 \in V, \quad \alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in V^*$ будет

$$\begin{gathered}\langle v, \alpha\rangle=\alpha(v), \\ \left\langle v_1 \wedge v_2, \alpha_1 \wedge \alpha_2\right\rangle=\alpha_1\left(v_1\right) \alpha_2\left(v_2\right)-\alpha_1\left(v_2\right) \alpha_2\left(v_1\right),\end{gathered}$$

При сделанных определениях показать, что линейное отображение внешнего умножения на вектор $v \in V$,

$$e_v: \Lambda^{\bullet}(V) \rightarrow \Lambda^{\bullet}(V)$$

Найти все (супер)дифференцирования степени $(-1), 0$ и $(-2)$ кольца $\Lambda^{\bullet} V^*$. Аналогичные определения можно сделать для симметрической алгебры $S^{\bullet}\left(V^*\right)$.

### 1.9

$V$ - векторное пространство, $v_1, \ldots v_p \in V, \quad \operatorname{dim} V=n \geqslant p$, а $f^1, \ldots, f^p \in V^*$. Доказать, что

$$\left(f^1 \wedge \ldots \wedge f^p\right)\left(v_1, \ldots, v_p\right)=\operatorname{det}\left(f^i\left(v_j\right)\right)$$

## 6.4 Задачи о приложениях дифференциальной геометрии (???)

Обсудим особые многообразия и изучим их свойства.

### 6.4.1 Задачи на диффгем в механике

### 6.4.2 Задачи на диффгем в теории поля

тоже мб пригодится.

### 6.4.3 Задачи на диффгем в теории струн

тоже мб пригодится.

# Part IV
# —– Special Differential Geometry in a Nutshell —–

## 7 О других методах и конструкциях

### 7.0.1 О тетрадах и системах отсчета

(мб расширю, пока такая заготовка)

### 7.0.2 О характеристических классах

#### On Chern class (?????)

(wiki)

In mathematics, in particular in algebraic topology, differential geometry and algebraic geometry, the Chern classes are characteristic classes associated with complex vector bundles. They have since become fundamental concepts in many branches of mathematics and physics, such as string theory, Chern–Simons theory, knot theory, Gromov–Witten invariants.

**On construction (?????)**

**On applications (?????)** (мб дойду когда-то, пока не до этого)

#### О классе Понтрягина (?????)

#### Об Эйлеровом классе

#### О формах Черна-Саймонса

#### О сигнатуре многообразия

#### О теореме Гаусса-Бонне

Пусть $\Omega$ - компактное двумерное ориентированное риманово многообразие с гладкой границей $\partial\Omega$. Обозначим через $K$ гауссову кривизну $\Omega$ и через $k_g$ геодезическую кривизну $\partial\Omega$. Тогда

$$\int_\Omega K d\sigma + \int_{\partial\Omega} k_g ds = 2\pi\chi(\Omega),$$

где $\chi(\Omega)$ - эйлерова характеристика $\Omega$. В частности, если у $\Omega$ нет границы, получаем

$$\int_\Omega K d\sigma = 2\pi\chi(\Omega).$$

Если поверхность деформируется, то её эйлерова характеристика не меняется, в то время как гауссова кривизна может меняться поточечно. Тем не менее, согласно формуле Гаусса - Бонне, интеграл гауссовой кривизны остаётся тот же.

### 7.0.3 Другое о расслоениях, гомотопиях

(потом мб отдельные разделы создам, пока так, потому что не доучивал еще)

**On Chern-Weil homomorphism**

(wiki)

It is a basic construction in Chern-Weil theory that computes topological invariants of vector bundles and principal bundles on a smooth manifold $M$ in terms of connections and curvature representing classes in the de Rham cohomology rings of $M$. That is, the theory forms a bridge between the areas of algebraic topology and differential geometry. It was developed in the late 1940 s by Shiing-Shen Chern and André Weil, in the wake of proofs of the generalized Gauss-Bonnet theorem. This theory was an important step in the theory of characteristic classes. Let $G$ be a real or complex Lie group with Lie algebra $\mathfrak{g}$, and let $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]$ denote the algebra of $\mathbb{C}$-valued polynomials on $\mathfrak{g}$ (exactly the same argument works if we used $\mathbb{R}$ instead of $\mathbb{C}$.) Let $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$ be the subalgebra of fixed points in $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]$ under the adjoint action of $G$; that is, the subalgebra consisting of all polynomials $f$ such that $f\left(\operatorname{Ad}_g x\right)=f(x)$, for all $g$ in $G$ and $x$ in $\mathfrak{g}$, Given a principal G-bundle $P$ on $M$, there is an associated homomorphism of $\mathbb{C}$-algebras,

$$\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G \rightarrow H^*(M; \mathbb{C})$$

called the Chern-Weil homomorphism, where on the right cohomology is de Rham cohomology. This homomorphism is obtained by taking invariant polynomials in the curvature of any connection on the given bundle. If $G$ is either compact or semi-simple, then the cohomology ring of the classifying space for $G$-bundles, $BG$, is isomorphic to the algebra $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$ of invariant polynomials:

$$H^*(BG; \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G .$$

(The cohomology ring of $BG$ can still be given in the de Rham sense:

$$H^k(BG; \mathbb{C}) = \underset{\lim}{\longrightarrow} \operatorname{ker}\left(d: \Omega^k\left(B_j G\right) \rightarrow \Omega^{k+1}\left(B_j G\right)\right) / \operatorname{im} d .$$

when $BG=\lim_{\longrightarrow} B_j G$ and $B_j G$ are manifolds.)

**On construction (?????)**

**On applications (?????)** (мб дойду когда-то, пока не до этого)

## 7.1 О других конструкциях

(потом мб изменю структуру, пока всё ходовое тупо тут и всё)

### 7.1.1 О многообразиях в общем случае

**ИТ-12. Об определении и задании многообразий**

**12.1 Топологические многообразия (Tong also is here)** Definition: An $n$-dimensional differentiable manifold is a Hausdorff topological space $M$ such that

i) $M$ is locally homeomorphic to $\mathbf{R}^n$. This means that for each $p \in M$, there is an open set $\mathcal{O}$ such that $p \in \mathcal{O}$ and a homeomorphism $\phi: \mathcal{O} \rightarrow U$ with $U$ an open subset of $\mathbf{R}^n$.

ii) Take two open subsets $\mathcal{O}_\alpha$ and $\mathcal{O}_\beta$ that overlap, so that $\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta \neq \emptyset$. We require that the corresponding maps $\phi_\alpha: \mathcal{O}_\alpha \rightarrow U_\alpha$ and $\phi_\beta: \mathcal{O}_\beta \rightarrow U_\beta$ are compatible, meaning that the map $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}: \phi_\alpha\left(\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta\right) \rightarrow \phi_\beta\left(\mathcal{O}_\alpha \cap \mathcal{O}_\beta\right)$ is smooth (also known as infinitely differentiable or $C^{\infty}$), as is its inverse. This is depicted in Figure 14.

**12.2 Функции и отображения**

#### 12.3 Гладкие многообразия

#### 12.4 Простейшие примеры гладких многообразий

#### 12.5 Гладкие функции, гладкие отображения, диффеоморфизмы

#### 12.6 Задание многообразий уравнениями - геометрический смысл теоремы о неявной функции

#### 12.7 Подмногообразия

### ИТ-13 Касательное пространство к многообразию, дифференциал

#### 13.1 Определение касательного вектора

#### 13.2 Касательное расслоение

#### 13.3 Определение дифференциала

#### 13.4 Локальные свойства отображений

#### 14 Вложения многообразий в евклидово пространство

#### 14.1 Существование вложения

#### 14.2 Теорема Сарда

#### 14.3 Теорема Уитни

### ИТ-16 Классификация связных двумерных компактных многообразий

#### 16.1 Склейки многоугольников

#### 16.2 Заклеивание сферы

#### 16.3 Теорема классификации

#### 16.3.1 Триангуляции

#### 16.3.2 Канонические склейки многоугольников

#### 16.3.3 Последний шаг, эйлерова характеристика

### 7.1.2 О симплектической структуре и геометрии

(надеюсь, для самой сути раздела хватит. структура лекций Рослого)

**Теорема Дарбу.**

**Лагранжевы подмногообразия.**

**Гамильтоновы векторные поля и их гамильтонианы.**

**Скобки Пуассона, симплектические листы.**

**Действие группы симплектоморфизмами, гамильтонова редукция.**

**Квантовые аналоги этих понятий**

### 7.1.3 О спин-структуре на многообразиях (!?!?)

### 7.1.4 О топологических пространствах

(По Иванову Тужилину)

**Метрические и топологические пространства**

**10.1.1 Метрические пространства**

**10.1.2 Топологические пространства**

**10.2 Непрерывные отображения**

**Классы топологических пространств**

**11.1 Связность**

**11.2 Аксиомы отделимости**

**11.3 Компактность**

### 7.1.5 О гомологиях

### 7.1.6 О супергеометрии

(последняя тема Рослого)

# 8 О приложениях диффгема в физике

(мб увеличу потом раздел, пока так, пока выше суть выгружается тоже, потом перенесу сюда. По идее выше все уже что нужно указано, а тут именно приложения укажу)

(из Тахтаджаяна снова тоже многое выпишу!!!)

## 8.1 О механике и квантовой механике

### 8.1.1 Об основах механики

We know that

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

With a Poisson bracket $\{f, g\} := \frac{\partial f}{\partial q^j}\frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q^j}$ the time evolution of any function $f$ can be written as

$$\dot{f} = \{f, H\}$$

which reproduces Hamilton's equations if we take $f = q^i$ or $f = p_i$.

Underlying this story is the mathematical structure of forms. The key idea is that we have a manifold $M$ and a function $H$ on $M$. We want a machinery that turns the function $H$ into a vector field $X_H$. Particles then follow trajectories in phase space that are integral curves generated by $X_H$.

To achieve this, we introduce a symplectic two-form $\omega$ on an even-dimensional manifold $M$. This two form must be closed, $d\omega = 0$, and non-degenerate, which means that the top form $\omega \wedge \ldots \wedge \omega \neq 0$. A manifold $M$ equipped with a symplectic two-form is called a symplectic manifold.

Any 2 -form provides a map $\omega : T_p(M) \rightarrow T_p^*(M)$. Given a vector field $X \in \mathfrak{X}(M)$, we can simply take the interior product with $\omega$ to get a one-form $\iota_X \omega$. However, we want to go the other way: given a function $H$, we can always construct a one-form $dH$, and we'd like to exchange this for a vector field. We can do this if the map $\omega : T_p(M) \rightarrow T_p^*(M)$ is actually an isomorphism, so the inverse exists. This turns out to be true provided that $\omega$ is non-degenerate. In this case, we can define the vector field $X_H$ by solving the equation

$$\iota_{X_H} \omega = -dH$$

If we introduce coordinates $x^\mu$ on the manifold, then the component form of this equation is

$$X_H^\mu \omega_{\mu\nu} = -\partial_\nu H$$

We denote the inverse as $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$ such that $\omega^{\mu\nu}\omega_{\nu\rho} = \delta_\rho^\mu$. The components of the vector field are then

$$X_H^\mu = -\omega^{\nu\mu}\partial_\nu H = \omega^{\mu\nu}\partial_\nu H$$

The integral curves generated by $X_H$ obey the differential equation (2.9)

$$\frac{dx^\mu}{dt} = X_H^\mu = \omega^{\mu\nu}\partial_\nu H$$

These are the general form of Hamilton's equations. They reduce to our earlier form (2.33) if we write $x^\mu = (q^i, p_j)$ and choose the symplectic form to have block diagonal form $\omega^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

To define the Poisson structure, we first note that we can repeat the map (2.34) to turn any function $f$ into a vector field $X_f$ obeying $\iota_{X_f}\omega = -df$. But we can then feed these vector fields back into the original 2 -form $\omega$. This gives us a Poisson bracket,

$$\{f, g\} = \omega\left(X_g, X_f\right) = -\omega\left(X_f, X_g\right)$$

Or, in components,

$$\{f, g\} = \omega^{\mu\nu}\partial_\mu f \partial_\nu g$$

There are many other ways to write this Poisson bracket structure in invariant form. For example, backtracking through various definitions we find

$$\{f, g\} = -\iota_{X_f}\omega\left(X_g\right) = df\left(X_g\right) = X_g(f)$$

The equation of motion in Poisson bracket structure is then

$$\dot{f} = \{f, H\} = X_H(f) = \mathcal{L}_{X_H} f$$

which tells us that the Lie derivative along $X_H$ generates time evolution.

We haven't yet explained why the symplectic two-form must be closed, $d\omega = 0$. You can check that this is needed so that the Poisson bracket obeys the Jacobi identity. Alternatively, it ensures that the symplectic form itself is invariant under Hamiltonian flow, in the sense that $\mathcal{L}_{X_H}\omega = 0$. To see this, we use (2.31)

$$\mathcal{L}_{X_H}\omega = (d\iota_{X_H} + \iota_{X_H} d)\,\omega = \iota_{X_H} d\omega$$

The second equality follows from the fact that $d\iota_{X_H}\omega = -d(dH) = 0$. If we insist that $d\omega = 0$ then we find $\mathcal{L}_{X_H}\omega = 0$ as promised.

### 8.1.2 О других свойствах механики (!!!??)

#### О математической лагранжевой механике (действии, Нетер, Лежандре)

Определение. Пусть $(U, \varphi)$ - координатная окрестность в $M$ с локальными координатами $\boldsymbol{q} = (q^1, \ldots, q^n)$. Координаты

$$(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v}) = \left(q^1, \ldots, q^n, v^1, \ldots, v^n\right)$$

на окрестности $TU$ пространства $TM$, где $\boldsymbol{v} = (v^1, \ldots, v^n)$ - координаты в слое, соответствующие базису $\frac{\partial}{\partial q^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial q^n}$ пространства $T_qM$, называются стандартными координатами. (то есть просто обычная пара из обычных координат и скоростей)

Энергия лагранжевой системы $(M, L)$ - это функция $E$ на $TM \times \mathbb{R}$, определенная в стандартных координатах на $TM$ формулой

$$E(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) - L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$$

Лагранжева система $(M, L)$ называется невырожденной , если для любой координатной окрестности $U$ в $M$ матрица гессе $H_L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \left\{\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\right\}_{i,j=1}^{n}$ обратима на $TU$.

Для инвариантной формулировки рассмотрим 1-форму $\theta_L$, определенную в стандартных координатах, связанных с координатной окрестностью $U \subset M$, формулой

$$\theta_L = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} dq^i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} d\boldsymbol{q}.$$

Лагранжева система $(M, L)$ невырождена, если и только если 2-форма $d\theta_L$ на TM невырождена.

Через 1-форму $\theta_L$ интеграл Нётер $I$ имеет вид

$$I = i_{X'}(\theta_L)$$

где $X'$ - подъем векторного поля $X$ с $M$ на $TM$, заданный уравнением (1.5). Из (1.6) также мгновенно следует, что если $X$ - бесконечно малая симметрия, то

$$\mathcal{L}_{X'}(\theta_L) = 0.$$

Стандартные координаты в $(U, \varphi)$ координатной окрестности в $M$ - координаты $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = (p_1, .., p_n, q^1, .., q^n)$ в окрестности $T^*U \simeq \mathbb{R}^n \times U$ кокасательного расслоения $T^*M$, если для $(p, q) \in T^*U$ и $f \in C^\infty(U)$

$$p_i(df) = \frac{\partial f}{\partial q^i}, \quad i = 1, .., n$$

По традиции первые $n$ координат параметризуют слой $T^*U$, а последние $n$ координат базу. (???? проверю еще раз, чтобы про импульс не было вопросов??)

Эквивалентным образом, стандартные координаты на $T^*U$ можно однозначно охарактеризовать условием, что $\boldsymbol{p} = (p_1,..,p_n)$ - координаты в слое, соответствующие базису $dq^1,..,dq^n$ пространства $T_q^*M$, двойственному к базису $\frac{\partial}{\partial q^1},..,\frac{\partial}{\partial q^n}$ пространства $T_qM$.

Преобразованием Лежандра для лагранжиана $L$ - послойное отображение $\tau_L : TM \to T^*M$ называется, если

$$\theta_L = \tau_L^*(\theta)$$

Кстати, инвариантно $\theta_L(v) := dL\left((i \circ \pi_*)\, v\right)$, где $v \in T(TM)$ (??????????).

В стандартных координатах преобразование Лежандра задается формулой

$$\tau_L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}), \qquad \text{где} \qquad \boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$$

Отображение $\tau_L-$ локальный диффеоморфизм, если и только если лагранжиан $L$ невырожден.

Пусть преобразование Лежандра $\tau_L : TM \to T^*M-$ диффеоморфизм. Гамильтониан $H : T^*M \to \mathbb{R}$, соответствующий лагранжиану $L : TM \to \mathbb{R}$, определяется как

$$H \circ \tau_L = E_L = \dot{\boldsymbol{q}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} - L.$$

В стандартных координатах

$$H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \left.(\boldsymbol{p}\dot{\boldsymbol{q}} - L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}))\right|_{\boldsymbol{p}=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}}$$

где $\dot{\boldsymbol{q}}-$ функция $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$, определяемая уравнением $\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})$ по теореме о неявной функции. Кокасательное расслоение $T^*M$ называется фазовым пространством лагранжевой системы $(M, L)$.

### Об основах математической гамильтоновой механики (уравнениях Гамильтона, гамильтоновом действии, уравнении Лиувилля, канонических преобразованиях)

Каждой функции $H : T^*M \to \mathbb{R}$ на фазовом пространстве $T^*M$ соответствуют уравнения Гамильтона, соответствующее векторное поле $X_H \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}} - \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}$ на $T^*U$, порождает векторное поле $X_H$ на $T^*M$, называемое гамильтоновым векторным полем . Предположим теперь, что векторное поле $X_H$ на $T^*M$ полно, т. е. что его интегральные кривые определены во все моменты времени. Соответствующая однопараметрическая группа $\{g_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ диффеоморфизмов $T^*M$, порожденная $X_H$, называется гамильтоновым фазовым потоком. Он определяется равенством $g_t(p, q) = (p(t), q(t))$, где $p(t), q(t)$ - решение уравнений Гамильтона, удовлетворяющее условию $p(0) = p, q(0) = q$.

Каноническая 1-форма Лиувилля $\theta$ на $T^*M$ определяет симплектическую 2-форму $\omega = d\theta$ на $T^*M$. В стандартных координатах на $T^*M$ она задается формулой

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq^i = d\boldsymbol{p} \wedge d\boldsymbol{q}$$

Она определяет изоморфизм $J : T^*(T^*M) \to T(T^*M)$ касательного и кокасательного расслоений к $T^*M$. Для любого $(p, q) \in T^*M$ линейное отображение $J^{-1} : T_{(p,q)}T^*M \to T^*_{(p,q)}T^*M$ задается уравнением

$$\omega(u_1, u_2) = J^{-1}(u_2)(u_1), \quad u_1, u_2 \in T_{(p,q)}T^*M$$

и $J^{-1}(X) = -i_X\omega$. В частности, в стандартных координатах $J(d\boldsymbol{p}) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}}$ и $J(d\boldsymbol{q}) = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}}$, так что $X_H = J(dH)$.

Теорема 2.1. Гамильтонов фазовый поток на $T^*M$ сохраняет каноническую симплектическую форму.

Следствие 2.2. $\mathcal{L}_{X_H}(\theta) = d\left(-H + \theta\left(X_H\right)\right)$, где $\theta-$ каноническая 1-форма Лиувилля.

Каноническая симплектическая форма $\omega$ на $T^*M$ определяет форму объема $\frac{\omega^n}{n!} = \frac{1}{n!}\omega_1 \wedge .. \wedge \omega_n$ на $T^*M$, называемую лиувиллевой формой объема.

(Теорема Лиувилля) . Гамильтонов фазовый поток на $T^*M$ сохраняет лиувиллеву форму объема.

