Differential Equations

Yury Holubeu *

February 25, 2026

This note is not intended for distribution.

Differential equations and applications are discussed in detail. Links below show contents of solved problems, summary of special topics. I used the following literature.

Contents

Preface and main motivation **9**

I —— Typical Differential Equations in a Nutshell —— **10**

1 Solution of Typical Differential Equations **10**
1.1 Basic Types of Differential Equations . . . 10
1.1.1 Classification and Typical Methods for 1st- and 2nd-Order DE . . . 10
1.1.2 Less Typical Methods for 1st- and 2nd-Order DE . . . 18
1.1.3 Lin D Eq w const Coeff. and r.h.s. as Polynomial . . . 18
1.1.4 Lin D Eq w Variable Coeff . . . 18
1.1.5 Special Functions for D Eq: Typical Cases . . . 21
1.1.6 Systems of Lin D Eq w const Coeff . . . 21
1.1.7 Systems of Lin Eq w Variable Coeff . . . 22
1.2 Basic Useful Methods . . . 23
1.2.1 Green's Function Method for D Eq . . . 23
1.2.2 Laplace Method . . . 23
1.3 Key Mathematical Theorems . . . 25
1.3.1 Study of the Cauchy problem . . . 25
1.3.2 Normal Autonomous Systems of D Eq, Stability Theory . . . 28
1.4 Other, Typical Topics . . . 30
1.4.1 Partial D Eq of first order . . . 30
1.4.2 Boundary Problems . . . 30
1.4.3 Variational Calculus: Basics . . . 30
1.5 Special, Sometimes Useful Methods and Properties . . . 31
1.5.1 WKB Method, Iterations (?!) . . . 31
1.5.2 Averaging and Slow Evolution (!?) . . . 32
1.6 Numerical Methods for DE: Typical Examples . . . 34
1.7 Methods of Differential Eq in Typical Problems in Physics . . . 34

II Fundamentals of Differential Equations **35**

2 1 Basic concepts, definitions, types and methods by Diesperov **35**
2.1 1.1. Basic Terms and Definitions . . . 35
2.2 1.2. The simplest types of equations and methods for solving them . . . 38
2.2.1 1.2.1. Exact Differential Equations . . . 38
2.2.2 1.2.2. Differential equations with separating variables . . . 41
2.2.3 1.2.3. Homogeneous equations . . . 43
2.2.4 1.2.4. Linear equations of the first order . . . 45
2.2.5 1.2.5. Bernoulli equation . . . 46
2.2.6 1.2.6. Riccati equation . . . 47
2.2.7 1.2.7. Integrating factor. . . . 49
2.3 1.3. Methods for solving equations of the 1st order, unsolved with respect to the derivative 51
2.4 1.4. About one method of lowering the order of differential equations . . . 54

*https://yuriholubeu.github.io/, yuri.holubev@gmail.com

2.4.1 1.4.1. Higher-order differential equations . . . 54
2.4.2 1.4.2. Single-parameter transformation groups on the plane . . . 55
2.4.3 1.4.3. Invariance of the differential equation with respect to the one-parameter transformation group . . . 60
2.4.4 1.4.4. Some types of down-order equations . . . 61

3 2 Basic General Properties by Disperov 69
3.0.1 2.1. Basic Definitions and Preliminary Information for Normal Systems of Ordinary Differential Equations . . . 69
3.0.2 2.2. Theorem of existence and uniqueness of the solution of the Cauchy problem for a normal system of equation . . . 70
3.0.3 2.3. Area of Solution Existence . . . 74
3.0.4 2.4. Differential equations of the first order, unsolved with respect to the derivative 83
3.0.5 2.5. Dependence of solutions on initial data and parameters . . . 89
3.0.6 2.6. The nth order equations resolved with respect to the senior derivative. Cauchy's problem, the theorem of existence and uniqueness of its solution . . . 95

4 3 Linear differential equations with variable coefficients by Diesperov 96
4.1 3.1. Normal systems of linear differential equations . . . 96
4.1.1 3.1.1. Basic definitions, the Cauchy problem, the theorem of existence and uniqueness of the solution of the Cauchy problem . . . 96
4.1.2 3.1.2. Existence of a fundamental system of solutions for a linear homogeneous system of differential equations . . . 99
4.1.3 3.1.3. Liouville-Ostrogradsky formula . . . 100
4.1.4 3.1.4. Structure of solutions of a linear homogeneous system of differential equations 101
4.1.5 3.1.5. Solving the Cauchy problem for a linear system of differential equations by the method of variation of constants . . . 102
4.2 3.2. Linear equations of nth order with variable coefficients . . . 103
4.2.1 3.2.1. Theorem of existence and uniqueness of the solution of the Cauchy problem 103
4.2.2 3.2.2. Vronsky determinant. Liouville-Ostrogradsky formula. Fundamental solution system . . . 104
4.2.3 3.2.3. Structure of solutions of linear equations of the nth order . . . 105
4.2.4 3.2.4. The method of variation of constants for a linear inhomogeneous equation 106
4.3 3.3. Linear homogeneous equations of the second order with variable coefficients . . . 106
4.3.1 3.3.1. Preliminaries . . . 106
4.3.2 3.3.2. Sturm Comparison Theorem . . . 107
4.3.3 3.3.3. Consequences arising from Sturm's comparison theorem . . . 108
4.3.4 3.3.4. Sturm's theorem on the separation of zeros . . . 109
4.3.5 3.3.5. Examples of using the Sturm theorem . . . 110
4.3.6 3.3.6. Knezer criterion . . . 112
4.4 3.4. The Bessel equation and some properties of its solutions . . . 112

5 4 Linear DEs and linear systems of DEs with constant real coefficients by Diesperov 116
5.1 4.1. Linear differential equations with constant real coefficients . . . 116
5.1.1 4.1.1. Linear homogeneous equations . . . 116
5.1.2 4.1.2. Linear inhomogeneous equations (LHE) with a quasi-multimember on the right side . . . 120
5.2 4.2. Linear systems of differential equations . . . 122
5.2.1 4.2.1. Systems of linear homogeneous equations with constant real coefficients . 122
5.2.2 4.2.2. Linear inhomogeneous systems with a quasi-multimember on the right side 128
5.2.3 4.2.3. Example of solving a linear inhomogeneous system . . . 130
5.3 4.3. Exhibitor matrix . . . 131

6 5 Boundary problems for 2-order LDE with constants and a small parameter by Diesperov **139**
6.0.1 5.1. Boundary value problems for a second-order linear differential equation with constant real coefficients . . . 139
6.0.2 5.2. Edge problem of the first kind in the presence of a small parameter before the higher derivative . . . 140
6.0.3 5.3. Example of solving a boundary value problem of the first kind . . . 142

7 6 Laplace transform by Diesperov **144**
7.0.1 6.1. Basic definitions and theorems . . . 144
7.0.2 6.2. The simplest properties of the Laplace transform . . . 145
7.0.3 6.3. Calculation of the Laplace transform if $f(t)$ is a quasimultinomial . . . 146
7.0.4 6.4. Application of the Laplace transformation . . . 147

8 7 Elements of variation calculus by Diesperov **148**
8.1 7.1. Introduction and basic definitions . . . 148
8.2 7.2. The simplest problem of the calculus of variations . . . 149
8.3 7.3. Some generalizations of the simplest problem . . . 153
8.3.1 7.3.1. Functionals containing a vector function . . . 153
8.3.2 7.3.2. Functionals dependent on higher-order derivatives . . . 155
8.3.3 7.3.3. The problem with loose boundaries. . . . 157
8.4 7.4. Conditional extremum. . . . 158
8.4.1 7.4.1. Isoperimetric problem. . . . 158
8.4.2 7.4.2. Lagrange problem . . . 160
8.5 Examples of variation calculus in physics . . . 163

9 8 Autonomous Systems by Diesperov **163**
9.0.1 8.1. Basic Terms and Definitions . . . 163
9.0.2 8.2. Properties of Autonomous Systems Solutions and Theorem on the Behavior of Phase Trajectories . . . 163
9.0.3 8.3. Phase portrait of solutions of an autonomous linear system with real coefficients on the plane . . . 166
9.0.4 8.4. Behavior of phase trajectories in the vicinity of the equilibrium position of a nonlinear autonomous system on the plane . . . 172

10 9 Stability of solutions of ordinary differential equations by Diesperov **174**
10.0.1 9.1. Basic Terms and Definitions . . . 174
10.0.2 9.2. Sufficient conditions for the stability of solutions for a linear system of equations with constant real coefficients . . . 175
10.0.3 9.3. First approximation stability . . . 178
10.0.4 9.4. Gronwall lemma . . . 180

11 10 First integrals of normal systems of ordinary differential equations by Diesperov **181**
11.0.1 10.1. The first integrals of autonomous systems and the criterion of the first integral . . . 181
11.0.2 10.2. The theorem on the number of independent first integrals . . . 182
11.0.3 10.3. Reduction of autonomous systems with the first integrators . . . 184
11.0.4 10.4. The first integrals of arbitrary normal systems of equations . . . 185

12 11 Linear homogeneous partial DE of the first order by Diesperov **186**
12.0.1 11.1. Basic Terms and Definitions . . . 186
12.0.2 11.2. Characteristics and integral surfaces of a linear partial differential equation of the first order . . . 187

12.0.3 11.3. Cauchy problem for a linear partial differential equation of the first order and the theorem of existence and uniqueness of its solution . . . 187
12.0.4 11.4. Example of a solution of the Cauchy problem for a linear partial differential equation of the first order . . . 190

13 Romanko's Course **191**
13.1 Methods for solving some differential equations . . . 194
13.1.1 § 1. Basic concepts for first-order differential equations . . . 194
13.1.2 § 2. Methods for solving the simplest differential equations of the first order . . . 199
13.1.3 § 3. First-order equations not resolved with respect to the derivative. Parameter input method and Cauchy problem . . . 213
13.1.4 § 4. Higher-order differential equations. General concepts and methods of solution 218
13.2 Linear differential equations of order n with constant coefficients . . . 227
13.2.1 § 1. Differential polynomials and general method for solving linear equations with constant coefficients . . . 227
13.2.2 § 2. Linear homogeneous equations of order n with constant coefficients . . . 232
13.2.3 § 3. Linear inhomogeneous equations of order n with constant coefficients . . . 240
13.3 Methods for solving systems of linear differential equations with constant coefficients . 246
13.3.1 § 1. Normal linear systems with constant coefficients. General concepts and exclusion method . . . 246
13.3.2 § 2. General solution of a normal linear homogeneous system with constant coefficients . . . 249
13.3.3 § 3. General solution of a normal linear inhomogeneous system with constant coefficients . . . 259
13.3.4 § 4. Solving normal linear systems with constant coefficients using the matrix exponent . . . 264
13.3.5 § 5. Laplace transform and its application to solving differential equations . . . 272
13.3.6 § 6. Methods for solving arbitrary linear systems with constant coefficients . . . 276
13.4 Study of the Cauchy problem . . . 280
13.4.1 § 1-1. Auxiliary statements . . . 280
13.4.2 § 1-2. Lipschitz Condition . . . 281
13.4.3 § 1-3. Grönwall's Inequality . . . 283
13.4.4 § 2. Existence and uniqueness of the solution of the Cauchy problem for the normal system of differential equations . . . 284
13.4.5 § 3. Unextended solution of the Cauchy problem . . . 292
13.4.6 § 4. General solution of the differential equation . . . 296
13.4.7 § 5-1. Dependence of the solution of the Cauchy problem on the parameters and initial data. . . . 298
13.4.8 § 5-2. Dependence of the solution of the Cauchy problem on the initial data . 303
13.4.9 5-3 Correctness of the Cauchy problem . . . 305
13.4.10 § 6. Solvability of the Cauchy problem for a first-order differential equation that is not solved with respect to the derivative. Special solutions . . . 307
13.5 Normal linear systems of differential equations with variable coefficients . . . 312
13.5.1 § 1. Investigation of the Cauchy problem for a normal linear system of equations with variable coefficients . . . 312
13.5.2 § 2. Linear homogeneous systems . . . 317
13.5.3 § 3. Linear inhomogeneous systems . . . 325
13.6 Linear differential equations of order n with variable coefficients . . . 329
13.6.1 § 1. General Properties . . . 329
13.6.2 § 2. Linear homogeneous equations of order n . . . 331
13.6.3 § 3. Linear inhomogeneous equations of order n . . . 336
13.6.4 § 4. Boundary value problems . . . 342
13.6.5 § 5. Sturm's theorem . . . 348
13.6.6 § 6. Solving Linear Differential Equations with Power Series - Bessel's Equation 354

13.6.7 § 7. Linear differential equations with a small parameter at a higher derivative 359
13.7 Normal Autonomous Systems of Differential Equations and Stability Theory 365
13.7.1 § 1. General Properties 365
13.7.2 § 2. Classification of equilibrium positions of a linear homogeneous system of the second order 374
13.7.3 § 3. Second-order nonlinear autonomous systems 380
13.7.4 § 4. Lyapunov stability of equilibrium positions 390
13.7.5 § 5. First integrals 399
13.8 Partial differential equations of first order 407
13.8.1 § 1. Linear homogeneous equations 409
13.8.2 § 2. Quasilinear Equations 416
13.8.3 § 3. Nonlinear Equations 424
13.9 Basics of variation calculus 430
13.9.1 § 1. The simplest variational problem 432
13.9.2 § 2. Generalizations of the simplest variational problem for the case of functionals of a more general integral type 440
13.9.3 § 3. Variational problems with a free end, with a movable boundary and the Boltz problem 448
13.9.4 § 4. On the strong local extremum and the absolute extremum of the functionals 455
13.9.5 § 5 Isoperimetric problem. 458
13.9.6 § 6. The Lagrange Problem 461
13.9.7 § 7. Sufficient conditions of weak local extremum 465

III Problems 473

14 Typical differential equations 473
14.1 1. First-order equations. 473
14.1.1 Problems about Linear Equations with Constant Coefficients 473
14.1.2 Problems about equations with separating variables and homogeneous equations 474
14.1.3 Problems about variable substitution method 476
14.1.4 Problems about the simplest Bernoulli and Riccati equations 479
14.1.5 Problems about first-order equations not solved with respect to the derivative, special solutions 486
14.1.6 Problems Exact Differential Equations 489
14.1.7 Problems about researching the Cauchy problem (?!) 493
14.2 Higher-order equations 499
14.2.1 Problems about the main types of equations that allow lowering the order . . . 499
14.2.2 Problems about homogeneous and homogeneous in the generalized sense of the equation 503
14.2.3 Problems solved by different methods 506
14.2.4 Problems about linear equations with constant coefficients 508
14.2.5 Problems about the method of variation of constants 519
14.2.6 Problems about the operating method (?!!!) 520
14.2.7 Problems about Euler's equation 521
14.2.8 Problems about arbitrary method for Cauchy problem 522
14.2.9 Problems about second-order linear equations with variable coefficients 524
14.3 Tasks for systems of equations 531
14.3.1 Problems about linear systems with constant coefficients 531
14.3.2 Problems about matrix exponent 539
14.3.3 Problems about inhomogeneous systems of equations 541
14.3.4 Problems about the system of equations by the method of variation of constants 543
14.3.5 Problems about the system of equations by the operator method 545
14.3.6 Problems about the system of diffusers by an arbitrary method 546

14.3.7 Problems about linear systems of equations with variable coefficients 549

15 Other types and tasks **554**
15.1 Other challenges 554
15.1.1 Problems about Sturm's theorem 554
15.1.2 Boundary value problems 555
15.1.3 Problems about Green's function $G(x, \zeta)$ of the boundary value problem (!!!!!) . 558
15.2 Tasks for special methods (!?!?) 559
15.2.1 Problems about the iteration method 559
15.2.2 Problems about the averaging method 560
15.2.3 Problems about geometric methods (???) 560
15.3 Tasks for autonomous systems of differential equations 560
15.3.1 Problems about the behavior of phase trajectories near gross equilibrium positions 560
15.3.2 Problems about the behavior of phase trajectories near noncoarse equilibrium positions and on the entire phase plane 566
15.3.3 Problems about the stability of equilibrium positions 570
15.3.4 Problems about the first integrals 574
15.4 Problems of partial differential equations of the first order 578
15.4.1 Problems about Linear Homogeneous Equations 578
15.4.2 Problems about Quasilinear and Nonlinear Equations 585
15.5 Variational Calculus Tasks 589
15.5.1 Problems about the simplest variations 589
15.5.2 Problems about the generalization of the simplest variational problem 597
15.5.3 Problems about functions from two variables 599
15.5.4 Problems about second-order derivative functionals 601
15.5.5 Isoperimetric problems (?) 602
15.5.6 Problems about Sufficient conditions of a strict weak local extremum in the simplest variational problem 604
15.6 Curve and trajectory problems 605
15.6.1 Orthogonal Trajectory Problems 605
15.6.2 Tasks on the approximate image of integral curves 607
15.6.3 Problems about applications in ecology 607

IV —— Special Differential Equations in a Nutshell —— **608**

16 About another about Differential Equations **608**
16.1 Other methods 608
16.1.1 phase trajectories and phase plane 608
16.1.2 matrix exponent 609
16.1.3 method of characteristics 609
16.2 Other typical diffuser-related tasks 609
16.2.1 On Equations in Differentials 609
16.2.2 boundary value tasks 610
16.2.3 systems of linear diffusers with constant coefficients 610
16.2.4 systems of linear diffusers with variable coefficients 610
16.2.5 Behavior of phase trajectories in the vicinity of noncoarse equilibrium positions and on the entire phase plane 610
16.2.6 first integrals 611
16.2.7 Autonomous Systems 611
16.2.8 simplest problems in partial derivatives 611
16.3 Variations: Special Methods 611
16.3.1 Typical Methods (!!!) 611
16.3.2 Other variation methods (??) 611

16.4 Approximation methods . . . 611
16.5 Stability theory . . . 611
16.5.1 Stability theory: Basics . . . 612
16.6 Methods of diffusers in other questions of physics . . . 613

V Other Topics 614

17 Oscillation Theory: Some Models and Methods 614
17.1 Theory of Stability: Selected Topics . . . 614
17.1.1 Theory of Stability according to Ivanov A.P. MIPT (?) . . . 614

18 Numerical Methods 619
18.0.1 Basic numerical methods of solution . . . 619
18.0.2 Software implementation . . . 619
18.0.3 Network Visualization and Modeling . . . 619
18.0.4 visualization of trajectories . . . 619
18.0.5 visualization of attractors and chaotic equations . . . 620
18.0.6 wolfram simulation . . . 620

19 Other Analytical Methods 620
19.1 Perturbation Theory for Differential Equations . . . 620
19.1.1 Typical Perturbation Theory . . . 620
19.1.2 Solution near the singular point of the basic equation . . . 622
19.1.3 Boundary layer . . . 623
19.2 Other Methods of Solving Equations . . . 625
19.2.1 Solutions Using Infinite Series (!?!??!) . . . 625
19.3 Integrable Systems: Introduction . . . 625
19.4 Stochastic Differential Equations: Introduction . . . 626
19.5 Averaging Method (?!) . . . 626
19.5.1 Typical method . . . 626
19.5.2 Averaged equations for wave motion . . . 630
19.5.3 Other about the averaging method . . . 631
19.5.4 Introduction to Exotic Methods of Avergaings . . . 631
19.6 Dynamical Systems (???) . . . 631
19.7 Geometrical Methods for DE (???) . . . 631
19.8 Exotic Differential Equations . . . 632
19.8.1 Chaotic Trajectories . . . 632
19.8.2 Delayed differential equations . . . 632
19.9 Calculus of Variations: Basic Methods . . . 633
19.10 Calculus of Variations: Special Methods . . . 634
19.11 Calculus of Variations: Special Methods for Applications in Physics . . . 634

20 Some Famous Equations (??) 634
20.1 Bernoulli equation . . . 634
20.1.1 Theory . . . 634
20.1.2 Attachments . . . 634
20.2 Riccati equation . . . 634
20.2.1 Theory . . . 634
20.2.2 Attachments . . . 634
20.3 Others . . . 634
20.3.1 Airy equation . . . 634

21 Applications and Preparation to Applications **634**
21.1 Creation of models of DE from Physical Ideas . . . 635
21.2 Applications in mathematics and other sciences . . . 635
21.3 Applications in Physics . . . 635
21.3.1 In mechanics . . . 635
21.3.2 In quantum mechanics . . . 635
21.3.3 On Applications in Other Physics . . . 635
21.4 Life Applications . . . 635
21.4.1 Economic applications . . . 635
21.4.2 Environmental Applications (?) . . . 635

VI Appendix **636**

A Introduction and Overview **636**
A.1 Extra Motivation . . . 636
A.2 The Mindset of Professionals . . . 637
A.2.1 Solving Effectively DE . . . 637
A.2.2 Attitude to the DE (!?) . . . 637
A.2.3 Ways to Guess Some Key Ideas . . . 638
A.3 Acknowledgements . . . 638
A.4 Literature . . . 638
A.4.1 Main Literature . . . 638
A.4.2 Extra Literature . . . 639
A.4.3 History of DE in a Nutshell . . . 640
A.4.4 Features of This Note . . . 640
A.5 Puzzles for Different Situations . . . 641
A.5.1 Puzzles for Interesting Discussion . . . 641
A.5.2 Selected Fun Typical Problems . . . 641

B Bibliography **642**

Preface and main motivation

(потом напишу)

Головоломки диффуров для мотивации

Part I
Typical Differential Equations in a Nutshell

1 Solution of Typical Differential Equations

(!!!!! очень много тренироваться нужно в этих методах, пока все плохо прописано.)

1.1 Basic Types of Differential Equations

1.1.1 Classification and Typical Methods for 1st- and 2nd-Order DE

В первую очередь для решения дифференциального уравнения следут определить его тип.

Типичная классификация диффуров

Сперва замечаем порядок производной. Далее однородные / неоднородные - определяем по наличию правой части.

Классификация типичных уравнений 1-го порядка

Если оно легко преобразуется к виду $X(x)dx = Y(y)dy.$, то оно - с разделяющимися переменными.

Если нет, смотрим (? или далее смотрим...) однородность $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$.

Оно может быть однородным после какой-то замены, например $y = z^m$!!!! Внимательно подставляем и подбираем m!!!

Далее, оно может быть линейным, если первые степени x', x, а кроме них ничего нет:

$$x' + p(y)x = q(y)$$

Далее проверяем, можно ли перейти в уравнении к наоборот функции и получить линейное по y:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Если так - все, больше не роемся, понят но всё.

Переносим все оставшееся в правую часть, если есть степень, у x в ней равна 2, то следует посмотреть, не уравнение ли это типа

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t)x^2 + f(t),$$

если да, то это уравнение Риккати.

Степень в правой части любая дробная или целая >0 или <0 (разве что кроме тривиальных $n = 0, 1$), - это уравнение Бернулли:

$$x' + p(t)x = q(t)x^n,$$

Это можно не увидеть, если $n < 0$ или дробная. Такие часто встречаются, где $n = 3, 4, 5$, они кажутся сложными, но есть четкие инструкции, как их решать.

Если так ничего не получилось, то можно удачными заменами прийти к этим же типам!

Если предлагаются замены, то кропотливо каждую замену проверяем! Иногда несколько замен дают хорошие сдвиги! Тут самое важное - аккуратно смотреть.

Классификация типичных уравнений в дифференциалах

(?? пока про последовательность анализа хз, но это не так важно.)

Если у нас уравнение в дифференциалах $X(x,y)dx + Y(x,y)dy = 0$, то сразу: разделяются ли переменные, то есть выполняется ли $X(x,y) = X(x), Y(x,y) = Y(y)$? если да - с разделяющимися переменными.

Если нет, смотрим проверяем однородность $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$. Тут важно не забыть, что подставляем также и в дифференциалы.

Может быть, можно привести к однородному, поискав степень m, при которой $y = z^m$, так что неоднородность сократиться? Часто m дробная. Находим, подставляем и проверяем.

Если нет, смотрим "накрест" производные $\frac{\partial P(x,y)d}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q(x,y)d}{\partial x}$, если они равны - оно в полных дифференциалах.

Если нет - делим на один или второй дифференциал, переходим к диффуру 1-го порядка, классифицируем по разделу выше, получать там линейное по одному или второму аргументу, Бернулли, Риккати, т.п.

Если не помогло - гуглим, я не дописал ещё этот раздел.

Классификация нетипичных уравнений 1-го порядка

Если все в левой части и все странное - неразрешенные относительно производной.

(тут мб дальше добавлю, тут Лагранжа, Клеро, еще кого-то, пока не нужно было.)

О решении диффуров 1-го порядка

Способы решения простейших уравнений

В самых простых случаях просто разделяем переменные и интегрируем.

Часто приходится для интегрирования разделить дробь на несколько дробей.

Важно, прежде чем разделить на функции, нужно проверить, не являются ли равные нулю функции решениями!

Привод к ответу может не всегда быть простым.

Способы решения линейные уравнения

1) линейные уравнения $a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t)$ решаются приходом к однородному (обнулению $c(t)$), далее варьируем постоянную.

Способы решения однородное уравнение одинаковых степеней

- уравнение, где в каждом слагаемом степень суммарно одинаковая. Тогда подстановка $y(x) = xz(x)$

(пока что для меня удивительно, что такое работает, но просто пользуюсь, потом пойму, почему именно такой ход работает.)

Способы решения линейного неоднородно уравнения $y' + a(x)y = f(x)$

решается с помощью ответа соответствующего линейного однородного уравнения, и далее метода вариации постоянной.

Способы решения уравнения Бернулли $y' + a(x)y = b(x)y^m$

Тут самое главное увидеть это уравнение!!! Так что всегда мы внимательные по поводу степеней y!!! Если Бернулли - сразу решаем по алгоритму.

Заменой $z = y^{1-m}$ уравнение Бернулли приводится к линейному неоднородному уравнению.

Способы решения Уравнение Риккати $\frac{dx}{dt} = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$

решается угадыванием частного решения $x_1(t)$, и подстановкой $x(t) = x_1(t) + z(t)$. Таким способом приходим к уравнению Бернулли.

О решении диффуров методом понижения порядка

Во всех простых примерах мы стараемся понизить порядок, потому что так будет решаться наиболее просто.

Важно именно так и делать, а не идти к более общим методами, потому что скорость решения будет раза в 4 больше!

Понижение порядка преобразованием к полной производной (???)

Например, если сумма двух функций, то может быть, это раскрытая по правилу Лейбница производная от одной?

Это бы сэкономило пару минут решений.

(посмотрю эти задачи лучше потом!!! тут гениальные ходы)

Если нет y, то понижаем введением $p(y) = y'$ (???)

То есть уравнение имеет вид: производные от y, а также функции от x.

В случае, когда уравнение не содержит y, порядок уравнения понижается, если сделать замену, взяв за новую неизвестную функцию y', а если её нет, то производную наименьшего порядка, входящую в уравнение.

Если нет x, то понижаем введением $p(y) = y'$

Когда уравнение не содержит x, порядок уравнения понижается, если за новую независимую переменную взять y и вводим $p(y) = y'$. При этом

$$y' = p \quad y'' = \frac{p \cdot dp}{dy}$$

Тут важно сразу это сообразить и применить этот метод!

Понижение порядка, используя начальные условия, если они есть (??)

(тоже есть задачи про это.)

(пока хз, как это)

Линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами это:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)}(t) = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t)$$

здесь $y = y(t)$ - искомая функция, $y^{(k)} = y^{(k)}(t)$ - её k-я производная, $a_0, a_1, a_2, ...a_n$ - фиксированные числа, $f(t)$ - заданная функция.

Уравнение

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

интегрируется следующим образом: Пусть $\lambda_1, ..., \lambda_k$ - все различные корни характеристического многочлена

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

кратностей $m_1, m_2, ..., m_k$, соответственно, $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$. Тогда функции

$$t^\nu e^{\lambda_j t}, \quad 1 \le j \le k, \quad 0 \le \nu \le m_j - 1$$

являются линейно независимыми (вообще говоря, комплексными) решениями однородного уравнения, они образуют фундаментальную систему решений. Общее решение уравнения является линейной комбинацией с произвольными постоянными (вообще говоря, комплексными) коэффициентами фундаментальной системы решений.

Паре комплексно сопряженных корней $\lambda_j = \alpha_j \pm i\beta_j, 1 \le j \le k$ соответствуют пары вещественных функций вида $t^\nu e^{\alpha_j t} \cos(\beta_j t)$ и $t^\nu e^{\alpha_j t} \sin(\beta_j t)$, $j \in \overline{1...k}, 0 \le \nu \le m_j - 1$ и построить общее решение уравнения в виде линейной комбинации с произвольными вещественными постоянными коэффициентами.

Однородное уравнение 2-го порядка:

(частный случай)

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

интегрируется следующим образом: Пусть λ_1, λ_2 - корни характеристического уравнения

$$a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0,$$

являющегося квадратным уравнением. Вид общего решения однородного уравнения зависит от значения дискриминанта $\Delta = a_1^2 - 4a_2 a_0$: - при $\Delta > 0$ уравнение имеет два различных вещественных корня

$$\lambda_{1,2} = \alpha_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2a_2}.$$

общее решение имеет вид:

$$y(t) = c_1 e^{\alpha_1 t} + c_2 e^{\alpha_2 t}$$

- при $\Delta = 0$ - два совпадающих вещественных корня

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha = \frac{-a_1}{2a_2}.$$

Общее решение имеет вид:

$$y(t) = c_1 e^{\alpha t} + c_2 t e^{\alpha t}$$

- при $\Delta < 0$ существуют два комплексно сопряженных корня

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta = \frac{-a_1}{2a_2} \pm i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a_2}.$$

Общее решение имеет вид:

$$y(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

Общие методы решения уравнений высшего прядка

Если так просто порядок не понижается, то пользуемся этими более общими методами.

Переход к характеристическим числами для уравнений с постоянными коэффициентами

Просто составляем хар уравнение, решаем, дальше ответ, подробнее напишу потом уже.

Если у нас неоднородное уравнение, то еще находим частное его решение.

Метод вариации постоянных для уравнения с постоянными коэффициентами

(напишу эту матрицу, тоже так можно делать. вроде это то же, что и для переменных коэффициентов?)

Операционный метод для уравнения с постоянными коэффициентами (????)

(пока не понимаю, прокатит он или нет??? мб рил это не сложно?? пока не отработал.)

О решении диффуров 2-го порядка с переменными коэффициентами

0) может быть, можно сделать какую-то замену?!

Да, во-первых смотрим, не решается ли уравнение как-то просто.

Во-вторых пробуем какую-то замену сделать x или y, на функцию от какого-то параметра, потому что это может просто на порядок упросить уравнение.

(тут укажу, какие могут быть замены)

1) Перейти к однородному, подобрать одно его решение, а далее по формуле Лиувилля-Остроградского находим второе линейно независимое

(напишу тут формулу эту.)

$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$, где $(a_0(x), a_1(x), a_2(x))$ - непрерывные функции на некотором интервале (a,b).

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y'_{(x)} \end{vmatrix} = Ce^{-\int P(x)dx}, \text{ где}$$

$$P(x) = \frac{a_1(x)}{a_o(x)}, \text{ или}$$

$$y_1 y' - y_1' y = Ce^{-\int P(x)dx}$$

а это уже уравнение 1го порядка относительно y $\mathbf{x}$). Далее, деля левую и правую части на $\mathbf{y}_1{}^2(\mathbf{x})$, имеем

$$\left(\frac{y}{y_1}\right)' = Ce^{-\int P(x)dx}$$

2) Метод вариации постоянных (!!!!)

Составляем всё ту же систему уравнений на производные от варьированных постоянных.

$$\tilde{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

После правильно выбранного подбора алгоритм пойдёт по накатанной колее. Используем метод неопределенных коэффициентов. Кто не знаком - узнает. Найдём первую и вторую производную:

$$\tilde{y}' = \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right)' = 3Ax^2 + 2Bx + C$$
$$\tilde{y}^{*\prime} = \left(3Ax^2 + 2Bx + C\right)' = 6Ax + 2B$$

Подставим $\tilde{y}$ и $\tilde{y}^{\mathrm{n}}$ в левую часть неоднородного уравнения:

$$\tilde{y}^n - 4\tilde{y} = 6Ax + 2B - 4\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right) \overset{(1)}{=}$$
$$= 6Ax + 2B - 4Ax^3 - 4Bx^2 - 4Cx - 4D \overset{(2)}{=} 8x^3$$

(1) Раскрываем скобки. (2) Ставим знак $=$ и приписываем правую часть исходного ДУ. Далее работаем с последним равенством - необходимо приравнять коэффициенты при соответствующих степенях и составить систему линейных уравнений. В картинках процесс выглядит так: $6Ax + 2B - 4Ax^3 - 4Bx^2 - 4Cx - 4D = 8x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0$

Станем искать решение уравнения

$$a_n(t)z^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)z^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)z'(t) + a_0(t)z(t) = f(t)$$

полагая, что для соответствующего ему однородного уравнения

$$a_n(t)z^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)z^{(n-1)}(t) + ... + a_1(t)z'(t) + a_0(t)z(t) = 0$$

известно решение, которое запишем как

$$z(t) = c_1z_1(t) + c_2z_2(t) + ... + c_nz_n(t)$$

Метод состоит в замене произвольных постоянных c_k в общем решении на вспомогательные функции $c_k(t)$. Производная для $z = c_1(t)z_1 + c_2(t)z_2 + ... + c_n(t)z_n$ запишется

$$z' = c_1'z_1 + ... + c_n'z_n + c_1z_1' + ... + c_nz_n'$$

Но мы потребуем дополнительно (ниже показано, что проблем это не вызовет), чтобы

$$c_1'z_1 + c_2'z_2 + ... + c_n'z_n = 0$$

Таким образом, $z' = c_1z_1' + ... + c_nz_n'$ Вводя схожие требования для c_k' при последовательном дифференцировании $z(t)$ до (n-1) порядка, получим

$$c_1'z^{(k-1)} + ... + c_n'z^{(k-1)} = 0 \Rightarrow z^{(k)} = c_1z_1^{(k)} + ... + c_nz_n^{(k)}$$

А для старшей производной, соответственно

$$z^{(n)} = c_1' z_1^{(n-1)} + ... + c_n' z_n^{(n-1)} + ... + c_1 z_n^{(n)} + ... + c_n z_n^{(n)}$$

После подстановки в исходное уравнение и сокращения в нём однородного решения (1), останется

$$a_n(t)\left[c_1'(t) z_1^{(n-1)}(t) + ... + c_n'(t) z_n^{(n-1)}(t)\right] = f(t)$$

В результате, приходим к

$$\begin{cases} z_1(t)c_1'(t) + z_2(t)c_2'(t) + ... + z_n(t)c_n'(t) = 0 \\ \vdots \\ z_1^{(n-2)}(t)c_1'(t) + z_2^{(n-2)}(t)c_2'(t) + ... + z_n^{(n-2)}(t)c_n'(t) = 0 \\ z_1^{(n-1)}(t)c_1'(t) + z_2^{(n-1)}(t)c_2'(t) + ... + z_n^{(n-1)}(t)c_n'(t) = f(t)/a_n(t) \end{cases}$$

Определителем системы (2) служит вронскиан функций $z_1, z_2, ..., z_n$, что обеспечивает её однозначную разрешимость относительно c_k'.

Примеры по вики

1) Уравнение, в частности возникающее в законе радиоактивного распада

$$\dot{x} + \gamma x = f(t)$$

Общее решение элементарно интегрируется:

$$x = c \cdot e^{-\gamma t}$$

Применим метод Лагранжа:

$$c' e^{-\gamma t} = f(t)$$

Откуда искомое решение

$$x = \int f(t) e^{\gamma t} dt \cdot e^{-\gamma t}$$

2) Уравнение гармонического осциллятора

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)$$

Решение однородного уравнения запишем в виде

$$x = a \sin \omega t + b \cos \omega t$$

Согласно системе (2) получаем:

$$\begin{cases} a' \sin \omega t + b' \cos \omega t = 0, \\ a' \cos \omega t - b' \sin \omega t = f(t)/\omega; \end{cases}$$

$$a' = \frac{-\frac{\cos \omega t}{\omega} f(t)}{-1} = \frac{\cos \omega t}{\omega} f(t)$$

$$b' = \frac{\frac{\sin \omega t}{\omega} f(t)}{-1} = -\frac{\sin \omega t}{\omega} f(t)$$

Восстановим решение:

$$x(t) = \left(\int dt \frac{\cos \omega t}{\omega} f(t)\right) \sin \omega t - \left(\int dt \frac{\sin \omega t}{\omega} f(t)\right) \cos \omega t$$

О решении диффуров однородного в обобщенном смысле

Пусть теперь уравнение является однородным в обобщенном смысле, т. е. существует такое число s, что уравнение не меняется при одновременной замене x на $\lambda x, y$ на $\lambda^s y, y^{(k)}$ на $\lambda^{s-k} y^{(k)}$, где $\lambda \neq 0, k = 1, 2, ..., n$. При $x > 0$ вводим новую независимую переменную t и новую неизвестную функцию $z(t)$ с помощью замены

$$x = e^t, \quad y = ze^{st}.$$

Тогда уравнение приводится к виду, в который не входит t. Следовательно, порядок уравнения понижается по правилу, изложенному в п. 1. При $x < 0$ полагаем $x = -e^t$.

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

Неоднородное уравнение интегрируется методом вариации произвольных постоянных (Метод Лагранжа).

общее решение уравнения задается формулой

$$y(t) = c_1 y_1(t) + ... + c_n y_n(t) + y_0(t),$$

где $c_1, ..., c_n$ - произвольные постоянные.

Как в общем случае линейных уравнений, имеет место принцип суперпозиции, используемый в разных формулировках принципа суперпозиции в физике. В случае, когда функция в правой части состоит из суммы двух функций

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t),$$

частное решение неоднородного уравнения тоже состоит из суммы двух функций

$$y_0(t) = y_{01}(t) + y_{02}(t),$$

где $y_{0j}(t), j \in \overline{1,2}$ являются решениями неоднородного уравнения с правыми частями $f_j(t), j \in \overline{1,2}$, соответственно. Частный случай: квазимногочлен В случае, когда $f(t)$ - квазимногочлен, то есть

$$f(t) = p(t)e^{\alpha t}\cos(\beta t) + q(t)e^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

где $p(t), q(t)$ - многочлены, частное решение уравнения ищется в виде

$$y_0(t) = \left(P(t)e^{\alpha t}\cos(\beta t) + Q(t)e^{\alpha t}\sin(\beta t)\right)t^s$$

где - $P(t), Q(t)$ многочлены, $\deg(P) = \deg(Q) = \mathrm{Max}(\deg(p), \deg(q))$, коэффициенты которых находятся подстановкой $y_0(t)$ в уравнение и вычисление методом неопределенных коэффициентов. - s является кратностью комплексного числа $w = \alpha + i\beta$ как корня характеристического уравнения однородного уравнения. В частности, когда

$$f(t) = p(t)e^{\alpha t}$$

где $p(t)$ - многочлен, частное решение уравнения ищется в виде

$$y_0(t) = P(t)e^{\alpha t}t^s$$

Здесь $P(t)$ - многочлен, $\deg(P) = \deg(p)$, с неопределенными коэффициентами, которые находятся подстановкой $y_0(t)$ в уравнение. s является кратностью α, как корня характеристического уравнения однородного уравнения. Когда же

$$f(t) = p(t)$$

где $p(t)$ - многочлен, частное решение уравнения ищется в виде

$$y_0(t) = P(t)t^s$$

Здесь $P(t)$ - многочлен, $\deg(P) = \deg(p)$, а s является кратностью нуля, как корня характеристического уравнения однородного уравнения.

Уравнение Эйлера (??)

Уравнение Эйлера $a_0x^2y'' + a_1xy' + a_2y = f(x), x > 0$, заменой $x = e^t$ сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами.

О других методах решения простейших задач и уравненй (?)

(это пока не особо применял)

Уравнение вида $(a_1x + b_1y + c_1)\,dx + (a_2x + b_2y + c_2)\,dy = 0$ в том случае, когда прямые $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ пересекаются, приводится к однородному уравнению с помощью переноса начала координат в точку пересечения прямых.

(??? мб пригодится потом, посмотрим.)

1.1.2 Less Typical Methods for 1st- and 2nd-Order DE

Метод введения параметра

(see Romanko)

1.1.3 Lin D Eq w const Coeff. and r.h.s. as Polynomial

1.1.4 Lin D Eq w Variable Coeff

§ 1. General Properties

§ 2. Linear homogeneous equations of order n

Пусть $y_0(x)-$ кахое-либо решение (1) $uy(x) = z(x) + y_0(x)$. Тогда $y(x)$ является решением уравнения (1) только в том случае, когда $z(x)$ - решение уровнения (2).

Фулкция

$$y_0(x) = \int_{x_0}^{x} K\left(x + x_0 - \zeta\right) f(\zeta) d\zeta, \quad x_0 < x \in [\alpha, \beta] \tag{6}$$

является частным решением линейного неоднородного уравнения (1), удовлетворяющим нулевым начальным условиям (3).

§ 3. Linear inhomogeneous equations of order n

§ 4. Boundary value problems

Если $\det U \neq 0$, то решение араничной задачи (1), (2) существует и единственно на $[0, l]$. Если же $\det U = 0$, то решение граничной задачи (1), (2) не существует, если ранг матрицы U не равен рангу расширенной матриць $\bar{U}$, и решение (1), (2) существует, по не единственно, если ранг матрицы U равен рангу матрицы $\tilde{U}$.

Отметим, что ранг матрицы U не зависит от выбора фундаментальной системы решений $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ уравнения (3), так как переход к другой фундаментальной системе

осуществляется невырожденным линейным преобразованием и при таком переходе матрица U умножается на матрицу этого линейного преобразования, что не меняет ранга матрицы U. Аналогичное замечание касается и ранга матрицы $\tilde{U}$.

Ранг матрицы U называется рангом граничной задачи (1), (2). Однородная граничная задача (1), (2), т.е. задача (1), (2) при $f(x) \equiv 0$, $y_0 = y_1 = 0$, имеет лишь тривиальное решение, если ранг матрицы U равен двум, и имеет одно линейно независимое решение, если ранг матрицы U равен единице.

Если однородная граничная задача имеет лишь тривиальное решение, то фуккция Грина граничной задачи (1), (2) существует и единственна.

Если однородная граничная задача имеет лишь тривиальное решение, то решение уравнения (1) при одюродных граничных условиях (2) существует, единственно и выражается формулой

$$y(x) = \int_0^l G(x,\zeta) \cdot f(\zeta) d\zeta \tag{5}$$

где $G(x,\zeta)$ - фупкция Грина граничной задачи (1), (2).

§ 5. Sturm's theorem

Пусть $q(x) \leq Q(x), \forall x \in \mathcal{I}$, и пусть $y(x)$ - какое-либо нетривиальное решение уравнения (3), а $z(x)$ - какое-либо нетривиальное решение уравнения (4). Если $x_1, x_2 \in \mathcal{I}$ последовательные нули $y(x)$, то найдется хотя бы одна точка $x_0 \in (x_1, x_2)$, в которой $z(x_0) = 0$, либо $z(x_1) = z(x_2) = 0$.

§ 6. Solving Linear Differential Eq with Power Series - Bessel's Equation

§ 7. Linear differential equations with a small parameter at a higher derivative

Wronskian, Liuoville-Ostrogradsky theorem

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = f(x),$$

где $x \in [\alpha, \beta], a_j(x), j = \overline{1,n}$, - заданные непрерывные функции на $[\alpha, \beta]$, называемые коэффициентами уравнения (1), и $f(x)$ - заданная непрерывная на $[\alpha, \beta]$ функция, называемая правой частью уравнения (1). При $f(x) \equiv 0$ на $[\alpha, \beta]$, уравнение - однородное, в противном случае - неоднородное. $a_j(x), j = \overline{1,n}, f(x)$ могут быть комплексными.

Функция $y = \varphi(x)$ называется решением уравнения (1) на $[\alpha, \beta]$, если $\varphi(x) n$ раз непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta]$ и обращает (1) в тождество на всем $[\alpha, \beta]$.

Лемма 1. Если $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ и $y_i(x)$ - решение уравнения (1) при $f(x) \equiv f_i(x)$ на $[\alpha, \beta], i = 1, 2$, то функция $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ является решением уравнения (1).

Теорема 1. Пусть все функции $a_j(x), j = \overline{1,n}$ и $f(x)$ - непрерывны на $[\alpha, \beta]$ и пусть $x_0 \in [\alpha, \beta]$. Тогда при произвольных начальных значениях $y_1^{(0)}, ..., y_n^{(0)}$ решение задачи Коши (1), (4) существует и единственно на всем $[\alpha, \beta]$.

Фундаментальная система решений Рассмотрим линейное однородное уравнение порядка n

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = 0,$$

где $a_j(x), j = \overline{1,n}$, заданные непрерывные функции на $[\alpha, \beta]$.

Рассмотрим линейную однородную систему, которая эквивалентна уравнению (1):

$$y'(x) = A(x)y(x),$$

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & ... & -a_1 \end{pmatrix}.$$

Определитель Вронского

Рассмотрим систему

$$y'(x) = A(x)y(x),$$

где $A(x)$ - заданная непрерывная на $[\alpha, \beta]$ комплекснозначная квадратная матрица порядка n.

Теорема 4. Пусть $y_j(x), j = \overline{1,k}$ - решения линейной однородной системы (8). Решения $y_j(x), j = \overline{1,k}$ - линейно независимы на $[\alpha, \beta]$ тогда и только тогда, когда $\forall x_0 \in [\alpha, \beta]$ числовые векторы $y_j(x_0), j = \overline{1,k}$ линейно независимы.

Определение 3. Определителем Вронского (или сокращенно вронскианом) системы $y_1(x), ..., y_n(x)$ называется определитель

$$W(x) \equiv W[y_1(x), ..., y_n(x)] = \det \|y_1(x)...y_n(x)\|.$$

Если $y_1(x), ..., y_n(x)$ - решения линейной однородной системы (8), то из теоремы 4 вытекает следующая связь между линейной зависимостью $y_1(x), ..., y_n(x)$ на $[\alpha, \beta]$ и обращением в нуль их определителя Вронского $W(x)$. - Решения $y_1(x), ..., y_n(x)$ системы (8) линейно зависимы на $[\alpha, \beta]$, тогда и только тогда, когда $W[y_1, ..., y_n] \equiv 0$ на $[\alpha, \beta]$. - Решения $y_1(x), ..., y_n(x)$ системы (8) линейно независимы на $[\alpha, \beta]$, тогда и только тогда, когда $W[y_1, ..., y_n] \neq 0, \forall x \in [\alpha, \beta]$. Отсюда получаем, что не существует таких $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta], x_1 \neq x_2$, что $W(x_1) = 0, W(x_2) \neq 0$.

Определение 4. Определителем Вронского (или сокращенно вронскианом) решений $y_1(x), ..., y_n(x)$ уравнения (6) называется определитель вида

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & ... & y_n'(x) \\ \dots\dots\dots\dots & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

и обозначается $W(x)$ или $W[y_1(x), ..., y_n(x)]$.

Формула Лиувилля-Остроградского Теорема 6. Пусть $W(x)$ - вронскиан решений $y_1(x), ..., y_n(x)$ уравнения (8) и пусть $x_0 \in [\alpha, \beta]$. Тогда для всех $x \in [\alpha, \beta]$ справедлива формула Лиувилля-Остроградского

$$W(x) = W(x_0) \exp\left\{\int_{x_0}^{x} \operatorname{tr} A(\zeta) d\zeta\right\},$$

где $\operatorname{tr} A(\zeta) = a_{11}(\zeta) + ... + a_{nn}(\zeta)$ называется следом матрицы $A(\zeta)$.

Теорема 7. Пусть $W(x)$ - определитель Вронского решений $y_1(x), ..., y_n(x)$ уравнения (6) и пусть $x_0 \in [\alpha, \beta]$. Тогда для всех $x \in [\alpha, \beta]$ справедлива формула Лиувилля-Остроградского

$$W(x) = W(x_0) \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} a_1(\zeta) d\zeta\right\}.$$

1.1.5 Special Functions for D Eq: Typical Cases

(see PDE and note on sp functions for now)

1.1.6 Systems of Lin D Eq w const Coeff

(see Romanko)

§ 1. Normal linear systems with constant coefficients. General concepts and exclusion method

§ 2. General solution of a normal linear homogeneous system with constant coefficients

§ 3. General solution of a normal linear inhomogeneous system with constant coefficients

Если в системе (1)

$$f(t) = e^{\mu t}\left[P_m^{(1)}(t)h_1 + \cdots + P_m^{(k)}(t)h_k\right]$$

где $P_m^{(1)}(t), ..., P_m^{(k)}(t)$ - многочлены степени не выше m, то для системы (1) существует и единственно решение вида

$$x(t) = \begin{cases} e^{\mu t} \cdot Q_m(t), & \mu \neq \lambda, \\ te^{\mu t} \cdot Q_{m+k-1}(t), & \mu = \lambda, \end{cases}$$

где $Q_m(t)$ и $Q_{m+k-1}(t)$ - многочлены соответственно степени m и ($m + k - 1$).

§ 4. Solving normal linear systems with constant coefficients using the matrix exponent

§ 5. Laplace transform and its application to solving differential equations

§ 6. Methods for solving arbitrary linear systems with constant coefficients

1.1.7 Systems of Lin Eq w Variable Coeff

(see Romanko)

§ 1. Investigation of the Cauchy problem for a normal linear system of equations with variable coefficients

Пусть матрица $A(x)$ и вектор-функция $f(x)$ непрерывны яа $[\alpha, \beta]$ и пусть $x_0 \in [\alpha, \beta]$ и y_0 - произвольный вектор. Тогда на всем $[\alpha, \beta]$ решение задачи Коши (1), (2) существует и ебинственто.

§ 2. Linear homogeneous systems

1. Линейная зависимость решений системы (1)

Пусть $y_j(x), j = \overline{1,k}$ - решения линейной однородной системы (1). Решения $y_j(x), j = \overline{1,k}$ - линейно независимы на $[\alpha, \beta]$ тогда и только тогда, когда $\forall x_0 \in [\alpha, \beta]$ числовые векторы $y_j(x_0), j = \overline{1,k}$ линейно независимы.

2. Фундаментальные системы решений линейной однородной системы (1)

Для системы (1) существует бескопечное множество фундаментальных систем решений.

Если $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$ - фундаментальная система решений (1), то каждое решение $y(x)$ линейной однородной системы (1) представимо единственным образом в видс

$$y(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + ... + c_n\varphi_n(x)$$

где $c_1, c_2, ..., c_n$ - числа.

3. Фундаментальная матрица линейной однородной системы (1)

Матрица $\Phi(x)$ у которой столбцы образуют фундаментальную систему решений (1) $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$, называется фундаментальной матрицей системы (1).

4. Определитель Вронского и формула Лиувилля-Остроградского

Определителем Вронского (или сокращенно вронскианом) системы $y_1(x), ..., y_n(x)$ называется определитель

$$W(x) \equiv W[y_1(x), ..., y_n(x)] = \det \|y_1(x), ..., y_n(x)\|.$$

Пусть $W(x)$ - врожкиан решений $y_1(x), ..., y_n(x)$ системо (1) и пусть $x_0 \in [\alpha, \beta]$. Тогда для $\forall x \in [\alpha, \beta]$ шмеет место формула Лиувилля - Остроградского

$$W(x) = W(x_0)\, e^{\int_{x_0}^{x^x} spA(\zeta)d\zeta} \tag{6}$$

где $\operatorname{sp} A(\zeta) = a_{11}(\zeta) + \cdots + a_{nn}(\zeta)$ называется следом матрицы $A(\zeta)$.

§ 3. Linear inhomogeneous systems

Пусть $y_0(x)$ - некоторое частное решение (1) и $\Phi(x)$ - фундаментальная матрица (2). Тогда все решения системы (1) задаются бормулой

$$y(x) = \Phi(x)c + y_0(x)$$

где c - произвольный числовой n-мерный вектор.

Если $\Phi(x)$ - фундаментальная матрица линейной одпородной системы (2), то общее решение линейной неоднородной системы (1) при всех $x \in [\alpha, \beta]$ задается бормулой

$$y(x) = \Phi(x) \cdot d + \Phi(x) \cdot \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(\zeta) f(\zeta) d\zeta$$

где $x_0 \in [\alpha, \beta]$ и d - произвольный числовой n-мерный вежтор.

1.2 Basic Useful Methods

1.2.1 Green's Function Method for D Eq

(по идее тут ее суть напишу. пока этот метод не усвоен)

обзор

вроде главный метод решения линейных уравнений
??

Функция Грина для граничной задачи

по определению говорят искать её, потом отработаю.

1.2.2 Laplace Method

(другие очень хорошие методы тоже укажу тут, пока не знаю, какие это? не самые лучшие - следующая 1я часть)

О методе Лапласа (?!?!?)

(скоро буду стабилить этот метод!)

Суть метода Лапласа (?!??!)

Решаем уравнение

$$\sum_{m=0}^{N} (a_m + b_m x) \cdot \frac{d^m Y}{dx^m} = 0.$$

Ищем решение в виде

$$Y(x) = \int\limits_C dt Z(t) e^{xt}$$

(мб строчку укажу, почему то, что дальше, пока опустил)

нение. Решение этого уравнения записывается тривиально $Z(t) = \frac{1}{Q(t)} \exp\left(\int \frac{P(t)}{Q(t)} dt\right)$. Таким образом, мы получаем следующий «рецепт»:

1. Смотрим на дифференциальное уравнение, строим функции $P(t), Q(t)$; вычисляем функцию $Z(t)$.

2. Исследуем возможные контура в комплексной плоскости, на концах которого функция $Z(t)Q(t)e^{xt} = \exp\left(xt + \int \frac{P(t)}{Q(t)} dt\right)$ зануляется. Как правило, это либо замкнутые контура, обходящие какие-то особенности подынтегрального выражения; либо контура, уходящие на бесконечность вдоль какого-нибудь из направлений.

3. Дальше требуется выбрать какой-нибудь один контур интегрирования, который обычно фиксируется выбором граничных условий. Причём в квантовой механике, как правило, граничные условия фиксируются при x на вещественной оси, при $x \to \pm\infty$. Поэтому для выбора контура интегрирования, сперва требуется вычислить асимптотики решений, которые получаются, если по-разному выделять контура.

4. Наконец, глядя на различные асимптотики, мы должны выбрать интересующий нас контур.

Таблица образов и изображений

$x(t) \xrightarrow{L} X(p)$
$x'(t) \xrightarrow{L} pX(p) - x(0)$
$x''(t) \xrightarrow{L} p^2 X(p) - p \cdot x(0) - x'(0)$
$t^n \xrightarrow{L} \frac{n!}{p^{n+1}}$

Таблица 7.1

№ п/п	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$
1	$A = \text{const}$	$\frac{A}{p}$
2	$e^{p_k t}$	$\frac{1}{p - p_k}$
3	$e^{j(\omega t + \varphi)}$	$\frac{e^{j\varphi}}{p - j\omega}$
4	$1 - e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}$
5	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
6	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
7	$\sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{p \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{p^2 + \omega^2}$
8	$\cos(\omega t + \varphi)$	$\frac{p \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{p^2 + \omega^2}$
9	$e^{-\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+\alpha)^2 + \omega^2}$
10	$e^{-\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{p + \alpha}{(p+\alpha)^2 + \omega^2}$
11	At	$\frac{A}{p^2}$
12	$Ate^{-\alpha t}$	$\frac{A}{(p+\alpha)^2}$

1.3 Key Mathematical Theorems

1.3.1 Study of the Cauchy problem

§ 1. Auxiliary statements

2. Теорема существования и единственности решения задачи Коши

Теперь сформулируем и докажем теорему, дающую достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши (1), (2). Эта теорема является основным теоретическим инструментом при изучении нормальных систем дифференциальных уравнений, которые, как правило, не допускают решений в квадратурах.

Пусть вектор-функция $f(x, y) \in \mathbb{C}_n(G)$ удовлетворяет на каждом компакте (ограниченном замкнутом множестве) области G условию Липиица по y равномерно по x и пусть, кроме того, $(x_0, y_0) \in G$. Тогда:

1. найдется такое число $\delta > 0$, что при $|x - x_0| \leq \delta$ решение задачи Kour (1), (2) существует,

2. решение задачи Кощи (1), (2) единственно в том смысле, что если $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$ - два какие-либо решения задачи Коши (1), (2), то $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ на пересечении $\mathcal{I}$ промежутков определения этих решений ($x_0 \in \mathcal{I}$).

В силу леммы об эквивалентности доказательство теоремы сводится к доказательству существования и единственности решения эквивалентной задаче Коши (1), (2) системы интегральных уравнений (3).

3. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения порядка n в нормальной форме

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y^{(u)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right), \tag{8}$$

где $f\left(x, y_1, ..., y_n\right)$ - заданная непрерывная функция в некоторой непустой области $G \subseteq R^{n+1}_{x,y_1,...,y_n}$, и начальные условия

$$y\left(x_0\right) = y_1^{(0)}, \quad y'\left(x_0\right) = y_2^{(0)}, ..., y_{x_0}^{(n-1)} = y_n^{(0)}, \tag{9}$$

где $\left(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, ..., y_n^{(0)}\right) \in G$.

Пусть функичя $f\left(x, y_1, ..., y_n\right)$ непрерывна в области G, удовлетворяет на каждом компакте G условию Липицча по $y_1, y_2, ..., y_n pa$ номерно по x и пусть $\left(x_0, y_1^{(0)}, ..., y_n^{(0)}\right) \in G$. Тогда:

1. найдется такое число $\delta > 0$, что при $|x - x_0| \leq \delta$ решение задачи Кошu (8), (9) существует,

2. решение задачи Коши (8), (9) единственно в том смасле, что если $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$ - два какие-либо решения задачи Коши (8), (9), то $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ на пересечении промежутков определения этих решений.

§ 3. Unextended solution of the Cauchy problem

Решение $y = \varphi(x)$ на промежутке $\mathcal{I}$ системы (1) § 2 называется непродолжимым, если не существует никакого другого решения системы (1), являющегося его продолжением.

Пусть выполнены условия теоремы 1 § 2. Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ задача Коши (1), (2) из § 2 имеет единственное непродолжимое решение $y = \Phi(x)$, определенное на нехотором махсимальном интервале (α, β). При этом, если $x \to \alpha + 0$ или $x \to \beta - 0$, соответствующая точка $M(x, \Phi(x))$ интегральной кривой покидает любой компакт $K \subset G$ и либо $M \to \infty$ (т.е. хотя бы одна из хоординат M стремится $\kappa\infty$), либо расстояние от M до границы ∂G области $G\rho(M, \partial G) \to 0$.

§ 4. General solution of the differential equation

Функция $y = \Phi\left(x, x_0, y_0\right)$, где $(x, x_0, y_0) \in \Omega$, называется общим решением в форме Коши уравнения $y' = f(x, y)$.

Непрерывная функция $y = \Phi(x, C)$, где C - параметр, называется общим решением уравнения $y' = f(x, y)$ в некоторой области $G_0 \subseteq G$, если для $\forall\left(x_0, y_0\right) \in G_0$ уравнение $y_0 = \Phi\left(x_0, C\right)$ имеет единственное решение $C_0 = C_0\left(x_0, y_0\right)$ и функция $y = \Phi\left(x, C_0\right)$ является непродолжимым решением задачи Коши (1) в G_0.

Пусть $f(x, y)$ - непрерывна в области $G \subseteq R^2_{(x,y)}$, удовлетворяет условию Липшица по y равномерно по x на каждом хомпажте $K \subset Gu\left(x_0, y_0\right) \in G$. Тогда каждая точка $(x_0, y_0) \in G$ обладает окрестностью $U = U\left(x_0, y_0\right)$, в которой существует общее решение $y = \Phi(x, C)$ уравнения $y' = f(x, y)$.

1. Зависимость решения задачи Коши от параметров

2. Зависимость решения задачи Коши от начальных данных

Если $f(x,y)$ - непрерывна в области G и удовлетворяет в G условию Липшица по y равномерно по x, то найдется число $\delta > 0$ такое, что решение $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ задачи Коши (12) является непрерывной функцией $x, x_0, y_0 при\, |x - x_0| \leq \delta, (x_0, y_0) \in S_r$.

Пусть функции $f(x,y), \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывны в области G и пусть $(x_0, y_0) \in S_r$. Тогда начдется такое число $\delta > 0$, что при $|x - x_0| \leq \delta$, $(x_0, y_0) \in S_r$ для решения $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ задачи Кочи (14):

1. частные производные $\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}, \frac{\partial \varphi}{\partial y_0}$ непрерывны,
2. смешанные частные производные $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial x_0}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y_0}$ непрерывны,
3. частная производная $\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} = u(x, x_0, y_0)$ удовлетворяет «уравнению в вариациях по x_0 »

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f[x, \varphi(x, x_0, y_0)]}{\partial y} \cdot u$$

и начальному условию $u|_{x=x_0} = -f(x_0, y_0)$,

4) частная производная $\frac{\partial \varphi}{\partial y_0} = v(x, x_0, y_0)$ удовлетворяет «уравнению в вариациях по yo »

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f[x, \varphi(x, x_0, y_0)]}{\partial y} \cdot v$$

u начальному условию $v|_{x=x_0} = 1$.

3. Корректность задачи Коши

Рассмотрим задачу Коши для нормальной системы

$$y'(x) = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{16}$$

где $f(x,y)$ - заданная вектор-функция с n компонентами в некоторой области $G \subseteq R^{n+1}_{(x,y)}, \quad (x_0, y_0) \in G$.

Задача Коши (16) называется корректной, если наидется такой промежуток $\mathcal{I}\,(x_0 \in \mathcal{I})$, что при $\forall x \in \mathcal{I}$ решение $y = \varphi(x)$ задачи Коши (16) существует, единственно и непрерывно зависит от данных задачи Коши (правой части системы и начальных данных x_0, y_0) в том смысле, что для $\forall \varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что как только

$$|\tilde{f}(x,y) - f(x,y)| < \delta, \quad |\tilde{x}_0 - x_0| < \delta, \quad |\tilde{y}_0 - y_0| < \delta,$$

то при $\forall x \in \mathcal{I} |\bar{\varphi}(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$.
В этом определении считается, что $\tilde{f}(x,y)$ определена в $G, (\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) \in G$ и $y = \tilde{\varphi}(x)$ - решение задачи Коши (1) при $f(x,y) \equiv \tilde{f}(x,y), x_0 = \tilde{x}_0,\ y_0 = \tilde{y}_0$.

Пусть в области G вектор-функция $f(x,y)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липиица по y равномерно по x. Тогда задача Коши (16) является корректной, причем если

$$|\tilde{f}(x,y) - f(x,y)| < \delta, \quad |\tilde{x}_0 - x_0| < \delta, \quad |\tilde{y}_0 - y_0| < \delta,$$

то соответствующие решения $y = \bar{\varphi}(x), y = \varphi(x)$ задачи Коши (15) на некотором $[\alpha, \beta]$ удовлетворяют оченке ($x_0, \tilde{x}_0 \in [\alpha, \beta]$):

$$|\tilde{\varphi}(x) - \varphi(x)| \leq \delta \left[\left(1 + M_1 + \frac{1}{L} \right) e^{L(\beta-\alpha)} - \frac{1}{L} \right],$$

где L - постоянныя Липицица в G и $M_1 > 0$ - некоторое число.

§ 6. Solvability of the Cauchy problem for a first-order differential equation not solved with respect to the derivative Special solutions

Рассмотрим уравнение

$$F\left(x, y, y'\right) = 0 \tag{1}$$

где $F(x,y,p)$ - заданная непрерывная функция в некоторой области $G \subseteq R^3_{(x,y,p)}$.

Для уравнения (1) задача Коши ставится следующим образом (см. § 3 главы 1).

Задача Коши для (1). Задана точка $(x_0, y_0, p_0) \in G$, для которой $F\left(x_0, y_0, p_0\right) = 0$. Требуется найти такое решение уравнения (1), которое удовлетворяет начальным условиям

$$y\left(x_0\right) = y_0, \quad y'\left(x_0\right) = p_0 \tag{2}$$

Следующая теорема дает достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши (1), (2).

Теорема. Пусть в области G функция $F(x,y,p)$ непрерывно дифференцируема и пусть $\frac{\partial F(x_0,y_0,p_0)}{\partial p} \neq 0$. Тогда найдется такое число $\delta > 0$, что при $|x - x_0| \leq \delta$ решение задачи Коши (1), (2) существует и единственно.

Решение уравнения (1) $y = \psi(x), x \in \mathcal{I}$, называется особым решением, если каждая точка $\left(x_0, \psi\left(x_0\right)\right), x_0 \in \mathcal{I}$, его интегральной кривой является точкой локальной неединственности решения задачи Коши (1), (2).

Множество точек $(x,y) \in R^2_{(x,y)}$ (кривая на плоскости $R^2_{(x,y)}\Big)$, определяемое уравнением $\Phi(x,y) = 0$, называется дискриминантным множеством точек (дискриминантной кривой) уравнения (1).

1.3.2 Normal Autonomous Systems of D Eq, Stability Theory

§ 1. General Properties

Если решение $x = \varphi(t), t \in \mathcal{I}$, автономной системх (1) таково, что определяемая им траектория все время остается в некотором компакте $K \subset \Omega$, то необходимо $\mathcal{I} = (-\infty, +\infty)$.

Точка $x_0 \in \Omega$ язляется положением равновесия (1) только в том случае, хогда фазовая скорость $f\left(x_0\right) = 0$.

Если $x = x_0$ - положение равновесия (1), то $\dot{x} = 0$ и подстановка в (1) дает $f(x_0) = 0$. Обратно, если $f(x_0) = 0$, то подстановка в (1) дает $\dot{x}_0 = 0$, т.е. $x = x_0$ - решение (1).

Всякая фазовая траектория автономной системы (1) принадлежит обному из следующих трех типов:

1. положение равновесия,
2. замкнутая траектория,
3. траехтория без самопересечений.

Если система (1) задана в плоской области Ω и в Ω векторное поле фазовых скоростей $f(x)$ является потенчиальным, то в Ω система (1) не имест замкнутьх траекторий.

Пусть $f(x)$ - непрерывно дифференцируемая вектор-фупкция в области Ω и пусть точка a $\in \Omega$ является обыкновенной точкой системы (1). Тогда найдутся охрестность Ω_a точки a u такая гладкая обратимая замена переменных в Ω_a, что в окрестности Ω_a система (1) примет $\varepsilon\mu$

$$\dot{y}_i = 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \dot{y}_n = 1,$$

а траектории системы (1) в охрестности Ω_a перечйдут в отрезхи прямых $y_i = c_i, i = \overline{1, n-1}, y_n = t + c_n$, где $c_1, ..., c_n$ - постоянные.

§ 2. Classification of equilibrium positions of a linear homogeneous system of the second order

Автономные системы (1) и (2) будем называть качественно эквивалентными, если существует такое взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение области Ω на область G, при котором каждая фазовая траектория системы (1) с сохранением ориентации переходит в некоторую фазовую траекторию системы (2), и наоборот. Если, кроме того, это отображеиие является непрерывно дифференцируемым, то системы (1) и (2) называются дифференцируемо эквивалентными.

Линейная автономная система (1) называется простой, если матрица A - невырожденна. В противном случае система (1) называется сложной.

§ 3. Second-order nonlinear autonomous systems

Если линеаризация (3) нелинейной системы (1) в начале координат $x = 0$ является простой свтономной системой и $x = 0$ не является центром для системы (3), то в окрестности $x = 0$ нелинейная система (1) и ее линеаризация (3) качественно эквивалентны.

§ 4. Boundary value problems

Устойчивое по Ляпунову положение равновесия $x = 0$ системы (1) называется асимптотически устойчивым, если $\exists r_1$, такое, что $0 < r_1 \leq r$ и $\lim_{t \to +\infty} x(t, x_0) = 0$ при $|x_0| < r_1$. Асимптотическая устойчивость $x = 0$ геометрически означает, что любая траектория (1), начинающаяся в некоторой окрестности $x = 0$, при $t \to +\infty$ стремится к $x = 0$.

§ 4. Lyapunov stability of equilibrium positions

§ 5. First integrals

1.4 Other, Typical Topics

1.4.1 Partial D Eq of first order

§ 1. Linear homogeneous equations

§ 2. Quasilinear Equations

§ 3. Nonlinear Equations

1.4.2 Boundary Problems

(!! see Diesperov about it!!)

5.1. Boundary value problems for a second-order linear differential equation with constant real coefficients

5.2. Edge problem of the first kind in the presence of a small parameter before the higher derivative

5.3. Example of solving a boundary value problem of the first kind

1.4.3 Variational Calculus: Basics

§ 1. The simplest variational problem

Определение 7.1.2. Мы говорим, что функционал $\mathcal{J}(y)$ достигает на функции $y_0(t) \in \mathcal{D}$ абсолютного минимума (максимума), если для любого $y(t) \in \mathcal{D}$ справедливо неравенство $\mathcal{J}(y) \geqslant \mathcal{J}(y_0)\,(\mathcal{J}(y) \leqslant \mathcal{J}(y_0))$.

Определение 7.1.3. Скажем, что функция $h(t)$ является допустимым приращением функции $y(t) \in \mathcal{D}$, если $y(t) + h(t) \in \mathcal{D}$.

Множество допустимых приращений функции $y(t)$ обозначим $\mathcal{H}_y$:

$$\mathcal{H}_y = \left\{h \mid h \in \mathbf{C}^1([a,b]), y + h \in \mathcal{D}, h(a) = h(b) = 0\right\}.$$

Определение 7.1.4. Пусть $y_0(t) \in \mathcal{D}$ и для любого $h(t) \in \mathcal{H}_{y_0}$ функция $\mathcal{J}(y_0 + \theta h)$ переменного θ дифференцируема при $\theta = 0$. Тогда производная $\frac{d}{d\theta}\mathcal{J}(y_0 + \theta h)\big|_{\theta=0}$ называется первой вариацией функционала $\mathcal{J}(y)$ на функции $y_0(t)$ и обозначается $\delta\mathcal{J}(y_0, h)$.

Theorem 2

Пусть функция $F(x, y, p)$ - дважды непрерывно дифференцируема при $\forall x \in [a,b], \forall (y,p) \in R^2_{(y,p)}$. Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $\hat{y}(x)$ является рещением простечиней вариационной задачи, то необходимо функция $\hat{y}(x)$ на $[a,b]$ удовлетворяет уравнению Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \tag{5}$$

(здесь $\frac{d}{dx}$ - полная производная по x).

§ 2. Generalizations of the simplest variational problem for the case of functionals of a more general integral type

§ 3. Variational problems with a free end, with a movable boundary and the Boltz problem

§ 4. On the strong local extremum and the absolute extremum of the functionals

§ 5 Isoperimetric problem.

§ 6. The Lagrange Problem

§ 7. Sufficient conditions of weak local extremum

1.5 Special, Sometimes Useful Methods and Properties

1.5.1 WKB Method, Iterations (?!)

(по идее в параграфах и смогу указать их)

О методе WKB (???)

(?? протестирую его хотя бы на каких-то уравнениях??? пока не усвоил нормально. неужели все так просто, одна формула - и всё решается?)

Укажем самое основное про метод WKB.

WKB в простейшем случае

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2}{dx^2}f - Uf = 0.$$

Предположим, что величина $p = \sqrt{U}$ меняется достаточно медленно на масштабе p^{-1}, что означает выполнение неравенства $dp/dx \ll p^2$. Тогда для функции f можно построить следующее приближенное решение

$$f = \frac{C_1}{\sqrt{p}}\exp(S) + \frac{C_2}{\sqrt{p}}\exp(-S), \qquad \text{где} \quad S(x) = \int^x dyp(y),$$

где C_1, C_2 - некоторые константы.

Подставляя выражение (3.107) в уравнение (3.106), можно убедиться, что оно являет ся решением, если пренебречь в нем членами с $(dp/dx)^2$ и d^2p/dx^2. Первое пренебрежение возможно в силу предполагаемого неравенства $dp/dx \ll p^2$, а второе в силу неравенства $d^2p/dx^2 \ll pdp/dx$, которое получ ается из предыдущего дифференцированием по x.

Фактор U в уравнении (3.106) может быть как положительным, так и отрицательным, к обоим этим случаям одинаково применим метод WKB. В первом случае величина p является действительной, и два слагаемых в выражении (3.107) являются растущей и убывающей по x экспонентами. Во втором случае величина p является чи сто мнимой, и мы имеем дело с экспонентами от мнимых величин S. Другими словами, мы имеем дело с осциллирующими функциями, если речь идет о действительных решениях.

Тогда мы можем записать

$$f = \frac{C}{|p|^{1/2}}\cos(A + \varphi)$$

где $S = iA, C$ - действительная константа и φ-некоторая фаза.

WKB в общем случае

Приведенная схема легко обобщается на случай произвольного оператора Штурма-Лиувилля (2.6)

$$\frac{d^2}{dx^2}f + Q\frac{df}{dx} - Uf = 0.$$

В этом случае вместо $(3.107, 3.108)$ находим

$$f = \frac{C_1}{\sqrt{p}_1}\exp\left(S_1\right) + \frac{C_2}{\sqrt{p}_2}\exp\left(S_2\right), \qquad \text{где} \quad S_{1,2}(x) = \int^x dy p_{1,2}(y),$$

где $p_{1,2}$ являются корнями квадратного уравнения

$$p^2 + Qp - U = 0,$$

которые могут быть как действительными, так и комплексными.

О применениях (??)

О методе итераций (!!!!???)

(тоже часто использую, так всё ещё не прописал.)

1.5.2 Averaging and Slow Evolution (!?)

Суть метода

$$F\left(t, x, \partial_t x, ...\right) + \epsilon G\left(t, x, \partial_t x, ...\right) = 0$$

Пример:

$$\partial_t^2 x + x = \epsilon x^3.$$

$x_0 := x(\epsilon = 0) = a\cos(t - \tau)$, $\tau =$const,

$$\partial_t^2 x_1 + x_1 = \frac{1}{4}\epsilon a^3[\cos(3t - 3\tau) + 3\cos(t - \tau)]$$

$$x_1 = \frac{3}{8}\epsilon a^3 (t - \tau)\sin(t - \tau)$$

На достаточно больших временах, когда $t \sim (\epsilon a^2)^{-1}$, поправка становится $O(x_0)$, и имеем нарушение применимости разложения по ϵ.

Усовершенствуем: ищем $x \equiv a\cos(t - \tau)$, a и τ являются медленными функциями времени:

$$-\partial_t a\sin(t - \tau) + \partial_t \tau a\cos(t - \tau) = \frac{3}{8}\epsilon a^3\cos(t - \tau)$$

$$\partial_t a = 0, \quad \partial_t \tau = \frac{3}{8}\epsilon a^2$$

$a =$ const, $\tau = \tau_0 + (3/8)\epsilon a^2 t$, где τ_0=const,

$$x = a\cos\left[t - (3/8)\epsilon a^2 t - \tau_0\right],$$

осцилляции с нелинейным сдвигом к частоте $\omega = 1$ - $(3/8)\ \epsilon a^2$.

Установим критерий применимости результата. При выводе уравнений на $\partial_t a, \partial_t \tau$ мы отбросили члены с $\partial_t^2 \tau$ и с $\partial_t^2 a$. Малым параметром, по которому это можно сделать, является ϵa^2. Именно с этой относительной точностью найдено выражение для $\partial_t \tau$, поэтому поправка к этому выражению может быть оценена, как $\epsilon^2 a^4$. Таким образом, поправка к аргументу косинуса в выражении $x = a\cos(t - \tau)$ может быть оценена, как $t\epsilon^2 a^4$, то есть результат работает при условии $t \ll \left(\epsilon^2 a^4\right)^{-1}$.

Метод Боголюбова-Крылова

$$\partial_t^2 x + x = \epsilon G\left(x, \partial_t x\right).$$

$z := x + i\partial_t x,$

$$\partial_t z = -iz + i\epsilon G(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z).$$

$z \equiv a\exp(i\varphi),$

$$\partial_t a = \epsilon \sin\varphi G(a\cos\varphi, a\sin\varphi),$$
$$\partial_t \tau = \epsilon \frac{\cos\varphi}{a} G(a\cos\varphi, a\sin\varphi),$$

$\varphi = -t + \tau.$

Приращения a и τ за период малы в силу малости ϵ. Поэтому при вычислении этих приращений в правой части a и τ можно считать константами, что дает

$$\Delta a = \epsilon \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \sin\varphi G(a\cos\varphi, a\sin\varphi)$$
$$\Delta \tau = \epsilon \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \frac{\cos\varphi}{a} G(a\cos\varphi, a\sin\varphi)$$

$$\partial_t a = \frac{\epsilon}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \sin\varphi G(a\cos\varphi, a\sin\varphi)$$
$$\partial_t \tau = \frac{\epsilon}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \frac{\cos\varphi}{a} G(a\cos\varphi, a\sin\varphi)$$

Пример:

$$\partial_t^2 x + x = \epsilon\left(1 - x^2\right)\partial_t x \qquad \epsilon \ll 1$$
$$\partial_t a = \frac{\epsilon}{2} a\left(1 - a^2/4\right), \quad \partial_t \tau = 0$$

Обобщение на случай явной зависимости функции $G(t)$ (если G остается приблизительно периодической функцией времени с $T = 2\pi$):

$$\partial_t a = \epsilon \sin\varphi G(t, a\cos\varphi, a\sin\varphi)$$
$$\partial_t \tau = \epsilon \frac{\cos\varphi}{a} G(t, a\cos\varphi, a\sin\varphi)$$

$\varphi = -t + \tau$.

$$\partial_t a = \frac{\epsilon}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\phi \sin\varphi G(t-\phi, a\cos\varphi, a\sin\varphi)$$

$$\partial_t \tau = \frac{\epsilon}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\phi \frac{\cos\varphi}{a} G(t-\phi, a\cos\varphi, a\sin\varphi)$$

$\varphi = \tau - t + \phi$.

Обобщение на случай частоты ω:

$$\partial_t^2 x + \omega^2 x = \epsilon G$$
$$x = a\cos(-\omega t + \theta),$$

$$\partial_t a = \frac{\epsilon}{\omega} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \sin(\varphi) G$$

$$\partial_t \theta = \frac{\epsilon}{\omega a} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \cos(\varphi) G$$

$u \to a\cos\varphi, \partial_t u \to \omega \sin\varphi$.

1.6 Numerical Methods for DE: Typical Examples

(add it later from the note on comput math)

1.7 Methods of Differential Eq in Typical Problems in Physics

(по Мигдалу допишу, пока не думал про это)

Part II
Fundamentals of Differential Equations

2 1 Basic concepts, definitions, types and methods by Diesperov

2.1 1.1. Basic Terms and Definitions

В этой главе все переменные и функции предполагаются вещественными. Следующие связные множества $(a, b) = \{t : a < t < b\}$; $[a, b) = \{t : a \leq t < b\}, \ldots$ будем называть промежутками и обозначать либо J, либо $< a, b >$. Множество функций, непрерывных на промежутке J, обозначим $\mathbf{C}(J)$. Множество функций, имеющих k непрерывных производных на J, обозначим $\mathbf{C}^k(J)$. Через $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2_{t,x}$ обозначим область. Множество функций $f(t, x)$, непрерывных в области Ω, обозначим $\mathbf{C}(\Omega)$. Множество функций $f(t, x)$ в области Ω, для которых все частные производные порядка k существуют и непрерывны, обозначим $\mathbf{C}^k(\Omega)$. Окончание замечаний и примеров будет обозначаться символом $\diamond$.

Пусть функция $F(t, x, p)$ определена и непрерывна в области $G \subseteq\subseteq \mathbb{R}^3$.

Определение 1.1.1. Уравнение

$$F\left(t, x, x'\right) = 0, \tag{1.1}$$

где t - независимая переменная, $x(t)$ - неизвестная функция, а $x'(t)$ её производная, называется дифференциальным уравнением первого порядка, неразрешенным относительно производной.

Определение 1.1.2. Функция $x = \varphi(t)$, определённая на интервале J, называется решением дифференциального уравнения (1.1), если

1. $\varphi(t) \in \mathbf{C}^1(J)$ (непрерывно дифференцируемая функция);
2. $(t, \varphi(t), \varphi'(t)) \in G$ для любого $t \in J$;
3. $F\left(t, \varphi(t), \varphi'(t)\right) = 0$ для любого $t \in J$.

Определение решения на интервале естественным образом обобщается на случай любого промежутка. Пусть мы имеем некоторое решение $x = \varphi(t), t \in J$, уравнения (1.1). График этого решения называется интегральной кривой (интегральная кривая в дальнейшем будет отождествляться с решением дифференциального уравнения). Часто дифференциальное уравнение (1.1) можно представить в виде

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \tag{1.2}$$

Уравнение (1.2) называется дифференциальным уравнением первого порядка, разрешённым относительно производной. Ниже предполагается, что $f(t, x) \in \mathbf{C}(\Omega)$. Аналогично уравнению (1.1) определяется решение дифференциального уравнения (1.2). Таким образом, дифференциальное уравнение (1.2) имеет решение, если существуют промежуток J и непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(t)$, определённая на нем, при подстановке которой в уравнение (1.2) последнее обращается в тождество. Если какое-нибудь решение задано неявно в виде уравнения $\Phi(t, x) = 0$, то последнее носит название интеграла уравнения.

Основной задачей теории обыкновенных дифференциальных уравнений является отыскание всех решений дифферениального уравнения (данного) и изучение свойств этих решений. Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется его интегрированием.

Изучение теории дифференциальных уравнений начнём с уравнения (1.2). Ему можно дать простую геометрическую интерпретацию. Уравнение определяет в каждой точке $(t, x) \in \Omega$ интегральной кривой значение производной $x'(t)$, которое равно тангенсу угла α, образованного касательной в этой точке с положительным направлением оси Ot. Если в каждой точке области Ω задано значение некоторой величины, то говорят, что в ней определено поле этой величины. Три числа (t, x, x') определяют направление прямой, проходящей через каждую точку (t, x) в области Ω. Таким образом, дифференциальное уравнение (1.2) задаёт в области Ω поле направлений. Проведём в каждой точке маленький отрезок, указываюший направление касательной. Тогда совокупность отрезков этих прямых даёт геометрическую картину поля

направлений в области Ω. Функция $x(t)$ будет решением тогда и только тогда, когда касательная в каждой точке ее графика совпадает с полем направлений в этой точке.

Определение 1.1.3. Множество точек, в каждой из которых дифференциальное уравнение (1.2) определяет одно и то же направление с углом α, называется изоклиной.

Знание изоклин часто позволяет построить качественную картину поведения интегральных кривых уравнения (1.2). Изоклины задаются уравнением $\operatorname{tg} \alpha = f(t, x)$.

Пример 1.1.1. Построить методом изоклин качественную картину поведения интегральных кривых уравнения, которое не интегрируется в элементарных функциях:

$$\frac{dx}{dt} = t^2 + x^2, R^2 = t^2 + x^2 \geq 0,$$
$$R^2 > 0 \text{ - окружность, } R^2 = 0 \text{ - точка. } \diamond$$

Рассмотрим пример простейшего уравнения (1.2), когда его правая часть не зависит от x :

$$\frac{dx}{dt} = f(t), t \in J. \tag{1.3}$$

Все решения дифференциального уравнения (1.3) описываются однопараметрическим семейством функций:

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(\tau) d\tau + C, \quad C \in (-\infty, \infty), \quad t_0, t \in J \tag{1.4}$$

где C - произвольная постоянная, играющая роль параметра. Если мы хотим выделить какое-либо решение, то можно потребовать $x(t_0) = x_0$. Это условие называется начальным. Из него следует, что $C = x_0$. Интегральная кривая, проходящая через точку с координатами (t_0, x_0), принимает вид $\varphi(t) = \int_{t_0}^{t} f(t) dt + x_0$. Мы пришли к одному из основных понятий в теории дифференциальных уравнений, а именно: задаче Коши.
Задача Коши. Пусть $(t_0, x_0) \in \Omega$. Найти интервал J, содержащий точку t_0, и решение $\varphi(t), t \in J$, уравнения (1.2), определённое на нём

и удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0) = x_0$.
Задача Коши обозначается следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), (t, x) \in \Omega, x(t_0) = x_0, (t_0, x_0) \in \Omega. \tag{1.5}$$

Числа t_0, x_0 называются начальными данными. Задачу Коши часто называют задачей на начальные значения.

Таким образом, решение задачи Коши (1.5) существует, если существует интервал $J \ni t_0$ и решение $x = \varphi(t)$ уравнения (1.2), определенное на J, такое, что выполняется $x_0 = \varphi(t_0)$.

Достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши

Theorem

1.1. Пусть $f(t,x), \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} \in \boldsymbol{C}(\Omega)$. Тогда для любой точки $(t_0, x_0) \in \Omega$ можно указать интервал $J = J(t_0, x_0) \ni t_0$, на котором существует единственное решение $x = \varphi(t)$ уравнения (1.2), удовлетворяющее начальному условию $x_0 = \varphi(t_0)$.

На основании определений, данных выше, теорему 1.1 кратко можно сформулировать следующим образом:
если $f(t,x), \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} \in \boldsymbol{C}(\Omega)$, то для любой точки $(t_0, x_0) \in \Omega$ решение задачи Коши (1.5) существует и единственно.
Теорему 1.1 существования и единственности решения задачи Коши в силу её важности будем называть основной.

Замечание 1.1.1. Теорема 1.1 называется теоремой Коши [5, 6, 7, 13] и в общем случае носит локальный характер.

Замечание 1.1.2. Требование непрерывности $f(t,x)$ обеспечивает существование решения задачи Коши (1.5) (теорема Пеано [2, 10]), а требование непрерывности $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ обеспечивает единственность решения задачи Коши (1.5).$\diamond$

Определение 1.1.4. Совокупность всех решений уравнения (1.2) называется общим решением.

В ряде случаев все решения уравнения (1.2) можно описать с помощью функции $\varphi(t, C)$ переменного t и параметра C. Дадим понятие общего решения и общего интеграла в той форме, в какой они используются обычно при решении студентами задач (см. также [5, 6]). Ниже

при их определении будем предполагать, что в области Ω выполнены условия теоремы 1.1.

Определение 1.1.5. Мы говорим, что функция

$$x = \varphi(t, C) \tag{1.6}$$

является общим решением дифференциального уравнения (1.2) в области $D \subseteq \Omega$, если

1. для любого допустимого значения C функция $\varphi(t, C)$ является решением уравнения;
2. любое решение уравнения (1.2), график которого проходит через область D, может быть описано с помощью функции $\varphi(t, C)$ при соответствующем выборе параметра C.

При фиксированном $C = C_0$ функция $x = \varphi(t, C_0)$ определяет частное решение. Множество значений параметра C, которые соответствуют всем интегральным кривым, проходящим через область D, будет обозначаться $(C)_D$. Под словами произвольная постоянная C подразумевается, что параметр C может принимать любое значение из множества $(C)_D$. Такое значение C будет называться допустимым. Ниже в примере 1.2.2 (раздел 1.2.2) уравнение определено в $\Omega \equiv \mathbb{R}^2$ и его правая часть - непрерывно дифференцируемая функция. Согласно определению 1.1.5 общие решения уравнения (1.2) в областях $x > 0$ и $x < 0$ описываются функцией $x = -1/(t + C)$. Но описать с её помощью общее решение уравнения во всей плоскости $\mathbb{R}^2$ согласно определению 1.1.5 невозможно.

Определение 1.1.6. Уравнение

$$\Phi(t, x, C) = 0 \tag{1.7}$$

называется общим интегралом дифференциального уравнения (1.2) в области $D \subseteq \Omega$, если

1. для любого допустимого значения C уравнение (1.7) определяет неявно решение уравнения (1.2);
2. любое решение уравнения (1.2), график которого проходит через область D, может быть описано неявно уравнением (1.7) при соответствующем выборе постоянной C.

Из определения следует, что общий интеграл определяет в неявном виде все решения уравнения (1.2) в области D.

Theorem

1.2. Пусть в области Ω выполняются условия теоремы 1.1. Тогда для любой точки $(t_0, x_0) \in \Omega$ можно указать такую её окрестность, в которой все решения уравнения (1.2) можно описать с помощью общего решения (1.6) (или с помощью общего интеграла вида $\Delta(t, x) = C$) [5, 10].

Следовательно, при условиях теоремы 1.1 все решения уравнения (1.2) локально описываются однопараметрическим семейством функций $x = \varphi(t, C), C \in (C)_D$.

Определение 1.1.7. Говорят, что дифференциальное уравнение интегрируемо в конечном виде, если все его решения могут быть представлены в виде элементарных функций и квадратур с помощью конечного числа алгебраических операций и суперпозиций.

2.2 1.2. The simplest types of equations and methods for solving them

Ниже рассматриваются дифференциальные уравнения (1.2) с такими правыми частями, которые позволяют проинтегрировать уравнение в конечном виде и доказать существование и единственность решения задачи Коши (1.5) при более слабых условиях, наложенных на функцию $f(t, x)$, чем в теореме 1.1.

2.2.1 1.2.1. Exact Differential Equations

Уравнение (1.2) можно представить в виде

$$dx - f(t, x)dt = 0, (t, x) \in \Omega \tag{1.8}$$

Уравнение (1.8) называется уравнением в дифференциалах. В более общей форме его можно записать следующим образом:

$$P(t, x)dt + Q(t, x)dx = 0, \quad (t, x) \in \Omega. \tag{1.9}$$

Функции $P(t, x), Q(t, x)$ предполагаются непрерывными. Переменные t и x входят в уравнение (1.9) равноправно. Поэтому его решение можно искать либо в виде $x = \varphi(t), t \in J$, либо $t = psi(x), x \in I$. В первом

случае интегрируется уравнение $\frac{dx}{dt} = -\frac{P(t,x)}{Q(t,x)}, Q(t, x) \neq 0$, во-втором - уравнение $\frac{dt}{dx} = -\frac{Q(t,x)}{P(t,x)}, P(t, x) \neq 0$.

Функция $x = \varphi(t), t \in J$ называется решением уравнения (1.9), если

$$P(t, \varphi(t)) + Q(t, \varphi(t))\varphi'(t) \equiv 0, t \in J \tag{1.10}$$

Аналогично для $t = \psi(x), x \in I$.
Задача Коши для уравнения (1.9) ставится следующим образом: найти решение уравнения (1.9), график которого проходит через точку $(t_0, x_0) \in \Omega$.

Определение 1.2.1. Уравнение (1.9) называется уравнением в полных дифференциалах, если существует функция $U(t, x) \in \mathbf{C}^1(\Omega)$ такая, что

$$P(t, x)dt + Q(t, x)dx = dU(t, x), \quad (t, x) \in \Omega$$

Из определения дифференциала функции $U(t, x)$ следует

$$P(t, x) = \frac{\partial U}{\partial t}, \quad Q(t, x) = \frac{\partial U}{\partial x}. \tag{1.11}$$

Theorem

1.3. Если $P, Q \in \mathbf{C}(\Omega), Q \neq 0$ и уравнение (1.9) является уравнением в полных дифференциалах, то

1. функиия $\varphi(t), t \in J$, является решением уравнения (1.9) в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда выполняется тождество

$$U(t, \varphi(t)) \equiv C, t \in J$$

2. через любую точку области Ω проходит единственная интегральная кривая.

Доказательство. $\rightarrow$ 1) Пусть $\varphi(t), t \in J$, - решение уравнения в полных дифференциалах. Тогда из формул (1.10) и (1.11) следует

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t, \varphi(t))dt + \frac{\partial U}{\partial x}(t, \varphi(t))d\varphi(t) = 0 \Rightarrow U(t, \varphi(t)) = C, t \in J.$$

Обратно. Всякая функция $x = \varphi(t), t \in J$, определяемая неявно уравнением $U(t, x) = C$, где C - допустимая постоянная, будет также решением уравнения (1.10). Действительно, дифференцируя тождество
$U(t, \varphi(t)) \equiv C, t \in J$, по t, получим

$$\frac{\partial U}{\partial t}dt + \frac{\partial U}{\partial x}d\varphi(t) \equiv 0 \Rightarrow P(t, \varphi(t))dt + Q(t, \varphi(t))d\varphi(t) \equiv 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(t, \varphi(t)) + Q(t, \varphi(t))\varphi'(t) \equiv 0, t \in J$$

2. Для любой точки $(t_0, x_0) \in \Omega$ имеем $U(t_0, x_0) = C$. Так как $Q(t_0, x_0) = \frac{\partial U}{\partial x}(t_0, x_0) \neq 0$, то из теоремы о неявной функции следует, что в некоторой окрестности точки (t_0, x_0) уравнение $U(t, x) = U(t_0, x_0)$ задаёт единственным образом решение в виде функции $x = \varphi(t), t \in J, \varphi(t_0) = x_0$. Она, очевидно, будет решением задачи Коши (1.5). Здесь уравнение $U(t, x) = C, t \in J$ является примером общего интеграла, определённого выше. Постоянная C принимает значения из множества $\{U(t_0, x_0) : (t_0, x_0) \in \Omega\}$, которое является множеством её допустимых значений. Для каждого решения $x = \varphi(t), t \in J$, постоянная C своя.

Таким образом, решение $x = \varphi(t), t \in J$, принимающее заданное значение $x_0 = \varphi(t_0), (x_0, t_0) \in \Omega$, находится из общего интеграла $U(t,x) = U(t_0, x_0)$. Если $Q(t_0, x_0) = 0$, а $\frac{\partial U}{\partial t}(t_0, x_0) = P(t_0, x_0) \neq 0$, то решение уравнения (1.9), график которого проходит через точку (t_0, x_0), будет иметь вид $t = \psi(x), x \in I$. Исключением в смысле теоремы 1.1 существования и единственности служат точки (t_0, x_0), для которых одновременно $P(t_0, x_0) = Q(t_0, x_0) = 0$. Если существует такая окрестность точки (t_0, x_0), в которой $P^2(t,x) + Q^2(t,x) > 0$, то точка (t_0, x_0) называется изолированной особой точкой. Отсюда следует, что для изолированной неособой точки $(t_0, x_0) \in \Omega$ решение задачи Коши существует и единственно. Оно может быть представлено либо в виде $x = \varphi(t)$, либо в виде $t = \psi(x)$.

Theorem

1.4. (Признак уравнения в полных дифференциалах). Если $P, Q, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial t} \in \mathbf{C}(\Omega)$ и область Ω односвязная, то уравнение (1.9) будет уравнением в полных дифферениччалах тогда и только тогда, когда в области Ω выполняется равенство

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t}. \tag{1.12}$$

Теорема доказывается в курсе математического анализа. Решение уравнения в полных дифференциалах, выраженное через функции $P(t,x)$ и $Q(t,x)$, можно получить в виде общего интеграла, как показывает приведенная ниже теорема.

Theorem

1.5. Пусть в области $\Omega = (a_1, a_2) \times (b_1, b_2)$ выполняются условия теоремы 1.4, уравнение (1.9) является уравнением в полных дифферениччалах $uQ(t,x) \neq 0$. Тогда функцию $U(t,x)$ для любой точки $(t_0, x_0) \in \Omega$ можно представить в виде

$$U(t,x) = \int_{t_0}^{t} P(\tau, x) d\tau + \int_{x_0}^{x} Q(t_0, z)\, dz, \quad (t,x) \in \Omega \tag{1.13}$$

При этом решение задачи Коши (1.5) единственно и в некоторой окрестности точки (t_0, x_0) представимо в виде $x = \varphi(t), t \in J$.

Доказательство. - Согласно соотношениям (1.11) имеем

$$\frac{\partial U}{\partial t} = P(t,x).$$

Проинтегрируем это уравнение по t, считая x постоянным:

$$U(t,x) = \int_{t_0}^{t} P(\tau, x) d\tau + \phi(x)$$

Функция $\phi(x)$ здесь предполагается непрерывно дифференцируемой. Дифференцируя найденную функцию $U(t,x)$ по x и используя (1.11) и (1.12), получим

$$Q(t,x) = \frac{\partial U}{\partial x} = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial P}{\partial x} dt + \phi'(x) = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial Q}{\partial t} dt + \phi'(x) =$$
$$= Q(t,x) - Q(t_0, x) + \phi'(x)$$

Отсюда следует, что одним из значений функции $\phi(x)$ будет

$$\phi(x) = \int_{x_0}^{x} Q(t_0, z)\, dz$$

В результате получаем формулу (1.13). Так как $Q\left(t_0, x_0\right) \neq 0$, то из теоремы 1.3 следует существование и единственность решения задачи Коши.

Замечание 1.2.1. Если $Q\left(t_0, x_0\right) = 0$, а $P\left(t_0, x_0\right) \neq 0$, то функцию $U(t,x)$ можно представить в виде $U(t,x) = \int_{t_0}^{t} P\left(\tau, x_0\right) d\tau + \int_{x_0}^{x} Q(t,z)dz$. Согласно теореме о неявной функции решение уравнения (1.9), график которого проходит через точку $(t_0, x_0) \in \Omega$, существует и единственно. Оно может быть представлено в виде $t = \psi(x), x \in I$.

Если функция $Q(t,x) \neq 0, (t,x) \in \Omega$, то область Ω будет областью единственности решения.

2.2.2 1.2.2. Differential equations with separating variables

Рассмотрим уравнение (1.9), в котором $P(t,x) = T_1(t)X_1(x), Q(t,x) = T_2(t)X_2(x)$:

$$T_1(t)X_1(x)dt + T_2(t)X_2(x)dx = 0, (t,x) \in \Omega. \tag{1.14}$$

Оно называется уравнением с разделяющимися переменными в симметричной форме.

Будем считать, что $\Omega = \{(t,x) : a_1 < t < a_2, b_1 < x < b_2\}$ и функции $P(t,x), Q(t,x)$ непрерываны в ней. Обозначим через S множество: $S = \{(t,x) \in \Omega : T_2(t)X_1(x) = 0\}$, а через $D = \{(t,x) : c_1 < t < c_2,\ d_1 < x < d_2\}$ - любую компоненту связности открытого множества $\Omega \backslash S$.

Разделим уравнение (1.14) на $T_2(t)X_1(x)$. В результате в области D получим уравнение

$$\frac{T_1(t)}{T_2(t)}dt + \frac{X_2(x)}{X_1(x)}dx = 0, \tag{1.15}$$

которое называется уравнением с разделёнными переменными. Его коэффициенты удовлетворяют условиям теоремы 1.4. Функция (1.13) и общий интеграл уравнения (1.15) принимают вид

$$U(t,x) = \int_{t_0}^{t} \frac{T_1(t)}{T_2(t)}dt + \int_{x_0}^{x} \frac{X_2(x)}{X_1(x)}dx \Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{T_1(t)}{T_2(t)}dt + \int_{x_0}^{x} \frac{X_2(x)}{X_1(x)}dx = \mathrm{C}.$$

Последняя формула показывает, что сумма первообразных функций $\frac{T_1}{T_2}$ и $\frac{X_2}{X_1}$, приравненная к допустимой постоянной C, определяет общий интеграл. Его можно записать в виде

$$\int \frac{T_1(t)}{T_2(t)}dt + \int \frac{X_2(x)}{X_1(x)}dx = \mathrm{C}. \tag{1.16}$$

Заметим, что отрезки прямых $x = \mathrm{const}$, $t = \mathrm{const}$, принадлежащие множеству S, являются решениями уравнения (1.14).

Если $T_2(t)X_2(x) \neq 0$, то уравнение (1.16) можно представить в виде (уравнения разрешённого относительно производной):

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{T_1(t)X_1(x)}{T_2(t)X_2(x)} = f(t)g(x). \tag{1.17}$$

Пример 1.2.1. Рассмотрим уравнение с разделяющимися переменными в форме (1.17):

$$\frac{dx}{dt} = |x|^{\frac{2}{3}}, (t,x) \in \mathbb{R}^2. \tag{1.18}$$

Решение. Нетрудно видеть, что $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$, - решение уравнения (1.18). Так как правая часть уравнения непрерывная функция, то решение задачи Коши с начальным условием $x\left(t_0\right) = 0, t_0 \in \mathbb{R}$, существует (теорема Пеано). Однако она не

дифференцируемая при $x = 0$ функция, поэтому единственность решения задачи Коши не гарантируется.

1. Пусть $x > 0$. Тогда $x = \left(\frac{t+A}{3}\right)^3, t + A > 0, A \in \mathbb{R}$;

2. Если $x < 0$, то $x = \left(\frac{t+B}{3}\right)^3, t + B < 0, B \in \mathbb{R}$.

Если $A = B$, то функция $x = \left(\frac{t+A}{3}\right)^3$ является решением уравнения (1.18) в $\mathbb{R}^2$.
Если $A \neq B$, то для любых $t_1 < t_2$ имеются также решения вида

$$x(t) = \begin{cases} \left(\frac{t-t_1}{3}\right)^3, t < t_1 \\ 0, t \in [t_1, t_2] \\ \left(\frac{t-t_2}{3}\right)^3, t > t_2 \end{cases}$$

которые называются составными или композиционными. Таким образом, интегральными кривыми уравнения (1.18) будут все дифференцируемые кривые, составленные из графиков решений, описанных в пунктах 1), 2), и решения $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$.$\diamond$

Через произвольную точку $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ во всей плоскости проходит бесконечно много (континуум) интегральных кривых, касающихся

оси Ot. Локально через любую точку $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2, x_0 \neq 0$, проходит одна интегральная кривая. Такая ситуация возникает потому, что решение $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$, является особым (рис. 1.1).

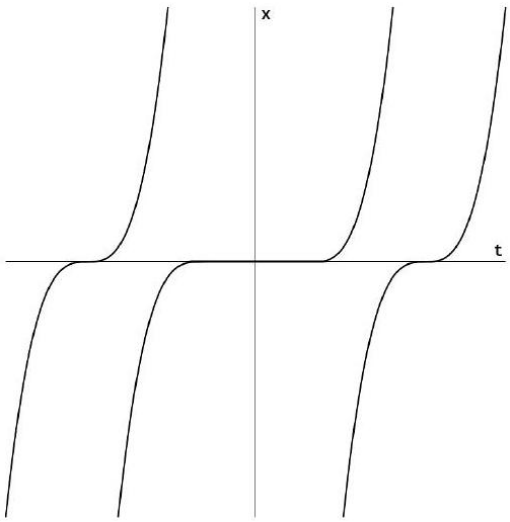


Рис. 1.1. Пример особого решения

Определение 1.2.2. Решение $\varphi(t), t \in J$ дифференциального уравнения (1.2)(также как и уравнения (1.1)) называется особым, если в любой окрестности каждой его точки $(t_0, \varphi(t_0)), t_0 \in J$ проходит другая интегральная кривая, имеющая с ним в этой точке общую касательную.

Это определение можно перефразировать следующим образом: решение $\varphi(t), t \in J$, называется особым, если в любой окрестности каждой его точки нарушается единственность решения задачи Коши.

Если через точку (t_0, x_0) проходят две или более интегральные кривые уравнения (1.2), то она называется точкой Пеано для этого уравнения. Говорят, что в этой точке имеет место явление Пеано. Все точки оси Ot являются точками Пеано уравнения (1.18).

Пример 1.2.2. Рассмотрим ещё одно уравнение с разделяющимися переменными в форме (1.17), правая часть которого является непрерывно дифференцируемой функцией:

$$\frac{dx}{dt} = x^2, (t, x) \in \mathbb{R}^2. \tag{1.19}$$

Решение. Заметим, что функция $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$, является решением. Пусть $x \neq 0$. Тогда уравнение (1.19) эквивалентно уравнению

$$\frac{dx}{x^2} = dt$$

Функция $x = -1/(t+C)$ будет решением уравнения, где C - произвольная постоянная. Вопрос: в каких областях функция $x = -1/(t + C)$ является общим решением? Этот пример показывает, что теорема 1.1 носит локальный характер. Несмотря на то, что правая часть уравнения (1.19) является непрерывно дифференцируемой функцией в R^2, любое его нетривиальное решение при стремлении t к некоторому конечному значению стремится к бесконечности (рис. 1.2).

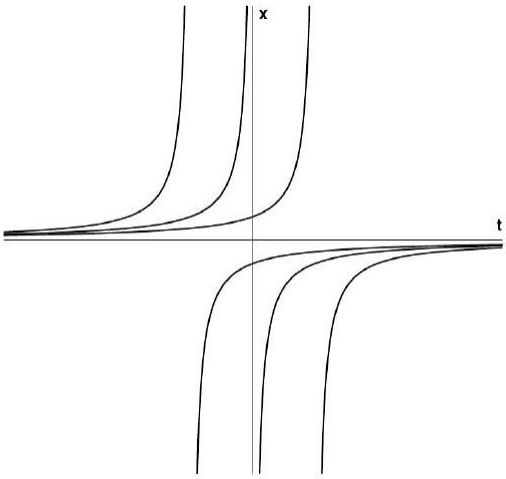


Рис. 1.2. $\frac{dx}{dt} = x^2$

Согласно определению 1.5 функция $x = -1/(t + C)$ является общим решением либо в области $x > 0$, либо в области $x < 0$.

2.2.3 1.2.3. Homogeneous equations

Уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{x}{t}\right), t \neq 0 \tag{1.20}$$

называется однородным дифференциальным уравнением. При этом предполагается, что функция $f(z)$ определена и непрерывна на интервале $I = (a, b)$. Произведём замену $x(t) = tz(t)$, где $z(t)$ - новая неизвестная функция. Если функция $f(z)$ определена на интервале I,

то функция $f\left(\frac{x}{t}\right)$ будет определена при $a < \frac{x}{t} < b$, то есть в областях Ω_1 и Ω_2. Они представлены на рис. 1.3 в предположении $a < 0$ и $b > 0$. Обозначим $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Множество Ω не сдержит точку $(0, 0)$.

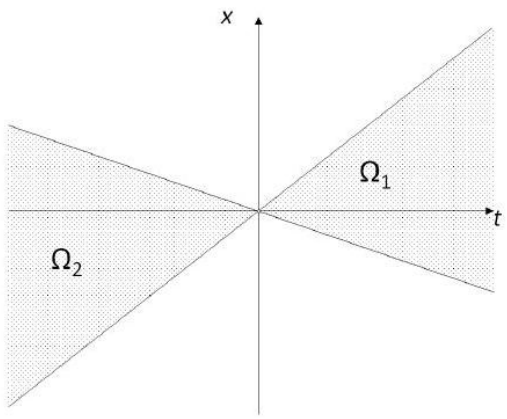


Рис. 1.3. Области Ω_1 и Ω_2

Theorem

1.6. Если $f(z) \in \mathbf{C}(I), f(z) \neq z, z \in I$, то через каждую точку $(t_0, x_0) \in \Omega$ проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (1.20).

Доказательство. $\rightarrow$ Положим $x(t) = tz(t)$. Тогда уравнение (1.20) последовательно принимает вид: $z + t\frac{dz}{dt} = f(z) \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{f(z)-z}{t}$. В результате получается уравнение с разделяющимися переменными, для которого справедлива теорема 1.5. Если $f(z) - z \neq 0$, то решения уравнения (1.20) будут описываться общим интегралом

$$\int \frac{dz}{f(z) - z} = \ln|t| + C$$

Пусть теперь при некотором $z = z_0, f(z_0) = z_0$. Тогда функции $x = z_0 t, t < 0$ и $x = z_0 t, t > 0$ будут решениями уравнения (1.20) в областях Ω_1 и Ω_2. При этом они могут быть как особыми, так и частными. Чтобы проиллюстрировать это утверждение, рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{\frac{x}{t}}, t > 0$$

решениями которого будут функции: $x_1(t) = 4(\sqrt{t} - C)^2, t \geq C^2, C >> 0; x = 0; x = 4t, t > 0$. Решение $x = 0, t > 0$ является особым,

а решение $x = 4t, t > 0$ - частным. При этом $x_1(t) < 4t, t > 0$, если $C > 0$. Если же $C < 0$, то $x_1(t) > 4t, t > 0$.

Уравнение в дифференциалах $P(t, x)dt + Q(t, x)dx = 0$ будет однородным, если P и Q - однородные функции одного и того же порядка. Оно подстановкой $x = tz(t)$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

К однородному уравнению приводится и уравнение более общего вида, а именно:

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{\alpha t + \beta x + \gamma}{at + bx + c}\right) \tag{1.21}$$

Если $\alpha b - a\beta \neq 0$, то произведём замену переменных:

$$\begin{cases} t = \tau + t_0 \\ x = y + x_0 \end{cases}$$

Определим t_0 и x_0, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha t_0 + \beta x_0 + \gamma = 0, \\ a t_0 + b x_0 + c = 0. \end{cases}$$

В результате получим однородное уравнение относительно переменных y и τ. Пусть теперь $\alpha b - a\beta = 0, \beta \neq 0$, тогда подстановка $y = \alpha t + \beta x$ приводит уравнение (1.21) к уравнению с разделяющимися переменными.

2.2.4 1.2.4. Linear equations of the first order

Определение 1.2.3. Дифференциальное уравнение вида

$$x'(t) + p(t)x = q(t), t \in J, \tag{1.22}$$

называется приведенным линейным уравнением первого порядка.
Будем предполагать, что $p(t), q(t) \in \mathbf{C}(J)$, где J - некоторый промежуток. Если $q \equiv 0$, то уравнение называется однородным. В противном случае - неоднородным. Через Ω_Π обозначим множество точек: $\Omega_\Pi = \{(t, x) : t \in J, |x| < \infty\}$.

Theorem

1.7. Пусть $p(t), q(t) \in \boldsymbol{C}(J)$. Тогда через любую точку $(t_0, x_0) \in \Omega_\Pi$ проходит единственная интегральная кривая, определённая на всем промежутке J.

Доказательство. - Рассмотрим однородное уравнение

$$x'(t) + p(t)x(t) = 0, t \in J.$$

Все его решения описываются функцией

$$x_{\text{од}}(t) = \tilde{C} e^{-\int_{t_0}^{t} p(\tau) d\tau}, t_0, t \in J,$$

где $\tilde{C}$ - произвольная постоянная.
Задание: получить самостоятельно формулу общего решения однородного уравнения.

Найдем общее решение уравнения (1.22) методом вариации постоянной Лагранжа. Будем искать его в виде

$$x(t) = C(t) e^{-\int_{t_0}^{t} p(\tau) d\tau}, \tag{1.23}$$

где неизвестная функция $C(t) \in \mathbf{C}^1(J)$. Подставляя функцию $x(t)$, $t \in J$(1.23) в уравнение (1.22), для определения $C(t)$ получим уравнение: $\frac{dC}{dt} = q(t) e^{\int_{t_0}^{t} p(\tau) d\tau}$. Интегрирование последнего даёт

$$C(t) = \int_{t_0}^{t} q(\omega) e^{\int_{t_0}^{\omega} p(\tau) d\tau} d\omega + D, D \in \mathbb{R}$$

Подставляя найденное значение $C(t)$ в (1.23), получим общее решение неоднородного уравнения (1.22):

$$x(t) = D \exp\left(-\int_{t_0}^{t} p(\tau) d\tau\right) + \exp\left(-\int_{t_0}^{t} p(\tau) d\tau\right) \int_{t_0}^{t} q(\omega) e^{\int_{t_0}^{t} p(\tau) d\tau} d\omega \tag{1.24}$$

Общее решение (1.24) состоит из двух слагаемых, первое из которых является общим решением линейного однородного уравнения, а второе - частным решением линейного неоднородного уравнения. Из этой формулы легко получить решение задачи Коши (1.5). Из начального условия (1.5) находим $D = x_0$. В результате имеем

$$x(t)=\left(x_0+\int_{t_0}^{t} q(\omega)e^{\int_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau}d\omega\right)\exp\left(-\int_{\mathrm{t}_0}^{\mathrm{t}} \mathrm{p}(\tau)\mathrm{d}\tau\right). \tag{1.25}$$

Докажем единственность решения задачи Коши (1.5). Предположим, что существуют два её решения: $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Составим разность
$X = x_1 - x_2$. Функция $X(t)$ удовлетворяет уже однородному уравнению с однородным начальным условием:

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{dx_1}{dt}+px_1=q,\\ \frac{dx_2}{dt}+px_2=q\end{array}\right. \Rightarrow \frac{dX}{dt}=-pX \Rightarrow X=C\exp\left(-\int_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau\right),$$
$$X\left(t_0\right)=x_1\left(t_0\right)-x_2\left(t_0\right)=0 \Rightarrow C=0 \Rightarrow X(t)\equiv 0, t\in J \Rightarrow x_1\equiv x_2, t\in J.$$

□

Замечание 1.2.2. Предполагалось, что (t_0, x_0) - фиксированная точка. Формула (1.25) показывает зависимость решения задачи Коши (1.5) от начальных данных. Её можно записать в виде: $x=\phi\left(t;t_0,x_0\right)$. Функция $x=\phi\left(t;t_0,x_0\right)$ называется общим решением в форме Коши. ⋄

Предположим, что можно установить такую зависимость между t_0, x_0 и некоторым параметром τ :

$$t_0=t_0(\tau), x_0=x_0(\tau),$$

что при изменении τ точка (t_0, x_0) пробегает все интегральные кривые и при этом разным значениям τ соответствуют разные кривые. Тогда общее решение в форме Коши $x=\phi\left(t;t_0,x_0\right)$ превращается в общее решение $x=\phi\left(t;t_0(\tau),x_0(\tau)\right)=\varphi(t;\tau)$. Воспользуемся этим замечанием и построим функцию, которая будет описывать все решения уравнения (1.19) во всей плоскости $\mathbb{R}^2$. Для этого положим $x_0=\tau$ и $t_0=-\tau$. Тогда общее решение будет описываться функцией, зависящей от одного параметра τ :

$$x=-\frac{\tau}{\tau(t+\tau)-1}, \quad \tau\in(-\infty,+\infty).$$

Например, если зафиксировать значение x_0 и положить $t_0=\tau$, то величина t_0 играет роль параметра или произвольной постоянной. Ниже это замечание будет использовано при исследовании решений уравнения Риккати.

Вопрос: может ли решение линейного однородного уравнения (1.22) касаться или пересекать ось $x=0$?

2.2.5 1.2.5. Bernoulli equation

Определение 1.2.4. Уравнение вида

$$x'+p(t)x=q(t)x^n, n\neq 0,1; t\in J, \tag{1.26}$$

называется уравнением Бернулли. Предполагается, что $q(t), p(t)\in\in \mathbf{C}(J)$.
Уравнение Бернулли всегда интегрируется в конечном виде. Действительно, разделим обе части уравнения на x^n, считая $x\neq 0$. Тогда

$$\frac{x'}{x^n}+\frac{p(t)}{x^{n-1}}=q(t).$$

Если произвести подстановку $z=x^{1-n}$, то в результате для определения $z(t)$ получим линейное уравнение

$$z'(t) + (1-n)p(t)z = (1-n)q(t).$$

Согласно формуле (1.24) общее решение линейного уравнение имеет вид

$$x^{1-n} = CA(t) + B(t),$$

где C - произвольная постоянная. Если $n > 0$, то при делении на x^n мы могли потерять нулевое решение. Проверка показывает, что $x(t) = 0, t \in J$, - решение уравнения Бернулли.

Решим теперь уравнение Бернулли одноимённым методом. Произведём подстановку $x(t) = u(t)v(t)$, где $u(t)$ и $v(t)$ - неизвестные непрерывно дифференцируемые функции. В результате получим уравнение

$$vu' + u\left(v' + p(t)v\right) = q(t)v^n u^n. \tag{1.27}$$

Для определения функции $v(t)$ положим

$$v'(t) + p(t)v(t) = 0.$$

Нетривиальные решения этого уравнения описываются формулой (1.23) с постоянной $C \neq 0$. Среди них выбирается самое простое (например, постоянная C полагается равной единице). Уравнение (1.27) становится уранением с разделяющимися переменными относительно функции $u(t)$.

2.2.6 1.2.6. Riccati equation

Определение 1.2.5. Уравнение вида

$$x'(t) + p(t)x(t) = q(t)x^2 + f(t), t \in J,$$

называется уравнением Риккати. Предполагается, что $p(t), q(t), f(t) \in\in \mathbf{C}(J)$.

Уравнение Риккати в общем случае не интегрируется. Если известно какое-либо его решение $x_1(t)$, то произведя подстановку

$$y(t) = x(t) - x_1(t),$$

мы получим уравнение Бернулли.

Пример 1.2.3. Решить уравнение Риккати ([8], §3, 94)

$$t^2x' - 5tx + t^2x^2 + 8 = 0, t > 0. \tag{P}$$

Решение. Из основной теоремы (теоремы существования и единственности решения задачи Коши) следует, что при $t > 0$ через каждую точку полуплоскости $t > 0$ проходит единственная интегральная кривая. Найдем частные решения уравнения Риккати. Будем искать их в виде $\phi(t) = \frac{A}{t}$. Чтобы найти значения A, подставим функцию $\phi(t) = \frac{A}{t}$ в уравнение (P):

$$-A - 5A + A^2 + 8 = 0 \Rightarrow A^2 - 6A + 8 = 0 \Rightarrow A_1 = 2, A_2 = 4.$$

В результате мы получили два частных решения, а именно $\phi_1 = \frac{4}{t}$ и $\phi_2 = \frac{2}{t}$. Будем искать решения уравнения Риккати в виде

$$x(t) = \frac{4}{t} + u(t)$$

Подставив его в уравнение (P), для определения функции $u(t)$ получим уравнение Бернулли:

$$u' + \frac{3}{t}u + u^2 = 0.$$

Произведём подстановку $\omega = \frac{1}{u}$. Функция $\omega(t)$ удовлетворяет линейному уравнению, интегрируя которое найдём решения уравнения (P):

$$\omega' - \frac{3}{t}\omega = 1 \Rightarrow \omega = D_1 t^3 - \frac{t}{2} \Rightarrow u = \frac{2}{t\left(2D_1 t^2 - 1\right)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x(t) = \frac{4}{t} + \frac{2}{t\left(2D_1 t^2 - 1\right)}$$

Все решения уравнения (P) при $t > 0$ описываются функциями

$$\left[\begin{array}{c} \phi_1 = \frac{4}{t}, \\ x(t) = \frac{4}{t} + \frac{2}{t(2D_1 t^2 - 1)}. \end{array}\right.$$

Картина поведения решений уравнения Риккати (P) при $t > 0$ представлена на рис. 1.4.

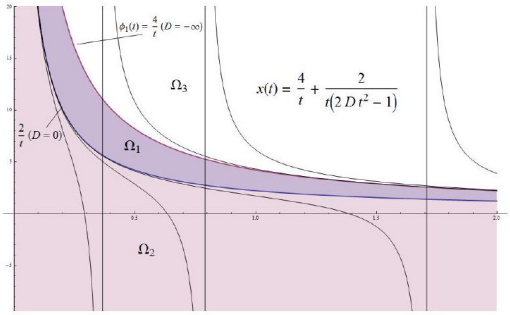


Рис. 1.4. $x(t) = \frac{4}{t} + \frac{2}{t(2D_1 t^2 - 1)}$

Функция $x(t) = \frac{4}{t} + \frac{2}{t(2D_1 t^2 - 1)}, D_1 \in (-\infty, 0]$, является общим решением в области $\Omega_1 = \{(t, x) : 2 < xt < 4, t > 0\}$. По заданной точке (t_0, x_0) в полуплоскости $t > 0$ постоянная D_1 определяется по формуле

$$D_1 = \frac{x_0 t_0 - 2}{2t_0^2\left(x_0 t_0 - 4\right)}.$$

Если искать решения уравнения Риккати в виде

$$x(t) = \frac{2}{t} + v(t),$$

то все решения уравнения (P) при $t > 0$ будут описываться функциями

$$\left[\begin{array}{c} \phi_2 = \frac{2}{t}, t > 0, \\ x(t) = \frac{2}{t} + \frac{2t}{t^2 + D_2}. \end{array}\right.$$

При $D_2 = 0$ мы получим решение $\phi_1 = \frac{4}{t}$, а при $D_2 = \infty - \phi_2$. Если произвести замену $D_1 = \frac{-1}{2D_2}$, то множество решений $x_1(t) \cup \phi_1(t)$ перейдёт

во множество решений $x_2(t) \cup \phi_2(t)$. Рассмотрим решение уравнения Риккати в форме Коши, положив $x_0 = 1, t_0 = \tau > 0$. В результате при $\tau \in (2, 4)$ мы получим функцию,

описывающую все решения уравнения Риккати в области Ω_1 в зависимости от параметра τ :

$$x = \frac{2}{t} + \frac{2(\tau-2)t}{(\tau-2)t^2 + \tau^2(4-\tau)}$$

Построенная функция удовлетворяет всем условиям определения 1.1.5 общего решения уравнения первого порядка в области Ω_1.

Вопрос: можно ли построить функции, описывающие все решения уравнения Риккати в областях $\Omega_2 u \Omega_3$?

2.2.7 1.2.7. Integrating factor.

Если левая часть уравнения (1.9) не является полным дифференциалом, то возникает вопрос: нельзя ли найти такую функцию, при умножении на которую уравнение (1.9) станет уравнением в полных дифференциалах?

Определение 1.2.6. Функция $\mu(t,x) \in C(\Omega), \mu(t,x) \neq 0$, называется интегрирующим множителем уравнения (1.9), если при умножении на нее последнее становится уравнением в полных дифференциалах.

Это означает, что существует функция $U \in C^1(\Omega), (t,x) \in \Omega$ такая, что $\mu(Pdt + Qdx) = dU$:

$$\mu(Pdt + Qdx) = dU, U \in C^1(\Omega), (t,x) \in \Omega.$$

Если $\mu(t,x) \in \mathbf{C}^1(\Omega)$, а функции $\mu P, \mu Q$ и область Ω удовлетворяют условиям теоремы 1.4 , то

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial t}, (t,x) \in \Omega$$

Последнее уравнение можно переписать в виде

$$Q\frac{\partial \mu}{\partial t} - P\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}\right), \quad (t,x) \in \Omega. \tag{1.28}$$

Для определения интегрирующего множителя $\mu(t,x)$ мы получили уравнение в частных производных первого порядка. Его решение

является более сложной задачей, чем задача решения уравнения (1.9). Однако нам требуются не все решения уравнения (1.28), а только одно. На практике интегрирующий множитель часто ищут либо как функцию только от t, либо от x. Остановимся на первом случае. Пусть $\mu = \mu(t) \Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$. Из уравнения (1.28) получаем

$$\frac{d\mu}{dt} = \mu\frac{\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}}{Q}, \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}}{Q}dt, (t,x) \in \Omega.$$

Если правая часть последнего уравнения является только функцией от t, т.е. $\frac{\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}}{Q} = \omega(t)$, то мы получим $\mu = Ce^{\int \omega(t)dt}$.

Как показывает теорема, доказанная ниже, число интегрирующих множителей для данного уравнения бесконечно.

Theorem

1.8. Если $\mu(t,x)$ - интегрирующий множитель уравнения (1.9), т.е. $\mu(Pdt + Qdx) = dU$, то интегрирующим множителем будет функция $\mu\phi(U)$, где ϕ - некоторая непрерывная функиия, отличная от нуля.
$\square$ Имеем $\phi(U)\mu(Pdt + Qdx) = \phi(U)dU = F'(U)dU = dF(U)$. В качестве функции $F(U)$ можно взять $F(U) = \int \phi(U)dU$. Следовательно, $\mu_1 = \phi(U)\mu$ также является интегрирующим множителем уравнения (1.9). Можно показать, что полученная формула описывает всё множество интегрирующих множителей уравнения (1.9) [9].

Theorem

1.8 на практике оказывается очень полезной. Покажем это на примере.

Пример 1.2.4. Решить уравнение

$$x^3dt + \left(e^{-2t} - x^2\right)dx = 0, x > 0$$

В силу теоремы 1.8 функция $\frac{\phi(t-\ln x)}{x^3}$ будет интегрирующим множителем уравнения $x^3dt - x^2dx = 0$. Действительно, умножая уравнение на интегрирующий множитель, получим $\frac{\phi(t-\ln x)}{x^3}\left(x^3dt - x^2dx\right) = \phi(t - \ln x)\left(dt - \frac{dx}{x}\right) = \phi(t - \ln x)d(t - \ln x)$. Функция $\psi(x)e^{2t}$ будет интегрирующим множителем уравнения $e^{-2t}dx = 0$. Подберем функции ϕ и ψ таким образом, чтобы $\frac{\phi(t-\ln x)}{x^2} \equiv e^{2t}\psi(x) = \mu(t,x)$. Положим $x = 1$. Тогда получим

$$\phi(t) = Ce^{2t}, C = \psi(1) \neq 0 \Rightarrow \phi(t - \ln x) = Ce^{2(t-\ln x)} = Cx^{-2}e^{2t} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mu(t,x) = C\frac{e^{2t}}{x^{-5}} \Longrightarrow \frac{2e^{2t}}{x^2} - \frac{1}{x^4} = C.\diamond$$

Линейное уравнение (1.22), как нетрудно видеть из пункта 1.2.4 (Линейные уравнения), имеет интегрирующий множитель

$$\mu = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau\right)$$

Уравнение с разделяющимися переменными (1.14), как следует из пункта 1.2.2 (Уравнения с разделяющимися переменными), имеет интегрирующий множитель $\frac{1}{T_2(t)X_1(x)}$.

Из этого результата вытекает следующий: если уравнение в дифференциалах (1.9) является однородным с показателем однородности m, то оно имеет интегрирующий множитель $\mu = \frac{1}{tP+xQ}$. Действительно, произведя подстановку $x = tu(t)$, находим

$$P(t,tu)dt + Q(t,tu)(udt + tdu) = 0 \Rightarrow$$
$$t^m[P(1,u)dt + Q(1,u)(udt + tdu)] = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t^m[P(1,u) + Q(1,u)u]dt + t^{m+1}Q(1,u)du = 0$$

После умножения уравнения на

$$\mu = \frac{1}{t^{m+1}[P(1,u) + Q(1,u)u]},$$

мы получим уравнение с разделяющими переменными. Отсюда следует справедливость нашего утверждения.

2.3 1.3. Methods for solving equations of the 1st order, unsolved with respect to the derivative

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка, неразрешенное относительно производной:

$$F\left(t, x, x'\right)=0 \tag{1.29}$$

в котором t - независимая переменная, а $x(t)$ - искомая функция. Положим $x'=p$. Будем предполагать, что функция $F(t, x, p\ )$ определена в области $G \subseteq \mathbb{R}^3_{t,x,p}, F \in \mathbf{C}^1(G), |\nabla(F)| \neq 0$.

Пусть уравнение (1.29) разрешимо относительно $x'(t)$. В результате его решения мы получаем одно или несколько уравнений, разрешенных относительно производной:

$$\frac{dx}{dt}=f_k(t, x), k \geq 1 \tag{1.30}$$

Если вещественные функции $f_k(t, x)$ определены в некоторой области $D \subseteq \mathbb{R}^2_{t,x}$ и удовлетворяют условиям теоремы 1.1, то через любую точку $(t_0, x_0) \in D$ проходит одна и только одна интегральная кривая $x=x_k(t)$ каждого из уравнений (1.30). Эти интегральные кривые также являются интегральными кривыми уравнения (1.29).

Наклон касательной к интегральной кривой $x=x_k(t)$ в точке (t_0, x_0) определяется значением $p_{0k}=f_k\left(t_0, x_0\right)$. Отметим, что числа (t_0, x_0, p_{0k}) удовлетворяют уравнению (1.29), т.е. $F\left(t_0, x_0, p_{0k}\right)=0$. Пусть значения p_{0k} различны, и их число равно n. Тогда через точку (t_0, x_0) проходит n различных интегральных кривых уравнения (1.29). Поэтому если требуется выделить одну из них, то необходимо задать не только начальные данные (t_0, x_0), но и значение $p_{0k}=x_k'\left(t_0\right)$.

Пример 1.3.1. Рассмотрим уравнение $t^2 x'^2+t x x'-2 x^2=0, t>0$. Разрешая его относительно x', получим $x'=\frac{x}{t}, x'=-\frac{2x}{t}$. Решениями этих уравнений являются функции $x=C_1 t, x=\frac{C_2}{t^2}$. Здесь C_1, C_2 - произвольные постоянные. Отсюда видно, что через каждую точку $\left(t_0, x_0\right), t_0>0$ плоскости $\mathbb{R}^2_{t,x}$ проходят две интегральные кривые. Чтобы выделить одну из них (например, первую), нужно потребовать $x\left(t_0\right)=x_0, x'\left(t_0\right)=\frac{x_0}{t_0}$.$\diamond$

Если уравнение (1.29) не удается разрешить относительно производной $x'(t)$, то его решения часто находятся в параметрической форме.

Определение 1.3.1. Пара функций $<\phi(\tau), \psi(\tau), \tau \in T>$, называется решением уравнения (1.29) в параметрической форме, если

1. функции $\phi(\tau), \psi(\tau) \in \mathbf{C}^1(T); \phi'(\tau) \neq 0, \tau \in T$;
2. $\left(\phi(\tau), \psi(\tau), \frac{\psi'(\tau)}{\phi'(\tau)}\right) \in G$ для любого $\tau \in T$;
3. $F\left(\phi(\tau), \psi(\tau), \frac{\psi'(\tau)}{\phi'(\tau)}\right)=0$ для любого $\tau \in T$.

Здесь предполагается, что T является интервалом. Интегральной кривой уравнения (1.29) будет кривая $t=\phi(\tau), x=\psi(\tau), \tau \in T$, на плоскости $\mathbb{R}^2_{t,x}$. В силу определения она является гладкой.

Положим $x'=p$ и запишем уравнение (1.29) в виде $F(t, x, p)=0$. Будем рассматривать t, x, p как декартовые координаты. Уравнение $F(t, x, p)=0$ задает в области $G \subseteq \mathbb{R}^3_{t,x,p}$ некоторое множество S. Если оно не пусто, то S - гладкая поверхность, заданная неявно. Каждому решению $\varphi(t), t \in J$, в пространстве $\mathbb{R}^3_{t,x,p}$ отвечает кривая
$\Gamma=\{(t, x, p): x=\varphi(t), p=\varphi'(t), t \in J\}$. Назовём её интегральной кривой уравнения в $\mathbb{R}^3_{t,x,p}$. Так как $F\left(t, \varphi(t), \varphi'(t)\right)=0$, то она лежит на поверхности $S: \Gamma \subset S$. Но не всякая

гладкая кривая, лежащая на поверхности S, является интегральной кривой уравнения $F(t,x,p)=0$, т.к. в каждой её точке должно выполняться соотношение $dx-pdt=0$. Пусть некоторая кривая Г на поверхности S удовлетворяет данному соотношению и описывается функциями $t=\phi(\tau), x=\psi(\tau), p=\chi(\tau)$. Первые две функции определяют кривую γ в плоскости $\mathbb{R}^2_{t,x}$. Будем предполагать, что $\phi'(\tau)\neq 0$, и, следовательно, функция $\phi(\tau)$ обратима и τ можно выразить через t. В результате кривая γ будет описываться некоторой функцией $x=\varphi(t)$. Вдоль кривой Г мы, по предположению, имеем $dx-pdt=0\Rightarrow p=\varphi'(t)$. Так как кривая Г лежит на поверхности S, то $F\left(t,\varphi(t),\varphi'(t)\right)=0$. Следовательно, она - интегральная кривая. Кривая γ является проекцией Г на плоскость $\mathbb{R}^2_{t,x}$ и является интегральной кривой уравнения (1.29) в плоскости $\mathbb{R}^2_{t,x}$.

Гладкая поверхность, заданная неявно, описывается локально с помощью двух параметров. Обозначим их u,v. Пусть уравнение $F(t,x,p)=0$ допускает в некоторой области $D\subseteq\mathbb{R}^2_{u,v}$ параметрическое представление: $t=\phi(u,v), x=\psi(u,v), p=\chi(u,v), (u,v)\in D$, где $\chi(u,v)\in\mathbf{C}(D)$, а $\phi(u,v),\psi(u,v)\in\mathbf{C}^1(D)$. Под этим следует понимать:

1. отображение $(u,v)\longrightarrow(\phi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))$ является взаимно однозначным отображением D на S ;
2. $F(\phi(u,v),\psi(u,v),\chi(u,v))=0$ для любых $(u,v)\in D$.

Покажем, что в этом случае интегрирование уравнения (1.29) сводится к интегрированию уравнения, разрешенного относительно производной. Считая параметры u и v независимыми переменными, вычислим дифференциалы функций $t=\phi(u,v)$ и $x=\psi(u,v)$. Имеем $dt=\frac{\partial\phi}{\partial u}du+\frac{\partial\phi}{\partial v}dv, dx=\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial v}dv$. Мы получим некоторую кривую на поверхности S, если установим соответствующим образом связь между u и v. Однако она будет интегральной кривой тогда и только тогда, когда выполняется соотношение $dx-pdt=0$. Из него мы получим дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\psi}{\partial u}du+\frac{\partial\psi}{\partial v}dv-\chi(u,v)\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}du+\frac{\partial\phi}{\partial v}dv\right)=0\Rightarrow\\&\Rightarrow\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}-\chi\frac{\partial\phi}{\partial v}\right)dv=\left(\chi\frac{\partial\phi}{\partial u}-\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)du\end{aligned}\tag{1.31}$$

которое свяжет между собой u и v нужным образом. Уравнение (1.31) является уравнением в дифференциалах. Предположим, что оно в некоторой области имеет общее решение $v=w(u,C), C=\text{const}$. Тогда при подстановке функций $t=\phi(u,w(u,C)), x=\psi(u,w(u,C)), x'=p=\chi(u,w(u,C))$ в уравнение (1.29) оно обратится в тождество. Следовательно, мы получили общее решение уравнения (1.29) в параметрической форме.

Частные случаи уравнения (1.29)

Если уравнение (1.29) можно разрешить относительно x или t, то его интегрирование не представляет сложности.

1. Пусть уравнение (1.29) разрешено относительно $x: x=f\left(t,x'\right)$. Положив $x'=p$, получим $x=f(t,p)$. В качестве параметров (u,v) возьмём t и p. Будем считать, что функция f непрерывно дифференцируемая. Из соотношения $dx=pdt$ получим уравнение

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} - p\right) dt + \frac{\partial f}{\partial p} dp = 0 \tag{1.32}$$

которое служит для определения связи между p и t. Уравнение (1.32) также можно получить из уравнения (1.31). Предположим, что уравнение (1.32) в некоторой области имеет общее решение либо в виде $p = p(t, C)$, либо в виде $t = t(p, C)$. Тогда мы получим общее решение уравнения (1.32) либо в виде $x = x(t, p(t, C))$, либо в параметрической форме

$$\begin{cases} x = x(t(p, C), p), \\ t = t(p, C). \end{cases}$$

2. Пусть теперь уравнение (1.1) можно представить в виде

$$t = f\left(x, x'\right). \tag{1.33}$$

Положив $x' = p$, будем иметь $t = f(x, p)$. В качестве параметров возьмём x и p. Функцию $f(x, p)$ будем считать непрерывно дифференцируемой. Тогда из уравнений (1.33) и $dx = pdt$ следует уравнение

$$\left(p\frac{\partial f}{\partial x} - 1\right) dx + p\frac{\partial f}{\partial p} dp = 0.$$

Предположим, что оно в некоторой области имеет общее решение либо в виде $p = p(x, C)$, либо в виде $x = x(p, C)$. Тогда уравнение (1.33)
(а значит, и уравнение (1.29)) будет иметь соответственно общее решение либо в виде $t = f(x, p(x, C))$, либо в параметрической форме:

$$\begin{cases} t = f(x(p, C), p), \\ x = x(p, C). \end{cases}$$

3. Рассмотрим линейное относительно x и t уравнение: $x = \phi(p)t + +\psi(p)$, в котором $\phi(p)$ и $\psi(p)$ - непрерывно дифференцируемые функции. Если $\phi(p) \not\equiv p$, то это уравнение называется уравнением Лагранжа. Из соотношения $dx = pdt$ получаем дифференциальное уравнение
$\phi(p)dt + \phi'(p)tdp + \psi'(p)dp = pdt \Rightarrow (p - \phi(p))dt = \left(t\phi'(p) + \psi'(p)\right) dp$, которое служит для определения связи между t и p. Это уравнение относительно переменной t является линейным:

$$\frac{dt}{dp} = \frac{t\phi'(p)}{p - \phi(p)} + \frac{\psi'(p)}{p - \phi(p)}$$

Интегрируя его, получаем решения в параметрическом виде:

$$\begin{cases} t = B(p) \cdot C + A(p) \\ x = \phi(p)t + \psi(p), C = \text{const}. \end{cases}$$

Здесь мы воспользовались формулой (1.24) для общего решения линейного уравнения. Пусть уравнение $\phi(p) - p = 0$ имеет решения $p = p_i$. Тогда функции $x = p_i t + \psi\left(p_i\right)$, графики которых являются прямыми линиями, могут быть как частными решениями уравнения Лагранжа, так и особыми.
4. Если $\phi(p) \equiv p$, то мы будем иметь уравнение Клеро:

$$x = pt + \psi(p), t \in (\alpha, \beta).$$

Для его решения используем схему решения уравнения Лагранжа. Из соотношения $dx = pdt$ находим $pdt = tdp + pdt + \psi'(p)dp$, что даёт нам $(t + \psi'(p))\, dp = 0$. Отсюда следует:
a) $dp = 0 \Rightarrow p = C$. Значит, найденное однопараметрическое семейство решений имеет вид

$$x = Ct + \psi(C),$$

а соответствующие им интегральные кривые являются прямыми линиями;
b) $t = -\psi'(p)$.

В этом случае уравнение Клеро имеет решение в параметрической форме:

$$\begin{cases} t = -\psi'(p) \\ x = -p\psi'(p) + \psi(p) \end{cases}$$

Если $\psi(p)$ дважды непрерывно дифференцируемая функция и выполняется неравенство $\psi''(p) \neq 0$, то решение $t = -\psi'(p), \quad x = pt + \psi(p)$ является особым. Ниже в разделе 2.4 главы 2 это утверждение будет доказано.

2.4 1.4. About one method of lowering the order of differential equations

2.4.1 1.4.1. Higher-order differential equations

Пусть функция $F\,(t, x, x_1, ..., x_n)$ определена и непрерывна в некоторой области $G \subseteq \mathbb{R}^{n+2} (n \geq 1)$.

Определение 1.4.1. Уравнение вида

$$F\left(t, x, x', ..., x^{(n)}\right) = 0, \tag{1.34}$$

в котором t - независимая переменная, $x(t)$ - неизвестная функция, а $x', ..., x^{(n)}$ - её производные, называется дифференциальным уравнением n-го порядка. (Порядок старшей производной, входящей в уравнение, называется порядком уравнения.)

Определение 1.4.2. Функция $x = \phi(t)$, определенная на интервале $J_t \subseteq \mathbb{R}^1$, называется решением уравнения (1.34), если

1. $\phi(t) \in \mathbf{C}^{(n)}\,(J_t)$;
2. $\left(t, \phi(t), ..., \phi^{(n)}(t)\right) \in G$ для любого $t \in J_t$;
3. $F\left(t, \phi(t), ..., \phi^{(n)}(t)\right) = 0$ для любого $t \in J_t$.

Ниже будут рассмотрены некоторые частные случаи уравнения (1.34), когда его интегрирование или понижение порядка возможно осуществить на основании теории однопараметрических групп преобразований.

2.4.2 1.4.2. Single-parameter transformation groups on the plane

В плоскости $\mathbb{R}^2$ точек (t, x) рассмотрим семейство $\{T_\alpha, \alpha \in J\}$ обратимых преобразований

$$T_\alpha : \quad \tau = \phi(t, x; \alpha), \eta = \psi(t, x; \alpha), \tag{1.35}$$

зависящих от одного параметра $\alpha \in J$, где J - интервал из $\mathbb{R}^1$. Функции ϕ и ψ, так же как и все встречающиеся ниже функции, предполагаются достаточно гладкими по совокупности аргументов. Каждому фиксированному значению параметра $\alpha \in J$ соответствует конкретное преобразование T_α, которое переводит точки (t, x) в новые точки (τ, η) плоскости $\mathbb{R}^2$. Обозначим через $T_\beta T_\alpha$ произведение двух преобразований T_α и T_β, через I - тождественное преобразование, а через T_α^{-1} - обратное к T_α преобразование. По определению имеем $T_\alpha T_\alpha^{-1} = T_\alpha^{-1} T_\alpha = I$. Прежде чем продолжить изложение, напомним определение группы.

Определение 1.4.3. Операцией умножения на множестве $\mathcal{G}$ называется правило, по которому любым двум элементам $x, y \in \mathcal{G}$ ставится в соответствие некоторый элемент $\gamma(x, y) \in \mathcal{G}$.

Определение 1.4.4. Семейство $\mathcal{G} = \{T_\alpha, \alpha \in J\}$ преобразований (1.35) образует однопараметрическую группу преобразований, если

1. для любых $\alpha, \beta \in J$ существует единственный параметр $\gamma(\alpha, \beta) \in\in J$ такой, что $T_\beta T_\alpha = T_{\gamma(\alpha,\beta)} \in \mathcal{G}$;
2. существует $\alpha_0 \in J$ такой, что

$$T_{\alpha_0} = I \in \mathcal{G};$$

3. для любого $\alpha \in J$ существует $\alpha_{-1} \in J$ такой, что $T_\alpha^{-1} = T_{\alpha_{-1}} \in\in \mathcal{G}$.

Первое условие означает, что последовательное применение двух преобразований сначала $T_\alpha \in \mathcal{G}$, а затем $T_\beta \in \mathcal{G}$ равносильно применению преобразования $T_\gamma \in \mathcal{G}$ с параметром $\gamma(\alpha, \beta) \in J$, который однозначно определяется значениями α и β. Функция $\gamma = \gamma(\alpha, \beta)$ задает закон умножения преобразований на множестве $\mathcal{G} = \{T_\alpha, \alpha \in J\}$ и ниже предполагается достаточное число раз дифференцируемой. Заметим, что в случае группы преобразований свойство ассоциативности

всегда имеет место (доказать самим). Так как преобразование $T_{\alpha_0} = I$, то $T_{\alpha_0} T_\alpha = T_\alpha$, а значит, $\gamma(\alpha, \alpha_0) = \alpha$. С другой стороны, $T_\beta T_{\alpha_0} = T_\beta$ и $\gamma(\alpha_0, \beta) = \beta$. В результате для любых $\alpha, \beta \in J$ имеем

$$\gamma(\alpha, \alpha_0) = \alpha, \quad \gamma(\alpha_0, \beta) = \beta. \tag{1.36}$$

Замечание 1.4.1. Преобразования, образующие однопараметрическую группу, могут быть заданы как на всей плоскости $\mathbb{R}^2$, так и в некоторой области $X \subseteq \mathbb{R}^2$. Во втором случае преобразование (1.35) при любом $\alpha \in J$ переводит точку (t, x), принадлежащую X, в точку (τ, η), также принадлежащую X.

Определение 1.4.5. Параметр α называется каноническим, если функция $\gamma(\alpha, \beta)$ имеет вид: $\gamma(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$. Тогда в терминах функций (1.35) формула умножения преобразований $T_\beta T_\alpha = T_{\alpha+\beta}$ запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} &\phi(\phi(t, x; \alpha), \psi(t, x; \alpha); \beta) = \phi(t, x; \alpha + \beta), \\ &\psi(\phi(t, x; \alpha), \psi(t, x; \alpha); \beta) = \psi(t, x; \alpha + \beta). \end{aligned} \tag{1.37}$$

Замечание 1.4.2. Если ввести новый параметр $\theta = \theta(\alpha)$, где $\theta(\alpha)-$ строго монотонная функция, то, вообще говоря, функция γ и интервал J изменятся. При этом θ станет новым параметром группы. Ниже будет показано, что всегда существует замена, приводящая к каноническому параметру.

Для пояснения вышеприведенных определений проиведём несколько примеров преобразований (1.35).

1. Группа переносов $\mathcal{G}$ вдоль оси x состоит из преобразований

$$T_\alpha : \quad \tau = t, \eta = x + \alpha, \left(\alpha \in \mathbb{R}^1\right),$$

определенных на всей плоскости $\mathbb{R}^2$. В результате двух последовательных переносов получим

$$\tau_1 = t, \eta_1 = x + (\alpha + \beta).$$

Значит, $\gamma(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$ и параметр α является каноническим. Далее $\alpha_{-1} = -\alpha$ и $\alpha_0 = 0$. Нетрудно видеть, что преобразования, образующие группу переносов вдоль оси x, могут быть также заданы на любой

полосе $X = \{a \leq t \leq b, |x| < \infty\}$. Аналогично определяется группа переносов вдоль оси t.

2. Семейство преобразований

$$T_\alpha : \quad \tau = \alpha t, \eta = \alpha^2 x, (\alpha \in (0, +\infty)),$$

действующих на всей плоскости $\mathbb{R}^2$, образуют однопараметрическую группу растяжений. Здесь мы имеем $\gamma(\alpha, \beta) = \alpha\beta, \alpha_0 = 1, \alpha_{-1} = \frac{1}{\alpha}$. Это семейство будет также образовывать однопараметрическую группу преобразований, если их задать в полуплоскости $\mathbb{R}^2_+ = \{(t, x) \in \in \mathbb{R}^2, t > 0\}$ или $\mathbb{R}^2_- = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2, t < 0\}$, либо, например, в любом из четырех квадрантов. В этом примере параметр $\theta = \ln \alpha$ будет каноническим.

3) Следует отметить, что не всякая совокупность преобразований (1.35) образует однопараметрическую группу. Возьмем

$$\tau = t + \alpha, \eta = x + \alpha^2, \quad \alpha \in (-\infty, +\infty).$$

Тогда $\tau_1 = t + (\alpha + \beta), \eta_1 = x + (\alpha^2 + \beta^2), \beta \in (-\infty, +\infty)$. Однако здесь не выполняется условие 1 определения однопараметрической группы, т.к. $(\alpha + \beta)^2 \neq \alpha^2 + \beta^2$.

Определение 1.4.6. Функция $U(t, x)$ называется инвариантом однопараметрической группы преобразований (1.35), если для всех допустимых (t, x) и всех $\alpha \in J$ выполняется равенство

$$U(\tau, \eta) = U(t, x)$$

Выше в пункте 1 инвариантом группы переносов является функция $U(t, x) = t$. В пункте 2 - функция $U = xt^{-2}$ (при $t \neq 0$).

Теория однопараметрических групп широко применяется при решении многих нелинейных задач механики и физики. Используемые при их исследовании преобразования часто рассматриваются не на всём открытом множестве $X \times J$, на котором они определены, а на некотором его сужении $X_1 \times J_{\alpha_0}$ таком, что $X_1 \subset X, J_{\alpha_0} \subset J$, где J_{α_0} некоторая окрестность точки α_0. Однопараметрические группы могут также рассматриваться на множестве $X \times J_{\alpha_0}$.

Определение 1.4.7. Пусть условия $1 - 3$ в определении однопараметрической группы преобразований $\mathcal{G}$ выполняются не для всех значений

$(t,x) \in X$ и всех значений параметра из некоторого фиксированного интервала J, а только для $(t,x) \in X_1$ и значений параметров α, β и $\gamma(\alpha,\beta)$ в некоторой достаточно малой окрестности значения α_0. Тогда $\mathcal{G}$ называют локальной однопараметрической группой преобразований.

Если рассматривать эти преобразования сразу на множестве $X_1 \times \times J_{\alpha_0}$, то группу $\mathcal{G}$ можно называть просто однопараметрической группой. Это связано с тем, что её преобразования удовлетворяют требованиям $1-3$ определения однопараметрической группы.

Более подробно с теорией однопараметрических групп можно ознакомиться в работе [3], в которой она довольно просто изложена.

Сформулируем и докажем лемму и теорему, что позволит лучше понимать излагаемый ниже материал.

Лемма 1.1. Во всякой локальной однопараметрической группе можно ввести канонический параметр.

Theorem

1.9. Всякая локальная однопараметрическая группа преобразований при помощи подходящей замены переменных

$$(t,x) \to (u(t,x), v(t,x))$$

u замены параметра $\alpha \to \theta(\alpha)$ приводится κ локальной группе переносов

$$T_\theta : \tilde{u} = u, \tilde{v} = v + \theta$$

Переменные u и v, представленные в теореме 1.9 (так же как и параметр θ), называются каноническими.

Для доказательства высказанных утверждений запишем групповое свойство 1) определения 1.18 в виде

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \phi(\tau,\eta;\beta) = \phi(t,x;\gamma(\alpha,\beta)), \\ \eta_1 &= \psi(\tau,\eta;\beta) = \psi(t,x;\gamma(\alpha,\beta)). \end{aligned}$$

Функция $\gamma(\alpha,\beta)$ подчиняется условиям (1.36). Дифференцируя обе части этих равенств по β и полагая $\beta = \alpha_0$, получим согласно (1.36) уравнения

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial\beta}(\tau,\eta;\beta)\Big|_{\beta=\alpha_0} = \frac{\partial\phi}{\partial\alpha}(x,t;\alpha)\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\beta}(\alpha,\beta)\right)\Big|_{\beta=\alpha_0} \\ \frac{\partial\psi}{\partial\beta}(\tau,\eta;\beta)\Big|_{\beta=\alpha_0} = \frac{\partial\psi}{\partial\alpha}(x,t;\alpha)\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\beta}(\alpha,\beta)\right)\Big|_{\beta=\alpha_0}. \end{cases}$$

Если ввести обозначения

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\partial\gamma}{\partial\beta}(\alpha,\beta)\Big|_{\beta=\alpha_0}, \xi(\tau,\eta) = \frac{\partial\phi}{\partial\beta}(\tau,\eta;\beta)\Big|_{\beta=\alpha_0}, \zeta(\tau,\eta) = \frac{\partial\psi}{\partial\beta}(\tau,\eta;\beta)\Big|_{\beta=\alpha_0},$$

то полученная система вместе с начальными условиями принимает вид

$$\begin{gathered} \frac{\partial\tau}{\partial\alpha} = \lambda(\alpha)\xi(\tau,\eta), \frac{\partial\eta}{\partial\alpha} = \lambda(\alpha)\zeta(\tau,\eta) \\ \tau = t, \eta = x \text{ при } \alpha = \alpha_0 \end{gathered} \tag{1.38}$$

Решением задачи Коши (1.38) при заданных ξ и ζ и фиксированных t и x являются функции (1.35), определяющие исходную однопараметрическую группу преобразований.

Зафиксируем t и x и введем новый параметр $\theta = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \lambda(\sigma)d\sigma$. В результате задача Коши (1.38) преобразуется к каноническому виду:

$$\begin{gathered} \frac{d\tau}{d\theta} = \xi(\tau,\eta), \frac{d\eta}{d\theta} = \zeta(\tau,\eta) \\ \tau = t, \eta = x \text{ при } \theta = 0, (\alpha = \alpha_0) \end{gathered} \tag{1.40}$$

Уравнения (1.39) называются уравнениями Ли. Они лежат в основе использования теории однопараметрических групп при решении дифференциальных уравнений [3]. Предполагается, что в области, в которой рассматриваются уравнения (1.39), функции $\xi(\tau,\eta), \zeta(\tau,\eta)$ непрерывно дифференцируемые, а величина $\xi^2 + \zeta^2 \neq 0$. Точки, в которых $\xi^2 + \eta^2 = 0$, называются стационарньмми точками однопараметрической группы.

Предположим, что в окрестности точки (t, x), в которой система уравнений Ли (1.39) определена, величина $\xi > 0$. Поэтому её можно представить в следующей эквивалентной форме:

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \frac{\zeta(\tau,\eta)}{\xi(\tau,\eta)}, \quad \frac{d\tau}{\xi(\tau,\eta)} = d\theta$$

Из теоремы 1.2[5, 10] следует, что все решения первого уравнения системы в некоторой окрестности точки (t, x) могут быть описаны

общим интегралом $\Delta_1(\tau,\eta) = C_1$. Используя его при интегрировании второго уравнения системы, получим

$$\Delta_2(\tau,\eta) = C_2 + \theta.$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из начальных условий (1.40). В результате имеем

$$\Delta_1(\tau,\eta) = \Delta_1(t,x), \quad \Delta_2(\tau,\eta) = \Delta_2(t,x) + \theta. \tag{1.41}$$

Эти соотношения дают решение задачи Коши (1.39) $\wedge$(1.40). Если произвести невырожденную замену переменных (это следует из теорем 10.2 и 10.3 в главе 10):

$$u = \Delta_1(t,x), \quad v = \Delta_2(t,x),$$

то согласно формулам (1.41) локальная однопараметрическая группа преобразований, порождённая решением задачи Коши (1.39), (1.40), при достаточно малых θ приводится к группе переносов:

$$u_1 = u, \quad v_1 = v + \theta.$$

Подчеркнём, что одна из переменных, а именно u, является инвариантом группы. Обратим также внимание, что теорема носит, вообще говоря, локальный характер (замечание 1.4.1). В ней показано, что в окрестности любой точки, не являющейся стационарной, локальная однопараметрическая группа приводится к локальной группе переносов.

Замечание 1.4.3. Правые части системы уравнений (1.39) не зависят от переменной θ. Такие системы называются автономньми. Элементы теории автономных систем изложены в главе 8. Задача Коши для всякой автономной системы порождает локальную однопараметрическую группу преобразований, для которой независимая переменная системы (в нашем случае θ) является каноническим параметром. Это утверждение будет доказано в главе 8. Стационарные точки однопараметрических групп для автономных систем в этой главе носят название точек равновесия. Фазовые траектории автономной системы в некоторой окрестности точки, не являющейся стационарной, ведут себя как прямые линии.

Замечание 1.4.4. Будем считать здесь, что в (1.35) параметр α является каноническим. Возьмём $\alpha = \alpha_0$ и рассмотрим преобразование

$$\tau = \phi\left(t, x; \alpha_0 + \Delta\alpha\right), \quad \eta = \psi\left(t, x; \alpha_0 + \Delta\alpha\right), \quad \alpha_0 + \Delta\alpha \in J.$$

Если $\Delta\alpha \to 0$, то преобразование будет отличаться от тождественного на бесконечно малую величину и по этой причине называться инфинитезимальным (или бесконечно малым) преобразованием. Разложим функции $\phi(t, x; \alpha), \psi(t, x; \alpha)$ по формуле Тейлора по параметру α в окрестности точки α_0 и запишем инфинитезимальное преобразование в виде

$$\begin{aligned}
\tau = \phi\left(t, x; \alpha_0 + \Delta\alpha\right) = \phi\left(t, x; \alpha_0\right) + \frac{\partial\phi\left(t, x; \alpha_0\right)}{\partial\alpha}\Delta\alpha + o(\Delta\alpha) = \\
= t + \xi(t, x)\Delta\alpha + o(\Delta\alpha) \\
\eta = \psi\left(t, x; \alpha_0 + \Delta\alpha\right) = \psi\left(t, x; \alpha_0\right) + \frac{\partial\psi\left(t, x; \alpha_0\right)}{\partial\alpha}\Delta\alpha + o(\Delta\alpha) = \\
= x + \zeta(t, x)\Delta\alpha + o(\Delta\alpha)
\end{aligned} \tag{1.42}$$

При выводе этих формул использовались соотношения, определяющие функции ξ и ζ. Вектор (ξ, ζ) является касательным в точке (t, x) к кривой, которая описывается точками (τ, η) в $\mathbb{R}^2$ при изменении параметра α согласно формулам (1.35). Такие кривые называются ***op*** битами точки (t, x). Однопараметрическая группа преобразований однозначно определяется своим касательным векторным полем (ξ, ζ), если $\xi^2 + \zeta^2 \neq 0$.

Сказанное выше резюмирует теорема Ли.

Theorem

1.10. Если функиии $\phi(t, x; \alpha), \psi(t, x; \alpha)$ в формулах (1.35) удовлетворяют груповому свойству (1.37) и имеют разложения (1.42), то они являются решением задачи Коши (1.39), (1.40).

Если же задано гладкое векторное поле (ξ, ζ) $(\xi^2 + \zeta^2 \neq 0)$, то решение задачи Коши (1.39), (1.40) однозначно определяет однопараметрическую группу преобразований (1.35) (свойство 6 автономных систем в главе 8), для которой это поле является касательным. $\triangle$

Определение 1.4.8. Две однопараметрические группы преобразований называются подобными, если одну можно привести к другой при помощи невырожденной замены переменных и невырожденной замены параметра.

Рассмотрим семейство преобразований из пункта 2 , которые действуют на полуплоскости $\mathbb{R}^+$. Они образуют однопараметрическую группу преобразований. В этом случае уравнения (1.38) принимают вид

$$\frac{\partial\tau}{\partial\alpha} = \frac{\tau}{\alpha}, \quad \frac{\partial\eta}{\partial\alpha} = 2\frac{\eta}{\alpha}, \quad t > 0.$$

Уравнения Ли и начальные условия запишем следующим образом:

$$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{d\eta}{2\eta} = \frac{d\alpha}{\alpha} = d\theta$$

$$\tau = t, \eta = x \text{ при } \theta = 0 \left(\theta = \int_{\alpha_0=1}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\alpha} = \ln\alpha\right)$$

Решение этой задачи Коши при $t > 0$ нетрудно представить в виде

$$\frac{\eta}{\tau^2} = C_1, \quad \ln\tau - \theta = C_2.$$

Учитывая начальные условия, находим

$$\frac{\eta}{\tau^2} = \frac{x}{t^2}, \quad \ln\tau = \ln t + \theta.$$

Следовательно, мы можем перейти к каноническим переменным

$$u = \frac{x}{t^2}, \quad v = \ln t, \quad t > 0$$

сразу во всей полуплоскости $\mathbb{R}^2_+$. Замена переменных является невырожденной, и в результате неё полуплоскость $\mathbb{R}^2_+$ взаимно однозначно отображается на всю плоскость (u, v). Следовательно, однопараметрическая группа $\mathcal{G} = \{T_\alpha, \alpha \in (0, +\infty)\}$, действующая на полуплоскости $\mathbb{R}^2_+$, подобна группе переносов с каноническим параметром $\theta = \ln\alpha$, действующей на всей плоскости (u, v).

2.4.3 1.4.3. Invariance of the differential equation with respect to the one-parameter transformation group

Мы будем говорить, что два дифференциальных уравнения n-го порядка равносильны, если каждое решение одного уравнения является также решением другого, и наоборот.

Определение 1.4.9. Уравнение (1.34) называется инвариантным относительно однопараметрической группы преобразований $\mathcal{G}$, если при замене переменных (t, x) в нём по формулам (1.35) мы получим в новых переменных (τ, η) для определения решения $\eta = \eta(\tau)$ уравнение, равносильное исходному при всех $\alpha \in J$.

В этом случае также говорят, что уравнение (1.34) допускает группу $\mathcal{G}$. Возьмём $n = 1$. Тогда новые переменные (τ, η) и производная $\frac{d\eta}{d\tau}$ выражаются через старые координаты (t, x) и производную $\frac{dx}{dt}$ следующим образом:

$$\tau = \phi(t, x; \alpha), \quad \eta = \psi(t, x; \alpha), \quad \frac{d\eta}{d\tau} = \frac{\frac{\partial\psi}{\partial t} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) x'}{\frac{\partial\phi}{\partial t} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) x'}.$$

Аналогично находятся величины $\left(\tau, \eta, \frac{d\eta}{d\tau}, \frac{d^2\eta}{d^2\tau}\right)$, если $n = 2$, и т.д.

Пример 1.4.1. Уравнение

$$txx'' + tx'^2 - 2x^2 = 0$$

инвариантно относительно группы растяжений

$$\mathcal{G}: \quad \tau = t, \quad \eta = \alpha x, \quad \alpha > 0.$$

Действительно,

$$\alpha^{-2}\left(\tau\eta\eta'' + \tau\eta'^2\right) - w\alpha^{-2}\eta^2 = 0.$$

Отсюда имеем

$$\alpha^{-2}\left(\tau\eta\eta'' + \tau\eta'^2 - 2\eta^2\right) = 0$$

Для определения решения $\eta(\tau)$ получилось уравнение, равносильное исходному. $\downarrow$

Порядок уравнения (1.34) заведомо можно понизить, если оно имеет вид

$$F\left(t, x', ..., x^{(n)}\right) = 0 \tag{1.43}$$

так как функция x не входит явно в уравнение. Действительно, произведём замену

$$y = x'$$

В результате уравнение (1.34) становится уравнением ($n-1$)-го порядка относительно функции y.

Theorem

1.11. Пусть в переменных (u, v) уравнение (1.34) инвариантно относительно группы переносов. Тогда уравнение (1.34) в переменных (u, v) имеет вид

$$\Phi\left(u, \frac{dv}{du}, \ldots \frac{d^n v}{du^n}\right) = 0 \tag{1.44}$$

Доказательство. - При переходе к новым переменным (u, v) уравнение (1.34) преобразуется к виду

$$\Phi\left(u, v, \frac{dv}{du}, \ldots, \frac{d^n v}{du^n}\right) = 0. \tag{1.45}$$

По условию теоремы имеем, что уравнение

$$\Phi\left(u, v+\theta, \frac{dv}{du}, \ldots \frac{d^n v}{du^n}\right) = 0$$

при любом θ эквивалентно уравнению (1.45). Следовательно, Φ не зависит явно от v, и мы приходим к уравнению (1.44). Приняв dv/du за новую неизвестную функцию, понизим порядок уравнения.

Резюме. Пусть уравнение (1.34) допускает однопараметрическую группу преобразований $\mathcal{G}$ и из уравнений Ли мы можем найти канонические переменные (u, v) (например, в виде элементарных функций) и канонический параметр θ. При переходе к ним однопараметрическая группа $\mathcal{G}$ приводится к группе переносов. Свойство инвариантности уравнения относительно какой-либо группы не зависит от выбора переменных, поэтому уравнение (1.34) после перехода к каноническим переменным (u, v) перейдёт в уравнение, в которое явно не входит одна их этих переменных. Следовательно, оно интегрируемо в квадратурах в случае уравнения первого порядка или допускает понижение в случае уравнения более высокого порядка.