Подмногообразие $\mathscr{L}$ фазового пространства $T^*M$ называется лагранжевым подмногообразием , если $\dim \mathscr{L} = \dim M$ и $\omega|_{\mathscr{L}} = 0$.

С каждой функцией $H$ на фазовом пространстве $T^*M$ ассоциирована т.н. форма Пуанкаре-Картана - 1-форма на расширенном фазовом пространстве $T^*M \times \mathbb{R}$ вида

$$\theta - Hdt = \boldsymbol{p}d\boldsymbol{q} - Hdt$$

Пусть $\gamma : [t_0, t_1] \to T^*M$ - гладкий параметризованный путь в $T^*M$, такой, что $\pi\left(\gamma\left(t_0\right)\right) = q_0$ и $\pi\left(\gamma\left(t_1\right)\right) = q_1$, где $\pi : T^*M \to M-$ каноническая проекция.

По определению подъем пути $\gamma$ в расширенное фазовое пространство $T^*M \times \mathbb{R}$ - это путь $\sigma : [t_0, t_1] \to T^*M \times \mathbb{R}$, задаваемый формулой $\sigma(t) = (\gamma(t), t)$, и путь $\sigma$ в $T^*M \times \mathbb{R}$ называется допустимым путем, если он является подъемом пути $\gamma$ в $T^*M$. Пространство допустимых путей в $T^*M \times \mathbb{R}$ обозначается $\tilde{P}\left(T^*M\right)_{q_0,t_0}^{q_1,t_1}$. Вариация допустимого пути $\sigma$ - это гладкое семейство допустимых путей $\sigma_\varepsilon$, где $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ и $\sigma_0 = \sigma$, а соответствующая бесконечно малая вариация - это

$$\delta\sigma = \left.\frac{\partial \sigma_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \in T_\sigma \tilde{P}\left(T^*M\right)_{q_0,t_0}^{q_1,t_1}$$

Через эти понятия легко написать принцип наименьшего действия, там $S(\sigma) = \int_\sigma (\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q} - Hdt)$.

Принцип Мопертюи . Траектория $\gamma = (\boldsymbol{q}(\tau))$ замкнутой лагранжевой системы $(M, L)$, соединяющая точки $q_0$ и $q_1$ и имеющая энергию $E$, является экстремалью функционала $\int_\gamma \boldsymbol{p}d\boldsymbol{q} = \int_\gamma \frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}(\boldsymbol{q}(\tau), \dot{\boldsymbol{q}}(\tau))\dot{\boldsymbol{q}}(\tau)d\tau$ на пространстве всех путей в конфигурачионном пространстве $M$, соединяющих точки $q_0$ и $q_1$ и параметризованных так, что $H\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}(\tau), \boldsymbol{q}(\tau)\right) = E$. Функционал $S_0(\gamma) = \int_\gamma \boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}$ называется укороченным действием.

### О наблюдаемых и скобках Пуассона

Гладкие вещественнозначные функции на фазовом пространстве $T^*M$ называются классическими наблюдаемыми. Векторное пространство $C^\infty\left(T^*M\right)$ является $\mathbb{R}$-алгеброй - ассоциативной алгеброй над $\mathbb{R}$ с единицей, заданной постоянной функцией 1, и умножением, заданным поточечным произведением функций. Коммутативная алгебра $C^\infty\left(T^*M\right)$ называется алгеброй классических наблюдаемых. Предполагая, что гамильтонов фазовый поток $g_t$ определен для всех моментов времени, временная эволюция любой наблюдаемой $f \in C^\infty\left(T^*M\right)$ дается уравнением

$$f_t(p,q) = f\left(g_t(p,q)\right) = f(p(t), q(t)), \quad (p,q) \in TM$$

можно переписать уравнение Гамильтона в сжатой форме:

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\}$$

где подразумевается, что (2.7) - дифференциальное уравнение для семейства функций $f_t$ на $T^*M$ с начальным условием $f_t(p,q)|_{t=0} = f(p,q)$. Свойства билинейного отображения

$$\{,\}: C^\infty\left(T^*M\right) \times C^\infty\left(T^*M\right) \to C^\infty\left(T^*M\right)$$

Теорема 2.9. Отображение $\{,\}$ удовлетворяет следующим свойствам для любых $f, g, h \in C^\infty\left(T^*M\right)$:

(i) (Связь с симплектической формой) $\{f,g\} = \omega(J(df), J(dg)) = \omega\left(X_f, X_g\right);$

(ii) (Кососимметричность) $\{f,g\} = -\{g,f\}$

(iii) (Правило Лейбница) $\{fg,h\} = f\{g,h\} + g\{f,h\};$

(iv) (Тождество Якоби) $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$

Наблюдаемая $\{f,g\}$ называется канонической скобкой Пуассона наблюдаемых $f$ и $g$. Отображение скобки Пуассона $\{\} :, C^\infty\left(T^*M\right) \times \; \times C^\infty\left(T^*M\right) \to C^\infty\left(T^*M\right)$ превращает алгебру классических наблюдаемых $C^\infty\left(T^*M\right)$ в алгебру Ли со скобкой Ли, задаваемой скобкой Пуассона. Ее важное свойство - скобка Ли является бидифференцированием по отношению к умножению в $C^\infty\left(T^*M\right)$. Алгебра классических наблюдаемых $C^\infty\left(T^*M\right)$ - это пример пуассоновой алгебры - коммутативной алгебры над $\mathbb{R}$, наделенной структурой алгебры Ли с тем свойством, что скобка Ли - дифференцирование по отношению к произведению

**Об алгебре и переходе в квантовую механику** (важное указание!)

### Об определениях симплектических и пуассоновых многообразий

Мы просто говорим, что многообразие (такое-то), если на нем задана (такая-то структура), вот и все. (??? напишу своими словами тут многое потом!)

Понятие симплектического многообразия - это обобщение примера кокасательного расслоения $T^*M$.

Определение. Невырожденная, замкнутая 2-форма $\omega$ на многообразии $\mathscr{M}$ называется симплектической формой, а пара $(\mathscr{M}, \omega)$ - симплектическим многообразием.

Поскольку симплектическая форма $\omega$ невырождена, симплектическое многообразие $\mathscr{M}$ с необходимостью четномерно, $\dim \mathscr{M} = 2n$. Не обращающаяся в ноль $2n$-форма $\omega^n$ определяет каноническую ориентацию на $\mathscr{M}$, и, так же как в случае $\mathscr{M} = T^*M$, $\frac{\omega^n}{n!}$ называется лиувиллевой формой объема. Существует также общее понятие лагранжева подмногообразия.

Лагранжево подмногообразие $\mathscr{L}$ симплектического многообразия $(\mathscr{M}, \omega)$ - многообразие, у которого $\dim \mathscr{L} = \frac{1}{2} \dim \mathscr{M}$ и ограничение симплектической формы $\omega$ на $\mathscr{L}$ равно 0.

Кэлерово многообразие - комплексное многообразие $\mathscr{M}$, если на нем определена эрмитова метрика, мнимая часть которой замкнутая $(1,1)$-форма. В локальных комплексных координатах $z = (z^1, .., z^n)$ на $\mathscr{M}$ эрмитова метрика записывается как

$$h = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} h_{\alpha\bar{\beta}}(\boldsymbol{z}, \overline{\boldsymbol{z}}) dz^\alpha \otimes d\bar{z}^\beta.$$

$$g = \operatorname{Re} h = \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} h_{\alpha\bar{\beta}}(\boldsymbol{z}, \overline{\boldsymbol{z}}) \left(dz^\alpha \otimes d\bar{z}^\beta + d\bar{z}^\beta \otimes dz^\alpha\right) \qquad \text{- риманова метрика.}$$

$$\omega = -\frac{1}{2} \operatorname{Im} h = \frac{i}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} h_{\alpha\bar{\beta}}(\boldsymbol{z}, \overline{\boldsymbol{z}}) dz^\alpha \wedge d\bar{z}^{\boldsymbol{\beta}} \qquad \text{- симплектическая форма.}$$

Простейшее некомпактное кэлерово многообразие - это $n$-мерное комплексное векторное пространство $\mathbb{C}^n$ со стандартной эрмитовой метрикой. В комплексных координатах $z = (z^1,.., z^n)$ на $\mathbb{C}^n$ она дается формулой $h = d\boldsymbol{z} \otimes d\bar{z} = \sum_{\alpha=1}^n dz^\alpha \otimes d\bar{z}^\alpha$

Симплектическое векторное пространство - это пара $(V, \omega)$, где $V$ - векторное пространство над $\mathbb{R}$, а $\omega$ - невырожденная кососимметрическая билинейная форма на $V$. Любое симплектическое векторное пространство изоморфно прямому произведению фазовых плоскостей $\mathbb{R}^2$ с канонической симплектической формой $dp \wedge dq$. Вводя комплексные координаты $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{p} + i\boldsymbol{q}$, мы получаем изоморфизм $V \simeq \mathbb{C}^n$, так что любое симплектическое векторное пространство допускает кэлерову структуру.

Теорема Дарбу о существовании формы Дарбу. Пусть $(\mathscr{M}, \omega)$ - $2n$-мерное симплектическое многообразие. Для любой точки $x \in \mathscr{M}$ существует содержащая $x$ окрестность $U$ с локальными координатами $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = (p_1,.., p_n, q^1,.., q^n)$, такая, что на $U$

$$\omega = d\boldsymbol{p} \wedge d\boldsymbol{q} = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i.$$

Координаты $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ называются каноническими координатами (координатами Дарбу). Доказательство проводится индукцией по $n$ (??? как интуитивно это понимать??)

Невырожденная 2-форма $\omega$ определяет для любого $x \in \mathscr{M}$ изоморфизм $J : T_x^*\mathscr{M} \to T_x\mathscr{M}$ по формуле

$$\omega\left(u_1, u_2\right) = J^{-1}\left(u_2\right)\left(u_1\right), u_1, u_2 \in T_x\mathscr{M}$$

Гамильтонова система - это пара, состоящая из симплектического многообразия $(\mathscr{M}, \omega)$ (называемого фазовым пространством) и гладкой вещественнозначной функции $H$ на $\mathscr{M}$ (называемой гамильтонианом). Движение точек фазового пространства описывается т.н. гамильтоновым векторным полем:

$$X_H = J(dH),$$

Гамильтонов фазовый поток сохраняет симплектическую форму. (!?!??!?) (! потренируюсь в теории доказывать это!)

Следствие 2.13. Векторное поле X на $\mathscr{M}$ - гамильтоново векторное поле, если и только если 1-форма $i_X(\omega)$ точна.

Симплектическое векторное поле $X$ на симплектическом многообразии $(\mathscr{M}, \omega)$ - такое поле, для которого 1-форма $i_X(\omega)$ замкнута, что эквивалентно тому, что $\mathscr{L}_X\omega = 0$.

Скобка Пуассона на алгебре $C^\infty(\mathscr{M})$ классических наблюдаемых на симплектическом многообразии $(\mathscr{M}, \omega)$ - это билинейное отображение $\{,\} :, C^\infty(\mathscr{M}) \times C^\infty(\mathscr{M}) \to C^\infty(\mathscr{M})$, определенное формулой

$$\{f, g\} = \omega\left(X_f, X_g\right), \quad f, g \in C^\infty(\mathscr{M})$$

Следствие 2.15. Подпространство Ham$(\mathscr{M})$ гамильтоновых векторных полей на $\mathscr{M}$ - подалгебра Ли алгебры Vect $(\mathscr{M})$. Отображение $C^\infty(\mathscr{M}) \to$ Ham$(\mathscr{M})$, определенное как $f \mapsto X_f$, - гомоморфизм алгебр Ли с ядром, состоящим из локально постоянных функций на $\mathscr{M}$.

Теорема Пуассона: скобка Пуассона двух интегралов движения - интеграл движения.

Группа симметрий гамильтоновой системы $((\mathscr{M}, \omega), H)$ - группа Ли $G$, если существует гамильтоново действие $G$ на $\mathscr{M}$, такое, что

$$H(g \cdot x) = H(x), \quad g \in G, x \in \mathscr{M}.$$

Теорема 2.17 (Теорема Нётер с симметриями). Если $G$ - группа симметрий гамильтоновой системы $((\mathscr{M}, \omega), H)$, то функции $\Phi_\xi, \xi \in \mathfrak{g}-$ интегралы движения. Если действие $G$ пуассоново, интегралы движения удовлетворяют (2.15).

Пусть $G-$ конечномерная группа Ли, действующая на связном симплектическом многообразии $(\mathscr{M}, \omega)$ симплектоморфизмами. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы $G$ действует на $\mathscr{M}$ векторными полями

$$X_\xi(f)(x) = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} f\left(e^{-s\xi} \cdot x\right),$$

и линейное отображение $\mathfrak{g} \ni \xi \mapsto X_\xi \in \mathrm{Vect}(\mathscr{M})$ - гомоморфизм алгебр Ли,

$$[X_\xi, X_\eta] = X_{[\xi,\eta]}, \quad \xi, \eta \in \mathfrak{g}$$

$G$-действие называется гамильтоновым действием, если $X_\xi-$ гамильтоновы векторные поля, т.е. для любого $\xi \in \mathfrak{g}$ существует функция $\Phi_\xi \in C^\infty(\mathscr{M})$, определенная с точностью до аддитивной постоянной, такая, что $X_\xi = X_{\Phi_\xi} = J\left(d\Phi_\xi\right)$. Оно называется пуассоновым действием, если можно выбрать функции $\Phi_\xi$, такие, что линейное отображение $\Phi : \mathfrak{g} \to C^\infty(\mathscr{M})$ - гомоморфизм алгебр Ли,

$$\{\Phi_\xi, \Phi_\eta\} = \Phi_{[\xi,\eta]}, \quad \xi, \eta \in \mathfrak{g}.$$

Следствие 2.18. Пусть $(M, L)$ - лагранжева система, такая, что преобразование Лежандра $\tau_L : TM \to T^*M-$ диффеоморфизи. Тогда если группа Ли $G$ - симметрия $(M, L)$, то $G$ - группа симметрий соответствующей гамильтоновой системы $\left((T^*M, \omega), H = E_L \circ \tau_L^{-1}\right)$, и соответствующее $G$-действие на $T^*M$ пуассоново. В частности, $\Phi_\xi = -I_\xi \circ \tau_L^{-1}$, где $I_\xi-$ нётеровы интегралы движения для однопараметрических подгрупп $G$, порожденных $\xi \in \mathfrak{g}$.

Гамильтонова система $((\mathscr{M}, \omega), H), \dim \mathscr{M} = 2n$, называется вполне интегрируемой, если у нее есть $n$ независимых интегралов движения $F_1 = H,.., F_n$ в инволюции. Первое условие означает, что дифференциалы $dF_1(x),.., dF_n(x) \in T^*_x\mathscr{M}$ линейно независимы для почти всех $x \in \mathscr{M}$. Гамильтоновы системы с одной степенью свободы, такие, что $dH$ имеет лишь конечное число нулей, являются полностью интегрируемыми. Полное разделение переменных в уравнении Гамильтона - Якоби (см. раздел 1.2.5) доставляет другие примеры вполне интегрируемых гамильтоновых систем.

Оператор эволюции $U_t : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ определяется фазовым потоком $g_t$ для полного гамильтонова векторного поля $X_H = \{H, \cdot\}$ по формуле

$$U_t(f)(x) = f\left(g_t(x)\right), f \in \mathcal{A}.$$

Оператор эволюции автоморфизм. (??? что это значит???)

Допустим, что любое гамильтоново векторное поле на пуассоновом многообразии $(\mathscr{M}, \{\},)$ полно. Тогда для любого $H \in \mathcal{A}$ соответствующий оператор эволючии $U_t$ является автоморфизмом пуассоновых алгебр $\mathcal{A}$, т. е.

$$U_t(\{f, g\}) = \{U_t(f), U_t(g)\} \quad \text{для любых} \quad f, g \in \mathcal{A}.$$

Обратно, если кососимметрическое билинейное отображение $\{,\} : C^\infty(\mathscr{M}) \times C^\infty(\mathscr{M}) \to C^\infty(\mathscr{M})$ таково, что $X_H = \{H, \cdot\}-$ полные векторные поля для всех $H \in \mathcal{A}$, и соответствующие операторы эволючии $U_t$ удовлетворяют (2.17), то $(\mathscr{M}, \{\},)$ - пуассоново многообразие.

Глобальное сечение $\eta$ расслоения $T\mathscr{M} \wedge T\mathscr{M}-$ тензор Пуассона (????), если и только если

$$\mathcal{L}_{X_f}\eta = 0 \quad \text{для любого} \quad f \in \mathcal{A}.$$

Определение. Центр пуассоновой алгебры $\mathcal{A}$ - это

$$\mathcal{Z}(\mathcal{A}) = \{f \in \mathcal{A} : \{f, g\} = 0 \quad \text{для любого} \quad g \in \mathcal{A}\}.$$

Невырожденное пуассоново многообразие $(\mathscr{M}, \{\})$, если центр пуассоновой алгебры классических наблюдаемых $\mathcal{A} = C^\infty(\mathscr{M})$ состоит из одних локально постоянных функций ($\mathcal{Z}(\mathcal{A}) = \mathbb{R}$ для связного $\mathscr{M}$).

### О представлении Гамильтона и Лиувилля (??!??!?)

(мб соединю с разделом про наблюдаемые, пока понять нормально эти темы нужно сперва)

Математически состояние $\mu$ на алгебре $\mathcal{A} = C^{\infty}(\mathscr{M})$ классических наблюдаемых на фазовом пространстве $\mathscr{M}$ - это соответствие

$$\mathcal{A} \ni f \mapsto \mu_f \in \mathscr{P}(\mathbb{R}),$$

где $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ - множество вероятностных мер на $\mathbb{R}$ - борелевских мер на $\mathbb{R}$, таких, что полная мера $\mathbb{R}$ равна 1. Для любого борелевского подмножества $E \subseteq \mathbb{R}$ величина $0 \leqslant \mu_f(E) \leqslant 1$ - это вероятность того, что в состоянии $\mu$ значение наблюдаемой $f$ принадлежит $E$. По определению математическое ожидание наблюдаемой $f$ в состоянии $\mu$ дается интегралом ЛебегаСтильтьеса

$$\mathrm{E}_{\mu}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\mu_f(\lambda),$$

где $\mu_f(\lambda) = \mu_f((-\infty, \lambda))-$ функция распределения меры $d\mu_f$. Соответствие $f \mapsto \mu_f$ должно удовлетворять следующим естественным свойствам.

S1. $|\mathrm{E}_{\mu}(f)| < \infty$ для $f \in \mathcal{A}_0$ - подалгебре ограниченных наблюдаемых.

S2. $\mathrm{E}_{\mu}(1) = 1$, где 1 - единица в $\mathcal{A}$.

S3. Для всех $a, b \in \mathbb{R}$ и $f, g \in \mathcal{A}$

$$\mathrm{E}_{\mu}(af + bg) = a\mathrm{E}_{\mu}(f) + b\mathrm{E}_{\mu}(g),$$

если и $\mathrm{E}_{\mu}(f)$, и $\mathrm{E}_{\mu}(g)$ существуют. S4. Если $f_1 = \varphi \circ f_2$, где $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - гладкая функция, то для любого борелевского подмножества $E \subseteq \mathbb{R}$

$$\mu_{f_1}(E) = \mu_{f_2}\left(\varphi^{-1}(E)\right).$$

(самое важное)

Определение. Множество состояний $\mathcal{S}$ для гамильтоновой системы с фазовым пространством $\mathscr{M}$ - это выпуклое множество $\mathscr{P}(\mathscr{M})$ всех вероятностных мер на $\mathscr{M}$. Состояния, соответствующие дираковским мерам $d\mu_x$, сконцентрированным в точках $x \in \mathscr{M}$, называются чистыии состояниями, а фазовое пространство $\mathscr{M}$ также называется пространством состояний [21]. Все остальные состояния называются смешанными состояниями. Процесс измерения в классической механике - это соответствие

$$\mathcal{A} \times \mathcal{S} \ni (f, \mu) \mapsto \mu_f = f_*(\mu) \in \mathscr{P}(\mathbb{R}),$$

сопоставляющее каждой наблюдаемой $f \in \mathcal{A}$ и состоянию $\mu \in \mathcal{S}$ вероятностную меру $\mu_f$ на $\mathbb{R}$ - трансфер меры $d\mu$ на $\mathscr{M}$ посредством $f$. Для любого борелевского подмножества $E \subseteq \mathbb{R}$ величина $0 \leqslant \mu_f(E) \leqslant 1$ это вероятность того, что для системы в состоянии $\mu$ результат измерения наблюдаемой $f$ лежит в множестве $E$. Математическое ожидание наблюдаемой $f$ в состоянии $\mu$ дается формулой (2.19).