2.4.4 1.4.4. Some types of down-order equations

В параграфе изучаются некоторые типы уравнений, которые допускают либо группу переносов, либо ту или иную группу растяжений. При рассмотрении уравнений относительно этих групп одна из канонических переменных, являющаяся инвариантом группы, может быть

найдена непосредственно, без использования уравнений Ли. В качестве другой канонической переменной в пунктах а), б), в) берётся логарифмическая функция либо от переменной t, либо x, в зависимости от вида группы. Несмотря на то, что определение канонических переменных в рассматриваемых задачах можно произвести без использования уравнений Ли, их применение является полезным с методической точки зрения. Задача Коши для уравнений Ли (1.39, (1.40) в этих случаях всегда разрешима в элементарных функциях. В результате мы можем перейти в рассматриваемых уравнениях к каноническим переменным и либо понизить их порядок, либо получить

решение в квадратурах.
а) Рассмотрим случай, когда уравнение (1.34) имеет вид

$$F\left(x, x', ..., x^{(n)}\right) = 0.$$

Так как в уравнение (1.34) не входит явно t, то оно инвариантно относительно группы переносов вдоль оси t :

$$\mathcal{G}: \quad \tau = t + \alpha, \quad \eta = x, \quad \alpha \in \mathbb{R}^1.$$

Каноническими переменными здесь будут $u = x, v = t$. Мы перейдём к ним, если поменяем ролями t и x. Тогда уравнение (1.34) примет вид

$$\Phi\left(x, \frac{dt}{dx}, ..., \frac{d^n t}{dx^n}\right) = 0.$$

Замена $z(x) = dt/dx$ понижает порядок уравнения (1.34) на единицу. При таком способе понижения порядка можно потерять решения $x = \text{const}$. Это устанавливается непосредственно проверкой. Отсюда, в частности, следует, что замена

$$p(x) = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{z(x)}$$

также понижает порядок уравнения. Имеем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}p(x) = \frac{dp(x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = p\frac{dp}{dx} \quad \text{и т.д.}$$

б) Пусть теперь для $\alpha > 0$

$$F\left(t, \alpha x, \alpha x', ..., \alpha x^{(n)}\right) = \alpha^k F\left(t, x, x', ..., x^{(n)}\right).$$

Это означает, что уравнение (1.34) инвариантно относительно группы растяжений

$$G: \quad \tau = t, \quad \eta = \alpha x, \quad \alpha \in (0, +\infty). \tag{1.46}$$

Здесь $\alpha_0 = 1$. Уравнения (1.38) для группы (1.46) принимают вид

$$\frac{\partial \tau}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} = \frac{\eta}{\alpha}$$

Вводя параметр $\theta = \ln \alpha$, нетрудно получить решение задачи Коши (1.39), (1.40) для уравнений Ли. Возьмём $x > 0$, тогда

$$\tau = t, \quad \ln \eta = \ln x + \theta.$$

Чтобы воспользоваться теоремой 1.11, введём новые переменные:

$$u = t, \quad v = \ln x, \quad x > 0$$

В переменных (u, v) однопараметрическая группа (1.46) при $x > 0$ и уравнение (1.34) запишутся в виде

$$\mathcal{G}: u_1 = u, \quad v_1 = v + \theta, \quad \theta \in \mathbb{R}^1$$
$$\Phi\left(u, \frac{dv}{du}, ..., \frac{d^n v}{du^n}\right) = 0$$

Уравнение в новых переменных инвариантно относительно группы переносов, так как свойство инвариантности уравнения относительно какой-либо группы не зависит от

выбора переменных. Поэтому после замены, которая приводит рассматриваемую группу к группе переносов, мы придём к уравнению (1.44), не зависящему явно от переменной v. Возьмём

$$z(u) = \frac{dv}{du} = \frac{d\ln x}{dt} = \frac{dx/dt}{x}$$

Отсюда имеем

$$x' = xz, \quad x'' = x'z + xz' = x\left(z^2 + z'\right), ...$$
$$x^{(n)} = x\sigma_n\left(z, z', ..., z^{(n-1)}\right)$$

В результате

$$F\left(t, x, x', ..., x^{(n)}\right) = F\left(t, xz, x\left(z^2 + z'\right), ..., x\sigma_n\left(z, z', ..., z^{(n-1)}\right)\right) =$$
$$= x^k F\left(t, z, z^2 + z', ..., \sigma_n\left(z, z', ..., z^{(n-1)}\right)\right) = x^k \Psi\left(t, z, ..., z^{(n-1)}\right)$$

Таким образом, уравнение (1.34) в канонических переменных относительно функции $z(t)$ будет ($n-1$)-го порядка и примет вид

$$\Psi\left(t, z, z', ..., z^{(n-1)}\right) = 0.$$

в) Рассмотрим теперь случай, когда при $\alpha > 0$:

$$F\left(\alpha t, \alpha x, \frac{dx}{dt}, \frac{1}{\alpha}\frac{d^2x}{dt^2}, ..., \frac{1}{\alpha^{n-1}}\frac{d^nx}{dt^n}\right) = \alpha^k F\left(t, x, x', ..., x^{(n)}\right).$$

Это означает, что уравнение (1.34) инвариантно относительно группы растяжений

$$\mathcal{G}: \quad \tau = \alpha t, \quad \eta = \alpha x, \quad \alpha \in (0, +\infty). \tag{1.47}$$

Решая задачу Коши (1.39), (1.40) при $t > 0$, найдём новые переменные, в которых группа $\mathcal{G}$, действующая на $\mathbb{R}^2_+$, подобна группе переносов:

$$u = \frac{x}{t}, \quad v = \ln t, \quad \theta = \ln\alpha$$

Отсюда следует, что уравнение (1.34) в новых переменных имеет вид (1.44). Замена

$$z(u) = \frac{dv}{du} = \frac{dv}{dt}\frac{dt}{du} = \frac{1}{x' - x/t}, x' - x/t \neq 0$$

понижает порядок уравнения (1.34). Произведём процедуру понижения порядка уравнения, используя полученные формулы:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{z(u)} + u, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt}\frac{d}{du}\left[\frac{1}{z(u)} + u\right] = \frac{1}{t}\frac{1}{z(u)}\left[1 - \frac{z'}{z^2}\right], ...$$
$$\frac{d^nx}{dt^n} = \frac{1}{t^{n-1}}\sigma_n\left(z, z', ..., z^{(n-1)}\right), n > 1$$

Функция σ_n не содержит явно u. В результате уравнение (1.34) приводится к виду

$$F\left(t, x, x', ..., x^{(n)}\right) = F\left(t, tu, \frac{1}{z(u)} + u, \frac{1}{t}\frac{1}{z(u)}\left[1 - \frac{z'}{z^2}\right], ..., \frac{1}{t^{n-1}}\sigma_n\right) =$$
$$= t^k F\left(1, u, \frac{1}{z(u)} + u, ..., \sigma_n\right) = t^k \Psi\left(u, z, z', ..., z^{(n-1)}\right) = 0$$

Так как $t > 0$, то для определения функции $z(u)$ мы получаем уравнение $(n-1)$-го порядка:

$$\Psi\left(u, z, z', ..., z^{(n-1)}\right) = 0. \tag{1.48}$$

При таком способе понижения порядка уравнения можно потерять решения вида

$$x' - x/t = 0 \Rightarrow x = Ct, C - \text{ постоянная},$$

существование которых устанавливается непосредственной проверкой.
На практике также поступают следующим образом: переменные (t, x) выражают через (u, v) и в уравнении (1.34) делают замену:

$$t = e^v, \quad x = ue^v$$

В результате будем иметь

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dv}\frac{dv}{dt} = e^{-v}\left[e^v\frac{du}{dv} + e^v u\right] = \frac{du}{dv} + u$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = e^{-v}\frac{d}{dv}\left[\frac{du}{dv} + u\right], ..., \frac{d^nx}{dt^n} = e^{-(n-1)v}\chi_n\left(u, u', ..., u^{(n)}\right)$$

Функция χ не содержит явно v. Тогда

$$F\left(t, x, x', ..., x^{(n)}\right) = F\left(e^v, e^v u, \frac{du}{dv} + u, ..., e^{-(n-1)v}\chi_n\right) =$$
$$= e^{kv}F\left(1, u, \frac{du}{dv} + u, ..., \chi_n\right) = 0$$

Мы получили уравнение n-го порядка

$$F\left(1, u, \frac{du}{dv} + u, ..., \chi_n\right) = 0$$

которое не содержит явно v. Следовательно, его порядок можно понизить на единицу (см. пункт а)), положив $p(u) = du/dv$. Если теперь в уравнении для $p(u)$ сделать замену $p(u) = 1/z(u)$, то для определения функции $z(u)$ мы опять придём к уравнению (1.48).
г) В этом пункте мы обобщим результаты пункта в) и рассмотрим случай, когда уравнение (1.34) инвариантно относительно группы растяжений:

$$\mathcal{G} : \tau = \alpha t, \quad \eta = \alpha^m x, \quad \alpha \in (0, \infty)$$

Будем считать, что $t > 0$. Нетрудно видеть, что инвариантом группы является функция $u = x/t^m$. В качестве канонических переменных и канонического параметра возьмём следующие:

$$u = \frac{x}{t^m}, \quad v = \ln t, \quad \theta = \ln \alpha.$$

В новых переменных u, v группа $\mathcal{G}$ будет подобна группе переносов:

$$\tilde{u} = u, \quad \tilde{v} = v + \theta, \quad \theta \in \mathbb{R}^1.$$

Уравнение (1.34) в новых переменных имеет вид (1.44). Произведём соответствующую замену:

$$z(u) = \frac{dv}{du} = \frac{dv}{dt}\frac{dt}{du} = \frac{1}{t}\frac{t^{m+1}}{tx' - mx}, \quad tx' - mx \neq 0$$

Отсюда

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{tz(u)}, z(u) = \frac{t^m}{tx' - mx}$$

В результате

$$x' = t^{m-1}\left[mu + \frac{1}{z(u)}\right]$$
$$x'' = t^{m-2}\left[(m-1)\left(mu + \frac{1}{z(u)}\right) + \frac{1}{z(u)}\frac{d}{du}\left(mu + \frac{1}{z(u)}\right)\right]$$

Аналогично,

$$x^{(n)} = t^{m-n}\sigma_n\left(u, z, ..., z^{n-1}\right)$$

Следовательно,

$$F\left(t, x, x', ..., x^{(n)}\right) = F\left(t, t^m u, t^{m-1}\left(mu + \frac{1}{z(u)}\right), ..., t^{m-n}\sigma_n\right) =$$
$$= t^k F\left(1, u, mu + \frac{1}{z(u)}, ..., \sigma_n\left(u, z, ...z^{n-1}\right)\right) =$$
$$= t^k \Psi\left(u, z, z', ..., z^{n-1}\right) = 0 \Rightarrow \Psi\left(u, z, z', ..., z^{n-1}\right) = 0$$

Таким образом, мы понизили порядок уравнения. При таком способе понижения можно потерять решение вида

$$tx' - mx = 0 \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{mdt}{t} \Rightarrow x = Ct^m$$

Их существование проверяется непосредственной проверкой. Однако на практике часто поступают следующим образом: переменные (t, x) выражают через (u, v) и в уравнении (1.34) производят замену:

$$t = e^v, x = ue^{mv} \tag{1.49}$$

Вычисляя производные, будем иметь

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dv}\frac{dv}{dt} = e^{(m-1)v}\left(mu + \frac{du}{dv}\right)$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = e^{-v}\frac{d}{dv}\left[e^{(m-1)v}\left(mu + \frac{du}{dv}\right)\right] =$$
$$= e^{(m-2)v}\left[m(m-1)u + (2m-1)\frac{du}{dv} + \frac{d^2u}{dv^2}\right], ...$$
$$\frac{d^nx}{dt^n} = e^{(m-n)v}\sigma_n\left(u, ..., u^{(n)}\right) \tag{1.50}$$

В результате находим
$F\left(e^v, ue^v, ..., e^{(m-n)v}\sigma_n\left(u, ..., u^{(n)}\right)\right) = e^{kv}F\left(1, u, ..., \sigma_n\left(u, ..., u^{(n)}\right)\right)$,
Мы получили уравнение из пункта а). Отметим, что в этом пункте не были использованы уравнения Ли.

Пример 1.4.2. Решить уравнение

$$t^2xx'' = (x - tx')^2 \tag{1.51}$$

Решение. Уравнение (1.51) инвариантно относительно однопараметрической группы (1.47). Произведём в нём при $t > 0$ замену (см. случай в)):

$$x = tu, \quad x' = u + \frac{1}{z(u)}, \quad x'' = \frac{z^2 - z'}{tz^3}.$$

Функция $z(u)$ удовлетворяет уравнению Бернулли:

$$uz' + z = uz^2$$

Положив далее $p(u) = 1/z(u)$, для определения $p(u)$ получим линейное уравнение:

$$up' - p = -u.$$

Решив его, найдём уравнение для функции $x(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t}\ln\frac{x}{t} + \frac{x}{t}.$$

Оно является однородным. Его интегрирование позволяет определить все решения уравнения (1.51) на интервале ($0, +\infty$):

$$x = C_2te^{-\frac{C_1}{t}}. \tag{1.52}$$

Здесь C_1 и C_2 - произвольные постоянные.
На интервале $(-\infty, 0)$ решения уравнения (1.51) находятся аналогично и имеют тот же вид (1.52). Если положить $C_1 = 0$ в формуле (1.52), то функции $x = C_2t$ будут также решениями уравнения (1.51) на интервале $(-\infty, +\infty)$. Отметим, что все функции, описываемые формулой (1.52) при $t > 0, C_1 > 0$ и $t < 0, C_1 < 0$, стремятся к нулю соответственно при $t \to \pm 0$. Доопределим их при $t = 0$ значением, равным нулю. Рассмотрим теперь функцию, которая на интервале ($-\infty, 0$) совпадает с решением уравнения (1.51) при каком-либо значении постоянной $C_1 > 0$. Она будет определена при всех t и дважды непрерывно дифференцируема в нуле. Построенные таким образом функции также будут решениями уравнения (1.51) на интервале $(-\infty, +\infty)$.$\diamond$

Заметим, что использование переменных (1.49) при $m = 1$ технически упрощает интегрирование уравнения.

Как мы уже отмечали, наличие однопараметрической группы преобразований у уравнения первого порядка позволяет его проинтегрировать. Это связано с тем, что в канонических переменных, выпрямляющих группу (т.е. группа приводится к группе параллельного переноса), оно не будет содержать явно одну из них.

Пример 1.4.3. Решить уравнение

$$\frac{2}{3}txx' = \sqrt{x^4 - t^6} + x^2, \quad t > 0. \tag{1.53}$$

Решение. Уравнение (1.53) инвариантно относительно группы растяжений:

$$G: \quad \tau = \alpha t, \quad \eta = \alpha^{3/2}x, \quad \alpha > 0.$$

Здесь $\alpha_0 = 1$. Рассмотрим задачу Коши (1.39), (1.40):

$$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{2}{3}\frac{d\eta}{\eta} = d\theta = d\ln\alpha, \quad \tau = t, \eta = x \quad \text{при} \quad \theta = 0.$$

Её решение при $t > 0$ имеет вид

$$\frac{\eta}{\tau^{3/2}} = \frac{x}{t^{3/2}}, \quad \ln\tau = \ln t + \theta$$

Введём канонические переменные

$$u = \frac{x}{t^{3/2}}, \quad v = \ln t \tag{1.54}$$

В пункте в) эти переменные были введены без использования уравнений Ли.

Перейдём в уравнении (1.53) к переменным (1.54). Имеем для производной

$$\frac{du}{dv} = -\frac{3}{2}u + t^{-1/2}x' \tag{1.55}$$

Используя (1.54) и (1.55), получим уравнение, которое не содержит явно переменную v :

$$\frac{1}{3}\frac{d\left(u^2\right)}{dv} = \sqrt{u^4 - 1}$$

Его интегрирование даёт

$$x^2 = Ct^6 + \frac{1}{4C}, \quad t \geq (2C)^{-1/3}, \quad C > 0; \quad x^2 = |t|^3 \tag{1.56}$$

Область существования решения (1.56) зависит от величины постоянной C. Аналогично находятся решения уравнения (1.53) при значениях переменной $t < 0$. Они имеют тот же самый вид (1.56), но для решений, описываемых первой формулой при $t \leq -(2C)^{-1/3}$. Используя решения уравнения (1.53), найденные на интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, нетрудно также построить функции, которые будут определены при всех t, непрерывно дифференцируемы в нуле и являются решениями уравнения на интервале $(-\infty, +\infty)$.$\diamond$

Пример 1.4.4. Решить следующие задачи Коши ([9], §7, 65):

$$t^2x'' + 2t^2xx' + 2tx^2 - 2x = 0$$
$$\text{a) } x(1) = -1, x'(1) = 1; \text{ b) } x(1) = 2, x'(1) = 0 \tag{1.57}$$

Решение. Рассмотрим группу растяжений $t \to \alpha t, x \to \alpha^m x$. При $m = -1$ уравнение (1.57) инвариантно относительно этой группы. Следовательно, согласно (1.49) каноническими переменными будут

$$u = tx, v = \ln t. \tag{1.58}$$

Отсюда находим

$$z(u) = \frac{dv}{du} = \frac{dv}{dt}\frac{dt}{du} = \frac{1}{t}\frac{t}{t^2x' + \mathrm{x}} = \frac{1}{t^2x' + u} \Rightarrow \begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{1}{z}\frac{dv}{dt} = \frac{1}{tz} \\ x' = t^{-2}\left(-u + \frac{1}{z}\right) \end{cases}$$

$$x'' = \frac{d}{dt}\left[t^{-2}\left(-u + \frac{1}{z}\right)\right] = -\frac{2}{t^3}\left(-u + \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{t^2}\frac{1}{tz}\frac{d}{du}\left(-u + \frac{1}{z}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x'' = t^{-3}\left(2u - \frac{3}{z} - \frac{z'}{z^3}\right).$$

Подставляя x' и x'' в уравнение (1.57), получим

$$\frac{2u}{t}-\frac{3}{tz}-\frac{z'}{tz^3}-\frac{2u^2}{t}+\frac{2u}{tz}+\frac{2u^2}{t}-\frac{2u}{t}=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow z'=(2u-3)z^2\Rightarrow z=\frac{1}{3u-u^2+C}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x'=\left[t^{-2}\left(-u+\frac{1}{z}\right)\right]=t^{-2}\left(2u-u^2+C\right)=t^{-2}\left(2tx-t^2x^2+C\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x'=\frac{2x}{t}-x^2+\frac{C}{t^2}.$$

Если постоянная C не равна нулю, то в итоге мы получили уравнение Риккати.
a) Найдём постоянную C, используя начальные условия $x(1)=-1$, $x'(1)=1$. В результате имеем

$$1=-2-1+C\Rightarrow C=4\Rightarrow x'=\frac{2x}{t}-x^2+\frac{4}{t^2}-\text{ уравнение Риккати.}$$

Его решение $-x=-\frac{1}{t}$. Оно удовлетворяет начальным условиям a).
b) Если начальными условиями будут $x(1)=2, x'(1)=0$, то $C=0$ и для определения решения задачи Коши получим уравнение Бернулли: $x'=\frac{2x}{t}-x^2$. Его решением будет функция

$$x=\frac{6t^2}{1+2t^2}\cdot\diamond$$

Замечание 1.4.5. Если воспользоваться формулами (1.49) и (1.50), то для x' и x'' будем иметь

$$t=e^v, x=e^{-v}u\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x'=e^{-2v}\left(u'-u\right), x''=e^{-3v}\left(2u-3u'+u''\right) \tag{1.59}$$

Отсюда находим

$$u''-3u'+2uu'=0$$

Левая часть найденного уравнения является полным дифференциалом. Его интегрирование даёт

$$u'+u^2-3u=C$$

Из a) получаем, используя (1.59)($v=\ln t\Rightarrow v=0, t=1$):

$$1=u'-u, u(0)=-1\Rightarrow u'(0)=0$$

Следовательно, $C=4$ и $u'=3u-u^2+4$. В результате будем иметь

$$x'=t^{-2}\left(-u^2+3u+4-u\right)=t^{-2}\left(-t^2x^2+2tx+4\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x'=-x^2+\frac{2x}{t}+\frac{4}{t^2}-\text{ уравнение Риккати.}$$

Решением уравнения Риккати, удовлетворяющим начальным условиям a), будет функция $x=-\frac{1}{t}$. В случае нальных условий b) будем иметь: C $=0\Rightarrow x=\frac{6t^2}{1+2t^3}$.

3 2 Basic General Properties by Disperov

Study of the Cauchy problem. Continuation of solutions. First-order equations unresolved with respect to the derivative. Special solution: The dependence of the solution of the Cauchy problem on the parameters and initial data

3.0.1 2.1. Basic Definitions and Preliminary Information for Normal Systems of Ordinary Differential Equations

Рассмотрим нормальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i\left(t, x_1, \cdots, x_n\right), i = \overline{1, n}$$

Функции $f_i(t, \vec{x}) = f_i\left(t, x_1, ..., x_n\right), i = \overline{1, n}$ определены в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}_{t,\vec{x}}$. Введём вектор-функции, отождествляя их со столбцами:

$$\vec{x}(t) = \operatorname{colon}\left(x_1(t), \cdots, x_n(t)\right), \vec{f}(t, \vec{x}) = \operatorname{colon}\left(f_1(t, \vec{x}), \cdots, f_n(t, \vec{x})\right)$$

Под дифференцированием вектор-функций будем понимать их покомпонентное дифференцирование: $\vec{f}'(t) = \operatorname{colon}\left(f_1'(t), \cdots, f_n'(t)\right)$. Тогда систему уравнений можно записать в виде одного векторного дифференциального уравнения

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{x}), (t, \vec{x}) \in \Omega \tag{2.1}$$

Слова векторное дифференциальное уравнение и система дифференциальных уравнений ниже считаются эквивалентными.

В качестве нормы вектора $\vec{x}$ берётся евклидова норма в n -мерном пространстве, а именно: $\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} x_i^2}$. Далее предполагается, что функция $\vec{f}(t, \vec{x})$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\vec{f}(t, \vec{x}) \in \mathbf{C}(\Omega); \tag{2.2}$$

$$\vec{f}(t, \vec{x}) \in \operatorname{Lip}_{\vec{x}}\left(\bar{\Omega}_L\right). \tag{2.3}$$

Из условия (2.3) следует, что функция $\vec{f}(t, \vec{x})$ удовлетворяет условию Липшица по $\vec{x}$ (равномерно по t) в любой замкнутой ограниченной области $\bar{\Omega}_L$ такой, что $\bar{\Omega}_L \subset \Omega$. Это означает, что для любой замкнутой ограниченной области $\bar{\Omega}_L \subset \Omega$ существует постоянная $L > 0$ такая, что для любых точек $(t, \vec{x}), (t, \vec{y}) \in \bar{\Omega}_L$ справедливо неравенство

$$\|\vec{f}(t, \vec{x}) - \vec{f}(t, \vec{y})\| \leqslant L\|\vec{x} - \vec{y}\|.$$

Постоянная $\bar{L} = \inf L$ называется постоянной Липшица. Ее величина зависит как от вида функции $\vec{f}(t, \vec{x})$, так и от области $\bar{\Omega}_L$.

Будем говорить, что функция $\vec{f}(t, \vec{x})$ удовлетворяет условию Липшица по $\vec{x}$ в области Ω, если существует постоянная L такая, что для любых точек $(t, \vec{x}), (t, \vec{y}) \in \Omega$ справедливо вышеприведенное неравенство. В этом случае будем писать:

$$\vec{f}(t, \vec{x}) \in \operatorname{Lip}_{\vec{x}}(\Omega)$$

Из определения нормы вектора вытекает, что если условие Липшица справедливо для вектор-функции, то оно выполняется и для каждой её координатной компоненты.

Определение 2.1.1. Вектор-функция $\vec{\varphi}(t)$, определённая на интервале J, называется решением системы уравнений (2.1), если

1. $\vec{\varphi}(t) \in \mathbf{C}^1(J)$;
2. $(t, \vec{\varphi}(t)) \subset \Omega$ для любого $t \in J$;
3. $\frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{\varphi}(t))$ для любого $t \in J$.

Задача Коши. Пусть точка $(t_0, \vec{x}_0) \in \Omega$. Требуется найти решение $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ системы дифференциальных уравнений (2.1) такое, что

$$\vec{\varphi}\,(t_0) = \vec{x}_0. \tag{2.4}$$

Условия (2.4) называются начальными.
Задача Коши обозначается следующим образом:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{x}), \vec{x}\,(t_0) = \vec{x}_0, \quad (t_0, \vec{x}_0) \in \Omega. \tag{2.5}$$

Из определения следует, что решение задачи Коши (2.5) существует, если существует интервал $J \ni t_0$ и решение $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$, определённое на нем, такое, что $\vec{\varphi}\,(t_0) = \vec{x}_0$. Кривая в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}_{t,\vec{x}}$, являющаяся графиком решения системы (2.1), называется интегральной кривой.

Лемма 2.1. Пусть функция $\vec{f}(t, \vec{x})$ дифференцируема по переменным $x_i, i = \overline{1, n}$ в выпуклой области Ω. Если все ее производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}, i, j = \overline{1, n}$ ограничены в области Ω, то найдётся такая постоянная $L > 0$, что для всех точек $(t, \vec{x}), (t, \vec{y}) \in \Omega$ выполняется условие Липшица $\vec{f}(t, \vec{x}) \in \mathrm{Lip}_{\vec{x}}(\Omega)$.

Если на $[a, b]$ задана непрерывная вектор-функция $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$, то по определению на $[a, b]$ вектор-функция $\vec{\psi}(t) = \int_{t_0}^{t} \vec{\varphi}(\tau)\mathrm{d}\tau, t_0, t \in [a, b]$ имеет координаты $\psi_i(t) = \int_{t_0}^{t} \varphi_i(\tau)\mathrm{d}\tau, i = \overline{1, n}, t_0, t \in [a, b]$.

Лемма 2.2. Для $\vec{\varphi}(t) \in \boldsymbol{C}([a, b])$ справедлива оценка

$$\left\| \int_{t_0}^{t} \vec{\varphi}(\tau)\mathrm{d}\tau \right\| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \|\vec{\varphi}(\tau)\|\mathrm{d}\tau \right|, \quad t, t_0 \in [a, b].$$

Доказательство. $\rightarrow$ Разобьём $[a, b]$ на k частей: $t_i = t_0 + +i\delta, \quad \delta = \frac{t - t_0}{k}, \quad i = \overline{1, k}$. Тогда согласно определению интеграла от вектор-функции и согласно неравенству $\|\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \cdots + \vec{x}_k\| \leqslant \|\vec{x}_1\| + + \|\vec{x}_2\| + \cdots + \|\vec{x}_k\|$ имеем

$$\left\| \int_{t_0}^{t} \vec{\varphi}(\tau)\mathrm{d}\tau \right\| = \lim_{k \to \infty} \left\| \sum_{i=1}^{k} \vec{\varphi}\,(t_i)\,\delta \right\| \leqslant \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{k} \|\vec{\varphi}\,(t_i)\|\,|\delta| = | \int_{t_0}^{t} \|\vec{\varphi}(\tau)\|\mathrm{d}\tau.$$

□

3.0.2 2.2. Theorem of existence and uniqueness of the solution of the Cauchy problem for a normal system of equation

Теорема существования и единственности решения задачи Коши (2.5) будет доказана методом последовательных приближений Пикара. Этот метод позволяет также приближенно вычислять решение. Первым шагом в доказательстве является переход от задачи Коши к интегральному уравнению. Покажем, что найти решение задачи Коши (2.5) на J эквивалентно решению интегрального уравнения

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau, \vec{x}(\tau))\mathrm{d}\tau, t_0, t \in J \tag{2.6}$$

Определение 2.2.1. Вектор-функция $\vec{\varphi}(t)$, определённая на интервале J, называется решением векторного интегрального уравнения (2.6), если

1. $\vec{\varphi}(t) \in \mathbf{C}(J)$;
2. $(t, \vec{\varphi}(t)) \in \Omega$ для любого $t \in J$;
3. для любого $t \in J$ выполняется равенство

$$\vec{\varphi}(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}(\tau))\mathrm{d}\tau, t_0 \in J$$

Лемма 2.3. Если вектор-функияя $\vec{\varphi}(t) \in C^1(J)$ является решением задачи Коши (2.5), то она также будет решением векторного интегрального уравнения (2.6). Наоборот, если вектор функиия $\vec{\varphi}(t) \in \boldsymbol{C}(J)$ - решение векторного интегрального уравнения (2.6), то она также будет решением задачи Коши (2.5).

Доказательство. $\rightarrow$ Если $\vec{\varphi}(t) \in \mathbf{C}^1(J)$ является решением задачи Коши (2.5), то при $t \in J$ справедливо тождество

$$\frac{d\vec{\varphi}}{dt} \equiv \vec{f}(t, \vec{\varphi}(t))$$

Проинтегрировав обе его части от t_0 до t, получим, что $\vec{\varphi}(t)$ является решением (2.6).

Пусть теперь $\vec{\varphi}(t) \in \mathbf{C}(J)$ является решением векторного интегрального уравнения (2.6). Подставив $\vec{\varphi}(t)$ в (2.6), получим тождество

$$\vec{\varphi}(t) \equiv \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}(\tau))\mathrm{d}\tau, t, t_0 \in J$$

При $t = t_0$ имеем $\vec{\varphi}\left(t_0\right) = \vec{x}_0$. Справа в тождестве стоит дифференцируемая функция, поэтому $\vec{\varphi}(t)$ также функция дифференцируемая. Продифференцировав его, находим $\frac{\mathrm{d}\vec{\varphi}(t)}{\mathrm{d}t} \equiv \vec{f}(t, \vec{\varphi}(t))$. Значит, $\vec{\varphi}(t)-$ решение задачи Коши (2.5).

Возьмём произвольную точку с координатами $(t_0, \vec{x}_0) \in \Omega$. Обозначим через R открытый цилиндр:

$$R = \left\{(t, \vec{x}) : |t - t_0| < a, \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < b, \bar{R} \subset \Omega\right\}$$

с центром в точке $(t_0, \vec{x}_0)$. Обозначим через $M = \max_{(t,\vec{x})\in R} |f(t, \vec{x})|$, $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$. Через Q обозначим открытый цилиндр

$$Q = \left\{(t, \vec{x}) : |t - t_0| < h, \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < b, \bar{Q} \subseteq \bar{R} \subset \Omega\right\}$$

также с центром в точке ($t_0, \vec{x}_0$).

Отрезок $[t_0 - h; t_0 + h]$ с определённым выше h называется отрезком Пеано. Определим последовательные приближения Пикара на отрезке Пеано.

Определение 2.2.2. Функции вида

$$\begin{gathered} \vec{\varphi}_0(t) = \vec{x}_0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{\varphi}_n(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{f}\left(\tau, \vec{\varphi}_{n-1}(\tau)\right) \mathrm{d}\tau, n \in N; t, t_0 \in J, \end{gathered} \tag{2.7}$$

определённые на отрезке $[t_0 - h; t_0 + h]$, называются последовательными приближениями решения интегрального уравнения (2.6) на отрезке Пеано $[t_0 - h; t_0 + h]$.

Ниже показано, что все последовательные приближения (2.7) определены на отрезке Пеано, причём при $t \in [t_0 - h; t_0 + h]$ справедливо включение $(t, \vec{\varphi}_n(t)) \in \bar{Q}$. Ниже отрезок Пеано будет обозначаться
$J_p(t_0, \vec{x}_0)$, так как его длина зависит от выбора точки $(t_0, \vec{x}_0) \in \Omega$. Сформулируем теорему существования и единственности решения задачи Коши (основную теорему), которая носит название теоремы Пикара [8, 10].

Theorem

2.1. Пусть вектор-функиия $\vec{f}(t, \vec{x})$ удовлетворяет условиям (2.2),(2.3). Тогда

1. для любой точки $(t_0, \vec{x}_0) \in \Omega$ существует решение $\vec{\varphi}(t)$ задачи Коши (2.5), определённое на отрезке Пеано $J_p(t_0, \vec{x}_0)$;

2. если два решения $\vec{\varphi}(t)$ и $\vec{\psi}(t)$ совпадают хотя бы при одном значении t_0, т.е. $\vec{\varphi}(t_0) = \vec{\psi}(t_0)$, то они совпадают при всех значениях переменного t, при которых одновременно определены.

- Существование. Доказательство существования решения разобьём на три этапа.

1. Сначала докажем, что все функции (2.7) $\{\vec{\varphi}_n\}, n \in \{0\} \cup N$, последовательных приближений определены, непрерывны на отрезке Пеано $J_p(t_0, \vec{x}_0)$ и $(t, \vec{\varphi}(t)) \in \bar{Q}$. Необходимо показать, что для любого $n \in \{0\} \cup N$ имеют место неравенства $\|\vec{\varphi}_n(t) - \vec{x}_0\| \leqslant b, |t - t_0| \leqslant h$. Возьмём $\vec{\varphi}_0(t) = \vec{x}_0, t \in J_p(t_0, \vec{x}_0)$. График этой функции не выходит из $\bar{Q}$. Возьмём далее $\vec{\varphi}_1(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_0(\tau))\, \mathrm{d}\tau$. Отсюда получаем

$$\|\vec{\varphi}_1(t) - \vec{x}_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_0(\tau))\, \mathrm{d}\tau \right\| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \left\| \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_0(\tau)) \right\| \mathrm{d}\tau \right| \leqslant M\, |t - t_0|$$

так как $\bar{Q} \subseteq \bar{R}$ и $\left\| \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_0(\tau)) \right\| \leqslant M$. Вспоминая, что $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, находим: $\|\vec{\varphi}_1 - \vec{x}_0\| \leqslant M\, |t - t_0| \leqslant Mh \leqslant b$. Таким образом, $(t, \vec{\varphi}_1) \in\in \bar{Q}, t \in J_p(t_0, \vec{x}_0)$. Пусть наше утверждение справедливо для $\vec{\varphi}_{n-1}(t)$, тогда для $\vec{\varphi}_n(t)$ из (2.7) имеем

$$\|\vec{\varphi}_n - \vec{x}_0\| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \left\| \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_{n-1}(\tau)) \right\| \mathrm{d}\tau \right| \leqslant M\, |t - t_0| \leqslant Mh \leqslant b \tag{2.8}$$

Мы показали, что все последовательные приближения (2.7) определены для $t \in J_p(t_0, \vec{x}_0)$. Непрерывность $\vec{\varphi}_n(t)$ следует из непрерывности функции $\vec{f}(t, \vec{x})$ в области Ω.
2. Докажем теперь, что последовательность (2.7), определенная на отрезке Пеано $J_p(t_0, \vec{x}_0)$, сходится на нем равномерно. Отсюда будет следовать, что предельная функция $\vec{\varphi}(t)$ непрерывна на отрезке Пеано. Заметим, что сходимость последовательности (2.7) равносильна сходимости ряда

$$\vec{S} = \vec{\varphi}_0 + (\vec{\varphi}_1 - \vec{\varphi}_0) + (\vec{\varphi}_2 - \vec{\varphi}_1) + ... \tag{2.9}$$

Частичные суммы ряда $\vec{S}_n = \vec{\varphi}_n(t)$. Таким образом, из равномерной сходимости ряда (2.9) на отрезке Пеано следует равномерная сходимость последовательности (2.7).

Построим мажорирующий ряд для функционального ряда (2.9). Используя (2.7), рассмотрим разность $\vec{\varphi}_2 - \vec{\varphi}_1$. Имеем

$$\|\vec{\varphi}_2 - \vec{\varphi}_1\| = \left\| \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_1)\,\mathrm{d}\tau - \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_0)\,\mathrm{d}\tau \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \left\| \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_1) - \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_0) \right\| \mathrm{d}\tau \right| \leqslant L \left| \int_{t_0}^{t} \|\vec{\varphi}_1(\tau) - \vec{\varphi}_0(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau \right| \leqslant$$
$$\leqslant L \left| \int_{t_0}^{t} M \left| t - t_0 \right| \,\mathrm{d}\tau \right| \leqslant ML\frac{(t-t_0)^2}{2}.$$

Продолжая этот процесс и используя метод математической индукции, получим

$$\|\vec{\varphi}_n - \vec{\varphi}_{n-1}\| \leqslant ML^{n-1}\frac{(t-t_0)^n}{n!} \tag{2.10}$$

Из оценки (2.10) вытекает, что ряд (2.9) мажорируется на отрезке Пеано $J_p(t_0, \vec{x}_0)$ числовым рядом:

$$\|\vec{\varphi}_0\| + Mh + ML\frac{h^2}{2} + ... + ML^{n-1}\frac{h^n}{n!} + ... \tag{2.11}$$

Ряд (2.11) сходится по признаку Даламбера, а значит, по признаку Вейерштрасса ряд (2.9) сходится равномерно. Отсюда следует равномерная сходимость на отрезке Пеано последовательности (2.7):

$$\vec{\varphi}_n(t) \rightrightarrows \vec{\varphi}(t), n \to \infty.$$

Согласно теоремам математического анализа предельная функция $\vec{\varphi}(t) \in \mathbf{C}([t_0 - h, t_0 + h])$.
3. Осталось показать, что график предельной функция $\vec{\varphi}(t), t \in\in J_p(t_0, \vec{x}_0)$, не выходит из замкнутой области $\bar{Q}$ и она удовлетворяет интегральному уравнению (2.6). Рассмотрим неравенство (2.8) и перейдем в нем к пределу при $n \to \infty$. Тогда $\|\vec{\varphi}(t) - \vec{x}_0\| \leqslant b, t \in J_p(t_0, \vec{x}_0)$. Покажем теперь, что функция $\vec{\varphi}(t), t \in J_p(t_0, \vec{x}_0)$, является решением интегрального уравнения (2.6). Рассмотрим разность

$$\left\| \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}(\tau))\mathrm{d}\tau - \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_n(\tau))\,\mathrm{d}\tau \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \left\| \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}(\tau)) - \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}_n(\tau)) \right\| \mathrm{d}\tau \right| \leqslant L \left| \int_{t_0}^{t} \|\varphi(\tau) - \varphi_n(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau \right| \leqslant$$
$$\leqslant L \sup_{|t-t_0|\leqslant h} |\vec{\varphi}(t) - \vec{\varphi}_n(t)| \cdot \left| \int_{t_0}^{t} \,\mathrm{d}\tau \right| \leqslant hL \sup_{|t-t_0|\leqslant h} \|\vec{\varphi}(t) - \vec{\varphi}_n(t)\| \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$$

Перейдем теперь к пределу $n \to \infty$ в (2.7). Тогда получим

$$\vec{\varphi}(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau, \vec{\varphi}(\tau))\mathrm{d}\tau, t \in J_p(t_0, \vec{x}_0)$$

Следовательно, $\vec{\varphi}(t)$ является решением интегрального уравнения (2.6), когда $t \in J_p(t_0, \vec{x}_0)$. Нетрудно показать, что $\vec{\varphi}(t)$ имеет производную справа в точке $t_0 - h$ и слева в точке $t_0 + h$ и эти производные равны значениям функции $f(t, \vec{\varphi}(t))$ в этих точках.

- Единственность. Доказательство единственности построенного решения разобьём на два этапа [7].

1. Пусть $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ и $\vec{x} = \vec{\psi}(t)$ - два решения задачи Коши (2.5) при $t \in J_p(t_0, \vec{x}_0)$ и $\vec{\phi}(t_0) = \vec{\psi}(t_0)$. Рассмотрим замкнутый цилиндр $\bar{Q}_\beta$:

$$\bar{Q}_\beta = \left\{(t,\vec{x}) : |t-t_0| \leqslant \beta, \|\vec{x}-\vec{x}_0\| \leqslant b, \bar{Q}_\beta \subseteq \bar{Q}\right\}.$$

Значение β будет выбрано ниже. Имеем

$$\|\vec{\varphi}(t) - \vec{\psi}(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} [f(\tau,\vec{\varphi}(\tau)) - f(\tau,\psi(\tau))]\mathrm{d}\tau \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} \|\vec{f}(\tau,\vec{\varphi}(\tau)) - \vec{f}(\tau,\vec{\psi}(\tau))\|\mathrm{d}\tau \right| \leqslant L \left| \int_{t_0}^{t} \|\vec{\varphi}(\tau) - \vec{\psi}(\tau)\|\mathrm{d}\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \beta L \sup_{|t-t_0|\leqslant\beta} \|\vec{\varphi}(t) - \vec{\psi}(t)\|.$$

Отсюда получаем

$$\sup_{|t-t_0|\leqslant\beta} |\vec{\varphi}(t) - \vec{\psi}(t)| \leqslant L\beta \sup_{|t-t_0|\leqslant\beta} |\vec{\varphi} - \vec{\psi}|.$$

Выберем $\beta L < 1$ и положим $\beta < \min\left\{a; \frac{b}{M}; \frac{1}{L}\right\}$. Неравенство будет выполняться, если только $\vec{\varphi}(t) = \vec{\psi}(t), |t-t_0| \leqslant \beta$.
2. Пусть $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ и $\vec{x} = \vec{\psi}(t)$ - два решения задачи Коши (2.5), определенные одновременно на интервале (α_1, α_2) и $t_0 \in (\alpha_1, \alpha_2)$. Докажем, что в этом случае $\vec{\varphi}(t) = \vec{\psi}(t)$ при $t \in (\alpha_1, \alpha_2)$. Предположим противное, а именно: существует $t^* \in (\alpha_1, \alpha_2)$ такое, что $\vec{\varphi}(t^*) \neq \vec{\psi}(t^*), t^* \neq t_0$. Для определенности предположим, что $t^* > t_0$. Рассмотрим множество P, для всех элементов которого $\vec{\varphi}(t) = \vec{\psi}(t), t \in [t_0, t^*)$. Покажем, что это множество замкнутое. Возьмём последовательность $\{\tau_n\} \in P$. Последовательность $\{\tau_n\}$ предполагается сходящейся к τ. Тогда в силу непрерывности функций $\vec{\varphi}(t)$ и $\vec{\psi}(t)$ будем иметь

$$\vec{\varphi}(\tau) = \lim_{n\to\infty} \vec{\varphi}(\tau_n) = \lim_{n\to\infty} \vec{\psi}(\tau_n) = \vec{\psi}(\tau).$$

Отсюда получаем, что $\tau \in P$. Значит, P - замкнутое множество. Обозначим $\sup P = T, \vec{x}_T = \vec{\varphi}(T), (T < t^*)$. Рассмотрим точку $(T, \vec{x}_T)$ и поставим в ней задачу Коши. Тогда существует отрезок $[T, T+\beta], \beta > 0$, на котором решения $\vec{\varphi}(t)$ и $\vec{\psi}(t)$ равны. Мы пришли к противоречию, а именно: T не может быть точной верхней гранью множества P.

Замечание 2.2.1. Для существования решения задачи Коши (2.5) достаточно выполнения условия (2.2) (теорема Пеано). Для единственности решения достаточно дополнительно наложить условие Липшица.

Замечание 2.2.2. Рассмотрим случай уравнения $x' = f(t,x)$. Если функция $f(t,x)$ удовлетворяет условиям (2.2) и (2.3), то каждая точка $(t_0, x_0) \in \Omega$ обладает такой окрестностью $U(t_0, x_0)$, в которой все решения уравнения $x' = f(t,x)$ описываются общим решением $x = \varphi(t, C)$ [5, 10]. $\diamond$

Замечание 2.2.3. Метод последовательных приближений позволяет оценить решение $\vec{\varphi}(t)$. Используя приближение $\vec{\varphi}_n(t)$, получим оценку: $\|\vec{\varphi} - \vec{\varphi}_n\| \leqslant ML^n \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}, |t-t_0| \leqslant h. \diamond$

3.0.3 2.3. Area of Solution Existence

При доказательстве основной теоремы было показано, что найдётся отрезок $[t_0 - h, t_0 + h]$, называемый отрезком Пеано, на котором решение задачи Коши (2.5) существует и единственно. Его длина зависит от выбора точки $(t_0, \vec{x}_0) \in \Omega$. Как было определено ранее, величина $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$. Здесь $M = \inf_{(t,\vec{x})\in\bar{R}} \|\vec{f}(t,\vec{x})\|$, где через R обозначен цилиндр $R = \left\{(t,\vec{x}) : |t-t_0| < a, \|\vec{x}-\vec{x}_0\| < b, \bar{R} \in \Omega\right\}$. Числа a и b

выбираются так, чтобы замкнутый цилиндр $\bar{R}$ принадлежал области Ω. Решения задачи Коши могут отличаться друг от друга областью определения. Чтобы показать это, рассмотрим задачу Коши для уравнения первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + 1, x(0) = 0, (t, x) \in \mathbb{R}^2. \tag{2.12}$$

Её решением является функция $x = tgt, t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. В качестве прямоугольной области возьмём $R = \left\{(t, x) : |t| < 1, \|x\| < b, \bar{R} \in \mathbb{R}^2\right\}$. Тогда $M = \max_{(t,x)\in\bar{R}} |x^2 + 1| = b^2 + 1$, а $h = \min\left(1, \frac{b}{M}\right) = \frac{b}{b^2+1}$. Основная теорема гарантирует существование решения задачи Коши (2.12) в замкнутом прямоугольнике $\bar{Q} = \{(t, x) : |t| \leq h, \|x\| \leq b\}$, в котором величина h может принимать различные значения. Действительно, так как $M = b^2 + 1$, то $\frac{b}{M} = \frac{b}{b^2+1}$. Максимальным значением величины h будет $h^* = \max \frac{b}{M} = \max \frac{b}{b^2+1}, b > 0$. Если $b \in (0, \infty)$, то максимальное значение h достигается при $b = 1$ и равно $h^* = \frac{1}{2}$. Отсюда следует, что $h \leq \frac{1}{2}$. Если теперь, например, взять $b = 2$, то $h = \frac{2}{5}$. Таким образом, на промежутках $\left(-\frac{\pi}{2}, -h\right)$ и $\left(h, \frac{\pi}{2}\right)$ имеются части интегральной кривой, проходящей через точку $(0, 0)$. Возникает вопрос: как показать их существование, если решение задачи Коши (2.12) было бы неизвестно? Вторая часть теоремы (о единственности решения на общем промежутке определения) позволяет преодолеть указанную трудность. С этой целью вводится понятие продолжения решения.

Определение 2.3.1. Решение $\vec{\varphi}(t), t \in \langle a, b\rangle$, системы (2.1) называется продолжаемым вправо, если существует решение $\vec{\psi}(t), t \in$
$\in < a, b_1 >, < a, b > \subset < a, b_1 >$, такое, что его сужение на промежуток $< a, b >$ совпадает с $\varphi(\overrightarrow{t})$, т.е. $\varphi(\overrightarrow{t}) = \psi(\overrightarrow{t}), t \in < a, b >$. Если $b = b_1$, то $(a, b) \subset (a, b]$.

Аналогично определяется продолжение влево. Слова решение продолжаемо и решение можно продолжить имеют один и тот же смысл.

Определение 2.3.2. Решение $\vec{\varphi}(t), t \in < a, b >$ называется непродолжаемым, если его нельзя продолжить ни влево, ни вправо. Примером непродолжаемого служит решение задачи Коши (2.12), приведенное выше.

Theorem

2.2. Пусть в области Ω выполняются условия основной теоремы $u\vec{\varphi}(t)$ - решение системы (2.1), определенное на промежутке $[\alpha, \beta)$. Если существует $\lim_{t\to\beta-0} \vec{\varphi}(t) = \vec{B}, (\beta, \vec{B}) \in \Omega$, то решение $\vec{\varphi}(t)$ может быть продолжено вправо.

Доказательство. - Решим задачу Коши, приняв за начальную точку $(\beta, \vec{B})$. Такое решение существует согласно теореме 2.1. Обозначим его $\vec{\varphi}_1(t)$. Предположим, что решение $\vec{\varphi}_1$ определено на отрезке $[\alpha_1, \beta_1], \beta \in [\alpha_1, \beta_1]$. Обозначим функцию

$$\vec{\psi}(t) = \begin{cases} \vec{\varphi}(t), t \in [\alpha, \beta), \\ \vec{\varphi}_1(t), t \in [\beta, \beta_1]. \end{cases}$$

Она по построению является непрерывной. Рассмотрим функцию

$$\vec{\phi}(t) = \varphi(\alpha) + \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau, \vec{\psi}(\tau))d\tau$$

Если $t \in [\alpha, \beta)$, то функция $\vec{\phi} = \vec{\varphi}(t) = \vec{\psi}(t)$. При $t \in [\beta, \beta_1]$ имеем

$$\vec{\phi} = \vec{\varphi}(\alpha) + \int_{\alpha}^{\beta} \vec{f}(\tau, \vec{\psi}(\tau))d\tau + \int_{\beta}^{t} \vec{f}(\tau, \vec{\psi}(\tau)d\tau =$$
$$= B + \int_{\beta}^{t} \vec{f}(\tau, \vec{\psi}(\tau))d\tau = \vec{\varphi}_1(t) = \vec{\psi}(t)$$

Таким образом, функция $\vec{\psi}(t)$ для любого $t \in [\alpha, \beta_1]$ является решением интегрального уравнения

$$\vec{\psi}(t) = \vec{\psi}(\alpha) + \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau, \vec{\psi}(\tau))d\tau$$

а значит, и решением векторного дифференциального уравнения (2.1). Сужение решения $\vec{\psi}(t), t \in [\alpha, \beta_1]$, на промежуток $t \in [\alpha, \beta)$ совпадает с решением $\vec{\varphi}(t)$. Согласно определению функция $\vec{\psi}(t)$ является продолжением решения $\vec{\varphi}(t)$ вправо.

Из доказанной теоремы следует, что непродолжаемое решение может быть определено только на интервале. Ниже он будет обозначаться (T_1, T_2). Если решение определено на отрезке, то оно может быть продолжено как влево, так и вправо. Непродолжаемое решение задачи Коши 2.12 существует на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Определение 2.3.3. Пусть M и N - два замкнутых множества, заданные в пространстве с евклидовой метрикой. По определению расстояние ρ между ними, обозначаемое как $\operatorname{dist}(M, N)$, равно

$$\rho = \operatorname{dist}(M, N) = \inf_{P \in M, Q \in N} |PQ|.$$

Если $M \cap N = \varnothing$, то в математическом анализе доказывается, что $\rho > 0$.

Замечание 2.3.1. Если $M \subset N$, то расстояние ρ между множеством M и границей ∂N области N определяется аналогично

$$\rho = \operatorname{dist}(M, \partial N) = \inf_{P \in M, Q \in \partial N} |PQ|.\diamond$$

Theorem

2.3. Пусть в области Ω выполняются условия основной теоремы 2.1, $a\bar{\Omega}_0$ - произвольная замкнутая ограниченная область такая, что $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega$. Тогда для любой точки $(t_0, \vec{x}_0) \in \Omega_0$ решение $\vec{\varphi}(t)$ с начальными данными в этой точке может быть продолжено в обе стороны до выхода на границу $\partial\Omega_0$.

Последняя фраза означает, что интегральная кривая, соответствующая решению $\vec{\varphi}(t)$, пересекает границу $\partial\Omega_0$.

Доказательство. $\rightarrow$ Поскольку $\bar{\Omega}_0$ - замкнутая область, то расстояние ρ от неё до границы $\partial\Omega$ положительно. Пусть D - множество всех точек области $\Omega \backslash \bar{\Omega}_0$, расстояние каждой из которых до замкнутой области $\bar{\Omega}_0$ не превосходит $\rho/2$ (если $\rho = +\infty$, то в качестве расстояния берется 1). Рассмотрим множество $\bar{\Omega}_1 = \bar{\Omega}_0 \cup \bar{D}$. Очевидно, $\bar{\Omega}_1$ - замкнутая ограниченная область и $\bar{\Omega}_0 \subset \bar{\Omega}_1 \subset \Omega$. Функция $\vec{f}(t, \vec{x})$ непрерывна в $\bar{\Omega}_1$ и, следовательно, ограничена в ней: $\|\vec{f}(t, \vec{x})\| \leq M$. Если $(t_0, \overrightarrow{x_0}) \in \Omega_0$, а положительные числа a и b удовлетворяют неравенству $a^2 + b^2 \leq \rho^2/4$, то замкнутый прямоугольник

$$\bar{R}^* = \{(t, \vec{x}) : |t - t_0| \leq a, \|\vec{x} - \overrightarrow{x_0}\| \leq b\}$$

принадлежит области Ω_1. Положив $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, получим замкнутый прямоугольник

$$\bar{Q}^* = \{(t, \vec{x}) : |t - t_0| \leq h, \|\vec{x} - \overrightarrow{x_0}\| \leq b\},$$

который содержится в области Ω_1 независимо от выбора точки $(t_0, \vec{x}_0) \in \Omega_0$. (Например, можно взять прямоугольник со сторонами $a = \frac{\rho}{2\sqrt{M^2+1}}$ и $b = \frac{\rho M}{2\sqrt{M^2+1}}$. Тогда для любой точки $(t_0, \vec{x}_0) \in \Omega_0$ величина $h = \frac{\rho}{2\sqrt{M^2+1}}$.)

Из основной теоремы следует, что решение задачи Коши с начальными данными $t_0, \vec{x}_0$ существует на отрезке $[t_0 - h, t_0 + h]$. Таким образом, какую бы мы ни взяли точку $(t_0, \vec{x}_0) \in \Omega_0$, решение задачи Коши будет определено на отрезке длины $2h$. Возьмём далее точку с координатами $t_1 = t_0 + h, \vec{x}_1 = \vec{\varphi}(t_0 + h)$. Если она принадлежит области Ω_0, то продолжим решение вправо на отрезок длины h. Так как Ω_0-ограниченная область и $h < \rho/2$, то, продолжая эту процедуру, мы на некотором шаге попадём либо на границу $\partial\Omega_0$, либо в область $\Omega_1 \backslash \bar{\Omega}_0$. Это означает, что интегральная кривая, соответствующая решению $\vec{\varphi}(t)$, пересечет границу $\partial\Omega_0$. Особо отметим, что она остаётся при этом в области Ω_1.

Замечание 2.3.2. Применим процедуру продолжения, использованную при доказательстве теоремы 2.2 , к решению задачи Коши (2.12) на отрезке $[-h, h]$. Возьмём точку с координатами $(h, \varphi(h))$ за начальную. Согласно основной теореме решение будет существовать в замкнутом прямоугольнике

$$\bar{Q}_1^* = \{(t, x) : |t - h| \leq h_1, |x - \varphi(h)| \leq b\}.$$

Здесь $h_1 = \min\left(1, \frac{b}{(\varphi(h)+b)^2+1}\right), h_1 < h$. Продолжая этот процесс, мы получим на n-м шаге $h_{n+1} < h_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и $h_n \to 0$ при $n \to \infty$, так как $\varphi(x)$-монотонно возрастающая функция. В отличие от теоремы 2.2 здесь длины отрезков Пеано $2h_n$ при $n \to \infty$ стремятся к нулю. При этом ясно, что $\sum_{k=1}^{n} h_k \to \pi/2$ при $n \to \infty$.

Замечание 2.3.3. Возьмём ограниченные области $\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_n \cdots$ такие, что $\bar{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega$. Тогда согласно основной теоремы интегральная кривая, являющаяся графиком решения задачи Коши (2.5), в случае $\rho < \infty$ может приблизиться к границе $\partial\Omega$ на любое сколь угодно малое расстояние.

Возникает вопрос: каким образом интегральная кривая приближается к границе $\partial\Omega$ и что мы получаем в конечном итоге?

Theorem

2.4. Пусть в области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ выполняются условия основной теоремы. Тогда для любой точки $(t_0, \vec{x}_0) \in \Omega$ решение $\vec{\varphi}(t)$ задачи Коши (2.5) может быть продолжено единственным образом на максимальный интервал существования (T_1, T_2). При этом решение $\vec{\varphi}(t)$ стремится κ границе $\partial\Omega$ области Ω при $t \to T_2$ и $t \to T_1$.

Утверждение «решение $\vec{\varphi}(t)$ стремится $\boldsymbol{\kappa}$ границе $\partial\Omega$ области Ω при $t \to T_2$ » означает, что при t, стремящихся $\boldsymbol{\kappa} T_2$, точки с координатами $(t, \vec{\varphi}(t))$ покидают любую замкнутую ограниченную область, принадлежащую области Ω.

Доказательство. $\to$ Рассмотрим множество всех решений системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющих начальным условиям $\vec{\varphi}(t_0) = \vec{x}_0$. Они отличаютя областью определения. Обозначим через T_2 точную верхную грань множества P_r правых концов промежутков, на которых определены решения задачи Коши (2.5), аналогично через T_1 - точную нижную грань множества P_l левых концов. Если множество P_l неограничено снизу, то полагаем $T_1 = -\infty$; если множество P_2 неограничено сверху, то полагаем $T_2 = \infty$. Построим решение задачи Коши (2.5) $\vec{\varphi}(t)$ на интервале $J = (T_1, T_2)$. Возьмем произвольную точку $t_\star \in J$. Для определённости будем считать, что $t_\star > t_0$. Так как T_2 - точная верхняя грань множества P_r, то существует решение $\vec{x} = \vec{\psi}(t), t \in (t_1, t_2) \subset J, t_\star \in (t_1, t_2), t_0 \in (t_1, t_2)$. Положим $\vec{\varphi}(t_\star) = \vec{\psi}(t_\star)$. В силу основной теоремы данное определение корректно. Полученное таким образом значение $\vec{\varphi}(t_\star)$ не зависит от случайно вы-

бранного решения $\vec{\psi}(t)$. Действительно, пусть $\vec{\phi}(t)$ - какое-либо другое решение, удовлетворяющее начальному условию $\vec{\phi}(t_0) = \overrightarrow{x_0}$ и определённое на интервале, содержащем точку $t_\star$. Тогда $\vec{\psi}(t_\star) = \vec{\phi}(t_\star)$ в силу основной теоремы 2.1, так как

$\vec{\psi}(t_0) = \vec{\phi}(t_0)$. Таким образом, функция $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ однозначно определена на всём интервале $J = (T_1, T_2)$ и $\vec{\varphi}(t_0) = \vec{x}_0$. Она является решением системы уравнеий (2.1) с начальными данными $t_0, \vec{x}_0$, так как в окрестности каждой точки $t_\star$ интервала (T_1, T_2) функция $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ совпадает по построению с некоторым решением.

Построенное решение $\vec{\varphi}$ - непродолжаемое, так как в противном случае должно существовать решение $\vec{\psi}(t)$, определенное на большем интервале $(A, B) \supseteq J$. Но тогда $T_2 \leq B, T_1 \geq A$ и согласно основной теоремы $\vec{\psi}(t) = \vec{\varphi}(t)$ при $t \in (T_l, T_2)$. Однако это невозможно, так как по построению решения $\vec{\varphi}(t)$ значение T_2 является точной верхней гранью множества правых концов всех промежутков, на которых определены решения задачи Коши (2.5), T_1 - точной нижней гранью. Это означает, что $T_2 \geq B, T_1 \leq A$. Следовательно, $T_2 = B, T_1 = A$. Полученное решение $\vec{\varphi}(t), t \in (T_1, T_2)$, согласно основной теореме является единственным непродолжаемым решением.

Рассмотрим отдельно важный случай, когда векторное дифференциальное уравнение (2.1) определено во всей плоскости $\mathbb{R}^2$.

Theorem

2.5. Пусть $\vec{f}(t, \vec{x}) \in \boldsymbol{C}(\mathbb{R}^2)$ и удовлетворяет условию Липшица по $\vec{x}$ в любой замкнутой ограниченной области $\bar{\Omega}_L \subset \mathbb{R}^2$. Тогда всякая интегральная кривая при возрастании t либо может быть неограниченно продолжена вправо до $t = +\infty$, либо имеет вертикальную асимптоту при конечном значении $t = \beta$.

Последнее утверждение означает, что интегральная кривая с начальными данными $t_0, \vec{x}_0$ при $t \to \beta_{-0}$ выходит из любой замкнутой ограниченной области $\bar{\Omega}_L$, удовлетворяющей включению $(t_0, \overrightarrow{x_0}) \in \Omega_L$.

Замечание 2.3.4. Пусть задано непродолжаемое решение $\vec{\varphi}(t), t \in\in (T_1, T_2)$. Как интегральная кривая приближается к границе области $\partial\Omega$ при $t \to T_1 + 0, t \to T_2 - 0$? Ответ на этот вопрос ниже даётся на примерах решений уравнений на плоскости:

1. $\lim_{t \to T_2 - 0} \vec{\varphi}(t) = +\infty : x' = x^2, x(-1) = 1$. Решением задачи Коши будет функция $x = -\frac{1}{t}$. Отсюда получаем $T_2 = 0$.

2. Предел $\lim_{t \to T_1 + 0} \vec{\varphi}(t)$ не существует: $x' = x - \sin\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{1}{t^2}\cos\left(\frac{1}{t}\right)$, $x\left(\frac{1}{\pi}\right) = 0$. Решением этой задачи Коши будет функция $\varphi = \sin\frac{1}{t}$, предел которой при $t \to +0$ не существует. Значит, $T_1 = 0$.

3. Существует предел $\lim_{t \to T_1 + 0} \vec{\varphi}(t) = B : 2x' = \frac{x}{t}, t > 0, x = C\sqrt{t}$. Здесь $T_1 = 0, B = 0$.

Пример 2.3.1. [2]. При каких α каждое решение уравнения

$$x' = |x|^\alpha \tag{2.13}$$

может быть продолжено на бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$?

Решение

1. Пусть $\alpha < 0$. Тогда уравнение (2.13) определено в двух полуплоскостях: $x > 0$ и $x < 0$. Через каждую точку в этих полуплоскостях проходит единственная интегральная кривая в силу теоремы существования и единственности. Если $x > 0$, то уравнение (2.13) принимает вид

$$x' = x^\alpha. \tag{2.14}$$

Все решения уравнения (2.14) описываются функцией

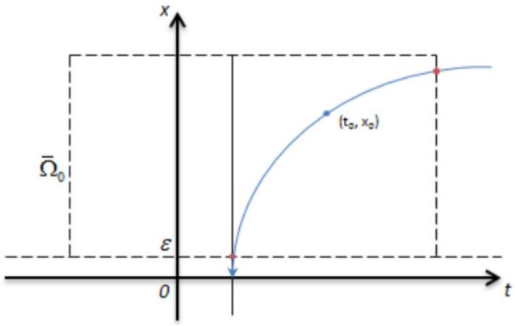
$$x = (1-\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}(t-C)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad t-C>0, \quad x>0. \tag{2.15}$$

При значении постоянной $C = t_0 - \frac{x_0^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ интегральная кривая, соответствующая решению (2.15), проходит через точку (t_0, x_0). Решение (2.15) определено на интервале ($C, +\infty$) и не может быть продолжено влево за точку $t = C$. Следовательно, максимальным интервалом существования решения (2.15) будет ($C, +\infty$), т.е. $T_1 = C, T_2 = +\infty$. Интегральная кривая уравнения (2.14), проходящая через точку (t_0, x_0), $x_0 > 0, t_0 \in \mathbb{R}$, при $t \to C(t > C)$ покидает любую замкнутую область $x \geq \varepsilon(\varepsilon > 0)$ и сколь угодно близко приближается к границе области $x = 0$, но достичь её не может. К границе $x = 0$ интегральная кривая приближается таким образом, что существует предел $\lim_{t\to T_1} x(t) = 0$. Производная решения (2.15) при $t \to C$ стремится к $+\infty$.

Аналогично ведут себя интегральные кривые уравнения (2.13) в полуплоскости $x < 0$. Они описываются функцией

$$x = -(1-\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}}(C_1-t)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad C_1-t>0, \quad x<0. \tag{2.16}$$

При любом значении постоянной C_1 решение (2.16) не может быть продолжено вправо за точку $t = C_1$. Здесь $T_1 = -\infty, T_2 = C_1$.



2. Пусть $\alpha > 1$. В плоскости $\mathbb{R}^2$ правая часть уравнения (2.13) удовлетворяет условиям теоремы 2.1 существования и единственности решения задачи Коши. Значит, через каждую точку плоскости $\mathbb{R}^2$ проходит единственная интегральная кривая. Функция $x = 0$, $t \in (-\infty, +\infty)$ является решением уравнения (2.13). Рассмотрим сначала случай $x > 0$. Уравнение (2.13) становится уравнением (2.14). Все его решения имеют вид

$$x_1 = (\alpha-1)^{\frac{1}{1-\alpha}}(C_1-t)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad C_1-t>0, \quad \frac{1}{1-\alpha}<0, \quad x_1>0. \tag{2.17}$$

При $x_0 > 0, t_0 \in \mathbb{R}^1$ и значении $C_1 = t_0 + \frac{x_0^{1-\alpha}}{\alpha-1}$ решение ((2.17)) удовлетворяет начальному условию $x_1(t_0) = x_0$. При $t \to C_1(t < C_1)$ оно стремится к $+\infty$. Вертикальная прямая $t = C_1$ является асимптотой решения (2.17). Последнее не может быть продолжено вправо за точку $t = C_1$ и максимальным интервалом существования решения будет $(-\infty, C_1)$, где $T_1 = -\infty, T_2 = C_1$. При $t \to C_1$ интегральная кривая, соответствующая решению (2.17), которое удовлетворяет начальному условию, при возрастании x выходит из любого прямоугольника $\bar{\Omega}_L$ такого, что имеет место включение $(t_0, x_0) \in \Omega_L$.

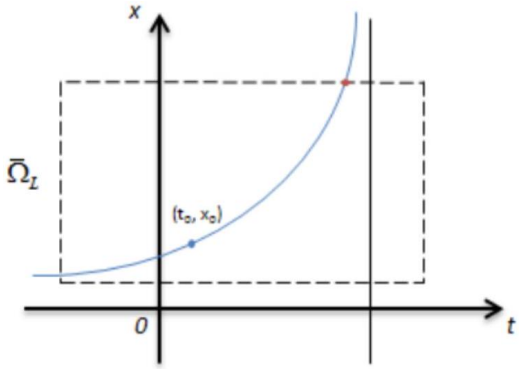
При $x < 0$ уравнение (2.13) принимает вид

$$x' = (-x)^{\alpha}. \tag{2.18}$$

Все его решения описываются функцией

$$x_2 = -(\alpha-1)^{\frac{1}{1-\alpha}}(t-C_2)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad t-C_2>0, \quad x<0. \tag{2.19}$$

Решение (2.19) не может быть продолжено влево за точку $t = C_2$. Вертикальная прямая $t = C_2$ является асимптотой решения (2.19). Максимальным интервалом существования решения будет интервал $(C_2, +\infty)$, т.е. $T_1 = C_2, T_2 = +\infty$.



3. Пусть теперь $\alpha = 0$. Отсюда следует, что $x \neq 0$ (операция 0^0 не определена). Уравнение (2.13) примет вид $x' = 1, x \neq 0$. Его решения при $x > 0$ описываются функцией $x = t+C, t+C > 0$. При фиксированном C решение не может быть продолжено влево за точку $t = -C$. Максимальным интервалом существования решения будет интервал $(-C, +\infty)$. Здесь $T_1 = -C, T_2 = +\infty, \lim_{t\to T_1} x(t) = 0$. Аналогично при $x < 0$. Картина поведения интегральных кривых качественно подобна случаю 1 .
4. Пусть $\alpha = 1$. Функция $x = 0, t \in (-\infty, +\infty)$ - решение уравнения (2.13): $x' = |x|$. При $x > 0$ решения уравнения (2.13) описываются функцией $x = Ce^t, C > 0$, а при $x < 0$ - функцией $x = -Ce^{-t}, C > 0$. В результате получаем, что все решения уравнения (2.13) при $\alpha = 1$ могут быть продолжены на интервал $(-\infty, +\infty)$. Здесь следует обратить внимание на следующий факт: функция $|t|$ не дифференцируемая при $t = 0$. Однако она удовлетворяет условию Липшица. Поэтому че-

рез каждую точку плоскости $\mathbb{R}^2$ проходит единственная интегральная кривая.
5. Рассмотрим, наконец, случай $0 < \alpha < 1$. Правая часть уравнения - непрерывная функция. Следовательно, для любой точки $(x_0, y_0) \in\in \mathbb{R}^2$ решение задачи Коши существует согласно теореме Пеано. Однако в полосе $|x| < \varepsilon, \varepsilon > 0$, функция $|x|^\alpha$ не удовлетворяет условию Липшица (она также не дифференцируема при $x = 0$). Следовательно, не выполняется достаточное условие теоремы существования и единственности решения задачи Коши с начальными данными в точках $(t_0, 0), t_0 \in \mathbb{R}$. К чему это приводит? Функция $x = 0, t \in (-\infty, +\infty)$ является решением уравнения (2.13). Пусть $x > 0$. Все решения уравнения (2.14) описываются функцией

$$x_1 = (1-\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}} (t - C_1)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad t - C_1 > 0, \quad x > 0. \tag{2.20}$$

Любое решение $x_1(t)$ (2.20) может быть продолжено на промежуток $[C_1, +\infty)$. При этом производная справа в точке $t = C_1$ равна нулю. Если $x < 0$, то все решения уравнения (2.18) описываются функцией

$$x_2 = -(1-\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}} (C_2 - t)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad C_2 - t > 0, \quad x < 0. \tag{2.21}$$

Любое решение $x_2(t)$ (2.21) может быть продолжено на промежуток $(-\infty, C_2]$. Производная слева решения в точке $t = C_2$ равна нулю. Составим непрерывно дифференцируемую функцию

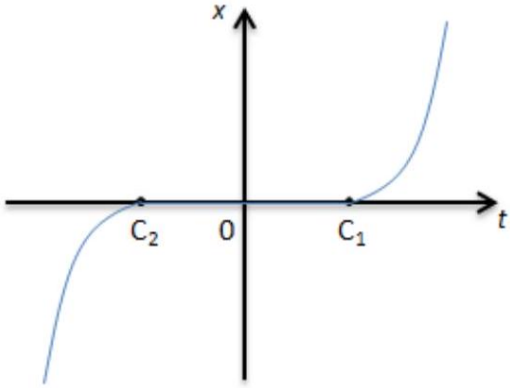
$$x(t) = \begin{cases} x_2(t), t \in (-\infty, C_2], \\ 0, t \in (C_1, C_2), \\ x_1(t), t \in [C_1, +\infty) \end{cases}$$

Она является решением уравнения (2.13), которое называется составным (или композиционным). Отсюда следует, что любое решение $x_2(t)$ (2.21) может быть

продолжено вправо на весь интервал $(-\infty, +\infty)$ бесконечным числом способов. Любое решение $x_1(t)$ уравнения (2.18) также может быть продолжено влево на весь интервал $(-\infty, +\infty)$ бесконечным числом способов.

Если взять точку $(t_0, x_0)\,, x_0 < 0$, то через нее проходит бесконечно много (континуум) интегральных кривых в $\mathbb{R}^2$. В достаточно малой ее окрестности через нее проходит единственная интегральная кривая, продолжение которой в полуплоскость $x > 0$ будет неединственным. Это связано с тем,

что в любой сколь угодно малой окрестности произвольной точки $(t_0, 0)\,, t_0 \in \mathbb{R}$, через нее проходит бесконечно много интегральных кривых и единственность решения задачи Коши нарушается. Ответ: $\alpha \in (0, 1]$.$\diamond$



Пример 2.3.2. [2]. Доказать, что решение уравнения

$$x' = t^3 - x^3, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2 \tag{2.22}$$

с произвольным начальным условием

$$x\,(t_0) = x_0. \tag{2.23}$$

1. может быть продолжено на промежуток $[t_0, +\infty)$ при любом t_0;
2. но не каждое решение задачи Коши может быть продолжено на промежуток $(-\infty, t_0]$.

Решение

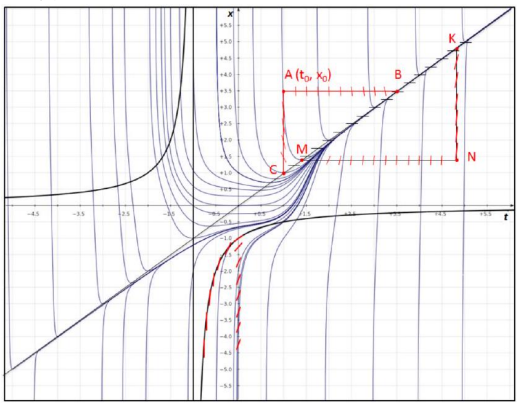
Так как правая часть уравнения (2.22) удовлетворяет в любой $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ всем условиям теоремы существования и единственности, то через любую точку $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ проходит единственная интегральная кривая. Данное уравнение не интегрируется в конечном виде. Поэтому при его изучении большую роль играют теоремы продолжения и качественный анализ поведения интегральных кривых.

1. Покажем сначала, что любое решение задачи Коши может быть продолжено вправо на промежуток $[t_0, +\infty)$. Обозначим через R_-область, в которой $t - x < 0$, а через R_+- область, где $t - x > 0$. В R_-

производная решения уравнения (2.22) $x' < 0$, а в R_+, естественно, $x' > 0$. Пусть $(t_0, x_0) \in R_-$. Рассмотрим $\triangle ABC$, в котором точка с координатами (t_0, x_0) обозначена A, точки B и C лежат на прямой $x = t$, а стороны $AB \| Ot$ и $AC \| Ox$. На отрезках AB и AC изображен наклон пересекающих их интегральных кривых. В силу основной теоремы решение задачи Коши с начальными данными (t_0, x_0) существует, и интегральная кривая, выходящая из точки A, имеет отрицательный наклон. При возрастании t она не может пересечь стороны треугольника AB и AC, так как значения функции $f(t, x)$ конечны

в точках треугольника ABC, а значит, конечны значения производной $\varphi'(t)$. Поэтому согласно теореме продолжения она может достигнуть границы области ABC, только пересекая отрезок BC. Точку пересечения обозначим M. Рассмотрим далее $\triangle MNK$, в котором точка $N \in R_+$, точка K на прямой $x = t$, причем $MN \| Ot, NK \| Ox$, а точка N выбрана произвольно. Наклон интегральных кривых, пересекающих стороны MN и NK, изображен на рисунке ниже. В $R_+ \quad x' > 0$. Вследствие этого интегральная кривая, выходящая из точки M, с возрастанием t может выйти на границу области MNK, только достигнув отрезка NK. Согласно теореме продолжения в силу произвольности выбора точки N решение задачи Коши может быть продолжено вплоть до $t = +\infty$.

Случай, когда $(t_0, x_0) \in R_+$, доказывается аналогично.



2. Возьмем точку $(t_0, x_0) \in R_-$и продолжим решение задачи Коши влево. Произведем в уравнении (2.22) замену $t = -\tau$ и рассмотрим уравнение $\frac{d\tau}{dy} = \frac{1}{\tau^3+y^3}$ с начальными данными $(\ \tau_0, x_0\ )$, $x_0 + \tau_0 > 0$. В полуплоскости $x + \tau > 0$ производная $x'_\tau > 0$. Следовательно, с ростом τ растет и x. Справедлива оценка $\frac{d\tau}{dx} = \frac{1}{\tau^3+x^3} \leq \frac{1}{\tau_0^3+x^3}, \quad \tau \geq \tau_0$. Отсюда получаем $\tau - \tau_0 \leq \int_{x_0}^{x} \frac{dz}{\tau_0^3+z^3}$. Так как интеграл при $x \to +\infty$ сходится, то величина $\tau - \tau_0$ при любом поведении интегральной кривой ограничена. Таким образом, решение задачи Коши не может быть продолжено на весь промежуток $(-\infty, x_0]$. Возьмём теперь точку $(t_0, x_0) \in\in R_+$. Ниже мы выберем её таким образом, чтобы решение задачи Коши нельзя было продолжить на промежуток $(-\infty, t_0]$.

Рассмотрим функцию $x = -\frac{1}{t+1}, t > -1$, графиком которой является нижняя ветвь гиперболы, сдвинутая влево вдоль оси Ot на 1 . Её производная равна $x' = \frac{1}{(t+1)^2}$. Угловой коэффициент касательных к интегральным кривым уравнения (2.22) в точках графика функции $x(t)$ равен $x' = t^3 + \left(\frac{1}{t+1}\right)^3$. При этом, как нетрудно видеть, для $t \in (-1, 0], x' > 0$ на указанном промежутке. Для $t \in (-1, 0]$ имеем

$$\frac{1}{(t+1)^2} \leq t^3 + \frac{1}{(t+1)^3} \Longleftrightarrow t^2 - \frac{1}{(t+1)^3} \leq 0 \Longleftrightarrow t^2(t+1)^3 \leq 1.$$

Так как в последнем неравенстве оба сомножителя меньше единицы, то угол наклона касательных к интегральным кривым в точках графика функции $x(t)$ больше, чем угол наклона касательных к самому графику функции $x(t)$. Следовательно, интегральные кривые, выходящие из точек $(0, x_0)\,, x_0 < -1$, при $t \in (-1, 0]$ будут лежать ниже графика функции $x(t)$, проходящего через точку $(0, -1)$. Интегральная кривая, выходящая из точки $(0, -1)$, также располагается ниже графика функции $x(t)$. Поэтому интегральные кривые не могут пересечь её график, и, следовательно, они не могут быть продолжены влево за точку $t = -1$.

3.0.4 2.4. Differential equations of the first order, unsolved with respect to the derivative

Рассмотрим дифференциальное уравнения 1 -го порядка неразрешенное относительно производной

$$F\left(t, x, x'\right)=0. \tag{2.24}$$

Положим $p=x'$ и предположим, что функция $F(t,x,p)$ определена в области $G \subseteq \mathbb{R}^3_{t,x,p}$ и $F \in \mathbf{C}^1(G), |\nabla(F)| \neq 0$. Определим множество $S=\{(t,x,p) \in G : F(t,x,p)=0\}$. Если оно не пусто, то S - гладкая поверхность, заданная неявно.

Как мы уже указывали в разделе 1.3, каждому решению $\varphi(t), t \in J$, в пространстве $\mathbb{R}^3_{t,x,p}$ отвечает кривая $\Gamma = \{(t,x) : x=\varphi(t), p=\varphi'(t),\ t \in J\}$. Она была названа интегральной кривой в $\mathbb{R}^3_{t,x,p}$ и принадлежит поверхности $S : \Gamma \subset S$. Но не всякая гладкая кривая, принадлежащая поверхности S, является интегральной кривой в $\mathbb{R}^3{}_{t,x,p}$, т.к. в каждой точке интегральной кривой должно выполняться соотношение $dx-pdt=0$. Было также показано, что если некоторая гладкая кривая на S удовлетворяет данному соотношению, то она - интегральная кривая. Проекция Γ на плоскость $\mathbb{R}^2_{t,x}$, обозначенная γ, является интегральной кривой уравнения (2.24) в плоскости $\mathbb{R}^2_{t,x}$.

Возьмём точку (t_0,x_0) в $\mathbb{R}^2_{t,x}$ и рассмотрим в этой точке уравнение $F\left(t_0,x_0,p\right)=0$ относительно p. Пусть мы имеем в результате его решения k различных значений $p_i, i=\overline{1,k}$. Эти значения p_i называются допустимыми. В плоскости $\mathbb{R}^2_{t,x}$ через точку (t_0,x_0) проходит k различных интегральных кривых со значениями производных, равными p_i. Чтобы проиллюстрировать сказанное, рассмотрим простой пример:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=1 \Leftrightarrow p^2=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} p_1=1 \\ p_2=-1 \end{array}\right.$$

Значит, для любой точки (t_0,x_0) в $\mathbb{R}^2_{t,x}$ допустимыми значениями будут $p_1=1$ и $p_2=-1$. Покажем, что через неё проходит две интегральные кривые с различными значениями производной. Для этого решим уравнение

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \frac{dx}{dt}=1, \\ \frac{dx}{dt}=-1, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x_1=t+C_1 \\ x_2=-t+C_2 \end{array}\right.$$

Таким образом, через любую точку (t_0,x_0) в плоскости $\mathbb{R}^2_{t,x}$ проходят две интегральные кривые. Чтобы выделить какую-либо из них, нужно задать либо значение производной $x'\left(t_0\right)=1$, либо $x'\left(t_0\right)=-1$.

Рассмотрим теперь интегральные кривые Γ_1 и Γ_2 в пространстве $\mathbb{R}^3_{t,x,p}$, соответствующие интегральным кривым $x_1=t+C_1$ и $x_2=-t+C_2$ в плоскости $\mathbb{R}^2_{t,x}$. Интегральные кривые $\Gamma_1 = \{(t,x) : x_1==t+C_1, p_1=1; t, \mathrm{C}_1 \in \mathbb{R}\}$ лежат в плоскости $p_1=1$, а интегральные

кривые $\Gamma_2 = \{(t,x) : x_1=-t+C_2, p_2=-1; t, \mathrm{C}_2 \in \mathbb{R}\}-$ в плоскости $p_2=-1$. Мы получили, что интегральные кривые Γ_1 и Γ_2 в пространстве $\mathbb{R}^3_{t,x,p}$ лежат в различных плоскостях.

Таким образом, чтобы выделить единственную интегральную кривую, кроме начальных данных (t_0,x_0) необходимо задать ещё значение p_0, являющееся решением уравнения $F\left(t_0,x_0,p_0\right)=0$. Поэтому задача Коши для уравнения, неразрешенного относительно производной, должна ставиться следующим образом.

Задача Коши. Пусть задана точка $(t_0,x_0,p_0) \in G$ и в этой точке $F\left(t_0,x_0,p_0\right)=0$. Требуется найти решение $\varphi(t), t \in J$ уравнения (2.24) такое, что

$$\varphi\left(t_0\right)=x_0, \varphi'\left(t_0\right)=p_0. \tag{2.25}$$

Ещё раз обратим внимание, что значение p_0 не является произвольным, а находится из уравнения $F\left(t_0, x_0, p_0\right)=0$.

Theorem

2.1. Если $F(t, x, p) \in \boldsymbol{C}^1(G)$ и в некоторой точке $\left(t_0, x_0, p_0\right) \in$
$\in G$ выполняются соотношения

$$F\left(t_0, x_0, p_0\right)=0 u \frac{\partial F}{\partial p}\left(t_0, x_0, p_0\right) \neq 0 \tag{2.26}$$

то решение задачи Коши (2.24), (2.25) существует и единственно.
Доказательство. - Согласно теореме о неявной функции, при условиях $F(t, x, p) \in \mathbf{C}^1(G)$ и (2.26) существуют такие окрестности $U\left(t_0, x_0\right) \in \mathbb{R}_{t, x}^2$ и $U\left(p_0\right)$ точек (t_0, x_0) и p_0 соответственно, что для любой точки $(t, x) \in U\left(t_0, x_0\right)$ уравнение $F(t, x, p)=0$ имеет единственное решение $p=f(t, x) \in U\left(p_0\right), p_0=f\left(t_0, x_0\right)$. При этом $f(t, x) \in\in \mathbf{C}^1(U)$. Отсюда получаем задачу Коши для уравнения первого порядка, разрешённого относительно производной:

$$x^{\prime}=f(t, x), x\left(t_0\right)=x_0,(t, x) \in U\left(t_0, x_0\right), f(t, x) \in \mathbf{C}^1(U).$$

Возьмём прямоугольник $\Pi\left(t_0, x_0\right)$ с центром в точке (t_0, x_0) такой, что $\Pi\left(t_0, x_0\right) \subset U\left(t_0, x_0\right)$. Так как он является выпуклой областью, то функция $f(t, x)$, согласно лемме 2.1, удовлетворяет условию Липшица. В силу теоремы 2.1 (доказанной выше) задача Коши имеет единственное решение.

Точки поверхности S, в которых $\frac{\partial F}{\partial p}=0$, называются особыми. Множество особых точек на поверхности S, для которых мы не можем применить теорему 2.1 , описывается системой уравнений

$$\begin{cases} F(t, x, p)=0 \\ \frac{\partial F}{\partial p}(t, x, p)=0 \end{cases} \tag{2.27}$$

Исключим p из системы (2.27), предполагая, что она совместная. В результате получим уравнение, связывающее между собой переменные t и x. Обозначим множество решений этого уравнения через $D(t, x) \subset \mathbb{R}_{t, x}^2$. Это множество называется дискриминантным. Если оно представляет собой кривую γ_D, то она называется дискриминантной кривой. Она может оказаться решением уравнения.

Определение 2.4.1. Решение $\varphi(t), t \in J$ уравнения (2.24) называется особым, если в любой окрестности каждой точки $\left(t_0, \varphi\left(t_0\right)\right), t_0 \in J$ его интегральной кривой проходит другая интегральная кривая, имеющая с ней в точке ($t_0, \varphi\left(t_0\right)$) общую касательную.

Theorem

2.2. Если $\varphi(t), t \in J$, - особое решение уравнения (2.24), то в каждой точке его интегральной кривой в пространстве $\mathbb{R}_{t, x, p}^3$ справедлива система (2.27).

Доказательство. - Если $\varphi(t), t \in J$ - особое решение, то $F(t, \varphi(t), \varphi^{\prime}(t))=0$ для любого $t \in J$. Возьмём точку с координатами $\left(t_0, x_0=\varphi\left(t_0\right), p_0=\varphi^{\prime}\left(t_0\right)\right)$ на интегральной кривой в $\mathbb{R}_{t, x, p}^3$, соответсвующей особому решению. Такую интегральную кривую ниже будем называть особой и обозначать Γ_S. Предположим, что $\frac{\partial F}{\partial p}\left(t_0, x_0, p_0\right) \neq 0$, тогда по теореме 2.1 найдётся окрестность точки (t_0, x_0) на плоскости $\mathbb{R}_{t, x}^2$, в которой через неё проходит единственная интегральная кривая. Противоречие. Следовательно, $\frac{\partial F}{\partial p}\left(t_0, x_0, p_0\right)=0$.

Дадим также другое (эквивалентное) определение особого решения.

Определение 2.4.2. Решение $\varphi(t), t \in J$, называется особым решением уравнения (2.24), если в любой окрестности каждой его точки нарушается единственность решения задачи Коши (2.24), (2.25).

Пусть система (2.27) задаёт кривую Γ_D в пространстве $\mathbb{R}^3_{t,x,p}$. Следуя [1], будем называть её криминантой. Понятно, что $\Gamma_D \subset S$.

Будем дополнительно предполагать, что $F \in \mathbf{C}^2(G)$. Согласно теореме о неявной функции криминанта Γ_D является гладкой кривой в пространстве $\mathbb{R}^3_{t,x,p}$, если в каждой её точке ранг производной отображения $(t,x,p) \mapsto \left(F, \frac{\partial F}{\partial p}\right)$ области G на плоскость $\mathbb{R}^2_{t,x}$ максимален и равен 2. Кривая γ_D является проекцией криминанты Γ_D на плоскость $\mathbb{R}^2_{t,x}$.

Возьмём точку $(t_0, x_0, p_0) \in \Gamma_D$. Тогда в ней $\frac{\partial F}{\partial p}(t_0, x_0, p_0) = 0$. Отсюда следует, что в этой точке касательная плоскость к S параллельна оси p, так как мы первоначально потребовали, чтобы поверхность S была гладкой.

Плоскость $x - x_0 = p_0(t - t_0)$, проходящая через точку (t_0, x_0, p_0), принадлежащую криминанте Γ_D, называется контактной [1]. Касательная плоскость к криминанте в этой точке может либо совпадать с ней, либо пересекать её. Если эти плоскости совпадают, то существует особое решение. Через каждую точку кривой Γ_D проходят сама кривая Γ_D и некоторая интегральная кривая. Её проекция на плоскость $\mathbb{R}^2_{t,x}$ касается особого решения.

Theorem

2.2 утверждает, что особое решение принадлежит дискриминантному множеству. Обратное утверждение неверно. Ниже приведены примеры, показывающие, что дискриминантное множество может состоять из 1): точки, 2): особого решения, 3): точек возврата, 4): точек прикосновения, 5): частного решения.
Для этого в соответствии с нумерацией рассмотрим уравнения:

1. $tx' = x, t \in \mathbb{R}$.

Дискриминантное множество определяется из системы уравнений (2.27):

$$\begin{cases} tp - x = 0, \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow (t,x) = (0,0) \text{ - дискриминантное множество - точка.}$$

Нетрудно показать, интегрируя уравнение, что все решения, определённые при $t \in \mathbb{R}$, описываются функцией $x = Ct$. Здесь C - произвольная постоянная. Чтобы выделить интегральную кривую в точке $(0;0)$, необходимо дополнительно задать в ней значение производной.
2) $x'^2 = 4x, t \in \mathbb{R}$.

Заметим, что $x \geq 0$. Дискриминантное множество находится из системы (2.27):

$$\begin{cases} p^2 - 4x = 0 \\ 2p = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 0, p = 0$ - дискриминантное множество состоит из точек оси Ot.
Проинтегрируем уравнение, считая $x > 0$. Имеем

$$\left[\begin{array}{l} \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt \Rightarrow x = (t + C_1)^2, (t + C_1) > 0 \\ \frac{dx}{2\sqrt{x}} = -dt \Rightarrow x = (t + C_2)^2, (t + C_2) < 0 \end{array} \right.$$

Покажем, что решение $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$, - особое. Обозначим

$$x_1(t) = 0, x_2(t) = (t + C)^2, t \in \mathbb{R}, \mathrm{C} \in \mathbb{R}$$

График решения $x_2(t)$ проходит через точку ($t_0, 0$) при значении постоянной $C = -t_0$. Покажем, что в каждой точке ($t_0, 0$) оси Ot оба решения касаются друг друга. Действительно,

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_2(t_0) \Rightarrow 0 = (t - t_0)^2, \\ x_1'(t_0) = x_2'(t_0) \Rightarrow 0 = 2(t - t_0), \end{cases} \Rightarrow t = t_0$$

Следовательно, решение $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$, - особое. В пространстве $\mathbb{R}^3_{t,x,p}$ интегральные кривые Γ и особая интегральная кривая Γ_S имеют вид

$$\Gamma = \left\{t, x, p : x = (t + C)^2, p = 2(t + C), t \in \mathbb{R}\right\}$$
$$\Gamma_S = \{t, x, p : x = 0, p = 0, t \in \mathbb{R}\}$$

Мы видим, что через каждую точку особой интегральной кривой Γ_S проходит интегральная кривая Γ, имея в ней касательный вектор с координатами $(1, 0, 2)$. В результате единственность решения задачи Коши (2.24), (2.25) нарушается. Проекцией особой интегральной кривой Γ_S на плоскость $\mathbb{R}^2_{t,x}$ будет кривая $\gamma_S = \{(t, x) : x(t) = 0, t \in \mathbb{R}\}\}$, которая является графиком особого решения уравнения (2.24) в плоскости $\mathbb{R}^2_{t,x}$.

Кривая, которая является проекцией интегральной кривой Γ на плоскость $\mathbb{R}^2_{t,x}$, касается графика особого решения γ_S. Кривая (I), расположенная на рис. 2.1 в верхней части поверхности $p^2 = 4x$, проектируется на интегральную кривую $x = (t + C)^2, (t + C) \leq 0$ в плоскости $\mathbb{R}^2_{t,x}$. Кривая (2), расположенная в нижней части поверхности,

проектируется в плоскости $\mathbb{R}^2_{t,x}$ на интегральную кривую $x = (t + C)^2$, $(t + C) \geq 0$. Заметим, что контактная плоскость $x = 0$ совпадает с касательной плоскостью, в которой лежит криминанта. Интегральные кривые в пространстве $R^3_{t,x,p}$ в точках криминанты касаются одновременно касательной и контактной плоскостей.

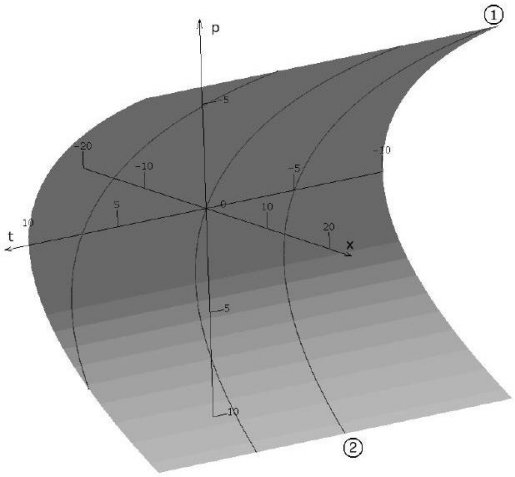


Рис. 2.1

3. $x'^2 = \frac{9}{4}t, t \geq 0.$

Определим дискриминантное множество. Из системы (2.27) имеем

$$\begin{cases} p^2 - \frac{9}{4}t = 0, \\ 2p = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow t = 0, p = 0 \Rightarrow t = 0, x \in \mathbb{R}$ - дискриминантное множество - ось Ox.
Интегрирование уравнения даёт

$$\left[\begin{array}{l} x' = \frac{3}{2}\sqrt{t}, \\ x' = -\frac{3}{2}\sqrt{t} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = t^{\frac{3}{2}} + \mathrm{C}_1, t \geq 0, C_1 \in \mathbb{R}; \\ x_2 = -t^{\frac{3}{2}} + \mathrm{C}_2, t \geq 0, C_2 \in \mathbb{R}. \end{array}\right.$$

Найденные решения $x_1(t), x_2(t)$ в точках $(\ 0; x_0\ )$ имеют нулевую производную. Следовательно, дискриминантное множество - точки возврата интегральных кривых, расположенные на оси Ox. В них нарушается единственность решения задачи Коши.

Касательный к криминанте вектор $(\ 0, 1, 0\ )$ не лежит в контактной

плоскости $x = x_0$, и, следовательно, криминанта пересекает её. Интегральные кривые пересекают криминанту, имея направление оси Op. В результате их проекции на плоскость $\mathbb{R}^2_{t,x}$ мы получаем точки возврата.

В следующем пункте 4) рассмотрен случай, когда в пространстве $\mathbb{R}^3_{t,x,p}$ вдоль Γ_D пересекаются две поверхности. Предполагается, что каждая из них взаимно однозначно проектируется на плоскость $\mathbb{R}^2_{t,x}$. Кривая Γ_D при каждом проектировании будет отображаться на одну и ту же кривую $\gamma_D \subset \mathbb{R}^2_{t,x}$. Для простоты в качестве этих поверхностей взяты две плоскости. В этом случае Γ_D является прямой линией. В результате пересечения мы получим четыре поверхности, две из которых теряют гладкость в точках Γ_D.
4) $x'^2 = 4t^2, t \in \mathbb{R}$.

Определим дискриминатное множество:

$$\left\{\begin{array}{c} p^2 - 4t^2 = 0 \\ 2p = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow t = 0, p = 0 \Rightarrow t = 0, x \in \mathbb{R}$ - дискриминантное множество - ось Ox.
Проинтегрируем это уравнение

$$\left[\begin{array}{l} x' = 2t, \\ x' = -2t \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = t^2 + C_1, t \in R, C_1 \in \mathbb{R}; \\ x_2 = -t^2 + C_2, t \in R, C_2 \in \mathbb{R}. \end{array}\right.$$

Возьмем точку A в плоскости $\mathbb{R}^2_{t,x}$ с координатами t_0, x_0 при условии $t_0 > 0, x_0 > 0$. Если $p_0 = 2t_0$, то через точку A локально проходит одна интегральная кривая. Однако во всей плоскости $\mathbb{R}^2_{t,x}$ при условии $p_0 = 2t_0$ через неё проходят две интегральные кривые:

$$x_1(t) = t^2 + C_1; x_2(t) = \left\{\begin{array}{l} t^2 + C_1, t \geq 0 \\ -t^2 + C_1, t < 0 \end{array}\right.$$

Здесь C_1 - произвольная постоянная.
Через точку A, расположенную на оси Ox, проходит (и локально, и глобально) четыре интегральные кривые (построить их самим). В этом случае такие точки называют точками прикосновения. В них нарушается единственность решения задачи Коши.

Обозначим через $\Pi_1 = S_1 \cup \Gamma \cup S_3$ плоскость $p = 2t$, а через $\Pi_2 = S_2 \cup \Gamma \cup S_4$ - плоскость $p = -2t$. Здесь $S_i, i = \overline{1,4}$ являются полуплоскостями. Интегральными кривыми в плоскости Π_1 будут
$\Gamma_1 = \{(t, x, p) : x = t^2 + C, p = 2t, t \in \mathbb{R}\}$, а в плоскости Π_2 - кривые $\Gamma_2 = \{(t, x, p) : x = -t^2 + C, p = -2t, t \in \mathbb{R}\}$. Криминантой является ось $Ox : \Gamma_D = \{(t, x, p) : t = 0, p = 0, x \in \mathbb{R}\}$. Она является линией пересечения плоскостей Π_1 и Π_2. В точках кривой Γ_D имеем $|\nabla(F)| = 0$. Контактная плоскость имеет вид: $x = x_0$. Интегральные кривые Γ_1 и Γ_2 пересекают криминанту Γ_D под прямым углом, касаясь контактной плоскости.

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^3_{t,x,p}$ кривые

$$\Gamma_3 = \Gamma_1(t \geq 0) \cup \Gamma_2(t \leq 0) \text{ и } \Gamma_4 = \Gamma_1(t \leq 0) \cup \Gamma_2(t \geq 0).$$

Кривые Γ_3 и Γ_4 лежат на поверхностях $S_1 \cup \Gamma_D \cup S_2$ и $S_3 \cup \Gamma_D \cup S_4$ и теряют гладкость в точках Γ_D. Проекции кривых $\Gamma_i, i = 3, 4$ на плоскость $\mathbb{R}^2_{t,x}$ дают интегральные кривые, проходящие через точки оси Ox, касаясь друг друга. Как уже отмечалось выше, через точку $(\ 0, x_0\ )$ в плоскости $\mathbb{R}^2_{t,x}$ проходят четыре касающиеся друг друга интегральные кривые уравнения.

В пункте 5) кривая Γ_D является линией пересечения двух гладких поверхностей S_1 и S_2, имеющих общую касательную плоскость в её точках. Поверхность $S = S_1 \cup \Gamma \cup S_2$ теряет гладкость на Γ_D.

5) $x'^2 = 4x^3, t \in \mathbb{R}$.

Определим дискриминантное множество

$$\begin{cases} p^2 - 4x^3 = 0, \\ 2p = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 0, p = 0$ - дискриминантным множеством является ось Ot.

Нетрудно видеть, что $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$ - решение уравнения. Интегрируя его, считая $x \neq 0$, получим семейство решений $x(t) = \frac{1}{(t+\mathrm{C})^2}$. Отсюда видно, что $x(t) = 0, t \in \mathbb{R}$ - частное решение.

На практике при решении уравнения (2.24) необходимо произвести следующие действия:

1. найти все решения уравнения;
2. определить дискриминатное множество;
3. проверить, входят ли какие-либо решения уравнения в дискриминантное множество;
4. если да, то проверить, являются ли они особыми;
5. изобразить графики решений.

В разделе 1.3 было рассмотрено уравнение Клеро:

$$x = tp + \psi(p), p \in (\alpha, \beta)$$

Функции

$$x = Ct + \psi(C), C - \text{ постоянные;} \tag{2.28}$$

$$x = -p\psi'(p) + \psi(p), t = -\psi'(p) \tag{2.29}$$

являются его решениями. Покажем, что если $\psi(p)$ дважды непрерывно дифференцируемая функция и $\psi''(p) \neq 0$, то решение (2.29) является особым. Предположим, что $\psi'' > 0$. Тогда уравнение $t = -\psi'(p)$ локально разрешимо. В результате решения имеем $p = p(t)$ и можем рассматривать решение как функцию $t : x = x(p(t))$. Отсюда получаем

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\left(\frac{dx}{dp}\right)}{\left(\frac{dt}{dp}\right)} = \frac{-\psi'(p) - \psi''(p)p + \psi'(p)}{-\psi''(p)} = p$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dp}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dp}} = \frac{1}{-\psi''(p)} < 0$$

Значит, функция $x = x(p(t))$, описывающая решение (2.29), выпукла вверх. При $t = t_0$ функция $p = p(t)$ принимает значение: $p(t_0) = p_0$. Обозначим через $x_1(t)$ функцию (2.28), а через $x_2(t)$ – (2.29). Покажем, что в каждой точке $(t_0, x(p_0)), p_0 \in (\alpha, \beta)$, происходит касание графиков функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Так как $\frac{dx_2}{dt}(t_0) = p_0$ и $t_0 = -\psi'(p_0)$, то условия касания принимают вид

$$\begin{cases} Ct_0 + \psi(C) = t_0 p_0 + \psi(p_0) \\ C = p_0 \end{cases}$$

Мы получили тождество, которое показывает, что прямые (2.28) в каждой точке $(t_0, x(p_0)), p_0 \in (\alpha, \beta)$, касаются графика решения (2.29). Следовательно, решение (2.29) особое, а среди решений уравнения Клеро имеются составные.

Сформулируем без доказательства условия, выполнение которых является достаточным, чтобы решение уравнения (2.24) было особым.

Определение 2.4.3. Пусть интегральная кривая Γ описывается параметрическими уравнениями $t = \phi(p), x = \psi(p)$. Если правые части этих уравнений являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями, то кривая Γ называется интегральной кривой класса 2.

Theorem

2.3. Если параметрические уравнения

$$t = \phi(p), x = \psi(p),$$

описывающие кривую Γ класса 2, удовлетворяют условиям $F(t, x, p) = 0, F_p(t, x, p) = 0, F_t(t, x, p) + pF_x(t, x, p) = 0, F_x(t, x, p) \neq 0$, то кривая Γ является особой интегральной кривой уравнения (2.24).

Теорему можно использовать для проверки, является ли решение особым или нет. Применим теорему к уравнению пункта 2) и уравнению Клеро.

1. В пункте 2) решение $x(t) = 0$ является дискриминантной кривой, для которой $p = 0$. В её точках для двух последних уравнений получаем $F_t + pF_x = 0, F_x = -1$. Следовательно, решение $x(t) = 0$ является особым.

2. Рассмотрим решение уравнения Клеро: $t = -\psi'(p), x = -p\psi'(p) + +\psi(p)$. В его точках для двух последних уравнении будем иметь $F_x = 1, F_t(t, x, p) + pF_x(t, x, p) = -p + p = 0$. Значит, это решение является особым. Из монотонности функции $t(p)$ вытекает требование $\psi''(p) \neq 0$.

3.0.5 2.5. Dependence of solutions on initial data and parameters

Если правая часть системы дифференциальных уравнений зависит от параметров, то возникает вопрос: как изменяется решение задачи Коши при малом изменении параметров и начальных данных. Обозначив через t_0, x_0 - начальные данные, а через μ - параметр, рассмотрим задачу Коши для уравнения первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = \mu x, x(t_0, t_0, x_0, \mu) = x_0.$$

Её решение имеет вид

$$x(t, t_0, x_0, \mu) = x_0 e^{\mu(t-t_0)}, -\infty < t, t_0, x_0, \mu < \infty.$$

Мы видим, что на любом отрезке $[a, b]$ малое изменение параметра μ и начальных данных t_0, x_0 приводит к малому изменению решения. Какие требования необходимо наложить на правую часть системы дифференциальных уравнений, чтобы это свойство решения заведомо выполнялось?

Если начальные данные $t_0, \vec{x}_0$ предполагаются фиксированными и изучается зависимость решения задачи Коши только от параметров, то её решение будет обозначаться $\vec{x} = \phi(t, \vec{\mu})$.

Рассмотрим задачу Коши и исследуем зависимость её решения от параметров:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{x}, \vec{\mu}), \vec{x}\left(t_0, \vec{\mu}\right) = \vec{x}_0 \tag{2.30}$$

Здесь $\vec{f} = \mathrm{colon}\left(\mathrm{f_1}, ..., \mathrm{f_n}\right), \tilde{\mathrm{x}} = \mathrm{colon}\left(\mathrm{x_1}, ..., \mathrm{x_n}\right), \tilde{\mu} = \mathrm{colon}\left(\mu_1, ..., \mu_\mathrm{k}\right);$

$$f_i(t, \vec{x}, \vec{\mu}) = f_i\left(t, x_1, ..., x_n, \mu_1, ..., \mu_k\right), i = \overline{1, n}.$$

Обозначим через I_μ область в пространстве $\mathbb{R}^k_{\vec{\mu}}$: $I_\mu = \{\vec{\mu} : \|\vec{\mu} - \vec{\mu}_\star\| < q\}$, где q - некоторое число, а $\vec{\mu}_\star$ - фиксированный вектор. Область определения функции $\vec{f}(t, \vec{x}, \vec{\mu})$ обозначим через

$$\Omega_\mu = I_\mu \times \Omega = \{t, \vec{x}, \vec{\mu} : (t, \vec{x}) \in \Omega, \vec{\mu} \in I_\mu\}$$

где область $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}_{t,\vec{x}}$.
Будем предполагать, что

$$1.\ \vec{f}(t, \vec{x}, \vec{\mu}) \in \mathbf{C}\left(\Omega_\mu\right); \tag{2.31}$$

$$2.\ \vec{f}(t, \vec{x}, \vec{\mu}) \in \mathrm{Lip}_{\vec{x}}\left(\bar{\Omega}_L\right). \tag{2.32}$$

Условие (2.32) означает, что функция $\vec{f}(t, \vec{x}, \vec{\mu})$ удовлетворяет условию Липшица по $\vec{x}$ (равномерно по t и $\vec{\mu}$) в любой замкнутой ограниченной области $\bar{\Omega}_L$ такой, что $\bar{\Omega}_L \subset \Omega_\mu$.

Возьмем произвольную точку $(t_0, \vec{x}_0) \in \Omega$. Определим, как и ранее, через R цилиндр с центром в точке $(t_0, \vec{x}_0)$:

$$R = \left\{t, \vec{x} : |t - t_0| < a, \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < b, \bar{R} \subset \Omega\right\}.$$

Числа a и b выбираются произвольно, но так, чтобы $\bar{R} \subset \Omega$. Пусть область $J_\mu = \{\vec{\mu} : \|\vec{\mu} - \vec{\mu}_\star\| < r, r < q\}$. Ясно, что $\bar{J}_\mu \subset I_\mu$. На компакте $\bar{R} \times \bar{J}_\mu$ функция $\vec{f}(t, \vec{x}, \vec{\mu})$ достигает своей точной грани. Обозначим

$$\sup_{(t,\vec{x},\vec{\mu}) \in \bar{R} \times \bar{J}_\mu} \|\vec{f}(t, \vec{x}, \vec{\mu})\| = M, h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$$

и рассмотрим цилиндр Q также центром в точке $(t_0, \vec{x}_0)$:

$$Q = \left\{(t, \vec{x}) : |t - t_0| < h, \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < b, \bar{Q} \subseteq \bar{R}\right\}$$

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^{n+k+1}_{t,\vec{x},\vec{\mu}}$ область $V_\mu = Q \times J_\mu$. Нетрудно видеть, что $\bar{V}_\mu \subseteq \Omega_\mu$. Решение задачи Коши (2.30) так же, как и в лемме 2.3 , является решением векторного интегрального уравнения в классе непрерывных функций:

$$\vec{x}(t, \vec{\mu}) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau, \vec{x}(\tau, \vec{\mu}), \vec{\mu}) d\tau \tag{2.33}$$

Для решения векторного интегрального уравнения (2.33) определим последовательные приближения следующим образом:

$$\vec{\phi}_0(t,\vec{\mu}) = \vec{x}_0$$
$$...$$
$$\vec{\phi}_n(t,\vec{\mu}) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{f}\left(\tau, \vec{\phi}_{n-1}(\tau,\vec{\mu}), \vec{\mu}\right) d\tau, |t-t_0| \le h, \vec{\mu} \in J_\mu, n \in \mathbb{N} \tag{2.34}$$

Обозначим через $U_{t\mu}$ область: $U_{t\mu} = \{t, \vec{\mu} : |t-t_0| < h, \vec{\mu} \in J_\mu\}$.

Theorem

2.4. Пусть вектор-функциця $\vec{f}(t,\vec{x},\vec{\mu})$ в области Ω_μ удовлетворяет условиям (2.31), (2.32). Тогда для любой точки $(t_0,\vec{x}_0) \in \Omega$ найдётс такое $h > 0$, что решение задачи Коши (2.30) $\vec{\phi}(t,\vec{\mu})$ является непрерывной функцией при $|t-t_0| \le h, \vec{\mu} \in \overline{J\mu}\left(\vec{\phi}(t,\vec{\mu}) \in \boldsymbol{C}\left(\bar{U}_{t\mu}\right)\right)$.

Доказательство. - Возьмём произвольную точку $(t_0,\vec{x}_0) \in \Omega$ и цилиндр Q с центром в этой точке. Для доказательства теоремы 2.4 построим решение интегрального уравнения (2.33) в замкнутой области $\bar{V}_\mu = \bar{Q} \times \bar{J}_\mu$, используя последовательные приближения (2.34).

График функции $\vec{\phi}_0(t,\vec{\mu}) = \vec{x}_0$ не выходит из замкнутой области $\bar{V}_\mu$. Рассмотрим функцию $\vec{\phi}_1(t,\vec{\mu})$ и произведем оценку

$$\left\|\vec{\phi}_1 - \vec{x}_0\right\| \le \left|\int_{t_0}^{t} \left\|\vec{f}\left(t, \vec{\phi}_0(\tau,\vec{\mu}), \vec{\mu}\right)\right\| d\tau\right| \le M\left|t-t_0\right| \le Mh \le b \tag{2.35}$$

Таким образом, $\vec{\phi}_1 \in \bar{V}_\mu$. Нетрудно по индукции доказать, что $\vec{\phi}_n(t,\vec{\mu}) \in\in \bar{V}_\mu$ для любого $n \ge 2$. Действительно, предположим, что $\vec{\phi}_{n-1}(t,\vec{\mu}) \in\in \bar{V}_\mu$. Тогда

$$\left\|\vec{\phi}_n - \vec{x}_0\right\| \le \left|\int_{t_0}^{t} \left\|\vec{f}\left(t, \vec{\phi}_{n-1}(\tau,\vec{\mu}), \vec{\mu}\right)\right\| d\tau\right| \le Mh \le b \tag{2.36}$$

и $\vec{\phi}_n(t,\vec{\mu}) \in \bar{V}_\mu$. Из непрерывности функции $\vec{f}(t,\vec{x},\vec{\mu})$ также следует, что все функции последовательных приближений $\vec{\phi}_n(t,\vec{\mu})(2.34)$ являются непрерывными в замкнутой области $\bar{V}_\mu$.

Покажем, что последовательность $\left\{\vec{\phi}_n(t,\vec{\mu})\right\}, n = 0,1,2,...$ сходится равномерно при $n \to \infty$. Рассмотрим ряд

$$\vec{\phi}_0 + \left(\vec{\phi}_1 - \vec{\phi}_0\right) + \cdots + \left(\vec{\phi}_n - \vec{\phi}_{n-1}\right) + ... \tag{2.37}$$

Так как $\vec{S}_n = \vec{\phi}_n$, то равномерная сходимость последовательности $\left\{\vec{\phi}_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ эквивалентна сходимости ряда (2.37). Оценим его члены. Так как функция $\vec{f}(t,\vec{x},\vec{\mu})$ удовлетворяет условию Липшица (2.32) в области $\bar{V}_\mu$, то существует постоянная L такая, что для любых точек $(t,\vec{x}_1,\vec{\mu}) \in \bar{V}_\mu$ и $(t,\vec{x}_2,\vec{\mu}) \in \bar{V}_\mu$ справедливо неравенство

$$\left\|\vec{f}\left(t,\vec{x}_2,\vec{\mu}\right) - \vec{f}\left(t,\vec{x}_1,\vec{\mu}\right)\right\| \le L\left\|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\right\|.$$

Отсюда и из оценки (2.35) имеем

$$\left\|\vec{\phi}_2 - \vec{\phi}_1\right\| \le \left|\int_{t_0}^{t} \left\|\vec{f}\left(t, \vec{\phi}_1(\tau,\vec{\mu}), \vec{\mu}\right) - \vec{f}\left(t, \vec{\phi}_0(\tau,\vec{\mu}), \vec{\mu}\right)\right\| d\tau\right| \le LM\frac{\left|t-t_0\right|^2}{2}$$

Далее, используя метод математической индукции, нетрудно получить оценки, справедливые в замкнутой области $\bar{V}_\mu$:

$$\left\|\vec{\phi}_n - \vec{\phi}_{n-1}\right\| \leq ML^{n-1}\frac{|t-t_0|^n}{n!}, n \in \mathbb{N}. \tag{2.38}$$

Из них следует, что функциональный ряд (2.37) мажорируется сходящимся числовым рядом:

$$\left\|\vec{\phi}_0\right\| + \sum_{k=1}^{\infty} ML^{k-1}\frac{h^k}{k!}.$$

Так как $\vec{S}_n = \vec{\phi}_n$, то согласно теореме Вейерштрасса последовательность $\left\{\vec{\phi}_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ в замкнутой области $\bar{V}_\mu$ равномерно сходится при $n \to\to \infty$ к предельной функции:

$$\vec{\phi}_n(t,\vec{\mu}) \rightrightarrows \vec{\phi}(t,\vec{\mu}).$$

Предельный переход при $n \to \infty$ в неравенстве (2.36)

$$\left\|\vec{\phi}_n(t,\vec{\mu}) - \vec{x}_0\right\| \leq b,$$

показывает, что $\vec{\phi}(t,\vec{\mu}) \in \bar{V}_\mu$. Из известной теоремы математического анализа вытекает, что $\vec{\phi}(t,\vec{\mu}) \in \mathbf{C}\left(\bar{U}_{t\mu}\right)$. Осталось доказать, что $\vec{\phi}(t,\vec{\mu})$ является решением векторного интегрального уравнения (2.33). Для этого произведем оценку

$$\left\|\int_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau,\vec{\phi}(\tau,\vec{\mu}),\vec{\mu})d\tau - \int_{t_0}^{t} \vec{f}\left(\tau,\vec{\phi}_n(\tau,\vec{\mu}),\vec{\mu}\right)d\tau\right\| \leq \int_{t_0}^{t} \|\vec{f}(\tau,\vec{\phi}(\tau,\vec{\mu}),\vec{\mu}) -$$
$$- \vec{f}\left(\tau,\vec{\phi}_n(\tau,\vec{\mu}),\vec{\mu}\right)\Bigg\|d\tau \leq hL \sup_{(t,\vec{x},\vec{\mu})\in\bar{V}_\mu}\Bigg\|\vec{\phi} - \vec{\phi}_n\| \to 0, n \to \infty$$

так как последовательность $\left\{\vec{\phi}_n\right\}_{n=0}^{\infty}$ сходится равномерно. Переходя к пределу $n \to \infty$ в (2.34), получим, что предельная функция $\vec{\phi}(t,\vec{\mu})$ удовлетворяет векторному интегральному уравнению. Из основной теоремы 2.1 следует, что найденное решение единственно.

Исследование зависимости решения ЗК (2.30) от начальных данных $t_0, \vec{x}_0$ можно свести к задаче об изучении зависимости решения от

параметров, входящих только в правую часть некоторой новой системы. Для этого надо произвести замену переменных в уравнении (2.30)

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{y}, t = t_0 + \tau.$$

В результате получим новую задачу Коши:

$$\frac{d\vec{y}}{d\tau} = \vec{\Phi}\left(\tau,\vec{y},\vec{\mu},t_0,\vec{x}_0\right), \vec{y}\left(0,t_0,\vec{x}_0,\vec{\mu}\right) = \overrightarrow{0} \tag{2.39}$$
$$\vec{\Phi}\left(\tau,\vec{y},\vec{\mu},t_0,\vec{x}_0\right) \equiv \vec{f}\left(t_0+\tau,\vec{x}_0+\vec{y},\vec{\mu}\right)$$

В задаче Коши (2.39) начальные данные $t_0, \vec{x}_0$ теперь играют роль параметров. В результате мы получили задачу Коши, исследованную выше.

Приведём без доказательства теорему о дифференцируемости найденного в теореме 2.4 решения.

Theorem

2.5. Пусть выполняются условия теоремы 2.4$u\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}$, $\frac{\partial \vec{f}}{\partial \mu_j} \in \boldsymbol{C}\left(\bar{V}_\mu\right), i = \overline{1,n}, j = \overline{1,k}$. Тогда определенное в теореме 2.4 решение $\vec{\phi}(t,\vec{\mu}) \in \boldsymbol{C}^1\left(\bar{U}_{t\mu}\right)$. Кроме того, смешанные производные $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial \mu_j}, j = \overline{1,k}$, непрерывны и не зависят от порядка дифференцирования.

Пусть в области Ω_μ выполнены условия теоремы 2.5 и $\vec{\phi}(t,\vec{\mu})$ - решение задачи Коши (2.30). Зафиксируем какое-либо значение $\vec{\mu} = \vec{\mu}_0$, $\vec{\mu}_0 \in J_\mu$. Покажем, что можно найти производные $\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \mu_j}, j = \overline{1,k}$ при $\vec{\mu} = \vec{\mu}_0$ не только определив решение нелинейной задачи Коши (2.39), но и решив систему линейных дифференциальных уравнений относительно каждой производной $\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \mu_j}\left(t,\vec{\mu}_0\right), j = \overline{1,k}$. Действительно, рассмотрим тождество

$$\frac{d\vec{\phi}(t,\vec{\mu})}{dt} = \vec{f}(t,\vec{\phi}(t,\vec{\mu}),\vec{\mu})$$

Продифференцируем его по $\mu_j, j = \overline{1,k}$ и положим $\vec{\mu} = \vec{\mu}_0$. Тогда

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \mu_j}\right)\Bigg|_{\vec{\mu}=\vec{\mu}_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}\left(t,\vec{\phi}\left(t,\vec{\mu}_0\right),\vec{\mu}_0\right)\frac{\partial \phi_i}{\partial \mu_j}\left(t,\vec{\mu}_0\right) + \frac{\partial \vec{f}}{\partial \mu_j}\left(t,\vec{\phi}\left(t,\vec{\mu}_0\right),\vec{\mu}_0\right).$$

Отсюда следует, что производные $\vec{z}_j = \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \mu_j}\left(t,\vec{\mu}_0\right)$ удовлетворяют линейным векторным уравнениям

$$\frac{d\vec{z}_j}{dt} = A(t)\vec{z}_j + \vec{b}_j, j = \overline{1,k}$$

где $A(t) = \left(\frac{\partial f_m}{\partial x_i}\left(t,\vec{\phi}\left(t,\vec{\mu}_0\right),\vec{\mu}_0\right)\right), m = \overline{1,n}, i = \overline{1,n}, \vec{b}_j(t) = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \mu_j}(t,\vec{\phi} \times \times \left(t,\vec{\mu}_0\right),\vec{\mu}_0), j = \overline{1,k}$. Поскольку $\vec{\phi}\left(t_0,\vec{\mu}\right) = \vec{x}_0$ при любом $\vec{\mu} \in J_\mu$, то

$$\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \mu_j}\left(t_0,\vec{\mu}_0\right) = \overrightarrow{0}$$

Следовательно, для отыскания производной $\vec{z}_j = \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \mu_j}\left(t,\vec{\mu}_0\right)$ нужно решить задачу Коши:

$$\frac{d\vec{z}_j}{dt} = A(t)\vec{z}_j + \vec{b}_j, \vec{z}_j\left(t_0,\vec{\mu}_0\right) = \overrightarrow{0} \tag{2.40}$$

Система уравнений (2.40) называется системой уравнений в вариациях. Если обозначить $\frac{\partial \vec{\phi}}{\partial \vec{\mu}} = Z$, где

$$Z = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \mu_1} & \dots & \frac{\partial \phi_1}{\partial \mu_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial \mu_1} & \dots & \frac{\partial \phi_n}{\partial \mu_k} \end{pmatrix},$$

то уравнение в вариациях в матричной форме имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dZ}{dt} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} Z + \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{\mu}} \\ Z\left(t_0,\vec{\mu}_0\right) = (0)_{n\times k} \end{cases}$$

Уравнение в вариациях получено в результате формального дифференцирования исходной задачи (2.30) по параметрам. Теорема 2.5 позволяет дать строгое обоснование этой операции. Оно приведено в [7, 8]. Аналогично находятся уравнения в вариациях по начальным данным.

Пример 2.5.1. ([14], 1066)
Найти производную по начальному данному x_0 при $x_0 = 0$ от решения следующей задачи Коши:

$$x' = x + x^2 + tx^3, x(2) = x_0. \tag{2.41}$$

Решение

1. Первый способ.

Отметим сразу, что при $x_0 = 0$ единственным решением задачи
Коши (2.41) будет функция $x(t) = 0$. С помощью подстановки, указанной в параграфе выше, сведём задачу Коши (2.41) к новой, подобной (2.39), в которой параметры входят только в правую часть уравнения. Для этого произведем замену $t = 2 + \tau\,(t_0 = 2)\,, x = x_0 + z\,(\tau, 2, x_0)$. В новых переменных задача Коши (2.41) станет следующей

$$\begin{aligned} z'_\tau = (x_0 + z) + (x_0 + z)^2 + (\tau + 2)\,(x_0 + z)^3 = (x_0 + z)\,Z_1 \\ z\,(0, 2, x_0) = 0 \end{aligned} \tag{2.42}$$

где $Z_1 = 1 + (x_0 + z) + (\tau + 2)\,(x_0 + z)^2$. При $x_0 = 0$ единственным решением задачи Коши (2.42) будет функция $z(\tau, 2, 0) = 0$. Обозначим $\frac{\partial z}{\partial x_0}\,(\tau, 2, x_0) = u\,(\tau, 2, x_0)$ и продифференцируем по x_0 уравнение (2.42):

$$u'_\tau = (1 + u)Z_1 + (x_0 + z)\,\frac{\partial Z_1}{\partial x_0}, u\,(0, 2, x_0) = 0.$$

Положим $x_0 = 0$. Тогда $x_0 + z = 0$ и для определения функции $u(\tau, 2, 0)$ получим задачу Коши:

$$u'_\tau = 1 + u, u(0, 2, 0) = 0.$$

В результате её решения находим

$$u = -1 + Ce^\tau \Rightarrow C = 1, u = -1 + e^\tau.$$

Отсюда имеем

$$\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)\bigg|_{x_0=0} = 1 + u(\tau, 2, 0) = 1 - 1 + e^\tau = e^\tau = e^{t-2}.$$

2. Второй способ.

Обозначим решение задачи Коши (2.41) через $x = \phi\,(t, 2, x_0)$. Здесь $t_0 = 2$. Как отмечалось выше, единственным решением задачи Коши при $x_0 = 0$ будет функция $\phi(t, 2, 0) \equiv 0, t \in J$. Продифференцируем уравнение и начальное условие (2.41) по x_0 и положим $x_0 = 0$. В результате для определения функции $u = \frac{\partial x}{\partial x_0}(t, 2, 0)$ получим задачу Коши:

$$\frac{du}{dt} = u, u(2, 2, 0) = 1.$$

Её решение даёт $u = e^{t-2}$.
3) Третий способ.

На практике задачу Коши (2.41) часто решают следующим образом. Её решение представляют в виде разложения по малому параметру x_0 :

$$x = x_0\phi_1(t) + x_0^2\phi_2(t) + o\left(x_0^2\right), \phi_1(2) = 1.$$

Затем это разложение подставляется в уравнение (2.41). В результате приравнивания членов при одинаковых степенях малого параметра x_0 для определения функции $\phi_1(t)$ получается задача Коши, решение которой даёт

$$\phi_1' = \phi_1, \phi_1(2) = 1 \Rightarrow \phi_1(t) = e^{t-2}.\diamond$$

3.0.6 2.6. The nth order equations resolved with respect to the senior derivative. Cauchy's problem, the theorem of existence and uniqueness of its solution

Предположим, что функция $f(t, \vec{z}) \in \mathbf{C}(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Уравнение вида

$$x^{(n)} = f\left(t, x, \cdots, x^{(n-1)}\right), \tag{2.43}$$

в котором t - независимая переменная, $x(t)$ - неизвестная функция, а $x'(t), \cdots, x^{(n)}(t)$ - её производные, называется уравнением n-го порядка, разрешенным относительно старшей производной.

Определение 2.6.1. Функция $x(t), t \in J$, называется решением уравнения (2.43) на интервале J, если

1. $x(t) \in \mathbf{C}^n(J)$ для любого $t \in J$;
2. $\left(t, x(t), \cdots, x^{(n-1)}(t)\right) \in \Omega$ для любого $t \in J$;
3. $x^{(n)}(t) = f\left(t, x(t), \cdots, x^{(n-1)}(t)\right)$ для любого $t \in J$.

Пусть $\left(t_0, x_0, x_0', \cdots, {x_0}^{(n-1)}\right) \in \Omega$.
Задача Коши. Найти решение $\varphi(t), t \in J$, уравнения n-го порядка (2.43), удовлетворяющее начальным условиям:

$$x\left(t_0\right) = x_0, x'\left(t_0\right) = x_0', \cdots, x^{(n-1)}\left(t_0\right) = x_0^{(n-1)}, t_0 \in J. \tag{2.44}$$

Уравнение (2.43) может быть приведено к системе уравнений с помощью замены:

$$z_1 = x, z_2 = x', \cdots, z_n = x^{(n-1)}. \tag{2.45}$$

В результате для определения неизвестных функций $z_i(t), i = \overline{1, n}$ будем иметь систему уравнений [13]:

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ \cdots \\ z_{n-1}' = z_n \\ z_n' = f\left(t, z_1, \cdots, z_n\right) \end{cases} \tag{2.46}$$

Если $x = \varphi(t), t \in J$, - решение уравнения n-го порядка (2.43), то вектор-функция

$$\vec{z}(t) = \operatorname{colon}\left(\varphi(t), \varphi'(t), \cdots, \varphi^{(n-1)}(t)\right)$$

даёт решение соответствующей системы (2.46). Обратно, если $\vec{z}(t) = \operatorname{colon}\left(z_1(t), z_2(t), \cdots, z_n(t)\right)$ - решение системы (2.46), то n раз непрерывно

дифференцируемая функция $x = z_1(t)\left({z_1}^{(n)} = {z'}_n\right)$ будет решением уравнения n-го порядка (2.43).

Из сказанного следует, что все утверждения, полученные для системы уравнений, могут быть перенесены на уравнение n-го порядка.

Начальные условия для системы (2.46) согласно соотношениям (2.45) и (2.44) принимают вид

$$\vec{z}\,(t_0) = \text{colon}\left(x_0, x_0', x_0'', \cdots, x_0^{(n-1)}\right) \tag{2.47}$$

Theorem

2.6. Пусть $f(t,\vec{z}) \in \boldsymbol{C}(\Omega), \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}, f(t,\vec{z}) \in \text{Lip}_{\vec{z}}\left(\bar{\Omega}_L\right)$. Тогда найдется такое $\alpha > 0$, что решение задачи Коши (2.43), (2.44) существует и единственно на интервале ($t_0 - \alpha, t_0 + \alpha$).

Доказательство. - При условиях, наложенных на функцию $f(t,\vec{z})$, задача Коши (2.46), (2.47) имеет единственное решение согласно теореме 2.1. В силу произведенной замены (2.45) задача Коши (2.43), (2.44) эквивалентна задаче Коши (2.46), (2.47) для системы. Отсюда вытекает справедливость сформулированной выше теоремы 2.6.

Чтобы в дальнейшем при использовании этого утверждения не повторяться, оно будет кратко обозначаться следующим образом: ЗК (2.43), (2.44) $\Leftrightarrow$ ЗК (2.46), (2.47). Также будут обозначаться аналогичные утверждения для других уравнений и систем.

4 3 Linear differential equations with variable coefficients by Diesperov

4.1 3.1. Normal systems of linear differential equations

4.1.1 3.1.1. Basic definitions, the Cauchy problem, the theorem of existence and uniqueness of the solution of the Cauchy problem

Определение 3.1.1. Система вида

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(t,\vec{x}) \equiv \sum_{i=1}^{n} p_{ki}(t)x_i + g_k(t), k = \overline{1,n}; t \in J$$

называется нормальной линейной системой дифференциальных уравнений. Ниже предполается, что $p_{ki}(t), g_k(t) \in \mathbf{C}(J); i,k = \overline{1,n}$.

Согласно теореме продолжения 2.4 каждое решение линейной системы может быть продолжено на весь промежуток J. Поэтому можно считать, что любое рассматриваемое решение определено на этом промежутке.

Определение 3.1.2. Непрерывно дифференцируемые функции $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t), t \in J$, называются решением линейной системы, если при подстановке их в уравнения системы последние обращаются в тождества при $t \in J$.

Линейную систему можно записать в векторно-матричной форме в виде одного уравнения

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = P(t)\vec{x} + \vec{g}(t), \tag{3.1}$$

где

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & \cdots & p_{1n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1}(t) & \cdots & p_{nn}(t) \end{pmatrix}, \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \cdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}.$$

Уравнение (3.1) называют как дифференциальным уравнением, имея в виду его векторную форму, так и системой дифференциальных уравнений согласно первоначальному определению. Если $\vec{g}(t) \equiv \overrightarrow{0}, t \in J$, то система

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = P(t)\vec{x} \tag{3.2}$$

называется однородной, в противном случае - неоднородной.
Ниже при формулировке задачи Коши предполагается, что $J = \langle a, b\rangle$.

Задача Коши. Найти решение $\vec{\varphi}(t), t \in J$ системы (3.1), удовлетворяющее начальному условию

$$\vec{\varphi}\,(t_0) = \vec{x}_0, t_0 \in (a, b), \tag{3.3}$$

где $\vec{x}_0 = \text{colon}\,(x_{01}, \cdots, x_{0n})$. Числа $t_0, x_{01}, \cdots, x_{0n}$ задаются произвольно.
Здесь мы ещё раз обращаем внимание на то, что точка t_0 является внутренней точкой промежутка J. В дальнейшем это всегда предполагается при постановке задачи Коши.

Доказательство теоремы существования и единственности решения задачи Коши для линейной системы проводится в случае, когда $J = [a, b]$.

Последовательные приближения решения задачи Коши на отрезке $[a, b]$ определим следующим образом:

$$\vec{\varphi}_0(t) = \vec{x}_0$$

$$\ldots$$

$$\vec{\varphi}_{n+1}(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \left(P(\tau)\vec{\varphi}_n(\tau) + \vec{g}(\tau)\right) d\tau, n \in \{0\} \cup \mathbb{N} \tag{3.4}$$

Заметим, что правая часть векторного уравнения (3.1) определена в замкнутой выпуклой области $\bar{\Omega} = [a, b] \times \mathbb{R}^n$. Так как функции
$p_{ij}(t), g_i(t)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, то они ограничены. Следовательно, производные $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| = |p_{ij}(t)|\,; i, j = \overline{1, n}$, где $f_i(t, \vec{x}) = p_{i1}(t)x_1 + + \cdots + p_{in}x_n + g_i(t)$, также являются ограниченными. Согласно лемме 2.1 правая часть системы (3.1) удовлетворяет условию Липшица.

В отличие от общего случая последовательные приближения (3.4) определены для всех $t \in [a, b]$. Однако в силу неограниченности замкнутой области $\bar{\Omega}$ из непрерывности функции $\vec{f}(t, \vec{x})$ не следует её ограниченности. Поэтому при доказательстве существования решения задачи Коши (3.1), (3.3) мы не можем следовать схеме, которая была использована в общем случае выше [7, 8].

Theorem

3.1. Пусть функиии $p_{ij}(t), g_i(t) \in \boldsymbol{C}([a, b])$. Тогда решение задачи Коши (3.1), (3.3) существует на всем отрезке $[a, b]$ и единственно.

Доказательство. - Функции $\vec{\varphi}_0(t), \vec{\varphi}_1(t)$ в (3.4) на отрезке $[a, b]$ непрерывны. Следовательно, их разность также непрерывна и $\|\vec{\varphi}_1(t) - \vec{\varphi}_0(t)\| \leq C$ (по теореме Вейерштрасса). Здесь C - некоторая постоянная. Далее, из (3.4) имеем

$$\|\vec{\varphi}_2(t)-\vec{\varphi}_1(t)\| = \left\| \int_{t_0}^{t} \left[\vec{f}(\tau,\vec{\varphi}_1(\tau)) - \vec{f}(\tau,\vec{\varphi}_0(\tau))\right] d\tau \right\| \leq$$
$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} \left\| \left[\vec{f}(\tau,\vec{\varphi}_1(\tau)) - \vec{f}(\tau,\vec{\varphi}_0(\tau))\right] \right\| d\tau \right| \leq$$
$$\leq L \left| \int_{t_0}^{t} \|\vec{\varphi}_1(\tau)-\vec{\varphi}_0(\tau)\| \, d\tau \right| \leq LC\,|t-t_0| \leq LC(b-a)$$

Используя метод математической индукции, находим аналогично для любого $n \in \mathbb{N}$:

$$\|\vec{\varphi}_{n+1}(t)-\vec{\varphi}_n(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \left\| \vec{f}(\tau,\vec{\varphi}_n(\tau)) - \vec{f}(\tau,\vec{\varphi}_{n-1}(\tau)) \right\| d\tau \right| \leq$$
$$\leq CL^n \frac{|t-t_0|^n}{n!} \leq CL^n \frac{(b-a)^n}{n!}$$

Из найденных оценок вытекает, что ряд

$$\vec{\varphi}_0(t) + (\vec{\varphi}_1(t)-\vec{\varphi}_0(t)) + \cdots + (\vec{\varphi}_{n+1}(t)-\vec{\varphi}_n(t)) + \cdots \tag{3.5}$$

мажорируется на отрезке $[a,b]$ сходящимся (по признаку Даламбера) числовым рядом

$$\|\vec{\varphi}_0\| + C + LC(b-a) + \cdots + CL^n \frac{(b-a)^n}{n!} + \cdots$$

Согласно теореме Вейерштрасса ряд (3.5) сходится равномерно. Так как частичная сумма ряда $\vec{S}_n(t) = \vec{\varphi}_n(t)$, то последовательность $\{\vec{\varphi}_n(t)\}$ сходится равномерно на отрезке $[a,b]$ при $n \to \infty$. Отсюда следует существование предельной функции $\vec{\varphi}(t) \in \mathbf{C}([a,b])$.

Покажем, что предельная функция $\vec{\varphi}(t)$ является решением задачи Коши (3.1), (3.3). Для этого произведем оценку

$$\sup_{t\in[a,b]} \left\| \int_{t_0}^{t} \left[\vec{f}(\tau,\vec{\varphi}_n(\tau)) - \vec{f}(\tau,\vec{\varphi}(\tau))\right] d\tau \right\| \leq$$
$$\leq \sup_{t\in[a,b]} \left| \int_{t_0}^{t} \left\| \vec{f}(\tau,\vec{\varphi}_n(\tau)) - \vec{f}(\tau,\vec{\varphi}(\tau)) \right\| d\tau \right| \leq$$
$$\leq L(b-a) \sup_{t\in[a,b]} \|\vec{\varphi}_n(t)-\vec{\varphi}(t)\|$$

Так как $\vec{\varphi}_n(t) \rightrightarrows \vec{\varphi}(t), n \to \infty (t \in [a,b])$, то $\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[a,b]} \|\vec{\varphi}_n(t) - -\vec{\varphi}(t)\| = 0$. Таким образом, мы получаем, что

$$\int_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau,\vec{\varphi}_n(\tau))\, d\tau \rightrightarrows \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau,\vec{\varphi}(\tau)) d\tau, n \to \infty, t \in [a,b]$$

Следовательно, функция $\vec{\varphi}(t)$ является решением интегрального уравнения

$$\vec{\varphi}(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} [P(\tau)\vec{\varphi}(\tau) + \vec{g}(\tau)] d\tau$$

а значит, и соответствующей задачи Коши. Единственность следует из основной теоремы. Теорема справедлива в случае любого промежутка $< a, b >$.

Следствие 3.1.1. Единственным решением задачи Коши для однородной системы (3.2) с нулевым начальным условием (3.3) является функияя $\vec{x}(t) = \overrightarrow{0}, t \in [a,b]$.

Замечание 3.1.1. Отметим особенности теоремы: во-первых, начальные данные могут быть выбраны произвольным образом; во-вторых, решение задачи Коши существует сразу на всем отрезке $[a,b]$, на котором заданы непрерывные функции $p_{ij}(t), g_i(t); i,j = \overline{1,n}$.$\diamond$

4.1.2 3.1.2. Existence of a fundamental system of solutions for a linear homogeneous system of differential equations

Решения линейной однородной системы уравнений образуют линейное векторное пространство. Действительно, пусть $\vec{x}_i(t), t \in [a,b]$, $i = \overline{1,m}$, - решения линейной однородной системы уравнений (3.2), тогда их любая линейная комбинация также будет решением. Нам необходимо определить размерность данного пространства и найти его базис. Ниже будет показано, что размерность пространства равна n, а базисом могут являться любые n линейно независимые решения системы.

Определение 3.1.3. Вектор-функции $\vec{x}_1(t), \cdots, \vec{x}_n(t), t \in J$, называются линейно независимыми на промежутке J, если равенство

$$\mathrm{C}_1\vec{x}_1(t) + \cdots + \mathrm{C}_n\vec{x}_n(t) = \overrightarrow{0} \tag{3.6}$$

где $\mathrm{C}_i, i = \overline{1,n}$, - постоянные, справедливо для любого $t \in J$ лишь тогда и только тогда, когда $\mathrm{C}_i = 0, i = \overline{1,n}$.

Введем в рассмотрение определитель Вронского системы векторфункций $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n, t \in J$:

$$W(t) \equiv W\left[\vec{x}_1(t), \cdots, \vec{x}_n(t)\right] = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{n1}(t) \\ x_{12}(t) & \cdots & x_{n2}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{1n}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} \tag{3.7}$$

Здесь $\vec{x}_k = \mathrm{colon}\left(x_{k1}, ...x_{kn}\right), k = \overline{1,n}$.

Лемма 3.1. Если вектор-функции $\vec{x}_1(t), \cdots, \vec{x}_n(t), t \in J$, - линейно зависимые, то $W(t) \equiv 0, t \in J$.

Доказательство. - Если функции $\vec{x}_1(t), \cdots, \vec{x}_n(t), t \in J$, линейно зависимые, то в равенстве (3.6) хотя бы одна постоянная отлична

от нуля. Пусть $C_1 \neq 0$. Тогда

$$\overrightarrow{x_1}(t) = -\sum_{i=2}^{n} \frac{C_i}{C_1}\vec{x}_i(t)$$

Подставляя $\overrightarrow{x_1}(t)$ в (3.7), получим $W(t) \equiv 0, t \in J$.

Лемма 3.2. Если вектор-функции $\vec{x}_1(t), \cdots, \vec{x}_n(t), t \in J$, - решения линейной однородной системы дифференциальных уравнений (3.2), то следующие условия эквивалентны:

1. $W(t) = 0$ для любого $t \in J$;
2. существует $t_0 \in J$ такое, что $W\left(t_0\right) = 0$;
3. решения $\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n$ - линейно зависимые.

Доказательство. $\rightarrow$ Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) является очевидной. Докажем импликацию 2) $\Rightarrow$ 3). Рассмотрим равенство (3.6) при $t = t_0$ как систему уравнений относительно постоянных $C_i, i = \overline{1,n}$. Так как $W\left(t_0\right) = 0$, то она имеет нетривиальное решение $C_i = \hat{\mathrm{C}}_i, i = \overline{1,n}$. Составим функцию

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} \hat{C}_i\vec{x}_i(t)$$

Очевидно, что $\vec{x}(t)$ - решение. Так как $\vec{x}\left(t_0\right) = 0$, то из следствия к теореме 3.1 следует $\vec{x}(t) \equiv 0$. Значит, решения $\vec{x}_i(t), i = \overline{1,n}$, - линейно зависимые на промежутке J.

Импликация 3) $\Rightarrow$ 1) следует из леммы 3.1.
Лемма 3.3. Пусть $\vec{x}_1(t), \cdots, \vec{x}_n(t), t \in J$, - решения линейной однородной системы дифферениальных уравнений (3.2). Тогда следующие условия эквивалентны:

1. решения $\vec{x}_1(t), \cdots, \vec{x}_n(t)$ - линейно независимые;
2. $W(t) \neq 0$ для любого $t \in J$;
3. существует $t_0 \in J$ такой, что $W(t_0) \neq 0$.

Доказать лемму самим.

Theorem

3.2. В предположении теоремы 3.1 любая линейная однородная система дифферениальных уравнений (3.2) имеет n линейно независимых решений.
Доказательство. $\rightarrow$ Выберем следующие начальные условия

$$\begin{aligned} \vec{\varphi}_1(t_0) &= \text{colon}(1, 0, \cdots, 0), \\ \vec{\varphi}_2(t_0) &= \text{colon}(0, 1, \cdots, 0), \\ &\cdots \\ \vec{\varphi}_n(t_0) &= \text{colon}(0, 0, \cdots, 1). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Так как при $t = t_0$ определитель Вронского $W(t_0) \neq 0$, то согласно лемме 3.3 решения задачи Коши с начальными условиями (3.8) являются линейно независимыми.
Определение 3.1.4. Любые n линейно независимые решения линейной однородной системы дифференциальных уравнений называются фундаментальной системой решений (ФСР).
Было показано, что для любой линейной однородной системы (3.2) с непрерывными коэффициентами фундаментальная система решений существует. Количество ФСР у однородной системы уравнений бесконечно. Если начальные условия (3.8) выбрать такими, чтобы $W(t_0) \neq\neq 0$, то получим другую фундаментальную систему решений.

4.1.3 3.1.3. Liouville-Ostrogradsky formula

Theorem

3.3. Пусть $\vec{x}_i(t) = \text{colon}(x_{i1}, \cdots, x_{in}), t \in J, i = \overline{1, n}$, - решения системы линейных однородных дифференициальных уравнений (3.2). Тогда для любых $t, t_0 \in J$ имеет место формула Лиувилля Остроградского:

$$W(t) = W(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} \sum_{k=1}^{n} p_{kk}(\tau) d\tau} \tag{3.9}$$

Доказательство. Из (3.7) находим

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW^T}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & \frac{dx_{1k}}{dt} & \cdots & x_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & \cdots & \frac{dx_{nk}}{dt} & \cdots & x_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} W_k.$$

Согласно однородной системе уравнений (3.2) для функций $x_{lk}, l, k = \overline{1, n}$ имеем

$$\frac{dx_{lk}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} p_{ki} x_{li}$$

Подставляя в определитель W_k, получаем

$$W_k = \begin{vmatrix} x_{11} & \dots & \sum_{i=1}^{n} p_{ki} x_{1i} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & \dots & \sum_{i=1}^{n} p_{ki} x_{ni} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_{11} & \dots & p_{kk} x_{1k} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & \dots & p_{kk} x_{nk} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix} = p_{kk} W,$$

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{k=1}^{n} p_{kk} W \Rightarrow W(t) = C e^{\int_0 \sum_{k=1}^{n} p_{kk}(\tau) d\tau}.$$

Из начальных условий находим: $C = W(t_0)$.

Следствие 3.3.1. Если $W(t_0) = 0$ для некоторого $t_0 \in J$, то $W(t) = 0$ для любого $t \in J$. Если $W(t_0) \neq 0$ для некоторого $t_0 \in J$, то $W(t) \neq 0$ для любого $t \in J$.

Замечание 3.1.2. Результат интегрирования уравнения для $W(t)$ можно представить в виде

$$W(t) = C e^{\int \sum_{k=1}^{n} p_{kk}(t) dt} \cdot \diamond$$

Замечание 3.1.3. Рассмотрим уравнение второго порядка

$$a_0 x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t), a_0 \neq 0, t \in J \tag{3.10}$$

Произведя замену $y = x'$, получим систему, являющуюся системой (2.46) при $n = 2$:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\frac{a_2}{a_0} x - \frac{a_1}{a_0} y - \frac{f(t)}{a_0} \end{cases} \tag{3.11}$$

Из системы (3.11) следует

$$\sum_{k=1}^{n} p_{kk} = -\frac{a_1}{a_0} \Rightarrow W(t) = C e^{-\int \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt} \cdot \diamond$$

4.1.4 3.1.4. Structure of solutions of a linear homogeneous system of differential equations

Theorem

3.4. Пусть $\vec{\varphi}_1(t), \cdots, \vec{\varphi}_n(t), t \in J$ – Ф СР линейной однородной системы дифференциальных уравнений. Тогда для любого её решения $\vec{x}(t), t \in J$, существует такой набор постоянных $\mathrm{C}_i, i = \overline{1, n}$,

что

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \vec{\varphi}_i(t).$$

Доказательство. $\rightarrow$ Возьмем какое-либо значение переменной $t_0 \in J$. Векторы $\vec{\varphi}_i(t_0)$ образуют базис, поэтому вектор $\vec{x}(t_0)$ может быть разложен по этому базису.

$$\vec{x}\left(t_0\right)=\sum_{i=1}^{n} \mathrm{C}_i \vec{\varphi}_i\left(t_0\right).$$

Рассмотрим решение

$$\vec{x}_\star(t)=\sum_{i=1}^{n} \mathrm{C}_i \vec{\varphi}_i(t).$$

При $t=t_0$ по построению имеем $\vec{x}\left(t_0\right)=\vec{x}_\star\left(t_0\right)$. Тогда по теореме существования и единственности получаем $\vec{x}(t)=\vec{x}_\star(t)=\sum_{i=1}^n C_i \vec{\varphi}_i(t)$ для любого $t \in J$. $\square$

Отсюда следует, что функция $\vec{x}(t)=\sum_{i=1}^n C_i \vec{\varphi}_i(t)$, где $C_i, i=\overline{1, n}$, - произвольные постоянные, является общим решением системы линейных однородных дифференциальных уравнений: любое решение может быть представлено в таком виде и любая линейная комбинация функций $\sum_{i=1}^n C_i \vec{\varphi}_i(t)$ также является решением. Отсюда вытекает, что размерность пространства решений линейной однородной системы (3.2) равна n.

Theorem

3.5. Пусть $\vec{X}(t), t \in J$, - какое-либо частное решение линейной неоднородной системы уравнений (3.1) , а $\vec{\varphi}_i(t), i=\overline{1, n}$, фундаментальная система решений соответствующей линейной однородной системы (3.2). Тогда для любого решения $\vec{x}(t), t \in J$, линейной неоднородной системы (3.1) существует такой набор постоянных, что

$$\vec{x}(t)=\vec{X}(t)+\sum_{i=1}^{n} C_i \vec{\varphi}_i(t).$$

Доказательство. $\rightarrow$ Произведем замену $\vec{z}(t)=\vec{x}(t)-\vec{X}(t)$ в системе (3.1):

$$\frac{d \vec{z}}{d t}+\frac{d \vec{X}}{d t}=P \vec{z}+P \vec{X}+f(\overrightarrow{t}) \Rightarrow \frac{d \vec{z}}{d t}=P \vec{z}.$$

Из предыдущей теоремы вытекает

$$\vec{z}(t)=\sum_{i=1}^{n} C_i \vec{\varphi}_i(t) \Rightarrow \vec{x}(t)=\vec{X}(t)+\sum_{i=1}^{n} C_i \vec{\varphi}_i(t).$$

Таким образом, решение $x(t), t \in J$ неоднородной линейной системы уравнений (3.1) состоит из двух слагаемых, одно из которых является общим решением однородной системы, а другое - частным решением неоднородной системы. Определённая в теореме 3.5 функция $x(t), t \in J$ является общим решением неоднородной линейной системы уравнений (3.1). $\square$

4.1.5 3.1.5. Solving the Cauchy problem for a linear system of differential equations by the method of variation of constants

Пусть $\vec{\varphi}_i(t), t \in J, i=\overline{1, n}$, - фундаментальная система решений однородной системы (3.2). Решим задачу Коши (3.1), (3.3). Матрица $\Phi(t)$, столбцами которой являются координаты вектор-функций $\vec{\varphi}_i(t)$, называется фундаментальной. Из теоремы 3.4 следует, что любое решение системы (3.2) можно представить в виде $\vec{x}(t)=\Phi(t) \overrightarrow{\mathrm{C}}$. Возьмём фундаментальную матрицу такой, чтобы $\Phi\left(t_0\right)=E$, где $t_0 \in J$. Будем искать решение неоднородной системы (3.1) в виде

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\overrightarrow{\mathrm{C}}(t), \overrightarrow{\mathrm{C}}(t) \in \mathbf{C}^1(J). \tag{3.12}$$

Подставляя функцию (3.12) в систему (3.1), получим

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \frac{d\Phi}{dt}\overrightarrow{\mathrm{C}}(t) + \vec{\Phi}\frac{d\mathrm{C}}{dt} = P\Phi\overrightarrow{\mathrm{C}}(t) + \Phi\frac{d\overrightarrow{\mathrm{C}}}{dt} = P\Phi\overrightarrow{\mathrm{C}}(t) + \vec{f}(t),$$
$$\frac{d\overrightarrow{\mathrm{C}}}{dt} = \Phi^{-1}(t)\vec{f}(t) \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{C}}(t) = \overrightarrow{\mathrm{C}}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)d\tau.$$

Подставляя найденное значение $\overrightarrow{\mathrm{C}}(t)$ в формулу (3.12), находим

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\overrightarrow{\mathrm{C}}(t_0) + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)d\tau$$

При $t = t_0$ имеем $\vec{x}(t_0) = \vec{C}(t_0) = \vec{x}_0$. В результате решение задачи Коши можно представить в виде

$$\vec{x}(t) = \Phi(t)\overrightarrow{x_0} + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)d\tau$$

Последняя формула носит название формулы Коши. Она была получена методом вариации постоянных.

4.2 3.2. Linear equations of nth order with variable coefficients

4.2.1 3.2.1. Theorem of existence and uniqueness of the solution of the Cauchy problem

Уравнение вида

$$p_0(t)x^{(n)} + \cdots + p_n(t)x = g(t), p_0(t) \neq 0, t \in J, \tag{3.13}$$

называется линейным уравнением n-го порядка. Ниже предполагается $p_i(t), g(t) \in \mathbf{C}(J), i = \overline{0,n}; p_0(t) \neq 0$.

Обозначим его левую часть через $L[x(t)]$. Тогда оно может быть записано в компактной форме $L[x(t)] = g(t)$. Если $g(t) \equiv 0$, то уравнение

$$L[x(t)] \equiv p_0(t)x^{(n)} + \cdots + p_n(t)x = 0 \tag{3.14}$$

называется однородным. В противном случае - неоднородным. В случае уравнения (3.13) в соответствующей ему системе (2.46) будем иметь

$$f(t, \vec{z}) = -\frac{p_n}{p_0}z_1 - \cdots - \frac{p_1}{p_0}z_n + \frac{g(t)}{p_0}. \tag{3.15}$$

В сформулированной ниже теореме использовано второе обозначение промежутка: $J =< a, b >$. При этом считается, что $t_0 \in (a, b)$.

Theorem

3.6. Если $p_i(t), g(t) \in \boldsymbol{C}(J), i = \overline{0,n}, p_0(t) \neq 0$, то решение задачи Коши (3.13), (2.44) существует сразу на всем промежутке J и единственно. При этом начальные данные $t_0, x_0, x'_0, \cdots, x_0{}^{(n-1)}$ могут быть выбраны произвольно.

Доказательство. $\rightarrow$ Доказательство следует из утверждения ЗК (3.13), (2.44) $\Leftrightarrow$ ЗК (2.46), (2.47) и теоремы 3.1. В системе (2.46) функция $f(t, \vec{z})$ описывается формулой (3.15).

Следствие 3.6.1. Единственным решением линейного однородного уравнения (3.14) с нулевыми начальными условиями является функция $x(t) \equiv 0, t \in J$.

4.2.2 3.2.2. Vronsky determinant. Liouville-Ostrogradsky formula. Fundamental solution system

Введём определитель Вронского для функций $x_i(t), i = \overline{1,n}, t \in J$,

$$W(t) \equiv W\left[x_1(t), \cdots, x_n(t)\right] = \begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ x'_1 & \cdots & x'_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{(n-1)} & \cdots & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \tag{3.16}$$

Определение 3.2.1. Функции $x_1(t), \cdots, x_n(t), t \in J$, называются линейно независимыми на промежутке J, если равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{C}_i x_i(t) = 0 \left(\mathrm{C}_i - \text{ постоянные }\right)$$

возможно для любого $t \in J$, если и только если $\mathrm{C}_i = 0, i = \overline{1,n}$.

Лемма 3.4. Если функичи $x_1(t), \cdots, x_n(t)$ линейно зависимые на промежутке J, то

$$W\left[x_1(t), \cdots, x_n(t)\right] \equiv 0, t \in J$$

Обратное утверждение неверно! Действительно, достаточно взять функции

$$x_1(t) = \begin{cases} 0, t \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{t^2}}, t > 0 \end{cases} \quad x_2(t) = \begin{cases} 0, t \geq 0 \\ e^{-\frac{1}{t^2}}, t < 0 \end{cases}$$

Доказать лемму самим.

Докажем формулу Лиувилля-Остроградского и теорему о существовании фундаментальной системы решений.

Для этого рассмотрим линейное однородное уравнение (3.14). В этом случае в соответствующей ему системе (2.46) функция $f(t, \vec{z}) = -\frac{p_n}{p_0} z_1 - \cdots - \frac{p_1}{p_0} z_n$ и $\sum_{i=1}^{n} p_{kk} = -\frac{p_1}{p_0}, p_0(t) \neq 0$. Здесь использованы обозначения (2.45): $x = z_1, \cdots, x^{(n-1)} = z_n$. Отсюда и из формулы (3.9) получим формулу Лиувилля-Остроградского для решений линейного однородного уравнения (3.14):

$$W(t) = W\left(t_0\right) e^{-\int_{t_0}^{t} \frac{p_1(\tau)}{p_0(\tau)} d\tau}, p_0(\tau) \neq 0. \tag{3.17}$$

Для уравнения второго порядка (3.10) она была получена ранее в подпараграфе 3.1.3. Из формулы Лиувилля-Остроградского следует:

1. Если существует t_0 такой, что $W\left(t_0\right) = 0$, то $W(t) = 0$ для любого $t \in J$;

2. Если существует t_0 такой, что $W\left(t_0\right) \neq 0$, то $W(t) \neq 0$ для любого $t \in J$.

Лемма 3.5. Пусть $x_1(t), \cdots, x_n(t), t \in J$, - решения линейного однородного уравнения (3.14). Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. функиии $x_1(t), \cdots, x_n(t), t \in J$, - линейно независимые;
2. $W(t) \neq 0, \forall t \in J$;
   З) существует $t_0 \in J$ такой, что $W(t_0) \neq 0$.

Доказательство. - Лемма 3.5 следует из леммы 3.3 согласно связи между уравнением (3.14) и системой (2.46), а также формулы Лиувилля-Остроградского (3.17). □

Определение 3.2.2. Любые n линейно независимые решения линейного однородного уравнения (3.14) называются фундаментальной системой решений (ФСР).

Theorem

3.7. Для любого линейного однородного уравнения (3.14) с непрерывными коэффициентами $up_0(t) \neq 0$ существует фундаментальная система решений.

Доказательство. - Возьмем $t_0 \in J$. Из теоремы 3.6 следует, что существуют решения со следующими начальными условиями:

$$x_k^{(l-1)}(t_0) = \delta_{lk}, 1 \leq l, k \leq n.$$

Согласно лемме 3.5 построенные решения являются линейно независимыми и, следовательно, образуют фундаментальную систему решений. Мы получим новую фундаментальную систему решений, если возьмём другие начальные данные при условии $W(t_0) \neq 0$. □

4.2.3 3.2.3. Structure of solutions of linear equations of the nth order

Theorem

3.8. Если $\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t), t \in J$, - фундаментальная система решений линейного однородного уравнения (3.14), то для любого его решения $x(t), t \in J$, найдётся такой набор постоянных $\mathrm{C}_i, i = \overline{1, n}$, что $x(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i(t)$.

Доказательство. → Теорема 3.8 следует из теоремы 3.4 согласно связи между уравнением (3.14) и системой (2.46). Из неё вытекает, что линейное пространство, образованное решениями линейного однородного уравнения n-го порядка, имеет размерность n. В качестве базиса этого пространства можно взять любую фундаментальную систему решений. □

Замечание 3.2.1. Функи,ия $x(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i(t)$ является общим решением однородного уравнения (3.14).

Theorem

3.9. Пусть $X(t), t \in J$, - какое-нибудь частное решение линейного неоднородного уравнения (3.13), а $\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)$, - фундаментальная система решений соответствующего линейного однородного уравнения. Тогда для любого решения $x(t), t \in J$, уравнения (3.13) существует такой набор постоянных $\mathrm{C}_i, i = \overline{1, n}$, что $x(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i(t) + X(t)$.

Доказательство. → Теорема 3.9 следует из теоремы 3.5 согласно связи между уравнением (3.13) и системой (2.46). Из неё вытекает, что функция $x(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \varphi_i(t) + X(t)$ является общим решением неоднородного уравнения (3.13). □

4.2.4 3.2.4. The method of variation of constants for a linear inhomogeneous equation

Пусть $\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)$ - фундаментальная система решений линейного однородного уравнения (3.14). Будем искать решение уравнения
(3.13) в виде $x(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i(t)\varphi_i(t), t \in J, C_i(t) \in C^1(J), t \in J$. Рассмотрим соответствующую уравнению (3.13) систему (2.46) с $f(t, \vec{z}) = -\frac{p_n}{p_0}z_1 - \cdots - \frac{p_1}{p_0}z_n + \frac{g(t)}{p_0}$.

Согласно обозначениям, принятым в системе (3.1), фундаментальная матрица Φ и вектор-функция $\vec{g}(t)$ соответствующей системы имеют вид

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \cdots & \varphi_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}, \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ \frac{g(t)}{p_0} \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем систему уравнений для определения производных от функций $C_i(t), i = \overline{1, n}$:

$$\Phi \frac{d\overrightarrow{C}}{dt} = \vec{g}(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_1 C_1'(t) + \cdots + \varphi_n C_n'(t) = 0 \\ \varphi_1' C_1'(t) + \cdots + \varphi_n' C_n'(t) = 0 \\ \cdots \\ \varphi_1^{(n-1)} C_1'(t) + \cdots + \varphi_n^{(n-1)} C_n'(t) = \frac{g(t)}{p_0} \end{cases}$$

Система разрешима, ибо $\det \Phi = W(t) \neq 0$. Определив $C_i'(t), i = \overline{1, n}$, нетрудно найти общее решение уравнения (3.13).

4.3 3.3. Linear homogeneous equations of the second order with variable coefficients

4.3.1 3.3.1. Preliminaries

Ниже рассматривается линейное однородное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0, t \in (a, b) \tag{3.18}$$

Основные предположения: коэффициенты $q(t) \in \mathbf{C}(a, b), p(t) \in \mathbf{C}^1(a, b)$, $(-\infty \leq a, b \leq +\infty)$.

Штурм - . С помощью непосредственного изучения уравнений второго порядка французский математик Штурм, живший в позапрошлом столетии, открыл, что поведение их решений имеет большое сходство с тригонометрическими и показательными функциями, и установил ряд

чрезвычайно важных свойств нулей решения [9], [12].

Ниже будут рассматриваться только нетривиальные решения.

Лемма 3.6. Пусть $x(t)$ - нетривиальное решение уравнения (3.18). Тогда множество нулей решения $x(t)$, содержащихся на любом отрезке $[t_1, t_2] \subset (a, b)$, - конечно.

Доказательство. $\rightarrow$ Предположим противное, а именно: существует бесконечно много нулей решения $x(t)$ на отрезке $[t_1, t_2] \subset (a, b)$. Из ограниченного числового множества, содержащего бесконечно много элементов, можно выбрать сходящуюся

последовательность $\{t_k\}$ такую, что $t_k \to t_0, k \to \infty, t_0 \in [t_1, t_2]$. Так как $x(t_k) = 0$ для любого $k \in N$, то в силу непрерывности решения $x(t)$ имеем

$$x(t_0) = \lim_{k\to\infty} x(t_k) = 0$$

Производная решения $x'(t)$ существует и непрерывна. Из определения производной в точке $t_0 \in [t_1, t_2] \subset (a, b)$ имеем

$$\frac{dx}{dt}(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} = \lim_{k\to\infty} \frac{x(t_k) - x(t_0)}{t_k - t_0} = 0.$$

Таким образом, $x(t_0) = x'(t_0) = 0$. Из теоремы существования и единственности решения задачи Коши следует $x(t) \equiv 0, t \in [t_1, t_2]$. Противоречие.

Следствие 3.9.1. Если нетривиальное решение $x(t)$ уравнения (3.18) имеет больше одного нуля на (a, b) и если $x(t_0) = 0, t_0 \in (a, b)$, то существует такой нуль $t_1 \neq t_0$ решения $x(t)$, что интервал (t_0, t_1) не содержит других нулей этого решения.

Значения t_0, t_1 называются последовательными нулями. Введем вместо $x(t)$ новую неизвестную функцию $y(t)$ по формуле

$$x(t) = y(t)e^{-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau} \tag{3.19}$$

Тогда для функции $y(t)$ получим дифференциальное уравнение

$$y''(t) + Q(t)y(t) = 0 \tag{3.20}$$

в котором

$$Q(t) = q(t) - \frac{p^2(t)}{4} - \frac{p'(t)}{2} \in \mathbf{C}(a, b).$$

Отметим, что в силу (3.19) функции $x(t)$ и $y(t)$ меняют знак при одних и тех же значениях $t \in (a, b)$.

4.3.2 3.3.2. Sturm Comparison Theorem

Рассмотрим уравнения

$$y'' + Q_1(t)y = 0, \tag{3.21}$$
$$z'' + Q_2(t)z = 0, \tag{3.22}$$

где $Q_1(t), Q_2(t) \in \mathbf{C}(a, b)$.

Theorem

3.10. (Теорема сравнения Штурма.) Пусть $t_1, t_2 \in (a, b)$ - два последовательных нуля решения $y(t)$ уравнения (3.21) $uQ_1(t) \leq Q_2(t)$ на $[t_1, t_2]$. Тогда любое решение $z(t)$ уравнения (3.22) имеет хотя бы один нуль на отрезке $[t_1, t_2]$.

Доказательство. $\to$ По условию теоремы $y(t_1) = y(t_2) = 0$ и на интервале (t_1, t_2) функция $y(t)$ сохраняет знак. Будем считать, что $y(t) > 0, t \in (t_1, t_2)$. Пусть $z(t)$ - произвольное решение уравнения (3.22). Допустим, что $z(t)$ не имеет нулей на отрезке $[t_1, t_2]$, и будем считать $z(t) > 0$ на $[t_1, t_2]$.

Умножая уравнение (3.21) на $z(t)$, а (3.22) - на $y(t)$ и вычитая одно из другого, получим

$$y''z - z''y = [Q_2(t) - Q_1(t)]\, yz. \tag{3.23}$$

Равенство (3.23) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}\left(y'z - z'y\right) = [Q_2(t) - Q_1(t)]\, yz \tag{3.24}$$

Проинтегрировав соотношение (3.24) от t_1 до t_2 и воспользовавшись равенствами $y\left(t_1\right) = y\left(t_2\right) = 0$, будем иметь

$$y'\left(t_2\right) z\left(t_2\right) - \underbrace{z'\left(t_2\right) y\left(t_2\right)}_{=0} - y'\left(t_1\right) z\left(t_1\right) + \underbrace{y\left(t_1\right) z'\left(t_2\right)}_{=0} =$$

$$= y'\left(t_2\right) z\left(t_2\right) - y'\left(t_1\right) z\left(t_1\right) = \int_{t_1}^{t_2} [Q_2(t) - Q_1(t)]\, yzdt \tag{3.25}$$

Из условия $y(t) > 0$ на (t_1, t_2) следует, что $y'\left(t_1\right) > 0$ и $y'\left(t_2\right) < 0$. Действительно, так как равенства $y'\left(t_i\right) = 0$ в силу теоремы существования и единственности решения задачи Коши исключены, из формулы Тейлора имеем

$$y(t) = \underbrace{y\left(t_2\right)}_{=0} + y'\left(t_2\right)\left(t - t_2\right) + o\left(t - t_2\right) \Rightarrow y'\left(t_2\right) < 0,$$

$$y(t) = \underbrace{y\left(t_1\right)}_{=0} + y'\left(t_1\right)\left(t - t_1\right) + o\left(t - t_1\right) \Rightarrow y'\left(t_1\right) > 0.$$

Так как $z(t) > 0$ при $t \in [t_1, t_2]$ и $Q\left(t_2\right) - Q\left(t_1\right) \geq 0$ по условию, то мы приходим к противоречию:

$$0 > y'\left(t_2\right) z\left(t_2\right) - y'\left(t_1\right) z\left(t_1\right) = \int_{t_1}^{t_2} [Q_2 - Q_1]\, yzdt \geq 0$$

Замечание 3.3.1. Предположим дополнительно, что $Q_2(t) > Q_1(t)$ для некоторых значений $t \in [t_1, t_2]$. Тогда

1. решение $z(t)$ будет иметь хотя бы один нуль на интервале (t_1, t_2). Действительно, предположим противное: $z(t) > 0, t \in (t_1, t_2)$. Тогда правая часть (3.25) будет строго больше нуля, а левая не положительна. Мы приходим к противоречию;

2. если $z\left(t_1\right) = 0$, то следующий нуль $z\left(t_*\right)$ лежит левее t_2, т.е. $t_* < t_2$. Здесь

$$y\left(t_1\right) = y\left(t_2\right) = 0; \quad z\left(t_1\right) = 0, \quad z\left(t_*\right) = 0, t_* < t_2.$$

4.3.3 3.3.3. Consequences arising from Sturm's comparison theorem

Следствие 3.10.1. Если $Q(t) \leq 0$ на интервале (a, b), то всякое решение уравнения

$$y'' + Q(t)y = 0 \tag{3.26}$$

имеет на (a, b) не более одного нуля.

Доказательство. $\rightarrow$ Предположим противное. Тогда найдется нетривиальное решение уравнения $y(t)(3.26)$, имеющее более одного

нуля на (a, b). Пусть t_1 и t_2 - последовательные нули этого решения. Рассмотрим уравнение

$$z'' = 0 \tag{3.27}$$

для которого $Q_2(t) = 0 \geq Q_1(t) = Q(t)$. По теореме сравнения Штурма любое решение $z(t)$ уравнения (3.27) имеет хотя бы один нуль на отрезке $[t_1, t_2]$. Однако это не так: решение $z(t) = 1, t \in [t_1, t_2]$, уравнения (3.27) вообще не имеет нулей. Противоречие доказывает следствие.

Предположим теперь, что

$$0 < m^2 \leq Q(t) \leq M^2, t \in (a, b), \tag{3.28}$$

и обозначим через δ расстояние между последовательными нулями любого решения уравнения (3.26) при условии (3.28).

Следствие 3.10.2. Если $Q(t)$ удовлетворяет условию (3.28), то расстояние между последовательными нулями любого решения уравнения (3.20) удовлетворяет неравенствам

$$\frac{\pi}{M} \leq \delta \leq \frac{\pi}{m}$$

Доказательство. - Рассмотрим уравнения

$$y'' + m^2 y = 0, y'' + M^2 y = 0. \tag{3.29}$$

Общие решения уравнений (3.29) имеют вид: $y = A\sin[m(t - \phi)], y = B\sin[M(t - \psi)]$. Подбором ϕ, ψ всегда можно совместить некоторые нули решений уравнений (3.29) с нулём решения уравнения (3.20). Расстояние между последовательными нулями первого уравнения (3.29) равно $\frac{\pi}{m}$, а второго - $\frac{\pi}{M}$. Если теперь воспользоваться теоремой сравнения Штурма и замечанием к ней, то получим утверждение следствия 3.10.2.

4.3.4 3.3.4. Sturm's theorem on the separation of zeros

Theorem

3.11. (Теорема Штурма о разделение нулей.) Пусть $y_1(t)$ и $y_2(t)$ - линейно-независимые решения уравнения

$$y'' + Q(t)y = 0, t \in (a, b).$$

t_1, t_2 - два последовательных нуля решения $y_1(t)$, то решение $y_2(t)$ имеет на интервале (t_1, t_2) в точности один нуль.

Доказательство. $\rightarrow$ Вначале докажем, что на интервале (t_1, t_2) имеется хотя бы один нуль решения $y_2(t)$. В самом деле, пусть в теореме Штурма сравнения уравнения (3.21),(3.22) совпадают, т.е.

$$Q_1(t) = Q_2(t) = Q(t).$$

Тогда решение $y_2(t)$ имеет на отрезке $[t_1, t_2]$ хотя бы один нуль. Но ни t_1, ни t_2 не могут быть нулями $y_2(t)$, так как в противном случае определитель Вронского

$$W(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$$

обращался бы в нуль при $t = t_1$ или при $t = t_2$ и решения $y_1(t)$ и $y_2(t)$ были бы линейно зависимы. Следовательно, $y_2(t)$ имеет на интервале (t_1, t_2) по крайней мере один нуль.

Обозначим его $\xi \in (a, b)$. Докажем, что других нулей у решения $y_2(t)$ на интервале (t_1, t_2) нет. Допустим, что решение $y_2(t)$ имеет на интервале (t_1, t_2) более одного нуля. Тогда в силу следствия к лемме 3.6 в интервале (t_1, t_2) имеется такой нуль η решения $y_2(t)$, что между ξ и η других нулей нет, т.е. ξ и η - последовательные нули решения $y_2(t)$. Тогда по теореме Штурма сравнения на $[\eta, \xi]$ должен быть хотя бы один нуль решения $y_1(t)$, а это противоречит тому, что t_1 и t_2 последовательные нули решения $y_1(t)$. $\square$

4.3.5 3.3.5. Examples of using the Sturm theorem

Пример 1. Доказать, что при $x \to \infty$ расстояние между последовательными нулями любого решения уравнения Бесселя

$$t^2 x''(t) + t x'(t) + \left(t^2 - \nu^2\right) x(t) = 0. \tag{3.30}$$

стремится к π.

Решение. В силу симметрии будем предполагать, что $t > 0$, а $\nu^2 \geq 0$. Уравнение (3.30) можно преобразовать с помощью подстановки $x = \frac{z}{\sqrt{t}}$ к приведенному уравнению Бесселя

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \left(1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{t^2}\right) z = 0, \quad Q(t) = \left(1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{t^2}\right).$$

Будем рассматривать значения t большими или равными некоторой положительной величины η, которая выбирается следующем образом:

1. при $\frac{1}{4} - \nu^2 \geq 0$ она может быть выбрана произвольной;
2. при $\frac{1}{4} - \nu^2 < 0$ она принимается такой, чтобы $\eta > \sqrt{\nu^2 - \frac{1}{4}} (Q(t) > 0)$.

При этих условиях можно утверждать, что если $t \geq \eta$, то

1. $1 \leq Q(t) \leq 1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{\eta^2}$, если $\frac{1}{4} - \nu^2 \geq 0$;
2. $0 < 1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{\eta^2} \leq Q(t) \leq 1$, если $\frac{1}{4} - \nu^2 < 0$.

Отсюда и из следствия 3.10.2 вытекает, что при $t \geq \eta$ расстояние δ между двумя последовательными нулями уравнения Бесселя (3.30) удовлетворяет неравенствам

$$\pi \left(1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{\eta^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \leq \delta \leq \pi, \text{ если } \left(\frac{1}{4} - \nu^2 \geq 0\right);$$
$$\pi \leq \delta \leq \pi \left(1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{\eta^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \text{ если } \left(\frac{1}{4} - \nu^2 < 0\right). \tag{3.31}$$

При $\nu^2 = \frac{1}{4}$ мы имеем $\delta = \pi$. Действительно, при $\nu^2 = \frac{1}{4}$ из уравнения (3.30) получаем

$$z''(t) + z(t) = 0 \Rightarrow x(t) = A \frac{\sin(t - \theta)}{\sqrt{t}}$$

Здесь A, θ - произвольные постоянные. Если $\eta \to \infty$, то из формул (3.31) следует, что расстояние между последовательными нулями вещественных решений уравнения Бесселя стремится к π и их бесконечное счётное множество.

Пример 2. Доказать, что в случае $q(t) \leq 0$ краевая задача

$$y'' + q(t)y = 0, y\left(t_1\right) = a, y\left(t_2\right) = b \tag{3.32}$$

при любых a, b и $t_1 \neq t_2$ имеет единственное решение. Доказать, что это решение - монотонная функция, если $b = 0([13], 725)$.

Решение. Если $q(t) = 0, t \in [t_1, t_2]$, то общим решением уравнения $y'' = 0$ будет функция $y = At + B$. Постоянные A, B определяются из краевых условий:

$$A^* = \frac{b-a}{t_2 - t_1}, \quad B^* = \frac{at_2 - bt_1}{t_2 - t_1}$$

Функция $y = A^*t + B^*$ дает единственное решение краевой задачи (3.32).

Пусть теперь $q(t) \not\equiv 0$. Обозначим через $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ решения уравнения (3.32), удовлетворяющие следующим начальным условиям:

$$\varphi_1\left(t_1\right) = 0, \varphi_1'\left(t_1\right) = 1; \varphi_2\left(t_1\right) = 1, \varphi_2'\left(t_1\right) = 0.$$

Они образуют ФСР, так как $W\left[\varphi_1(t), \varphi_2(t)\right]\big|_{t=t_1} \neq 0$. Общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t), t \in \left[t_1, t_2\right].$$

Постоянные C_1, C_2 определяются из системы уравнений, полученной из краевых условий (3.32):

$$\begin{cases} C_1\varphi_1\left(t_1\right) + C_2\varphi_2\left(t_1\right) = a, \\ C_1\varphi_1\left(t_2\right) + C_2\varphi_2\left(t_2\right) = b. \end{cases}$$

В результате её решения находим $C_2 = a$, а $C_1\varphi_1\left(t_2\right) = b - a\varphi_2\left(t_2\right)$. Постоянная C_1 определена, так как значения $\varphi_1\left(t_2\right), \varphi_2\left(t_2\right)$ получены в результате решения задачи Коши, при этом $\varphi_1\left(t_2\right) \neq 0$. Последнее утверждение вытекает из следствия 10.1, а именно: любое решение уравнения (3.32) имеет не более одного нуля на отрезке $[t_1, t_2]$. Таким образом, решение краевой задачи (3.32) существует и единственно.

Изучим теперь поведение решения краевой задачи при $b = 0$ и $a < 0$. Если $a = 0$, то единственным решением задачи будет монотонная функция $y = 0$.

Таким образом, краевые условия принимают вид: $y\left(t_1\right) = a << 0, y\left(t_2\right) = 0$. Обозначим через $\varphi(t), t \in [t_1, t_2]$, решение краевой задачи. Покажем, что $\varphi(t) < 0$ при любом $t \in (t_1, t_2)$. Действительно, так как $\varphi\left(t_2\right) = 0$, предположение о существовании $\xi \in (t_1, t_2)$ такого, что $\varphi(\xi) = 0$, приводит к противоречию в силу следствия 10.1.

Производная $\varphi'(t)$ не возрастает на отрезке $[t_1, t_2]$, так как на нём $\varphi''(t) = -q(t)\varphi(t) \leq 0$. Если предположить, что $\varphi'\left(t_2\right) = 0$, то в силу основной теоремы будем иметь $\varphi(t) = 0, \in [t_1, t_2]$. Знак производной при $t = t_2$ определяется из формулы Тейлора:

$$\varphi(t) = \varphi'\left(t_2\right)\left(t - t_2\right) + o\left(t - t_2\right) \to \varphi'\left(t_2\right) > 0.$$

Отсюда получаем оценку:

$$\varphi'(t) \geq \varphi'\left(t_2\right) > 0, t \in \left[t_1, t_2\right].$$

Следовательно, решение $\varphi(t), t \in [t_1, t_2]$, является монотонной функцией. Случай $a > 0$ рассматривается аналогично.

4.3.6 3.3.6. Knezer criterion

Theorem

3.12. (Критерий Кнезера.) Если в уравнении (3.20) коэффициент $Q(t) < \frac{1}{4t^2}$ на некотором промежутке $[t_0, +\infty)$, $t_0 > 0$, то каждое его решение $y(t)$ имеет не более одного нуля. Если для некоторого $\varepsilon > 0$ коэффициент $Q(t) > \frac{1+\varepsilon}{4t^2}, t > t_0$, то каждое его решение имеет бесконечно много нулей (решение колеблется).

Доказательство. - а) Пусть $Q(t) < \frac{1}{4t^2}, [t_0, +\infty), t_0 > 0$. Предположим, что решение $y(t)$ имеет больше одного нуля $y(t_1) = y(t_2) = 0$. Рассмотрим два уравнения

$$y'' + Q(t)y = 0, z'' + \frac{1}{4t^2}z = 0.$$

Так как $Q(t) < \frac{1}{4t^2}$, то по теореме сравнения Штурма любое решение $z(t)$ второго уравнения имеет нуль на (t_1, t_2). Очевидно, что $z(t) = t^{\frac{1}{2}}$ - решение второго уравнения. Оно не обращается в нуль при $t > 0$. Противоречие, которое доказывает первую часть теоремы.
б) Рассмотрим теперь случай, когда $Q(t) > \frac{1+\varepsilon}{4t^2}$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и $t > t_0$. Рассмотрим два уравнения

$$y'' + Q(t)y = 0, \quad z'' + \frac{1+\varepsilon}{4t^2}z = 0.$$

Второе уравнение является уравнением Эйлера. Будем искать его решение в виде $z = t^\lambda$. Для определения λ получаем уравнение

$$\lambda(\lambda - 1) + \frac{1+\varepsilon}{4} = 0.$$

Его решение даёт: $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i\sqrt{\frac{\varepsilon}{4}}$. Отсюда следует, что функция

$$z(t) = \sqrt{t}\sin\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{4}}\ln t\right)$$

будет решением уравнения для $z(t)$. Она имеет бесконечно много нулей. По теореме сравнения Штурма решение $y(t)$ также имеет бесконечно много нулей. Теорема доказана. Она полезна при решении задач. □

4.4 3.4. The Bessel equation and some properties of its solutions

В этой главе изучаются некоторые свойства решений уравнения Бесселя ν - го порядка:

$$t^2x'' + tx' + \left(t^2 - \nu^2\right)x = 0, t > 0. \tag{3.33}$$

Ниже будут построены два линейно независимые решения уравнения (3.33). Уравнение рассматривается в области $t > 0$, т.к. изменение знака t его не меняет. Решение будем искать в виде обобщенного степенного ряда

$$x(t) = t^\rho \sum_{k=0}^{\infty} C_k t^k. \tag{3.34}$$

Уравнение (3.33) можно представить в виде

$$t\left(tx'(t)\right)' + \left(t^2 - \nu^2\right)x(t) = 0. \tag{3.35}$$

Дифференцируя формально ряд (3.34), будем иметь

$$tx'(t) = t^\rho \sum_{k=0}^{\infty}(\rho+k)C_k t^k, t\left(tx'(t)\right)' = t^\rho \sum_{k=0}^{\infty}(\rho+k)^2 C_k t^k.$$

Подставляя это соотношение в уравнение (3.35), окончательно находим

$$t^\rho \left\{ \sum_{k=0}^{\infty}\left[(\rho+k)^2-\nu^2\right]C_k t^k + \sum_{k=2}^{\infty} C_{k-2}t^k \right\} = 0.$$

Приравнивая далее коэффициенты при одинаковых степенях t к нулю, получим

$$\begin{array}{ll} k=0: & \left[\rho^2-\nu^2\right]C_0 = 0, \\ k=1: & \left[(\rho+1)^2-\nu^2\right]C_1 = 0, \\ k=2: & \left[(\rho+2)^2-\nu^2\right]C_2 + \mathrm{C}_0 = 0, \\ k\geq 2: & \left[(\rho+k)^2-\nu^2\right]C_k + C_{k-2} = 0. \end{array} \tag{3.36}$$

Последнее соотношение (3.36) определяет реккурентную формулу для определения C_k через C_{k-2}. Отсюда заключаем, что все нечетные коэффициенты $C_{2m+1} = 0, m \in \mathbb{N}$. Пусть $k = 2m$. Тогда если $\rho = \nu$, то

$$C_{2m} = -\frac{C_{2m-2}}{2^2 m(m+\nu)}.$$

Последовательное применение этой формулы дает связь между C_{2m} и C_0 :

$$C_{2m} = (-1)^m \frac{C_0}{2^{2m} m!(\nu+1)(\nu+2)...(\nu+m)}.$$

Воспользуемся свойствами гамма - функции:
$\Gamma(\nu+1) = \Gamma(\nu)\nu, \Gamma(m+1) = m!, \Gamma(\nu+1+m) = (\nu+1)...(\nu+m)\Gamma(\nu+1)$ и положим сначала $\rho = \nu \geq 0$. В результате получаем первое решение уравнения Бесселя (3.33):

$$x_1(t) = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2m+\nu}}{\Gamma(m+1)\Gamma(\nu+m+1)} = J_\nu(t) \tag{3.37}$$

Ряд (3.37) сходится с радиусом сходимости $R = \infty$ (признак Даламбера). При этом он сходится быстрее экспоненты и равномерно на любом конечном отрезке, а также является бесконечно дифференцируемой функцией. Этот ряд называется функцией Бесселя первого рода $\nu-$ го порядка. Используя теперь корень $\rho = -\nu < 0$, построим второе решение уравнения (3.33). Пусть $\nu \neq n$, где $n \in N$. Тогда второе решение может быть получено из решения (3.37) простой заменой ν на $-\nu$, так как уравнение (3.33) при этом не меняется. Следовательно,

$$J_{-\nu}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{t}{2}\right)^{2m-\nu}}{\Gamma(m+1)\Gamma(-\nu+m+1)}$$

Решения $J_\nu(t)$ и $J_{-\nu}(t)$ линейно независимые, т.к.

$$W\left(J_\nu(t), J_{-\nu}(t)\right) = -\frac{2\sin(\nu\pi)}{\pi t} \tag{3.38}$$

При вычислении мы воспользовались соотношением $\Gamma(1+\nu)\Gamma(1-\nu) = \frac{\pi\nu}{\sin(\pi\nu)}, \nu \notin \mathbb{Z}$. Решение $J_{-\nu}(t)$ при $t \to 0$ стремится к бесконечности. Общее решение уравнения Бесселя можно представить в виде

$$x(t) = C_1 J_\nu(t) + C_2 J_{-\nu}(t).$$

Изучим теперь случай $\nu = n, n \in \mathbb{Z}_+$. Докажем, что в этом случае $J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t)$. Действительно,

$$J_{-n}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{t}{2}\right)^{2m-n}}{\Gamma(m-n+1)\Gamma(m+1)} = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{t}{2}\right)^{2m-n}}{\Gamma(m-n+1)\Gamma(m+1)},$$

поскольку $\Gamma(m-n+1) = \infty, m = 0, 1, 2, ..., n-1$. В последней сумме произведем замену переменной суммирования: $m = s + n$. В результате получим

$$J_{-n}(t) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s} \left(\frac{t}{2}\right)^{2s+n}}{\Gamma(s+1)\Gamma(s+n+1)} = (-1)^n J_n(t).$$

Таким образом, для целых значений $\nu = n$ функции $J_n(t)$ и $J_{-n}(t)$ линейно зависимые.

Чтобы получить второе линейно независимое решение, рассматривают функцию Неймана (функция Бесселя второго рода):

$$N_\nu = \frac{J_\nu \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}}{\sin(\pi\nu)}. \tag{3.39}$$

Очевидно, если $\nu \neq n$, то (3.39) является решением уравнения Бесселя (3.33) и линейно независимым решению $J_\nu(t)$. Если $\nu = n$, то функция Неймана определяется как предел:

$$N_n(t) = \lim_{\nu \to n} N_\nu(t) = \lim_{\nu \to n} \frac{J_\nu \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}}{\sin(\pi\nu)}, t > 0.$$

При $\nu \to n$ мы получаем неопределенность типа $\frac{0}{0}$. Раскрывая её по правилу Лопиталя, получаем для целых $\nu = n$:

$$N_n(t) = \left. \frac{\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}(t)\cos(\pi\nu) - \pi\sin(\pi\nu)J_\nu(t) - \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}(t)}{\pi\cos(\pi n)} \right|_{\nu=n} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}(t) - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}(t)\right]\Bigg|_{\nu=n}, \quad t > 0$$

С другой стороны, можно вычислить определитель Вронского при $\nu \neq\neq n$:

$$W\left[J_\nu, N_\nu\right] = -\frac{1}{\sin(\nu\pi)} W\left[J_\nu, J_{-\nu}\right] = \frac{2}{\pi t}, t > 0.$$

Отсюда

$$\lim_{\nu \to n} W\left[J_\nu, N_\nu\right] = W\left[J_n, N_n\right] = \frac{2}{\pi t}, t > 0.$$

Эта формула может служить также для определения функции $N_n(t)$. Вычисления показывают, что

$$N_n(t) = \frac{2}{\pi} J_n(t) \log\left(\frac{t}{2}\right) + t^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k t^k.$$

Из вышесказанного следует

Theorem

3.13. Функции $J_\nu(t)$ и $N_\nu(t)$ являются линейно независимыми при любых значениях ν.

Исследуем теперь поведение функций Бесселя и Неймана при $t \to\to \infty$. После замены $z = x\sqrt{t}$ уравнение Бесселя (3.33) примет вид

$$z'' + \left(1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{t^2}\right) z = 0 \tag{3.40}$$

Перепишем уравнение (3.40) в форме, удобной для дальнейшего исследования:

$$z'' + z = zf(t), \quad f(t) = -\frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{t^2} \tag{3.41}$$

Будем искать решение уравнения (3.41) в виде

$$z(t) = C_1(t)\sin t + C_2(t)\cos t =$$
$$= \sqrt{C_1^2 + C_2^2}\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\sin t + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\cos t\right) = A(t)\sin(t + \delta(t))$$

Здесь

$$A(t) = \sqrt{C_1^2(t) + C_2^2(t)}, \sin\delta(t) = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}, \cos\delta(t) = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}$$

Поскольку неизвестных функций две, мы можем подчинить их условию, а именно: производная от $z(t)$ вычисляется так, как если бы $A(t)$ и $\delta(t)$ были постоянными. Имеем

$$z'(t) = A\cos(t + \delta) + [A\delta'\cos(t + \delta) + A'\sin(t + \delta)]$$

Отсюда получаем связь между функциями $A(t)$ и $\delta(t)$:

$$z'(t) = A\cos(t + \delta), \quad A\delta'\cos(t + \delta) + A'\sin(t + \delta) = 0 \tag{3.42}$$

Вычислив вторую производную и подставляя её вместе с первой (3.42) в (refe341), получим уравнение

$$A'\cos(t + \delta) - A\left(\delta' + \frac{\gamma}{t^2}\right)\sin(t + \delta) = 0, \gamma = \nu^2 - \frac{1}{4}$$

В результате для определения $A(t)$ и $\delta(t)$ будем иметь систему

$$\begin{cases} A\delta'\cos(t + \delta) + A'\sin(t + \delta) = 0 \\ A'\cos(t + \delta) - A\left(\delta' + \frac{\gamma}{t^2}\right)\sin(t + \delta) = 0 \end{cases}$$

которую нетрудно привести к виду

$$\begin{cases} \delta' = -\sin^2(t + \delta)f(t), \\ \dfrac{A'}{A} = \dfrac{1}{2}\sin(2(t + \delta))f(t). \end{cases} \tag{3.43}$$

Из первого уравнения системы (3.43) при $t \to \infty$ имеем $\delta'(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right) \to$ $\to 0$. Представим функцию $\delta(t)$ в виде

$$\delta(t) = \delta_0 + \int_t^\infty \sin^2(\tau + \delta(\tau))f(\tau)d\tau$$

Аналогично находим для $A(t)$:

$$\log A(t) = \log A_0 - \frac{1}{2}\int_t^\infty \sin(2(\tau+\delta(\tau)))f(\tau)d\tau$$

Стоящие справа интегралы сходятся, так как

$$\left|\int_t^\infty \sin^2(\tau+\delta(\tau))\frac{\gamma}{t^2}dt\right| \le \int_t^\infty \frac{|\gamma|}{t^2}dt = \frac{|\gamma|}{t}$$
$$\left|\int_t^\infty \sin(2(\tau+\delta(\tau)))\frac{\gamma}{t^2}dt\right| \le \int_t^\infty \frac{|\gamma|}{t^2}dt = \frac{|\gamma|}{t}.$$

Следовательно, найденные формулы являются решениями системы (3.43). Отсюда находим

$$x(t) = \frac{A_0\sin(t+\delta_0)}{\sqrt{t}} + \mathcal{O}\left(t^{-\frac{3}{2}}\right), t\to\infty. \tag{3.44}$$

Постоянные A_0 и δ_0 определяются на основе теории функций комплексного переменного.

Асимптотическое поведение функций Бесселя и Неймана задаётся следующими формулами:

$$J_\nu(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cos\left(t - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right),$$
$$N_\nu(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\sin\left(t - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Функция (3.44) описывает асимптотическое поведение любого решения уравнения Бесселя при $t\to\infty$. Отсюда следует, что каждое из них имеет бесконечное число нулей и расстояние между последовательными нулями стремится к π при $t\to\infty$.

5 4 Linear DEs and linear systems of DEs with constant real coefficients by Diesperov

5.1 4.1. Linear differential equations with constant real coefficients

5.1.1 4.1.1. Linear homogeneous equations

Уравнение вида

$$x^{(n)}(t) + a_1x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_nx(t) = 0, t\in\mathbb{R} \tag{4.1}$$

называется линейным однородным уравнением n-го порядка с постоянными вещественными коэффициентами (ЛОУ). Если левую часть уравнения (4.1) обозначить через $L[x(t)]$, то оно записывается в компактном виде $L[x(t)] = 0$. Решение уравнения будем искать над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Сначала находятся все комплексные решения уравнения (4.1) в виде элементарных функциий, а затем из них выделяются действительные решения. Этот подход применяется потому, что в некоторых случаях легче найти комплексные решения уравнения с действительными коэффициентами, чем их действительные решения [13].

Определение 4.1.1. Функция $x(t) : J\to\mathbb{C}$, которая ставит в соответствие каждому действительному значению $t\in J$ комплексное число

$$x(t) = u(t) + iv(t), t \in J \tag{4.2}$$

где $u(t), v(t), t \in J$, - действительные функции, называется комплекснозначной функцией действительного переменного.

Определение 4.1.2. Если $u(t), v(t) \in \mathbf{C}^n(J)$, то производной n-го порядка комплекснозначной функции (4.2) называется функция $x^{(n)}(t) = u^{(n)}(t) + iv^{(n)}(t), t \in J$.

Определение 4.1.3. Комплекснозначная функция $x(t) = u(t) + iv(t)$, $t \in \mathbb{R}$ называется решением линейного однородного уравнения (4.1), если при подстановке её в уравнение последнее обращается в тождество.

Лемма 4.1. Пусть комплекснозначная функиия $x(t) = u(t) + iv(t)$ является решением уравнения (4.1). Тогда каждая функичя в отдельности $u(t) = \mathrm{Re}[x(t)], v(t) = \mathrm{Im}[x(t)]$ является действительным решением.

$$\text{Доказательство.} \downarrow L[u + iv] = L[u] + iL[v] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} L[u] = 0, \\ L[v] = 0. \end{cases}$$

Лемма 4.2. Если начальные условия для уравнения (4.1) являются действительными числами, то и решение задачи Коши будет действительной функцией.

Доказательство. $\rightarrow$ Для мнимой части $v(t)$ решения имеем следующие начальные условия $v(t_0) = v'(t_0) = \cdots = v^{(n-1)}(t_0) = 0$. Из следствия к теореме существования и единственности решения задачи Коши получаем, что $v(t) \equiv 0$.

Обозначим через $z = a + ib$ комплексное число.

Определение 4.1.4. Показательной функцией e^z называется функция, определяемая для любого комплексного числа $z = a + ib$ соотношением

$$e^z = e^a(\cos b + i \sin b). \tag{4.3}$$

Свойства показательной функции:

1. $\forall z \in \mathbb{C} : |e^z| \neq 0$;
2. $\forall z_1, z_1 \in \mathbb{C} : e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$;
3. $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$;
4. $\frac{d}{dt} e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}$.

Построим фундаментальную систему решений (ФСР) линейного однородного уравнения (4.1). Будем искать его решения в виде

$$x(t) = e^{\lambda t}, \lambda \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R} \tag{4.4}$$

При подставке в левую часть $L[x(t)]$ уравнения (4.1) функции (4.4) получим тождество

$$\begin{gathered} L\left[e^{\lambda t}\right] = Q(\lambda) e^{\lambda t} \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall t \in \mathbb{R}, \\ Q(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n \end{gathered} \tag{4.5}$$

Отсюда следует, что $x(t) = e^{\lambda t}$ является решением уравнения (4.1) тогда и только тогда, когда $Q(\lambda) = 0$. Уравнение $Q(\lambda) = 0$ называется характеристическим. Над полем комплексных чисел многочлен n-й степени имеет ровно n-корней с учетом их кратности (теорема Гаусса).

Структура фундаментальной системы решений зависит от структуры решений характеристического уравнения.

Лемма 4.3. Если $\lambda_\star$ является корнем характеристического уравнения кратности k, то следующие функции

$$\varphi_1 = e^{\lambda_\star t}, \cdots, \varphi_k = t^{k-1}e^{\lambda_\star t}$$

будут решениями линейного однородного уравнения (4.1).
Доказательство. $\to$ Продифференцируем l раз тождество (4.5) по λ. Используя формулу Лейбница, находим

$$L\left[t^l e^{\lambda t}\right] = \sum_{i=0}^{l} C_l^i Q^{(i)}(\lambda) t^{l-i} e^{\lambda t}.$$

По условию $\lambda_\star$ является корнем кратности k, поэтому

$$Q\left(\lambda_\star\right) = Q'\left(\lambda_\star\right) = \cdots = Q^{(k-1)}\left(\lambda_\star\right) = 0, Q^{(k)}\left(\lambda_\star\right) \neq 0.$$

Согласно этому результату из предыдущего уравнения будем иметь

$$L\left[t^l e^{\lambda_\star t}\right] = 0, 0 \leq l \leq k-1.$$

Здесь мы воспользовались тем, что производная показательной функции e^z по комплексной переменной z равна e^z (так же, как и в вещественном случае).

Пусть характеристическое уравнение имеет m различных корней $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ с кратностями $k_1, \cdots, k_m$ $(k_1 + \cdots + k_m = n)$. В силу леммы 4.3n функций

$$\begin{gathered} e^{\lambda_1 t}, \cdots, t^{k_1-1}e^{\lambda_1 t} \\ \cdots, \cdots, \cdots \\ e^{\lambda_m t}, \cdots, t^{k_m-1}e^{\lambda_m t} \end{gathered} \tag{4.6}$$

будут решениями уравнения (4.1).
Определение 4.1.5. Функция вида $x(t) = e^{\lambda_1 t}P_1(t) + \cdots + e^{\lambda_m t}P_m(t)$, где $\lambda_i, i = \overline{1,m}$ - числа, а $P_i(t)$ - многочлены, называется квазимногочленом.

Лемма 4.4. Если $x(t) = e^{\lambda t}P_n(t), \lambda \in \mathbb{C}$, а $P_n(t)$ - многочлен степени n, mo

$$\frac{d}{dt}x(t) = \tilde{P}_m(t)e^{\lambda t}$$

где $\tilde{P}_m(t)$ - многочлен степени

$$m = \begin{cases} n, \text{ если } \lambda \neq 0 \\ n-1, \text{ если } \lambda = 0 \end{cases}$$

Лемма 4.5. Пусть $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ - различные корни характеристического уравнения, а $k_1, \cdots, k_m$ - соответствующие их кратности. При этом $k_1 + \cdots + k_m = n$. Тогда решения (4.6) являются линейно независимыми.

Доказательство. $\to$ Обозначим решения (4.6) через $\varphi_i(t), i \in\in \overline{1,n}$ и предположим противное, что они линейно зависимые. Тогда существуют $C_i, i = \overline{1,n}$, - постоянные, не все равные нулю, такие, что $\sum_{i=1}^n C_i\varphi_i(t) = 0, t \in \mathbb{R}$. Подставляя в это равенство функции (4.6), получим

$$e^{\lambda_1 t}P_1(t) + \cdots + e^{\lambda_m t}P_m(t) \equiv 0, t \in \mathbb{R} \tag{4.7}$$

Здесь $P_i(t)$ - многочлены степени не выше $k_i - 1$, где $i = \overline{1,m}$. Не все коэффициенты в этих многочленах равны нулю. Предположим, что $P_1(t)$ - многочлен степени l, в котором

коэффициент при t^l не равен нулю. Умножая обе части тождества (4.7) на $e^{-\lambda_m t}$, будем иметь

$$e^{(\lambda_1-\lambda_m)t}P_1(t)+\cdots+e^{(\lambda_{m-1}-\lambda_m)t}P_{m-1}(t)+P_m(t)\equiv 0, t\in\mathbb{R}$$

При этом $\lambda_i-\lambda_m\neq 0, i<m$. Продифференцируем это равенство k_m раз. Согласно лемме 4.4 получим

$$e^{(\lambda_1-\lambda_m)t}P_{1,1}(t)+\cdots+e^{(\lambda_{m-1}-\lambda_m)t}P_{m-1,1}(t)\equiv 0, t\in\mathbb{R}$$

Проделывая эту процедуру $(m-1)$ - раз, находим

$$e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}P_{1,m-1}(t)\equiv 0, t\in\mathbb{R}$$

Так как $e^{(\lambda_1-\lambda_2)t}\neq 0$, для любого $t\in\mathbb{R}$, то $P_{1,m-1}(t)\equiv 0, t\in\mathbb{R}$. Многочлен $P_{1,m-1}(t)$ (степени 1) может равняться тождественно нулю тогда и только тогда, когда все его коэффициенты равны нулю. Мы пришли к противоречию, что доказывает линейную независимость решений (4.6).

Замечание 4.1.1. Решения (4.6) образуют фундаментальную систему решений над полем комплексных чисел. Если среди корней характеристического уравнения имеются кратные, то общее решение можно записать в виде

$$x(t)=\sum_{i=1}^{n}C_i\varphi_i(t)=e^{\lambda_1 t}P_1(t)+\cdots+e^{\lambda_m t}P_m(t), t\in\mathbb{R} \tag{4.8}$$

где $P_i(t), i=\overline{1,m}$ - многочлены степени не превышающей k_i-1 (k_i- кратность корня λ_i). Согласно лемме 4.2 при вещественных начальных данных решение задачи Коши в конечном итоге будет вещественным.

Если $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ - вещественные, то согласно теореме 3.4 общее решение линейного однородного уравнения имеет вид (4.8).

Построим теперь вещественную фундаментальную систему решений при наличии комплексных корней. Ниже она будет получена прямым способом на основе решений (4.6).

Каждому вещественному корню λ кратности k характеристического уравнения соответствуют решения

$$e^{\lambda t}, te^{\lambda t},\cdots,t^{k-1}e^{\lambda t} \tag{4.9}$$

а комплексно - сопряженным корням $\lambda=a+ib, \bar{\lambda}=a-ib$ кратности k соответствуют $2k$ вещественных решения

$$\begin{aligned} &e^{at}\sin bt, te^{at}\sin bt,\cdots,t^{k-1}e^{at}\sin bt,\\ &e^{at}\cos bt, te^{at}\cos bt,\cdots,t^{k-1}e^{at}\cos bt \end{aligned} \tag{4.10}$$

Theorem

4.1. Если вещественным корням характеристического уравнения $Q(\lambda)$ соответствуют p решений вида (4.9), а комплексно - сопряженным корням $2q$ решений вида (4.10) $up+2q=n$, то эти решения образуют вещественную фундаментальную систему решений линейного однородного уравнения.

Доказательство. - Мы должны показать, что из линейной независимости комплексных решений следует линейная независимость соответствующих им

вещественных решений вида (4.10). Так как коэффициенты характеристического многочлена $Q(\lambda)$ вещественны, то комплексные решения являются комплексно - сопряжёнными $\bar{\varphi}_i, \varphi_i$. По условию теоремы мы имеем $2q$ комплексно - сопряженных решений, а именно: $\varphi_i, \bar{\varphi}_i i \in \{1, \cdots, q\}$. Обозначим их следующим образом:

$$\varphi_1 = u_1(t) + iv_1(t), \cdots, \varphi_q = u_q(t) + iv_q(t)$$
$$\varphi_{q+1} = \bar{\varphi}_1 = u_1(t) - iv_1(t), \cdots, \varphi_{2q} = \bar{\varphi}_q = u_q(t) - iv_q(t)$$

Нам надо доказать, что $u_k(t), v_k(t), k = \overline{1,q}$, - линейно независимые вещественные решения. Предположим противное, а именно: существуют постоянные $\alpha_k, \beta_k, k = \overline{1,q}$ такие, что

$$\sum_{k=1}^{q} (\alpha_k u_k(t) + \beta_k v_k(t)) = 0, \quad \sum_{k=1}^{q} \left(\alpha_k^2 + \beta_k^2\right) \neq 0.$$

Вспоминая, что $u_k(t) = \frac{\varphi_k(t)+\bar{\varphi}_k(t)}{2}, \quad v_k(t) = \frac{\varphi_k(t)-\bar{\varphi}_k(t)}{2i}$, получим

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{\alpha_k - i\beta_k}{2} \varphi_k(t) + \frac{\alpha_k + i\beta_k}{2} \bar{\varphi}_k(t) = 0.$$

Так как функции $\varphi_k(t), \bar{\varphi}_k(t)$ линейно независимые, то $\alpha_k = \beta_k = 0$, $k = \overline{1,q}$. Мы пришли к противоречию.

5.1.2 4.1.2. Linear inhomogeneous equations (LHE) with a quasi-multimember on the right side

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение с постоянными вещественными коэффициентами:

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_n x(t) = e^{\mu_1 t} P_1(t) + \cdots + e^{\mu_m t} P_m(t), t \in \mathbb{R} \tag{4.11}$$

Правая часть уравнения (4.11) является квазимногочленом, в котором числа $\mu_i, i = \overline{1,m}$ и коэффициенты $P_i(t), i = \overline{1,m}$ могут быть комплексными. Согласно теореме 4.1 фундаментальная система решений линейного однородного уравнения известна, и, следовательно, чтобы определить общее решение уравнения (4.11), необходимо найти какоелибо частное решение.

Принцип суперпозиции. Пусть нам известны частные решения $X_k\left(t\right)$ каждого из неоднородных уравнений $L[x(t)] = f_k(t), k = \overline{1,l}$. Тогда функция

$$X(t) = X_1(t) + \cdots + X_l(t)$$

будет частным решением уравнения $L[x(t)] = f_1(t) + \cdots + f_k(t)$. Отсюда следует, что задача интегрирования линейного неоднородного уравнения (4.11) сводится к задаче интегрирования уравнения

$$L[x(t)] = e^{\mu t} P(t). \tag{4.12}$$

Будем считать, что $P(t)$ - многочлен степени r. Уравнение (4.12) эквивалентно системе двух уравнений $L[u(t)] = \mathrm{Re}\left[e^{\mu t} P(t)\right], L[v(t)] = \mathrm{Im}\left[e^{\mu t} P(t)\right]$.

Theorem

4.2. Пусть число μ в правой части уравнения (4.12) не является корнем характеристического многочлена. Тогда уравнение имеет частное решение вида

$$X(t) = e^{\mu t} G(t), \tag{4.13}$$

где $G(t)$ - многочлен той же степени r, что и многочлен $P(t)$. Если же число μ является корнем характеристического многочлена кратности s, то уравнение имеет частное решение вида

$$X(t) = t^s e^{\mu t} G(t), \tag{4.14}$$

где $G(t)$ - многочлен степени r (этот случай называется резонансным).

Доказательство. $\rightarrow$ Наша задача: найти неизвестные коэффициенты многочлена $G(t)$. Для этого подставим в уравнение (4.12) функцию (4.14). Тогда для определения неизвестных коэффициентов многочлена $G(t)$ будем иметь уравнение

$$L\left[t^s e^{\mu t} G(t)\right] = e^{\mu t} P(t) \tag{4.15}$$

Если в уравнение (4.12) подставляется функция (4.13), то мы считаем $s = 0$. Запишем многочлены $G(t), P(t)$ в следующем виде: $G(t) = b_0 t^r + +G_1(t), b_0 \neq 0, P(t) = a_0 t^r + P_1(t), a_0 \neq 0$, где $\deg G_1(t), \deg P_1(t) \leq r - 1$. В результате, используя эти представления многочленов $G(t), P(t)$, из уравнения (4.12) будем иметь

$$L\left[b_0 t^{r+s} e^{\mu t}\right] + L\left[t^s e^{\mu t} G_1(t)\right] = \left(a_0 t^r + P_1(t)\right) e^{\mu t}$$

Согласно условию теоремы

$$Q(\mu) = Q'(\mu) = \cdots = Q^{(s-1)}(\mu) = 0, Q^{(s)}(\mu) \neq 0.$$

Из доказательства леммы 4.3 следует

$$L\left[t^{r+s} e^{\mu t}\right] = \sum_{i=0}^{r+s} C_{r+s}^i Q^{(i)}(\mu) t^{r+s-i} e^{\mu t} = C_{r+s}^s Q^{(s)}(\mu) t^r e^{\mu t} + \\ + \sum_{i=s+1}^{r+s} C_{r+s}^i Q^{(i)}(\mu) t^{r+s-i} e^{\mu t}$$

Отсюда находим

$$b_0 \left(C_{r+s}^s Q^{(s)}(\mu) t^r e^{\mu t} + \sum_{i=s+1}^{r+s} C_{r+s}^i Q^{(i)}(\mu) t^{r+s-i} e^{\mu t} \right) \Bigg) + L\left[t^s e^{\mu t} G_1(t)\right] = \\ = a_0 t^r e^{\mu t} + e^{\mu t} P_1(t) \Rightarrow b_0 = \frac{a_0}{C_{s+r}^s Q^{(s)}(\mu)}$$

Для определения следующих коэффициентов многочлена $G(t)$ имеем уравнение

$$L\left[t^s e^{\mu t} G_1(t)\right] = e^{\mu t} P_1(t) - b_0 \sum_{i=s+1}^{r+s} C_{r+s}^i Q^{(i)}(\mu) t^{r+s-i} e^{\mu t}$$

Продолжая эту процедуру, мы найдём все коэффициенты многочлена $G(t)$ и получим требуемое утверждение.

5.2 4.2. Linear systems of differential equations

5.2.1 4.2.1. Systems of linear homogeneous equations with constant real coefficients

Ниже изучаются решения однородной линейной системы дифференциальных уравнений (ОЛСУ)

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}. \tag{4.16}$$

Здесь A - матрица с постоянными действительными элементами:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Каждой квадратной матрице порядка n в линейном векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ соответствует линейное преобразование $\mathcal{A}$. В этом пространстве будет построена ФСР однородной линейной системы уравнений (4.16), выраженная в элементарных функциях.

Будем искать нетривиальные решения системы (4.16) в виде

$$\vec{x} = \vec{h}e^{\lambda t}, \vec{h} \neq \overrightarrow{0}, \lambda \in \mathbb{C}, \tag{4.17}$$

где $\vec{h}$ - постоянный вектор.
Подставляя функцию (4.17) в систему (4.16), находим: $e^{\lambda t}(A - -\lambda E)\vec{h} = \overrightarrow{0}$. Так как для любого $t \in \mathbb{R}$ показательная функция $e^{\lambda t} \neq 0$, то для определения вектора $\vec{h}$ мы получаем линейную систему алгебраических уравнений: $(A - \lambda E)\vec{h} = \overrightarrow{0}$. Следовательно, вектор-функция (4.17) будет нетривиальным решением системы (4.16), если только $\vec{h}$ - собственный вектор, а λ - собственное значение матрицы A. Для этого необходимо, чтобы определитель системы был равен нулю:

$$\det(A - \lambda E) = 0. \tag{4.18}$$

Уравнение (4.18) называется характеристическим и служит для определения собственных значений. Его левая часть представляет собой многочлен n-й степени. Согласно теореме Гаусса уравнение (4.18) имеет n корней над полем комплексных чисел с учётом их кратностей. Пусть $\lambda_1, ..., \lambda_n$ - корни характеристического уравнения (4.18). Рассмотрим наиболее общий случай, когда среди корней $\lambda_1, ..., \lambda_n$ имеются кратные.

Определение 4.2.1. Набор векторов

$$\vec{e}_1, ..., \vec{e}_k \tag{4.19}$$

называется жордановой цепочкой относительно матрицы A с собственным значением λ, если

$$A\vec{e}_1 = \lambda\vec{e}_1, \quad \vec{e}_1 \neq \overrightarrow{0}, \quad A\vec{e}_2 = \lambda\vec{e}_2 + \vec{e}_1, \quad ..., \quad A\vec{e}_k = \lambda\vec{e}_k + \vec{e}_{k-1} \tag{4.20}$$

Здесь $\vec{e}_1$ - собственный вектор, с которого начинается цепочка (4.19), а $\vec{e}_2, ..., \vec{e}_k$ - присоединенные векторы.

Если λ действительное, то цепочка (4.19) называется действительной. Если же λ и $\bar{\lambda}$ комплексно-сопряжённые собственные значения, то цепочки $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_k$ и $\bar{\vec{e}}_1, \cdots, \bar{\vec{e}}_k$ называются комплексно-сопряженными.

Theorem

4.3. (Жордана.) Для любой квадратной матрицы A в линейном векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ существует базис, состоящий из жордановых цепочек, которые отвечают всем собственным значениям матрицы A.

Теорема дается без доказательства, с которым можно ознакомиться в [7].

Все пространство $\mathbb{R}^n$ разбивается на прямую сумму инвариантных подпространств $R_1, ..., R_k$. Их количество равно числу различных собственных значений $\widetilde{\lambda}_1, ..., \widetilde{\lambda}_k$ кратности $r_1, ..., r_k$. Имеем $r_1 + + ... + r_k = n$. Подпространства $R_i, i = \overline{1,k}$ - называются корневыми. Они состоят из таких $\vec{x}$, что $\left(A - \widetilde{\lambda}_i E\right)^{r_i} \vec{x} = \overrightarrow{0}$. Таким образом,

$$\begin{array}{ccccccccccc} R_1 & \oplus & R_2 & \oplus & R_3 & \oplus & \cdots & \oplus & R_k & = & \mathbb{R}^n \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & & & \updownarrow & & \\ \widetilde{\lambda}_1 & & \widetilde{\lambda}_2 & & \widetilde{\lambda}_3 & & & & \widetilde{\lambda}_k & & \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & & & \updownarrow & & \\ r_1 & + & r_2 & + & r_3 & + & \dots & + & r_k & = & n \end{array}$$

$\widetilde{\lambda}_i \neq \widetilde{\lambda}_j, k \leq n.$

Базисы в $R_i, i = \overline{1,k}$ образуют жордановы цепочки. Эти цепочки и собственные значения, отвечающие им, обозначим следующим обра30М:

$$\begin{array}{ccccc} \vec{h}_1, ..., \vec{h}_{k_1}; & \vec{e}_1, ..., \vec{e}_{k_2}; & & \vec{f}_1, ..., \vec{f}_{k_l}. \\ \downarrow & \downarrow & ... & \downarrow \\ \lambda_1 & \lambda_2 & & \lambda_l \end{array} \tag{4.22}$$

$$k_1 + ... + k_l = n, \quad k \leq l \leq n.$$

Собственному значению $\widetilde{\lambda}_i$ кратности $r_i > 1$ может соответствовать как одна, так и несколько жордановых цепочек. Пусть мы имеем собственное значение λ и цепочку (4.19), соответствующую λ, векторы которой удовлетворяют (4.20).

Введём вектор-функции:

$$\vec{\omega}_m(t) = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\vec{e}_1 + \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}\vec{e}_2 + ... + \vec{e}_m, \quad m = \overline{1,k} \tag{4.23}$$

Лемма 4.6. Вектор-функции

$$\vec{x}_m(t) = \vec{\omega}_m(t)e^{\lambda t}, m = \overline{1,k}$$

являются решениями однородной системы (4.16). При этом $\vec{x}_m(0) = \vec{e}_m, m = \overline{1,k}$.

Доказательство. $\rightarrow$ Доказательство зиждется на двух тождествах

$$\frac{d\vec{\omega}_k}{dt} = \vec{\omega}_{k-1}$$
$$A\vec{\omega}_k = \lambda\vec{\omega}_k + \vec{\omega}_{k-1}$$

Первое тождество очевидное. Используя его, докажем второе. Имеем

$$A\vec{\omega}_m = \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}A\vec{e}_1 + \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}A\vec{e}_2 + ... + A\vec{e}_m =$$
$$= \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\lambda\vec{e}_1 + \frac{t^{m-2}}{(m-2)!}\left(\lambda\vec{e}_2 + \vec{e}_1\right) + ... + \left(\lambda\vec{e}_m + \vec{e}_{m-1}\right) = \lambda\vec{\omega}_m + \vec{\omega}_{m-1}$$

Подставляя теперь функции $\vec{x}_m(t), m = \overline{1,k}$, в систему (4.16), будем иметь

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}_m e^{\lambda t}\right) = \lambda e^{\lambda t}\vec{\omega}_m + e^{\lambda t}\frac{d\vec{\omega}_m}{dt} = e^{\lambda t}\left(\lambda\vec{\omega}_m + \vec{\omega}_{m-1}\right) = A\left(\vec{\omega}_m e^{\lambda t}\right)$$

Положим $t = 0$. Так как

$$\vec{x}_m(0) = e^{\lambda 0}\vec{e}_m = \vec{e}_m$$

то последнее утверждение завершает доказательство леммы.

Из леммы 4.6 следует, что цепочкам (4.22) и собственным значениям, им отвечающим, соответствуют n решений однородной линейной системы уравнений, а именно:

$$\begin{aligned} k_1 : \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t}, ..., \left[\frac{t^{k_1-1}}{(k_1-1)!}\vec{h}_1 + ... + \vec{h}_{k_1}\right] e^{\lambda_1 t}; \\ \vdots \\ k_l : \quad \vec{f}_1 e^{\lambda_l t}, ..., \left[\frac{t^{k_l-1}}{(k_l-1)!}\vec{f}_1 + ... + \vec{f}_{k_l}\right] e^{\lambda_l t}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Множество базисных векторов (4.22) запишем в виде

$$\vec{h}_1, ..., \vec{h}_n, \tag{4.25}$$

а соответствующие им решения (4.24) обозначим следующим образом:

$$\vec{\varphi}_1(t), ..., \vec{\varphi}_n(t). \tag{4.26}$$

Докажем, что решения $\vec{\varphi}_1, \cdots, \vec{\varphi}_n$ линейно независимые. Рассмотрим определитель Вронского: $W(t) = W[\vec{\varphi}_1, \cdots, \vec{\varphi}_n]$. При $t = 0$ получаем $W(0) = W\left[\vec{h}_1, \cdots, \vec{h}_n\right] \neq 0$. Это означает, что решения линейно независимые. Отсюда вытекает

Theorem

4.4. Пусть векторы (4.25) образуют базис, состоящий из жордановых цепочек (4.22), а (4.26) - соответствующие им решения однородной линейной системы (4.16). Тогда для любого её решения $\vec{x}(t)$ существует набор постоянных $C_i, i = \overline{1, n}$, такой, что

$$\vec{x}(t) = C_1\vec{\varphi}_1(t) + ... + C_n\vec{\varphi}_n(t).$$

Построим ФСР, состоящую из вещественных решений. Пусть базис (4.25) состоит из $2q$ комплексно-сопряжённых решений и $n - 2q$ действительных решений: $\vec{h}_1, \overrightarrow{\bar{h}}_1, ..., \vec{h}_q, \overrightarrow{\bar{h}}_q, \vec{h}_{2q+1}, ..., \vec{h}_n$. Нетрудно доказать, как в теореме 4.1, что вещественные векторы $\operatorname{Re}\vec{h}_1, \operatorname{Im}\vec{h}_1, ...,\ \operatorname{Re}\vec{h}_q, \operatorname{Im}\vec{h}_q, \vec{h}_{2q+1}, ..., \vec{h}_n$, линейно независимые. Соответствующие им n решений

$$\begin{aligned} &\vec{u}_1(t) = \operatorname{Re}\vec{\varphi}_1(t), \vec{v}_1(t) = \operatorname{Im}\vec{\varphi}_1(t), \\ &... \\ &\vec{u}_q(t) = \operatorname{Re}\vec{\varphi}_q(t), \vec{v}_q(t) = \operatorname{Im}\vec{\varphi}_q(t), \\ &\vec{\varphi}_{2q+1}(t), ...\vec{\varphi}_n(t) \end{aligned} \tag{4.27}$$

образуют вещественную ФСР.

Theorem

4.5. Если среди решений (4.26) имеются $2q$ комплексносопряженных и p действительных решений $up + 2q = n$, то действительные решения (4.27) образуют ФСР системы уравнений (4.16).

Доказательство. - Доказательство следует из леммы 3.3, так как

$$\det\left(\operatorname{Re}\vec{\varphi}_1 \operatorname{Im}\vec{\varphi}_1 ... \operatorname{Re}\vec{\varphi}_q \operatorname{Im}\vec{\varphi}_q \vec{\varphi}_{2q+1} ... \vec{\varphi}_n\right)\Big|_{t=0} =$$
$$=| \operatorname{Re}\vec{\varphi}_1 \operatorname{Im}\vec{\varphi}_1 ... \operatorname{Re}\vec{h}_q \operatorname{Im}\vec{h}_q \vec{h}_{2q+1} ...$$
$$\vec{h}_n |\neq 0,$$

т.к. векторы $\operatorname{Re}\vec{h}_1, \operatorname{Im}\vec{h}_1, ..., \operatorname{Re}\vec{h}_q, \operatorname{Im}\vec{h}_q, \vec{h}_{2q+1}, ..., \vec{h}_n$, линейно независимы. Здесь столбцами в матрице и определителе являются координаты соответствующих векторов.

Пример 4.2.1. ([14], 812.)
Найти решение системы

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$$

Решение. Характеристический многочлен и собственные значения матрицы системы имеют вид

$$Q(\lambda) = (2-\lambda)^3 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2.$$

Найдём собственные и присоединённые векторы, соответствующие найденным выше собственным значениям:

$$A\vec{h}_1 = 2\vec{h}_1 \Rightarrow \vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; A\vec{h}_2 = 2\vec{h}_2 + \vec{h}_1 \Rightarrow \vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$
$$A\vec{h}_3 = 2\vec{h}_3 + \vec{h}_2 \Rightarrow \vec{h}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

Составляем функции
$\vec{\omega}_1 = \vec{h}_1; \vec{\omega}_2 = \frac{t}{1!}\vec{h}_1 + \vec{h}_2; \vec{\omega}_3 = \frac{t^2}{2!}\vec{h}_1 + \frac{t}{1!}\vec{h}_2 + \vec{h}_3$ и выписываем общее решение:

$$\vec{x}(t) = C_1\vec{\omega}_1 e^{2t} + C_2\vec{\omega}_2 e^{2t} + C_3\vec{\omega}_3 e^{2t}$$

Пример 4.2.2. ([14], 811.)
Найти решение системы

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}.$$

Решение. Характеристический многочлен и собственные значения матрицы системы имеют вид
$Q(\lambda) = -(1-\lambda)^3 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$
Найденным собственным значениям соответствуют два собственных вектора, координаты которых находятся из уравнения $\alpha - \beta - \gamma = 0$:

$$A\vec{h}_1 = \vec{h}_1 \Rightarrow \vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; A\vec{h}_2 = \vec{h}_2 \Rightarrow \vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Уравнения для определения присоединённых векторов к собственным векторам $\overrightarrow{h_1}, \overrightarrow{h_2}$ оказываются несовместными. Однако согласно теореме Жордана собственный вектор, с которого начинается жорданова цепочка, должен существовать. Для его определения воспользуемся тем, что вектор $\overrightarrow{e_2} = a\overrightarrow{h_1} + b\overrightarrow{h_2}$, как линейная комбинация собственных векторов, отвечающих одному и тому же собственному значению, также является собственным вектором. Необходимо найти такие значения a, b, чтобы система уравнений для определения присоединённого к собственному вектору $\overrightarrow{e_2}$, была совместной. Согласно определению $A\vec{e}_3 = \vec{e}_3 + \vec{e}_2$.

Отсюда для определения координат присоединённого вектора $\overrightarrow{e_3} = (\alpha, \beta, \gamma)^T$ получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha - \beta - \lambda &= a + b, \\ \alpha - \beta - \lambda &= \frac{b}{2}, \\ \alpha - \beta - \lambda &= -a. \end{cases}$$

Она будет совместной, если $b = -2a$. Положив $a = 1, b = -2$, в результате получим

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение примет вид

$$\vec{x} = C_1 e^t \overrightarrow{h_1} + C_2 e^t \overrightarrow{e_2} + C_3 e^t \left(\overrightarrow{e_3} + t\overrightarrow{e_2}\right).$$

В построенном базисе (4.25), состоящем из жордановых цепочек, линейному преобразованию соответствует уже не матрица A, а матрица $\mathcal{J}$. Она называется жордановой.

Определение 4.2.2. Жордановой клеткой порядка m с собственным значением λ называется матрица вида:

$$\mathcal{J}_m = \begin{pmatrix} \overbrace{\lambda} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda & 1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Матрица J_m соответствует жордановой цепочке $A\vec{h}_1 = \lambda\vec{h}_1; A\vec{h}_2 = \lambda\vec{h}_2 + \vec{h}_1; A\vec{h}_3 = \lambda\vec{h}_3 + \vec{h}_2; ...; A\vec{h}_m = \lambda\vec{h}_m + \vec{h}_{m-1}$. В жордановом базисе $\vec{h}_1, ..., \vec{h}_n$, (4.25) матрица линейного преобразования имеет вид

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_{k_1} & & & 0 \\ & \mathcal{J}_{k_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathcal{J}_{k_l} \end{pmatrix} = \left[\mathcal{J}_{k_1}, \mathcal{J}_{k_2}, ..., \mathcal{J}_{k_l}\right],$$

Вдоль главной диагонали расположены жордановы клетки порядка $k_i, i = \overline{1,l}$. Их порядок равен длинам жордановых цепочек, из которых состоит базис (4.25) или (4.22). При этом $k_1 + k_2 + ... + k_l = n$. Таким образом, теорема 4.3 фактически является теоремой о приведении матрицы A к жордановой форме. Она утверждает, что существует

такая невырожденая матрица T, что $\mathcal{J} = T^{-1}AT$:

$$\mathcal{J} = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_{k_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathcal{J}_{k_l} \end{pmatrix}$$

Здесь T - матрица перехода к жордановому базису (4.25) от первоначального.

Теорема Жордана позволила эффективно интегрировать системы линейных уравнений. Если произвести замену $\vec{x} = T\vec{y}$ в системе (4.16), то мы получим новую систему, удобную для интегрирования:

$$T\frac{d\vec{y}}{dt} = AT\vec{y} \Rightarrow \frac{d\vec{y}}{dt} = T^{-1}AT\vec{y} = \mathcal{J}\vec{y}.$$

Действительно, рассмотрим систему уравнений, соответствующую какой-либо клетке жордановой матрицы $\mathcal{J}$. В жордановом базисе последнее уравнение в этой системе отщепляется от остальных. Проинтегрировав его, затем можно последовательно решить оставшиеся. Аналогично интегрируются системы, связанные с другими клетками. Покажем это на примере системы уравнений ([14], 812), рассмотренной выше. Из примера 4.2.1 имеем

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2;$$

$$A\overrightarrow{h_1} = 2\overrightarrow{h_1} \Rightarrow \overrightarrow{h_1} = (1,2,1)^T, A\overrightarrow{h_2} = 2\overrightarrow{h_2} + \overrightarrow{h_1} \Rightarrow \overrightarrow{h_2} = (1,1,0)^T,$$

$$A\overrightarrow{h_3} = 2\overrightarrow{h_3} + \overrightarrow{h_2} \Rightarrow \overrightarrow{h_3} = (1,1,1)^T.$$

Произведем замену переменных $\vec{x} = T\vec{y}$, тогда $T\frac{d\vec{y}}{dt} = AT\vec{y} \Rightarrow \frac{d\vec{y}}{dt} = T^{-1}AT\vec{y}, T = \left(\overrightarrow{h_1}\overrightarrow{h_2}\overrightarrow{h_3}\right)$ (элементами матрицы T являются координаты векторов $\overrightarrow{h_1}, \overrightarrow{h_2}, \overrightarrow{h_3}$). В жордановом базисе система будет иметь вид

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{y} \Rightarrow y_3 = C_3e^{2t}, y_2 = C_2e^{2t} + C_3te^{2t},$$

$$y_1 = C_1e^{2t} + C_2te^{2t} + C_3\frac{t^2}{2}e^{2t},$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} C_1 + C_2t + C_3\frac{t^2}{2} \\ C_2 + C_3t \\ C_3 \end{pmatrix} = e^{2t}C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]e^{2t} +$$

$$+C_3\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]e^{2t},$$

$$\vec{x} = T\vec{y} = C_1e^{2t}\overrightarrow{h_1} + C_2e^{2t}\left[\overrightarrow{h_2} + t\overrightarrow{h_1}\right] + C_3e^{2t}\left[\overrightarrow{h_3} + t\overrightarrow{h_2} + \frac{t^2}{2}\overrightarrow{h_1}\right].$$

5.2.2 4.2.2. Linear inhomogeneous systems with a quasi-multimember on the right side

Рассмотрим линейную неоднородную систему

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + e^{\mu t}\vec{P}_m(t) \tag{4.28}$$

где $\vec{P}_m(t)$ - вектор-многочлен степени m, коэффициентами которого являются фиксированные вещественные или комплексные векторы $\overrightarrow{p_i}, i = \overline{0, m}$:

$$\vec{P}_m(t) = \vec{p}_0 + \vec{p}_1 t + \cdots + \vec{p}_m t^m$$

Пусть r - максимальный размер жордановой цепочки матрицы A, соответствующей собственному значению λ.

Theorem

4.6. Система (4.28) имеет частное решение вида

$$\vec{X}(t) = \vec{G}_{m+s}(t)e^{\mu t},$$

где $\vec{G}_{m+s}(t)$ - вектор-многочлен степени $m + s$, а

$$s = \begin{cases} 0, \text{ если } \mu \neq \lambda \\ r, \text{ если } \mu = \lambda \end{cases}$$

Доказательство. $\to$ 1) Предположим сначала, что

$$\vec{P}_m(t) = P_m^{\{1\}}(t)\vec{h}_1 + \cdots + P_m^{\{k\}}(t)\vec{h}_k,$$

где $\vec{h}_1, \cdots, \vec{h}_k$ - некоторая жорданова цепочка, отвечающая собственному значению λ, а $P_m^{\{i\}}(t), i = \overline{1, k}$, - многочлены степени не выше m.

Будем искать решение системы в виде

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{k} z_i(t)\vec{h}_i. \tag{4.29}$$

Подставим функцию (4.29) в систему (4.28):

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{dz_i(t)}{dt}\vec{h}_i = A\sum_{i=1}^{k} z_i(t)\vec{h}_i + e^{\mu t}\sum_{i=1}^{k} P_m^i(t)\vec{h}_i =$$

$$= \lambda z_1(t)\vec{h}_1 + \sum_{i=2}^{k} z_i(t)\left(\lambda\vec{h}_i + \vec{h}_{i-1}\right) + e^{\mu t}\left(P_m^{\{1\}}\vec{h}_1 + \cdots + P_m^{\{k\}}\vec{h}_k\right).$$

Так как векторы $\vec{h}_1, \cdots, \vec{h}_k$ - линейно независимые, то в последнем соотношении можно приравнять нулю коэффициенты при векторах $\vec{h}_i, 1 \leq i \leq k$.

В результате мы получим систему уравнений для определения функций $z_i(t), 1 \leq i \leq k$:

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = \lambda z_1 + z_2 + e^{\mu t}P_m^{\{1\}}(t), \\ \cdots \\ \frac{dz_{k-1}}{dt} = \lambda z_{k-1} + z_k + e^{\mu t}P_m^{\{k-1\}}(t), \\ \frac{dz_k}{dt} = \lambda z_k + e^{\mu t}P_m^{\{k\}}(t). \end{cases} \tag{4.30}$$

Таким образом, в жордановом базисе последнее уравнение в системе отщепляется от остальных и может быть проинтегрировано отдельно. Затем, используя найденное решение, находится решение всей системы. Здесь может представиться два случая.
a) Сначала рассмотрим случай, когда $\mu \neq \lambda$. Частные решения уравнений системы (4.30), согласно теореме 4.2, имеют вид

$$Z_k(t) = e^{\mu t} G_m^{\{k\}}(t), \cdots, Z_1(t) = e^{\mu t} G_m^{\{1\}}(t).$$

Подставляя найденые решения в формулу (4.29), получим

$$\vec{X}(t) = e^{\mu t} \sum_{i=1}^{k} G_m^{\{i\}}(t) \vec{h}_1 = e^{\mu t} \vec{G}_m(t)$$

b) Если $\mu = \lambda$, то из теоремы 4.2 следует, что частными решениями уравнений системы (4.30) будут следующие функции:

$$Z_k(t) = e^{\mu t} t G_m^{\{k\}}(t), \cdots, Z_1(t) = e^{\mu t} t G_{m+k-1}^{\{1\}}(t)$$

Обращаясь к формуле (4.29), находим

$$\vec{X}(t) = e^{\mu t} \sum_{i=1}^{k} t G_{m+k-i}^{\{i\}} \vec{h}_i = e^{\mu t} \vec{G}_{m+k}(t)$$

2. Рассмотрим теперь общий случай системы (4.28). Разложим векторы $\vec{p}_0, \cdots, \vec{p}_m$ по векторам базиса (4.22). Считая , что $\mu = \lambda = \lambda_1, k = k_1 = r$, представим правую часть системы уравнений (4.28) в виде

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + e^{\mu t} \left(P_{m,1}^{\{1\}} \vec{h}_1 + ... + P_{m,1}^{\{k_1\}} \vec{h}_{k_1} \right) + ... + e^{\mu t} \left(P_{m,l}^{\{1\}} \vec{f}_1 + ... + P_{m,l}^{\{k_l\}} \vec{f}_{k_l} \right).$$

Нетрудно видеть, что случай 2) сводится к случаю 1). В самом деле, если μ не является собственным значением, то $\vec{X}(t) = e^{\mu t} \vec{G}_m(t)$.
Если же, например, $\mu = \lambda_1$, то $\vec{X}(t) = e^{\mu t} \vec{G}_{m+r}(t)$. Действительно, согласно принципу суперпозиции $\vec{X}(t) = \sum_{i=1}^{l} \vec{X}_i(t)$. Так как $\mu = \lambda = \lambda_1$, то $\vec{X}_1(t) = e^{\lambda_1 t} \vec{G}_{m+r}^{\{1\}}(t)$, а $\vec{X}_i(t) = e^{\lambda_1 t} \sum_{i=2}^{l} \vec{G}_m^{\{i\}}(t), i = \overline{2, l}$. Многочлены $\vec{G}_m^{\{i\}}(t)$ имеют степень не выше m. В результате получаем

$$\vec{X}(t) = e^{\lambda_1 t} \vec{G}_{m+r}^{\{1\}}(t) + \sum_{i=2}^{l} e^{\lambda_1 t} \vec{G}_m^{\{i\}}(t)$$

Теорема доказана.
Если μ не является собственным значением, то на практике частное решение можно искать в виде

$$\vec{X}(t) = e^{\mu t} \vec{G}_m(t) = e^{\mu t} \left[\vec{g}_0 + t\vec{g}_1 + ... + t^m \vec{g}_m \right].$$

Подставляя его в (4.27), получим

$$(A - \mu E)\vec{G}_m = \frac{d\vec{G}_m}{dt} - \vec{P}_m(t)$$
$$\vec{g}_m = -(A - \mu E)^{-1} \vec{p}_m; \vec{g}_{m-1} = -(A - \mu E)^{-1} \left[\vec{p}_{m-1} - m\vec{g}_m \right]$$

и так далее.

5.2.3 4.2.3. Example of solving a linear inhomogeneous system

Решим линейную неоднородную систему, используя вышедоказанные теоремы:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \vec{x} + e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения матрицы системы, которая ниже обозначается A, равны $\lambda_1 = 2, \lambda = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Найдём соответствующие им собственные векторы $\vec{h}_1, \vec{e}_1$ и присоединённый вектор $\vec{e}_2$:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1 = 2 \Rightarrow \vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\lambda = 1 \Rightarrow \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\lambda = 1 \Rightarrow \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + e^t \left(\vec{h}_1 + \vec{e}_1 - \vec{e}_2\right). \tag{4.31}$$

Общее решение однородной системы (4.32) имеет вид

$$\vec{x}_{\text{одн}}(t) = C_1 e^{2t}\vec{h}_1 + C_2 e^t \vec{e}_1 + C_3 \left[\vec{e}_2 + t\vec{e}_1\right] e^t,$$

где C_1, C_2, C_3 - произвольные постоянные. Согласно теореме 4.6 частное решение неоднородной системы (4.32) будем искать в виде

$$\vec{X}(t) = a_1 \vec{h}_1 e^t + \left[\left(a_2 t + \frac{1}{2} a_3 t^2\right) \vec{e}_1 + a_3 t \vec{e}_2\right] e^t.$$

Подставим найденную функцию $\vec{X}(t)$ в систему. В результате получим уравнение, позволяющие определить постоянные $a_i, i = \overline{1,3}$:

$$a_1\vec{h}_1 + \left(a_2 t + \frac{1}{2} a_3 t^2\right) \vec{e}_1 + (a_2 + a_3 t)\, \vec{e}_1 + a_3 t \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_2 =$$

$$= 2a_1\vec{h}_1 + \left(a_2 t + \frac{1}{2} a_3 t^2\right) \vec{e}_1 + a_3 t \left(\vec{e}_1 + \vec{e}_2\right) + \vec{h}_1 + \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_1 = -1, \\ a_2 = +1, \\ a_3 = -1, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{X}(t) = \left\{ -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - t^2 \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\} e^t = \vec{G}_2(t) e^t.$$

Частное решение системы можно сразу искать в виде $\vec{X}(t) = \vec{G}_2(t)e^t$, где вектор-многочлен $\vec{G}_2(t)$ содержит девять неизвестных постоянных. Однако такой способ определения решения является технически более сложным, чем представленный выше.

5.3 4.3. Exhibitor matrix

Рассмотрим матрицу $P(t) = (p_{ij}(t)), i, j = \overline{1, n}$, в которой $p_{ij}(t)$ вещественные или комплексные функции от t. Если $p_{ij}(t)$ удовлетворяют соответствующим условиям, то по определению

$$|P| = (|p_{ij}(t)|), \frac{dP(t)}{dt} = \left(\frac{d}{dt}p_{ij}(t)\right), \int_{t_0}^{t} P \ \mathrm{d}t = \left(\int_{t_0}^{t} p_{ij}(t)\mathrm{d}t\right), i, j = \overline{1, n}.$$

Ниже квадратные матрицы размерности $n \times n$, элементами которых являются числа, обозначаются A, а матрицы, элементами которых являются функции, обозначаются $A(t), A_k(t)$.

Определение 4.3.1. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A_k(t)$, где $A_k(t) = \left(a_{i,j}^{(k)}(t)\right)$, называется сходящимся при фиксированном $t \in \mathbb{R}$ к матрице $A(t) = (a_{i,j})(t)$, если при этом t ряды $\sum_{k=0}^{\infty} a_{i,j}^{(k)}(t)$ сходятся к $a_{i,j}(t)$ при всех $i, j = \overline{1, n}$.
Если ряды $\sum_{k=0}^{\infty} a_{i,j}^{(k)}(t)$ сходятся абсолютно при всех $i, j = \overline{1, n}$ и $t \in \mathbb{R}$, то матричный ряд называется абсолютно сходящимся.

Определение 4.3.2. Мы говорим, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A_k(t)$, где $A_k(t) = \left(a_{i,j}^{(k)(t)}(t)\right)$, сходится равномерно к матрице $A(t) = (a_{i,j}(t))$ на конечном промежутке J, если на этом промежутке ряды $\sum_{k=0}^{\infty} a_{i,j}^{(k)}(t)$ сходятся равномерно к $a_{i,j}(t)$ при всех $i, j = \overline{1, n}$.

Для функциональных рядов матриц остаются справедливыми теоремы, сформулированные для рядов функций. Это следует из определений, приведенных выше, и тем, что ряды, составленные из ij-х элементов матриц, этим теоремам подчиняются.

Норма матрицы $A = (a_{i,j}), i, j = \overline{1, n}$ определяются следующим образом:

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$$

Из этого определения следует, что если $\|A\| = 0$, то $a_{ij} = 0 \Longleftrightarrow A = (0)_{n \times n}$.

Лемма 4.7. Если $\|A_k(t)\| \leq \alpha_k, k \in \{0\} \cup \mathbb{N}, t \in J$, и числовой ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ сходится, то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A_k(t)$ сходится, при этом абсолютно *и* равномерно на любом конечном промежутке J.

Доказательство. $\rightarrow$ Для элементов $a_{ij}^{(k)}(t)$ матрицы $A_k(t)$ при любых $i, j = \overline{1, n}$ справедливо неравенство

$$\left|a_{ij}^{(k)}(t)\right| \leq \|A_k(t)\| \leq \alpha_k.$$

Отсюда следует, что ряды, состоящие из i, j - элементов матриц $A_k(t)$ сходятся, и при этом абсолютно и равномерно на любом конечном промежутке J. Следовательно, ряд матриц сходится аналогичным образом.

Лемма 4.8. Для любой квадратной матрицы A и любого $t \in \mathbb{R}$ ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k(t) = E + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + ... + \frac{t^k}{k!}A^k + ... \tag{4.32}$$

сходится, при этом абсолютно и равномерно на любом конечном промежутке J. Здесь $A_0(t) = E$, $A_k(t) = \frac{t^k}{k!}A^k, k > 0$.

Доказательство. $\rightarrow$ Существует такое число b, что $|a_{ij}| \leq b$ для любых $i, j = \overline{1, n}$. Введём обозначения

$$A^2 = \left(a_{ij}^{(2)}\right), ..., A^k = \left(a_{ij}^{(k)}\right), k = 3, 4, ...$$

Тогда для элементов матрицы $A^2 = A \cdot A = \left(a_{ij}^{(2)}\right)$ будем иметь оценку

$$\left|a_{ij}^{(2)}\right| = \left|\sum_{s=1}^{n} a_{is}a_{sj}\right| \leq \sum_{s=1}^{n} |a_{is}a_{sj}| \leq nb^2, i, j = \overline{1, n}.$$

Нетрудно доказать методом математической индукции, что $\left|a_{ij}^{(k)}\right| \leq\leq n^{k-1}b^k, i, j = \overline{1, n}$.

Так как $a_{i,j}^{(k)}(t) = \frac{t^k}{k!}a_{i,j}^{(k)}, k > 0$, то $\|A_k(t)\| = n\left|\frac{t^k}{k!}a_{i,j}^{(k)}\right| \leq \frac{|t|^k n^k b^k}{k!}, k >> 0; \|A_0(t)\| = \sqrt{n}$, согласно найденным оценкам. Следовательно, для каждого $t \in \mathbb{R}$ можно взять $\alpha_k = \frac{|t|^k n^k b^k}{k!}, k > 0; \alpha_0 = \sqrt{n}$. Тогда ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ сходится по признаку Даламбера при любом выборе b и t. По лемме 4.7 ряд (4.32) сходится к некоторой матрице. Каждый элемент этой матрицы является сходящимся рядом при любом выборе b и t. Из доказательства леммы также следует, что ряд (4.32) сходится абсолютно. Если $t \in J$, то ряд (4.32) сходится на любом конечном промежутке $J =< c, d >$ равномерно. Действительно, предполагая, например, $c, d > 0$, числа α_k можно выбрать следующим образом: $\alpha_k = \frac{|d|^k n^k b^k}{k!}, k > 0$.

Определение 4.3.3. Ряд (4.32) называется экспоненциальной функцией от матрицы tA и обозначается e^{tA}.

Свойства:

1. Если матрицы A и B коммутируют, т.е. $[A, B] \equiv AB - BA = 0$, то

$$e^{tA}e^{tB} = e^{t(A+B)} \tag{4.33}$$

Если $[A, B] \neq 0$, то формула (4.32) может не выполняться. Проиллюстрируем это на примере

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad e^{tA}e^{tB} = \begin{pmatrix} e^t & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} e^t & e^t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e^{t(A+B)}.$$

2. Для $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, и $\forall A$ имеет место равенство: $e^{t_1 A}e^{t_2 A} = e^{(t_1+t_2)A}$;

3. Матрица e^{-tA} является обратной к матрице e^{tA} : $e^{-tA}e^{tA} = e^{(t-t)A} = e^{(0)_{n\times n}} = E$;

4. $\frac{de^{tA}}{dt} = Ae^{tA} = e^{tA}A$;

Действительно, из равномерной сходимости ряда (4.32) имеем

$$\frac{de^{t\ \mathrm{A}}}{dt} = A + \frac{t}{1!}A^2 + ... + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^k + ... \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow A\left(E + \frac{t}{1!}A + ...\right) = Ae^{tA} = \left(E + \frac{t}{1!}A + ...\right)A = e^{tA}A$$

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{f}(t); \quad \vec{f}(t) \in \mathbf{C}(J), \quad \vec{x}\,(t_0) = \vec{x}_0, \quad t_0 \in J \tag{4.34}$$

Theorem

4.7. Вектор-функиия

$$\vec{x}(t) = e^{(t-t_0)A}\vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A}\vec{f}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{4.35}$$

является единственным решением задачи Коши (4.34), определенным на всем промежутке J.

Доказательство. $\rightarrow$

Существование. Произведем в уравнении (4.34) подстановку $\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{u}(t)$. Тогда

$$\frac{d\left(e^{tA}\vec{u}\right)}{dt} = Ae^{tA}\vec{u}(t) + \vec{f}(t)$$

$$Ae^{tA}\vec{u}(t) + e^{tA}\frac{d\vec{u}(t)}{dt} = Ae^{tA}\vec{u}(t) + \vec{f}(t) \Rightarrow \frac{d\vec{u}(t)}{dt} = e^{-tA}\vec{f}(t)$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\vec{u}(t) = \vec{C} + \int_{t_0}^{t} e^{-\tau A}\vec{f}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Здесь $\vec{C}$ - произвольный n-мерный числовой вектор. В результате будем иметь

$$\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{C} + \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A}\vec{f}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{4.36}$$

При $t = t_0, \vec{x}_0 = e^{t_0 A}\vec{C} \Rightarrow \vec{C} = e^{-t_0 A}\vec{x}_0$. Подставив $\vec{C}$ в (4.36), получим формулу (4.35):

$$\vec{x}(t) = e^{(t-t_0)A}\vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A}\vec{f}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

Единственность. Пусть мы имеем два решения $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ задачи Коши (4.34). Обозначим $\vec{y} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$. Тогда для определения $\vec{y}$ получаем однородную задачу Коши

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y}, \quad \vec{y}\,(t_0) = \vec{y}_0 = \overrightarrow{0}$$

. Из неё сразу находим

$$\vec{y}(t) = e^{(t-t_0)A}\vec{y}_0 \equiv \overrightarrow{0}, \quad \forall t \in J$$

Действительно,

$$\vec{y}(t) = e^{tA}\vec{u}(t) \Rightarrow \frac{d\vec{u}(t)}{dt} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \vec{u}(t) = \vec{C} \Rightarrow \vec{C} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \vec{y}(t) \equiv \overrightarrow{0}, t \in J$$

Обратим внимание на то, что формула (4.35) получена методом вариации постоянных Лагранжа.

Рассмотрим ФСР $\vec{\varphi}_1(t), ..., \vec{\varphi}_n(t)$ однородной системы уравнений (4.16). Составим матрицу $\Phi = (\vec{\varphi}_1 ... \vec{\varphi}_n)$, которая называется фундаментальной. Её столбцами являются координаты векторов $\{\vec{\varphi}_i\}, i = \overline{1,n}$. Из неединственности выбора ФСР следует неединственность выбора фундаментальной матрицы. Так как $\frac{d\vec{\varphi}_i}{dt} = A\vec{\varphi}_i, \quad i = \overline{1,n}$, то фундаментальные матрицы Φ удовлетворяют матричному уравнению

$$\frac{d\Phi}{dt} = A\Phi. \tag{4.37}$$

Матрица e^{tA} удовлетворяет матричному уравнению (4.37). Её определитель $\det e^{tA} \neq 0$ для $\forall t \in \mathbb{R}$. Поэтому она также является фундаментальной и общее решение однородной системы уравнений (4.16) можно представить в виде: $\vec{x}(t) = \Phi\vec{C}$, где $\vec{C}$ - произвольный числовой вектор.

Однако встаёт вопрос: как вычислить матрицу e^{tA} ?

Лемма 4.9. Если $A = TBT^{-1}$, то $e^{tA} = Te^{tB}T^{-1}$.

Доказательство. - Имеем

$$\begin{aligned} e^{tA} &= E + \frac{t}{1!}TBT^{-1} + \frac{t^2}{2!}TBT^{-1}TBT^{-1} + ... = \\ &= TET^{-1} + \frac{t}{1!}TBT^{-1} + \frac{t^2}{2!}TB^2T^{-1} + ... = \\ &= T\left(E + \frac{t}{1!}B + \frac{t^2}{2!}B^2 + ...\right)T^{-1} = Te^{tB}T^{-1} \end{aligned}$$

В жордановом базисе матрица A принимает следующий вид: $\mathcal{J} = T^{-1}AT$. Матрица $\mathcal{J}$ называется жордановой. Значит, $A = T\mathcal{J}T^{-1}$ и из леммы 4.9 имеем: $e^{tA} = Te^{t\mathcal{J}}T^{-1}$. Из формулы (4.36) для однородной системы (4.16) ($f(t) \equiv 0, t \in J$) получаем, что её общее решение можно представить в виде

$$\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{C} = Te^{t\mathcal{J}}T^{-1}\vec{C} = Te^{t\mathcal{J}}\vec{C}^{\dagger},$$

где $\vec{C}^{\dagger} = T^{-1}\vec{C}$ - новый произвольный вектор. Следовательно, матрица $Te^{t\mathcal{J}}$ так же, как и e^{tA}, является фундаментальной.

Рассмотрим случай, когда

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \mathcal{J}^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^2 \end{pmatrix}, ...$$

$$\mathcal{J}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^n \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим

$$e^{t\mathcal{J}} = E + \frac{t}{1!}\mathcal{J} + \frac{t^2}{2!}\mathcal{J}^2 + ... =$$

$$= E + \frac{t}{1!}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} + \frac{t^2}{2!}\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^2 \end{pmatrix} + ... =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k\lambda_1^k}{k!} & & 0 \\ 0 & \ddots & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

Если использовать фундаментальную матрицу $Te^{t\mathcal{J}}$, то все решения однородной системы (4.16) в конечном итоге будут описываться традиционной формулой:

$$\vec{x}(t) = Te^{t\mathcal{J}}T^{-1}\vec{C} = \left(\vec{h}_1, ..., \vec{h}_n\right) \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^\dagger \\ \vdots \\ C_n^\dagger \end{pmatrix} =$$
$$= C_1^\dagger \vec{h}_1 e^{\lambda_1 t} + ... + C_n^\dagger \vec{h}_n e^{\lambda_n t} \tag{4.38}$$

Пусть теперь $\mathcal{J}$ имеет имеет вид: $\mathcal{J} = [\mathcal{J}_{k_1}, ..., \mathcal{J}_{k_l}]$. Нетрудно убедиться (доказать самим), что

$$\mathcal{J}^n = \left[\mathcal{J}_{k_1}^n, ..., \mathcal{J}_{k_l}^n\right] \text{ и } e^{t\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} e^{t\mathcal{J}_{k_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t\mathcal{J}_{k_l}} \end{pmatrix}. \tag{4.39}$$

Рассмотрим случай, когда $\mathcal{J} = \mathcal{J}_m$, где $\mathcal{J}_m$ - жорданова клетка (см. определение 4.7). Имеем

$$\mathcal{J}_m = \lambda E_m + N_m, \text{ где } N_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

Так как матрицы λE_m и N_m коммутируют, то

$$e^{t\mathcal{J}_m} = e^{t\lambda E_n} e^{tN_m} = e^{t\lambda} E_m e^{tN_m} = e^{\lambda t} e^{tN_m} =$$
$$e^{\lambda t}\left[E + \frac{t}{1!}N_m + \frac{t^2}{2!}N_m^2 ... + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}N_m^{m-1} + ...\right]$$

где

$$N_m^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}, ..., N_m^{m-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$N_m^{m+i} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} i \geqslant 0$$

Значит,

$$e^{t\mathcal{J}_m} = e^{\lambda t}\left[E + \frac{t}{1!}N_m + ... + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}N_m^{m-1}\right] =$$
$$= e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & & & \ddots & \frac{t}{1!} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Покажем, используя фундаментальную матрицу $Te^{t\mathcal{J}}$, что общее решение однородной системы уравнений (4.16) так же, как и выше, можно представить в традиционной форме:

$$\vec{x}(t) = Te^{t\mathcal{J}_m}\vec{C}^\dagger =$$

$$= \left(\vec{h}_1, \vec{h}_2, ..., \vec{h}_m\right) \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & & & \ddots & \frac{t}{1!} \\ 0 & ... & ... & 0 & 1 \end{pmatrix} e^{\lambda t}\vec{C}^\dagger =$$

$$= e^{\lambda t}\left(\vec{h}_1, ..., \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\vec{h}_1 + ... + \frac{t}{1!}\vec{h}_{m-1} + \vec{h}_m\right) \begin{pmatrix} C_1^\dagger \\ \vdots \\ C_m^\dagger \end{pmatrix} =$$

$$= C_1^\dagger \vec{h}_1 e^{\lambda t} + ... + C_m^\dagger \left(\vec{h}_m + \frac{t}{1!}\vec{h}_{m-1} + ... + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\vec{h}_1\right) e^{\lambda t}.$$

Для лучшего понимания полученных выше результатов найдём непосредственно матрицу $e^{t\mathcal{J}}$ для приведенной ниже системы.

Пример 4.3.1. $\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}.$

Собственные значения матрицы системы, которая ниже будет обозначаться A, имеют вид: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Определим собственные векторы матрицы A и жорданову матрицу $\mathcal{J}$:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad (A-E)\vec{h}_1 = \overrightarrow{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = -1 \quad \Longrightarrow \quad (A+E)\vec{h}_2 = \overrightarrow{0} \quad \Longrightarrow \quad \vec{h}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda_3 = -1 \quad \Longrightarrow \quad (A+E)\vec{h}_3 = \vec{h}_2 \quad \Longrightarrow \quad \vec{h}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Таким образом, жордановый базис состоит из двух жордановых цепочек. Матрицы $e^{t\mathcal{J}_1}$ и $e^{t\mathcal{J}_2}$ имеют вид

$$e^{t\mathcal{J}_1} = \left(e^t\right), \quad e^{t\mathcal{J}_2} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Если воспользоватся формулой (4.39), то можно сразу написать:

$$e^{t\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} e^{t\mathcal{J}_1} & 0 \\ 0 & e^{t\mathcal{J}_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Этот результат можно получить непосредственно, представив матрицу $\mathcal{J}$ в виде

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A + B.$$

Матрицы A, B коммутируют. Действительно

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $AB = BA$. Отсюда вытекает, что

$$e^{t\mathcal{J}} = e^{tA}e^{tB} = \exp\left[t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right] \cdot \exp\left[t\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] =$$
$$= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Определим общее решение системы, используя фундаментальную матрицу e^{tA} :

$$\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{C} = Te^{t\mathcal{J}}T^{-1}\vec{C} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} e^{-t} & te^{-t} & -2te^{-t} \\ 2\left(e^t - e^{-t}\right) & 2e^t - (1+2t)e^{-t} & -2e^t + 2(1+2t)e^{-t} \\ e^t - e^{-t} & e^t - (1+t)e^{-t} & -e^t + 2(1+t)e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \cdot \diamond$$

Пример нахождения матричной экспоненты.
Рассмотрим матрицу A :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = 3E + 4\sigma_2, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь σ_2 - матрица Паули. Вычислим матричную экспоненту. Имеем

$$e^{At} = e^{3Et}e^{4\sigma_2 t}; \sigma_2^2 = -E, \sigma_2^3 = -\sigma_2, \sigma_2^4 = E, ...,$$
$$\sigma_2^{2n-1} = (-1)^{n+1}\sigma_2, \sigma_2^{2n} = (-1)^n E$$

Отсюда находим

$$e^{4\sigma_2 t} = E + 4\sigma_2 t - E\frac{(4t)^2}{2!} - \sigma_2\frac{(4t)^3}{3!} + \cdots =$$
$$= E\left(1 - \frac{(4t)^2}{2!} + ...\right) + \sigma_2\left(4t - \frac{(4t)^3}{3!} + ...\right) = \begin{pmatrix} \cos 4t & -\sin 4t \\ \sin 4t & \cos 4t \end{pmatrix}.$$

В результате будем иметь

$$e^{At} = e^{3Et}e^{4\sigma_2 t} = e^{3t}\begin{pmatrix} \cos 4t & -\sin 4t \\ \sin 4t & \cos 4t \end{pmatrix} \cdot \langle$$

Матричный метод решения системы линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

1. Случай различных собственных значений.

Рассмотрим задачу Коши:

$$\frac{d\vec{z}}{dt} = A\vec{z}, \quad \vec{z}(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$$

Будем искать матрицу e^{tA} в виде

$$e^{tA} = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}, t \in \mathbb{R}$$

где A_1, A_2 - неизвестные числовые матрицы. Выбор формы, в которой ищется матрица e^{tA}, вытекает из формул

$$e^{tA} = Te^{t\mathcal{J}}T^{-1}, e^{t\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

Производная от матрицы e^{tA} равна

$$Ae^{tA} = \lambda_1 A_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 A_2 e^{\lambda_2 t}$$

Положив в уравнениях $t = 0$, для определения матриц A_1, A_2 получим систему:

$$\begin{cases} E = A_1 + A_2, \\ A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 \end{cases} \Rightarrow A_1 = \frac{\lambda_2 E - A}{\lambda_2 - \lambda_1}, A_2 = \frac{A - \lambda_1 \mathrm{E}}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Если собственные значения являются комплексно-сопряженными $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, то задача определения матричной экспоненты упрощается. Нетрудно показать, что её можно искать в виде

$$e^{tA} = e^{\alpha t}\left[A_1 \cos \beta t + A_2 \sin \beta t\right]$$

2. Случай отсутствия базиса из собственных векторов: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Так как

$$e^{t\mathcal{J}} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

то матрицу e^{tA} можно искать в виде

$$e^{tA} = A_1 e^{\lambda t} + A_2 t e^{\lambda t}$$

где A_1, A_2 - неизвестные числовые матрицы. Производная от неё имеет вид

$$Ae^{tA} = \lambda A_1 e^{\lambda t} + A_2 e^{\lambda t} + \lambda A_2 t e^{\lambda t}$$

Для определения матриц A_1, A_2 получим при $t = 0$ систему

$$\begin{cases} E = A_1 \\ A = \lambda A_1 + A_2 \end{cases}$$

Решая её, находим: $A_1 = E, A_2 = A - \lambda E$. В результате будем иметь

$$e^{tA} = Ee^{\lambda t} + (A - \lambda E)te^{\lambda t} = (E + t(A - \lambda E))e^{\lambda t} \cdot \diamond$$

6 5 Boundary value problems for second-order linear DE with constant real coefficients and a small parameter by Diesperov

6.0.1 5.1. Boundary value problems for a second-order linear differential equation with constant real coefficients

В этом параграфе будет рассматриваться дифференциальное уравнение 2 -го порядка с постоянными вещественными коэффициентами ε, a, b :

$$\varepsilon x'' + ax' + bx = f(t), t \in [\alpha, \beta]. \tag{5.1}$$

Предполагается, что $f(t) \in \mathbf{C}^1([\alpha, \beta]), \varepsilon \neq 0, a \neq 0$.
Решение уравнения (5.1) можно выделить не только с помощью начальных условий, но и с помощью краевых условий (КУ). КУ наиболее простого типа имеют вид

$$x(\alpha) = x_\alpha, \tag{5.2}$$
$$x(\beta) = x_\beta. \tag{5.3}$$

Здесь x_α и x_β - заданные числа. Однако для уравнения (5.1) часто ставятся КУ более общего вида:

$$h_1 x(\alpha) + h_2 x'(\alpha) = x_\alpha, k_1 x(\beta) + k_2 x'(\beta) = x_\beta \tag{5.4}$$

где h_1, h_2, k_1, k_2 - заданные числа, причём $h_1^2 + h_2^2 \neq 0$ и $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$. Формулы (5.2) и (5.3) являются частым случаем формулы (5.4). Они получаются из (5.4), если положить $h_2 = k_2 = 0$. Условия (5.2) и
(5.3) называются краевыми условиями первого рода. Если положить $h_1 = 0$ или $k_1 = 0$, то соответствующее краевое условие (5.4) называется краевым условием второго рода. Если одновременно $h_i \neq 0$ или $k_i \neq 0 (i = 1, 2)$ - условием третьего рода.

Краевые задачи (КЗ) для однородного уравнения с однородными граничными условиями будем называть однородными краевыми задачами. В противном случае - неоднородными. Все решения уравнения (5.1) описываются функцией

$$x(t) = C_1 \varphi_1(t) + C_2 \varphi_2(t) + X(t), t \in [\alpha, \beta].$$

Здесь $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ - ФСР однородного уравнения (5.1), а $X(t)$ - какоелибо частное решение ЛНУ (5.1). Отсюда видно, что задача отыскания решения КЗ (5.1), (5.4) сводится к отысканию постоянных C_1 и C_2 из системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\begin{cases} C_1 A_1(\alpha) + C_2 A_2(\alpha) = x_\alpha - [h_1 X(\alpha) + h_2 X'(\alpha)], \\ C_1 B_1(\beta) + C_2 B_2(\beta) = x_\beta - [k_1 X(\beta) + k_2 X'(\beta)]. \end{cases} \tag{5.5}$$

Здесь $A_i(\alpha) = h_1 \varphi_i(\alpha) + h_2 \varphi_i'(\alpha), B_i(\beta) = k_1 \varphi_i(\beta) + k_2 \varphi_i'(\beta), i = 1, 2$. Для существования единственного решения СЛАУ (5.5) необходимо и достаточно, чтобы определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1(\alpha) & A_2(\alpha) \\ B_1(\beta) & B_2(\beta) \end{vmatrix} \neq 0$$

С другой стороны, если $x_\alpha = x_\beta = 0$, т.е. краевые условия (5.2), (5.3) и (5.4) являются однородными, то обращение $\Delta = 0$ необходимо и достаточно, чтобы однородная краевая задача ($f \equiv 0$) имела нетривиальное решение.

Theorem

5.1. Для того чтобы КЗ (5.1), (5.4) имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая однородная КЗ (5.1), (5.4) ($x_\alpha = x_\beta = 0; f(t) \equiv 0 \Leftrightarrow X(t) \equiv 0$) обладала только тривиальным решением.

Доказательство. $\rightarrow$ В самом деле, если однородная КЗ задача (5.1), (5.4) допускает только решение $x(t) \equiv 0$, то $\Delta \neq 0$, и наоборот.

Замечание 5.1.1. Если неоднородная КЗ имеет два различных решения x_1 и x_2, то разность $x_1 - x_2 = x^*$ является нетривиальным решением соответствующей однородной задачи. Обратно, если однородная задача обладает нетривиальным решением, то неоднородная задача либо не имеет ни одного решения, либо же обладает бесконечным множеством решений. Причём все они получаются из одного добавлением любого решения однородной задачи.

6.0.2 5.2. Edge problem of the first kind in the presence of a small parameter before the higher derivative

Исследуем разрешимость КЗ (5.1), (5.2), (5.3) при фиксированных $\alpha, \beta, a, b, x_\alpha, x_\beta$ и заданной функции $f(t)$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$ и исследуем поведение решения при $\varepsilon \to 0$.

Уравнение

$$ax' + bx = f(t), \tag{5.6}$$

которое получается из (5.1) при $\varepsilon = 0$, называется предельным.

Theorem

5.2. Пусть $a > 0, \varepsilon > 0$. Тогда решение КЗ (5.1), (5.2), (5.3) для достаточно мальх ε существует и единственно. Это решение при $\varepsilon \to 0$ для всех $t \in [\alpha, \beta]$ представимо в виде

$$x(t;\varepsilon) = \omega(t) + [x_\alpha - \omega(\alpha)]\, e^{-\frac{a}{\varepsilon}(t-\alpha)} + g(t;\varepsilon) \tag{5.7}$$

где $\omega(t)$ - решение ЗК (5.6), (5.3), а $g(t;\varepsilon) = O(\varepsilon)$ для всех $t \in [\alpha, \beta]$.
Доказательство. $\rightarrow$ 3 К (5.6), (5.3) имеет единственное решение $x = \omega(t), t \in [\alpha, \beta]$ (см. основную теорему). В общем случае $\omega(\alpha) \neq x_\alpha$. Обозначим $u(t;\varepsilon) = x(t;\varepsilon) - \omega(t)$. Для $u(t;\varepsilon)$ мы получим уравнение

$$\varepsilon u'' + au' + bu = -\varepsilon\omega'' \tag{5.8}$$

и граничные условия

$$u(\alpha;\varepsilon) = x_\alpha - \omega(\alpha), u(\beta;\varepsilon) = 0. \tag{5.9}$$

Так как функции $f(t)$ и $\omega(t)$ непрерывно дифференцируемые, то вторая производная $\omega'' = (f' - b\omega')/a$ функции $\omega(t)$, полученная дифференцированием уравнения (5.6), будет непрерывной. Общее решение однородного уравнения (5.8) в случае $\lambda_1 \neq \lambda_2$ известно и имеет вид

$$u_{\text{од}} = C_1(\varepsilon)e^{\lambda_1 t} + C_2(\varepsilon)e^{\lambda_2 t}$$

Здесь λ_1 и λ_2 - корни характеристического уравнения. Они равны

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b\varepsilon}}{2\varepsilon}, \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b\varepsilon}}{2\varepsilon}$$

При $\varepsilon \to 0$ эти формулы дают

$$\lambda_1 = -\frac{b}{a} + O(\varepsilon), \lambda_2 = -\frac{a}{\varepsilon} + \frac{b}{a} + O(\varepsilon) \tag{5.10}$$
$$\lambda_2 - \lambda_1 = -\frac{a}{\varepsilon} + 2\frac{b}{a} + O(\varepsilon)$$

Решение неоднородного уравнения (5.8) найдём методом вариации постоянных Лагранжа. Будем искать общее решение уравнения (5.8) в виде

$$u(t;\varepsilon) = C_1(t;\varepsilon)e^{\lambda_1 t} + C_1(t;\varepsilon)e^{\lambda_2 t} \tag{5.11}$$

Здесь C_1 и C_2 - неизвестные непрерывно дифференцируемые по t функции. Имеем из (5.11)

$$\frac{du}{dt} = \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t} + \left[e^{\lambda_1 t}\frac{dC_1}{dt} + e^{\lambda_2 t}\frac{dC_2}{dt}\right]$$

Величину, стоящую в квадратных скобках, положим равной нулю. Дифференцируя далее функцию $u(t;\varepsilon)$ второй раз и подставляя её в уравнение (5.1), для определения $C_1(t;\varepsilon)$ и $C_2(t;\varepsilon)$ получим систему уравнений

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t}\dfrac{dC_1}{dt} + e^{\lambda_2 t}\dfrac{dC_2}{dt} = 0 \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t}\dfrac{dC_1}{dt} + \lambda_2 e^{\lambda_2 t}\dfrac{dC_2}{dt} = -\omega'' \end{cases}$$

Определитель этой системы - определитель Вронского фундаментальной системы решений $\varphi_1 = e^{\lambda_1 t}$ и $\varphi_2 = e^{\lambda_2 t}$ однородного уравнения (5.8):

$$W \stackrel{def}{=} \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)\, e^{(\lambda_2+\lambda_1)t} = (\lambda_2 - \lambda_1)\, e^{-\frac{a}{\varepsilon}t} \neq 0, \varepsilon \to 0$$

В результате решения системы находим

$$\frac{dC_1}{dt} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}e^{-\lambda_1 t}\omega'', \frac{dC_2}{dt} = -\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}e^{-\lambda_2 t}\omega''$$

Интегрирование этих уравнений дает

$$C_1 = e^{-\lambda_1\alpha}C_1^0 + \int_\alpha^t \frac{e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1}\omega'' dt; \quad C_2 = e^{-\lambda_2\alpha}C_2^0 - \int_\alpha^t \frac{e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1}\omega'' dt$$

Здесь C_1^0 и C_2^0 - произвольные постоянные.
Подставляя эти формулы в (5.11), получим общее решение неоднородного уравнения (5.8):

$$u = C_1^0 e^{\lambda_1(t-\alpha)} + C_2^0 e^{\lambda_2(t-\alpha)} + \underbrace{e^{\lambda_1 t}\int_\alpha^t \frac{e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1}\omega'' dt - e^{\lambda_2 t}\int_\alpha^t \frac{e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1}\omega'' dt}_{K(t;\xi)} \tag{5.12}$$

Обозначим два последних интегральных члена в (5.12) через $K(t;\varepsilon)$. Чтобы найти постоянные C_1^0 и C_2^0, воспользуемся краевыми условиями (5.9). Из (5.9) и (5.12) для их определения получим СЛАУ:

$$\begin{cases} C_1^0 + C_2^0 = u(\alpha;\varepsilon)\,(= x_\alpha - \omega(\alpha))\,, \\ \underbrace{e^{\lambda_1(\beta-\alpha)}}_{O(1)} C_1^0 + \underbrace{e^{\lambda_2(\beta-\alpha)}}_{O\left(e^{-\frac{a}{\varepsilon}}\right)} C_2^0 = \underbrace{K(\beta;\varepsilon)}_{O(\varepsilon)}. \end{cases} \tag{5.13}$$

Определитель системы (5.13) при малых ε отличен от нуля

$$\Delta = e^{\lambda_1(\beta-\alpha)}\left[1 - e^{(\lambda_2-\lambda_1)(\beta-\alpha)}\right] \neq 0, \varepsilon \to 0$$

Следовательно, система (5.13) имеет единственное решение, т.е. КЗ (5.1), (5.2) $\wedge$(5.3) разрешима при достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Оценим интегральные члены в (5.12) при $\varepsilon \to 0$. Имеем

$$|I_1| = \left| e^{\lambda_1 t} \int_\alpha^t \frac{e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \omega'' dt \right| \leq \frac{\max|\omega''|}{|\lambda_2 - \lambda_1|} e^{\lambda_1 t} \left| \left[\frac{1}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 t} \right]_\alpha^t \right|$$

Используя оценки (5.10), получаем при $\varepsilon \to 0$:

$$|I_1| \leq \frac{\max|\omega''|}{\left|-\frac{b}{a} + O(\varepsilon)\right| \left|-\frac{a}{\varepsilon} + 2\frac{b}{a} + O(\varepsilon)\right|} \max\left|1 - e^{\left(-\frac{b}{a} + O(\varepsilon)\right)(t-\alpha)}\right| = O(\varepsilon)$$

Далее,

$$|I_2| = \left| -e^{\lambda_2 t} \int_\alpha^t \frac{e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \omega'' dt \right| \leq \frac{\max|\omega''|}{|\lambda_2|\,|\lambda_2 - \lambda_1|} \max\left|1 - e^{\lambda_2(t-\alpha)}\right| = O\left(\varepsilon^2\right)$$

Значит,

$$|K(t;\varepsilon)| = |I_1 + I_2| \underset{\varepsilon\to 0}{=} O(\varepsilon) \text{ для всех } t \in [\alpha, \beta]. \tag{5.14}$$

Оценим теперь C_1^0 и C_2^0, используя систему (5.13) и оценку (5.14). В результате имеем

$$C_2^0 = u(\alpha;\varepsilon) + O(\varepsilon), C_1^0 = O(\varepsilon).$$

Подстановка полученных оценок в формулу (5.12) дает (5.7). При этом мы воспользовались соотношением

$$\left|e^{\lambda_2(t-\alpha)} - e^{-\frac{a}{\varepsilon}(t-\alpha)}\right| \underset{\varepsilon\to 0}{=} O(\varepsilon), t \in [\alpha;\beta].$$

6.0.3 5.3. Example of solving a boundary value problem of the first kind

Пример 5.3.1. Решим краевую задачу с помощью доказанной теоремы:

$$\varepsilon x'' + x' + x = 1, \quad x(0) = 0, x(1) = 1.$$

Решение. Так как $\varepsilon > 0, a > 0$, то согласно теореме для определения функции $\omega(t)$ служит задача Коши:

$$\omega' + \omega = 1, \omega(1) = 1 \longrightarrow \omega(t) = 1.$$

Значит,

$$x(t;\varepsilon) = 1 - e^{-t\varepsilon} + O(\varepsilon), t \in [0,1], \varepsilon \to 0$$

Отсюда получаем

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ t=0}} x(0;\varepsilon)=0,\ \lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ t>0}} x(t;\varepsilon)=1.$$

Поведение решения в пределе при $\varepsilon \to +0$ изображено ниже на рис. 5.1.
Резюме. Если ε положить равным нулю в уравнении (5.1), то оно становится уравнением первого порядка (5.6), решение которого не может одновременно удовлетворить двум краевым условиям (5.2) и (5.3). Какое из этих двух краевых условий должно быть опущено?

При $\varepsilon > 0, a > 0$ опускается краевое условие слева. В окрестности точки $t = \alpha$ решение $x(t;\varepsilon)$ при малых ε меняется очень быстро и выходит на заданное граничное значение (5.2). Такое поведение решения $x(t;\varepsilon)$ сильно отличается от поведения решения предельного уравнения $\omega(t)$. Это область, ширина которой $O(\varepsilon)$, называется пограничным

слоем. Поведение решения в ней называется поведением типа пограничного слоя.

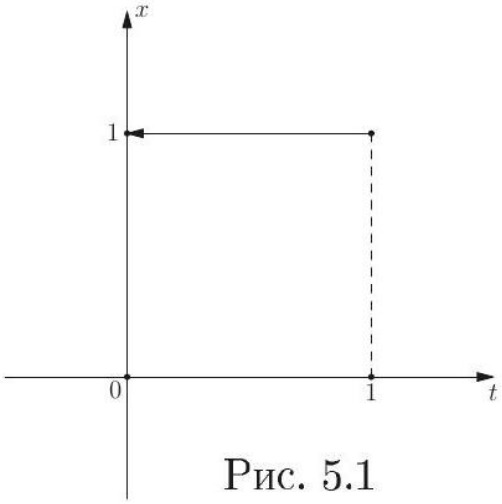


Рис. 5.1

Случай $\varepsilon > 0, a < 0$ сводится к рассмотренному заменой t на $-t$ в однородном уравнении (5.1). Поэтому область погранслоя будет находиться справа. Значит,

$\dfrac{\varepsilon}{a} > 0$ - пограничный слой находится в окрестности точки $t = \alpha$,
$\dfrac{\varepsilon}{a} < 0$ - пограничный слой находится в окрестности точки $t = \beta$.

Случай $a = 0$ не рассматривается.
Качественное поведение пограничного слоя в случае $\frac{\varepsilon}{a} > 0$ изображено на рис. 5.2.

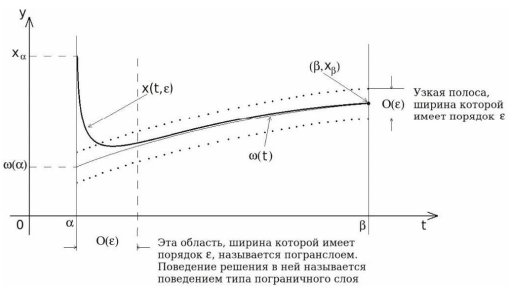


Рис. 5.2

7 6 Laplace transform by Diesperov

7.0.1 6.1. Basic definitions and theorems

В этой главе даются начальные сведения о преобразовании Лапласа. С его свойствами можно также ознакомиться в [8, 12].

Комплекснозначная функция $f(t)$ действительного переменного t называется оригиналом если:

1. $f(t)$ определена при $t \geqslant 0$,
2. $f(t)$ кусочно-непрерывная при $t \geqslant 0$,
3. $f(t)$ имеет конечный порядок роста, то есть существуют такие постоянные $M, \alpha \in R$, что при всех $t \geqslant 0$ имеет место неравенство

$$|f(t)| \leqslant Me^{\alpha t} \tag{6.1}$$

Число $\beta = \inf \alpha$ называется показателем роста.
Если возникает необходимость продолжить оригинал при $t < 0$, то его предполагают равным нулю $f(t) = 0$ для любого $t < 0$.

Theorem

6.1. Пусть $f(t)$ - оригинал и комплексные числа p удовлетворяют условиям $\operatorname{Re} p > \alpha$. Тогда интеграл $\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t$ определён в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$.

Доказательство. $\rightarrow$ Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\mathrm{d}t \tag{6.2}$$

Для подынтегральной функции справедлива оценка:

$$\left|f(t)e^{-pt}\right| \leq Me^{\alpha t}e^{-\operatorname{Re} pt} = Me^{(\alpha - \operatorname{Re} p)t}.$$

Отсюда имеем

$$\left|\int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^\infty Me^{-(\operatorname{Re} p-\alpha)t}\,\mathrm{d}t = \frac{M}{\operatorname{Re} p - \alpha} < \infty$$

Из сходимости мажорирующего интеграла следует сходимость интеграла $\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\mathrm{d}t$.

Пусть $f(t)$ оригинал.

Определение 6.1.1. Функция $F(p)$, определённая при $\operatorname{Re} p > \alpha$ формулой

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t \tag{6.3}$$

называется изображением по Лапласу оригинала $f(t)$. Здесь $F(p)$ функция комплексного переменного $p = \sigma + i\tau$.

Замечание 6.1.1. Мы определили функцию $F(p)$ формулой (6.3) только при $\operatorname{Re} p > \alpha$.

Определение 6.1.2. Оператор, который ставит функцию $f(t)$ в соответствие функции $F(p)$, называется преобразованием Лапласа и обозначается $f(t) \underset{\mathcal{L}}{\rightarrow} F(p)$.

Theorem

6.2. Пусть оригинал $f(t)$ является непрерывно дифференцируемой функцией $uf(t) \underset{\mathcal{L}}{\longrightarrow} F(p)$, $\operatorname{Re} p > \alpha$. Тогда для $\sigma > \alpha$ в любой точке $t > 0$ непрерывности $f(t)$ имеет место формула обращения:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} F(\sigma + i\tau) e^{-(\sigma+i\tau)t} \, \mathrm{d}\tau \tag{6.4}$$

При $t = 0$ правая часть формуль равна $\frac{1}{2}f(0)$. Интеграл (6.4) берётся вдоль любой прямой $\operatorname{Re} p = \sigma > \alpha$.

При применении преобразования Лапласа для решения дифференциальных уравнений редко приходится пользоваться непосредственно формулой обращения (6.4). Обычно используются таблицы оригиналов и изображений, в основе построения которых лежит теорема, сформулированная ниже.

Theorem

6.3. (Теорема единственности.) Пусть $f_1(t) u f_2(t)-$ оригиналь $uf_1(t) \underset{\mathcal{L}}{\to} F_1(p), \operatorname{Re} p > \alpha_1; f_2(t) \underset{\mathcal{L}}{\to} F_2(p), \operatorname{Re} p > \alpha_2$. Пусть также $F_1(p) = F_2(p)$ при $\operatorname{Re} > \alpha = \max(\alpha_1, \alpha_2)$. Тогда при $t > 0$ в точках непрерывности $f_1(t)$ и $f_2(t)$ имеет место равенство $f_1(t) = f_2(t)$.

Таким образом, оригиналы определяются единственным образом своими изображениями с точностью до значений в точках разрыва. Теоремы 6.2 и 6.3 даются без доказательства.

7.0.2 6.2. The simplest properties of the Laplace transform

В дальнейшем значение $\operatorname{Re} p$ всегда выбирается таким, чтобы преобразование Лапласа имело смысл при $\operatorname{Re} p > \alpha$, где α - некоторое число.

1. Линейность преобразования Лапласа.

Пусть $f_1(t) \underset{\mathcal{L}}{\to} F_1(p), f_2(t) \underset{\mathcal{L}}{\to} F_2(p), \operatorname{Re} p > \alpha$. Тогда для любых вещественных a, b имеет место

$$af_1(t) + bf_2 \underset{\mathcal{L}}{\longrightarrow} aF_1(p) + bF_2(p), \quad \operatorname{Re} p > \alpha.$$

2. Дифференцируемость.

Пусть $f(t)$ - оригинал и имеет при $t \geqslant 0$ непрерывную производную $f'(t)$, которую также будем считать оригиналом *). Тогда, если $f'(t) = g(t)$, то $g(t) \underset{\mathcal{L}}{\to} G(p), \operatorname{Re} p > \alpha$, где

$$G(p) = pF(p) - f(0), \quad \operatorname{Re} p > \alpha$$

Доказательство. $\to$

$$G(p) = \int_0^\infty f'(t) e^{-pt} \, \mathrm{d}t = e^{-pt} f(t)\Big|_0^\infty + p \int_0^\infty f(t) e^{-pt} \, \mathrm{d}t = pF(p) - f(0)$$

так как $\lim_{t\to\infty} e^{-pt} f(t) = 0$.

Пусть $f(t)$ - оригинал и имеет непрерывную n-ю производную $f^{(n)}(t)$, которая также

[0]*) Производная оригинала не всегда оригинал. Пример $f(t) = \sin e^{t^2}, f'(t) = \cos e^{t^2} 2te^{t^2}$. Но обратное утверждение справедливо, так как $f(t) = \int_o^t f'(\tau) \mathrm{d}\tau + +f(0)$.

является оригиналом. Обозначим $f^{(n)}(t) = g(t)$. Если $g(t) \underset{\mathcal{L}}{\to} G(p), f(t) \underset{\mathcal{L}}{\to} F(p), \operatorname{Re} p > \alpha$, то

$$G(p) = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \cdots - p f^{n-2}(0) - f^n(0). \tag{6.5}$$

Доказательство. $\to$ Функции $f(t), f'(t), ..., f^{(n-1)}(t)$ - оригиналы, так как $f^{n-1}(t) = \int_o^t f^n(\tau)\mathrm{d}\tau + f^{n-1}(0)$, а интеграл от оригинала также является оригиналом (доказать самим). Было показано, что $f'(t) \underset{\mathcal{L}}{\longrightarrow} pF(p) - f(0)$. Используя эту формулу и метод иатематической индукции, нетрудно получить формулу (6.5). Последняя показывает, что операция дифференцирования $\frac{d}{dt}$ относительно оригинала переходит в алгебраическую операцию умножения его изображения на p.

7.0.3 6.3. Calculation of the Laplace transform if $f(t)$ is a quasimultinomial

Ниже будет предполагаться, что оригиналы являются непрерывно дифференцируемыми функциями.
В силу линейности преобразования Лапласа достаточно вычислить изображение $t^k e^{\lambda t} \underset{\mathcal{L}}{\to} \odot$, где λ-комплексное число, $\alpha > \operatorname{Re}\lambda$. Нетрудно видеть, что $t^k e^{\lambda t}$ при $\operatorname{Re}\lambda < \alpha$ - оригинал. Действительно, $\varphi(t) = t^k e^{-\alpha t} e^{\lambda t} = t^k e^{-(\alpha-\lambda)t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Имеем

$$\int_0^\infty t^k e^{\lambda t} e^{-pt}\ \mathrm{d}t = \int_0^\infty t^k e^{-(p-\lambda)t}\ \mathrm{d}t, \quad \operatorname{Re} p > \alpha > \operatorname{Re}\lambda \tag{6.6}$$

Обозначим $z = p - \lambda, \operatorname{Re} z > 0$. Тогда $g_k(z) = \int_0^\infty t^k e^{-zt}\ \mathrm{d}t, \quad k = 0, 1, 2, ...$ Интегрируя по частям, находим

$$g_0(z) = \int_0^\infty e^{-zt}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{z}$$
$$g_k(z) = \int_0^\infty t^k e^{-zt}\ \mathrm{d}t = \left.\frac{t^k e^{-zt}}{-z}\right|_0^\infty - k\int_0^\infty t^{k-1}\frac{e^{-zt}}{-z}\ \mathrm{d}t = \frac{k}{z} g_{k-1}(z), \quad k > 1$$

Отсюда следует, что $g_k = \frac{k!}{z^{k+1}}, k = 0, 1, 2, ...,$ и

$$t^k e^{\lambda t} \underset{\mathcal{L}}{\longrightarrow} \frac{k!}{(p-\lambda)^{k+1}}, k = 0, 1, ..., \quad \operatorname{Re}(p-\lambda) > 0 \tag{6.7}$$

Используя формулу (6.7), получим формулы обращения при различных k. Далее будет применяться обозначение $\rightleftarrows$, смысл которого в том, что оригиналу $f(t)$ сопоставляется изображение $F(p)$, а изображение $F(p)$ имеет своим оригиналом $f(t)$ (согласно теоремам 6.2 и 6.3).

Рассмотрим сначала случай $k = 0$:

$$e^{\lambda t} \rightleftarrows \frac{1}{p-\lambda} \tag{6.8}$$

1. Если $\lambda = i\omega$, то из формулы (6.8) получаем

$$\cos\omega t \rightleftarrows \frac{p}{p^2+\omega^2}; \quad \sin\omega t \rightleftarrows \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

2. Если $\lambda = 0$, то из (6.8) имеем

$$1 \rightleftarrows \frac{1}{p}; \tag{6.9}$$

Пусть теперь $k \neq 0 : 1$. Если $\lambda = 0, k \neq 0$, то из (6.8) находим

$$t^k \rightleftarrows \frac{k!}{p^{k+1}} \tag{6.10}$$

2. Если $\lambda \neq 0, k = 1$, то (6.8) дает

$$t \cos \omega t \rightleftarrows \frac{p^2 - \omega^2}{\left(p^2 + \omega^2\right)^2}; \quad t \sin \omega t \rightleftarrows \frac{2p\omega}{\left(p^2 + \omega^2\right)^2} \tag{6.11}$$

По необходимости эту процедуру можно продолжить дальше. Из сказанного выше вытекает теорема.

Theorem

6.4. Пусть $f(t)$ - квазимногочлен $uf(t) \rightleftarrows F(p)$. Тогда $F(p)$ - правильная рациональная дробь $\frac{Q(p)}{P(p)}$, где Q и P - многочлены.

7.0.4 6.4. Application of the Laplace transformation

Решим задачу Коши для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\begin{gathered} x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_n x = q(t) \\ x(0) = c_0, x'(0) = c_1, ..., x^{(n-1)}(0) = c_{n-1} \end{gathered} \tag{6.12}$$

Будем предполагать, что все производные функции $x(t)$ и функция $q(t)$ - оригиналы, тогда

$$\begin{aligned} x(t) &\underset{\mathcal{L}}{\rightarrow} X(p) \\ x'(t) &\underset{\mathcal{L}}{\rightarrow} pX(p) - c_0 \\ &\vdots \\ x^{(n)}(t) &\underset{\mathcal{L}}{\longrightarrow} p^n X(p) - p^{n-1} c_0 - \cdots - c_{n-1} \end{aligned}$$

Подставим найденные соотношения в уравнение (6.12):

$$\begin{gathered} \left[p^n X(p) - c_0 p^{n-1} - \cdots - c_{n-1}\right] + a_1 \left[p^{n-1} X(p) - c_0 p^{n-2} - \cdots - c_{n-2}\right] + \cdots \\ \cdots + a_n X(p) = Q(p) \\ \left[p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n\right] X(p) = c_0 \left[p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\right] + ... \\ \cdots + c_{n-1} + Q(p) \\ L(p) X(p) = \mathcal{F}(p) \end{gathered}$$

Отсюда в результате операторного решения задачи Коши (6.12) имеем: $X(p) = \frac{\mathcal{F}(p)}{L(p)}$. Применяя теперь найденные выше формулы обращения, находим $x(t)$.

Пример 6.4.1. Решить задачу Коши:

$$x'' + x' = t, x(0) = 1, x'(0) = 0$$

Решение:

$$p^2X(p) - px(0) - x'(0) + pX(p) - x(0) = \frac{1}{p^2}$$

Решая это уравнение, находим

$$X(p) = \frac{\frac{1}{p^2} + p + 1}{p^2 + p} = \frac{1}{p^3} - \frac{1}{p^2} + \frac{2}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Из (6.8), (6.9), (6.10) имеем

$$x(t) = \frac{1}{2}t^2 + t + 2 - e^{-t} \cdot \diamond$$

8 7 Elements of variation calculus by Diesperov

8.1 7.1. Introduction and basic definitions

Пусть $\mathfrak{N}$ - некоторое множество функций y.
Определение 7.1.1. Если каждому элементу $y \in \mathfrak{N}$ поставлено в соответствие вещественное число, то говорят, что на множестве $\mathfrak{N}$ задан функичонал $\mathcal{J}(y)$.

Другими словами, функционалом $\mathcal{J}(y)$ называется отображение $\mathcal{J} : \mathfrak{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Множество $\mathfrak{N}$ называется областью определения функционала.

Исторически первой задачей, породившей новое направление в математике - вариационое исчисление, была задача о брахистохроне. Она была впервые поставлена и решена Иоганом Бернулли в 1696 г. Требовалось найти такую кривую, соединяющую две точки $A(0,0)$ и $B\,(b, y_2)$, вдоль которой материальная точка скатывалась бы за минимальное время:

$$T(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} dt.$$

(g - ускорение свободного падения) Таким образом, требовалось найти функцию $y = y(t)$, удовлетворяющую краевым условиям $y(0) = 0, y(b) = y_2$, на которой функционал $T(y)$ достигал бы минимума. Было показано, что кривая, на которой достигается минимум функционала, является циклоидой.

Изучение вариационного исчисления начнём с изучения свойств функционала, который часто встречается на практике и задается ин-

тегралом

$$\mathcal{J}(y) = \int_a^b f\,(t, y(t), y'(t))\,dt \tag{7.1}$$

Функция $f\,(t, y, y')$ в нём предполагается непрерывной. Ниже на нее будут наложены дополнительные условия. Функционал (7.1), как правило, определен на множестве $\mathfrak{N} \subseteq \mathbf{C}^1([a, b])$.

Решение задач на отыскание минимума или максимума функционалов привело к созданию нового направления в математике - вариационного исчисления.

Множество функций, среди которых ищутся те, на которых функционал достигает свои экстремальные значения, обозначим $\mathcal{D}(\subseteq \mathfrak{N})$. Функции $y \in \mathcal{D}$ называются

допустимыми.
Однако не всегда вариационная задача имеет решение. Действительно, рассмотрим функционал $\mathcal{J}(y) = \int_0^1 \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}t$ с областью определения $\mathfrak{N} = \{y \mid y \in \mathbf{C}^1([0;1])\}$ и краевыми условиями $y(0) = 0, y'(1) = 1$. Следовательно,

$$\mathcal{D} = \left\{y \mid y \in \mathbf{C}^1([0;1]), y(0) = 0, y'(1) = 1\right\}.$$

Среди функций $y(t) \in \mathcal{D}$ требуется найти такую, на которой функционал $\mathcal{J}(y)$ принимает минимальное значение. Нетрудно видеть, что для любого $y(t) \in \mathcal{D}$ функционал $\mathcal{J}(y) > 1$ и $\mathcal{J}(y)$ не достигает своего минимального значения.

Определение 7.1.2. Мы говорим, что функционал $\mathcal{J}(y)$ достигает на функции $y_0(t) \in \mathcal{D}$ абсолютного минимума (максимума), если для любого $y(t) \in \mathcal{D}$ справедливо неравенство $\mathcal{J}(y) \geqslant \mathcal{J}(y_0)\,(\mathcal{J}(y) \leqslant \mathcal{J}(y_0))$.

Определение 7.1.3. Скажем, что функция $h(t)$ является допустимым приращением функции $y(t) \in \mathcal{D}$, если $y(t) + h(t) \in \mathcal{D}$.

Множество допустимых приращений функции $y(t)$ обозначим $\mathcal{H}_y$:

$$\mathcal{H}_y = \left\{h \mid h \in \mathbf{C}^1([a,b]), y + h \in \mathcal{D}, h(a) = h(b) = 0\right\}.$$

Основное предположение относительно множества $\mathcal{H}_y$: $\mathcal{H}_y$ не пусто, и вместе с каждым элементом $h \in \mathcal{H}_y$ ему принадлежит элемент $\theta h(t)$, где $|\theta| \leqslant 1$. Если $\mathcal{H}_y$ - линейное пространство, то основное предположение выполнятся автоматически.

Определение 7.1.4. Пусть $y_0(t) \in \mathcal{D}$ и для любого $h(t) \in \mathcal{H}_{y_0}$ функция $\mathcal{J}(y_0 + \theta h)$ переменного θ дифференцируема при $\theta = 0$. Тогда производная $\frac{d}{d\theta}\mathcal{J}(y_0 + \theta h)\big|_{\theta=0}$ называется первой вариацией функционала $\mathcal{J}(y)$ на функции $y_0(t)$ и обозначается $\delta\mathcal{J}(y_0, h)$.

С другим подходом к изложению материала можно ознакомиться в [12].

8.2 7.2. The simplest problem of the calculus of variations

Рассмотрим функционал

$$\mathcal{J}(y) = \int_a^b f(t, y, y')\,\mathrm{d}t \tag{7.2}$$

на множестве $\mathfrak{N} = \{y \mid y \in \mathbf{C}^1([a,b])\}$. Будем считать, что функция $f(t, y, y')$ определена на множестве $[a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и является дважды непрерывно дифференцируемой на нём по всем своим аргументам, а функции $y(t)$ удовлетворяют краевым условиям

$$y(a) = y_1, \quad y(b) = y_2. \tag{7.3}$$

Множества допустимых функций $\mathcal{D}$ и допустимых приращений $\mathcal{H}_y$ имеют вид

$$\mathcal{D} = \left\{y \mid y \in \mathbf{C}^1([a,b]), y(a) = y_1, y(b) = y_2\right\},$$
$$\mathcal{H}_y = \left\{h \mid h \in \mathbf{C}^1([a,b]), h(a) = h(b) = 0\right\}.$$

Множество $\mathcal{H}_y$ в простейшей задаче вариационного исчисления обозначается $\mathbf{C}^1([a,b])$. Требуется найти такие функции $y_0(t) \in \mathcal{D}$, на которых функционал $\mathcal{J}(y)$ достигает своих минимального или максимального значений.
Пусть $\varepsilon > 0, y_0(t) \in \mathbf{C}^1([a,b])$.
Определение 7.2.1. Множество функций $y(t) \in \mathbf{C}^1([a,b])$ таких, что

$$\|y-y_0\|_{\mathbf{C}^1([a,b])}=\max_{t\in[a,b]}|y-y_0|+\max_{t\in[a,b]}|y'-y_0'|<\varepsilon,$$

называется слабой ε - окрестностью функции $y_0(t)$.

Пусть теперь $y, y_0 \in \mathcal{D}$. Через $U_\varepsilon(y_0)$ обозначим слабую ε - окрестность функции $y_0(t)$ в $\mathcal{D}$:

$$U_\varepsilon(y_0)=\left\{y \mid y\in\mathcal{D}, \|y-y_0\|_{\mathbf{C}^1([a,b])}<\varepsilon\right\}. \tag{7.4}$$

Определение 7.2.2. Мы говорим, что функционал $\mathcal{J}(y)$ достигает слабого локального минимума (максимума) на функции $y_0(t)\in\mathcal{D}$, если существует $\varepsilon>0$ такой, что для любого $y(t)\in U_\varepsilon(y_0)$ имеет место неравенство $\mathcal{J}(y)\geq\mathcal{J}(y_0)\,(\mathcal{J}(y)\leq\mathcal{J}(y_0))$.

Пусть на $y_0(t)\in\mathcal{D}$ функционал $\mathcal{J}(y)$ достигает слабый локальный минимум.

Theorem

7.1. Если функционал

$$\mathcal{J}(y)=\int_a^b f(t,y,y')\,\mathrm{d}t$$

достигает слабого локального минимума (максимума) на функиии $y_0(t)\in\mathcal{D}$, то $\delta\mathcal{J}(y_0,h)=0$ для любого $h\in\overset{\mathbf{C}^1}{\mathbf{C}}([a,b])$.

Доказательство. - Если $h=0, t\in[a,b]$, то утверждение теоремы очевидно. Рассмотрим случай $h\not\equiv 0$. По условию теоремы существует $\varepsilon>0$ такой, что $\mathcal{J}(y)\geqslant\mathcal{J}(y_0)$ для любого $y(t)\in U_\varepsilon(y_0)$. Так как $h(t)\not\equiv 0$, то $\|h\|_{C^1([a,b])}>0$. Для всех θ таких, что $|\theta|<\frac{\varepsilon}{\|h\|_{C^1([a,b])}}$, функции $y(t)=y_0(t)+\theta h(t)\in U_\varepsilon(y_0)$. Действительно, согласно определению нормы имеем

$$\max_{t\in[a,b]}|y-y_0|+\max_{t\in[a,b]}|y'-y_0'|=|\theta|\max_{t\in[a,b]}|h|+|\theta|\max_{t\in[a,b]}|h'|=$$
$$=|\theta|\|h\|_{C^1([a,b])}<\varepsilon.$$

Обозначим $\mathcal{J}(y_0+\theta h)=\Phi(\theta)$. При $\theta=0$ функция $\Phi(\theta)$ достигает локального минимума. При условиях, наложенных на функцию $f(t,y,y')$, функция $\Phi(\theta)$ дифференцируема в точке $\theta=0$. Из теоремы Ферма следует, что $\frac{d\Phi}{d\theta}\big|_{\theta=0}=0$. Значит, $\frac{d}{d\theta}\mathcal{J}(y_0+\theta h)\big|_{\theta=0}=0$ для любого $h\in\overset{\circ}{\mathbf{C}}{}^1([a,b])$. Если на функции $y_0(t)$ функционал (7.2) достигает слабого локального максимума, то доказательство проводится аналогично.

Вычислим теперь $\Phi'(0)$:

$$\frac{d}{d\theta}\left\{\int_a^b f(t,y_0+\theta h,y_0'+\theta h')\,\mathrm{d}t\right\}\Bigg|_{\theta=0}=\int_a^b\left[f_y h+f_y' h'\right]\mathrm{d}t$$

Лемма 7.1. Пусть функияя $\psi(t)\in\boldsymbol{C}([a,b])$. Если для любой непрерывной функции $h(t), t\in[a,b]$, справедливо равенство

$$\int_a^b h(t)\psi(t)\mathrm{d}t=0$$

то $\psi(t)=0$ для любого $t\in[a,b]$.

Доказательство. $\to$ Доказательство проведём от противного. Пусть функция $\psi(t)\not\equiv 0$. Значит, существует такое $t_0\in(a,b)$, что $\psi(t_0)\neq 0$. Предположим, что $\psi(t_0)>0$. Рассмотрим δ - окрестность точки $t_0\,((t_0-\delta,t_0+\delta)\in(a,b))$, в которой $\psi(t)>\frac{1}{2}\psi(t_0)$.

Возьмем функцию $h(t)$ такой, что $h(t) > 0, t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ и $h(t) = 0$ вне интервала ($t_0 - \delta, t_0 + \delta$). В качестве $h(t)$ можно взять

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t \in [a, t_0 - \delta] \\ (t - t_0 + \delta)^m (t_0 + \delta - t)^m, & t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta], m > 0, \delta > 0 \\ 0, & t \in [t_0 + \delta, b] \end{cases} \tag{7.5}$$

Величина δ выбирается такой, что $t_0 - \delta > a, t_0 + \delta < b$.
Заметим, что построенная нами пробная функция (7.5) автоматически удовлетворяет условию $h(a) = h(b) = 0$. Отсюда имеем

$$\int_a^b \psi(t)h(t)\mathrm{d}t = \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \psi(t)h(t)\mathrm{d}t > \frac{\psi(t_0)}{2} \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} h(t)\mathrm{d}t > 0$$

Противоречие.
Следствие 7.1.1. Результаты леммы 7.1 останутся справедливыми, если потребовать, чтобы $h \in \dot{\mathbf{C}}^1([a, b])$.

Для этого достаточно положить $m \geqslant 2 (m > 1)$ в формуле (7.5). Лемма 7.1 остается справедливой, если потребовать также

$$h(a) = h(b) = \cdots = h^{(l)}(a) = h^{(l)}(b) = 0, l \leqslant k - 1.$$

Для этого достаточно взять в (7.5) $m = k + 1 (m > k)$.
Замечание 7.2.1. Пусть $y_0 \in \mathcal{D}$ и $\mathcal{D} \subseteq \mathbf{C}^1([a, b])$. Если $\delta\mathcal{J}(y_0, h)$ определена на $y_0(t)$ и $\delta\mathcal{J}(y_0, h) = 0$ для любого $h \in \mathbf{C}^1([a, b])$, то $y_0(t)$ называется стационарной точкой функционала $\mathcal{J}(y)$ на множестве $\mathcal{D}$.$\diamond$

Theorem

7.2. Пусть функционал $\mathcal{J}(y)$ достигает слабого локального экстремума на функиии $y_0 \in \mathcal{D}$. Если $y_0(t) \in \boldsymbol{C}^2([a, b])$, то функиия $y_0(t)$ удовлетворяет уравнению Эйлера:

$$f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} = 0 \tag{7.6}$$

Доказательство.

$$0 = \int_a^b [f_y h + f_{y'} h'] \, \mathrm{d}t = f_{y'} h|_b^a + \int_a^b \left[f_{y'} h - \frac{d}{dt} (f_{y'}) h \right] \mathrm{d}t =$$
$$= \int_a^b \left[f_y - \left(\frac{d}{dt} f_{y'} \right) \right] h \ \mathrm{d}t \text{ для любого } h \in \mathbf{C}^1([a, b])$$

Обозначим $\psi(t) = f_y - \frac{d}{dt} f_{y'}$. Функция $\psi(t)$ непрерывная. Из следствия к лемме 7.1 следует, что $\psi(t) \equiv 0, t \in [a, b]$. Отсюда получаем (7.6). В уравнении Эйлера (7.6) $\frac{d}{dt}$ - полная производная, поэтому её можно представить в виде

$$\frac{d}{dt} f_{y'} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y'} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y' \partial y'} y'' \tag{7.7}$$

Рассмотрим частные случаи уравнения Эйлера (7.6): 1.$f(t, y, y') \equiv f(t, y') \Longrightarrow$

$$\frac{d}{dt} (f_{y'}(t, y')) = 0 \Longrightarrow f_{y'}(t, y') = \text{ const.}$$

2. $f(t, y, y') \equiv f(y, y') \Longrightarrow$ уравнение Эйлера принимает вид

$$f_y - f_{yy'}y' - f_{y'y'}y'' = 0$$

Положим $y' = p(y), y'' = p(y)p'(y)$, тогда $f_y - f_{yp}p - f_{pp}pp' = 0$. Интегрируя это уравнение, получим

$$\mathrm{d}\left[f(y,p) - pf_p(y,p)\right] = 0 \Longrightarrow f(y,p) - pf_p(y,p) = \text{ const}$$

Таким образом, если функция f в функционале (7.2) не зависит явно от переменной t, то уравнение (7.6) имеет первый интеграл.

Уравнение Эйлера является уравнением второго порядка. Его решения должны удовлетворять двум краевым условиям (7.3).

Определение 7.2.3. Каждая интегральная кривая, соответствующая решению уравнения Эйлера (7.6), называется экстремалью. Если решение уравнения Эйлера удовлетворяет краевым условиям (7.3), то соответствующая ему интегральная кривая называется допустимой экстремалью.

Пусть функционал $\mathcal{J}(y)$ на функции $y_0(t) \in \mathcal{D}$ достигает слабого локального минимума. Тогда в точке с координатами $(t_0, y_0(t_0))$, $t_0 \in (a,b)$, в которой $f_{y'y'} \neq 0$, функция $y_0(t)$ имеет непрерывную вторую производную. Это утверждение следует из леммы Дюбуа-Реймона.

Лемма 7.2. (Дюбуа-Реймона.) Если функиии $\varphi(t), \psi(t) \in \boldsymbol{C}([a,b])$ и для любой функции $h(t) \in \dot{\mathbf{C}}^1[a,b]$ интеграл

$$\int_a^b \left[\psi(t)h(t) + \varphi(t)h'(t)\right] \mathrm{d}t = 0 \tag{7.8}$$

то функция φ - дифференцируемая на $[a,b]$ и $\frac{d\varphi}{dt} = \psi(t)$ для любого $t \in [a,b]$.

Доказательство. $\rightarrow$ Положим $A(t) = \int_a^t \psi(\tau)\mathrm{d}\tau$. Тогда из равенства (7.8) будем иметь

$$\int_a^b \left[\psi(t)h + \varphi(t)h'\right] \mathrm{d}t = A(t)h\big|_a^b + \int_a^b [-A(t) + \varphi(t)]h'\mathrm{d}t =$$
$$= \int_a^b [-A(t) + \varphi(t) - c]h'\mathrm{d}t = 0$$

где c - произвольная постоянная. Выберем $c = c_0$ такой, чтобы следующее выражение обратилось в ноль: $\int_a^b \left[-A(t) + \varphi(t) - c_0\right] \mathrm{d}t = 0$, и

возьмём

$$h(t) = \int_a^t \left[-A(t) + \varphi - c_0\right] \mathrm{d}t, h(t) \in \overset{\circ}{\mathbf{C}}{}^1 [a,b]$$

Тогда

$$\int_a^b \left[-A(t) + \varphi(t) - c_0\right]^2 \mathrm{d}t = 0 \Longrightarrow$$
$$\varphi(t) = \int_a^t \psi(\tau)\mathrm{d}\tau + c_0 \text{ для любого } t \in [a,b] \Longrightarrow \frac{d\varphi(t)}{dt} = \psi(t).$$

Положив $\psi(t) = f_y$, $\varphi(t) = f_{y'}$, получим уравнение Эйлера (7.6). Подчеркнём,что дифференцируемость функции $\varphi(t)$ заранее не предполагалась.

Таким образом, если функционал на функции $y(t) \in \mathbf{C}^1([a,b])$ достигает экстремума и $f_{y'y'} \neq 0$ для любого $t \in [a,b]$, то $y(t) \in \mathbf{C}^2([a,b])$ и уравнение Эйлера может быть представлено в виде $y'' = \Phi(t, y, y')$.

Выше мы рассматривали функционал $\mathcal{J}(y)$, определённый на множестве дифференцируемых функций, которые мы считали элементами пространства $\mathbf{C}^1$. Рассмотрим теперь функционал $\mathcal{J}(y)$, определяя расстояние между функциями по норме пространства $\mathbf{C}$. Возьмём $y_0(t) \in \mathbf{C}([a,b])$. Множество функций $y(t) \in \mathbf{C}([a,b])$ таких, что

$$\|y - y_0\|_{\mathbf{C}([a,b])} = \max_{t\in[a,b]} |y - y_0| < \varepsilon,$$

называется сильной ε-окрестностью функции $y_0(t)$. Пусть теперь y, $y_0 \in \mathcal{D}$. Через $V_\varepsilon(y_0)$ обозначим сильную ε-окрестность функции $y_0(t)$ в $\mathcal{D}$:

$$V_\varepsilon(y_0) = \left\{ y \mid y \in \mathcal{D}, \|y - y_0\|_{\mathbf{C}([a,b])} < \varepsilon \right\}. \tag{7.9}$$

Определение 7.2.4. Мы говорим, что функционал $\mathcal{J}(y)$ достигает сильного локального минимума (максимума) на функции $y_0(t) \in \mathcal{D}$, если существует $\varepsilon > 0$ такой, что для любого $y(t) \in V_\varepsilon(y_0)$ имеет место неравенство $\mathcal{J}(y) \geqslant \mathcal{J}(y_0)$ $(\mathcal{J}(y) \leqslant \mathcal{J}(y_0))$.

Всякий абсолютный экстремум является также сильным локальным экстремумом и слабым локальным экстремумом. Сильный локальный экстремум является также и слабым локальным экстремумом. Если $J(y_0)$ является экстремальным значением функционала для

функций $y(t)$ таких, что $\|y(t) - y_0(t)\|_{\mathbf{C}([a,b])} < \varepsilon$, то $J(y_0)$ тем более будет экстремальным значением для тех $y(t)$, для которых $\|y(t) - -y_0(t)\|_{\mathbf{C}^1([a,b])} < \varepsilon$. Обратное, как показывает разобранный ниже пример, вообще говоря, неверно.

Пример 7.2.1. Решить простейшую задачу вариационного исчисления:

$$\mathcal{J}(y) = \int_0^\pi y^2 \left(1 - y'^2\right) \mathrm{d}t, \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

Решение. Уравнение Эйлера и граничные условия будут следующими:

$$y\left(1 + y'^2 + yy''\right) = 0, \quad y(0) = y(\pi) = 0 \tag{7.10}$$

Решением краевой задачи (7.10) будет функция $y_0(t) \equiv 0, t \in [0,\pi]$. Зададим приращение к $y_0 = 0$. Тогда $y = h$ и приращение функционала имеет вид

$$\Delta\mathcal{J} = \mathcal{J}(h) - \mathcal{J}(0) = \int_0^\pi h^2 \left(1 - h'^2\right) \mathrm{d}t$$

Рассмотрим слабую ε-окрестность функции $y_0 : \max_{t\in[a,b]} |h| + \max_{t\in[a,b]} |h'| << \varepsilon$. Мы видим, что при достаточно малых значениях $\max_{t\in[a,b]} |h'|$ величина $\Delta\mathcal{J} \geqslant 0$. Таким образом, на $y_0 \equiv 0$ достигается слабый локальный минимум, однако сильный локальный минимум на $y_0 = 0$ не достигается. Действительно, возьмём $h = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin nt$. Величину $\max_{t\in[a,b]} |h|$ выбором n можно сделать сколь угодно малой. Подставляя h в $\mathcal{J}(h)$, получим

$$\mathcal{J}(h) = \frac{\pi}{2n} - \frac{\pi}{8} \text{ и при } n > 4 \text{ приращение } \Delta\mathcal{J} \leqslant 0.\diamond$$

8.3 7.3. Some generalizations of the simplest problem

8.3.1 7.3.1. Functionals containing a vector function

Ниже будут использоваться следующие обозначения:

$$\mathcal{J}(\vec{y}) = \mathcal{J}(y_1, ..., y_n), f(t, \vec{y}, \vec{y}') = f(t, y_1, ..., y_n, y_1', ..., y_n').$$

Рассмотрим функционал

$$\mathcal{J}(\vec{y}) = \int_a^b f\left(t, \vec{y}, \vec{y}'\right) \mathrm{d}t, \tag{7.11}$$

в котором функция $f\left(t, \vec{y}, \vec{y}'\right)$ определена на множестве $[a, b] \times \mathbb{R}^n \times \times \mathbb{R}^n$ и непрерывна на нем вместе со своими вторыми производными. Потребуем, чтобы функция $\vec{y}(t)$ удовлетворяла граничным условиям

$$\vec{y}(a) = \vec{A}, \quad \vec{y}(b) = \vec{B}, \tag{7.12}$$

где $\overrightarrow{\mathrm{A}}, \vec{B}$ - заданные векторы. Множество допустимых функций и множество допустимых приращений имеют вид

$$\mathcal{D} = \left\{\vec{y}(t) \mid \vec{y} \in \mathbf{C}^1([a, b]), \vec{y}(a) = \vec{A}, \vec{y}(b) = \vec{B}\right\},$$
$$\mathcal{H}_{\vec{y}} \equiv \dot{\mathbf{C}}^1([a, b]) = \left\{\vec{h} \mid \vec{h} \in \mathbf{C}^1([a, b]), \vec{h}(a) = \vec{h}(b) = \overrightarrow{0}\right\}.$$

Требуется найти такую вектор-функцию $\vec{y}(t)$, на которой функционал $\mathcal{J}(\vec{y})$ достигает своего экстремального значения. Задача (7.11), (7.12) называется задачей с закреплёнными концами.

Лемма 7.3. Пусть $\vec{\psi}(t) \in \boldsymbol{C}^1([a, b])$ и для любой $\vec{h} \in \overset{\circ}{\mathbf{C}}{}^1([a, b])$ выполняется равенство

$$\int_a^b (\vec{\psi}(t), \vec{h}(t)) \mathrm{d}t = 0$$

Тогда $\vec{\psi}(t) \equiv \overrightarrow{0}, t \in [a, b]$.

Доказательство. $\rightarrow$ Возьмём вектор-функцию $\vec{h}(t)$ следующей

$$\vec{h}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h_j(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Здесь $h_j(t)$ - пробная функция (7.5) с $m = 2$. Из следствия к лемме 7.1 находим $\psi_j(t) \equiv 0$. Меняя j от 1 до n, получаем утверждение леммы. $\square$

Определение 7.3.1. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\vec{y}_0(t) \in \mathbf{C}^1([a, b])$. Множество функций $\vec{y}(t) \in \mathbf{C}^1([a, b])$ таких, что $\|y - y_0\|_{\mathbf{C}^1([a,b])} = \max_{t \in [a,b]} |\vec{y} - \vec{y}_0| + + \max_{t \in [a,b]} |\vec{y}' - \vec{y}_0'| < \varepsilon$, называется слабой ε-окрестностью функции $\vec{y}_0(t)$. Здесь $|\vec{y}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$.

Рассмотрим функции $\vec{y}(t), \vec{y}_0(t) \in \mathcal{D}$. Обозначим через $U_\varepsilon\left(y_0\right)$ слабую ε-окрестность функции $\vec{y}_0(t)$ в $\mathcal{D}$:

$$U_\varepsilon\left(\vec{y}_0\right) = \left\{\vec{y} \in \mathcal{D}, \|y - y_0\|_{\mathbf{C}^1([a,b])} < \varepsilon\right\}.$$

Определение 7.3.2. Мы говорим, что функционал $\mathcal{J}(\vec{y})$ достигает на допустимой функции $\vec{y}_0(t)$ слабый локальный минимум, если существует $\varepsilon > 0$ такой, что для любой $\vec{y}(t) \in U_\varepsilon(\vec{y})$ справедливо неравенство $\mathcal{J}(\vec{y}) \geqslant \mathcal{J}\left(\vec{y}_0\right)$.

Возьмём $\vec{h}(t) \in \overset{\circ}{\mathbf{C}}{}^1([a, b])$ и определим однопараметрическое семейство функций следующим образом: $\vec{y} = \vec{y}_0 + \theta \vec{h}, \vec{y} \in \mathcal{D}, \theta \in \mathbb{R}$. Отметим, что здесь функции $\vec{y}_0$ и $\vec{h}$ фиксированные.

Theorem

7.3. Пусть функионал (7.10) достигает слабого локального минимума на функичи $\vec{y}_0(t) \in \mathcal{D}$. Тогда $\delta\mathcal{J}\left(\vec{y}_0, \vec{h}\right) = 0$ для любого $\vec{h} \in \dot{\mathbf{C}}^1([a,b])$. Если $\vec{y}_0(t) \in \boldsymbol{C}^2([a,b])$, то оча удовлетворяет уравнению Эйлера:

$$f_{\vec{y}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_{\vec{y}'} = \overrightarrow{0} \tag{7.13}$$

Векторное уравнение (7.13) эквивалентно системе из n уравнений второго порядка. Здесь введены обозначения

$$f_{\vec{y}} = \frac{\partial f}{\partial \vec{y}} = \operatorname{colon}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial y_n}\right), \quad f_{\vec{y}'} = \frac{\partial f}{\partial \vec{y}'} = \operatorname{colon}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1'}, ..., \frac{\partial f}{\partial y_n'}\right)$$

Доказательство. $\to$ Пусть $\vec{y}_0 \in \mathcal{D}$ даёт слабый локальный минимум функционала (7.11). Тогда существует $\varepsilon > 0$ такой, что для любого $\vec{y}(t) \in U_\varepsilon(\vec{y}_0)$ справедливо неравенство $\mathcal{J}(\vec{y}) \geqslant \mathcal{J}(\vec{y}_0)$. Если
$|\theta| < \frac{\varepsilon}{\|\vec{h}\|_{\mathbf{C}^1([a,b])}}, \vec{h} \not\equiv \overrightarrow{0}$, то норма $\|\vec{y} - \vec{y}_0\|_{\mathbf{C}^1([a,b])} = |\theta|\|\vec{h}\|_{\mathbf{C}^1([a,b])} < \varepsilon$ и $\vec{y}(t) \in U_\varepsilon(\vec{y}_0)$. Рассмотрим функцию $\Phi(\theta) = \mathcal{J}\left(\vec{y}_0 + \theta\vec{h}\right)$. Из условий, наложенных на основную функцию $f(t, \vec{y}, \vec{y}')$, следует, что $\Phi(\theta)$ дифференцируема при $\theta = 0$. Так как при $\theta = 0$ функция $\Phi(\theta)$ достигает минимума, то по теореме Ферма $\Phi'(0) = 0$. В результате для производной $\Phi'(0)$ имеем

$$\begin{aligned} 0 = \Phi'(0) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\int_a^b f\left(t, \vec{y}_0 + \theta\vec{h}, \vec{y}' + \theta\vec{h}'\right)\mathrm{d}t\Big|_{\theta=0} = \\ &= \int_a^b \left[\left(f_{\vec{y}}, \vec{h}\right) + \left(f_{\vec{y}'}, \vec{h}'\right)\right]\mathrm{d}t = \left(f_{\vec{y}}, \vec{h}\right)\Big|_a^b + \int_a^b \left(f_{\vec{y}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_{\vec{y}'}, \vec{h}\right)\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{7.14}$$

В правой части равенства (7.14) первый член равен нулю, так как $\vec{h}(a) = \vec{h}(b) = \overrightarrow{0}$. Согласно предположениям, сделанным выше, функция $f_{\vec{y}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_{\vec{y}'}$ является непрерывной, поэтому из леммы 7.3 следует уравнение Эйлера (7.13).

Для решения краевой задачи мы имеем n уравнений второго порядка и $2n$ краевых условий (7.12).

Каждая интегральная кривая, являющаяся графиком решения векторного уравнения Эйлера (7.13), называется экстремалью. Интегральная кривая, соответствующая допустимому решению, называется допустимой экстремалью.

8.3.2 7.3.2. Functionals dependent on higher-order derivatives

Рассмотрим функционал

$$\mathcal{J}(y) = \int_a^b f\left(t, y, y', y'', ..., y^{(k)}\right)\mathrm{d}t \tag{7.15}$$

Основная функция $f(t, z, z_1, ..., z_k)$ определена на множестве $[a,b] \times \times \mathbb{R}^{k+1}$ и $k+1$ раз непрерывно дифференцируема по всем своим переменным.

Рассмотрим задачу отыскания экстремумов функционала (7.15) среди функций $y(t) \in \mathbf{C}^k([a,b])$, которые удовлетворяют граничным
условиям:

$$\left\{\begin{array}{llll} y(a)=A_0; & y'(a)=A_1; & \dots & y^{(k-1)}(a)=A_{k-1}, \\ y(b)=B_0; & y'(b)=b_1; & \dots & y^{(k-1)}(b)=B_{k-1}. \end{array}\right. \tag{7.16}$$

Множество допустимых функций:

$$\mathcal{D}=\left\{y \mid y\in \mathbf{C}^k([a,b]), \left[\begin{array}{lll} y(a)=A_0; & \cdots & y^{(k-1)}(a)=A_{k-1}, \\ y(b)=B_0; & \cdots & y^{(k-1)}(b)=B_{k-1}. \end{array}\right]\right\}$$

Множество допустимых приращений:

$$\mathcal{H}_y=\overset{\circ}{\mathbf{C}}{}^k([a,b])=\left\{h \mid h\in \mathbf{C}^k([a,b]), \left[\begin{array}{l} h(a)=\dots=h^{(k-1)}(a)=0, \\ h(b)=\dots=h^{(k-1)}(b)=0. \end{array}\right]\right\}$$

Ясно, что $y+h\in\mathcal{D}$.

Определение 7.3.3. Будем говорить, что функционал $\mathcal{J}(y)(7.15)$ достигает на функции $y_0(t)\in\mathcal{D}$ локального минимума, если существует такой $\varepsilon>0$, что для любой функции $y(t)\in\mathcal{D}$, удовлетворяющей условию

$$\|y-y_0\|_{\mathbf{C}^k([a,b])}=\max_{t\in[a,b]}|y(t)-y_0(t)|+\dots+\max_{t\in[a,b]}\left|y^{(k)}(t)-y_0^{(k)}(t)\right|<\varepsilon,$$

имеет место неравенство $\mathcal{J}(y)\geqslant\mathcal{J}(y_0)$.

Пусть $y(t),y_0(t)\in\mathcal{D}$. Обозначим ε-окрестность функции $y_0(t)$ в $\mathcal{D}$ через $U_\varepsilon(y_0)$:

$$U_\varepsilon(y_0)=\left\{y \mid y\in\mathcal{D}, \|y-y_0\|_{\mathbf{C}^k([a,b])}<\varepsilon\right\}.$$

Рассмотрим однопараметрическое семейство функций: $y=y_0+\theta h$, $h\in\overset{\mathbf{C}}{\mathbf{C}}{}^k([a,b]), y(t),y_0(t)\in\mathcal{D}$. Отметим, что здесь функции $y_0(t)$ и $h(t)$ предполагаются фиксированными.

Theorem

7.4. Если функционал $\mathcal{J}(y)(7.15)$ достигает на функи,ии $y_0(t)\in\mathcal{D}$ локального минимума, то первая вариация функционала $\delta\mathrm{J}\ (y_0,h)=0$ для любого $h\in\dot{\mathbf{C}}^k([a,b])$. Если кроме того $y_0(t)\in\in\boldsymbol{C}^{2k}([a,b])$, то она удовлетворяет уравнению Эйлера:

$$L(y_0)=f_y-\frac{d}{dt}f_{y'}+\frac{d^2}{dt^2}f_{y''}+\dots+(-1)^k\frac{d^k}{dt^k}f_{y^{(k)}}=0. \tag{7.17}$$

Доказательство. $\to$ Предположим, что $y_0\in\mathcal{D}$ даёт локальный минимум функционала $\mathcal{J}(y)(7.15)$. Тогда существует $\varepsilon>0$ такой, что для любых $\vec{y}(t)\in U_\varepsilon(\vec{y}_0)$ справедливо неравенство $\mathcal{J}(\vec{y})\geqslant\mathcal{J}(\vec{y}_0)$. Если $|\theta|<\frac{\varepsilon}{\|\vec{h}\|_{\mathbf{C}^k([a,b])}}, \vec{h}\not\equiv\overrightarrow{0}$, то норма $\|\vec{y}-\vec{y}_0\|_{\mathbf{C}^k([a,b])}<\varepsilon$. Согласно сделанным выше предположениям относительно основной функции $f\left(t,y,y',y'',...,y^{(k)}\right)$ производная $\Phi'(0)$ существует и равна

$$\Phi'(0)=\delta\mathcal{J}(y_0,h)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\int_a^b f\left(t,\vec{y}_0+\theta\vec{h},\vec{y}'+\theta\vec{h}',...,\overrightarrow{y_0}^{(k)}+\theta\vec{h}^{(k)}\right)\mathrm{d}t\Big|_{\theta=0}=$$

$$=\int_a^b\left(f_yh+f_{y'}h'+f_{y''}h''+\dots+f_{y^{(k)}}h^{(k)}\right)\mathrm{d}t.$$

Так как функция $\Phi(\theta)$ при $\theta=0$ принимает свое минимальное значение, то по теореме Ферма $\Phi'(0)=0$. Следовательно, для любого $h\in\overset{\mathbf{C}}{\mathbf{C}}{}^k([a,b])$ получаем

$$\delta\mathcal{J}\left(y_0,h\right)=\int_a^b\left(f_yh+f_{y'}h'+f_{y''}h''+\cdots+f_{y^{(k)}}h^{(k)}\right)\mathrm{d}t=0$$

Интегрируя по частям, находим

$$\int_a^b L\left(y_0\right)h\ \mathrm{d}t+\left[f_{y'}h\big|_a^b+f_{y''}h'\big|_a^b-\frac{d}{dt}f_{y''}h\Big|_a^b+...\right]=0 \tag{7.18}$$

для любого $h\in\overset{\circ}{\mathbf{C}}{}^k\ ([a,b])$.
Производная наиболее высокого порядка функции h в (7.18) содержится в члене $\left[f_{y^{(k)}}h^{(k-1)}\right]_a^b$, поэтому все члены, стоящие в квадратных скобках, обращаются в 0 . В результате получаем $\int_a^b L\left(y_0\right)h\ \mathrm{d}t=0$ для любого $h\in\overset{\circ}{\mathbf{C}}{}^k\ ([a,b])$.

Так как функция $L\left(y_0\right)$ непрерывная, то из следствия к основной лемме 7.1 будем иметь $L\left(y_0\right)=0, t\in[a,b]$.

В результате получаем уравнение $2k$-го порядка (7.17). Для определения $y_0(t)$ мы имеем $2k$ краевых условий (7.16).

Каждая интегральная кривая, соответствующая решению уравнения Эйлера (7.17), называется экстремалью, а интегральная кривая, соответствующая допустимому решению, - допустимой экстремалью.

8.3.3 7.3.3. The problem with loose boundaries.

Требуется найти экстремум функционала

$$\mathcal{J}(y)=\int_a^b f\left(t,y,y'\right)\mathrm{d}t \tag{7.19}$$

при условии

$$y(a)=y_1.$$

Основная функция $f\left(t,y,y'\right)$ определена на множестве $[a,b]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ и дважды непрерывно дифференцируема по всем своим переменным. Среди непрерывно дифференцируемых кривых (описываемых функциями $y=y(t), t\in[a,b]$), выходящих из точки (a,y_1) и достигающих прямой $t=b$, найти такие, на которых бы функционал достигал экстремума. Обозначим через

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{N}^*=\left\{y\mid y\in\mathbf{C}^1([a,b])\right\},\\
&\mathcal{D}^*=\left\{y\mid y\in\mathbf{C}^1([a,b]),y(a)=y_1\right\},\\
&\mathcal{H}_y^*=\left\{h\mid h\in\mathbf{C}^1([a,b]),h(a)=0,y+h\in\mathcal{D}^*\right\}
\end{aligned}$$

множества определения функционала, допустимых функций и допустимых приращений соответственно. Возьмём однопараметрическое семейство функций $y=y_0+\theta h, y_0\in\mathcal{D}^*, h\in\mathcal{H}_{y_0}^*$.

Theorem

7.5. Пусть функционал $\mathcal{J}(y)$ (7.19) достигает на функиии $y_0\in\mathcal{D}^*$ слабого локального минимума. Тогда $\delta\mathcal{J}\left(y_0,h\right)=0$ для любого $h\in\mathcal{H}_{y_0}^*$. Если $y_0\in\boldsymbol{C}^2([a,b])$, то она удовлетворяет уравнению Эйлера:

$$f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} = 0 \tag{7.20}$$

и граничным условиям

$$y(a) = y_1, \quad f_{y'}|_{t=b} = 0. \tag{7.21}$$

Второе граничное условие (7.21) называется естественным.
Доказательство. $\to$ Пусть $y_0(t) \in \mathcal{D}^*$ дает слабый локальный минимум функционалу $\mathcal{J}(y)$ (7.19). Значит, существует $\varepsilon > 0$ такой, что для любой функции

$$y(t) \in U_\varepsilon^*(y_0) = \left\{ y \mid y \in \mathcal{D}^*, \|y - y_0\|_{\mathbf{C}^1([a,b])} < \varepsilon \right\}$$

имеет место неравенство

$$\mathcal{J}(y) \geqslant \mathcal{J}(y_0). \tag{7.22}$$

Функция $y_0(t)$ принимает на концах отрезка $[a, b]$ значения

$$y_0(a) = y_1, y_0(b) = y_2. \tag{7.23}$$

В частности, условие (7.22) выполняется для любой функции $y(t) \in\in \mathcal{D}^*$, удовлетворяющей условиям (7.23). Следовательно, функция $y_0(t)$ также дает слабый локальный минимум в задаче с закреплёнными концами. Отсюда следует, что функция $y_0(t)$ удовлетворяет уравнению Эйлера (7.20).

Рассмотрим первую вариацию $\Phi'(0) = 0 = \int_a^b (f_y h + f_{y'} h')\, \mathrm{d}t$. Отсюда получаем

$$0 = \int_a^b (f_y h + f_{y'} h')\, \mathrm{d}t = f_{y'} h|_a^b + \int_a^b \left(f_y - \frac{d}{dt} f_{y'} \right) h\, \mathrm{d}t = f_{y'} h|_b.$$

Так как величина $h(b)$ в общем случае не равна нулю, то $f_{y'}|_{t=b} = 0$. Для отыскания функции $y_0(t)$ мы имеем уравнение Эйлера (7.20) и два краевых условия (7.21): $y(a) = y_1$, $f_{y'}|_{t=b} = 0$.