Лемма 2.1. Чистье состояния - это единственные состояния, в которых любая наблюдаемая имеет нулевую дисперсию.

И у нас 2 представления: гамильтоново и лиувиллево (?? почему нет лагранжева)

Гамильтоново описание динамики. Состояния не зависят от времени, а временная эволюция наблюдаемых дается уравнениями движения Гамильтона:

$$\frac{d\mu}{dt} = 0, \quad \mu \in \mathcal{S}, \quad \text{и} \quad \frac{df}{dt} = \{H, f\}, \quad f \in \mathcal{A}.$$

Математическое ожидание наблюдаемой $f$ в состоянии $\mu$ в момент времени $t$ дается формулой

$$\mathrm{E}_\mu\left(f_t\right) = \int_{\mathscr{M}} f \circ g_t d\mu = \int_{\mathscr{M}} f\left(g_t(x)\right) \rho(x) dx,$$

где $\rho(x) = \frac{d\mu}{dx}$ - производная Радона - Никодима. В частности, математическое ожидание $f$ в чистом состоянии $d\mu_x$, соответствующем точке $x \in \mathscr{M}$, это $f\left(g_t(x)\right)$. Представление Гамильтона повсеместно используется для механических систем, состоящих из нескольких взаимодействующих частиц.

Лиувиллево описание динамики. Наблюдаемые не зависят от времени

$$\frac{df}{dt} = 0, \quad f \in \mathcal{A},$$

а состояния $d\mu(x) = \rho(x)dx$ удовлетворяют уравнению Лиувилля

$$\frac{d\rho}{dt} = -\{H, \rho\}, \quad \rho(x)dx \in \mathcal{S}$$

Здесь производная Радона-Никодима $\rho(x) = \frac{a\mu}{dx}$ и уравнение Лиувилля понимаются в смысле обобщенных функций. Математическое ожидание наблюдаемой $f$ в состоянии $\mu$ в момент времени $t$ дается формулой

$$\mathrm{E}_{\mu_t}(f) = \int_{\mathscr{M}} f(x) \rho\left(g_{-t}(x)\right) dx$$

#### Обзор применений симплектических методов

(это также в дополнениях будет, но пока также и тут, потому что это очень очень типичный вопрос, так что какие-то про это и сделаю заготовки. мб 2/3 страницы на это уйдет.)

#### Основные формулы и определения диффгема для механики

(коротко очень, подробнее в диффгеме про это, тут выписка из него, чтобы под рукой они были просто)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X &= i_X \circ d + d \circ i_X = \left(d + i_X\right)^2 \\ i_{[X,Y]} &= \mathcal{L}_X \circ i_Y - i_Y \circ \mathcal{L}_X. \end{aligned}$$

Для данного гладкого отображения многообразий $f : M \to N$ будем обозначать как $f_* : TM \to TN$ и $f^* : T^*N \to T^*M$ соответственно индуцированные отображения на касательном и кокасательном расслоениях.

### 8.1.3 О квантовой механике

## 8.2 О теориях полей

### 8.2.1 Об электродинамике

#### Основные формулы электродинамики

$$A = A_\mu(x) dx^\mu$$

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right) dx^\mu \wedge dx^\nu$$

### 8.2.2 О теориях поля

#### Уравнения и функционал Янга-Миллса

#### О полях Янга-Миллса по Каку

(по каку пишу)

Определим один-форму $A$ выражением $A = A_\mu dx^\mu$ где $A_\mu$ есть векторное поле,

а дифференциалы $dx^\mu$ антикоммутируют:

$$dx^\mu \Lambda dx^v = -dx^v \Lambda dx^\mu,$$

$$dx^\mu \Lambda dx^\mu = 0$$

Определим оператор производной как

$$d = dx^\mu \partial_\mu$$

Заметим, что поскольку производные коммутируют,

$$[\partial_\mu, \partial_{\mathrm{v}}] = 0$$

То

$$d^2 = 0$$

где оператор $d$ нильпотентен.

Теперь определим два-форму:

$$F = F_{\mu v} dx^\mu \Lambda dx^v$$

Заметим, что кривизна векторного поля является два-формой:

$$F = dA = dx^\mu \partial_\mu A_v dx^v = \frac{1}{2} \left( \partial_\mu A_v - \partial_v A_\mu \right) dx^\mu \Lambda dx^v$$

Поскольку оператор $d$ нильпотентен, имеем

$$dF = d^2 A = 0$$

Таким образом, тождества Бьянки для теории Максвелла, выраженные на языке форм, суть не что иное,

как нильпотентность оператора $d$.

Форма $\omega$ называется замкнутой, если $d\omega = 0$ Форма $\omega$ называется точной, если $\omega = dQ$ для некоторой формы $Q$.

Таким образом, форма кривизны является точной, поскольку она может быть записана как дивергенция один-формы $A$.

Она также является замкнутой вследствие тождеств Бьянки.

Все это можно также объединить с локальной калибровочной группой, порожденной образующими $\lambda_a$. Пусть $A = A_\mu^a \lambda_a dx^\mu$ Тогда форма кривизны есть $F = dA + A \Lambda A$ Далее, калибровочная вариация поля Янга- Миллса при преобразовании $\Lambda = \Lambda^a \lambda_a$

равна

$$\delta A = d\Lambda + A \wedge \Lambda - \Lambda \wedge A$$

Подставляя вариацию поля $A$ в кривизну $F$, получаем

$$\delta F = F \wedge \Lambda - \Lambda \wedge F$$

Итак, вариация действия равна нулю:

$$\delta \operatorname{Tr}\left(F^2\right) = 2\operatorname{Tr}(F \wedge \Lambda) - 2\operatorname{Tr}(\Lambda \wedge F) = 0$$

Теперь выпишем аномальный член $FF$, выразив его на языке форм Дивергенция аксиального тока также является квадратом двух величин, выражающих кривизну, что также дает полную производную.

На языке форм, это, как мы увидим, есть точная форма:

$$\operatorname{Tr}(F \wedge \tilde{F}) = \mathrm{d}\omega_3$$

где

$$\omega_3 = \operatorname{Tr}\left(AdA + \frac{2}{3}A^3\right)$$

$\omega_3$ - это три-форма, которую мы назовем формой Черна-Саймонса.

В свою очередь ее калибровочная вариация равна еще одной форме, которая также является точной: $\delta\omega_3 = \operatorname{Tr}(d\Lambda \wedge dA) = d\omega_2$

$$\delta\omega_3 = \operatorname{Tr}(d\Lambda \wedge dA) = d\omega_2$$

где

$$\omega_2 = \operatorname{Tr}(\Lambda \wedge dA)$$

Заметим также, что эти тождества в равной мере применимы и к теориям Янга-Миллса, и к обшей теории относительности.

Для теории тяготения имеем калибровочную группу O(3, 1).

Другими словами, гравитационное поле обладает двумя калибровочными симметриями, а именно обшей ковариантностью по координатам x-пространства и локальными лоренцевыми преобразованиями касательного пространства.

Подробнее это будет объяснено ниже.

**Уравнения самодуальности**

(у Рослого в планах это было)

**Топологический заряд (??)**

(у Рослого в планах это было)

### 8.2.3 On gravity

### 8.2.4 О КТП и схожих полевых теориях

## 8.3 О другой физике

### 8.3.1 On gravitational lensing (??????)

(!!!! там очень много всего в плане диффгема, тут указания про это. мб пару разделов сделаю даже.)

### 8.3.2 On thermodynamics

(пока отношусь к этому как к фантазиям математика, вряд ли на самом деле диффгем там нужен)

## Основные формулы

$$dE = \bar{d}Q + \vec{d}W$$

Here $dE$ is the infinitesimal change of energy in the system. The first law of thermodynamics, as written above, states that this decomposes into the heat flowing into the system $\bar{d}Q$ and the work done on the system $W$.

Why the stupid notation? Well, the energy $E(p, q)$ is a function over the state space $M$ and this means that we can write the change of the energy $dE = \frac{\partial E}{\partial p} dp + \frac{\partial E}{\partial V} dV$. But there is no such function $Q(p, q)$ or $W(p, q)$ and, correspondingly, $\vec{d}Q$ and $\vec{d}W$ are not exact differentials. Indeed, we have $dW = -pdV$ and later, after we introduce the second law, we learn that $\bar{d}Q = TdS$, with $T$ the temperature and $S$ the entropy, both of which are functions over $M$.

# Part V

# Other Constructions of Differential Geometry

Обсудим в порядке вероятности применимости мой настоящий взгляд некоторые темы дифференциальной геометрии, которыми я пока не занимался и скорее всего никогда не займусь.

(тут мб очень много будет тем, потому что полно профессиональных книг, ими по большей части и занимаются математики.)

## 9 Каталог геометрических объектов (??)

(не уверен, что тут их будет много.)

## 10 Различные геометрии

(всё важное, но не большое и отдельное вкратце тут выписываю!)

### 10.1 Кэлерова геометрия (????)

(хз, что это, но многие что-то про нее говорят.)

### 10.2 Гиперболическая геометрия

#### 10.2.1 Hypercycles and horocycles

#### 10.2.2 Геометрия Пуанкаре

#### 10.2.3 Геометрия Лобачевского

(??? хватит же такого раздела на всю суть о ней?)

#### 10.2.4 The Beltrami–Klein model

(wiki)

#### 10.2.5 The Poincare half-plane model

#### 10.2.6 The hyperboloid model

#### 10.2.7 On other models of hyperbolic spaces (??)

(see wiki, there are a lot of information)

#### 10.2.8 Однородные мозаики на гиперболической плоскости

(см. вики на англ и рус.)

## 10.3 Типичные поверхности и многообразия

### 10.3.1 Пространства (анти-) де Ситтера

Двумерная гиперболическая метрика Пространства (анти-) де Ситтера Их группы и алгебры изометрии

(позже если будет потребность, то исследую их)

### 10.3.2 Поверхность Бельтрами

Для полноты приведем примеры.

#### Обзор поверхности Бельтрами

Поверхность Бельтрами в $\mathbb{R}^3$ можно задать параметрически как

$$\begin{cases} x = \sin a \cos b \\ y = \sin a \sin b \\ z = \ln \tan \frac{a}{2} + \cos a \end{cases}$$

Здесь $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq b \leq 2\pi$.

#### кривизна поверхности Бельтрами

Вычислим кривизну вложенного многообразия $M$ на примере поверхности Бельтрами (псевдосферы).

#### Обзор применений поверзности Бельтрами

хз

### 10.3.3 Лента Мебиуса

#### Основное

#### Другие вопросы

**Какие минимальные соотношения должны быть у прямоугольника, чтобы его свернуть в ленту Мебиуса? (???7)** (не знаю, не думал, ограничение на кривизну и деформации нужно как-то ввести еще, мб когда-то подумаю, это уже исследовано, можно почитать статью, мне не актуально.)

# 11 Введение в теорию многообразий

Приведем полную теорию многообразий, их свойств и применений.

(пока этой частью не занимался, ибо не актуально, потом отдельно засяду мб)

## 11.1 Manifolds

48 5.1 Topological Manifolds 48 5.2 Compatible Charts 49 5.3 Smooth Manifolds 52 5.4 Examples of Smooth Manifolds 53 Problems 57

**Группа голономии локальная и глобальная**

**Классификация многообразий по группе голономии**

## 11.2 Smooth Maps on a Manifold

59 6.1 Smooth Functions on a Manifold 59 6.2 Smooth Maps Between Manifolds 61 6.3 Diffeomorphisms 63 6.4 Smoothness in Terms of Components 63 6.5 Examples of Smooth Maps 65 6.6 Partial Derivatives 67 6.7 The Inverse Function Theorem 68 Problems 70

## 11.3 Quotients

71 7.1 The Quotient Topology 71 7.2 Continuity of a Map on a Quotient 72 7.3 Identification of a Subset to a Point 73 7.4 A Necessary Condition for a Hausdorff Quotient 73 7.5 Open Equivalence Relations 74 7.6 Real Projective Space 76 7.7 The Standard C∞ Atlas on a Real Projective Space 79 Problems.

## 11.4 Симплектические и пуассоновы многообразия

### 11.4.1 Многообразие Калаби Яу

просто интересно.

### 11.4.2 бутылка Клейна

**обзор**

**свойства бутылки Клейна**

**интегрирование по бутылке Клейна (???)**

## 11.5 Отображения

### 11.5.1 отображения

(как и в топологии)
и приходим к $\phi_V \circ f \circ \phi_U^{-1} : \phi_U(U) \to \phi_V(V)$ - это вид отображения в координатах.
и тут такая же история,

**Определение 11.1.** *диффеоморфизм многообразий - когда туда и обратно гладко. гомеоморфизм - когда непрерывно.*

и тут теория про производные отображения, оно очень интересно задается, с использованием касательного пространства и звездочек, но пока я просто не тяну его, это темное для меня место, лучше иванова читать.

(вставить сюда и в теорпол секцию про звездочки и отображения!!!)

### 11.5.2 гомотопические инварианты

мы научились тривиально характеоризовать многообразия, теперь введем более прикладные характеристики

(как к этому прийти?)

замкнутость, точность.

хз что дальше.

какая-то теорема о цепной гомотопии, пока эти понимания совершенно закрыты для меня.

#### когомологии де рама

см иванова и т.п.

в общем, нам очень нужна тут топология и речь идет о гомотопию.

ну лемма пуанкаре, ну определения.

я вообще потерян в этом, хотя это не сложно вообще.

### 11.5.3 степень отображения

тоже очень популярная тема.

позже ей займусь.

### 11.5.4 связки с механикой

да и диффурами.

очень интересный раздел

#### многообразия грассмана

следуя Зелкину откроем для себя их.

говорят, что это многообразие из k мерных подпространств евклидового пространства

а вообще следует понимать, что у зелкина до этого идут тривиальные главы, напоминание про группы ли, так что плюну я и пойду лучше просто изучать и углублять их, потом вернусь, слишком много диффгема.

##### связь с уравнением Риккати

## 11.6 Тензорные поля

(пока что не до этого, но изначально у Катанаева увидел я большой раздел про это. мб перекину куда-то вначало, вроде полезная тема)

#### Обзор применений (!!)

(спрошу у Володи)

#### теория тензорных полей

Рассмотрим многообразие $\mathbb{M}$, $\dim \mathbb{M} = n$.

В каждой точке $x \in \mathbb{M}$ имеется два $n$-мерных векторных пространства: касательное $\mathbb{T}_x(\mathbb{M})$ и кокасательное $\mathbb{T}^*_x(\mathbb{M})$ пространства.

Рассмотрим их тензорное произведение

$$\mathbb{T}^r_{s,x}(\mathbb{M}) := \underbrace{\mathbb{T}_x(\mathbb{M}) \otimes \ldots \otimes \mathbb{T}_x(\mathbb{M})}_{r} \otimes \underbrace{\mathbb{T}^*_x(\mathbb{M}) \otimes \ldots \otimes \mathbb{T}^*_x(\mathbb{M})}_{s}$$

то есть тензорное произведение $r$ экземпляров касательного и $s$ экземпляров кокасательного пространства.

Для определенности мы фиксировали порядок сомножителей.

Таким образом, в каждой точке многообразия мы построили векторное пространство размерности $\dim \mathbb{T}^r_{s,x}(\mathbb{M}) = n^{r+s}$

### Определение расслоения, тензорного поля, ранга, базы

**Определение 11.2.** *Расслоение тензоров типа* $(r, s)$ *на многообразии* $M$ *- это объединение*

$$\mathbb{T}^r_s(\mathbb{M}) := \bigcup_{x \in \mathbb{M}} \mathbb{T}^r_{s,x}(\mathbb{M})$$

*взятое по всем точкам многообразия.*

сечение этого расслоения $T^r_s(x)$ - это тензорное полем типа $(r, s)$ или $r$ раз контравариантным и $s$ раз ковариантным тензорным полем на многообразии M.

Ранг тензорного поля - 'это число $r + s$.

Базой этого расслоения является многообразие M, типичным слоем - векторное

Пространство где $\mathbb{R}^n$ - типичный слой касательного расслоения.

Слоем над $x \in \mathbb{M}$ является векторное пространство (2.50) (тем самым мы определили проекцию).

Дифференцируемая структура на расслоении тензоров задается дифференцируемыми структурами на базе и в типичном слое аналогично тому, как она была построена для касательного расслоения.

Координатные базисы в касательном и кокасательном пространствах, $e_\alpha = \partial_\alpha$ и $e^\alpha = dx^\alpha$, индуцируют координатный базис в тензорном произведении, который мы обозначим

$$e_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes e_{\alpha_r} \otimes e^{\beta_1} \otimes \cdots \otimes e^{\beta_s}$$

(???) Напомним, что тензорное произведение векторов не является коммутативным,

$$e_\alpha \otimes e^\beta \neq e^\beta \otimes e_\alpha$$

поэтому порядок следования базисных векторов в произведении (2.51) фиксирован: сначала мы пишем базисные векторы касательного, а затем кокасательного пространства.

Рассмотрим произвольную карту $(\mathbb{U}, \varphi)$ на многообразии.

Тогда тензорное поле типа $(r, s)$ в координатах имеет вид

$$T^r_s(x) = T^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}_{\beta_1 \ldots \beta_s}(x) e_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes e_{\alpha_r} \otimes e^{\beta_1} \otimes \ldots \otimes e^{\beta_s}$$

Нижние и верхние индексы называют, соответственно, ковариантными и контравариантнъии.

Общее число индексов $r + s$ равно рангу тензорного поля.

Замечание.

Для определенности, у компонент $T^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}_{\beta_1 \ldots \beta_s}(x)$ мы сначала выписали все ковариантные индексы, а затем - все контравариантные.

Порядок индексов зафиксирован порядком сомножителей в правой части (2.50) и принятом нами соглашением для записи тензорного поля типа (1,1):

$$dx^\beta T^\alpha_\beta \partial_\alpha$$

Контравариантные индексы, так же, как и ковариантные, упорядочены между собой.

В разделе 4 будет введена операция опускания и подъема индексов с помощью метрики.

Она будет неоднозначной, если порядок контравариантных и ковариантных индексов не фиксирован.

Ниже мы построим тензорную алгебру для тензорных полей вида (2.52).

Аналогично можно построить тензорную алгебру для произвольного расположения сомножителей в правой части (2.50), когда касательные и кокасательные пространства чередуются в произвольном порядке.

Мы будем предполагать, что все индексы упорядочены определенным образом.

В этом случае обозначение векторного поля $T_s^r(x)$ является грубым, т.к.

учитывает только общее число ковариантных и контравари- антных индексов, а не их последовательность.

????

Введем обозначение для прямой суммы тензорных полей

$$\mathcal{T}(\mathbb{M}) := \bigoplus_{r,s=0}^{\infty} \mathcal{T}_s^r(\mathbb{M})$$

На множестве $\mathcal{T}(\mathbb{M})$ можно ввести поточечное тензорное умножение, которое двум тензорам типа $(r, s)$ и $(p, q)$ ставит в соответствие тензорное поле типа $r + p, s + q$.