8.4 7.4. Conditional extremum.

8.4.1 7.4.1. Isoperimetric problem.

Изопериметрическая задача возникла давно (задача Дидоны) и формулируется следующим образом: среди всех замкнутых кривых

данной длины найти такую, которая бы ограничивала фигуру наибольшей площади. В дальнейшем все подобные задачи получили название изопериметрических.

Рассмотрим одну из них: среди непрерывно дифференцируемых функций $y(t), t \in [a, b]$, удовлетворяющих условиям

$$y(a) = y_1, \quad y(b) = y_2 \tag{7.24}$$

найти такие, на которых функционал

$$\mathcal{J}(y) = \int_a^b f(t, y, y')\, dt \tag{7.25}$$

достигает экстремума, а функционал

$$G(y) = \int_a^b g(t, y, y')\, dt \tag{7.26}$$

имеет заданное значение $G(y) = l$. В функционалах (7.25), (7.26) основные функции $f(t, y, y')$ и $g(t, y, y')$ определены на множестве $[a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ и дважды непрерывно дифференцируемые на нем. Множество допустимых функций имеет вид

$$\mathcal{D} = \left\{ y \mid y \in \mathbf{C}^1([a, b]), y(a) = y_1, y(b) = y_2, G(y) = l \right\}$$

Через $\overset{\circ}{\mathbf{C}}{}^1([a, b])$, как и ранее, обозначим множество функций

$$\overset{\circ}{\mathbf{C}}{}^1([a, b]) = \left\{ h \mid h \in \mathbf{C}^1([a, b]), h(a) = h(b) = 0 \right\}$$

Определение 7.4.1. Будем говорить, что функционал $\mathcal{J}(y)(7.25)$ достигает на функции $y_0(t) \in \mathcal{D}$ слабого локального минимума, если существует $\varepsilon > 0$ такой, что для любых $y(t) \in \mathcal{D}$, удовлетворяющих условию $\|y - y_0\|_{\mathbf{C}^1([a,b])} < \varepsilon$, имеет место неравенство $\mathcal{J}(y) \geqslant \mathcal{J}(y_0)$.

Theorem

7.6. Пусть функционал $\mathcal{J}(y)$ (7.25) достигает слабого локального минимума на функции $y_0(t) \in \mathcal{D}$ и пусть первая вариация $\delta G(y_0, h) \neq 0$ для некоторого $h_0 \in \overset{\circ}{\mathbf{C}}{}^1([a, b])$. Тогда найдётся такое число λ, что $\delta F(y_0, h) = 0$ для любого $h \in \overset{\circ}{\mathbf{C}}{}^1([a, b])$, где $F = \mathcal{J} + \lambda G$.

Если кроме того функция $y_0(t) \in \boldsymbol{C}^2([a, b])$, то она удовлетворяет уравнению Эйлера:

$$\varphi_y - \frac{d}{dt}\varphi_{y'} = 0, \quad \varphi = f + \lambda g. \tag{7.27}$$

Доказательство. - Пусть $y_0 \in \mathcal{D}$ даёт слабый локальный минимум функционала $\mathcal{J}(y)$ (7.25). По условию теоремы существует $h_0 \in \dot{\mathbf{C}}^1([a, b])$ такая, что $\delta G(y_0, h_0) = \int_a^b (g_y h_0 + g_{y'} h_0') \, \mathrm{d}t \neq 0$. Возьмём произвольную функцию $h \in \overset{\circ}{\mathbf{C}}{}^1([a, b])$ и рассмотрим функционалы $\mathcal{J}(y)(7.25)$ и $G(y)(7.26)$ на функциях вида

$$y(t) = y_0(t) + \alpha h_0(t) + \beta h(t)$$

где α и β - постоянные. Они не являются произвольными и связаны между собой таким образом, чтобы $y \in \mathcal{D}$. Так как функции h и h_0 фиксированные, то мы можем рассмотреть функции

$$\mathcal{J}(y_0 + \alpha h_0 + \beta h) = \Phi(\alpha, \beta),$$
$$G(y_0 + \alpha h_0 + \beta h) = \Psi(\alpha, \beta),$$

как функции переменных α и β. Для частных производных функций $\Phi(\alpha, \beta)$ и $\Psi(\alpha, \beta)$ имеем

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\beta=0} = \int_a^b (f_y h_0 + f_{y'} h_0') \, \mathrm{d}t; \quad \left.\frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\right|_{\alpha=\beta=0} = \int_a^b (f_y h + f_{y'} h') \, \mathrm{d}t; \tag{7.28}$$

$$\left.\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\beta=0} = \int_a^b (g_y h_0 + g_{y'} h_0') \, \mathrm{d}t; \quad \left.\frac{\partial \Psi}{\partial \beta}\right|_{\alpha=\beta=0} = \int_a^b (g_y h + g_{y'} h') \, \mathrm{d}t. \tag{7.29}$$

В результате мы получили задачу на условный экстремум для функции двух переменных. При $\alpha = \beta = 0$ функция $\Phi(\alpha, \beta)$ принимает своё минимальное значение при условиях $\Psi(\alpha, \beta) = l$, $\left.\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\beta=0} \neq 0$. Из теоремы об условном экстремуме следует

существование числа λ такого, что $\mathrm{d}(\Phi+\lambda\Psi)=0$ при значениях $\alpha=\beta=0$. Обозначая $F=\Phi+\lambda\Psi$, будем иметь

1. $\frac{\partial F}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=\beta=0}=0\Longrightarrow\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}+\lambda\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}\right)\Big|_{\alpha=\beta=0}=0.$

Отсюда и из (7.28), (7.29) находим

$$\lambda=-\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}}{\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}}=-\frac{\int_a^b\left(f_yh_0+f_{y'}h_0'\right)\mathrm{d}t}{\int_a^b\left(g_yh_0+g_{y'}h_0'\right)\mathrm{d}t}\left(=\lambda\left(h_0\right)\right). \tag{7.30}$$

2. $\frac{\partial F}{\partial\beta}\Big|_{\alpha=\beta=0}=0\Longrightarrow\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\beta}+\lambda\frac{\partial\Psi}{\partial\beta}\right)\Big|_{\alpha=\beta=0}=0.$

Используя (7.29), будем иметь

$$\int_a^b\left[\left(f_yh+f_{y'}h'\right)+\lambda\left(g_yh+g_{y'}h'\right)\right]\mathrm{d}t=$$
$$=\int_a^b\left[\left(f_y+\lambda g_y\right)h+\left(f_{y'}+\lambda g_{y'}\right)h'\right]\mathrm{d}t=0 \text{ для любого } h\in\overset{\circ}{\mathbf{C}}{}^1\left([a,b]\right)$$

Таким образом $\delta F\left(y_0,h\right)=0$ для любого $h\in\dot{\mathbf{C}}^1([a,b])$. Интегрируя по частям последний интеграл, из леммы (7.1) получим, что функция $\varphi=f+\lambda g$ удовлетворяет уравнению Эйлера (7.27): $\varphi_y-\frac{d}{dt}\varphi_{y'}=0$.

Вопрос: зависит ли величина λ от выбора h_0 ?

Замечание 7.4.1. В теореме 7.6 мы требовали, чтобы функция $y_0(t)$ не являлась стационарной точкой функционала (7.26) $G(y)$.$\diamond$

Использование:

1. Составляем функционал $F=\mathcal{J}+\lambda G$.
2. Для нахождения экстремалей получаем уравнение Эйлера: $\varphi_y-\frac{d}{dt}\varphi_{y'}=0$ (7.27).
3. Его решения описываются функцией $y=y\left(t,c_1,c_2,\lambda\right)$.
4. Для определения постоянных c_1,c_2,λ имеем следующие условия $y(a)=y_1,y(b)=y_2,G(y)=l$.

8.4.2 7.4.2. Lagrange problem

Рассмотрим задачу: среди всех непрерывно дифференцируемых кривых $y=y(t),z=z(t)$, лежащих на поверхности

$$g(t,y,z)=0 \tag{7.31}$$

и концы которых Закреплены

$$\begin{cases} y(a)=y_1, & z(a)=z_1, & g\left(a,y_1,z_1\right)=0,\\ y(b)=y_2, & z(b)=z_2, & g\left(a,y_2,z_2\right)=0,\end{cases} \tag{7.32}$$

найти такие, на которых функционал

$$F(y,z)=\int_a^b f\left(t,y,z,y',z'\right)\mathrm{d}t \tag{7.33}$$

достигает экстремума. Основная функция $f(t,y,z,p,q)$ определена на множестве $[a,b]\times$
$\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ и непрерывно дифференцируема на нем. Функция $g(t,y,z)$ предполагается дважды непрерывно дифференцируемой и $\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2++\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2>0$. Отсюда следует, что поверхность $g(t,y,z)$ гладкая.

Определение 7.4.2. Пара функций $y(t),z(t)\in\mathbf{C}^1([a,b])$, которые удовлетворяют условию (7.32) и графики которых лежат на поверхности (7.31), называется допустимой. Она обозначается $\langle y(t),z(t)\rangle$.

Определение 7.4.3. Мы говорим, что функционал $F(y,z)$ достигает слабого локального минимума на паре функций $\langle y_0(t),z_0(t)\rangle$, если существует $\varepsilon>0$ такой, что для любых пар $\langle y(t),z(t)\rangle$, удовлетворяющих условию $\|y-y_0\|_{\mathbf{C}^1([a,b])}+\|z-z_0\|_{\mathbf{C}^1([a,b])}<\varepsilon$, имеет место неравенство $F(y,z)\geq F\left(y_0,z_0\right)$.

Theorem

7.7. Пусть функционал $F(y,z)$ (7.33) достигает на паре функций $\langle y_0(t),z_0(t)\rangle$ слабого локального минимума. Пусть также
$y_0(t),z_0(t)\in C^2([a,b])$, *и в каждой точке кривой* $y=y_0(t),z=z_0(t)$, $t\in[a,b]$ имеет место либо неравенство $g_y\neq 0$, либо $g_z\neq 0$. Тогда

найдется функция $\lambda(t)$ такая, что функции $y_0(t),z_0(t)$ удовлетворяют уравнениям Эйлера:

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi_y-\frac{d}{dt}\varphi_{y'}=0\\ \varphi_z-\frac{d}{dt}\varphi_{z'}=0\end{array}\right.,\varphi=f+\lambda g, \tag{7.34}$$

составленным для функционала $L(y,z)=\int_a^b(f+\lambda g)\mathrm{d}t$.
Доказательство. $\to$ Пусть пара функций $\langle y_0(t),z_0(t)\rangle$ дает слабый локальный минимум функционала $F(y,z)$ (7.33). Будем предполагать, что на поверхности $g(t,y,z)$ в точках кривой $y=y_0(t),z=z_0(t),t\in[a,b]$ справедливо неравенство $g_z(t,y,z)\neq 0$. Рассмотрим на кривой точку $(\hat{t},\hat{y},\hat{z})$. В силу преположения в ней $g_z(\hat{t},\hat{y},\hat{z})\neq 0$. Тогда на основании теоремы о неявной функции найдется окрестность $U(\hat{t},\hat{y},\hat{z})$ точки $(\hat{t},\hat{y},\hat{z})$ такая, что уравнения $g(t,y,z)=0$ и $z=\omega(t,y)$, $\hat{z}=\omega(\hat{t},\hat{y})$ эквивалентны.

Возьмём теперь две точки на кривой $y=y_0(t),z=z_0(t),t\in[a,b]$, принадлежащие окрестности $U(\hat{t},\hat{y},\hat{z})$, а именно $C\left(t_1,y_0\left(t_1\right),z_0\left(t_1\right)\right)$ и $D\left(t_2,y_0\left(t_2\right),z_0\left(t_2\right)\right)$. Дугу $\widehat{CD}$ обозначим γ_0. Рассмотрим на паре $\langle y_0(t),z_0(t)\rangle$ значения функционала (7.33):

$$F\left(y_0,z_0\right)=\int_a^{t_1}f\ \mathrm{d}t+\hat{F}\left(y_0\right)+\int_{t_2}^b f.$$

Здесь

$$\hat{F}\left(y_0\right)=\int_{t_1}^{t_2}f(t,y,\underbrace{\omega(t,y)}_{z},y',\underbrace{\omega_t+\omega_y y'}_{z'})\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\hat{f}\left(t,y,y'\right)\mathrm{d}t.$$

Покажем, что функционал $\hat{F}(y)$ достигает слабого локального минимума на кривой $y_0(t),t\in[t_1,t_2]$. Для этого проварируем кривую γ_0. Тогда $\Delta\hat{F}=\Delta F\geqslant 0$. Отсюда следует, что функция $\hat{f}\left(t,y,y'\right)$ удовлетворяет уравнению Эйлера $\hat{f}_y-\frac{d}{dt}\hat{f}_{y'}=0$, и мы получаем

$$f_y+f_z\omega_y+f_{z'}\left[\omega_{ty}+\omega_{yy}y'\right]-\frac{d}{dt}\left[f_{y'}+\omega_y f_{z'}\right]=0\Longrightarrow$$
$$f_y-\frac{d}{dt}f_{y'}+\omega_y\left[f_z-\frac{d}{dt}f_{z'}\right]=0.$$

В результате, вспоминая, что $\omega_y = -\frac{g_y}{g_z}, g_z(t,y,z) \neq 0$, находим

$$\frac{f_y - \frac{d}{dt} f_{y'}}{g_y} = \frac{f_z - \frac{d}{dt} f_{z'}}{g_z} = -\lambda(t).$$

Из этих соотношений следует

$$\begin{cases} f_y + \lambda g_y - \frac{d}{dt} f_{y'} = 0 \\ f_z + \lambda g_z - \frac{d}{dt} f_{z'} = 0 \end{cases} \tag{7.35}$$

Обозначая $\varphi = f + \lambda g$, из (7.35) получим систему уравнений Эйлера (7.34).
Использование:

1. Составляем функцию $\varphi = f + \lambda g$ и выписываем систему уравнений Эйлера (7.33).
2. Общее решение системы (7.34) имеет вид

$$\begin{cases} y = y\left(t, c_1, c_2, c_3, c_4, \lambda(t)\right) \\ z = z\left(t, c_1, c_2, c_3, c_4, \lambda(t)\right) \end{cases}$$

3. Для определения четырёх постоянных c_1, c_2, c_3, c_4 и функции $\lambda(t)$ служат условия (7.31), (7.32):

$$\begin{cases} y(a) = y_1, & z(a) = z_1, \\ y(b) = y_2, & z(b) = z_2, \end{cases} \qquad g(t, y(t), z(t)) = 0.$$

Замечание 7.4.2. Если уравнение (7.31) может быть разрешено (например, относительно z) сразу для всех рассматриваемых t, то задача сводится к простейшей задаче вариационного исчисления заменой z, z' в основном функционале на их значение $z = \omega(t,y), z' = \frac{d}{dt}\omega(t,y)$.$\diamond$
Замечание 7.4.3. Поверхность (7.31) может быть задана в параметрическом виде $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$. Линии $u = u(t), v = v(t)$ минимальной длины, лежащие на поверхности (7.31) и закрепленые в двух точках на ней, называются геодезическими.

Найдем геодезические линии на цилиндре:

$$\vec{r} = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, z), u = \varphi, v = z$$

Длина дуги на цилиндре, отвечающая значениям t_1 и t_2, равна

$$L[\varphi, z] = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{R^2\varphi_t^2 + z_t^2}$$

Уравнения Эйлера, отвечающие этому функционалу, будут следующими:

$$\underbrace{f_\varphi}_{=0} - \frac{d}{dt}\frac{\varphi_t R^2}{\sqrt{R^2+\varphi_t^2+z_t^2}} = 0 \implies \frac{R^2\varphi_t}{\sqrt{R^2\varphi^2+z_t^2}} = c_1$$
$$\underbrace{f_z}_{=0} - \frac{d}{dt}\frac{z_t}{\sqrt{R^2+\varphi_t^2+z_t^2}} = 0 \implies \frac{z_t}{\sqrt{R^2\varphi^2+z_t^2}} = c_2$$

Разделив одно уравнение на другое и проинтегрировав найденное уравнение, будем иметь

$$\frac{z_t}{\varphi_t} = C\left(= \frac{c_2}{c_1}\right) \implies \frac{dz}{d\varphi} = C \implies \begin{cases} z = C\varphi + D \\ x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \end{cases}$$

В результате получаем винтовые линии.

8.5 Examples of variation calculus in physics

(I'll collect them later, see also problem-solution section!)

9 8 Autonomous Systems by Diesperov

9.0.1 8.1. Basic Terms and Definitions

Нормальная система дифференциальных уравнений

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}), \vec{x} \subset \Omega, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \tag{8.1}$$

правая часть которой не зависит от переменной t, называется автономной. При этом предполагается, что в области Ω функция $\vec{f}(\vec{x})$ удовлетворяет следующим требованиям:

1. $\vec{f}(\vec{x}) \in \mathbf{C}(\Omega)$;
2. $\vec{f}(\vec{x}) \in \mathrm{Lip}_{\vec{x}}\left(\bar{\Omega}_L\right)$.

В силу теоремы существования и единственности решения задачи Коши для любых $t_0 \in \mathbb{R}$ и $\vec{x}_0 \in \Omega$ существует единственное решение $\vec{\varphi}(t), t \in J$, системы (8.1), удовлетворяющее начальному условию:

$$\vec{\varphi}\left(t_0\right) = \vec{x}_0. \tag{8.2}$$

Ниже для простоты, чтобы не акцентировать внимание на области определения решения, будем считать $\Omega \equiv \mathbb{R}^n_{\vec{x}}$.

График решения $\vec{x} = \vec{\varphi}(t), t \in J$, в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}_{t,\vec{x}}$ называется интегральной кривой. Её проекция на пространство $\mathbb{R}^n_{\vec{x}}$ называется фазовой траекторией или просто траекторией, а само пространство $\mathbb{R}^n_{\vec{x}}$ - фазовым. Направление стрелки на фазовой траектории будет указывать на возрастание времени t вдоль неё, тем самым определяя её ориентацию. Фазовая траектория в $\mathbb{R}^n_{\vec{x}}$ задаётся векторным уравнением $\vec{x} = \overrightarrow{\varphi(t)}, t \in J$, в котором время играет роль параметра.

(why was it called autonomous???)

9.0.2 8.2. Properties of Autonomous Systems Solutions and Theorem on the Behavior of Phase Trajectories

Общие свойства решений автономных систем

1. Если $\vec{\varphi}(t), t \in (a, b)$, - решение системы (8.1), то для любого $\tau \in \mathbb{R}$ функи, $\vec{\varphi}(t+\tau), t \in (a-\tau, b-\tau)$, также является решением u все эти решения при различных τ имеют одну u ту же фазовую траекторию.
   Доказательство. - Так как $\vec{\varphi}(t)$ - решение, то $\vec{\varphi}'(t) \equiv \vec{f}(\vec{\varphi}(t))$, $t \in (a, b)$. Заменяя t на $(t+\tau)$, получим $\vec{\varphi}'(t+\tau) \equiv \vec{f}(\vec{\varphi}(t+\tau))$. Значит функция $\vec{x} = \vec{\varphi}(t+\tau)$ - тоже решение. Эти решения имеют одну и ту же траекторию, так как через любую точку интегральной кривой первого решения ($\vec{x}^\star, t^\star$), где $\vec{x}^\star = \vec{\varphi}\left(t^\star\right)$, интегральная кривая второго решения $\vec{x} = \vec{\varphi}(t+\tau)$ проходит через неё при $t = t^\star - \tau$. Таким образом, каждая фазовая траектория, не являющаяся точкой, является проекцией бесконечно большого числа интегральных кривых.

2. Если $\vec{\psi}(t)$ и $\vec{\varphi}(t)$ - два решения системь (8.1) и существуют такие t_1 и t_2, что $\vec{\psi}(t_1) = \vec{\varphi}(t_2)$, то $\vec{\psi}(t) = \vec{\varphi}(t+\tau)$, где $\tau = t_2 - t_1$.

Доказательство. $\rightarrow$ В силу свойства 1 функция $\vec{\varphi}(t+\tau), \tau = t_2 - t_1$ - решение системы (8.1). Из равенства $\vec{\varphi}(t_2) = \vec{\psi}(t_1)$ следует, что $\vec{\varphi}(t_1+\tau) = \vec{\varphi}(t_2) = \vec{\psi}(t_1)$. Таким образом, решения $\vec{\varphi}(t+\tau)$ и $\vec{\psi}(t)$ удовлетворяют одинаковым начальным условиям при $t = t_1$. В силу теоремы существования и единственности имеем

$$\vec{\varphi}(t+\tau) = \vec{\psi}(t)$$

Аналогично,

$$\vec{\psi}(t-\tau) = \vec{\varphi}(t)$$

Значит, две фазовые траектории либо не имеют общих точек, либо совпадают. Таким образом, фазовое пространство расслаивается на непересекающиеся траектории.

Из свойства 2 вытекает интересное следствие, а именно: если $\vec{\varphi}(t, t_0, \vec{x}_0)$ - решение системы (8.1) в форме Коши с начальными данными ($t_0, \vec{x}_0$), то по свойству 2 функция $\vec{\varphi}(t+\tau, t_0+\tau, \vec{x}_0)$ также является решением системы (8.1). Так как $\vec{\varphi}(t_0, t_0, \vec{x}_0) = \vec{x}_0$ и $\vec{\varphi}(t_0+\tau, t_0+\tau, \vec{x}_0) = \vec{x}_0$ при $t = t_0$, то в силу теоремы существования и единственности имеем

$$\vec{\varphi}(t+\tau, t_0+\tau, \vec{x}_0) = \vec{\varphi}(t, t_0, \vec{x}_0) \tag{8.3}$$

при всех t, для которых оба решения определены.
Положим $\tau = -t_0$ в (8.3) и обозначим $\vec{\varphi}(t-t_0, 0, \vec{x}_0) = \vec{\varphi}(t-t_0, \vec{x}_0)$. Тогда получим, что решение $\vec{x} = \vec{\varphi}(t, t_0, \vec{x}_0)$ можно записать в виде

$$\vec{x} = \vec{\varphi}(t-t_0, \vec{x}_0). \tag{8.4}$$

Формула (8.4) показывает, что положение движущейся точки определяется начальной точкой $\vec{x}_0$ фазового пространства и интервалом времени, прошедщего после начального момента, но не самим начальным моментом. Из неё также видно, что если две фазовые траектории системы (8.1) имеют общую точку, то они совпадают.

Определение 8.2.1. Точка $\vec{x} = \vec{a}$ в фазовом пространстве называется положением равновесия автономной системы (8.1), если

$$\vec{f}(\vec{a}) = \overrightarrow{0}$$

3. Если $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ - положение равновесия, то вектор-функция $\vec{x}(t) = \vec{a}, t \in (-\infty, +\infty)$ является решением системы (8.1).

Доказательство. —

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} = \overrightarrow{0}, \vec{f}(\vec{x}(t)) = \vec{f}(\vec{a}) = \overrightarrow{0}$$

Следовательно, если точка $\vec{a}$ - положение равновесия, то она - фазовая траектория.
4) Фазовая траектория, отличная от точки равновесия, является гладкой кривой.

Доказательство. - Если $\vec{x} = \vec{\varphi}(t), t \in (a, b)$ - решение системы (8.1), то касательный вектор в точке $\vec{x}_0 = \vec{\varphi}(t_0), t_0 \in (a, b)$ равен $\frac{d\vec{\varphi}}{dt}(t_0) = \vec{f}(\vec{x}_0) \neq 0$.
5) Траектория автономной системы не может войти в положение равновесия за конечное время.
Доказательство. $\rightarrow$ Пусть $\vec{a}$ - положение равновесия и $\vec{x}^\star(t) \equiv \vec{a}$, $t \in (-\infty, +\infty)$. Если

траектории решений $\vec{x}(t)$ и $\vec{x}^{\star}(t)$ не совпадают, то $\vec{x}(t) \neq \vec{a}$ при всех конечных t. Следовательно, только при $t \to \pm\infty$ фазовая траектория может асимптотически приближаться к положению равновесия, т.е. $\lim_{t\to\pm\infty} |\vec{x}(t) - \vec{a}| = 0$. Это означает, что положение равновесия $\vec{x}^{\star} = \vec{a}$ будет предельной точкой множества значений $\vec{x}(t)$ при $|t| \to +\infty$.

Ниже в этом случае будем говорить, что при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$ фазовая траектория примыкает к положению равновесия.

6) Решения автономной системы (8.1) обладают групповым свойством: если $\vec{x} = \vec{\varphi}(t, \vec{x}_0)$ - решение системы (8.1), удовлетворяющее начальному условию $\vec{\varphi}(0, \vec{x}_0) = \vec{x}_0$, то

$$\vec{\varphi}(t, \vec{\varphi}(\tau, \vec{x}_0)) = \vec{\varphi}(t + \tau, \vec{x}_0)$$

на любом интервале, на котором одновременно определены функи,ии, стоящие в левой и правой частях равенства.

Доказательство. - Рассмотрим решение $\vec{x} = \vec{\varphi}(t, \vec{x}_0)$, удовлетворяющее начальному условию $\vec{\varphi}(0, \vec{x}_0) = \vec{x}_0$. Положим $\vec{x}_1 = \vec{\varphi}(\tau, \vec{x}_0)$ при $t = \tau$. Тогда $\vec{\varphi}_1(t) = \vec{\varphi}(t, \vec{x}_1)$ - решение системы (8.1) и, в силу свойства $1, \vec{\varphi}_2(t) = \vec{\varphi}(t + \tau, \vec{x}_0)$ также является решением (8.1). При этом

$$\vec{\varphi}_1(0) = \vec{\varphi}(0, \vec{x}_1) = \vec{x}_1,$$
$$\vec{\varphi}_2(0) = \vec{\varphi}(\tau, \vec{x}_0) = \vec{x}_1.$$

Таким образом, решения $\vec{\varphi}_1(t)$ и $\vec{\varphi}_2(t)$ системы уравнений (8.1) удовлетворяют одному и тому же начальному условию. В силу теоремы единственности $\vec{\varphi}_1(t) = \vec{\varphi}_2(t)$ или

$$\vec{\varphi}(t, \vec{\varphi}(\tau, \vec{x}_0)) = \vec{\varphi}(t + \tau, \vec{x}_0)$$

Определение 8.2.2. Число $T \neq 0$ называется периодом решения $\vec{x} = \vec{\varphi}(t), t \in (-\infty, +\infty)$, если

$$\vec{\varphi}(t + T) = \vec{\varphi}(t), \forall t \in \mathbb{R}$$

Если $T > 0$ - период, то $(-T)$ - также период. Действительно, если T - период, то $\vec{\varphi}(t + T) = \vec{\varphi}(t)$. Заменяя t на $t - T$, получим $\vec{\varphi}(t) = \vec{\varphi}(t - T)$. Следовательно, ($-T$) - период. Наименьший положительный период называется главным.

7) Пусть $\vec{\varphi}(t), t \in (a, b)$, - решение, отличное от положения равновесия, и существуют такие $t_1, t_2 \in (a, b)\,(t_2 > t_1)$, что $\vec{\varphi}(t_2) = \vec{\varphi}(t_1)$. Тогда решение - периодическое, существует главный период, а траектория - замкнутая кривая.

Доказательство. - По предположению, траектория сама себя пересекает, так как существуют числа $t_1, t_2 \in (a, b)\,(t_2 > t_1)$ такие, что

$$\vec{\varphi}(t_1) = \vec{\varphi}(t_2)$$

По свойству 2 имеем $\vec{\varphi}(t) = \vec{\varphi}(t + \tau)$, где $\tau = t_2 - t_1$. Функция $\vec{x} = \vec{\varphi}(t + \tau)$ является решением автономной системы (8.1) при $t \in (a - -\tau, b - \tau\ )$. Решения $\vec{\varphi}(t)$ и $\vec{\varphi}(t + \tau)$ совпадают на общей части областей их определения, т.е. при $t \in [a, b - \tau)$. Следовательно, решение

$$\vec{x}(t) = \begin{cases} \vec{\varphi}(t), t \in (a, b), \\ \vec{\varphi}(t + \tau), t \in (a - \tau, a] \end{cases}$$

является продолжением решения $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ на интервал ($a - \tau, b$). Следуя этой процедуре, мы продолжим решение $\vec{\varphi}(t)$ на интервал ($-\infty, b$). С помощью соотношения $\vec{\varphi}(t) = \vec{\varphi}(t - \tau)$ решение $\vec{x} = \vec{\varphi}(t), t \in (-\infty, b)$, продолжается на всю числовую ось.

Рассмотрим функцию $\vec{\psi}(t) = \vec{\varphi}(t + +\tau)$. Для неё имеем $\vec{\psi}(t_1) = \vec{\varphi}(t_2) = \vec{\varphi}(t_1)$. По теореме единственности $\vec{\psi}(t) \equiv \vec{\varphi}(t), t \in \mathbb{R}$, т.е.

$$\vec{\varphi}(t+T) = \vec{\varphi}(t), t \in \mathbb{R}, T = t_2 - t_1 > 0$$

Следовательно, T - период. Однако могут быть и другие периоды. Обозначим множество всех положительных периодов через M. Так как решение $\vec{\varphi}(t)$ не является положением равновесия, то существует такое $t^\star$, что $\vec{\varphi}(t^\star) \neq \vec{\varphi}(t_1)$. Составим разность $|\vec{\varphi}(t^\star) - \vec{\varphi}(t_1)| = \varepsilon > 0$. Так как функция $\vec{\varphi}(t)$ непрерывная, то найдется такое $\delta > 0$, что $|\vec{\varphi}(t) - \vec{\varphi}(t_1)| < \varepsilon$ при всех $|t - t_1| < \delta$. Значит, $\vec{\varphi}(t) \neq \vec{\varphi}(t^*)$ при этих t. Но за время, равное периоду, решение $\vec{\varphi}(t)$ должно пройти через все точки своей траектории. Поэтому величина любого положительного периода не меньше, чем δ. Рассмотрим $\inf\{M\} = T^\star$. Имеем $T^\star \geq \delta$. Если $T^\star \notin M$ и является предельной точкой M, то имеется последовательность периодов $T_i \to T^\star \neq 0, \vec{\varphi}(t + T_i) = \vec{\varphi}(t)$. При $T_i \to T^\star$ в силу непрерывности решения $\vec{\varphi}(t), t \in \mathbb{R}$, получим $\vec{\varphi}(t + T^\star) = \vec{\varphi}(t)$, т.е. $T^\star$ - период. Отсюда следует, что множество M замкнутое и $T^\star \in M$. Траектория $\vec{\varphi}(t), t \in [0, T^\star]$, - замкнутая кривая, так как $\vec{\varphi}(T^\star) = \vec{\varphi}(0)$. Ясно, что не существуют $t_1, t_2 \in [0, T^\star], |t_2 - t_1| < T^\star$ такие, что $\vec{\varphi}(t_2) = \vec{\varphi}(t_1)$. В противном случае решение $\vec{\varphi}(t)$ согласно сказанному выше имело бы период $T_1 = |t_2 - t_1| < T^\star$. Но это противоречит тому, что $T^\star$ - наименьший положительный период.

Из сказанного выше вытекает следующая теорема. Сформулируем её.

Theorem

8.1. Каждая траектория автономной системы (8.1) принадлежит одному из следующих типов:

1. положение равновесия;
2. замкнутая траектория, которая соответствует периодическому решению с положительным наименьшим периодом;
3. незамкнутая траектория, которая соответсвует непериодическому решению.

Доказательство. $\to$ Если решение $\vec{x}(t) = \vec{a}, t \in (-\infty, +\infty), -$ положение равновесия системы (8.1), то фазовая траектория - точка.

Если решение $\vec{x}(t)$ не является положением равновесия системы и $\vec{x}(t_1) = \vec{x}(t_2)$ при некоторых t_1 и $t_2\,(t_1 \neq t_2)$, то решение периодическое, имеет главный период, а фазовая траектория - замкнутая кривая.

Если $\vec{x}(t_1) \neq \vec{x}(t_2)$ при любых t_1 и $t_2, (t_1 \neq t_2)$, то решение непериодическое, а фазовая траектория является незамкнутой кривой.

9.0.3 8.3. Phase portrait of solutions of an autonomous linear system with real coefficients on the plane

Рассмотрим линейную однородную систему уравнений с постоянными: вещественными коэффициентами на плоскости

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} \tag{8.5}$$

в которой $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \det A \neq 0$. Она автономная. Точка $\vec{x} = \overrightarrow{0}$ - её единственное положение равновесия. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\,\lambda + \det A = 0.$$

Собственные значения λ_1 и λ_2 удовлетворяют уравнениям

$$\lambda_1 + \lambda_2 = (a_{11}+a_{22})\,, \lambda_1\lambda_2 = \det A \neq 0$$

Наша задача - изучить поведение фазовых траекторий системы (8.5) в окрестности положения равновесия $\vec{x} = \overrightarrow{0}$. Так как $\lambda_1\lambda_2 = \det A \neq 0$, то могут представиться три случая:
I) λ_1, λ_2 не равны нулю, действительные и различные;
II) λ_1, λ_2 комплексно - сопряженные;
III) $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$.
I) Пусть собственные значения λ_1, λ_2 действительные и различные. В этом случае общее решение системы (8.5) имеет вид

$$\vec{x} = C_1\vec{h}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\vec{h}_2 e^{\lambda_2 t} \tag{8.6}$$

Здесь $\vec{h}_1, \vec{h}_2$ - собственные векторы, соответствующие λ_1, λ_2. Они образуют базис. Обозначая через η_1, η_2 координаты вектора $\vec{x}$ относительно этого базиса, получим

$$\eta_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \eta_2 = C_2 e^{\lambda_2 t} \tag{8.7}$$

При $C_1 = C_2 = 0$ мы имеем положение равновесия, а фазовая траектория является точкой. Ниже предполагается, что $|\lambda_1| < |\lambda_2|$. Рассмотрим сначала случай, когда $\lambda_1\lambda_2 > 0$.
а) Пусть $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$. При $C_1^2 + C_2^2 > 0$ фазовые траектории согласно соотношениям (8.7) описываются уравнениями

$$\left[\begin{array}{c} \eta_2 = C_2 \left(\frac{\eta_1}{C_1}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, C_1 \neq 0 \\ \eta_1 = 0, C_1 = 0, C_2 \neq 0 \end{array} \right. \tag{8.8}$$

Фазовые траектории при $C_1 \neq 0$ описываются степенной функцией и примыкают к точке положения равновесия $\vec{x} = \overrightarrow{0}$. Если объединить любую из них с точкой положения равновесия, то полученная кривая будет касаться в ней оси $\eta_2 = 0$, так как $|\lambda_1| < |\lambda_2|$. Имея в виду сказанное, будем говорить, что фазовая траектория примыкает к точке положения равновесия, имея касательную. При $C_1 > 0, C_2 > 0$ фазовые траектории расположены в первом квадранте и согласно (8.7) при $|t| \to \infty$ ведут себя следующим образом:

$$\eta_1 \to 0, \eta_2 \to 0 \text{ при } t \to +\infty;$$
$$\eta_1 \to +\infty, \eta_2 \to +\infty \text{ при } t \to -\infty.$$

Это означает, что точка на фазовой траектории при увеличении t движется к точке положения равновесия. Подобным образом устанавливается поведение фазовых траекторий в остальных квадрантах при значениях постоянных $C_1C_2 > 0, C_1C_2 < 0$. Квадранты разделяются четырьмя фазовыми траекториями: $\eta_1 > 0, \eta_2 = 0; \eta_1 < 0, \eta_2 = 0$; $\eta_1 = 0, \eta_2 > 0; \eta_1 = 0, \eta_2 < 0$, которые при объединении их с точкой положения равновесия $\vec{x} = \overrightarrow{0}$ образуют полуоси системы координат $\eta_1 O \eta_2$. Ориентация фазовых траекторий определяется из соотношений (8.7). Такое положение равновесия и расположение фазовых траекторий называются устойчивым узлом. Поведение фазовых траекторий изображено на рис. 8.1.

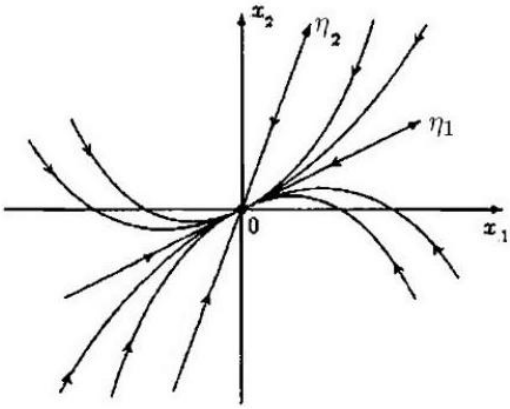


Рис. 8.1

b) Рассмотрим теперь случай $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$. В первом квадранте при $C_1 > 0, C_2 > 0$ в силу уравнений (8.8) фазовые траектории описываются степенной функцией так же, как и в случае устойчивого узла. Ориентация фазовых траекторий определяется из соотношений (8.7):

$$\eta_1 \to 0, \eta_2 \to 0 \text{ при } t \to -\infty; \eta_1 \to +\infty, \eta_2 \to +\infty \text{ при } t \to +\infty.$$

Отсюда следует, что она меняется на противоположную по сравнению с предыдущим случаем. В остальных квадрантах картина поведения фазовых траекторий устанавливается аналогично. Такое положение равновесия и расположение фазовых траекторий называются неустойчивым узлом. Поведение фазовых траекторий изображено на рис. 8.2.

c) Пусть теперь $\lambda_1\lambda_2 < 0$. Сначала исследуем случай, когда $\lambda_1 << 0, \lambda_2 > 0$. Согласно уравнениям (8.8) фазовые траектории опи-

сываются степенной функцией с отрицательным показателем степени и ведут себя подобно гиперболам. Их ориентация устанавливается из уравнений (8.7). Имеем в первом квадранте ($C_1 > 0, C_2 > 0$):

$$\eta_1 \to 0, \eta_2 \to +\infty \text{ при } t \to +\infty; \eta_1 \to +\infty, \eta_2 \to 0 \text{ при } t \to -\infty.$$

В остальных квадрантах картина поведения фазовых траекторий определяется аналогично. Четыре фазовые траектории примыкают к точке положения равновесия. Они разделяют квадранты между собой и вместе с точкой положения равновесия образуют полуоси системы координат $\eta_1 O \eta_2$.

Аналогично строится картина фазовых траекторий при $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$. Такое расположение фазовых траекторий и положение равновесия называются седлом. Поведение фазовых траекторий изображено на рис. 8.3.

II) Пусть теперь λ_1, λ_2 - комплексно-сопряженные числа:

$$\lambda_1 = \mu - i\nu, \lambda_2 = \mu + i\nu, \quad \nu \neq 0$$

Комплексно-сопряженные векторы $\vec{H}_1, \vec{H}_2$, отвечающие $\lambda_1, \lambda_2 \left(= \overline{\lambda_1}\right)$, имеют вид

$$\vec{H}_1 = \vec{h}_1 + i\vec{h}_2, \vec{H}_2 = \overrightarrow{\bar{H}}_1 = \vec{h}_1 - i\vec{h}_2,$$

где $\vec{h}_1, \vec{h}_2$ - действительные линейно независимые векторы. Общее решение описывается функцией

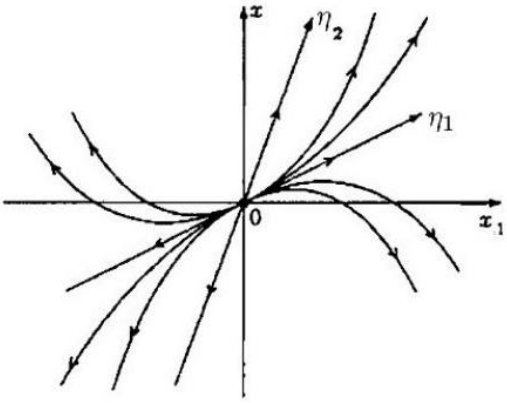


Рис. 8.2

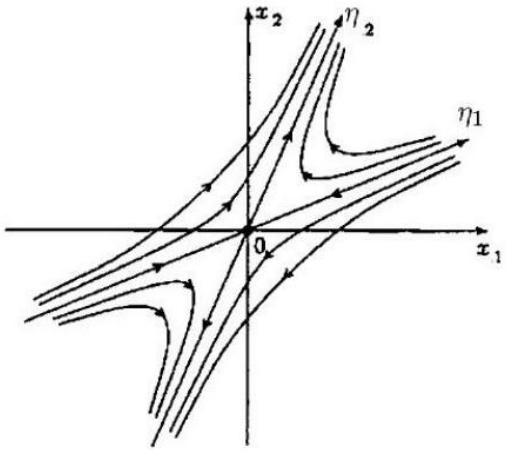


Рис. 8.3

$$\vec{x} = C_1 \operatorname{Re}\left[e^{\lambda_1 t}\vec{H}_1\right] + C_2 \operatorname{Im}\left[e^{\lambda_1 t}\vec{H}_1\right] =$$
$$= e^{\mu t}\left\{C_1 \operatorname{Re}\left[(\cos\nu t - i\sin\nu t)\left(\overrightarrow{h_1} + i\overrightarrow{h_2}\right)\right] +\right.$$
$$\left. + C_2 \operatorname{Im}\left[(\cos\nu t - i\sin\nu t)\left(\overrightarrow{h_1} + i\overrightarrow{h_2}\right)\right]\right\} =$$
$$= e^{\mu t}\left\{C_1\left(\overrightarrow{h_1}\cos\nu t + \overrightarrow{h_2}\sin\nu t\right) + C_2\left(-\overrightarrow{h_1}\sin\nu t + \overrightarrow{h_2}\cos\nu t\right)\right\} =$$
$$= e^{\mu t}\left\{C_1\cos\nu t - C_2\sin\nu t)\overrightarrow{h_1} + (C_1\sin\nu t + C_2\cos\nu t)\overrightarrow{h_2}\right\} =$$
$$= Re^{\mu t}\left\{\cos(\alpha+\nu t)\overrightarrow{h_1} + \sin(\alpha+\nu t)\overrightarrow{h_2}\right\}$$

Здесь $R = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \frac{C_1}{R} = \cos\alpha, \frac{C_2}{R} = \sin\alpha$. Таким образом, в базисе $\vec{h}_1, \vec{h}_2$ координатами решения будут

$$\eta_1 = R\cos(\alpha+\nu t)e^{\mu t}, \eta_2 = R\sin(\alpha+\nu t)e^{\mu t}.$$

Введем полярную систему координат

$$\rho = Re^{\mu t}, \theta = \alpha + \nu t$$

Отсюда видно, что фазовые траектории являются спиралями. Они примыкают к точке

положения равновесия.
a) Пусть $\mu < 0$. Точка на фазовой траектории при увеличении t движется к точке положения равновесия. Если $\nu > 0$, то спирали закручиваются против часовой стрелки. Если же $\nu < 0$, то они закручиваются по часовой стрелке.

Такое положение равновесия и расположение фазовых траекторий в окрестности точки $\vec{x} = \overrightarrow{0}$ называются устойчивым фокусом. Аналогично рассматривается случай $\mu > 0$. Он носит название

неустойчивый фокус. Точка на фазовой траектории при увеличении t движется от точки положения равновесия. В верхней части рис. 8.4 изображены устойчивые фокусы. В левом из них $\nu > 0$ (точка вдоль фазовой траектории при увеличении t движется против часовой стрелки к положению равновесия), в правом $\nu < 0$ (точка вдоль фазовой траектории при увеличении t движется по часовой стрелке к положению равновесия). В нижней части рисунка изображены неустойчивые фокусы с $\nu > 0$ и $\nu < 0$.

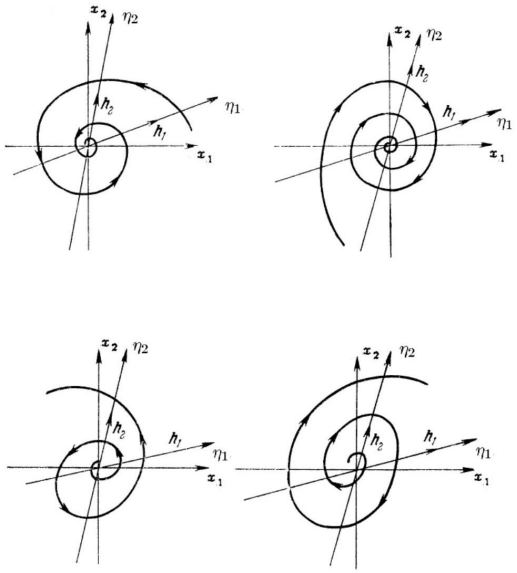


Рис. 8.4

b) Если $\mu = 0$, то $\rho = R$ и фазовые траектории представляют собой эллипсы с центром в точке положения равновесия. Если $\nu > 0$, то точ-

ка вдоль фазовой траектории движется против часовой стрелки. При $\nu < 0$ она вдоль фазовой траектории движется по часовой стрелке.
III) Рассмотрим ситуацию, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$. Характер поведения фазовых траекторий зависит от того, будет ли базис состоять из собственных векторов или из собственного и присоединённого векторов (жорданов базис). Исследуем эти две возможности.
a) Базис состоит из двух собственных векторов $\overrightarrow{h_1}, \overrightarrow{h_2}$, которые определяются из уравнений

$$A\vec{h}_1 = \lambda\vec{h}_1, A\vec{h}_2 = \lambda\vec{h}_2.$$

В этом случае координаты решения определяются функциями (8.7):

$$\eta_1 = \mathrm{C}_1 e^{\lambda t}, \eta_2 = \mathrm{C}_2 e^{\lambda t}.$$

Отсюда следует, что при $C_1^2 + C_2^2 > 0$ фазовые траектории описываются уравнением $C_1\eta_2 = C_2\eta_1$, которое показывает, что фазовые траектории представляют собой лучи,

примыкающие к точке положения равновесия. Если $\lambda < 0$, то точка на фазовой траектории при увеличении t движется к положению равновесия.
Такое положение равновесия и расположение фазовых траекторий называются устойчивым дикритическим узлом.
Если $\lambda > 0$, то точка на фазовой траектории при увеличении t движется от положения равновесия.
Такое положение равновесия и расположение фазовых траекторий называются неустойчивым дикритическим узлом. Поведение фазовых траекторий при $\lambda < 0$ изображено на левом рис. 8.5, на правом - при $\lambda > 0$.
b) Базис состоит из собственного $\overrightarrow{h_1}$ и присоединённого $\overrightarrow{h_2}$ векторов, которые находятся из уравнений

$$A\vec{h}_1 = \lambda\vec{h}_1, A\vec{h}_2 = \lambda\vec{h}_2 + \vec{h}_1.$$

Так как векторы $\vec{h}_1, \vec{h}_2$ линейно независимые, то решение системы (8.5) в базисе $\overrightarrow{h_1}, \overrightarrow{h_2}$ можно представить в виде

$$\vec{x}(t) = \eta_1(t)\vec{h}_1 + \eta_2(t)\vec{h}_2.$$

Подставляя $\vec{x}(t)$ в систему (8.5), получим уравнения для определения функций $\eta_1(t), \eta_2(t)$:

$$\frac{d\eta_1}{dt} = \lambda\eta_1 + \eta_2, \frac{d\eta_2}{dt} = \lambda\eta_2.$$

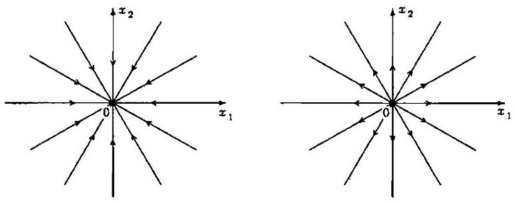


Рис. 8.5

В результате решения этой системы находим

$$\eta_1 = (C_1 + C_2 t)\, e^{\lambda t}, \eta_2 = C_2 e^{\lambda t}. \tag{8.9}$$

Исследуем поведение фазовых траекторий в системе координат $\eta_1 O \eta_2$. Если $C_2 \neq 0$, то

$$\eta_1 = \left(C_1 + \frac{C_2}{\lambda}\ln\left(\frac{\eta_2}{C_2}\right)\right)\frac{\eta_2}{C_2},$$
$$\frac{d\eta_2}{d\eta_1} = \frac{C_2\lambda}{C_2 + (C_1 + C_2 t)\,\lambda} \to 0, |t| \to \infty.$$

Если $C_2 = 0$, то согласно (8.9) мы имеем $\eta_2 = 0, \eta_1 = C_1 e^{\lambda t}, C_1 \neq\neq 0$. Используя эти формулы, нетрудно изобразить поведение фазовых траекторий. Они при $|t| \to +\infty$ примыкают к точке положения равновесия, касаясь в ней оси η_1 $(\eta_2 = 0)$. В случае $\lambda < 0$ они представлены на левом рис. 8.6.
Такое положение равновесия и расположение фазовых траекторий называются устойчивым вырожденным узлом.
При $\lambda > 0$ поведение фазовых траекторий представлено на правом рис. 8.6.

Такое положение равновесия и расположение фазовых траекторий называются неустойчивым вырожденным узлом.

Определение 8.3.1. Положение равновесия $\vec{x} = \overrightarrow{0}$ линейной системы (8.5) называется невырожденным, если либо λ_1, λ_2 отличны от нуля и $\lambda_1 \neq \lambda_2$, либо комплексно-сопряженные числа λ_1 и λ_2 имеют действительную часть $\mu \neq 0$.

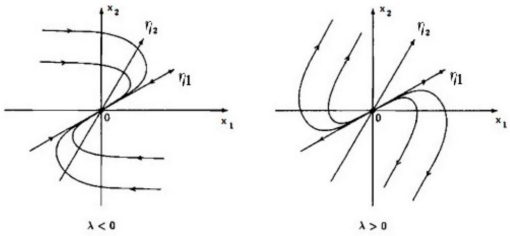


Рис. 8.6

Положения равновесия центр, дикритический узел и вырожденный узел называются вырожденными. Случай, когда $\det A = 0$, не рассматривается.

9.0.4 8.4. Behavior of phase trajectories in the vicinity of the equilibrium position of a nonlinear autonomous system on the plane

Рассмотрим теперь поведение фазовых траекторий в окрестности положения равновесия нелинейной системы (8.1) на плоскости, предполагая, что $\vec{f}(\vec{x}) \in C^1(\Omega)$. При $n = 2$ вектор-функция $\vec{f}(x_1, x_2) = \operatorname{colon}(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$. Предположим, что $\vec{x} = \overrightarrow{0}$ - единственное положение равновесия в области Ω. Систему (8.1) можно представить в некоторой окрестности положения равновесия $\vec{x} = \overrightarrow{0}$ в виде (т.к. $\vec{f}(\vec{x}) \in C^1(\Omega)\Big)$:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{F}(\vec{x}), \vec{F}(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0} \tag{8.10}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} (0,0)$$

- матрица Якоби в точке с координатами (0,0). В некоторой окрестности положения равновесия (ПР) $\vec{x} = \overrightarrow{0}$ при $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \to 0$ имеем $\|\vec{F}(\vec{x})\| = o(\rho)$. Дополнительно будем предполагать, что $\det A \neq 0$. Как

показано в работах [4,11], этих условий достаточно для утверждений, сделанных ниже для положения равновесия узел, седло, фокус. Цель настоящего параграфа состоит в том, чтобы показать, как результаты предыдущего параграфа можно применить к исследованию поведения фазовых траекторий в окрестности положения равновесия нелинейной системы (8.10). При сформулированных выше условиях каждая фазовая траектория, бесконечно приближающаяся к точке положения равновесия $x_1 = 0, x_2 = 0$ автономной системы (8.10), либо примыкает к ней в виде спирали, либо примыкает к ней под определённым углом относительно к одной из осей [11].

Положение равновесия $\vec{x} = \overrightarrow{0}$ системы (8.1) будем называть:

1. узлом $*(\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1\lambda_2 \neq 0)$, если в некоторой окрестности точки положения равновесия $\vec{x} = \overrightarrow{0}$ все фазовые траектории, за исключением двух, примыкают к ней, имея общую касательную. Эти две фазовые траектории примыкают к точке положения равновесия $\vec{x} = \overrightarrow{0}$ с противоположных сторон, образуя вместе с ней кривую, которая имеет другую общую касательную;

2. фокусом*, если в некоторой окрестности точки положения равновесия $\vec{x} = \overrightarrow{0}$ каждая фазовая траектория навивается на неё в виде спирали, примыкая к ней при $t \to -\infty$ или $t \to +\infty$;

3. седлом*, если в некоторой окрестности точки положения равновесия $\vec{x} = \overrightarrow{0}$ к ней примыкают 2 пары фазовых траекторий при $t \to -\infty$ или $t \to +\infty$ (каждая пара траекторий имеет свою общую касательную), а остальные фазовые траектории ведут себя, как показано на рис. 8.3.
   Будем называть систему

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, \tag{8.11}$$

полученную в результате отбрасывания второго слагаемого $\vec{F}(\vec{x})$ из правой части системы (8.10), её линеаризацией.

Theorem

8.2. Пусть линейная система (8.11) является линеаризацией нелинейной системы (8.10) и имеет в точке $\vec{x} = \overrightarrow{0}$ невырожденные положения равновесия узел, седло или фокус. Тогда поведение фазовых траекторий системы (8.1) в достаточно малой окрестности положения равновесия $\vec{x} = \overrightarrow{0}$ также будет узлом*, седлом* или фокусом*. При этом ориентация фазовых траекторий сохраняется.

Другими словами, теорема подразумевает, что картина поведения фазовых траекторий нелинейной системы (8.10) в достаточно малой окрестности положения равновесия получается из картины поведения фазовых траекторий линейной системы (8.11) её малым искажением. Поэтому положения равновесия узел, седло или фокус называются грубыми положениями равновесия.

Положение равновесия $\vec{x} = \overrightarrow{0}$ нелинейной системы (8.1) будем называть:
4) центром*, если в некоторой окрестности точки $\vec{x} = \overrightarrow{0}$ она окружена только замкнутыми фазовыми траекториями;
5) дикритическим узлом*, если все фазовые траектории в некоторой окрестности точки положения равновесия $\vec{x} = \overrightarrow{0}$ примыкают к ней, каждая имея свою касательную;
6) вырожденным узлом*, если все фазовые траектории в некоторой окрестности точки положения равновесия $\vec{x} = \overrightarrow{0}$ примыкают к ней, имея одну общую касательную.
При равенстве собственных значений $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ необходимо, чтобы функция $\vec{F}(\vec{x})$ удовлетворяла дополнительному условию, а именно: $\|\vec{F}(\vec{x})\| = O(\rho^{1+\varepsilon})$, где $\varepsilon > 0$ - некоторое положительное число. В этом случае, если в достаточно малой окрестности положения равновесия $\vec{x} = \overrightarrow{0}$ фазовые траектории линейной системы (8.11) ведут себя либо как дикритический узел, либо как вырожденный узел, то в нелинейной системе они будут вести себя либо как дикритический узел*, либо как вырожденный узел* соответственно. При этом их ориентация сохраняется [4,11].

Если не наложить дополнительных требований на функцию $\vec{F}(\vec{x})$, то дикритический узел* может перейти в фокус*. Это связано с тем, что некоторую окрестность особой точки узел* (а также особых точек дикритический узел* и вырожденный узел*) можно

гомеоморфно отобразить в окрестность особой точки фокус* таким образом, чтобы траектории первой из них переходили в траектории второй. Сказанное является важным топологическим свойством данной задачи. Рассмотрим систему [4]:

$$\frac{dx}{dt} = -x - \frac{y}{\ln \rho}, \frac{dy}{dt} = -y + \frac{x}{\ln \rho}, \rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{8.12}$$

Вектор-функция $\vec{F}(x, y)$ неопределена в точке (0,0). Если доопределить её и её частные производные по непрерывности нулями, то получится функция класса C^1. Тогда точка $(0, 0)$ станет положением равновесия. Линеаризованная система дает дикритический узел. Положением равновесия нелинейной системы будет фокус*.

Рассмотрим более сложный случай, когда положение равновесия линейной системы (8.11) - центр. В качестве примера возьмем систему

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_2 - x_1\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \end{cases} \tag{8.13}$$

положение равновесия которой имеет координаты $(0, 0)$. Если отбросить в системе (8.13) нелинейные члены, то линеаризованная система дает положение равновесия - центр. Если же в нелинейной системе (8.13) перейти к полярной системе координат (ρ, θ), то нетрудно получить решение уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = -\rho^2 \\ \frac{d\theta}{dt} = 1 \end{cases} \Rightarrow \rho = \frac{\rho_0}{1 + \rho_0 t}, \theta = t + \theta_0.$$

Отсюда следует, что фазовыми траекториями нелинейной системы являются спирали, а положением равновесия - фокус*. Критерий различения этих положений равновесия является сложным и здесь не рассматривается.

10 9 Stability of solutions of ordinary differential equations by Diesperov

10.0.1 9.1. Basic Terms and Definitions

Во второй главе было показано, что если $\vec{f}(t, \vec{x})$ удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности, то решение ЗК для системы

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{x}) \tag{9.1}$$

непрерывно зависит от начальных условий, если $t \in [a, b]$ (t меняется на конечном промежутке). В этой главе будет исследоваться зависимость решения задачи Коши от начальных условий, когда t изменяется на полубесконечном промежутке $[t_0, +\infty)$. Будем предполагать, что система (9.1) определена в цилиндре $D = \Omega \times [t_0, +\infty)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n_{\vec{x}}$, и существует её решение $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ с начальными данными $t_0, \vec{x}_0$ ($\vec{x}_0 \in \Omega$), которое можно продолжить на полубесконечный промежуток $(t_0, +\infty)$ в цилиндре D. Правая часть системы (9.1) $\vec{f}(t, \vec{x}) \in \mathbf{C}^1(D)$.

Определение 9.1.1. Решение системы (9.1) $\vec{x} = \vec{\varphi}(t), t \in [t_0, +\infty)$, называется устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любого другого решения $\vec{x} = \vec{\psi}(t)$, начальное значение которого удовлетворяют неравенству

$$\left\| \vec{\varphi}(t_0) - \vec{\psi}(t_0) \right\| < \delta,$$

решение $\vec{x} = \vec{\psi}(t)$ определено при всех $t \geq t_0$ и при $t \geq t_0$ справедливо неравенство

$$\|\vec{\varphi}(t) - \vec{\psi}(t)\| < \varepsilon \text{ для любого } t \geq t_0.$$

Решение $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво по Ляпунову и, кроме того,

$$\lim_{t\to\infty} \|\vec{\varphi}(t) - \vec{\psi}(t)\| = 0$$

Здесь, как и ранее, в качестве нормы взята $\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i(t)|^2}$.
Изучение устойчивости решения $\vec{\varphi}(t), t \in [t_0, +\infty)$, системы уравнений (9.1) может быть сведено к изучению устойчивости решения, тождественно равного нулю при $t \in [t_0, +\infty)$, некоторой другой нормальной системы. Действительно, введем новую неизвестную функцию

$$\vec{y}(t) = \vec{x}(t) - \vec{\varphi}(t). \tag{9.2}$$

Тогда она будет удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{y} + \vec{\varphi}) - \vec{f}(t, \vec{\varphi}) \equiv \vec{g}(t, \vec{y}), \tag{9.3}$$

где $\vec{g}(t, \overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}, t \in [t_0, +\infty)$.
Так как $\|\vec{y}(t) - \overrightarrow{0}\| = \|\vec{x}(t) - \vec{\varphi}(t)\|$, то исследование устойчивости решения $\vec{\varphi}(t), t \in [t_0, +\infty)$, системы (9.1) равносильно исследованию устойчивости нулевого решения $\vec{y}(t) \equiv \overrightarrow{0}, t \in\in [t_0, +\infty)$ системы уравнений (9.3). В дальнейшем будем считать, что замена (9.2) уже произведена, т.е. система уравнений (9.1) имеет нулевое решение $\vec{x}(t) \equiv \overrightarrow{0} \in \Omega, t \in\in [t_0, +\infty)$, $\vec{f}(t, \overrightarrow{0}) \equiv \overrightarrow{0}$.

Определение 9.1.2. Если $\vec{f}(t, \overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$ для любого $t \in [t_0, +\infty)$, то точка $\vec{x} = \overrightarrow{0}, t \in [t_0, +\infty)$ в фазовом пространстве называется положением равновесия системы уравнений (9.1).

10.0.2 9.2. Sufficient conditions for the stability of solutions for a linear system of equations with constant real coefficients

Рассмотрим систему

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}. \tag{9.4}$$

Пусть матрица A с постоянными вещественными элементами имеет попарно различные собственные значения $\lambda_1, ..., \lambda_m$ $(\lambda_i \neq \lambda_j)$, $1 \leq m \leq n$. Ниже будет изучаться устойчивость решений системы (9.4) на промежутке $[0, +\infty)$.

Theorem 9.1. (Спектральный признак устойчивости.)

1. Если все собственные значения матрицы A удовлетворяют неравенствам $\operatorname{Re}\lambda_i < 0, i = \overline{1, m}$, то нулевое решение асимптотически устойчиво.

2. Если собственные значения матрицы A удовлетворяют неравенствам $\operatorname{Re}\lambda_i \leq 0, i = \overline{1, m}$ и для тех λ_i, для которых $\operatorname{Re}\lambda_i = 0$, все соответствующие жордановы цепочки имеют длину, равную 1, то нулевое решение устойчиво по Ляпунову.

3. Если имеется λ_j, для которого $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$ или для которого $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$, но соответствующие жордановы цепочки имеют длину ≥ 2, то нулевое решение неустойчиво.

Доказательство. $\rightarrow$ Все решения системы (9.4) описываются формулой

$$\vec{x}(t) = \vec{P}_1(t)e^{\lambda_1 t} + \cdots + \vec{P}_m(t)e^{\lambda_m t} \tag{9.5}$$

где $\vec{P}_i(t)$ - многочлены степени не выше $k_i - 1$, а k_i - наибольшая длина жордановой цепочки, соответствующей λ_i. Коэфициенты в многочленах $\vec{P}_i(t), i = \overline{1,m}$, в векторном квазимногочлене (9.5) - векторы из $\mathbb{R}^n$. Если $\lambda_k = \mu_k + i\nu_k$, то для соответствующего решения имеем

$$\vec{P}_k(t)e^{\lambda_k t} = \vec{P}_k(t)e^{\mu_k t}\left(\cos\nu_k t + i\sin\nu_k t\right), |\cos\nu_k t + i\sin\nu_k t| = 1.$$

Если $\mu_k < 0$, то $\left|\vec{P}_k(t)e^{\mu_k t}\right| \to 0$ при $t \to +\infty$.

Рассмотрим сначала случай 1). Одной из фундаментальных матриц системы (9.4) является e^{tA}. Оценим её поведение при $t \to \infty$. Фундаментальная матрица состоит из столбцов $\vec{\psi}_1(t), ..., \vec{\psi}_n(t)$, которые являются решениями системы (9.4). Каждое решение $\vec{\psi}_k(t), k = \overline{1,n}$ описывается вектор-функцией (9.5):

$$\vec{\psi}_k(t) = \vec{P}_{1k}(t)e^{\lambda_1 t} + \cdots + \vec{P}_{mk}(t)e^{\lambda_m t}, k = \overline{1,n}. \tag{9.6}$$

Пусть $\operatorname{Re}\lambda_i < -\beta < 0$. Тогда $\operatorname{Re}\lambda_i + \beta < 0, i = \overline{1,m}$. Так как при $t \to \infty$ слагаемые в (9.6)$\vec{P}_{ik}(t)e^{\lambda_i t} \to 0$, то справедлива оценка $\left\|\vec{P}_{ik}(t)e^{(\operatorname{Re}\lambda_i+\beta)t}\right\| \leq$
$\leq C_{ik}, t \in [0, +\infty)$, где C_{ik} - некоторые постоянные. Следовательно, все слагаемые в (9.6) ограничены, так как

$$\left\|\vec{P}_{ik}(t)e^{\lambda_i t}\right\| \leq C_{ik}e^{-\beta t}, i = \overline{1,m}, k = \overline{1,n}$$

и существует такая постоянная C, что $\left\|\vec{\psi}_k(t)\right\| \leq Ce^{-\beta t}, t \geq 0, k = \overline{1,n}$. Отсюда, используя определение нормы вектор-функции, находим

$$\vec{\psi}_k(t) = \begin{pmatrix} a_{1k}(t) \\ ... \\ a_{nk}(t) \end{pmatrix}, \left\|\vec{\psi}_k(t)\right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|^2}, |a_{ik}| \leq Ce^{-\beta t}.$$

Полученные неравенства позволяют оценить норму фундаментальной матрицы e^{tA} :

$$\left\|e^{tA}\right\| = \left(\sum_{k,j=1}^{n} |a_{jk}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq Ke^{-\beta t}, K = nC. \tag{9.7}$$

Любое решение задачи Коши описывается функцией $\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{x}_0$, где $\vec{x}_0 = \vec{x}(0)$ - начальное значение, принимаемое при $t = 0$. Если $\|\vec{x}_0\| < \delta = \frac{\varepsilon}{K}$, то $\|\vec{x}(t)\| \leq \left\|e^{tA}\right\| \|\vec{x}_0\| <$ $\varepsilon e^{-\beta t} \leq \varepsilon, t \in [0, +\infty)$. Так как $\|\vec{x}(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$, то решение $\vec{x}(t) = \vec{0}, t \in [0, +\infty)$, асимптотически устойчиво.

Случай 2)

Те слагаемые в (9.5), для которых $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, ограничены при $t \in [0, +\infty)$, как в случае 1). По условию, слагаемые с $\operatorname{Re}\lambda_i = 0$ содержат только многочлены нулевой степени и поэтому тоже ограничены. Следовательно, нулевое решение устойчиво по Ляпунову.

Случай 3)

Если существует собственное значение $\lambda_j = \mu_j + i\nu_j$, у которого $\mu_j > 0$, то система

уравнений имеет решение $\vec{\phi}_j(t) = e^{\lambda_j t}\vec{h}_j$, где $\vec{h}_j$ - собственный вектор. Если $\nu_j = 0$, то $\left\|\vec{\phi}_j(t)\right\| \to \infty, t \to \infty$. Следовательно, решение не ограничено. Если же $\nu_j \neq 0$, то решение $\vec{\phi}_j(t)$ комплексное. Оно порождает два вещественных решения $\operatorname{Re}\vec{\phi}_j(t)$ и $\operatorname{Im}\vec{\phi}_j(t)$, которые также не ограничены при $t \geq 0$. Из неограниченности решения следует его неустойчивость.

Пусть не существует собственного значения с положительной действильной частью, но имеется λ_j с $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$, которому соответствует

жорданова цепочка длины ≥ 2. Тогда нулевое решение также будет неустойчивым. Действительно, существует решение $\vec{\phi}_j = \vec{P}_j(t)e^{\lambda_j t}$, в котором многочлен $\vec{P}_j$ имеет степень большую или равную 1 . Так как $\left|e^{\lambda_j t}\right| = 1$, то решение не ограничено, а значит, решение неустойчиво.

Доказанная теорема показывает, что для исследования устойчивости решения линейных уравнений или систем достаточно найти собственные значения. Для многочленов степени $n \geq 5$ в общем случае корни не представимы при помощи радикалов (теорема АбеляРуффини). Однако на помощь приходит критерий Рауса-Гурвица.

Критерий Рауса-Гурвица

Для того чтобы у многочлена

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

с действительными коэффициентами все корни имели отрицательные действительные части, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & ... & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & ... & a_n \end{pmatrix}$$

(где $a_m = 0$, если $m < 0$ или $m > n$) были положительными, т.е.

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, ...,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & ... & 0 \\ a_3 & a_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & ... & a_n \end{vmatrix} = \Delta_{n-1}a_n > 0.$$

Последнее условие можно заменить условием $a_n > 0$. При $n = 4$ имеем

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 > 0, & 1 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0,$$

Theorem 9.2.

Если нулевое решение однородной линейной системь уравнений

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$$

обладает одним из свойств:

1. устойчиво по Ляпунову,
2. асимптотически устойчиво,
3. неустойчиво, то все решения неоднородной линейной системы уравнений

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{f}(t)$$

обладают тем же свойством независимо от $\vec{f}(t)$.
Доказать теорему самим.

10.0.3 9.3. First approximation stability

В теореме 9.1 были сформулированы условия устойчивости для линейной системы (9.4) с постоянными вещественными коэффициентами. Эти результаты будут обобщены на случай нелинейной автономной системы (8.1) [8], [13]:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}), \quad \vec{x} \subset \Omega, \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$$

Относительно $\vec{f}(\vec{x})$ и области Ω предполагается, что $\vec{f}(\vec{x}) \in \mathbf{C}^1(\Omega), \overrightarrow{0} \in\in \Omega, \vec{f}(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$. Отсюда следует, что функция $\vec{x} = \overrightarrow{0}, t \geq 0$ является решением системы (8.1). Как мы знаем, систему (8.1) при условии $\vec{f}(\vec{x}) \in \mathbf{C}^1(\Omega)$ можно представить в некоторой окрестности $\vec{x} = \overrightarrow{0}$ в виде

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{F}(\vec{x}), \vec{F}(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}, \vec{x} \in \Omega \tag{9.8}$$

Здесь $A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\overrightarrow{0})\right), i, j = \overline{1, n}, \vec{F}(\vec{x}) \in \mathbf{C}^1(\Omega), \|\vec{F}(\vec{x})\| = o(\|\vec{x}\|)$ при $\|\vec{x}\| \to 0$. Будем рассматривать систему (9.8) в цилиндре

$$D = \{(t, \vec{x}) : \vec{x} \in \Omega, t \in [0, +\infty)\}$$

График нулевого решения принадлежит этому цилиндру. Ниже будет исследован вопрос о том, как влияют на устойчивость решения линейной системы возмущения, обусловленные членом $\vec{F}(\vec{x})$. Рассмотрим задачу Коши:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{F}(\vec{x}), \vec{x}(0) = \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_0} \in \Omega. \tag{9.9}$$

Theorem 9.3.

Пусть в системе (9.8) функция $\vec{F}(\vec{x}) \in C^1(\Omega)$ и удовлетворяет неравенству

$$\|\vec{F}(\vec{x})\| \leq \omega(\vec{x})\|\vec{x}\|,$$

где $\omega(\vec{x}) \to 0$ при $\|\vec{x}\| \to 0$. Тогда

1. если все собственные значения матрицы A удовлетворяют неравенствам $\operatorname{Re}\lambda_i < 0, i = \overline{1, n}$, то нулевое решение системы (9.8) асимптотически устойчиво;
2. если матрица A имеет хотя бы одно λ_j такое, что $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$, то нулевое решение системы (9.8) неустойчиво;

3. если среди собственных значений матрицы A имеются такие, что $\operatorname{Re}\lambda_i = 0$, а для остальных собственных значений $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$, то устойчивость нулевого решения зависит не только от матрицы A, но и от функции $\vec{F}(\vec{x})$.

Доказательство. $\downarrow$ Надо показать, что при достаточно малом значении $\|\overrightarrow{x_0}\|$ и условии, что величина $\|\vec{F}(\vec{x})\|$ также является малой, решение задачи Коши (9.9) $\vec{x} = \vec{\phi}(t)$ может быть продолжено для всех $t > 0$. На промежутке [0, h], на котором оно существует, уравнение (9.8) согласно формуле (4.34) эквивалентно интегральному соотношению

$$\vec{\phi}(t) = e^{tA}\vec{x}_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}\vec{F}(\vec{\phi}(s))ds \tag{9.10}$$

Так как по условию теоремы собственные значения матрицы A имеют отрицательные действительные части, то для всех $t > 0$ справедлива оценка (9.7), из которой следует неравенство

$$\left\|e^{tA}\right\| \leq K_* e^{-\beta t}, K_* = K + 1 > 1,$$

в котором $\beta > 0$, а величина постоянной K определяется свойствами матрицы A. Используя это неравенство, из (9.10) находим

$$\|\vec{\phi}(t)\| \leq \left\|e^{tA}\right\| \|\vec{x}_0\| + \int_0^t \left\|e^{(t-s)A}\right\| \|\vec{F}(\vec{\phi}(s))\|ds \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \|\vec{\phi}(t)\| \leq K_* e^{-\beta t} \|\vec{x}_0\| + K_* \int_0^t e^{-\beta(t-s)}\|\vec{F}(\vec{\phi}(s))\|ds. \tag{9.11}$$

Неравенство (9.11) лежит в основе доказательства того, что решение $\vec{\phi}(t)$ задачи Коши (9.9), для которого начальное значение $\|\vec{\phi}(0)\| = \|\vec{x}_0\|$ достаточно мало отличается от нуля, можно продолжить на промежуток $[h, +\infty)$ при условии, что величина $\|\vec{\phi}(t)\|$ остаётся также малой. Действительно, согласно требованию, наложенному в теореме на функцию $\omega(\vec{x})$, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $\|\vec{F}(\vec{x})\| \leq \varepsilon\frac{\|\vec{x}\|}{K_*}$ как только $\|\vec{x}\| \leq \delta$. Таким образом, до тех пор пока $\|\vec{\phi}(t)\| \leq \delta$, справедливо неравенство

$$e^{\beta t}\|\vec{\phi}(t)\| \leqslant K_* \|\vec{x}_0\| + \varepsilon \int_0^t e^{\beta s}\|\vec{\phi}(s)\|ds$$

Применяя к нему лемму Гронуолла (она доказывается ниже) имеем

$$e^{\beta t}\|\vec{\phi}(t)\| \leqslant K_* \|\vec{x}_0\| e^{\varepsilon t}$$

или

$$\|\vec{\phi}(t)\| \leqslant K_* \|\vec{x}_0\| e^{-(\beta-\varepsilon)t}. \tag{9.12}$$

Если положить $\varepsilon < \beta$, то согласно неравенству (9.12) величина $\|\vec{\phi}(t)\|$ убывает с ростом t. Из него также следует, что $\|\vec{\phi}(t)\| \leqslant K_* \|\vec{x}_0\|$. Возьмём $\|\vec{x}_0\| < \frac{\delta}{K_*}(< \delta)$, тогда $\|\vec{\phi}(t)\| < \delta$. В результате мы получили утверждение, которое ниже сформулируем следующим образом.
Утверждение: неравенство (9.12) выполняется для всех t, при которых решение задачи Коши (9.9) существует, и при этом $\|\vec{\phi}(t)\| << \delta$, если $\|\vec{x}_0\| < \frac{\delta}{K_*}$.

Покажем теперь, что оно продолжаемо на промежуток $[h, +\infty)$. Возьмём произвольное $T > h$ и цилиндр $Q = \{(t, x) : 0 \leq t \leq T, \|x\| = \delta\}$. Начальные данные принадлежат

основанию цилиндра при $t = 0$. Поэтому интегральная кривая, соответствующая решению задачи Коши (9.9), согласно теореме продолжения должна достигнуть границы цилиндра Q. Но она не может пересечь его боковую поверхность, потому что величина $\|\vec{\phi}(t)\|$ не может принять значение, равное δ. Действительно, так как в цилиндре $\|x\| \leq \delta$, то все проведенные выше выкладки останутся справедливыми и продолженное решение задачи Коши $\vec{\phi}(t)$ будет вести себя согласно утверждению. Поэтому интегральная кривая при продолжении может попасть только на основание цилиндра, расположенное при $t = T$. Из произвольности выбора величины T вытекает, что решение $\vec{\phi}(t)$ продолжаемо на промежуток $[h, +\infty)$ и, следовательно, для всех $t > 0$ справедлива формула (9.12). Она показывает, что нулевое решение является устойчивым по Ляпунову и асимптотически устойчивым. Остальные пункты теоремы даются без доказательства.

Замечание 9.3.1. Результаты теоремы останутся верными для неавтономной системы

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{F}(t, \vec{x}), \vec{F}(t, \overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}, \vec{x} \in \Omega, t \geq 0,$$

при условии, что $\|\vec{F}(t, \vec{x})\| = o(\|\vec{x}\|)$ равномерно по $t, (t \geq 0)$ при $\|\vec{x}\| \to\to 0$.

10.0.4 9.4. Gronwall lemma

Лемма.

Пусть непрерывная функция $\omega(t) \geq 0$ на промежутке $J \subseteq \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству

$$\omega(t) \leq B + \left| \int_{t_0}^{t} \omega(\tau) v(\tau) d\tau \right| \tag{9.13}$$

где непрерывная функция $v(t) > 0, t \in J$, а постоянная $B \geq 0$. Тогда npu всех $t, t_0 \in J$

$$\omega(t) \leq B e^{\int_{t_0}^{t} v(\tau) d\tau}. \tag{9.14}$$

Доказательство. $\to$ Пусть $B > 0, t \geq t_0$. Разделим неравенство (9.13) на правую часть и умножим на функцию $v(t) > 0$:

$$\frac{\omega(t) v(t)}{B + \int_{t_0}^{t} \omega(\tau) v(\tau) d\tau} \leq v(\tau) \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left[\ln \left(B + \int_{t_0}^{t} \omega(\tau) v(\tau) d\tau \right) \right] \leq v(t).$$

Интегрирование последнего неравенства дает

$$\ln \left[B + \int_{t_0}^{t} \omega(\tau) v(\tau) d\tau \right] - \ln B \leq \int_{t_0}^{t} v(\tau) d\tau$$

Отсюда получаем формулу (9.14):

$$\omega(t) \leq B + \int_{t_0}^{t} \omega(\tau) v(\tau) d\tau \leq B e^{\int_{t_0}^{t} v(\tau) d\tau}$$

При $t \leq t_0$ доказательство проводится аналогично. Если $v(t) = 0, t \in\in J$, то неравенство (9.13) выполняется автоматически. Случай $B = 0$ рассмотреть самим. $\square$

11 10 First integrals of normal systems of ordinary differential equations by Diesperov

11.0.1 10.1. The first integrals of autonomous systems and the criterion of the first integral

Рассмотрим автономную систему уравнений

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}), \vec{x} \in \Omega, \vec{f}(\vec{x}) \in \mathbf{C}^1(\Omega) \tag{10.1}$$

Определение 10.1.1. Пусть функция $u(\vec{x})$, отличная от постоянной, определена в некоторой области $G \subseteq \Omega$ и $u(\vec{x}) \in \mathbf{C}^1(G)$. Она называется первым интегралом автономной системы (10.1), если для любого её решения $\vec{\varphi}(t), t \in J$, траектория которого лежит в G, мы имеем $u(\vec{\varphi}(t)) = C$.

Здесь C - постоянная, величина которой зависит от выбора решения. Если функция $u(\vec{x})$ является первым интегралом автономной системы уравнений (10.1), то функция $\Phi(u(\vec{x}))$, где Φ - произвольная непрерывно дифференцируемая функция, также будет первым интегралом.

Определение 10.1.2. Первые интегралы $u_1(\vec{x}), ..., u_k(\vec{x})$ называются независимыми в точке $\vec{a} \in \Omega$, если ранг матрицы $\left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\vec{a}) \right\|, i = \overline{1,k},\ j = \overline{1,n}$, в точке $\vec{a}$ равен $k (k \leq n)$.

Элементы строки $\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u_i}{\partial x_n}\right)$ в матрице являются координатами градиента $\nabla u_i(\vec{x})$ в точке $\vec{x} = \vec{a}$. Таким образом, первые интегралы будут независимыми в точке $\vec{a}$, если в ней линейно независимы векторы $\nabla u_i(\vec{a}), i = \overline{1,k}$.

Theorem

10.1. (Признак первого интеграла.) Для того, чтобы функичя $u(\vec{x}), \vec{x} \in G$, была первым интегралом автономной системь (10.1), необходимо и достаточно, чтобы в области G выполнялось соотношение

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} f_k(\vec{x}) = 0, \vec{x} \in G. \tag{10.2}$$

Доказательство.
Необходимость. Пусть $u(\vec{x})$ - первый интеграл автономной системы (10.1). Возьмем произвольную точку $\vec{x}_0 \in G$. Согласно теореме существования и единственности решения задачи Коши построим решение $\vec{\varphi}(t), t \in J, \vec{\varphi}(t) \in G$, с начальным условием $\vec{\varphi}(t_0) = \vec{x}_0$. По определению первого интеграла $u(\vec{\varphi}(t)) = \text{const}$. Отсюда следует

$$\left.\frac{du(\vec{\varphi}(t))}{dt}\right|_{t=t_0} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} \left.\frac{d\varphi_k}{dt}\right|_{t=t_0} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} f_k(\vec{x}_0) = 0$$

В силу произвольности выбора точки $\vec{x}_0$ получаем требуемое утверждение.

Достаточность. Пусть справедливо соотношение (10.2). Возьмем в области G произвольное решение системы (10.1) $\vec{x} = \vec{\varphi}(t), t \in J$. Тогда для $u(\vec{\varphi}(t))$ имеем из (10.2) и (10.1):

$$\frac{du(\vec{\varphi}(t))}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{d\varphi_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} f_k(\vec{\varphi}(t)) = 0.$$

Значит, $u(\vec{x})$ - первый интеграл.
Предположим, что $u(\vec{x}), \vec{x} \in G, -$ произвольный первый интеграл. Тогда, как следует из теоремы 10.1, $(\nabla u, \vec{f}) = 0$. Если $\vec{f}(\vec{a}) \neq \overrightarrow{0}, \vec{a} \in G$, то вектор $\vec{f}(\vec{a})$ не может иметь более ($n-1$) перпендикулярых к себе линейно независимых векторов. Это означает, что в точке $\vec{a}$ не может быть более ($n-1$) независимых первых интегралов.

11.0.2 10.2. The theorem on the number of independent first integrals

Theorem

10.2. Если точка $\vec{a} \in \Omega$ не является положением равновесия автономной системы (10.1), то в некоторой окрестности $\vec{a}$ существует $(n-1)$ независимых первых интегралов $u_1(\vec{x}), ..., u_{n-1}(\vec{x})$
и любой первый интеграл $u(\vec{x})$ в ней представим в виде

$$u(\vec{x}) = \Phi\left(u_1(\vec{x}), ..., u_{n-1}(\vec{x})\right)$$

где $\Phi\left(z_1, ..., z_{n-1}\right)$ - некоторая непрерывно дифференицруемая функция, определённая в окрестности точки $z_1^0 = u_1(\vec{a}), ..., z_{n-1}^0 = u_{n-1}(\vec{a})$.

Доказательство. $\rightarrow$ По условию $\vec{f}(\vec{a}) \neq \overrightarrow{0}$. Будем считать, что $f_n(\vec{a}) \neq 0$. Рассмотрим гиперплоскость $\beta : x_n = a_n$ (значение a_n предполагается фиксированным). Обозначим координаты её точек через $(\xi_1, ..., \xi_{n-1}, a_n) \equiv \left(\vec{\xi}, a_n\right)$ и рассмотрим точки плоскости β, достаточно близкие к точке $\vec{a}$. Построим решение системы (10.1)$\vec{x} = \vec{\varphi}(t, \vec{\xi})$, удовлетворяющее начальному условию:

$$\vec{\varphi}(0, \vec{\xi}) = \text{colon}\left(\vec{\xi}, a_n\right) \tag{10.3}$$

Начальная точка лежит на гиперплоскости β. В координатной записи решение $\vec{x} = \vec{\varphi}(t, \vec{\xi})$ задачи Коши (10.1), (10.3) имеет вид

$$x_i = \varphi_i\left(t, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_{n-1}\right), i = \overline{1, n} \tag{10.4}$$

Формулы (10.4) можно рассматривать как систему уравнений относительно переменных $t, \xi_1, ..., \xi_{n-1}$. Она имеет очевидное решение при $t = 0, \xi_i = a_i, i = \overline{1, n-1}$, а именно:

$$\vec{x} = \vec{a}$$

Покажем, что система (10.4) разрешима относительно переменных $t, \xi_1,\ \xi_2, ..., \xi_{n-1}$ в некоторой окрестности точки $\vec{b} = (0, a_1, ..., a_{n-1}) \in\in \mathbb{R}^n_{t,\vec{\xi}}$. Для этого вычислим в ней функциональный определитель. Из (10.3) имеем

$$\begin{cases} \varphi_i\left(0, \xi_1, ..., \xi_{n-1}\right) = \xi_i, i = \overline{1, n-1}, \\ \varphi_n\left(0, \xi_1, ..., \xi_{n-1}\right) = a_n. \end{cases}$$

Согласно этим равенствам и теореме о дифференцируемости решения по начальным данным получаем

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi_k}\left(0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}\right) = \delta_{ik}, i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, n-1},$$

где δ_{ik} - символ Кронекера.

Так как $\vec{x} = \vec{\varphi}(t, \vec{\xi})$ является решением ЗК (10.1), (10.3), то при $t = 0, \xi_i = a_i$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(0, a_1, ..., a_{n-1}) = f_i(\vec{a}), i = \overline{1, n}$$

Используя эти соотношения, находим

$$\left.\frac{\partial(\varphi_1, ..., \varphi_n)}{\partial(\xi_1, ..., \xi_{n-1}, t)}\right|_{t=0, \xi_i = a_i} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & f_1(\vec{a}) \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & f_2(\vec{a}) \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & f_3(\vec{a}) \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & f_{n-1}(\vec{a}) \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & f_n(\vec{a}) \end{vmatrix} =$$
$$= f_n(\vec{a}) \neq 0.$$

Из теоремы об обратной функции следует, что существуют окрестности $V(\vec{b})$ и $U(\vec{a})$ точек $\vec{b}$ и $\vec{a}$, в которых система (10.4) взаимно однозначно разрешима и её решение имеет вид

$$\xi_i = u_i(\vec{x}), i = \overline{1, n-1}, \quad t = v(\vec{x}), \vec{x} \in U(\vec{a}). \tag{10.5}$$

При этом функции $u_i(\vec{x})$ и $v(\vec{x})$ - непрерывно дифференцируемые в окрестности $U(\vec{a})$ и $\{t, \xi_1, ..., \xi_{n-1}\} \in V(\vec{b})$. Функции $u_i(\vec{x}), i = \overline{1, n-1}$ являются независимыми, так как

$$\left.\frac{\partial(u_1, ..., u_{n-1})}{\partial(x_1, ..., x_{n-1})}\right|_{\vec{x}=\vec{a}} = \left.\left(\frac{\partial(\varphi_1, ..., \varphi_{n-1})}{\partial(\xi_1, ..., \xi_{n-1})}\right)^{-1}\right|_{t=0, \xi_i = a_i} = 1.$$

Покажем, что функции $u_i(\vec{x}), i = \overline{1, n-1}$ являются первыми интегралами. Возьмем сначала произвольную точку $\left(\overrightarrow{\xi^o}, a_n\right) \in U(\vec{a})$. Тогда решением системы (10.1) будет функция

$$\vec{x} = \vec{\varphi}\left(t, \xi_1^o, ..., \xi_{n-1}^o\right), t \in J$$

удовлетворяющая начальному условию (10.3). Согласно формулам (10.5) вдоль этого решения найденные нами функции $u_1(\vec{x}), ..., u_{n-1}(\vec{x})$ сохраняют постоянное значение :

$$\xi_1^o = u_1(\vec{x}), ..., \xi_{n-1}^o = u_{n-1}(\vec{x}), t \in J.$$

Рассмотрим теперь $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ - произвольное решение системы (10.1) с начальными данными $\overrightarrow{x_0}, t_0$ такими, что $\overrightarrow{x_0} \in U(\vec{a})$. Было показано, что в этом случае система (10.4) разрешима при $\vec{x} = \overrightarrow{x_0}$. Отсюда вытекает существование решения $\vec{x} = \vec{\varphi}\left(t, \overrightarrow{\xi^o}\right)$, траектория которого проходит через точку $\overrightarrow{x_0}$ и удовлетворяет начальному условию $\vec{\varphi}\left(0, \overrightarrow{\xi^0}\right) = \text{colon}\left(\overrightarrow{\xi^0}, a_n\right)$. Таким образом, имеются два решения системы, траектории которых проходят через точку $\overrightarrow{x_0}$. Тогда, как мы знаем, существует такая постоянная τ, что решение $\vec{\varphi}(t)$ может быть представлено в виде $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}\left(t + \tau, \overrightarrow{\xi^o}\right)$. Отсюда и из (10.5) получаем

$$u_i(\vec{\varphi}(t)) = u_i\left(\vec{\varphi}\left(t + \tau, \vec{\xi^o}\right)\right) = \xi_i^o, i = \overline{1, n-1}.$$

Значит, $u_1(\vec{x}), ..., u_{n-1}(\vec{x})$ - первые интегралы системы (10.1).
Докажем теперь вторую часть теоремы. Пусть $u(\vec{x})$ - произвольный первый интеграл системы (10.1), определённый в $U(\vec{a})$. Тогда в силу (10.2) имеем

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} f_k(\vec{x}) = 0, i = \overline{1, n-1}, \\ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} f_k(\vec{x}) = 0, \vec{x} \in U(\vec{a}). \end{cases} \tag{10.6}$$

По условию теоремы $\vec{f}(\vec{a}) \neq \overrightarrow{0}$. В силу непрерывности функции $\vec{f}(\vec{x})$ возьмем $U(\vec{a})$ такой, чтобы $\vec{f}(\vec{x}) \neq \overrightarrow{0}$ для любого $\vec{x} \in U(\vec{a})$. Рассмотрим систему (10.6) относительно $\vec{f}(\vec{x})$. Так как она имеет нетривильное решение $\vec{f}(\vec{x}) \neq \overrightarrow{0}$ для любого $\vec{x} \in U(\vec{a})$, то её определитель

$$\frac{\partial (u_1, ..., u_{n-1}, u)}{\partial (x_1, ..., x_n)} = 0, \vec{x} \in U(\vec{a}). \tag{10.7}$$

Из теоремы о функциональной зависимости (доказательство теоремы представлено в [7]) следует, что в некоторой окрестности точки $z_1^o = u_1(\vec{a}), ..., z_{n-1}^o = u_{n-1}(\vec{a})$ существует непрерывно дифференцируемая функция $\Phi(z_1, ..., z_n)$ такая, что

$$u = \Phi(u_1(\vec{x}), ..., u_{n-1}(\vec{x})).$$

Theorem

10.3. (О выпрямлении траектории.) Пусть $\vec{f}(\vec{x}) \in\in \boldsymbol{C}^1(\Omega), \vec{a} \in \Omega, \vec{f}(\vec{a}) \neq \overrightarrow{0}$. Тогда в достаточно малой окрестности точки $\vec{a}$ существует гладкая обратимая замена переменных

$$y_1 = u_1(\vec{x}), ..., y_{n-1} = u_{n-1}(\vec{x}), \vec{x} \in U(\vec{a}), y_n = t,$$

такая, что в новых переменных система (10.1) принимает вид

$$\frac{dy_1}{dt} = 0, ..., \frac{dy_{n-1}}{dt} = 0, \frac{dy_n}{dt} = 1 \tag{10.8}$$

Здесь $u_1(\vec{x}), ..., u_{n-1}(\vec{x})$ - независимые первые интегралы системы (10.1). Траектории системы (10.8) - прямые линии.

Доказательство теоремы 10.3 следует из теоремы 10.2 [12].

11.0.3 10.3. Reduction of autonomous systems with the first integrators

Theorem

10.4. Пусть $u_1(\vec{x}), ..., u_m(\vec{x}), \vec{x} \in G$, - независимые в точке $\vec{a} \in G$ первые интеграль автономной системы (10.1) $u\vec{f}(\vec{a}) \neq \overrightarrow{0}$. Тогда в некоторой окрестности $U(\vec{a}) \subset G$ точки $\vec{a}$ порядок автономной системы (10.1) можно понизить до порядка $n - m$.

Доказательство. - По условию теоремы градиенты первых интегралов $u_1(\vec{x}), ..., u_m(\vec{x})$ являются линейно независимыми строками матрицы Якоби $\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$. Произведем в окрестности точки $\vec{a}$ замену переменных

$$\begin{cases} y_k = u_k(\vec{x}), k = \overline{1, m} \\ y_k = x_k, k = \overline{m+1, n} \end{cases} \tag{10.9}$$

При такой замене в точке $\vec{a}$ не равен нулю якобиан

$$\left.\frac{\partial\left(y_1,...,y_n\right)}{\partial\left(x_1,...,x_n\right)}\right|_{\vec{x}=\vec{a}}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial u_1}{\partial x_m} & \frac{\partial u_1}{\partial x_{m+1}} & ... & \frac{\partial u_1}{\partial x_n}\\ ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial u_m}{\partial x_m} & \frac{\partial u_m}{\partial x_{m+1}} & ... & \frac{\partial u_m}{\partial x_n}\\ 0 & ... & 0 & 1 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ 0 & ... & 0 & 0 & ... & 1\end{vmatrix}=$$

$$=\left.\frac{\partial\left(u_1,...,u_m\right)}{\partial\left(x_1,...,x_m\right)}\right|_{\vec{x}=\vec{a}}\neq 0$$

Значит, (10.9) - гладкая обратимая замена переменных и существует такая окрестность $U(\vec{a})$, что система (10.9) разрешима относительно $\vec{x}:\vec{x}=\vec{\phi}(\vec{y})$. Отюда получаем вдоль каждой траектории

$$\begin{cases}\dot{y}_k=\dot{u}_k(\vec{x})=0, k=\overline{1,m}\\ \dot{y}_k=\dot{x}_k=f_k(\vec{x})=f_k(\vec{\phi}(\vec{y}))=g_k(\vec{y}), k=\overline{m+1,n}\end{cases}\tag{10.10}$$

При $m=n-1$ для опредления y_n мы имеем уравнение

$$\dot{y}_n=g_n\left(C_1,...,C_{n-1},y_n\right)$$

которое интегрируется в квадратурах.

11.0.4 10.4. The first integrals of arbitrary normal systems of equations

Рассмотрим теперь неавтономную систему уравнений

$$\frac{d\vec{y}}{dt}=\vec{g}(t,\vec{y}),\quad (t,\vec{y})\in\Omega\subset\mathbb{R}^{n+1}_{t,\vec{y}}\tag{10.11}$$

Здесь $\vec{y}=\left(y_1,...,y_n\right)^T,\vec{g}(t,\vec{y})=\vec{g}\left(t,y_1,...,y_n\right)=\left(g_1,...,g_n\right)^T$. Систему (10.11) можно привести к автономной, если положить $y_{n+1}=t$. В результате получим систему

$$\begin{cases}\frac{dy_{n+1}}{dt}=1\\ \frac{d\vec{y}}{dt}=\vec{g}\left(y_{n+1},y_1,...,y_n\right)\end{cases}\tag{10.12}$$

Введем новые обозначения, а именно:

$$\left(y_{n+1},y_1,...,y_n\right)=\left(x_1,...,x_{n+1}\right),\left(1,g_1,...,g_n\right)=\left(f_1,...,f_{n+1}\right).$$

Тогда система (10.12) примет вид

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{f}(\vec{x})\tag{10.13}$$

Правая часть системы (10.13) не обращается в ноль. Отсюда и из теоремы 10.2 следует, что она во всей рассматриваемой области имеет n независимых первых интегралов. Эти интегралы по определению называются независимыми первыми интегралами системы (10.11). Таким образом, неавтономная (10.11) система всегда имеет n - независимых первых интегралов.

Определение 10.4.1. Функция $u(t,\vec{y})$ называется первым интегралом системы (10.11), если она отлична от постоянной, определена в некоторой области $G\subseteq\Omega, u(t,\vec{y})\in\mathbf{C}^1(G)$ и для любого решения $\vec{y}=\vec{\varphi}(t)\in G$ имеет место равенство

$$u(t,\vec{\varphi}(t))=C,\quad C=\text{const}.$$

12 11 Linear homogeneous partial DE of the first order by Diesperov

12.0.1 11.1. Basic Terms and Definitions

Уравнение вида

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0, \vec{x} \in \Omega, \Omega \subset \mathbb{R}_{\vec{x}}^n \tag{11.1}$$

где $u(\vec{x})$ - неизвестная функция, а $f_k(\vec{x}) = f_k(x_1, \cdots, x_n), k = \overline{1,n}, -$ функции, заданные в области Ω, называется линейным дифференциальным уравнением с частными производнами первого порядка. Ниже предполагается, что $\vec{f}(\vec{x}) \in C^1(\Omega)$, где $\vec{f}(\vec{x}) = \text{colon}\,(f_1(\vec{x}), ..., f_n(\vec{x}))$.

Определение 11.1.1. [6]). Функция $u(\vec{x})$, определенная в некоторой области $G \subseteq \Omega$, называется решением уравнения (11.1), если

1. $u(\vec{x}) \in \mathbf{C}^1(G)$;
2. $\sum_{k=1}^{n} f_k(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0$ для любого $\vec{x} \in G$.

Если $u(\vec{x}), \vec{x} \in G$, является решением уравнения (11.1), то поверхность $u = u(\vec{x})$ в $\mathbb{R}_{\vec{x},u}^{n+1}$ называется интегральной поверхностью уравнения (11.1).

Theorem

11.1. Пусть $u_1(x), \cdots, u_{n-1}(x)$ - независимые первые интегралы системы (10.1). Тогда в некоторой окрестности каждой точки $\vec{a} \in \Omega$, в которой $\vec{f}(\vec{a}) \neq \overrightarrow{0}$, все решения $u(\vec{x})$ уравнения (11.1) описываются формулой

$$u(\vec{x}) = \Phi\left(u_1(\vec{x}), \cdots, u_{n-1}(\vec{x})\right), \tag{11.2}$$

где $\Phi\left(z_1, \cdots, z_{n-1}\right)$ - произвольная непрерывно дифференцируемая функиия, определённая в некоторой окрестности точки $z_1^0 = u_1(\vec{a}), ..., z_{n-1}^0 = u_{n-1}(\vec{a})$.

Доказательство. - Уравнение (11.1), как было показано в теореме 10.1, тесно связано с автономной системой (10.1). Напомним: любое решение уравнения (11.1) является первым интегралом системы (10.1). С другой стороны, если $\vec{f}(\vec{a}) \neq \overrightarrow{0}$, то в некоторой окрестности $U(\vec{a})$ точки $\vec{a} \in G$ согласно теореме 10.2 существуют ($n-1$) независимые первые интегралы $u_1(\vec{x}), ..., u_{n-1}(\vec{x})$ системы (10.1). Эти интегралы являются решениями уравнения (11.1). Любой первый интеграл $u(\vec{x})$ автономной системы (10.1) можно представить в виде

$$u(\vec{x}) = \Phi\left(u_1(\vec{x}), ..., u_{n-1}(\vec{x})\right)$$

где $\Phi\left(z_1, \cdots, z_{n-1}\right)$ является некоторой непрерывно дифференцируемой функцией. Так как первый интеграл $u(\vec{x})$ - произвольное решение уравнения (11.1), то мы получаем, что все его решения описываются формулой (11.2).

Отметим, что теорема носит локальный характер. Ниже функцию (11.2) будем называть общим решением уравнения (11.1) в окрестности точки $\vec{a}$. В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, оно зависит от произвольной непрерывно дифференцируемой функции. Таким образом, чтобы найти общее решение уравнения (11.1), необходимо, в первую очередь, определить первые интегралы $u_1(\vec{x}), ..., u_{n-1}(\vec{x})$ соответствующей автономной системы (10.1).

12.0.2 11.2. Characteristics and integral surfaces of a linear partial differential equation of the first order

Определение 11.2.1. Система уравнений

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}), \vec{x} \in \Omega \tag{11.3}$$

называется характеристической, а $\vec{x} = \vec{\varphi}(t), t \in J, \vec{\varphi}(t) \in \Omega$, - её фазовые траектории называются характеристиками уравнения (11.1).

Определение 11.2.2. Кривая в $\mathbb{R}^{n+1}_{\vec{x},u}$

$$\vec{x} = \vec{\varphi}(t), u = c, t \in J,$$

соответствующая характеристике $\vec{x} = \vec{\varphi}(t), t \in J, \vec{\varphi}(t) \in \Omega$ (c - произвольная постоянная), называется характеристической кривой. Её проекция на фазовое пространство совпадает с характеристикой.

Theorem

11.2. Пусть $u = u(\vec{x}), \vec{x} \in G$, является решением уравнения (11.1), $\vec{x} = \vec{\varphi}(t), t \in J, \vec{\varphi}(t) \in G$, - его характеристикой. Если при $t = t_0, u\left(\varphi\left(t_0\right)\right) = C$, то $u(\varphi(t)) = C$ для любого $t \in J$.

Доказательство. - Если функция $u = u(\vec{x}), \vec{x} \in G$, - решение уравнения (11.1), то она является первым интегралом характеристической системы (11.3). Вдоль характеристики $\vec{x} = \vec{\varphi}(t), t \in J$, он будет постоянным: $u(\vec{\varphi}(t)) = c, t \in J$. Так как по условию теоремы $u\left(\vec{\varphi}\left(t_0\right)\right) = C, t_0 \in J$, то с = С. Следовательно, $u(\vec{\varphi}(t)) = C$ для любого $t \in J$. $\square$

Отсюда получаем: если характеристическая кривая имеет одну общую точку с интегральной поверхностью, то она полностью принадлежит этой поверхности. Таким образом, интегральные поверхности сотканы из характеристических кривых.

Следствие. Если две интегральные поверхности имеют общую точку, то они пересекаются вдоль характеристической кривой, проходящей через эту точку.

12.0.3 11.3. Cauchy problem for a linear partial differential equation of the first order and the theorem of existence and uniqueness of its solution

Рассмотрим в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ гладкую $(n-1)$-мерную поверхность, задаваемую неявно уравнением

$$S_{n-1} : g\left(x_1, ..., x_n\right) = 0. \tag{11.4}$$

Гладкость поверхности S_{n-1} обеспечивается следующими требованиями, наложенными на функцию $g(\vec{x}) : g(\vec{x}) \in \mathbf{C}^1(\Omega)$, и в каждой точке поверхности имеет место неравенство $|\nabla g(\vec{x})| \neq 0$.

Определение. Точка $\vec{a}$ на гладкой поверхности S_{n-1}, в которой

$$(\vec{f}(\vec{x}), \nabla g(\vec{x}))\Big|_{\vec{x}=\vec{a}} \neq 0, \tag{11.5}$$

называется нехарактеристической. В противном случае - характеристической. Из определения следует, что характеристическими точками являются точки равновесия характеристической системы (11.3) и точки, в которых вектор $\vec{f}(\vec{x})$ касается поверхности S_{n-1}. Зададим на поверхности S_{n-1} непрерывно дифференцируемую функцию $u_0(\vec{x})$.

Вопрос: какая функция называется непрерывно дифференцируемой на гладкой поверхности?

Задача Коши для уравнения (11.1) формулируется следующим образом.

Задача Коши. Найти решение $u(\vec{x})$ уравнения (11.1), удовлетворяющее на поверхности S_{n-1} условию

$$u(\vec{x})|_{\vec{x}\in S_{n-1}} = u_0(\vec{x}) \tag{11.6}$$

Условие (11.6) и поверхность (11.4) называются начальными.

Theorem

11.3. Пусть на гладкой поверхности $S_{n-1} \subset \Omega$ (11.4) задана непрерывно дифференцируемая функияя $u_0(\vec{x})$ и $\vec{f}(\vec{x}) \in C^1(\Omega)$. Тогда в некоторой окрестности любой её нехарактеристической точки $\vec{a}$ решение задачи Коши (11.1), (11.6) существует и единственно.

Доказательство. $\rightarrow$ В теореме 10.2 было доказано, что в некоторой окрестности $U(\vec{a})$ точки $\vec{a}$, не являющейся точкой равновесия характеристической системы (11.3), существуют независимые первые интегралы $u_1(\vec{x}), ..., u_{n-1}(\vec{x})$. Произведем в уравнении (11.1) замену переменных

$$z_1 = u_1(\vec{x}), ..., z_{n-1} = u_{n-1}(\vec{x}), z_n = g(\vec{x}), \vec{x} \in U(\vec{a}), \tag{11.7}$$

и рассмотрим в точке $\vec{x} = \vec{a}$ функциональный определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial z_1}{\partial x_n} \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial g}{\partial x_n} \end{vmatrix}_{\vec{x}=\vec{a}} \tag{11.8}$$

Элементы в строках этого определителя являются координатами векторов $\nabla u_i(\vec{x}), \nabla g(\vec{x}), i = \overline{1, n-1}$. Первые ($n-1$) строк в определителе (11.8) линейно независимы в точке $\vec{x} = \vec{a}$, т.к. линейно независимы $\nabla u_i(\vec{x}), i = \overline{1, n-1}$. Докажем, что векторы $\nabla u_i(\vec{x}), \nabla g(\vec{x}), i = \overline{1, n-1}$,

являются также линейно независимыми в точке $\vec{x} = \vec{a}$. Предположим противное, т.е. существуют числа $\alpha_i, i = \overline{1, n-1}$, такие, что $\nabla g(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \nabla u_i(\vec{x})$. Умножим обе части этого равенства скалярно на вектор $\vec{f}(\vec{x})$. В результате получим

$$(\nabla g(\vec{x}), \vec{f}(\vec{x})) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \left(\nabla u_i(\vec{x}), \vec{f}(\vec{x})\right)$$

Левая часть этого равенства при $\vec{x} = \vec{a}$ не равна нулю в силу (11.5), а правая равна нулю в силу (11.1). Противоречие.

Так как определитель (якобиан) (11.8) и скалярное произведение (11.5) отличны от нуля в точке $\vec{x} = \vec{a}$, то в силу непрерывности они отличны от нуля в некоторой её окрестности. Далее через $U(\vec{a})$ будем обозначать окрестность точки $\vec{a}$, в которой одновременно являются независимыми первые интегралы, указанные в теореме, отличны от нуля функциональный определитель (11.8) и скалярное произведение (11.5). Отсюда следует вывод: отображение (11.7) является локально взаимно однозначным и непрерывно дифференцируемым (замена гладкая и обратимая).

Уравнения (11.7) можно рассматривать как систему уравнений относительно переменных $x_1, ..., x_n$ в $U(\vec{a})$. Согласно теореме об обратной функции, эта система

разрешима, и существует окрестность $U(\vec{b})$ точки $\vec{b}$ с координатами $b_i = u_i(\vec{a}), i = \overline{1, n-1}, b_n = g(\vec{a}) = 0$, в которой мы получаем

$$\vec{x} = \vec{v}(\vec{z}) = \text{colon}\left(v_1(\vec{z}), ..., v_n(\vec{z})\right), \vec{a} = \vec{v}(\vec{b})$$

Здесь функции $v_i(\vec{z}), \vec{z} \in U(\vec{b})$ являются непрерывно дифференцируемыми. Возьмём в окрестности $U(\vec{a})$ какое-либо решение $\vec{x} = \vec{\varphi}(t)$ характеристической системы (11.3), начинающееся на поверхности S_{n-1}. Перейдем в уравнении (11.1) к новым переменным $z_i, i = \overline{1, n}$(11.7). В силу определения первого интеграла имеем

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{du_1(\vec{x})}{dt} = 0, ..., \frac{dz_{n-1}}{dt} = \frac{du_{n-1}(\vec{x})}{dt} = 0 \tag{11.9}$$

$$\frac{dz_n}{dt} = \frac{dg(\vec{x})}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{d\vec{x}_i}{dt} = (\nabla g(\vec{x}), \vec{f}(\vec{x})) = (\nabla g(\vec{v}(\vec{z})), \vec{f}(\vec{v}(\vec{z}))) =$$

$$= \Psi(\vec{z}) \neq 0.$$

Если $u(\vec{x})$ - первый интеграл характеристической системы, то в новых переменных $(z_1, ..., z_n)$ получим функцию

$$u(\vec{x}) = u(\vec{v}(\vec{z})) = \omega(\vec{z}),$$

которая является также первым интегралом в новых переменных. Отсюда находим

$$0 = \frac{du(\vec{x})}{dt} = \frac{d\omega(\vec{z})}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial z_1} \underbrace{\frac{dz_1}{dt}}_{=0} + \cdots + \frac{\partial \omega}{\partial z_{n-1}} \underbrace{\frac{dz_{n-1}}{dt}}_{=0} + \frac{\partial \omega}{\partial z_n} \frac{dz_n}{dt} =$$

$$= \frac{\partial \omega}{\partial z_n} \Psi(\vec{z}).$$

Так как $\Psi(\vec{z}) \neq 0, \vec{z} \in U(\vec{b})$, то в новых переменных $z_1, ..., z_n$ уравнение (11.1) принимает вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial z_n} = 0. \tag{11.10}$$

Его общим решением является произвольная непрерывно дифференцируемая функция $\omega = W\left(z_1, ..., z_{n-1}\right)$. Для функции $u_0(\vec{x})$ на поверхности S_{n-1} имеем

$$u_0(\vec{x}) = u_0(\vec{v}(\vec{z}))|_{z_n=0} = \omega_0\left(z_1, ..., z_{n-1}\right),$$

где $\omega_0\left(z_1, ..., z_{n-1}\right)$ - непрерывно дифференцируемая функция. Это следует из определения непрерывной дифференцируемости функции $u_0(\vec{x})$ на гладкой поверхности S_{n-1}.

Отсюда находим $W = \omega_0\left(z_1, ..., z_{n-1}\right)$. Таким образом, решение задачи Коши в переменных $x_1, ..., x_n$ при $z_n \neq 0$ будет иметь вид

$$u(\vec{x}) = \omega_0\left(u_1(\vec{x}), ..., u_{n-1}(\vec{x})\right).$$

Заметим, что в новых переменных $z_1, ..., z_n$ задача Коши ставится следующим образом: найти решение уравнения (11.10), которое на гиперплоскости $z_n = 0$ принимает значение $\omega_0\left(z_1, ..., z_{n-1}\right)$.

Использование:

1). Выпишем уравнения (11.7) при $z_n = 0$:

$$\begin{cases} z_1 = u_1(x_1, ..., x_n), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ z_{n-1} = u_{n-1}(x_1, ..., x_n), \\ g(x_1, ..., x_n) = 0. \end{cases} \tag{11.11}$$

2). В окрестности $V(\vec{b})$ разрешим систему (11.11) при $z_n = 0 : \vec{x} = \vec{v}(\vec{z})$.

3). Построим функцию $\omega_0(u_1(\vec{x}), ..., u_{n-1}(\vec{x}))$, подставив $\vec{x} = \vec{v}(z_1, ..., z_{n-1}, 0)$ в $u_0(\vec{x})|_{g(\vec{x})=0}$.

4). В результате при $z_n \neq 0$ в окрестности $V(\vec{b})$ будем иметь

$$u(\vec{x}) = \omega_0(z_1, ..., z_{n-1}).$$

5). Произведя замену $z_1 = u_1(\vec{x}), ..., z_{n-1}(\vec{x})$, получим решение задачи Коши:

$$u(\vec{x}) = \omega_0(u_1(\vec{x}), ..., u_{n-1}(\vec{x})).$$

12.0.4 11.4. Example of a solution of the Cauchy problem for a linear partial differential equation of the first order

Пример 11.4.1. Решить задачу Коши ([9], §17, 46):

$$\left(xy - x^2\right)\frac{\partial u}{\partial x} + y^2\frac{\partial u}{\partial y} + \left(e^{\frac{y}{x}} + yz\right)\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \tag{11.12}$$

$$u = \frac{y}{1+y} \text{ при } y = x\ln z, x > 0, z > 1 \tag{11.13}$$

Решение

1. Выпишем характеристическую систему уравнения (11.11):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xy - x^2 \\ \frac{dy}{dt} = y^2 \\ \frac{dz}{dt} = e^{\frac{y}{x}} + yz. \end{cases}$$

Характеристическая система не имеет положений равновесия. Отсутствуют также характеристические точки уравнения (11.12). Покажем это. Имеем

$$(\vec{f}, \nabla(y - x\ln z)) = -\left(xy - x^2\right)\ln z + y^2 - \frac{x}{z}\left(e^{\frac{y}{x}} + yz\right) = -\frac{x}{z}e^{\frac{y}{x}} \neq 0.$$

2. Найдем первые интегралы характеристической системы. Разделив первое уравнение на второе, получим однородное уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} - \frac{x^2}{y^2}.$$

Произведя замену $x = y\omega(y)$, определим решение уравнения: $\Rightarrow y = C_1 e^{\frac{y}{x}}$. Значит, $u_1 = ye^{-\frac{y}{x}}$ - первый интеграл.

Найдём второй первый интеграл. Используя полученный первый интеграл, из второго и третьего уравнений характеристической системы будем иметь

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = \frac{y}{C_1} + yz, \\ \frac{dy}{dt} = y^2, \end{cases} \Longrightarrow \frac{dz}{dy} = \frac{1}{C_1 y} + \frac{z}{y} \Longrightarrow \frac{y}{\frac{e^{\frac{y}{x}}}{y} + z} = C_2 \Longrightarrow u_2 = \frac{y^2}{e^{\frac{y}{x}} + yz}.$$

Зная первые интегралы характеристической системы, нетрудно выписать общее решение уравнения (11.11): $u(x, y, z) = \Phi\left(\frac{y}{e^{\frac{y}{x}}}, \frac{y^2}{e^{\frac{y}{x}} + yz}\right)$, где Φ - произвольная функция класса C^1.

3. Найдём решение задачи Коши. Для этого на поверхности $z_3 = y - x \ln z = 0$ составим систему уравнений (11.11):

$$\begin{cases} z_1 = u_1(x, y, z) = \frac{y}{e^{\frac{y}{x}}}, \\ z_2 = u_2(x, y, z) = \frac{y^2}{e^{\frac{y}{x}} + yz}, \quad u = \frac{y}{1+y}\Big|_{z_3=0} = \frac{y(z_1, z_2, 0)}{1 + y(z_1, z_2, 0)}. \ . \\ z_3 = y - x \ln z = 0. \end{cases} \tag{11.14}$$

Связь между перемеными x, y, z и z_1, z_2 на поверхности S_{n-1} устанавливается из решения системы (11.14). В результате имеем

$$z = e^{\frac{y}{x}} \Rightarrow z_1 = \frac{y}{z}, z_2 = \frac{y^2}{z + yz}. \tag{11.15}$$

Отсюда и из начального условия (11.12) находим

$$\frac{y}{1+y} = \frac{z_2}{z_1} \Longrightarrow u = \frac{z_2}{z_1} \text{ при } z_3 = 0.$$

Следовательно, решением задачи Коши при $z_3 \neq 0$ будет функция

$$u(x, y, z) = \frac{u_2(x, y, z)}{u_1(x, y, z)} = \frac{y e^{\frac{y}{x}}}{e^{\frac{y}{x}} + yz}$$

Замечание 11.4.1. Так как характеристическая система является автономной, то она инвариантна относительно сдвига времени. Поэтому можно считать, что каждая её характеристика пересекает поверхность S_{n-1} при $t = 0$, и рассмотривать систему (11.11) при $t = 0$. Её решение определяет связь между перемеными $x_k, k = \overline{1, n}$ и $z_i, i = \overline{1, n-1}$. Далее, при $t \neq 0$ так же, как в пунктах 3) - 5) (§11.3).

13 Romanko's Course

Введение

Общепризнано, что метод построения математических моделей является наиболее эффективным методом изучения различных явлений природы. В большинстве случаев не удается установить формулу прямой зависимости между собой различных характеристик рассматриваемого физического, биологического, химического, экономического или какого-нибудь другого динамического процесса. Однако часто удается составить определенную функциональную зависимость между неизвестными характеристиками рассматриваемого процесса, скоростями их изменения и временем, т.е. найти уравнения, содержащие производные неизвестных характеристик процесса. В таком случае говорят, что математической моделью процесса является дифференциальное уравнение.

Простейший пример дифференциального уравнения дает, например, задача о нахождении закона движения материальной точки по заданной скорости ее движения. Если $S(t)$ - неизвестный путь, пройденный точкой за время t, и $v(t)$ - заданная скорость ее движения в момент времени t, то получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dS(t)}{dt} = v(t). \tag{1}$$

Как следует из курса анализа, в случае, когда, например, $v(t)$ - заданная непрерывная функция $t \geq 0$, все решения уравнения (1) задаются формулой

$$S(t) = \int_0^t v(\tau)d\tau + C \tag{2}$$

где C - произвольная действительная постоянная.
Исследования разрушения биологических клеток под действием ультразвука высокой интенсивности приводят к дифференциальному уравнению вида

$$\frac{dN(t)}{dt} = -RN(t), \tag{3}$$

где t-время, $N(t)$ - концентрация живых клеток, R - постоянная, определяющая вероятность разрыва клетки в единицу времени. Нетрудно

проверить, что решениями уравнения (3) будут функции

$$N(t) = Ce^{-Rt}, \tag{4}$$

где C - произвольная постоянная.
Еще один пример дифференциального уравнения можно получить, рассмотрев, например, задачу о колебании шарика, подвешенного на пружине и выведенного из положения равновесия. Если обозначить отклонение шарика от положения равновесия в момент времени t через $x(t)$ и воспользоваться вторым законом Ньютона, то уравнение движения шарика можно записать в виде

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0 \tag{5}$$

где $\omega > 0$ - некоторое заданное число.
Дифференциальное уравнение вида (5) называется уравнением гармонических колебаний или уравнением линейного осциллятора. Как будет в дальнейшем установлено, все решения уравнения (5) задаются формулой

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi), \tag{6}$$

где A и φ-произвольные постоянные.
Опыт показывает, что разные по содержанию задачи могут приводить к одинаковым дифференциальным уравнениям. Использование дифференциальных уравнений в качестве модели некоторого процесса в природе, как уже видно из приведенных примеров, удобно в том смысле, что эти уравнения описывают эволюцию процесса во времени и характер возможных изменений процесса в зависимости от его первоначального состояния.

Если в дифференциальном уравнении неизвестная функция является функцией одной независимой переменной, то уравнение называется обыкновенным дифференциальным уравнением. Если же неизвестная функция, входящая в дифференциальное уравнение, является функцией двух или большего числа независимых переменных, то дифференциальное уравнение называется уравнением в частных производных. Считая x независимой переменной и $y = y(x)$ - неизвестной функцией, обыкновенное дифференциальное уравнение в общем случае можно записать в виде соотношения

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0 \tag{7}$$

где F-заданная функция своих аргументов. Порядок старшей производной, входящей в уравнение (7), называется порядком обыкновенного дифференциального уравнения (7). Таким образом, уравнение (7) имеет порядок n, уравнения (1) и (3) имеют первый порядок, а уравнение (5) - это уравнение второго порядка.

Если дифференциальное уравнение (7) разрешимо, то, как видно из уже приведенных примеров, оно имеет, как правило, бесчисленное мно-

жество решений. Поэтому, решив дифференциальное уравнение, описывающее некоторый процесс во времени, нельзя еще указать однозначно зависимость от времени характеристики процесса, удовлетворяющей этому уравнению. Нужны дополнительные условия. На практике чаще всего в качестве дополнительных условий выступают некоторые начальные условия. Так, например, однозначное решение уравнения (1) можно получить, задав начальное положение точки:

$$S(0) = S_0$$

Тогда из формулы (2) находим $C = S_0$ и, значит, формула

$$S(t) = \int_0^t v(\tau)d\tau + S_0$$

однозначно определяет закон движения точки. Задав для уравнения (3) начальную концентрацию клеток в момент времени t_0

$$N\left(t_0\right) = N_0$$

из формулы (4) находим $C = N_0 e^{Rt_0}$. Следовательно, концентрация клеток в каждый момент t однозначно задается формулой

$$N(t) = N_0 e^{R(t_0 - t)}$$

Наконец, задав при $t = 0$ начальное отклонение и начальную скорость шарика

$$x(0) = x_0, \quad \frac{dx(0)}{dt} = v_0$$

из формулы (6) можно найти постоянные A, φ и тем самым однозначно определить заданное колебание шарика. Возможны и другие типы дополнительных условий, выделяющих конкретное решение дифференциального уравнения. Например, это могут быть заданные значения решения $x(t)$ уравнения (5) при двух фиксированных моментах времени $t_1, t_2 : x\left(t_1\right) = x_1, x\left(t_2\right) = x_2$, или условие периодичности для решения уравнения (3)

$$N(0) = N(T), \quad T > 0.$$

Это примеры так называемых граничных условий для уравнений (5) и (3). Но для них не всегда можно гарантировать единственность решения.

Для практических приложений дифференциальных уравнений очень важен вопрос о характере зависимости решения дифференциального уравнения (7) от функции F и от дополнительных условий (начальных или граничных) при их малом изменении. Ведь в прикладных задачах и само дифференциальное уравнение и дополнительные условия неизбежно определяются с некоторой погрешностью, так как при их составлении всегда приходится пренебрегать несущественными для рассматриваемого

процесса факторами. Для практики целесообразны только такие дифференциальные уравнения и дополнительные условия, при малом изменении которых мало изменяется

определяемое ими решение. Другими словами, должна быть непрерывная зависимость решения рассматриваемой задачи от исходных данных.

Из сказанного ясно, что одними из главных вопросов теории дифференциальных уравнений являются вопросы существования, единственности и непрерывной зависимости от исходных данных решения дифференциального уравнения при заданных дополнительных условиях. Кроме этих вопросов, теория дифференциальных уравнений изучает качественные свойства и методы решения дифференциальных уравнений различных типов и некоторые другие вопросы. Отметим, что лишь для сравнительно небольшого числа дифференциальных уравнений решение можно записать в виде некоторой формулы. Поэтому, наряду с методами нахождения точных решений, в теории дифференциальных уравнений важное значение имеют методы построения приближенных решений дифференциальных уравнений: численные методы решения и асимптотические методы решения. Численным и асимптотическим методам решения уравнений в настоящей книге из-за недостатка места уделяется мало внимания. Более подробно о них можно прочитать, например, в [43], [45], [11].

Теория дифференциальных уравнений является важной для практических приложений и самостоятельной ветвью математического анализа, которая продолжает успешно развиваться. Знание основных положений этой теории абсолютно необходимо при использовании математических методов в различных областях человеческой деятельности. Кроме основных фактов теории обыкновенных дифференциальных уравнений, в настоящую книгу включены основы теории дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка и основы вариационного исчисления. Примеры из практики, приведенные, например, в [43] и [26], показывают, что уравнения в частных производных первого порядка встречаются в различных областях знаний. Методы решения таких уравнений тесно связаны с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений. Этим объясняется включение в книгу уравнений в частных производных первого порядка.

Некоторые задачи вариационного исчисления приводят к соответствующим задачам теории дифференциальных уравнений и наоборот. Поэтому существует тесная связь между вариационным исчислением и теорией дифференциальных уравнений. С другой стороны, вариационное исчисление является самостоятельной и успешно развивающейся ветвью математического анализа.

Proof

примерах вариационных задач и о значении вариационного исчисления для практических приложений рассказано во введении к главе 9.

13.1 Methods for solving some differential equations

Предполагается, что все функции, рассматриваемые в этой главе, принимают только действительные значения и что произвольные постоянные являются действительными.

13.1.1 § 1. Basic concepts for first-order differential equations

Обозначим через $R^2_{(x,y)}$ евклидову плоскость с фиксированной декартовой прямоугольной системой координат x, y. Пусть G - непустая область, лежащая в $R^2_{(x,y)}$ и пусть $f(x, y)$ - некоторая заданная непрерывная функция в области G.

Изучение теории обыкновенных дифференциальных уравнений начнем с дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно

производной

$$y' = f(x, y). \tag{1}$$

Здесь x - независимая переменная (аргумент), а $y = y(x)$ - неизвестная функция. Уравнение (1) принято еще называть дифференциальным уравнением первого порядка в нормальной форме.

Определим понятие решения дифференциального уравнения (1). Пусть X обозначает некоторый промсжуток числовой прямой R_x^l с декартовой координатой x. Промежуток X может представлять собой либо отрезок оси R_x^1, либо (ограниченный или неограниченный) интервал оси R_x^1, либо (ограниченный или неограниченный) полуинтервал оси R_x^1.

Definition

Функция $y = \varphi(x)$, определенная на промежутке X, называется решением дифференциального уравнения (1), если

1. $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную $\varphi'(x)$ на промежутке X,
2. $(x, \varphi(x)) \in G$ при всех $x \in X$,
3. $\varphi'(x) \equiv f[x, \varphi(x)]$ на промежутке X.

Замечания.

1. Если промежуток X содержит левый или правый конец, то определение 1 требует существования непрерывной соответствующей односторонней производной $\varphi(x)$ в этой точке.
2. Из определения следует, что промежуток X необходимо лежит в проекции области G на ось R_x^1. Процесс нахождения решений уравнения (1) иногда называют интегрированием дифференциального уравнения (1). Кривая в области G, являющаяся графиком некоторого решения уравнения (1), называется интегральной кривой дифференциального уравнения (1).

Далеко не всегда удается получить решение уравнения (1) в явном виде $y = \varphi(x), x \in X$. Во многих случаях решение (1) определяется как неявная функция из уравнения $\Phi(x, y) = 0$. Решить уравнение (1) означает найти все решения уравнения (1).

Рассмотрим геометрический смысл задания уравнения (1) и его решения. С этой целью сопоставим каждой точке $(x_0, y_0) \in G$ вектор с координатами $\{1, f(x_0, y_0)\}$, отложенный от этой точки. Множество всех полученных векторов будем называть полем паправлений, соответствующим уравнению (1). Из определения решения уравнения (1) и геометрического смысла производной следует, что кривая в области G является интегральной кривой уравнения (1) в том и только том случае, когда она гладкая и направление касательной в каждой ее точке совпадает с направлением попя в этой точке. Таким образом, в каждой точке $(x, y) \in G$ угол $\alpha = \alpha(x, y)$ наклона касательной к интегральной кривой (1) определяется уравнением $\operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$ (рис. 1).

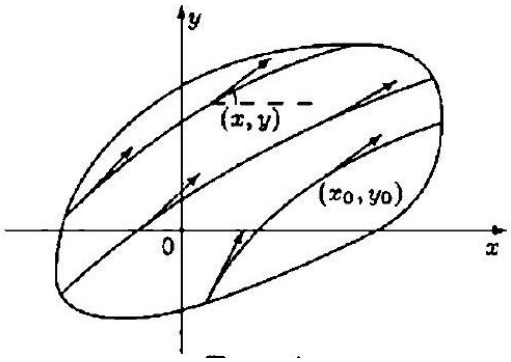


Рис. 1

Итак, задача интегрирования уравнения (1) геометрически эквивалентна нахождению всех гладких кривых в G, направление касательных к которым в каждой точке G совпадает с вектором поля направлений в данной точке. Это соображение используется для приближенного построения интегральных кривых. При практическом нахождении поля направлений для уравнения (1) удобно использовать так называемые изоклины. Изоклиной поля направлений уравнения (1) называют такую кривую

в области G, во всех точках которой направления поля имеют одинаковый угловой коэффициент k. Ясно, что изоклина задается уравнением $f(x, y) = k$. В простых случаях построение с помощью изоклин поля направлений позволяет сделать определенные выводы о поведении интегральных кривых уравнения (1). Приведем пример.

Example 1.

С помощью изоклины приближенно начертить интегральные кривые уравнения $y' - y = x$.

$\triangle$ Изоклинами являются параллельные прямые $x + y = k$. При $k = 0$ получаем изоклину $x + y = 0$, которая делит плоскость на две полуплоскости: в нижней полуплоскости интегральные кривые убывают, а в верхней полуплоскости они возрастают. При $k = -1$ получаем изоклину $x + y = -1$, которая одновременно является и интегральной кривой, в чем можно убедиться подстановкой $y = -x - 1$ в уравнение. Продифференцировав заданное уравнение, находим $y'' = y' + 1 = x + y + 1$. Законность дифференцирования будет ясна из § 2 главы 1 .

Отсюда видно, что прямая $x + y = -1$ делит плоскость на две части: в нижней части $y'' < 0$, в верхней части $y'' > 0$. Таким образом, интегральные кривые по разные стороны от прямой $x + y = -1$ имеют различную выпуклость. Если учесть, кроме того, что интегральные кривые заданного уравнения не могут пересекаться (см. п. 3 § 2), то получаем в результате приближениую картину поведения интегральных кривых, изображенную на рис. 2.

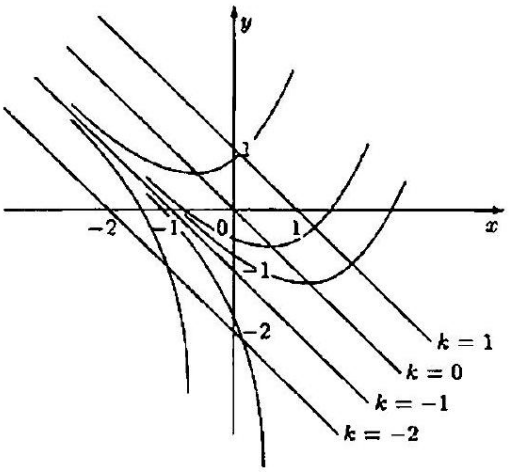


Рис. 2

Как следует из примеров введения и вышеприведенных геометрических соображений, за редким исключением разрешимое дифференциальное уравнение (1) имеет бесконечное множество решений. Таким исключением, например, является уравнение $y' = \sqrt{-y^2}$, которое имеет един-

ственное решение $y = 0$. Поэтому в общем случае для получения какогонибудь конкретного решения уравнения (1), кроме самого уравнения (1), необходимы еще дополнительные условия, выделяющие это конкретное решение из множества всех решений уравнения. Во многих случаях таким дополнительным условием для уравнения (1) является начальное условие

$$y\left(x_0\right) = y_0, \quad \left(x_0, y_0\right) \in G. \tag{2}$$

Числа x_0, y_0 называются начальными данными, а задача отыскания решения уравнения (1), удовлетворяющего начальному условию (2), называется начальной задачей или задачей Коши для уравнения (1).

Решить задачу Коши для уравнения (1) геометрически означает найти интегральную кривую уравнения (1), проходящую через заданную точку $(x_0, y_0) \in G$ (см. рис. 1).

В главе 4 будут установлены достаточные условия на функцию $f(x, y)$, обеспечивающие существование и единственность решения задачи Коши (1)-(2). Именно там будет доказана следующая теорема.

Теорема существования и единственности. Пусть функции $f(x, y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны в области G и точка (x_0, y_0) лежит в G. Тогда:

1. Найдется число $\delta > 0$ такое, что решение задачи Коши (1)-(2) существует при всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

2. Если $y = \varphi_1(x), x \in X_1, uy = \varphi_2(x), x \in X_2$, - дая решения задачи Коши (1), (2) (промежутки X_1 и X_2 содержат точку x_0), то $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$ для всех $x \in X_1 \cap X_2$.

Обсуждение условий сформулированной теоремы проведем в главе 4, а сейчас только отметим, что при заданной $f(x, y)$ с указанными в теореме свойствами гладкости интервал существования решения задачи Коши (1)-(2) и само решение задачи Коши (1)-(2) зависят от начальной точки $(x_0, y_0) \in G$. Впрочем, этот факт очевиден из геометрической интерпретации решения уравнения (1) (см. рис. 1). При условиях теоремы гарантируется, что через точку $(x_0, y_0) \in G$ проходит единственная интегральная кривая уравнения (1) (рис. 3).

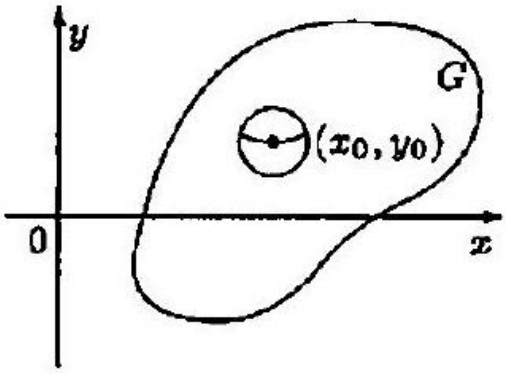


Рис. 3

Условия приведенной теоремы выполнены, если, например, $f(x, y)$ является многочленом от x, y.

Обобщением дифференциального уравнения в нормальной форме (1) является так называемое уравнение первого порядка в дифференциалах (или уравнение первого порядка в симметричной форме):

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{3}$$

Здесь будем предполагать, что $P(x, y), Q(x, y)$ - заданные непрерывные функции в области G и что $|P(x_0, y_0)| + |Q(x_0, y_0)| > 0$ для каждой точки $(x_0, y_0) \in G$. Уравнение (1) является частным случаем уравнения (3), когда $P(x, y) \equiv f(x, y), Q(x, y) \equiv -1$. Уравнение (3) удобнее уравнения (1) в том смысле, что переменные x, y в нем участвуют равноправно.

Для уравнения (3) можно дать определение решения аналогично определению решения для уравнения (1). Однако более целесообразно расширить понятие решения, рассмотрев так называемые параметрические решения.

Definition

Вектор-функция $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ на некотором промежутке $\mathcal{I}$ числовой оси R_t^1 называется параметрическим решением уравнения (3), если:

1. функции $\varphi(t), \psi(t)$ - непрерывно дифференцируемые и $[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 > 0$ для всех $t \in \mathcal{I}$,
2. $(\varphi(t), \psi(t)) \in G$ для всех $t \in \mathcal{I}$,
3. $P[\varphi(t), \psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)]\psi'(t) \equiv 0$ на всем промежутке $\mathcal{I}$.

Кривая в области G, являющаяся непрерывным образом промежутка I при отображении ($\varphi(t), \psi(t)$), называется (параметрической) интегральной кривой уравнения (3).

Из определения решения немедленно следует, что интегральная кривая уравнения (3) является гладкой кривой.

Если $\varphi'(t_0) \neq 0$ для некоторого $t_0 \in \mathcal{I}$, то найдется интервал $(t_0 - \delta, t_0 + \delta), \delta > 0$, на котором $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \varphi^{-1}(x)$, и тогда кусок интегральной кривой, соответствующий изменению t в интервале ($t_0 - \delta, t_0 + \delta$), определяется уравнением $y = \varkappa(x) \equiv \psi[\varphi^{-1}(x)]$. Если же $\psi'(t_1) \neq 0$ для некоторого $t_1 \in \mathcal{I}$, то найдется интервал $(t_1 - \delta_1, t_1 + \delta_1), \delta_1 > 0$, на котором $y = \psi(t)$ имеет обратную функцию $t = \psi^{-1}(y)$, и

тогда кусок интегральной кривой, соответствующий $t \in (t_1 - \delta_1, t_1 + \delta_1)$, определяется уравнением $x = \omega(y) \equiv \varphi\left[\psi^{-1}(y)\right]$.

Отсюда следует, что интегральная кривая уравнения (3), в отличие от интегральной кривой уравнения (1), в общем случае представляет собой гладкую кривую, отдельные куски которой задаются или функцией вида $y = \varkappa(x)$ или функцией вида $x = \omega(y)$. Соответственно этому уравнение (3) допускает как решения вида $y = \varkappa(x)$, так и решения вида $x = \omega(y)$, заданных явно, неявно или параметрически.

В частности, из определения параметрического решения уравнения (3) при $x = t$ получаем решение вида $y = \psi(x)$, а при $y = t$ получаем решение вида $x = \varphi(y)$.

Замечание. Иногда уравнение (3) может быть задано не только в области G, но и на ее границе. Тогда всякая граничная точка относится к так называемым особым точкам (см. далее) уравнения (3). Поведение интегральных кривых (3) в окрестности границы G требует отдельного рассмотрения.

В каждой точке $(x, y) \in G$ уравнение (3) определяет вектор с компонентами $\{-Q(x, y), P(x, y)\}$. Эти вектора задают поле направлений в области G, порождаемого уравнением (3). Как и в случае уравнения (1), гладкая кривая в G будет интегральной кривой уравнения (3) тогда и только тогда, когда направление касательной в каждой ее точке совпадает с вектором поля в данной точке. Поле направлений уравнения (3) богаче поля направлений уравнения (1), так как, например, оно может содержать вертикальные направления, что запрещено для поля направлений уравнения (1). Как уже отмечалось ранее, структура интегральных кривых уравнения (3) может быть более сложной, чем для уравнения (1). Например, интегральные кривые уравнения (3) могут иметь вертикальные касательные, быть замкнутыми кривыми.

В силу условий на коэффициенты P и Q уравнения (3) из рассмотрения исключены те точки $(x_0, y_0) \in G$, в которых $P\left(x_0, y_0\right) = Q\left(x_0, y_0\right) = 0$. Такие точки называют особыми точками уравнения (3). В них уравнение (3) не определяет направлений. Поведение интегральных кривых уравнения (3) в окрестности изолированных особых точек будет изучено в главе 7. В силу непрерывности P и Q множество особых точек уравнения (3) всегда замкнуто, однако особые точки (3) не обязаны всегда быть изолированными. Они могут заполнять целую линию, называемую особой линией (например, прямая $y = x$ - особая линия уравнения ($y - x)(xdx + ydy) = 0$) или образовывать множество более сложной структуры. Особые линии могут определять так называемые особые решения (3).

В силу того, что переменные x, y равноправны в уравнении (3), для него удобно ставить задачу Коши в геометрических терминах.

Задача Коши для (3). Найти интегральную кривую уравнения (3), проходящую через заданную точку $(x_0, y_0) \in G$.

Если $Q\left(x_0, y_0\right) \neq 0, (x_0, y_0) \in G$, то можно установить в некоторой окрестности (x_0, y_0) эквивалентность уравнений (3) и (1). Тем самым изучение задачи Коши для уравнения (3) сводится в такой окрестности к изучению задачи Коши для уравнения (1).

13.1.2 § 2. Methods for solving the simplest differential equations of the first order

Решения дифференциального уравнения

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{1}$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ - заданные непрерывные функции в некоторой области G декартовой плоскости $R^2(x, y)$, не содержащей особых точек уравнения (1), сравнительно редко выражаются через элементарные функции. Даже простейшие уравнения вида (1)

могут приводить к решениям, не выражающимся через элементарные функции. В качестве примера можно взять уравнение

$$y' = e^{-x^2}.$$

Все его решения задаются формулой

$$y = \int e^{-x^2} dx + C$$

где $\int e^{-x^2} dx$ обозначает фиксированную первообразную функции e^{-x^2}, а C - произвольная постоянная. Из курса анализа известно, что первообразная $\int e^{-x^2} dx$ не выражается через элементарные функции. Тем не менее естественно считать, что найдены все решения уравнения.

Замечание. В теории дифференциальных уравнений символом $\int f(x)dx$, где $f(x)$ - заданная непрерывная функция на некотором промежутке, принято обозначать фиксированную первообразную, в отличие от анализа, где символ $\int f(x)dx$ обозначает множество всех первообразных функции $f(x)$. Из вышесказанного делается понятной необходимость расширения класса функций, через которые могут выражаться решения уравнения (1).

Definition

Говорят, что уравнение (1) разрешимо или интегрируемо в квадратурах, если все его решения выражаются явным или неявным образом через элементарные функции с помощью конечного числа арифметических операций, суперпозиций и операций нахождения первообразных.

Замечание. В прежние века первообразную $\int f(x)dx$ называли квадратурой $f(x)$. Отсюда и происходит название «решение в квадратурах».

Уже простой пример уравнения Риккати $y' = y^2 + x$ говорит о том, что в квадратурах интегрируется сравнительно небольшой класс уравнений (1). Поэтому, наряду с методами нахождения точных решений, для практики важное значение имеют асимптотические и численные методы решения дифференциальных уравнений, которые широко применяются в тех случаях, когда точные решения уравнений нельзя найти или они малоэффективны.

Укажем простые классы уравнений (1), интегрируемых в квадратурах. Отметим, что при решении конкретных уравнений нецелесообразно пользоваться выведенными ниже формулами решений. Проще усвоить изложенный метод решения и применять его в каждом конкретном случае.

1. Уравнения с разделенными переменными

Так называют уравнение вида

$$a(x)dx + b(y)dy = 0 \tag{2}$$

где $a(x)$ - заданная непрерывная функiия на $(\alpha, \beta), b(y)$ - заданная непрерывная функция на (γ, δ) и область $G' = \{(x, y) : x \in (\alpha, \beta), y \in (\gamma, \delta)\}$ не содержит особых точек уравнения (1).

Если существует параметрическое решение уравнения (2), задаваемого функциями $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in \mathcal{I}$ то, подставив его в (2), получим тождество на промежутке $\mathcal{I}$:

$$a[\varphi(t)]d\varphi(t) + b[\psi(t)]d\psi(t) \equiv 0 \tag{3}$$

Пусть $A(x) = \int a(x)dx$ - какая-либо первообразная $a(x)$ и пусть $B(y) = \int b(y)dy$ - какая-либо первообразная $b(y)$. Тогда интегрирование тожцества (3) приводит к равенству

$$A[\varphi(t)] + B[\psi(t)] = C, \quad t \in \mathcal{I}$$

где C - постоянная. Следовательно, всякое параметрическое решение (2) удовлетворяет уравнению

$$\int a(x)dx + \int b(y)dy = C \tag{4}$$

Нетрудно убедиться, что и обратно, если $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in \mathcal{I}$, задают гладкую кривую, удовлетворяющую на промежутке $\mathcal{I}$ уравнению (4) при некотором значении постоянной C, то она определяет параметрическое решение (2). Таким образом, формула (4), где C - произвольная постоянная, если задает гладкую кривую при некотором C, то при каждом таком значении C определяет некоторое параметрическое решение уравнения (2) и содержит все параметрические решения уравнения (2).

Если необходимо найти интегральную кривую (2), проходящую через точку (x_0, y_0), где $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $y_0 \in (\gamma, \delta)$, то однозначно такая кривая в силу (4) задается формулой

$$\int_{x_0}^{x} a(\zeta)d\zeta + \int_{y_0}^{y} b(\eta)d\eta = 0$$

Уравнение вида

$$p_1(x)q_1(y)dx + p_2(x)q_2(y)dy = 0 \tag{5}$$

где $p_1(x)$ и $p_2(x)$ - заданные непрерывные функции $x \in (\alpha, \beta)$, а $q_1(y)$ и $q_2(y)$ - заданные непрерывные функции $y \in (\gamma, \delta)$, называют уравнением с разделяющимися переменными. Здесь, как и для уравнения (2), предполагаем, что область G не содержит особых точек уравнения (5).

В случае, когда найдегся такое $x_0 \in (\alpha, \beta)$, что $p_2(x_0) = 0$, проверкой убеждаемся, что $x = x_0$ является решением (5). Аналогично, если $q_1(y_0) = 0$ для некоторого $y_0 \in (\gamma, \beta)$, то $y = y_0$-решение (5). Если же $q_1(y_1) \neq 0$ и $p_2(x_1) \neq 0$, то в некоторой окрестности $(x_1, y_1) \in G$, как нетрудно проверить, уравнение (5) эквивалентно (т.е. у них одно и то же множество решений) уравнению с разделенными переменными

$$\frac{p_1(x)}{p_2(x)}dx + \frac{q_2(y)}{q_1(y)} = 0.$$

Из формулы (4) тогда получаем формулу решений уравнения (5) в рассматриваемой окрестности $(x_1, y_1) \in G$

$$\int \frac{p_1(x)}{p_2(x)}dx + \int \frac{q_2(y)}{q_1(y)}dy = C \tag{6}$$

где C - произвольная постоянная, а знаком интеграла обозначается фиксированная первообразная.

Далее, если интегральные кривые (6) касаются прямой $x = x_0$ или прямой $y = y_0$, то путем «склеивания» частей кривых (6) и частей прямых $x = x_0, y = y_0$ в точках касания, получаем множество новых, так называемых составных решений уравнения (5). Приведем пример.

Example 1.

Решить уравнение $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$.
Δ Заменив y' отношением дифференциалов, заданное уравнение перепишем в симметричной форме

$$dy = 3\sqrt[3]{y^2}dx$$

Проверкой убеждаемся, что $y = 0$ - решение уравнения. Предполагая теперь, что $y \neq 0$, разделим обе части уравнения на $3\sqrt[3]{y^2}$. В результате попучаем уравнение с разделенными переменными

$$\frac{dy}{3\sqrt[3]{y^2}} = dx$$

Отсюда находим, что $\sqrt[3]{y} = x + C$ или $y = (x + C)^3$, где C - ироизвольная постоянная. Нетрудно проверить, что в точках $(-C, 0)$ кривые $y = (x + C)^3$ касаются прямой $y = 0$. В силу этого наше уравнение, кроме решений $y = 0, y = (x + C)^3$, имеет бесконечное множество составных решений, составленных из частей ранее полученных решений. Например, (см. рис. 4) это решения $ABH, DBE, FGBE$ и т. д.

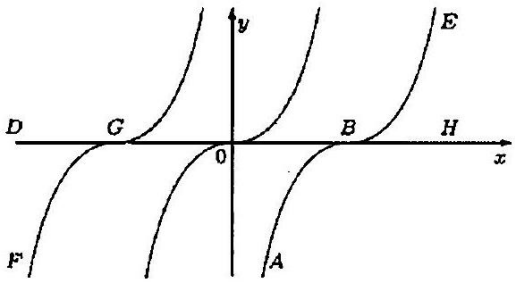


Рис. 4

Уравнение вида $y' = f(ax + by + c)$, где $f(z)$ - заданная непрерывная функция на некотором промежутке, a, b, c-заданные числа, $a^2 + b^2 > 0$, заменой $z = ax + by + c$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными $z' = a + bf(z)$.

Example 2.

Решить задачу Коши: $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}, y(0) = 1$.
После замены $z = 4x + 2y - 1$ уравнение примет вид

$$z' = 4 + 2\sqrt{z}$$

Его интегрирование дает

$$\dot{x} + C = \sqrt{z} - 2\ln(2 + \sqrt{z})$$

где C - произвольная постоянная. Возвращаясь к переменной y, получим формулу всех решений исходного уравнения

$$x + C = \sqrt{4x + 2y - 1} - 2\ln(2 + \sqrt{4x + 2y - 1}).$$

Из начального условия находим, что $C = 1 - 2\ln 3$. Следовательно, решение задачи Коши задается формулой

$$x + 1 - 2\ln 3 = \sqrt{4x + 2y - 1} - 2\ln(2 + \sqrt{4x + 2y - 1}).$$

2. Однородные уравнения первого порядка

Уравнение (1) будем называть однородным уравнением первого порядка, если его можно при $x \neq 0$ записать в виде

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{7}$$

где $f(z)$ - заданная непрерывная функция z на некотором промежутке.
Уравнение (7) заменой $y = xu$, где $u = u(x)$ - новая неизвестная функция, сводится к эквивалентному уравнению

$$xu' + u = f(u) \tag{8}$$

При решении уравнения (8) нужно различать три случая: а) $f(u) \neq u$, б) $f(u) \equiv u$, в) $f(u_k) = u_k$ для некоторых точек u_k. Уравнение (8) эквивалентно уравнению с разделенными переменными вида

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

в случае а) и уравнению $xu' = 0$ в случае б). В случае в) проверкой можно убедиться, что $u(x) = u_k$ - решения (8).

Получив все решения уравнения (8), обратной заменой находим все решения уравнения (7). При этом возможны и составные решения. Они появляются тогда, когда интегральные кривые (7) касаются интегральных прямых $y = u_k x$.

Example 3.

При $x > 0, x + y > 0$ решить уравнение

$$xy' = \frac{x^2 + y^2}{x + y}.$$

$\triangle$ Уравнение можно записать в виде $y' = \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\frac{y}{x}}$ и, следовательно, оно является однородным уравнением первого порядка. После замены $y = xu$ получаем

$$xu' + u = \frac{1 + u^2}{1 + u}$$

Отсіода находим, что

$$xu' = \frac{1 - u}{1 + u}.$$

Проверкой убеждаемся, что $u = 1$-решение этого уравнения. Если же $u \neq 1$, то уравнение эквивалентно уравнению

$$\frac{dx}{x} = \frac{1 + u}{1 - u} du$$

Решения последнего задаются формулой

$$C + \ln|x| = -\ln(u - 1)^2 - u,$$

где C - произвольная постоянная. Обратная замена дает все решения заданного уравнения

$$C + \ln|x| = -\ln\left(\frac{y}{x} - 1\right)^2 - \frac{y}{x}.$$

Пусть теперь задано уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \tag{9}$$

где $f(z)$ - непрерывная функция на некотором промежутке, а заданные числа $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ таковы, что $|a_1| + |b_1| > 0, |a_2| + |b_2| > 0$.

Рассмотрим на плоскости следующие две прямые: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Если прямые имеют точку пересечения (x_0, y_0), то замена $x = \zeta + x_0, y = \eta + y_0$ приводит (9) к однородному уравнению

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = f\left(\frac{a_1\zeta + b_1\eta}{a_2\zeta + b_2\eta}\right).$$

Если же эти прямые параллельны, то найдется такое число $k \neq 0$, что $a_2x + b_2y = k\,(a_1x + b_1y)$. Следовательно, уравнение (9) принимает вид

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{k\,(a_1x + b_1y) + c_2)}\right)$$

и заменой $z = a_1x + b_1y$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Example 4.

Решить уравнение

$$(y + 2)dx = (2x + y - 4)dy.$$

Д Прямые $y + 2 = 0$ и $2x + y - 4 = 0$ пересекаются в точке $(3, -2)$. После замены $x = \zeta + 3, y = \eta - 2$ получаем уравнение

$$\eta d\zeta = (2\zeta + \eta)d\eta.$$

Проверкой убеждаемся, что $\eta = 0$ - решение этого уравнения. При $\eta \neq 0$ это уравнение является однородным. Ищем его решение в виде $\zeta = \eta \cdot u$, где $u = u(\eta)$ - новая неизвестная функция. После упрощений находим, что

$$\eta du = (u + 1)d\eta.$$

Легко видеть, что $u = -1$ - решение. При $\eta \neq 0, u \neq -1$ находим остальные решения последнего уравнения

$$\ln|u + 1| = \ln|\eta| + \ln c_1,$$

где c_1 - произвольная положительная постоянная. Избавившись от логарифмов и положив $c = c_1 \operatorname{sign}[\eta(u + 1)]$, последнюю формулу можно записать в виде

$$u + 1 = c\eta, \quad c \neq 0.$$

Но при $c = 0$ получаем решение $u = -1$, поэтому можно считать в полученном равенстве с любым числом.

Из проведенных выкладок получаем, что все решения заданного уравнения задаются формулами

$$y = -2, \quad x + y - 1 = c(y+2)^2.$$

В некоторых случаях уравнение (1) можно привести к однородному уравнению первого порядка с помощью замены $y = z^m$. Приведем пример.

Пример 5. Решить уравнение $ydx + x(2xy+1)dy = 0$.
Δ Ясно, что $y = 0$ и $x = 0$ - решения уравнения. Пусть далее $xy \neq 0$. Сделаем в уравнении замену $y = z^m$. Имеем

$$z^m dx + x\left(2xz^m + 1\right) mz^{m-1} dz = 0$$

Это уравнение будет однородным лишь при $m = 2m + 1$, т.е. при $m = -1$. В этом случае уравнение примет вид

$$dx - \frac{x}{z}\left(1 + 2\frac{x}{z}\right) dz = 0.$$

Замена $x = uz$ приводит это уравнение к виду

$$zdu = 2u^2 dz,$$

решения которого задаются формулой (C - произвольная постоянная)

$$-\frac{1}{u} = C + \ln z^2.$$

Отсюда для исходного уравнения получаем множество решений

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \ln y^2 - \frac{1}{xy} = C.$$

3. Линейные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение вида

$$y' + a(x)y = f(x), \tag{10}$$

где $a(x)$ и $f(x)$ - заданные непрерывные функции на некотором (α, β), называется линейным уравнением первого порядка. Уравнение (10) является линейным относительно неизвестной функции $y(x)$ и ее производной $y'(x)$. Например, уравнение $y \cdot y' = 1$ не является линейным уравнением.

Если в уравнеиии (10) правая часть $f(x) \not\equiv 0$ на (α, β), то уравнение (10) называется линейным неоднородным уравнением первого порядка. Если же $f(x) \equiv 0$ на (α, β), то уравнение (10) называется линейным однородным уравнением первого порядка.

Линейное однородное уравнение первого порядка

$$y' + a(x)y = 0 \tag{11}$$

легко интегрируется. Заметим, что $y = 0$ является решением уравнения (11). Если $y \neq 0$, то уравнение (11) эквивалентно уравнению

$$\frac{dy}{y} = -a(x)dx.$$

Это уравнение является уравнением с разделенными переменными и, следовательно, его решения определяются формулой

$$\ln|y| = -\int_{x_0}^{x} a(\zeta)d\zeta + \ln C_1$$

где $x_0, x \in (\alpha, \beta)$, а произвольная постоянная взята в виде $\ln C_1$ (C_1 произвольная положительная постоянная) с целью упрощения формулы решения.

Если положить $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(\zeta)d\zeta, C = C_1 \operatorname{sign} y$ и считать, что C может обращаться в нуль, то все решения уравнения (11) записываются формулой

$$y = Ce^{-A(x)}, \tag{12}$$

где C - произвопьная постоянная.

Для решения линейного неоднородного уравнения (10) применим так называемый метод вариации постоянной (метод Лагранжа). В уравнении (10) сделаем замену

$$y = c(x)e^{-A(x)}, \tag{13}$$

где $c(x)$ - новая неизвестная непрерывно дифференцируемая функция на (α, β). Подстановка (13) в уравнение (10) определяет функцию $c(x)$. Имеем

$$c'(x)e^{-A(x)} + c(x)e^{-A(x)}[-a(x)] + a(x)c(x)e^{-A(x)} = f(x),$$
$$c'(x) = e^{A(x)}f(x), \quad c(x) = \int_{x_0}^{x} e^{A(\eta)}f(\eta)d\eta + D,$$

где $x_0, x \in (\alpha, \beta)$ и D - произвольная постоянная.

Подставляя $c(x)$ в (13), получаем формулу решений уравнения (10) при всех $x \in (\alpha, \beta)$:

$$y(x) = De^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} e^{A(\eta)}f(\eta)d\eta \tag{14}$$

где D - произвольная постоянная. Из этой формулы находим, что решением уравнения (10), удовлетворяющим начальному условию

$$y(x_0) = y_0 \tag{15}$$

где y_0-любое заданное число, является

$$y(x) = y_0e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} e^{A(\eta)}f(\eta)d\eta$$

Непосредственная проверка показывает, что эта функция является единственным решением задачи Коши (10), (15). Так как x_0 - произвольная фиксированная точка (α, β), то полученный результат означает, что формула (14) содержит в себе решения всех возможных задач Коши для уравнения (10). Это обстоятельство обосновывает следующее определение.

Definition

Функция вида (14) называется общим решением уравнения (10), а функция

$$y = De^{-A(x)}$$

называется общим решением уравнения (11).

Если обозначить через $\hat{y}(x)$ второе слагаемое формулы (14), то непосредственно проверяется, что $\hat{y}(x)$ являстся частным решением уравнения (10), удовлетворяющим начальному условию $\hat{y}(x_0) = 0$.

Как видно из формулы (14), общее решение уравнения (10) представляет собой сумму общего решения уравнения (11) и частного решения уравнения (10). Таким образом, структура общего решения линейного неоднородного уравнения (10) аналогична структуре общего решения линейных алгебраических систем уравнений. Как будет видно в дальнейшем, подобная структура общего решения имеет место для линейных дифференциальных уравнений высшего порядка и для линейных систем дифференциальных уравнений.

Замечание. Если найдено какое-либо другое решение $y_0(x)$ уравнения (10), отличное от $\hat{y}(x)$, то функция

$$y = De^{-A(x)} + y_0(x),$$

где D - произвольная постоянная, также называется общим решением (10), так как она удовлетворяет определению общего решения (10).

Пример 6. Решить уравнение

$$y' + \frac{x}{1+x^2}y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

и найти решение задачи Коши при $y(0) = 0$.

$\triangle$ Найдем сначала общее решение линейного однородного уравнения

$$y' + \frac{x}{1+x^2}y = 0.$$

Заметим, что $y = 0$ - его решение. Пусть $y \neq 0$. Заменяя в уравнении y' отношением $\frac{dy}{dx}$ и разделяя переменные, получаем

$$\frac{dy}{y} = -\frac{xdx}{1+x^2}.$$

Отсюда находим, что

$$\ln|y| = -\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \ln C_1,$$

где C_1 - произвольная положительная постоянная. Избавляясь от логарифмов и полагая $C = C_1 \operatorname{sign} y$, приходим к общему решению линейного однородного уравнения

$$y = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}}$$

C - произвольная постоянная.

Для решения исходного уравнения применим метод вариации постоянной. Положив $y = \frac{c(x)}{\sqrt{1+x^2}}$ и подставив y в исходное уравнение, найдем уравнение для $c(x) : c'(x) = x$. Найдя отсюда $c(x)$, получаем общее решение заданного уравнения

$$y = \frac{D}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^2}{2\sqrt{1+x^2}}$$

где D - произвольная постоянная. При $y(0) = 0$ из этой формулы получаем $D = 0$. Значит, $y = \frac{x^2}{2\sqrt{1+x^2}}$ - решение задачи Коши.

Пример 7. Решить уравнение

$$\left(x - 2xy - y^2\right)dy + y^2dx = 0$$

$\triangle$ Заметим, что $y = 0$ является решением. Пусть теперь $y \neq 0$. Тогда уравнение можно записать в виде

$$x'(y) + \frac{1-2y}{y^2}x(y) = 1$$

Это уравнение является линейным неоднородным относительно переменной $x = x(y)$. Решаем линейное однородное уравнение

$$x' + \frac{1-2y}{y^2}x = 0.$$

Его решением будет $x = Cy^2e^{\frac{1}{y}}$, где C - произвольная постоянная. Ищем решение линейного неоднородного уравнения в виде $x = c(y)y^2e^{\frac{1}{2}}$. После подстановки этой функции в уравнение получаем, что $c'(y) = \frac{1}{y^2}e^{-\frac{1}{y}}$, откуда находим $c(y) = e^{-\frac{1}{y}} + D$, где D - произвольная постоянная.

Таким образом, все решения исходного уравнения имеют вид

$$y = 0, \quad x = Dy^2e^{\frac{1}{y}} + y^2,$$

где D-произвольная постоянная.

4. Уравнение Бернулли

Так называют нелинейное уравнение первого порядка вида

$$y' + a(x)y = b(x)y^m$$

где $a(x)$ и $b(x)$ - заданные непрерывные функции на (α, β), а m-некоторое число, отличное от нуля и единицы. Заметим, что $y = 0$ - решение уравнения Бернулли при $m > 0$. Если $y \neq 0$, то, разделив уравнение на y^m и вводя новую неизвестную функцию $z = y^{l-m}$, относительно функции z получаем линейное уравнение

$$z' + (1-m)a(x)z = (1-m)b(x).$$

Пример 8. Решить уравнение $(x^6 - y^4)\,dy = 3x^5ydx$ и найти интегральную кривую уравнения, проходящую через точку $(1, 1)$.

$\triangle$ Заметим сначала, что $y = 0$ является решением, а $x = 0$ решением не является. При $y \neq 0$ уравнение можно записать в виде

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{3y} - \frac{y^3}{3x^5},$$

т.е. уравнение является уравнением Бернулли относительно x. Сделав в этом уравнении замену $z = x^6$, получаем для z линейное уравнение

$$z' = \frac{2z}{y} - 2y^3.$$

Линейное однородное уравнение $z' = \frac{2z}{y}$ имеет общее решение $z = Cy^2$. Частное решение линейного неоднородного уравиения ищем в виде $z_0(y) = Ay^\alpha$. Подстановка $z_0(y)$ в уравнение дает $A = -1$, $\alpha = 4$. Тогда (см. замечание перед примером 6) общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид

$$z = Cy^2 - y^4.$$

Следовательно, формулы $y = 0, x^6 = Cy^2 - y^4$, где C - произвольная постоянная, задают все решения исходного уравнения.

Подставляя во вторую формулу $x = y = 1$, получаем $C = 2$. Поэтому интегральная кривая, проходящая через точку $(1, 1)$, задается формулой

$$x^6 = 2y^2 - y^4$$

5. Об уравнениях Риккати

Уравнением Риккати называется нелинейное уравнение первого порядка вида

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

где $a(x), b(x), c(x)$ - заданные непрерывные функции на (α, β). В отличие от ранее рассмотренных в этом параграфе уравнений, уравнение Риккати разрешимо в квадратурах лишь в исключительных случаях. Например, как показал Лиувилль в 1841 году, специальное уравнение Риккати

$$y' = Ay^2 + Bx^\alpha,$$

где $A \neq 0, B \neq 0$, α-заданные числа, разрешимо в квадратурах лишь в том случае, когда $\frac{\alpha}{2\alpha+4}$ - целое число. Однако, если известно какоелибо решение $y_0(x)$ уравнения Риккати, то замена неизвестной функции $y(x) = z(x) + y_0(x)$ для $z(x)$ уже дает уравнение Бернулли вида

$$z' = [2a(x)y_0(x) + b(x)]\, z + a(x)z^2,$$

которое разрешимо в квадратурах. Следовательно, в этом случае и уравнение Риккати разрешимо в квадратурах.

Пример 9. Решить уравнение Риккати

$$y' = y^2 - 2e^x y + e^{2x} + e^x.$$

$\triangle$ Подстановкой в уравнение убеждаемся в том, что $y_0(x) = e^x$ решение уравнения. Тогда замена $y = z + e^x$ приводит к уравнению $z' = z^2$, которое имеет решения $z = 0, z = -(x + C)^{-1}$, где $C-$ произвольная постоянная. Итак, (C - произвольная постоянная) все решения исходного уравнения: $y = e^x, y = -(x + C)^{-1} + e^x$. $\square$

6. Уравнения в полных дифференциалах

Рассмотрим уравнение первого порядка в симметричной форме

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \tag{16}$$

где $P(x, y), Q(x, y), \frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ - непрерывны в некоторой области G плоскости $R^2_{(x,y)}$ и область G не содержит особых точек уравнения (16).

Definition

Уравнение (16) называется уравнением в полиых дифференциалах, если существует такая непрерывно дифференцируемая функция $u(x, y)$ в области G, что $du \equiv P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ в области G.

Пусть уравнение (16) является уравнением в полных дифференциалах. Если $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in \mathcal{I}$, задают некоторое параметрическое решение (16), то

$$du[\varphi(t), \psi(t)] \equiv P[\varphi(t), \psi(t)]d\varphi(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)]d\psi(t) = 0 \text{ для всех } t \in \mathcal{X}.$$

Значит, $u[\varphi(t), \psi(t)] = C$ для всех $t \in \mathcal{I}$. Очевидно, что и наоборот, если $u[\varphi(t), \psi(t)] = C$ для всех $t \in \mathcal{I}$, то функции $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in \mathcal{I}$, задают параметрическое решение (16).

Итак, уравнение $u(x, y) = C$, где C - произвольная постоянная, содержит все решения уравнения в полных дифференциалах. Интегральная кривая уравнения в полных дифференциалах, проходящая через точку (x_0, y_0), единственным образом определяется уравнением $u(x, y) = u\,(x_0, y_0)$.

Возникает вопрос: как по коэффициентам $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ установить, что уравнение (16) является уравнением в полных дифференциалах. Если функция $u(x, y)$ - дважды непрерывно дифференцируема в G, то необходиме условие для P и Q установить просто. Действительно, если (16) уравнение в полных дифференциалах, то

$$P(x, y) \equiv \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \quad Q(x, y) \equiv \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \tag{17}$$

в области G. Тогда $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$. Отсюда получаем необходимое условие для P и Q :

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \text{ для всех } (x, y) \in G. \tag{18}$$

Если область G-односвязна, то в анализе доказывается, что условие (18) является и достаточным. Функция $u(x, y)$ находится из системы уравнений (17).

Отметим, что односвязность области G геометрически означает отсутствие дыр в области G. Плоскость, круг, прямоугольник являются односвязными областями, а круговое кольцо дает пример неодносвязной области.

Замечание. Тот факт, что уравнение (16) является уравнением в полных дифференциалах, означает, что векторное поле $\{P(x, y), Q(x, y)\}$ является потенциальным в области G, а функция $u(x, y)$ служит потенциалом поля. Функцию $u(x, y)$ называют также потенциалом уравнения (16).

Пример 10. Решить уравнение

$$2xy^3 dx + 3\left(x^2y^2 + y^2 - 1\right) dy = 0$$

$\triangle$ Здесь $P(x, y) = 2xy^3, Q(x, y) = 3\left(x^2y^2 + y^2 - 1\right)$ - непрерывно дифференцируемые функции на всей плоскости $R^2(x, y)$, являющейся односвязной областью. Следовательно, можно воспользоваться условием (18). Имеем

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6xy^2 = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Уравнение является уравнением в полных дифференциалах и поэтому его потенциал $u(x, y)$ можно найти из переопределенной системы уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy^3, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3\left(x^2y^2 + y^2 - 1\right).$$

Из первого уравнения находим, что

$$u(x, y) = x^2y^3 + \varphi(y)$$

где $\varphi(y)$ - произвольная непрерывно дифференцируемая функция на оси y. Ее находим подстановкой найденного выражения для $u(x, y)$ во второе уравнение. Имеем

$$3x^2y^2 + \varphi'(y) = 3\left(x^2y^2 + y^2 - 1\right), \quad \varphi'(y) = 3\left(y^2 - 1\right),$$
$$\varphi(y) = y^3 - 3y - C.$$

Значит, все решения исходного уравнения определяются формулой

$$x^2y^3 + y^3 - 3y = C$$

где C - произвольная постоянная.

7. Интегрирующий множитель. Замена переменных

В предыдущем п. 6 было установлено, что всякое уравнение в полных дифференциалах интегрируемо в квадратурах. Возникает естественный вопрос: нельзя ли произвольное уравнение в симметричной форме (16) свести к уравнению в полных дифференциалах путем домножения его на некоторую функцию $\mu(x, y)$.

Пусть задано уравнение (16), для которого в области G

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Definition

Непрерывно дифференцируемая в области G функция $\mu(x, y) \neq 0$ называется интегрирующим множителем уравнения (16), если уравнение

$$\mu(x, y)[P(x, y)dx + Q(x, y)dy] = 0$$

является в области G уравнением в полных дифференциалах.

Если интегрирующий множитель $\mu(x, y)$ существует для уравнения (16), то он в силу (18) должен удовлетворять соотношению

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}.$$

Это равенство дает уравнение в частных производных первого порядка для $\mu(x, y)$:

$$Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mu, \tag{19}$$

интегрирование которого в общем случае отнюдь не проще, чем интегрирование уравнения (16). Однако нас интересует лишь какое-либо одно его решение, которое на практике может найтись из-за каких-нибудь особенностей коэффициентов P и Q. Например, ищут только $\mu = \mu(x)$ или $\mu = \mu(y)$ и т. п. Тогда уравнение (19) для $\mu(x, y)$ значительно упрощается.

Пример 11. Решить уравнение $2\left(x - y^4\right)dy = ydx$.

Δ Здесь $P = y, Q = 2\left(y^4 - x\right), \frac{\partial P}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = -2$. Заметим, что $y = 0$ - решение. Пусть далее $y \neq 0$. Найдем интегрирующий множитель вида $\mu = \mu(y)$. Из уравнения (19) имеем $-y\frac{d\mu}{dy} = 3\mu$. Решением этого уравнения служит, например, функция $\mu = \frac{1}{y^3}$. После умножения исходного уравнения на $\frac{1}{y^3}$ получаем уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{1}{y^2}dx + 2\left(y - \frac{x}{y^3}\right)dy = 0$$

Отсюда $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = 2\left(y - \frac{x}{y^3}\right)$. Следовательно, из первого уравнения $u(x, y) = \frac{x}{y^2} + \varphi(y)$. Подставляя $u(x, y)$ во второе уравнение, получим, что $\varphi(y) = y^2 - C$. Итак, все решения заданного уравнения задаются формулами

$$y = 0, \quad \frac{x}{y^2} + y^2 = C$$

где C - произвольная постоянная. $\square$

Другой метод решения произвольных уравнений (16) основан на подыскании такой замены переменных x, y, которая приводит уравнение (16) к эквивалентному одному из уже изученных в пп. 1-6 типов уравнений, интегрируемых в квадратурах. Для нахождения нужной замены переменных часто используется метод выделения полных дифференциалов. Приведем примеры.

Пример 12. Решить уравнение

$$y(2ydx - xdy) + x^2(ydx + 2xdy) = 0$$

$\triangle$ Нетрудно проверить, что точка $(0, 0)$ - особая точка уравнения и что полуоси оси Oy и полуоси оси Ox являются решениями урав-

нения. Пусть далее $xy \neq 0$. Разделив уравнение на xy^2, получаем эквивалентное уравнение

$$\frac{2dx}{x} - \frac{dy}{y} + \frac{x^2}{y}\left(\frac{dx}{x} + \frac{2dy}{y}\right) = 0$$

которое можно записать так:

$$d\left(\ln\frac{x^2}{|y|}\right) + \frac{x^2}{y}d\left(\ln\left[|x|y^2\right]\right) = 0.$$

Сделаем замену переменных

$$\frac{x^2}{|y|} = e^u, \quad |x|y^2 = e^v$$

Тогда при $y > 0$ получаем уравнение $du + e^u dv = 0$, а при $y < 0$ уравнение $du - e^u dv = 0$. Из первого уравнения находим $v - e^{-u} = C$, а из второго уравнения получим $v + e^{-u} = C$, где C - произвольная постоянная. Отсюда при $y > 0$ имеем формулу решений исходного уравнения вида $\ln(|x|y^2) - \frac{y}{x^2} = C$, а при $y < 0$ - формулу решений вида $\ln(|x|y^2) + \frac{y}{x^2} = C$.

Пример 13. Решить уравнение

$$x\left(x^2 + y^2\right)dy + y(ydx - xdy) = 0$$

$\triangle$ Как и в предыдущем примере, для этого уравнения $(0, 0)$ - особая точка, и все полуоси осей Ox и Oy являются решениями. Пусть теперь $xy \neq 0$. Уравнение запишем так:

$$x\left(x^2 + y^2\right)dy + y^3 d\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

Разделив уравнение на y^3 и положив $u = \frac{x}{y}$, получаем уравнение

$$\left(u^3 + u\right)dy + du = 0$$

Отсюда

$$dy + \left(\frac{1}{u} - \frac{u}{1 + u^2}\right)du = 0$$

что дает $y + \ln\frac{|u|}{\sqrt{1+u^2}} = C$, где C - произвольная постоянная. Значит, формула

$$y + \ln \frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = C$$

дает решения исходного уравнения.
Как уже следует из § 2 и как будет видно в дальнейшем, замена переменных играет важную роль при решении различных типов дифференщиальньх уравнений и при изучении свойств решений дифференциальных уравнений.

13.1.3 § 3. First-order equations not resolved with respect to the derivative. Parameter input method and Cauchy problem

Общий вид дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной, следующий:

$$F\left(x, y, y'\right) = 0. \tag{1}$$

Здесь: $F(x, y, p)$ - заданная непрерывная функция в некоторой непустой области G евклидова пространства $R^3_{(x,y,p)}$ с декартовыми прямоугольными координатами $x, y, p; x$-аргумент; $y = y(x)$ - неизвестная функция.

Definition

Вектор-функция $x = \varphi(t), y = \psi(t)$, где t принадлежит промежутку $\mathcal{I}$ оси R^1_t и $\varphi(t), \psi(t)$ - непрерывно дифференцируемые на $\mathcal{I}$, причем $\varphi'(t) \neq 0, \forall t \in \mathcal{I}$, называется параметрическим решением уравнения (1), если при подстановке $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ в уравнение (1) получаем тождество

$$F\left[\varphi(t), \psi(t), \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right] \equiv 0, \quad \forall t \in \mathcal{I}.$$

Из этого определения при $x = t$ следует определение явного решения $y = \psi(x), x \in \mathcal{I}$, уравнения (1). Таким образом, понятие параметрического решения (1) расширяет понятие явного решения (1), так как параметрическое решение в окрестности каждой точки $t_0 \in \mathcal{I}$ допускает явное представление $y = w(x)$, но для всех $t \in \mathcal{I}$ такого явного представления $y = w(x)$ параметрическое решение (1) может и не иметь.

Интегральной кривой уравнения (1) называется кривая на плоскости $R^2_{(x,y)}$, описываемая точкой $(\varphi(t), \psi(t))$, когда t пробегает промежуток I. Из определения параметрического решения следует, что интегральная кривая (1) является гладкой кривой.

Для решения уравнения (1) можно попытаться разрешить (1) относительно y'. В случае удачи получается одно или несколько уравнений вида $y' = f(x, y)$, к которым следует применить методы решепия, изложенные в § 2.

Example 1.

Решить уравнение $y'^2 - (2x + y)y' + 2xy = 0$.
$\triangle$ Решая заданное уравнение как квадратное уравнение относительно y', находим, что

$$y' = y, \quad y' = 2x.$$

Первое уравнение имеет решения $y = C_1 e^x$, а второе уравнение-решения $y = x^2 + C_2$, где C_1 и C_2 - произвольные постоянные. Каждая из найденных функций является решением

исходного уравнения. Однако эти функции не исчерпывают всего множества решений задан-

ного уравнения. Возможны еще и так называемые составные решения, получаемые «склейкой» найденных функций в тех точках, где совпадают значения функций и их производных. Легко проверить, что, например, функция

$$y = \begin{cases} x^2+1, & x \le 1, \\ 2e^{x-1}, & x > 1, \end{cases}$$

также является решением (составным) исходного уравнения. И это не единственное составное решение заданного уравнения.

В общем случае для решения уравнения (1) применяется так называемый метод введения параметра, который позволяет свести решение уравнения (1) к решению некоторого уравнения первого порядка в симметричной форме. А для таких уравнений уже можно пытаться применить ранее изученные методы решения.

Положим $y' = p$ и рассмотрим сменанную систему уравнений

$$\begin{cases} F(x,y,p) = 0 \\ dy = pdx \end{cases} \tag{2}$$

Покажем, что уравнение (1) эквивалентно системе (2), т.е. каждое решение уравнения (1) определяет решение системы (2) и наоборот. Действительно, если $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in \mathcal{I}$, является параметрическим решением (1), то $p = p(t) \equiv \psi'(t)\left[\varphi'(t)\right]^{-1} \equiv y'_x(t)$. Отсюда $dy(t) \equiv p(t)dx(t)$ и $F[\varphi(t), \psi(t)p(t)] \equiv 0$ на $\mathcal{I}$, т.е. функции $\varphi(t), \psi(t), p(t)$ удовлетворяют системе (2) при всех $t \in \mathcal{I}$. Обратно, если $\varphi(t), \psi(t), p(t)$ удовлетворяют при $t \in \mathcal{I}$ системе (2), то $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ при $t \in \mathcal{I}$ определяют параметрическое решепие (1), так как из второго уравнения (2) находим, что $p(t) = \frac{\psi'(t)}{\psi'(t)}$, а из первого уравнения (2) следует, что $F\left[\varphi(t), \psi(t), \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right] \equiv 0$ на $\mathcal{I}$. Итак, уравнение (1) эквивалентно системе (2).

Дальнейшие выклацки будем проводить при следующем условии.

Предположение. Уравнение $F(x,y,p) = 0$ определяет в $R^3_{(x,y,p)}$ такую гладкую поверхность S, для которой известно также и параметрическое представление. Это значит, что существуют такие непрерывно дифференцируемые функции $x = \varphi(u,v), y = \psi(u,v), p = \varkappa(u,v)$, в некоторой области Ω плоскости с декартовыми прямоугольными координатами u, v, для которых положительна сумма квадратов якобианов:

$$\left[\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{D(y,p)}{D(u,v}\right]^2 + \left[\frac{D(p,x)}{D(u,v)}\right]^2 > 0$$

и $F[\varphi(u,v), \psi(u,v), \varkappa(u,v)] \equiv 0$ для всех $(u,v) \in \Omega$.

При таком предположении перейдем в системе (2) от переменных x, y, p к переменным u, v по заданным формулам. Первое уравнение (2)

удовлетворяется тождественно в области Ω. Второе уравнение (2) дает уравнение вида

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}du + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv \equiv \varkappa(u,v)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv\right]$$

или

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial u} - \varkappa\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right]du + \left[\frac{\partial\psi}{\partial v} - \varkappa\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right]dv = 0. \tag{3}$$

Переход от уравнения (1) к уравнению (3) называется общим методом введения параметров. Получилось уравнение первого порядка в симметричной форме, некоторые

мегоды решения которого изложены в предыдущем параграфе. Если, например, множество решений уравнения (3) задается формулой $v = g(u, C)$, где C - произвольная постоянная, то функции $x = \varphi[u, g(u, C)], y = \psi[u, g(u, C)], p = \varkappa[u, g(u, C)]$ удовлетворяют системе (2). Следовательно, в силу эквивалентности уравнения (1) и системы (2), функции $x = \varphi[u, g(u, C)], y = \psi[u, g(u, C)]$ задают параметрические решения уравнения (1).

Наиболее важными для практики случаями являются те случаи уравнения (1), когда его можно разрешить относительно y или относительно x. Если $y = f(x, y')$ - решение уравнения (1) относительно y, то в качестве параметров u, v берем $u = x, v = p$ и система (2) тогда примет вид

$$\begin{cases} y = f(x, p), \\ dy = pdx. \end{cases} \tag{4}$$

Уравнение (3) в этом случае имеет такой вид

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} - p\right) dx + \frac{\partial f}{\partial p} dp = 0 \tag{5}$$

Если $p = \omega(x, C)$, где C - произвольная постоянная, задает решения уравнения (5), то $y = f[x, \omega(x, C)]$ - решения уравнения $y = f(x, y')$.

Аналогично, если $x = g(y, y')$ - решение уравнения (1) относительно x, то в качестве параметров u, v берем $u = y, v = p$. В этом случае система (2) принимает вид

$$\begin{cases} x = g(y, p), \\ dy = pdx, \end{cases}$$

а уравнение (3) выглядит так:

$$\left(p\frac{\partial g}{\partial y} - 1\right) dy + p\frac{\partial g}{\partial p} dp = 0. \tag{6}$$

Если $p = \omega(y, C)$, где C - произвольная постоянная, решения уравнения (6), то формула $x = g[y, \omega(y, C)]$ задает решения уравнения $x = g(y, y')$.

Переход от уравнения $y = f(x, y')$ к уравнению (5) и переход от уравнения $x = g(y, y')$ к уравнению (6) называется методом введения параметра.

Замечание. Типичной ошибкой при решении уравнения $y = f(x, y')$ является переход от функции $p = \omega(x, C)$ к уравнению $y' = \omega(x, C)$ и затем к его решению $y = \int \omega(x, C)dx + C_1$. Эта функция в общем случае не удовлетворяет первому уравнению системы (4). Аналогичная ошибка делается и при решении уравнения $x = g(y, y')$, если заменить $p = \omega(y, C)$ на $y' = \omega(y, C)$ и затем интегрировать это уравнение.

Метод введения параметра в общем случае приводит к уравнениям (3), не интегрируемым в квадратурах. Сейчас приведем пример уравнения (1), для которого метод введения параметра всегда приводит к уравнению (3), интегрируемому в квадратурах.

Пример 2 (уравнение Лагранжа). $y = a(y')x + b(y')$, где $a(p)$ и $b(p)-$ заданные непрерывно дифференцируемые функции для всех $p \in R^1_p$ с декартовой координатой p.
Δ Положив $y' = p$, от уравнения Лагранжа перейдем к эквивалентной системе

$$\begin{cases} y = a(p)x + b(p) \\ dy = pdx \end{cases}$$

Найдя dy из первого уравнения системы и подставив его во второе уравнение, получаем уравнение

$$x \cdot a'(p)dp + a(p)dx + b'(p)dp = pdx$$

или

$$[a'(p)x + b'(p)]\, dp = [p - a(p)]dx \tag{7}$$

Если $a_p \neq p$ для $\forall p \in R_p^1$, то отсюда получаем линейное уравнение первого порядка относительно x

$$\frac{dx}{dp} = \frac{a'(p)}{p - a(p)}x + \frac{b'(p)}{p - a(p)},$$

которое всегда интегрируется в квадратурах.
Если $\exists p_0 \in R_p^1$, что $p_0 = a\,(p_0)$, то $p = p_0$ - решение уравнения (7) и, значит, $y = a\,(p_0)\,x + b\,(p_0)$ - решение уравнения Лагранжа. Если же $a(p) \equiv p$, то исходное уравнение принимает вид $y = xy' + b\,(y')$. Оно называется уравнением Клеро. Уравнение (7) в этом случае записывается так:

$$[x + b'(p)]\, dp = 0$$

Отсюда либо $dp = 0$, либо $x = -b'(p)$. Если $dp = 0$, то $p = C$ и решением уравнения Клеро будет $y = Cx + b(C)$. При $x = -b'(p)$ равенства $x = -b'(p), y = -pb'(p) + b(p)$ определяют параметрическое решение уравнения Клеро, если потребовать, чтобы функция $b(p)$ была дважды непрерывно дифференцируемой $\forall p \in R_p^1$. Это видно из подстановки параметрического решения в уравнение Клеро. В

случае $b_p'' \equiv 0$ имеем $b(p) = \alpha p + \beta$, где α и β-постоянные. Тогда уравнение Клеро принимает вид $y = (x + \alpha)y' + \beta$. Решениями этого уравнения служат невертикальные лучи с началом в особой точке $(-\alpha, \beta)$ уравнения, для которых $y - \beta = C(x + \alpha)$, где C - произвольная постоянная.

Замечание. При решении уравнений (1), как уже указывалось, возможно появление составных решений. При решении конкретных примеров они не всегда явно выписываются.

Example 3.

Решить уравнение $y'\,(4x - y') = 4\,(2y - x^2)$.
$\triangle$ Разрешив уравнение относительно y, перейдем к эквивалентной системе, положив $y' = p$:

$$\begin{cases} 8y = 4x^2 + 4xp - p^2 \\ dy = pdx \end{cases}$$

Найдя из первого уравнения dy и подставив его во второе уравнение системы, после упрощений получаем

$$2(2x - p)(2dx + dp) = 0$$

Если $p = 2x$, то из первого уравнения системы находим решение исходного уравнения $y = x^2$. Если же $2dx + dp = 0$, то $p = C - 2x$ и подстановка этого p в первое уравнение системы дает множество решений $y = Cx - x^2 - \frac{C^2}{8}$, где C - произвольная постоянная. Кроме указанного множества решений, возможны и составные решения.

Example 4.

Решить уравнение $xy' = 1 + e^y \cdot y'^2$.
$\triangle$ Заметим, что $y' \neq 0$, т.к. $y' = 0$ не дает решений. Тогда уравнение можно разделить на y' :

$$x = \frac{1}{y'} + e^y \cdot y'$$

Вводя параметр $p = y'$, перейдем к системе

$$\begin{cases} x = \frac{1}{p} + e^y \cdot p \\ dy = pdx \end{cases}$$

Найдем dx из первого уравнения системы и подставим его во второе уравнение. Получим уравнение

$$dy = p\left(-\frac{1}{p^2}dp + e^y dp + pe^y dy\right)$$

или

$$\left(p^2 e^y - 1\right)(pdy + dp) = 0$$

Если $p^2 e^y = 1$, то $p = \pm e^{-\frac{y}{2}}$ и из первого уравнения системы находим решение исходного уравнения $x = \pm 2e^{\frac{y}{2}}$. Если же $pdy + dp = 0$, то $p = Ce^{-y}$ и подстановка в первое уравнение системы дает множество решений исходного уравнения $x = \frac{1}{C}e^y + C$, где $C \neq 0$ - произвольная постоянная.

Пример 5. Решить уравнение $y^3 + x^3 = xy'$.
$\triangle$ Параметризуем цилиндрическую поверхность $p^3 + x^3 = xp$, положив $p = xu$. После подстановки в уравнение поверхности получаем $x = \frac{u}{1+u^3}, p = \frac{u^2}{1+u^3}$. Таким образом, имеем следующую параметризацию цилиндрической поверхности: $x = \frac{u}{1+u^3}, y = v, p = \frac{u^2}{1+u^3}$. Эта параметризация гладкая, например, при $u < -1$. Из $dv = dy = pdx$ находим, что

$$dy = dv = \frac{u^2\left(1 - 2u^3\right)du}{\left(1 + u^3\right)^3}$$

Следовательно, отсюда

$$y = v = C - \frac{1}{2}\frac{1}{\left(1 + u^3\right)^2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 + u^3}$$

где C - произвопьная постоянная. Значит, при $u < -1$ функции $x = \frac{u}{1+u^3}, y = C - \frac{1}{2(1+u^3)^2} + \frac{2}{3(1+u^3)}$ задают параметрические решения исходного уравнения.

Как известно, для уравнения $y' = f(x, y)$ начальное условие задается в виде $y(x_0) = y_0$. При определенных условиях на $f(x, y), x_0, y_0$, как указывалось в § 1, можно гарантировать, во вслком случае, локально, т.е. в некоторой окрестности точки (x_0, y_0), существование и единственность решения задачи Коши.

Но даже для простейших уравнений (1) начальное условие $y(x_0) = y_0$, как видно на примерах, не выделяет в общем случае единственное решение. Если взять, например, уравнение $y^2 = y^2$, то $y' = \pm y$ и, значит, решениями $y'^2 = y^2$ будут и функции $y = C_1 e^x$, и функции $y = C_2 e^{-x}$, где C_1 и C_2-произвольные постоянные. Начальное условие $y(x_0) = y_0$ выделяет два решения $y = y_0 e^{x - x_0}, y = y_0 e^{-(x - x_0)}$, т.е. не обладает свойством единственности. Начального условия вида $y(x_0) = y_0$ недостаточно для получения определенного решения. Если в этом примере кроме $y(x_0) = y_0$ задать еще либо

$y'(x_0) = y_0$, либо $y'(x_0) = -y_0$, тогда начальное условие вида $y(x_0) = y'(x_0) = y_0$ выделяет единственное решение $y = y_0 e^{x-x_0}$, а начальное условие вида $y(x_0) = -y'(x_0) = y_0$ выделяет единственное решение $y = y_0 e^{x_0-x}$. Всякое же другое задание $y'(x_0) \neq \pm y_0$ не дает существования решения при таких условиях, поскольку в силу уравнения $y^2(x) = y^2(x)$ для всякой точки x.

Аналогичным образом задаются начальные условия и для общих уравнений (1). Берется тройка чисел $(x_0, y_0, p_0) \in G$, для которой
$F(x_0, y_0, p_0) = 0$. Начальными условиями для уравнения (1) называются условия

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = p_0. \tag{8}$$

Задачей Коши для уравнения (1) называют задачу нахождения решения уравнения (1), удовлетворяющего начальным условиям (8). Таким образом, постановка задачи Коши для (1) требует согласования с уравнением (1) начальных данных x_0, y_0, p_0.

Достаточные условия однозначиой разрешимости задачи Коши (1), (8) будут приведены в главе 4 . Сейчас же ограничимся примером. Уравнение из примера 3 при начальных условиях $y(0) = -2, y'(0) = 4$ имеет единственное решение $y = -x^2 + 4x - 2$.

Начальные условия (8) для уравнения (1) внешне одинаковы с начальными условиями для уравнений второго порядка (см. § 4). Но различие в том, что в случае уравнения (1) начальные данные x_0, y_0, p_0 связаны условием $F(x_0, y_0, p_0) = 0$.

Геометрический смысл задачи Коши для уравнения (1) состоит в том, что ищется интегральная кривая уравнения (1), проходящая через точку (x_0, y_0) с заданным угловым коэффициентом касательной p_0 в этой точке.

Таким образом, в одной и той же точке (x_0, y_0) возможно задание стольких различных начальных условий для уравнения (1), сколько различных действительных решений имеет уравнение $F(x_0, y_0, p) = 0$ относительно p. Если множество действительных решений уравнения $F(x_0, y_0, p) = 0$ пустое, то в точке (x_0, y_0) нельзя задавать начальные условия для (1). Для уравнения $y' = f(x, y)$ задание точки (x_0, y_0) уже сразу определяет значение $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$.

Из приведенных рассуждений видно принципиальное отличие постановки задачи Коши для уравнения (1) от постановки задачи Коши для уравнения $y' = f(x, y)$.

В заключепие отметим, что задача Копи (1), (8) интерпретируется как задача Коши для смешанной системы (2) следующим образом. Задана точка $(x_0, y_0, p_0) \in S$. Требуется найти интегральную кривую L системы (2), проходящую через точку $(x_0, y_0, p_0) \in S$. Интегральная кривая l уравнения (1) является ортогональной проекцией параллельно оси p на плоскость x, y интегральной кривой L системы (2).

Замечание. Обобщением уравнения (1) является уравнение первого порядка в дифференциалах (или уравнение в симметричной форме) следующего вида

$$F(x, y, dx, dy) = 0,$$

где F-заданная непрерывная функция своих аргументов.

13.1.4 § 4. Higher-order differential equations. General concepts and methods of solution

Общий вид дифференциального уравнения порядка n следующий

$$F\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0. \tag{1}$$

Здссь n - заданное натуральное число, x - аргумент, $y = y(x)$ - неизвестная функция, $F(x, y, y_1, ..., y_n)$ - заданная непрерывная функция в некоторой непустой области

$\Omega(n+2)$-мерного евклидова пространства с декартовыми прямоугольными координатами $x, y, y_1, ..., y_n$.

Итак, порядком уравнения (1) называется порядок старшей производной в (1). В дальнейшем будем считать $n \geq 2$, так как случай $n = 1$ уже был рассмотрен в предыдущих параграфах.

Definition

Функция $y = \varphi(x)$, заданная на некотором промежутке X оси R^1_x, называется решецием (1), если:

1. $\varphi(x)$ имеет непрерывную $\varphi^{(n)}(x)$ на X,
2. при всех $x \in X$ точка $\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n)}(x)\right)$ лежит в области Ω,
3. $F\left[x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n)}(x)\right] \equiv 0$ для всех $x \in X$.

График решения уравнения (1) на плоскости $R^2_{(x,y)}$ называется интегральной кривой уравнения (1). Ясно, что интегральные кривые (1) лежат в проекции области Ω на плоскость $R^2_{(x,y)}$. По аналогии со случаем $n = 1$ для уравнения (1) можно ввести и более общее понятие параметрического решения (см. § 3).

Более простым для изучения является уравнение порядка n, разрешенное относительно старшей производной. Оно имеет вид

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right), \tag{2}$$

где $f\left(x, y, y_1, ..., y_{n-1}\right)$ - заданиая непрерывная функция в некоторой непустой области $G(n+1)$-мерного евклидова пространства с декартовыми прямоугольными координатами $x, y, y_1, ..., y_{n-1}$. Уравнение (2) называют еще уравнением порядка n в нормальной форме. Задапию уравнения второго порядка можно придать определенный геометрический смысл. Если $y = \varphi(x), x \in X$, задает интегральную кривую уравнения $y'' = f\left(x, y, y'\right)$, то в каждой точке $x_0 \in X$ определена кривизна интегральной кривой

$$K\left(x_0\right) = \frac{\left|\varphi''\left(x_0\right)\right|}{\sqrt{\left(1 + \left[\varphi'\left(x_0\right)\right]^2\right)^3}} = \frac{\left|\, f\left[x_0, \varphi\left(x_0\right), \varphi'\left(x_0\right)\right)\right]\,\right|}{\sqrt{\left(1 + \left[\varphi'\left(x_0\right)\right]^2\right)^3}}.$$

Уравнение $y'' = f\left(x, y, y'\right)$ в любой точке области G задает некоторое значение y'' и, значит, некоторое значение кривизны $K = \left|f\left(x, y, y'\right)\right| \times \left(1 + y'^2\right)^{-3/2}$.

Отсюда ясно, что в каждой точке (x, y) из проекции области G на плоскость $R^2_{(x,y)}$ это уравнение задает связь между кривизной и углом наклона искомых интегральных кривых уравнения. Кривая на плоскости $R^2_{(x,y)}$ может быть интегральной кривой уравнения $y'' = f\left(x, y, y'\right)$ только в том случае, когда в каждой ее точке кривизна кривой и угол наклона кривой связаны указанной формулой.

Уже на простом примере уравнения (2) можно убедиться, что множество его решений в общем случае зависит от n параметров.

Example 1.

Решить уравнение $y^{(n)} = 1$.

Δ Последовательно интегрируя n раз, получаем формулу всех решений:

$$y = C_1 + C_2 x + \cdots + C_n x^{n-1} + \frac{x^n}{n!},$$

где $C_1, ..., C_n$ - произвольные постоянные. □

Этот пример наводит на мысль, что и в общем случае уравнения (2) решение зависит от n параметров и что для выделения какого-либо конкретного решения (2) требуются дополнительные условия. Как и в случае уравнений первого порядка $y' = f(x, y)$ в качестве таких условий чаще всего выступают начальные условия.

Как видно из примера уравнения второго порядка (5) введения, начальные условия для уравнений второго порядка представляют собой заданные в одной и той же точке значения неизвестной функции и ее производной. Для уравнения (2) начальными условиями называют условия вида

$$y\left(x_0\right) = y_0, \quad y'\left(x_0\right) = \hat{y}_1, ..., y^{(n-1)}\left(x_0\right) = \hat{y}_{n-1}, \tag{3}$$

где $(x_0, y_0, \hat{y}_1, ..., \hat{y}_{n-1}) \in G$.
Числа $x_0, y_0, \hat{y}_1, ..., \hat{y}_{n-1}$ называют начальными данными.

Definition

Задача нахождения решения уравнения (2), удовлетворяющего начальным условиям (3), называется начальной задачей или задачей Коши для уравнения (2). Характерная особенность задачи Коши состоит в том, что условия на искомое решение $y = y(x)$ задаются в одной и той же точке x_0. В случае $n = 2$ задача Коши (2), (3) имеет простой геометрический смысл. Требуется найти интегральную кривую (1), проходящую через точку (x_0, y_0) в заданном направлении с тангенсом угла наклона ее касательной, равным $\hat{y}_1$. С другой точки зрения, как видно из формулы кривизны, задание при $n = 2$ начальных условий (3) означает задание в точке x_0 кривизны и решение задачи Коши
(2), (3) в этом случае определяет интегральную кривую (2) с заданной кривизной в точке x_0.

В главе 4 будут установлены достаточные условия, гарантирующие существование и единственность решения задачи Коши (2), (3). Сейчас же будут рассмотрены некоторые типы уравнений (1), для которых возможна разрепимость в квадратурах, достигаемая либо при помощи специальных способов, либо при помощи предварительного понижения порядка. Важным частным случаем уравнения (1) является так называемое линейное дифференциальное уравнение порядка n. Оно имеет вид

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x),$$

где $a_1(x), ..., a_n(x), f(x)$ - заданные непрерывные функции на некотором промежутке оси x. Однако теория линейных уравнений будет изложена отдельно не здесь, а в последующих главах.

С целью упрощения выкладок рассмотрим только уравнения второго порядка

$$F\left(x, y, y', y''\right) = 0, \tag{4}$$

где $F\left(x, y_1 y_1, y_2\right)$ - заданная непрерывная функция в некоторой непустой области G евклидова пространства R^4 с декартовыми прямоугольными координатами $x, y_1 y_1, y_2$.

Всякое уравнение вида

$$y'' = f(x),$$

где $f(x)$ - заданная непрерывная на (α, β) функция, легко интегрируется в квадратурах.

Действительно, интегрируя один раз это уравнение, находим, что

$$y' = \int_{x_0}^{x} f(\zeta)d\zeta + C_1, \quad x_0 \in (\alpha, \beta)$$

где C_1 - произвольная постоянная. После повторного интегрирования имеем

$$y = \int_{x_0}^{x} d\eta \int_{x_0}^{\eta} f(\zeta)d\zeta + C_1 (x - x_0) + C_2$$

где C_2 - произвольная постоянная. Поменяв порядок интегрирования в повторном интеграле, что возможно в силу непрерывности $f(x)$ на (α, β), окончательно получаем формулу решений

$$y = \int_{x_0}^{x} (x - \zeta) f(\zeta)d\zeta + C_1 (x - x_0) + C_2$$

Методом математической индукции нетрудно показать, что все решения уравнения $y^{(n)} = f(x)$, где $f(x)$ - заданная непрерывная на (α, β) функция, задаются формулой

$$y = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} (x - \zeta)^{n-1} f(\zeta)d\zeta + C_1 \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + C_n$$

где $C_1, ..., C_n$ - произвольные постоянные.
Пусть теперь задано уравнение вида

$$F(x, y'') = 0. \tag{5}$$

Это уравнение будем решать методом введения параметра аналогично тому, как это делалось в предыдущем параграфе.

Предположим, что уравнение $F(x, p) = 0$, где x, p - декартовы прямоугольные координаты: задает кривую на плоскости $R^2_{(x,p)}$, для которой известно ее параметрическое представление $x = \varphi(t), p = \psi(t), t \in I$, причем $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ - непрерывны на промежутке $\mathcal{I}$. Тогда уравнение (5) эквивалентно системе

$$\begin{cases} F(x, p) = 0 \\ dy' = pdx \end{cases}$$

Первое уравнение системы удовлетворяется тождественно на промежутке $\mathcal{I}$. Подставив параметрическое представление кривой во второе уравнение системы, получасм

$$dy' = \psi(t) \cdot \varphi'(t)dt,$$

откуда $y' = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + C_1 \equiv \varkappa(t, C_1)$. Из этого равенства

$$dy = y'dx = \varkappa(t, C_1) \cdot \varphi'(t)dt$$

откуда $y = \int x(t, C_1)\varphi'(t)dt + C_2 \equiv \omega(t, C_1, C_2)$. Значит, фупкции $x = \varphi(t)$, $y = \omega(t, C_1, C_2)$, где $t \in \mathcal{I}, C_1$ и C_2 - произвольные постоянные, задают миожество параметрических решений уравнения (5).

Example 2.

Решить уравнение $x = \frac{y''}{\sqrt{1+y''^2}}$.
Δ Положим $y'' = p$. Тогда уравнение эквивалентпо системе

$$\begin{cases} x = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \\ dy' = pdx \end{cases}$$

Кривая $x = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$ параметризуется уравнениями $x = \sin t, p = \operatorname{tg} t$, где $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Выразим y через парамстр t. Из 2-го уравнения системы имеем

$$dy' = \operatorname{tg} t \cdot \cos t dt = \sin t dt$$

Отсюда $y' = C_1 - \cos t$ и, значит, $dy = y'dx = (C_1 - \cos t)\cos t dt$,

$$y = C_2 + C_1 \sin t - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t.$$

Параметрические репения исходного уравнения задаются формулами

$$x = \sin t, \quad y = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t + C_1 \sin t + C_2,$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные и $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
Аналогичным образом метод введения параметра применяется и для решения уравнений $F(y, y'') = 0, F(y', y'') = 0$ и т.п. Другим основным методом решения уравнений (4) является метод понижения порядка уравнения.

Перейдем к рассмотрению основных типов уравнений (4), допускающих понижение порядка уравнения. После понижения порядка уравнения (4) получается уравнение первого порядка, к которому следует пытаться применить известные из предыдущих параграфов методы репения.
I. Пусть уравнение (4) не содержит y, т.е. оно имеет вид

$$F(x, y', y'') = 0$$

Тогда замена $y' = z(x)$ дает уравнение первого порядка относительно новой неизвестной функции $z(x) : F(x, z, z') = 0$. Если функция $z = \varphi(x, C_1)$, C_1 - нарамегр, задает его решения, то функция

$$y = \int \varphi(x, C_1)\, dx + C_2$$

где C_2 - произвольная постоянная, задает решения исходного уравнения. Нетрудно видеть, что в этом случае уравнение (4) эквивалентно системе

$$\begin{cases} F(x, z, z') = 0 \\ y' = z \end{cases}$$

Example 3.

Решить уравнение $y''(e^x + 1) + y' = 0$.
Положив $y' = z(x)$, получим уравнение для $z(x)$

$$z'(e^x + 1) + z = 0$$

Это уравнение первого порядка с разделяющимися переменными легко интегрируется. Находим

$$z(x) = C_1\left(1 + e^{-x}\right).$$

Отсюда $y = C_1\left(x - e^{-x}\right) + C_2$, где C_1 и C_2 - произвольные постоянные.
II. Пусть уравнение (4) не содержит x, т.е. оно имеет вид

$$F\left(y, y', y''\right) = 0.$$

Будем считать, что $y = \text{const}$ не ивляется его решением. В таком случае примем y за новый аргумент и введем новую неизвестную функцию $z(y)$ по формуле $y' = z(y)$. Тогда

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot z(y) = z \cdot z'$$

и в этом случае получаем уравнение первого порядка

$$F\left(y, z, zz'\right) = 0,$$

так как $z \neq 0$.
Если $y = \text{const}$, то нельзя брать y в качестве нового аргумента. Поэтому, принимая y за новый аргумент, всегда следует проверять, не теряем ли мы при этом решений вида $y = \text{const}$.

Example 4.

Решить задачу Коши:

$$y'' + \left(2 + 4y^2\right) y^3 - 2yy'^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \frac{1}{2}.$$

$\triangle$ Заметим, что $y = \text{const}$ не может быть решением задачи Коши. Пусть далее $y \neq \text{const}$. Положим $y' = z(y) \neq 0$. Тогда $y'' = z \cdot z'$ и для функции $z(y)$ получаем уравнение Бернулли

$$z \cdot z' + \left(2 + 4y^2\right) z^3 - 2yz^2 = 0$$

с начальным условием $z(1) = \frac{1}{2}$. Замена $u = -\frac{1}{2}$ эту задачу Коши сводит к следующей задаче Коши для линейного уравнения первого порядка:

$$u' + 2yu + 2 + 4y^2 = 0, \quad u(1) = -2.$$

Общее решение этого линейного уравнения

$$u(y) = Ce^{-y^2} - 2y.$$

Из начального условия находим, что $C = 0$. Итак, $u(y) = -2y$. Отсюда $y' = z = -\frac{1}{u} = \frac{1}{2y}$, что дает $y^2 = x + C$. Из начального условия $y(0) = 1$ следует $C = 1$. Учитывая, что $y'(0) = \frac{1}{2}$, находим, что $y = \sqrt{x+1}$ является решением исходной задачи Коши.
III. Функция $F\left(x, y, y_1, y_2\right)$ называется однородной функцией степени m относительно переменных y, y_1, y_2, если для любой точки $\left(x, y, y_1, y_2\right) \in G$ и любого такого значения параметра t, что $\left(x, ty, ty_1, ty_2\right) \in G$, выполнено условие $F\left(x, ty, ty_1, ty_2\right) = t^m F\left(x, y, y_1, y_2\right)$. Здесь m - некоторое фиксированное число.

Уравнение (4) называется однородным уравнением относительно переменных y, y', y'', если $F\left(x, y, y_1, y_2\right)$ - однородная функция степени m относительно переменных $y_1 y_1, y_2$.

Если уравнение (4) является однородным относительно y, y', y'', то его порядок понижается с помощью замены $y' = y \cdot z$, где $z = z(x)$ - новая неизвестная функция. Действительно, при такой замене получаем:

$$y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz' = y\left(z' + z^2\right)$$
$$F\left(x, y, y', y''\right) = F\left(x, y, yz, y\left(z' + z^2\right)\right) = y^m F\left(x, 1, z, z' + z^2\right) = 0$$

Здесь мы воспользовались однородностью функции F при $t = y$. Если $m > 0$, то получаем ретение $y = 0$. Если же $y \neq 0$, то имеем для функции z уравнение первого порядка

$$F\left(x, 1, z, z' + z^2\right) = 0.$$

Если множеством его решений является $z = \varphi\left(x, C_1\right)$, где C_1 - параметр, то формула $y = C_2 \exp\left[\int \varphi\left(x, C_1\right) dx\right]$, где C_2 - произвольная постоянная, дает множество решений уравнения (4).

Пример 5. Решить задачу Коши

$$yy'' + yy' \operatorname{tg} x = (1 - \sin x)\left(y'\right)^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2.$$

$\triangle$ Нетрудно убедиться в однородности уравнения по y, y', y''. При рекомендованной замене $y' = yz, y'' = y\left(z' + z^2\right)$ получаем уравнение первого порядка

$$y^2\left(z' + z^2\right) + y^2 z \operatorname{tg} x = (1 - \sin x) y^2 z^2.$$

Функция $y = 0$ - решение уравнения, но не решение задачи Коши. Если $y \neq 0$, то получаем уравнение Бернулли

$$z' + z \operatorname{tg} x = -z^2 \sin x$$

с начальным условием $z(0) = -2$. Замена $u = \frac{1}{z}$ дает линейное уравнение

$$u' - u \operatorname{tg} x = \sin x$$

с начальным условием $u(0) = -\frac{1}{2}$. Нетрудно найти, что $u = \frac{C}{\cos x} - \frac{1}{2}\cos x$-общее решение уравнения и что из начального условия следует $C = 0$. Значит, $u = -\frac{1}{2}\cos x$ и поэтому $\frac{y'}{y} = -\frac{2}{\cos x}$. Отсюда

$$y = C \cdot \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$$

Из начального условия $y(0) = 1$ следует $C = 0$. В силу этого функция

$$y = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$$

является решением исходной задачи Коши.

IV. Пусть существует такая непрерывно дифференцируемая функция $\Phi\left(x, y, y'\right)$, что для всех x, y, y', y'' справедливо тождество

$$F\left(x, y, y', y''\right) = \frac{d}{dx}\Phi\left(x, y, y'\right).$$

Тогда уравнение (4) называстся уравнением в точных производных. В таком случае, очевидно, уравнение (4) эквивалентно уравнению первого порядка

$$\Phi\left(x, y, y'\right) = C.$$

Уравнение (4) в точных производных является, очевидно, обобщением уравнения в полных дифференциалах на случай уравнений второго порядка. Действительно, если уравнение

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

является уравнепием в полных дифференциалах, то для некоторой непрерывно дифференцируемой функции $\Phi(x,y)$ имеем тождество

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = d\Phi(x,y)$$

Отсюда

$$F\left(x,y,y'\right) \equiv P(x,y) + Q(x,y)y' = \frac{d\Phi(x,y)}{dx} = 0.$$

Как и в случае уравнсния в пошных дифференциалах, для уравнения (4) можно указать критерий того, что уравнение (4) является уравнением в точных производных, и метод построения функции $\Phi\left(x,y,y'\right)$. Однако мы не будсм касаться здесь этого вопроса.

Иногда уравнение (4) становится уравнением в точных производных лишь после его умножения на некоторую функцию $\mu\left(x,y,y'\right)$. В таком случае функция $\mu\left(x,y,y'\right)$ называется интегрирующим множителем уравнения (4). Мы не будем касаться метода нахождения интегрирующего множителя $\mu\left(x,y,y'\right)$ для уравнения (4) в общем виде, а ограничимся рассмотрением примеров.

Пример 6. Решить уравнение $yy'' - y'^2 = y'$.

$\triangle$ Заметим, что $y = C$-решение. Пусть далее $y \neq 0$. Разделив обе части уравнения на y^2, получим уравнение в точных производных

$$\frac{yy'' - y'^2}{y^2} = \frac{y'}{y^2} \quad \text{или} \quad \left(\frac{y'}{y}\right)' = -\left(\frac{1}{y}\right)'.$$

Отсюда $\frac{y'}{y} = -\frac{1}{y} + C_1$ или $y' = C_1 y - 1$. Если $C_1 = 0$, то имеем $y = -x + C_2$, а если $C_1 \neq 0$, то имеем линейное уравнение первого порядка, решениями которого будут функции $y = C_2 e^{C_1 x} + \frac{1}{C_1}$, где $C_1 \neq 0$ и C_2 - произвольные постоянные. $\square$

Пример 7. Решить задачу Коши

$$xy'' = y' + 2x^2 yy', \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 4.$$

$\triangle$ Уравпение запишем так:

$$\frac{xy'' - y'}{x^2} = 2yy' \quad \text{или} \quad \left(\frac{y'}{x}\right)' = \left(y^2\right)'.$$

Отсюда $y' = xy^2 + C_1 x$. Из начальных условий следует, что $C_1 = 0$. Следовательно, $-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C$. Из начального условия находим, что $C = -1$. Значит, $\frac{1}{y} = 1 - \frac{x^2}{2}$ является решением исходной задачи Коши.

V. Функция F называется обобщенно-однородной степени m, если существует такое число k, что для любой точки $(x,y,y_1,y_2) \in G$ и для любого значения параметра t, для которого $\left(tx, t^k y, t^{k-1} y_1, t^{k-2} y_2\right) \in G$, выполнено условие

$$F\left(tx, t^k y, t^{k-1} y_1, t^{k-2} y_2\right) = t^m F\left(x,y,y_1,y_2\right).$$

Уравнение (4) называется обобщенно-однородным, если фупкция $F\left(x,y,y_1,y_2\right)$ является обобщенно-однородной.

Покажем, что если уравнение (4) является обобщенно-однородным и в области $Gx > 0$, то его порядок понижается на единицу с помощью замены переменных

$$x = e^u, \quad y = ve^{ku}$$

где u - новый аргумент, $v = v(u)$ - новая искомая функция. Если же $x < 0$, то полагаем $x = -e^u$.

Действительно, найдем сначала выражения y', y'' через повые переменные. Имеем:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \left(v'e^{ku} + kve^{ku}\right) e^{-u} = (v' + kv)\, e^{(k-1)u}, \\ y'' &= \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{d}{du}\left[(v' + kv)\, e^{(k-1)u}\right] \cdot e^{-u} = \\ &= [v'' + (2k-1)v' + k(k-1)v]\, e^{(k-2)u} \end{aligned}$$

Подставив выражения x, y, y', y'' в новых переменных u, v в уравнение (4) и воспользовавшись определением обобщенной однородности уравиения при $t = e^u$, получаем

$$\begin{aligned} 0 = F(x, y, y', y'') &= F\left(e^u, ve^{ku}, [v' + kv]\, e^{(k-1)u}\right. \\ &\left.[v'' + (2k-1)v' + k(k-1)v]\, e^{(k-2)u}\right) = \\ &= e^{mu} F\left(1, v, v' + kv, v'' + (2k-1)v' + k(k-1)v\right) \end{aligned}$$

Отсюда получим уравнение, не содержащее аргумента u, которое согласно п. II допускает понижение порядка на единицу.

Пример 8. Решить задачу Коши ($x > 0$).

$$x^4 y'' - xyy' + 2\left(y - x^2\right) y = 0, \quad y(1) = 6, \quad y'(1) = 12.$$

$\triangle$ Заменяя в уравнении x на tx, y на $t^k y, y'$ на $t^{k-1} y, y''$ на $t^{k-2} y''$ и приравнивая друг другу показатели степеней t в каждом слагаемом уравнения, получаем $2k = k + 2$. Следовательно, заданное уравнение является обобщенно однородным и $k = 2$. Сделаем в уравнении замену переменных

$$x = e^u, \quad y = ve^{2u}$$

Тогда из ранее полученных выражений y', y'' через новые переменные находим, что

$$y' = (v' + 2v)\, e^u, \quad y'' = v'' + 3v' + 2v$$

Подставляя выражения для x, y, y', y'' в уравнение, после упрощений получаем уравнение

$$v'' + (3 - v)v' = 0$$

в которое не входит аргумент и. Согласно п. II объявляем v - новым аргументом, а $v' = z(v)$ - новой искомой функцией. Так как $v'' = z \cdot z'$, то в переменных v, z получаем уравнение

$$z \cdot z' + (3 - v)z = 0$$

Из заданных начальных условий для $y(x)$, используя замену переменных, нетрудно найти, что $z(6) = 0$ - начальное условие для $z(x)$. При таком начальном условии решение уравнения для $z(v)$ принимает вид $z = \frac{1}{2}v^2 - 3v$. Из уравнения $v' = z = \frac{1}{2}v^2 - 3v$ находим $\frac{6}{v} = 1 + Ce^{3u}$. Заданные начальные условия дают $v(0) = 6$. Для такого начального условия

$C = 0$ и, значит, $v = 6$. Тогда из замены переменных получаем решение исходной задачи Коши $y = 6x^2$.

В этом параграфе были приведены основные методы решения уравнений второго порядка общего вида. Аналогичные методы решения имеют место и для уравнений общего вида, порядок которых выше второго. Методы понижения порядка и интегрирование в квадратурах уравнения (1) получают полное объяснение с точки зрения теории групп. Более подробно об этом можно прочитать, налример, в [18] и [34].

Упражнения к главе 1

1. Найти дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$, которое описывает семейство окружностей с центром на прямой $y = x$, проходящих через точку $(1, 0)$.

2. Уравнение $y' = f(x, y)$ называется квазиоднородным, если при всех допустимых значениях параметра t и некоторых $\alpha \neq 0, \beta \neq 0 f\left(t_x^\alpha, t_y^\beta\right) = t^{\beta-\alpha} f(x, y)$. Показать, что заменой $y = z \cdot x^{\frac{\beta}{\alpha}}$ квазиоднородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

3. Пусть функции $a(x), b(x)$ непрерывны при $x \geq 0$ и $\lim_{x\to\infty} a(x) = \lim_{x\to\infty} b(x) = 1$. Найти $\lim_{x\to\infty} y(x)$ для тех решений уравнения

$$y' = a(x)y + b(x),$$

для которых он существует и конечен.

4. Пусть в уравнении $xy' + ay = f(x)$, где $x > 0$, $a = \text{const} > 0, f(x)-$ непрерывная функция, $\lim_{x\to 0} f(x) = b$. Показать, что только одно решение уравнения остается ограниченным при $x \to 0$, и найти предел этого решения при $x \to 0$.

5. Показать, что уравнение Бернулли можно решить либо с помощью замены вида $y(x) = u(x) \cdot v(x)$, либо, как и линейное уравнение, методом вариации постоянных.

6. Показать, что если семейство $\Phi(x, y, c) = 0$ интегральных кривых уравнения $F(x, y, y') = 0$ имеет огибающую, то она определяет особее решение этого уравнения (см. § 6 гл. 4).

7. Сформулировать задачу Коши для уравнения (1) из §4 при $n \geq 2$.

13.2 Linear differential equations of order n with constant coefficients

В этой главе все функции, которые будут встречаться, могут принимать как действительные, так и комилексные значения. Рассматриваемые в главе 2 липейные уравнения важны, прежде всего, потому, что они часто встречаются в различных вопросах физики и техники. Кроме того, это единственный большой класс уравнений высшего поридка, интегрируемых в квадратурах.

13.2.1 § 1. Differential polynomials and general method for solving linear equations with constant coefficients

В этом параграфе приведены некоторые вспомогательные предложения, которые будут использоваться на протяжении всей главы.

Обозначим через $\mathbb{C}\left(R_x^1\right)$ мпожество всех комплекснозначных функций, заданных и непрерывных на всей числовой оси R_x^l, а через $\mathbb{C}^k\left(R_x^l\right)$, $k \in N$, - множество всех функций, k раз непрерывно дифференцируемых на всей оси R_x^1.

Говорят, что задан оператор дифференцирования D, действующий из $\mathbb{C}^1\left(R_x^1\right)$ в $\mathbb{C}\left(R_x^1\right)$, если каждой функции $y(x) \in \mathbb{C}^1\left(R_x^1\right)$ оператор D ставит в соответствие функцию $y'(x) \in \mathbb{C}\left(R_x^1\right)$ по формуле $Dy(x) = y'(x)$.

Аналогично, k-я степень оператора дифференцирования $D^k, k \in N$, является оператором, действующим из множества $\mathbb{C}^k\left(R_x^1\right)$ во множество $\mathbb{C}\left(R_x^1\right)$ по формуле $D^k y(x) = y^{(k)}(x)$.

Наконец, дифференциальным многочленом степени $n \in N$ (или многочленом степени n от оператора дифференцирования $D)L(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n$, где $a_1, ..., a_n$ - заданные числа (действительные или комплексные), называют оператор, действующий из множества $\mathbb{C}^n\left(R_x^1\right)$ во множество $\mathbb{C}\left(R_x^1\right)$ по формуле $L(D)y(x) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y$.

Lemma 1.

Дифференциальный многочлен степени п является линейным оператором, т.е. для любых фунжций $y_1(x), y_2(x) \in \mathbb{C}^n\left(R_x^{\mathrm{I}}\right)$ и любых чисел c_1, c_2 выполнено равенство

$$L(D)\left[c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)\right] = c_1 L(D) y_1(x) + c_2 L(D) y_2(x).$$

Требуемое утверждение получается из определения дифференциального многочлена и свойства линейности для производных. Действительно,

$$\begin{aligned} L(D)\left(c_1 y_1 + c_2 y_2\right) = & \left(c_1 y_1 + c_2 y_2\right)^{(n)} + a_1\left(c_1 y_1 + c_2 y_2\right)^{(n-1)} + \cdots + \\ & + a_n\left(c_1 y_1 + c_2 y_2\right) = c_1\left(y_1^{(n)} + a_1 y_1^{(n-1)} + \cdots + \right. \\ & \left. + a_n y_1\right) + c_2\left(y_2^{(n)} + a_1 y_2^{(n-1)} + \cdots + a_n y_2\right) = \\ = & c_1 L(D) y_1 + c_2 L(D) y_2. \end{aligned}$$

Для дифференциальных многочленов вводятся операции сложения и умножения. Пусть, кроме многочлена $L(D)$ степени n задан еще многочлен степени m

$$M(D) = D^m + b_1 D^{m-1} + \cdots + b_{m-1} D + b_m$$

где $b_1, ..., b_m$ - заданные числа, $m \in N$. Тогда суммой называют дифференциальный многочлен, действующий па побую функцию $y(x) \in \mathbb{C}^n\left(R_x^1\right)$ (считаем, для определенности, что $n \geq m$) по формуле

$$[L(D) + M(D)]y(x) = L(D)y(x) + M(D)y(x)$$

В этом случае $L(D) + M(D)$ - многочлен степени n.
Произведением называют дифференциальный многочлен степени $n \cdot m$, который на каждую функцию $y(x) \in \mathbb{C}^{n \cdot m}\left(R_x^1\right)$ действует по формуле

$$[L(D) \cdot M(D)]y(x) = L(D) \cdot [M(D)y(x)]$$

Можно доказать, что введенные операции сложения и умножения для дифференциальных многочленов обладают в точности теми же свойствами, что и операции сложения и умножения для обычных многочлепов. Речь идет о свойствах коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности для этих операций. Отсюда, в частности, следует, что дифференциальные многочлены можно разлагать на множители.

Заметим, что для любого комплексного числа λ

$$L(D)\left(e^{\lambda x}\right) = L(\lambda) \cdot e^{\lambda x}$$

где $L(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$ - многочлен от комплексной переменной λ. Многочлен $L(\lambda)$ называется характеристическим многочленом (или символом) дифференциального многочлена $L(D)$. Если $\lambda_1, ..., \lambda_n$ - корни характеристического многочлена (среди них возможны и кратные), то, как известно,

$$L(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) ... (\lambda - \lambda_n).$$

Согласно определению, можно записать

$$L(D) = (D - \lambda_1)(D - \lambda_2) ... (D - \lambda_n).$$

Приведем еще один вспомогательный результат.

Lemma 2.

Если λ - комплексное число, то для любой $y(x) \in \mathbb{C}^n(R_x^1)$ справедлива так называемая формула сдвига

$$L(D)\left[e^{\lambda x} \cdot y(x)\right] = e^{\lambda x} \cdot L(D + \lambda)y(x)$$

Proof

При любом $k \in N$ по формуле Лейбница получаем

$$D^k\left[e^{\lambda x} \cdot y\right] = \left(e^{\lambda x} \cdot y\right)^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \left(e^{\lambda x}\right)^{(j)} \cdot y^{(k-j)} =$$
$$= e^{\lambda x} \cdot \sum_{j=0}^{k} C_k^j \lambda^j D^{k-j} y = e^{\lambda x}(D + \lambda)^k y.$$

В силу этого,

$$L(D)\left[e^{\lambda x} y\right] = e^{\lambda x}(D + \lambda)^n y + a_1 e^{\lambda x}(D + \lambda)^{n-1} y + \cdots + a_n e^{\lambda x} y =$$
$$= e^{\lambda x} L(D + \lambda) y$$

□

Рассмотрим теперь линейное дифференциальное уравнение порядка n с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = f(x), \tag{1}$$

где $a_1, ..., a_n$ - заданные комплексные числа, а $f(x)$ - заданная функция из $\mathbb{C}(R_x^1)$. С помощью дифференциального многочлена степени n

$$L(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n.$$

это уравнение кратко записывается так:

$$L(D)y(x) = f(x)$$

Под решением этого уравнения понимается комплекснозначная функция $y(x) \in \mathbb{C}(R_x^1)$, удовлетворяющая уравнению (1) на всей оси R_x^1.

Метод разложения многочлена $L(D)$ на множители является общим методом решения уравнения (1) и задачи Коши для него.

Если $\lambda_1, ..., \lambda_n$-корни (среди них могут быть кратные) характеристического многочлена $L(\lambda)$, то

$$L(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) ... (\lambda - \lambda_n).$$

Тогда

$$L(D) = (D - \lambda_1)(D - \lambda_2) ... (D - \lambda_n).$$

и, значит, уравнение (1) записывается в виде

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2) ... (D - \lambda_n) y = f(x).$$

Если положить

$$M(D) = (D - \lambda_2) ... (D - \lambda_n)$$

и обозначить $M(D)y(x) = z(x)$, то уравнение (1) эквивалентно системе

$$\begin{cases} (D - \lambda_1) z = f(x) \\ M(D)y = z \end{cases} \tag{2}$$

Уравнение $(D - \lambda_1) z = f(x)$ представляет собой линейное уравнение первого порядка $z' - \lambda_1 z = f(x)$ с комплексными λ и $f(x)$. Его решение находится с помощью следующей леммы.

Lemma 3.

Все решения уравнения $z' - \lambda z = f(x)$, где λ - комплексное число и $f(x)$ - заданная комплехснозначная функция из $\mathbb{C}\left(R_x^l\right)$, задаются формулой

$$z(x) = e^{\lambda x}\left(C + \int_{x_0}^{x} e^{-\lambda\zeta} \cdot f(\zeta) d\zeta\right) \tag{3}$$

где C - прошзвольная комплехсная постоянная.

Proof

Ищем решение уравнения в виде $z(x) = c(x)e^{\lambda x}$. После подстановки $z(x)$ в уравнение и упрощений получаем

$$c'(x) = e^{-\lambda x} \cdot f(x)$$

Отсюда

$$c(x) = C + \int_{x_0}^{x} e^{-\lambda\zeta} \cdot f(\zeta) d\zeta$$

что и дает формулу (3).
В силу леммы 3

$$z(x) = e^{\lambda_1 x}\left(\int_{x_0}^{x} e^{-\lambda_1\zeta} \cdot f(\zeta) d\zeta + C\right)$$

При известной $z(x)$ второе уравнение (2) представляет уже собой линейное уравнение порядка $(n-1)$ с постоянными коэффициентами. Опять разлагаем $M(D)$ на множители

и сводим решение $M(D)y = z$ к решению линейного уравнения порядка ($n-2$) и т.д. Ясно, что после n таких шагов придем к решению уравнения (1) в квадратурах.

Рассмотрим теперь для уравнения (1) начальные условия

$$y\left(x_0\right)=y_0, \quad y'\left(x_0\right)=y_1, ..., y^{(n-1)}\left(x_0\right)=y_{n-1} \tag{4}$$

где $x_0, y_0, y_1, ..., y_{n-1}$ - зацанные числа.
Покажем, что решение задачи Коши (1), (4) всегда существует и единственно на всей оси R_x^1.

Действительно, в силу (2) приходим к задаче Коши:

$$\begin{gathered}(D-\lambda_1)\, z=f(x), \\ z\left(x_0\right)=[M(D) y(x)]_{x=x_0} \equiv z_0 .\end{gathered}$$

Из формулы (3) следует, что решение этой задачи Коши имеет вид

$$z(x)=e^{\lambda x}\left(e^{-\lambda x_0} \cdot z_0+\int_{x_0}^x e^{-\lambda \zeta} \cdot f(\zeta) d \zeta\right) .$$

Зная $z(x)$ и разлагая $M(D)$ на множители, сведем решение задачи Коши для $M(D)y = z(x)$ к решению некоторой вспомогательной задачи Коши и т.д. После п таких шагов придем к решению задачи Коши вида

$$(D-\lambda) y=g(x), \quad y\left(x_0\right)=y_0,$$

где $g(x)$ - заданная непрерывная функция на R_x^1. Это решение с помощью (3) находится единственным образом. Оно и будет едииственным решением задачи Коши (1), (4).

Пример. Решить уравнение $y''-3y'+2y=e^{4x}$.
Δ С помощью дифференциального многочлена уравнение запишется в виде

$$\left(D^2-3 D+2\right) y=e^{4 x} .$$

Характеристический многочлен $L(\lambda)=\lambda^2-3\lambda+2$ имеет корни $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$. В силу этого, исходное уравнение записывается в виде

$$(D-1)(D-2) y=e^{4 x}$$

Положим $(D-2)y=z(x)$. Тогда уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases}(D-1) z=e^{4 x} \\ (D-2) y=z\end{cases}$$

Первое уравнение $z'-z=e^{4x}$ решаем с помощью леммы 3. Из (3) получаем: что

$$z(x)=e^x\left(C+\frac{1}{3} e^{3 x}\right) .$$

Задача сводится к решению уравнения

$$y'-2 y=e^x\left(C+\frac{1}{3} e^{3 x}\right) .$$

Решсние находится из формулы (3), если в ней заменить z на y, λ_1 на λ_2 и $f(x)$ на $e^x\left(C+\frac{1}{3} e^{3 x}\right)$. Окончательно получаем тогда, что

$$y(x)=C_1 e^x+C_2 e^{2 x}+\frac{1}{6} e^{4 x},$$

где C_1, C_2 - произвольные постоянные. $\square$

13.2.2 § 2. Linear homogeneous equations of order n with constant coefficients

Дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = 0, \tag{1}$$

где $x \in R^1_x$ и $a_1, ..., a_n$ - заданные действительные или комплексные числа, называют линейным однородным дифференциальным уравнением поридка n с постоянными коэффициентами. Числа $a_1, ..., a_n$ называют коэффициентами уравнения (1).

С помощью дифференциального многочлена

$$L(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n$$

уравнение (1) коротко записывается в виде

$$L(D)y(x) = 0 \tag{2}$$

1. Общее решение

Утверждение следующей леммы обычно называют принципом суперпозиции для уравиения (1).

Lemma 1.

Если $y_1(x), y_2(x)$ - какие-либо решения уравнения (1) и C_1, C_2 произвольные комплежсные числа, то функция $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ также является решением уравнения (1).

Proof

Воснользуемся формой (2) записи уравнения (1). В силу линейности многочлена $L(D)$ (см. лемму 1 § 1) имеем

$$L(D)y = L(D)\left(C_1 y_1 + C_2 y_2\right) = C_1 L(D) y_1 + C_2 L(D) y_2 = 0$$

так как $L(D)y_1 = L(D)y_2 = 0$ по условию леммы. □

В дальнейшем нам понадобится один вспомогательный результат о функциях вида

$$\varphi(x) = P_1(x) e^{\lambda_1 x} + \cdots + P_m(x) e^{\lambda_m x} \tag{3}$$

где $\lambda_1, ..., \lambda_m$ - попарно различные комплексные числа, а $P_1(x), ..., P_m(x)$ - многочлены с комплексными коэффициентами.

Lemma 2.

Если в (3) $\varphi(x) = 0$ для всех $x \in R^1_x$, то все коэффициенты во всех многочленах $P_1(x), ..., P_m(x)$ суть нули.

Proof

Применим индукцию по m. При $m = 1$ утверждение леммы 2 очевидно. Пусть утверждение леммы 2 справедливо, если в формуле (3) заменить m на $(m-1)$. При $m > 1$ рассмотрим функцию

$$\psi(x) = e^{-\lambda_1 x} \cdot \varphi(x) = P_1(x) + \sum_{k=2}^{m} P_k(x) e^{(\lambda_k - \lambda_1)x} = 0.$$

Продифференцируем $\psi(x)(N+1)$ раз, где N - степень многочлена $P_1(x)$. В силу того, что $P_1^{(N+1)}(x) = 0$, получим

$$\sum_{k=2}^{m} \left[P_k(x) e^{(\lambda_k - \lambda_1)x}\right]^{(N+1)} = 0$$

или

$$\sum_{k=2}^{m} Q_k(x) e^{(\lambda_k - \lambda_1)x} = 0,$$

где $Q_k(x)$ - многочлены той же степени, что и $P_k(x)$, так как $\lambda_k - \lambda_1 \neq 0$ при всех $k = \overline{2,m}$. Из предположения индукции $Q_k(x) \equiv 0, \forall k = \overline{2,m}$. Следовательно, $P_k(x) \equiv 0, \forall k = \overline{2,m}$. Тогда и $P_1(x) \equiv 0$. Это значит, что все коэффициенты многочленов $P_1(x), ..., P_m(x)$ в (3) нулевые.

Рассмотрим характеристический многочлен

$$L(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n$$

Уравнение $L(\lambda) = 0$ называется характеристическим уравнением для (1).
Напомним, что число λ_0 называется корнем кратности $k (k \in N, 1 \leq k \leq n\ )$ уравнения $L(\lambda) = 0$, если

$$L(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k \cdot L_1(\lambda),$$

где $L_1(\lambda)$ - многочлен степени $(n-k)$ и $L_1\left(\lambda_0\right) \neq 0$. Из формулы Тейлора для $L(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_0$ сразу следует, что λ_0-корень кратности k для $L(\lambda) = 0$ тогда и топько тогда, когда

$$L\left(\lambda_0\right) = L'\left(\lambda_0\right) = ... = L^{k-1}\left(\lambda_0\right) = 0, \quad L^{(k)}\left(\lambda_0\right) \neq 0$$

Lemma 3.

Если λ_0 - корснь хратности k харажтеристического уравнения $L(\lambda) = 0$, то каждая из функций

$$e^{\lambda_0 x}, x e^{\lambda_0 x}, ..., x^{k-1} e^{\lambda_0 x}$$

является решением уравнения (1).
О а) $\lambda_0 = 0$. Тогда $L(\lambda) = \lambda^k \left(\lambda^{n-k} + a_1 \lambda^{n-k-1} + \cdots + a_{n-k}\right)$, где $a_{n-k} \neq 0$, и, следовательно,

$$L(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-k} D^k$$

Нетрудно проверить, что функции $1, x, ..., x^{k-1}$ являются решениями $L(D)y = 0$.
б) $\lambda_0 \neq 0$. Сделаем замену $y = e^{\lambda o x} \cdot z$. По формуле сдвига (см. лемму 2, § 1)

$$L(D)y = e^{\lambda_0 x} L\left(D + \lambda_0\right) z = 0$$

Характеристический многочлен $L(\lambda+\lambda_0)$ имеет корень $\lambda=0$ кратности k. В силу п. а) уравнение $L(D+\lambda_0)z = 0$ имеет решения $1, x, ..., x^{k-1}$. Из замены получаем утверждение леммы.

Лемма 3 описывает те функции, которые могут быть решениями уравнения (1). Следующая теорема является центральной в этом параграфе. Она дает формулу всех комплекснозначных решений линейного однородного уравнения (1).

Theorem

Пусть характеристическое уравнение $L(\lambda)=0$ имеет корни $\lambda_1, ..., \lambda_m (m \in N, 1 \leq m \leq n)$ соответственно кратности $k_1, ..., k_m$ ($k_1+\cdots+k_m=n$). Tozda:
а) любая функция вида

$$y(x)=P_1(x)e^{\lambda_1 x}+\cdots+P_m(x)e^{\lambda_m x}, \tag{4}$$

где $P_j(x) = C_0^j + C_1^j x + \cdots + C_{k_j-1}^j x^{k_j-1}$ - многочлен степени (k_j-1), коэффициентами которого служат произвольные комплексные постоянные $C_0^j, ..., C_{k_j-1}^j$, является решением уравнения (1);
б) если $y(x)$ - какое-либо решение уравнения (1), то наидется единственный набор коэффициентов многочленов $P_1(x), ..., P_m(x)$, при хотором это решение $y(x)$ задается формулой (4).
П. а) теоремы немедленно следует из леммы 3 и принципа суперпозиции для уравнения (1) (см. лемму 1).
П. 6) докажем методом математической индукции по n. Пусть $y(x)$ -какое-либо решение (1). При $n=1$ уравнение (1) имеет вид $y'+a_1y=0$ и по лемме 3 § 1 все его решения имеют вид $y=Ce^{-a_1x}$. Ясно, что при некотором единственном значении C эта формула содержит и наше решение. Пусть теперь $n>1$ и пусть всякое решение $y(x)$ линейного однородного уравнения порядка ($n-1$) с постоянными коэффициентами единственным образом записывается в форме (4) с заменой n на ($n-1$). В силу условий теоремы

$$L(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}...(\lambda-\lambda_m)^{k_m}$$

Значит,

$$L(D)=(D-\lambda_1)^{k_1}(D-\lambda_2)^{k_2}...(D-\lambda_m)^{k_m}$$

Введем дифференциальный многочлен степени ($n-1$)

$$M(D)=(D-\lambda_1)^{k_1-1}(D-\lambda_2)^{k_2}...(D-\lambda_m)^{k_m},$$

где при $k_1=1$ первый сомножитель отсутствует. Тогда $L(D)=M(D)(D-\lambda_1)$. Положим $(D-\lambda_1)y=z$. В таком случае уравнение (2) эквивалентно системе

$$\begin{cases} (D-\lambda_1)y=z \\ M(D)z=0 \end{cases} \tag{5}$$

Каждое решение второго уравнения системы (5) в силу предположения индукции имеет вид

$$z(x)=Q_1(x)e^{\lambda_1 x}+Q_2(x)e^{\lambda_2 x}+\cdots+Q_m(x)e^{\lambda_m x}, \quad 1 \leq m \leq n,$$

где $Q_1(x)$ - многочлен степени (k_1-2) в случае $k_1>1$ и $Q_1(x)\equiv 0$ в случае $k_1=1$, а $Q_j(x)$ - многочлены степени (k_j-1) при всех $j=\overline{2,m}$. По лемме 3 § 1 решение первого уравнения системы (5) имеет вид

$$y = e^{\lambda_1 x}\left(C + \int e^{-\lambda_1 x} z(x)dx\right) \tag{6}$$

где C-комплексная постоянная.
Учитывая, что при целом $l \geq 0$ первообразная

$$\int x^l e^{\lambda x} dx = \begin{cases} \left(b_0 x^l + \cdots + b_l\right) e^{\lambda x}, & \lambda \neq 0, \quad b_0 \neq 0, \\ \frac{x^{l+1}}{l+1}, & \lambda = 0, \end{cases}$$

и что $\lambda_j - \lambda_1 \neq 0, \forall j = \overline{2, m}$, из вида $z(x)$ находим, что

$$\int e^{-\lambda_1 x} z(x)dx = \begin{cases} P_1(x) + P_2(x)e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} + \cdots + P_m(x)e^{(\lambda_m-\lambda_1)x}, & k_1 > 1 \\ P_2(x)e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} + \cdots + P_m(x)e^{(\lambda_m-\lambda_1)x}, & k_1 = 1 \end{cases}$$

Подставляя это выражение в (6), получаем, что рассматриваемое решение $y(x)$ уравнения (1) имеет вид (4).

Рассуждением от противного установим единственность записи (4) для каждого решения уравнения (1). Если существует решение $y(x)$ уравнения (1), для которого

$$y(x) = \sum_{k=1}^{m} P_k(x)e^{\lambda_k x} = \sum_{k=1}^{m} \tilde{P}_k(x)e^{\lambda_k x}$$

то отсюда

$$\sum_{k=1}^{m} \left[P_k(x) - \tilde{P}_k(x)\right] e^{\lambda_k x} \equiv 0$$

Из леммы 2 тогда получаем, что $P_k(x) \equiv \tilde{P}_k(x), \forall k = \overline{1, m}$.
Замечания. 1) Поскольку $k_1 + \cdots + k_m = n$, то формула (4) содержит n произвольных постоянных.
2) Если все корни $\lambda_1, ..., \lambda_n$ уравнения $L(\lambda) = 0$ попарно различны, то формула решений (1) особенно простая:

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + \cdots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

3. Рассмотрим систему n функций $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$, записанную в виде следующей таблицы

$$\begin{array}{cccc} e^{\lambda_1 x}, & e^{\lambda_2 x}, & ..., & e^{\lambda_m x}, \\ xe^{\lambda_1 x}, & xe^{\lambda_2 x}, & ..., & xe^{\lambda_m x}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & x^{k_m-1}e^{\lambda_m x}. & & \end{array} \tag{7}$$

Теорема утверждает, что каждое решение $y(x)$ уравнения (1) выражается единственным образом как некоторая линейная комбинация $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$:

$$y(x) = C_1\varphi_1(x) + \cdots + C_n\varphi_n(x).$$

Нетрудно теперь видеть, что множество всех решений линейного однородного уравнения (1) образует линейное комплексное n-мерное векторное пространство, а функции $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$ образуют базис этого пространства.

Исходя из всего сказанного, естественно дать следующее определение.

Definition

Функция вида (4) называется общим решением линейного однородного уравнения (1).

Общее решение (1) обладает следующими свойствами:

а) при каждом наборе постоянных функция (4) является решением уравнения (1),

б) каждое решение уравнения (1) единственным образом представимо функцией вида (4).

Решить уравнение (1) означает найти его общее решение.

На практике процесс нахождения общего решения сводится к нахождению корней характеристического уравнения $L(\lambda) = 0$ и использованию формулы (4).

Example 1.

Решить уравнения

а) $y'' - 4y' + 3y = 0$,

б) $y'' + 2y' + y = 0$,

в) $y'' + \omega^2 y = 0, \quad \omega > 0$.

$\triangle$В случае а) характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$. Тогда по формуле (4)

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x},$$

где C_1 и C_2 - произвольные комплексные постоянные, является общим решением.

В случае б) характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ имеет двукратный корень $\lambda = -1$. Тогда по формуле (4)

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)\, e^{-x}.$$

является общим решением.

Наконец, в случае в) характеристическое уравнение $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ имеет чисто мнимые корни $\lambda_1 = i\omega$, $\lambda_2 = -i\omega$. Из (4) следует, что

$$y(x) = C_1 e^{i\omega x} + C_2 e^{-i\omega x},$$

где C_1 и C_2 - произвольные комплексные постоянные, является общим решением.

2. Выделение действительных решений

Если все коэффициенты уравнения (1) действительны, то решить уравнение (1) означает найти все его действительные решения. В этом случае общее решение (4), как показывает п. в) примера 1 , может давать комплексные решения, если даже ограничиться действительными значениями постоянных. Это происходит за счет комплексных корней уравнения $L(\lambda) = 0$. Поэтому возникает вопрос о получении из формулы (4) общего действительного решения (1). Для выяснения этого вопроса понадобятся некоторые леммы.

Lemma 4.

Пусть все коэффициенты в (1) действительны. Тогда если $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ - комплексный корень кратности k харажтеристического уравнения $L(\lambda) = 0$, то и комплексно сопряженное число $\bar{\lambda}_0 = \alpha - i\beta$ также корень $L(\lambda) = 0$ одинаковой с λ_0 кратности k.

Proof.

В силу того, что $L(\lambda_0) = 0$, то

$$L\left(\bar{\lambda}_0\right) = \bar{\lambda}_0^n + a_1\bar{\lambda}_0^{n-1} + \cdots + a_n = \overline{L(\lambda_0)} = \overline{0} = 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$L'\left(\bar{\lambda}_0\right) = \cdots = L^{(k-1)}\left(\bar{\lambda}_0\right) = 0, \quad L^{(k)}\left(\bar{\lambda}_0\right) \neq 0$$

□

Лемма 5. Пусть все коэффициенты в (1) действительны. Тогда $y(x) = u(x) + iv(x)$ - комплекснозначное решение уравнения (1) только тогда, когда $u(x) = \operatorname{Re} y(x), v(x) = \operatorname{Im} y(x)-$ решения (1).

Proof.

Утверждение леммы следует из равенства

$$L(D)y = L(D)(u + iv) = L(D)u + iL(D)v$$

□

Теперь можно получить правило выделения общего действительного решения уравнения (1) с действительными коэффициентами.

Если $\lambda = \alpha + i\beta$ - комплексный корень кратности k уравнения $L(\lambda) = 0$, то в силу леммы $4\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ тоже корень кратности k для $L(\lambda) = 0$. Поэтому наряду с решениями уравнения (1) вида $y_l(x) = x^l e^{\lambda x}$ в формуле (4) содержатся и решения $\bar{y}_l(x) = x^l e^{\bar{\lambda}_l x}, \forall l = \overline{0, k-1}$. По формуле Эйлера

$$y_l(x) = x^l e^{\alpha x}\cos\beta x + ix^l e^{\alpha x}\sin\beta x = u_l(x) + iv_l(x), \quad l = \overline{0, k-1}.$$

По лемме 4 функции $u_l(x), v_l(x), \forall l = \overline{0, k-1}$, являются решениями (1), причем

$$u_l(x) = \frac{y_l(x) + \bar{y}_l(x)}{2}, \quad v_l(x) = \frac{y_l(x) - \bar{y}_l(x)}{2i}, \quad l = \overline{0, k-1}.$$

Перейдем от базиса решений (7) уравнения (1) к новому базису, заменив каждую комплексно сопряженную пару решений $y_1(x), \bar{y}_l(x)$ на действительную пару решений $u_l(x), v_l(x), \forall l = \overline{0, \bar{k}-1}$. Получим базис из действительных решений. Взяв в формуле (4) все постоянные
$C_1, ..., C_n$ действительными и заменив в ней комплекснозначный базис (7) на базис из действительных решений, в результате из (4) получим общее действительное решение (1).

Example 2.

Найти все действительные решения уравнения

$$y'' + \omega^2 y = 0, \quad \omega > 0.$$

△ В примере 1 было найдено общее комплексное решение заданного уравнения

$$y = \tilde{C}_1 e^{-i\omega x} + \tilde{C}_2 e^{i\omega x}$$

По формуле Эйлера

$$e^{i\omega x} = \cos\omega x + i\sin\omega x.$$

Следовательно,

$$y = C_1\cos\omega x + C_2\sin\omega x,$$

где C_1, C_2 - произвольные действительные числа, является общим действительным решением уравнения. Формулу всех ненулевых решений можно записать и по-иному, если ввести параметры $A > 0$ и φ по формулам

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \sin\varphi = -\frac{C_2}{A}, \quad \cos\varphi = \frac{C_1}{A}.$$

Тогда формула решений примет вид

$$y = A\cos(\omega x + \varphi).$$

□

3. Некоторые дифференциальные уравнения, приводимые заменой переменных к линейным однородным уравнениям с постоянными коэффициентами

Ограничимся рассмотрением дифференциального уравнения второго порядка вида

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{8}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ - заданные непрерывные функции на некотором промежутке X оси R^1_x.

Если возможно приведение уравнения (8) к линейному однородному уравнению с постоянными коэффициентами с помощью замены аргумента $t = \varphi(x)$, то необходимо

$$t = C\int\sqrt{q(x)}dx$$

где $C = \text{const}$ и знак интеграла означает фиксированную первообразную. Действительно, считая $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируемой и $\varphi'(x) \neq 0$ на промежутке X, находим, что $y' = \frac{dy}{dt}\cdot\varphi'(x)$,
$y'' = \frac{d^2}{dt^2}\varphi'^2(x) + \frac{dy}{dt}\cdot\varphi''(x)$. Подстановка y', y'' в уравнение (8) дает уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\varphi''(x) + p(x)\varphi'(x)}{\varphi'^2(x)}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{q(x)}{\varphi'^2(x)}y = 0.$$

В силу того, что коэффициенты в этом уравнении должны быть постоянными, то необходимо $C^2q(x) = \varphi'^2(x)$. Отсюда $t = \varphi(x) = C\int\sqrt{q(x)}dx$. Можно получить и достаточные условия приведения уравнения (8) с помощью замены аргумента к уравнению с постоянными коэффициентами. Мы этого делать не станем, а перейдем к примерам.

Уравнение второго порядка вида

$$x^2y'' + a_1xy' + a_2y = 0, \quad x > 0,$$

где a_1 и a_2 - заданные числа, называется уравнением Эйлера. Нетрудно проверить, что с помощью замены $t = \ln x$ уравнение Эйлера приводится к уравнению

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (a_1 - 1)\frac{dy}{dt} + a_2y = 0.$$

С помощью подстановки $t = \ln x$ к уравнению с постоянными коэффициентами приводится и уравнение Эйлера порядка n

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1} x y'(x) + a_n y = 0, \quad x > 0.$$

Замечание. Другой способ решения уравнения Эйлера состоит в том, что его решение ищут в виде $y = x^\lambda$. После подстановки x^λ в уравнение Эилера получается характеристическое уравнение степени n

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda(\lambda-1)...(\lambda-n+k+1) + a_n = 0, \quad a_0 = 1.$$

Для каждого его корня λ_0 кратности r строим решения x^{λ_0}, $x^{\lambda_0}\ln x, ..., x^{\lambda_0}(\ln x)^{r-1}$, а общее решение уравнения Эйлера получается в виде линейной комбинации всех таких решений с произвольными коэффициентами.

Уравнение

$$\left(1 - x^2\right) y'' - xy' + n^2 y = 0,$$

где $|x| < 1$, а n-действительный параметр, называется уравнением Чебышева. С помощью замены $x = \cos t$ оно сводится к уравнению

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + n^2 y = 0$$

Отсюда следует, что все решения уравнения Чебышева можно записать в форме

$$y(x) = A\cos(n \cdot \arccos x + \varphi),$$

где A и φ - произвольные постоянные. При n - целом $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ - многочлен степени n, называемый многочленом Чебышева.

Уравнение (8) можно иногда привести к уравнению с постоянными коэффициентами и с помощью замены неизвестной функции. Так, например, уравнение Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0, \quad x > 0$$

при помощи замены $y = \frac{z}{\sqrt{x}}$ приводится к уравнению $z'' + z = 0$. Следовательно, все решения уравнения Бесселя записываются в виде

$$y = \frac{A}{\sqrt{x}} \sin(x + \varphi)$$

где A и φ-произвольные постоянные.

Уравнение (8) можно также пытаться привести к уравнению с постоянными коэффициентами с помощью одновременной замены и аргумента, и неизвестной функции.

Преобразуем, например, уравнение Стокса

$$y'' = \frac{Ay}{(x-a)^2(x-b)^2}, \quad x \in (a, b),$$

с помощью замены переменных $\frac{x-a}{b-x} = e^t, \frac{y}{x-b} = u, u = u(t)$. Последовательно находим, что

$$x = \frac{a + be^t}{1 + e^t}, \quad y = \frac{(a-b)u}{1+e^t}, \quad y' = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = u - u'\left(1 + e^{-t}\right)$$
$$y'' = \frac{u'' - u'}{a - b} \cdot \frac{\left(1 + e^{-t}\right)\left(1 + e^t\right)^2}{e^t}$$

После подстановки выражений для x, y, y'' в уравнение Стокса получаем уравнение с постоянными коэффициентами

$$u'' - u' = \frac{Au}{(b-a)^2}$$

13.2.3 § 3. Linear inhomogeneous equations of order n with constant coefficients

Эти уравнения имеют вид

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n y(x) = f(x), \tag{1}$$

где $a_1, ..., a_n$ - заданные комплексные или действительные числа, а правая часть $f(x)$ уравнения (1) - заданная непрерывная функция на некотором промежутке X оси R^1_x.

Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$z^{(n)}(x) + a_1 z^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n z(x) = 0 \tag{2}$$

Прежде всего покажем, что если известно какое-либо репение $y_0(x)$ линейного неоднородного уравнения (1), то замена $y(x) = z(x) + y_0(x)$ приводит уравнение (1) к линейному однородному уравнению (2). Действительно, воспользовавшись представлением левой части (1) через дифференциальный многочлен

$$L(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_n, \tag{3}$$

получаем, что

$$L(D)y = L(D)\left(z + y_0\right) = L(D)z + L(D)y_0 = L(D)z + f(x) = f(x)$$

Отсюда следует $L(D)z = 0$, т.е. $z(x)$-решение (2).
Это простое замечание позволяет написать формулу всех решений линейного неоднородного уравнения (1), если найти каким-то образом его решение $y_0(x)$, так как формула общего решения (2) была уже получена в § 2. Именно, если $z_1(x), ..., z_n(x)$ - базис решений (2), то формула $y = C_1 z_1(x) + \cdots + C_n z_n(x) + y_0(x)$ дает все решения (1). Ее называют формулой общего решения (1).

Следующее утверждение носит название принципа суперпозиции для линейного неоднородного уравнения (1).

Лемма. Пусть $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ и пусть $y_1(x)$ - какое-либо решение уравнения (1) при $f(x) \equiv f_1(x)$ и $y_2(x)$ - какое-либо решение уравнения (1) $при f(x) \equiv f_2(x)$.

Тогда $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ является решением уравнения (1).

Proof

Имеем

$$L(D)y = L(D)\left(y_1 + y_2\right) = L(D)y_1 + L(D)y_2 = f_1(x) + f_2(x) = f(x).$$

Definition

Квазимногочленом называется функция $f(x) = e^{\mu x} \cdot P_m(x)$, где μ - заданное комплексное число, $P_m(x)$ - заданный многочлен степени m с комплексными коэффициентами.

Из предыдущего параграфа следует, что всякое решение линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами представляет собой конечную сумму квазимногочленов.

Покажем, в каком виде нужно искать частное решение линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами (1) с квазимногочленом в правой части. Найдя это частное решение и базис пространства решений (2), немедленно получаем общее решение (1).

Рассмотрим уравнение

$$L(D)y(x) = e^{\mu x} \cdot P_m(x) \tag{4}$$

где μ - заданное комплексное число, а $P_m(x)$ - заданный многочлен степени m.

Definition

Если число μ является корнем характеристического уравнения

$$L(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

то говорят, что в уравнении (4) имеет место резонансный случай. Если же μ не является корнем $L(\lambda) = 0$, то говорят, что в уравнении (4) имеет место нерезонансный случай.

Theorem

Для уравнения (4) существует и единственно решение вида

$$y(x) = x^k \cdot Q_m(x)e^{\mu x},$$

где $Q_m(x)$ - многочлен одинаковой с $P_m(x)$ степени т, а число k равно кратности корня μ характеристического уравнения $L(\lambda) = 0$ в резонансном случае $uk = 0$ в нерезонансном случае.

Proof

Если $\mu \neq 0$, то заменой $y = e^{\mu x} \cdot z$ в уравнении (3) всегда можно избавиться от $e^{\mu x}$ в правой части. В самом деле, используя формулу сдвига, после замены имеем, что

$$L(D)y = L(D)\left(e^{\mu x}z\right) = e^{\mu x}L(D+\mu)z = e^{\mu x} \cdot P_m(x)$$

Отсюда $L(D+\mu)z = P_m(x)$.
Таким образом, доказательство теоремы осталось провести для уравнения вида

$$L(D)y = P_{rn}(x). \tag{5}$$

а) Нерезонансный случай: $L(0) \neq 0$. Пусть

$$P_m(x) = p_0x^m + p_1x^{m-1} + \cdots + p_m,$$
$$Q_m(x) = q_0x^m + q_1x^{m-1} + \cdots + q_m.$$

Подставляя $P_m(x), Q_m(x)$ в (5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем линейную алгебраическую систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов $q_0, q_1, ..., q_m$:

$$\begin{cases} a_n q_0 = p_0, \\ a_n q_1 + a_{n-1} \cdot m q_0 = p_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n q_m + \cdots = p_m. \end{cases}$$

Матрица этой линейной системы треугольная с числами $a_n = L(0) \neq 0$ по диагонали, поэтому все коэффициенты $Q_m(x)$ определяются однозначно.
6) Резонансный случай:

$$L(\lambda) = \lambda^k \left(\lambda^{n-k} + a_1 \lambda^{n-k-1} + \cdots + a_{n-k}\right), \quad 1 \leq k \leq n, \quad a_{n-k} \neq 0, \quad k \neq n.$$

Следовательно,

$$L(D) = \begin{cases} D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-k} D^k, & k < n, \\ D^n, & k = n. \end{cases}$$

В случае $k < n$ замена $D^k y = z$ в уравнении (4) приводит к уравнению

$$L_1(D) z \equiv \left(D^{n-k} + \cdots + a_{n-k}\right) z = P_m(x).$$

Поскольку $L_1(0) = a_{n-k} \neq 0$, то для этого уравнения имеет место нерезонансный случай. Следовательно, существует единственное решение этого уравнения $z = R_m(x)$, где $R_m(x)$ - некоторый многочлен степени m.

Рассмотрим уравнение

$$D^k y = \begin{cases} R_m(x), & k < n, \\ P_m(x), & k = n. \end{cases}$$

Взяв нулевые начальные условия для этого уравнения

$$y(0) = y'(0) = \cdots = y^{(k-1)}(0) = 0,$$

получаем единственное решение вида

$$y(x) = x^k \cdot Q_m(x).$$

Замечания. 1) Практически указанное в теореме решение всегда ипут методом неопределенных коэффициентов, т.е. полагают

$$y(x) = x^k \left(q_0 x^{\pi n} + \cdots + q_m\right) e^{\mu x}$$

и неизвестные коэффициенты $q_0, ..., q_m$ находят подстановкой $y(x)$ в уравнение (4). В силу доказанной теоремы получающаяся линейная система для $q_0, ..., q_m$ однозначно разрешима.
2) Предположим, что все коэффициенты $a_1, ..., a_n$ в уравнении (1) действительны и

$$f(x) = e^{\alpha x}[A(x) \cos \beta x + B(x) \sin \beta x]$$

где $A(x)$ и $B(x)$ - многочлены с действительными коэффициептами и степень одного из них m, а другого не больше m, α и β - действительные числа. Из доказанной теоремы следует, что решение уравнения (1) в этом случае нужно искать в виде

$$y(x) = x^k e^{\alpha x}[C(x)\cos\beta x + D(x)\sin\beta x]$$

где $C(x)$ и $D(x)$ - многочлены степени m с неопределенными коэффициентами, а k равно кратности корня $\alpha + i\beta$ уравнения $L(\lambda) = 0$, если число $\alpha + i\beta-$ корень $L(\lambda) = 0$, и $k = 0$, если число $\alpha + i\beta$ не является корнем $L(\lambda) = 0$.

Это правило получается в силу того, что по формулам Эилера $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = e^{(\alpha+i\beta)x}E(x) + e^{(\alpha-i\beta)x}F(x)$$

где $E(x)$ и $F(x)$ - многочлены. Из принципа суперпозиции и доказанной теоремы следует, что решение (1) можно искать в таком виде, если $\alpha \pm i\beta$ - не корни $L(\lambda) = 0$. Если же $\alpha \pm i\beta$ - корни $L(\lambda) = 0$ кратности
k, то решение приобретает еще множитель x^k. Далее остается вернуться к тригонометрическим функциям.
3) Термии «резонанс» возник в теории колебаний. Например, при изучении вынужденных колебаний гармонического осциллятора без учета силы сопротивления среды под действием внешней гармонической силы приходят к необходимости решать уравнение

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = F\cos\nu t.$$

В этом уравнении $x(t)$ - неизвестная функция, $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, \omega > 0, \nu > 0,\ F \neq 0, t$ - время.

Соответствующее линейное однородное уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

как известно (см. пример 2 § 2), имеет общее решение

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi),$$

где A и φ - произвольные постоянные. Если найти какое-либо решение $x_0(t)$ исходного уравнения, то его общее решение имеет вид

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + x_0(t).$$

Для нахождения $x_0(t)$ удобно сначала найти частное решение $y_0(t)$ уравнения

$$\ddot{y} + \omega^2 y = Fe^{i\nu t}.$$

Тогда, очевидно, $x_0(t) = \operatorname{Re} y_0(t)$. Если $\nu \neq \omega$, то согласно доказанной теореме $y_0(t) = Ae^{i\nu t}$. Число A находится подстановкой $y_0(t)$ в уравнение:

$$A = \frac{F}{\omega^2 - \nu^2}$$

Итак, при $\nu \neq \omega y_0(t) = \frac{Fe^{i\nu t}}{\omega^2-\nu^2}$ и, значит, $x_0(t) = \frac{F\cos\nu t}{\omega^2-\nu^2}$. Если же $\nu = \omega$, то согласно доказанной теореме $y_0(t) = Ate^{i\nu t}$, где подстановка $y_0(t)$ в уравнение дает $A = \frac{F}{2i\omega}$. Отсюда находим, что в этом случае $x_0(t) = \frac{Ft}{2\omega}\sin\omega t$.

Из общего решения исходного уравнения теперь ясно, что в случае $\nu \neq \omega$ все решения ограничены, а в случае $\nu = \omega$ все решения неограничены из-за вида $x_0(t)$, т.е. вынужденные колебания гармопического осциллятора становятся неограниченными. Когда собственная частота колебаний ω совпадает с частотой колебаний внешней силы ν, то такое явление в теории колебаний называют резонансом. Явление резонанса

широко используется в технике.
4) Наконец, отметим, что в том случае, когда $f(x)$ в уравнении (1) представляет собой конечную сумму квазимногочленов, частное решение (1) находят с помощью принципа суперпозиции и доказанной теоремы. При произвольной $f(x)$ в уравнении (1) частное решение (1) находят,

как правило, методом вариации постоянных. При $n = 1$ этот метод был изложен в главе I, а при $n > 1$ метод вариации постоянных будет изложен в главе VI.

Example 1.

Решить уравнение

$$y^{(IV)} - 2y''' - 3y'' = 8\,\mathrm{sh}\,x + 10xe^x$$

Найдем сначала общее решение линейного однородного уравнения

$$y^{(V)} - 2y''' - 3y'' = 0$$

Характеристическое уравнение $\lambda^4 - 2\lambda^3 - 3\lambda^2 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -1, \lambda_4 = 3$. В силу этого общее решение линейного однородного уравнения

$$y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + C_4e^{3x}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 - произвольные постоянные.
Правую часть исходного уравнения можно преобразовать к виду $(10x+4)e^x - 4e^{-x}$. В силу доказанной в этом параграфе теоремы и принципа суперпозиции для исходного уравнения существует единственное решение $y_0(x)$ вида

$$Y_0(x) = (q_0x + q_1)\,e^x + rxe^{-x}$$

Подставляя $y_0(x)$ в исходное уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x и одинаковых экспонентах, находим коэффициенты q_0, q_1, r. В результате вычислений получаем $q_0 = -1$, $q_1 = -\frac{1}{2}, r = 1$.

В итоге общее решение исходного уравнения задается формулой

$$y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + C_4e^{3x} - \left(x + \frac{1}{2}\right)e^x + xe^{-x}.$$

Example 2.

Решить уравнение

$$y^{(IV)} - 2y''' + 2y'' = 10\cos^2 x + 5\left(xe^x - 1\right).$$

$\triangle$ Найдем общее решение линейного однородного уравнения

$$y^{(IV)} - 2y''' + 2y'' = 0$$

Характеристическое уравнение $\lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 = 0$ имеет корень $\lambda = 0$ кратности два и корни $\lambda = 1 \pm i$. Тогда общее действительное решение линейного однородного уравнения имеет вид

$$y = C_1 + C_2x + C_3e^x\cos x + C_4e^x\sin x$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 - произвольные (действительные) постоянные.

Правую часть исходного уравнения преобразуем к виду $5\cos 2x+5xe^x$. В силу принципа суперпозиции и п. 2 замечаний после доказанной в этом параграфе теоремы частное решение $y_0(x)$ исходного уравнения необходимо искать в виде

$$y_0(x) = a\cos 2x + b\sin 2x + (d_1x + d_2)\,e^x$$

После подстановки $y_0(x)$ в исходное уравнение получаем, что $a = \frac{1}{8}$, $b = \frac{1}{4}, d_1 = 5, d_2 = -10$. Следовательно, общее (действительное) решение исходного уравнения задается формулой

$$y = C_1 + C_2x + C_3e^x\cos x + C_4e^x\sin x + \frac{1}{8}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + (5x-10)e^x$$

В заключение отметим, что решение уравнения (1) при любом начальном условии

$$y\,(x_0) = y_0, \quad y'\,(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}\,(x_0) = y_{n-1} \tag{6}$$

где $x_0 \in X$, а $y_0, y_1, ..., y_{n-1}$ - произвольные числа, всегда существует и единственно в том случае, когда все корни $\lambda_1, ..., \lambda_n$ характеристического уравнения $L(\lambda) = 0$ попарно различны. Докажем это.

Из формулы (3) получаем, что общее решение уравнения (1) в рассматриваемом случае имеет вид

$$y = C_1e^{\lambda_1 x} + \cdots + C_ne^{\lambda_n x} + \tilde{y}(x)$$

где $C_1, ..., C_n$ - произвольные постоянные, а $\bar{y}(x)$ - частное решение уравнения (1). Подставив общее решение в начальные условия (6), находим линейную алгебраическую систему для определения $C_1, ..., C_n$. Она имеет вид:

$$\begin{aligned}
C_1e^{\lambda_1 x_0} + \cdots + C_ne^{\lambda_n x_0} &= y_0 - \tilde{y}\,(x_0)\\
C_1\lambda_1e^{\lambda_1 x_0} + \cdots + C_n\lambda_ne^{\lambda_n x_0} &= y_1 - \tilde{y}'\,(x_0)\\
\cdots\cdots\cdots

$$y'' + y = \cos ax$$

ограничены при $x \in (-\infty, +\infty)$?

3. Наити единственное периодическое с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$ решение уравнения

$$y'' + 2ay' + b^2 y = \cos \omega x$$

где $\omega > 0, 0 < 2a < b$. При каком а амплитуда этого решения максимальна?

13.3 Methods for solving systems of linear differential equations with constant coefficients

В этой главе будем считать, что все встречающиеся функции могут принимать комплексные значения.

13.3.1 § 1. Normal linear systems with constant coefficients. General concepts and exclusion method

Нормальной линейной системой с постоянными коэффициентами порядка $n \geq 2$ называют систему линейных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t) + f_i(t), \quad i = \overline{1, n}. \tag{1}$$

Здесь: t-аргумент; $x_1(t), ..., x_n(t)$ - неизвестные функции; a_{ij} - заданные комплексные или действительные числа, называемые коэффициентами системы, $i, j = \overline{1, n}$; $f_1(t), ..., f_n(t)$ - заданные комплекснозначные функции, называемые свободными членами системы; $\dot{x}_i(t) = \frac{dx_i}{dt}, i = \overline{1, n}$. В дальнейшем всегда будем считать, что функции $f_1(t), ..., f_n(t)$-заданные непрерывные функции на некотором промежутке T числовой оси R_t^l. Заметим, что число уравнений системы (1) равно числу неизвестных функций.

Запись нормальной линейной системы (1) становится значительно проще, если воспользоваться матричными обозначениями. Пусть матрица

$$A = \|a_{ij}\|, \quad i, j = \overline{1, n},$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}.$$

Тогда нормальная линейная система (1) записывается в виде одного уравнения

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t). \tag{2}$$

Линейная система (2) называется линейной однородной системой, если $f(t) \equiv 0$ на промежутке T. В противном случае система (2) называется линейной неоднородной системой. Решением нормальной линейной системы (2) будем называть всякую вектор-функцию $x = \varphi(t)$ с n комплекснозначными непрерывно дифференцируемыми на промежутке T компонентами $\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)$, если $\dot{\varphi}(t) \equiv A\varphi(t) + f(t)$ на промежутке T.

Для нормальной линейной системы (2) можно ставить задачу Коши, т.е. задачу с начальным условием.

Пусть $t_0 \in T$ и пусть x_0 - некоторый комплексный n-мерный вектор. Рассмотрим начальное условие

$$x\left(t_0\right)=x_0 \tag{3}$$

Задача Коши для системы (2). Найти решение системы (2), удовлетворяющее начальному условию (3).

В § 4 настоящей главы будет установлено, что задача Коши (2), (3) всегда однозначно разрешима.

Пусть E - единичная матрица порядка n. Введем в рассмотрение (см. § 1 главы 2) оператор дифференцирования D, действующий из множества $\mathbb{C}^1(T)$ всех непрерывно дифференцируемых функций на T во множество $\mathbb{C}(T)$ всех непрерывных функций на T, и определитель $\det(ED-A)\equiv L(D)$, представляющий собой дифференциальный многочлен степени n.

Метод исключения для системы (2) основан на следующем утверждении.

Theorem

Пусть вектор-функция $f(t)(n-1)$ раз непрерывно дифференцируема на промежутке T и пусть $x=\varphi(t)$-решение систельы (2) на промежутке T. Тогда необходимо каждая компонента $\varphi_k(t), k=\overline{1,n}$, решения (1) удовлетворяет на T линейному дифференциальному уравнению порядка п с постоянными коэффициентпами вида

$$L(D)\varphi_k(t)=g_k(t), \quad k=\overline{1,n} \tag{4}$$

где каждая фунхция $g_k(t)$ представляет собой некоторую линейную комбиначию $f_1(t),...,f_n(t),...,f_1^{(n-1)}(t),...,f_n^{(n-1)}(t)$.

Proof

Обозначим через $L_{ik}(D)$ алгебраическое дополнение элемента с номером i,k определителя $L(D), i,k=\overline{1,n}$. Алгебраические дополнения $L_{ik}(D)$ представляют собой дифференциальные многочлены порядка не более чем ($n-1$).

Так как $x=\varphi(t)$ - решение (2), то на промежутке T имеем n тождеств:

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\delta_{ij}D-a_{ij}\right]\varphi_j(t)\equiv f_i(t), \quad i=\overline{1,n}$$

где δ_{ij} - символ Кронекера. Дифференцируя эти тождества ($n-1$) раз, что возможно в силу условий на $f_i(t)$, убеждаемся в том, что все $\varphi_j(t)n$ раз непрерывно дифференцируемы. Как известно, правила умножения дифференциальных многочленов такие же, как и правила умножения обычных многочленов. Следовательно, можно умножить слева i-е тождество на $L_{ik}(D)$ и просуммировать по всем $i=\overline{1,n}$. Получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\delta_{ij}D-a_{ij}\right]L_{ik}(D)\varphi_j(t)\equiv\sum_{i=1}^{n}L_{ik}(D)f_i(t).$$

Воспользуемся тем свойством определителя, что сумма произведений всех элементов некоторого столбца определителя на алгебраические дополнения соответственных элементов другого стопбца либо равна самому определителю в случае совпадения столбцов, либо равна нулю в случае несовпадения столбцов. В результате находим, что

$$L(D)\varphi_k(t)\equiv\sum_{i=1}^{n}L_{ik}(D)f_i(t), \quad k=\overline{1,n}$$

□

Метод исключения для решения линейной системы (2) состоит в том, что ищут сначала решения $\varphi_k(t)$ каждого из уравнений

$$L(D)x_k(t) = \sum_{i=1}^{n} L_{ik}(D)f_i(t), \quad k = \overline{1,n} \tag{5}$$

предполагая, что $f_i(t), i = \overline{1,n}$, имеют достаточное число производных. Пусть $x_k(t) = C_{1k}\psi_1(t) + \cdots + C_{nk}\psi_n(t) + \psi_{0k}(t)$-решение (5), где $\psi_1(t), ..., \psi_n(t)$ - базис пространства решений линейного однородного уравнения $L(D)x(t) = 0$, а $\psi_{0k}(t)$ - некоторое частное решение (5) при $k = \overline{1,n}$. Поскольку компоненты $x_k(t)$ связаны системой (2), то постоянные не являются независимыми, т.е. набор найденных $x_1(t), ..., x_n(t)$ еще не дает решения линейной системы (2). Для получения решения (2) необходимо найденный набор $x_1(t), ..., x_n(t)$ подставить в систему (2) и определить связь между постоянными $C_{1k}, ..., C_{nk}, k = \overline{1,n}$.

Заметим, что, как установлено в главе 2 , базис $\psi_1(t), ..., \psi_n(t)$ строится в зависимости от корней характеристического многочлена $L(\lambda) = \det(\lambda E - A)$ для дифференциального многочлена $L(D)$.

На практике метод исключения неизвестных удобно применять для простых линейных систем (2), прежде всего для линейных систем второго порядка. Для них уравнение (5) для одной из неизвестных функций получается путем дифференцирования одного из уравнений линейной системы и исключения второй неизвестной функции. Для нахождения же второй неизвестной функции уравнение (5) уже не требуется, так как она сразу находится из заданной системы.

Пример. Методом исключения решить линейную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y + \sin t \\ \dot{y} = 2x - y - 2\cos t \end{cases}$$

Δ Продифференцируем первое уравнение и подставим выражение для $\dot{y}$ из второго уравнения. Имеем

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= 4\dot{x} - 3\dot{y} + \cos t = 4\dot{x} - 3(2x - y - 2\cos t) + \cos t = \\ &= 4\dot{x} - 6x + 3y + 7\cos t. \end{aligned}$$

Подставив сюда выражение для $3y$ из первого уравнения, получаем уравнение для $x(t)$:

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = \sin t + 7\cos t.$$

Общим решением этого уравнения является

$$x(t) = C_1e^t + C_2e^{2t} + \cos t - 2\sin t,$$

где C_1, C_2 - произвольные постоянные. Из первого уравнения системы находим, что

$$y(t) = C_1e^t + \frac{2}{3}C_2e^{2t} + 2\cos t - 2\sin t.$$

Вектор-функция с компонентами $x(t), y(t)$ дает все решения исходной системы уравнений. □

13.3.2 § 2. General solution of a normal linear homogeneous system with constant coefficients

Рассмотрим нормальную линейную однородную систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \tag{1}$$

где $t \in R_t^l, A$ - квадратная комплексная матрица порядка $n, x(t)$ - неизвестная вектор-функция с n компонентами.

Следующее предложение носит название принципа суперпозиции для линейных однородных систем.

Lemma 1.

Если $x^{(1)}(t), x^{(2)}(t)$-решения системы (1), а C_1, C_2 - произвольные комплексные числа, то вектор-функция $x(t) = C_1x^{(1)}(t) + C_2x^{(2)}(t)$ также решение системы (1).

Proof.

Имеем в силу условий леммы, что

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) - Ax(t) &= C_1\dot{x}^{(1)}(t) + C_2\dot{x}^{(2)}(t) - A\left[C_1x^{(1)}(t) + C_2x^{(2)}(t)\right] = \\ &= C_1\left[\dot{x}^{(1)} - Ax^{(1)}\right] + C_2\left[\dot{x}^{(2)} - Ax^{(2)}\right] = 0.\end{aligned}$$

□

Будем считать в дальнейшем, что матрица A является матрицей некоторого линейного преобразования $\mathcal{A}$ в комплексном унитарном n-мерном пространстве R^n столбцов с n компонентами в ортонормированном базисе $e_1, e_2, ..., e_n$. При заданном базисе можно отождествить преобразование $\mathcal{A}$ и его матрицу A.

Очевидно, что система (1) имеет тривиальное решение $x = 0$. Будем искать нетривиальные решения (1) в виде $x(t) = e^{\lambda t}h$, где $h \neq 0$ числовой n-мерный вектор. Подставляя $x(t)$ в систему (1), получим $\lambda e^{\lambda t}h = Ae^{\lambda t}h$ или $Ah = \lambda h$.

Напомним, что собственный вектор h преобразования A для собственного значения λ определяется условием

$$Ah = \lambda h, \quad h \neq 0,$$

и что все собственные значения λ преобразования A являются корнями уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0,$$

где E-единичная матрица порядка n. Таким образом, установлено следующее утверждение.

Lemma 2.

Для того, чтобы вектор-функция $x(t) = e^{\lambda t}h$ была нетривиальным решением линейной однородной системы (1), необходимо и достаточно, чтобы λ было собственным значением, а h-соответствующим ему собственным вехтором преобразования A.

Теперь можно установить следующий результат.

Theorem 1

Пусть существует базис $\mathcal{R}^n$ из собственных векторов $h_1, ..., h_n$ линейного преобразования A и пусть $\lambda_1, ..., \lambda_n$ - соответствующие им собственные значения (среди них могут быть одинаковые)

Toadn:
а) вектор-фулкция $x(t)$ вида

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} h_1 + \cdots + C_n e^{\lambda_n t} h_n, \tag{2}$$

где $C_1, ..., C_n$ - произвольные комплехсные постпояные, является решением системы (1);
б) если $x(t)$ - какое-либо решение системы (1), то наидутся такие значения постоянных $C_1, ..., C_n$, при хоторых $x(t)$ задается формулой (2).

Proof

П. а) утверждения теоремы 1 непосредственно следует из лемм 1 и 2 . Докажем п. б). Пусть $x(t)$ - какое-либо решение (1). Так как $h_1, ..., h_n$ базис R^n, то для $\forall t \in R_t^l$

$$x(t) = \zeta_1(t) h_1 + \cdots + \zeta_n(t) h_n$$

Подставим $x(t)$ в систему (1). Имеем

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1(t) h_1 + \cdots + \dot{\zeta}_n(t) h_n &= \zeta_1(t) A h_1 + \cdots + \zeta_n(t) A h_n = \\ &= \lambda_1 \zeta_1(t) h_1 + \cdots + \lambda_n \zeta_n(t) h_n. \end{aligned}$$

Так как $h_1, ..., h_n$ - линейно независимые векторы, то отсюда

$$\dot{\zeta}_1(t) = \lambda_1 \zeta_1(t), ..., \dot{\zeta}(t) = \lambda_n \zeta_n(t).$$

Из этих уравнений находим, что $\zeta_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}, ..., \zeta_n(t) = C_n e^{\lambda_n t}$. Подстановка найденных $\zeta_1(t), ..., \zeta_n(t)$ в формулу для $x(t)$ дает (2).

Замечание. Для каждого решения $x(t)$ в теореме 1 можно установить единственность набора $C_1, ..., C_n$ в (2).

При условиях теоремы 1 вектор-функцию $x(t)$ вида (2) будем называть общим комплексным решением линейной однородной системы (1). Как известно из курса алгебры, базис пространства R^n из собственных векторов преобразования A существует, например, тогда, когда все собственные значения $\lambda_1, ..., \lambda_n$ преобразования A попарно различны или когда преобразование A является нормальным (независимо от кратности λ), в частности, симметрическим.

Example 1.

Найти общее комплексное решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -2y + 2z, \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = y - z. \end{cases}$$

$\triangle$ Напишем матрицу A системы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные значения матрицы A из уравнения

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} -\lambda & -2 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda\left(\lambda^2+2\lambda+2\right)=0.$$

Отсюда $\lambda_1=0, \lambda_{2,3}=-1\pm i$. Найдем какие-либо собственные векторы h_1, h_2, h_3 соответственно для $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Имеем

$$h_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h_2=\begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}, \quad h_3=\begin{pmatrix} 2 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Так как $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ - попарно различны, то h_1, h_2, h_3 образуют базис в комплексном линейном пространстве R^3. По теореме 1 векторфункция

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}e^{(-1+i)t}+C_3e^{(-1-i)t}\begin{pmatrix} 2 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}$$

где C_1, C_2, C_3 - произвольные комплексные постоянные, является обшим решением исходной системы.

Example 2.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}=4x-y-z, \\ \dot{y}=x+2y-z, \\ \dot{z}=x-y+2z. \end{cases}$$

$\triangle$ Выпишем матрицу A заданной системы:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Решая уравнение $\det(A-\lambda E)=0$, найдем собственные значения A.

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(3-\lambda)\left(\lambda^2-5\lambda+6\right)=0.$$

Отсюда $\lambda_1=2, \lambda_2=\lambda_3=3$. Вектор

$$h_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

является собственным для λ_1, а векторы

$$h_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

являются линейно независимыми собственными векторами для λ_2. Векторы h_1, h_2, h_3 образуют базис R^3. Общим решением заданной системы является вектор-функция

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

где C_1, C_2, C_3 - произвольные постоянные.
В том случае, когда несимметрическое преобразование A имеет собственное значение λ кратности k, то, вообще говоря, линейно независимых собственных векторов A, соответствующих этому значению λ, оказывается меньше k. Таким образом, в таком случае нельзя построить базис R^n из собственных векторов преобразования A. Оказывается, однако, что всегда можно построить так называемый жорданов базис пространства R^n. Чтобы сформулировать соответствующую теорему из курса алгебры, введем понятия присоединенного вектора и жордановой цепочки.

Definition

Пусть λ_0 - собственное значение преобразования A и пусть векторы $h_1, h_2, ..., h_k$ таковы, что

$$\begin{aligned} &Ah_1 = \lambda_0 h_1, \quad h_1 \neq 0, \\ &Ah_2 = \lambda_0 h_2 + h_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ &Ah_k = \lambda_0 h_k + h_{k-1}. \end{aligned} \tag{3}$$

Тогда h_1 - собственный вектор преобразования A, а векторы $h_2, ..., h_k$ называют присоединенными векторами к вектору h_1. Система векторов $h_1, ..., h_k$ называется жордановой цепочкой для собственного значения λ_0, а число k называется длиной жордановой цепочки.

Если собственное значение λ_0 - простое и h_1 - соответствующий ему собственный вектор, то присоединенных векторов к h_1 в этом случае не существует. Если же λ_0 - кратное собственное значение, то для него может существовать несколько жордановых цепочек, содержащие линейно независимые собственные векторы преобразования.

Теорема Жордана. Каково бы ни было линейное преобразование A в комплексном простражтве R^n, всегда существует базис R^n, составленный из жордановых цепочек для всех собственных значений

Эта теорема доказывается в курсе алгебры. Мы же только отмегим, что в базисе, составленном из жордановых цепочек (в дальнейшем такой базис будет коротко называться жордановым базисом R^n), число различных жордановых цепочек равно числу линейно независимых векторов преобразования A. Кроме того, в жордановом базисе сумма длин всех жордановых цепочек для каждого кратного собственного значения λ равна кратности λ. В общем случае жорданов базис R^n является комплексным даже для действительного преобразования A. В частности, жорданов базис может быть базисом только из собственных векторов A. Заметим также, что жорданов базис R^n строится не единственным образом.

Используем теперь жорданов базис R^n для получения формулы всех комплекснозначных решений линейной однородной системы (1) в случае произвольной квадратной матрицы A.

Пусть λ - собственное значение A и пусть $h_1, ..., h_k$ - некоторая жорданова цепочка для λ. Покажем, что каждой жордановой цепочке длины k соответствует k решений системы (1) вида

$$
\begin{aligned}
&x_1(t) = e^{\lambda t} h_1 \equiv e^{\lambda t} \cdot P_1(t),\\
&x_2(t) = e^{\lambda t}\left(\frac{t}{1!}h_1 + h_2\right) \equiv e^{\lambda t} \cdot P_2(t),\\
&x_3(t) = e^{\lambda t}\left(\frac{t^2}{2!}h_1 + \frac{t}{1!}h_2 + h_3\right) \equiv e^{\lambda t} \cdot P_3(t),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&x_k(t) = e^{\lambda t}\left(\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}h_1 + \dots + \frac{t}{1!}h_{k-1} + h_k\right) \equiv e^{\lambda t} \cdot P_k(t).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Lemma 3.

Каждая из вектор-функций $x_r(t) = e^{\lambda t} \cdot P_r(t), r = \overline{1,k}$, яеляется решением системы (1).

Proof

При $k = 1$ утверждение леммы 3 доказано в лемме 2. Пусть $k \geq 2$. Тогда $\dot{P}_r(t) = P_{r-1}(t)$, а из определения жордановой цепочки (3) следует, что $AP_r(t) = \lambda P_r(t) + P_{r-1}(t)$. Подставляя $x_r(t)$ в систему (1), получаем, что

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_r - Ax_r = \lambda e^{\lambda t} P_r + e^{\lambda t}\dot{P}_r - e^{\lambda t} \quad & AP_r = \\
& = \lambda e^{\lambda t} P_r + e^{\lambda t} P_{r-1} - e^{\lambda t}\left(\lambda P_r + P_{r-1}\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Здесь был использован тот факт, что формула производной произведения скалярной функции и вектор-функции аналогична формуле производной произведения двух скалярных функций. □

Теперь установим формулу любого решения системы (1).

Theorem 2

Пусть жорданов базис R^n состоит из S жордановых цепочек $h_1^{(j)}, ..., h_{k_j}^{(j)}$ длин $k_j\,(k_1 + \dots + k_S = n)$ для собственных значений λ_j (среди λ_j могут быть одинаковые) преобразования $A, j = \overline{1,S}$. Тогда:
а) вектор-функция $x(t)$ вида

$$
x(t) = \sum_{j=1}^{S} e^{\lambda_j t}\left[C_1^{(j)} P_1^{(j)}(t) + \dots + C_{k_j}^{(j)} P_{k_j}^{(j)}(t)\right] \tag{5}
$$

где $P_1^{(j)}(t), ..., P_{k_j}^{(j)}(t)-$ многочлены вида (4) и $C_1^{(j)}, ..., C_{k_j}^{(j)}, j = \overline{1,S}$, произвольные комплежные постоянные, является решением системы (1);
б) если $x(t)$ - какое-либо решение системы (1), то найдется тахой набор значений постоянных $C_1^{(j)}, ..., C_{k_j}^{(j)}, j = \overline{1,S}$, при котором $x(t)$ задается формулой (5).
П. а) теоремы 2 немедленно следует из леммы 3 и принципа суперпозиции для системы (1) (см. лемму 1).

Докажем п. б). Пусть $x(t)$ - какое-либо решение системы (1). Покажем, что оно имеет вид (5). При каждом $t \in R_i^1$ решение $x(t)$ можно разложить по жорданову базису R^n. Пусть

$$x(t) = \sum_{j=1}^{S} \left[\zeta_1^{(j)}(t) h_1^{(j)} + \cdots + \zeta_{k_j}^{(j)}(t) h_{k,}^{(j)} \right].$$

Подставим $x(t)$ в систему (1) и воспользуемся определением жордановой цепочки (3). Имеем:

$$\sum_{j=1}^{S} \left[\dot{\zeta}_1^{(j)}(t) h_1^{(j)} + \cdots + \dot{\zeta}_{k_j}^{(j)}(t) h_{k_j}^{(j)} \right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{S} \left[\zeta_1^{(j)}(t) A h_1^{(j)} + \cdots + \zeta_{k_j}^{(j)}(t) A h_{k_j}^{(j)} \right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{S} \left[\zeta_1^{(j)}(t) \lambda_j h_1^{(j)} + \zeta_2^{(j)}(t) \left(\lambda_j h_2^{(j)} + h_1^{(j)} \right) + \cdots \right.$$

$$\left. + \zeta_{k_j}^{(j)}(t) \left(\lambda_j h_{k_j}^{(j)} + h_{k_j-1}^{(j)} \right) \right].$$

Из единственности разложения $x(t)$ по жордановому базису отсюда находим S систем вида

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_1^{(j)} = \lambda_j \zeta_1^{(j)} + \zeta_2^{(j)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{\zeta}_{k_j-1}^{(j)} = \lambda_j \zeta_{k_j-1}^{(j)} + \zeta_{k_j}^{(j)}, \\ \dot{\zeta}_{k_j}^{(j)} = \lambda_j \zeta_{k_j}^{(j)}, \quad j = \overline{1, S}. \end{cases}$$

Решая каждую из этих систем снизу вверх, получаем:

$$\zeta_{k_j}^{(j)}(t) = C_{k_j}^{(j)} e^{\lambda_j t},$$

$$\zeta_{k_j-1}^{(j)}(t) = \left[C_{k_j-1}^{(j)} + C_{k_j}^{(j)} \frac{t}{1!} \right] e^{\lambda_j t},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\zeta_1^{(j)}(t) = \left[C_1^{(j)} + C_2^{(j)} \frac{t}{1!} + \cdots + C_{k_j}^{(j)} \frac{t^{k_j-1}}{(k_j-1)!} \right] e^{\lambda_j t} \quad j = \overline{1, S}.$$

Подставляя найденные значения $\zeta_1^{(j)}(t), ...\zeta_{k_j}^{(j)}(t)$ в разложение $x(t)$ и собирая члены возле каждого $C_1^{(j)}, ..., C_{k_j}^{(j)}$, получим представление x(t) в виде (5). □

Замечания. 1) Можно доказать, что представление каждого решения линейной однородной системы (1) в виде (5) является единственным. Это делается так же, как и в случае линейных однородных уравнений порядка n (см. теорему § 2 главы 2).
2) Так как $k_1 + \cdots + k_S = n$, то формула (5) содержит n произвольных постоянных.
3) Если жорданов базис является базисом из собственных векторов преобразования A, то формула (5) совпадает с формулой решений системы (1) в теореме 1.

Definition

Вектор-функция $z(t)$ вида (5) называется общим (комплекснозначным) решением нормальной линейной однородной системы (1).

Решить систему означает найти ее общее решение.
На практике процесс нахождения общего решения (1) сводится к нахождению собственных значений матрицы A, построению жорданового базиса R^n и использованию формулы

(5). Для удобства пользования распишем формулу (5) для системы (1) при $n = 2, 3$, за исключением тех случаев, которые охватываются теоремой 1.

Если при $n = 2$ собственное значение λ двукратное и жорданова цепочка для λ состоит из собственного вектора h_1 и присоединенного к нему вектора h_2, то общее решение системы (1) задается формулой

$$x(t) = C_1 e^{\lambda t} h_1 + C_2 e^{\lambda t} (t h_1 + h_2)$$

Рассмотрим теперь случай $n = 3$. Если собственное значение λ_1 простое и ему соответствует собственный вектор h_1, а собственное значение λ_2 двукратное и жорданова цепочка для λ_2 состоит из собственного вектора h_2 и к нему присоединенного вектора h_3, то общее решение системы (1) в этом случае задается формулой

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} h_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} h_2 + C_3 e^{\lambda_2 t} (t h_2 + h_3)$$

Пусть теперь λ - трехкратное собственное значение A. Если жорданов базис состоит из двух жордановых серий, одна из которых состоит из собственного вектора h_1, а другая состоит из собственного вектора h_2 и присоединенного к нему вектора h_3, то общее решение (1) имеет вид

$$x(t) = C_1 e^{\lambda t} h_1 + C_2 e^{\lambda t} h_2 + C_3 e^{\lambda t} (t h_2 + h_3).$$

Если же жорданов базис состоит лишь из одной жордановой цепочки h_1, h_2, h_3 где h_1 - собственный вектор, а h_2 и h_3 - присоединенные к нему векторы, то общее решение (1) задается формулой

$$x(t) = C_1 e^{\lambda t} h_1 + C_2 e^{\lambda t} (t h_1 + h_2) + C_3 e^{\lambda t} \left(\frac{t^2}{2!} h_1 + t h_2 + h_3 \right)$$

Example 3.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = -x - y - 2z, \\ \dot{z} = y + z, \end{cases}$$

при начальных условиях $x(0) = 0, y(0) = -1, z(0) = 1$.

$\triangle$ Выпишем матрицу A системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем ее собственные значения $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Для λ_1 собственным вектором является, например,

$$h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

а для λ_2 собственным вектором является, например,

$$h_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

а к нему присоединенным вектором, т.е. решением системы $Ah_3 = \lambda_2 h_3 + h_2$, служит, например,

$$h_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Векторы h_1, h_2, h_3 образуют жорданов базис R^3 и, следовательно, общее решение системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 e^{t} \left[t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right],$$

где C_1, C_2, C_3 - произвольные постоянные. При заданных начальных условиях получаем решение

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{t} \begin{pmatrix} 2t \\ -1 \\ 1-t \end{pmatrix}.$$

Example 4.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 5y - 8z \\ \dot{y} = 7x - 11y - 17z \\ \dot{z} = -3x + 4y + 6z \end{cases}$$

$\triangle$ Собственное значение матрицы A системы $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Множество всех собственных векторов матрицы системы задается формулой

$$h = C \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где C - произвольная постоянная. Возьмем собственный вектор

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

К нему присоединенным вектором, т.е. решением системы $Ah_2 = \lambda_1 h_2 + h_1$, является, например, вектор

$$h_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Присоединенным вектором h_3 к вектору h_2, т.е. решением системы $Ah_3 = \lambda_1 h_3 + h_2$, является, например, вектор

$$h_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Векторы h_1, h_2, h_3 образуют жорданов базис пространства R^3. Значит, общее решение заданной системы задается формулой

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$
$$+ C_3 e^{-t} \left[\frac{t^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

где C_1, C_2, C_3 - произвопьные постоянные.

Если матрица A действительная, то решить систему (1) означает найти ее общее действительное решение. Поэтому возникает вопрос о методе получения всех действительных решений из формулы (5) общего комплеснозначного решения системы (1).

Если λ - действительное собственное значение A, то и все жордановы цепочки (3) для пего действительные. Если же λ - комплексное собственное значение A, то, как установлено в § 2 главы 2 , число $\bar{\lambda}$ является также собственным значением A одинаковой с λ кратности. При этом из (3) следует, что если $h_1, h_2, ..., h_k$ - жорданова цепочка для λ, то комплексно сопряженные векторы $\bar{h}_1, \bar{h}_2, ..., \bar{h}_k$ образуют жорданову цепочку для $\bar{\lambda}$. В формуле (5) каждому действительному значению λ будут соответствовать действительные решения $x_r(t) = e^{\lambda t} \cdot P_r(t), r = \overline{1,k}$, вида (4), а каждой паре комплексно сопряженных значений λ и $\bar{\lambda}$ будут соответствовать комплексно сопряженные решения $x_r(t) = e^{\lambda t} \cdot P_r(t), \bar{x}_r(t) = e^{\bar{\lambda} t} \cdot \bar{P}_r(t)$,
$r = \overline{1,k}$, где k - длина жордановой серии для λ. Нетрудно видеть, что в последнем случае вектор-функции

$$x_\tau^{(1)}(t) = \mathrm{Re}\left[e^{\lambda t} P_r(t)\right], \quad x_r^{(2)}(t) = \mathrm{Im}\left[e^{\lambda t} P_r(t)\right], \quad r = \overline{1,k}$$

будут действительными решениями системы (1).
Теперь аналогично случаю линейного однородного уравнения порядка n (см. § 2 главы 2) можно показать, что формула (5) дает все действительные решения системы (1) с действительной матрицей A, если в формуле (5) считать все произвольные постоянные действительными, а каждую пару комплексно сопряженных решений $x_r(t), \bar{x}_r(t), r = \overline{1,k}$, заменить на действительную пару $x_r^{(1)}(t), x_r^{(2)}(t), r = \overline{1,k}$.

Пример 5. Найти все действительные решения линейной однородной системы, заданной в примере 1.

Используя формулу Эйлера, имеем

$$e^{(-1+i)t} \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} 2\cos t \\ \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} + i e^{-t} \begin{pmatrix} 2\sin t \\ -\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}.$$

Следовательно, общим действительным решением заданной системы является вектор-функция

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \tilde{C}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \tilde{C}_2 \cdot e^{-t} \begin{pmatrix} 2\cos t \\ \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} + \tilde{C}_3 \cdot e^{-t} \begin{pmatrix} 2\sin t \\ -\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix},$$

где $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3$ - произвольные действительные постоянные.
Итак, если известен жорданов базис, то всегда можно найти общее решение (1). Однако нахождение жорданового базиса - весьма трудоемкая задача. Поэтому в ряде случаев

решение системы (1) целесообразно находить другим методом - методом неопределенных коэффициентов.

Пусть $\lambda_1, ..., \lambda_m (1 \leq m \leq n)$ - попарно различные собственные значения матрицы A и пусть $r_1, ..., r_m$ - максимальные длины жордановых цепочек соответственно для $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Тогда из теоремы 2 следует, что всякое решение системы (1) имеет вид

$$x(t) = e^{\lambda_1 t} P_1(t) + \cdots + e^{\lambda_m t} P_m(t),$$

где $P_j(t)$ - многочлен степени ($r_j - 1$), коэффициентами которого служат n-мерные числовые векторы, $j = \overline{1, m}$. Это обстоятельство позволяет решать систему (1) методом неопределенных коэффициентов. Если собственные значения $\lambda_1, ..., \lambda_m$ имеют соответственно кратности $l_1, ..., l_m$ ($l_1 + \cdots + l_m = n$), то ищут решение системы (1) в виде

$$x(t) = e^{\lambda_1 t} Q_1(t) + \cdots + e^{\lambda_m t} Q_m(t)$$

где $Q_j(t)$ - вектор-многочлены степени ($l_j - 1$), $j = \overline{1, m}$, с неопределенными векторными коэффициентами. Эти коэффициенты находят подстановкой $x(t)$ в систему (1). Теорема 2 гарантирует их определение.

Пример 6. Решить методом неопределенных коэффициентов систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 4y - x. \end{cases}$$

Д Собственным значением матрицы системы $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ является $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. Будем искать решение системы в виде вектор-функции

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} c_1 t + c_2 \\ d_1 t + d_2 \end{pmatrix},$$

где c_1, c_2, d_1, d_2 - неопределенные коэффициенты. Их находим подстановкой $x(t), y(t)$ в систему. После подстановки находим, что $d_1 = c_1, d_2 = c_1 + c_2$. В силу этого, все решения системы задаются формулой

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} c_1 t + c_2 \\ c_1 t + c_1 + c_2 \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} t \\ t + 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные.

Нетрудно заметить, что множество всех решений линейной однородной системы (1) образует линейное комплексное пространство. Из формулы (5) следует, что всякое решение системы (1) однозначно записывается в виде

$$x(t) = C_1 x_1(t) + \cdots + C_n x_n(t),$$

где $C_1, ..., C_n$ - постоянные, а вектор-функции $x_1(t), ..., x_n(t)$ строятся с помощью собственных значений и жордановых серий матрицы A. Это значит, что $x_1(t), ..., x_n(t)$ образуют базис в линейном пространстве решений системы (1) и что это пространство является n-мерным.

Замечание. Нетрудно проверить, что линейная система Эйлера

$$t\dot{x}(t) = Ax(t), \quad t > 0,$$

где A - числовая квадратная матрица порядка n, заменой $t = e^{\tau}$ сводится к линейной однородной системе

$$\dot{x}(\tau) = Ax(\tau).$$

К этой же линейной системе сводится и линейная система

$$a^{-1}(t) \cdot \dot{x}(t) = Ax(t)$$

где скалярная функция $a(t) > 0$ и непрерывна на промежутке T оси R^1_t, если сделать замену по формуле $\tau = \int a(t)dt$ (здесь интеграл означает фикспрованную первообразную).

13.3.3 § 3. General solution of a normal linear inhomogeneous system with constant coefficients

Рассмотрим нормальную линейную неоднородную систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t), \tag{1}$$

где t-аргумент, изменяющийся в некотором промежутке T оси R^1_t, $x(t)$ - неизвестная вектор-функция с n компонентами, A - заданная числовая квадратная матрица порядка n, $f(t)$ - заданная непрерывная на T вектор-функция с n компонентами.

Покажем, что если известно какое-либо решение $x_0(t)$ неоднородной системы (1), то замена $x(t) = y(t) + x_0(t)$ приводит решение (1) к решению однородной системы

$$\dot{y}(t) = Ay(t). \tag{2}$$

Действительно, подставляя $x(t) = y(t) + x_0(t)$ в (1), получаем $\dot{y} + \dot{x} = Ay + Ax_0 + f(t)$. Так как $x_0(t)$ - решение (1), то $\dot{x}_0 = Ax_0 + f(t)$. Следовательно, $y(t)$ удовлетворяет системе (2).

Так как формула общего решения однородной системы (2) уже нам известна, то замена позволяет написать формулу всех решений системы (1). Именно, если $y_1(t), ..., y_n(t)$ - базис линейного пространства решений однородной системы (2), то формула

$$x(t) = C_1y_1(t) + \cdots + C_ny_n(t) + x_0(t), \tag{3}$$

где $C_1, ..., C_n$ - произвольные постоянные, дает все решения (1). Функция $x(t)$ вида (3) называется общим решением линейной неоднородной системы (1).

Следующее утверждение называют принципом суперпозиции для линейных систем (1).

Lemma 1.

Если $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ и $x_1(t)$ - решение системы (1) при $f(t) \equiv f_1(t)$, а $x_2(t)$-решение системы (1) при $f(t) \equiv f_2(t)$, то $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ является решением системы (1).

Proof.

По условию леммы

$$\dot{x}_1(t) = Ax_1(t) + f_1(t), \quad \dot{x}_2(t) = Ax_2(t) + f_2(t).$$

Тогда

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_1(t) + \dot{x}_2(t) = Ax_1(t) + Ax_2(t) + f_1(t) + f_2(t) = Ax(t) + f(t).$$

□

Definition

Вектор-квазимногочленом называется вектор-функция $f(t) = e^{\mu t} P_m(t)$, где μ-заданное комплексное число, $P_m(t)$-векторномногочлен степени m, коэффициентами которого служат n-мерные векторы.

Из теоремы 2 § 1 ясно, что всякое решение линейной однородной системы (2) представляет собой конечную сумму вектор-квазимногочленов.

Покажем, что в том случае, когда $f(t)$ - вектор-квазимногочлен, всегда существует некоторое решение неоднородной системы, тоже являющееся некоторым вектор-квазимногочленом. Зная такое решение (1), по формуле (3) можно найти общее решение (1).

Сначала рассмотрим частный случай. Пусть λ - некоторое собственное значение A и пусть $h_1, ..., h_k$ - некоторая жорданова цепочка для λ из жорданового базиса R^n.

Theorem 1

Если в системе (1)

$$f(t) = e^{\mu t} \left[P_m^{(1)}(t) h_1 + \cdots + P_m^{(k)}(t) h_k \right]$$

где $P_m^{(1)}(t), ..., P_m^{(k)}(t)$ - многочлены степени не выше m, то для системы (1) существует и единственно решение вида

$$x(t) = \begin{cases} e^{\mu t} \cdot Q_m(t), & \mu \neq \lambda, \\ t e^{\mu t} \cdot Q_{m+k-1}(t), & \mu = \lambda, \end{cases}$$

где $Q_m(t)$ и $Q_{m+k-1}(t)$ - многочлены соответственно степени m и ($m + k - 1$).

Proof

Ищем решение (1) в виде

$$x(t) = \sum_{j=1}^{k} \zeta_j(t) h_j.$$

Подставляя в систему (1) и используя определение жордановой цепочки, получаем, что

$$\sum_{j=1}^{k} \dot{\zeta}_j(t) h_j = \sum_{j=1}^{k} \zeta_j(t) A h_j + e^{\mu t} \sum_{j=1}^{k} P_m^{(j)}(t) h_j =$$

$$= \lambda \zeta_1(t) h_1 + \sum_{j=2}^{k} \zeta_j(t) \left[\lambda h_j + h_{j-1} \right] + e^{\mu t} \sum_{j=1}^{k} P_m^{(j)}(t) h_j.$$

Отсюда в силу линейной независимости $h_1, ..., h_k$ следует, что

$$\begin{aligned} &\dot{\zeta}_1 = \lambda \zeta_1 + \zeta_2 + e^{\mu t} P_m^{(1)}(t) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\dot{\zeta_{k-1}} = \lambda \zeta_{k-1} + \zeta_k + e^{\mu t} P_m^{(k-1)}(t) \\ &\dot{\zeta}_k = \lambda \zeta_k + e^{\mu t} P_m^{(k)}(t) \end{aligned}$$

Ищем частные решения уравнений этой системы снизу вверх. Тогда при $\mu \neq \lambda$ существуют и единственны частные решения $\zeta_k = e^{\mu t} Q_m^{(k)}(t), ..., \zeta_1 = e^{\mu t} Q_m^{(1)}(t)$, где

$Q_m^{(k)}(t), ..., Q_m^{(1)}(t)$-многочлены, среди которых хотя бы один степени m. Подставляя $\zeta_1, ..., \zeta_k$ в формулу $x(t)$, находим, что при $\mu \neq \lambda$

$$x(t) = e^{\mu t} \sum_{j=1}^{k} Q_m^{(j)}(t) h_j = e^{\mu t} Q_m(t),$$

где $Q_m(t)$ - вектор-многочлен степени m.
При $\mu = \lambda$ существуют и единственны частные решения

$$\zeta_k = e^{\mu t} t Q_m^{(k)}(t), \quad \zeta_{k-1} = e^{\mu t} t Q_{m+1}^{(k-1)}(t), ..., \zeta_1 = e^{\mu t} t Q_{m+k-1}^{(1)}(t),$$

где $Q_m^{(k)}(t), ..., Q_{m+k-1}^{(1)}(t)$ - многочлены соответственно степени $m, ...,$ $(m + k - 1)$. Подставляя $\zeta_1, ..., \zeta_k$ в формулу $x(t)$, находим, что при $\mu = \lambda$

$$x(t) = t e^{\mu t} \sum_{j=1}^{k} Q_{m+k-j}^{(j)}(t) h_j = e^{\mu t} t Q_{m+k-1}(t),$$

где $Q_{m+k-1}(t)$ - вектор-многочлен степени $(m + k - 1)$. $\square$

Теперь рассмотрим общий случай.

Theorem 2

Если в системе (1) $f(t) = e^{\mu t} P_m(t)$, где $P_m(t)$ - вектормногочлен степени m, то для системы (1) всегда существует решение вида

$$x(t) = e^{\mu t} Q_{m+k}(t), \tag{4}$$

где $Q_{m+k}(t)$ - вектор-многочлен степени $(m+k)$, причем $k = 0$, если $\mu-$ не собственное значение A, и k не превосходит наибольшей длины жордановой цепочки для μ, если μ - собственное значение A, а коэффициентали $Q_{m+k}(t)$ служат n-мерные числовые векторы.

Proof

Пусть жорданов базис R^n состоит из S жордановых цепочек $h_1^{(j)}, ..., h_{k_j}^{(j)}$ для собственных значений λ_j преобразования A (среди λ_j могут быть одинаковые), $j = \overline{1, S}$. Разложим вектор-многочлен $P_m(t)$ по жордановому базису:

$$P_m(t) = \sum_{j=1}^{S} \left[P_1^{(j)}(t) h_1^{(j)} + \cdots + P_{k_j}^{(j)}(t) h_{k_j}^{(j)} \right].$$

Среди всех многочленов $P_1^{(j)}(t), ... P_{k_j}^{(j)}(t), j = \overline{1, S}$, имеется хотя бы один степени m. Из принципа суперпозиции следует, что частное решение системы (1) имеет вид

$$x(t) = \sum_{j=1}^{S} x_j(t),$$

где $x_j(t)$ - частное решение системы

$$\dot{x}_j(t) = A x_j(t) + e^{\mu t} \left[P_1^{(j)}(t) h_1^{(j)} + ... + P_{x_j}^{(j)}(t) h_{k_j}^{(j)} \right], \quad j = \overline{1, S}. \tag{5}$$

Пусть $\lambda_1, ..., \lambda_q (1 \leq q \leq n)$ - все собственные значения A. Если $\mu \neq \lambda_j, \forall j = \overline{1,q}$, то все неоднородные системы (5) в силу теоремы 1 имеют частные решения вида $x_j(t) = e^{\mu t} Q_{j,m}(t)$, где $Q_{,m}(t)$ - многочлен степени m и, следовательно, в этом случае для системы (1) получаем частное решение вида (4) при $k = 0$. Если же, например, $\mu = \lambda_1$, то согласно теореме 1 часть неоднородных систем (5), для которых $h_1^{(j)}, ..., h_{k_j}^{(j)}$-жорданова цепочка для λ_1, имеет частные решения вида $x_j(t) = te^{\mu t} Q_{j,m+k-1}(t)$, где $Q_{j,m+k-1}(t)$ - многочлены степени ($m + k - 1$). Другая же часть неоднородных систем (5), в которых $h_1^{(j)}, ..., h_{k,}^{(j)}$ - жорданова цепочка для $\lambda_2, ..., \lambda_q$, согласно теореме 1 имеет частные решения вида $x_j(t) = e^{\mu t} Q_{j,m}(t)$, где $Q_{j,m}(t)$ - многочлены степени m. Отсюда и из принципа суперпозиции следует, что система (1) имеет частное решение вида (4).

Замечания. 1) Практически частное решение (4) ищут методом неопределенных коэффициентов. Если наибольшая длина k жордановой цепочки для μ неизвестна, то вместо числа k в формуле (4) берут число r кратность собственного значения μ.
2) Если в системе (1) $f(t)$ представляет собой конечную сумму вектор-квазимногочленов, то для получения частного решения (1) используются принцип суперпозиции и теорема 2 .
3) Наконец, если в системе (1) $f(t)$ - произвольная непрерывная вектор-функция, то частное решение (1) находят, как правило, методом вариации постоянных, о чем будет речь в главе 5.

Example 1.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + 3y - 3z, \\ \dot{y} = -3x - 2y + 3z, \\ \dot{z} = 3x + 3y - 2z + 2e^{-t}. \end{cases}$$

$\triangle$ Собственные значения матрицы системы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -3 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

имеют вид $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.
Для λ_1 собственным вектором, например, является

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы ($A - \lambda_2 E$) равен единице и поэтому эта матрица имеет два линейно независимых собственных вектора. Такими векторами, например, являются

$$h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Векторы h_1, h_2, h_3 образуют базис R^3. Следовательно, общее решение линейной однородной системы, соответствующей заданной системе, имеет вид

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где C_1, C_2, C_3 - произвольные постоянные.
В силу теоремы 2 частное решение исходной неоднородной системы следует искать в виде вектор-функции

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Подстановка ее в исходную систему дает $a = 3, b = -3, c = 2$. Значит, общее действительное решение исходной системы задается формулой

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

где C_1, C_2, C_3 - произвольные действительные постоянные.

Example 2.

Репить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -5x + y - 2z + \operatorname{ch} t \\ \dot{y} = -x - y + 2\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t \\ \dot{z} = 6x - 2y + 2z - 2\operatorname{ch} t. \end{cases}$$

Д Для матрицы системы находим, что ее собственными значениями являются $\lambda_1 = -2, \lambda_{2,3} = -1 \pm i$. Соответствующими им собственными векторами будут, напрнмер,

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -2 \end{pmatrix}, \quad h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку по формуле Эйлера

$$e^{(-1+i)t} h_2 = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ -2\cos t \end{pmatrix} + i e^{-t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -2\sin t \end{pmatrix}$$

то общее (действительное) решение линейной однородной системы, соответствующей исходной системе, имеет вид

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ -2\cos t \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -2\sin t \end{pmatrix},$$

где C_1, C_2, C_3 - произвольные действительные постоянные.
В силу принципа суперпозиции и теоремы 2 частное решение исходной системы следует искать в виде

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = e^{t} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Подстановка этой вектор-функции в систему дает $a_1 = a_2 = 2, a_3 = -4, b_1 = b_2 = -2, b_3 = 4$. Следовательно, общее (действительное) решение исходной системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ -2\cos t \end{pmatrix} + \\ + C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -2\sin t \end{pmatrix} + \operatorname{sh} t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

где C_1, C_2, C_3 - произвольные действительные постоянные.

13.3.4 § 4. Solving normal linear systems with constant coefficients using the matrix exponent

Еще один метод интегрирования нормальных линейных систем с постоянными коэффициентами основан на понятии матричной экспоненты.

1. Определение, свойства и алгебраический метод вычисления матричной экспоненты

Пусть $t \in R_t^l, A$ - квадратная комплексная матрица порядка n и пусть E - единичная матрица порядка n. Рассмотрим матричиый степенной ряд

$$E + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^k}{k!}A^k + \cdots \tag{1}$$

Если матрица $A = \|a_{ij}\|, A^2 = \left\|a_{ij}^{(2)}\right\|, ..., A^k = \left\|a_{ij}^{(k)}\right\|, ...,$ где $i, j = \overline{1, n}$, то любой элемент матричного ряда (1) имеет вид (δ_{ij} - символ Кронекера):

$$\delta_{ij} + \frac{t}{1!}a_{ij} + \frac{t^2}{2!}a_{ij}^{(2)} + \cdots + \frac{t^k}{k!}a_{ij}^{(k)} + \cdots \tag{2}$$

Definition

Матричный ряд (1) называется сходящимся (абсолютно сходящимся) при $t \in R_t^1$, если степенные ряды (2) при всех $i, j = \overline{1, n}$ сходятся (абсолютно сходятся) при $t \in R_t^1$.

У сходящегося матричного ряда (1) суммой ряда служит квадратная матрица порядка n, элементами которой являются суммы сходящихся степенных рядов (2).

Lemma 1.

Для любой матрицы A и каждого $t \in R_t^1$ матричный ряд (1) абсолютно сходится.

Proof

Всегда существует такое число $M > 0$, что $|a_{ij}| \leq M, \forall i, j = \overline{1, n}$. Так как $A^2 = A \cdot A$, то $a_{ij}^{(2)} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} \cdot a_{pj}$ и, следовательно,

$$\left|a_{ij}^{(2)}\right| \leq \sum_{p=1}^{n} |a_{ip}| \cdot |a_{pj}| \leq nM^2, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Далее, по индукции, получаем, что при любых $k \in N$ и $i, j = \overline{1, n}$

$$\left|a_{ij}^{(k)}\right| \leq n^{k-1}M^k.$$

Поэтому каждый ряд (2) мажорируется рядом вида

$$1 + \frac{|t|}{1!}M + \cdots + \frac{|t|}{k!}n^{k-1}M^k + \cdots$$

который сходится по признаку Копи. Следовательно, каждый ряд (2) сходится абсолютно, а, значит, и ряд (1) сходится абсолютно для всех $t \in R_t^1$. $\square$

Definition

Сумма абсолютно сходящегося ряда (1) называется матричной экспонентой e^{iA} :

$$e^{tA} = E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^k. \tag{3}$$

Замечание. Нетрудно видеть, что на каждом отрезке $[\alpha, \beta]$ числовой оси R_t^1 ряд для e^{tA} сходится равномерно. Из (3) очевидно, что для нулевой матрицы $Ae^{tA} = E$ и что для $A = Ee^{tA} = e^t \cdot E$.

Lemma 2.

Если B - квадратная матрица порядка n и перестановочна с матрицей $A : AB = BA$, то справедливо свойство

$$e^{tA} \cdot e^{tB} = e^{tB} \cdot e^{tA} = e^{t(A+B)}, \quad \forall t \in R_t^1.$$

Proof

Используя равенство $AB = BA$ и метод математической индукции, как и в числовом случае, устанавливается формула бинома

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}A^k \cdot B^{n-k} = n! \sum_{k+m=n} \frac{A^k}{k!} \cdot \frac{B^m}{m!}.$$

Тогда

$$e^{t(A+B)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}(A+B)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+m=n} \frac{t^k A^k}{k!} \cdot \frac{t^m B^m}{m!} =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \cdot \frac{t^m B^m}{m!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \cdot e^{tB} = e^{tA} \cdot e^{tB} = e^{tB} \cdot e^{tA}.$$

Так как ряд для $e^{t(A+B)}$ абсолютно сходится, то преобразования в приведенных выше выкладках законны в силу теоремы из курса анализа о сходимости повторных рядов или рядов, полученных перестановкой членов данного ряда, если только абсолютно сходится двойной ряд.

Замечание. Если $AB \neq BA$, то утверждение леммы 2 может не иметь места, в чем можно убедиться на примере матриц

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из леммы 2 при $B = -A$ сразу следует, что матрица e^{-tA} является обратной к матрице e^{tA} при всех $t \in R_t^1$. Отсюда, в свото очередь, вытекает, что e^{tA} - невырожденная матрица при всех $t \in R_t^1$.

Из возможности почленного дифференцирования степенных рядов (2) при всех $t \in R_t^1$ получаем, что матрица e^{tA} при всех $t \in R_t^1$ имеет производные всех порядков, которые находятся из ряда (3) почленным дифференцированием. При этом

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = e^{tA} \cdot A = Ae^{tA}$$

Действительно, имеем

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = \frac{d}{dt}\left(E + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^k}{k!}A^k + \cdots\right) =$$
$$= A + \frac{t}{1!}A^2 + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^k \cdots = Ae^{tA} = e^{tA} \cdot A.$$

Вычислять e^{tA} с помощью ряда (3) весьма непросто, если A - произвольная матрица. Поэтому сейчас изложим другой, алгебраический способ вычисления e^{tA}. Посмотрим сначала, как изменяется матрица e^{tA} при линейном невырожденном преобразовании $H(\det H \neq 0)$ матрицы A.

Lemma 3.

Если $A = HBH^{-1}$, то $e^{tA} = He^{tB}H^{-1}$ при всех $t \in R_t^1$.

Proof

Имеем

$$A^2 = A \cdot A = HBH^{-1} \cdot HBH^{-1} = HB^2H^{-1}.$$

По индукции легко показать, что при любом $k \in N$

$$A^k = HB^kH^{-1}.$$

Подставляя выражения для A^k в ряд (3), получаем

$$e^{tA} = H \cdot H^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}HB^kH^{-1} = H\left(E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}B^k\right)H^{-1} = He^{tB}H^{-1}.$$

□

Итак, матрицы A и e^{tA} при линейном невырожденном преобразовании H меняются по одинаковому закону.

Из курса алгебры известно, что если существует базис R^n из собственных векторов $h_1, ..., h_n$ линейного преобразования A, то в этом базисе матрица B преобразования A оказывается диагональной:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

где по диагонали стоят собственные значения преобразования A. При этом столбцами матрицы перехода H служат столбцы из координат век-

торов $h_1, ..., h_n$ в исходном базисе $e_1, ..., e_n$. В этом случае по формуле (3) находим, что

$$e^{iB} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ 0 & \ddots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

и тогда $e^{tA} = He^{tB}H^{-1}$ по лемме 3.
Однако, как известно, не всегда существует базис R^n из собственных векторов линейного преобразования A. Но, как утверждает теорема Жордана, всегда существует жорданов базис R^n, составленный из жордановых цепочек для всех собственных значений A. Обозначим матрицу преобразования A в жордановом базисе через J. Матрица J называется жордановой нормальной формой матрицы A.

Опишем структуру матрицы J. Жордановой клеткой $J_k(\lambda)$ порядка k для собственного значения λ преобразования A называется квадратная матрица поридка k вида

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & ... & 0 \\ & \lambda & 1 & ... & 0 \\ & & \lambda & ... & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{pmatrix},$$

т.е. матрица, у которой по главной диагонали стоят числа λ, следующая диагональ после главной состоит из единиц, а все остальные элементы матрицы - нули. Например,

$$J_1(\lambda) = (\lambda), \quad J_2(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad J_3(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Пусть жорданов базис R^n состоит из $s(1 \leq s \leq n)$ жордановых цепочек для собственных значений $\lambda_1, ..., \lambda_s$ (среди них могут быть одинаковые) и пусть $k_1, ..., k_s$ - длины этих цепочек ($k_1 + \cdots + k_s = n$). Тогда J является комплексной клеточно-диагональной матрицей вида

$$J = \left(\begin{array}{c|ccc} J_{k_1}(\lambda_1) & & & 0 \\ & J_{k_2}(\lambda_2) & & \\ 0 & & & \Gamma J_{k_s}(\lambda_s) \end{array} \right).$$

Если $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 1$, то матрица J имеет диагональный вид. Клеточно-диагональную матрицу J будем коротко обозначать так:

$$J = \operatorname{diag}\{J_{k_1}(\lambda_1), J_{k_2}(\lambda_2), ..., J_{k_s}(\lambda_s)\}$$

Матрица J определяется единственным образом с точностью до перестановок жордановых клеток $J_{k_1}(\lambda_1), ..., J_k(\lambda_s)$ по главной диагонали.

Если обозначить через H матрицу перехода от исходного базиса $e_1, ..., e_n$ к жордановому базису R^n (в столбцах этой матрицы стоят координаты векторов жорданова базиса по базису $e_1, ..., e_n$), то $J = H^{-1}AH$.

Из леммы 3 вытекает, что

$$e^{tA} = He^{tJ}H^{-1}$$

Из матричного ряда (3) и свойств клеточно-диагональных матриц следует, что

$$e^{tJ} = \operatorname{diag}\left\{e^{tJ_{k_1}(\lambda_1)}, ..., e^{tJ_{k_0}(\lambda_\Delta)}\right\},$$

т.е. матрица e^{tJ} является клеточно-диагональной матрицей, где по главной диагонали стоят матрицы $e^{tJ_{k_1}(\lambda_1)}, ..., e^{tJ_{k_8}(\lambda_8)}$. Итак, вопрос вычисления матрицы e^{tA} сводится к вычислению матрицы $e^{tJ_k(\lambda)}$, где $J_k(\lambda)$ клетка Жордана порядка k для собственного значения λ.

Введем в рассмотрение матрицу $J_k(0)$ порядка k вида

$$J_k(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & 0 \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ 0 & & & & 1 & \\ 0 & & & & 0 & \end{pmatrix}$$

т.е. матрицу, у которой следующая диагональ после главной диагонали состоит из единиц, а все остальные элементы - нули, и единичную матрицу E_k порядка k. Тогда

$$tJ_k(\lambda) = t\lambda E_k + tJ_k(0), \quad E_k J_k(0) = J_k(0) E_k$$

и по лемме 2

$$e^{tJ_k(\lambda)} = e^{t\lambda E_k} \cdot e^{tJ_k(0)} = e^{\lambda t} \cdot e^{tJ_k(0)}$$

Матрица $e^{tJ_k(0)}$ находится с помощью матричного ряда (1). Нетрудно видеть, что при возведении матрицы $J_k(0)$ в степень, единицы перемещаются каждый раз параллельно вверх на следующую диагональ, т.е.

$$J_k^2(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & & \\ & & 0 & & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 & \\ 0 & & & & 0 & \\ & & & & 0 & \end{pmatrix}, ..., J_k^{k-1}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & & & 0 & \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$J_k^m(0) = 0, \quad m \geq k.$

Отсюда получаем, что

$$e^{tJ_k(0)} = E_k + \frac{t}{1!} J_k(0) + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} J_k^{k-1}(0) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ & 1 & \frac{t}{1!} & \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ & & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \frac{t^2}{2!} & \\ 0 & & \ddots & \frac{t}{1!} & \\ 0 & & & 1 & \end{pmatrix}$$

Следовательно,

$$e^{tJ} = \operatorname{diag}\left\{e^{\lambda_1 t} \cdot e^{tJ_{k_1}(0)}, ..., e^{\lambda_0 t} \cdot e^{tJ_{k_1}(0)}\right\},$$

где среди собственных значений $\lambda_1, ..., \lambda_5$ могут быть одинаковые, а $J_{k_1}(0), ..., J_k, (0)$ - матрицы вида $J_k(0)$ соответственно порядка $k_1, ..., k_s$.

Example 1.

Вычислить матричную экспоненту для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

△ Матрица A имеет двукратное собственное значение $\lambda = 3$. Для этого собственного значения вектор

$$h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

является собственным, а вектор

$$h_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

является присоединенным к h_1. Векторы h_1, h_2 образуют жорданову цепочку. Взяв

$$H = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

получим

$$J = H^{-1}AH = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Отсюда

$$e^{tJ} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Следовательно,

$$e^{tA} = He^{tJ}H^{-1} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1-2t & 4t \\ -t & 1+2t \end{pmatrix}$$

Замечание. Определение (3) матричной экспоненты e^A было получено, исходя из разложения e^x в степенной ряд на всей действительной оси x :

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Аналогичным способом, рассмотрев произвольную действительную аналитическую функцию $f(x)$, задаваемую степенным рядом

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

с радиусом сходимости $R > 0$, можно определить функцию $f(A)$ от квадратной матрицы A с помощью матричного ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k, \quad A^0 = E.$$

Именно можно доказать, что этот матричный ряд будет абсолютно сходящимся для такой матрицы A, для которой все собственные значения λ удовлетворяют неравенству

$|\lambda| < R$. Таким образом, например, получаем, что для любой матрицы A определены матричные функции $\sin A, \operatorname{ch} A$:

$$\sin A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k A^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \operatorname{ch} A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} A^{2k}.$$

Алгебраический метод вычисления $f(A)$ основан на аналоге леммы 3 для $f(A)$.

2. Применение матричной экспоненты для решения нормальных линейных систем с постоянными коэффициентами

Пусть задана линейная неодиородная система

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t), \tag{4}$$

где A - числовая квадратная матрица порядка $n, f(t)$ - некоторая вектор-функция с n непрерывными компонентами на промежутке T оси R_t^1, и начальное условие

$$x\left(t_0\right) = x_0, \tag{5}$$

где $t_0 \in T$, а x_0 - произвольный n-мерный числовой вектор.
Как известно из главы 1 , все решения линейного уравнения первого порядка

$$y'(t) = ay(t) + f(t),$$

где a - число и $f(t)$ - заданная скалярная непрерывная функция на промежутке T оси R_t^l, задаются формулой

$$y(t) = Ce^{at} + e^{at} \int_{t_0}^{t} e^{-a\zeta} f(\zeta) d\zeta$$

где $t_0 \in T, C$ - произвольная постоянная.
Сейчас будет показано, что формула всех решений линейной системы (4) внешне совершенно аналогична этой простой формуле, если заменить числовую экспоненту e^{at} на матричную экспоненту e^{tA}.

Theorem

Общее решение системы (4) задается формулой

$$x(t) = e^{tA} \cdot c + e^{tA} \int_{t_0}^{t} e^{-\zeta A} \cdot f(\zeta) d\zeta \tag{6}$$

где $t_0 \in T, e^{tA}$ - матричная экспонента, c - произвольный n-мерный числовой вектор.

Proof

В системе (4) сделаем замену $x(t) = e^{tA} \cdot y(t)$, где $y(t)$ - новая неизвестная функция. Эта замена приводит систему (1) к эквивалентной системе, так как если $x(t)$-решение (1), то $y(t) = e^{-tA} \cdot x(t)$-решение новой системы, и наоборот.

Учитывая, что формула производной произведения матрицы на вектор-функцию аналогична формуле производной произведения двух скалярных функций, подставляя замену в систему (4) и используя формулу производной e^{tA}, получаем:

$$e^{tA} \cdot Ay(t) + e^{tA} \cdot \dot{y}(t) = Ae^{tA} y(t) + f(t).$$

Отсюда

$$\dot{y}(t) = e^{-tA} \cdot f(t),$$

что дает

$$y(t) = c + \int_{t_0}^{t} e^{-\zeta A} f(\zeta) d\zeta$$

Подстановка найденного значения $y(t)$ в формулу замены приводит к формуле (6).

Следствие. Решение задачи Коши (4), (5) существеует, единственно на осемь промежутке T и задается формулой

$$x(t) = e^{(t-\iota_0)A} \cdot x_0 + e^{tA} \int_{\iota_0}^{t} e^{-\zeta A} \cdot f(\zeta) d\zeta$$

Подставляя формулу (6) общего решения системы (4) в начальное условие (5), находим, что $c = e^{-t_0 A} \cdot x_0$. Подставляя найденное значение c в формулу (6), получаем утверждение следствия.

В частности, решение на всем R_t^1 линейной однородной системы ($f(t) \equiv 0$ на R_t^1)

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

при начальном условии (5) задается совсем простой формулой

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot x_0.$$

Пример. Спомощью матричной экспоненты решить задачу Коши:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 2x, \end{cases} \qquad x(0) = y(0) = 1.$$

Найдем сначала матричную экспоненту. Для матрицы A заданной системы собственные значения $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Для них собственными векторами будут соответственно

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Взяв

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad H^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

находим, что

$$J = H^{-1}AH = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Отсюда

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}, \quad e^{tA} = He^{tJ}H^{-1} = \begin{pmatrix} -e^t + 2e^{2t}, & e^t - e^{-2t} \\ -2e^t + 2e^{2t}, & 2e^t - e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Тогда вектор-функция

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix},$$

где C_1, C_2 - произвольные постоянные, является общим решением заданной системы, а вектор-функция

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

является искомым решением задачи Коши.

13.3.5 § 5. Laplace transform and its application to solving differential equations

Преобразование Лапласа успешно применяется для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и систем таких уравнений. Метод решения линейных дифференциальных уравнений и линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, основанный на преобразовании Лапласа, называют операционным методом. Операционный метод широко используется также для решения уравнений в частных производных.

В этом параграфе приводятся элементарные сведения о свойствах преобразования Лапласа и его применении. Эти сведения приводятся часто без доказательства. Подробное изложение свойств преобразования Лапласа с доказательствами можно найти в курсах теории функций комплексного переменного (см. [39]).

Definition

Комплекснозначная функция $f(t), t \in R^1_t$, называется оригиналом, если:

1. $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$.
2. На каждом отрезке полуоси $t \geq 0$ функция $f(t)$ непрерывна за исключением, быть может, конечного числа точек разрыва первого рода.
3. Существуют такие числа $M > 0$ и α, что $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ для всех $t \geq 0$.