А именно, зафиксируем точку $x \in \mathbb{M}$. Из универсального факторизационного свойства тензорного произведения следует, что существует единственное билинейное отображение из $\mathbb{T}_{s,x}^r \times \mathbb{T}_{q,x}^p$ в $\mathbb{T}_{s+q,x}^{r+p}$, которое отображает пару тензоров

$$(X_1 \otimes \cdots \otimes X_r \otimes A_1 \otimes \cdots \otimes A_s) \in \mathbb{T}_{s,x}^r$$
$$(Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_p \otimes B_1 \otimes \cdots \otimes B_q) \in \mathbb{T}_{q,x}^p$$

в тензор типа $r + p, s + q$:

$$X_1 \otimes \cdots \otimes X_r \otimes Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_p \otimes A_1 \otimes \cdots A_s \otimes B_1 \otimes \cdots \otimes B_q \in \mathbb{T}_{s+q,x}^{r+p}$$

Это отображение называется тензорным произведением тензоров в данной точке.

Определение.

Тензорным произведением тензорных полей $\mathcal{T}_s^r(\mathbb{M})$ и $\mathcal{T}_q^p(\mathbb{M})$ называется тензорное поле типа $\mathcal{T}_{s+q}^{r+p}$ (M), полученное поточечным тензорным произведением (2.54).

Чтобы получить выражение для компонент тензорного произведения в определенной карте, достаточно в качестве векторных $X, Y$ и ковекторных $A, B$ полей в определении тензорного произведения выбрать координатный базис.

Пусть в некоторой карте задано два тензорных поля:

$$K = K_{\beta_1 \ldots \beta_s}{}^{\alpha_1 \cdots \alpha_r} e_{\alpha_1} \otimes e_{\alpha_r} \otimes e^{\beta_1} \cdots \otimes e^{\beta_s}$$
$$L = L_{\delta_1 \cdots \delta_q}^{\gamma_1 \cdots \gamma_p} e_{\gamma_1} \otimes e_{\gamma_p} \otimes e^{\delta_1} \cdots \otimes e^{\delta_q} \quad \in \mathcal{T}_q^r(\mathbb{M})$$

Тогда компоненты их тензорного произведения

$$(K \otimes L)_{\beta_1 \cdots \beta_s \delta_1 \cdots \delta_q}^{\alpha_1 \cdots \alpha_r \gamma_1 \cdots \gamma_p} = K_{\beta_1 \cdots \beta_s}^{\alpha_1 \cdots \alpha_r} L_{\delta_1 \cdots \delta_q}^{\gamma_1 \cdots \gamma_p}$$

просто равны произведению компонент каждого сомножителя, как чисел. Пример 2.7.2.

Произведение двух векторных полей $X \otimes Y$ дает контравариантный тензор второго ранга с компонентами

$$T(x) = T^{\alpha\beta}(x) e_\alpha \otimes e_\beta = X(x) \otimes Y(x) = X^\alpha(x) Y^\beta(x) e_\alpha \otimes e_\beta$$

## 11.7 Гомотопические инварианты

(пока малый раздел, потом мб увеличу)

### 11.7.1 Теория

### 11.7.2 Обзор применений (!)

(хз, и это очень важно)

# 12 Когомологии

## 12.1 Теория

### 12.1.1 Теория

## 12.2 Другое о когомологиях

### 12.2.1 Обзор применений (!)

(хз, и это очень важно)

# 13 Гомологии (???)

(это мб не диффгем, если так, то удалю)

## 13.1 В двух словах

### 13.1.1 Теория

### 13.1.2 Обзор применений (!)

(хз, и это очень важно)

# 14 Введение в другие разделы

### 14.0.1 Добавление искривленного пространства в физические теории (??)

(если это пойму, то буду гораздо чаще пользоваться диффгемом. пока не такой уровень к сожалению)

## 14.1 Супергеометрия

**мотивация**

**применения**

## 14.2 Расслоенные пространства

(просто тут заготовка на всякий случай, вряд ли такое нужно будет, а сейчас точно не нужно)

### 14.2.1 Теория

### 14.2.2 Обзор применений (!)

(хз, и это очень важно)

### 14.2.3 Общая теоряя расслоенных пространств

(структура Хьюзмоллера, мб только через пару лет буду этим заниматься для саморазвития, мб никогда)

#### Расслоении, определенные группами преобразований

#### Определение и примеры главных расслоений

специальная конструкция

#### Категории главных расслоений

#### Расслоения, индуцированные главными расслоениями

#### Определение расслоенных пространств

9

#### Функториальные свойства расслоенных пространств

#### Тривиальные и локально тривиальные расслоенные пространства

#### Описание сечений расслоенных пространств

#### Нумерируемые главные расслоения над пространством (?)

#### Функтор kQ

#### Конструкция Милнора

#### Гомотопическая классификация нумерируемых главных расслоений

#### Гомотопическая классификация главных G-расслоений над клеточными разбиениями

## 14.3 K-теория

(или в др запись выкину, или с точки зрения диффгема про неё писать буду)

### 14.3.1 теория

### 14.3.2 применения (??)

(хз)

## 14.4 Моделирование геометрии и численные методы

(по идее можно еще моделировать, захочу - раздел для этого создан.)

# Part VI

# Applications of Differential Geometry

Обсудим встречавшиеся мне применения дифференциальной геометрии в разделах физики и математике.

## 15 Типичные математические приложения

(то, чего я касался)

### 15.1 Геометрия в дифференциальных уравнения

(потом мб изучу, пока не актуально)

### 15.2 Геометрия в функциональном анализе

(потом мб изучу, пока не актуально)

## 16 Типичные физические приложения

### 16.1 Геометрия в механике

Обсудим механику на языке дифференциальной геометрии.

(!!! соберу основы механики - и проработаю эти связки, потом - с Володей пообщаюсь и проверю свои знания. пока этим не владею. Там кст потом почитаю если нужно будет, много книг, нпр Добронравов, но это отдельное занятие, пока и близко не до этого.)

#### 16.1.1 Механика на языке форм

у нас была такая вот механика:
????
давайте перепишем это, используя наши новые идеи.
делаем это.
получаем это:
...
посмотрим, насколько это удобнее
...

#### 16.1.2 Примеры

**лагранжева механика в двух словах**

(тут пока от темы я ушел, потом буду прописывать)
Рассмотрим конфигурационное пространство $M$.
$(x^\alpha, v^\alpha)$ это координаты на $TM$.

$$\bigcup_{p\in M} T_pM = TM$$

Функция Лагранжа это такая функция,

$$L : TM \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

которая удовлетворяет принципу наименьшего действия.

декартово произведение, потому что в общем случае функция Лагранжа зависит от времени.

введем множество кривых

$$\Pi^{p_0 t_0}_{p_1 t_1} = ..$$

далее определяется действие.

далее вариация.

### 16.1.3 Определения и построение механики

Обсудим откуда взялось то, что выше.

**гамильтонова механика - основные формулы (??)**

**гамильтонова механика - объяснение**

В классической механике фазовое пространство представляет собой симплектическое многообразие $M$, параметризованное координатами $(x^\alpha, p_\beta)$, где $x^\alpha$ - обобщённые координаты, а $p_\beta$ - обобщённые импульсы.

Гамильтониан механической системы $H(x, p)$ является функцией на многообразии $M$; уравнения Гамильтона в координатах

$$\dot{x}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial x^\alpha}$$

Как нам известно, фазовое пространство наделено дополнительной структурой - скобками Пуассона:

$$\{f, g\}_{\mathbb{P}} = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial x^\alpha}$$

Эволюция наблюдаемой $f(x, p)$ на фазовом пространстве определяется скобками Пуассона согласно

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}_{\mathrm{P}}$$

Поэтому гамильтонову механику можно сформулировать в терминах дифференциальных форм и векторных полей.

Вкратце, необходим механизм, который превращает функцию $H : M \to \mathbb{R}$ в векторное поле $v_H$; при этом, траекториями частиц в фазовом пространстве $M$ являются интегральные кривые, порождённые векторным полем $v_H$.

Этот механизм довольно простой.

Дифференциальная форма второй степени $\omega$ на симплектическом многообразии $M$ даёт нам отображение

$$\omega : T_p M \to T^\star_p M,$$

которое на самом деле является изоморфизмом в силу невырожденности симплектической формы $\omega$.

??????? В таком случае для гамильтониана $H : M \to \mathbb{R}$ существует единственное гамильтоново векторное поле $v_H$, определяемое из формулы

$$\imath_{v_H}\omega = -2dH$$

Уравнение (1.117) может быть переписано в терминах локальных координат $x^\mu$ на многообразии $M$ следующим образом:

$$v_H^\mu \omega_{\mu\nu} = -\partial_\nu H$$

Действительно,

$$\imath_{v_H} \omega \left(\partial_\gamma\right) = v_H^\beta \omega_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \left(\partial_\beta, \partial_\gamma\right) = v_H^\beta \omega_{\mu\nu} \left(\delta_\beta^\mu \delta_\gamma^\nu - \delta_\gamma^\mu \delta_\beta^\nu\right) = 2 v_H^\beta \omega_{\beta\gamma} = -2\partial_\gamma H$$

Здесь мы воспользовались кососимметричностью компонент $\omega_{\mu\nu}\left(\omega_{\mu\nu} = \quad -\omega_{\nu\mu}\right)$ симплектической формы $\omega$.

Определяя $\omega^{\mu\nu}$ из равенства $\omega^{\mu\nu}\omega_{\nu\sigma} = \delta_\sigma^\mu$, получаем, что координаты векторного поля

$$v_H^\mu = -\omega^{\nu\mu}\partial_\nu H = \omega^{\mu\nu}\partial_\nu H$$

А как известно из раздела про интегрирование векторных полей, интегральные кривые, порождённые векторным полем $v_H$, удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{dx^\mu}{dt} = v_H^\mu = \omega^{\mu\nu}\partial_\nu H$$

#### отличие Гамильтоновой механики от лагранжевой

что в одном случае работаем на касательном пространстве, во втором - в кокасательном.

#### симплектоморфизм - преобразования, которые сохраняют симплектическую форму

(!! в них потом връеду)

$$\varphi^* \omega = \omega$$

#### теорема Лиувилля о сохранении фазового объема

Рассмотрим

$$L_{X_H}\omega = 0$$

где $\omega$ - симплектическая форма.

## 16.2 Геометрия в квантовой механике

## 16.3 Геометрия в типичной теории поля

(список тем из какого-то теорфизного курса, скорее всего от кафедры Белавина, потом посмотрю, пока учу основы. Мб это курс Рослого для умных)

### 16.3.1 Некоторые темы (???)

(потом подумаю ответы. что есть темы от сюда)

#### Скаляр Бранса-Дикке

хз

#### Конформная геометрия

хз

#### конформная группа и алгебра

хз

#### Оператор (звёздочка) Ходжа

#### конформная инвариантность Четырёхмерие: самодуальность тензора Вейля и/или Римана

хз

#### Уравнения и функционал Янга-Миллса Уравнения самодуальности Топологический заряд

хз

#### Гармонические формы и когомологии

хз

#### Характеристические классы(классы Черна, Понтрягина, эйлеров класс),выражение через кривизну

хз

#### Формы Черна-Саймонса

хз

#### Сигнатура многообразия

хз

#### Теорема Гаусса-Бонне

хз

### 16.3.2 Спинорные поля на римановом многообразии

(я вообще хз, что это и зачем)

#### спин-структура

хз, но мб однажды открою

#### теорема Лихнеровича

хз вообще

#### Понятие индекса (фредгольмова) оператора

#### Теорема об индексе оператора Дирака

#### Симплектическая структура

#### Теорема Дарбу

#### Лагранжевы подмногообразия

#### Гамильтоновы векторные поля и их гамильтонианы

#### Скобки Пуассона

#### симплектические листы

#### Действие группы симплектоморфизмами

#### гамильтонова редукция

#### Квантовые аналоги этих понятий

(хз всё это)

### 16.3.3 ковариантная производная в теории поля

#### Появляется как определение оператора дифференцирования

### 16.3.4 Электродинамика на языке форм

быстро остановимся на том, как вставить нашу теорию в другие разделы физики. дальнейшее развитие этого будет в соответствующих разделах

### 16.3.5 Уравнения Максвелла с геометрической точки зрения

### 16.3.6 Электромагнитное поле в дифференциальных формах

(по Болибруху напишу, одновременно диффгем качать нужно.)

#### Напоминание сути некоторых тем диффгема в контексте электромагнитного поля

#### 1

Напомним, как определяются ротор и дивергенция:

$$\operatorname{div}\vec{H} = \tfrac{\partial H_x}{\partial x} + \tfrac{\partial H_y}{\partial y} + \tfrac{\partial H_z}{\partial z}$$
$$\operatorname{rot}\vec{H} = \left(\tfrac{\partial H_z}{\partial y} - \tfrac{\partial H_y}{\partial z}, \tfrac{\partial H_x}{\partial z} - \tfrac{\partial H_z}{\partial x}, \tfrac{\partial H_y}{\partial x} - \tfrac{\partial H_x}{\partial y}\right)$$

Но действительно ли величины $\vec{E}, \vec{H}$ и го $\vec{v}$ являются векторами? Как они меняются при замене координат? Скоро мы увидим, что они не очень похожи на векторы и что есть другая, более удобная форма записи тех же самых уравнений, которая возникла позднее, когда появилась теория дифференциальных форм, введенная Пуанкаре и Эли Картаном.

Чтобы лучше понять, как меняются компоненты вектора при замене координат, рассмотрим несколько примеров.

Пример

1. Рассмотрим n-мерное пространство $\mathbb{R}^n$ (можно считать для простоты, что $n = 3$) и гладкую кривую $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, задаваемую в некоторой системе координат $(x^1, \dots, x^n)$ уравнениями $x^i = \varphi^i(t)$. При $t = 0$ касательный вектор к этой кривой в выбранной системе координат имеет компоненты $\xi^i = \dot{\varphi}_i(0)$ (точкой обозначается дифференцирование по

$t$). Теперь рассмотрим новую систему координат $(\hat{x}^1, \ldots, \hat{x}^n)$, связанную со старой при помоши гладких функций $\hat{x}^i = f^i(x^1, \ldots, x^n)$. Компоненты касательного вектора в новой системе координат будем обозначать $\xi$.. Тогда

$$\hat{\xi}^i = \left.\frac{d\hat{x}^i}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{df^i(\varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t))}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{j=1}^n \left.\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right|_{t=0} \xi$$

по формуле производной сложной функции. Вот как, оказывается, связаны координаты касательного вектора в новой и старой системах координат.

Пример 2. Рассмотрим функцию $\varphi$ от $n$ переменных: $\varphi = \varphi(\hat{x}^1, \ldots, \hat{x}^n)$. Зачем мы записали ее сразу в новых координатах, станет ясно чуть позже. Рассмотрим

градиент этой функции (который также часто называют вектором)

$$\operatorname{grad}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\hat{x}^1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial\hat{x}^n}\right) = \left(\hat{\eta}^1, \ldots, \hat{\eta}^n\right)$$

Теперь попробуем сделать замену координат и вычислить компоненть градиента, только на этот раз уже не в новой, а в старой системе координат:

$$\eta^i = \frac{\partial\varphi(f^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, f^n(x^1, \ldots, x^n))}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial\varphi}{\partial\hat{x}^j}\frac{\partial f^j}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^n \hat{\eta}^j \frac{\partial f^j}{\partial x^i}$$

Сравним формулы, полученные в этих двух примерах. В обеих этих формулах участвуют выражения вида $\partial f^i/\partial x^j$, но между ними есть существенное отличие. В первом случае мы выражаем новые координаты через старые, а во втором - наоборот. Мы приходим к выводу, что при замене координат компоненты градиента меняются совсем по другому закону, чем компоненты касательного вектора. Градиент скорее напоминает не вектор, а дифференциал функции:

$$d\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} dx^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial\varphi}{\partial\hat{x}^j} d\hat{x}^j$$

И градиент функции, и касательный вектор являются тензорами, но тензорами разного типа.

## 2

Рассмотрим на $\mathbb{R}^n$ пространство векторных полей $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Под векторным полем мы будем понимать выражение

$$\vec{v}\left(x^1, \ldots, x^n\right) = \sum_{j=1}^n v_j\left(x^1, \ldots, x^n\right)\frac{\partial}{\partial x^j}$$

где $v_j\left(x^1, \ldots, x^n\right)$ - гладкие функции, а через $\partial/\partial x^j$ обозначен вектор $e_j$ стандартного базиса в $\mathbb{R}^n$ (эти обозначения оказываются очень удобными

при рассмотрении векторных полей на многообразиях). Такие поля еще иногда называют касательньими. Множество гладких функций на $\mathbb{R}^n$ мы будем обозначать $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$.

Множество векторных полей является линейным пространством: векторные поля можно складывать (покоординатно) и умножать на числа. Более того, их можно умножать на любые гладкие функции, заданные на всем пространстве

$\mathbb{R}^n$. К сожалению, гладкие функции образуют не поле, а кольцо, поэтому говорят не о линейном пространстве векторных полей, а о модуле векторньсх полей над кольцом гладких функиий. Рассмотрим сопряженное пространство к $\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^n\right)-$ пространство $\mathcal{F}$ -линейных функционалов $\alpha : \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^n\right) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$, т. е.

таких отображений, что $\alpha(f\vec{v}) = f\alpha(\vec{v})$ для любой гладкой функции $f(x)$ и любого

векторного поля $\vec{v}$ и $\alpha\left(\vec{v}_1+\vec{v}_2\right) = \alpha\left(\vec{v}_1\right)+\alpha\left(\vec{v}_2\right)$. Это сопряженное пространство также является модулем над кольцом гладких функций. Оно называется пространством дифференииальных 1-форм и обозначается $\Lambda^1\left(\mathbb{R}^n\right)$.

У этого модуля есть образующие, сопряженные к образующим $\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^n\right)$, которые мы будем обозначать через $dx^j$ :

$$dx^j\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=\delta_i^j=\left\{\begin{array}{ll}1, & i=j, \\ 0, & i \neq j.\end{array}\right.$$

Любая 1-форма может быть представлена в виде $\mathcal{F}$ -линейной комбинации этих образующих:

$$\alpha=\sum_{i=1}^n \alpha_i\left(x^1, \ldots, x^n\right) dx^i$$

где $\alpha_i\left(x^1, \ldots, x^n\right)$ - гладкие функции из $\mathcal{F}$. При изменении координат в исходном пространстве соответственно меняются координаты и в сопряженном пространстве. Компоненты 1-формы при этом меняются по тому же закону, что и компоненты дифференциала. Это означает, что

дифференциал функции $\int$ является частным случаем 1 -формы (что оправдывает введение таких обозначений для базиса сопряженного пространства), т.е. у нас имеется отображение $d : \mathcal{F}\left(\mathbb{R}^n\right) \rightarrow \Lambda^1\left(\mathbb{R}^n\right)$.

Не всякая дифференциальная 1-форма является образом некоторой функции при взятии дифференциала, но имеет место включение: образ $d$ лежит в пространстве 1-форм. Таким образом, дифференциал является не вектором, а ковек*тором* - так принято называть дифференциальные 1 -формы.

Можно ли расширить это определение, т. е. рассмотреть не только 1-формы, но и, например, 2-формы? Оказывается, это сделать совсем

нетрудно. Для этого нужно лишь вместо векторного поля рассмотреть пару векторных полей, и каждой паре векторных полей поставить в соответствие гладкую функцию. И если это отображение является $\mathcal{F}$ -линейным по каждому аргументу, то мы приходим к понятию 2-ковектора на множестве векторных полей: это просто $\mathcal{F}$ -билинейное отображение $\alpha : \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^n\right) \times \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^n\right) \rightarrow \mathcal{F}\left(\mathbb{R}^n\right)$

Пример 3. Рассмотрим два векторных поля $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ В $\mathbb{R}^3$ и отображение, сопоставляюшее паре векторов их скалярное произведение:

$$r : \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^3\right) \times \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^3\right) \rightarrow \mathcal{F}\left(\mathbb{R}^3\right), \quad r\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2\right)=\left|\vec{v}_1\right| \cdot\left|\vec{v}_2\right| \cdot \cos \gamma$$

Легко проверить что это отображение $\mathcal{F}$ -билинейно; к тому же оно еше и симметрическое: если поменять местами $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, то результат не изменится. Это отображение можно записать и в матричной форме:

$$r\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2\right)=\left(x^1 y^1 z^1\right)\left(\begin{array}{lll}1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}x^2 \\ y^2 \\ z^2\end{array}\right)$$

где $x^i, y^i, z^i-$ координаты вектора $\vec{v}_i$. Получаем симметрическую 2 -форму, которая называется евклидовой метрикой в $\mathbb{R}^3$.

Пример 4. А вот пример (тоже хорошо всем известный) антисимметрического 2-ковектора, или внешней форми. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^2$ два векторных поля

$\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ и поставим им в соответствие ориентированную площцадо т) $\vec{v}_1, \vec{v}_2) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$ параллелограмма, построенного на этих векторах. В координатах эта площадь равна определителю

$$\left|\begin{array}{ll} x^1 & y^1 \\ x^2 & y^2 \end{array}\right| = x^1 y^2 - x^2 y^1$$

Это отображение также является линейным по каждому из аргументов, но уже обладает свойством

антикоммутативности: $\tau(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = -\tau(\vec{v}_2, \vec{v}_1)$. Именно такие 2-ковекторы (их еще называют кососимметрическими) представляют для нас особый интерес. Определение 1. Отображение $\alpha \quad : \quad \underbrace{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \times \ldots \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}_{k} \quad \rightarrow \quad \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ на- Зыва ется внешней

дифференицальной формой степени $k$, если оно $\mathcal{F}$ -линейно по каждому аргументу и

$$\alpha(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_j, \ldots, \vec{v}_n) = -\alpha(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_j, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_n)$$

ЛлЯ любых $i, j$.

Пространство $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ внешних дифференциальных форм степени $k$ и станет объектом нашего дальнейшего изучения. Естественно, что всякий 1-ковектор можно рассматривать как внешнюю дифференциальную форму (впрочем, точно так же его можно рассматривать и как симме-

трическую форму). Для того, чтобы записывать формы в координатах, мы введем новую операцию на дифференциальных формах - внешнее произведение. Сначала определим ее для пары 1-форм. Эта операция будет тоже $\mathcal{F}$ -линейной, поэтому мы определим ее только на базисных 1-ковекторах, а затем распространим

на все 1-формы по $\mathcal{F}$ -линейности. Каждой паре 1-форм эта операция ставит в соответствие 2-форму, причем на базисных ковекторах она определяется следующим образом:

$$\left(dx^i \wedge dx^j\right)(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = dx^i(\vec{v}_1)\, dx^j(\vec{v}_2) - dx^i(\vec{v}_2)\, dx^j(\vec{v}_1)$$

Легко проверить, что полученная форма кососимметрична. Замечательно, что таким образом можно получить весь базис в пространстве 2-форм. Поэтому любой элемент )и из $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ записывается очень просто:

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} \alpha_{i_1 i_2}\left(x^1, \ldots, x^n\right) dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}$$

Аналогично можно определить внешнее произведение для форм произвольной степени. Пусть $\alpha$ и $\beta - p-$ и $q$ -формы соответственно. Тогда внешним произведением форм $\alpha$ и $\beta$ называется $(p+q)$ -форма

$$\begin{aligned} &(\alpha \wedge \beta)(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{p+q}) = \\ &\quad = \tfrac{1}{p!q!} \sum \varepsilon(s) \alpha\left(\vec{v}_s - 1_{(1)}, \ldots, \vec{v}_s - 1_{(p)}\right) \times \beta\left(\vec{v}_s - 1_{(p+1)}, \ldots, \vec{v}_{s^{-1}(p+q)}\right) \end{aligned}$$

где суммирование ведется по всевозможным перестановкам $p+q$ элементов, а $\varepsilon(s)$ - знак перестановки $S$.

Приведенное определение инвариантно, т. е. не зависит от выбора системы координат. Но если система координат фиксирована, то из него сразу следует, что базис в пространстве $k$ -форм состоит из элементов вида $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}, i_1 < i_2 < \ldots < i_k$. Поэтому произвольная форма $\alpha$ имеет вид

$$\alpha = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \alpha_{i_1 \ldots i_k}\left(x^1, \ldots, x^n\right) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

Отметим еше одно замечательное свойство операции внешнего дифференцирования: $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$.

Отсюда, в частности, следует, что если степень $\alpha$ нечетна, то $\alpha \wedge \alpha = 0$.

### 3

Заметим, что операция дифференцирования каждой функции сопоставляет 1-форму. А можно ли определить операцию дифференцирования Для произвольной формы?

Оказывается, это очень легко сделать. По определению полагаем

$$d\alpha = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} d\alpha_{i_1 \ldots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

Видно, что дифференциал повышает на единицу степень формы. Кроме того, из этого определения сразу следует, что $d^2\alpha = 0$. Действие дифференциала на внешние формы можно представить следуюшей диаграммой:

$$\mathcal{F}\left(\mathbb{R}^n\right) \xrightarrow{d} \Lambda^1\left(\mathbb{R}^n\right) \xrightarrow{d} \Lambda^2\left(\mathbb{R}^n\right) \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \Lambda^k\left(\mathbb{R}^n\right) \xrightarrow{d} \ldots$$

Этот объект называется комплёксом де Рама, и в нем содержится большой объем информации о пространстве, на котором заданы дифференциальные формы.

В данном случае мы имеем дело с $\mathbb{R}^n$, которое устроено довольно просто, но если бы мы стартовали с другого пространства, скажем, со сферы, то по этому комплексу мы бы узнали очень многое о топологии пространства.

Нетрудно проверить, что введенная с помощью координат операция внешнего дифференцирования на самом деле от координат не зависит, т. е. является инвариантной (проверьте это самостоятельно).

Наконец, последняя операция, которую нам осталось ввести - операция внутреннего произведения. Пусть у нас есть векторное поле $\vec{v}$ и внешняя форма а порядка $p$.

Тогда мы можем построить форму степени $p-1$, которая называется внутренним произведением формы $\alpha$ и поля $\vec{v}$

$$\left(i_v \alpha\right)\left(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{p-1}\right) = \alpha\left(\vec{v}, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{p-1}\right)$$

Это определение также не зависит от выбора системы координат.

### 4

Попробуем теперь понять, что означают операторы ротора и дивергенции на инвариантном языке дифференциальных форм. Хотя мы часто писали дифференциальные формы в координатах, определение их было инвариантным, от координат не зависящим. А вот определения ротора и дивергенции зависят от выбора системы координат. Так давайте выясним, в чем же состоит эта зависимость.

Разберемся сначала с дивергенцией. Мы начинаем с векторного поля $\vec{v}$ на $\mathbb{R}^3$. По этому векторному полю мы построим 2-форму следующим образом. Возьмем форму объема $\tau = dx \wedge dy \wedge dz$ и рассмотрим внутреннее произведение $i_v \tau-$ это и есть обещанная 2 -форма. Из нее мы получим 3-форму путем взятия внешнего дифференциала. Но пространство 3 -форм на $\mathbb{R}^3$ имеет единственный базисный вектор, и это в точности форма объема $dx \wedge dy \wedge dz$. Значит, полученная нами форма есть некоторая гладкая функция, помноженная на форму объема. Проверим, что эта гладкая функция и будет дивергенцией векторного поля $\vec{v}$. Пусть поле $\vec{v}$ имеет вид

$$\vec{v} = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
(i_v\tau)\left(\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right) &= (dx\wedge dy\wedge dz)\left(\vec{v},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)=v_x,\\
(i_v\tau)\left(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial x}\right) &= (dx\wedge dy\wedge dz)\left(\vec{v},\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial x}\right)=v_y,\\
(i_v\tau)\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) &= (dx\wedge dy\wedge dz)\left(\vec{v},\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)=v_z.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$i_v\tau = v_x dy\wedge dz + v_y dz\wedge dx + v_z dx\wedge dy.$$

Теперь возьмем дифференциал:

$$\begin{aligned}
d\left(i_v\tau\right) &= \frac{\partial v_x}{\partial x}dx\wedge dy\wedge dz+\frac{\partial v_y}{\partial y}dy\wedge dz\wedge dx+\frac{\partial v_z}{\partial z}dz\wedge dx\wedge dy=\\
&=\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz.
\end{aligned}$$

Мы получили в точности дивергенцию, помноженную на форму объема. Таким образом, дивергенцию можно записать в очень компактном виде:

$$\operatorname{div}\vec{v}=\frac{d\left(i_v\tau\right)}{\tau}.$$

Что же здесь зависит от выбора системы координат? Внутреннее произведение и дифференциал инвариантны относительно замен координат, от координат зависит только форма объема. Выясним, при каких заменах дивергенция не меняется.

При замене координат $\hat{x}^i = f^i\left(x^1,x^2,x^3\right)$ получаем

$$\hat{\tau}=d\hat{x}^1\wedge d\hat{x}^2\wedge d\hat{x}^3=J(f)\tau,$$

где $J(f)$ - определитель матрицы $(df^i/dx^j)$, называемый якобианом замены. Поэтому

$$\frac{d\left(i_v\hat{\tau}\right)}{\hat{\tau}}=\frac{d\left(J(f)i_v\tau\right)}{J(f)\tau}=\frac{dJ(f)\wedge i_v\tau}{J(f)\tau}+\frac{d\left(i_v\tau\right)}{\tau}.$$

В силу произвольности поля $\vec{v}$ получаем, что дивергенция не меняется лишь при таких заменах, для которых

$$dJ(f)=0,\qquad \text{т. е.}\qquad J(f)=\text{ const }.$$

Если же под дивергенцией поля с компонентами $v_x, v_y, v_z$ понимать компоненту внешнего дифференциала 2-формы с компонентами $v_x, v_y, v_z$ (это форма $i_v\tau$, выписанная выше), то такое определение инвариантно полностью, т. е. при этом дивергенция никак от выбора координат не зависит.

Рассмотрим теперь ротор векторного поля $\vec{v}$. Для этого введем отображение

$$\sigma:\mathcal{D}\left(\mathbb{R}^3\right)\to\Lambda^1\left(\mathbb{R}^3\right),\quad \sigma\left(v_x\frac{\partial}{\partial x}+v_y\frac{\partial}{\partial y}+v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)=v_x dx+v_y dy+v_z dz.$$

Заметим, что

$$(d\circ\sigma)(\vec{v})=\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)dx\wedge dy+\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)dy\wedge dz+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)dz\wedge dx.$$

Рассмотрим отображение $\varkappa : \Lambda^2(\mathbb{R}^3) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, «обратное» к внутреннему произведению, т. е. такое, что $i_{\varkappa(\alpha)}\tau = \alpha$ для всех $\alpha \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$, где $\tau$ по-прежнему форма объема в $\mathbb{R}^3$. Тогда

$$\operatorname{rot}\vec{v} = (\varkappa \circ d \circ \sigma)(\vec{v}).$$

Проверка полученного соотношения сводится к проверке тождества $i_{\operatorname{rot}}\tau = d(\sigma(\vec{v}))$, которая проводится точно так же, как вычисление формы $i_v\tau$ в случае дивергенции.

Проанализируем эту конструкцию. Нетрудно видеть, что задание $\sigma$ равносильно определению отображения

$$r : \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^3\right) \times \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^3\right) \to \mathcal{F}\left(\mathbb{R}^3\right), \quad r(\vec{v}, \vec{w}) = (\sigma(\vec{v}))(\vec{w}).$$

Но из формулы для $\sigma$ вытекает, что $r$ совпадает с симметрической 2 -формой из примера 3, т.е. $r$ является евклидовой метрикой в $\mathbb{R}^3$.

Заметим, что в определении отображения $\varkappa$ существенную роль играет трехмерность пространства $\mathbb{R}^3$, так как степень формы $i_{\varkappa(\alpha)}\tau$ на единицу меньше размерности пространства, а форма $\alpha$ имеет степень два.

Отсюда следует вывод: операция взятия ротора векторного поля может быть определена инвариантно лишь на ориентированном трехмерном многообразии, снабженном евклидовой метрикой (проверьте самостоятельно этот вывод, вычислив те замены координат, при которых компоненты ротора векторного поля действительно преобразуются как компоненты векторного поля).

Этот вывод показывает, что ротор лучше определять не как векторное поле, а инвариантным образом: как внешний дифференциал ковекторного поля $v_x dx + v_y dy + v_z dz$.

$5.

Перейдем теперь непосредственно к анализу уравнений Максвелла. Если следовать традиционному взгляду, что составляющие электромагнитного поля - поля $\vec{E}, \vec{H}$ - это векторные поля, то анализ структуры операторов ротора и дивергенции показывает, что уравнения Максвелла могут быть записаны корректно лишь в трехмерном ориентированном пространстве, снабженном евклидовой метрикой.

Но тот факт, что ротор и дивергенция могут меняться при каких-то заменах координат, не отражает физику уравнений Максвелла, потому что природа этих уравнений никак не связана с наличием, скажем, метрики в пространстве или с выбором системы координат. Поэтому нам хотелось бы иметь какое-то инвариантное описание уравнений Максвелла. Все вышеперечисленное позволяет предположить, что электромагнитное поле есть дифференциальная форма степени два [1].

Эта 2-форма $\Omega$, называемая тензором электромагнитного по$\varkappa$, определена на четырехмерном пространстве $\mathbb{R}^4$ с координатами $(x, y, z, t)$, где $t$ - время, и имеет вид:

$$\begin{aligned}\Omega = cE_x dx \wedge dt + cE_y dy \wedge dt + cE_z dz \wedge dt + \\ + H_x dy \wedge dz + H_y dz \wedge dx + H_z dx \wedge dy.\end{aligned}$$

Вычислим дифференциал этой формы и приравняем его к нулю.

$$\begin{aligned} d\Omega =& c\frac{\partial E_x}{\partial y}dy\wedge dx\wedge dt + c\frac{\partial E_x}{\partial z}dz\wedge dx\wedge dt + c\frac{\partial E_y}{\partial x}dx\wedge dy\wedge dt + \\ &+ c\frac{\partial E_y}{\partial z}dz\wedge dy\wedge dt + c\frac{\partial E_z}{\partial x}dx\wedge dz\wedge dt + c\frac{\partial E_z}{\partial y}dy\wedge dz\wedge dt + \\ &+ \frac{\partial H_x}{\partial x}dx\wedge dy\wedge dz + \frac{\partial H_x}{\partial t}dt\wedge dy\wedge dz + \frac{\partial H_y}{\partial y}dy\wedge dz\wedge dx + \\ &+ \frac{\partial H_y}{\partial t}dt\wedge dz\wedge dx + \frac{\partial H_z}{\partial z}dz\wedge dx\wedge dy + \frac{\partial H_z}{\partial t}dt\wedge dx\wedge dy = 0 \end{aligned}$$

Соберем коэффициенты при $dx\wedge dy\wedge dz$:

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0$$

и мы получим второе уравнение Максвелла. Теперь соберем коэффициенты при $dx\wedge dy\wedge dt$:

$$c\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial t}\right) = 0.$$

Это есть $z$-компонента первого уравнения Максвелла. Собирая коэффициенты при $dy\wedge dz\wedge dt$ и $dz\wedge dx\wedge dt$, мы получим $x$ - и $y$-компоненты этого уравнения соответственно.

Итак, первые два уравнения Максвелла мы можем записать очень просто:

$$d\Omega = 0.$$

В чем преимущество этой записи? Мы записали уравнения в инвариантной форме: ни дифференциальные формы, ни внешнее дифференцирование не зависят ни от координат, ни от ориентации, ни от метрики.

Вспомним теперь, что $d^2 = 0$. Отсюда следует, что $\operatorname{Im} d \subset \operatorname{Ker} d$. Но в пространстве $\mathbb{R}^4$ имеет место лемма Пуанкаре: $\operatorname{Im} d = \operatorname{Ker} d$. Из этой леммы следует, что всякая замкнутая форма (дифференциал от которой равен 0) является точной (т. е. является дифференциалом некоторой

1 Здесь уместно еще раз отметить, что традиционная форма записи уравнений Максвелла появилась до создания теории дифференциальных форм. формы). В частности, $\Omega = d\omega$, где $\omega$ есть 1 -форма на пространстве $\mathbb{R}^4$:

$$\omega = A_x dx + A_y dy + A_z dz + A_t dt.$$

Эта форма называется 4-потенциалом электромагнитного поля. Введем, как это обычно делается в физике, координаты $x^1 = x, x^2 = y$, $x^3 = z, x^4 = ct$. Тогда мы можем записать наши формы в виде

$$\Omega = F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad \omega = A_\mu dx^\mu$$

(знак суммирования по повторяющимся верхнему и нижнему индексам опущен). Тот факт, что $\Omega = d\omega$, можно записать совсем просто:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}, \quad \mu < \nu.$$

Именно так выглядят уравнения Максвелла во всех современных учебниках физики.

Заметим, что форма $\omega$ определяется по форме $\Omega$ неоднозначно: мы можем всегда прибавить к этой форме точную 1-форму, т. е. дифференциал функции: $\omega' = \omega + dS$.

И вновь мы получим, что $d\omega' = \Omega$, так как квадрат дифференциала равен нулю. Это означает, что 4-потенциал определяется, как говорят, с точностью до калибровочных преобразований: $A'_\mu = A_\mu + \partial S/\partial x_\mu$. А поскольку в уравнения Максвелла входят только элементы $F_{\mu\nu}$, то, стало быть, выбор 4-потенциала не влияет на уравнения Максвелла.

Так обстоят дела в классической электродинамике. Но уже в квантовом случае движение частицы зависит не только от тензора электромагнитного поля, но и от 4-потенциала, и там калибровки имеют более важное значение.

## Лекция 2

На предыдущей лекции мы записали фарадееву часть уравнений Максвелла (т. е. первые два уравнения) в виде

$$d\Omega = 0,$$

где $\Omega = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \mu < \nu$ (знак суммирования по повторяющимся индексам здесь и ниже, как правило, опускается) — тензор электромагнитного поля.

Затем, используя тот факт, что для пространства $\mathbb{R}^4$ имеет место лемма Пуанкаре (каждая замкнутая форма на этом пространстве является точной), мы переписали полученное уравнение в виде

$$\Omega = d\omega, \quad \omega = A_\mu dx^\mu$$

или

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}, \quad \mu < \nu.$$

Форма $\omega$ называется 4-потенциалом электромагнитного поля и определяется с точностью до калибровочных преобразований $A'_\mu = A_\mu + \partial S/\partial x_\mu$.

Так обстоит дело, если пространство, на котором разворачиваются события, $-\mathbb{R}^4$. Но не всегда ареной физических событий бывает $\mathbb{R}^4$. Например, уравнение магнитного диполя Дирака описывает ситуацию, когда в одной точке пространства расположен магнитный заряд. Тогда все уравнения пишутся в пространстве $(\mathbb{R}^3 \backslash \{x\}) \times \mathbb{R}$. В качестве такого пространства может также выступать произведение трехмерного тора на $\mathbb{R}$ и т. д.

В этих случаях лемма Пуанкаре уже не всегда имеет место, т. е. глобальный 4-потенциал может не существовать. Однако, поскольку локально каждое многообразие устроено как евклидово пространство, в каждой карте свой 4-потенциал может быть построен. Но как связать вместе все эти локальные 4-потенциалы, как записать в инвариантной форме уравнения электромагнитного поля, заданного на всем пространстве и не зависящего от выбора карт (т. е. локальных систем координат)? Для этого и существует язык расслоений и связностей, к знакомству с которым мы теперь и приступаем.