В п. 3 этого определения действительные числа M и α зависят от функции $f(t)$. Из п. 3 определения следует, что при $t \to +\infty$ оригинал $f(t)$ растет не быстрее некоторой экспоненты. Например, каждая из фупкций $t^n, e^t, \sin t, \cos t$ при $t \geq 0$ может задавать оригинал, а функция e^{t^2} при $t \geq 0$ уже не может определять оригинал.

Условимся в дальнейшем задавать оригиналы только при $t \geq 0$, считая их всегда равными нулю при $t < 0$.

Рассмотрим несобственный интеграл вида

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \tag{1}$$

где p-комплексный параметр, $p = s + i\tau$, а $f(t)$ - оригинал.

Лемма. Если $f(t)$ - оригинал $u|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ для всех $t \geq 0$, то несобственный интеарал (1) сходится при всех тех комплексных p, для которux $s = \operatorname{Re} p > \alpha$.

Так как $|e^{-pt}| = e^{-st}$ и $\lim_{t \to +\infty} e^{(\alpha - s)t} = 0$ при $s > \alpha$, то

$$\left| \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \right| \leq \int_0^{+\infty} \left| e^{-pt} \right| \cdot |f(t)| dt \leq M \int_0^{+\infty} e^{(\alpha - s)t} dt =$$
$$= \frac{M}{\alpha - s} e^{(\alpha - s)t} \Big|_{t=0}^{+\infty} = \frac{M}{s - \alpha}.$$

□

Definition

Пусть $f(t)$ - оригинал и $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ для всех $t \geq 0$. Преобразованием Лапласа $f(t)$ (или изображением по Лапласу $f(t)$) называется функция комплексной переменной

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot f(t)dt, \quad \operatorname{Re} p > \alpha \tag{2}$$

Связь между оригиналом и его преобразованием Ланласа будем обозначать так:

$$f(t) \risingdotseq F(p) \quad \text{или} \quad F(p) \risingdotseq f(t), \quad \operatorname{Re} p > \alpha.$$

Отметим два простейшие свойства преобразования Лапласа.

1. Свойство линейности. Если $f_1(t) \risingdotseq F_1(p)$ при $\operatorname{Re} p > \alpha_1, f_2(t) \risingdotseq F_2(p)$ при $\operatorname{Re} p > \alpha_2$ и c_1, c_2 - произвольные числа, то функция $f(t) = c_1 f_1 + c_2 f_2$ тоже является оригиналом и

$$f(t) \risingdotseq c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p) \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} p > \alpha = \max(\alpha_1, \alpha_2). \tag{3}$$

Это свойство следует из выполнения требований определения оригинала для $f(t)$ и свойства линейности сходящегося несобственного интеграла.

2. Дифференцирование оригинала. Пусть $f(t)$ и $f'(t)$-оригиналы, причем $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, |f'(t)| \leq M_1 e^{\alpha t}, M > 0, M_1 > 0$, для всех $t \geq 0$. Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ для $\operatorname{Re} p > \alpha$, то

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(+0), \quad \text{где} \quad f(+0) = \lim_{t \to +0} f(t), \quad \operatorname{Re} p > \alpha$$

Действительно, интегрируя по частям и используя тот факт, что при $\operatorname{Re} p > \alpha \lim_{t \to +\infty} |e^{-pt} f(t)| = 0$, получаем

$$f'(t) \risingdotseq \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot f'(t)dt = \left| e^{-pt} f(t) \right|_{t=0}^{+\infty} + p \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt = pF(p) - f(+0)$$

Применяя свойство п. $2n$ раз, нетрудно обобщить этот результат. Именно, если $f(t), f'(t), ..., f^{(n)}(t)$, - оригиналы, аричем $\left| f^{(j)}(t) \right| \leq M_j e^{\alpha t}$, $M_j > 0$, для всех $j = 0, n$ и всех $t \geq 0$, и $f(t) \risingdotseq F(p)$ при $\operatorname{Re} p > \alpha$, то

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - p^{n-1} \cdot f(+0) - \cdots - pf^{(n-2)}(+0) - f^{(n-1)}(+0), \tag{4}$$

где $\operatorname{Re} p > \alpha, f^{(j)}(+0) = \lim_{t \to +0} f^{(j)}(t), j = \overline{0, n-1}$. Особенно простой формула (4) становится в случае, когда $f^{(j)}(+0) = 0$ для всех $j = \overline{0, n-1}$. Тогда $f^{(n)}(t) = p^n F(p)$ при $\operatorname{Re} p > \alpha$, т.е. каждому дифференцированию оригинала соответствует умножение на p его преобразования Лапласа.

Для применения преобразования Лапласа важно уметь по заданному преобразованию Лапласа восстанавливать его оригинал. В курсах теории функций комплексного переменного устанавливается формула обращения преобразования Лапласа. Мы ее приводить не будем, а сформулируем только свойство единственности оригинала, которое является следствием формулы обращения.

3. Свойство единственности оригинала. Оригинал $f(t)$ однозначно определяется по его преобразованию Лапласа $F(p)$ во всех точках, где функция $f(t)$ дифференцируема.

Рассмотрим теперь квазимногочлен $t^k e^{\lambda t}$, где $k \geq 0$ и целое, λ - комплексное число, $t \geq 0$. Этот квазимногочлен задает оригинал, так как всегда существуют такие числа

$M > 0$ и $\alpha > \operatorname{Re}\lambda$, что $\left|t^k e^{\lambda t}\right| \leq M e^{\alpha t}$ при всех $t \geq 0$. Найдем преобразование Лапласа этого оригинала. Пусть $\operatorname{Re} p > \alpha > \operatorname{Re}\lambda$. Тогда $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\lambda$ и, значит, $\lim_{t\to+\infty}\left|t^l e^{(\lambda-p)t}\right| = 0, l = \overline{0,k}$. Учитывая это обстоятельство, после интегрирования k раз по частям, приходим к результату:

$$t^k e^{\lambda t} \risingdotseq \int_0^{+\infty} e^{-p-t}\cdot t^k e^{\lambda t} dt = t^k \frac{e^{(\lambda-p)t}}{\lambda-p}\bigg|_{t=0}^{+\infty} + \frac{k}{p-\lambda}\int_0^{+\infty} e^{(\lambda-p)t}\cdot t^{k-1}dt =$$
$$= \frac{k}{p-\lambda}\int_0^{+\infty} e^{(\lambda-p)t}\cdot t^{k-1}dt = \cdots = \frac{k!}{(p-\lambda)^{k+1}}$$

Итак,

$$t^k e^{\lambda t} \risingdotseq \frac{k!}{(p-\lambda)^{k+1}}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\lambda \tag{5}$$

В частности, из формулы (4) и свойства линейности (3) следует, что

$$\cos\omega t = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$$
$$\sin\omega t = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right) \risingdotseq \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

где ω - действительный параметр, $\operatorname{Re} p > 0$.
Разработаны справочные таблицы, содержащие преобразования Лапласа для широкого класса оригиналов (см. [16]).

Рассмотрим применение преобразования Лапласа для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Пусть задано уравнение

$$L(D)y(t) \equiv \left(D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n\right) y(t) = f(t), \quad t \geq 0, \tag{6}$$

где $a_1, ..., a_n$ - заданные числа и $f(t)$ - оригинал, и начальные условия

$$y(+0) = y_0, \quad y'(+0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(+0) = y_{n-1}, \tag{7}$$

где $y_0, y_1, ..., y_{n-1}$ - заданные числа. Можно доказать тогда, что и решение $y(t)$ задачи Коши (6), (7) и его производные $y'(t), ..., y^{(n)}(t)$ являются оригиналами. Это очевидно в том случае, когда $f(t)$ задает квазимногочлен при $t \geq 0$, так как в этом случае всякое решение уравнения (6) при $t \geq 0$ является линейной комбинацией квазимногочленов, которая в силу свойства линейности и (5) является оригиналом. Более того, если $|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$ для всех $t \geq 0$ при некоторых $M > 0$ и α, то $y(t), y'(t), ..., y^{(n)}(t)$ - оригиналы, для которых $\left|y^{(j)}(t)\right| \leq M_1 e^{\hat{\alpha} t}$ для всех $t \geq 0$ и всех $j = \overline{0,n}$ при $M_1 > 0$ и $\hat{\alpha} = \max(\alpha, \operatorname{Re} p_1, ..., \operatorname{Re} p_m)$, где $p_1, ..., p_m, 1 \leq m \leq n$, - корни характеристического многочлена $L(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \cdots + a_n$ для дифференциального многочлена $L(D)$.

Продолжим нулем $f(t)$ и $y(t)$ для $t < 0$. Пусть $y(t) \risingdotseq Y(p)$ при $\operatorname{Re} p > \hat{\alpha}$ и пусть $f(t) \risingdotseq F(p)$ при $\operatorname{Re} p > \alpha$. Применим к обеим частям уравнения (6) преобразование Лапласа. Используя свойство линейности, правило дифференцирования оригинала и начальные условия (7), получаем для определения изображения $Y(p)$ алгебраическое уравнение

$$L(p)Y(p) - M(p) = F(p), \quad \operatorname{Re} p > \hat{\alpha} \tag{8}$$

где

$$M(p) = p^{n-1}y_0 + \cdots + py_{n-2} + y_{n-1} + \\ + a_1\left(p^{n-2}y_0 + \cdots + py_{n-3} + y_{n-2}\right) + \cdots + a_{n-1}y_0.$$

Таким образом, операционный метод сводит решение задачи Коши (6), (7) к чисто алгебраической операции - решению линейного алгебраического уравнения. При $\operatorname{Re} p > \hat{\alpha}$ характеристический многочлен $L(p) \neq 0$ и уравнение (8) однозначно разрешимо. Отсюда

$$Y(p) = \frac{F(p) + M(p)}{L(p)}, \quad \operatorname{Re} p > \hat{\alpha}$$

и остается по $Y(p)$ восстановить его оригинал, что на практике делается по таблицам с использованием свойства единственности оригинала.

Заметим, что если начальные условия (7) не заданы, то операционный метод дает общее решение уравнения (6), так как в $M(p)$ числа $y_0, y_1, ..., y_{n-1}$ - произвольные постоянные.

Example 1.

Решить задачу Коши для уравнения $y''(t) - 5y'(t) + 4y(t) = 4$, $t \geq 0$, при начальных условиях $y(+0) = 0, y'(+0) = 2$.

$\triangle$ Будем считать, что правая часть уравнения и решение $y(t)$ уравнения при $t < 0$ равны нулю. Характеристический многочлен $L(p) =$
$p^2 - 5p + 4$ имеет корни $p_1 = 1, p_2 = 4$. Пусть $y(t) \risingdotseq Y(p)$ при $\operatorname{Re} p > 4$. Применив при $\operatorname{Re} p > 4$ к заданному на всей оси R^1_t уравнению преобразование Лапласа, получаем для $Y(p)$ алгебраическое уравнение

$$\left(p^2 - 5p + 4\right) Y(p) = \frac{4}{p} + 2$$

Отсюда, разлагая дробь на сумму простых дробей, имеем

$$Y(p) = \frac{2p + 4}{p\left(p^2 - 5p + 4\right)} = \frac{1}{p} - \frac{2}{p - 1} + \frac{1}{p - 4}$$

Переходя к оригиналам, используя формулу (5) и свойство единственности оригинала, получаем искомое решение задачи Коши

$$y(t) = 1 - 2e^t + e^{4t}$$

Операционный метод с успехом применяется и для решения задачи Копи для линейных систем с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t), \quad t \geq 0, \quad x(+0) = x_0, \tag{9}$$

где A - числовая квадратная матрица порядка $n, f(t)$ - заданная векторфункция с n компонентами, которые все являются оригиналами, x_0 заданный числовой n-мерный вектор.

Продолжим $f(t)$ нулем для $t < 0$. Пусть $f(t) \risingdotseq F(p), \operatorname{Re} p > \alpha$, и пусть $p_1, ..., p_m, 1 \leq m \leq n$, - все собственные значения матрицы A. Используя формулу (6) § 4, можно доказать, что тогда $x(t), \dot{x}(t)$ являются оригиналами, если их считать равными нулю при $t < 0$, и их преобразования Лапласа всегда существуют при $\operatorname{Re} p > \hat{\alpha} = \max(\alpha, \operatorname{Re} p_1, ..., \operatorname{Re} p_m)$. Например, это ясно, когда $f(t)$ представляет собои конечную сумму векторквазимногочленов, так как в этом случае при $t \geq 0$ всякое решение системы (9) также является конечной суммой вектор-квазимногочленов. Пусть

$x(t) \equiv X(p), \operatorname{Re} p > \hat{\alpha}$. Применяя к линейной системе (9) преобразование Лапласа, получаем алгебраическую линейную систему уравнений

$$pX(p) - x_0 = AX(p) + F(p)$$

При $\operatorname{Re} p > \hat{\alpha} \det(pE - A) \neq 0$($E-$ единичная матрица) и, значит, определена обратная матрица $(pE - A)^{-1}$. Отсюда

$$X(p) = (pE - A)^{-1} \left[x_0 + F(p)\right], \quad \operatorname{Re} p > \hat{\alpha}.$$

Находя по известному $X(p)$ оригинал $x(t)$, получим искомое решение задачи Коши.

Example 2.

Решить задачу Коши при $t \geq 0$ для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y \\ \dot{y} = -x - 4y \end{cases}$$

при начальном условии $x(+0) = y(+0) = 1$.
$\triangle$ Положим $x(t) \equiv y(t) \equiv 0$ для всех $t < 0$. Собственными значениями матрицы системы являются $p_1 = -3, p_2 = -2$. Тогда $x(t), y(t)-$ оригиналы, для которых определены преобразования Лашласа при $\operatorname{Re} p > -2$. Пусть $x(t) \risingdotseq X(p), y(t) \risingdotseq Y(p)$. Применяя к заданной системе преобразование Лапласа, попучаем линейную систему для нахождения $X(p), Y(p)$:

$$\begin{cases} (p+1)X(p) - 2Y(p) = 1, \\ X(p) + (p+4)Y(p) = 1, \quad \operatorname{Re} p > -2. \end{cases}$$

Разлагая выражения для $X(p), Y(p)$ на элементарные дроби, находим, что

$$X(p) = \frac{p+6}{p^2+5p+6} = \frac{4}{p+2} - \frac{3}{p+3}$$
$$Y(p) = \frac{p}{p^2+5p+6} = -\frac{2}{p+2} + \frac{3}{p+3}$$

Отсюда получаем решение задачи Коши:

$$x(t) = 4e^{-2t} - 3e^{-3t}, \quad y(t) = 3e^{-3t} - 2e^{-2t}$$

13.3.6 § 6. Methods for solving arbitrary linear systems with constant coefficients

Линейную систему n уравнений с постоянными коэффициентами и с n неизвестными функциями можно записать в следующем виде

$$A_0 x^{(m)}(t) + A_1 x^{(m-1)}(t) + \cdots + A_{m-1} x'(t) + A_m x(t) = f(t), \qquad (\prime)$$

где t-аргумент, $x(t)$ - неизвестиая вектор-функция с n компонентами, $A_0, ..., A_m$ - заданные числовые квадратные матрицы порядка n, причем A_0 - ненулевая матрица, $f(t)$ - заданная вектор-функция с n компонентами. Будем считать в дальнейшем, что t изменяется на всей числовой оси R_t^l, а $f(t)$ - заданная на R_t^l вектор-функция, имеющая достаточное число непрерывных производных.

Если порядок системы (1') относительно компоненты $x_j(t), j = \overline{1,n}$, неизвестной вектор-функции $x(t)$ обозначить через $7n_j, j = \overline{1,n}$, то порядок M линейной системы

определяется формулой $M = m_1 + \cdots + m_n$. В случае невырожденной матрицы $A_0 M = mn$, так как каждое $m_j = m$, и $M \leq mn$ в случае вырожденной A_0.

Используя оператор дифференцирования D (см. § 1 главы 2), введем в рассмотрение матричный дифферешиальный многочлен степени m вида

$$l(D) = A_0 D^m + A_1 D^{m-1} + \cdots + A_{m-1} D + A_m$$

заданный на множестве вектор-функций с n компонентами, имеющими m непрерывных производных на R_t^1, формулой

$$l(D)x(t) = A_0 x^{(m)}(t) + A_1 x^{(m-1)}(t) + \cdots + A_m x(t)$$

Тогда система (1s) примет вид

$$l(D)x(t) = f(t) \tag{1}$$

Произвольную линейную систему (1), как и нормальную линейную систему, можно решать методом исключения неизвестных. В скалярном виде система (1) записывается так:

$$\sum_{j=1}^{n} l_{ij}(D) x_j(t) = f_i(t), \quad i = \overline{1, n}, \tag{2}$$

где матрица $l(D) = \|l_{ij}(D)\|, i, j = \overline{1, n}$.
Обозначим через $L_{ij}(D)$ - алгебраические дополнения элементов $l_{ij}(D)$ матрицы $l(D)$ и положим $L(D) = \det l(D)$. Пусть $N-$ степень $L(D)$. Ясно, что $N \leq M$. Если $x = \varphi(t)$ - решение системы (1) на R_t^l, то имеем тождества

$$\sum_{j=1}^{n} l_{ij}(D) \varphi_j(t) \equiv f_i(t), \quad i = \overline{1, n} \tag{3}$$

В силу условий на $f(t)$ решение $x = \varphi(t)$ - достаточное число раз непрерывно дифференцируемая вектор-функция на R_t^1. Метод исключения применяется в том случае, когда $L(D) \not\equiv 0$. Это, например, всегда так в случае невырожденной матрицы A_0. В этом случае $N = M$. Действуя в точности так же, как и в случае нормальной линейной системы (см. теорему § 1), получаем из (3), что

$$L(D)\varphi_k(t) = \sum_{i=1}^{n} L_{ik}(D) f_i(t), \quad k = \overline{1, n} \tag{4}$$

Итак, каждая компонепта решения системы (1) удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению порядка N (4). Однако не всякий набор решений $\varphi_1(t), ..., \varphi_n(t)$ системы (4) определяет решение линейной системы (1). Поэтому на практике в случае $L(D) \not\equiv \text{const}$ после того, как найдены общие решения уравнений (4), содержапие вместе nN произвольных постоянных, подставляют общие решения (4) в исходную систему (1) и определяют связь между найденными постоянными. В результате получаем решение (1), зависящее от N произвольных постоянных.

Example 1.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \ddot{x} + 3\ddot{y} - x = 0, \\ \dot{x} + 3\dot{y} - 2y = 0. \end{cases}$$

Д В этом случае

$$L(D) = \begin{vmatrix} D^2 - 1 & 3D^2 \\ D & 3D - 2 \end{vmatrix} = 2 - 3D - 2D^2.$$

Характеристический многочлен $L(\lambda)$ для дифференциального многочлена $L(D)$ имеет вид $L(\lambda) = 2 - 3\lambda - 2\lambda^2$. Он имеет корни $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Следовательно, ищем решение системы в виде

$$x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{\frac{1}{2}t}, \quad y(t) = C_3 e^{-2t} + C_4 e^{\frac{1}{2}t}$$

где связь между постоянными C_1, C_2, C_3, C_4 находим подстановкой $x(t), y(t)$ в систему. Подстановка дает $C_1 = -4C_3, C_2 = C_4$. Значит, решение исходной системы имеет вид

$$x(t) = -4C_3 e^{-2t} + C_4 e^{\frac{1}{2}t}, \quad y(t) = C_3 e^{-2t} + C_4 e^{\frac{1}{2}t},$$

где C_3, C_4 - произвольные постоянные. $\square$

Заметим, что в случае $L(D) \equiv \text{const} \neq 0$ решения уравнений (4) не содержат произвольных постоянных и их подстановка в исходную систему (1) приводит к некоторому условию разрешимости системы (1). Это условие на $f(t)$ и ее производные.

Другой метод решения системы (1) применяется в том случае, когда $L(D) \not\equiv \text{const}$. Это условие, например, выполнено в случае невырожденности матрицы A_0. Ограничимся случаем линейной однородной системы ($\det A_0 \neq 0$):

$$l(D)x(t) \equiv A_0 x^{(m)}(t) + A_1 x^{(m-1)}(t) + \cdots + A_m x(t) = 0. \tag{5}$$

Очевидно, система (5) имеет тривиальное решение $x(t) \equiv 0$. Будем искать нетривиальные решения (5) в виде $x(t) = e^{\lambda t} \cdot h$, где $h \neq 0 - n$-мерный числовой вектор. Подстановка $x(t)$ в систему (5), приводит к алгебраической системе

$$l(\lambda)h \equiv \left(\lambda^m A_0 + \lambda^{m-1} A_1 + \cdots + \lambda A_{m-1} + A_m\right) h = 0. \tag{6}$$

Матричный пучок

$$l(\lambda) = \lambda^m A_0 + \lambda^{m-1} A_1 + \cdots + \lambda A_{m-1} + A_m$$

называется характеристическим пучком системы (5), а уравнение степени N

$$L(\lambda) = \det l(\lambda) \equiv \det\left(\lambda^m A_0 + \lambda^{m-1} A_1 + \cdots + A_m\right)$$

называется характеристическим для уравнения (6). Его корни называются собственными значениями пучка $l(\lambda)$, а соответствующие им решения $h \neq 0$ уравнения $l(\lambda)h = 0$ называются собственными векторами пучка $l(\lambda)$. Ясно, что для степени N многочлена $L(\lambda)$ имеем $1 \leq N \leq M$.

Таким образом, чтобы система (5) допускала решения в виде $x(t) = e^{\lambda t} \cdot h, h \neq 0$, необходимо и достаточно, чтобы λ было собственым значением, а h - собственным вектором матричного пучка $l(\lambda)$.

Пусть матричный пучок $l(\lambda)$ имеет попарно различные собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$ и пусть $h_1, h_2, ..., h_N$-соответствующие им собственные векторы. Методом математической индукции можно установить, что $h_1, h_2, ..., h_N$ - линейно независимые векторы в n-мерном линейном пространстве, т.е. они образуют базис этого пространства. Следовательно, в этом случае все решения системы (5) задаются формулой

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} h_1 + \cdots + C_N e^{\lambda_N t} \cdot h_N,$$

где $C_1, ..., C_N$ - произвольные постоянные.
Пусть теперь $\lambda_0 - k_0$-кратный корень уравнения $L(\lambda) = 0$. Тогда изложенный метод может не привести к цели, так как в общем случае линейно независимых собственных векторов, соответствующих λ_0, оказывается меньше k_0. Тем не менее, из уравнения (4) следует, что решения, относящиеся к λ_0, имеют вид $x(t) = e^{\lambda_0 t} \cdot P_{k_0-1}(t)$, где $P_{k_0-1}(t)-$ вектор-многочлен степени ($k_0 - 1$). Эти решения можно найти методом неопределенных коэффициентов.

Example 2.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} + 2x = 0, \\ 3\dot{x} + \ddot{y} - 8y = 0. \end{cases}$$

$\triangle$ В нашем случае характеристический пучок

$$l(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 + 2\lambda & -2\lambda \\ 3\lambda & \lambda^2 - 8 \end{pmatrix}.$$

Его собственные значения $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 2i, \lambda_4 = -2i$ и

$$h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad h_3 = \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h_4 = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- соответствующие им линейно независимые собственные векторы пучка $l(\lambda)$. Тогда все комплексные решения системы имеют вид

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \tilde{C}_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \tilde{C}_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \tilde{C}_3 e^{2it} \begin{pmatrix} -2i \\ 1 \end{pmatrix} + \tilde{C}_4 e^{-2it} \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix},$$

где $\bar{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3, \tilde{C}_4$, произвольные комплексные постоянные. Отсюда все действительные решения можно получить тем же методом, что и для нормальных линейных систем (см. § 2). В результате находим, что все действительные решения системы задаются формулой $\binom{x(t)}{y(t)} = C_1 e^{2t} \binom{2}{3} + C_2 e^{-2t} \binom{2}{-3} + C_3 \binom{2\sin 2t}{\cos 2t} + C_4 \binom{-2\cos 2t}{\sin 2t}$, где C_1, C_2, C_3, C_4 - произвольные действительные постоянные.

Упражнения к главе 3

1. Может ли нормальная линейная однородная система второго порядка с постоянными коэффициентами иметь решение

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 + t^2 \\ t - 3t^2 \end{pmatrix}?$$

2. Пусть $x(t)$ - решение задачи Коши

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t), \quad x(0) = 0,$$

где A - числовая матрица порядка n и $f(t)$ - непрерывная на всей оси R^1_t вектор-функция, и пусть $y(t, \tau)$ - решение задачи Коши

$$\dot{y}(t) = Ay(t), \quad y(0) = f(\tau),$$

где τ - параметр. Доказать формулу Дюамеля:

$$x(t) = \int_0^t y(t-\tau,\tau)d\tau$$

3. Доказать, что если собственные значения матрицы A не равны in (n - целое), то линейная система

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t)$$

имеет единственное 2π-периодическое решение при всякой непрерывной вектор-функции $f(t)$ периода 2π.
4. Вычислив матрицу e^{tA}, решить с ее помощью задачу Коши

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

если

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Операционным методом решить задачу Коши:

$$y''(t) + a^2 y(t) = \sin\omega t, \quad a > 0, \quad \omega \neq 0, \quad t \geq 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

6. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \sqrt{6}\cdot\dot{y} - 8x = 0, \\ \ddot{y} - \sqrt{6}\cdot\dot{x} + 2y = 0, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0.$$

13.4 Study of the Cauchy problem

В этой главе будут изучены разрешимость задачи Коши для так называемых нормальных систем дифференциальных уравнений и для уравнений порядка n в нормальной форме, зависимость решений задачи Коши от параметров, а также разрешимость задачи Коши для уравнений первого порядка, не разрешенных относительно производной.

Все функции в главе 4 предполагаются вещественнозначиыми.

13.4.1 § 1-1. Auxiliary statements

I. Пусть $\mathbb{C}_n(\mathcal{I})$ обозначает множество всех вектор-функций $\varphi(x)$ с n заданными непрерывными компонентами на промежутке $\mathcal{I} = [\alpha,\beta]$ числовой оси R^1_x. Если $\varphi(x) \in \mathbb{C}_n(\mathcal{I})$, то, по определению, $\int_{x_0}^x \varphi(\zeta)d\zeta$, где $x_0, x \in \mathcal{I}$, означает вектор с компонентами $\int_{x_0}^x \varphi_1(\zeta)d\zeta, ..., \int_{x_0}^x \varphi_n(\zeta)d\zeta$. Имеет место следующая лемма об оценке модуля интеграла от вектор-функции.

Lemma 1.

Для $\forall\varphi(x) \in \mathbb{C}_n(\mathcal{I})$ справедливо неравенство

$$\left|\int_{x_0}^{x} \varphi(\zeta)d\zeta\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x}\right| \varphi(\zeta)|d\zeta|$$

где $x_0, x \in \mathcal{I}$.

Proof

Из условия теоремы следует интегрируемость $\varphi(x)$ и $|\varphi(x)|$. Получим требуемую оценку.

Пусть для определенности $x_0 < x$. Разобьем $[x_0, x]$ на m частей точками $\zeta_k : x_0 = \zeta_1 < \zeta_2 < ... < \zeta_{m+1} = x$ и возымем любое $\eta_k \in [\zeta_k, \zeta_{k+1}]$, $k = \overline{1, m}$. Составим интегральную сумму, где $\Delta\zeta_k = \zeta_k - \zeta_{k-1}$ и воспользуемся неравенством треугольника. Тогда

$$\left|\sum_{k=1}^{m} \varphi\left(\eta_k\right) \Delta\zeta_k\right| \leq \sum_{k=1}^{m} \left|\varphi\left(\eta_k\right)\right| \Delta\zeta_k.$$

Рассматривая всевозможные разбиения $[x_0, x]$ на части точками ζ_k и переходя в этом неравенстве к пределу при $\max \Delta\zeta_k \to 0$, получаем требуемое неравенство.

Пусть на $[\alpha, \beta]$ задана последовательность вектор-функций $\varphi_i(x) \in \mathbb{C}_n[\alpha, \beta], i = 1, 2, 3, ...$, и вектор-функция $\varphi(x) \in \mathbb{C}_n[\alpha, \beta]$. Последовательность $\varphi_i(x)$ называется равномерно сходящейся к $\varphi(x)$ на $[\alpha, \beta]$ при $i \to \infty$, если $\max_{x\in[a,\beta]} |\varphi_i(x) - \varphi(x)| \to 0$ при $i \to \infty$. В этом случае пишут, что $\varphi_i(x) \rightrightarrows \varphi(x), \forall x \in [\alpha, \beta], i \to \infty$.

Если задан ряд из вектор-функций $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x)$, где все $\varphi_i(x) \in \mathbb{C}_n[\alpha, \beta]$, то, по определению, этот ряд называется равномерно сходящимся, если последовательность его частичных сумм $\Phi_N(x) = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i(x)$ сходится равномерно на $[\alpha, \beta]$ при $N \to \infty$.

Имест место следующий признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда из вектор-функций.

Theorem

Если $|\varphi_i(x)| \leq a_i$ для всех $i = 1, 2, ...$ и всех $x \in [\alpha, \beta]$ и числовой ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится, то ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x)$ сходится абсолютно и равномерно на $[\alpha, \beta]$.

Proof

Пусть $\varphi_i(x)$ имеет компоненты $\varphi_{ij}(x), j = \overline{1, n}$. Так как $|\varphi_{ij}(x)| \leq a_i$, то по обычному признаку Вейерштрасса ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{ij}(x), \forall j = \overline{1, n}$, сходится абсопютно и равномерно. Отсюда следует утверждение теоремы.

13.4.2 § 1-2. Lipschitz Condition

II. Об условии Липшица

Пусть $R^{n+1}_{(x,y)}$ – $(n + 1)$-мерное пространство с декартовыми прямоугопьными координатами $x, y_1, ..., y_n$.

Definition

Область $G \subseteq R^{n+1}_{(x,y)}$ называется выпуклой по переменной y, если для любых двух точек $(x, y_1) \in G, (x, y_2) \in G$ и любого $\theta \in [0, 1]$ всякая точка $(x, y) \in G$, где $y = y_1 + \theta (y_2 - y_1)$.

В случае $n = 1$ это определение геометрически означает, что если две точки $(x, y_1), (x, y_2) \in G \subseteq T^2_{(x,y)}$, то весь вертикальный отрезок, их соединяющий, тоже принадлежит G. На плоскости (x, y) круг $x^2 + y^2 < 1$ выпуклая по y область, а тот же круг с выколотым центром является невыпуклой по y областью.

Пусть $f(x, y)$ - вектор-функция с заданными n компонентами в области $G \subseteq R^{n+1}_{(x,y)}$.

Definition

Говорят, что $f(x, y)$ в области G удовлетворяет условию Липшица относительно y равномерно по x, если $\exists$ число $L > 0$ такое, что

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$$

для любых точек $(x, y_1) \in G$ и $(x, y_2) \in G$. Число L называют постоянной Лишшица.

Обозначим через $\mathbb{C}_n(G)$ множество всех вектор-функций с n заданными непрерывными компонентами в G.

Lemma 2.

Пусть выполнены следующие условия:

1. G - выпуклая по y область $R^{n+1}_{(x,y)}$,
2. $f(x, y) \in \mathbb{C}_n(G), \frac{\partial f_i(x,y)}{\partial y_j} \in \mathbb{C}(G), \forall i, j = \overline{1, n}$.
3. существует число $K > 0$ такое, что $\left|\frac{\partial f_i(x,y)}{\partial y_j}\right| \leq K$ для $\forall i, j = \overline{1, n}$, $\forall (x, y) \in G$.

Тогда вектор-функция $f(x, y)$ удовлетворяет в области G условию Липшица относительно y равномерно по x с постоянной Липиица $L = n^{3/2}K$.

Proof

Пусть вектор y_j имеет компоненты $y_{1j}, ..., y_{nj}, j = 1, 2$. Используя условия леммы 2 , для каждой компоненты $f_i(x, y)$ получаем оценку:

$$\begin{aligned}
|f_i(x, y_1) - f_i(x, y_2)| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{d\theta} f_i [x, y_2 + \theta (y_1 - y_2)] \, d\theta \right| = \\
&= \left| \int_0^1 \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i [x, y_2 + \theta (y_1 - y_2)]}{\partial y_j} (y_{j_1} - y_{j_2}) \, d\theta \right| \leq \\
&\leq \sum_{j=1}^n \int_0^1 \left| \frac{\partial f_i [x, y_2 + \theta (y_1 - y_2)]}{\partial y_j} \right| \cdot |y_{j_1} - y_{j_2}| \, d\theta \leq \\
&\leq nK |y_1 - y_2| .
\end{aligned}$$

Используя формулу длины вектора с n компонентами, отсюда

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq n^{3/2} K |y_1 - y_2| .$$

Из леммы 2 следует, например, что при $n = 1$ всякая непрерывно дифференцируемая скалярная функция $f(x, y)$ в замкнутом прямоугольнике $G = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$, где числа a и b положительные, удовлетворяет условию Липшица по переменной y равномерно по x. Однако уже функция $f(y) = \sqrt[3]{y}$ не удовлетворяет условию Липпица в окрестности $y = 0$.

Требование выполнения условия Липшица по y более слабое, чем требование существования производной по y. Например, функция $f(y) = |y|$ удовлетворяет условию Липшица в окрестности $y = 0$, но не имеет при
$y = 0$ производной. Для функции одной переменной требование выполнения условия Липшица занимает промежуточное место между непрерывностью и дифференцированностью функции.

13.4.3 § 1-3. Grönwall's Inequality

III. Лемма Гронуолла

Эта лемма имеет важные применения в теории дифференциальных уравнений.

Лемма 3 (лемма Гронуолла). Пусть на промежутке $\mathcal{I} \subseteq R^1_x$ скалярная бункция $\varphi(x) \geq 0$ непрерывна u удовлетворяет неравенстеу

$$\varphi(x) \leq A + B \left| \int_{x_0}^{x} \varphi(\zeta) d\zeta \right|,$$

где $A \geq 0, B > 0, x_0, x \in \mathcal{I}$. Тогда для $\forall x \in \mathcal{I}$

$$\varphi(x) \leq A \cdot e^{B|x - x_0|}.$$

Proof

Пусть для определенности $x_0 < x$. Положим $\Phi(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(\zeta) d\zeta$. Из условий леммы следует, что $\Phi'(x) = \varphi(x), \Phi(x_0) = 0, 0 \leq \Phi'(x) \leq A + B\Phi(x)$.

Умножив неравенство на $e^{-B(x - x_0)}$, имеем

$$\frac{d}{dx}\left[\Phi(x) e^{-B(x - x_0)}\right] \leq A e^{-B(x - x_0)}.$$

Интегрируя это неравенство от x_0 до x и учитывая, что $\Phi(x_0) = 0$, получаем

$$\Phi(x) e^{-B(x - x_0)} \leq -\frac{A}{B}\left[e^{-B(x - x_0)} - 1\right]$$

Находя отсюда оценку для $\Phi(x)$ и подставляя ее в неравенство $\varphi(x) \leq A + B\Phi(x)$, получаем утверждение леммы.

Нам понадобится также так называемая усиленная лемма Гропуолла, которая доказывается по той же схеме, что и лемма Гронуолла.

Лемма 4 (усиленная лемма Гронуолла). Пусть на промежутке $\mathcal{I} \subseteq R^1_x$ скалярная функция $\varphi(x) \geq 0$ непрерывна и удовлетворяет неравснству

$$\varphi(x) \leq A + B \left| \int_{x_0}^{x} \varphi(\zeta) d\zeta \right| + C|x - x_0|$$

где $A \geq 0, B > 0, C \geq 0, x_0, x \in \mathcal{I}, x_0 \lesseqgtr x$. Тогда для $\forall x \in \mathcal{I}$

$$\varphi(x) \leq A e^{B|x - x_0|} + \frac{C}{B}\left[e^{B|x - x_0|} - 1\right].$$

13.4.4 § 2. Existence and uniqueness of the solution of the Cauchy problem for the normal system of differential equations

1. Задача Коши для нормальной системы уравнений

Нормальной системой порядка $n \geq 2$ дифференциальных уравнений называется система уравнений вида

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1\left(x, y_1 ..., y_n\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, y_n\right), \\ y_n'(x) = f_n\left(x, y_1, ..., ..., y_n,\right. \end{cases}$$

где x-аргумент, $y_1(x), ..., y_n(x)$ - неизвестные функции, $f_1\left(x, y_1, ...,\right.$ $\left.y_n\right), ..., f_n\left(x, y_1, ..., y_n\right)$ - заданные вепрерывные функции в некоторой непустой области $G(n+1)$-мерного пространства $R^{n+1}_{(x,y_1,...,y_n)}$ с декартовыми прямоугольными координатами $x, y_1, ..., y_n$.

Для сокращения записи нормальной системы удобно перейти к векторным обозначениям. Пусть

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}, \quad f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1\left(x, y_1, ..., y_n\right) \\ \vdots \\ f_n\left(x, y_1, ..., y_n\right) \end{pmatrix}.$$

При таких обозначениях отождествляется точка $y = (y_1, ..., y_n)$ евклидова пространства R^n с вектором y, имеющим компоненты $y_1, ..., y_n$. Нормальная система в векторных обозначениях примет вид

$$y'(x) = f(x,y) \tag{1}$$

где $f(x,y) \in \mathbb{C}_n(G)$.

Definition

Вектор-фуккция $y = \varphi(x)$ называется решением нормальной системы (1) на промежутке $\mathcal{I} \subseteq R^1_x$, если:

1. $\varphi(x) \in \mathbb{C}^l_n(\mathcal{I})$ - множеству всех непрерывно дифференцируемых вектор-функций на промежутке $\mathcal{I}$,
2. точка $(x, \varphi(x)) \in G$ для всех $x \in \mathcal{I}$,
3. $\varphi'(x) \equiv f[x, \varphi(x)]$ на $\mathcal{I}$.

График решения $y = \varphi(x), x \in \mathcal{I}$, системы (1), т.е. множество всех точек $(x, \varphi(x)), \forall x \in I$, называется интегральной кривой нормальной системы (1). Из определения решения (1) следует, что интегральная кривая системы (1) является гладкой кривой, принадлежащей области $G(n+1)$ мерного пространства $R^{n+1}_{(x,y)}$. Рассмотрим начальное условие

$$y\left(x_0\right) = y_0, \quad (x_0, y_0) \in G. \tag{2}$$

Точка $(x_0, y_0) \in G$ называется начальной точкой, а ее координаты x_0, y_0 называются начальными данными.

Definition

Задача нахождения репения нормальной системы (1), удовлетворяющего начальному условию (2), называется задачей Коши или начальной задачей.

Геометрический смысл решения задачи Коши (1), (2) состоит в том, что ищется интегральная кривая нормальной системы (1) в области G, проходящая через заданную точку $(x_0, y_0) \in G$.

Система уравнений вида

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[\zeta, y(\zeta)]d\zeta \tag{3}$$

где $(x_0, y_0) \in G, f(x, y) \in \mathbb{C}_n(G)$, называется системой интегральных уравнений. Вектор-функция $y = \varphi(x)$ называется решением на промежутке I системы (3), если:

1. $\varphi(x) \in \mathbb{C}_n(\mathcal{I})$,
2. точка $(x, \varphi(x)) \in G, \forall x \in \mathcal{I}$,
3. $\varphi(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f[\zeta, \varphi(\zeta)]d\zeta, \forall x \in \mathcal{I}$.

Покажем, что разрешимость задачи Коши (1), (2) эквивалентиа разрешимости системы интегральных уравнений (3).

Лемма об эквивалентности. Вектор-функция $y = \varphi(x)$ - решение задачи Коши (1), (2) на промежутке I тогда и только тогда, когда $y = \varphi(x)$ решение на $\mathcal{I}$ системы интегральных уравнений (3).

Если $y = \varphi(x)$ - решение на $\mathcal{I}$ задачи Коши (1), (2), то $f[x, \varphi(x)]$ непрерывная на $\mathcal{I}$ вектор-функция. Тогда интегрирование от x_0 до x тождества $\varphi'(x) \equiv f[x, \varphi(x)]$ на I с учетом (2) дает тождество из п. 3 определения решения (3), т.е. $y = \varphi(x)$ - решение (3) на $\mathcal{I}$. Обратно, если $y = \varphi(x)$ - решение (3) на $\mathcal{I}$, то $f[x, \varphi(x)]$ - непрерывная на $\mathcal{I}$ функция. Тогда, как следует из курса анализа, можно дифференцировать тождество из п. 3 определения решения (3). Полученное в результате дифференцирования тождество показывает, что $y = \varphi(x)$-решение уравнения (1). Полагая $x = x_0$ в тождестве п. 3 определения решения (3), находим, что $y = \varphi(x)$ удовлетворяет начальному условию (2).

2. Теорема существования и единственности решения задачи Коши

Теперь сформулируем и докажем теорему, дающую достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши (1), (2). Эта теорема является основным теоретическим инструментом при изучении нормальных систем дифференциальных уравнений, которые, как правило, не допускают решений в квадратурах.

Theorem 1

Пусть вектор-функция $f(x, y) \in \mathbb{C}_n(G)$ удовлетворяет на каждом компакте (ограниченном замкнутом множестве) области G условию Липиица по y равномерно по x и пусть, кроме того, $(x_0, y_0) \in G$. Тогда:

1. найдется такое число $\delta > 0$, что при $|x - x_0| \leq \delta$ решение задачи Kour (1), (2) существует,
2. решение задачи Кощи (1), (2) единственно в том смысле, что если $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$ - два какие-либо решения задачи Коши (1), (2), то $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ на пересечении $\mathcal{I}$ промежутков определения этих решений ($x_0 \in \mathcal{I}$).

В силу леммы об эквивалентности доказательство теоремы сводится к доказательству существования и единственности решения эквивалентной задаче Коши (1), (2) системы интегральных уравнений (3).

А) Доказательство существования решения системы (3).

Поскольку $(x_0, y_0) \in G$ и G - открытое множество, то $\exists$ такие числа $p > 0, q > 0$, что замкнутый ограниченный цилиндр $G_{pq} = \{(x, y) \in G : |x - x_0| \leq p, |y - y_0| \leq q\}$ принадлежит G. Цилиндр G_{pq} представляет собой выпуклую по y область. В силу того, что цилиндр G_{pq} компакт, найдется такое число $M > 0$, что

$$|f(x, y)| \leq M, \quad \forall (x, y) \in G_{pq}.$$

По условию теоремы 1 вектор-функция $f(x, y)$ в области G_{pq} удовлетворяет условию Липшица по y равномерно по x, т.е. $\exists$ число $L > 0$, зависящее от цилиндра G_{pq}, такое что

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2|, \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in G_{pq}. \tag{4}$$

Будем строить решение системы интегральных уравнений (3) методом последовательных приближений Пикара при $|x - x_0| \leq \delta$, где $\delta = \min\left(p, \frac{q}{M}\right)$. Определим последовательные приближения следующим рекуррентным образом при $|x - x_0| \leq \delta$:

$$y_0(x) = y_0, \quad y_{i+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[\zeta, y_i(\zeta)]\, d\zeta, \quad i = 0, 1, 2, ... \tag{5}$$

Убедимся сначала в том, что при $|x - x_0| \leq \delta$ каждая функция $y_i(x)$ непрерывна и что $(x, y_i(x)) \in G_{pq}, i = 0, 1, 2, ...$ Применим метод математической индукции. Ясно, что $y_1(x)$ непрерывна. По лемме 1 § 1 имеем, что при $|x - x_0| \leq \delta$

$$|y_1(x) - y_0(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} f[\zeta, y_0]\, d\zeta \right| \leq$$
$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} \right| f[\zeta, y_0]\, |d\zeta| \leq M |x - x_0| \leq M\delta \leq q,$$

так как $\delta \leq \frac{q}{M}$. Значит, $(x, y_1(x)) \in G_{pq}$.

Пусть при $|x - x_0| \leq \delta$ функция $y_i(x)$ непрерывна и пусть $(x, y_i(x)) \in G_{pq}$. Докажем, что при $|x - x_0| \leq \delta$ функция $y_{i+1}(x)$ непрерывна и $(x, y_{i+1}(x)) \in G_{pq}$. Так как $y_i(x)$ непрерывна при $|x - x_0| \leq \delta$ и $(x, y_i(x)) \in G_{pq}$, то при $|x - x_0| \leq \delta$ функция $f[x, y_i(x)]$ непрерывна. Тогда из (5) следует непрерывность $y_{i+1}(x)$ при $|x - x_0| \leq \delta$. Кроме того,

$$|y_{i+1}(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f[\zeta, y_i(\zeta)]\, d\zeta \right| \leq$$
$$\leq \left| \int_{x_0}^{x} \right| f[\zeta, y_i(\zeta)]\, |d\zeta| \leq M |x - x_0| \leq M\delta \leq q$$

Итак, при $|x - x_0| \leq \delta$ все последовательные приближения $y_i(x)$ непрерывны и их графики лежат внутри цилиндра G_{pq}. Покажем, что последовательность $\{y_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ сходится равномерно для $|x - x_0| \leq \delta$ при $i \to \infty$.

Как известно из курса анализа, равномерная сходимость $\{y_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ эквивалентна равномерной сходимости при $|x - x_0| \leq \delta$ ряда вида

$$y_0(x) + \sum_{i=0}^{\infty} [y_{i+1}(x) - y_i(x)]. \tag{6}$$

Проверим для ряда (6) выполнение условий признака Вейерштрасса равномерной сходимости. С помощью метода математической индукции установим справедливость оценки при $|x - x_0| \leq \delta$:

$$|y_{i+1}(x) - y_i(x)| \leq L^i M \frac{|x - x_0|^{i+1}}{(i+1)!}, \quad i = 0, 1, 2, ... \tag{7}$$

При $i = 0$ оценка (7) была установлена выше. Пусть

$$|y_i(x) - y_{i-1}(x)| \leq L^{i-1} M \frac{|x - x_0|^i}{i!}$$

Так как $(x, y_i(x)) \in G_{pq}, |x - x_0| \leq \delta$, то из неравенства (4) получаем:

$$\begin{aligned} |y_{i+1}(x) - y_i(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^{x} \{f[\zeta, y_i(\zeta)] - f[\zeta, y_{i-1}(\zeta)]\} d\zeta \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^{x} \right| f[\zeta, y_i(\zeta)] - f[\zeta, y_{i-1}(\zeta)] \, |d\zeta| \leq \\ &\leq L \left| \int_{x_0}^{x} \right| y_i(\zeta) - y_{i-1}(\zeta) | d\zeta| \leq \\ &\leq L \frac{L^{i-1} M}{i!} \left| \int_{x_0}^{x} \right| \zeta - x_0|^i \, d\zeta \Bigg| = L^i M \frac{|x - x_0|^{i+1}}{(i+1)!} \end{aligned}$$

Таким образом, обоснована оценка (7) общего члена ряда (6). Из оценки (7) следует, что при $|x - x_0| \leq \delta$

$$|y_{i+1}(x) - y_i(x)| \leq M L^i \frac{\delta^{i+1}}{(i+1)!}, \quad i = 0, 1, 2, ...$$

Значит, ряд (6) мажорируется сходящимся числовым рядом

$$|y_0| + M \sum_{i=0}^{\infty} L^i \frac{\delta^{i+1}}{(i+1)!} = |y_0| + \frac{M}{L} \left(e^{\delta L} - 1\right).$$

По признаку Вейерштрасса ряд (6) сходится равномерно при $|x - x_0| \leq \delta$ к некоторой вектор-функции $y = \varphi(x)$. Следовательно, и

$$y_i(x) \rightrightarrows \varphi(x)$$

для $|x - x_0| \leq \delta$ при $i \to \infty$. По известной теореме из курса анализа о том, что сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных вектор-функций является непрерывной, вектор-функция $y = \varphi(x)$ непрерывна при $| x - x_0 | \leq \delta$. Переходом к пределу при $i \to \infty$ в неравенстве $|y_i(x) - y_0| \leq q$ для $|x - x_0| \leq \delta$ убеждаемся в том, что график $y = \varphi(x)$, т.е. множество всех точек $(x, \varphi(x)), |x - x_0| \leq \delta$, находится в цилиндре G_{pq}.

Покажем, что $y = \varphi(x)$ - решение системы (3) при $|x - x_0| \leq \delta$. Так как $(x, \varphi(x)) \in G_{pq}$ и $(x, y_i(x)) \in G_{pq}, i = 0, 1, 2, ...$, для $|x - x_0| \leq \delta$, то, применяя оценку (4), имеем:

$$\begin{aligned} &| f[x, y_i(x)] - f[x, \varphi(x)] \leq \\ &\quad \leq L |y_i(x) - \varphi(x)| \leq L \max_{|x - x_0| \leq \delta} |y_i(x) - \varphi(x)| \end{aligned}$$

Так как $y_i(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ для $|x - x_0| \leq \delta$ при $i \to \infty$, то из последней оценки следует, что и $f[x, y_1(x)] \Rightarrow f[x, \varphi(x)]$ для $|x - x_0| \leq \delta$ при $i \to \infty$. Но тогда по теореме из курса анализа следует, что для $|x - x_0| \leq \delta$ при $i \to \infty$

$$\int_{x_0}^{x} f\left[\zeta, y_i(\zeta)\right] d\zeta \Rightarrow \int_{x_0}^{x} f[\zeta, \varphi(\zeta)] d\zeta$$

Переходя к пределу при $i \to \infty$ в равенстве (5), получаем, что

$$\varphi(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f[\zeta, \varphi(\zeta)] d\zeta, \quad |x - x_0| \leq \delta$$

Это значит, что $y = \varphi(x)$ - решение системы (3) при $|x - x_0| \leq \delta$, где $\delta = \min\left(p, \frac{q}{M}\right)$.
Б) Доказательство единственности решения системы (3).

Пусть $y = \varphi(x)$ - решение системы (3) на промежутке $\mathcal{I}_1$ $(x_0 \in \mathcal{I}_1)$ и $y = \psi(x)$ - решение системы (3) на промежутке $\mathcal{I}_2$ $(x_0 \in \mathcal{I}_2)$, т.е.

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[\zeta, \varphi(\zeta)] d\zeta, \quad \forall x \in \mathcal{I}_1$$
$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[\zeta, \psi(\zeta)] d\zeta, \quad \forall x \in \mathcal{I}_2$$

Тогда на любом отрезке $[\alpha, \beta]$ промежутка $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$, содержащем x_0, справедлива оценка:

$$|\varphi(x) - \psi(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} \{f[\zeta, \varphi(\zeta)] - f[\zeta, \psi(\zeta)]\} d\zeta \right| \leq$$
$$\leq L \left| \int_{x_0}^{x} \right| \varphi(\zeta) - \psi(\zeta)| d\zeta|$$

поскольку при $x \in [\alpha, \beta]$ интегральные кривые - компактные множества в G.

По лемме Гронуолла $|\varphi(x) - \psi(x)| = 0, \forall x \in| \alpha, \beta]$, т.е. $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ на $[\alpha, \beta]$. Так как $[\alpha, \beta]$ - любой отрезок $\mathcal{I}$, то $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ на всем промежутке $\mathcal{I}$. $\square$

Геометрически теорема 1 означает, что через каждую точку $(x_0, y_0) \in G$ в некоторой ее окрестности проходит единственная интегральная кривая системы (1).

В качестве следствия теоремы 1 получим теорему существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения порядка n в нормальной форме.

3. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения порядка n в нормальной форме

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y^{(u)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right), \tag{8}$$

где $f\left(x, y_1, ..., y_n\right)$ - заданная непрерывная функция в некоторой непустой области $G \subseteq R^{n+1}_{x, y_1, ..., y_n}$, и начальные условия

$$y\left(x_0\right) = y_1^{(0)}, \quad y'\left(x_0\right) = y_2^{(0)}, ..., y_{x_0}^{(n-1)} = y_n^{(0)}, \tag{9}$$

где $\left(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, ..., y_n^{(0)}\right) \in G$.

Theorem 2

Пусть функичя $f\left(x, y_1, ..., y_n\right)$ непрерывна в области G, удовлетворяет на каждом компакте G условию Липицча по $y_1, y_2, ..., y_n pa$ номерно по x и пусть $\left(x_0, y_1^{(0)}, ..., y_n^{(0)}\right) \in G$. Тогда:

1. найдется такое число $\delta > 0$, что при $|x - x_0| \leq \delta$ решение задачи Кошу (8), (9) существует,

2. решение задачи Коши (8), (9) единственно в том смасле, что если $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$ - два какие-либо решения задачи Коши (8), (9), то $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ на пересечении промежутков определения этих решений.

Покажем сначана, что задача Коши (8), (9) редуцируется к задаче Коши для некоторой нормальной системы уравнений. Сделаем в задаче Коши (8), (9) следующую замену переменных: $y = y_1, y' = y_2, y'' = y_3, ..., y^{(n-1)} = y_n$. Тогда уравнение (8) перейдет в нормальную систему вида

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f\left(x, y_1, ..., y_n\right), \end{cases} \tag{10}$$

а начальные условия (9) примут вид:

$$y_1\left(x_0\right) = y_1^{(0)}, \quad y_2\left(x_0\right) = y_2^{(0)}, ..., y_n\left(x_0\right) = y_n^{(0)}. \tag{11}$$

Очевидна эквивалентность задачи Коши (8), (9) и задачи Коши (10), (11) в том смысле, что если $y = \varphi(x)$ - решение (8), (9) при $x \in \mathcal{I}$, то вектор-функция с компонентами $\varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n-1)}(x)$ - решение (10), (11) при $x \in \mathcal{I}$ и обратно, если вектор-функция с компонентами $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$ - решение (10), (11) при $x \in \mathcal{I}$, то функция $y = \varphi_1(x)-$ решение (8), (9) при $x \in \mathcal{I}$.

Если выполнены условия теоремы 2 , то выполняются условия теоремы 1 для задачи Коши (10), (11). Следовательно, для задачи Коши (10), (11) справедливы утверждения теоремы 1. В силу эквивалентности задач Коши (10), (11) и (8), (9) отсюда получаем утверждение теоремы 2.

4. Обсуждение доказанных теорем

1. Значение доказанных теорем прежде всего в том, что они дают информацию о решении задачи Коши в тех случаях, когда нормальная система (1) или уравнение (8) не интегрируются в квадратурах. Пример такой ситуации дает уравнение Риккати. Тогда для их решения приходится применять численные или асимптотические методы, а для возможности их применения необходимо быть уверенным в том, что решение задачи Коши существует и единственно.

2. Примененный при доказательстве теоремы 1 метод последовательных приближений Пикара поставляет формулы приближенных ретений, а в некоторых случаях и формулы точного решения задачи Коши. При этом нетрудно указать оценку погрешности при замене решения $y = \varphi(x)$ задачи Коши (1), (2) его n-м приближением $y_n(x)$. Именно, из оценки (7) следует, что

$$|\varphi(x) - y_n(x)| \leq \sum_{i=n}^{\infty} |y_{i+1}(x) - y_i(x)| \leq M \sum_{i=n}^{\infty} L^i \frac{\delta^{i+1}}{(i+1)!} \leq$$
$$\leq M\delta \frac{(L\delta)^n}{(n+1)!} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(L\delta)^j}{j!} = M\delta \cdot e^{\delta L} \frac{(\delta L)^n}{(n+1)!}$$

Example 1.

Методом последовательных приближений найти решение задачи Коши: $y' = y, y(0) = y_0$.

$\triangle$ Имеем:

$$y_0(x) = y_0, \quad y_1(x) = y_0 + \int_0^x y_0 d\zeta = y_0(1+x)$$
$$y_2(x) = y_0 + \int_0^x y_0(1+\zeta)d\zeta = y_0\left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right)$$

Методом математической индукции получаем, что $\forall k \in N$

$$y_k(x) = y_0\left(1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^k}{k!}\right).$$

При $k \to \infty$ и $\forall x \in R_x^1$ выполняется $y_k(x) \to y(x) = y_0 e^x$. Эта сходимость равномерная по x на каждом отрезке $[-a, a], a > 0$. Итак, искомое решение $y = y_0 e^x$. $\square$

3) При условиях теоремы 1 существование решения задачи Коши доказано на $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, где $\delta = \min\left(p, \frac{q}{M}\right)$. Этот отрезок зависит от всех исходных данных задачи Коши: f, G, x_0, y_0. Отрезок тем меньше, чем ближе точка (x_0, y_0) к границе области G и чем больше рост $|f(x, y)|$.

Доказанная теорема существования носит существенно локальный характер: существование решения задачи Коши гарантируется лишь в некоторой малой δ-окрестности точки x_0. Этот принципиальный момент подтверждается примерами.

Example 2.

Решением задачи Коши $y' = 1 + y^2, y(0) = 0$, служит функция $y = \operatorname{tg} x, |x| < \frac{\pi}{2}$. Здесь $\delta < \frac{\pi}{2}$, хотя правая часть уравнения - бесконечно дифференцируемая функция для $\forall y \in R_y^1$. Возникает вопрос о необходимости условий на $f(x, y)$, наложенных в теореме 1 , для получения существования решения задачи Коши. Ответ здесь таков.

Другим методом, отличным от метода последовательных приближений, для задачи Коши (1), (2) можно доказать теорему существования решения лишь при одном условии непрерывности $f(x, y)$ в G и при (x_0, y_0) $\in G$ (теорема Пеано) (см., например, [35], [41]). Теорему существования можно доказывать и другими методами - методом ломаных Эйлера или методом сжатых отображений (см. [35], [43], [45]).

4) Доказанная теорема единственности решения задачи Коши носит глобальный характер: она верна не только в окрестности точки x_0, а на всем том промежутке $\mathcal{I}$ $(x_0 \in \mathcal{I})$, где определено решение.

В отличие от теоремы существования решения задачи Коши, для единственности решения задачи Коши, как правило, одной только непрерывности $f(x, y)$ в области G недостаточно, нужны дополнительные условия.

Example 3.

Рассмотрим задачу Коши: $y' = \sqrt[3]{y^2}, y(0) = 0$. Здесь правая часть уравнения не удовлетворяет условиям теоремы 1 , так как она непрерывна на всей плоскости $R^2_{(x,y)}$, но не удовлетворяет условию Липшица в окрестности $y = 0$. Покажем, что задача Коши имеет бесконехное множество решений. Действительно, ее решениями служат $y = 0, y = x^3$ и, например, любая функция вида ($x_0 > 0$)

$$y=\varphi\left(x, x_0\right)=\begin{cases}0, & x \leq x_0 \\ \left(x-x_0\right)^3, & x \geq x_0\end{cases}$$

Часто для получения единственности решения задачи Коши вместо условия Липшица требуют в G существования непрерывных $\frac{\partial f_i(x, y_1, \ldots, y_n)}{\partial y_j}, \quad i, j=\overline{1, n}$.

Чтобы в этом случае можно было воспользоваться теоремой 1, необходимо установить следующую лемму.

Лемма. Если вектор-функция $f(x, y) \in \mathbb{C}_n(G)$ имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial f_i(x, y)}{\partial y_j}, i, j=\overline{1, n}$, в области G, то она удовлетворяет условию Липишца по у равномерно по x на каждом компахте K области G.

Рассуждаем от противного. Пусть утверждение леммы неверно. Тогда найдутся компакт $K_0 \subset G$ и последовательности

$$\begin{gathered}\left\{L_n\right\}_{n=1}^{\infty}, \quad L_n>0, \quad \forall n \in N, \\ \left\{\left(x_n, y_n^{(1)}\right)\right\}_{n=1}^{\infty} \subset K_0, \\ \left\{\left(x_n, y_n^{(2)}\right)\right\}_{n=1}^{8=1} \subset K_0\end{gathered}$$

такие, что

$$\left|f\left(x_n, y_n^{(1)}\right)-f\left(x_n, y_n^{(2)}\right)\right|>L_n\left|y_n^{(1)}-y_n^{(2)}\right|.$$

Поскопьку K_0-компакт, то из последовательностей точек $\left(x_n, y_n^{(1)}\right)$ и $\left(x_n, y_n^{(2)}\right)$ можно выбрать сходящиеся последовательности

$$\left(x_{n_k}, y_{n_k}^{(1)}\right) \rightarrow\left(x_0, y_0^{(1)}\right) \in K_0, \quad\left(x_{n_k}, y_{n_k}^{(2)}\right) \rightarrow\left(x_0, y_0^{(2)}\right) \in K_0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим вектор-функцию

$$F\left(x, y^{(1)}, y^{(2)}\right)=\frac{f\left(x, y^{(1)}\right)-f\left(x, y^{(2)}\right)}{y^{(1)}-y^{(2)}}, \quad y^{(1)} \neq y^{(2)},$$

в достаточно малой окрестности точки $\left(x_0, y_0^{(1)}, y_0^{(2)}\right)$. Она ограничена в этой окрестности. Это следует из непрерывности $f(x, y)$ в случае $y_0^{(1)} \neq y_0^{(2)}$ и из леммы 2§1 настоящей главы в случае $y_0^{(1)}=y_0^{(2)}$. Но ограниченность $F\left(x, y^{(1)}, y^{(2)}\right)$ противоречит нашему предположению о компакте K_0 при больших n_k. Это доказывает утверждение леммы. $\square$

Из этой леммы следует, что утверждения теоремы 1 , в частности, верные, если $f(x, y)$ и ее частные производные по y непрерывны в области G. Непрерывность же $f(x, y)$ и ее частных производных по y на практике проверить легче, чем условие Линшица по y равномерно по x для $f(x, y)$.

5) Если расширено понятие решения системы (1), то можно установить теорему существования таких зобобщенных» решений задачи Коши и для вектор-функций $f(x, y)$, не обязательно непрерывных в G (см. [38], [43]).

Однако и условие Липшица и условие непрерывности частных производных от $f(x, y)$ по $y_1, \ldots, y_n$ не являются необходимым условием единственности решения зацачи Коши

Замечание 1. Будем называть решение системы (1) особым, если каждая точка (x_0, y_0) интегральной кривой этого решения является точкой неединственности решения задачи Коши (1), (2). Из теоремы 1 следует, что точки неединственности решения задачи Коши могут быть только среди тех точек G, в окрестности которых не выполнено условие Липшица по y.

Так, например, в примере 3 решение $y = 0$ - особое. Более подробно об особых решениях см. в § 6 настоящей главы.

Замечание 2. Важным частным случаем нормальной системы (1) является нормальная линейная система дифференциальных уравнений

$$y'(x) = A(x)y(x) + f(x)$$

где $A(x)$ - заданная непрерывная на промежутке $\mathcal{I} \subseteq R_x^l$ квадратная матрица порядка n, а $f(x)$ - заданная вектор-функция с n непрерывными компонентами на $\mathcal{I}$. В следующей главе 5 будет показано, что теорему 1 для таких систем можно уточнить. Именно будет доказано, что решение задачи Коши для нормальной линейной системы существует и единственно на всем промежутке $\mathcal{I}$. Аналогичный результат в главе 6 будет установлен и для задачи Коши для линейного дифференциального уравнения порядка n

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x)$$

с непрерывными $a_1(x), ..., a_n(x), f(x)$ на промежутке $\mathcal{I}$.

Замечание 3. Система дифференциальных уравнений вида

называется канонической системой порядка $m = m_1 + \cdots + m_n$. Заменой вида $y_j = y_{j0}, y_j' = y_{j1}, ..., y_j^{(m_j-1)} = y_{j,m,-1}, j = \overline{1,n}$, каноническая система порядка m сводится к эквивалентной нормальной системе порядка m. Таким образом, изучение разрешимости задачи Коши для канонической системы сводится к изучению эквивалентной задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений. Для канонической системы начальные условия задаются условиями вида (9) для каждой из функций $y_1(x), ..., y_n(x)$, причем для $y_1(x)$ задается m_1 условий,..., для $y_n(x)$ задается m_n условий.

13.4.5 § 3. Unextended solution of the Cauchy problem

Пусть для нормальной системы (1) из § 2 заданы два решения: $y = \varphi_1(x)$ на промежутке $\mathcal{I}_1$ и $y = \varphi_2(x)$ на промежутке $\mathcal{I}_2$. Если $\mathcal{I}_1 \subseteq \mathcal{I}_2$ и $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ для всех $x \in \mathcal{I}_1$, то говорят, что решение $y = \varphi_2(x)$ является продолжением решения $y = \varphi_1(x)$ с промежутка $\mathcal{I}_1$ на промежуток I_2 или что решение $y = \varphi_1(x)$ является сужением решения $y = \varphi_2(x)$ с промежутка $\mathcal{I}_2$ на промежуток $\mathcal{I}_1$.

Если существует промежуток $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ такой, что $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ для всех $x \in \mathcal{I}$, то в этом случае решения $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ системы (1) являются продолжениями одно другого, а вектор-функция

$$y = \Phi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & x \in \mathcal{I}_1 \\ \varphi_2(x), & x \in \mathcal{I}_2 \end{cases}$$

является решением системы (1) для всех $x \in \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$. В частном случае, когда I вырождается в точку, происходит стыковка решений $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$. Стыковка решений также представляет решение системы (1) на $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$.

Definition

Решение $y = \varphi(x)$ на промежутке $\mathcal{I}$ системы (1) § 2 называется непродолжимым, если не существует никакого другого решения системы (1), являющегося его продолжением.

Из этого определения следует, что промежуток $\mathcal{I}$ непродолжимого решения $y = \varphi(x)$ является максимальным в том смысле, что для всякого другого решения системы (1) $y = \psi(x)$ на промежутке $\mathcal{I}_1$, совпадающего с $y = \varphi(x)$ там, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определены одновременно, $\mathcal{I}_1$ является частью $\mathcal{I}$.

При выполнении условий теоремы 1 § 2 было доказано существование решения задачи Коши (1), (2) из § 2 на отрезке $[x_0-\delta, x_0+\delta]$, где $\delta = \min\left(p, \frac{q}{M}\right)$. Следующая теорема показывает, что полученное решение задачи Коши может быть продолжено единственным образом до непродопжимого решения.

Theorem

Пусть выполнены условия теоремы 1 § 2. Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ задача Коши (1), (2) из § 2 имеет единственное непродолжимое решение $y = \Phi(x)$, определенное на нехотором махсимальном интервале (α, β). При этом, если $x \to \alpha + 0$ или $x \to \beta - 0$, соответствующая точка $M(x, \Phi(x))$ интегральной кривой покидает любой компакт $K \subset G$ и либо $M \to \infty$ (т.е. хотя бы одна из хоординат M стремится $\kappa\infty$), либо расстояние от M до границы ∂G области $G\rho(M, \partial G) \to 0$.

Proof

Пусть для определенности область G не совпадает со всем пространством $R^{n+1}_{(x,y)}$ и пусть $A_0\,(x_0, y_0) \in G$.

Построим цилиндр $G_0 = \{(x, y) \in G : |x - x_0| \le p_0, |y - y_0| \le q_0\}$, где $p_0, q_0 < \frac{d_0}{4}$ и $d_0 = \rho\,(A_0, \partial G)$. Если $A(x, y) \in G_0$, то $|AA_0| \le |x - x_0| + |y - y_0| \le p_0 + q_0 < \frac{d_0}{2}$. Следовательно, $G_0 \subset G$ и по теореме 1 существует едивственное решение задачи Коши (1), (2) $y = \varphi_0(x)$ при $|x - x_0| \le \delta_0$, где $0 \le \delta_0 = \min\left(p_0, \frac{q_0}{M_0}\right), M_0 = \max|f(x, y)|$ при $(x, y) \in G_0$.

Положим $x_1 = x_0 + \delta_0, y_1 = \varphi_0\,(x_1)$ и возьмем точку $A_1\,(x_1, y_1)$. Построим цилиндр

$$G_1 = \{(x, y) \in G : |x - x_1| \le p_1, |y - y_1| \le q_1\},$$

где $p_1, q_1 < \frac{d_1}{4}$ и $d_1 = \rho\,(A_1, \partial G)$. Так как $G_1 \subset G$, то по теореме 1 § 2 существует единственное решение $y = \varphi_1(x)$ системы (1) с начальным условием $y\,(x_1) = y_1$, определенное при

$$|x - x_1| \le \delta_1, \quad \delta_1 = \min\left(p_1, \frac{q_1}{M_1}\right) > 0, \quad M_1 = \max|f(x, y)|, \quad (x, y) \in G_1.$$

В силу единственности решения на пересечении отрезков $[x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0]$, $[x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1]$ решения $y = \varphi_0(x)$ и $y = \varphi_1(x)$ совпадают. Поэтому вектор-функция

$$y = \Phi_1(x) = \begin{cases} \varphi_0(x), & |x - x_0| \le \delta_0, \\ \varphi_1(x), & |x - x_1| \le \delta_1, \end{cases}$$

является единственным решением задачи Коши (1), (2) из §2 на $[x_0 - \delta_0, x_1 + \delta_1]\,, x_1 = x_0 + \delta_0$.

Продолжая этот процесс дальше, на k-м шаге получим единственное решение $y = \Phi_k(x)$ задачи Коши (1), (2) из § 2 на $[x_0 - \delta_0, x_k + \delta_k]$, где $x_k = x_0 + \delta_0 + \delta_1 + \cdots + \delta_{k-1}, \delta_j = \min\left(p_j, \frac{q_j}{M_j}\right), M_j = \max|f(x, y)|, (x, y) \in G_j$, $j = \overline{1, k}$. При $k \to \infty$ придем к единственному решению $y = \Phi(x)$ задачи Коши (1), (2) из § 2, определенному на $[x_0 - \delta_0, \beta)$, где $\beta = \lim_{k\to\infty}(x_k + \delta_k)$. Покажем, что $y = \Phi(x)$ непродолжимо вправо.

Если $\beta = \infty$, то вопрос о продолжении $\Phi(x)$ отпадает. Пусть $|\beta| < \infty$. Если $\lim_{x\to\beta-0}\Phi(x)$ не существует или равен $\pm\infty$, то $\Phi(x)$ нельзя доопределить в точке β и, значит, нельзя получить репение (1), (2) из § 2 на $[x_0 - \delta_0, \beta]$, т.е. $\Phi(x)$ непродолжимо на этот отрезок.

Если $3\lim_{x\to\beta-0}\Phi(x) = B$, то положим $\Phi(\beta) = B$. Рассмотрим $y = \Phi(x)$ для $x \in [x_0 - \delta_0, \beta]$ и покажем, что точка $(\beta, B) \in \partial G$ и, следовательно, $y = \Phi(x)$ непродолжимо на $[x_0 - \delta_0, \beta]$.

Рассуждаем от противного. Пусть $(\beta, B) \in G$ и $\Phi'(\beta) = f[\beta, \Phi(\beta)]$. Тогда интегральная кривая для $y = \Phi(x)$ на $[x_0 - \delta_0, \beta]$ - компактное множество $E \subset G$. Из курса анализа известно, что тогда расстояние между E и $\partial G \rho(E, \partial G) = d > 0$. Рассмотрим точку $Q(\tilde{x}, \tilde{y}) \in E$ и построим цилиндр $G(Q)$ с центром в точке Q :

$$G(Q) = \{(x, y) \in E : |x - \tilde{x}| \le p, |y - \tilde{y}| \le q\}, \quad p = p(G(Q)), \quad q = q(G(Q))$$

где $p, q < \frac{1}{4\sqrt{2}}\rho(Q, \partial G), M(G(Q)) = \max|f(x, y)|, \forall(x, y) \in G(Q)$. В замкнутой области

$$\tilde{G} = \bigcup_{Q_k \in E} G\left(Q_k\right)$$

$|f(x, y)| \le M(\tilde{G}) = \max_{\tilde{G}}|f(x, y)|$, причем $M(\tilde{G}) \ge M\left(G\left(Q_k\right)\right); p\left(G\left(Q_k\right)\right)$ и $q\left(G\left(Q_k\right)\right) \ge \frac{1}{4\sqrt{2}}d$. Но это значит, что

$$\delta_k = \min\left\{p_k, \frac{q_k}{M\left(G\left(Q_k\right)\right)}\right\} \ge \min\left\{p, \frac{q}{M(\tilde{G})}\right\} > 0.$$

Это противоречит условию

$$\beta = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\delta_k < \infty.$$

Итак, предположение $(\beta, B) \in G$ неверно и решение $y = \Phi(x)$ непродолжимо в точку (β, B). Остается показать, что решение $y = \Phi(x)$ покидает всякий компакт $K \subset G$. Пусть $\rho(K, \partial G) = \varepsilon > 0$. Обозначим через K_ε замкнутое множество, полученное присоединением к K всех тех точек $Q \in G$, для которых $\rho(Q, \partial K) \le \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть $M_\varepsilon = \max|f(x, y)|$ при $\forall(x, y) \in K_\varepsilon$. Тогда при ранее проведенном построении перавенство

$$\delta_k = \min\left(p_k, \frac{q_k}{M\left(G\left(Q_k\right)\right)}\right) \ge \varepsilon_0 = \min\left\{\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{4M_\varepsilon\sqrt{2}}\right\}$$

справедливо до тех пор, пока $Q_k \in K$. Таким образом, каждый шаг продолжения продвигает решение $\Phi(x)$ больше, чем на ε_0. Следовательно, конечное число продолжений решения $y = \varphi_0(x)$ с шагом $\delta_k \ge \varepsilon_0$ выведет интегральную кривую для $y = \Phi(x)$ из компакта K.

Аналогично строится продолжение решения $y = \varphi_0(x)$ влево от точки x_0. Полученное непродолжимое решение $y = \Phi(x)$ будет, таким образом, определено в некотором максимальном (α, β).

Модификация проведенных рассуждений для случая, когда G совпадает со всем $R^{n+1}_{(x,y)}$, очевидна. $\square$

При условиях доказанной теоремы через каждую точку $(x_0, y_0) \in G$ проходит единственная интегральная кривая Γ системы (1) от границы и до границы области G (см. рис. 1).

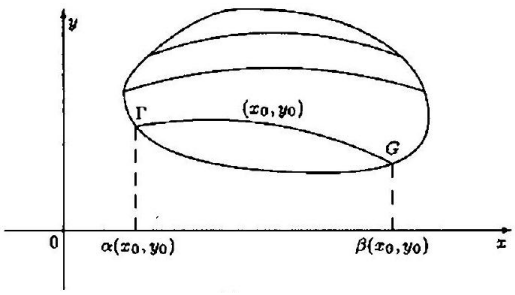


Рис. 1

С учетом зависимости кривой Γ от начальных данных (x_0, y_0) будем обозначать соответствующее Γ единственное непродолжимее решение задачи Коши (1), (2) из § 2 через

$$y = \Phi\left(x, x_0, y_0\right)$$

При фиксированных $(x_0, y_0) \in G$ функция Φ определена на максимальном интервале (α, β), концы которого зависят, конечно, от начальных данных x_0, y_0 :

$$\alpha = \alpha\left(x_0, y_0\right), \quad \beta = \beta\left(x_0, y_0\right).$$

Сказаиное означает, что область G сплошь покрыта непересекающимися интегральными кривыми, если в G выполнены условия теоремы 1 из § 2.

Как будет показано в следующей главе, решение задачи Коши для нормальной линейной системы дифференциальных уравнений

$$y'(x) = A(x)y(x) + f(x)$$

с заданными непрерывными на (α, β) квадратной матрицей $A(x)$ порядка n и вектор-функцией $f(x)$ с n компонентами существует и единственно на всем (α, β), если только $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Это значит, что решение такой задачи Коши является непродолжимым с областью определения (α, β). Аналогичный результат можно установить и для «почти линейных» систем (1) в полосе. Именно, если $f(x, y) \in \mathbb{C}(G)$,

$$G = \{(x, y) : x \in (\alpha, \beta), y \in R^n\}$$

$f(x, y)$ удовлетворяет в G условию Липшица по y равномерно по x, то решение задачи Коши (1), (2) из § 2 существует и единственно на всем (α, β), если только $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

Условие Липшица по y является условием линейности роста $f(x, y)$ по y. Оказывается, что при большем росте $f(x, y)$ по y ситуация меняется.

Пример. Рассмотрим задачу Коши ($y(x)$ - скалярная функция)

$$y = y^2, \quad y(0) = y_0 > 1.$$

Здесь функция $f(x, y) = y^2$ имеет квадратичный рост по y и определена на всей плоскости $R^2_{(x,y)}$. На первый взгляд нет видимых препятствий для неограниченного продолжения решения задачи Коши на всю ось Ox. Однако это не так. Искомое решение задачи Коши имеет вид

$$y = \frac{y_0}{1 - y_0 x}$$

и определено лишь при $x > \frac{1}{y_0}$.

13.4.6 § 4. General solution of the differential equation

Ограничимся для простоты задачей Коши для скалярного уравнения

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{1}$$

Будем считать, что в плоской области G выполнены условия теоремы 1 § 2. Тогда при $\forall (x_0, y_0) \in G$ задача Коши (1) имеет единственное непродолжимое решение (см. § 3)

$$y = \Phi(x, x_0, y_0),$$

определенное в открытом множестве

$$\Omega = \{(x, x_0, y_0) : x \in \{\alpha, \beta), (x_0, y_0) \in G\},$$

где $\alpha = \alpha(x_0, y_0), \beta = \beta(x_0, y_0)$.
Как будет установлено в $\oint 5$, если $f(x, y), \frac{\partial f}{\partial y} \in \mathbb{C}(G)$, то решение $\Phi(x, x_0, y_0)$ является в Ω непрерывно дифференцируемой функцией.

Definition

Функция $y = \Phi(x, x_0, y_0)$, где $(x, x_0, y_0) \in \Omega$, называется общим решением в форме Коши уравнения $y' = f(x, y)$.

Итак, общее решение в форме Коши содержит два параметра x_0, уоПараметры x_0, y_0 общего решения имеют простой геометрический смысл: соответствующая интегральная кривая проходит через точку $(x_0, y_0) \in G$. Однако понятно, что параметры x_0, y_0 не являются независимыми, например, $y_0 = \Phi(x_0, x_0, y_0)$. Различные значения параметров могут давать одну и ту же интегральную кривую уравнения. Это будет так, когда точка (x_0, y_0) перемещается по фиксированной интегральной кривой. Если можно установить зависимость между x_0 и y_0 вида $x_0 = x_0(t), y_0 = y_0(t)$ такую, что разным значениям t соответствуют разные интегральные кривые и при изменении t точка (x_0, y_0) пробегает все интегральные кривые, то общее решение в форме Коши становится функцией только одного параметра t :

$$y = \Phi(x, x_0(t), y_0(t)) = \Phi(x, t). \tag{2}$$

Например, для линейного уравнения первого порядка

$$y' = a(x)y + f(x),$$

где $a(x), b(x) \in \mathbb{C}(\alpha, \beta)$, при перемещении точки $(x_0, y_0), x_0 \in (\alpha, \beta)$, по вертикальной прямой $x_0 = \text{const}$ общее решение в форме Коши становится функцией только одного параметра уо.

Таким образом, общее решение в форме Коши, задающее двухпараметрическое семейство непродолжимых решений всевозможных задач Коши (1), в некоторых случаях может быть получено как однопараметрическое семейство непродолжимых решений всевозможных задач Коши (1).

Definition

Непрерывная функция $y = \Phi(x, C)$, где C - параметр, называется общим решением уравнения $y' = f(x, y)$ в некоторой области $G_0 \subseteq G$, если для $\forall (x_0, y_0) \in G_0$ уравнение $y_0 = \Phi(x_0, C)$ имеет единственное решение $C_0 = C_0(x_0, y_0)$ и функция $y = \Phi(x, C_0)$ является непродолжимым решением задачи Коши (1) в G_0.

Если x_0, y_0 связаны зависимостью $x_0 = x_0(t), y_0 = y_0(t)$, удовлетворяющей выше сформулированным требованиям, то общее решение в форме Коши (2) при $t = C$ становится общим решением уравнения.

Существование общего решения для произвольных уравнений $y' = f(x, y)$ можно гарантировать лишь локально, т.е. в некоторой окрестности точки (x_0, y_0).

Theorem

Пусть $f(x, y)$ - непрерывна в области $G \subseteq R^2_{(x,y)}$, удовлетворяет условию Липшица по y равномерно по x на каждом хомпажте $K \subset Gu\,(x_0, y_0) \in G$. Тогда каждая точка $(x_0, y_0) \in G$ обладает окрестностью $U = U\,(x_0, y_0)$, в которой существует общее решение $y = \Phi(x, C)$ уравнения $y' = f(x, y)$.

Proof

Пусть прямоугольник $\Pi = \{(x, y) \in G : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ целиком расположен в G. Тогда в силу теоремы 1 § 2 существует решение $y = \Phi\,(x, x_0, y_0)$ задачи Коши (1) при $|x - x_0| \leq \delta, \delta = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$, $M = \max|f(x, y)|$ при $(x, y) \in \Pi$.

В качестве начальной точки возьмем точку (x_0, η), где $|\eta - y_0| \leq \frac{b}{2}$. Тогда теорема 1 § 2 применима в прямоугольнике $\Pi(\eta) \subset \Pi$,

$$\Pi(\eta) = \left\{(x, y) \in G : |x - x_0| \leq a, |y - \eta| \leq \frac{b}{2}\right\}.$$

Таким образом, решение $y = \Phi\,(x, x_0, \eta)$ задачи Коши $y' = f(x, y)$, $y\,(x_0) = \eta$, определено при $|x - x_0| \leq \delta_1, \delta_1 = \min\{a, \overset{b}{M}\}$.

Окрестность U определим как подмножество внутренних точек множества $\left\{\Phi\,(x, x_0, \eta)\,, \eta \in \left[y_0 - \frac{b}{2}, y_0 + \frac{b}{2}\right]\right\}$. Любое решение задачи Коши в U имеет вид

$$y = \Phi\,(x, x_0, C)\,, \quad C \in \left(y_0 - \frac{b}{2}, y_0 + \frac{b}{2}\right)$$

Итак, для нелинейных уравнений $y' = f(x, y)$ при выполнении условий теоремы существует общее решение в форме Коши глобально в области G, но общее решение существует лишь локально. Например, для уравнения $y' = y^2$ функция $y = \frac{1}{C-x}$, где C - постоянная интегрирования, не является общим решением на всей плоскости $R^2_{(x,y)}$, так как множество

всех частных решений имеет вид
$\left\{y(x) \equiv 0, y(x) = \frac{1}{C-x}, C \in (-\infty, +\infty), x < C, y > 0 \text{ и } x > C, y < 0\right\}$.
Но в областях $y > 0$ и $y < 0$ функция $y = \frac{1}{C-x}$ уже является общим решением.

В то же время общее решение в форме Коши имеет вид

$$y = \frac{y_0}{1 + (x_0 - x)\,y_0}.$$

Если точку (x_0, y_0) перемещать по прямой $y_0 = -x_0$, то она будет переходить с одной интегральной кривой на другую и общее решение примет вид

$$y = \frac{y_0}{1 - (x + y_0)\,y_0}, \quad y_0 \in (-\infty, +\infty),$$

где $x < \frac{1}{y_0} - y_0$ при $y_0 > 0, x \in (-\infty, +\infty)$ при $y_0 = 0$ и $x > \frac{1}{y_0} - y_0$ при $y_0 < 0$. Таким образом, последняя формула дает общее решение $y' = y^2$ на всей плоскости. Из этого примера также видно, что постоянная интегрирования C не всегда обеспечивает метку

всех частных решений. Поэтому при интегрировании конкретного уравнения не всегда получается его общее решение.

Замечание. Доказанную выше теорему иногда называют теоремой о локальном выпрямлении решений задачи Коши (1), так как в каждой окрестности $U = U(x_0, y_0)$ множество точек (x, C), где $C = C(x, y)$, $(x, y) \in U$, гомеоморфно (т.е. взаимно однозначно и взаимно непрерывно) отображается на множество точек ($x, \Phi(x, C)$), т.е. кусок интегральной кривой $y = \Phi(x, C_0)$, лежащей в окрестности U, отображается в отрезок прямой $C = C_0$.

Аналогично уравнению $y = f(x, y)$ вводится понятие общего решения для нормальных систем и для уравнений порядка n в нормальной форме. Для более же общих типов уравнений и систем уравнений, например, для уравнения первого порядка в симметричной форме, приходится расширять понятие общего решения, рассматривая общее параметрическое решение. Кроме того, общее решение $y = \Phi(x, C)$ может задаваться и неявным образом с помощью уравнения $\psi(x, y, C) = 0$.

13.4.7 § 5-1. Dependence of the solution of the Cauchy problem on the parameters and initial data.

Если задача Коши для диффереициального уравнения является математической моделью реального физического процесса, то уравнение и начальные условия могут содержать какие-либо параметры, характеризующие природу изучаемого явления. Значения параметров и начальные данные обычно известны лишь приближенно, так как они определяются экспериментально или вычисляются. В связи с этим возникает вопрос о характере зависимости решения задачи Коши при небольших изменениях параметров и начальных данных. Ясно, что для практики представляет интерес только такая задача Коши, решение которой мало меняется при малом изменении параметров и начальных данных.

В этом параграфе будут установлены достаточные условия непрерывности и дифференцируемости по параметрам и по начальным данным решения задачи Коши для нормальных систем дифференциальных уравнений.

1. Зависимость решения задачи Коши от параметров

Рассмотрим задачу Коши для нормальной системы

$$y' = f(x, y, \lambda), \quad y(x_0, \lambda) = y_0, \tag{1}$$

где λ - вектор параметров $\lambda_1, ..., \lambda_m, |\lambda - \lambda_0| \leq r$, λ_0 - фиксированный вектор, r - фиксированное положительное число, $f(x, y, \lambda)$ - заданная вектор-функция с n компонентами.

Theorem 1

Пусть вехтор-функция $f(x, y, \lambda)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липиица по y равномерно по x, λ при всех $(x, y) \in G$, где G область $R^{n+1}_{(x,y)}$, и всех λ, для которых $|\lambda - \lambda_0| \leq r$, и пусть, кроме того, $(x_0, y_0) \in G$. Тогда найдется такое число $\delta > 0$, что решение $y = \varphi(x, \lambda)$ задачи Коши (1) является непрерывной функцией при $|x - x_0| \leq \delta, |\lambda - \lambda_0| \leq r$.

Proof

Схема рассуждений в доказательстве теоремы 1 в точности повторяет схему доказательства существования решения задачи Коши для нормальных систем (см. теорему 1 § 2). Поэтому остановимся лишь на основных моментах доказательства.

По лемме об эквивалентности задача Коши (1) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$y(x,\lambda) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[\zeta, y(\zeta,\lambda), \lambda] d\zeta. \tag{2}$$

Следовательно, утверждение теоремы 1 достаточно установить для решений (2). Так как $(x_0, y_0) \in G$ и G - область, то найдутся такие числа $p > 0, q > 0$, что цилиндр

$$G_{pq} = \{(x,y) \in G : |x - x_0| \le p, |y - y_0| \le q\}$$

лежит в G. Поскольку G_{pq}-компакт, то существует число $M > 0$ такое, что

$$|f(x,y,\lambda)| \le M, \quad \forall (x,y) \in G_{pq}, \quad \forall \lambda \in [\lambda_0 - r, \lambda_0 + r]\,.$$

Из условия теоремы следует существование числа $L > 0$ такого, что при $\forall\,(x,y_1)\,,(x,y_2) \in G$ и $\forall \lambda \in [\lambda_0 - r, \lambda_0 + r]$

$$|f\,(x,y_1,\lambda) - f\,(x,y_2,\lambda)| \le L\,|y_1 - y_2|\,. \tag{3}$$

Возьмем $\delta = \min\left(p, \frac{q}{M}\right)$ и при $|x - x_0| \le \delta, |\lambda - \lambda_0| \le r$ рассмотрим последовательные приближения

$$y_0(x,\lambda) = y_0, \quad y_{i+1}(x,\lambda) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\,[\zeta, y_i(\zeta,\lambda), \lambda]\,d\zeta, \quad i = 0,1,2,... \tag{4}$$

Как и при доказательстве существования решения задачи Коши, аналогично устанавливается, что все последовательные приближения $y_i(x,\lambda)$ непрерывны при $|x - x_0| \le \delta, |\lambda - \lambda_0| \le r$ и их графики полностью лежат в области, для которой $(x,y) \in G_{pq}, |\lambda - \lambda_0| \le r$. Используя условие Липшица (3), методом индукции для приближений (4) устанавливается оценка вида

$$|y_{i+1}(x,\lambda) - y_i(x,\lambda)| \le ML^i \frac{|x - x_0|^{i+1}}{(i+1)!}, \quad i = 0,1,2,...$$

Из признака Вейерштрасса тогда следует, что при $|x - x_0| \le \delta, |\lambda - \lambda_0| \le r$

$$y_i(x,\lambda) \Rightarrow \varphi(x,\lambda), \quad i \to \infty.$$

По известной теореме из курса анализа вектор-функция $y = \varphi(x,\lambda)$ непрерывна при $|x - x_0| \le \delta, |\lambda - \lambda_0| \le r$. Повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 1 § 2, получаем, что $y = \varphi(x,\lambda)$ при $|x - x_0| \le \delta, |\lambda - \lambda_0| \le r$ является единственным решением системы интегральных уравнений (2), а, значит, и задачи Коши (1). □

Замечание. Аналогичная теорема справедлива для задачи Коши для уравнения порядка n в нормальной форме, зависящего от вектора параметров λ с компонентами $\lambda_1, ..., \lambda_m$

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\lambda\right), \quad |\lambda - \lambda_0| \le r.$$

Этот результат получается сведением этого уравнения к эквивалентной ему нормальной системе уравнений (см. п. 3 § 2). Аналогичный результат имеет место и для непродолжимых решений (1) (см. [36]).

Рассмотрим теперь вопрос о дифференцируемости по параметрам решения задачи Коши (1). Для простоты изложения ограничимся случаем задачи Коши для скалярного уравнения первого порядка в нормальной форме:

$$y' = f(x, y, \lambda), \quad y\left(x_0, \lambda\right) = y_0, \tag{5}$$

где вектор параметров λ с компонентами $\lambda_1, ..., \lambda_m$ задан при $|\lambda - \lambda_0| \leq r, \lambda_0$ и $r > 0$ - фиксированы, $f(x, y, \lambda)$ - заданная функция, когда (x, y) пробегает область $G \subseteq R^2_{(x,y)}$ и $|\lambda - \lambda_0| \leq r$.

Theorem 2

Если при $\forall (x, y) \in Gu\,|\lambda - \lambda_0| \leq r$ функции $f(x, y, \lambda), \frac{\partial f(x,y,\lambda)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y,\lambda)}{\partial \lambda_i}, i = \overline{1, m}$, непрерыены $u\left(x_0, y_0\right) \in G$, то начдется тажее число $\delta > 0$, что при $|x - x_0| \leq \delta, |\lambda - \lambda_0| \leq r$ для решения $y = \varphi(x, \lambda)$ задачи Коши (5):

1. частные производные $z_i(x, \lambda) = \frac{\partial \varphi(x,\lambda)}{\partial \lambda_i}, i = \overline{1, m}$, непрерывны,
2. смещанные производные $\frac{\partial^2 \varphi(x,\lambda)}{\partial x \partial \lambda_i}, i = \overline{1, m}$, непрержены и не зависят от порядка дифференцирования,
3. частная производная $z_i(x, \lambda)$ удовлетворяет тах называемому чуравнению в вариациях по параметру λ »

$$\frac{\partial z_i}{\partial x} = \frac{\partial f[x, \varphi(x, \lambda), \lambda]}{\partial y} z_i + \frac{\partial f[x, \varphi(x, \lambda), \lambda]}{\partial \lambda_i} \tag{6}$$

и начальному условию $z_i\left(x_0, \lambda\right) = 0, i = \overline{1, m}$.

Proof

Все рассуждения проведем для $\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1}$. Для остальных $\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_i}, i = \overline{2, m}$, рассуждения аналогичны.

Выберем, как и в теореме 1 , цилиндр G_{pq} и число $\delta = \min\left(p, \frac{q}{M}\right)$. Множество $G^{(r)}_{pq} = \{(x, y, \lambda) : (x, y) \in G_{pq}, |\lambda - \lambda_0| \leq r\}$ образует выпуклый по y, λ компакт в пространстве $R^{2+m}_{(x,y,\lambda)}$. Для $|x - x_0| \leq \delta, |\lambda - \lambda_0| \leq r$ положим $\lambda = \left(\lambda_1, \hat{\lambda}\right), \Delta_{\lambda_1} \varphi(x, \lambda) = \varphi\left(x, \lambda_1 + \Delta\lambda_1, \hat{\lambda}\right) - \varphi\left(x, \lambda_1, \hat{\lambda}\right)$.

Поскольку ири

$$|x - x_0| \leq \delta, \quad |\lambda - \lambda_0| \leq r, \quad |\Delta\lambda_1| < r$$
$$\frac{\partial \varphi(x, \lambda)}{\partial x} \equiv f[x, \varphi(x, \lambda), \lambda], \quad \varphi\left(x_0, \lambda\right) = y_0$$
$$\frac{\partial \varphi\left(x, \lambda_1 + \Delta\lambda_1, \hat{\lambda}\right)}{\partial x} \equiv f\left[x, \varphi\left(x, \lambda_1 + \Delta\lambda_1, \hat{\lambda}\right), \lambda_1 + \Delta\lambda_1, \hat{\lambda}\right],$$
$$\varphi\left(x_0, \lambda_1 + \Delta\lambda_1, \hat{\lambda}\right) = y_0$$

то вычитая эти тождества, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}\Delta_{\lambda_1}\varphi(x,\lambda) \equiv f\left[x,\varphi\left(x,\lambda_1+\Delta\lambda_1,\hat{\lambda}\right),\lambda_1+\Delta\lambda_1,\hat{\lambda}\right] - f\left[x,\varphi\left(x,\lambda_1,\hat{\lambda}\right),\lambda_1,\hat{\lambda}\right]$$
$$\Delta_{\lambda_1}\varphi(x,\lambda)=0 \tag{7}$$

Обозначим правую часть первого равенства в (7) через $\Delta_{\lambda_1}f(x,\varphi,\lambda)$ и применим к ней так называемое тождество Адамара (см. [35], [36])

$$\Delta_{\lambda_1}f(x,\varphi,\lambda) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}f\left[x,\varphi\left(x,\lambda_1+t\Delta\lambda_1,\hat{\lambda}\right),\lambda_1+t\Delta\lambda_1,\hat{\lambda}\right]dt =$$
$$= F_1\left(x,\varphi,\lambda,\Delta\lambda_1\right)\Delta_{\lambda_1}\varphi(x,\lambda) + F_2\left(x,\varphi,\lambda,\Delta\lambda_1\right)\Delta\lambda_1$$

где F_1 и F_2-непрерывные функции своих аргументов, получаемые в результате вычисления $\frac{\partial f}{\partial t}$ от сложной функции. Применение тождества Адамара законно, так как при $|x-x_0|\le\delta, |\lambda-\lambda_0|\le r$ любое $(x,\varphi(x,\lambda),\lambda)$ принадлежит $G_{pq}^{(r)}$ - выпуклому по y,λ множеству из $R^{2+m}_{(x,y,\lambda)}$. Тогда (7) дает задачу Коши вида

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Delta_{\lambda_1}\varphi(x,\lambda)}{\Delta\lambda_1}\right) = F_1\cdot\left(\frac{\Delta_{\lambda_1}\varphi(x,\lambda)}{\Delta\lambda_1}\right)+F_2, \quad \frac{\Delta_{\lambda_1}\varphi(x,\lambda)}{\Delta\lambda_1}=0. \tag{8}$$

Коэффициенты F_1 и F_2 полученного линейного дифференциального уравнения первого порядка при $|x-x_0|\le\delta, |\lambda-\lambda_0|\le r$ являются непрерывными функциями x, λ. По теореме 1 решение $\frac{\Delta_{\lambda_1}\varphi(x,\lambda)}{\Delta\lambda_1}$ этой задачи Коши является непрерывной функцией x,λ. Переходя в этом решении к пределу при $\Delta\lambda_1\to 0$, получаем, что частиая производная $\frac{\partial\varphi(x,\lambda)}{\partial\lambda_1}$ определена и непрерывна при $|x-x_0|\le\delta, |\lambda-\lambda_0|\le r$. Из тождества Адамара в силу непрерывности F_1 и F_2 следует, что $F_1\to\frac{\partial f}{\partial y}, F_2\to\frac{\partial f}{\partial\lambda_1}$ при $\Delta\lambda_1\to 0$. Переходя к пределу в задаче (8) при $\Delta\lambda_1\to 0$, получаем, что $z_1(x,\lambda)=\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_1}$ удовлетворяет первому уравнению из (6) и условию $z_1\left(x_0,\lambda\right)=0$. Это значит, что смешаниая производная $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial\lambda_1}$ непрерывна при $|x-x_0|\le\delta$, $|\lambda-\lambda_0|\le r$. Но $y=\varphi(x,\lambda)$ - решение уравнения из (5), т.е.

$$\frac{\partial\varphi(x,\lambda)}{\partial x}\equiv f[x,\varphi(x,\lambda),\lambda].$$

При $|x-x_0|\le\delta, |\lambda-\lambda_0|\le r$ правая часть этого тождества имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial f}{\partial\lambda_1}$, так как $\varphi(x,\lambda)$ в силу доказанного выше имеет непрерывную производную $\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_1}$ и по условию теоремы $2\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial\lambda_i}, i=\overline{1,m}$, - непрерывны. Таким образом, и певая часть $\frac{\partial\varphi(x,\lambda)}{\partial x}$

тождества имеет непрерывную $\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda_1\partial x}$. В силу известной теоремы из курса анализа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial\lambda_1}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda_1\partial x}.$$

Отметим, что уравнение в вариациях является линейным уравнением первого порядка.

Замечание. Аналогичные результаты имеют место для нормальной системы, для уравнений порядка n и для непродолжимых решений (1) (см. [36], [47]).

Example 1.

Найти производную по параметру λ от решения задачи Коши

$$y'=\lambda(1-x)+y-y^2, \quad y(0)=0,$$

при $\lambda=0$.

Solution

Δ Пусть $y = \varphi(x, \lambda)$ - решение задачи Коши и пусть $z(x, \lambda) = \frac{\partial \varphi(x,\lambda)}{\partial \lambda}$.
По теореме $2z(x, \lambda)$ - решение задачи Коши

$$\frac{\partial z}{\partial x} = [1 - 2\varphi(x, \lambda)]z + 1 - x, \quad z|_{x=0} = 0.$$

Поскольку $y = \varphi(\dot{x}, 0)$ - решение задачи Коши

$$y' = y - y^2, \quad y(0) = 0,$$

то $\varphi(x, 0) \equiv 0$. Тогда для $z(x, 0)$ получаем задачу Коши

$$z' = z + 1 - x, \quad z(0) = 0$$

откуда $z = x$.

Theory

Можно установить и обобщение теоремы 2, касающееся существования и непрерывности производных высших порядков по параметрам. Можно показать, что в случае, когда при $(x, y) \in G$ и $|\lambda - \lambda_0| \leq r$ непрерывны функция $f(x, y, \lambda)$ и все ее частные производные $\frac{\partial^{|\alpha|} f(x,y,\lambda)}{\partial y^{\alpha 0} \partial \lambda_1^{\alpha_1} ... \partial \lambda_m^{\alpha_m}}$, $|\alpha| = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$, до порядка $k \geq 1$ включительно, то решение $y = \varphi(x, \lambda)$ задачи Коши (5) при $|x - x_0| \leq \delta, |\lambda - \lambda_0| \leq r$ имеет все непрерывные частные производные $\frac{\partial^{|\beta|} \varphi(x,\lambda)}{\partial \lambda_1^{\beta_1} ... \partial \lambda_m^{\beta_m}}, |\beta| = \beta_1 + \cdots + \beta_m$, до порядка $k \geq 1$ включительно. Более того, решение $y = \varphi(x, \lambda)$ можно разлагать по формуле Тейлора по степеням ($\lambda - \lambda_0$) в окрестности $\lambda = \lambda_0$ с остаточным членом $O\left((\lambda - \lambda_0)^k\right)$. Если же функция $f(x, y, \lambda)$ является аналитической функцией y, λ в некоторой окрестности $y = y_0, \lambda = \lambda_0$, то можно доказать, что и решение $y = \varphi(x, \lambda)$ задачи Коши (5) является аналитической функцией λ в некоторой окрестности $\lambda = \lambda_0$.

Теорема 2 и ее обобщения позволяют получать асимптотическое по параметру λ представление решения задачи Коши (5) при $\lambda \to \lambda_0$. Метод получения асимптотических при $\lambda \to 0$ представлений решения задачи Коши в физических задачах обычно называют методом малого параметра.

Итак, пусть требуется решить задачу Коши

$$y' = f(x, y, \lambda), \quad y|_{x=x_0} = y_0, \tag{9}$$

где $f(x, y, \lambda)$ удовлетворяет условиям теоремы 2 при $\forall (x, y) \in G$ и $|\lambda| < \varepsilon, \varepsilon > 0$. В этом случае задача Коши (9) называется регулярно возмущенной. Рассмотрим задачу Коши, получающуюся из (9) при $\lambda = 0$:

$$y' = f(x, y, 0), \quad y\,(x_0) = y_0. \tag{10}$$

Задача Коши (10) называется невозмущенной. Задача Коши (10) проще задачи (9). Пусть ее решение $y = \varphi(x)$ нами найдено для $x \in \mathcal{I}\,(x_0 \in \mathcal{I})$. При выполнении условий теоремы 2 решение $y = \varphi(x, \lambda)$ возмущенной задачи Коши (9) можно разложить по формуле Тейлора при $\lambda = 0$ с остаточным членом в форме Пеано (для простоты считаем λ скаляром):

$$\varphi(x, \lambda) = \varphi(x, 0) + \frac{\partial \varphi(x, 0)}{\partial \lambda} \cdot \lambda + O(x, \lambda). \tag{11}$$

В силу теоремы $1\varphi(x,0) \equiv \varphi(x)$, а в силу теоремы $2z(x) \equiv \frac{\partial\varphi(x,0)}{\partial\lambda}$ однозначно находится как решение задачи Коши для уравнения в вариациях:

$$z'(x) = \frac{\partial f[x,\varphi(x),0]}{\partial y} \cdot z(x) + \frac{\partial f[x,\varphi(x),0]}{\partial \lambda}, \quad z\left(x_0\right) = 0.$$

Таким образом, формула (11) дает асимптотическое при $\lambda \to 0$ разложение решения регулярно возмущенной задачи Копи (9). Если $f(x,y,\lambda)$ имеет непрерывные производные по y, λ высших порядков, то разложение (11) можно уточнить.

Теория регулярных возмущений, которая обосновывает асимптотические формулы по малому параметру, является теоретической базой для общепринятой в физике техники отбрасывания малых членов уравнения. Метод малого параметра применяется не топько для решения задачи Коши, но и для решения других задач. Например, для получения периодических решений нормальных систем, регулярно возмущенных параметром λ, метод малого параметра тоже является эффективным.

Example 2.

Найти асимптотическую формулу при $\lambda \to 0$ до $O\left(x,\lambda^2\right)$ решения задачи Коши

$$y' = y - y^2 + \lambda(1-x), \quad y|_{x=0} = 0$$

$\triangle$ Для $\forall x \in R_x^1$ и при $\lambda \to 0$ решение $y = \varphi(x,\lambda)$ ищем в виде:

$$\varphi(x,\lambda) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + O\left(x,\lambda^2\right)$$
$$\varphi_k(x) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k\varphi(x,0)}{\partial\lambda^k}, \quad k = 0,1,2$$

После подстановки $\varphi(x,\lambda)$ в исходное уравнение и начальное условие получаем, что $\varphi_0(k), \varphi_1(x), \varphi_2(x)$ - соответственно решения следующих задач Коши:

$$\begin{array}{ll} y' = y - y^2, & y(0) = 0 \\ y' = y + 1 - x, & y(0) = 0 \\ y' = y - x^2, & y(0) = 0 \end{array}$$

Отсюда находим, что $\varphi_0(x) \equiv 0, \varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = -2e^x + x^2 + 2x + 2$ и, значит,

$$\varphi(x,\lambda) = \lambda x + \lambda^2\left(-2e^x + x^2 + 2x + 2\right) + O\left(x,\lambda^2\right), \quad \lambda \to 0.$$

$\square$

13.4.8 § 5-2. Dependence of the solution of the Cauchy problem on the initial data

2. Зависимость решения задачи Коши от начальных данных

Рассмотрим задачу Коши для нормальной системы

$$y'(x) = f(x,y), \quad y\left(x_0\right) = y_0, \tag{12}$$

где $f(x,y)$ - заданная вектор-функция с n компонентами в области $G \subseteq R_{(x,y)}^{n+1}$, а начальная точка (x_0, y_0) принадлежит некоторому шару $S_r \subset G$ радиуса $r > 0$:

$$S_r = \left\{(x_0,y_0) \in G : |x_0 - \hat{x}_0|^2 + |y_0 - \hat{y}_0|^2 \le r^2\right\} :$$

Theorem 3

Если $f(x,y)$ - непрерывна в области G и удовлетворяет в G условию Липшица по y равномерно по x, то найдется число $\delta > 0$ такое, что решение $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ задачи Коши (12) является непрерывной функцией $x, x_0, y_0 при\, |x - x_0| \leq \delta, (x_0, y_0) \in S_r$.

Proof

При замене переменных $x - x_0 = t, y - y_0 = z$ задача Коши (12) переходит в эквивалентную задачу Коши

$$z'(t) = f(x_0 + t, y_0 + z) \equiv F(t, z, x_0, y_0), \quad z(0) = 0. \tag{13}$$

В задаче (13) параметры x_0, y_0 уже входят в правую часть системы. Из условий теоремы 3 следует, что F непрерывна и удовлетворяет условию Липиица по z равномерно по t, x_0, y_0 при всех $(t, z) \in \tilde{G}(\tilde{G}$ - область, полученная из области G при замене переменных) и всех $(x_0, y_0) \in S_r$. Поэтому для задачи Коши (13) применима теорема 1.

В силу этой теоремы решение $z = \psi(t, x_0, y_0)$ задачи Коши (13) является непрерывной функцией t, x_0, y_0 при $|t| \leq \delta$, где $\delta > 0$, и всех $(x_0, y_0) \in S_r$. Следовательно, и решение задачи Коши (12) $\varphi(x, x_0, y_0) = y_0 + \psi(x - x_0, x_0, y_0) -$ непрерывная функция x, x_0, y_0 при $|x - x_0| \leq \delta, (x_0, y_0) \in S_\tau$. $\square$

Вопрос о дифференцируемости по начальным данным рассмотрим для простоты в случае скалярного уравнения первого порядка в нормальной форме. Пусть задана задача Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{14}$$

Theorem 4

Пусть функции $f(x,y), \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывны в области G и пусть $(x_0, y_0) \in S_r$. Тогда начдется такое число $\delta > 0$, что при $|x - x_0| \leq \delta$, $(x_0, y_0) \in S_r$ для решения $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ задачи Кочи (14):

1. частные производные $\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}, \frac{\partial \varphi}{\partial y_0}$ непрерывны,
2. смешанные частные производные $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial x_0}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y_0}$ непрерывны,
3. частная производная $\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} = u(x, x_0, y_0)$ удовлетворяет «уравнению в вариациях по x_0 »

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f[x, \varphi(x, x_0, y_0)]}{\partial y} \cdot u$$

и начальному условию $u|_{x=x_0} = -f(x_0, y_0)$,

4) частная производная $\frac{\partial \varphi}{\partial y_0} = v(x, x_0, y_0)$ удовлетворяет «уравнению в вариациях по yo »

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f[x, \varphi(x, x_0, y_0)]}{\partial y} \cdot v$$

u начальному условию $v|_{x=x_0} = 1$.

Proof

При замене $x - x_0 = t, y - y_0 = z$ задача Коши (14) примет вид

$$z'(t) = f\left(x_0 + t, y_0 + z\right) \equiv F\left(t, z, x_0, y_0\right), \quad z(0) = 0 \tag{15}$$

для которой выполнены условия теоремы 2. Если $z = \psi\left(t, x_0, y_0\right)$-решение задачи Коши (15), то $\varphi\left(x, x_0, y_0\right) = y_0 + \psi\left(x - x_0, x_0, y_0\right)$ - решение задачи Коши (14). Тогда из выполнения для $\psi\left(t, x_0, y_0\right)$ утверждений теоремы 2 получаем для $\varphi\left(x, x_0, y_0\right)$ утверждения теоремы 4 , если учесть, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} = -\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y_0} = 1 + \frac{\partial \psi}{\partial y_0}.$$

Замечания. 1) Уравнения в вариациях в теореме 4 формально получаются путем подстановки в (14) решения $y = \varphi\left(x, x_0, y_0\right)$ и дифференцирования по x_0, y_0 полученного тождества. Поскольку уравнения в вариациях в теореме 4 являются линейными уравнениями первого порядка, то можно выписать явные формулы для $\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial y_0}$.
2) Аналогичные результаты справедливы для уравиений порядка n в нормальной форме и для непродолжимых решений задачи Коши (см. [36], [47]).

13.4.9 5-3 Correctness of the Cauchy problem

3. Корректность задачи Коши

Рассмотрим задачу Коши для нормальной системы

$$y'(x) = f(x, y), \quad y\left(x_0\right) = y_0, \tag{16}$$

где $f(x, y)$ - заданная вектор-функция с n компонентами в некоторой области $G \subseteq R_{(x,y)}^{n+1}, \quad (x_0, y_0) \in G$.

Definition

Задача Коши (16) называется корректной, если наидется такой промежуток $\mathcal{I}\left(x_0 \in \mathcal{I}\right)$, что при $\forall x \in \mathcal{I}$ решение $y = \varphi(x)$ задачи Коши (16) существует, единственно и непрерывно зависит от данных задачи Коши (правой части системы и начальных данных x_0, y_0) в том смысле, что для $\forall \varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что как только

$$|\tilde{f}(x, y) - f(x, y)| < \delta, \quad |\tilde{x}_0 - x_0| < \delta, \quad |\tilde{y}_0 - y_0| < \delta,$$

то при $\forall x \in \mathcal{I} |\bar{\varphi}(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$.
В этом определении считается, что $\tilde{f}(x, y)$ определена в $G, (\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) \in G$ и $y = \tilde{\varphi}(x)$ - решение задачи Коши (1) при $f(x, y) \equiv \tilde{f}(x, y), x_0 = \tilde{x}_0,\ y_0 = \tilde{y}_0$.

Рассмотренная в пп. 1, 2 непрерывная зависимость решения задачи Коши от параметров и начальных данных является частным случаем вопроса о корректности задачи Коши. Именно корректные задачи Коши могут служить математической моделью реальных физических процессов, так как данные этих процессов, как правило, определяются лишь приближенно и, следовательно, необходимо быть уверенным в том, что решение задачи Коши мало изменяется при малых изменениях исходных данных задачи Коши.

Установим достаточные условия корректности задачи Коши (16). Заметим, что в п. 2 при $n = 1$ корректность задачи Коши (16) по отношению к возмущению начальных данных уже была доказана.

Theorem 5

Пусть в области G вектор-функция $f(x,y)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липиица по y равномерно по x. Тогда задача Коши (16) является корректной, причем если

$$|\tilde{f}(x,y) - f(x,y)| < \delta, \quad |\tilde{x}_0 - x_0| < \delta, \quad |\tilde{y}_0 - y_0| < \delta,$$

то соответствующие решения $y = \bar{\varphi}(x), y = \varphi(x)$ задачи Коши (15) на некотором $[\alpha, \beta]$ удовлетворяют оченке ($x_0, \tilde{x}_0 \in [\alpha, \beta]$):

$$|\tilde{\varphi}(x) - \varphi(x)| \leq \delta \left[\left(1 + M_1 + \frac{1}{L} \right) e^{L(\beta - \alpha)} - \frac{1}{L} \right],$$

где L - постоянныя Липицица в G и $M_1 > 0$ - некоторое число.

Proof

Ретение $y = \varphi(x)$ задачи Коши (16) существует и единственно при $|x - x_0| \leq \delta_1$, где $\delta_1 = \min\left(p, \frac{q}{M}\right), M = \max|f(x,y)|, \forall (x,y) \in G_{pq} \subset G$ (см. теорему 1 § 2). Аналогично, решение $y = \bar{\varphi}(x)$ задачи Коши

$$y' = \tilde{f}(x,y), \quad y(\tilde{x}_0) = \tilde{y}_0$$

по той же теореме существует, единственно при $|x = \tilde{x}| \leq \bar{\delta}_1$, где $\tilde{\delta}_1 = \min\left(\bar{p}, \frac{\bar{q}}{M}\right), \tilde{M} = \max|\tilde{f}(x,y)|, \forall (x,y) \in G_{\bar{p}\bar{q}} \subset G$. При достаточно близккх (x_0, y_0) и $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$, т.е. при $|\bar{x}_0 - x_0| < \delta$, $|\tilde{y}_0 - y_0| < \delta$, где $\delta > 0$ достаточно мало, существует

$$[\alpha, \beta] = [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1] \cap \left[\tilde{x}_0 - \tilde{\delta}_1, \tilde{x}_0 + \tilde{\delta}_1\right]$$

такой, что $x_0, \tilde{x}_0 \in [\alpha, \beta]$. Тогда для всех $x \in [\alpha, \beta]$ имеем, что

$$\varphi(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f[\zeta, \varphi(\zeta)] d\zeta$$
$$\tilde{\varphi}(x) \equiv \bar{y}_0 + \int_{\tilde{x}_0}^{x} \tilde{f}[\zeta, \tilde{\varphi}(\zeta)] d\zeta$$

Отсюда, считая для определенности $x_0 < \tilde{x}_0$, получаем, что

$$\begin{aligned} |\tilde{\varphi}(x) - \varphi(x)| &\leq |\tilde{y}_0 - y_0| + \int_{x_0}^{\tilde{x}_0} |f[\zeta, \varphi(\zeta)]| d\zeta + \\ &+ \int_{\tilde{x}_0}^{x} |\tilde{f}[\zeta, \tilde{\varphi}(\zeta)] - f[\zeta, \varphi(\zeta)]| d\zeta \leq |\tilde{y}_0 - y_0| + \int_{x_0}^{\tilde{x}_0} |f[\zeta, \varphi(\zeta)]| d\zeta + \\ &+ \int_{\tilde{x}_0}^{x} |\tilde{f}[\zeta, \tilde{\varphi}(\zeta)] - \tilde{f}[\zeta, \varphi(\zeta)]| d\zeta + \int_{\tilde{x}_0}^{x} |\bar{f}[\zeta, \varphi(\zeta)] - f[\zeta, \varphi(\zeta)]| d\zeta \end{aligned}$$

Если $M_1 = \max(M, \tilde{M})$ и $L > 0$ - постоянная Липшица в области G, то из последней оценки находим, что при $|\tilde{f}(x,y) - f(x,y)| < \delta$:

$$|\tilde{\varphi}(x) - \varphi(x)| \leq |\tilde{y}_0 - y_0| + M_1 |\tilde{x}_0 - x_0| + L \cdot \int_{\tilde{x}_0}^{x} |\bar{\varphi}(\zeta) - \varphi(\zeta)| d\zeta + \delta |x - \tilde{x}_0|$$

По усиленной теореме Гронуолла (см. лемму 4 § 1) тогда $\forall x \in [\alpha, \beta]$

$$|\tilde{\varphi}(x)-\varphi(x)| \leq \left(|\tilde{y}_0-y_0|+M_1\left|\tilde{x}_0-x_0\right|\right) e^{L|x-\tilde{x}_0|}+\frac{\delta}{L}\left(e^{L|x-\tilde{x}_0|}-1\right) \leq$$
$$\leq\left(\delta+M_1 \delta\right) e^{L(\beta-\alpha)}+\frac{\delta}{L}\left(e^{L(\beta-\alpha)}-1\right)=\delta\left[\left(1+M_1+\frac{1}{L}\right) e^{L(\beta-\alpha)}-\frac{1}{L}\right]$$

Замечание. Сведением уравнения порядка n к нормальной системе можно показать, что при условиях теоремы 2 § 2 задача Коши для уравнения порядка n тоже корректна.

При неисполнении условий теоремы 5 задача Коши (15) может оказаться некорректной. Если взять задачу Коши для бесконечной системы уравнений

$$y_n'(x)=n y_n(x), \quad y_n(0)=y_0, \quad n \in N,$$

то она не будет корректной, поскопьку $y_n(x)=y_0 e^{nx} \to \infty$ при $n \to \infty$ для $x \in [0, \delta]$, как бы мало ни было число $\delta>0$.

13.4.10 § 6. Solvability of the Cauchy problem for a first-order differential equation that is not solved with respect to the derivative. Special solutions

Рассмотрим уравнение

$$F\left(x, y, y'\right)=0 \tag{1}$$

где $F(x, y, p)$ - заданная непрерывная функция в некоторой области $G \subseteq R^3_{(x,y,p)}$.

Для уравнения (1) задача Коши ставится следующим образом (см. § 3 главы 1).

Задача Коши для (1). Задана точка $\left(x_0, y_0, p_0\right) \in G$, для которой $F\left(x_0, y_0, p_0\right)=0$. Требуется найти такое решение уравнения (1), которое удовлетворяет начальным условиям

$$y\left(x_0\right)=y_0, \quad y'\left(x_0\right)=p_0 \tag{2}$$

Следующая теорема дает достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши (1), (2).

Theorem

Пусть в области G функция $F(x, y, p)$ непрерывно дифференцируема и пусть $\frac{\partial F\left(x_0, y_0, p_0\right)}{\partial p} \neq 0$. Тогда найдется такое число $\delta>0$, что при $\left|x-x_0\right| \leq \delta$ решение задачи Коши (1), (2) существует и единственно.

Перейдем к системе

$$\begin{cases} y'(x)=p \\ F(x, y, p=0) \end{cases}$$

Поскольку $\left(x_0, y_0, p_0\right) \in G, F\left(x_0, y_0, p_0\right)=0, \frac{\partial F\left(x_0, y_0, p_0\right)}{\partial p} \neq 0$ и F-непрерывно дифференцируемая функция в области G, то в некоторой окрест-

ности $U\left(x_0, y_0, p_0\right) \subset G$ выполнены все условия теоремы существования и единственности неявной функции $p=f(x, y)$, определяемой уравнением $F(x, y, p)=0$. Согласно этой теореме найдутся такие окрестности $U\left(x_0, y_0\right)$ и $U\left(p_0\right)$, что для $\forall(x, y) \in U\left(x_0, y_0\right)$ существует единственное решение $p=f(x, y) \in U\left(p_0\right)$ уравнения $F(x, y, p)=0$. Это решение $p=f(x, y)$ является непрерывно дифференцируемой функцией в окрестности $U\left(x_0, y_0\right)$ и $p_0=f\left(x_0, y_0\right)$.

Рассмотрим задачу Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{3}$$

в некотором прямоугольнике $V = \{(x, y) \in U(x_0, y_0) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq$ b) $\subset U(x_0, y_0)$, где числа a и b положительные. В прямоугольнике V выполнены все условия теоремы 1 § 2 , поскольку в области V функция $f(x, y)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по y равномерно по x. Последнее вытекает из леммы 2 § 1 , так как V - выпуклая по y область и $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ - непрерывная ограниченная функция в области V.

Согласно теореме 1 § 2 найдется такое $\delta > 0$, что при $|x - x_0| \leq \delta$, $\delta = \min\left(a, \frac{b}{M}\right), M = \max|f(x, y)|, (x, y) \in V$, решение $y = \varphi(x)$ задачи Коши (3) существует и единственно. Это решение является искомым решением задачи Коши (1), (2). Действительно, $y = \varphi(x)$ удовлетворяет уравнению (1), так как $F[x, y, f(x, y)] \equiv 0, \forall (x, y) \in U(x_0, y_0)$ и $y = \varphi(x)-$ решение уравнения $y' = f(x, y)$ при $|x - x_0| \leq \delta$. Кроме того, $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = f[x_0, \varphi(x_0)] = f(x_0, y_0) = p_0$.

Доказанная теорема геометрически означает, что через точку (x_0, y_0) в некоторой окрестности $U(x_0, y_0)$ при выполнении условий теоремы проходит единственная интегральная кривая уравнения (1) с заданным в этой точке угловым коэффициентом касательной p_0. В этом случае говорят, что в точке (x_0, y_0) имеется локальная единственность решения задачи Коши (1), (2). Точка (x_0, y_0, p_0) называется особой точкой уравнения (1), если либо $(x_0, y_0, p_0) \notin G$, либо $(x_0, y_0, p_0) \in G$, но в окрестности точки (x_0, y_0) решение задачи Коши (1), (2) или не существует или не единственно.

Definition

Решение уравнения (1) $y = \psi(x), x \in \mathcal{I}$, называется особым решением, если каждая точка $(x_0, \psi(x_0)), x_0 \in \mathcal{I}$, его интегральной кривой является точкой локальной неединственности решения задачи Коши (1), (2).

Особое решение $y = \psi(x), x \in \mathcal{I}$, уравнения (1) геометрически означает, что интегральная кривая для $y = \psi(x)$ в каждой своей точке касается некоторой другой интегральной кривой уравнения (1) и не совпадает с ней в некоторой окрестности этой точки.

Если в каждой точке области G выполнены условия вышедоказанной теоремы, то в G уравнение (1) не имеет особых решений. Для существования особых решений необходимо, чтобы в G нарушались условия этой теоремы. Будем предполагать в дальнейшем, что $F(x, y, p)$ является непрерывно дифференцируемой в G функцией, но что $\frac{\partial F}{\partial p}$ может обращаться в нуль в некоторых точках G. Тогда, если точка $(x_0, y_0, p_0) \in G$ и через точку $(x_0, y_0) \in R^2_{(x,y)}$ проходит интегральная кривая особого решения (1) с направлением касательной p_0, то необходимо

$$\begin{cases} F(x_0, y_0, p_0) = 0, \\ \frac{\partial F(x_0, y_0, p_0)}{\partial p} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Исключая из системы (4) p_0, находим связь между x_0, y_0 :

$$\Phi(x_0, y_0) = 0$$

Definition

Множество точек $(x, y) \in R^2_{(x,y)}$ (кривая на плоскости $R^2_{(x,y)}\Big)$, определяемое уравнением $\Phi(x, y) = 0$, называется дискриминантным множеством точек (дискриминантной кривой) уравнения (1).

Таким образом, интегральная кривая особого решения уравнения (1) необходимо является дискриминантной кривой (1). Обратное не всегда верно. Дискриминантная кривая не обязана быть гладкой кривой, не обязана определять решение уравнения (1) и, значит, не обязана давать особое решение (1). Например, прямая $y = 2x$ является дискриминантной кривой уравнения

$$y'^2 - (2x + y)y' + 2xy = 0$$

но не дает его репения.
Из всего сказанного следует, что для нахождения особых решений уравнения (1) требуется:

1. найти все решения (1),
2. найти дискриминантные кривые (1),
3. отобрать те из решений (1), которые дают дискриминантные кривые (1),
4. для отобранных решений проверить выполнение определения особого решения (1).

Пусть $y = \varphi(x, C), x \in \mathcal{I}$, семейство решений уравнения (1), зависящее от параметра C, и $y = \psi(x), x \in \mathcal{I}$, - кандидат в особые решения (1). Для выполнения определения особого решения необходимо, чтобы для $\forall x \in \mathcal{I}$

$$\begin{cases} \varphi(x, C) = \psi(x) \\ \frac{\partial \varphi(x,C)}{\partial x} = \psi'(x) \end{cases}$$

Получилась переопределенная система уравнений для нахождения $C = C(x), x \in \mathcal{I}$. Если для каждого $x \in \mathcal{I}$ существует хотя бы одно решение $C = C(x)$ этой системы, то решение $y = \psi(x), x \in \mathcal{I}$, является особым решением уравнения (1).

Example 1.

Найти все решения, исследовать особые решения и нарисовать интегральные кривые уравнения

$$y'^2 + 4xy' = 5y^2 + 9y.$$

Solution.

Решения уравнения находим методом введения параметра. Перейдем к эквивалентной системе

$$\begin{cases} dy = pdx \\ p^2 + 4xp = 5x^2 + 9y \end{cases}$$

Находя 9dy из второго уравнения и подставляя в первсе уравнение, получаем

$$9pdx = 2pdp + 4(pdx + xdp) - 10xdx$$

Отсюда

$$(p + 2x)(2dp - 5dx) = 0$$

Если $p + 2x = 0$, то из второго уравнения системы находим решение $y = -x^2$.

Если же $2dp - 5dx = 0$, то $2p = 5(x - C)$, где C - произвольная постоянная. Из второго уравнения системы тогда получаем семейство решений

$$y = \frac{5}{4}(x - C)^2 - \frac{5}{9}C^2.$$

Дискриминантные кривые находим из системы уравнений

$$\begin{cases} p^2 + 4xp = 5x^2 + 9y \\ 2p + 4x = 0 \end{cases}$$

Исключая p из этой системы, получаем, что $y = -x^2$ - дискриминантная кривая. Так как $y = -x^2$-решение, то это единственный кандидат в особые решения. Проверим выполнение определения особого решения. Для $\forall x \in R^1_x$ должна выполняться система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{5}{4}(x - C)^2 - \frac{5}{9}C^2 = -x^2 \\ \frac{5}{2}(x - C) = -2x \end{cases}$$

Эта система совместна при $C = \frac{9x}{5}$, следовательно, $y = -x^2$ является особым решением уравнения. Картина поведения интегральных кривых уравнения показана на рис. 2.

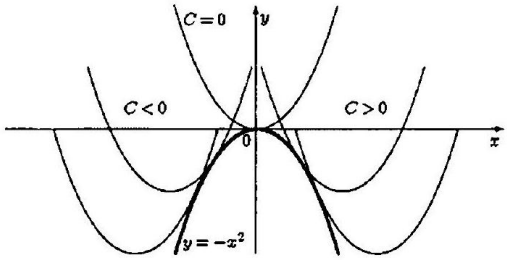


Рис. 2

Example 2.

Найти все решения, исследовать особые решения и нарисовать интегральные кривые уравнения

$$3y'^2 - 4e^{2x}y' + 4ye^{2x} = 0$$

Перейдем к эквивалентной системе уравнений

$$\begin{cases} dy = pdx \\ 3p^2 - 4e^{2x}p + 4ye^{2x} = 0 \end{cases}$$

Находя dy из второго уравнения и подставляя в первое уравнение системы, после упрощений получаем уравнение

$$\left(1 - \frac{3}{2}pe^{-2x}\right)(dp - pdx) = 0$$

Если $p = \frac{2}{3}e^{2x}$, то получаем решение $y = \frac{1}{3}e^{2x}$, если же $dp - pdx = 0$, то либо $p = 0$, что дает решение $y = 0$, либо $p = Ce^x$, где $C \neq 0$ произвольная постоянная, что дает решения $y = Ce^x - \frac{3}{4}C^2$. Если допустить $C = 0$, то формула $y = Ce^x - \frac{3}{4}C^2$ содержит и решение $y = 0$.

Система уравнений

$$\begin{cases} 3p^2 - 4e^{2x}p + 4ye^{2x} = 0 \\ 6p - 4e^{2x} = 0 \end{cases}$$

определяет дискриминантную кривую $y = \frac{1}{3}e^{2x}$. Поскольку эта функция является решением, то она единственный кандидат в особые ре-

шения. Проверим для нее выполнение определения особого решения. Для $\forall x \in R^1_x$ должно быть:

$$\begin{cases} Ce^x - \frac{3}{4}C^2 = \frac{1}{3}e^{2x}, \\ Ce^x = \frac{2}{3}e^{2x} \end{cases}$$

Эта система имеет решение $C = \frac{2}{3}e^x$ при $C > 0$. При $C \leq 0$ система несовместна. Следовательно, $y = \frac{1}{3}e^{2x}$-особое решение. Картина поведения интегральных кривых показана на рис. 3.

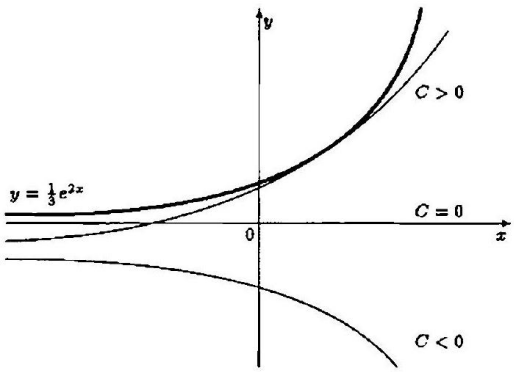


Рис. 3

Theory

Замечание. Если уравнение (1) определено и на границе области G, то, если часть границы или вся граница являются интегральными кривыми (1), они могут давать особые решения (1). (??? I don't understand it)

Обобщением уравнения (1) служит система уравнений

$$F(x, y, y') = 0, \tag{5}$$

где F-заданная вектор-функция с n компонентами в некоторой области $G \subseteq R^{1+2n}_{(x,y,p)}$, а $y(x)$ - неизвестная вектор-функция с n компонентами. Постановка задачи Коши и условия ее однозначной разрешимости для систем (5) аналогичны случаю скалярного уравнения (1). Общая система уравнений

$$F_i\left(x, y_1, y_1', ..., y_1^{(m_1)}, ..., y_n, y_n', ..., y_n^{(m_n)}\right) = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

подходящей заменой (см. п. 3 § 2) сводится к системе вида (5). (??? I don't understand it)

Упражнения к главе 4

1. Показать, что из выполнения условия Липшица для функции одной переменной $y = f(x), x \in [a, b]$, следует непрерывность функции $y = f(x)$ на $[a, b]$. На примере функции $y = \sqrt{x}$ убедиться, что обратное утверждение неверно.

2. Показать, что функция одной переменной $y = x^2$ удовлетворяет усповию Липшица на любом $[a, b]$ и не удовлетворяет условию Липшица на всей числовой оси R^1_x.

3. Пусть функция $f(x,y)m \geq 1$ раз непрерывно дифференцируемая в плоской области G. Доказать, что всякое решение $y = \varphi(x)$ уравнения $y' = f(x,y)$ имеет непрерывную производную $(m+1)$-го порядка.

4. Оценить интервал, на котором сходятся последовательные приближения для задачи Коши

$$y' = y^2 + \cos x, \quad y(0) = 0$$

5. Доказать, что последовательность функций $y_n(x)$, определяемая соотношениями

$$y_0(x) \equiv 0, \quad y_n(x) = \cos x - 2 - \int_0^x \left[y_{n-1}(\zeta) - \cos\zeta\right]^2 \sin\zeta d\zeta, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

сходится равномерно на $[0; 0,1]$ и не сходится равномерно на $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.

6. Пусть $y = \varphi(x, \alpha, \beta)$ - решение задачи Коши

$$y'' = \alpha y - y^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \beta.$$

Найти

$$\frac{\partial\varphi(x,1,0)}{\partial\alpha}, \quad \frac{\partial\varphi(x,1,0)}{\partial\beta}.$$

13.5 Normal linear systems of differential equations with variable coefficients

13.5.1 § 1. Investigation of the Cauchy problem for a normal linear system of equations with variable coefficients

1. Вспомогательные сведения о матричных функциях

Пусть $\mathcal{I}$-промежуток действительной оси Ox и пусть матрица $A(x) = \|a_{ij}(x)\|, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$, задана при $x \in \mathcal{I}$, причем ее элементы $a_{ij}(x)$ могут быть комплекснозначными. Для каждого фиксированного $x \in \mathcal{I}$ выражение

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}(x)|^2}$$

называется нормой матрицы $A(x)$ и обозначается через $\|A(x)\|$. Очевидны следующие свойства нормы матрицы. Если λ - комплексное число, то при $x \in \mathcal{I}$

$$\|\lambda A(x)\| = |\lambda| \cdot \|A(x)\|.$$

Если $A_1(x)$ и $A_2(x)$ - две матрицы с m строками и n столбцами при $x \in \mathcal{I}$, то

$$\|A_1(x) + A_2(x)\| \leqslant \|A_1(x)\| + \|A_2(x)\|.$$

Пусть теперь $B(x)$ - матрица с n строками и k столбцами при $x \in \mathcal{I}$. Тогда

$$\|A(x) \cdot B(x)\| \leqslant \|A(x)\| \cdot \|B(x)\|.$$

В самом деле, если

$$C(x) = A(x) \cdot B(x) = \|c_{ij}(x)\|, \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,k},$$

то при $x \in \mathcal{I}$

$$c_{ij}(x) = \sum_{l=1}^{n} a_{il}(x) \cdot b_{lj}(x).$$

По неравенству Коши - Буняковского

$$|c_{ij}(x)|^2 \leqslant \sum_{l=1}^{n} |a_{il}(x)|^2 \sum_{p=1}^{n} |b_{pj}(x)|^2$$

Тогда при $x \in \mathcal{I}$

$$\|C(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} |c_{ij}(x)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} |a_{il}(x)|^2 \sum_{p=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \|b_{pj}(x)\|^2 = \|A(x)\| \cdot \|B(x)\|.$$

В частности, если $B(x)$ - столбец $y(x)$ с компонентами $y_1(x), ..., y_n(x)$, то $\|B(x)\| = |y(x)|$ и при $x \in \mathcal{I}$

$$\|A(x)y(x)\| \leqslant \|A(x)\| \cdot |y(x)|.$$

Заметим, что $|a_{ij}(x)| \leqslant \|A(x)\|$ при $x \in \mathcal{I}$ и всех $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$. Пусть теперь задана последовательность матриц при $x \in \mathcal{I}$

$$A_k(x) = \left\| a_{ij}^{(k)}(x) \right\|, \quad i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}, k = 1, 2, 3, ...$$

Матричный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k(x)$$

называется сходящимся при $x \in \mathcal{I}$ (равномерно сходящимся на промежутке $\mathcal{I}$), если все ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)}(x), \quad i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n},$$

сходятся при $x \in \mathcal{I}$ (равномерно сходятся на $\mathcal{I}$).
Признак Вейерштрасса. Пусть для всех $x \in [\alpha, \beta], \|A_k(x)\| \leqslant c_k$ и пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ сходится. Тогда матричный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} A_k(x)$ сходится абсолютно и равномерно на $[\alpha, \beta]$.

Для $a_{ij}^{(k)}(x)$ при всех $x \in [\alpha, \beta], i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$, выпалняется оценка

$$\left| a_{ij}^{(k)}(x) \right| \leqslant \|A_k(x)\| \leqslant c_k$$

и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ сходится. Тогда по обычному признаку Вейерштрасса все ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)}(x)$ сходятся абсолютно и равномерно на $[\alpha, \beta]$.

В частности, ряд $E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k(x)$ равномерно сходится на $[\alpha, \beta]$. Его сумма называется $e^{A(x)}$.

По определению, если все элементы $a_{ij}(x)$ непрерывны при $x \in \mathcal{I}$, то матрица $A(x)$ называется непрерывной при $x \in \mathcal{I}$. Если же все элементы $a_{ij}(x)$ - непрерывно дифференцируемы при $x \in \mathcal{I}$, то матрица $A(x)$ называется непрерывно дифференцируемой при $x \in \mathcal{I}$ и ее производная

$$A'(x) = \left\| a'_{ij}(x) \right\|, \quad i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}.$$

Имеют место следующие очевидные свойства непрерывно дифференцируемых матриц.

Если Λ - числовая матрица, для которой определено произведение $\Lambda \cdot A(x)$ и $A(x)$ - дифференцируема на $\mathcal{I}$, то $[\Lambda \cdot A(x)]' = \Lambda \cdot A'(x)$. Если же $A_1(x)$ и $A_2(x)$ - непрерывно дифференцируемые на $\mathcal{I}$ матрицы с m строками и n столбцами, то $[A_1(x) + A_2(x)]' = A'_1(x) + A'_2(x), x \in \mathcal{I}$. Кроме того, если $A(x)$ и $B(x)$ - непрерывно дифференцируемы при $x \in \mathcal{I}$ матрицы, для которых определено произведение $A(x) \cdot B(x)$, то

$$[A(x) \cdot B(x)]' = A'(x) \cdot B(x) + A(x) \cdot B'(x).$$

Отметим, что в этой формуле нельзя переставлять сомножители. Из этой формулы, в частности, следует, что для непрерывно дифференцируемой при $x \in \mathcal{I}$ матрицы $A(x)$, для которой $A(x) \cdot A'(x) = A'(x) \cdot A(x)$ (т.е. $A(x)$ перестановочна с $A'(x)$), при любом $n \in N$

$$[A^n(x)]' = nA^{n-1}(x) \cdot A'(x) = n \cdot A'(x) \cdot A^{n-1}(x).$$

В свою очередь, отсюда вытекает, что при условии перестановочности непрерывно дифференцируемой при $x \in [\alpha, \beta]$ матрицы $A(x)$ с $A'(x)$ матрица $e^{A(x)}$ непрерывно дифференцируема и

$$\left[e^{A(x)}\right]' = e^{A(x)} \cdot A'(x) = A'(x) \cdot e^{A(x)}.$$

Пусть $A(x)$ - непрерывная на $[\alpha, \beta]$ матрица. Если Λ - числовая матрица, для которой определено $\Lambda \cdot A(x)$, то для $\forall x_0, x \in [\alpha, \beta]$

$$\int_{x_0}^{x} \Lambda \cdot A(\zeta) d\zeta = \Lambda \cdot \int_{x_0}^{x} A(\zeta) d\zeta,$$

где под интегралом $\int_{x_0}^{x} A(\zeta) d\zeta$ понимается матрица с элементами $\int_{x_0}^{x} a_{ij}(\zeta) d\zeta$, $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$. Если же $B(x)$ - непрерывная на $[\alpha, \beta]$ матрица с m строками и n столбцами, то

$$\int_{x_0}^{x} [A(\zeta) + B(\zeta)] d\zeta = \int_{x_0}^{x} A(\zeta) d\zeta + \int_{x_0}^{x} B(\zeta) d\zeta$$

при $x_0, x \in [\alpha, \beta]$.

Если $A(x)$ - непрерывно дифференцируемая на $[\alpha, \beta]$ матрица, то

$$\int_{\alpha}^{\beta} A'(x) dx = A(\beta) - A(\alpha).$$

2. Уточнение исследования задачи Коши

Рассмотрим нормальную линейную систему уравнений

$$y'(x) = A(x)y(x) + f(x), \tag{1}$$

где $x \in [\alpha, \beta], A(x)$ - заданная непрерывная при $x \in [\alpha, \beta]$ квадратная порядка n комплекснозначная матрица, $f(x)$ - заданная непрерывная при $x \in [\alpha, \beta]$ вектор-функция

с n комплекснозначными компонентами, $y(x)$ неизвестная комплекснозначная вектор-функция с n компонентами. Система (1) называется линейной однородной, если $f(x) \equiv 0$ на $[\alpha, \beta]$. В противном случае она называется линейной неоднородной системой.

Решение системы (1) определяется аналогично тому, как оно было определено в главе 3 для системы (1) с постоянной матрицей A. Комплексная система порядка n (1) эквивалентна некоторой действительной линейной системе порядка $2n$. В самом деле, если положить $A(x) = A_1(x) + iA_2(x), f(x) = f_1(x) + if_2(x), y(x) = u(x) + iv(x)$, то система (1) примет вид

$$\begin{cases} u'(x) = A_1(x)u(x) - A_2(x)v(x) + f_1(x) \\ v'(x) = A_2(x)u(x) + A_1(x)v(x) + f_2(x) \end{cases}$$

Зададим начальное условие

$$y\left(x_0\right) = y_0, \tag{2}$$

где $x_0 \in [\alpha, \beta]$ и y_0 - заданный n-мерный комплексный вектор.
Задачей Коши для системы (1) называется задача нахождения решения (1), удовлетворяющего начальному условию (2).

Theorem

Пусть матрица $A(x)$ и вектор-функция $f(x)$ непрерывны яа $[\alpha, \beta]$ и пусть $x_0 \in [\alpha, \beta]$ и y_0 - произвольный вектор. Тогда на всем $[\alpha, \beta]$ решение задачи Коши (1), (2) существует и ебинственто.

Proof

По лемме об эквивалентности (она верна и для комплекснозначной задачи Коши) задача Коши (1), (2) эквивалентна системе интегральных уравнений на $[\alpha, \beta]$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} [A(\zeta)y(\zeta) + f(\zeta)]d\zeta \tag{3}$$

Доказательство существования решения (3) проведем методом последовательных приближений. Пусть $x, x_0 \in [\alpha, \beta], x_0 \neq x$,

$$y_0(x) = y_0, \quad y_{i+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \left[A(\zeta)y_i(\zeta) + f(\zeta)\right] d\zeta, \quad i = 0, 1, 2, ... \tag{4}$$

Все приближения $y_{i+1}(x)$ непрерывны на $[\alpha, \beta]$ в силу непрерывности $A(x)$ и $f(x)$ на $[\alpha, \beta]$. Докажем равномерную на $[\alpha, \beta]$ сходимость $\{y_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ при $i \to \infty$. Для этого достаточно установить равномерную сходимость на $[\alpha, \beta]$ ряда

$$y_0(x) + \sum_{i=0}^{\infty} \left[y_{i+1}(x) - y_i(x)\right]. \tag{5}$$

Пусть $A(x) = \|a_{ij}(x)\|, i, j = \overline{1, n}$. Из непрерывности $A(x)$ и $f(x)$ на $[\alpha, \beta]$ следует существование таких чисел $K > 0$ и $M > 0$, что $|a_{ij}(x)| \leqslant K$ при $\forall i, j = \overline{1, n}$ и $|f(x)| \leqslant M$ для всех $x \in [\alpha, \beta]$. Тогда норма матрицы $A(x)$

$$\|A(x)\| \leqslant nK, \quad \forall x \in [\alpha, \beta].$$

Поскольку $|A(x)y_0| \leqslant \|A(x)\| \cdot |y_0| \leqslant nK\,|y_0|$ для $\forall x \in [\alpha, \beta]$, то

$$|y_1(x) - y_0(x)| \leqslant \left| \int_{x_0}^{x} (|A(\zeta)y_0| + |f(\zeta)|)\, d\zeta \right| \leqslant (nK\,|y_0| + M)\,(\beta - \alpha) = C$$

Методом математической индукции докажем, что при всех $x \in [\alpha, \beta]$ и всех $i = 0, 1, 2, \ldots$ справедлива оценка:

$$|y_{i+1}(x) - y_i(x)| \leqslant C(nK)^i \frac{|x - x_0|^i}{i!} \tag{6}$$

При $i = 0$ оценка (6) уже установлена. Пусть оценка (6) справедлива при $i = m - 1$. Докажем ее справедливость при $i = m$. Учитывая, что

$$|A(x)\,[y_m(x) - y_{m-1}(x)]| \leqslant \|A(x)\| \cdot |y_m(x) - y_{m-1}(x)| \leqslant nK\,|y_m(x) - y_{m-1}(x)|\,,$$

для $\forall x \in [\alpha, \beta]$ получаем:

$$\begin{aligned} |y_{m+1}(x) - y_m(x)| &\leqslant \left| \int_{x_0}^{x} \right| A(\zeta)\,[y_m(\zeta) - y_{m-1}(\zeta)]\,|d\zeta| \leqslant \\ &\leqslant nK \left| \int_{x_0}^{x} \right| y_m(\zeta) - y_{m-1}(\zeta)|d\zeta| \leqslant \\ &\leqslant nK \cdot C(nK)^{m-1} \left| \int_{x_0}^{x} \frac{|\zeta - x_0|^{m-1}}{(m-1)!} d\zeta \right| \leqslant C(nK)^m \frac{|x - x_0|^m}{m!} \end{aligned}$$

Неравенство (6) доказано. Из (6) следует, что для всех $x \in [\alpha, \beta]$ и всех $i = 0, 1, 2, \ldots$

$$|y_{i+1}(x) - y_i(x)| \leqslant C(nK)^i \frac{(\beta - \alpha)^i}{i!}.$$

Следовательно, ряд (5) мажорируется сходящимся числовым рядом

$$|y_0| + C \sum_{i=0}^{\infty} (nK)^i \frac{(\beta - \alpha)^i}{i!} = |y_0| + Ce^{nK(\beta - \alpha)}.$$

По признаку Вейерштрасса ряд (5) равномерно сходится на $[\alpha, \beta]$ к сумме ряда $y = \varphi(x)$. Это значит, что

$$y_i(x) \rightrightarrows \varphi(x), \quad i \to \infty, \quad x \in [\alpha, \beta].$$

По известной из курса анализа теореме $y = \varphi(x)$ - непрерывная векторфункция на $[\alpha, \beta]$. Из оценки

$$|A(x)\,[y_i(x) - \varphi(x)]| \leqslant nK\,|y_i(x) - \varphi(x)|$$

и равномерной на $[\alpha, \beta]$ сходимости $y_i(x)$ к $\varphi(x)$ следует, что

$$A(x)y_i(x) \rightrightarrows A(x)\varphi(x), \quad i \to \infty, \quad x \in [\alpha, \beta].$$

Тогда по известной теореме из курса анализа можно перейти к пределу в (4) при $i \to \infty$. В пределе получаем, что $y = \varphi(x)$-решение (3) на $[\alpha, \beta]$ т.е. существование решения (1), (2) на всем $[\alpha, \beta]$ доказана. Единственность решения (1), (2) на $[\alpha, \beta]$ следует из теоремы 12 главы 4.

Следствие. Задача Коши

$$y'(x) = A(x)y, \quad y\,(x_0) = 0,$$

где $x_0 \in [\alpha, \beta]$ и $A(x)$ - непрерывная на $[\alpha, \beta]$ квадратная матрича порядха n, umeem edurcmeennoe peuenue $y(x) = 0$ ra $[\alpha, \beta]$.

Proof

Очевидно $y(x) \equiv 0, x \in [\alpha, \beta]$, решение нашей задачи Коши. В силу доказанной теоремы это ее единственное решение.

Замечание. Если $f(x) \equiv 0$ и A-числовая матрица, то метод последовательных приближений для задачи Коши (1), (2) дает ее решение

$$y = e^{(x-x_0)A} \cdot y_0.$$

Доказанная теорема уточняет утверждения теоремы 1 § 2 главы 4 о существовании и единственности решения задачи Коши для нормальных систем общего вида

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Если $A(x), f(x)$ - действительны, то при выполнении условий нашей теоремы выполнены все условия теоремы 1 § 2 главы 4 . В силу теоремы 1 имеет место локальное существование решения задачи Коши, т.е.

лишь в некоторой окрестности x_0, причем при некотором ограничении на y_0 $((x_0, y_0) \in G)$. Доказанная теорема для нормальных линениых систем дает более сильное утверждение. Она гарантирует при любом начальном значении y_0 существование решения задачи Коши (1), (2) на всем $[\alpha, \beta]$ т.е. глобально.

При условиях доказанной теоремы можно доказать корректность задачи Коши (1), (2) на всем $[\alpha, \beta]$. Если рассмотреть задачу Коши для линейной системы с параметром λ

$$y' = A(x, \lambda)y + f(x, \lambda), \quad y|_{x=x_0} = y_0, \quad x_0 \in [\alpha, \beta],$$

где $A(x, \lambda)$ и $f(x, \lambda)$ - непрерывны при $x \in [\alpha, \beta], |\lambda - \lambda_0| \leqslant \tau$, то можно доказать, что ее решение $y = \varphi(x, \lambda)$ - непрерывная функция при всех $x \in [\alpha, \beta], |\lambda - \lambda_0| \leqslant r$. Если же $A(x, \lambda)$ и $f(x, \lambda)$ - непрерывно дифференцируемы по λ, то и решение $y = \varphi(x, \lambda)$ - непрерывно дифференцируемо по λ при $|\lambda - \lambda_0| \leqslant r$.

Если $A(x)$ и $f(x)$ не являются непрерывными на $[\alpha, \beta]$, то решения задачи Коши (1), (2) может не существовать. В таком случае можно расширить понятие решения (1), (2) и ввести понятие обобщенного решения задачи Коши (1), (2). Если $A(x)$ и $f(x)$ - измеримы и локально суммируемы на некотором промежутке $\mathcal{I}$ числовой оси R^l_x, то можно доказать существование и единственность обобщенного решения задачи Коши (1), (2) на всем промежутке $\mathcal{I}$ (см. [31]). И эти условия разрешимости задачи Коши можно существенно ослабить, если ввести понятие так называемой обобщенной задачи Коши (см. [13]).

13.5.2 § 2. Linear homogeneous systems

Линейной однородной системой называется нормальная линейная система дифференциальных уравнений вида

$$y'(x) = A(x)y(x), \tag{1}$$

где $A(x)$ - заданная непрерывная на $[\alpha, \beta]$ комплекснозначная квадратная матрица порядка n.

Ее решениями будут некоторые комплекснозначные вектор-функции с n компонентами на $[\alpha, \beta]$.

Непосредственно проверяется следующее предложение, называемое принципом суперпозиции для системы (1).

Lemma 1.

Если $y_1(x), y_2(x)$ - решения системы (1) uc_1, c_2 - произвольные комплежные числа, то $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ также решение системы (1).

Пусть теперь на произвольном промежутке I действительной оси R^1_x заданы комплекснозначные вектор-функции $y_1(x), ..., y_k(x)$ с n компонентами.

1. Линейная зависимость решений системы (1)

Definition

Вектор-функции $y_1(x), ..., y_k(x)$ называются линейно зависимыми на промежутке I, если найдутся числа $c_1, ..., c_k$, одновременно не равные нулю, такие, что

$$c_1y_1(x) + \cdots + c_ky_k(x) \equiv 0, \quad \forall x \in \mathcal{I}.$$

В противном случае, т.е. когда тождество на $\mathcal{I}$ выполняется лишь при $c_1 = \cdots = c_k = 0$, вектор-функции $y_1(x), ..., y_k(x)$ называются линейно независимыми на промежутке $\mathcal{I}$.

Example 1.

а) Если $y_1(x) \equiv 0$ на $\mathcal{I}$, то $y_1(x), y_2(x), ..., y_k(x)$ - линейно зависимые на $\mathcal{I}$.
б) Вектор-функции

$$\begin{pmatrix}\sin^2 x\\ \cos^2 x\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\cos^2 x\\ \sin^2 x\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

являются линейно зависимыми на всей оси R^1_x.
в) Пусть $\lambda_1, ..., \lambda_k$ - некоторые числа, $h_1, ..., h_k$ - линейно независимые числовые векторы с n компонентами и $k \leqslant n$. Тогда $e^{\lambda_1 x} \cdot h_1, ..., e^{\lambda_k x} \cdot h_k$ - линейно независимые вектор-функции на всей оси R^1_x.

Действительно, если предположить противное, то существуют числа $c_1, ..., c_k$, такие, что $|c_1| + ... + |c_k| > 0$ и

$$c_1e^{\lambda_1 x}h_1 + ... + c_ke^{\lambda_k x} \cdot h_k \equiv 0, \quad \forall x \in R^1_x.$$

При фиксированном $x = x_0$ из линейной независимости $h_1, ..., h_k$ отсюда получаем $c_1 = ... = c_k = 0$. Противоречие.

Заметим, что если $y_1(x), ..., y_k(x)$ линейно зависимы на $\mathcal{I}$ и промежуток $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}$, то $y_1(x), ..., y_k(x)$, очевидно, линейно зависимы и на $\mathcal{I}$. Обратное утверждение неверно, в чем можно убедиться на примере

$$y_1(x) = \begin{pmatrix}x\\ x\end{pmatrix}, \quad y_2(x) = \begin{pmatrix}|x|\\ |x|\end{pmatrix}, \quad \mathcal{I} = R^1_x, \quad \mathcal{I}_1 = (0, +\infty).$$

Фиксировав $x_0 \in \mathcal{I}$, получаем числовые векторы $y_1(x_0), ..., y_k(x_0)$. Непосредственно проверяется следующее предложение.

Lemma 2.

Если вехтор-функции $y_j(x), j = \overline{1,k}$, линейно зависимы на промежутке $\mathcal{I}$, то при $\forall x_0 \in \mathcal{I}$ числовые вежторы $y_j(x_0), j = \overline{1,k}$, линейно зависилы.

Обратное утверждение к лемме 2, вообще говоря, неверно. Покажем на примере.

Example 2.

Вектор-функции

$$y_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y_2(x) = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$$

линейно независимы на оси R_x^1, но при $\forall x_0 \in R_x^1$ числовые векторы $y_1(x_0)$ и $y_2(x_0)$ линейно зависимы, так как $y_2(x_0) = x_0 \cdot y_1(x_0)$. Однако, как следует из доказанной ниже теоремы, для решений линейной однородной системы (1) такое явление невозможно.

Theorem 1

Пусть $y_j(x), j = \overline{1,k}$ - решения линейной однородной системы (1). Решения $y_j(x), j = \overline{1,k}$ - линейно независимы на $[\alpha, \beta]$ тогда и только тогда, когда $\forall x_0 \in [\alpha, \beta]$ числовые векторы $y_j(x_0), j = \overline{1,k}$ линейно независимы.

Proof

Пусть решения (1) $y_j(x), j = \overline{1,k}$ - линейно независимы. Если $\exists x_0 \in [\alpha, \beta]$, такое, что $y_j(x_0), j = \overline{1,k}$ - линейно зависимые векторы, то найдутся числа $c_1, ..., c_k, |c_1| + ... + |c_k| > 0$, такие, что

$$c_1 y_1(x_0) + ... + c_k y_k(x_0) = 0.$$

Вектор-функция

$$y(x) = c_1 y_1(x) + ... + c_k y_k(x)$$

по лемме 1 является решением системы (1) и удовлетворяет начальному условию $y(x_0) = 0$. По следствию из теоремы § 1 тогда $y(x) \equiv 0$ на $[\alpha, \beta]$, т.е. $y_j(x), j = \overline{1,k}$, линейно зависимы. Противоречие.

Наоборот. Пусть $Y' x_0 \in [\alpha, \beta]$ векторы $y_j(x_0), j = \overline{1,k}$, линейно независимы. Если бы вектор-функции $y_j(x), j = \overline{1,k}$, были линейно зависимыми на $[\alpha, \beta]$ то из леммы 2 следовало бы, что векторы $y_j(x_0), j = \overline{1,k}$,-линейно зависимы. Противоречие. □

Следствие. Решения $y_j(x), j = \overline{1,k}$, линейной однородной системы (1) линейно заечсими ча $[\alpha, \beta]$ тогда и только тогда, когда для $\forall x_0 \in [\alpha, \beta]$ линейно зависимы числовые векторы $y_j(x_0), j = \overline{1,k}$.

2. Фундаментальные системы решений линейной однородной системы (1)

Definition

Любая система n линейно независимых решений (1) $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$ на $[\alpha, \beta]$ называется фундаментальной системой решений (1).

Theorem 2

Для системы (1) существует бескопечное множество фундаментальных систем решений.

Proof

Фиксируем $x_0 \in [\alpha, \beta]$ и n произвольных линейно независимых числовых векторов $y_1^{(0)}, ..., y_n^{(0)}$ с n компонентами. Обозначим через $\varphi_j(x)$ ре-

шение (1), удовлетворяющее начальному условию $y_j(x_0) = y_j^{(0)}, j = \overline{1, n}$. По теореме из § 1 каждое такое решение $\varphi_j(x), j = \overline{1, n}$, существует и единственно на всем $[\alpha, \beta]$. Система решений $\varphi_j(x), j = \overline{1, n}$, образует фундаментальную систему решений (1), так как если бы она была линейно зависимой системой на $[\alpha, \beta]$, то и числовые векторы $y_j^{(0)}, j = \overline{1, n}$, были бы линейно зависимы. Точку $x_0 \in [\alpha, \beta]$ и линейно независимые векторы $y_j^{(0)}, j = \overline{1, n}$, можно задавать бесконечным числом способов.

Theorem 3

Если $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$ - фундаментальная система решений (1), то каждое решение $y(x)$ линейной однородной системы (1) представимо единственным образом в видс

$$y(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + ... + c_n\varphi_n(x)$$

где $c_1, c_2, ..., c_n$ - числа.

Proof

Пусть $y(x)$ - какое-либо решение (1). Фиксируем $x_0 \in [\alpha, \beta]$ и рассмотрим $y(x_0)$. По теореме 1 числовые векторы $\varphi_1(x_0), ..., \varphi_n(x_0)$ - линейно независимы и, следовательно, найдутся числа $c_1, ..., c_n$ такие, что

$$y(x_0) = c_1\varphi_1(x_0) + ... + c_n\varphi_n(x_0).$$

Вектор-функция

$$z(x) = c_1\varphi_1(x) + ... + c_n\varphi_n(x)$$

является решением (1) и $z(x_0) = y(x_0)$. По теореме единственности имеем $z(x) \equiv y(x), \forall x \in [\alpha, \beta]$. Если бы нашлись другие числа $\tilde{c}_1, ..., \tilde{c}_n$ такие, что $y(x) = \tilde{c}_1\varphi_1(x) + ... + \tilde{c}_n\varphi_n(x)$, то разность решений дает равенство

$$(c_1 - \tilde{c}_1)\varphi_1(x) + ... + (c_n - \tilde{c}_n)\varphi_n(x) = 0, \quad \forall x \in [\alpha, \beta].$$

Так как $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$ - фундаментальная система решений (1), то $\tilde{c}_1 = c_1, ..., \tilde{c}_n = c_n$. □

Нетрудно убедиться, что множество всех решений (1) образует линейное пространство. Теорема 3 означает, что фундаментальная система решений (1) $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$ служит базисом этого пространства. Следовательно, пространство решений (1) является n-мерным линейным пространством.

Рассмотрим начальное условие для (1):

$$y(x_0) = y_0, \quad x_0 \in [\alpha, \beta], \tag{2}$$

где yo - заданный числовой n-мерный вектор.
Решение $y(x)$ каждой задачи Коши (1), (2) однозначно определяется с помощью функции

$$y = c_1\varphi_1(x) + ... + c_n\varphi_n(x) \tag{3}$$

где $c_1, ..., c_n$ - произвольные параметры. Действительно, по доказанной в § 1 теореме для каждого начального условия (2) решение задачи Коши (1), (2) единственным образом определено на $[\alpha, \beta]$, а по теореме 3

это решение $y(x)$ единственным образом представимо в виде (3). В силу этого формулу (3) называют общим решением (1).

Example 3.

Пусть в (1) A - числовая матрица и пусть ес собственные векторы $h_1, ..., h_n$ образуют базис R^n. Если $\lambda_1, ..., \lambda_n$ - соответствующие им собственные значения A, то система $e^{\lambda_1 x} \cdot h_1, ..., e^{\lambda_n x} \cdot h_n$ образует фундаментальную систему решений (1), а функция

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} \cdot h_1 + ... + c_n e^{\lambda_n x} \cdot h_n,$$

где $c_1, ..., c_n$ - произвольные постоянные, является общим решением. Этот факт уже известен из главы 3 .

3. Фундаментальная матрица линейной однородной системы (1)

Definition

Матрица $\Phi(x)$ у которой столбцы образуют фундаментальную систему решений (1) $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$, называется фундаментальной матрицей системы (1).

Таким образом,

$$\Phi(x) = \|\varphi_1(x), ..., \varphi_\pi(x)\| .$$

Очевидно, что $\Phi(x)$ - непрерывно дифференцируемая матрица иа $[\alpha, \beta]$. Из теоремы 2 следует, что для (1) существует бесконечно много фундаментальных матриц Из определения фундаментальной системы решений получаем, что $\Phi(x)$ - невырожденная матрица на $[\alpha, \beta]$. Из теоремы 3 получаем самое важное свойство $\Phi(x)$. Именно, если $\Phi(x)$ - фундаментальная матрица (1), то общее решение системы (1) записывается в простом виде

$$y(x) = \Phi(x) \cdot c,$$

где c-произвольный числовой n-мерный вектор.
Рассмотрим при $x \in [\alpha, \beta]$ матричное дифференциальное уравнение

$$Y'(x) = A(x)Y(x) \tag{4}$$

с неизвестной квадратной порядка n матрицей $Y(x)$. Пусть $y_1(x), ..., y_n(x)$ - столбцы матрицы $Y(x)$. Тогда

$$Y'(x) = \|y_1'(x), ..., y_n'(x)\| = \|A(x)y_1(x), ..., A(x)y_n(x)\| = A(x)Y(x).$$

Отсіода следует, что матрица $Y(x)$ тогда и только тогда решение (4), когда ее столбцы $y_1(x), ..., y_n(x)$-решения системы (1). Это значит, что фундаментальная матрица $\Phi(x)$ - решение уравнения (4) и что общее решение (4) имеет вид

$$Y(x) = \Phi(x)C,$$

где C-произвольная числовая матрица порядка n. Тогда ясно, что $\Psi(x) = \Phi(x) \cdot C_1$ где C_1 - произвольная невырожденная числовая матрица,

представляет собой общий вид фундаментальной матрицы (1). По заданной фундаментальной матрице $\Phi(x), x \in [\alpha, \beta]$ система (1) однозначно определяется. В самом деле, так как $\Phi(x)$ - невырождена на $[\alpha, \beta]$, то на $[\alpha, \beta]$ существует $\Phi^{-1}(x)$. Действуя на тождество

$$\Phi'(x) \equiv A(x)\Phi(x), \quad x \in [\alpha, \beta],$$

справа матрицей $\Phi^{-1}(x)$, получаем, что

$$A(x) = \Phi'(x) \cdot \Phi^{-1}(x)$$

Решение системы (1) сводится к нахождению фундаментальной матрицы системы (1).

Если в системе (1) A - числовая матрица, то $\Phi(x) = e^{xA}$ и, значит, все решения (1) задаются формулой $y(x) = e^{xA} \cdot c$, где c - произвольный числовой n-мерный вектор. Эта формула уже была получена в главе 3. Тот факт, что e^{xA} - фундаментальная матрица (1), следует из того, что $\det e^{xA} \neq 0$ и что e^{xA} удовлетворяет матричному уравнению $Y'(x) = A \cdot Y(x)$.

Если матрица $A(x)$ перестановочна на $[\alpha, \beta]$ со своей первообразной, т.е.

$$A(x) \cdot \int_\alpha^x A(\zeta)d\zeta = \int_\alpha^x A(\zeta)d\zeta \cdot A(x), \quad \forall x \in [\alpha, \beta] \tag{5}$$

то $\Phi(x) = \exp\left[\int_\alpha^x A(\zeta)d\zeta\right]$ - фундаментальная матрица (1).
Действительно, в этом случае $\Phi(x)$ удовлетворяет (4) (см. § 1). Условие (5), например, выполнено, если $A(x)$ - диагональная с непрерывными $a_1(x), ..., a_n(x)$ по диагонали, либо если $A(x)$ - жорданова клетка с непрерывной функцией $a(x)$ по диагонали.

В заключение отметим, что решение задачи Коши (1), (2) через фундаментальную матрицу $\Phi(x)$ системы (1) записывается весьма просто:

$$y(x) = \Phi(x) \cdot \Phi^{-1}(x_0) \cdot y_0.$$

Решение (4) с начальным условием $Y(x_0) = E$ называется матрицантом системы (1). Ясно, что матрица $K(x, x_0) = \Phi(x) \cdot \Phi^{-1}(x_0)$ является матрицантом системы (1).

4. Определитель Вронского и формула Лиувилля-Остроградского

Пусть $y_1(x), ..., y_n(x)$ - система вектор-функций с n компонентами на $[\alpha, \beta]$.

Definition

Определителем Вронского (или сокращенно вронскианом) системы $y_1(x), ..., y_n(x)$ называется определитель

$$W(x) \equiv W[y_1(x), ..., y_n(x)] = \det \|y_1(x), ..., y_n(x)\|.$$

Если $y_1(x), ..., y_n(x)$ - решения линейной однородной системы (1), то из теоремы 1 вытекает следующая связь между линейной зависимостью $y_1(x), ..., y_n(x)$ на $[\alpha, \beta]$ и обращением в нуль их определителя Вронского $W(x)$.
а) Решения (1) $y_1(x), ..., y_n(x)$ - линейно зависимы на $[\alpha, \beta]$, тогда и только тогда, когда $W(y_1, ..., y_n) \equiv 0$ на $[\alpha, \beta]$.
б) Решения (1) $y_1(x), ..., y_n(x)$ - линейно независимы на $[\alpha, \beta]$ тогда и только тогда, когда $W(y_1, ..., y_n) \neq 0, \forall x \in [\alpha, \beta]$. Отсюда получаем, что не существуют такие $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta], x_1 \neq x_2$, что $W(x_1) = 0, W(x_2) \neq 0$.

Свойства а) и б) на практике используются для проверки линейной зависимости или независимости n решений системы (1) на $[\alpha, \beta]$. Для произвольных вектор-функций $y_1(x)_1 ..., y_n(x)$ на $[\alpha, \beta]$ свойства а), б) не обязаны выполняться. В этом можно убедиться на примере векторфункций

$$y_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y_2(x) = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}.$$

Они линейно независимы на всей оси R^1_x, но их определитель Вронского $W(x) \equiv 0$ на R^1_x.

Theorem 4

Пусть $W(x)$ - врожкиан решений $y_1(x), ..., y_n(x)$ системо (1) и пусть $x_0 \in [\alpha, \beta]$. Тогда для $\forall x \in [\alpha, \beta]$ шмеет место формула Лиувилля - Остроградского

$$W(x) = W\left(x_0\right) e^{\int_{x_0}^{x^x} spA(\zeta) d\zeta} \tag{6}$$

где $\operatorname{sp} A(\zeta) = a_{11}(\zeta) + \cdots + a_{nn}(\zeta)$ называется следом матрици $A(\zeta)$.

Proof

Покажем, что $W(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$W'(x) = \operatorname{sp} A(x) \cdot W(x), \quad x \in [\alpha, \beta].$$

Пусть $y_{ij}(x), i = \overline{1, n}$ компоненты решения $y_j(x), j = \overline{1, n}$. Тогда $W(x)$ является функцией всех этих компонент:

$$W(x) = W\left[y_{11}(x), y_{21}(x), ..., y_{nn}(x)\right]$$

По формуле производной сложной функции получаем, что

$$W'(x) = \sum_{p:q=1}^{n} \frac{\partial W(x)}{\partial y_{pq}(x)} y'_{pq}(x)$$

Если $W_{pr}(x)$ - алгебраическое дополнение $y_{pr}(x)$ в $W(x)$, то разложение $W(x)$ по р-й строке дает

$$W(x) = \sum_{r=1}^{n} y_{pr}(x) \cdot W_{pr}(x)$$

Отсюда находим, что

$$\frac{\partial W(x)}{\partial y_{pq}} = W_{pq}(x)$$

Каждая вектор-функция $y_q(x)$ удовлетворяет системе (1), т.е.

$$y'_q(x) = A(x) y_q(x), \quad q = \overline{1, n}, \quad x \in [\alpha, \beta].$$

Отсюда находим, что

$$y'_{pq}(x) = \sum_{r=1}^{n} a_{pr}(x) y_{rq}(x),$$

где $a_{pr}(x)$ - элементы матрицы $A(x)$.
Подставляя найденные выражения $\frac{\partial W(x)}{\partial y_{pq}}$ и $y'_{pq}(x)$ в формулу $W'(x)$, получаем, что

$$W'(x) = \sum_{p,q=1}^{n} W_{pq}(x) \sum_{r=1}^{n} a_{pr}(x) y_{rq}(x) = \sum_{p,r=1}^{n} a_{pr}(x) \sum_{q=1}^{n} y_{rq}(x) W_{pq}(x).$$

Но из курса алгебры известно, что

$$\sum_{q=1}^{n} y_{rq}(x) W_{pq}(x) = W(x) \cdot \delta_{rp}$$

где δ_{rp} - символ Кронекера. Тогда

$$W'(x) = W(x) \sum_{p,r=1}^{n} a_{pr}(x) \delta_{pr} = W(x) \sum_{p=1}^{n} a_{pp}(x) = W(x) \cdot \operatorname{sp} A(x)$$

Интегрирование этого линейного однородного уравнения первого порядка и дает требуемую формулу (6).

Следствие. Если A - числовая матрица, то

$$\det e^{A} = e^{\operatorname{sp} A}$$

Proof

Достаточно взять $x_0 = 0, x = 1$ и применить теорему для

$$W(x) = \det e^{xA}$$

Замечание. Поскольку матрица $Y(x) = \|y_1(x), ..., y_n(x)\|$ является решением матричного дифференциального уравнения (4), то формулу (6) можно интерпретировать в терминах решений (4). Именно, если $Y(x)-$ решение (4), то справедлива формула Лиувилля - Остроградского

$$\det Y(x) = \det Y(x_0) \cdot e^{\int_{x_0}^{x} \operatorname{sp} A(\zeta) d\zeta}, \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$$

Example 1.

Найти фундаментальную матрицу линейной системы

$$\begin{cases} y'_1 = y_1 \cos x + y_2 \sin x \\ y'_2 = y_1 \sin x + y_2 \cos x \end{cases}$$

убедившись в том, что матрица системы перестановочна со своей первообразной.
$\triangle$ Имеем

$$A(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}, \quad \int_0^x A(\zeta) d\zeta = \begin{pmatrix} \sin x & 1 - \cos x \\ 1 - \cos x & \sin x \end{pmatrix}$$

$$A(x) \int_0^x A(\zeta) d\zeta = \int_0^x A(\zeta) d\zeta \cdot A(x) = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x - \cos 2x \\ \cos x - \cos 2x & \sin x \end{pmatrix}$$

Используя приведение матрицы $\int_0^x A(\zeta) d\zeta$ к диагональной форме, находим фундаментальную матрицу заданной системы

$$\Phi(x) = e^{\int_0^x A(\zeta) d\zeta} = e^{\sin x} \begin{pmatrix} \operatorname{ch}(1 - \cos x) & \operatorname{sh}(1 - \cos x) \\ \operatorname{sh}(1 - \cos x) & \operatorname{ch}(1 - \cos x) \end{pmatrix}$$

Example 2.

Зная одно решение $y_1(x) = 1 + x^2, y_2(x) = x$ линейной системы

$$\begin{cases} y_1' = x(1-x)y_1 + (x^3 - x^2 + x + 1)\, y_2, \\ y_2' = (1-x)y_1 + (x^2 - x + 1)\, y_2, \end{cases}$$

найти общее решение этой системы.

Δ Пусть $y_1 = \varphi(x), y_2 = \psi(x)$ - решение системы с начальным условием $\varphi(0) = 0, \psi(0) = 1$. Согласно формуле Лиувилля - Остроградского тогда

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & \varphi(x) \\ x & \psi(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot e^{\int^x \left[x(1-x) + \left(x^2 - x + 1\right)\right] dx} = e^x$$

Отскда $(1 + x^2)\, \psi(x) - x\varphi(x) = e^x$. С учетом зтого равенства из второго уравнения системы следует, что

$$\psi'(x) = \varphi(x) - x\psi(x) + e^x$$

а при $x \neq 0$

$$x\psi'(x) = \psi(x) + (x-1)e^x$$

Учитывая, что $\psi(0) = 1$, тогда получаем:

$$\psi(x) = e^x, \quad \varphi(x) = x^2 e^x$$

Значит, фундаментальная матрица системы

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 1+x^2 & x^2 e^x \\ x & e^x \end{pmatrix}$$

и общее решение заданной системы

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \Phi(x) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

где c_2 и c_2-произвольные постоянные.

13.5.3 § 3. Linear inhomogeneous systems

Рассмотрим линейную неоднородную систему

$$y'(x) = A(x)y(x) + f(x) \tag{1}$$

где $x \in [\alpha, \beta]$ - заданная непрерывная на $[\alpha, \beta]$ квадратная матрица порядка $n, f(x)$ - заданная непрерывная на $[\alpha, \beta]$ вектор-функция с n компонентами.

Непосредственно проверяется следующее предложение, называемое принципом суперпозиции для системы (1).

Лемма. Если $f(x) = f_1(x) + f_2(x), y_1(x)$-решение системы (1) при условии $f(x) \equiv f_1(x)$ и $y_2(x)$ - решение системы (1) при условии $f(x) \equiv f_2(x)$, то $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ - решение системь (1).

Если известно какое-либо частное решение (1), то интегрирование линейной неоднородной системы (1) сводится к интегрированию соответствующей (1) линейной однородной системы

$$z'(x) = A(x)z(x) \tag{2}$$

Theorem 1

Пусть $y_0(x)$ - некоторое частное решение (1) и $\Phi(x)$ - фундаментальная матрица (2). Тогда все решения системы (1) задаются бормулой

$$y(x) = \Phi(x)c + y_0(x)$$

где c - произвольный числовой n-мерный вектор.

Proof

В системе (1) сделаем замену

$$y(x) = z(x) + y_0(x).$$

Тогда получаем, что $z(x)$ удовлетворяет системе (2). Общее решение системы (2), как установлено в § 2, имеет вид

$$z(x) = \Phi(x)c \tag{3}$$

где c-произвольный числовой n-мерный вектор. Из замены следует утверждение теоремы.

Формулу решения (1) из теоремы 1 называют общим решением системы (1).

Если же частное решение $y_0(x)$ системы (1) неизвестно, а известна лишь фундаментальная матрица системы (2), то все равно линейная неоднородная система (1) может быть решена в квадратурах. В этом случае общее решение (1) находится методом вариации постоянных (методом Лагранжа). При $n = 1$ метод Лагранжа был рассмотрен уже в главе 1.

Theorem 2

Если $\Phi(x)$ - фундаментальная матрица линейной одпородной системы (2), то общее решение линейной неоднородной системы (1) при всех $x \in [\alpha, \beta]$ задается бормулой

$$y(x) = \Phi(x) \cdot d + \Phi(x) \cdot \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(\zeta) f(\zeta) d\zeta$$

где $x_0 \in [\alpha, \beta]$ и d - произвольный числовой n-мерный вежтор.

Proof

Согласно Лагранжу ищем решение (1) в таком же виде (3), что и решение однородной системы (2), но считаем c не постоянным, а непрерывно дифференцируемым вектором $c(x), x \in [\alpha, \beta]$:

$$y(x) = \Phi(x) \cdot c(x)$$

При таком переходе от $y(x)$ к $c(x)$ потери решений (1) пе происходит, так как $\det \Phi(x) \neq 0$. Ниже будет видно, что такая замена неоднозначна. Функцию $c(x)$ находим подстановкой $y(x)$ в систему (1). Используя формулу производной произведения матрицы и вектор-фупкции, получаем, что

$$\Phi'(x)c(x) + \Phi(x)c'(x) = A(x)\Phi(x)c(x) + f(x)$$

Поскольку (см. § 1)

$$\Phi'(x) = A(x)\Phi(x)$$

то $\Phi(x)c'(x) = f(x)$. Так как матрица $\Phi(x)$ - невырожденна на $[\alpha, \beta]$, то отсюда

$$c'(x) = \Phi^{-1}(x) \cdot f(x).$$

Это уравнение можно интегрировать, поскольку $\Phi^{-1}(x) \cdot f(x)$ - непрерывная вектор-функция на $[\alpha, \beta]$. Проинтегрировав последнее уравнспие, получаем утверждение теоремы.

Следствие. Решение задачи Коши для линейной системи (1) при начальном условии $y(x_0) = y_0$, где $x_0 \in [\alpha, \beta]$, имеет вид

$$y(x) = \Phi(x) \cdot \Phi^{-1}(x_0)\, y_0 + \Phi(x) \int_{x_0}^{x} \Phi^{-1}(\zeta) f(\zeta) d\zeta$$

Замечания. 1) Если обозначить через $y_0(x)$ второе слагаемое в формуле общего решения системы (1), то $y_0(x)$ - решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию $y_0(x_0) = 0$.
2) Матрица $K(x, \zeta) = \Phi(x) \cdot \Phi^{-1}(\zeta)$ является матрицантом системы (1), удовлетворяющим начальному условию $K(\zeta, \zeta) = E$.
3) В случае, когда в системе (1) матрица A - числовая, фундаментальная матрица $\Phi(x) = e^{xA}$ и общее решение системы (1) записывается уже известной из главы 3 формулой

$$y(x) = e^{xA} \cdot d + \int_{x_0}^{x} e^{(x-\zeta)A} \cdot f(\zeta) d\zeta$$

4. При решении конкретных примеров методом вариации постоянных удобнее искать решение (1) не в виде $y = \Phi(x) \cdot c(x)$, а в виде

$$y = c_1(x)\varphi_1(x) + \cdots + c_n(x) \cdot \varphi_n(x),$$

где $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$ - фундаментальная система решений (2).

Пример. Методом вариации постоянных решить линейную неоднородную систему при $x \geqslant 0$

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 - 2y_2 \\ y_2' = 8y_1 - 4y_2 + \sqrt{x}. \end{cases}$$

Д Найдем сначала общее решение соответствующей линейной однородной системы. Для нее матрица системы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$$

имеет двукратное собственное значение $\lambda = 0$ и жорданов базис состоит из собственного вектора h_1 и к нему присоединенного вектора h_2 :

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Общее решение линейной однородной системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \left[x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} \right],$$

где c_1 и c_2-произвольные постоянные. Ищем общее решение заданной системы в таком же виде, но считаем $c_1 = c_1(x), c_2 = c_2(x)-$ непрерывно дифференцируемыми функциями $x \geqslant 0$. Подставляя выражения для y_1, y_2 в исходную систему, получаем, что

$$\begin{cases} c_1'(x) + \left(x + \frac{1}{4}\right) c_2'(x) = 0 \\ 2c_1'(x) + 2x \cdot c_2'(x) = \sqrt{x} \end{cases}$$

Отсюда находим, что $c_1'(x) = \left(2x + \frac{1}{2}\right)\sqrt{x}, c_2'(x) = -2\sqrt{x}$, и, значит,

$$c_1(x) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{4}{5}x^2\right)\sqrt{x} + A, \quad c_2(x) = -\frac{4}{3}x\sqrt{x} + B,$$

где A и B - произвольные постоянные. Следовательно, общее решение исходной системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + B \left[x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} -\frac{8}{15}x^2\sqrt{x} \\ -\frac{16}{15}x^2\sqrt{x} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} \end{pmatrix}.$$

Упражнения к главе 5

1. Составить линейную однородную систему дифференциальных уравнений, имеютую решения

$$y_1(x) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y_2(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ 2x \end{pmatrix}, \quad x > 0$$

2. Может ли линейная система

$$\begin{cases} y_1' = xy_1 + y_2 \cos x \\ y_2' = (x-1)^5 y_1 - \frac{1}{x} y_2 \end{cases}$$

иметь два ограниченных на $(\ 0, +\infty\ )$ линейно независимых решения?

3. Найти при $x > 0$ все решения линейной системы

$$\begin{cases} y_1' = -\frac{1}{x} y_1 + y_2 \\ y_2' = -\frac{2}{x^2} y_1 + \frac{1}{x} y_2 \end{cases}$$

если известно одно ее решение $y_1 = x, y_2 = 2$.

4. Найти общее решение линейной системы при $x \in [0, 1]$

$$y' = A(x)y + f(x),$$

если

$$A(x) = \begin{pmatrix} a(x) & 1 & 0 \\ 0 & a(x) & 1 \\ 0 & 0 & a(x) \end{pmatrix}$$

где $a(x), f(x)$ - непрерывные на $[0, 1]$ функции.

5. Найти фундаментальную матрицу линейной системы

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 \sin x + y_2 \cos x \\ y_2' = y_1 \cos z - y_2 \sin x \end{cases}$$

убедившись в том, что матрица системы перестановочна со своей производной.

13.6 Linear differential equations of order n with variable coefficients

13.6.1 § 1. General Properties

Линейным дифференциальным уравнением порядка n называется уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x) \tag{1}$$

где $x \in [\alpha, \beta], a_j(x), j = \overline{1, n}$, - заданные непрерывные функции на $[\alpha, \beta]$, называемые коэффициентами уравнения (1), и $f(x)$ - заданная непрерывная на $[\alpha, \beta]$ функция, называемая правой частью уравнения (1).

Если $f(x) \equiv 0$ на $[\alpha, \beta]$, то уравнение (1) называется линейным однородным уравнением. В противном случае уравнение (1) называется линейным неоднородным уравнением.

В этой главе коэффициенты $a_j(x), j = \overline{1, n}$, и правая часть $f(x)$ уравнения (1) могут принимать комплексные значения.

Комплекснозначная функция $y = \varphi(x)$ называется решением уравнения (1) на $[\alpha, \beta]$, если $\varphi(x)n$ раз непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta]$ и обращает (1) в тождество на всем $[\alpha, \beta]$.

Непосредственно проверяется следующее утверждение, называемое принципом суперпозиции для уравнения (1).

Lemma 1.

Если $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ и $y_t(x)$-решение уравнежия (1) при $f(x) \equiv f_i(x)$ на $[\alpha, \beta], i = 1, 2$, то функция $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ является решением уравнения (1).

Следствие. Если $y_1(x), y_2(x)$ - решения линейного однородного уравнения и c_1, c_2 - произвольные числа, то линейная комбинация $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ также является решением линейного однородного уравнения.

Лемма 1 и ее следствие характерны именно для линейных дифференциальных уравнений и линейных систем дифференциальных уравнений и облегчают их изучение.

Решение уравнения (1) всегда можно свести к решению линейной системы дифференциальных уравнений порядка n следующего вида:

$$y'(x) = A(x)y(x) + f(x) \tag{2}$$

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & -a_{n-2}(x) & ... & -a_1(x) \end{pmatrix}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}.$$

Lemma 2.

Уравнение (1) эквивалентно системе (2).

Proof

Пусть $y = \varphi(x)$-решение (1). Положим $y_1(x) = \varphi(x), y_2(x) = \varphi'(x), ..., y_n(x) = \varphi^{(n-1)}(x)$. Тогда вектор-функция с компонентами $\varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n-1)}(x)$ удовлетворяет системе (2). Наоборот, если вектор-функция с компонентами $\varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n-1)}(x)$ - решение системы (1), то, исключив из (2) переменные $y_2, ..., y_n$ получаем, что $y_1 = \varphi(x)$ - решение уравнения (1). □

Лемма 2 позволяет перенести все результаты для линейных систем из главы 5 на случай уравнений (1).

Рассмотрим для уравнения (1) начальные условия

$$y\left(x_0\right) = y_1^{(0)}, \quad y'\left(x_0\right) = y_2^{(0)}, \quad ..., \quad y^{(n-1)}\left(x_0\right) = y_n^{(0)}, \tag{3}$$

где $x_0 \in [\alpha, \beta]$ и $y_1^{(0)}, ..., y_n^{(0)}$-заданные числа.

Theorem

Пусть все функции $a_j(x), j = \overline{1, n}$, и $f(x)$ - непрерывны на $[\alpha, \beta]$ и пусть $x_0 \in [\alpha, \beta]$. Тогда при произвольных начальных значениях $y_1^{(0)}, ..., y_n^{(0)}$ решсние задачи Кощи (1), (3) существует и единственно на всем $[\alpha, \beta]$.

Proof.

Сделав замену

$$y_1(x) = y(x), \quad y_2(x) = y'(x), \quad ..., \quad y_n(x) = y^{(n-1)}(x),$$

сведем уравнение (1) к системе (2). При этом начальные условия примут вид

$$y\left(x_0\right) = y^{(0)}, \tag{4}$$

где $y^{(0)}$ - вектор с компонентами $y_1^{(0)}, ..., y_n^{(0)}$. В силу леммы 2 задача Коши (1), (3) эквивалентна задаче Коши (2), (4). В силу условий теоремы $A(x)$ и $f(x)$ - непрерывны на $[\alpha, \beta]$. Следовательно, для задачи Коши (2), (4) выполнены все условия теоремы из § 1 главы 5. Согласно этой теореме решение задачи Коши (2), (4) существует и единственно на $[\alpha, \beta]$. Значит, и решение задачи Коши (1), (3) существует и единственно на $[\alpha, \beta]$. □

Следствие. Задача Коши

$$\begin{aligned} &y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0; \\ &y\left(x_0\right) = y'\left(x_0\right) = ... = y^{(n-1)}\left(x_0\right) = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где $a_j(x), j = \overline{1, n}$, непрерывны на $[\alpha, \beta]$ и $x_0 \in [\alpha, \beta]$, имеет единственное решение $y(x) \equiv 0$ на $[\alpha, \beta]$.

Proof

Действительно, $y(x) \equiv 0$ - решение задачи Коши (5) и оно единственно в силу доказанной теоремы.

Заметим, что в главе 4 было доказано, что в некоторой окрестности x_0 существует и единственно репение уравнения

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right) \tag{6}$$

при начальных условиях (3), если только выполнены некоторые требования на функцию $f(x)$ и начальные данные. Уравнение (1) - частный случай уравнения (6) и при условиях теоремы выполнены все требования, наложенные на уравнение (6) в главе 4. Следовательно, из результатов главы 4 получаем локальное существование решения задачи Коши (1), (3) в некоторой окрестности x_0. Доказанная теорема уточняет этот результат и дает более сильное утверждение. Она гарантирует существование и единственность решения задачи Коши (1), (3) глобально, т.е. на всем том $[\alpha, \beta]$, где определено уравнение (1), причем при произвольных начальных значениях $y_1^{(0)}, ..., y_n^{(0)}$.

При условиях доказанной теоремы можно установить корректность задачи Коши (1), (3). Если рассмотреть задачу Коши для линейного уравнения порядка n с параметром λ

$$\begin{gathered} y^{(n)} + a_1(x,\lambda)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x,\lambda)y = f(x,\lambda) \\ y|_{x=x_0} = y_1^{(0)},\, y'|_{x=x_0} = y_2^{(0)}, ..., \, y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_n^{(0)} \end{gathered} \tag{7}$$

где $a_j(x,\lambda), j = \overline{1,n}$, и $f(x,\lambda)$ - непрерывны при $x \in |\alpha, \beta|, |\lambda - \lambda_0| \leqslant r$, то ее решение $y = \varphi(x,\lambda)$ является непрерывной функцией при всех $x \in [\alpha, \beta], |\lambda - \lambda_0| \leqslant r$. Если же $a_j(x,\lambda), f(x,\lambda)$ - непрерывно дифференцируемы по λ, то и решение $y = \varphi(x,\lambda)$ - непрерывно дифференцируемо по λ при $|\lambda - \lambda_0| \leqslant r$. Все эти результаты получаются сведением уравнения (7) к линейной системе.

В случае, когда не все функции $a_j(x), j = \overline{1,n}, f(x)$ непрерывны на $[\alpha, \beta]$, может не существовать решение задачи Коши (1), (3). В таком случае расширяют понятие решения задачи Коши (1), (3), и тогда можно установить существование и единственность такого решения задачи Коши (1), (3) при условиях, что $a_j(x), j = \overline{1,n}$ и $f(x)$ измеримы и локально суммируемы на некотором промежутке $\mathcal{I}$ числовой оси R_x^l (см. [31]). Если ввести понятие обобщенной задачи Коши (1), (2) (см. [13]), то и эти условия можно существенно ослабить.

13.6.2 § 2. Linear homogeneous equations of order n

Рассмотрим линейное однородное уравнение порядка n

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = 0, \tag{1}$$

где $a_j(x), j = \overline{1,n}$, заданные непрерывные функции на $[\alpha, \beta]$.

Definition

Решения $y_1(x), ..., y_k(x)$ уравнения (1) называются линейно зависимыми на $[\alpha, \beta]$, если существуют числа $c_1, ..., c_k$, одновременно не равные нулю и такие, что

$$c_1 y_1(x) + \cdots + c_k y_k(x) \equiv 0, \quad \forall x \in [\alpha, \beta].$$

В противном случае решения $y_1(x), ..., y_k(x)$ называются линейно независимыми на $[\alpha, \beta]$.

Рассмотрим линейную однородную систему, которая эквивалентна уравнению (1) (см. § 1):

$$y'(x) = A(x)y(x),$$

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & ... & -a_1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Lemma 1.

Решения $y_1(x), ..., y_k(x)$ уравнения (1) линейно зависимы на $[\alpha, \beta]$ тогда и только тогда, когда соответствующие им решения $y_1(x), ..., y_k(x)$ системы (2) линейко зависимы на $[\alpha, \beta]$ (здесь $y_3(x)$ -вектор-функция с компонентами $y_j(x), y_j'(x), ..., y_j^{(n-1)}(x), j = \overline{1, k}\Big)$.

Пусть решения $y_1(x), ..., y_k(x)$ уравнения (1) линейно зависимы на $[\alpha, \beta]$. Тогда найдутся такие числа $c_1, ..., c_k, |c_1| + \cdots + |c_k| > 0$, что

$$c_1 y_1(x) + \cdots + c_k y_k \equiv 0, \quad \forall x \in [\alpha, \beta].$$

Дифференцируя последовательно это тождество ($n-1$) раз, получаем тождество на $[\alpha, \beta]$ для решений системы (2):

$$c_1 y_1(x) + \cdots + c_k y_k(x) \equiv 0,$$

т.е. решения $y_1(x), ..., y_k(x)$ системы (2) линейно зависимы на $[\alpha, \beta]$. Обратно, если выполнено последнее тождество на $[\alpha, \beta]$ с некоторыми, одновременно не равными нулю, числами $c_1, ..., c_k$, то первая компонента этого векторного тождества означает линейную зависимость решений $y_1(x), ..., y_k(x)$ уравнения (1). $\square$

Следствие. Решения $y_1(x), ..., y_k(x)$ уравнения (1) линейно независимы на $[\alpha, \beta]$ тогда и только тогда, когда решения $y_1(x), ..., y_k(x)$ системы (2) линейно независимы на $[\alpha, \beta]$.

Definition

Совокупность произвольных n линейно независимых решений $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$ уравнения (1) называется фундаментальной системой решений уравнения (1).

Из леммы 1 в качестве следствия получаем следующее утверждение.

Lemma 2.

Решения $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$ уравнения (I) образуют фундаментальную систему решений уравнения (1) в том и только в том случае, когда вектор-функции $^{\mathrm{C}}\ \Phi_j(x)$ с компочентами $\varphi_j(x), \varphi_j'(x), ..., \varphi_j^{(n-1)}(x)$, $j = \overline{1, n}$, образуют фундаментальную систему решениче линейной однородпой системы (2).

С помощью леммы 2 все утверждения о фундаментальных системах решений линейной однородной системы переносятся на фундаментальные системы решений линейных однородных уравнений порядка n.

Theorem 1

Для уравнения (1) существует бесконечное множество фундаментальных систем решений.

Proof

Уравнение (1) эквивалентно системе (2), для которой справедлив аналог теоремы 1 (см. § 2 главы 5). В силу леммы 2 тогда справедлива и

Theorem 1

Theorem 2

Если $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$ - фундаментальная система решений уравнения (1), то каждое решение $y(x)$ уравнения (1) представимо единственным образом в виде

$$y(x) = c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x),$$

где $c_1, ..., c_n$ - постоянные.

Proof

По лемме 2 вектор-функции $\Phi_j(x)$ с компонентами $\varphi_j(x), \varphi_j'(x), ..., \varphi_j^{(n-1)}(x), j = \overline{1,n}$, образуют фундаментальную систему решений системы (2), эквивалентной уравнению (1). По теореме 3 § 2 главы 5 любое решение $y(x)$ системы (2) единственным образом представимо в виде

$$y(x) = c_1\Phi_1(x) + \cdots + c_n\Phi_n(x)$$

Первая строка этого векторного равенства и дает утверждение теоремы 2.

Из принципа суперпозиции для уравнения (1) и теоремы 2 следует, что множество всех решений уравнения (1) образует n-мерное линейное пространство, а фундаментальная система решений уравнения (1) служит базисом этого пространства.

Definition

Функция вида

$$y(x) = c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x)$$

где $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$ - фундаментальная система решений (1), а $c_1, ..., c_n$ - произвольные параметры, называется общим решением линейного однородного уравнения (1).

Из теоремы существования и единственности решения уравнения (1) при начальных условиях

$$y\left(x_0\right) = y_1^{(0)}, \quad y'\left(x_0\right) = y_2^{(0)}, ..., y^{(n-1)}\left(x_0\right) = y_n^{(0)}, \tag{3}$$

и из теоремы 2 получаем, что каждое решение задачи Коши (1), (3) однозначно определяется из формулы общего решения (1).

Example 1.

Пусть все коэффициенты в (1) постоянны и пусть характеристическое уравнение

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

имеет n попарно различных корней $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Тогда общее решение уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0$$

имеет вид

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x},$$

где $c_1, ..., c_n$ - произвольные постоянные. Эта формула уже известна из главы 2. В силу теоремы 2 доказательство этой формулы сводится к проверке линейной независимости системы решений $e^{\lambda x}$, $j = \overline{1, n}$. Это легко делается по определению линейной независимости.

Итак, нахождение общего решения уравнения (1) сводится к нахождению фундаментальной системы решений (1). В общем случае ее найти весьма трудно, а то и невозможно. Обратная же задача о нахождении уравнения (1) по заданной его фундаментальной систе ме решений на $[\alpha, \beta]$ однозначно решастся без особого труда, о чем речь будет несколько позже.

Definition

Определителем Вронского (или сокращенно вронскианом) решений $y_1(x), ..., y_n(x)$ уравнения (1) называется определитель вида

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & ... & y_n'(x) \\ ..... & ... & ..... \\ y_1^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

и обозначается $W(x)$ или $W[y_1(x), ..., y_n(x)]$.

Theorem 3

Решения $y_1(x), ..., y_n(x)$ уравнения (1) линейно зависимы тогда и только тогда, когда $W(x) \equiv 0$ на $[\alpha, \beta]$. Решения $y_1(x), ..., y_n(x)$ урав-

нения (1) линейно независимы тогда и только тогда, когда $W(x) \neq 0$ для всех $x \in [\alpha, \beta]$.

Proof

Сведем уравнение (1) к эквивалентной системе (2). Тогда столбцы $W(x)$ - решения системы (2) и, значит, $W(x)$ является определителем Вронского и для решений (2). Но для него утверждения теоремы 3 уже были установлены в § 2 главы 5.

На практике теорема 3 удобна для проверки линейной зависимости решений уравнения (1). Заметим, что, вообще говоря, теорема 3 неверна в случае произвольной системы ($n-1$) раз непрерывно дифференцируемых функций $y_1(x), ..., y_n(x)$. Например, при $x \in [-1, 1]$ функции

$$y_1(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, 0], \\ x^2, & x \in [0, 1], \end{cases} \qquad y_2(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1, 0], \\ 0, & x \in [0, 1], \end{cases}$$

линейно независимы, но $W(x) \equiv 0$.

Теперь по заданной фундаментальной системе $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$ уравнения (1) построим само уравнение (1). Искомым уравнением будет уравнение вида

$$W^{-1}\left[\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)\right]\cdot W\left[y(x),\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)\right]=0. \tag{4}$$

Уравнение (4), очевидно, имеет вид (1), так как $W\left(\varphi_1,...,\varphi_n\right)\neq 0$ на $[\alpha,\beta]$ и его решениями служат $\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)$, поскольку при их подстановке в (4) получается определитель с двумя одинаковыми столбцами. Уравнение (4) однозначно определяется системой $\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)$ в силу того, что эквивалентная ему линейная система (2) однозначно (см. § 2 главы 5) определяется своей фундаментальной матрицей.

Theorem 4

Пусть $W(x)$ - определитель Вронского решений $y_1(x),...,\ y_n(x)$ уравнения (1) и пусть $x_0\in[\alpha,\beta]$. Тогда для всех $x\in[\alpha,\beta]$ справедлива формула Лиувилля - Остроарадского

$$W(x)=W\left(x_0\right)e^{-\int_{x_0}^{x_0}a_1(\zeta)d\zeta}.$$

Уравнение (1) эквивалентно линейной системе (2). Для них определитель Вронского $W(x)$ один и тот же, и для системы (2) формула Лиувилля - Остроградского доказана. Остается заметить, что для системы (2) $\operatorname{sp}A(\zeta)=-a_1(\zeta)$.

Замечание. В случае, когда $n=2$ и известно частное решение $y_1(x)\neq 0$ на $[\alpha,\beta]$ уравнения (1), то формула Лиувилля - Остроградского позволяет найти решение (1) в квадратурах. В самом деле, из формулы Лиувилля - Остроградского для решений $y_1(x)$ и $y(x)$ имеем, что

$$y_1y'-yy_1'=c_1e^{-\int_{x_0}^{x}a_1(\zeta)d\zeta},$$

где c_1 - постояниая. Разделив это равенство на $y_1^2(x)$, имеем:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{y_1}\right)=\frac{c_1}{y_1^2(x)}e^{-\int_{x_0}^{x}a_1(\zeta)d\zeta}$$

Отсюда получаем, что

$$y(x)=c_1y_1(x)\cdot\int_{x_0}^{x}e^{-\int_{x_0}^{\tau}a_1(\zeta)d\zeta}\frac{d\tau}{y_1^2(\tau)}+c_2y_1(x)$$

Example 2.

Решить уравнение ($x>0$)

$$2xy''-(x+4)y'+\left(1+\frac{4}{x}\right)y=0.$$

$\triangle$ Очевидно, что $y=x$ - решение этого уравнения. Воспользовавтись формулой Лиувилля - Остроградского, получаем, что

$$xy'-y=ce^{\int^{x}\frac{\varsigma+4}{2\varsigma}d\varsigma}=\tilde{c}x^2e^{\frac{x}{2}}$$

Отсюда

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right)=\tilde{c}e^{\frac{x}{2}}$$

Значит,

$$y=x\left(c_2+c_1e^{\frac{x}{2}}\right)=c_1xe^{\frac{x}{2}}+c_2x.$$

Линейное однородное уравнение (1) является однородным относительно $y, y', ..., y^{(n)}$ (см. § 4 главы 1) и поэтому его порядок можно понизить на единицу с помощью замены неизвестной функции вида $y' = y \cdot z(x)$. Однако во многих случаях эта подстановка дает для $z(x)$ нелинейное уравнение и поэтому нецелесообразна. Покажем, что, если известио частное решение $y_1(x) \neq 0$ на $[\alpha, \beta]$ уравнения (1), то существует замена, понижающая порядок уравнения (1) на единицу, и при этом получается линейное однородное уравнение порядка ($n-1$). В самом деле, вводя замену переменных $y = y_1(x) \cdot z(x)$, вычислив производные от y по формуле Лейбница

$$y^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} y_1^{(i)}(x) \cdot z^{(k-i)}(x), \quad k = \overline{1, n}$$

и подставив в уравнение (1), получаем уравнение

$$y_1 z^{(n)} + (n y_1' + a_1 y_1) z^{(n-1)} + \cdots + \left(y_1^{(n)} + a_1 y_1^{(n-1)} + \cdots + a_n y_1\right) z = 0.$$

Так как $y_1(x)$ - решение (1), то коэффициент при z равен нулю и замена $z' = u$ после деления на $y_1(x)$ дает уравнение

$$u^{(n-1)} + b_1(x) u^{(n-2)} + \cdots + b_{n-1}(x) u = 0. \tag{5}$$

Итак, замена $u(x) = z'(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{y(x)}{y1(x)}\right]$ приводит уравнение (1) к уравнению (5).

Используя полученный результат, можно показать, что порядок уравнения (1) можно понизить на m единиц, если известно m линейно независимых решений $y_1(x), ..., y_m(x), 1 \leqslant m \leqslant n-1$, уравнения (1). В случае, когда известно ($n-1$) линейно независимых частных решений (1), приходим в результате понижения к линейному уравнению первого порядка, интегрируемому в квадратурах. В этом случае общее решение (1) может быть получено в квадратурах.

Например, в случае уравнения примера 2 замена $y = xz$ приводит к уравнению

$$2z'' - z' = 0$$

Его общим решением является

$$z = c_1 + c_2 e^{\frac{x}{2}}$$

и, значит, общее решение уравнения примера 2 задается формулой

$$y = xz = c_1 x + c_2 x e^{\frac{x}{2}},$$

где c_1 и c_2 - произвольные постоянные.

13.6.3 § 3. Linear inhomogeneous equations of order n

Пусть задано линейное неоднородное уравнение порядка n

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x) y = f(x), \tag{1}$$

где $a_j(x), j = \overline{1, n}, f(x)$ - заданные непрерывные функции на $[\alpha, \beta]$. Наряду с уравнением (1) рассмотрим соответствующее линейное однородное уравнение порядка n

$$z^{(n)} + a_1(x) z^{(n-1)} + \cdots + a_n(x) z = 0. \tag{2}$$

Если известно какое-либо частное решение (1), то его интегрирование сводится к интегрированию уравнения (2).

Theorem 1

Пусть $y_0(x)-$ кахое-либо решение (1) $uy(x) = z(x) + y_0(x)$. Тогда $y(x)$ является решением уравнения (1) только в том случае, когда $z(x)$ - решение уровнения (2).

Proof

Обозначив через $Ly(x)$ левую часть (1) и через $Lz(x)$ левую часть (2), из равенства $y(x) = z(x) + y_0(x)$ получаем, что

$$Ly(x) = Lz(x) + Ly_0(x) = Lz(x) + f(x),$$

так как $y_0(x)$ - решение (1). Если $y(x)$ - решение (1), то $Ly(x) = f(x)$ и отсюда $Lz(x) = 0$, т.е. $z(x)$ - решение (2). Наоборот, если $z(x)$ - решение (2), то $Lz(x) = 0$ и тогда $Ly(x) = f(x)$ т.е. $y(x)$ - решение (1).

Из этой теоремы сразу следует, что, если известна фундаментальная система решений $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$ уравнения (2), то функция

$$y(x) = c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) + y_0(x)$$

где $c_1, \cdots, c_n$ - произвольные постоянные, является общим решением уравнения (1), т.е. содержит все решения уравнения (1).

Итак, в том случае, когда известна фундаментальная система решений уравнения (2), решение уравнения (1) сводится к нахождению какоголибо частного решения (1). Покажем, как можно в этом случае при $n \geq 2$ найти то решение уравнения (1), которое удовлетворяет нулевым начальным условиям

$$y\left(x_0\right) = y'\left(x_0\right) = \cdots = y^{(n-1)}\left(x_0\right) = 0, \quad x_0 \in [\alpha, \beta]. \tag{3}$$

Пусть $K(x)$ - решение линейного однородного уравнения (2) порядка $n \geq 2$, удовлетворяющее начальным условиям

$$y\left(x_0\right) = y'\left(x_0\right) = \cdots = y^{(n-2)}\left(x_0\right) = 0, \quad y^{(n-1)}\left(x_0\right) = 1, \tag{4}$$

где $x_0 \in [\alpha, \beta]$.

Построим $K(x)$. Если $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$ - фундаментальная система решений (2), то по теореме 2 § 2

$$K(x) = c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x).$$

Подставив $K(x)$ в начальные условия (4), получим, что

$$c_j = W^{-1}\left(x_0\right) \cdot W_{nj}\left(x_0\right), \quad j = \overline{1, n}$$

где $W\left(x_0\right)$ - определитель Вронского системы $\varphi_1\left(x_0\right), ..., \varphi_n\left(x_0\right)$, а $W_{nj}\left(x_0\right)$ - алгебраическое дополнение элемента $\varphi_j\left(x_0\right)$ в $W\left(x_0\right), j = \overline{1, n}$. Таким образом,

$$K(x) = W^{-1}\left(x_0\right) \cdot \sum_{j=1}^{n} W_{nj}\left(x_0\right) \cdot \varphi_j(x). \tag{5}$$

Theorem 2

Фулкция

$$y_0(x) = \int_{x_0}^{x} K\left(x + x_0 - \zeta\right) f(\zeta) d\zeta, \quad x_0 < x \in [\alpha, \beta] \tag{6}$$

является частным решением линейного неоднородного уравнения (1), удовлетворяющим нулевым начальным условиям (3).

Proof

Поскольку $K\left(x + x_0 - \zeta\right)$ и все $\frac{\partial^j K(x+x_0-\zeta)}{\partial x^j}, j = \overline{1, n}$, как видно из (5), являются непрерывными функциями $x, x_0 \in [\alpha, \beta]$, то $y_0(x)$ можно по правилу Лейбница n раз непрерывно дифференцировать. Тогда, учитывая начальные условия (4) для $K(x)$, имеем, что

$$y_0^{(j)}(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial^j K\left(x + x_0 - \zeta\right)}{\partial x^j} f(\zeta) d\zeta, \quad j = \overline{1, n-1},$$
$$y_0^{(n)}(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial^n K\left(x + x_0 - \zeta\right)}{\partial x^n} f(\zeta) d\zeta + f(x).$$

Отсюда ясно, что $y_0(x)$ удовлетворяет нулевым начальным условиям (3). Подставляя выражения для $y_0(x)$ и ее производных в (1), убеждаемся в том, что $y_0(x)$ - решение (1). □

Формула (6) для $y_0(x)$ называется формулой Коши частного решения (1), а метод ее получения называется методом Коши. Метод Копи позволяет найти общее решение (1) в квадратурах.

Решения (1) можно получить и другим методом - методом вариации постоянных (методом Лагранжа). Если $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$ - фундаментальпая система решений уравнения (2), то, как известно, общее решение (2) имеет вид

$$y = c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x),$$

где $c_1, ..., c_n$ - произвольные постоянные. Следуя Лагранжу, будем искать общее решение уравиения (1) в том же виде,

$$y = c_1\varphi_1(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x), \tag{7}$$

но уже считаем

$$c_1 = c_1(x), ..., c_n = c_n(x)$$

где $c_1(x), ..., c_n(x)$, пока неизвестные непрерывно дифференцируемые функции $x \in [\alpha, \beta]$. Потребуем, чтобы

$$y^{(j)}(x) = c_1(x)\varphi_1^{(j)}(x) + \cdots + c_n(x)\varphi_n^{(j)}(x), \quad j = \overline{1, n-1}$$

Это дает систему $(n-1)$ уравнений для определения $c_1'(x), ..., c_n'(x)$:

$$c_1'(x)\varphi_1^{(j)}(x) + \cdots + c_n'(x)\varphi_n^{(j)}(x) = 0, \quad j = \overline{0, n-2}. \tag{8}$$

Еще одно уравнение получаем подстановкой $y^{(j)}(x), j = \overline{0, n}$, в уравнение (1). Если обозначить левую часть уравнения (1) через $Ly(x)$, то подстановка $y(x)$ и ее производных в (1) дает уравнение

$$c_1'(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) + \\ + c_1(x)L\varphi_1(x) + \cdots + c_n(x)L\varphi_n(x) = f(x)$$

Поскольку $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$ - решения (2), то $L\varphi_1(x) = \cdots = L\varphi_n(x) = 0$ и остается уравнение

$$c_1'(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) = f(x). \tag{9}$$

Линейная алгебраическая система (8), (9) для $c_1'(x), ..., c_n'(x)$ позволяет однозначно определить $c_1'(x), ..., c_n'(x)$, так как определитель системы (8), (9) представляет собой определитель Вронского $W(x) = W(\varphi_1, ..., \varphi_n)$, а он отличен от нуля на $[\alpha, \beta]$ в силу того, что $\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)$ - фундаментальная система решений (2). Если $W_{nj}(x)$ обозначает алгебраическое дополнение элемента $\varphi_j^{(n-1)}(x)$ в $W(x)$, $j = \overline{1, n}$, то по формулам Крамера

$$c_1'(x) = W^{-1}(x)W_{n1}(x)f(x), ..., c_n'(x) = W^{-1}(x)W_{nn}(x)f(x).$$

В силу непрерывности $W^{-1}(x), f(x)$ и $W_{nj}(x), j = \overline{1, n}$, на $[\alpha, \beta]$ отсюда находим, что

$$c_j(x) = d_j + \int W^{-1}(x)W_{nj}(x)f(x)dx, \quad j = \overline{1, n}$$

где $d_1, ..., d_n$ - произвольные постоянные, а знак интеграла означает фиксированную первообразную.

Подставляя выражения для $c_j(x), j = \overline{1, n}$, в формулу (7), попучаем формулу общего решения (1):

$$y(x) = d_1\varphi_1(x) + \cdots + d_n\varphi_n(x) + \int K(x)f(x)dx$$

где $K(x)$ определяется формулой (5) при $x_0 = x$. Если в качестве первообразной взять интеграл с переменным верхним пределом, то отсюда получаем при $d_1 = \cdots = d_n = 0$ частное решение $y_0(x) = \int_{x_0}^{x} K(\zeta)f(\zeta)d\zeta$, удовлетворяющее начальным условиям (3).

Example 1.

Методом Коши решить уравнение

$$(2x+1)y'' - 2y' - (2x+3)y = 9(2x+1)^2 e^{\frac{\pi}{2}}, \quad x > -\frac{1}{2}.$$

△ Найдем сначала фундаментальную систему решений линейного однородного уравнения

$$(2x+1)y'' - 2y' - (2x+3)y = 0.$$

Проверкой убеждаемся, что $y_1 = e^{-x}$ - его частное решение. По формуле Лиувилля-Остроградского

$$y'e^{-x} + e^{-x}y = c_1 e^{\int \frac{2xx}{2x+1}} = c_1(2x+1).$$

Отсюда

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{e^{-x}}\right) = c_1(2x+1)e^{2x}$$

или

$$y = e^{-x}\left(c_2 + c_1\int(2x+1)e^{2x}dx\right) = c_1xe^x + c_2e^{-x}$$

Функцию $K(x)$ ищем в виде

$$K(x) = c_1xe^x + c_2e^{-x}$$

где c_1 и c_2 найдем из начальных условий $K(\zeta) = 0, K'(\zeta) = 1.$ Из этих условий получаем систему уравнений

$$\begin{cases} c_1\zeta e^{\zeta} + c_2e^{-\zeta} = 0 \\ c_1(\zeta+1)e^{\zeta} - c_2e^{-\zeta} = 1 \end{cases}$$

откуда

$$c_1 = \frac{e^{-\zeta}}{2\zeta+1}, \quad c_2 = -\frac{\zeta e^{-\zeta}}{2\zeta+1}$$

Следовательно,

$$K(x) = \frac{xe^{x-\zeta} - \zeta e^{\zeta-x}}{2\zeta+1}.$$

Тогда, учитывая, что в заданном примере $f(x) = 9(2x+1)e^{\frac{x}{2}}$,

$$y_0(x) = \int_0^x K(\zeta)f(\zeta)d\zeta = \int_0^x \frac{xe^{x-\zeta} - \zeta e^{\zeta-x}}{2\zeta+1}\cdot 9(2\zeta+1)e^{\frac{\zeta}{2}}d\zeta =$$
$$= 9\int_0^x \left(xe^x\cdot e^{-\frac{\zeta}{2}} - e^{-x}\cdot\zeta e^{\frac{3\zeta}{2}}\right)d\zeta = (4-24x)e^{\frac{x}{2}} - 4e^{-x} + 18xe^x$$

Общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = c_1xe^x + c_2e^{-x} + (4-24x)e^{\frac{x}{2}} - 4e^{-x} + 18xe^x$$

где c_1 и c_2 - произвольные постоянные.

Example 2.

Методом вариации постоянных решить уравнение

$$(2x+3)y'' - 2y' - \frac{6}{x^2}y = 3(2x+3)^2, \quad x > 0$$

Решаем сначала линейное однородное уравнение

$$(2x+3)y'' - 2y' - \frac{6}{x^2}y = 0$$

Проверкой убеждаемся, что $y_1 = x^2$-его решение. По формуле Ли-увилля-Остроградского

$$x^2y' - 2xy = ce^{\int\frac{2dx}{2x+3}} = c(2x+3).$$

Отсюда

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x^2}\right) = c\frac{2x+3}{x^4}$$

или

$$y = x^2\left(c_1 + c\int\frac{2x+3}{x^4}dx\right) = c_1x^2 + c_2\frac{x+1}{x}.$$

Решение исходного уравнения ищем в виде

$$y = c_1(x)x^2 + c_2(x)\frac{x+1}{x}.$$

Для $c_1(x)$ и $c_2(x)$ имеем систему уравнений (здесь $f(x) = 3(2x+3)$):

$$\begin{cases} x^2c_1'(x) + \left(1+\frac{1}{x}\right)c_2'(x) = 0 \\ 2xc_1'(x) - \frac{1}{x^2}\cdot c_2'(x) = 3(2x+3) \end{cases}$$

Отсюда

$$c_1'(x) = 3 + \frac{3}{x}, \quad c_2'(x) = -3x^2.$$

Значит,

$$c_1(x) = 3x + 3\ln x + d_1, \quad c_2(x) = -x^3 + d_2,$$

где d_1 и d_2 - произвольные постоянные.
Общее решение заданного уравнения имеет вид

$$y = d_1x^2 + d_2\left(1+\frac{1}{x}\right) + 2x^3 + 3x^2\ln x$$

Формулу Коши (6) частного решения (1) можно получить и подругому, используя понятие фундаментального решения дифференциального оператора (см. [13]).

Пусть в уравнении (1) коэффициенты $a_j(x)$ - заданные бесконечно дифференцируемые функции на полуоси $x > 0, j = \overline{1,n}$, и правая часть $f(x)$ - заданная непрерывная и локально интегрируемая на попуоси $x > 0$ функция, т.е. на каждом $[\alpha,\beta]$ полуоси $x > 0$ существует

$$\int_\alpha^\beta |f(x)|dx.$$

Продолжая нулем на полуось $x < 0$ функции $y(x)$ и $f(x)$ в уравнении (1), можно тогда решение уравнения (1) понимать в смысле теории обобщенных фупкций (см. [13]). Известно, что функция $\mathcal{E}(x) = \theta(x)z(x)$, где $\theta(x)$ - функция Хевисайда, равная единице при $x > 0$ и нулю при $x < 0$, а $z(x)$-решение уравнения (2), удовлетворяющее начальным условиям (4) при $x_0 = 0$, удовлетворяет в смысле обобщенных функций уравнению

$$L\mathcal{E}(x) = \mathcal{E}^{(n)}(x) + a_1(x)\mathcal{E}^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n(x)\mathcal{E}(x) = \delta(x),$$

где $\delta(x)$ - δ-функция Дирака. Другими словами, $\mathcal{E}(x)$ является фундаментальным решением дифференциального оператора L и, значит, свертка $\mathcal{E}(x)$ с $f(x)$ дает частное решение (1) при $x > 0$

$$y_0(x) = \int_0^x z(x-\zeta)f(\zeta)d\zeta$$

удовлетворяющее нулевым начальным условиям при $x = 0$. Это частный случай формулы Коши при $x_0 = 0$. Формула Коши (6) сводится к этой формуле заменой $x - x_0 = t$.

Замечание. Если в уравнении (1) $a_j(x), j = \overline{1,n}$, и $f(x)$ не все являются непрерывными функциями, то решения (1) может не существовать. В этом случае приходится расширять понятие решения (1) и вводить так называемое обобщенное решение (1). Например, уравнение $y' = \operatorname{sign} x$ не имеет классического решения, но имеет обобщенное репение. Более подробно об этом см в [13].

13.6.4 § 4. Boundary value problems

Начальные условия не являются единственно возможными дополнительными условиями, выделяющими определенное частное решение дифференциального уравнения. Во многих случаях в качестве дополнительных условий задаются условия на неизвестную функцию и ее производные на границе того промежутка, где задано дифференциальное уравнение. Эти условия называются граничными (или краевыми) условиями. Если задача определения решения дифференциального уравиения, удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется задачей Коши, то задача определения решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным граничиым условиям, называется граничной (или краевой) задачей.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением простейшей граничной задачи для линейного дифференциального уравнения второго порядка. Пусть задано уравнение

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \tag{1}$$

где $a_1(x), a_2(x), f(x)$ - заданные непрерывные функции $x \in [0, l]$, и граничные условия при $x = 0$ и $x = l > 0$

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(0) + \beta_1 y'(0) &= y_0, \\ \alpha_2 y(l) + \beta_2 y'(l) &= y_1, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\alpha_i, \beta_i, i = 1, 2, y_0, y_1$ - заданные числа, причем $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0, i = 1, 2$. Здесь $y(0) = y(+0), y'(0) = y'(+0), y(l) = y(l-0), y'(l) = y'(l-0)$.

Если $y_0 = y_1 = 0$, то граничные условия (2) называются однородными граничными условиями. В дальнейшем ограничимся случаем однородных граничных условий, так как в случае неоднородных условий решение $y(x)$ граничной задачи (1), (2) можно искать в виде

$$y(x) = u(x) + v(x),$$

где функция $v(x)$ удовлетворяет лишь заданным граничным условиям (2), а в остальном произвольна. Например, для граничных условий $y(0) = y_0, y(l) = y_1$ можно взять

$$v(x) = y_0 \frac{l-x}{l} + y_1 \frac{x}{l}.$$

Тогда для функции $u(x)$ получается граничная задача с другой правой частью, чем в (1), но с однородными граничными условиями. Вместо $[0, l]$ можно брать любой другой $[c, d]$.

Итак, в дальнейшем считаем, что в условиях (2) $y_0 = y_1 = 0$. Для уравнения (1) рассматривают и граничные условия более общего вида, представляющие собой линейные комбинации значений $y(x)$ и $y'(x)$ в точках $x = 0$ и $x = l$. Например, это могут быть условия псриодичности

$$y(0) = y(l), \quad y'(0) = y'(l).$$

Definition

Решением граничной задачи (1), (2) называется функция $y = \varphi(x), x \in [0, l]$, которая дважды непрерывно дифференцируема при $x \in (0, l)$, непрерывно дифференцируемая на $[0, l]$ и удовлетворяет уравнению (1) на $(\ 0, l\ )$ и граничным условиям (2).

Как известно, решение задачи Коши для уравнения (1) при начальных условиях

$$y\left(x_0\right) = y_0, \quad y'\left(x_0\right) = y_1, \quad x_0 \in [0, l],$$

существует и единственно на всем $[0, l]$. Для граничной задачи (1), (2) это вовсе не обязательно. Оказывается, что решение граничной задачи (1), (2) может не существовать или быть не единственным. Чтобы разобраться в этом вопросе, введем в рассмотрение фундаментальную систему решений $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ линейного однородного уравнения

$$z'' + a_1(x)z' + a_2(x)z = 0 \tag{3}$$

($\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ существуют в силу непрерывности $a_1(x)$ и $a_2(x)$) и частное решение $y_0(x)$ уравнения (1). Тогда общее решение уравнения (1) имеет вид

$$y = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + y_0(x),$$

где c_1, c_2 - произвольные постоянные. Для получения решения граничной задачи (1), (2) постоянные c_1 и c_2 необходимо определить из однородных

граничных условий (2). Подставляя общее решение (1) в условия (2), получаем линейную алгебраическую систему для c_1 и c_2 :

$$\begin{cases} \left[\alpha_1\varphi_1(0) + \beta_1\varphi_1'(0)\right] c_1 + \left[\alpha_1\varphi_2(0) + \beta_1\varphi_2'(0)\right] c_2 = -\alpha_1 y_0(0) - \beta_1 y_0'(0) \\ \left[\alpha_2\varphi_1(l) + \beta_2\varphi_1'(l)\right] c_1 + \left[\alpha_2\varphi_2(l) + \beta_2\varphi_2'(l)\right] c_2 = -\alpha_2 y_0(l) - \beta_2 y_0'(l) \end{cases}$$

Обозначим через U матрицу этой системы и через $\tilde{U}$ - расширенную матрицу этой системы. Используя известные из курса алгебры теоремы о разрешимости линейной системы уравнений, получаем следующий результат.

Theorem 1

Если $\det U \neq 0$, то решение араничной задачи (1), (2) существует и единственно на $[0, l]$. Если же $\det U = 0$, то решение граничной задачи (1), (2) не существует, если ранг матрицы U не равен рангу расширенной матриць $\bar{U}$, и решение (1), (2) существует, по не единственно, если ранг матрицы U равен рангу матрицы $\tilde{U}$.

Отметим, что ранг матрицы U не зависит от выбора фундаментальной системы решений $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ уравнения (3), так как переход к другой фундаментальной системе осуществляется невырожденным линейным преобразованием и при таком переходе матрица U умножается на матрицу этого линейного преобразования, что не меняет ранга матрицы U. Аналогичное замечание касается и ранга матрицы $\tilde{U}$.

Ранг матрицы U называется рангом граничной задачи (1), (2). Однородная граничная задача (1), (2), т.е. задача (1), (2) при $f(x) \equiv 0$, $y_0 = y_1 = 0$, имеет лишь тривиальное решение, если ранг матрицы U равен двум, и имеет одно линейно независимое решение, если ранг матрицы U равен единице.

Example 1.

Исследовать разрешимость граничной задачи

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(l) = y_1, \quad l > 0, \quad y_1 \in R.$$

△ Общим решением уравнения является

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Граничное условие $y(0) = 0$ дает $c_1 = 0$, а граничное условие $y(l) = y_1$ приводит к уравнению $c_2 \sin l = y_1$. Если $\sin l \neq 0$, т.е. $l \neq k\pi$, $k \in N$, то $c_2 = \frac{y_1}{\sin l}$ и получаем единственное решение задачи

$$y = \frac{y_1 \sin x}{\sin l}.$$

Если же $\sin l = 0$, т.е. $l = k\pi, k \in N$, то возможны два случая. В случае $y_1 \neq 0$ уравнение $c_2 \sin l = y_1$, а, значит, и граничная задача, решений не имеет. В случас $y_1 = 0$ уравнение $c_2 \sin l = y_1$ становится

тождеством и граничная задача имеет бесконечно много решений вида

$$y = c_2 \sin x$$

где c_2 - произвольная постоянная.

Покажем, что решение уравнения (1) при однородных граничных условиях (2) однозначно представимо через так называемую функцию Грина граничной задачи, если только однородная граничная задача имеет лишь тривиальное решение, т.е. решение $y(x) \equiv 0$ на $[0, l]$.

Definition

Функцией Грина граничной задачи (1), (2) называется функция $G(x, \zeta)$, определенная при $\forall x, \zeta \in [0, l]$ и удовлетворяющая следующим условиям:

1. При каждом фиксированном $\zeta \in [0, l]$ $G(x, \zeta)$ как функция x на каждом из промежутков $[0, \zeta)$ и $(\zeta, l]$ удовлетворяет однородному уравнению (3).
2. $G(x, \zeta)$ удовлетворяет однородным граничным условиям (2).
3. $G(x, \zeta)$ - непрерывна при всех $x, \zeta \in [0, l]$, а ее производная $\frac{\partial G}{\partial x}$ имеет при $x = \zeta$ разрыв первого рода со скачком

$$\frac{\partial G(\zeta + 0, \zeta)}{\partial x} - \frac{\partial G(\zeta - 0, \zeta)}{\partial x} = 1$$

Theorem 2

Если однородная граничная задача имеет лишь тривиальное решение, то фуккция Грина граничной задачи (1), (2) существует и единственна.

Proof.

Пусть $\varphi_1(x)$ - решение уравнения (3) при начальных условиях

$$z(0) = \beta_1, \quad z'(0) = -\alpha_1,$$

а $\varphi_2(x)$ - решсние уравнения (3) при начальных условиях

$$z(l) = \beta_2, \quad z'(l) = -\alpha_2.$$

Очевидно, что $\varphi_2(x) \not\equiv 0$ на $[0,l], i = 1,2$, и что $\varphi_1(x)$ удовлетворяет первому граничному условию из (2) ($y_0 = 0$), а $\varphi_2(x)$ удовлетворяет второму условию из (2) ($y_1 = 0$), так как $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0, i = 1,2$. Далее, функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ - линейно независимы на $[0,l]$, так как в противном спучае $\varphi_2(x) = c\varphi_1(x), c \neq 0$, и тогда $\varphi_2(x)$ удовлетворяет обоим однородным условиям (2), что противоречит условию теоремы. Таким образом, $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ - фундаментальная система решений (3). Пусть $W(x)$ - определитель Вронского этой системы.

Ищем функцию $G(x,\zeta)$ в виде

$$G(x,\zeta) = \begin{cases} c_1(\zeta)\varphi_1(x), & x \in [0,\zeta) \\ c_2(\zeta)\varphi_2(x), & x \in (\zeta,l] \end{cases}$$

По построению функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ функция $G(x,\zeta)$ удовлетворяет пп. 1, 2 определения функции Грина. Чтобы удовлетворить п. 3 этого определения, остается найти $c_1(\zeta)$ и $c_2(\zeta)$ из условий

$$c_2\varphi_2(\zeta) - c_1\varphi_1(\zeta) = 0, \quad c_2\varphi_2'(\zeta) - c_1\varphi_1'(\zeta) = 1.$$

Эта система однозначно разрешима относительно c_1 и c_2, поскольку определителем ее служит $W(x) \neq 0$ на $[0,l]$. Окончательно тогда получаем, что

$$G(x,\zeta) = \frac{1}{W(\zeta)} \begin{cases} \varphi_2(\zeta)\cdot\varphi_1(x), & x \in [0,\zeta] \\ \varphi_1(\zeta)\cdot\varphi_2(x), & x \in [\zeta,l] \end{cases} \tag{4}$$

С точки зрения теории обобщенных функций (см. [13]) функция Грина $G(x,\zeta)$ получает простое и четкое толкование. Пусть в уравнении (1) $a_1(x)$ и $a_2(x)$ - бесконечно дифференцируемые функции на $[0,l]$. Продолжим нулем на всю ось R_x^1 в уравнении (1) все функции $y(x), a_1(x), a_2(x), f(x)$. Тогда решение (1) можно понимать в смысле теории обобщенных функций. Как нетрудно установить (см. [13], [28]), функция Грина $G(x,\zeta)$ граничной задачи (1), (2) удовлетворяет уравнению вида

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = \delta(x-\zeta)$$

где $\delta(x)$ – δ-функция Дирака. Наоборот, если функция $G(x,\zeta)$ является решением (обобщенным) этого уравнения, то $G(x,\zeta)$ обладает свойствами пii. 1, 3 опредепения функции Грина. Таким образом, функцией Грина задачи (1), (2) можно коротко назвать решение уравнения

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = \delta(x-\zeta)$$

удовлетворяющее граничным условиям (2).

Theorem 3

Если однородная граничная задача имеет лишь тривиальное решение, то решение уравнения (1) при одюродных граничных условиях (2) существует, единственно и выражается формулой

$$y(x) = \int_0^l G(x,\zeta)\cdot f(\zeta)d\zeta \tag{5}$$

где $G(x,\zeta)$ - фупкция Грина граничной задачи (1), (2).

Proof.

Запишем формулу (5) в виде

$$y(x) = \int_0^x G(x,\zeta)f(\zeta)d\zeta + \int_x^l G(x,\zeta)f(\zeta)d\zeta$$

В каждом из промежутков $[0,x)$ и $(x,l]G(x,\zeta)$ и $\frac{\partial G(x,\zeta)}{\partial x}$ непрерывны. Поэтому каждый из интегралов можно дифференцировать по x. Получаем

$$y'(x) = \int_0^x \frac{\partial G(x,\zeta)}{\partial x} f(\zeta)d\zeta + G(x,x-0)f(x) +$$
$$+ \int_x^1 \frac{\partial G(x,\zeta)}{\partial x} f(\zeta)d\zeta - G(x,x+0)f(x)$$

В силу непрерывности $G(x,\zeta)$ при $\zeta = x$ внеинтегральные члены уничтожаются взаимно и

$$y'(x) = \int_0^x \frac{\partial G(x,\zeta)}{\partial x} f(\zeta)d\zeta + \int_x^l \frac{\partial G(x,\zeta)}{\partial x} f(\zeta)d\zeta \tag{6}$$

Эту формулу можно еще раз продифференцировать по x. Получаем

$$y''(x) = \int_0^x \frac{\partial^2 G(x,\zeta)}{\partial x^2} f(\zeta)d\zeta + \frac{\partial G(x,x-0)}{\partial x} \cdot f(x) +$$
$$+ \int_x^l \frac{\partial^2 G(x,\zeta)}{\partial x^2} f(\zeta)d\zeta - \frac{\partial G(x,x+0)}{\partial x} \cdot f(x).$$

В силу п. 3 определения $G(x,\zeta)$ последнюю формулу можно записать в виде

$$y''(x) = \int_0^l \frac{\partial^2 G(x,\zeta)}{\partial x^2} f(\zeta)d\zeta + f(x) \tag{7}$$

Из формул (5), (6), (7), учитывая свойства $G(x,\zeta)$, получаем, что (5) - решение задачи (1), (2). Решение единственно, так как если предположить существование другого решения $\hat{y}(x)$, то $z(x) = y(x) - \hat{y}(x)-$ нетривиальное решение однородной граничной задачи, что противоречит условию теоремы. □

В ряде вопросов возникает граничная задача с комплексным параметром λ :

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = \lambda y, \quad x \in (0,l), \tag{8}$$
$$\alpha_1 y(0) + \beta_1 y'(0) = 0,$$
$$\alpha_2 y(l) + \beta_2 y'(l) = 0, \tag{9}$$

где $a_1(x), a_2(x)$ - непрерывны на $[0,l]$ и $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0, i = 1,2$.

Definition

Задача нахождения значений параметра λ, при которых граничная задача (8), (9) имеет нетривиальные решения (т.е. $y(x) \not\equiv 0$ на $[0,l]$), называется граничной задачей на собственные значения.

Значения параметра λ, для которых граничиая задача (8), (9) имеет нетривиальные решения, называются собственными значениями, а соответствующие им нетривиальные решения называются собственными функциями граничной задачи (8), (9) на собственные значения.

Так как однородное уравнение (8) при данном λ имеет не более двух линейно независимых решений, то множество всех собственных функций, соответствующих данному собственному значению λ, является линейным пространством размерности не более двух. Число линейно независимых решений граничной задачи (8), (9) при данном собственном значении λ называется кратностью собственного значения λ.

Оказывается, что для задачи (8), (9) имеет место только один из следующих трех вариантов (см. [31]):

1. Граничная задача (8), (9) не имеет собственных значений.
2. Граничная задача (8), (9) имеет не более счетного множества собственных значений, которые при этом не могут иметь конечной предельной точки.
3. Всякое число λ является собственным значением граничной задачи (8), (9).

Example 2.

С помощью функции Грина решить граничную задачу

$$\left(1+x^2\right) y'' + 2xy' = f(x), \quad y(0) = y'(0), \quad y(1) = 0,$$

где $f(x)$ - заданная непрерывная функция на $[0,1]$.
Однородная граничная задача

$$\left(1+x^2\right) y'' + 2xy' = 0, \quad y(0) = y'(0), \quad y(1) = 0,$$

имеет только тривиальное решение. В самом деле, уравнение можно записать в виде

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1+x^2\right) y'\right] = 0.$$

Его общее решение

$$y = c_1 \operatorname{arctg} x + c_2$$

и при подстановке решения в граничные условия получаем $y = 0$.
Итак, функция Грина существует и для ее нахождения можно воспользоваться формулой (4). Решением уравнения

$$\left(1+x^2\right) y'' + 2xy' = 0$$

при начальных условиях $y(0) = 1, y'(0) = 1$ будет $\varphi_1(x) = 1 + \operatorname{arctg} x$, а решением того же уравнения при начальных условиях $y(1) = 0$,
$y'(1) = 1$ будет $\varphi_2(x) = -\frac{\pi}{2} + 2\operatorname{arctg} x$. Определитель Вронского $W(x) = \frac{\pi+4}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2}$. Следовательно,

$$G(x,\zeta) = \frac{2\left(1+\zeta^2\right)}{\pi+4} \begin{cases} \left(-\frac{\pi}{2} + 2\operatorname{arctg}\zeta\right)(1+\operatorname{arctg} x), & x \in [0,\zeta] \\ (1+\operatorname{arctg}\zeta)\left(-\frac{\pi}{2} + 2\operatorname{arctg} x\right), & x \in [\zeta,1] \end{cases}$$

и решение заданной граничной задачи имеет вид

$$y(x) = \int_0^1 G(x,\zeta) f(\zeta) d\zeta$$

□

Example 3.

Найти собственные значения и собственные функции граничной задачи

$$y'' = \lambda y, \quad y(0) = y(l) = 0.$$

Д Если $\lambda > 0$ или λ-комплексное, то задача не имеет нетривиальных решений, так как общее решение уравнения

$$y = c_1 e^{x\sqrt{\lambda}} + c_2 e^{-x\sqrt{\lambda}}$$

при подстановке в граничные условия дает $y(x) \equiv 0$.
При $\lambda = 0$ общее решепие уравнения $y = c_1 x + c_2$ и подстановка его в граничные условия опять дает $y(x) \equiv 0$.

Пусть теперь $\lambda < 0$. Тогда общее ренение

$$y = c_1 \cos(x\sqrt{-\lambda}) + c_2 \sin(x\sqrt{-\lambda})$$

и подстановка в граничные условия дает

$$c_1 = 0, \quad c_2 \sin(l\sqrt{-\lambda}) = 0$$

Если $y \not\equiv 0$, то $c_2 \neq 0$ и, следовательно,

$$\sin(1\sqrt{-\lambda}) = 0.$$

Отсюда получаем формулу всех собственных значений:

$$\lambda_k = -\frac{k^2\pi^2}{l^2}, \quad k = \pm 1, \pm 2, ...$$

Им соответствуют собственные функции

$$y_k(x) = c_k \sin\frac{k\pi x}{l}$$

где c_k - произвольные постоянные $\neq 0, k = \pm 1, \pm 2, ...$ □

Замечание. Если в уравнении (1) $a_1(x), a_2(x), f(x)$ не все являются непрерывными функциями на $[0, l]$, то решений граничной задачи (1), (2) может не существовать. В таком случае вводят понятие обобщенного решения граничной задачи (1), (2) и исследуют его существование. Подробнее об этом см. в [15], [30].

13.6.5 § 5. Sturm's theorem

Рассмотрим линейное однородное уравнение второго порядка

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0, \tag{1}$$

где $a(x)$ и $b(x)$ - заданные действительные функции на некотором промежутке I числовой оси R^1_x, причем $a(x)$ - непрерывно дифференцируема и $b(x)$ - непрерывна на $\mathcal{I}$.

В этом параграфе будем рассматривать только действительные решения уравнения (1). Решение (1) $y(x) \not\equiv 0$ на $\mathcal{I}$ называется нетривиальным решением уравнения (1), а точку $x_0 \in I$, для которой $y(x_0) = 0$, называют пулем нетривиального решения (1). Нас будет интересовать вопрос о множестве нулей нетривиальных решений (1). Этот вопрос имеет важное значение в ряде прикладных задач теории колебаний. Решение (1), имеющее на $\mathcal{I}$ более одного нуля, называется колеблющимся на $\mathcal{I}$.

Заменой неизвестной функции $y(x)$ уравнение (1) всегда можно свести к двучленному уравнению

$$z'' + q(x)z = 0, \tag{2}$$

где $q(x)$ - непрерывная функция на $\mathcal{I}$. В самом деле, положим

$$y(x) = u(x)z(x)$$

и подберем $u(x)$ так, чтобы уничтожить член с z' в уравнении для $z(x)$. Имеем:

$$y' = u'z + uz', \quad y'' = u''z + 2u'z' + uz''$$
$$uz'' + (2u' + au)\, z' + (u'' + au' + bu)\, z = 0$$

В качестве $u(x)$ возьмем какое-либо нетривиальное решение уравнения

$$2u' + au = 0,$$

например,

$$u(x) = e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} a(\zeta)d\zeta}, \quad x_0 \in \mathcal{I}.$$

При таком выборе $u(x)$ имеем, что

$$u' = -\frac{1}{2}au, \quad u'' = -\frac{1}{2}\left(a'u + au'\right) = -\frac{1}{2}\left(a' - \frac{1}{2}a^2\right)u.$$

Подставив в (1) найденные значения u, u', u'' и сократив на $u(x) \neq 0$, для $z(x)$ получаем уравнение (2), в котором

$$q(x) = b(x) - \frac{1}{4}a^2(x) - \frac{1}{2}a'(x),$$

причем $q(x)$ - непрерывна на $\mathcal{I}$.

Замечание. Если $q(x) \equiv \text{const}$ либо $q(x) = c(x-\alpha)^{-2}$ при $x > \alpha$, то уравнение (2), а, значит, и уравнение (1), интегрируется в квадратурах.

Поскольку нули $y(x)$ и $z(x)$ совпадают на промежутке $\mathcal{I}$, то в дальнейшем рассматриваются липь двучленные уравнения (2).

Lemma 1.

Всякий нуль $x_0 \in I$ каждого нетривиального решения (2) $z(x)$ является простьмм, т.е. $z(x_0) = 0, z'(x_0) \neq 0$.

Proof

Если $x_0 \in \mathcal{I}$ - кратный нуль $z(x)$, то $z(x_0) = z'(x_0) = 0$. По теореме единственности решения задачи Коши $z(x) \equiv 0$ на I, что противоречит условию леммы 1.

Lemma 2.

Нули каждого нетривиального решения (2) $z(x)$ не имеют конечной предельной точки на $\mathcal{I}$.

Proof.

Рассуждаем от противного. Пусть $\exists \{x_k\}_{k=1}^{\infty}, x_k \in \mathcal{I}, \forall k \in N$ и $x_k \to x_0 \in \mathcal{I}$, причем $z(x_k) = 0, \forall k \in N$. Тогда в силу непрерывной дифференцируемости $z(x)$

$$z(x_0) = \lim_{k\to\infty} z(x_k) = 0$$
$$z'(x_0) = \lim_{x_k\to x_0} \frac{z(x_k) - z(x_0)}{x_k - x_0} = 0$$

По теореме единственности решения задачи Коши $z(x) \equiv 0$ на $\mathcal{I}$, что противоречит условию леммы 2 .

Следствие. Любое нетривиальное решение (2) $z(x)$ илеет на каждом $[\alpha, \beta] \subset \mathcal{I}$ лишь конечное число нулей.

Proof

Если бы это было не так и $\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in [\alpha, \beta], \forall n \in N$, такая, что $z(x_n) = 0, \forall n \in N$, то в силу теоремы Больцано-Вейеритрасса $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}, x_{n_k} \in [\alpha, \beta], x_{n_k} \to x_0 \in [\alpha, \beta]$ при $k \to \infty$, что противоречит лемме 2. $\square$

Теперь сравним количества нулей нетривиальных решений двух уравнений вида (2).

Пусть заданы два уравнения:

$$y'' + q(x)y = 0, \tag{3}$$
$$z'' + Q(x)z = 0, \tag{4}$$

где $q(x)$ и $Q(x)$ - заданные непрерывные функции на промежутке $\mathcal{I}$.

Теорема Штурма

Пусть $q(x) \leq Q(x), \forall x \in \mathcal{I}$, и пусть $y(x)$ - какое-либо нетривиальное решение уравнения (3), а $z(x)$ - какое-либо нетривиальное решение уравнения (4). Если $x_1, x_2 \in \mathcal{I}$ последовательные нули $y(x)$, то найдется хотя бы одна точка $x_0 \in (x_1, x_2)$, в которой $z(x_0) = 0$, либо $z(x_1) = z(x_2) = 0$.

Имеем $y(x_1) = y(x_2) = 0$. Будем считать для определенности, что $y(x) > 0$ при всех $x \in (x_1, x_2)$, иначе вместо $y(x)$ можно было бы взять [-y(x)]. Тогда

$$y'(x_1) = \lim_{x\to x_1+0} \frac{y(x)}{x - x_1} \geq 0,$$
$$y'(x_2) = \lim_{x\to x_2-0} \frac{y(x)}{x - x_2} \leq 0.$$

В силу леммы 1 равенство нулю $y'(x_1)$ и $y'(x_2)$ невозможно и поэтому $y'(x_1) > 0, y'(x_2) < 0$.

Умножая (3) на $z(x)$, а (4) на $y(x)$ и вычитая, для решений $y(x)$ и $z(x)$ получаем тождество на $\mathcal{I}$

$$y''z - z''y = (Q - q)yz.$$

Это тождество можно так записать:

$$(y'z - z'y)' = (Q - q)yz.$$

Интегрируя его на отрезке $[x_1, x_2]$ и учитывая, что $y(x_1) = y(x_2) = 0$, получаем тождество

$$y'(x_2)\,z(x_2) - y'(x_1)\,z(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} [Q(x) - q(x)]y(x)z(x)dx \tag{5}$$

Будем считать, что $z(x) > 0$ на (x_1, x_2), так как в случае $z(x) < 0$ на (x_1, x_2) вместо $z(x)$ можно брать $[-z(x)]$.

Допустим теперь, что теорема Штурма неверна. Тогда могут быть следующие три возможности:
а) $z(x) > 0, \forall x \in [x_1, x_2]$,
б) $z(x) > 0, \forall x \in [x_1, x_2)\,, z(x_2) = 0$,
в) $z(x) > 0, \forall x \in (x_1, x_2]\,, z(x_1) = 0$.

Во всех случаях а), б), в) левая часть тождества (5) отрицательна, в то время как правая часть (5) неотрицательна. Противоречие.

Замечание. Если $z(x_1) = z(x_2) = 0$ и $z(x) \neq 0$ на (x_1, x_2), то необходимо на $[x_1, x_2]\,, q(x) \equiv Q(x)$ и $y(x) = cz(x)$, где c-постоянная. Если же $\exists \hat{x} \in (x_1, x_2)$, что $q(\hat{x}) < Q(\hat{x})$, то всегда $\exists x_0 \in (x_1, x_2)$, для которого $z(x_0) = 0$.

Графически утверждения теоремы Штурма могут быть проиллюстрированы следующим образом.

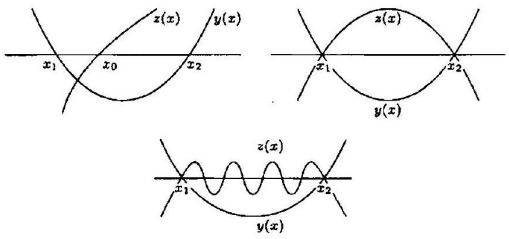


Рис. 1

Это значит, что нули $z(x)$ идут не реже, чем нули $y(x)$.
Теорему Штурма иллюстрирует пара функций $\sin mx$ и $\sin Mx$ при $0 < m < M$, поскольку $y = \sin mx$ - решение уравнения

$$y'' + m^2 y = 0$$

$z = \sin Mx-$ решение

$$z'' + M^2 z = 0.$$

Из теоремы Штурма для уравнения (3) получаются важные следствия.
Следствие 1. Если в уравнении (3) $q(x) \leq 0, \forall x \in I$, то всякое нетривиальное решение (3) имеет на I не более одного нуля.

Proof

Если бы решение $y(x) \not\equiv 0$ имело на $\mathcal{I}$ два нуля x_1 и x_2, то по теореме Штурма всякое нетривиальное решение уравнения

$$z'' + 0 \cdot z(x) = 0$$

обращалось бы в нуль на (x_1, x_2) или при $x = x_1$ и $x = x_2$. Это опровергается примером $z(x) \equiv 1$. $\square$

Следствие 2. Пусть $y_1(x), y_2(x) - \partial$ линейно независимых решения уравнения (3). Если x_1, x_2 - последовательные нули $y_1(x)$, то $y_2(x)$ имеет на (x_1, x_2) в точности один нуль, т.е. нули $y_1(x)$ и $y_2(x)$ перемежаются.

Proof

По теореме Штурма, примененной к (3) (здесь $q(x) \equiv Q(x)), y_2(x)$ имеет на $[x_1, x_2]$ хотя бы один нуль x_0. Общих нулей $y_1(x)$ и $y_2(x)$ не могут иметь, так как если, например, $y_1(x_1) = y_2(x_1) = 0$, то $W(x_1) = 0$ и репения $y_1(x), y_2(x)$ - линеино зависимы на I. Итак, $x_0 \in (x_1, x_2)$.

Докажем, что x_0 - единственный нуль $y_2(x)$ на (x_1, x_2). Допустим противное, что $\exists \tilde{x} \neq x_0, \tilde{x} \in (x_1, x_2)$, такой, что $y_2(\tilde{x}) = 0$. Тогда по теореме

Штурма, предположив для определенности $\tilde{x} > x_0$, на $[x_0, \tilde{x}]$ существует хотя бы один нуль $y_1(x)$, что противоречит тому, что x_1 и x_2-последовательные нули $y_1(x)$.

Графически утверждение следствия 2 иллюстрируется на рис. 2 .

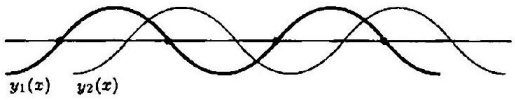


Рис. 2

Из следствия 2 очевидно получаем следующий результат.

Следствие 3. Если некоторое нетривиальное решение уравнения (3) имеет на $\mathcal{I}$ бесконечное число нулей, то и каждое нетривиальное решение (3) имеет на I бесконечное число нулей.

Пара функций $\sin x$ и $\cos x$, являющихся линейно независимыми решениями уравнения $y'' + y = 0$, иллюстрирует следствия 2 и 3.

Example 1.

Пусть в уравнении (3) $0 < m \leq q(x) \leq M < +\infty, m < M$, для всех $x \in \mathcal{I}$. Тогда расстояние между соседними нулями каждого нетривиального решения (3) не меньше $\frac{\pi}{\sqrt{M}}$ и не больше $\frac{\pi}{\sqrt{m}}$.

$\triangle$ Рассмотрим уравнение $z'' + mz = 0$. Из формулы его общего решения $z(x) = A\sin(\sqrt{n\pi}x + \varphi)$ следует, что если x_1 и x_2-соседние нули $z(x)$, то $x_2 = x_1 + \frac{\pi}{\sqrt{m}}$. Если $\hat{x}_1$ и $\hat{x}_2$ - последовательные нули $y(x)$ на $[x_1, x_2]$, то по теореме Штурма

$$x_1 \leq \hat{x}_1 < \hat{x}_2 \leq x_2.$$

Тогда $\hat{x}_2 \leq x_2 = x_1 + \frac{\pi}{\sqrt{m}} \leq \hat{x}_1 + \frac{\pi}{\sqrt{m}}$, т.е. $\hat{x}_2 - \hat{x}_1 \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}$. Рассмотрев уравнение

$$z'' + Mz = 0$$

аналогичными рассуждениями получаем, что $\hat{x}_2 - \hat{x}_1 \geq \frac{\pi}{\sqrt{M}}$. $\square$

Example 2.

Оценить расстояние d между двумя последовательными нулями любого нетривиального решения $y_\nu(x)$ уравнения Бесселя

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right) y = 0, \quad x > 0, \quad \nu \in R.$$

△ Замена $y\sqrt{x} = z(x)$ приводит к уравнению

$$z'' + \left(1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{x^2}\right) z = 0.$$

Возьмем некоторое $x_0 > 0$ в случае $\nu^2 \leq \frac{1}{4}$ и $x_0 > \sqrt{\nu^2 - \frac{1}{4}}$ в случае $\nu^2 > \frac{1}{4}$. Пусть $q(x) = 1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{x^2}$. Тогда при $\nu^2 \leq \frac{1}{4}$ и $\forall x \geq x_0$

$$1 \leq q(x) \leq 1 + \frac{\frac{1}{4} - v^2}{x_0^2}$$

а при $\nu^2 \geq \frac{1}{4}$ и $\forall x \geq x_0$

$$0 < 1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x_0^2} \leq q(x) \leq 1.$$

Отсюда, используя пример 1 , получаем, что

$$\pi \left(1 + \frac{\frac{1}{4} - \nu^2}{x_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \leq d \leq \pi, \quad \nu^2 \leq \frac{1}{4}$$
$$\pi \leq d \leq \pi \left(1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \nu^2 \geq \frac{1}{4}.$$

В частности, $d = \pi$ при $\nu^2 = \frac{1}{4}$.
Из этих оценок следует, что при $x > 0$ каждое решение $y_\nu > 0$ имеет бесконечное множество нулей, причем расстояние между соседними нулями стремится к π при $x \to +\infty$. Последнее вытекает из оценок при $x_0 \to +\infty$.

Example 3.

Доказать, что каждое нетривиальное решение уравнения

$$y'' + \frac{1}{4\left(x^2 + 1\right)} y = 0, \quad x \geq 0$$

имеет лишь конечное число нулей.
△ Поскольку при $x > 0$

$$\frac{1}{4\left(x^2 + 1\right)} < \frac{1}{4x^2}$$

то в силу теоремы Штурма достаточно установить, что каждое нетривиальное решение уравнения

$$z'' + \frac{z}{4x^2} = 0, \quad x > 0$$

имеет лишь конечное число нулей. Но это уравнение - уравнение Эйлера и можно найти его общее решение

$$z = \sqrt{x}\left(c_1 \ln x + c_2\right)$$

где c_1 и c_2-произвольные постоянные. Из этой формулы видно, что каждое $z(x) \not\equiv 0$ имеет конечное число нулей при $x > 0$.

13.6.6 § 6. Solving Linear Differential Equations with Power Series - Bessel's Equation

Решения линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами в редких случаях находятся в квадратурах. Но даже решение их в квадратурах приводит к полвлению новых, не элементарных функций. Например, решением уравнения первого порядка

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

является функция

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

играющая важную роль в теории вероятностей.
Линейные дифференциальные уравнения второго порядка порождают в качестве решений так называемые специальные функции, часто используемые в математической физике, квантовой механике и т.д. При этом свойства этих функций изучаются с помощью порождающих их дифференциальных уравнений.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \tag{1}$$

Сначала дадим представление о том, как находить фундаментальную систему решений уравнения (1) в том случае, когда коэффициенты $a_1(x)$ и $a_2(x)$ являются действительными аналитическими функциями x в точке $x_0 \in R^1_x$, т.е. $a_1(x)$ и $a_2(x)$ представимы степенными рядами по степеням ($x - x_0$) с радиусом сходимости $R > 0$. Для нахождения в этом случае решения (1) применяется метод неопределенных коэффициентов, т.е. ищут решение $y(x)(1)$ тоже в виде степенного ряда по степеням $(x - x_0)$. Подставляя формально степенные ряды для $y(x), y'(x), y''(x)$, $a_1(x)$ и $a_2(x)$ в уравнение (1) и приравнивая нулю коэффициенты при каждой степени ($x - x_0$), в результате получают уравнения дли определения коэффициентов степенного ряда для $y(x)$. Когда же коэффициенты определены, необходимо обосновать, что полученный степенной ряд для $y(x)$ сходится и действительно дает решение (1). В общем виде этот метод обосновывается в так называемой аналитической теории дифференциальных уравнений (см. [1]). Мы же применим метод неопределенных коэффициентов для так называемого уравнения Эйри

$$y'' + xy = 0, \tag{2}$$

которое не решается в квадратурах.

Будем искать решение (2) в виде ряда по степеням x

$$y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$$

о сходимости которого заранее ничего не известно.
Формально (т.е. без обоснования) дважды продифференцируем почленно степенной ряд и подставим ряды для $y(x)$ и $y'(x)$ в уравнение (2). Получим

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)c_k \cdot x^{k-2} + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \cdot x^{k+1} = 0.$$

Отсюда

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{k-1}\cdot x^k = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим, что

$$c_2 = 0, \quad c_{k+2} = -\frac{1}{(k+1)(k+2)}\cdot c_{k-1}, \quad k \geq 1.$$

Следовательно,

$$c_{3m} = \frac{(-1)^m \cdot c_0}{3m(3m-1)...3\cdot 2}$$
$$c_{3m+1} = \frac{(-1)^m c_1}{(3m+1)3m\cdot ...4\cdot 3}, \quad c_{3m+2} = 0$$

где коэффициенты c_0 и c_1 остаются неопределенными. Полагая $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, что равносильно начальным условиям

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

найдем ряд

$$y_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{3m}}{3m(3m-1)...3\cdot 2}. \tag{3}$$

Полагая $c_0 = 0, c_1 = 1$, что равносильно начальным условиям

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$

получим ряд

$$y_2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{3m+1}}{(3m+1)3m...4\cdot 3}. \tag{4}$$

По признаку Даламбера ряды (3), (4) сходятся при всех $x \in (-\infty, +\infty)$ и их можно почленно дифференцировать на ($-\infty, +\infty$). Подставляя ряды (3), (4) в уравнение (2), убеждаемся в том, что $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - решения (2) в силу определения коэффициентов рядов (3), (4).

Решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - линейно независимы на $(-\infty, +\infty)$, так как их определитель Вронского $W(0) = 1$. Следовательно,

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

где c_1 и c_2 - произвольные постоянные, является общим решением уравнения Эйри (2).

Замечание. Если в линейном неоднородном уравнении

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$$

функции $a_1(x), a_2(x), f(x)$ - действительные аналитические функции в точке $x_0 \in R_x^1$, то его общее решение тоже находится методом неопределенных коэффициентов аналогично тому, как это проделано для уравнения (2).

Точка $x_0 \in R_x^1$, в которой функции $a_1(x)$ и $a_2(x)$ аналитичны, называется обыкновенной точкой уравнения (1). В противном случае точка x_0 называется особой точкой уравнения (1). Для уравнения Эйлера

$$x^2y'' + a_1xy' + a_2y = \mathbf{0}$$

$x = 0$ - особая точка (здесь a_1 и a_2-числа, не равные нулю одновременно).

Уравнение (1) может иметь несколько особых точек. Например, для уравнения Лежандра

$$\left(1 - x^2\right) y'' - 2xy' + \lambda y = 0$$

где λ - параметр, точки $x = \pm 1$ - особые.
При исследовании особых точек уравнения (1) необходимо учитывать и точку $x = \infty$. Именно, если после замены $x = \frac{1}{t}$ точка $t = 0$ является особой точкой преобразованного уравнения (1), то $x = \infty$ называется особой точкой уравнения (1). Например, $x = \infty$ - особая точка для уравнения Эйлера. Наиболее простым типом особой точки уравнения (1) является так называемая регулярная особая точка.

Рассмотрим уравнение

$$(x - x_0)^2 y'' + (x - x_0)\, p_1(x)y' + p_2(x)y = 0, \tag{5}$$

где $x_0 \in R^1_x, p_1(x)$ и $p_2(x)$ - аналитические в точке x_0 функции, т.е. они разлагаются в сходящиеся в некоторой окрестности x_0 степенные ряды

$$p_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x - x_0)^k\,, \quad p_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k\,(x - x_0)^k\,.$$

Точка x_0 называется регулярной особой точкой уравнения (5), если отличен от нуля хотя бы один из коэффициентов a_0, b_0, b_1.

Например, $x_0 = 0$ - регулярная особая точка уравнения Эйлера. Оказывается, что в случае регулярной особой точки x_0 уравнение (5) имеет хотя бы одно решение, представимое в виде обобщенного степенного ряда

$$y(x) = (x - x_0)^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(x - x_0)^k\,, \quad c_0 \neq 0,$$

который сходится в некоторой окрестности x_0.
Убедимся в этом на примере уравнения Бесселя

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right) y = 0, \tag{6}$$

где ν - действительный параметр. Точка $x = 0$ является для уравнения Бесселя регулярной особой точкой.

Всякое нетривиальное решение уравнения (6) называется цилиндрической функцией. В общем случае решения (6) не являются элементарными функциями. Уравнение Бесселя встречается в различных вопросах математической и теоретической физики. Здесь будет получена формула общего решения уравнения Бесселя.

Будем искать решение уравнения Бесселя в виде

$$y = x^{\alpha} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \quad c_0 \neq 0. \tag{7}$$

Поставим формально этот ряд в (6), найдем его коэффициенты и число α, а затем проверим, что найденный ряд определяет репение (6).

Подставив ряд (7) в уравнение (6), получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+\alpha)(k+\alpha-1)x^{k+\alpha} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(k+\alpha)x^{k+\alpha} + \\ + \left(x^2-\nu^2\right)\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+\alpha} = 0$$

Приравнивая нулю коэффициенты при степенях x, получаем бесконечную систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&\left(\alpha^2-\nu^2\right)c_0 = 0,\\
&\left[(\alpha+1)^2-\nu^2\right]c_1 = 0,\\
&\left[(\alpha+2)^2-\nu^2\right]c_2 + c_0 = 0,\\
&\left[(\alpha+3)^2-\nu^2\right]c_3 + c_1 = 0,\\
&\left[(\alpha+k)^2-\nu^2\right]c_k + c_{k-2} = 0,
\end{aligned}$$

Из первого уравнения $\alpha = \pm\nu$, так как $c_0 \neq 0$. Для определенности в дальнейшем будем считать $\nu \geq 0$ и рассмотрим сначала случай $\alpha = \nu \geq 0$.

Из второго уравнения тогда $c_1 = 0$ и, следовательно, $c_{2p-1} = 0, \forall p = 1, 2, ...$, а

$$c_{2p} = \frac{(-1)^p c_0}{2^{2p}(\nu+1)(\nu+2)...(\nu+p)p!}, \quad p = 1, 2, ...$$

Коэффициент c_0 - произвольный, но с целью упрощения формулы c_{2p} принято брать $c_0 = \frac{1}{2^\nu \cdot \Gamma(\nu+1)}$, где $\Gamma(\nu+1)$ - гамма-функция Эйлера. Используя тот факт, что

$$\Gamma(p+1) = p!, \quad \Gamma(\nu+p+1) = (\nu+1)(\nu+2)...(\nu+p)\Gamma(\nu+1),$$

получаем, что

$$c_{2p} = \frac{(-1)^p}{2^{2p+\nu}\cdot\Gamma(p+1)\cdot\Gamma(\nu+p+1)}, \quad p = 1, 2, ...$$

С помощью признака Даламбера можно убедиться, что ряд (7) с найденными коэффициентами $c_{2p-1} = 0$ и c_{2p} сходится при $\nu \geq 0$ на всей оси R_x^1 и, следовательно, дает решение уравнения (6). Это решение называется функцией Бесселя первого рода порядка ν и обозначается

$$J_\nu(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+\nu}}{\Gamma(p+1)\Gamma(\nu+p+1)}, \quad \nu \geq 0. \tag{8}$$

Если $\alpha = -\nu < 0$ и не целое, то аналогичным образом можно построить еще одно решение (6). Оно получается заменой числа ν на ($-\nu$) в формуле (8), так как уравнение (6) не меняется при замене ν на $(-\nu)$:

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma(p+1)\Gamma(-\nu+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p-\nu}, \quad \nu > 0. \tag{9}$$

Функция $J_{-\nu}(x)$ называется функцией Бесселя первого рода порядка $(-\nu)$.

Если $\nu > 0$ и не целое, то решения $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ линейно независимы, так как их разложения в ряды начинаются с различных степеней x и, значит, тождество при $x \in R_x^1$

$$c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x) \equiv 0$$

возможно лишь при $c_1 = c_2 = 0$. Таким образом, при нецелом $\nu > 0$ функции $J_\nu(x), J_{-\nu}(x)$ образуют фундаментальную систему ренений (6) и функция

$$y_\nu(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x)$$

является общим решением уравнения Бесселя.
При целом $\nu = n$ формула (9) уже непригодна, так как знаменатель может обратиться в бесконечность. Но можно в (9) осуществить предельный переход $\nu \to n$, так как

$$\frac{1}{\Gamma(-n+p+1)} = 0, \quad p = \overline{0, n-1}.$$

При таком предельном переходе первые n членов разложения (9) обратятся в нуль и тогда для каждого фиксированного x

$$J_{-n}(x) = \lim_{\nu \to n} J_{-\nu}(x) = \sum_{p=n}^{\infty} \frac{(-1)^p}{\Gamma(p+1)\Gamma(-n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p-n}.$$

Положив $p = n + m$, отсіода находим, что

$$J_{-n}(x) = (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(n+m+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} = (-1)^n J_n(x).$$

Это значит, что функции $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ при целых n являются линейно зависимыми и поэтому в этом случае нельзя с их помощью построить общее решение (6).

При целом n второе, линейно независимое решение (6) называется функцией Бесселя второго рода порядка n (или функцией Неймана порядка n) и обозначается $Y_n(x)$. Функцию $Y_n(x)$ можно найти, например, с помощью формулы Лиунилля-Остроградского. Не останавливаясь детально на этом, отметим лишь, что при $x \to +0$ функция $Y_n(x)$ обладает следующей асимптотической оценкой:

$$Y_n(x) = \begin{cases} c_n x^{-n}[1 + O(1)], & n \in N, \\ c_0 \ln x[1 + O(1)], & n = 0. \end{cases}$$

Отсюда видно, что $Y_n(x)$ неограничена в окрестности $x = 0$.
Таким образом при целом ν общее решение (6) имеет вид

$$y_\nu(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 Y_\nu(x)$$

В заключение покажем, что уравнение Бесселя (6) имеет решения $y_{1\nu}(x)$, $y_{2\nu}(x)$ такие, что при $x \to +\infty$

$$y_{1\nu}(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right), \quad y_{2\nu}(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right). \tag{10}$$

В самом деле, после замены $y\sqrt{x} = z$ при $x > 0$ уравнсние (6) примет вид

$$z'' + \left(1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right) z = 0.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$z'' + z = \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2} z \equiv f_\nu(x) \cdot z.$$

Методом вариации постоянных находим, что

$$z(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \int_x^{+\infty} \sin(x-\zeta) \cdot f_\nu(\zeta) \cdot z(\zeta) d\zeta$$

Тогда

$$|z(x) - c_1 \cos x - c_2 \sin x| = \\ = \left| \int_x^{+\infty} \sin(x-\zeta) \cdot f_\nu(\zeta) z(\zeta) d\zeta \right| \leq \int_x^{+\infty} \frac{|z(\zeta)|}{\zeta^2} d\zeta.$$

Покажем, что $z(x)$ ограничена в окрестности $x = +\infty$. Если $x > 0$ и $x \in [a, b]$, то существует конечное значение

$$M(b) = \max_{x \in [a,b]} |z(x)|$$

Покажем, что $M(b)$ ограничено при $b \to +\infty$. Имеем на $[a, b]$, что

$$|z(x)| \leq |c_1| + |c_2| + \int_a^x |f_\nu(\zeta)| \cdot |z(\zeta)| d\zeta \leq \\ \leq |c_1| + |c_2| + M(b) c \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{x} \right) \leq \\ \leq |c_1| + |c_2| + M(b) \cdot \frac{c}{a}.$$

Выбрав a столь большим, чтобы $\frac{c}{a} < \frac{1}{2}$, отсюда получаем, что

$$|z(x)| \leq |c_1| + |c_2| + \frac{1}{2} M(b)$$

или $M(b) \leq 2\left(|c_1| + |c_2|\right)$. Это означает ограниченность $z(x)$ в окрестности $x = \infty$, т.е. в этой окрестности $|z(x)| \leq A$. Следовательно,

$$|z(x) - c_1 \cos x - c_2 \sin x| \leq \int_x^{+\infty} \frac{|z(\zeta)|}{\zeta^2} d\zeta \leq \frac{A}{x} = O\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to +\infty$$

Взяв $z_1(x)$ при $c_1 = 1, c_2 = 0$ и $z_2(x)$ при $c_1 = 0, c_2 = 1$, получаем (10).

13.6.7 § 7. Linear differential equations with a small parameter at a higher derivative

В § 5 главы 4 была исследована зависимость решения задачи Коши от входящих в дифференциальное уравнение параметров. Для линейного дифференциального уравнения порядка n

$$y^{(n)} + a_1(x, \varepsilon) y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x, \varepsilon) y = f(x) \tag{1}$$

где $a_j(x, \varepsilon), j = \overline{1, n}$, и $f(x)$ - заданные функции $x \in [0, l], l > 0$, и малого параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0], \varepsilon_0 > 0$, результаты этих исследований можно коротко охарактеризовать следующим образом. Если $f(x)$ - непрерывна на $[0, l]$ и функции $a_j(x, \varepsilon), j = \overline{1, n}$, являются непрерывными функциями
$x \in [0, l], \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, то репение $y(x, \varepsilon)$ задачи Коши для уравнения (1) при $\varepsilon \to +0$ равномерно по $x \in [0, l]$ стремится к решению $y_0(x)$ задачи Коши для невозмущенного уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x, 0) y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x, 0) y = f(x). \tag{2}$$

Если же коэффициенты $a_j(x,\varepsilon), j=\overline{1,n}$, уравнения (1) имеют непрерывные частные производные по ε до порядка ($n+1$) при $x\in[0,l]$ и $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$, то при $\varepsilon\to+0$

$$y^{(k)}(x,\varepsilon)\rightrightarrows y_0^{(k)}(x),\quad \forall k=\overline{0,k}$$

В этом случае справедливо равномерное по $x\in[0,l]$ асимптотическое представление решения задачи Коши для возмущенного уравнения (1):

$$y(x,\varepsilon)=y_0(x)+\varepsilon\frac{\partial y(x,0)}{\partial\varepsilon}+\dots+\frac{\varepsilon^n}{n!}\frac{\partial^n y(x,0)}{\partial\varepsilon^n}+O(\varepsilon),\quad \varepsilon\to+0,$$

где здесь и в дальнейшем запись $O(\varepsilon),\varepsilon\to+0$, означает, что $|O(\varepsilon)|\le c\cdot\varepsilon$, $\varepsilon\to+0$, причем $c>0$ - некоторое число, не зависящее от ε.

При указанных выше условиях непрерывности коэффициентов уравнения (1) возмущения, вносимые малым параметром $\varepsilon>0$ в уравнение (1), называются регулярными возмущениями, а само уравнение (1) называется регулярно возмущенным уравнением. Однако в приложениях встречаются случаи, когда малый параметр ε входит в уравнение (1) нерегулярным (сингулярным) образом, т.е. таким образом, что коэффициенты $a_j(x,\varepsilon), j=\overline{1,n}$, уравнения (1) не являются непрерывными функциями x,ε. Такие уравнения (1) называются сингулярно возмущенными. Как будет ниже показано на простейших примерах, решения сингулярно возмущенных уравнений (1) при заданных начальных или граничных условиях обладают рядом свойств, принципиально отличающих их от решений регулярно возмущенных уравнений (1).

Рассмотрим сначала сингулярно возмущенную задачу Коши для уравнения первого порядка с малым параметром ε при y' :

$$\epsilon y'+ay=f(x),\quad x\in[0,l],\quad y(0)=y_0 \tag{3}$$

где $\varepsilon>0$, a-ненулевое число и $f(x)$ - заданная непрерывно дифференцируемая на $[0,l]$ функция.

Обозначим решение задачи Коши (3) через $y_\varepsilon(x)$, а решение уравнения из (1) при $\varepsilon=0$ - через $y_0(x)=\frac{1}{a}f(x)$. Изучим поведение $y_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon\to+0$. Нас интересует вопрос о том, будет ли при этом стремиться $y_\varepsilon(x)$ к $y_0(x)$, $\forall x\in[0,l]$.

Theorem 1

Если $a>0$, то при каждом $x\in(0,l)$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}y_\varepsilon(x)=y_0(x).$$

Proof

Решение $y_\varepsilon(x)$ задачи Коши (3) ищем в виде

$$y_\varepsilon(x)=y_0(x)+z_\varepsilon(x),$$

где $z_\varepsilon(x)$ - решение задачи Коши

$$\varepsilon z_\varepsilon'(x)+az_\varepsilon(x)=-\frac{\varepsilon}{a}f'(x),\quad z_\varepsilon(0)=y_0-\frac{1}{a}f(0).$$

Отсюда

$$z_\varepsilon(x)=e^{-\frac{ax}{\varepsilon}}\left[y_0-\frac{1}{a}f(0)\right]-\frac{1}{a}\int_0^x e^{\frac{a}{r}(\zeta-x)}\cdot f'(\zeta)d\zeta.$$

Тогда

$$y_\varepsilon(x) = y_0(x) + \left[y_0 - \frac{1}{a}f(0)\right] e^{-\frac{ax}{2}} + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \to +0 \tag{4}$$

поскольку при $\varepsilon \to +0$

$$\left|\frac{1}{a}\int_0^x e^{\frac{a}{r}(\zeta - x)} \cdot f'(\zeta)d\zeta\right| \le \frac{1}{a}\max|f'(x)|\int_0^x e^{\frac{a}{r}(\zeta-x)}d\zeta =$$
$$= \frac{\varepsilon}{a^2}\max|f'(x)|\left(1 - e^{-\frac{ax}{r}}\right) \le \frac{\varepsilon}{a^2}\max|f'(x)|$$

Из формулы (4) следует утверждение теоремы 1. □

Из формулы (4) также получаем, что при $\varepsilon \to +0$

$$y_\varepsilon(x) \rightrightarrows y_0(x),$$

если $x \in [\delta, l]$, где $0 < \delta < l, \delta$ - произвольное и фиксированное. Для всего $[0, l]$ нет равномерного стремления $y_\varepsilon(x)$ к $y_0(x)$. Этот результат можно было бы заранее предсказать, так как в окрестности $x = 0$ решения $y_\varepsilon(x)$ и $y_0(x)$ в общем случае совпадать не могут. Из формулы (4) видно, что при $a < 0 y_\varepsilon(x)$ не стремится к $y_0(x)$ при $\varepsilon \to +0$. Эти явления не наблюдались для регулярно возмущенных уравнений (1). Заметим, что при $\varepsilon = 0$ порядок уравнения в (3) понижается, точнее, уравпение становится конечным уравнением.

Графически результаты исследования задачи Коши (1) в случае $a > 0$ показаны на рис. 3.

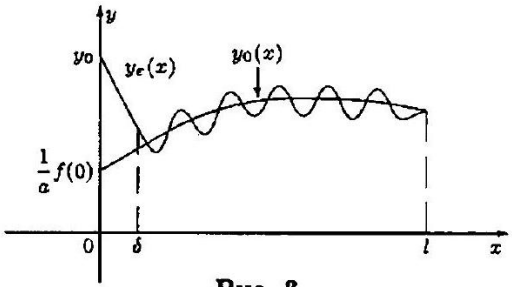


Рис. 3

Отрезок $[0, \delta], 0 < \delta < l$, на котором решение $y_\varepsilon(x)$ задачи Коши (3) при малых $\varepsilon > 0$ сильно отличается от решения $y_0(x)$, называется пограничным слоем. Явление погранслоя характерно для всех уравнений с малым параметром при старшей производной. Решение $y_0(x)$ является асимптотически равномерным приближением решения $y_\epsilon(x)$ не на всем $[0, l]$, а лишь на каждом $[\delta, l], \delta > 0$. Основной целью исследования сингулярно возмущенных задач является построение асимптотического при $\varepsilon \to +0$ приближения решения $y_\varepsilon(x)$ этих задач, равномерного на всем [0,1]. Из формулы (4) видно, что затухающие экспоненты осуществляют поправку к $y_0(x)$, позвопяющую получить равномерное на $[0, l]$ приближение $y_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon \to +0$, в том числе и в погранслое $[0, \delta]$. Эти факты наблюдаются и для уравнений высшего порядка.

Рассмотрим линейное уравнение второго порядка с малым параметром $\varepsilon > 0$ при старшей производной y'' :

$$\varepsilon y'' + ay' + by = f(x), \quad x \in [0, l], \tag{5}$$

где $a \neq 0$ и $b \neq 0$ - заданные числа, $f(x)$ - заданная непрерывно дифференцируемая на $[0, l]$ функция. Изучим при $\varepsilon \to +0$ поведение решения уравнения (5) при начальных условиях

$$y(0) = y_1, \quad y'(0) = y_2. \tag{6}$$

Положив $\varepsilon = 0$ в уравнении (5), получаем невозмущенную задачу Коши

$$ay' + by = f(x), \quad y(0) = y_1. \tag{7}$$

Обозначим решение задачи Коши (5), (6) через $y_c(x)$, а решение задачи Коши (7) через $y_0(x)$. Тогда

$$y_0(x) = e^{-\frac{bx}{a}} \cdot y_1 + \frac{1}{a} \int_0^x e^{\frac{b}{a}(\zeta - x)} \cdot f(\zeta) d\zeta.$$

Theorem 2

Если $a > 0$, то при $\varepsilon \to +0 y_\varepsilon(x) \Rightarrow y_0(x)$ для всех $x \in [0, l]$ и $y'_\epsilon(x) \to y'_0(x)$ для всех $x \in (0, l]$.

Proof.

Ищем решение задачи Коши (5), (6) в виде

$$y_\varepsilon(x) = y_0(x) + z_\varepsilon(x).$$

Тогда $z_\epsilon(x)$ является решением задачи Коши

$$\varepsilon z'' + az' + bz = -\varepsilon y''_0(x), \quad z(0) = 0$$
$$z'(0) = \tilde{y}_2 = y_2 - \frac{1}{a} f(0) + \frac{b}{a} y_1$$

и задается формулой

$$z_\varepsilon(x) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\tilde{y}_2 \left(e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x} \right) + \int_0^x \left\{ e^{\lambda_2 (x - \zeta)} - e^{\lambda_1 (x - \zeta)} \right\} y''_0(\zeta) d\zeta \right]$$

Здесь $\lambda_1 = \lambda_1(\varepsilon), \lambda_2 = \lambda_2(\varepsilon)$ - корни харакдеристического уравнения

$$\varepsilon \lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

причем $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $\lambda_1 = -\frac{b}{a} + O(\varepsilon), \lambda_2 = -\frac{a}{\epsilon} + O(\varepsilon), \varepsilon \to +0$. Учитывая, что функция

$$y''_0(x) = \frac{1}{a} f'(x) - \frac{b}{a^2} f(x) + \frac{b^2}{a^2} y_0(x)$$

на $[0, l]$ является ограниченной и что при $\varepsilon \to +0$

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{a}{\varepsilon} - \frac{b}{a} + O(\varepsilon)$$

из формулы $z_\varepsilon(x)$ получаем утверждение теоремы 2 .
Из теоремы 2 следует, что на $[0, \delta]$ при любом $\delta \in (0, l)$ нет равномерного стремления решения $y_\varepsilon(x)$ вместе с ее производной $y'_\varepsilon(x)$ к решению $y_0(x)$ и к ее производной $y'_0(x)$. Такое равномерное стремление имеется лишь на $[\delta, l]$ при любом $\delta > 0$. В окрестности

$x = 0$ имеется область, в которой $y'_\varepsilon(x)$ сильно отличается от $y'_0(x)$. Эта область называется пограничным слоем задачи. При $a < 0$ и $\varepsilon \to +0$ нет стремления $y'_\varepsilon(x)$ к $y'_0(x)$.

Наконец, изучим при $\varepsilon \to +0$ поведение решения следующей граничной задачи

$$\begin{aligned} &\varepsilon y'' + ay' + by = 0, \quad \varepsilon > 0, \quad a \cdot b \neq 0 \\ &y(0) = y_1, \quad y(1) = y_2, \quad |y_1| + |y_2| > 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Обозначим решение граничной задачи (8) через $y_\varepsilon(x)$, а решение задачи Коши $ay' + by = 0, y(0) = y_1$, обозначим через $y_0(x)$.

Theorem 3

Пусть $a < 0$. Тогда при достаточно малых $\epsilon > 0$ решение $y_\epsilon(x)$ граничной задачи (8) существует, единственно и для каждого $x \in [0, 1) y_\varepsilon(x) \to y_0(x)$ при $\varepsilon \to +0$. Кроме того, для всех $x \in [0, 1 - \delta]$, где $0 < \delta < 1$, δ - фиксировано, $y_c(x) \rightrightarrows y_0(x)$ при $\varepsilon \to +0$.

Proof

Для достаточно малых $\varepsilon > 0 \left(\varepsilon < \frac{a^2}{4b}\right)$ корни $\lambda_1 = \lambda_1(\varepsilon), \lambda_2 = \lambda_2(\varepsilon)$ характеристического уравнения

$$\varepsilon\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

вещественны, различны и общее решение (8) имеет вид

$$y_\varepsilon(x) = c_1(\varepsilon)e^{\lambda_1 x} + c_2(\varepsilon)e^{\lambda_2 x}$$

Поскольку в этом случае $e^{\lambda_1} \neq e^{\lambda_2}$, то при достаточно малых $\varepsilon > 0$ решение граничной задачи (8) существует, единственно и задается формулой (см. § 4):

$$y_\varepsilon(x) = \frac{1}{e^{\lambda_2} - e^{\lambda_1}} \left[\left(\alpha e^{\lambda_2} - \beta\right) e^{\lambda_1 x} + \left(\alpha e^{\lambda_1} - \beta\right) e^{\lambda_2 x}\right]$$

При $\varepsilon \to +0$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4\varepsilon b}}{2\varepsilon} = -\frac{b}{a} + O(\varepsilon), \\ \lambda_2 &= \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4\varepsilon b}}{2\varepsilon} = -\frac{a}{\varepsilon} + \frac{b}{a} + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} |y_\varepsilon(x) - y_0(x)| &= \left| \frac{1}{|\, e^{\lambda_2} - e^{\lambda_1}]} \left[\left(\alpha e^{\lambda_2} - \beta\right) e^{\lambda_1 x} + \left(\alpha e^{\lambda_1} - \beta\right) e^{\lambda_2 x}\right] - \alpha e^{-\frac{bx}{a}} \right| \leq \\ &\leq \frac{\left|\beta e^{\lambda_1 x} - \alpha e^{-\frac{bx}{a}} \cdot e^{\lambda_1}\right|}{|e^{\lambda_2} - e^{\lambda_1}|} + \frac{e^{\lambda_2}}{|e^{\lambda_2} - e^{\lambda_1}|} \times \\ &\times \left\{ \left| -\alpha e^{\lambda_1 x} + \alpha e^{-\frac{bx}{a}} \right| + \left|\beta - \alpha e^{\lambda_1}\right| e^{\lambda_2(x-1)} \right\}. \end{aligned}$$

Очевидно существуют такие числа $A_1 > 0$ и $A_2 > 0$, что для всех $x \in [0, 1]$ и всех $\varepsilon > 0$

$$\left|\beta e^{\lambda_1 x} - \alpha e^{-\frac{bx}{a}} \cdot e^{\lambda_1}\right| \leq A_1, \quad \left|\beta - \alpha e^{\lambda_1}\right| \leq A_2.$$

При $\varepsilon \to +0$ имеем:

$$e^{\lambda_2} - e^{\lambda_1} = e^{\lambda_2}[1 + O(\varepsilon)] = e^{\left(-\frac{a}{a}+\frac{b}{a}\right)}[1 + O(\varepsilon)],$$
$$\left|-\alpha e^{\lambda_1 x} + \alpha e^{-\frac{bx}{a}}\right| = |\alpha| e^{-\frac{bx}{a}} \left|1 - e^{x \cdot O(\varepsilon)}\right| = |\alpha| e^{-\frac{bx}{a}} x \cdot O(\varepsilon) \leq A_3 \cdot O(\varepsilon),$$

где $\boldsymbol{A_3} > 0$.
Следовательно, получаем

$$|y_\varepsilon(x) - y_0(x)| \leq A_1 e^{\frac{a}{\epsilon} - \frac{b}{a}}[1 + O(\varepsilon)] +$$
$$+ [1 + O(\varepsilon)] \left\{ A_3 \cdot O(\varepsilon) + A_2 e^{\left(-\frac{a}{\varepsilon}+\frac{b}{a}\right)(x-1)}[1 + O(\varepsilon)] \right\}.$$

Если $a < 0$, то поведение $|y_\varepsilon(x) - y_0(x)|$ при $\varepsilon \to +0$ зависит лишь от последнего слагаемого полученной оценки. При $\varepsilon \to +0\, |y_\varepsilon(x) - y_0(x)| \to 0$ для каждого $0 \leq x < 1$ и $\max_x |y_\varepsilon(x) - y_0(x)| \to 0$ для всех $0 \leq x \leq 1 - \delta$, где $0 < \delta < 1$ и фиксировано.

Из теоремы 3 следует, что в случае $a < 0$ пограничным слоем граничной задачи (8) является каждый $[1 - \delta, 1], 0 < \delta < 1$.

Замечание. Если $a > 0$ и $\hat{y}(x)$ - решение задачи Коши

$$ay' + by = 0, \quad y(1) = y_2,$$

то аналогичным образом можно установить, что при $\varepsilon \to +0 y_\varepsilon(x) \to \hat{y}(x)$ для каждого $x \in (0, 1]$ и $y_\varepsilon \Rightarrow y_0(x)$ для всех $x \in [\delta, 1], 0 < \delta < 1$. Значит, каждый $[0, \delta]$ является пограничным слоем задачи в этом случае.

Упражнения к главе 6

1. Составить и решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение с правой частью $f(x) = \cos 2x$, зная фундаментальную систему решений соответствующего линейного однородного уравнения $y_1(x) = \sin^2 x, y_2(x) = \cos^2 x$.

2. Найти при $x > 0$ общее решение линейного уравнения

$$xy'' + 2y' - xy = 2 - x^2,$$

если известны два его частных решения $y_1 = x, y_2 = x + \frac{1}{x} \cdot e^x$.

3. Показать, что граничная задача (λ - вещественный параметр)

$$y^{IV} = \lambda^4 y, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y(l) = y''(l) = 0, \quad l > 0,$$

имеет бесконечное число нетривиальных решений $y_n(x)$, соответствующих различным значениям параметра λ_n, и что

$$\int_0^l y_n(x) \cdot y_m(x) dx = 0, \quad \lambda_n \neq \lambda_m$$

4. Доказать, что всякое решение уравнения

$$y'' - xy' + y = 0$$

на $(+\infty, -\infty)$ имеет не более 5 нулей.

5. Доказать, что уравнение Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right) y = 0$$

не может иметь двух линейно независимых решений на $(0, +\infty)$, ограниченных в окрестности нуля вместе с первыми производными.
6. Доказать, что каждое нетривиальное решение уравнения

$$y'' + \frac{1}{4\left(1+x^2\right)} y = 0$$

при $x \geq 0$ имеет лишь конечное число нулей.
7. Найти общее решение уравнения

$$4xy'' + 2y' + y = 0$$

при $x > 0$ с помощью степенного ряда.

13.7 Normal Autonomous Systems of Differential Equations and Stability Theory

13.7.1 § 1. General Properties

Нормальной автономной системой дифференциальных уравнений порядка п называется система

$$\dot{x}(t) = f(x), \tag{1}$$

где $f(x)$ - задашная действительная вектор-функция с компонентами $f_1(x), ..., f_n(x)$ в пекоторой области Ω евклидова пространства R_x^n с фиксированной прямоугольной дскартовой системой координат $x_1, ..., x_n$.

В системе (1) t - независимая неремениая, которую принято называть временем и считать $t \in R_t^1$, а $x(t)$ - неизвестная действительная векторфушкция с n компонентами $x_1(t), ..., x_n(t)$. В дальнейшем будем предполагать, что $f(x)$ удовлетворяет в области Ω условию Липшица. Это гарантируст существование и единственность непродолжимого решепия систсмы (1) при начальном условии

$$x\left(t_0\right) = x_0, \quad x_0 \in \Omega, \tag{2}$$

на некотором промежутке $\mathcal{I} = \mathcal{I}\left(t_0, x_0\right)$ оси t, содержащем точку t_0.
Автономные системы (1) иногда называют еще динамическими или копсервативными. Автоиомными системами описываются многочисленные математические модели реальных физических систем классической механики, теории колебаний, экономики, динамики живых систем и т.д. Произвольная нормальная система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(x, t) \tag{3}$$

всегда сводится к автономной системе путем увеличения числа неизвестных функций на единицу. Если положить $t = x_{n+1}$, то получаем автономную систему с $(n+1)$ неизвестными функциями

$$\begin{cases} \dot{x} = f\left(x, x_{n+1}\right) \\ \dot{x}_{n+1} = 1 \end{cases}$$

Таким образом, автономная система (1) отличается от любой системы (3) тем, что правая часть (1) не содержит переменной t.

Переменные $x_1, ..., x_n$ называются фазовыми переменными, а область Ω пространства R_x^n называется фазовым пространством автономной системы (1). Если $x = \varphi(t)$ - решение системы (1) на промежутке $\mathcal{I} \subseteq R_t^1$,

то оно определяет параметрически заданную кривую в области Ω, т.е. множество точек $\{\varphi(t)\} \in \Omega$ при всех $t \in \mathcal{I}$. Эта кривая в Ω называется фазовой траекторией автономной системы (1).

Напомним, что интегральные кривые (1) представляют собой графики решений $x = \varphi(t)$ системы (1) в бесконечном цилиндре

$$G = \left\{(x,t) : x \in \Omega, t \in R_t^1\right\}$$

$(n+1)$-мерного пространства $R_{(x,t)}^{n+1}$. Следовательно, фазовая траектория (1) является проекцией интегральной кривой (1) параллельно оси t (см. рис. 1). На траектории стрелкой указывают ее ориентацию, т.е. направление движения по ней в сторону возрастания t.

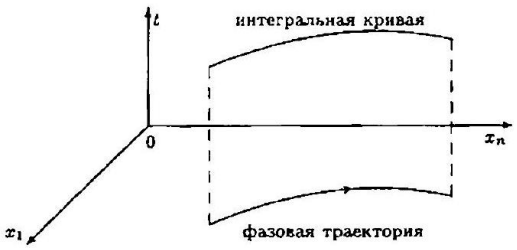


Рис. 1

Например, для уравнения $\dot{x} = x$ в случае $n = 1$ при начальном условин $x(0) = x_0 > 0$ интегральной кривой будет график функции $x(t) = x_0 e^t, t \in R_t^1$, на плоскости (t, x), а фазовой траекторией будет полуось $x > 0$.

Из теоремы существования и единственности решения задачи Коши (1), (2) получаем, что через каждую точку $x_0 \in \Omega$ проходит единственная траектория (1), определенная в пекоторой окрестности t_0. При некоторых достаточных условиях эта траектория определена при всех $t \in R_t^l$.

Theorem 1

Если решение $x = \varphi(t), t \in \mathcal{I}$, автономной системх (1) таково, что определяемая им траектория все время остается в некотором компакте $K \subset \Omega$, то необходимо $\mathcal{I} = (-\infty, +\infty)$.

Proof

Пусть $t_0, t_1, t_2 \in \mathcal{I}$ и $t_0 \in (t_1, t_2)$. Обозначим через H - цилиндр в $R_{(x,t)}^{n+1}$, для которого $x \in K, t \in [t_1, t_2]$. По теореме о непродолжимом решении интегральная кривая $x = \varphi(t), t \in [t_1, t_2]$, выходит из H лишь при $t < t_1$ и при $t_1 > t_2$. Однако выйти из H через боковую поверхность H интегральная кривая не может, так как в этом случае найдется точка траектории, лежащая вне K, что противоречит условию теоремы. Итак, интегральная кривая выходит из H через его нижнее и верхпее основания. Но это означает, что решение системы (1) определено при $t = t_1, t_2$. Поскольку t_1 и t_2 произвольны, то решение (1) определено при всех $t \in R_t^1$. $\square$

Замечание. Теорема 1 не позволяет по внешнему виду системы (1) установить, можно ли продолжить решение (1) на всю ось R_t^1. Можно, однако, доказать, что если $f(x)$ удовлетворяет условию Липпица во всей области Ω, то всякое решение автономной системы (1) определено на всей оси R_t^1.

Рассмотрим простейшие свойства траекторий (1).

Свойство 1. Если $x = \varphi(t)$-решение системье (1) при $t \in (\alpha, \beta)$ и c некоторое число, то и $x = \varphi(t + c)$ также является решением (1) при $t \in (\alpha - c, \beta - c)$.

Proof

Так как для всех $t \in (\alpha, \beta)$

$$\dot{\varphi}(t) \equiv f[\varphi(t)],$$

то для всех $t \in (\alpha - c, \beta - c)$

$$\dot{\varphi}(t + c) \equiv f[\varphi(t + c)].$$

□

Свойство 1 геометрически означает, что сдвиг по траектории (1) также дает траекторию (1).

Свойство 2. Если две фазовые траектории $x = \varphi(t), t \in \mathcal{I}_1, ux = \psi(t)$, $t \in I_2$, автономной системы (1) имеют общую точку

$$x_0 = \varphi\left(t_1\right) = \psi\left(t_2\right)$$

то $\psi(t) \equiv \varphi\left(t + t_1 - t_2\right)$ для всех t, для которых определены обе части тождества.

Proof.

Вектор-функция

$$x = \varphi_1(t) \equiv \varphi\left(t + t_1 - t_2\right)$$

в силу свойства 1 является решением (1) при $(t + t_1 - t_2) \in \mathcal{I}_1$. Кроме того,

$$\varphi_1\left(t_2\right) = \varphi\left(t_1\right) = \psi\left(t_2\right) = x_0.$$

По тереме единственности

$$\varphi_1(t) \equiv \psi(t)$$

для всех t, для которых определены обе части тождества. □

Свойство 2 геометрически означает, что две траектории (1) либо не пересекаются, либо совпадают. Заметим, что для неавтономных систем свойство 2 может не выполняться: проекции ее непересекающихся интегральных кривых на R_x^n могут пересекаться. Например, это очевидно в случае системы

$$\dot{x} = t, \quad \dot{y} = 1.$$

В каждой точке $x \in \Omega$ задана вектор-функция $f(x)$. Таким образом, автономная система (1) задает в области Ω векторное поле $f(x)$. В каждой точке $x_0 \in \Omega$ фазовая траектория (1), определяемая решением (1)

$x = \varphi(t), t \in \mathcal{I}$, касается вектора $f(x_0)$ в силу того, что $x = \varphi(t)$-решение (1) при $t \in \mathcal{I}$. Исключением является только случай, когда фазовая траектория (1) состоит из одной точки $x_0 \in \Omega$, т.е.

$$\varphi(t) \equiv x_0, \quad \forall t \in R_t^1.$$

Definition

Всякое решение системы (1) $x = \varphi(t) \equiv x_0 \in \Omega, \forall t \in R_l^1$, называется положением равновесия или точкой покоя системы (1).

Всякая точка $x_0 \in \Omega$, не являющаяся положением равновесия системы (1), называется обыкновенной точкой автономной системы (1).

Из непрерывности $f(x)$ в области Ω следует, что каждая обыкновенная точка (1) обладает целой окрестностью из обыкновенных точек. Как будет видно далее, положение равновесия может быть изолированным или неизолированным. Если решение $x = \varphi(t), t \in I$, рассматривать как закон движения фазовой точки по траектории, то скорость ее движения в момент времени t_0, где $\varphi(t_0) = x_0$, совпадает с вектором $f(x_0)$. Этот вектор $f(x_0)$ называется фазовой скоростью автономной системы (1), а векторное поле $f(x)$ называется полем фазовых скоростей системы (1).

Theorem 2

Точка $x_0 \in \Omega$ язляется положением равновесия (1) только в том случае, хогда фазовая скорость $f(x_0) = 0$.

Если $x = x_0$ - положение равновесия (1), то $\dot{x} = 0$ и подстановка в (1) дает $f(x_0) = 0$. Обратно, если $f(x_0) = 0$, то подстановка в (1) дает $\dot{x}_0 = 0$, т.е. $x = x_0$ - решение (1).

Теорема 2 дает практический способ нахождения положений равновесия системы (1). Заметим, что положение равновесия является проекцией на R_x^n тех интегральных кривых системы (1), которые параллельны оси t. Теорема 2 означает, что положения равновесия системы (1) являются особыми (или кригическими) точками векторного поля $f(x)$.

Замечание. Определение положения равиовесия сохраняется и для неавтономной системы (3). Тогда условие $f(x_0, t) \equiv 0$ для всех допустимых значений t является критерием положения равновесия $x = x_0$ системы (3).

Заметим, что каждая фазовая траектория (1) $x = \varphi(t)$ отличная от положения равновесия, является гладкой кривой, т.е. непрерывно дифференцируемой кривой и $\varphi'(t) \equiv f[\varphi(t)] \equiv f(x) \neq 0$ в каждой точке x траектории.

Definition

Если репение $x = \varphi(t)$ системы (1) определено на всей оси R_t^l и является периодической вектор-функцией периода $T > 0$, то соответствующая ему траектория называется замкнутой траекторией (или циклом) системы (1).

Имеет место следующая теорема о классификации всех траекторий автономной системы (1).

Theorem 3

Всякая фазовая траектория автономной системы (1) принадлежит обному из следующих трех типов:

1. положение равновесия,

2. замкнутая траектория,

3. траехтория без самопересечений.

Proof

Достаточно показать, что если $x = \varphi(t, x_0)$ - решение системы (1) с начальным условием $x(0) = x_0 \in \Omega$ не является положением равновесия (1) и соответствующая ему траектория пересекает сама себя, то векторфункция $\varphi(t, x_0)$ периодически с периодом $T > 0$ продолжается на всю ось R_t^1.

Пусть $\exists t_1, t_2, t_1 < t_2$, такие, что

$$\varphi(t_1, x_0) = \varphi(t_2, x_0).$$

Поскольку x_0-не положение равновесия (1), то

$$\varphi(t, x_0) \not\equiv \varphi(t_1, x_0), \quad t \in [t_1, t_2].$$

Положим $T = t_2 - t_1 > 0$ и покажем, что $\varphi(t, x_0)$ периодически с периодом $T > 0$ продолжается на всю ось R_t^1.

В самом деле, в силу свойства 1 траекторий (1)

$$\psi(t, x_0) = \varphi(t + T, x_0)$$

является траекторией системы (1) при $t \in [t_1 - T, t_2 - T]$, причем

$$\psi(t_1, x) = \varphi(t_1 + T, x_0) = \varphi(t_2, x_0) = \varphi(t_1, x_0).$$

По свойству 2 траекторий (1) $\psi(t, x_0)$ - единственное продолжение $\varphi(t, x_0)$ с периодом $T > 0$ из $[t_1, t_2]$ на $[t_1 - T, t_1]$.

Аналогично, взяв

$$\psi_1(t, x_0) = \varphi(t - T, x_0),$$

докажем, что $\psi_1(t, x_0)$ является единственным продолжением с периодом $T > 0\varphi(t, x_0)$ из $[t_1, t_2]$ на $[t_2, t_2 + T]$. Таким образом, в силу теоремы единственности получено продолжение с периодом $T > 0\varphi(t, x_0)$ с $[t_1, t_2]$ на $[t_1 - T, t_2 + T]$. Аналогичным приемом можно с периодом $T > 0$ единственным образом продолжить $\varphi(t, x_0)$ с $[t_1, t_2]$ на всю ось R_t^1. А периодическое с периодом $T > 0$ на всей оси R_t^1 решение (1) $x = \varphi(t, x_0)$ дает замкнутую траекторию. $\square$

В случае $n = 2$ можно указать достаточные условия отсутствия замкнутых траекторий автономной системы (1).

Theorem 4

Если система (1) задана в плоской области Ω и в Ω векторное поле фазовых скоростей $f(x)$ является потенчиальным, то в Ω система (1) не имест замкнутьх траекторий.

Proof

Рассуждаем от противного. Пусть существует замкнутая траектория γ системы (1) в Ω. Так как поле скоростей потенциально, то

$$\oint_\gamma (f(x), dx) = 0$$

(выбрано направление обхода против часовой стрелки). С другой стороны, при $x \in \gamma$ скалярное произведение $(f(x), f(x)) > 0$ и в силу (1) $dx = f[\varphi(t)]dt$, где $x = \varphi(t)$ - периодическое с периодом $T > 0$ решение (1), определяющее траекторию γ. Поэтому

$$\oint_\gamma (f(x), dx) = \int_0^T (f[\varphi(t)], f[\varphi(t)])dt > 0.$$

Получим противоречие. □

Например, для линейной на плоскости $R^2_{(x_1,x_2)}$ системы

$$\dot{x} = Ax$$

векторное поле $f(x) = Ax$ является потенциальным, если матрица A симметричная. Значит, линейная система с симметричной матрицей A не имеет на плоскости замкнутых траекторий.

Если изучать структуру фазовых траекторий системы (1) лишь локально, т.е. в некоторой окрестности точки $x_0 \in \Omega$, то локальная структура фазовых траекторий в окрестности каждой обыкновенной точки системы (1) качественно одинакова. Как сейчас будет доказано, в окрестности таких точек с помощью некоторой замены переменных фазовые траектории (1) можно распрямить.

Пусть задано отображение $x = g(y)$ некоторой области $\tilde{\Omega}$ евклидова пространства R^n_y с прямоугольной декартовой системой координат $y_1, ..., y_n$ в область Ω евклидова пространства R^n_x с прямоугольной декартовой системой координат $x_1, ..., x_n$.

Definition

Отображение $x = g(y)$ будем называть гладкой обратимой заменой переменных в области $\tilde{\Omega}$, если:

1. $x = g(y)$ взаимно однозначно отображает $\bar{\Omega}$ на Ω,
2. вектор-функция $x = g(y)$, $y \in \tilde{\Omega}$, и обратная к ней вектор-функция $y = g^{-1}(x), x \in \Omega$, являются непрерывно дифференцируемыми соответственно в области $\tilde{\Omega}$ и Ω,
3. якобиан $\frac{\partial(g_1,...,g_n)}{\partial(y_1,...,y_n)} \neq 0$ для каждого $y \in \tilde{\Omega}$.

Заметим, что если $x = g(y)$ - гладкая обратимая замена переменных в области $\bar{\Omega}$, то и $y = g^{-1}(x)$ - гладкая обратимая замена переменных в области Ω. Кроме того, ясно, что композиция гладких обратимых замен переменных также является гладкой обратимой заменой переменных.

Следующая теорема называется теоремой «о выпрямлении граекторий».

Theorem 5

Пусть $f(x)$ - непрерывно дифференцируемая вектор-фупкция в области Ω и пусть точка a $\in \Omega$ является обыкновенной точкой системы (1). Тогда найдутся охрестность Ω_a точки a u такая гладкая обратимая замена переменных в Ω_a, что в окрестности Ω_a система (1) примет $\varepsilon\mu$

$$\dot{y}_i = 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \dot{y}_n = 1,$$

а траектории системы (1) в охрестности Ω_a перечйдут в отрезхи прямых $y_i = c_i, i = \overline{1, n-1}, y_n = t + c_n$, где $c_1, ..., c_n$ - постоянные.

Так как $a \in \Omega$ является обыкповенной точкой (1), то $f(a) \neq 0$. Будем считать в дальнейшем, что $f_n(a) \neq 0$. Рассмотрим фиксированный вектор ζ с компонентами $\zeta_1, ..., \zeta_{n-1}, a_n$, где a_n - последняя компонента вектора a, из окрестности точки $a \in \Omega$. Возьмем начальное условие

$$x(0) = \zeta.$$

По теореме существования и единственности решения задачи Коши найдется такое $\varepsilon_1 > 0$, что при $|t| < \varepsilon_1$ решение $x = \varphi(t, \zeta)$ системы (1) при этом начальном условии существует и единственно, причем $\varphi(0, \zeta) = \zeta$. Из теоремы о дифференцируемости решения задачи Коши по начальным данным следует, что $x = \varphi(t, \zeta)$ - непрерывно дифференцируемая функция t, ζ при $|t| < \varepsilon_1, |\zeta - a| < \varepsilon_2, \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$.

Покажем, что $x = \varphi(t, \zeta)$ определяет искомую гладкую обратимую замену переменных в некоторой окрестности $t = 0, \zeta = a$. С этой целью покажем, что в окрестности $t = 0, \zeta = a$ применима теорема существования и единственности системы неявных функций. В самом деле, $x = \varphi(t, \zeta)$ непрерывно дифференцируема в окрестности $t = 0, \zeta = a$. Так как

$$\varphi_i(0, \zeta) = \zeta_i, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \varphi_n(0, \zeta) = a_n,$$

ТО

$$\left.\frac{\partial \varphi_i}{\partial \zeta_j}\right|_{t=0, \zeta=a} = \delta_{ij}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n-1},$$

где δ_{ij} - символ Кронекера. Поскольку $x = \varphi(t, \zeta)$ - решение (1), то

$$\frac{\partial \varphi_i(0, a)}{\partial t} = f_i(a), \quad i = \overline{1, n}.$$

Следовательно, якобиан

$$\left.\frac{\partial\left(\varphi_1, ..., \varphi_n\right)}{\partial\left(\zeta_1, ..., \zeta_{n-1}, t\right)}\right|_{\zeta=a, l=0} = f_n(a) \neq 0.$$

По теореме о системе неявных функций попучаем тогда, что существуют и единственны непрерывно дифференцируемые функции в некоторой окрестности Ω_a точки a

$$\zeta_i = u_i(x), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad t = v(x),$$

которые дают обратное отображение для $x = \varphi(t, \zeta)$. Введем в окрестности Ω_a новые переменные

$$y_i = u_i(x), \quad i = \overline{1, n-1}, \quad y_n = v(x).$$

Это гладкая обратимая замена переменных в Ω_a. При каждом фиксированном ζ при такой замене траектория (1) из Ω_a перейдет в отрезок прямой

$$y_i = \zeta_i, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad y_n = t.$$

Меняя $\zeta \in \Omega_a$, получим семейство параллельных оси y_n отрезков. Система (1) при указанной замене переменных примет вид

$$\dot{y}_i = 0, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad \dot{y}_n = 1.$$

Как будет установлено в следующем параграфе, подобная теорема для положений равновесия автономпой системы не имеет места. Поведение фазовых траекторий в

окрестности положения равновесия (1) существенно зависит от типа положения равновесия.

Качественную картину поведения фазовых траекторий системы (1), геометрически изображенную в области Ω, называют фазовым портретом системы (1).

Важным для приложений является класс автономных систем (1), для которых величина так называемого фазового объема (определение см. ниже) не меняется при перемещении точек объема по траекториям системы (1). Например, таким свойством обладают линейный осциляятор

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega > 0,$$

и нелинейный осциллятор

$$\ddot{x} + \sin x = 0.$$

Если же взять линейный осциллятор с трением

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + x = 0, \quad \delta > 0,$$

то для него величина фазового обьема уже зависит от времени.
Докажем теорему Лиувилля, дающую достаточные условия сохранения величины (меры) фазового объема.

Пусть $x = \varphi(t, t_0, x_0)$ - непродолжимее на всей оси R_t^1 решение задачи Коши (1), (2) и пусть начальные положения x_0 заполпяют при $t = t_0$ некоторое измеримое по Жордану множество (объем) $V_0 \subset \Omega$ с мерой
(величиной) объема μV_0. Обозначим через V_t измеримый по Жордану объем $V_t \subset \Omega$ с мерой объема μV_t, полученный из V_0 сдвигом за время t вдоль фазовых траекторий (1), задаваемых решениями $x = \varphi(t, t_0, x_0)$. Множества V_0 и V_t называют фазовыми объемами.

Definition

Задача Коши (1), (2) называется допустимой, если $x = \varphi(t, t_0, x_0)$ является гладкой обратимой заменой переменных из V_0 В V_t.

Теорема 6 (Лиувилля). Если задача Коши (1), (2) является допустимой и в области Ω

$$\operatorname{div} f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i} = 0$$

то на траекториях (1) сохраняется всличина фазового объема, т.е. $\mu V_0 \equiv \mu V_t$ для есех t.

Proof.

В кратном интеграле

$$\mu V_t = \int ... \int\limits_{V_t} dx_1 ... dx_n$$

сделаем замену переменных $x = \varphi(t, t_0, x_0)$. Это законно, так как по условию задача Коши (1), (2) допустима. Тогда

$$\mu V_t = \int \underset{V_0}{...} \int \cdot |J(t, x_0)| \, dx_1^{(0)} ... dx_n^{(0)}$$

где якобиан

$$J\left(t,x_0\right)=\frac{\partial\left(\varphi_1,...,\varphi_n\right)}{\partial\left(x_1^{(0)},...,x_n^{(0)}\right)}$$

При $t=t_0\varphi=x_0$ и поэтому $J\left(t_0,x_0\right)=1$. Покажем, что $J\left(t,x_0\right)=1$. С этой целью найдем $\frac{\partial J}{\partial t}$. По правилу дифференцирования определителей имеем, что

$$\frac{\partial J}{\partial t}=\sum_i J_i$$

где J_i - определитель, полученный из J заменой i-й строки на производную по t этой строки:

$$J_i=\left|\begin{array}{c}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1^{(0)}}\cdots\frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_n^{(0)}}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right|-i\text{-я строка.}$$

В силу того, что $x=\varphi\left(t,t_0,x_0\right)$-решение системы (1), то $\forall k=\overline{1,n}$

$$\frac{\partial}{\partial t}\cdot\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k^{(0)}}=\frac{\partial}{\partial x_k^{(0)}}\cdot\dot{\varphi}_i=\frac{\partial}{\partial x_k^{(0)}}\cdot f_i(\varphi)=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_l}\cdot\frac{\partial\varphi_l}{\partial x_k^{(0)}}.$$

Умножая j-е $(j\neq i)$ строки J_i на $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, просуммировав их и вычитая из i-й строки, получим

$$J_i=\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\cdot J$$

Следовательно, из условия теоремы тогда имеем, что

$$\frac{\partial\mathcal{I}}{\partial t}=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right)J=J\cdot\operatorname{div}f(x)=0$$

Значит,

$$J\left(t,x_0\right)\equiv J\left(t_0,x_0\right)=1$$

и

$$\mu V_t=\int...\int dx_1^{(0)}...dx_n^{(0)}\equiv\mu V_0$$

Замечание. Условие $\operatorname{div}f(x)=0$ в области Ω из теоремы 6 означает, что векторное поле $f(x)$ в Ω является сопеноидальным. Если $f(x)=Ax$, где A - числовая матрица, то $\operatorname{div}f(x)$ равна следу матрицы A. Для гамильтоновой системы уравнений

$$\dot{x}_i=\frac{\partial H(x,p)}{\partial p_i},\quad\dot{p}_i=-\frac{\partial H(x,p)}{\partial x_i},\quad i=\overline{1,n},$$

в фазовом пространстве $R^{2n}_{(x,p)}$ задача Коши допустима и

$$\operatorname{div}f(x)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial H}{\partial x_i}\right)=0.$$

Следовательно, величина фазового объема не меняется при перемещении точек объема по траекториям гамильтоновой системы уравнений.

В заключение этого параграфа отметим, что не всегда разумно считать фазовым пространством автономной системы (1) ту область Ω евклидова пространства R_x^n, где определена система (1). Так, например, при $n = 1$ для уравнения

$$\dot{x} = f(x),$$

где $f(x)$ - непрерывно дифференцируемая и периодическая с периодом 2π на всей оси R_x^1 функция, фазовым пространством удобно считать не R_x^l, а единичную окружность K с направлением движения против часовой стрелки. В этом случае на R_x^1 нет однозначного описания, а на окружности K имеется однозначность описания фазовых состояний системы (1). Особенно важно требовать взаимно однозначное соответствие между состояниями системы и точками фазового пространства для автономных систем (1), описывающих реальные физические процессы.

Пусть теперь $n = 2$ и вектор-функция $f(x_1, x_2)$ определена на всей плоскости R_{x_1,x_2}^2. Если $f(x_1, x_2)$ является по обеим переменным x_1, x_2 периодической функцией периода 2π, то целесообразно считать фазовым пространством (1) не $R_{(x_1,x_2)}^2$, а поверхность тора. В случае же, когда $f(x_1, x_2)$ ивляется периодической функцией периода 2π лишь по одной переменной x_1, естественно считать фазовым пространством (1) не $R_{(x_1,x_2)}^1$, а поверхность бесконечного цилиндра. В § 3 будет построен фазовый цилиндр нелинейного консервативного осциллятора

$$\ddot{x} + \sin x = 0.$$

Таким образом, в качестве фазового пространства системы (1) может выступать не только область R_x^n, но и некоторые многообразия размерности $1 \leq k \leq n$ пространства R_x^n.

13.7.2 § 2. Classification of equilibrium positions of a linear homogeneous system of the second order

Рассмотрим линейную однородную систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{cases} \tag{1}$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ - заданные действительные числа, $t \in R_t^1$. Очевидно, система (1) является автономной. Введем матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Definition

Линейная автономная система (1) называется простой, если матрица A - невырожденна. В противном случае система (1) называется сложной.

Сначала изучим фазовый портрет простой системы (1). Он, прежде всего, существенно зависит от собственных значений λ_1, λ_2 матрицы A.

Положения равновесия системы (1) являются корнями линейпой системы $Ax = 0$. Если система (1) простая, то $x = 0$ - единственное положение равновесия (1).

I. Пусть собственные значения λ_1 и λ_2 действительны. Тогда все действительные решения (1) задаются формулой

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} h_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} h_2,$$

где c_1, c_2-произвольные действительные числа, а h_1, h_2 - линейно независимые собственные векторы, соответствующие λ_1 и λ_2.

Векторы h_1 и h_2 образуют базис плоскости, в общем случае неортогональный. Если ζ_1, ζ_2 - координаты точки x в этом базисе, то координаты решения $x(t)$ системы (1) имеют вид

$$\zeta_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t},$$
$$\zeta_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Так как картина поведения фазовых траекторий (1) симметрична относительно осей ζ_1, ζ_2, то достаточно ее исследовать при $\zeta_1 \geq 0, \zeta_2 \geq 0$.
а) Пусть $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ и $|\lambda_1| < |\lambda_2|$.

Тогда: $c_1 = c_2 = 0$ дает положение равновесия $x = 0; c_1 > 0, c_2 = 0$ дает полуось $\zeta_1 > 0$, причем $\zeta_1 \to +0$ при $t \to +\infty; c_1 = 0, c_2 > 0$ дает полуось $\zeta_2 > 0$, причем $\zeta_2 \to +0$ при $t \to +\infty$. Если же $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$, то

$$\zeta_2 = c\zeta_1^{\alpha}, \quad c = c_2 \cdot c_1^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, \quad \alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{d\zeta_2}{d\zeta_1} = c\alpha \cdot \lim_{t \to +\infty} \zeta_1^{\alpha - 1} = 0$$

Значит, фазовые траектории представляют собой кривые типа ветвей параболы, касающихся в пределе при $t \to +\infty$ оси ζ_1 в начале координат.

В целом в случае а) получаем семейство фазовых траекторий типа ветвей параболы и пять специальных траекторий: положение равновесия $x = 0$ и четыре полуоси осей координат ζ_1, ζ_2. Схематически фазовый портрет системы (1) в случае а) показан на рис. 2. Стрелка на траектории показывает направление движения при $t \to +\infty$.

В этом случае положение равновесия $x = 0$ называется устойчивым узлом системы (1).
б) Пусть $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ и $\lambda_1 < \lambda_2$.

Расположение и вид траекторий (1) остаются такими же, как и в случае а), но направление движения по траекториям при $t \to +\infty$ меняется на противоположное. Положение равновесия $x = 0$ в этом случае называется неустойчивым узлом (1). Схематически фазовый портрет системы (1) в случае б) показан на рис. 3.

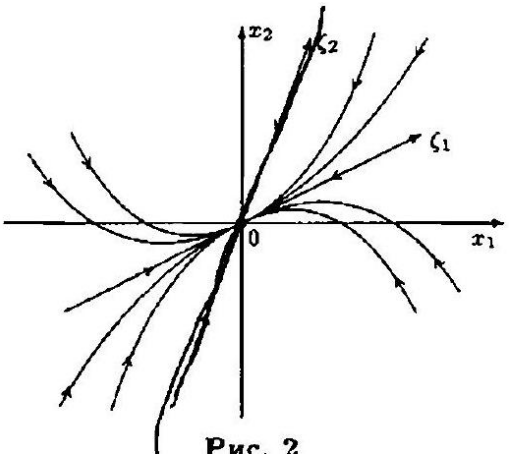


Рис. 2

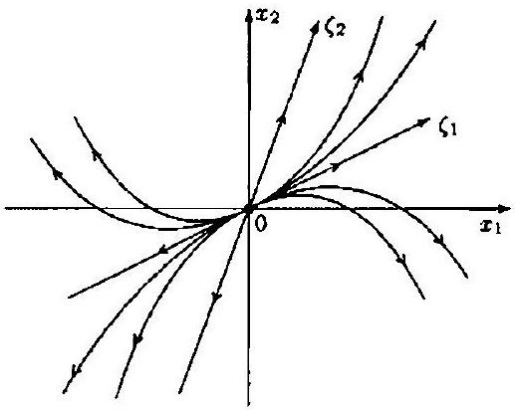


Рис. 3

в) Пусть $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$.

Тогда получаем: при $c_1 = c_2 = 0$ положение равновесия $x = 0$, при $c_1 > 0, c_2 = 0$ полуось $\zeta_1 > 0$, причем $\zeta_1 \to +0$ при $t \to +\infty$, при $c_1 = 0$, $c_2 > 0$ полуось $\zeta_2 > 0$, причем $\zeta_2 \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Если же $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, то, как и в случае а), имеем $\zeta_2 = c\zeta_1^{\alpha}$, но здесь уже $\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$. Следовательно, траектории - это кривые типа гиперболы.

В целом в случае в) получаем семейство траекторий типа гипербол и пять специальных траекторий: положение равновесия $x = 0$ и четыре полуоси осей координат ζ_1, ζ_2. Эти полуоси служат асимптотами траекторий типа гипербол и называются сепарагрисами.

Положение равновесия $x = 0$ системы (1) в случае в) называется седлом системы (1). Схематически фазовый портрет системы (1) в этом случае показан на рис. 4.

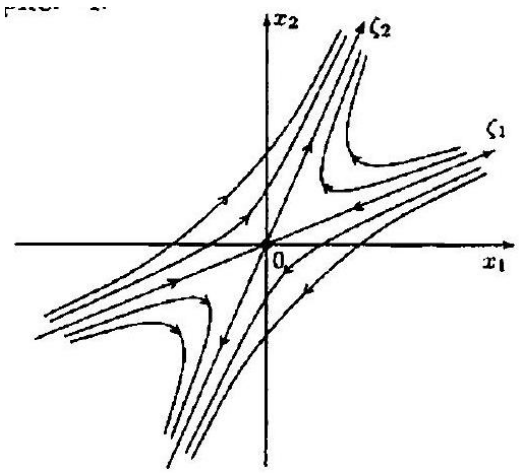


Рис. 4

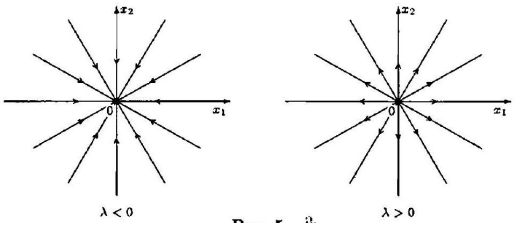
г) Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ и существует базис плоскости из собственных векторов h_1, h_2 матрицы A.

В этом случае общее решение (1) имеет вид

$$x(t) = e^{\lambda t}\left(c_1 h_1 + c_2 h_2\right).$$

Каждое такое решение описывает луч, выходящий из начала координат, причем движение по лучу при $t \to +\infty$ идет к нулю для $\lambda < 0$ и от нуля для $\lambda > 0$. При $\lambda < 0$ положение равновесия $x = 0$ называеся устойчивым дикритическим (или звездным)

узлом, а при $\lambda > 0$ неустойчивым дикритическим (или звездным) узлом (1). Схематический фазовый портрет (1) в обоих случаях показан на рис. 5.



Pric. 5

д) Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ и существует базис плоскости из собственного вектора h_1 и к нему присоединенного векжора h_2 матрицы A.

В этом случае общее решение системы (1)

$$x(t) = c_1 e^{\lambda t} h_1 + c_2 e^{\lambda t} \left(t h_1 + h_2\right).$$

Тогда

$$\zeta_1(t) = \left(c_1 + c_2 t\right) e^{\lambda t}, \quad \zeta_2(t) = c_2 e^{\lambda t}.$$

Для $\lambda < 0$ получаем при $c_1 = c_2 = 0$ положение равновесия $x = 0$, при $c_1 \neq 0, c_2 = 0$ две полуоси $\zeta_1 < 0$ и $\zeta_1 > 0$, причем при $t \to +\infty$ движение по ним идет в сторону $x = 0$. Пусть теперь $c_1 = 0, c_2 > 0$. Тогда при $t = 0$ получаем точку $(\ 0, c_2\ )$, а при $t \to +\infty$ точка $(\ \zeta_1, \zeta_2\ )$ движется в сторону возрастания ζ_1, одновременно опускаясь $(0,0)$ и касаясь в пределе $\zeta_1 > 0$ в точке $(0,0)$. При $t \to +\infty$ точка (ζ_1, ζ_2) движется направо, одновременно поднимаясь вверх. Описанные траектории заполняют полуплоскость $\zeta_2 > 0$. Осталось заметить, что картина симметрична относительно $(0,0)$.

В случае $\lambda < 0$ положение равновесия $x = 0$ называется устойчивым вырожденным узлом системы (1).

Если $\lambda > 0$, то траектории (1) получаются из описанных выше траекторий для случая $\lambda < 0$ путем зеркального отображения плоскости

относительно оси ζ_2, а движение по ним при $t \to +\infty$ идет от начала координат. В случае $\lambda > 0$ положение равновесия $x = 0$ называется неустойчивым вырожденным узлом (1). Схематически фазовы портрет (1) в обоих случаях показан на рис. 6 .

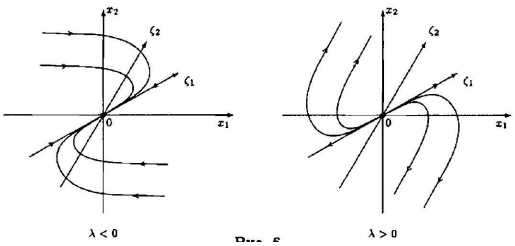


Рис. 6

II. Пусть собственные значения λ_1 и λ_2-комплексные.

Если $\lambda_1 = \mu + i\nu$, где $\nu > 0$, то в силу действительности A имеем $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = \mu - i\nu$. Обозначим через $h = h_1 - ih_2$ собственный вектор A для λ_1, где h_1 и h_2 - действительные

векторы. Тогда $\bar{h} = h_1 + ih_2$ является собственным вектором для λ_2. Общее действительное решение (1) в этом случае имеет вид

$$x(t) = ce^{\lambda_1 t}h + \bar{c}e^{\bar{\lambda}_1 t} \cdot \bar{h},$$

где c-произвольная комплексная постоянная.
Если положить

$$c = |c|e^{i\varphi}, \quad |c| \geq 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi),$$

то $\bar{c} = |c|e^{-i\varphi}$ и общее решение преобразуется к виду

$$x(t) = 2|c|e^{\mu t}\left[\cos(\varphi + \nu t) \cdot h_1 + \sin(\varphi + \nu t) \cdot h_2\right].$$

Так как h_1 и h_2 - линейно независимые векторы, то, взяв их в качестве нового базиса плоскости, координаты $\zeta_1(t), \zeta_2(t)$ решения $x(t)$ в этом базисе имеют вид

$$\zeta_1(t) = 2|c|e^{\mu t}\cos(\varphi + \nu t), \quad \zeta_2(t) = 2|c|e^{\mu t}\sin(\varphi + \nu t).$$

Положив $r(t) = 2|c|e^{\mu t}, \psi(t) = \varphi + \nu t$, отсюда получаем уравнение траекторий (1) в полярных координатах r, ψ

$$r = 2|c| \cdot e^{\mu \cdot \frac{\phi - \varphi}{\nu}}.$$

При $c \neq 0$ и $\mu \neq 0$ фазовые траектории (1) представляют собой кривые типа логарифмических спиралей, а при $\mu = 0$ - кривые тита эллипсов.
а) Пусть $\mu < 0$. Тогда при $c = 0$ получаем положение равновесия $x = 0$, а при $c \neq 0$ фазовая точка по спирали движется к $x = 0$ при $t \to +\infty$, так как $r(t) \to +0, \psi(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Направление закручивания спирали определяется направлением фазовой скорости $f(x) = Ax$. Например, если в качестве x взять $(0, 1)$, то $f(x)$ имеет компоненты a_{12}, a_{22}. Если $a_{12} > 0$, то $f(x)$ направлен вправо, а если $a_{12} < 0$, то $f(x)$ направлен влево. Возможные два различных фазовых портрета (1) в этом случае схематически тюказаны на рис. 7.

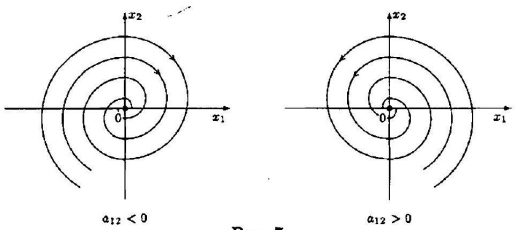


Рис. 7

Положение равновесия $x = 0$ в этом случае называется устойчивым фокусом системы (1).
б) Пусть $\mu > 0$. Тогда при $c = 0$ получаем положение равновесия $x = 0$, а при $c \neq 0$ и $t \to +\infty$ точка по спирали удаляется от $x = 0$, так как $r(t) \to +\infty, \psi(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$. В этом случае положение равновесия $x = 0$ называется неустойчивим фокусом системы (1). Возможные в этом случае два различных фазовых портрета (1) схематически показаны на рис. 8.

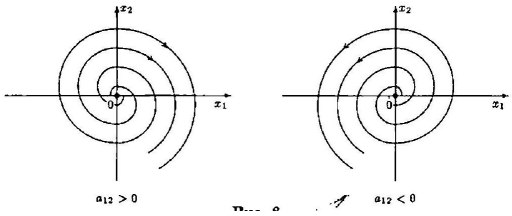


Рис. 8

в) Пусть $\mu = 0$. Тогда в произвольном базисе h_1, h_2 при $c \neq 0$ траектории - кривые типа эллипса, а при $c = 0$ - положение равновесия. В

этом случае положение равновесия $x = 0$ называется центром для системы (1). В зависимости от направления обхода эллипсов возможные фазовые портреты (1) схематически показаны на рис. 9 .

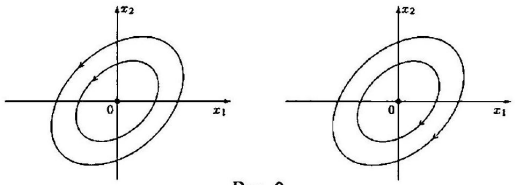
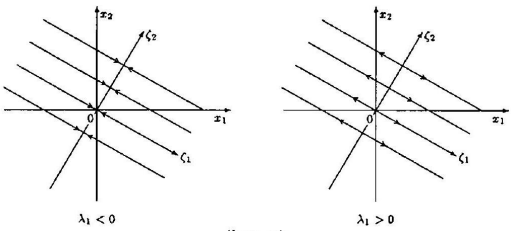


Рис. 9

Таким образом, для простой линейной автономной системы (1) существует всего тринадцать различных фазовых портретов.

Пусть теперь система (1) является сложной.

а) Пусть $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$. Тогда $\zeta_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \zeta_2(t) = c_2$. Отсюда ясно, что все точки прямой $\zeta_1 = 0$ являются положениями равновесия и что оба луча каждой прямой $\zeta_2 = c_2$ являются траекториями (1). В зависимости от знака λ_1 движение по ним при $t \to +\infty$ идет либо к прямой $\zeta_1 = 0$, либо от нее. В зависимости от знака λ_1 возможны два схематически представленных на рис. 10 фазовых портрета системы (1).



Рас. 10

б) Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Если матрица A нулевая, то каждая точка плоскости $R^2_{(x_1,x_2)}$ является положением равновесия (1). Если же A-ненулевая матрица, то существует базис плоскости из собственного вектора h_1 и присоединенного к нему вектора h_2 матрицы A. В этом базисе решение (1) имеет координаты

$$\zeta_1(t) = c_1 + c_2 t, \quad \zeta_2(t) = c_2.$$

В этом случае все точки прямой $\zeta_2 = 0$ являются попожениями равновесия. Каждая из прямых $\zeta_2 = c$ является траекторией(1)и при $t \to +\infty$ движение по ним идет слева направо при $\zeta_2 > 0$ и справа налево при $\zeta_2 < 0$(см. рис. 11).

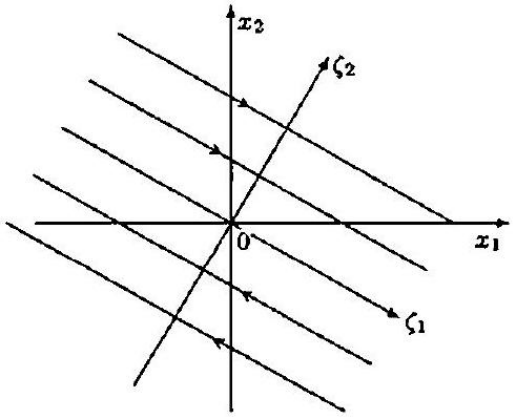


Рис. 11

Таким образом, в случае сложной автономной системы(1)имеется всего четыре различных фазовых портрета системы(1).

Замечание. Если задано автономное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0 \tag{2}$$

с действительными коэффициентами a, b , то его положениями равновесия называются положения равновесия автономной системы вида

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -bx - ay. \end{cases} \tag{3}$$

Фазовыми траекториями уравнения(2)называются фазовые траектории системы(3). Отсюда следует, что для рассматриваемого уравнения (2)в случае фокуса и центра движение по траекториям при $t \to +\infty$ всегда идет за часовой стрелкой.

В заключение отметим, что, используя приведение матрицы A к жордановой нормальной форме, можно исследовать фазовые портреты линейной автономной системы

$$\dot{x} = Ax$$

в фазовом пространстве R_z^n и при $n > 2$.