### §6.

Мы начнем с простого примера расслоения, который вам очень хорошо знаком.

Пример 1. Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$. Ее можно представить в виде графика в пространстве $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^2$. Это множество точек $s = (x, f(x))$, где $x = (x^1, x^2, x^3, x^4)$. Имеется естественная проекция $\pi$ пространства $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^2$, состоящего из точек $(x, y)$, на $\mathbb{R}^4 : (x, y) \mapsto x$ (рис. 1). Наша функция есть не что иное, как отображение $s$ из базы - пространства $\mathbb{R}^4-$ В пространство $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^2$; при этом $\pi \circ s = \mathrm{id}$. Всякое отображение $s$, обладающее таким свойством, называется сечением. А сама конструкция, которую мы построили, называется (тривиальным) расслоением или прямым произведением. Теперь мы обобщим приведенную в примере конструкцию. Рассмотрим покрытие $\mathbb{R}^4$ открытыми множествами $U_i$. Пусть для каждого непустого пересечения $U_i \cap U_j$ задана некоторая функция со значениями в группе невырожденных матриц размера $2 \times 2$:

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(2; \mathbb{R}).$$

Если набор функций $\{g_{ij}\}$ обладает свойствами

1. $g_{ji}(x) = (g_{ij}(x))^{-1}$,
2. $g_{ij}(x) \cdot g_{jk}(x) \cdot g_{ki}(x) = I \quad$ ( если $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \varnothing$),

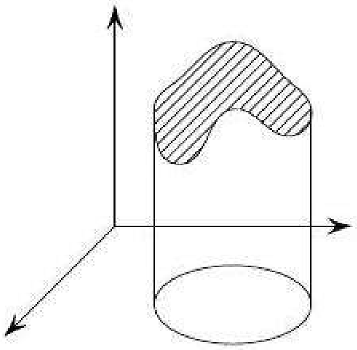


Рис. 1

то этот набор называют склеивающим коциклом (здесь $(g_{ij}(x))^{-1}$ - это матрица, обратная к $g_{ij}(x); I$ - единичная матрица). При помощи склеивающего коцикла можно построить новый объект, который локально похож на сконструированное в предыдущем примере прямое произведение.

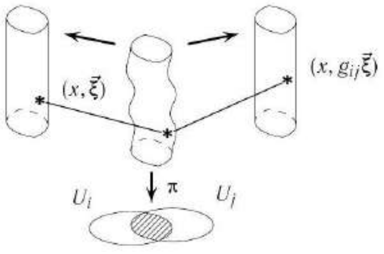


Рис. 2 «Кирпичиками» в нашей конструкции будут пространства $U_i \times \mathbb{R}^2$, которые мы будем склеивать по множествам $(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^2$. Есть очень простой способ склейки: точка $(x, \vec{\xi})$ из $U_i \times \mathbb{R}^2$ склеивается (отождествляется) с точкой $(x, \vec{\xi})$ из $U_j \times \mathbb{R}^2$. Тогда интуитивно ясно, что мы получим в точности прямое произведение. Давайте поступим иначе - склеим цилиндры «с подкруткой»: точку $(x, \vec{\xi})$ отождествим с точкой $\left(x, g_{ij}\vec{\xi}\right)$ (рис. 2). Ограничения, наложенные на функции $g_{ij}$, обеспечивают корректность такой склейки. Свойство 1) означает, что если точка $(x, \vec{\xi})$ склеивается с некоторой точкой $(x, \vec{\eta})$, то точка $(x, \vec{\eta})$ склеивается с точкой $(x, \vec{\xi})$. Если у нас имеется пересечение трех цилиндров, то мы склеиваем точку из первого цилиндра с точкой из второго цилиндра, ту, в свою очередь, — с точкой из третьего цилиндра, а ее с точкой из первого цилиндра. Свойство 2) гарантирует нам, что после таких склеек точка первого цилиндра перейдет в себя.

После склейки мы получим некоторое пространство $P$, сконструированное из этих цилиндриков, у которого будет естественная проекция $\pi$ на базу $\mathbb{R}^4$. Причем эта проекция корректно определена для всех цилиндриков, и склейка ее не портит.

Полученный объект называют векторным расслоением с базой $\mathbb{R}^4$, пространством расслоения $P$, слоем $\mathbb{R}^2$ и структурной группой $\mathrm{GL}(2;\mathbb{R})$. Возьмем теперь другой склеивающий коцикл и построим соответствующее ему векторное расслоение $P'$ с отображением проектирования $\pi'$. Если существует взаимно-однозначное гладкое в обе стороны линейное на каждом слое отображение $F$ из $P$ в $P'$, такое что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\pi"'] & & P' \arrow[dl, "\pi'"] \\
& R^4 &
\end{tikzcd}$$

коммутативна (т. е. $\pi' \circ F = \pi$), то говорят, что расслоения $P$ и $P'$ эквивалентны. Расслоения, эквивалентные прямому произведению, называют тривиальными. Можно доказать, что если в качестве базы выступает пространство $\mathbb{R}^4$, то все расслоения будут тривиальными. Но ясно, что в приведенной конструкции конкретный вид базы (в качестве которой мы выбрали для простоты пространство $\mathbb{R}^4$) и размерность слоя (пространства $\mathbb{R}^2$ в нашем случае) ни при чем. В качестве базы может выступать любое многообразие, а в качестве слоя — евклидово пространство любой размерности.

Приведем пример нетривиального расслоения с базой $S^1$ (окружность).

Пример 2. Рассмотрим два экземпляра цилиндра $S^1 \times \mathbb{R}$ и выбросим из первого цилиндра прямую $\{x\} \times \mathbb{R}$, а из второго - прямую $\{y\} \times \mathbb{R}$, где $x$ и $y$ - различные точки окружности $S^1$. Получим два кирпичика $U_1 \times \mathbb{R}$ и $U_2 \times \mathbb{R}$, где $U_1 = S^1 \backslash \{x\}$, а $U_2 = S^1 \backslash \{y\}$. Пересечение $U_1 \cap U_2$ состоит из двух компонент $V_1$ и $V_2$. Если $z \in V_1$, то склеим точки $(z, t)$ и $(z, t)$. Если же $z \in V_2$, то склеим наши кирпичики следующим образом: точка $(z, t)$ первого кирпичика склеится с точкой $(z, -t)$ второго, т. е. в нашем случае склеивающий коцикл состоит из одного элемента $g_{12}$, тождественно равного единице на $V_1$ и равного -1, если $z \in V_2$. Структурная группа является группой $\mathrm{GL}(1;\mathbb{R})$, т. е. группой ненулевых действительных чисел с операцией умножения.

Пространство этого расслоения - поверхность, похожая на лист Мёбиуса, только бесконечная. Она не гомеоморфна цилиндру $S^1 \times \mathbb{R}$, поскольку цилиндр - ориентируемое многообразие, а полученное нами пространство расслоения - нет. Значит, это расслоение нетривиально.

Сечение произвольного расслоения определяется точно так же, как и в разобранном случае прямого произведения: это такое отображение $s$ из базы в пространство расслоения, что $\pi \circ s = id$. Сечения расслоения образуют модуль над кольцом гладких функций базы: их можно складывать (покоординатно и поточечно) и умножать на функции.

## §7.

У прямого произведения есть следующее замечательное свойство: сечение прямого произведения можно дифференцировать вдоль любого векторного поля $\vec{v}$ базы. А именно, возьмем сечение $(x, f(x))$ и поставим ему в соответствие новое сечение $(x, \partial_v f)$, где $\partial_v f = df(\vec{v}))$. Выражение $df$ есть векторнозначная 1 -форма вида $(df^1, \ldots, df^4)$; ее значение на векторном поле $\vec{v}$ - гладкая вектор-функция $((df^1(\vec{v}), \ldots, df^4(\vec{v}))$. А ее график (т. е. сечение $(x, df(\vec{v}))$) и будет искомой производной $(x, \partial_v f)$ исходного сечения вдоль $\vec{v}$.

Можно ли похожим образом научиться дифференцировать сечения произвольного расслоения? На сечение расслоения можно смотреть как на согласованную совокупность $(x, f_i)$ сечений кирпичиков $U_i \times \mathbb{R}^2$. Условие согласованности состоит в том, что эти локальные сечения склеиваются в глобальное, т. е. для любой точки $x \in U_i \cap U_j$ имеет место тождество $f_i(x) = g_{ij}(x) f_j(x)$.

Давайте продифференцируем каждое такое элементарное сечение обычным образом вдоль векторного поля. Нужно только проверить, что полученные локальные сечения вновь корректно склеиваются:

$$\partial_v f_i = \partial_v \left(g_{ij} f_j\right) = \left(\partial_v g_{ij}\right) f_j + g_{ij} \partial_v f_j.$$

Если бы члена $\left(\partial_v g_{ij}\right) f_j$ не было, сечения бы склеивались и при склеивании давали глобально определенное, без разрывов, сечение. Но если функции $g_{ij}$ зависят от $x$, то это определение ни к чему хорошему не приводит. Заметим, что невязка этой формулы — член, линейный по $f_j$. Давайте чуть-чуть подправим определение производной вдоль векторного поля, добавив такую линейную по $f$ часть, чтобы новые сечения склеились. А именно, определим новую производную, которая будет называться ковариантной производной вдоль векторного поля $\vec{v}$:

$$\nabla_v f_i = \partial_v f_i + A_v^i f_i$$

где $A_v^i$ - матрица размера $2 \times 2$ (здесь суммирование по индексу $i$ не производится). Мы постараемся подобрать матрицы $A_v^i$ (свою для каждого кирпичика) так, чтобы в итоге после применения ковариантной производной все локальные сечения склеились в одно.

Распишем определение $\nabla_v$:

$$\begin{aligned}\nabla_v f_i = \partial_v f_i + A_v^i f_i = \partial_v \left(g_{ij} f_j\right) + A_v^i \left(g_{ij} f_j\right) = \left(\partial_v g_{ij}\right) f_j + g_{ij} \partial_v f_j + A_v^i g_{ij} f_j = \\ = g_{ij} \left(g_{ij}^{-1} \left(\partial_v g_{ij}\right) f_j + \partial_v f_j + g_{ij}^{-1} A_v^i g_{ij} f_j\right) = g_{ij} \nabla_v f_j.\end{aligned}$$

Последнее равенство необходимо для того, чтобы локальные сечения склеились. Выражение $\nabla_v f_j$ должно содержать член $\partial_v f_j$, следовательно, сумма остальных членов должна равняться $A_v^j f_j$:

$$A_v^j = g_{ij}^{-1} \partial_v g_{ij} + g_{ij}^{-1} A_v^i g_{ij}$$

Отсюда

$$A_v^i = -\partial_v g_{ij} g_{ij}^{-1} + g_{ij} A_v^j g_{ij}^{-1}.$$

Итак, если удается найти матричные функции $A_v^i$, удовлетворяющие полученному условию, то можно ввести операцию дифференцирования сечений вдоль векторного поля $\vec{v}$.

Но как быть, если надо продифференцировать сечения вдоль другого векторного поля? Искать каждый раз подходящие матричные функции было бы довольно затруднительно. Кроме того, естественно было бы ожидать, что $\nabla_{v_1} f + \nabla_{v_2} f = \nabla_{v1+v_2} f$, как в случае обычных функций. Поэтому давайте потребуем, чтобы на каждой окрестности $U_i$ была задана матричная дифференциальная форма (т. е. матрица размера $2 \times 2$, все элементы которой являются 1-формами) $\omega_i$ так, что

$$\omega_i = -dg_{ij} g_{ij}^{-1} + g_{ij} \omega_j g_{ij}^{-1}$$

для любых пересекающихся $U_i$ и $U_j$.

Тогда оказывается, что мы можем дифференцировать любое сечение вдоль любого векторного поля. Для этого нужно лишь положить

$$A_v^i = \omega_i(\vec{v})$$

Определение 2. Говорят, что в векторном расслоении задана связность, если для любого набора окрестностей и склеивающих коциклов, по которым можно построить это расслоение, задан набор дифференциальных матричных 1 -форм $\{\omega_i\}$, удовлетворяющих свойству $(*)$. Связность обозначается обычно значком $\nabla$. Форма $\omega_i$ называется локальной формой связности.

Связность соотносится с ковариантной производной примерно так же, как дифференциал функции с частной производной. Если $s-$ сечение расслоения, имеющее в цилиндре $U_i \times \mathbb{R}^2$ вид $(x, f_i(x))$, то

$$\nabla s = (x, df_i + \omega_i f_i)$$

Другими словами, если мы применим к сечению не ковариантное дифференцирование, а оператор связности, то мы получим сечение с коэффициентами в 1-формах. Проиллюстрируем это диаграммой:

$$\nabla : \{\text{ сечение }\} \to \{\text{ сечение }\} \otimes \Lambda^1\left(\mathbb{R}^4\right).$$

Итак, связность в векторном расслоении — это просто возможность дифференцировать сечения. Связность является линейным отображением (т. е. $\nabla\left(s_1 + s_2\right) = \nabla s_1 + \nabla s_2$) и удовлетворяет правилу Лейбница: для любого $f \in \mathcal{F}\left(\mathbb{R}^4\right)$ и для любого сечения $s$ имеем $\nabla(fs) = (df)s + f\nabla s$.

Это инвариантное определение связности: говорят, что на расслоении задана связность, если любому сечению ставится в соответствие { сечение } {дифференциальная форма }, и это отображение линейно и удовлетворяет правилу Лейбница. Легко показать что такое определение связности эквивалентно данному выше «координатному».

Рассмотрим снова цилиндр $U_i \times \mathbb{R}^2$. В нем есть стандартный базис сечений $\xi_1 = \left(x, e_1\right), \xi_2 = \left(x, e_2\right)$ (где $e_1$ и $e_2$ образуют стандартный базис в $\mathbb{R}^2$). Любое сечение $s = (x, f_i(x))$ над $U_i$ может быть записано в виде $s = f_i^1 \xi_1 + f_i^2 \xi_2 = \left(\xi_1, \xi_2\right) f_i$ (где последнее выражение понимается как произведение строки на столбец). Для построенных сечений имеем

$$\nabla \xi_j = \left(x, \nabla e_j\right) = \left(x, \omega_i e_j\right) = \left(x, \omega_i^j\right),$$

где через $\omega_i^j$ обозначен $j$-й столбец матричной дифференциальной формы $\omega_i$.

Следовательно, $\left(\nabla \xi_1, \nabla \xi_2\right) = \left(\xi_1, \xi_2\right) \omega_i$ (вектор-строка умножается на матрицу), поэтому на матрицу $\omega_i$ можно смотреть как на матрицу связности в базисе $\left(\xi_1, \xi_2\right)$.

Теперь делается более понятным смысл выражения $(**)$. Его можно переписать в виде

$$\nabla f_i = df_i + \omega_i f_i.$$

Это действие связности на координатах сечения $s$ (по отношению к базисным сечениям $\xi_1, \xi_2$).

Во всяком ли векторном расслоении можно ввести связность? Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение, которое мы оставляем читателю в качестве упражнения.

В любом гладком векторном расслоении можно ввести связHocmb.

(Указание: Рассмотрите гладкое разбиение единицы $\{\lambda_i\}$, подчиненное покрытию $\{U_i\}$; так как над каждым $U_i$ расслоение имеет вид прямого произведения, в ограничении расслоения на $U_i$ можно ввести некоторую связность $\nabla_i$; покажите, что линейная комбинация $\sum \lambda_i \nabla_i$ является корректно определенной связностью в исходном расслоении.)

Сечение $s$ называется горизонтальным (по отношению к связности $\nabla$), если $\nabla s = 0$.

Из $(**)$ следует, что в базисе $\xi_1, \xi_2$ локальных сечений расслоения над $U_i$ координаты горизонтальных сечений удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$df_i = -\omega_i f_i$$

Если расслоение тривиально, то в базисе $\xi_1, \xi_2$ глобальных сечений расслоения координаты горизонтальных сечений удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$df = -\omega f.$$

В другом базисе сечений (при другой тривиализации расслоения) $\xi_1', \xi_2'$ согласно $(*)$ уравнение горизонтальных сечений принимает вид

$$df' = -\omega' f', \quad \text{где} \quad f' = \Gamma y, \quad \omega' = -d\Gamma\Gamma^{-1} + \Gamma\omega\Gamma^{-1}$$

(и где в свою очередь $(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1', \xi_2')\,\Gamma)$. Заметим, что такие преобразования называются калибровочными преобразованиями формы связности.

Итак, связность в тривиальном расслоении задает систему дифференциальных уравнений с точностью до калибровочных преобразований.

Если же расслоение нетривиально, то связность задает согласованное (в смысле соотношений $(*)$) семейство систем дифференциальных уравнений.

## §8.

Попробуем продолжить диаграмму дифференцирования сечений:

$$\{\text{ сечение }\} \xrightarrow{\nabla} \{\text{ сечение }\} \otimes \Lambda^1(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\tilde{\nabla}} \{\text{ сечение }\} \otimes \Lambda^2(\mathbb{R}^n),$$

где отображение $\widetilde{\nabla}$ каждому сечению с коэффициентами в 1-формах ставит в соответствие сечение с коэффициентами в 2-формах. Мы также потребуем, чтобы для него выполнялось правило Лейбница:

$$\tilde{\nabla}(f\alpha) = df \wedge \alpha + f\tilde{\nabla}\alpha, \quad \tilde{\nabla}(\beta s) = (d\beta)s - \beta \wedge \nabla s$$

для произвольной функции $f$, сечения $s$ и 1 -формы $\beta$. Определим сквозное отображение $K = \widetilde{\nabla} \circ \nabla$.

Лемма. Отображение $K$ является $\mathcal{F}$-линейным.

Доказательство. Пусть $f-$ функция, $s-$ сечение. Тогда
$K(fs) = \widetilde{\nabla}(\nabla(fs)) = \widetilde{\nabla}((df)s + f\nabla s) = (d^2 f)\,s - df \wedge \nabla s + df \wedge \nabla s + fK(s) = fK(s)$, поскольку $d^2 f = 0$, а второй и третий члены сокращаются. Отображение $K$ называется тензором кривизны связности. Локально над $U_i$ в базисе $\xi_1, \xi_2$ тензор кривизны можно записать в виде

$$K(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1, \xi_2)\,\Omega_i,$$

где $\Omega_i$ - матрица дифференциальных 2 -форм.

Вычислим эту матрицу в нашем базисе через $\omega_i$:

$$\tilde{\nabla}\left(\nabla\left(\xi_1,\xi_2\right)\right)=\widetilde{\nabla}\left(\left(\xi_1,\xi_2\right)\omega_i\right)=\left(\nabla\xi_1,\nabla\xi_2\right)\wedge\omega_i+\left(\xi_1,\xi_2\right)d\omega_i=$$
$$=\left(\xi_1,\xi_2\right)\left(\omega_i\wedge\omega_i\right)+\left(\xi_1,\xi_2\right)d\omega_i=\left(\xi_1,\xi_2\right)\left(\omega_i\wedge\omega_i+d\omega_i\right).$$

Сравнивая коэффициенты при базисных векторах слева и справа, мы получаем уравнение $\Omega_i = d\omega_i + \omega_i \wedge \omega_i$. (Внешнее произведение $\omega_i \wedge \omega_i$ не обязано равняться нулю, поскольку $\omega_i$ - матричная форма.) Полученное уравнение называется структурным уравнением. Дифференцируя это уравнение, мы получим $d\Omega_i = \Omega_i \wedge \omega_i - \omega_i \wedge \Omega_i$. Это равенство носит название тождество Бьянки. Введя новый оператор $D\Omega_i = d\Omega_i - \Omega_i \wedge \omega_i + \omega_i \wedge \Omega_i$ (его называют ковариантной производной формы), данное выражение можно переписать в виде

$$D\Omega_i = 0.$$

$9.

По аналогии с конструкцией векторного расслоения рассмотрим теперь главное расслоение. Для этого вместо $\mathbb{R}^2$ в наших кирпичиках возьмем $\mathrm{GL}(2;\mathbb{R})$, т. е. в качестве элементарных цилиндров будем рассматривать цилиндры $U_i \times \mathrm{GL}(2;\mathbb{R})$. Склеивать мы их будем точно так же, с помощью коцикла $\{g_{ij}\}$:

$$(x,G)\sim\left(x,g_{ij}G\right),\qquad \text{если } x\in U_i\cap U_j.$$

Только умножать матрицу $g_{ij}$ нам придется уже не на вектор, а на другую матрицу $G$. Расслоение, у которого структурная группа и слой — это одно и то же пространство, называют главным расслоением.

В главном расслоении также можно ввести связность, формально воспользовавшись данным ранее определением (как совокупность согласованных с помощью соотношения (*) матричных дифференциальных форм). Но ее уже нельзя будет рассматривать как дифференцирование вектор-сечений. Геометрическая интерпретация связности в главном расслоении состоит в том, что связность выделяет в касательном пространстве к каждой точке пространства расслоения подпространство так называемых горизонтальных векторов, гладко зависящее от точки. Объем данной брошюры не позволяет нам познакомиться подробнее с этой интерпретацией. Отметим лишь еще раз, что аналогично случаю векторного расслоения в главном расслоении можно ввести кривизну связности и выписать структурное уравнение и тождество Бьянки.

$10.

Вернемся вновь к уравнениям Максвелла. Оказывается, на электромагнитное поле можно смотреть как на связность в главном раслоении над $\mathbb{R}^4$ со структурной группой и слоем $\mathrm{U}(1) \subset \mathrm{GL}(1;\mathbb{C})$ ($\mathrm{U}(1)$ - это группа комплексных чисел, равных по модулю 1, т. е. геометрически это окружность $S^1$).

В этом расслоении функции склейки $g_{ij}$ принимают значение в группе $\mathrm{U}(1)$, а формы связности и кривизны становятся скалярными, а не матричными. Поэтому для локальных форм связности и кривизны связности получаем: $\omega_i \wedge \omega_i = 0$ и $\Omega_i \wedge \omega_i - \omega_i \wedge \Omega_i = 0$. Структурное уравнение принимает при этом вид $\Omega_i = d\omega_i$, а тождество Бьянки $-d\Omega_i = 0$.

Поэтому локальную форму связности $\omega_i = A^i_\mu dx^\mu$ мы будем интерпретировать как локальный 4-потенциал в данной калибровке, т. е. в данной локальной тривиализации расслоения над $U_i$, локальную форму кривизны $\Omega_i$ - как тензор электромагнитного поля в данной калибровке, а тождество Бьянки превратится в фарадееву часть уравнений Максвелла.

При переходе от одной локальной формы связности к другой (т. е. при замене калибровки) получим согласно соотношению (∗) (и согласно тому, что функции склейки - скалярные):

$$\omega_i = -dg_{ij}g_{ij}^{-1} + g_{ij}\omega_j g_{ij}^{-1} = \omega_j + dS_{ij},$$

где $S_{ij} = d\log(-g_{ij})$, или в терминах компонент формы $\omega_i$:

$$A^i_\mu = A^j_\mu + \frac{\partial S_{ij}}{\partial \mu}$$

Согласно этой формуле, компоненты локальной формы связности преобразуются точно так же, как компоненты 4-потенциала электромагнитного поля при калибровочных преобразованиях, что еще раз подтверждает правильность нашей интерпретации.

Итак, в случае главного расслоения все наши формулы могут быть описаны на двух языках: геометрическом и физическом. Составим соответствующий словарик:

| | | |
|---|---|---|
| Выбор локального цилиндра (локальная тривиализация) | $U_i \times G$<br>$(U_i \times S^1)$ | Калибровка |
| Локальная форма связности | $\omega_i = A^i_\mu dx^\mu$ | 4-потенциал электромагнитного поля в данной калибровке |
| Связность | $\nabla$ | Электромагнитное поле |
| Локальная форма кривизны связности | $\Omega_i$ | Тензор электромагнитного поля в данной калибровке |
| Тензор кривизны связности | $\bar{K}$ | Тензор электромагнитного поля |
| Тождество Бьянки | $D\Omega_i = 0$ | Фарадеева часть уравнений Максвелла |
| Пространство расслоения | $P\,(\mathbb{R}^4 \times S^1)$ | Фазовое пространство физической системы |
| База расслоения | $B\,(\mathbb{R}^4)$ | Пространство-время |
| Структурная группа расслоения | $G(\mathrm{U}(1))$ | Группа «вращений» в зарядовом пространстве. |

Последняя строчка словарика требует пояснения. Дело в том, что структурная группа U(1) появляется в описании электромагнитного поля в связи с тем, что физическая ситуация не должна зависеть от выбора фазы (выбора направления в зарядовом пространстве), что соответствует инвариантности относительно калибровочных преобразований вида $g_{ij} = \exp(is(x))$ со значениями в U(1).

## §11.

Случай электромагнитного поля — в каком-то смысле простейший из возможных, так как структурная группа расслоения в этом случае очень проста. Однако этим примером не исчерпывается описание физических полей в терминах расслоений и связностей.

Другой известный пример - это знаменитые поля Янга-Миллса, служащие для описания поведения нуклонов (протонов и нейтронов). Эти поля интерпретируются как связности в главном расслоении со структурной группой $G = \mathrm{SU}(2)$ (так обозначается группа всех невырожденных комплексных матриц размера 2 × 2, определитель которых равен 1). В этом случае все формы связности и кривизны являются матричными, и те упрощения, которые были возможны в случае электромагнитного поля, здесь не проходят. Однако выписанный нами словарик «работает» и для этих полей.

Исследуя подобного рода модели, физики научились вычислять такие величины, как масса протона и масса нейтрона, просто решая с помощью компьютера соответствующие уравнения. Но это тема совсем другой лекции.

#### Обзор приложений электромагнитное поле а дифференциальных формах

(очень многие укажу, но сперва дорасти до таких задач нужно, скорее всего только в ОТО они и используются, я хз, где еще?)

#### Другое про электромагнитное поле а дифференциальных формах

#### формулировка уравнений Максвелла в бескоординатном методе

$$\begin{aligned}\omega_E =&E_x(x,y,z)dy\wedge dz+E_y(x,y,z)dz\wedge dx+E_z(x,y,z)dx\wedge dy\\ \lambda_H =&H_x(x,y,z)dx+H_y(x,y,z)dy+H_z(x,y,z)dz\end{aligned}$$

Тогда дифференциал формы имеет вид:

$$d\omega_E=\frac{\partial E_x}{\partial x}dx\wedge dy\wedge dz+\frac{\partial E_y}{\partial y}dy\wedge dz\wedge dx+\frac{\partial E_z}{\partial z}dz\wedge dx\wedge dy$$

сгруппировав члены, имеем $d\omega_E=\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz$

Дифференциал магнитного поля имеет вид

$$d\lambda_H=\frac{\partial H_x}{\partial y}dy\wedge dx+\frac{\partial H_x}{\partial z}dz\wedge dx+\frac{\partial H_y}{\partial x}dx\wedge dy+\frac{\partial H_y}{\partial z}dz\wedge dy+\frac{\partial H_z}{\partial x}dx\wedge dz+\frac{\partial H_z}{\partial y}dy\wedge dz$$

или

$$d\lambda_H=\left(\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}\right)dy\wedge dz+\left(\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)dz\wedge dx+\left(\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)dx\wedge dy$$

#### очевидные плюсы такого подхода

пока не вижу, потом мб увижу

#### решения

хз как решать

## 16.4 Geometry of gravity and relativity

Обсудим, каким образом дифференциальная геометрия используется в ОТО.

(потом мб как-то разделю, пока так вот)

### 16.4.1 Суть ОТО

Известно, что в криволинейных координатах инертная масса ведет себя также, как гравитационная, и если ввести 4 мерное пространство время, то гравитационные силы могут быть описаны за счет введения тензора кривизны.

и таким образом, получаем описание гравитации за счет изменения метрики пространства-времени.

### 16.4.2 Examples of Manifolds in GR and SR

(мб потом увеличу раздел, пока такой вот он.)

### Examples of Manifolds in GR and SR

(вот соберу их и все, пока опыта мало, проблем тут полно, привести примеры четко многие.)

### геометрия пространства Минковского

(выпишу из Мищенко Фоменко, потом добавлю в теорию поля)

### геометрия пространства де Ситтера

потом займусь и свяжу с ОТО.

пока что я вообще хз.

Обсудим математические и всевозможные другие различные приложения дифференциальной геометрии.

(пока так, на всякий случай часть висит, мб удалю)

# 17 Другие физические приложения

(потом напишу мб еще какие-то)

## 17.1 Геометрия в особых теориях поля

(список тем из какого-то теорфизного курса, скорее всего от кафедры Белавина, потом посмотрю, пока учу основы. Мб это курс Рослого для умных)

## 17.2 Геометрия в гравитационном линзировании

(тут много про это будет, скоррелирую, кстати, с теорией выше.)

# 18 Другие приложения

## 18.1 философские приложения

### смысл многообразий

типа прямо как наше видение мира, с разных сторон можно смотреть на него.

то се.

# Part VII
# Дополнения

## A Введение и обзор диффгема

## A.1 Еще мотивация к дифференциальной геометрии

### A.1.1 Другая общая мотивация

**Приложения в теоретической физике**

(потом раскрою)

**В принципе большая вероятность появления в теоретической физики новой опирающейся на дифференциальную геометрию теории** (и всё, приехали, если диффгем не сделан. минус пара месяцев в лучшем случае. поэтому лучше уж иметь заготовки, потому что чуть что их переучивать не нужно будет - плюс пара месяцев к скорости. нпр у Тонга, Мизнера, Вергелеса по ОТО полно всего, что сполна на диффгем опирается.)

**Приложения в теории струн** (это очень мотивирует изучать диффгем, так что укажу потом их)

**Множество применений в ОТО** (потом раскрою, тут очень многое есть)

**Углубленные понимание теории поля** некоторые темы такие

**физики очень часто говорят про дифференциальную геометрию** поэтому если не понимаешь диффгем, то общение с ними будет отнимать слишком много сил.

и это аргумент изучить ее, потому что по факту темы не сложные,

так что правильнее собрать эту теорию.

**Углубленные понимание механики** до Арнольда пока не дошел, но однажды дойду

**Продвинутые математические методы**

**Возможность описывать кривые и поверхности** именно диффгем дает этот аппарат.

**Общая научная эрудиция**

(потом напишу)

**дифференциальная геометрия - фундаментальная часть математики**

### A.1.2 Мотивация к разделам и к изучению особенностей диффгема

**Мотивация к изучению аффинных пространств**

(хз)

#### Мотивация к углубленным типичным разделам

#### мотивация к когомологиям

пропишем, а то непонятно, зачем заниматься ими.

#### Мотивация к отдельным огромным разделам

#### Мотивация к K-теории

хз

#### Мотивация к углубленным расслоениям

хз вообще, какая-то там теория, не знаю, зачем она

#### Мотивация к алгебраической топологии

хз вообще.

#### Мотивация к бескоординатному языку

я вот хз, так и не въехал, зачем всё на нем проходить.

## A.2 Мышление профессионалов геометрии

### A.2.1 Взгляд на дифференциальную геометрию

#### На самом деле, скучная или не скучаня дифференциальная геометрия?

(тут важные рассуждения, ответ тем, кто говорит, что это скучно. если коротко, должен быть правильный подход, тогда она будет не скучной. допишу потом подробно.)

#### Дифференциальная геометрия как набор типичных конструкций, которые просто нужно понять и иногда они могут сыграть ключевую роль

Такие полезные конструкции, если заниматься некоторыми теориями. Их не много, просто отдельно нужно каждую понять и все, можно даже не задаваться вопросом о связях их друг с другом. Но если человек выбрал просидеть много времени в одной теории, которая не связана с диффгемом, то в таком случае она не нужна и можно не интересоваться ей.

#### Подход физика к геометрии

#### Очень часто физическая теория имеет слишком много математики, которую и нужно собирать в отдельную запись

(именно поэтому я и прописываю параллельно диффгем. нпр читаешь Вергелеса и Тонга - куча всего, что совсем не имеет отношения к ОТО, но поясняет происходящее. именно в этой записи всё и будет собираться в единую картину.)

#### Особенности геометрии

**Наличие больших отдельных разделов** (то есть это целый мир, где полным полно конструкций, в которых запросто утонуть. так что единая запись, которая их объединяет крайне полезна! а то поток книг по 300-600 страниц с теорией, которую почти впервые видишь, которая раз в жизни будет нужна - вот реальность теоретической физики. запись по диффгему крайне спасает ориентироваться и связи между темами прорабатавыть.)

### О важности различных тем

**О важности производной Ли** (хз, отдельно ответ на этот вопрос хотел бы записать. так и не понял, вроде вообще не важна, но нужно лучше разобраться.)

### Особенности объяснения геометрии незнающим

(??? пока не тот уровень, чтобы про это думать)

**Диффгем познает тот, кто его начнет применять, а для этого нужна вмеру общая подготовка** У других шансы в 10 раз меньше. А кто занимается разделами физики, где нужен диффгем, тот каждый день и будет тренироваться. А диффгем полон мелочей, так что тут много очень дней нужно им заниматься, тогда только будет им владение. Поэтому выводим физику на отработанный по упрощенным темам уровень - и тогда диффгем естественно и будет добавлен в научную деятельность. Тогда он и возьмется. Без этого дойти до профессионального уровня, не рассматривая себя как будущего специалиста по диффгему, очень очень маловероятно.

## А.2.2 Способы догадаться до главных идей геометрии

(незаменимая часть нормального понимания предмета. пока хз.)

### после введения двух операций, можно посмотреть на их коммутатор и антикоммутатор

Володя говорит, что так можно догадаться до производной Ли, например.

## А.2.3 О настоящей важности диффгема в физике

### Насколько нужен диффгем в теории поля?

(обсужу приложения. вроде как нужен, но не уверен, четко такой обзор-обсуждение не готов писать)

## А.2.4 Удивительные факты

## А.2.5 Мышление для эффективного изучения геометрии

### Любители заумничать мало чему научат, не следует у них учиться, пока совсем много сам не прошел

В диффгеме, как и много где в математике таких можно встретить. Очень тупиково у них чему-то учиться. Можно было бы что-то понять, однако это очень низкоприоритетное дело, в реальности никогда до этого не дойдет, и это очень хорошо.

Поэтому учим диффгем вмеру быстро по нормальным книгами/лекциям и не паримся, пока не появилась потребность в этом. А то иначе можно на пустом месте месяцы и просидеть, в итоге только начать чувствовать себя очень неприятно.

### Необходимые темы для изучения основ

**Базовая общая физика, если изучающий физик** Я хочу подчеркнуть, что геометрия второстепенная, так что если физик начинает её учить, не имея базу по физике, то это ему не нужно. Только имея базу по физике, познав геометрию, он сможет стать лучше как физик.

**Базовая линейная алгебра** Начало дифференциальной геометрии опирается на линейную алгебру, так что без неё основы не станут понятны. Опускать основы - решение хуже, чем просто подучить линейную алгебру.

**Основы топологии** По топологии нужно иметь зрелую минимальную картину предмета.

иначе все-таки отлеты из диффгема будут большие.

(пока не четко понимаю это)

### Необходимые предметы для изучения продвинутых тем

**Темы для многообразий (?)**

### Дополнительные темы для изучения геометрии

### Способы изучения геометрии

(пока не уверен в нем)

**Полезно читать дополнения к физическим книгам, используемых геометрию** там шикарные короткие дополнения, помню, потом буду тренироваться.

### Обход типичных тупиков в изучении диффгема

**Не забывайте о тренировках, решении задач и думании о темах!** Очень важно тренироваться и думать самому. Самая типичная ошибка - просто перестать вдумываться.

(раскрою потом подробнее, на 1/2 страницы указание про это планирую.)

**Книга/курс непонятный/слишком много времени занимает? Удалите и выкиньте все от него и начните изучать заново, по другому, более авторитетному курсу!** Просто удаляешь это и начинаешь с нормальной теории. Так у меня после курса Рослого было, только я не сразу это понял, казалось, что все-таки можно многое понять. Можно. Но это не стоит того, это слишком заумно. Задачи нормальные порешать можно, вот хорошая идея. А саму теорию с какими-то математическими заворотами нужно просто выкинуть, если она не заходит. И все, если так сразу сделаешь - то и пойдешь обучение дальше, а иначе будешь долго стоять.)

Важно понимать, что кривую теорию не спасти, самое лучшее - полностью выкинуть и начать заново. Если это примерно понятно, но нет веры в это, то будет тянуть держаться за кривую теорию, и это отнимет просто недели и даст крайне мало. Так что нужно быть уверенным: да, плохую теорию только удаляем и все! Уже нет такого, что нет других учебников!

(напишу подробнее, компактно, что рыться в сложно написанном - плохое всегда дело.)

#### О неверном видении геометрии

Можно чего угодно неверного понимать, но тут я соберу самые типичные заблуждения.

**Неверно видеть, что геометрия - центр мира** только раздражает, когда кто-то так говорит, обоснования потом никогда не дождешься, хотя в какой-то небольшой степени это и правда.

(пока мысль не раскрыта.)

### A.2.6 How one should not study differential geometry? (!!!)

(впишу разные соображения, чтобы не тратить время на разных обещающих обучить диффгему. Всякого бредового говорят они, потом оказывается, что просто не нужно было так обучать и всё.)

#### О неверных способах изучения геометрии

(мб свой опыт от Рослого пропишу, ибо я точно страдал херней, когда был у него на семинарах)

**Ошибка - начинать с алгебраичного или слишком детального подхода** Потому что так ничего не поймешь. Запутаться тут легко, а вот начать применять - на самом деле сложно. И вообще, маловероятно, что нужен такой подход. К тому же скорее всего преподаватель, который так обучает, бестолковый, поэтому пользы от такого подхода скорее всего не будет.

Это я понял, когда очень малополезно потратил время на курс Рослого.

**Ошибка - слушать лекции того, кто дает материал не в близком тебе подходе** Слушать другие структуры на начальных этапах бесполезно.

хотя и поняте "близкое" растяжимое.

просто забей на такие подходы и всё, итак в диффегеме заморочек выше крыши.

просто не выплыть, если пробовать далекие от твоего видения структуры собирать в порядок.

так что просто забывай всё, что знаешь от таких и начинай учиться по приятными источникам материала.

## A.3 Литература по дифференциальной геометрии

### A.3.1 Основная

#### Основная обучающая

Tong D. Lectures on general relativity

много чисто диффгемовских конструкций, объем меньше, чем в учебниках по диффгему, так что она в приоритете!

[1] А.О.Иванов, А.А.Тужилин Лекции по классической дифференциальной геометрии часть 1, 2004

Полезные лекции об основах, много примеров и вроде очень крутые лекции. Про кривые и поверхности потом пропишу по ней структуру, пока что делать нужно основы. Нужно сперва Тонга пройти, потом будет очень хорошим дополнением.

(?? пока таких основных книг еще не знаю, потом точно добавлю.)

### Основная профессиональная

[2] L Tu An Introduction to Manifolds

говорят, хорошая книга, но крайне большая. Потом буду смотреть её, как минимально необходимые книги будут пройдены.

[3] Катанаев М. О. Геометрические методы в математической физике

Большая книга, из которой многое обязательно возьму, пока этап сборки самых основ. Также нужно подготовиться к ней по умф и теорфизике. Уже некоторые выгрузки делал.

### Основная по приложениям в физике

Тахтаджаян Л. А. Квантовая механика для математиков

Много диффгема и математической квантовой механики, которая дает ответы на многие математические вопросы. Нужно месяца 2 на изучение ее, если пройдены базовые курсы математики и квантовой механики.

Mikio Nakahara Geometry, Topology And Physics Second Edition

Книга, где много диффгема, а также приложений в физике, особенно теоретической. Вот и можно сидеть месяц только над ней, многое разобрать и понять.

## A.3.2 Дополнительная и глубленная литература

### Другая обучающая

Тёрстон У. Трехмерная геометрия и топология 2001 310 страниц

Шикарная книга, очень многое хотел бы допонять по ней, автор очень авторитетный, так что будет время - подумаю. В интернете написано, что он умел представлять 4д пространство даже.

https://empg.maths.ed.ac.uk/Activities/GT/ José Figueroa-O'Farrill Course of Gauge Theory

Very interesting and good lectures by a respectful professor. Maybe later I'll think a lot about them. Understanding of them will take at least a weak for me.

[4] Мищенко А. С, Фоменко А. Т. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии

Мб потом многое добавлю в запись, пока как-то будто можно и другими книгами обойтись.

[5] А.О.Иванов, А.А.Тужилин Лекции по классической дифференциальной геометрии часть 2

открывал, многое интересное, после основ буду дополнять ей структуру. Всякие профессиональные темы тут.

https://www.youtube.com/playlist?list=PLcZKkvA0SKb7eiK7QDWYIXz0J0OGMXhQr Рослый Лекции по диффгему 2

То, что эти лекции записаны - единственное, что их спасает. Так что интересно их досматривать, но это только уже после того, как станет понятна более готовая для слушателя теория.

### Литература по математике в помощь

Зорич Математический анализ ч. 2

Тоже очень много хорошего объяснения, просто там акцент на матане, а не на диффгеме. Добавлю тоже многое из нее, пока просто по ней в маатане пишу суть!

[6] Карасёв Р.Н. "Отдельные темы математического анализа"

Есть разделы с неплохим введением, но их мало и предполагается, что где-то эта теория используется, так что почитав эти разделы, читатель сразу продолжит думать над местом, где понадобились они.

[? ] Иванов Г. Е. математический анализ 2

Не очень интересная книга, может, когда-то дополню запись соображениями из нее, пока вечно лень, но мб в целом будет полезно посидеть на ней тоже однажды.

#### Большие профессиональные книги по теоретической дифференциальной геометрии

Хьюзмоллер Расслоенные пространства и K-теории

Всякие закоулки диффгема, пока основы не сделаны, нет смысла открывать даже.

#### Статьи по геометрии для теории струн и конформной теории поля

[7] B. Craps, F. Roose, W. Troost, A. Van Proeyen What is Special Kähler Geometry?

Возможно, хорошая статья про кэлерову геометрию.

### A.3.3 Литература по приложениям в физике и математика

#### По теоретической и математической физике, использующей геометрию

Каку М. введение в теорию суперструн

очень крутые дополнения там, многое взял. (потом разберу)

[8] Арнольд В. И. "Математические методы классической механики"

Применения диффгема к механике, буду писать механику и диффгем по ней дорабатывать.

#### Литература о приложениях к другим разделам математики

Арнольд Геометрические методы в диффурах

мб дойду однажды, пока просто знаю, что есть такая книга

Зелкин (??)

там про грассмановы многообразия и какой-то еще пиздец

## A.4 Обзор дифференциальной геометрии

Обсудим основные элементы и особенности дифференциальной геометрии

(тут позже введение в другие разделы запишу)

### A.4.1 Геометрия в двух словах

Обсудим, что из себя представляет предмет наиболее кратко, выделяя самую суть.

(пока незрелый я, это пишу, как сама запись будет прописана)

#### появление Предмет в нашей картине мира

#### Что есть геометрия?

Многие те, кто знают диффгем, не могут на этот вопрос ответить, так что я пока что не нашел ответ.

#### один большой раздел

#### такой-то набор следствий

#### появление дифференциальной геометрии

### A.4.2 обзор теоретических подходов

что вообще в геометрии происходит?

### A.4.3 обзор приложений

тут многое прописывать буду

### A.4.4 Обзор дальнейших развитий геометрии

### A.4.5 Короткий исторический обзор

(интересно, но скорее всего никогда не напишу, потому что максимально не актуально)

### A.4.6 Связи с другими математическими науками

#### Связь с дифференциальными уравнениями

(почитаю Арнольда, пойму, пока я не знаю, нет смысла писать)
Связь огромная
Траектории - гладкие кривые, которые объекты диффгема.
Диффгем находит всю траекторию сразу.
Изначально у нас имеется многообразие и векторное поле.
Создаем векторное поле на многообразии.
Далее сдвигаемся и сравниваем с помощью производной Ли.

#### Связь с топологией

(пока связь с топологией не ясна)

#### О физике как части дифференциальной геометрии

(пообщаюсь с Володей, лучше пойму, как это так, пропишу потом связки)

**Важность понимания физических приложений** (пока я хз, почему это важно)

**Важность понимания связей с механикой** (Володя кажется уже рассказывал, потом мб напишу)

## A.5 Описание записи

### A.5.1 Особенности записи в целом

#### описание записи в целом

#### О целесообразности выделять риманову геометрию в отдельный раздел

(так тонг делает, так что и я тоже сделал. но тут обсудим, есть ли смысл так делить. скорее всего, да... не знаю.)

#### Строгость формулировок

потом по идее все определения будут очень строгими, пока что не занимался этим.

### A.5.2 Описание частей

#### Часть о всей геометрии в двух словах

ей занимался больше всего, ибо такой мой уровень.

#### Часть о многообразиях

так до неё и нед дошел, хз, что там.

#### Часть про приложения в физике

по идее к теории поля и к ОТО подробно будет раскрыты они.
мб еще что-нибудь.

### A.5.3 Обозначения

#### Обозначения ковариантной производной

есть такие:
$\nabla_{e_\alpha} := \nabla_\alpha$

#### Некоторые условные обозначения

(потом раскину)

$$a^\lambda_{;\mu} = (\nabla_\mu a)^\lambda$$

$$a^\lambda_{,\mu} = \partial_\mu a^\lambda$$

$u^\bullet$ - значит, что у $u$ есть несколько компонент, и речь идет о каждой из них, стоящей на данное позиции.

#### метод формальных индексов

это индексные цифры Лашкевича
хз

#### Антисимметризация

пропишу тоже там квадратные скобки в индексах, типичное обозначение.

### A.5.4 О терминологии

(мб напишу потом тоже)

## A.6 Головоломки дифференциальной геометрии

Обсудим в порядке интересности задачки и вопросы дифференциальной геометрии.
(с опытом соберу, пока не шарю. мб у Володи наберу интересные вопросы)

### A.6.1 Интересные головоломки

#### О приложениях дифференциальной геометрии в физике

### A.6.2 Головоломки для задротов

Обсудим головоломки, которые будут интересны тем, кому нравится копаться в деталях и кто отдельно изучал геометрию.

#### О том, в каких объектах мы работаем

**Какие есть изометрии пространства Минковского, как $R^4$ с метрикой Минковского?** (я так и не понял, Володя понимает, потом подумаю, просто это не актуально максимально)

Не преобразования группы Пуанкаре

неверно это верно если ты Минковский будешь смотреть как аффинное пространства, и $R^4$ будет там действовать как группа параллельных переносов а вот до этого, исходя из честного определения оператора изометрии на евклидовом или банаховом пространстве это не следует нужно пополнение векторов точками без этого трансляций не будет а будет только группа Лоренца

именно поэтому изучаем аффинные пространства, чтобы дальше смотреть изометрии в общем смысле слова ну ладно, ты же не математик, тебе простительно

**Почему мы работаем именно с кососимметричными функциями?** (не знаю, нужно переучить теорию, остался вопрос.)

#### Об определениях

**что есть $dx$** Это базисная 1-форма

то се, пропишу потом

**Что есть вектор?** потом запишу.

#### О том, что можно сконструировать, а что нельзя

**На всяком ли многообразии можно задать метрику?** на всяком гладком - да.

берем локально конечное разбиение единицы, в каждом - задаем метрику.

вто и риманова структура.

# B Математика для диффгема

Обсудим математические конструкции, которые считаются используются в дифференциальной геометрии.

(!!! диффгем основывается на многих математических разделах, так что сперва их прописываю, потом тут в дополнениях буду указывать его!!! Это важно, потому что иначе тут под 200 страниц придется написать, что никуда не годится.)

## B.1 Элементы алгебры для диффгема

Линейная алгебра крайне важна для геометрии, особенно в начале её изучения. Приведем все необходимые такие элементы с указанием приложений.

(будут параграфы с приложениями)

(пока последовательность разделов рандомная)

### B.1.1 О двойственности

Обсудим двойственность - конструкцию, которая крайне часто встречается.

#### Двойственное пространство к векторному пространству

#### Алгебраически сопряженное

володя достал откуда-то, потом разберусь

#### О каноническом изоморфизме

раскрою, что есть он?
пока зависшая тема...

#### О строгом подходе к двойственности

или теория категорий тут будет, или еще что-то, что максимально строго на всякий случай раскроет эту тему.

#### О применении двойственности в геометрии

там вроде переход к кокасательному пространству за счет неё делается.
но я так-то хз, потом пропишу.

### B.1.2 Полилинейные формы

#### Определение полилинейных форм

#### Градуированная алгебра полилинейных функций

(? и что)

Множество полилинейных функций на векторном пространстве $\mathcal{V}$ образует градуированную алгебру

$$\mathbf{T}_{\star}(\mathcal{V}) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} \mathbf{T}_q(\mathcal{V})$$

относительно операции тензорного произведения форм:

$$(\alpha \otimes \beta)(v_1, \ldots, v_{q+m}) = \alpha(v_1, \ldots, v_q)\, \beta(v_{q+1}, \ldots, v_{q+m}), \alpha \in \mathbf{T}_q(\mathcal{V}), \beta \in \mathbf{T}_m(\mathcal{V})$$

Здесь через $\mathbf{T}_q(\mathcal{V})$ обозначено векторное пространство полилинейных форм степени $q$ на $\mathcal{V}$, а под прямой суммой векторных пространств понимается внешняя прямая сумма: внешней прямой суммой пространств $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_k$ называется векторное пространство $\mathcal{V}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{V}_k$, составленное из всех последовательностей $(x_1, \ldots, x_k)$, где $x_i \in \mathcal{V}_i$, с покомпонентными операциями сложения и умножения на вещественные числа. Более подробно, операции в $\mathcal{V}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{V}_k$ определяются следующим образом:

$$(x_1, \ldots, x_k) + (y_1, \ldots, y_k) = (x_1 + y_1, \ldots, x_k + y_k)$$
$$\lambda(x_1, \ldots, x_k) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_k)$$

### B.1.3 Билинейные формы

(пока взято у Володи)

### определение квадратичных форм

$$q(\mathbf{x}) = \beta(\mathbf{x}, \mathbf{x})$$

$$q(\mathbf{x}) = \beta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$$

### сопоставление квадратичной форме билинейной

Над полем $\mathbb{R}^n$ однозначно квадратичная форма восстанавливается по билинейной. Дальнейшие детали не важны (??? да??), но их обсуждение можно найти в записи по линейной алгебре.

$$q(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \beta(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) = q(\mathbf{x}) + q(\mathbf{y}) + 2\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

$$\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}[q(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - q(\mathbf{x}) - q(\mathbf{y})]$$

### О использовании квадратичных форм в диффгеме

я пока не уверен, где они нужны?
метрика?

### Положительно определенные квадратичные формы

потом разберусь, зачем онинужны.

## B.1.4 Тензорная алгебра

### Определене тензора

$$\alpha : \underbrace{\mathcal{V} \times \ldots \times \mathcal{V}}_{q \text{ штук}} \times \underbrace{\mathcal{V}^* \times \ldots \times \mathcal{V}^*}_{p \text{ штук}} \to \mathbb{C}$$

где в частных случаях может быть не $\mathbb{C}$, а другое любое поле.

$$(\alpha_1 + \alpha_2)(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_q; f_1, \ldots, f_p) = \alpha_1(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_q; f_1, \ldots, f_p) + \alpha_2(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_q; f_1, \ldots, f_p)$$
$$(\lambda\alpha)(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_q; f_1, \ldots, f_p) = \lambda\alpha(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_q; f_1, \ldots, f_p)$$

### свойства тензоров

#### тензорное произведение

**Определение B.1.** *Тензорное произведение это отображение из два тензоров в общем случае из разных пространств и в тензорное пространство их суммы,*

*то есть:*

$$\otimes : \mathbf{T}^p_q(\mathcal{V}) \times \mathbf{T}^r_m(\mathcal{V}) \to \mathbf{T}^{p+r}_{q+m}(\mathcal{V})$$

Можно записать тензорное произведене как:

$$\alpha \otimes \gamma \in \mathbf{T}^{p+r}_{q+m}(\mathcal{V})$$

или покомпонентно (?)

$$(\alpha \otimes \gamma)(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{q+m}; f_1, \ldots, f_{p+r}) = \alpha(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_q; f_1, \ldots, f_p)\, \gamma(\mathbf{x}_{q+1}, \ldots, \mathbf{x}_{q+m}; f_{p+1}, \ldots, f_{p+r})$$

**ассоциативность тензорного произведения** Посмотрим на свойства.
Имеется ассоциативность

$$(\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma = \alpha \otimes (\beta \otimes \gamma)$$

действительно
....
также

$$(\alpha \otimes \beta)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \alpha(\mathbf{v})\beta(\mathbf{w}) = \alpha(\mathbf{e}_1)\,\beta(\mathbf{e}_2) = 1$$
$$(\beta \otimes \alpha)(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v})\alpha(\mathbf{w}) = \beta(\mathbf{e}_1)\,\alpha(\mathbf{e}_2) = 0$$

**обоснование существования базиса (!!!???)** Оказывается, что конструкция ниже - базис.

$$\left\{\mathbf{e}_{\mu_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{\mu_p} \otimes \mathfrak{h}^{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{h}^{\nu_q} : 1 \leq \mu_k, \nu_\ell \leq n\right\}$$

дальше важное большое доказательство
(надеюсь, у Володи оно верное)

$$\mathbf{e}_{\mu_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{\mu_p} \otimes \mathfrak{h}^{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{h}^{\nu_q}\left(f_1, \ldots, f_p; \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_q\right) = f_1\left(\mathbf{e}_{\mu_1}\right) \ldots f_p\left(\mathbf{e}_{\mu_p}\right) \mathbf{h}^{\nu_1}\left(\mathbf{x}_1\right) \ldots \mathbf{h}^{\nu_q}\left(\mathbf{x}_q\right)$$

$$\mathbf{e}_{\mu_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{\mu_p} \otimes \mathfrak{h}^{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{h}^{\nu_q}\left(\mathbf{h}^{\alpha_1}, \ldots, \mathfrak{h}^{\alpha_p}; \mathbf{e}_{\beta_1}, \ldots, \mathbf{e}_{\beta_q}\right) = \delta^{\alpha_1}_{\mu_1} \ldots \delta^{\alpha_p}_{\mu_p} \cdot \delta^{\nu_1}_{\beta_1} \ldots \delta^{\nu_q}_{\beta_q}$$

$$\mathcal{A} := a^{\mu_1 \ldots \mu_p}{}_{,\nu_1 \ldots \nu_q}\, \mathbf{e}_{\mu_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{\mu_p} \otimes \mathfrak{h}^{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{h}^{\nu_q}$$

$$t = \tau^{\mu_1 \ldots \mu_p} \mathbf{e}_{\mu_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{\mu_p} \otimes \mathfrak{h}^{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{h}^{\nu_q}$$

значит, базис
теперь про размерности подумаем...

**преобразование тензора** Обсудим преобразование тензора.
Преобразуется по формуле:

$$\tau'^{\mu_1 \ldots \mu_\nu}_{\nu_1 \ldots \nu_q} = \mathcal{A}^{\beta_1}_{\nu_1} \ldots \mathcal{A}^{\beta_q}_{\nu_q} \left(\mathcal{A}^{-1}\right)^{\mu_1}_{\alpha_1} \ldots \left(\mathcal{A}^{-1}\right)^{\mu_p}_{\alpha_p} \tau^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q}$$

**доказательство корректности тензорного произведения**

**примеры тензорных произведений в дифференциальной геометрии**

**свертка тензоров - обзор** Рассмотрим тензор $\tau \in \mathbf{T}^p_q(\mathcal{V})$
базис можно записать

$$\mathbf{e}_{\mu_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{\mu_p} \otimes \mathfrak{h}^{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{h}^{\nu_q}$$

Свертка определяется как

$$\operatorname{tr}^{\mu_k}_{\nu_\ell} \tau \in \mathbf{T}^{p-1}_{q-1}(\mathcal{V})$$

$$\operatorname{tr}^{\mu_k}_{\nu_\ell} \tau = \tau^{\mu_1 \ldots \mu_{k-1} \lambda \mu_{k+1} \ldots \mu_p} \nu_{1 \cdots \nu_{\ell-1} \lambda \nu_{\ell+1} \ldots \nu_q}$$

$$\operatorname{tr}^{\mu}_{\nu} \tau' = \tau'^{\mu}_{\mu} = \mathcal{A}^{\beta}_{\mu} \left(\mathcal{A}^{-1}\right)^{\mu}_{\alpha} \tau^{\alpha}_{\beta} = \delta^{\beta}_{\alpha} \tau^{\alpha}_{\beta} = \tau^{\alpha}_{\alpha}$$

### B.1.5 О градуированных алгебрах

Часто встречается понятие градуировки.

#### градуированное кольцо

почему дифференцирование градуированного кольца является градуированным пространством?

## B.2 супералгебра

(??)

## B.3 Элементы топологии

тоже часто топология нужна, так что её тут приведем.

### B.3.1 Основы топологии

(тут все типичные вещи будут)

## B.4 Элементы математического анализа

Обсудим классические конструкции анализа, которые нужны в геометрии.

### B.4.1 Теорема об обратном отображении

хз, где-то идейно её можно мб использовать.

#### Суть её

#### Применения в геометрии

хз, я пока ни матан, ни диффгем не прошел.

### B.4.2 разные операторы???

Инвариантные относительно диффеоморфизмов операции и дифференциальные операторы.

## B.5 Другие математические конструкции

### B.5.1 Элементы теории категорий

(что будет нужно - то буду собирать тут)

**О применениях теории категорий в геометрии** (абсолютно хз, нужно ли это или нет)

**Функтор**

**Ковариантный функтор** см Володя.

**Функтор двойственного сопряжения** хз

# Bibliography

[1] Иванов, А. О., Тужилин А. А.: *Лекции по классической дифференциальной геометрии ч 1.* Новая университетская библиотека, 2009.

[2] Tu, Loring W: *Manifolds.* In *An Introduction to Manifolds*. Springer, 2011.

[3] О., Катанаев М.: *Геометрические методы в математической физике: E-print.* arXiv preprint arXiv:1311.0733, 2016.

[4] Мищенко, А. С., Фоменко А. Т.: *Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии.* Физматлит, 2004.

[5] Иванов, А. О., Тужилин А. А.: *Лекции по классической дифференциальной геометрии ч 2.* Новая университетская библиотека, 2009.

[6] Н., Карасёв Р.: *Отдельные темы математического анализа.*

[7] Craps, Ben, Roose, Frederik, Troost, Walter, and Proeyen, Antoine Van: *What is special kähler geometry?* Nuclear Physics B, 503(3):565–613, oct 1997. https://doi.org/10.1016%2Fs0550-3213%2897%2900408-2.

[8] И., Арнольд В.: *Математические методы классической механики.* Рипол Классик, 1979.

[9] Рослый: *Лекции по дифференциальной геометрии.*

[10] Nakahara, M.: *Geometry, topology and physics*. 2003. http://www.slac.stanford.edu/spires/find/hep/www?key=7208855.