13.7.3 § 3. Second-order nonlinear autonomous systems

Рассмотрим нелинейную автономную систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2), \end{cases} \tag{1}$$

где $f_1(x_1, x_2)$ и $f_2(x_1, x_2)$-заданные действительные дважды непрерывно дифференцируемые функции в некоторой области Ω декартовой плоскости $R^2_{(x_1,x_2)}$.

Сначала нас интересует локальный фазовый портрет (1) в окрестности точки a с координатами a_1, a_2 из области Ω. Будем считать в дальнейшем, что точка a является началом координат, так как этого всегда можно добиться заменой $y_1 = x_1 - a_1, y_2 = x_2 - a_2$.

Пусть, кроме системы (1), задана и автономная система

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = g_1(y_1, y_2), \\ \dot{y}_2 = g_2(y_1, y_2), \end{cases} \tag{2}$$

где $g_1(y_1, y_2)$ и $g_2(y_1, y_2)$ определены и непрерывно дифференцируемы в некоторой области G плоскости $R^2_{(y_1,y_2)}$.

Definition

Автономные системы (1) и (2) будем называть качественно эквивалентными, если существует такое взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение области Ω на область G, при котором каждая фазовая траектория системы (1) с сохранением ориентации переходит в некоторую фазовую траекторию системы (2), и наоборот. Если, кроме того, это отображеиие является непрерывно дифференцируемым, то системы (1) и (2) называются дифференцируемо эквивалентными.

Из § 2 следует, что каждая простая автономная линейная система качественно эквивалентна одной из десяти автономных систем, фазовые портреты которых изучены в § 2. Более того, можно показать, что все те простые автономные линейные системы качественно эквивалентны, у которых $x = 0$ является устойчивым узлом, дикритическим или вырожденным узлом, фокусом. Аналогично, качественно эквивалентными являются те простые линейные системы, у которых $x = 0$ является неустойчивыми узлом, дикритическим или вырожденным узлом, фокусом. Таким образом, существуют только четыре типа качественно эквивалентных простых автономных линейных систем: системы с устойчивым положением равновесия $x = 0$, системы с неустойчивым положением равновесия $x = 0$, системы, у которых $x = 0$ - седло, и системы, у которых $x = 0$ - центр.

Из теоремы о выпрямлении траекторий получаем, что все системы (1), рассматриваемые в окрестностях любых обыкновенных точек системы (1), являются дифференцируемо эквивалентными.

Допустим теперь, что $x = 0 \in \Omega$ является положением равновесия нелинейной системы (1), т.е. $f_1(0,0) = f_2(0,0) = 0$. Разложим $f_1(x_1, x_2)$ и $f_2(x_1, x_2)$ по формуле Тейлора в окрестности $x = 0$ с остаточным членом в форме Пеано:

$$f_1(x_1, x_2) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + O(|x|),$$
$$f_2(x_1, x_2) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + O(|x|),$$

где $a_{ij} = \frac{\partial f_i(0,0)}{\partial x_j}, i, j = 1, 2, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad O(|x|) = \varepsilon(x_1, x_2)|x|$, $\varepsilon(x_1, x_2) \to 0$ при $|x| \to 0$.

Линейная однородная система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{cases} \tag{3}$$

называется линеаризацией нелинейной системы (1) в начале координат.
Следующая теорема, носящая название теоремы о линеаризации, доказательство которой можно найти в книгах [2], [5], [47], устанавливает связь между локальным фазовым портретом нелинейной системы (1) и фазовым портретом ее линеаризации (2).

Theorem

Если линеаризация (3) нелинейной системы (1) в начале координат $x = 0$ является простой свтономной системой и $x = 0$ не является центром для системы (3), то в окрестности $x = 0$ нелинейная система (1) и ее линеаризация (3) качественно эквивалентны.

Иначе говоря, если собственные значения матрицы линеаризации (3) системы (1) при $x = 0$ имеют действительную часть, отличную от нуля, то фазовые портреты (1) и (3) в окрестности $x = 0$ качественно эквивалентны, т.е. фазовый портрет системы (1)

в малой окрестности $x = 0$ получается из фазового портрета системы (3) небольшим искажением. Без дополнительных условий на $f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)$ нельзя утверждать в общем случае, что системы (1) и (3) в окрестности нуля при условиях сформулированной теоремы являются дифференцируемо эквивалентными. Этим теорема о линеаризации отличается от теоремы о выпрямлении траекторий в окрестности обыкновенной точки. Если система (3) простая, то положения равновесия $x = 0$ для нелинейной системы (1) классифицируются так же, как и для системы (3).

Замечание. Нелинейное автономное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) \tag{4}$$

эквивалентно автономной системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x, y) \end{cases} \tag{5}$$

Положениями равновесия и фазовыми траекториями уравнения (4) называются положения равновесия и фазовые траектории системы (5).

Example 1.

Найти положения равновесия, определить их характер и нарисовать фазовые траектории линеаризованных систем

$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{arctg}(x - y - 1) \\ \dot{y} = \sqrt[3]{3x^2 + 3y - 2} - 1 \end{cases}$$

$\triangle$ Положения равновесия находим из системы уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{arctg}(x - y - 1) = 0, \\ \sqrt[3]{3x^2 + 3y - 2} - 1 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x - y = 1, \\ 3x^2 + 3y = 3. \end{cases}$$

Получаем два положения равновесия: $(-2, -3)$ и $(1, 0)$. Для линеаризации исходной системы удобно иметь положением равновесия точку $(0, 0)$. Сделаем замену

$$u_1 = x + 2, \quad v_1 = y + 3.$$

Тогда точка $(-2, -3)$ перейдет в точку $(0, 0)$ и нелинейная система примет вид

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \operatorname{arctg}(u_1 - v_1), \\ \dot{v}_1 = \sqrt[3]{1 + 3u_1^2 - 12u_1 + 3v_1} - 1 \end{cases}$$

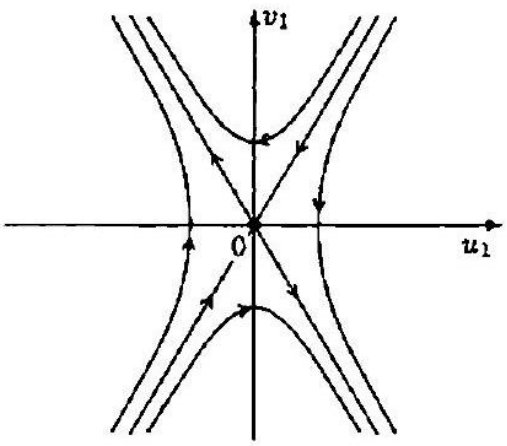
Линеаризация этой системы в точке $(0, 0)$ выглядит так:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_1 - v_1, \\ \dot{v}_1 = -4u_1 + v_1. \end{cases}$$

Матрица этой системы имеет собственные значения $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$ и линейно независимые собственные векторы

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, точка $(-2, -3)$ - седло для исходной системы. Фазовый портрет линеаризованной системы приведен на рис. 12.



Phc. 12

Рассмотрим второе положение равновесия (1,0). Сделаем замену

$$u_2 = x - 1, \quad v_2 = y.$$

Тогда точка (1,0) перейдет в (0,0), а нелинейная система примет вид

$$\begin{cases} \dot{u}_2 = \operatorname{arctg}(u_2 - v_2), \\ \dot{v}_2 = \sqrt[3]{1 + 3u_2^2 + 6u_2 + 3v_2} - 1. \end{cases}$$

Линеаризация этой системы в точке (0,0) имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{u}_2 = u_2 - v_2, \\ \dot{v}_2 = 2u_2 + v_2. \end{cases}$$

Так как матрица этой системы имеет собственные значения $\lambda = 1 \pm i\sqrt{2}$, то точка $(1, 0)$ - неустойчивый фокус для исходной системы. Поскольку в точке $(0, 1)$ вектор фазовой скорости имеет координаты ($-1, 1$), то он направлен влево и, значит, движение по спиралям при $t \to +\infty$ идет от начала координат против часовой стрелки. Поведение фазовых траекторий линеаризованной системы показано на рис. 13.

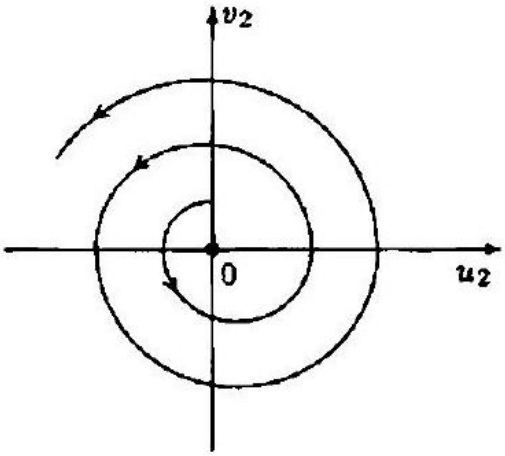
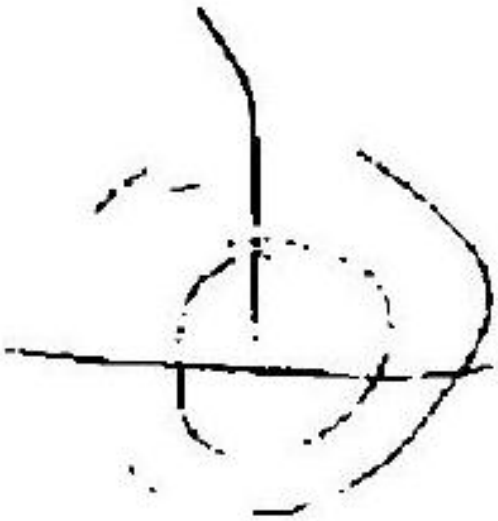


Рис. 13



Если точка $(0,0)$ является центром для линеаризации (3), то теорема о качественной эквивалентности систем (1) и (3) может не выполняться. Эта точка может быть для нелинейной системы либо центром, либо фокусом, либо так называемым центрофокусом, т.е. положением равновесия (1), в окрестности которого имеются как замкнутые траектории, так и траектории типа логарифмической спирали. Приведем пример.

Example 2.

Определить характер положения равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_1 \cdot |x|, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 \cdot |x|, \end{cases}$$

где $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

$\triangle$ Положением равновесия служит (0,0). Линеаризованная в точке $(0,0)$ система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$$

имеет в этой точке центр, так как собственные значения матрицы системы чисто мнимые.

Чтобы определить характер точки $(0,0)$ для исходной системы, перейдем к полярным координатам r, φ по формулам

$$x_1(t) = r(t)\cos\varphi(t), \quad x_2(t) = r(t)\sin\varphi(t).$$

Получаем систему уравнений

$$\dot{r} = -r^2, \quad r\dot{\varphi} = r,$$

откуда либо $r = 0$, либо $r \neq 0, r = (t + c_1)^{-1}, \varphi = t + c_2$. При $t \to +\infty r \to +0$, т.е. точка $(0,0)$ является устойчивым фокусом для заданной системы. $\square$

На примере системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_1 \cdot |x| \cdot \sin\frac{1}{|x|}, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \cdot |x| \cdot \sin\frac{1}{|x|}, \end{cases}$$

можно убедиться, что точка (0,0) для линеаризованной системы является центром, а для заданной системы является центрофокусом. Таким образом, в случае центра для (3) нелинейные члены могут существенно изменить фазовый портрет системы (1).

Если линеаризация (3) является сложной автономной системой, то теорема о качественной эквивалентности систем (1) и (3) в окрестности начала координат также не справедлива и нет классификации положений равновесия нелинейной системы (1). Например, система

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1^2,$$

имеет единственное положение равновесия (0,0), а для ее линеаризации

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = 0,$$

каждая точка оси $x_2 = 0$ являетси положением равновесия.
С помощью теорем о выпрямлении траекторий и о линеаризации можно установить локальный фазовый портрет во всех обыкновенных точках и в простейших положениях равновесия нелинейпой системы (1). Однако такой информации о локальных фазовых портретах системы (1) не всегда достаточно для построения глобального фазового портрета (1) во всей области Ω. Можно построить пример двух нелинейных систем (1) с одинаковыми локальными фазовыми портретами во всех обыкновенных точках и во всех положениях равновесия, но с качественно различными глобальными фазовыми портретами в области Ω. Дело в том, что

структура предельных множеств траекторий таких систем может быть различной.

Definition

Точка $\hat{x} \in \Omega$ называется ω-предельной точкой траектории $x = \varphi(t)$ системы (1), определенной при всех $t \geq 0$, если найдется такая последовательность $t_k > 0, t_k \to +\infty$, что $\varphi(t_k) \to \hat{x}$ при $t \to +\infty$. Множество всех ω-предельных точек траектории (1) называется ее ω-предельным множеством.

Заменив в этом определении условия $t > 0, t_k > 0, t_k \to +\infty$ условиями $t < 0, t_k < 0, t_k \to -\infty$, получим определение α-предельной точки и α-предельного множества траектории (1).

Теория А. Пуанкаре - И. Бендиксона (см. [2], [5]) дает описание структуры предельных множеств траекторий системы (1). На фазовой плоскости типичными предельными множествами траекторий являются: положения равновесия, кривые типа сепаратрис, двоякоасимптотические к седловым положениям равновесия, и так называемые предельные циклы.

Definition

Предельным циклом системы (1) называется такая замкнутая траектория (1) в области Ω, которая изолирована от всех остальных замкнутых траекторий системы (1) в области Ω.

Example 3.

Показать, что автономная система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_1(1 - |x|), \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2(1 - |x|), \end{cases}$$

где $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2$, имеет предельный цикл $|x|^2 = 1$.
Δ Перейдем к полярным координатам r, φ по формулам

$$x_1(t) = r(t)\cos\varphi(t), \quad x_2(t) = r(t)\sin\varphi(t)$$

Тогда система примет вид

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1-r) \\ \dot{\varphi} = 1. \end{cases}$$

Решениями полученной системы являются:

$$r = 0, \quad r = 1, \quad \ln\frac{r}{|1-r|} = t + c_1, \quad \varphi = t + c_2.$$

Отсюда следует, что $r = 0$ - положение равновесия, а при $0 < r < 1 \dot{r} > 0$ и траектории - раскручивающиеся спирали, приближающиеся к окружности $r = 1$. При $r > 1$ имеем $\dot{r} < 0$ и траектории скручива-

ются при возрастании $t \to +\infty$. Фазовый портрет заданной системы качественно эквивалентен портрету, изображенному на рис. 14.

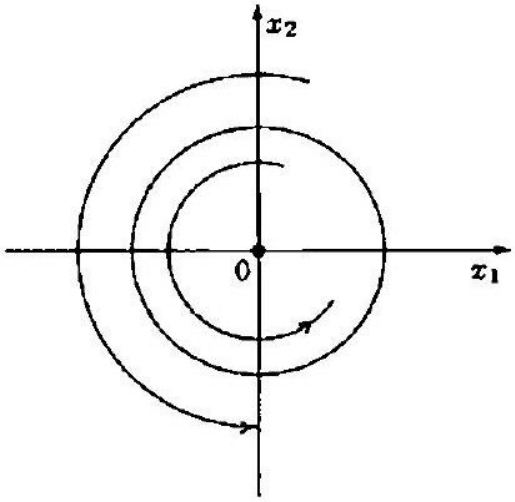


Рис. 14

Не все предельные циклы системы (1) ведут себя так же, как предельный цикл примера 3. Существуют три типа предельных циклов:
а) устойчивый (притягивающий) предельный цикл, где траектории навиваются на предельный цикл с обеих сторон при $t \to +\infty$ (см. пример 3);
6) неустойчивый (отталкивающий) предельный цикл, где траектории - спирали удаляются от предельного цикла с обеих сторон при $t \to +\infty$;
в) полуустойчивый предельный цикл, где траектории с одной стороны навиваются на предельный цикл и удаляются от него с другой стороны при $t \to +\infty$.

Для автономной системы (1) можно дать критерий, позволяющий в некоторых случаях установить существование предельного цикла (см. [36]). Однако нет общих методов нахождения предельных циклов для системы (1).

Наиболее важными с физической точки зрения являются притягивающие предельные множества - аттракторы, когда с течением времени произвольная траектория системы (1) из пекоторой области притяжения аттрактора притягиваегся к аттрактору. В частности,

аттрактором может быть устойчивый предельный цикл. В теории нелинейных колебаний такого рода системы называют автоколебательными системами.

Если ограничиться рассмотрением лишь систем (1) в компакте (ограниченной замкнутой области) Ω, имеющей в Ω конечное число положений равновесия, то (см. [5]) можно дать полную характеристику предельного множества любой траектории (1). Это позволяет установить качественную (топологическую) структуру разбиения Ω на траектории и тем самым построить глобальный фазовый пор-

трет системы (1) в области Ω. На практике построение глобального фазового портрета (1) обычно проводится либо методом изоклин, либо методом, связанным с нахождением точной или асимптотической формулы всех траекторий (1), либо численными методами.

Example 4.

Нарисовать глобальный фазовый портрет уравнения нелинейного маятника

$$\ddot{x} + \sin x = 0.$$

Δ Положениями равновесия являются точки $M_k(k\pi, 0), k \in Z$, причем M_k - центры при четных k и M_k - седла при нечетных k.

Для получения глобального фазового портрета найдем уравнения траекторий. Умножив заданное уравнение на $\dot{x}$, получаем

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{x}\sin x = 0.$$

Отсюда

$$\dot{x}^2 = 2(\cos x + c),$$

где c - произвольная постоянная. Заметим, что $c \geq -1$, так как при $c < -1$ имеем $2(\cos x + c) < 0$, что невозможно. При $c \in [-1, 1)$ фазовые траектории замкнутые. При $c = 1$ имеются две разделительные траектории (сепаратрисы)

$$\dot{x} = \pm\sqrt{2(\cos x + 1)} = \pm 2\cos\frac{x}{2}$$

При $c > 1$ фазовые траектории не пересекающиеся и не самопересекающиеся. Остается построить графики

$$\dot{x}^2 = 2(\cos x + c).$$

Окончательная картина повецения траекторий на фазовой плоскости представлена на рис. 15.

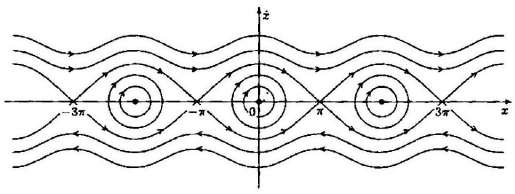


Рис. 15

Из локальных фазовых портретов в точках M_k нельзя получить такой полной информации о поведении фазовых траекторий уравнения, как из глобального фазового портрета.

Как видно из рисунка, состояние маятника определяется углом его отклонения от положения равновесия x и скоростью $\dot{x}$. Но для значений x, отличающихся на целое число $2\pi n$, динамика системы одинакова. Поэтому в силу отсутствия однозначности плоскость переменных $x, \dot{x}$ не является, строго говоря, фазовой плоскостью маятника.

Proof

колебаниях в окрестности центра неясностей не возникает. Однако при $c > 1$ движение становится вращательным, фазовая плоскость не годится для однозначного описания и в рассмотрение вводят цилиндрическое фазовое пространство. На поверхности фазового цилиидра изображение фазовых траекторий показано на рис. 16.

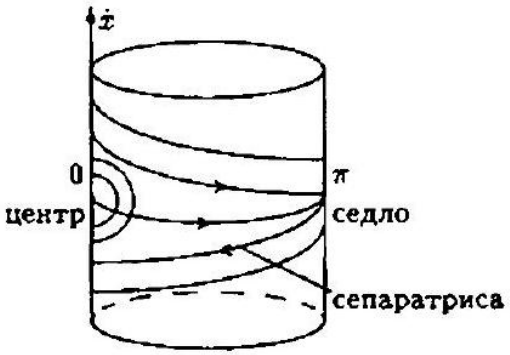


Рис. 16

Кривые, лежащие внутри сепаратрис, замкнуты и охватывают центр. Кривые вне сепаратрис тоже замкнуты, но они охватывают цилиндр и описывают новый тип движений, обусловленных вращением.

Итак, фазовым пространством маятника естественно считать не плоскость, а цилиндр. Наворачивая на цилиндр нарисованную картину на плоскости ($x, \dot{x}$), получим фазовые кривые маятника на поверхности цилиндра.

Замечание. Структура предельных множеств траекторий автономной системы (1) при $n \geq 3$ окончательно не изучена до сих пор. Более того, при $n \geq 3$ не изучены даже все типы аттракторов. Однако при $n \geq 3$ теперь известно, что кроме регулярных аттракторов в виде положений равновесия, предельных циклов или p-мерных торов, существуют еще так называемые странные аттракторы. Они представляют собой притятивающие ограниченные предельные множества траекторий сложной структуры. Фазовые траектории представляются здесь в виде бесконечной нигде не пересекающейся линии, причем при $t \to +\infty$ траектории не покидают замкнутой области и не притягиваются к регулярным аттракторам. Странные аттракторы при $n \leq 2$ не существуют. При $n \geq 3$ имеется принципиальное различие между регулярными и странными аттракторами. Регулярные аттракторы характеризуются устойчивостью фазовых траекторий и по Ляпунову и по Пуассону (определение устойчивости по

Ляпунову см. в следующем § 4, а определение устойчивости по Пуассону см. в [33]). Для странных аттракторов устойчивость по Пуассону траекторий всегда сопровождается экспоненциальной неустойчивостью траекторий по Ляпунову.

Если в теории нелинейных колебаний аттрактору типа предельного цикла соответствует периодическое движение, а атграктору типа p-мерного тора соответствуют квазипериодические колебания, то странному аттрактору соответствует режим хаотических автоколебаний. Для описания хаотических автоколебаний используются термины «детерминированный хаос», здинамическая стохастичность» и подобные.

Рассмотрим теперь уравнение первого порядка в симметричной форме

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{6}$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ - заданные непрерывно дифференцируемые функции в области Ω декартовой плоскости $R^2_{(x,y)}$, и две автономные системы

$$\begin{cases} \dot{x} = Q(x,y), \\ \dot{y} = -P(x,y), \end{cases} \quad (7) \qquad \begin{cases} \dot{x} = -Q(x,y), \\ \dot{y} = P(x,y). \end{cases} \tag{8}$$

Особой точкой уравнения (6) называется точка $(x_0, y_0) \in \Omega$, для которой $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$. Таким образом, особая точка уравнения (1) совпадает с положением равновесия систем (7) и (8). Интегральные кривые уравнения (6), если на них брать направление движения, совпадают с траекториями автономной системы (7) или (8). Направления движения при $t \to +\infty$ по траекториям систем (7) и (8) противоположны, но сами траектории, как кривые, систем (7) и (8) совпадают.

Таким образом, уравнение (6) можно изучать в рамках автономных систем (1). В частности, для уравнения (6) справедлива теорема о выпрямлении интегральных кривых в окрестности обыкновенной точки, классификация особых точек (6) аналогична классификации положений равновесия (7) и (8), имеет место теорема о качественной эквивалентности в окрестности особой точки уравнения (6) и его линеаризации.

В автономную систему уравнений часто входят некоторые параметры. Например, в уравнении гармонических колебаний с учетом силы сопротивления материальной точки массы m

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$$

числа m, r, k - параметры, в уравнении Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + \varepsilon\left(x^2 - 1\right)\dot{x} + x = 0$$

параметром является $\varepsilon > 0$. Исследование автономных систем с параметрами является более сложной задачей, чем исследование автономных систем (1), прежде всего потому, что при изменении параметров может меняться качественное поведение фазового портрета. Если при некотором

значении параметра меняется качественное поведение фазового портрета, то говорят, что при этом значении параметра имеет место бифуркация автономной системы.

Пример 5. Найти различные качественные типы фазовых портретов при $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ для системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda x_1 - x_2 - x_1 \cdot |x|^2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + \lambda x_2 - x_2 \cdot |x|^2. \end{cases}$$

Δ В полярных координатах r, φ, где

$$x(t) = r(t)\cos\varphi(t), \quad y(t) = r(t)\sin\varphi(t),$$

заданная система примет вид

$$\begin{cases} \dot{r} = r\left(\lambda - r^2\right), \\ \dot{\varphi} = 1. \end{cases}$$

Отсюда при любом $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ решениями являются $\varphi = t + c_1$ и $r = 0$. При $\lambda \neq 0$ решениями являются $t + c_2 = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{r}{\sqrt{|r^2-\lambda|}}$, при $\lambda > 0$ решением являются $r = \sqrt{\lambda}$, а при $\lambda = 0$ решением является $t + c_2 = \frac{1}{2}r^{-2}$.

При $\lambda \leq 0$ получаем, что $\dot{r} < 0$ при $r \neq 0$ и $\dot{r} = 0$ при $r = 0$. Таким образом, при $\lambda \leq 0$ все фазовые портреты - это закручивающиеся вокруг начала координат спирали, т.е. $r = 0$ - устойчивый фокус. При $\lambda > 0$ начало координат - неустойчивый фокус, так как $\dot{r} > 0$ при $0 < r < \sqrt{\lambda}$. При $r > \sqrt{\lambda}\dot{r} < 0$. Следовательно, $r = \sqrt{\lambda}$ является устойчивым предельным циклом, так как траектории закручиваются вокруг него с обеих сторон.

Таким образом, заданная система имеет точку бифуркации при $\lambda = 0$. Заметим, что собственные значения линеаризации заданной системы в начале координат равны $\lambda \pm i$ и становятся чисто мнимыми при критическом значении $\lambda = 0$.

Пример 6. Исследовать при $|\varepsilon| < 1$ фазовый портрет уравнения

$$\ddot{x} - \varepsilon\dot{x}\left(1 - x^2 - \dot{x}^2\right) + x = 0.$$

$\triangle$ Перейдем к системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \varepsilon y\left(1 - x^2 - y^2\right). \end{cases}$$

При $\varepsilon = 0$ начало координат является центром, а при $\varepsilon \in (0, 1)$ начало координат - неустойчивый фокус для линеаризованной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \varepsilon y, \end{cases}$$

так как $\lambda = \frac{\varepsilon}{2} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} - 1}$ - комплексные числа. Аналогично, при $\varepsilon < 0$ начало координат- устойчивый фокус. Перейдя в исходной системе к полярным координатам r, φ, получаем

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r\left(1 - r^2\right)\sin^2\varphi \\ \dot{\varphi} = -1 + \varepsilon r\left(1 - r^2\right)\sin\varphi\cos\varphi_1 \end{cases}$$

При $\varepsilon > 0$ отсюда $r = 0$ дает начало координат и $r = 1$ дает окружность, являющуюся предельным циклом, поскольку при $0 < r < 1$ получаем $\dot{r} > 0, \dot{\varphi} < 0$, а при $r > 1$ получаем $\dot{r} < 0$ и $\dot{\varphi} < 0$ при $r < \sqrt{2}$. При $\varepsilon < 0$ картина аналогичная, меняется лиць направление движения но траекториям. Таким образом, $\varepsilon = 0$ является точкой бифуркации заданного уравнения.

13.7.4 § 4. Lyapunov stability of equilibrium positions

Как уже говорилось в § 3, в случае, когда линеаризация автономной системы является сложной системой, то по ней нельзя классифицировать положения равновесия нелинейной автономной системы. Приведенные ниже определения устойчивости положения равновесия автономной системы позволяют дать грубую классификацию качественного поведения траекторий в окрестности положения равновесия для произвольных автономных систем.

Пусть задана автономная система

$$\dot{x}(t) = f(x), \tag{1}$$

где $t \in R_x^1$ и $f(x)$ - заданная непрерывно дифференцируемая векторфункция с n компонентами в некоторой области Ω евклидова пространства R_x^n.

Зададим начальное условие

$$x(0) = x_0 \in \Omega \tag{2}$$

и обозначим решение задачи Коши (1), (2) через $x(t, x_0)$. Пусть $a \in \Omega$ является положением равновесия системы (1). Без ограничения общности можно считать $a = 0$, поскольку в случае $a \neq 0$ заменой $x - a = y$ в (1) можно получить автономную систему, для которой уже $y = 0$ положение равновесия.

Итак, пусть $x = 0 \in \Omega$ является положением равновесия (1). В дальнейшем считаем, что $\exists r > 0$ такое, что при $\forall x_0 \in \Omega, |x_0| < r$, решение $x(t, x_0)$ (1), (2) определено для всех $t > 0$. (Достаточные условия для этого см. в теореме 1 § 1 и в замечании к этой теореме.)

Definition

Положение равновесия $x = 0$ автономной системы (1) называется устойчивым по Ляпунову, если для $\forall \varepsilon > 0$ найдется $0 < \delta =$
$\delta(\varepsilon) < r$ такое, что из $|x_0| < \delta$ следует $|x(t, x_0)| < \varepsilon$ для всех $t > 0$. В противном случае положение равновесия $x = 0$ называется неустойчивым положением равновесия системы (1).

Устойчивое по Ляпунову положение равновесия $x = 0$ системы (1) в случае $n = 2$ можно проиллюстрировать на рис. 17.

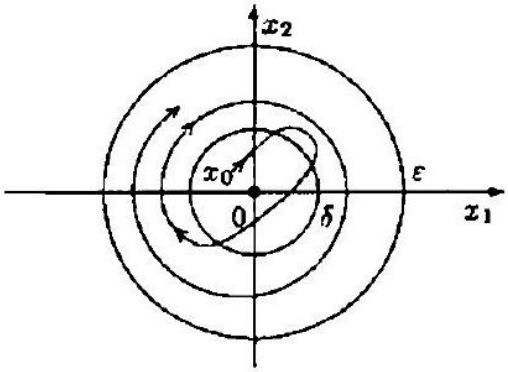


Рис. 17

Любая траектория (1), начинающаяся в $\delta(\varepsilon)$-окрестности точки O, остается в наперед заданной ε-окрестности точки O при всех $t > 0$.

Definition

Устойчивое по Ляпунову положение равновесия $x = 0$ системы (1) называется асимптотически устойчивым, если $\exists r_1$, такое, что $0 < r_1 \leq r$ и $\lim_{t \to +\infty} x(t, x_0) = 0$ при $|x_0| < r_1$. Асимптотическая устойчивость $x = 0$ геометрически означает, что любая траектория (1), начинающаяся в некоторой окрестности $x = 0$, при $t \to +\infty$ стремится к $x = 0$.

Если рассмотреть простую линейную однородную систему при $n = 2 \dot{x} = Ax$ (см. § 2), то непосредственно из определений следует, что устойчивые узел, фокус, дикритический узел и вырожденный узел являются асимптотически устоичивыми положениями равновесия. Центр является устойчивым по Ляпунову, но не асимптотически устойчивым положением равновесия. Наконец, седло и неустойчивые узел, дикритический узел, вырожденный узел, фокус являются неустойчивыми положениями равновесия автономной линейной системы на плоскости.

Отметим важность для практики понятия устойчивости по Ляпунову. Если задача Коши (1), (2) моделирует некоторый реальный процесс, то ее репение $x(t, x_0)$ пригодно цли практики только в случае непрерывной зависимости решения $x(t, x_0)$ от начального

условия (2) для бесконечного промежутка изменения t, т.е. в случае устойчивости по Ляпунову. Если бы нас интересовал лишь малый промежуток $[0, T]$ времени t, то теорема о непрерывной зависимости решения задачи Коши (1), (2) (см. главу 4) гарантирует малое изменение решения $x(t, x_0)$ при малом изменении x_0. Для полуоси $t > 0$ пепрерывной зависимости $x(t, x_0)$ от x_0 может уже и не быть, в чем легко убедиться на примере уравнения $\dot{x} = x$.

В дальнейшем будут указаны достаточные условия, обеспечивающие устойчивость по Ляпунову попожений равновесия (1). Теория устойчивости была создана трудами многих математиков, но особенно важные результаты этой теории были получены известным русским ученым А.М.Ляпуновым. В его честь и введен термин «устойчивое по Ляпунову» положение равновесия.

Замечание. Введенные определения характеризуют типы устойчивости тривиального решения $x = 0$ автономной системы.

Совершенно аналогично, для решения $x = \varphi(t)$ неавтономной системы

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{3}$$

можно ввести понятие устойчивого по Ляпунову решения $x = \varphi(t)$ системы (3), асимптотически устойчивого решения и неустойчивого решения. Вопрос об исследовании устоичивости решения $x = \varphi(t)$ системы (1) путем замены $x = y + \varphi(t)$ сводится к исследованию тривиального решения $y = 0$ некоторой другой системы, получаемой из (3).

Кроме введенного понятия устойчивости относительно начального значения x_0, можно ввести аналогичным образом понятие устойчивости положения равновесия относительно параметра λ для автономных систем с параметром

$$\dot{x}(t) = f(x, \lambda).$$

Исследуем теперь устойчивость положения равновесия $x = 0$ для автономной линейной однородной системы с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \tag{4}$$

где A - заданная действительная числовая квадратная матрица порядка n. Известно, что решения системы (4) определены для всех $t \in R_t^1$. Возьмем начальное условие

$$x(0) = x_0, \tag{5}$$

где x_0-произвольный числовой n-мерный вектор. Обозначим через $x(t, x_0)$ решение задачи Коши (4), (5), а через $\lambda_1, ..., \lambda_m, 1 \leq m \leq n$,собственные значения матрицы A.

Theorem 1

Если $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$ для всех $k = \overline{1, m}$, то положение равновесия $x = 0$ системы (4) асчмптотически устойчиво.

Proof

Если $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$ для всех $k = \overline{1, m}$, то $\exists \mu > 0$ такое, что $\operatorname{Re} \lambda_k < -2\mu < 0$. Решение задачи Коши (4), (5) имеет вид (см. главу 3):

$$x(t, x_0) = e^{tA} \cdot x_0$$

Покажем, что $\exists M > 0$ такое, что норма матричной экспоненты

$$\left\|e^{tA}\right\| \leq Me^{-\mu t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Каждый элемент $a_{ij}(t)$ матрицы e^{tA} является конечной суммой квазимногочленов:

$$a_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{m} P_k^{(i,j)}(t)e^{\lambda_k t}, \quad i,j = \overline{1,n},$$

где $P_k^{(i,j)}(t)$ - многочлены. Всегда найдется такое число $c_{ij} > 0$, что для всех $k = \overline{1,m}$

$$\left|P_k^{(i,j)}(t)e^{\lambda_k t}\right| \leq c_{ij}e^{-\mu t}, \quad \forall t > 0.$$

Тогда

$$|x(t,x_0)| \leq \left\|e^{tA}\right\| \cdot |x_0| = |x_0| \cdot \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}(t)|^2} \leq$$

$$\leq |x_0| \cdot e^{-\mu t} \cdot m\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |c_{ij}|^2} = Me^{-\mu t} \cdot |x_0|.$$

Из этой оценки видно, что $x(t,x_0) \to 0$ при $t \to +\infty$. Кроме того, $x = 0-$ устойчивое по Ляпунову положение равновесия (4), так как при $\forall \varepsilon > 0$, взяв $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{M}$, из полученной выше оценки при $|x_0| < \delta$ получаем, что $|x(t,x_0)| \leq M\delta = \varepsilon$.

Theorem 2

Если $\operatorname{Re}\lambda_k \leq 0$ для всех $k = \overline{1,\pi n}$ и для каждого собственного значения λ с $\operatorname{Re}\lambda = 0$ число линейно независимых собственных векторов равно кратности λ, то $x = 0$ - устойчивое по Ляпунову положение равновесия (4).

При условиях теоремы каждое решение задачи Коши (4), (5) задается формулой

$$x(t,x_0) = e^{tA} \cdot x_0,$$

где злементы $a_{ij}(t)$ матрицы e^{tA} имеют вид

$$a_{ij}(t) = \sum_{\operatorname{Re}\lambda<0} P_\lambda^{(i,j)}(t)e^{\lambda t} + \sum_{\operatorname{Re}\lambda=0} c_\lambda e^{\lambda t}.$$

В этой записи: $P_\lambda^{(i,j)}(t)$ - многочлены t, суммирование в первой сумме ведется по всем $\lambda \operatorname{Re}\lambda < 0, c_\lambda$ - числа, выражающиеся через компоненты x_0, суммирование во второй сумме ведется по всем λ с $\operatorname{Re}\lambda = 0$. Учитывая это обстоятельство и действуя как при доказательстве теоремы 1 , получаем оценку при всех $t > 0$:

$$|x(t,x_0)| \leq \left\|e^{tA}\right\| \cdot |x_0| \leq M \cdot |x_0|.$$

Из этой оценки следует устойчивость по Ляпунову $x = 0$. $\square$

Theorem 3

Если существует хотя бы одно собственное значение λ матрицы A с $\operatorname{Re}\lambda > 0$ или если все собственные значения λ матрицы A имеют $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ и хотя бы для одного λ с $\operatorname{Re}\lambda = 0$ число линейно независимых

собственных векторов меньше кратности λ, то $x = 0$ является неустойчивым положением равновесия системы (4).

Proof.

Пусть существует $\lambda = \mu + i\nu$ с $\operatorname{Re}\lambda = \mu > 0$. Тогда решения (4), (5)

$$x\left(t, x_0\right) = e^{\mu t}\left(h_1 \cos \nu t + h_2 \sin \nu t\right), \quad h_1 = x_0,$$

где $h = h_1 + ih_2-$ собственный вектор для λ, при $t = t_k$ и $\sin \nu t_k = 0$, получаем, что

$$\mid x\left(t_k\right), x_0) \Big| = e^{\mu t_k} \Big| x_0 \mid \to +\infty, \quad t_k \to +\infty,$$

хотя при $t = 0$ и малом $|x_0|$ это решение близко к $x = 0$.
Если же $\operatorname{Re}\lambda = 0$, то при условиях теоремы существует решение (4), (5) вида

$$x\left(t, x_0\right) = e^{\lambda t}\left(h_1 + \frac{t}{1!}h_2 + \cdots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}h_k\right), \quad h_1 = x_0$$

где $h_1, ..., h_k$ - жорданова цепочка длины k для λ, причем $k \geq 2$. Отсюда ясно, что $|x\left(t, x_0\right)| \to +\infty$ при $t \to +\infty$, хотя при $t = 0$ и малых $|x_0|$ это решение близко к $x = 0$. $\square$

Теоремы 1-3 полностью исчерпывают описание типов устойчивости для системы (4). Из них, в частности, следуют все ранее полученные результаты об устойчивости $x = 0$ для системы (4) в случае $n = 2$. Из доказанных теорем следует корректность задачи Коши (3), (4) при $t > 0$ в том случае, когда $x = 0$ - устойчивое по Ляпунову положение равновесия, и ее некорректность при $t > 0$, если $x = 0$ - неустойчивое положение равновесия.

Пусть система (1) является нелинейной и пусть $x = 0$ является ее положением равновесия. Разложим $f(x)$ в окрестности $x = 0$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x) = Ax + o(|x|),$$

где матрица

$$A = \left\| \frac{\partial f_i(0)}{\partial x_j} \right\|, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad o(|x|) \to 0, \quad |x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \to 0.$$

Теорема 4 (теорема Ляпунова). Если все собственные значения матрицы A имеют отрицательные действительные части, то $x = 0$ является асимптотически устойчивым положением равновесия нелинейной системы (1).

Proof.

В окрестности $x = 0$ систему (1) можно записать в виде

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + r(x),$$

где $r(x) = o(|x|)$ при $|x| \to 0$. Решение задачи Коши (1), (2) в силу предположения в некоторой окрестности $x = 0$ определено при $\forall t > 0$. Его можно записать в виде

$$x(t) = e^{tA} \cdot x_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A} \cdot r[x(\tau)] d\tau$$

Из доказательства теоремы 1 при условиях теоремы 4 следует, что найдутся такие числа $M > 0, \mu > 0$, что при всех $t > 0$ норма

$$\left\| e^{tA} \right\| \leq M e^{-\mu t}.$$

Так как $r(x) = o(|x|)$ при $|x| \to 0$, то для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из $|x| < \delta$ следует $|r(x)| \le \varepsilon |x|$. Тогда при всех $t > 0$

$$|x(t)| \le \left|e^{tA} \cdot x_0\right| + \int_0^t \left|e^{(t-\tau)A} \cdot r[x(\tau)]\right| d\tau \le$$
$$\le \left\|e^{tA}\right\| \cdot |x_0| + \int_0^t \left\|e^{(t-\tau)A}\right\| \cdot |r[x(\tau)]| d\tau \le$$
$$\le M e^{-\mu t} \cdot |x_0| + \varepsilon M \int_0^t e^{-\mu(t-\tau)} |x(\tau)| d\tau$$

Если положить $u(t) = e^{\mu t}|x(t)|$, то отсюда находим, что

$$u(t) \le M\,|x_0| + \varepsilon M \int_0^t u(\tau) d\tau$$

Функция $u(t)$ удовлетворяет условиям леммы Гронуолла. Из леммы Гронуолла следует, что при всех $t > 0$

$$u(t) \le M\,|x_0|\, e^{\epsilon M t}.$$

Заменяя $u(t)$ на $e^{\mu t}|x(t)|$, получаем для $\forall t > 0$ оценку

$$|x(t)| \le M\,|x_0|\, e^{-(\mu - \varepsilon M)t}.$$

Из полученной оценки следует, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$x(t) \to 0, \quad t \to +\infty,$$

если фиксировать $\varepsilon > 0$, положив, например, $\varepsilon = \frac{\mu}{2M}$. Кроме того, по выбранному $\varepsilon = \frac{\mu}{2M}$, взяв $\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{M}$, из оценки получаем, что $|x(t)| < \varepsilon$ при $|x_0| < \delta$ для всех $t > 0$. $\square$

Замечание. Если $\operatorname{Re}\lambda > 0$ хотя бы для одного собственного значения λ матрицы A, то можно доказать, что $x = 0$ является неустойчивым положением равновесия автономной системы (1).

Definition

Автономная линейная система (4) с матрицей $A = \left\|\frac{\partial f_i(0,0)}{\partial x_j}\right\|$ называется линеаризацией нелинейной системы (1) в точке $x = 0$.

Из теоремы Ляпунова и замечания к ней следует, что в том случае, когда все собственные значения λ матрицы A имеют $\operatorname{Re}\lambda < 0$ или когда существует λ с $\operatorname{Re}\lambda > 0$, тип устойчивости $x = 0$ для системы (1) определяется типом устойчивости $x = 0$ для линеаризации (1) в этой точке. В этом случае $x = 0$ называют грубым положением равновесия. Открытым остается случай негрубого положения равновесия $x = 0$ для (1), когда все λ имеют $\operatorname{Re}\lambda \le 0$, причем хотя бы одно λ имеет $\operatorname{Re}\lambda = 0$. Примеры в этом случае показывают, что метод линеаризации теряет свою силу, так как на тип устойчивости $x = 0$ для системы (1) существенно влияют последующие нелинейные члены разложения $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности $x = 0$. Таким примером может служить пример 2 из предыдущего параграфа, в котором $x = 0$ является центром для линеаризации, в то время как $x = 0$ является фокусом для нелинейной системы. Случаи негрубого положения равновесия системы (1) исследуются так называемым вторым методом Ляпунова. Этот метод создан А.М.Ляпуновым и основан на

применении так называемой функции Ляпунова. Преимущество этого метода в том, что он не использует явной формулы траекторий системы (1).

Определение 1. Пусть $V(x)$ - непрерывно дифференцируемая функция в области Ω. Производной $V(x)$ в силу автономной системы (1) называется скалярное произведение ($\operatorname{grad} V(x), f(x)$) и обозначается через $\dot{V}(x)$:

$$\dot{V}(x) = (\operatorname{grad} V(x), f(x)), \quad x \in \Omega.$$

Пусть $x = 0$ - положение равновесия автономной системы (1) и пусть U - некоторая окрестность $x = 0, U \subset \Omega$.

Определение 2. Функция $V(x)$, непрерывно дифференцируемая в окрестности U, называется функцией Ляпунова системы (1), если $V(x) > 0$ для всех $x \in U \mid \{0\}, V(0) = 0$, и ее производная в силу системы (1) $\dot{V}(x) \leq 0$ для всех $x \in U$.

Замечание. При выполнении условий определения 2 говорят, что в окрестности U функция $V(x)$ является положительно определенной, а функция $\dot{V}(x)$ является неположительной.

Лемма. Пусть $x \in U_1$ - некоторой окрестности $x = 0$ и пусть $U_1 \subset U$. Тогда $|x| \to 0$ в том и только том случае, когда $V(x) \to 0$.

Proof

Если $|x| \to 0$, то из определения функции Ляпунова сразу следует, что $V(x) \to 0$. Теперь наоборот, пусть $V(x) \to 0$. Покажем, что $|x| \to 0$. Предположим, что это неверно. Тогда найдутся последовательность $x_k \in U_1$ и число $\delta > 0$ такие, что $|x_k| \geq \delta$. Фиксируем такос $a > 0$, что шар $|x| \leq a$ принадлежит U_1. Положим $V_0 = \inf V(x)$ при $\delta \leq |x| \leq a$. Так как множество тех $x \in U_1$, для которых $\delta \leq |x| \leq a$, компактно, то найдется такой $\hat{x} \in U_1, \delta \leq |\hat{x}| \leq a$, что $V(\hat{x}) = V_0$. Следовательно, $v_0 > 0$ и $V(x_k) \geq V_0 > 0$. Это противоречит выбору последовательности x_k. $\square$

Theorem 5

Если в некоторой охрестности U положения равновесия $x = 0$ системы (1) существует функция Ляпунова $V(x)$, то $x = 0$ является устойчивим по Ляпунову положением равновесия автополной системы (1).

Proof

Зададимся таким $\varepsilon > 0$, чтобы шар $|x| \leq \varepsilon$ лежал в окрестности U. Положим

$$V_\varepsilon = \inf_{|x|=\varepsilon} V(x).$$

Так как $V(x)$ - положительно определенная, то $V_\varepsilon > 0$. Кроме того, найдется $0 < \delta < \varepsilon$ такое, что $V(x) < V_\varepsilon$ для всех x, у которых $|x| < \delta$. Рассмотрим любое решение $x(t, x_0)$ системы (1) при $|x_0| < \delta$ и покажем, что $|x(t, x_0)| < \varepsilon$ для всех $t > 0$, т.е. что $x = 0$ - устойчиво по Ляпунову.

Рассуждаем от противного. Пусть это не так. Тогда найдется такое $T > 0$, что $|x(T, x_0)| = \varepsilon$ и $|x(t, x_0)| < \varepsilon$ при $0 \leq t < T$. Так как $\dot{V}(x) \leq 0$ для всех $x \in U$, то $V[x(t, x_0)]$ является невозрастающей функцией $t \in [0, T]$. Поскольку $V(x_0) < V_\varepsilon$, то тем более

$$V[x(T, x_0)] \leq V(x_0) < V_\varepsilon.$$

Это противоречит выбору $T > 0$ и V_ε. Таким образом, предположение неверно и $x = 0$ устойчиво по Ляпунову. □

Замечание. В частности, теорема 5 имеет место, если $\dot{V}(x) \equiv 0$ в окрестности U. Это означает, что функция Ляпунова $V(x)$ имеет при $x = 0$ строгий минимум.

Теорема 6. Если в некоторой окрестности U положения равновесия $x = 0$ системы (1) существьует тахая функция Ляпунова $V(x)$, что $\dot{V}(x) < 0$ для всех $x \in U \mid \{0\}$ (т.е. $\dot{V}(x)$ - отрицательно определенная фупкция в U), то $x = 0$ является асимптотически устойчивым положением равновесия автономной системы (1).

Proof

Поскольку выполнены условия теоремы 5 , то $x = 0$ - устойчивое по Ляпунову положение равновесия (1). Следовательно, $\forall \varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что если только $|x_0| < \delta$, то для каждого решения $x(t, x_0)$ системы (1) при всех $t > 0\, |x(t, x_0)| < \varepsilon$.

Убедимся, что $\lim_{t \to +\infty} x(t, x_0) = 0$. В силу леммы достаточно показать, что неравенство $|x_0| < \delta$ влечет за собой $V[x(t, x_0)] \to 0$ при $t \to +\infty$. Так как $\dot{V}(x) < 0$ в U, то $V[x(t, x_0)]$ - строго убывающая функция t. Пусть $\lim_{t \to +\infty} V[x(t, x_0)] = A$. Покажем, что $A = 0$. Предположим $A > 0$. Так как $V[x(t, x_0)] \geq 0$, то в силу леммы найдется такое $\varepsilon_1 > 0$, что при $t > 0$

$$\varepsilon_1 \leq |x(t, x_0)| \leq \varepsilon_2 < \varepsilon.$$

Пусть

$$V_1 = \inf_{\varepsilon_1 \leq |x| \leq \epsilon_2} [-\dot{V}(x)].$$

Тогда $V_1 > 0$ и, так как $\dot{V}(x) \leq -V_1$, то, интегрируя это неравенство вдоль траектории от $t = 0$ до t, получаем

$$V[x(t, x_0)] - V(x_0) \leq -V_1 t.$$

Отсюда следует, что $V[x(t, x_0)] \to -\infty$ при $t \to +\infty$. А это противоречит тому, что $V[x(t, x_0)] \geq 0$. Полученное противоречие доказывает теорему. □

Недостаток второго метода Ляпунова в том, что не существует общего конструктивного способа построения функции Ляпунова $V(x)$ для произвольной автономной системы (1). Тем не менее для ряда важных классов систем (1) такое построение возможно. В простейших случаях функцию $V(x)$ можно искать в виде линейной комбинации с положительными коэффициентами четных степеней $x_1, x_2, ..., x_n$, в частности, в виде положительно определенной квадратичной формы.

Example 1.

Исследовать устойчивость положения равновесия (0,0) для системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_1^3, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2^3. \end{cases}$$

Д Для линеаризации этой системы в начале координат получаем, что $(0, 0)$ - центр. Следовательно, применить теорему 4 нельзя к заданной системе. Но для этой системы в качестве функции Ляпунова можно взять

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2,$$

поскольку при $|x| > 0$ $V(x_1, x_2) > 0, \dot{V}(x_1, x_2) = -2x_1^4 - 2x_2^4 < 0$ и $V(0,0) = \dot{V}(0,0) = 0$. Поэтому, по теореме 6 начало координатасимптотически устойчивое положение равновесия заданной автономной системы. □

Example 2.

Исследовать устойчивость положения равновесия (0,0) для системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3, \\ \dot{x}_2 = -x_1^2\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right). \end{cases}$$

Д Матрица линеаризации этой системы в начале координат является нулевой и поэтому теорему 4 применить нельзя. Если же в качестве функции Ляпунова взять функцию $V(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$, то $\dot{V}(x_1, x_2) = -2x_1^2(x_1 + x_2)^2 \leq 0$. Следовательно, начало координат для заданной системы является устойчивым по Ляпунову положением равновесия.

Переходим к рассмотрению достаточных условий неустойчивости положения равновесия $x = 0$ для системы (1).

Теорема 7. Пусть в охрестности U положения равновесия $x = 0$ системы (1) существует такая непрерывно дифференцирусмая функция $V(x)$, что $V(0) = 0$ и $\dot{V}(x)$ - положительно определенная функция. Если существует число $A > 0$ ч тахая подобласть U_0 окрестности U, что $V(x) \geq A$ для всех $x \in U_0$, то $x = 0$ является неустойчивым положением равновесия.

$\rightarrow$ Будем рассматривать решения $x(t, x_0)$ системы (1) с начальным значением $x_0 \in U_0$. Если предположить, что $x = 0$ - устойчивое по Ляпунову положение равновесия, то для $\forall\varepsilon > 0 \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех $t > 0$ $|x(t, x_0)| < \varepsilon$, если только $|x_0| < \delta$. Возьмем $x_0 \in U_0$ такое, что $V(x_0) = A$. Так как $\dot{V}(x) > 0$ для $x \neq 0$, то $V[x(t, x_0)] > A$ для достаточно малых $t > 0$. Убедимся, что $V[x(t, x_0)] > A$ для всех $t > 0$. Допустим противное, что $\exists t_1 > 0$ такое, что $V[x(t_1, x_0)] = A$. Тогда, с одной стороны,

$$V[x(t_1, x_0)] - V(x_0) = 0$$

а с другой стороны, по теореме о среднем $\exists\hat{t} \in [0, t_1]$, что

$$V[x(t_1, x_0)] - V(x_0) = \dot{V}\left[x\left(\hat{t}, x_0\right)\right] \cdot t_1 \geq Bt_1 > 0$$

для некоторого $B > 0$ в силу положительной определенности $\dot{V}(x)$. Противоречие приводит к выводу, что $V[x(t, x_0)] > A$ для всех $t > 0$. Но тогда для всех $t > 0$

$$V[x(t, x_0)] - V(x_0) = \dot{V}[x(t^*, x_0)] \cdot t \geq Bt.$$

Отсюда следует, что $V[x(t, x_0)] \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$. Это противоречит ограниченности $V[x(t, x_0)]$, которая получается из предположения об устойчивости по Ляпунову $x = 0$. □

Example 3.

Исследовать устойчивость начала координат для системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^3 + x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2^3. \end{cases}$$

△ Так как в качестве функции $V(x_1, x_2)$ можно взять $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, поскольку $\dot{V}(x_1, x_2) = 2(x_1^4 + x_2^4) > 0$ при $|x| > 0$, то $(0,0)-$ неустойчивое положение равновесия системы. Отметим, что к задапной системе нельзя применить замечание к теореме 4 .

Замечание. Для неавтономных систем надлежащим образом можно модифицировать определение функции Ляпунова и доказать аналоги теорем 5-7.

13.7.5 § 5. First integrals

Пусть в области $\Omega \leq R_x^n$ задана автономная система

$$\dot{x}(t) = f(x) \tag{1}$$

где $t \in R_t^1, f(x)$ - заданная действительная непрерывно дифференцируемая в области Ω вектор-функция с n компонентами $f_1(x), ..., f_n(x)$. Пусть $x = \varphi(t)$ - решение системы (1) при $t \in \mathcal{I}$, где $\mathcal{I}$ - промежуток оси R_t^1.

Definition

Непрерывно дифференцируемая в области Ω функция $u(x)$ называется первым интегралом автономной системы (1), если $u[\varphi(t)] \equiv \text{const}$ для каждого решения $x = \varphi(t), t \in \mathcal{I}$, системы (1).

Постоянная в этом определении зависит от решения (1) и ее нетрудно найти. Если решение $x = \varphi(t)$ определяется начальными данными ($0, x_0$), т. е.

$$\varphi(0) = x_0 \in \Omega,$$

то, очевидно,

$$u[\varphi(t)] \equiv u[\varphi(0)] = u\left(x_0\right)$$

Таким образом, значение $u[\varphi(t)]$ зависит лишь от выбора траектории системы (1) и не зависит от переменной t.

Тривиальным примером первого интеграла системы (1) служит функция $u(x) = \text{const}$. Для получения нетривиальных примеров первых интегралов (1) необходимо иметь критерий первого интеграла (1). Чтобы его сформулировать, напомним понятие производной функции $u(x)$ в силу системы (1), которое уже было введено в § 4.

Definition

Пусть $u(x)$ - непрерывно дифференцируемая функция в области Ω. Производной $u(x)$ в силу автономной системы (или производ-

ной $u(x)$ по направлению векторного поля $f(x)$) называется скалярное произведение $(f(x), \operatorname{grad} u(x))$ и обозначается через $\dot{u}(x)$:

$$\dot{u}(x) = (f(x), \operatorname{grad} u(x)) = \sum_{j=1}^{\pi} f_j(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

Замечание. Производная $\dot{u}(x)$ является обобщением понятия производной функции $u(x)$ по постоянному направлению $l, |l| = 1$, на случай переменного векторного поля $f(x)$ и характеризует монотонность изменения $u(x)$ вдоль фазовой траектории (1).

Theorem 1

Непрерывно дифференцируемая в Ω функция $u(x)$ является первым интегралом системы (1) в том и только в том случае, коада $\dot{u}(x) = 0$ для всех $x \in \Omega$.

Proof

Пусть $x = \varphi(t), t \in \mathcal{I}$, некоторое решение (1) и пусть $v(t) = u[\varphi(t)]$, $t \in \mathcal{I}$. Тогда по правилу дифференцирования сложной функции получаем, что для всех $t \in \mathcal{I}$

$$\dot{v}(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u[\varphi(t)]}{\partial x_j} \cdot \dot{\varphi}_j(t) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} = \dot{u}(x).$$

Если $u(x)$ - первый интеграл (1), то по определению $v(t) \equiv \text{const}$ для каждой траектории $x = \varphi(t)$ в Ω. В силу предыдущего равенства тождество $v(t) \equiv \text{const}$ эквивалентно условию, что $\dot{u}(x) = 0$ для каждого $x = \varphi(t)$, $t \in \mathcal{I}$ в Ω. Так как по теореме существования и единственности решения задачи Коши для (1) через каждую точку $x \in \Omega$ проходит некоторая траектория (1), то $\dot{u}(x) = 0, \forall x \in \Omega$. Наоборот, если $\dot{u}(x) = 0$ в Ω, то $\dot{v}(t) = 0$ и, значит, $u(x)$ - первый интеграл (1). $\square$

Example 1.

Найти первый интеграл системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_1^3. \end{cases}$$

$\triangle$ Перемножив крест накрест уравнения системы, получим

$$\left(-x_1 + x_1^3\right) \dot{x}_1 = x_2 \dot{x}_2.$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt}\left(x_1^2 - \frac{1}{2}x_1^4 + x_2^2\right) = 0$$

LU

$$x_1^2 - \frac{1}{2}x_1^4 + x_2^2 = c.$$

В силу теоремы $1 u\left(x_1, x_2\right) = x_1^2 - \frac{1}{2}x_1^4 + x_2^2$ является первым интегралом заданной автономной системы, так как $\dot{u}\left(x_1, x_2\right) = 0$. $\square$

Самое простое применение первого интеграла $u(x)$ системы (1) основано на связи, существующей между поверхностями уровня $u(x)$ (поверхности уровня функции $u(x)$ определяются уравнениями $u(x) = \text{const}$) и траекториями системы (1). Из определения первого интеграла следует, что каждая из траекторий $x = \varphi(t)$ системы (1) в области Ω расположена на одной из поверхностей уровня первого интеграла $u(x)$. В случае $n = 2$ вместо поверхностей уровня речь идет о линиях уровня первого интеграла $u(x)$ системы (1). Для практических приложений важен обратный вопрос, будет ли всякая линия уровня первого интеграла (1) при $n = 2$ траекторией (1) или ее частью. Нетрудно видеть, что ответ на зтот вопрос в общем случае отрицательный. В самом деле, линия уровня может быть не гладкой кривой, может распадаться на несколько отдельных не связных между собой кривых, может содержать в себе положения равновесия (1). Все это невозможно для траектории (1). Однако, если кривая γ - гладкая, не содержит в себе положений равновесия и является частью или всей линией уровня первого интеграла $u(x)$ системы (1) при $n = 2$, то γ-траектория или ее часть системы (1). Действительно, если кривая γ задается уравнением $F\left(x_1, x_2\right) = 0$, то $\operatorname{grad} F\left(x_1, x_2\right) \neq 0$ для точек γ. Так как $u\left(x_1, x_2\right)$ - первый интеграл (1), то $\dot{u}\left(x_1, x_2\right) = 0$. Значит, вектор $f\left(x_1, x_2\right) \perp \operatorname{grad} u\left(x_1, x_2\right)$.

Поскольку на γ нет положений равновесия, то $f(x_1, x_2) \neq 0$ в точках γ. Значит, $f(x_1, x_2)$ является касательным вектором к γ. А это и означает, что γ является либо траекторией, либо ее частью.

Таким образом, с помощью линий уровня первого интеграла системы (1) при $n = 2$ в ряде случаев можно получить глобальный фазовый портрет системы (1). Например, это можно сделать для системы примера 1, для линеаризации которой начало координат является центром. Рассмотрение первых интегралов - это один из основных методов нахождения фазового портрета автономной нелинейной системы (1) при $n = 2$ в том случае, когда ее линеаризация имеет центр или является сложной системой.

Заметим теперь, что при гладкой обратимой замене переменных $x = g(y)$ в области Ω автономная система (1) перейдет в автономную в области $\tilde{\Omega}$ систему вида

$$\dot{y}(t) = f_1(y) \equiv [g'(y)]^{-1} \cdot [g(y)], \tag{2}$$

где $g'(y) = \left\| \frac{\partial g_1(y)}{\partial y_j} \right\|, i, j = \overline{1, n}, -$ матрица Якоби.
Система уравнений (2) следует из системы уравнений

$$\dot{x} \equiv g'(y) \cdot \dot{y} = f[g(y)],$$

которую можно разрешить относительно $\dot{y}$, поскольку для гладкой замены якобиан

$$\det g'(y) = \frac{\partial (g_1, ..., g_n)}{\partial (y_1, ..., y_n)} \neq 0, \quad y \in \tilde{\Omega}.$$

Теперь посмотрим, как связаны первые интегралы систем (1) и (2).

Theorem 2

Непрерывно дифференцируемая в области Ω функция $u(x)$ является первым интегралом системы (1) тогда и только тогда, когда фужиция $V(y) = u[g(y)]$ - первый интеграл системы (2) в области $\tilde{\Omega}$.

Proof

Достаточно установить, что при гладкой обратимой замене $x = g(y)$ производная в силу системы инвариантна, т.е. $\dot{u}(x) = \dot{v}(y)$ при $x = g(y)$, поскольку тогда из теоремы 1 получаем, что $\dot{u}(x) = 0$ в том и только том случае, когда $\dot{v}(y) = 0$. Пусть $[g'(y)]^T$ - транспонированная матрица к матрице Якоби. При гладкой замене $x = g(y)$ находим, что

$$\begin{aligned}
\dot{v}(y) &= (\operatorname{grad} v(y), f_1(y)) = \\
&= \Big([g'(y)]^T \cdot \operatorname{grad} u[g(y)], [g'(y)]^{-1} \cdot f[g(y)] \Big) = \\
&= \Big(\operatorname{grad} u[g(y)], [g'(y)] \cdot [g'(y)]^{-1} \cdot f[g(y)] \Big) = \\
&= (\operatorname{grad} u(x), f(x)) = \dot{u}(x).
\end{aligned}$$

□

Заметим теперь, что если существует какой-либо нетривиальный первый интеграл $u(x)$ системы (1), а $\Phi(\zeta)$ - произвольная непрерывно дифференцируемая функция, для которых имеет смысл композиция $\Phi[u(x)]$, то $v(x) = \Phi[u(x)]$ также является нетривиальным первым интегралом системы (1), поскольку для каждой траектории $x = \varphi(t), t \in \mathcal{I}$ системы (1) получаем:

$$v[\varphi(t)] = \Phi[u\{\varphi(t)\}] = \Phi[c] = c_1, \quad \forall t \in \mathcal{I}$$

Итак, в общем случае для системы (1) существует бесконечное множество нетривиальных первых интегралов. Поэтому возникает вопрос о выделении так называемых независимых первых интегралов (1), с помощью которых можно описать все множество первых интегралов (1).

Definition

Первые интегралы $u_1(x), ..., u_k(x), 1 \leq k \leq n$, автономной системы (1), определенные в некоторой окрестности $a \in \Omega$, называются независимыми в точке $a \in \Omega$, если ранг матрицы Якоби $u'(a) = \left\| \frac{\partial u_i(a)}{\partial x_j} \right\|, i = \overline{1,k}, j = \overline{1,n}$, равен k.

Например, первые интегралы (1) $u_1(x) \equiv \text{const}$, $u_2(x), ..., u_k(x)$ ве являются независимыми в любой точке $a \in \Omega$. В то же время $u_1(x) = x_1, ..., u_{n-1}(x) = x_{n-1}$ являются независимыми первыми интегралами в каждой точке пространства R_x^n для автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_i = 0, & i = \overline{1, n-1}, \\ \dot{x}_n = 1. \end{cases}$$

Следующая теорема дает достаточные условия существования ($n-1$) независимых первых интегралов и описывает структуру любого первого интеграла автономиой системы (1).

Theorem 3

Пусть точка $a \in \Omega$ не является положением равновесия автопомной системы (1). Тогда в нехоторой охрестности $\Omega_a \subset \Omega$ точки a существуют $(n-1)$ независимые в точхе a первые интеграль $u_1(x), ..., u_{n-1}(x)$ системы (1). Кроме того, если $u(x)$ - какой-либо первый интеграл (1) в окрестности Ω_a, то найдется такая непрерывно дифференцируемая функиия $F(\zeta_1, ..., \zeta_{n-1})$, что $u(x) = F[u_1(x), ..., u_{n-1}(x)]$, $\forall x \in \Omega_a$.

Так как $a \in G$ - не положение равновесия (1), то по теореме о выпрямлении траекторий для системы (1) найдутся окрестность Ω_a точки a и гладкая обратимая замена переменных в ней $x = g(y)$ такие, что система (1) примет вид

$$\begin{cases} \dot{y}_i = 0, & i = \overline{1, n-1}, \\ \dot{y}_n = 1. \end{cases} \tag{3}$$

Поскольку при такой замене траектории системы (3) задаются уравнениями $y_i = c_i, i = \overline{1, n-1}, y_n = t$, то, очевидно, функции $v_1(y) = y_1, ..., v_{n-1}(y) = y_{n-1}$ - независимые первые интегралы новой системы (3). По теореме 2 функции $u_1(x) = g_1^{-1}(x), ..., u_{n-1}(x) = g_{n-1}^{-1}(x)$ - первые интегралы (1) в окрестности Ω_a. Здесь $y = g^{-1}(x)$ - обратная к $x = g(y)$ замена переменных с координатами $y_1 = g_1^{-1}(x), ..., y_n = g_n^{-1}(x)$. Поскольку якобиан

$$\det\left[g^{-1}(a)\right]' = 1 : \det g'(a) \neq 0,$$

то $u_1(x), ..., u_{n-1}(x)$ - независимые в точке a первые интегралы (1). Всякий первый интеграл системы (3), очевидно, имеет вид

$$v(y) = F(y_1, ..., y_{n-1}) = F[v_1(y), ..., v_{n-1}(y)]$$

где F-произвольная непрерывно дифференцируемая функция $y_i \in R$, $i = \overline{1, n-1}$. Тогда в силу теоремы 2 при $x = g(y)$

$$u(x) = u[g(y)] = v(y) = v\left[g^{-1}(x)\right] = F\left[g_1^{-1}(x), ..., g_{n-1}^{-1}(x)\right] = \\ = F\left[u_1(x), ..., u_{n-1}(x)\right]$$

общий вид первого интеграла (1) в окрестности Ω_a. $\square$

Замечание. Ясно, что построенная в теореме 3 система независимых первых интегралов не является единственной для (1). Теорема 3 носит существенно локальный характер в том смысле, что существование независимых первых интегралов и функции F теорема гарантирует лишь в некоторой окрестности точки $a \in \Omega$. Даже если любая точка Ω не является положением равновесия (1), то в пекоторой окрестности каждой точки

существует своя функция F и единой функции F может не быть для всей области Ω.

Приведем примеры, показывающие, что в окрестности положения равновесия независимые первые интегралы системы (1) могут как существовать, так и не существовать.

Example 2.

Рассмотрим при $n = 2$ линейную однородную систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad t \in R_t^l,$$

где числовая квадратная матрица A такова, что начало координат является либо узлом, либо фокусом. Покажем, что в окрестности начала координат в этом случае не существует независимый в нуле первый интеграл $u(x)$ автономной системы. Действительно, пусть $u(x)$ - любой первый интеграл системы и траектория $x = \varphi(t, x_0)$ проходит через точку x_0 из окрестности нуля. Так как всякая траектория $\varphi(t, x_0) \to 0$ при $t \to +\infty$ или при $t \to -\infty$, то в силу непрерывности $u(x) \equiv u(0)$, х.е. независимого в нуле первого интеграла не существует.

Из этого примера также ясно, что даже для автономных линейных систем на плоскости нельзя всегда гарантировать существование независимых первых интегралов глобально на всей плоскости.

Example 3.

Рассмотрим уравнения Гамильтона, описывающие движение механической системы с S степенями свободы в фазовом пространстве $R_{(q,p)}^{2S}$:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_i}, \quad i = \overline{1, S},$$

где $H(q,p)$ - непрерывно дифференцируемая функция Гамильтона.
Так как производная в силу автопомной системы

$$\dot{H}(q,p) = \sum_{i=1}^{S} \left[\frac{\partial H}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\right] = 0,$$

то гамильтониан $H(q,p)$ является первым интегралом уравнений Гамильтона независимо от того, имеются или не имеются у них положения равновесия.

Proof

применении первых интегралов (1) для построения глобального фазового портрета (1) уже была речь ранее. Теперь о другом важном применении первых интегралов (1). Оказывается, что если известны k независимых первых интегралов системы (1), то порядок автономной системы (1) можно понизить на k единиц.

Theorem 4

Если система (1) имеет пезависимые в точке a $\in \Omega$ первые интегралы $u_1(x), ..., u_k(x)$, то в нехоторой окрестности $\Omega_a \subset \Omega$ точки a порядок системы (1) можно понизить на k единиц.

Proof

Без ограничения общности можно считать, что отличен от нуля минор из первых k столбцов матрицы Якоби $u'(a)$. В окрестности Ω_a сделаем замену переменных

$$\begin{array}{ll} y_i = u_i(x), & i = \overline{1,k}, \\ y_i = x_j, & j = \overline{k+1,n}. \end{array}$$

Нетрудно проверить, что это гладкая обратимая замена переменных в окрестности Ω_a, так как якобиан

$$\left.\frac{\partial\left(y_1, ..., y_n\right)}{\partial\left(x_1, ..., x_n\right)}\right|_{x=a} = \left.\frac{\partial\left(u_1, ..., u_k\right)}{\partial\left(x_1, ..., x_k\right)}\right|_{x=a} \neq 0.$$

Поскопьку

$$\begin{aligned} &\dot{y}_i = \dot{u}_i(x), \quad i = \overline{1,k}, \\ &\dot{y}_j = \dot{x}_j = f_j(x) = F_j(y), \quad j = \overline{k+1,n}, \end{aligned}$$

и $u_i(x), i = \overline{1,k}$, первые интегралы (1) и, значит, $\dot{u}_i(x) = 0, i = \overline{1,k}$, то после замены получаем систему вида

$$\begin{cases} \dot{y}_i = 0, \quad i = \overline{1,k}, \\ \dot{y}_j = F_j(y), \quad j = \overline{k+1,n}. \end{cases}$$

Первые k уравнений системы дают решения $y_i = c_i, i = \overline{1,k}$. Для переменных $y_{k+1}, ..., y_n$ остается система порядка ($n-k$) вида

$$\dot{y}_j = F_j\left(c_1, ..., c_k, y_{k+1}, ..., y_n\right), \quad j = \overline{k+1,n}.$$

В частности, в случае $k = n-1$ после замены переменных получаем

$$y_i = c_i, \quad i = \overline{1,n-1}, \quad \dot{y}_n = F_n\left(c_1, ..., c_{n-1}, y_n\right).$$

Поскольку последнее уравнение интегрируется в квадратурах, то и исходная система (1) в случае $k = n-1$ интегрируется в квадратурах. Заметим, что $F_n(y) \neq 0$ в окрестности образа точки a, так как если бы $F_n(\hat{y}) = 0$, то соответствующая точка a была бы положением равновесия (1), что противоречит условию $f(a) \neq 0$.

В классической механике первые интегралы уравнений движения механических систем обычно называют интегралами (или константами) движения этих систем. Из определения первого интеграла следует, что интегралы движения всегда представляют собой некоторые законы сохранения. Например, для уравнений Гамильтона в примере 3

было установлено, что гамильтониан $H(q,p)$ является первым интегралом. С другой стороны, из курса механики известно, что $H(q,p)$ - это полная энергия механической системы, т.е. $H = T + U$, где T - кинетическая и U - потенциальная энергия. Таким образом, тот факт, что $H(q,p)$ - первый интеграл, означает справедливость закона сохранения энергии механической системы с задаиным гамильтонианом $H(q,p)$ и поэтому функцию $H(q,p)$ называют интегралом знергии.

Основным методом решения автономных систем (1) является метод, основанный на нахождении независимых первых интегралов (1). Этот метод называют еще методом интегрируемых комбинаций, поскольку первые интегралы (1) на основании теоремы 1 ищут с помощью составления такой комбинации уравнений системы (1), чтобы левая часть комбинации давала производную некоторой функции в силу системы (1), а правая часть комбинации равнялась бы нулю. На практике для нахождения первых интегралов (1) иногда целесообразно исключить dt из системы (1) и рассмотреть так называемую систему дифференциальных уравнений в симметричной форме

$$\frac{dx_1}{f_1(x)} = \frac{dx_2}{f_2(x)} = \cdots = \frac{dx_n}{f_n(x)}, \tag{4}$$

в которую переменные $x_1, ..., x_n$ входят равноправно.
Разумеется, запись системы (1) в форме (4) допустима в той части области Ω, где $f_1(x) \cdot f_2(x) \cdots f_n(x) \neq 0$. Для нахождения интегральных кривых системы (4) иногда используют следующее свойство равных дробей. Если имеются равные дроби

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n},$$

и произвольные числа $\lambda_1, ..., \lambda_n$ такие, что $\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n \neq 0$, то

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n}{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \cdots + \lambda_n b_n}.$$

Если выбрать направление движения, то интегральные кривые системы (4) совпадают с траекториями автономной системы (1), поскольку как кривые интегральные кривые (4) и траектории (1) совпадают.

Example 4.

Найти независимые первые интегралы автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x + z, \\ \dot{y} = y + z, \\ \dot{z} = x + y, \end{cases}$$

если $y + z > 0, z + x > 0, x + y > 0, y - x > 0, z - x > 0$.
Рассмотрим систему в симметричной форме

$$\frac{dx}{x+z} = \frac{dy}{y+z} = \frac{dz}{x+y}$$

По свойству равных дробей отсюда

$$\frac{dx - dz}{z - y} = \frac{dy - dz}{z - x}$$

что дает $(z-y)^2 - (z-x)^2 = c$. Следовательно,

$$u_1(x,y,z) = (x-y)(2z - x - y)$$

- первый интеграл системы. Аналогично; рассмотрев

$$\frac{dx+dy+dz}{2(x+y+z)}=\frac{dx-dy}{x-y}$$

получаем еще один первый интеграл системы

$$u_2(x,y,z)=\frac{x+y+z}{(x-y)^2}$$

Нетрудно убедиться, что $u_1(x,y,z), u_2(x,y,z)$ - независимые первые интегралы в каждой точке рассматриваемой области.

Замечание. Первым интегралом автономного уравнения порядка n

$$x_{(t)}^{(n)}=f\left(x,x',x'',...,x^{(n-1)}\right)$$

называется первый интеграл автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x}=x_1, \\ \dot{x}_1=x_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_{n-2}=x_{n-1}, \\ \dot{x}_{n-1}=f\left(x,x_1,x_2,...,x_{n-1}\right). \end{cases}$$

Для произвольной нормальной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=f(t,x)$$

также можно ввести понятие первых интегралов и изучить их свойства.
Еще одно важное применение первые интегралы нормальных систем дифференциальных уравнений имеют при решении уравнений с частными производными первого порядка, о чем речь будет идти в следующей главе.

Упражнения к главе 7

1. Найти положения равновесия, определить их характер и нарисовать фазовые траектории линеаризованных систем:
   а) $\begin{cases} \dot{x}=e^{-4y}-1, \\ \dot{y}=1=2y-x^2, \end{cases}$
   б) $\begin{cases} \dot{x}=x-y^2, \\ \dot{y}=\operatorname{arctg}\left(1-y^2\right). \end{cases}$

2. Начертить траектории во всей фазовой плоскости для уравнения

$$\ddot{x}+x-x^3=0$$

3. Исследовать поведение фазовых траекторий при различных значениях параметра μ для системы

$$\begin{cases} \dot{x}=\mu x-y-x\left(x^2+y^2\right), \\ \dot{y}=x+\mu y-y\left(x^2+y^2\right). \end{cases}$$

4. При каких значениях параметра а начало координат является для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + ay \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$$

асимптотически устойчивым положением равновесия?

5. При каких значениях параметров a и b начало координат является для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = bx + ay \end{cases}$$

устойчивым по Ляпунову положением равновесия?

6. Для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x\left(x + y + x^2 z\right) \\ \dot{y} = x^3 z \\ \dot{z} = -z\left(3x + 2y + 2x^2 z\right) \end{cases}$$

а) проверить, что функция $u = y + x^2 z$ является первым интегралом,
б) найти решение при начальных условиях $x(0) = y(0) = 1, z(0) = -1$,
в) найти все первые интегралы.

13.8 Partial differential equations of first order

Введение

До сих пор рассматривались дифференциальные уравнения относительно неизвестных скалярной функции или вектор-функции, зависящих от одной независимой переменной.

В настоящей главе будут рассматриваться дифференциальные уравнения вида

$$F\left(x_1, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \tag{1}$$

где $n \geq 2, F\left(x_1, ..., x_n, u, p_1, ..., p_n\right)$ - заданная действительная непрерывно дифференцируемая функция в некоторой области $G(2n+1)$-мерного пространства с декартовыми прямоугольными координатами $x_1, ..., x_n,\ u, p_1, ..., p_n$ и в каждой точке G

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial p_i}\right)^2 \neq 0.$$

Уравнение (1) называется дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка относительно неизвестной функции $u = u\left(x_1, ..., x_n\right)$.

Definition

Функция $u = \varphi\left(x_1, ..., x_n\right)$, заданная в области Ω пространства $R^n_{(x_1,...,x_n)}$, называется решением уравнения (1), если:

1. $\varphi\left(x_1, ..., x_n\right)$ - непрерывно дифференцируемая функция в Ω,
2. для всех точек $\left(x_1, ..., x_n\right) \in \Omega$ точка $\left(x_1, ..., x_n, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right) \in G$,
3. $F\left(x_1, ..., x_n, \varphi\left(x_1, ..., x_n\right), \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\right) \equiv 0, \forall\left(x_1, ..., x_n\right) \in \Omega$.

Решение уравнения (1) в ($n+1$)-мерном пространстве $R^{n+1}_{(x_1,...,x_n,u)}$ задает некоторую гладкую поверхность размерности n (гиперповерхность), которая называется интегральной поверхностью уравнения (1).

Многие физические явления описываются уравнениями в частных производных первого порядка. Например, в газовой динамике и динамике сжимаемой жидкости важную роль играет уравнение Хопфа

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

где неизвестная функция $u = u(t, x)$. В оптике изучается уравнение

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = n(x, y, z)$$

описывающее распространение световых лучей в неоднородной среде с показателем преломления $n(x, y, z)$.

Уравнение (1) называется линейным, если неизвестная функция $u\left(x_1, ..., x_n\right)$ и все ее частные производные входят линейно в уравнение (1). Общий вид линейного уравнения в частных производных первого порядка следующий:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j\left(x_1, ..., x_n\right)\frac{\partial u}{\partial x_j} + b\left(x_1, ..., x_n\right)u = f\left(x_1, ..., x_n\right).$$

Уравнение вида

$$\sum_{j=1}^{n} a_j\left(x_1, ..., x_n\right)\frac{\partial u}{\partial x_j} = 0$$

называется линейным однородным уравнением в частных производных первого порядка.

Если же только частные производные функции $u\left(x_1, ..., x_n\right)$ входят линейно в уравнение (1), то уравнение (1) называется квазилинейным. Общий вид квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка следующий:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j\left(x_1, ..., x_n, u\right)\frac{\partial u}{\partial x_j} = b\left(x_1, ..., x_n, u\right)$$

Уравнение (1), не являющееся квазилинейным, называется нелинейным уравнением в частных производных первого порядка.

Известно, что для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$y' = f(x, y)$$

его решение $y = y(x, c)$ зависит в общем случае от одного параметра (произвольной постоянной) c. Если взять простейший пример уравнения в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = 1,$$

то его решением будет $u = x + \varphi(y)$, где $\varphi(y)$ - произвольная функция y. В общем случае, как будет видно в дальнейшем, решение уравнения (1) зависит от одной произвольной непрерывно дифференцируемой функции, число аргументов которой равно ($n-1$). В дальнейшем будет показано, что решение уравнения (1) можно найти с помощью методов теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

13.8.1 § 1. Linear homogeneous equations

Пусть $x = (x_1, ..., x_n)$ принадлежит Ω - некоторой области пространства $R^n_\nu, n \geq 2$. В области Ω рассмотрим линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} = 0 \tag{1}$$

где $a_j(x)$ - заданные непрерывно дифференцируемые в Ω функции, $j = \overline{1, n}$, для которых

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^2(x) \neq 0, \quad \forall x \in \Omega. \tag{2}$$

Если ввести вектор-функцию $a(x)$ с компонентами $a_1(x), ..., a_n(x)$, то уравнение (1) сокращенно можно записать с помощью скалярного произведения в следующем виде:

$$(a(x), \operatorname{grad} u(x)) = 0 \tag{3}$$

Definition

Автономная система

$$\dot{x}(t) = a(x) \tag{4}$$

называется характеристической системой уравнения (1), а траектории системы (4) называются характеристиками уравнения (1).

Условие (2) означает, что область Ω не содержит положений равновесия характеристической системы (4).

Theorem 1

В некоторой охрестности каждой точки $b \in \Omega$ все решения уравнения (1) имеют вид

$$u(x) = F\left[u_1(x), ..., u_{n-1}(x)\right],$$

где $u_j(x), j = \overline{1, n-1}$, - независимые в точке b первые интегралы характеристической системы (4), а $F\left(\zeta_1, ..., \zeta_{n-1}\right)$ - произвольная непрерывно дибференцируемая функция.

Proof

По теореме 1 § 5 главы 7 все решения уравнения (1) являются первыми интегралами характеристической системы (4), так как уравнение
(1) равносильно тому, что производная в силу системы (4) $\dot{u}(x) = 0$ в области Ω. При условии (2) из теоремы 3 §5 главы 7 в некоторой окрестности $V \subset \Omega$ точки $b \in \Omega$ существуют $(n-1)$ независимых в точке b лервые интегралы $u_1(x), ..., u_{n-1}(x)$ системы (4) и любой первый интеграл (4) имеет вид

$$u(x) = F\left[u_1(x), ..., u_{n-1}(x)\right],$$

где $F\left(\zeta_1, ..., \zeta_{n-1}\right)$ - произвопьная непрерывно дифференцируемая функция. $\square$

Definition

Функция $u = F[u_1(x), ..., u_{n-1}(x)]$, где $F(\zeta_1, ..., \zeta_{n-1})-$ произвольная непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов, называется общим решением уравнения (1) в окрестности V точки $b \in \Omega$.

Отметим еще раз, что теорема 1 утверждает существование лишь локального общего решения уравнения (1) в каждой точке в области Ω, т.е. лишь в некоторой окрестности каждой точки $b \in \Omega$. Таким образом, общее решение (1) зависит от произвольной функции, в то время как для обыкновенного дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ общее решение зависит от произвольной постоянной.

Из доказанной теоремы 1 следует, что характеристики являются линиями уровня интегральной поверхности уравнения (1).

Замечание. Решение уравнения вида

$$(a(x), \operatorname{grad} u(x)) = h(x) \tag{5}$$

с заданной непрерывно дифференцируемой в области Ω правой частью $h(x)$ сводится к решению линейного однородного уравнения (3) с помощью замены $u(x) = v(x) + u_0(x)$, если угадать частное решение $u_0(x)$ заданного уравнения (5).

Как и в спучае обыкновенных дифференциальных уравнений, для выделения конкретного решения уравнения (1) необходимо задавать дополнительные условия. Чаще всего такими условиями являются начальные условия.

Пусть уравнение

$$g(x) = 0$$

задает в области Ω гладкую ($n-1$)-мерную поверхность (г.е. гиперповерхность) $\gamma(g(x)$ - непрерывно дифференцируема и $\operatorname{grad} g(x) \neq 0, \forall x \in \Omega)$. Эта поверхность γ называется начальной поверхностью. Пусть, кроме того, на поверхности γ задана некоторая непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(x)$.

Зададим начальное условие

$$u(x)|_{x\in\gamma} = \varphi(x). \tag{6}$$

Функция $\varphi(x)$ называется начальным значением $u(x)$.

Задача Коши для уравнения (1). Найти такое решение уравнения (1), которое удовлетворяет начальному условию (6).

При $n = 2$ задача Коши (1), (6) имеет наглядный геометрический смысл. Уравнение $g(x_1, x_2) = 0$ задает в плоской области Ω гладкую кривую γ, а начальное условие (6) в пространстве $R^3_{x_1,x_2,u}$ определяет пространственную гладкую кривую Γ. Поэтому при $n = 2$ задача Коши (1), (5) геометрически означает нахождение интегральной поверхности уравнения (1), проходящей через заданную кривую Γ (см. рис. 1)

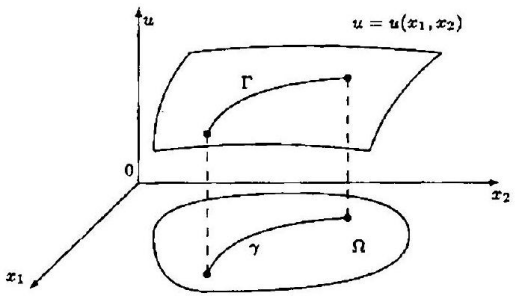


Рис. 1

В отличие от задачи Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения первого порядка на $[\alpha, \beta]$

$$y' + a(x)y = f(x)$$

с непрерывными $a(x)$ и $f(x)$ на $[\alpha, \beta]$, для которого задача Коши однозначно разрешима при начальном условии $y(x_0) = y_0$ в любой точке $x_0 \in [\alpha, \beta]$, решение задачи Коши (1), (6) существует и единственно не при любой гладкой начальной поверхности γ. Другое принципиальное отличие задачи Коши (1), (6) от задачи Коши для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений в том, что ее разрешимость носит существенно локальный характер.

Definition

Всякая точка $M_0 \in \gamma$, для которой

$$\dot{g}(M_0) = (a(M_0), \operatorname{grad} g(M_0)) = 0,$$

называется характеристической точкой уравнения (1).
Тот факт, что $M_0 \in \gamma$ является характеристической точкой (1), геометрически означает, что вектор $a(M_0)$ касается поверхюости γ в точке M_0 или, что то же самое, касается характеристик (1) в точке M_0. В частности, положения равновесия характеристической системы (4) и особые точки поверхности γ являются характеристическим точками уравнения
(1). Если при $n = 2$ кривая γ является характеристикой (1), то каждая точка γ является характеристической точкой (1).

Theorem 2

Если $M_0 \in \gamma$ не является характеристической точкой уравнения (1), то в некоторой окрестности $V \subset \Omega$ точки M_0 решение задачи Кощи (1), (6) существует и единственно.

Так как $a(M_0) \neq 0$, то в некоторой окрестности V точки M_0 существуют ($n-1$) независимые в точке M_0 первые интегралы $u_l(x), l = \overline{1, n-1}$, характеристической системы (4). По теореме 1 в окрестности V общее решение (1) имеет вид

$$u(x) = F[u_1(x), ..., u_{n-1}(x)],$$

где F - произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Покажем, что начальное условие (6) однозначно определяет вид функции F. С этой целью в окрестности V рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} u_l(x) = u_l, \quad l = \overline{1, n-1}, \\ g(x) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Покажем, что систему (7) можно однозначно разрешить относительно $x = (x_1, ..., x_n)$ в окрестности V. Проверим для системы (7) выполнение условий теоремы о системе неявных функций.

Все функции в системе (7) непрерывно дифференцируемы в окрестности V. Осталось показать, что якобиан

$$\left.\frac{\partial(u_1, ..., u_{n-1}, g)}{\partial(x_1, ..., x_n)}\right|_{M_0} \neq 0$$

Рассуждаем от противного. Пусть якобиан равен нулю. Так как первые $(n-1)$ строк якобиана линейно независимы, то в таком случае последняя его строка линейно зависит

от его первых ($n-1$) строк. Следовательно, найдутся числа $c_l, l=\overline{1,n-1}$, одновременно не равные нулю, такие, что

$$\frac{\partial g\left(M_0\right)}{\partial x_j}=\sum_{l=1}^{n-1} c_l \frac{\partial u_l\left(M_0\right)}{\partial x_j}, \quad \forall j=\overline{1,n}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\dot{g}\left(M_0\right)&=\sum_{j=1}^{n} a_j\left(M_0\right) \frac{\partial g\left(M_0\right)}{\partial x_j}=\sum_{j=1}^{n} a_j\left(M_0\right) \sum_{l=1}^{n-1} c_l \frac{\partial u_l\left(M_0\right)}{\partial x_j}= \\ &=\sum_{l=1}^{n-1} c_l \sum_{j=1}^{n} a_j\left(M_0\right) \frac{\partial u_l\left(M_0\right)}{\partial x_j}=\sum_{l=1}^{n-1} c_l \dot{u}_l\left(M_0\right)=0\end{aligned}$$

в силу того, что $u_l(x), l=\overline{1,n-1}$ - первые интегралы (4).

С другой стороны, $\dot{g}\left(M_0\right) \neq 0$, так как по условию теоремы $M_0 \in \gamma$ не является характеристической точкой (1). Противоречие. Поэтому в окрестности V выполнены все условия теоремы о системе неявных функций и система уравнений (7) допускает в окрестности V единственное непрерывно дифференцируемое решение $x=\omega\left(u_1, \ldots, u_{n-1}\right)$.

Для всех $x \in \gamma \cap V$ функция

$$\varphi(x)=\varphi\left[\omega\left(u_1, \ldots, u_{n-1}\right)\right] \equiv \Phi\left(u_1, \ldots, u_{n-1}\right)$$

является известной непрерывно дифференцируемой функцией $u_1, \ldots, \quad u_{n-1}$. По построению отсюда следует, что

$$u(x)=\Phi\left[u_1(x), \ldots, u_{n-1}(x)\right]$$

является искомым единственным решением задачи Коши (1), (5) в окрестности V, так как $u(x)$ - первый интеграл (4) и удовлетворяет начальному условию (6).

Example 1.

При $x>0$ найти общее решение уравнения

$$x \frac{\partial u}{\partial x}+\left(x^2+z\right) \frac{\partial u}{\partial y}+\left(x^2+y\right) \frac{\partial u}{\partial z}=0$$

и решить задачу Коши при начальном условии

$$u\big|_{x=1}=y^2-z^2$$

Д Характеристическая система для заданного уравнения

$$\begin{cases}\dot{x}=x, \\ \dot{y}=x^2+z, \\ \dot{z}=x^2+y,\end{cases}$$

при $x>0$ имеет два независимых в каждой точке первых интеграла. Найдем их. Возьмем первое уравнение системы и уравнение, полученное вычитанием из второго уравнения третьего уравнения:

$$\begin{cases}\dot{x}=x \\ \dot{y}-\dot{z}=z-y.\end{cases}$$

Перемножая крест-накрест эти уравнения и отбрасывая dt, получаем уравнение вида

$$(z-y)dx = xd(y-z)$$

Это уравнение дает решения

$$x(z-y) = c_1$$

и, следовательно, функция

$$u_1(x,y,z) = x(z-y)$$

является первым интегралом. Еще один первый интеграл найдем, если возьмем первые два уравнения характеристической системы, где $z = y + \frac{c_1}{x}$. Имеем

$$\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = y + x^2 + \frac{c_1}{x}. \end{cases}$$

Перемножив крест-накрест эти два уравнения и отбрасывая dt, получаем линейное уравнение первого порядка относительно y :

$$xdy = \left(y + x^2 + \frac{c_1}{x}\right) dx$$

Его решения задаются формулой

$$y = c_2 x + x^2 - \frac{c_1}{2x}.$$

Подставляя вместо c_1 выражение $x(z-y)$, находим отсюда еще один первый интеграл характеристической системы

$$u_2(x,y,z) = \frac{y+z-2x^2}{2x}.$$

Нетрудно проверить по определению, что $u_1(x,y,z), u_2(x,y,z)$ - независимые первые интегралы в каждой точке при $x > 0$. Следовательно, общее решение заданного уравнения в окрестности каждой точки полупространства $x > 0$ имеет вид

$$u(x,y,z) = F\left[x(z-y), \frac{y+z-2x^2}{2x}\right],$$

где $F(\zeta_1, \zeta_2)$ - произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Для решения задачи Коши составляем систему уравнений

$$\begin{cases} x(z-y) = u_1 \\ \frac{y+z-2x^2}{2x} = u_2 \\ x = 1 \end{cases}$$

и выражаем начальное значение $(y^2 - z^2)$ через u_1, u_2. Из этой системы находим, что

$$z^2 - y^2 = 2u_1(u_2 + 1).$$

Следовательно, решением задачи Коши будет

$$u(x,y,z) = (y-z)\left(y + z + 2x - 2x^2\right).$$

Следующий пример показывает, что при невыполнении условий теоремы 2 решение задачи Коши (1), (6) может не существовать или быть не единственным.

Example 2.

Решить задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u(x,y)|_{y=x} = \varphi(x).$$

$\triangle$ Характеристическая система

$$\dot{x} = \dot{y} = 1$$

дает первый интеграл $u_1(x,y) = x - y$ и, следовательно,

$$u(x,y) = f(x-y),$$

где $F(\zeta)$ - произвольная непрерывно дифференцируемая функция, есть общее решение заданного уравнения.

Так как $y = x$-характеристика, то условия теоремы 2 не выполняются. Из начального условия находим, что $F(0) = \varphi(x)$. Следовательно, при $\varphi(x) \equiv \text{const}$ множество решений задачи Коши задается функцией $u(x,y) = F(x-y)$, где $F(0) = \text{const}$, т.е. решение существует, но не единственно. Если же $\varphi(x) \not\equiv \text{const}$, то нет решений задачи Коши. $\square$

Заметим также, что если задать начальное условие не на характеристике, например, взяв $u(x,y) = \varphi(x)$ при $y = \frac{x}{2}$, где функция $\varphi(x)$ является только непрерывной, то такая задача Коши не имеет решений, поскольку решение задачи Коши задается функцией

$$u(x,y) = \varphi(2x - 2y),$$

которую нельзя дифференцировать.

Замечания.

1. Решение задачи Коши (5), (6) в окрестности нехарактеристической точки $M_0 \in \gamma$ дается формулой

$$u[\psi(t,x)] = \varphi(x) + \int_0^t h[\psi(\tau,x)]d\tau$$

где $\psi(t,x)$ - то решение характеристической системы (4), которое удовлетворяет начальному условию

$$\psi(0,x) = x \in \gamma.$$

Эта формула получается заменой переменных вида

$$y_j = u_j(x), \quad j = \overline{1,n-1}, \quad y_n = x_n,$$

где $u_j(x), j = \overline{1,n-1}$, независимые первые интегралы системы (4), в окрестности $M_0 \in \gamma$.

2) Для задачи Коши (1), (6) можно ввести понятие корректности задачи Коши аналогично тому, как это делается для задачи Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При

условиях теоремы 2 можно установить, что задача Коши (1), (6) является корректной. В частности, решение задачи Коши (1), (6) непрерывно зависит от начальных данных. Если же рассматривать уравнение (1) с комплекснозначными коэффициентами $a_j(x), j = \overline{1,n}$, то непрерывной зависимости решения задачи Коши (1), (6) от начальных данных может уже и не быть. В этом можно убедиться на следующем примере.

Example 3.

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} + i\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u|_{t=0} = \frac{1}{n}e^{inx}$$

где $n \in N, i$ - мнимая единица.
Нетрудио убедиться, что едиственным решением этой задачи является

$$u_n(x,t) = \frac{1}{n}e^{inx} \cdot e^{nt}$$

Следовательно, при $n \to \infty$ $|u_n(x,t)| \to \infty$ при $t \neq 0$, несмотря на то, что $|u_n(x,0)| \to 0$.

Начальное условие (6) не является единственно возможным условием, определяющим конкретное решение уравнения (1). Как и для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, для уравнения (1) можно задавать граничные условия и изучать соответствующие граничные задачи. Решение таких задач уже не опирается на формулу общего решения (1) и исследуется другими методами. Приведем пример.

Example 4.

Найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x} + a\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad a \neq 0, \quad x \in (-\pi, \pi), \quad y \in (0,1),$$

удовлетворяющее условиям

$$u|_{x=-\pi} = u|_{x=\pi}, \quad u|_{y=0} = \varphi(x),$$

где φ_x - заданная дважды непрерывно дифференцируемая функция на $[-\pi, \pi]$, для которой

$$\varphi(-\pi) = \varphi(\pi), \quad \varphi'(-\pi) = \varphi'(\pi).$$

$\triangle$ В отличие от предыдущего в этом примере удобно считать $u(x,y)$ - комплекснозначной функцией. Из условий на $\varphi(x)$ следует, что ее ряд Фурье

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n e^{inx}, \quad \varphi_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)e^{-inx}dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...,$$

и почленно продифференцированный ряд равномерно на $[-\pi, \pi]$ сходятся соответственно к $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$. Будем искать решение поставленной задачи в виде

$$u(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(y)e^{inx}$$

Формальная подстановка этого ряда в заданные уравнение и дополнительные условия дает, что

$$u_n(y) = \varphi_n e^{-\frac{iny}{a}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Используя свойства коэффициентов Фурье φ_n функции $\varphi(x)$, можно установить, что сумма ряда

$$u(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n e^{in\left(x-\frac{y}{a}\right)}$$

является непрерывно дифференцируемой функцией и дает решение рассматриваемой граничной задачи.

13.8.2 § 2. Quasilinear Equations

Пусть G–область пространства $R^{n+1}_{(x,u)}$ с прямоугольными декартовыми координатами $x = (x_1, ..., x_n)$, u, где $n \geq 2$. В области G рассмотрим квазилинейное уравнение в частных производных первого порядка

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x,u)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} = b(x,u), \tag{1}$$

где $a_j(x,u), j = \overline{1,n}, b(x,u)$ - заданные непрерывно дифференцируемые функции в области G, для которых

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^2(x,u) \neq 0, \quad \forall (x,u) \in G. \tag{2}$$

Если ввести вектор-функцию $a(x,u)$ с компонентами $a_1(x,u), ..., a_n(x,u)$, то с помощью скалярного произведения уравнение (1) сокращенно записывается так:

$$(a(x,u), \operatorname{grad} u(x)) = b(x,u). \tag{3}$$

Definition

Автономная система

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(x,u) \\ \dot{u}(t) = b(x,u) \end{cases} \tag{4}$$

называется характеристической системой уравнения (1), а траектории системы (4) называются характеристиками уравнения (1).

Условие (2) означает, что область G не содержит положений равновесия системы (4). Кроме того, в области G выполнены условия теоремы существования и единственности решения задачи Копи для системы (4).

На примере уравнения (1) с двумя независимыми переменными укажем связь между характеристиками и интегральной поверхностью уравнения (1). Напомним, что интегральная поверхность уравнения (1) - это график решения уравнения (1).

Рассмотрим уравнение

$$a(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y} = c(x,y,u), \tag{5}$$

где $a(x,y,u), b(x,y,u), c(x,y,u)$ - заданные непрерывно дифференцируемые функции в некоторой области $G \subset R^3_{(x,y,u)}$. В каждой точке $M \in G$ уравнение (5) задает векторное поле $l(M) = (a(M), b(M), c(M))$. Пусть интегральная поверхность уравнения (5) задается уравнением $u = u(x,y)$. Если точка M лежит на интегральной поверхности, то вектор $n(M) = \left(\frac{\partial u(M)}{\partial x}, \frac{\partial u(M)}{\partial y}, -1\right)$ направлен по нормали к поверхности в точке M. Векторы $l(M)$ и $n(M)$ ортогональны, так как уравнение (5) означает, что

$$(l(M), n(M)) = 0, \quad \forall M \in G.$$

Таким образом, вектор $l(M)$ лежит в касательной плоскости в точке M интегральной поверхности уравнения (5). Очевидно, что верно и обратное утверждение. Если непрерывно дифференцируемая поверхность $u = u(x, y)$ в каждой своей точке M касается вектора $l(M)$, то эта поверхность является интегральной для уравнения (5).

Следовательно, и характеристика, и интегральная поверхность, проходящие через точку M, касаются вектора $l(M)$. Геометрически это значит, что всякая интегральная поверхность уравнения (5) «соткана» из характеристик уравнения (5). Более точно справедливо следующее утверждеиие. Пусть Ω - некоторая область плоскости $R^2_{(x,y)}$.

Theorem 1

Всякая мепрерыено бифференцируемая поверхность $u = u(x, y)$, где $(x, y) \in \Omega, (x, y, u) \in G$, является интегральной поверхностью уравнения (5) тогда и только тогда, когда она образована характеристиками уравнения (5).

Proof

Необходимость. Пусть $u = u(x, y)$ - интегральная поверхность (5). Если M - произвольная точка этой поверхности, то обозначим через M' ее проекцию на плоскость (x, y).

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a[x, y, u(x, y)] \\ \dot{y}(t) = b[x, y, u(x, y)] \end{cases}$$

и ее решение $(x(t), y(t))$, проходящее через точку M'. Если положить

$$u(t) = u[x(t), y(t)]$$

то кривая $\gamma : x = x(t), y = y(t), u = u(t)$, по определению, лежит на интегральной поверхности. Покажем, что кривая γ - характеристика уравнения (5).

В самом деле, первые два уравнения характеристической системы для (5)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = a(x, y, u), \\ \dot{y}(t) = b(x, y, u), \\ \dot{u}(t) = c(x, y, u), \end{cases} \tag{6}$$

удовлетворяются в силу определения $x(t), y(t)$. Кроме того,

$$\dot{u}(t) = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \dot{x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \dot{y} = \frac{\partial u}{\partial x} a[x(t), y(t), u(t)] + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot b[x(t), y(t), u(t)] =$$
$$= c[x(t), y(t), u(t)]$$

так как по условию u-решение (5).

Достаточность. Пусть непрерывно дифференцируемая поверхность $u = u(x, y)$ образована характеристиками уравнения (5). Покажем, что она является интегральной поверхностью (5). В самом деле, пусть

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad u = u(t)$$

характеристика (5), проходящая через точку M. заданной поверхности. По условию она целиком лежит на поверхности, т.е.

$$u(t) \equiv u[x(t), y(t)]$$

Отсюда имеем, что

$$\dot{u}(t) \equiv \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \dot{x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \dot{y}.$$

Но тогда из системы (6) получаем, что

$$c[x(t), y(t), u(t)] \equiv \frac{\partial u}{\partial x} \cdot a[x(t), y(t), u(t)] + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot b[x(t), y(t), u(t)]$$

В частности, последнее равенство имеет место в точке M, т.е. уравнение (5) удовлетворяется в точке M. Поскольку точка M - произвольная точка поверхности, то заданная поверхность является интегральной для уравнения (5).

Вернемся к общему уравнению (1). Его решение можно свести к решению следующего линейного однородного уравнения:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x, u) \frac{\partial v}{\partial x_j} + b(x, u) \frac{\partial v}{\partial u} = 0. \tag{7}$$

Theorem 2

Пусть функция $v = V(x, u)$ - решение уравнения (7) в некоторой подобласти $G_0 \subseteq G$ и пусть $V(x, u) = 0$ в некоторой точхе $M \in G_0$ и $\frac{\partial V(M)}{\partial u} \neq 0$. Тогда в некоторой охрестности проекции M' точки M на пространство R_x^n уравнение $V(x, u) = 0$ определяет решение $u = \varphi(x)$ уравшения (1).

По теореме о неявной функции уравнение $V(x, u) = 0$ определяет в окрестности точки M единственную непрерывно дифференцируемую функцию $u = \varphi(x)$ такую, что в окрестности M'

$$V[x, \varphi(x)] \equiv 0, \quad \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} = -\frac{\partial V[x, \varphi(x)]}{\partial x_j} / \frac{\partial V[x, \varphi(x)]}{\partial u}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Тогда левая часть уравнения (1) в окрестности M' равна

$$-\sum_{j=1}^{n} a_j[x, \varphi(x)] \frac{\partial V[x, \varphi(x)]}{\partial x_j} / \frac{\partial V[x, \varphi(x)]}{\partial u},$$

а это в силу уравнения (7) есть $b[x, \varphi(x)]$, т.е. уравнение (1) удовлетворено.

Таким образом, из теоремы 2 вытекает следующий способ ренения уравнения (1). Находим из характеристической системы (4) независимые в точке $M \in G$ первые интегралы (они существуют в силу (2)):

$$v_1(x, u), ..., v_n(x, u).$$

Тогда решением уравнения (1) в некоторой окрестности M будет функция

$$v = F\left[v_1(x, u), ..., v_n(x, u)\right]$$

где $F(\zeta_1, ..., \zeta_n)$ - произвольная непрерывно дифференцируемая функция и, следовательно, решения уравнения (1) определяются как неявные функции из уравнения

$$F\left[v_1(x, u), ..., v_n(x, u)\right] = 0. \tag{8}$$

Выражение (8) называется общим интегралом уравнения (1).
Замечание. Формула (8) может не содержать всех решений (1). Именно, не исключена возможность того, что могут быть такие решения (1), для которых уравнение (7) удовлетворяется не тождественно по (x, u), а только при $u = \varphi(x)$ тождественно по x. Такого рода решения (1)

называются специальными решениями (1). Специальные решения (1)случай исключительный, и в дальнейшем они во внимание приниматься не будут.

Example 1.

Найти решения уравнения

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial u}{\partial x_j} = mu, \tag{9}$$

где m - заданное число, $x = (x_1, ..., x_n) \neq 0$.
Характеристическая система

$$\dot{x}_j = x_j, \quad j = \overline{l, n}, \quad \dot{u} = m,$$

имеет n независимых первых интегралов, которые при $x_n > 0$ можно записать в виде

$$v_j(x, u) = \frac{x_j}{x_n}, \quad j = \overline{1, n-1}, \quad v_n(x, u) = \frac{u}{x_n^m}.$$

Следовательно, решения заданного уравнения (9) определяются из уравнения

$$F\left(\frac{x_1}{x_n}, \cdots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, \frac{u}{x_n^m}\right) = 0.$$

Разрешив это уравнение относительно последнего аргумента, получаем, что

$$u(x) = x_n^m \cdot \Phi\left(\frac{x_1}{x_n}, \cdots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right)$$

Это однородная функция степени m. Можно показать, что заданное уравнение (9) не имеет специальных решений. Тем самым доказана обратная теорема к теореме Эилера об однородной функции: если $u\,(x_1, ..., x_n)$ - однородная функция степени m, т.е. при всех $x \neq 0$ и при всех допустимых значениях параметра λ

$$u\,(\lambda x_1, ..., \lambda x_n) \equiv \lambda^m u\,(x_1, ..., x_n)$$

то $u(x)$ - решение уравнения (9).
Как известно, теорема Эйлера доказывается дифференцированием тождества из определения однородной функции степени m.

Как и в случае линейного однородного уравнения, для выделения какого-либо частного решения квазилинейного уравнения (1) необходимо задать дополнительные условия. Чаще всего такими условиями являются начальные условия. В области Ω пространства R_x^n задается гладкая $(n-1)$-мерная начальная поверхность γ и в точках поверхности γ задана непрерывно дифференцируемая фупкция $\varphi(x)$.

Начальное условие для уравнения (1) имеет вид

$$u(x)|_{x \in \gamma} = \varphi(x). \tag{10}$$

Задача Коши для уравнения (1). Найти такое решение уравнения (1), которое удовлетворяет начальному условию (10).

Таким образом, задача Коши для (1) ставится в точности так же, как и для линейного однородного уравнения. Условия разрешимости ее также аналогичны условиям разрешимости задачи Коши для линейного однородного уравнения. Решается задача Коши (1), (10) методом характеристик (методом Коши).

Для простоты ограничимся задачей Коши для уравнения (5). Пусть гладкая кривая γ на плоскости $R^2_{(x,y)}$ задается параметрическими уравнениями

$$x = x(\tau), \quad y = y(\tau),$$

где $\tau \in \mathcal{I}$ - промежутку оси R^1_τ, и пусть

$$u(x,y)|_{(x,y)\in\gamma} = u_0(\tau), \quad \tau \in \mathcal{I}. \tag{11}$$

Кривая γ называется начальной кривой. Предполагается, что на $\mathcal{I}$ функции $x(\tau), y(\tau), u_0(\tau)$ - непрерывно дифференцируемы и $[x'(\tau)]^2 + [y'(\tau)]^2 > 0$ для всех $\tau \in I$.

Начальное условие (11) задает гладкую кривую Γ в простраистве x, y, u :

$$\Gamma: \quad x = x(\tau), \quad y = y(\tau), \quad u = u_0(\tau), \quad \tau \in \mathcal{I}.$$

Решение задачи Коши (5), (11) задает интегральную поверхность уравнения (5), проходящую через кривую Γ. Пусть точка $M_0\,(x_0, y_0)$ проекция на плоскость $R^2_{(x,y)}$ точки $M\,(x_0, y_0, u_0) \in \Gamma$.

Definition

Точка $M_0\,(x_0, y_0) \in \gamma$, где $x_0 = x\,(\tau_0)\,, y_0 = y\,(\tau_0)\,, u_0 = u\,(\tau_0)$, называется характеристической точкой уравнения (5), если

$$d = a\,(x_0, y_0, u_0) \cdot \dot{y}\,(\tau_0) - b\,(x_0, y_0, u_0) \cdot \dot{x}\,(\tau_0) = 0.$$

Тот факт, что $M_0 \in \gamma$-характеристическая точка (5), геометрически означает, что начальная кривая γ касается проекций характеристик (5) на плоскость $R^2_{(x,y)}$ в точке $M_0\,(x_0, y_0) \in \gamma$.

Theorem 3

Если точка $M_0 \in \gamma$ не является харахтеристическочй точкой уравнения (5), то в некоторой охрестности точки M_0 решение задачи Коии (5), (11) существует и единственно.

Proof.

Пусть $M\,(x_0, y_0, u_0) \in \Gamma$ и пусть

$$x = x(t,\tau), \quad y = y(t,\tau), \quad u = u(t,\tau), \tag{12}$$

решение характеристической системы (6), удовлетворяющее начальным условиям

$$x|_{t=0} = x(\tau), \quad y|_{t=0} = y(\tau), \quad u|_{t=0} = u_0(\tau), \quad \tau \in \mathcal{I}.$$

Это решение существует для $|t| < \delta$ при некотором $\delta > 0$. Уравнения (12) определяют в пространстве (x, y, u) некоторую поверхность, образованную характеристиками и проходящую через кривую Γ. Если показать, что эта поверхность является гладкой, то

согласно теореме 1 она будет интегральной и тем самым существование решения задачи Коши (5), (11) будет доказано.

Все функции в (12) являются непрерывно дифференцируемыми при $|t| < \delta$ и $\tau \in \mathcal{I}$ согласно теореме о непрерывной дифференцируемости решения задачи Коши по начальным значениям для системы (6). Покажем, что в окрестности точки $M_0\,(x_0, y_0)$ первые два уравнения (12) можно однозначно разрешить относительно t, τ. В самом деле, так как в силу условия теоремы 3 якобиан

$$\left.\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,\tau)}\right|_{t=0,\tau=\tau_0} = d = a\,(x_0, y_0, u_0)\cdot \dot{y}\,(\tau_0) - b\,(x_0, y_0, u_0)\,\dot{x}\,(\tau_0) \neq 0$$

то по теореме о системе неявных функций первые два уравнения (12) можно в окрестности $M_0\,(x_0, y_0)$ однозначно разрешить относительно t, τ. Пусть их решениями будут

$$t = t(x, y), \quad \tau = \tau(x, y)$$

Полученные функции являются непрерывно дифференцируемыми в окрестности $M_0\,(x_0, y_0)$. Подставив их в третье уравнение (12), получим непрерывно дифференцируемую в окрестности $M_0\,(x_0, y_0)$ функцию

$$u = u[t(x, y), \tau(x, y)]$$

График этой функции по теореме 1 и является искомой интегральной поверхностью (5), проходящей через кривую Г.

Полученное решение является единственным, поскольку, если существует какая-либо другая интегральная поверхность (5), проходящая через кривую Г, то по теореме 1 она образована характеристиками. Но через каждую точку Г проходит лишь одна характеристика. Поэтому второе решение совпадает с уже построенным.

Example 2.

Найти интегральную поверхность уравнения

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial u} = u,$$

проходящую через кривую, заданную уравнениями

$$x = \tau, \quad y = \tau, \quad u = \tau^3, \quad \tau \in R^1_\tau.$$

$\triangle$ Первый метод решения.

Характеристическая система

$$\dot{x}(t) = x, \quad \dot{y}(t) = -y, \quad \dot{u}(t) = u,$$

при начальных условиях

$$x|_{t=0} = \tau, \quad y|_{t=0} = \tau, \quad u|_{t=0} = \tau^3,$$

имеет решение

$$x = \tau e^t, \quad y = \tau e^{-t}, \quad u = \tau^3 e^t$$

Это параметрическое решение задачи Коши. Отсюда находим явное решение задачи Коши $u = x^2 y$.

Второй метод решения заданной задачи Коши основан на использовании не траекторий (5), а первых интегралов характеристической системы (6).

Нетрудно видеть, что функции

$$v_1 = xy, \quad v_2 = yu,$$

- независимые первые интегралы характеристической системы. Тогда уравнение

$$F(xy, yu) = 0,$$

где $F(\zeta_1, \zeta_2)$ - произвольная непрерывно дифференцируемая функция, дает общий интеграл исходного уравнения. Из начальных условий находим вид функции F таким образом, чтобы

$$F(v_1, v_2) = F(xy, yu) = F\left(\tau^2, \tau^4\right) \equiv 0, \quad \forall \tau \in R^1_\tau$$

Отсюда $F = v_1^2 - v_2 = x^2y^2 - yu = 0$, т.е. $u = x^2y$.

Замечание. Если кривая Γ задана как пересечение двух гладких поверхностей

$$\begin{cases} \Phi_1(x, y, u) = 0, \\ \Phi_2(x, y, u) = 0, \end{cases}$$

то вид функции F определяется исключением переменных x, y, u из системы уравнений

$$\Phi_1(x, y, u) = 0, \quad \Phi_2(x, y, u) = 0, \quad v_1(x, y, u) = v_1, \quad v_2(x, y, u) = v_2,$$

где v_1, v_2 - независимые первые интегралы характеристической системы (6).

Example 3.

Решить задачу Коши для уравнения примера 2, если $u = 1$ при $x^2 + y^2 = 4$.

Исключая x, y, u из системы

$$u = 1, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad xy = v_1, \quad yu = v_2$$

получаем $v_2^4 + v_1^2 = 4v_2^2$. Таким образом, решение задачи Копи задается уравнением

$$y^4u^4 + x^2y^2 = 4y^2u^2$$

Замечание. Если условие чеоремы 3 не выполнено, то решение задачи Коши (5), (11) может либо не существовать, либо быть не единственным. В частности, если кривая Γ является характеристикой уравнения (5), то задача Коши имеет бесконечно много решений.

Example 4.

Решить уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial y} = 1$$

при начальном условии: а) $x = \tau, y = \frac{1}{2}\tau^2, u = \tau$, б) $x = 2\tau, y = \tau^2$, $u = \tau$.

$\triangle$ Характеристическая система

$$\dot{x}(t) = 1, \quad \dot{y}(t) = u, \quad \dot{u}(t) = 1,$$

имеет независимые первые интегралы $v_1 = x - u, v_2 = y - \frac{1}{2}u^2$. Следовательно, общий интеграл исходного уравнения имеет вид

$$F\left(x - u, y - \frac{1}{2}u^2\right) = 0$$

где $F(\zeta_1, \zeta_2)$ - произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

В случае а) вид функции F определяется исключением x, y, u из системы уравнений

$$x - u = v_1, \quad y - \frac{1}{2}u^2 = v_2, \quad x = u, \quad y = \frac{1}{2}u^2.$$

Отсюда получаем $v_1 = v_2 = 0$, т.е. $F(0,0) = 0$. Итак, любая функция

$$F\left(x - u, y - \frac{1}{2}u^2\right) = 0$$

для которой $F(0,0) = 0$, определяет решение задачи Коши в этом случае. Заметим, что кривая

$$x = \tau, \quad y = \frac{1}{2}\tau^2, \quad u = \tau,$$

является характеристикой уравнения. Значит, в этом случае имеем бесконечно много решений задачи Коши.

В случае б) кривая Г, заданная уравнениями,

$$x = 2\tau, \quad y = \tau^2, \quad u = \tau$$

не является характеристикой. Решение характеристической системы при начальных условиях

$$x|_{t=0} = 2\tau, \quad y|_{t=0} = \tau^2, \quad u|_{t=0} = \tau,$$

задается формулами

$$x = t + 2\tau, \quad y = \frac{1}{2}t^2 + \tau t + \tau^2, \quad u = t + \tau.$$

Условие теоремы 3 не выполняется, так как

$$d = \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial x}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} \equiv 0.$$

Исключая из предыдущих формул t и τ, получаем, что

$$u(x,y) = \frac{x}{2} \pm \sqrt{y - \frac{x^2}{4}}.$$

При $y > \frac{x^2}{4}$ полученная функция $u(x,y)$ не дает решения задачи Коши в случае б), так как $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ неограничены при приближении к кривой Г.

В заключение отметим существенность требования непрерывности производных для коэффициентов $a(x,y,u), b(x,y,u), c(x,y,u)$ уравнения (5). Например, решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = f(x+y)$$

при начальном условии $u = 0$ при $x = 0$, как нетрудно проверить, задается формулой

$$u = x \cdot f(x+y).$$

Если $f(t)$ не имеет непрерывной производной, то задача Коши не имеет решений.

В тех случаях, когда коэффициенты уравнения (1), начальная поверхность γ и начальная функция $\varphi(x)$ в (10) не являются достаточно гладкими, приходится расширять понятие решения уравнения (1) и решения задачи Коши (1), (10) и вводить так называемые обобщенные решения уравнения (1) и обобщенные решения задачи Коши (1), (10). Подробнее об обобщенных решениях линейных и квазилинейных уравнений и обобщенных решениях задачи Коши для этих уравнений см. в [35].

Отметим также, что уравнение (1) с комплекснозначными коэффициентами $a_j(x,u), j = \overline{1,n}$, вообще может не иметь решений. Это показано в [30] на примере, принадлежащего Г.Леви, следующего уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + i\frac{\partial u}{\partial x_2} + 2i\left(x_1 + ix_2\right)\frac{\partial u}{\partial x_3} = f\left(x_3\right),$$

где i - мнимая единица, $f\left(x_3\right)$ - действительная, бесконечно дифференцируемая функция.

13.8.3 § 3. Nonlinear Equations

В области G пятимерного пространства с прямоугольными декартовыми координатами x, y, u, p, q рассмотрим уравнение

$$F\left(x, y, u\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \tag{1}$$

где $F(x,y,u,p,q)$ - заданная дважды непрерывно дифференцируемая функция в области G, и в каждой точке G

$$\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)^2 > 0$$

Решением уравнения (1) называется дважды непрерывно дифференцируемая в некоторой области Ω плоскости $R^2_{(x,y)}$ функция $u = u(x,y)$, удовлетворяющая уравнению (1). График $u = u(x,y)$ называется интегральной поверхностью уравнения (1).

Изложим метод характеристик (метод Коши) решения нелинейного уравнения (1). С этой целью введем понятие характеристической системы уравнений для уравнения (1).

Пусть $u = u(x,y)$ - решение (1). Дифференцируя по x, y тождество

$$F\left[x, y, u(x,y), \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right] \equiv 0, \quad \forall (x,y) \in \Omega,$$

получаем

$$\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u}\cdot p + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}\cdot q + \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Поскольку в силу условий на $u(x,y)$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$

то полученные равенства можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial u}\cdot p+\frac{\partial F}{\partial x}=0$$
$$\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial u}\cdot q+\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x}(t)=\frac{\partial F}{\partial p},\quad \dot{y}(t)=\frac{\partial F}{\partial q},$$
$$\dot{p}(t)=-\frac{\partial F}{\partial x}-p\frac{\partial F}{\partial u},\quad \dot{q}(t)=-\frac{\partial F}{\partial y}-q\frac{\partial F}{\partial u}. \tag{2}$$

Так как u связано с p и q уравнением

$$du=pdx+qdy,$$

то, используя (2), получаем еще одно уравнение

$$\dot{u}(t)=p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}. \tag{3}$$

Систему уравнений (2), (3) можно рассматривать саму по себе, не зная решения $u=u(x,y)$ уравнения (1).

Definition

Автономная система уравнений (2), (3) называется характеристической системой уравнения (1).

Заметим, что функция $F(x,y,u,p,q)$ является первым интегралом этой характеристической системы. В самом деле, производная функции в силу системы (2), (3)

$$\dot{F}(t)=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\dot{x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\dot{y}+\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\dot{u}+\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\dot{p}+\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\dot{q}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial p}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial q}+$$
$$+\frac{\partial F}{\partial u}\left(p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}\right)-\frac{\partial F}{\partial p}\left(\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial u}\right)-\frac{\partial F}{\partial q}\left(\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial u}\right)\equiv 0$$

Следовательно, вдоль решения системы (2), (3) имеем

$$F(x,y,u,p,q)=F\left(x_0,y_0,u_0,p_0,q_0\right).$$

Выделим те из решений системы (2), (3), для которых первый интеграл $F(x,y,u,p,q)$ обращается в нуль.

Definition

Характеристической полосой уравнения (1) называется система функций

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad u=u(t),\quad p=p(t),\quad q=q(t), \tag{4}$$

удовлетворяющая характеристической системе уравнении (2), (3) и уравнепию $F(x,y,u,p,q)=0$.

Заметим, что для того, чтобы решение системы (2), (3) было характеристической полосой, достаточно потребовать, чтобы для начальных значений x_0,y_0,u_0,p_0,q_0 этого решения при $t=0\quad F\left(x_0,y_0,u_0,p_0,q_0\right)=0$.

Первые три уравнения (4) определяют пространственные кривые, называемые характеристиками уравнения (1). Последние два уравнения из (4) задают вдоль характеристики касательную плоскость

$$U - u = p(X - x) + q(Y - y).$$

Поскольку F-дважды непрерывно дифференцируемая функция, то характеристика однозначно определяется начальным элементом
(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0). В частности, если две интегральные поверхности уравнения (1) соприкасаются в некоторой точке, то они соприкасаются вдоль всей характеристики, проходящей через эту точку.

Из предыдущих рассмотрений следует, что всякое дважды непрерывно дифференцируемое решение (1) определяет поверхность, состоящую из характеристических полос уравнения (1). Оказывается, что и, наоборот, из характеристических полос уравнения (1) можно сгроить интегральные поверхности уравнения (1). Таким образом, задача нахождения решения нелинейного уравнения (1) может быть сведена к решению характеристической системы (2), (3).

Покажем, как методом Коши можно построить интегральную поверхность уравнения (1) при заданном начальном условии, т.е. как решать задачу Коши для уравнения (1).

Постановка задачи Коши для нелинейного уравнения (1) принципиально отличается от постановки задачи Коши для линейных и квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка. Различие здесь аналогично различию в постановке задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений $y' = f(x, y)$ и $F(x, y, y') = 0$: для уравнения $F(x, y, y') = 0$ начальные данные x_0, y_0, y_0' должны быть согласованы с уравнением, т.е. $F(x_0, y_0, y_0') = 0$. Для нелинейного уравнения (1) ситуация аналогичная: начальные значения неизвестной функции $u(x, y)$ и ее градиента должны быть согласованы с уравнением (1) и друг с другом.

Пусть на плоскости $R^2_{(x,y)}$ задана начальная кривая

$$\gamma : x = x_0(\tau), \quad y = y_0(\tau),$$

где $\tau \in \mathcal{I}$-некоторому промежутку оси R^1_τ, функции $x_0(\tau)$, $y_0(\tau)$ - дважды непрерывно дифференцируемы и $\dot{x}_0^2(\tau) + \dot{y}_0^2(\tau) > 0, \forall \tau \in \mathcal{I}$. Пусть, кроме того, заданы дважды непрерывно дифференцируемые функции $u_0(\tau), p_0(\tau), q_0(\tau), \forall \tau \in \mathcal{I}$. Начальное условие для уравнения (1) имеет вид:

$$u(x, y)|_{(x,y)\in\gamma} = u_0(\tau), \quad \tau \in \mathcal{I}, \tag{5}$$

где функции $x_0(\tau), y_0(\tau), p_0(\tau), q_0(\tau), u_0(\tau)$ таковы, что при $\forall \tau \in \mathcal{I}$

$$F[x_0(\tau), y_0(\tau), u_0(\tau), p_0(\tau), q_0(\tau)] = 0$$
$$\dot{u}_0(\tau) = p_0(\tau)\dot{x}_0(\tau) + q_0(\tau)\dot{y}_0(\tau)$$

Первое требование к начальному условию (5) согласует начальную полосу $x_0(\tau), y_0(\tau), u_0(\tau), p_0(\tau), q_0(\tau)$ при всех $\tau \in \mathcal{I}$ с уравнением (1), а второе требование к условию (5) означает, что функции начальной полосы между собой связаны указанной зависимостью.

Задача Коши для уравнения (1). Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию (5).

Геометрически начальное условие (5) задает гладкую пространственную кривую Г:

$$x = x_0(\tau), \quad y = y_0(\tau), \quad u = u_0(\tau), \quad \tau \in \mathcal{I},$$

для которой должны выполняться указанные в условии (5) два условия согласования. Решить задачу Коши (1), (5) геометрически означает найти такую интегральную поверхность уравнения (1), которая проходит через заданную кривую Г.

Приведем достаточные условия лекальной разрешимости задачи Коши (1), (5). Задача Коши (1), (5) решается методом характеристик (методом Коши). Рассмотрим точку $M\left(x_0\left(\tau_0\right), y_0\left(\tau_0\right), u_0\left(\tau_0\right)\right) \in \Gamma, \tau_0 \in \mathcal{I}$, и пусть $M_0\left(x_0, y_0\right) \in \gamma$-проекция точки M на плоскость $R^2_{(x,y)}$.

Definition

Точка $M_0 \in \gamma$ называется характеристической точкой уравнения (1), если

$$d = \left(\frac{\partial F}{\partial p_0} \cdot \dot{y}_0 - \frac{\partial F}{\partial q_0} \cdot \dot{x}_0\right)\Bigg|_{\tau=\tau_0} = 0.$$

Тот факт, что $M_0 \in \gamma$ является характеристической точкой уравнения (1), геометрически означает, что проекция на плоскость $R^2_{(x,y)}$ характеристической полосы уравнения (1) является касательной в точке M_0 к начальной кривой γ.

Theorem

Если точка $M_0 \in \gamma$ не является характеристической точкой уравнения (1), то в некоторой окрестности M_0 решение задачи Кощи (1), (5) существует и единственно.

Proof

Решение характеристической системы (2), (3), удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{array}{lll} x|_{t=0} = x_0(\tau), & y|_{t=0} = y_0(\tau) & \\ u|_{t=0} = u_0(\tau), & p|_{t=0} = p_0(\tau), & q|_{t=0} = q_0(\tau), \end{array}$$

обозначим через

$$x = x(t,\tau), \quad y = y(t,\tau), \quad u = u(t,\tau), \quad p = p(t,\tau), \quad q = q(t,\tau).$$

В силу условий теоремы это решение существует, единственно и дважды непрерывно дифференцируемо при $|t| < \delta$, где $\delta > 0$, и при всех $\tau \in I$. Отметим, что при этом используется то обстоятельство, что F, $x_0(\tau), y_0(\tau), u_0(\tau), p_0(\tau), q_0(\tau)$ - дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Поскольку якобиан

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,\tau)}\Bigg|_{t=0,\tau=\tau_0} = d \neq 0,$$

то систему уравнении $x = x(t,\tau), y = y(t,\tau)$ по теореме о системе неявных функций в окрестности $t = 0, \tau = \tau_0$ можно разрешить относительно t, τ и в результате попучаются дважды непрерывно дифференцируемые функции $t = t(x,y), \tau = \tau(x,y)$ в окрестности точки M_0. Покажем, что функция

$$u = u[t(x,y), \tau(x,y)] = u(x,y)$$

является решением задачи Коши (1), (5) в некоторой окрестности точки M_0.

Сначала установим, что

$$p = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Если показать, что в окрестности $t = 0, \tau = \tau_0$

$$U = \frac{\partial u}{\partial \tau} - p\frac{\partial x}{\partial \tau} - q\frac{\partial y}{\partial \tau} \equiv 0$$
$$V = \frac{\partial u}{\partial t} - p\frac{\partial x}{\partial t} - q\frac{\partial y}{\partial t} \equiv 0$$

то из этой линейной системы можно однозначно определить $p = \frac{\partial u}{\partial x}$, $q = \frac{\partial u}{\partial y}$, так как определителем системы при $t = 0, \tau = \tau_0$ служит $d \neq 0$ и, значит, в окрестности $t = 0, \tau = \tau_0$ этот определитель $d \neq 0$.

То, что $V \equiv 0$, непосредственно следует из характеристической системы (2), (3). Чтобы доказать, что $U \equiv 0$, рассмотрим тождество

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{\partial p}{\partial \tau}\frac{\partial x}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial q}{\partial \tau}\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial \tau}.$$

Если воспользоваться характеристической системой (2), (3) и тем, что $\frac{\partial V}{\partial \tau} \equiv 0$, то, дифференцируя по t и τ тождество $F \equiv 0$, отсюда получаем уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial u} \cdot U.$$

При фиксированном τ это уравнение является линейным уравнением для U как функции t. Так как по условию $U = 0$ при $t = 0$, то отсюда при всех t

$$U \equiv 0$$

Таким образом, установлено, что $p = \frac{\partial u}{\partial x}, q = \frac{\partial u}{\partial y}$ в окрестности точки M_0. В силу начального условия (5) и в силу того, что F является первым интегралом характеристической системы (2), (3), выражение $F(x, y, u, p, q)$ тождественно по t, τ обращается в нуль на поверхности $u(x, y)$. Следовательно, $F \equiv 0$ тождественно по (x, y) из окрестности M_0, т.е. $u = u(x, y)$ - решение задачи Коши (1), (5). Построенное решение единственно, так как решение характеристической системы однозначно определяется начальными условиями.

Пример. Найти интегральную поверхность уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 4u,$$

проходящую через кривую, заданную уравнениями

$$x = 0, \quad y = \tau, \quad u = \tau, \quad \tau \in R^1_\tau,$$

причем $p(\tau) \cdot q(\tau) = 4u(\tau), \dot{u}(\tau) = p(\tau)\dot{x}(\tau) + q(\tau) \cdot \dot{y}(\tau)$.

$\triangle$ Из условий на $p(\tau)$ и $q(\tau)$ находим, что

$$p = 4r, \quad q = 1$$

Характеристическая система имеет вид

$$\dot{x}(t) = q, \quad \dot{y}(t) = p, \quad \dot{p}(t) = 4p, \quad \dot{q}(t) = 4q, \quad \dot{u}(t) = 2pq.$$

Ее решением будет

$$p = c_1 e^{4t}, \quad q = c_2 e^{4t}, \quad x = \frac{c_2}{4} e^{4t} + c_3$$
$$y = \frac{c_1}{4} e^{4t} + c_4, \quad u = \frac{c_1 c_2}{4} e^{8t} + c_5$$

Испопьзуя начальные условия

$$x|_{t=0} = 0, \quad y|_{t=0} = \tau, \quad u|_{t=0} = \tau, \quad p|_{t=0} = 4\tau, \quad q|_{t=0} = 1,$$

находим, что $c_1 = 4\tau, c_2 = 1, c_3 = -\frac{1}{4}, c_4 = c_5 = 0$. Тогда $x(t,\tau) = \frac{1}{4}e^{4t} - \frac{1}{4}, y(t,\tau) = \tau e^{4t}, u(t,\tau) = \tau e^{8t}, p(t,\tau) = 4\tau e^{4t}, q(t,\tau) = e^{4t}$.
Отсюда находим решение в явном виде

$$u = (4x+1)y.$$

Если условия теоремы не выполнены, то решение задачи Копи (1), (5) может либо не существовать, либо быть не единственным. Об этом свидетельствует пример 4 из предыдущего параграфа.

Отметим, что при условии дважды непрерывно дифференцируемости F в теореме доказано существование дважды пепрерывно дифференцируемого решения задачи Коши (1), (5). Это по существу дела. Если фупкция F только непрерывно дифференцируема, то даже для аналитических начальных данных пе всегда существует решение задачи Коши (1), (5), являющееся непрерывно дифференцируемой функцией.

Другой метод решения задачи Коши (1), (5) основан на понятии полного интеграла уравнения (1).

Definition

Уравнение $\Phi(x,y,u,a,b) = 0$, где Φ - заданная непрерывно дифференцируемая функция своих переменных, a и b-независимые произвольные постоянные, определяющее неявно решение $u = u(x,y,a,b)$ уравнения (1), называется полным интегралом нелинейного уравнения (1). Лагранж показал, что все решения уравнения (1) могут быть получены из полного интеграла (1) путем вариации постоянных a и b (см. [41]).

Для нахождения полного интеграла уравнения (1) чаще всего применяется метод Лагранжа - Шарпи (об этом см. [41]). Перечислим некоторые простые случаи уравнения (1), когда нахождение полного интеграла (1) не вызывает затруднений.

1. Если $F \equiv F(p,q)$, то полный интеграл (1) имеет вид

$$u = ax + \varphi(a)y + b.$$

2. Если $F \equiv F(u,p,q)$, то полный интеграл (1) имеет вид

$$u = \Phi(ax + y, a, b).$$

3. Пусть в уравнении (1) переменные разделяются, т.е.

$$F(x,y,u,p,q) \equiv f_1(x,p) - f_2(y,q).$$

Тогда, если $p = \varphi_1(x,a)$ и $q = \varphi_2(y,a)$ - соответственно решения $f_1(x,p) = f_2(y,q) = a$, где a - произвольная постояниая, полный интеграл (1) имеет вид

$$u = \int \varphi_1(x,a)dx + \int \varphi_2(y,a)dy + b$$

4. Если $F \equiv u - px - qy - f(p,q)$, то его полным интегралом является

$$u = ax + by + f(a,b).$$

Зная полный интеграл (1), можно найти характеристические полосы (1), т.е. решить характеристическую систему (2), (3).

Упражнения к главе 8

1. Найти общее решение и решить задачу Копи:
   а) $(y-z)\frac{\partial u}{\partial x} + (x-z)\frac{\partial u}{\partial y} + (y-x)\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$
   $u = 2(x-y)$ при $x - z = 2y (y > 0)$.

6. $xe^z\frac{\partial u}{\partial x} - 2ye^z\frac{\partial u}{\partial y} + (2y-x)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u = -\frac{e^x}{x^3}$ при $y = -x (x > 0)$.

2. Найти интегральную поверхность уравнения

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$$

проходящую через кривую $x = 2, z = 1 + y^2$.

3. Найти интегральную поверхность уравнения

$$(x-y)\frac{\partial z}{\partial x} + (x+y)\frac{\partial z}{\partial y} = z$$

проходящую через кривую $x = \cos t, y = \sin t, z = t$.

4. Решить задачу Коши:
а) $x + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u = x$ при $y = 0$.
6) $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u = x$ при $y = 1$.

5. Решить уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u\frac{\partial u}{\partial y},$$

используя замену переменных $x_1 = x, y_1 = u, u_1 = y$.

13.9 Basics of variation calculus

Введение

Известно, какое важное значение для развития классического анализа функций одной или нескольких переменных имели задачи на отыскание экстремумов дифференцируемых функций. Однако еще с давних времен известны задачи на экстремум, которые нельзя отнести к задачам конечномерного математического анализа. Древнейшей такой задачей считается классическая изопериметрическая задача: среди плоских гладких замкнутых кривых заданной длины найти кривую, ограничивающую наибольшую площадь. Над этой проблемой размышляли греческие философы еще в V-IV вв. до н.э., в том числе и знаменитый греческий философ Аристотель. Им было известно, что такой кривой является окружность.

В качестве другой задачи на экстремум, не относящейся к классическому математическому анализу, следует назвать задачу о брахистохропе - линии быстрейшего ската, которую в 1696 г. поставил известный математик Иоганн Бернулли. В этой задаче

требуется найти гладкую линию, соединяющую две заданные точки A и B вертикальной плоскости, не лежащие на вертикальной прямой, по которой под действием силы тяжести материальная точка скатится из A в B в кратчайшее время (см. рис. 1).

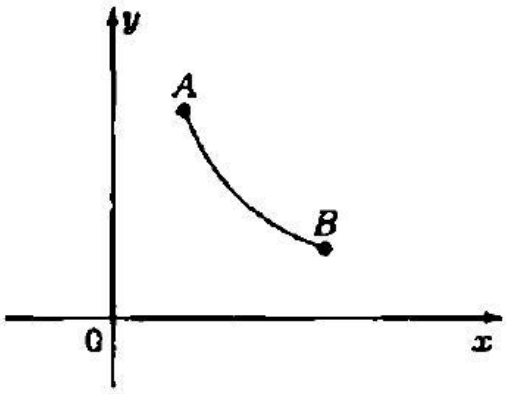


Рис. 1

Оказалось, что линией быстрейшего ската не будет отрезок прямой, соединяющей точки A и B, как это могло показаться, а такой линией будет дуга циклоиды (см. § 1).

С 1696 года началось систематическое развитие классического вариационного исчисления. Общие методы решения задач вариационного исчи-

сления разработаны JI. Эйлером, Ж. Лагранжем, К. Якоби, А. Лежандром, К. Вейерштрассом, У. Гамильтоном, Д. Гильбертом и др.

Чтобы определить предмет вариационного исчисления, рассмотрим действительное линейное нормированное пространство Y с нормой $\|y\|$ элементов $y \in Y$. Тогда функция

$$\rho(z, y) = \|y - z\|$$

определяет расстояние между элементами $y, z \in Y$, т.е. пространство Y является метрическим пространством с метрикой $\rho(z, y)$. Например, в линейном нормированном пространстве $\mathbb{C}[a, b]$ всех действительных непрерывных на $[a, b]$ функций норма

$$\|\varphi(x)\|_{\mathbb{C}[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |\varphi(x)|$$

задает метрику в этом пространстве.

Примером линейного нормированного пространства является также пространство $\mathbb{C}^k[a, b]k$ раз непрерывно дифференцируемых действительных функций $\varphi(x)$ на $[a, b]$ с нормой

$$\|\varphi(x)\|_{C^k|a,b|} = \max_{x \in [a,b]} |\varphi(x)| + \sum_{j=1}^{k} \max_{x \in [a,b]} |\ \varphi^{(j)}(x)\|.$$

Пусть M - некоторое множество элементов пространства Y и пусть R-множество всех действительных чисел.

Definition

Отображение $F : M \to R$ называется функционалом $F(y)$ с областью определения M.

Итак, на множестве M пространства Y задан функционал $F(y)$, если каждому эпементу $y \in M$ по правилу F поставлено однозначно в соответствие некоторое действительное число. Например, определенный интеграл

$$J(y) = \int_a^b y(x)dx, \quad -\infty < a < b < +\infty$$

рассматриваемый на множестве функций

$$M = \{y(x) \in \mathbb{C}[a,b] : y(a) = A, y(b) = B\}$$

где A и B-заданные числа, является функционалом с областью определения M в пространстве $\mathbb{C}[a,b]$.

Если $g(\zeta_1, \zeta_2)$ - непрерывная функция на всей плоскости $R^2_{(\zeta_1,\zeta_2)}$ с декартовыми прямоугольными координатами ζ_1, ζ_2 и $a, b(a < b)$ - некоторые заданные числа, то другим примером функционала является $J(y) = g[y(a), y(b)]$, заданный на множестве $M = \mathbb{C}[a,b]$.

Классическое вариационное исчисление изучает общие методы нахождения экстремумов функционалов, являющихся, как правило, некоторыми интсгралами, заданных в определенных функциональных пространствах. Как мы позже увидим, функционалы интегрального типа встречаются во многих задачах математики, механики и физики. Поэтому методы вариапионного исчисления широко используются в классической механике, математической физике, квантовой мехапике, механике сплопных сред и полей и в других разделах науки.

Отметим, что вариационное исчисление является разделом дифференциального исчисления в бесконечномерных пространствах Y и не является разделом классического анализа. Например, задача о брахистохроне не относится к конечномерному анализу, так как в ней должны сравниваться друг с другом все гладкие кривые, проходящие через заданные точки A и B, т.е. бесконечномерный объект. Таким образом, классическое вариационное исчисление является составной частью общей теории экстремальных задач для функционалов в бесконечномерных пространствах. Кроме классического вариационного исчисления, теория экстремальных задач в качестве своих разделов содержит также математическое и линейное программирование, оптимальное управление. Теория экстремальных задач интенсивно развивается и в настоящее время (см. [10], [14]).

В настоящей главе будут изложены элементы классического вариационного исчисления. Значения всех функций в этой главе предполагаются действительными.

13.9.1 § 1. The simplest variational problem

Обозначим через $\mathbb{C}^1[a,b]$ множество всех непрерывно дифференцируемых функций, заданных на $[a,b]$. Для $\forall y_1(x), y_2(x) \in \mathbb{C}^1[a,b]$ введем расстояние между ними по формуле

$$\|y_1(x) - y_(x)\|_{\mathbb{C}^1[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |y_1(x) - y_2(x)| + \max_{x\in[a,b]} |y_1'(x) - y_2'(x)|.$$

Множество функций $\mathbb{C}^1[a,b]$ с введенной метрикой является линейным нормированным пространством.

Пусть $F(x,y,p)$ - заданная непрерывно дифференцируемая функция для $\forall x \in [a,b]$ и $\forall (y,p) \in R^2_{(y,p)}$ - плоскости с декартовыми прямоугольными координатами y, p. Рассмотрим интеграл

$$J(y) = \int_a^b F[x, y(x), y'(x)]\, dx \tag{1}$$

на множестве M тех функций $y(x) \in \mathbb{C}^1[a,b]$, которые удовлетворяют граничным условиям

$$y(a) = A, \quad y(b) = B, \tag{2}$$

где A и B-заданные числа. Функции $y(x) \in M$ будем называть допустимыми.

Очевидно, для $\forall y(x) \in M$ интеграл (1) определен и задает функционал с областью определения M в пространстве $\mathbb{C}^1[a,b]$.

Definition

Говорят, что функция $\hat{y}(x) \in M$ дает слабый локальный минимум функционала (1), если $\exists$ число $\varepsilon > 0$ такое, что для $\forall y(x) \in M$, для которой $\|y(x) - \hat{y}(x)\|_{C^1[a,b]} < \varepsilon$, выполняется неравенство $J(y) \geq J(\hat{y})$.

Если в этом определении последнее неравенство заменить неравенством $J(y) \leq J(\hat{y})$, то для (1) получим определение слабого локального максимума. Оба понятия - слабый локальный минимум и слабый локальный максимум объединяются единым термином: слабый локальный экстремум.

Замечание. Кроме слабого локального экстремума, в классическом вариационном исчислении изучается еще сильный локальный экстремум, о чем будет речь впереди. Кроме того, употребляется термин абсолютного (или глобального) экстремума. Говорят, что $\hat{y}(x) \in M$ дает абсопютный минимум функционала (1), если $J(y) \geq J(\hat{y})$ для всех $y(x) \in M$. Если $J(y) \leq J(\hat{y})$ для всех $y(x) \in M$, то говорят, что $\hat{y}(x) \in M$ дает функционалу (1) абсопютный максимум. Абсолютные минимум и максимум объединяются единым термином абсолютного экстремума.

Definition

Задача нахождения слабого покального экстремума функционала (1) называется простейшей вариационной задачей.

Простейшую вариационную задачу иногда называют задачей с закрепленными концами в силу того, что допустимые кривые обязаны проходить через две закрепленные точки $M_1(a, A)$ и $M_2(b, B)$ (см. рис. 2) плоскости $R^2_{(x,y)}$.

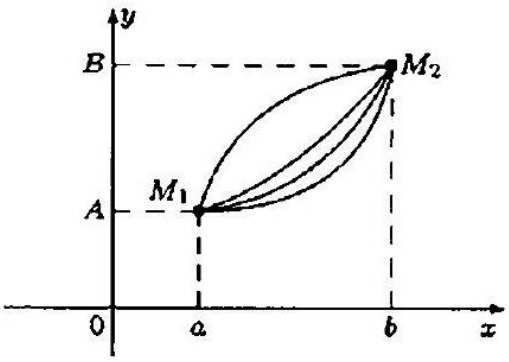


Рис. 2

Как известно, при исследовании функции на экстремум существенную роль играет производная функции. При исследовании экстремумов функционалов аналогичную роль играет вариация функционала. Введем это понятие.

Обозначим через $\dot{\mathbb{C}}^1[a,b]$ множество всех тех функций $y(x) \in \mathbb{C}^1[a,b]$, для которых $y(a) = y(b) = 0$.

Пусть $y(x) \in M$ и $\eta(x) \in \dot{\mathbb{C}}^1[a,b]$. Рассмотрим семейство функций, зависящих от действительного параметра $\alpha : y(x,\alpha) = y(x) + \alpha \cdot \eta(x)$. Поскольку $y(x,\alpha) \in M$ при $\forall\alpha$, то можно рассмотреть интеграл

$$J(y+\alpha\eta) = \int_a^b F\left[x, y(x)+\alpha\eta(x), y'(x)+\alpha\eta'(x)\right] dx \tag{3}$$

При фиксированных $y(x)$ и $\eta(x)$ интеграл (3) является собственным интегралом $\Phi(\alpha)$, зависящим от параметра α. Если взять некоторое $\varepsilon > 0$, то при $|\alpha| \le \varepsilon, x \in [a,b]$ подынтегральная функция F и ее производная по α в силу наложенных на F условий являются непрерывными. Тогда по известной из курса анализа теореме $\Phi(\alpha) = J(y+\alpha\eta)$ является дифференцируемой функцией α при $|\alpha| \le \varepsilon$ и по правилу Лейбница

$$\Phi'(0) = \frac{d}{d\alpha} J[y(x)+\alpha\eta(x)]\Big|_{\alpha=0} =$$
$$= \int_a^b \left\{ \frac{\partial F\left[x, y(x), y'(x)\right]}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial F\left[x, y(x), y'(x)\right]}{\partial y'} \cdot \eta'(x) \right\} dx$$

Definition

Допустимым приращением (вариацией) функции $y(x) \in M$ называется любая функция $\eta(x) \in \dot{\mathbb{C}}^1[a,b]$. Выражение $\frac{d}{d\alpha} J[y(x)+\alpha\eta(x)]\,|_{\alpha=0}$, где $\eta(x)$ - любая функция из $\dot{\mathbb{C}}^1[a,b]$, называется первой вариацией функционала $J(y)$ на функции $y(x)$ и обозначается $\delta J[y,\eta(x)]$, $\forall\eta(x) \in \dot{\mathbb{C}}^1[a,b]$.

Таким образом, вариация функционала (1)

$$\delta J[y,\eta(x)] = \int_a^b \left\{ \frac{\partial F\left[x, y(x), y'(x)\right]}{\partial y} \cdot \eta(x) + \frac{\partial F\left[x, y(x), y'(x)\right]}{\partial y'} \cdot \eta'(x) \right\} dx \tag{4}$$

где $\eta(x)$ - любая допустимая вариация функции $y(x) \in M$.

Отметим, что первая вариация $\delta J[y,\eta(x)]$ линейно зависит от $\eta(x)$ и $\eta'(x)$.

Замечание. Данное здесь определение первой вариации (по Лагранжу) функционала (1) является одним из аналогов определения дифференциала функций многих переменных $f(x)$. Для функционалов возможны и другие определения аналогов дифференциала таких функций: так называемые сильный дифференциал (дифференциал Фреше) функционала и слабый дифференциал (дифференциал Гато) функционала.

Теперь можно доказать необходимое условие решения простейшей вариационной задачи.

Theorem 1

Если $\hat{y}(x) \in M$ является решением простейшей вариационной задачи, то необходимо $\delta J[\hat{y},\eta(x)] = 0$ для любой допустимой $\eta(x)$.

Пусть для определенности $\hat{y}(x) \in M$ дает слабый локальный минимум для функционала $J(y)$, т.е. $\exists\varepsilon > 0$ такое, что $J(\hat{y}+h) \ge J(\hat{y})$ для $\forall h(x) \in \dot{\mathbb{C}}^1[a,b]$, для которой $\|h(x)\| < \varepsilon$. Положим $h(x) = \alpha\eta(x)$, где $\alpha \in R$, $\eta(x) \in \dot{\mathbb{C}}^1[a,b]$. Тогда $\hat{y}(x) + h(x) \in M$ и для достаточно малых $|\alpha|$ при фиксированной $\eta(x)$

$$\|h\|_{C^1[a,b]} = |\alpha| \left\{ \max_{[a,b]} |\eta(x)| + \max_{[a,b]} |\eta'(x)| \right\} < \varepsilon,$$
$$\Phi(\alpha) = J(\hat{y}+\alpha\eta) \ge J(\hat{y}) = \Phi(0).$$

Это значит, что дифференцируемая функция $\Phi(\alpha)$ имеет минимум при $\alpha = 0$. Значит, $\Phi'(0) = 0$, и тогда $\delta J[y, \eta(x)] = \Phi'(0) = 0, \forall \eta(x) \in \dot{\mathbb{C}}^1[a, b]$. $\square$

Теорема 1 является неудобной для практического использования. Чтобы получить удобное для практики необходимое условие решения простейшей вариационной задачи, предварительно установим лемму, которая в силу своей важности носит название основной леммы вариационного исчисления (или леммы Лагранжа).

Лемма. Если $f(x) \in \mathbb{C}[a, b]$ и $\int_a^b f(x)\eta(x)dx = 0$ для $\forall \eta(x) \in \dot{\mathbb{C}}^1[a, b]$, то $f(x) \equiv 0$ на $[a, b]$.

Proof.

Рассуждаем от противного. Пусть $f(x) \not\equiv 0$ на $[a, b]$. Тогда $\exists x_0 \in (a, b)$ такая, что $f(x_0) \neq 0$. Пусть для определенности $f(x_0) > 0$. Из непрерывности $f(x)$ на $[a, b]$ следует, что $\exists \varepsilon > 0$ такое, что $f(x) \geq \frac{1}{2} f(x_0)$, $\forall x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset (a, b)$. Возьмем

$$\eta(x) = \begin{cases} [x - (x_0 - \varepsilon)]^2 \cdot [x - (x_0 + \varepsilon)]^2, & x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon], \\ 0, & x \notin [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что функция $\eta(x) \in \dot{\mathbb{C}}^l[a, b]$. По интегральной теореме о среднем получаем, что

$$\int_a^b f(x)\eta(x)dx = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\eta(x)dx =$$
$$= f(\zeta) \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \eta(x)dx \geq \frac{1}{2} f(x_0) \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \eta(x)dx > 0$$

где $\zeta \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. А это неравенство противоречит условию теоремы. Значит, наше предположение о том, что $f(x) \not\equiv 0$ на $[a, b]$ неверно. Лемма доказана. $\square$

Theorem 2

Пусть функция $F(x, y, p)$ - дважды непрерывно дифференцируема при $\forall x \in [a, b], \forall (y, p) \in R^2_{(y,p)}$. Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $\hat{y}(x)$ является рещением простечиней вариационной задачи, то необходимо функция $\hat{y}(x)$ на $[a, b]$ удовлетворяет уравнению Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \tag{5}$$

(здесь $\frac{d}{dx}$ - полная производная по x).

Proof

Если $\hat{y}(x)$ - решение задачи, то в силу теоремы $1 \delta J[\hat{y}, \eta(x)] = 0$ для любой допустимой вариации $\eta(x)$. Учитывая, что $\eta(a) = \eta(b) = 0$, проинтегрируем по частям слагаемое, содержащее $\eta'(x)$ в формуле (4). Это законно, так как выражение

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F\left[x,y(x),y'(x)\right]}{\partial y'}\bigg|_{y=\dot{y}(x)}=$$
$$=\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial y}\cdot y'+\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\cdot y''\right]_{y=\dot{y}(x)}$$

в силу условий теоремы 2 является непрерывной на $[a,b]$ функцией. Имеем

$$0=\int_a^b\left\{\frac{\partial F\left[x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x)\right]}{\partial y}\cdot\eta(x)+\frac{\partial F\left[x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x)\right]}{\partial y'}\cdot\eta'(x)\right\}dx=$$
$$=\frac{\partial F\left[x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x)\right]}{\partial y'}\cdot\eta(x)\bigg|_{x=a}^{b}+\int_a^b\left\{\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right\}_{y=\hat{y}(x)}\cdot\eta(x)dx=$$
$$=\int_a^b\left\{\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right\}_{y=\hat{y}(x)}\cdot\eta(x)dx.$$

Поскольку функция $\eta(x)\in\dot{\mathbb{C}}^1[a,b]$, а функция

$$\left\{\frac{\partial F\left(x,y,y'\right)}{\partial y}-\frac{d}{dx}\cdot\frac{\partial F\left(x,y,y'\right)}{\partial y'}\right\}_{y=\hat{y}(x)}$$

является непрерывной на $[a,b]$, то в силу основной леммы вариационного исчисления

$$\left\{\frac{\partial F\left(x,y,y'\right)}{\partial y}-\frac{d}{dx}\cdot\frac{\partial F\left(x,y,y'\right)}{\partial y'}\right\}_{y=\hat{y}(x)}\equiv 0,\quad\forall x\in[a,b]$$

Это значит, что $\hat{y}(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера (5).

Definition

Всякое решение уравнения Эйлера (5) называют экстремалью функционала (1). Всякая же зкстремаль $y(x)$ функционала (1), являющаяся допустимой функцией, т.е. $y(x)\in M$, называется допустимой экстремалью функционала (1).

Из теоремы 2 вытекает, что только среди допустимых экстремалей (1), т.е. среди экстремалей (1), удовлетворяющих граничным условиям (2), нужно искать решение простейшей вариационной задачи.

Замечание. Условие непрерывности $\hat{y}''(x)$ в теореме 2 было наложено лишь с целью упрощения доказательства теоремы 2. Используя так называемую лемму Дюбуа-Реймона, можно доказать теорему 2 и без предположения непрерывности $\hat{y}''(x)$. Более того, если $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\Big|_{y=\hat{y}(x)}\neq 0$, то можно доказать и непрерывность $\hat{y}''(x)$ на $[a,b]$.

Уравнение Эйлера (5) является дифференциальным уравнением второго порядка при $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\not\equiv 0$, так как, найдя полную производную $\frac{d}{dx}\cdot\frac{\partial F}{\partial y'}$, его можно записать в виде

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}-\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial y}\cdot y'-\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\cdot y''=0.$$

Следовательно, экстремали функционала (1) образуют двухлараметрическое семейство $y\left(x,C_1,C_2\right)$. Допустимые экстремали функционала (1) находят, определяя параметры C_1,C_2 из граничных условий (2):

$$y\left(a,C_1,C_2\right)=A,\quad y\left(b,C_1,C_2\right)=B.$$

Из этой системы не всегда можно однозначио определить параметры C_1, C_2. Эта система не всегда имеет решение, а если решение существует, то оно может быть не единственным.

Example 1.

Решить простейшую вариационную задачу

$$J(y) = \int_{-1}^{1} e^x \left[(y')^2 + 6y^2 \right] dx, \quad y(-1) = 0, \quad y(1) = 2e^2 \operatorname{sh} 5$$

$\triangle$ Экстремали заданного функционала найдем, решая уравнение Эйлера

$$12e^x y - \frac{d}{dx}\left(2e^x y'\right) = 0$$

После упрощений оно принимает вид

$$y'' + y' - 6y = 0$$

Его решения $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}$ и будут экстремалями.
Допустимые экстремали находятся подстановкой формулы экстремалей в граничные условия. В результате вычислений находим, что допустимой экстремалью будет

$$\hat{y}(x) = e^{2x+5} - e^{-3x}$$

Покажем, что допустимая экстремаль дает абсолютный минимум. Для $\forall \eta(x) \in \mathbb{C}^1[-1,1]$ имеем:

$$\begin{aligned} J(\hat{y}+\eta) - J(\hat{y}) &= \int_{-1}^{1} \left\{ e^x \left[(\hat{y}' + \eta')^2 + 6(\hat{y}+\eta)^2 \right] - e^x \left[(\hat{y}')^2 + 6\hat{y}^2 \right] \right\} dx = \\ &= \int_{-1}^{1} e^x \left\{ 2\hat{y}\eta' + 12\hat{y}\eta + (\eta')^2 + 6\eta^2 \right\} dx = \\ &= \int_{-1}^{1} e^x \left\{ (\eta')^2 + 6\eta^2 \right\} dx + e^x \cdot 2\hat{y}\eta \big|_{x=-1}^{1} + \\ &+ \int_{-1}^{1} \left\{ 12e^x \hat{y} - \frac{d}{dx}\left(2e^x \hat{y}'\right) \right\} \eta(x) dx \end{aligned}$$

Проинтегрированная часть обращается в нуль, так как $\eta(-1) = \eta(1) = 0$, а последний интеграл равен нулю, так как $\hat{y}(x)$ - решение уравнения Эйлера. Следовательно, получаем, что

$$J(\hat{y}+\eta) - J(\hat{y}) = \int_{-1}^{1} e^x \left[(\eta'(x))^2 + 6(\eta(x))^2 \right] dx \geq 0$$

По определению, $\hat{y}(x)$ дает абсолютный минимум.
В этом простом примере уравнение Эилера легко решалось. Однако в общем случае уравнение Эилера решается лишь в исключительных случаях. Отметим простейшие случаи интегрируемости уравнений Эйлера.
а) $F = F(x, y)$, т.е. F не зависит от y'.

Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 0$ и не является дифференциальным уравнением. Его решение $y = y(x)$ в общем случае

не определяет допустимую экстремаль, так как оно не обязано удовлетворять граничным условиям (2), и, следовательно, вариационная задача не имеет решений.

6) $F = P(x,y) + Q(x,y)y'$, где P и Q - непрерывно дифференцируемые функции при $x \in [a,b], y \in R^1_y$.

В этом случае уравнение Эилера имеет вид

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

Как и в предыдущем случае, уравнение Эилера - не дифференциальное уравнение и вариационная задача, как правило, не имеет решений. Если же

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \equiv 0,$$

то $P(x,y)dx + Q(x,y)dy \equiv du(x,y)$ для некоторой дифференцируемой функции $u(x,y)$ и функционал

$$J(y) = \int_a^b (P + Qy')\,dx = \int_a^b (Pdx + Qdy)$$

не зависит от пути интегрирования. Так как значение $J(y)$ постоянно на множестве допустимых функций, то вариационная задача теряет смысл.

в) $F \equiv F(x,y')$, т.е. F не содержит y.

Уравнение Эйлера имеет вид $\frac{d}{dx}\frac{\partial F(x,y')}{\partial y'} = 0$, из чего следует $\frac{\partial F(x,y')}{\partial y'} = C$. Получили уже дифференциальное уравнение первого порядка, откуда находим экстремали задачи.

г) $F \equiv F(y,y')$, т.е. F не содержит x.

Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} \cdot y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot y'' = 0.$$

Умножив его на y', получим в левой части точную производную

$$\frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

Отсюда $F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = C$, т.е. получили дифференциальное уравнение первого порядка.

Пример 2 (задача о брахистохроне). Определить кривую в вертикальной плоскости, соединяющую заданные точки M_1, M_2, при движении по которой материальная точка под действием силы тяжести скатится из точки M_1 в точку M_2 в кратчайшее время (трением и сопротивлением среды пренебрегаем).

$\triangle$ Поместим начало координат O в точку M_1, ось Ox направим горизонтально, ось Oy - вертикально вниз. Тогда скорость движения материальной точки $v = S(t) = \sqrt{2gy}$. Отсюда находим $dt = \frac{dS}{v} = \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{\sqrt{2gy(x)}}dx$ и время движения материальной точки

$$t(y) = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^l \sqrt{\frac{1+y^2(x)}{y(x)}}dx, \quad y(0) = 0, \quad y(l) = B$$

В силу пункта г) уравнение Эйлера дает уравнение первого порядка вида

$$\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y\left(1+y'^2\right)}} = C.$$

После упрощений это уравнение примет вид

$$y\left(1+y'^2\right) = C_1$$

Введем параметр t, полагая $y' = \operatorname{ctg} t$. Тогда получим:

$$y = C_1 \sin^2 t = \frac{1}{2} C_1 (1 - \cos 2t)$$
$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{2C_1 \sin t \cos t dt}{\operatorname{ctg} t} = 2C_1 \sin^2 t dt = C_1 (1 - \cos 2t) dt$$
$$x = C_1 \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C_2 = \frac{1}{2} C_1 (2t - \sin 2t) + C_2$$

Из условий $x(0) = y(0) = 0$ получаем, что $C_2 = 0$. Таким образом, параметрическое уравнение искомой кривой имеет вид

$$x = \frac{1}{2} C_1 (2t - \sin 2t), \quad y = \frac{1}{2} C_1 (1 - \cos 2t)$$

где C_1 определяется из условия $y(l) = B$. Параметрическое уравнение задает семейство циклоид и, значит, брахистохроной является циклоида.

Иногда для упрощения решения уравнения Эйлера (5) следует пользоваться инвариантностью уравнения Эилера относительно замены переменных в функционале (1). Определим понятие инвариантности уравнения Эйлера.

Пусть пара дважды непрерывно дифференцируемых функций $x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v)$ с якобианом $\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)} \neq 0$ взаимно однозначно отображает полосу $\Pi_1 = \{(x, y) : x \in [a, b], y \in (-\infty, +\infty)\}$ плоскости $R^2_{(x,y)}$ с декартовыми прямоугольными координатами x, y на полосу $\Pi_2 = \{(u, v) : u \in [\alpha, \beta], v \in (-\infty, +\infty)\}$ плоскости $R^2_{(u,v)}$ с декартовыми прямоугольными координатами u, v.

Введем в функционале (1) вместо x, y новые переменные u, v, полагая $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v)$ и считая $v = v(u)$. При этом получаем функционал

$$J_1(v) = \int_\alpha^\beta F \left[\varphi(u, v), \psi(u, v), \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\psi}{\partial v} \cdot v'}{\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial v} \cdot v'} \right] \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial v} \cdot v' \right) du =$$
$$= \int_\alpha^\beta \Phi \left[u, v(u), v'(u) \right] du$$

если предполагать дополнительно, что $\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial v} v' \neq 0$. Тогда можно доказать, что уравнение Эилера (5) эквивалентно уравнению Эйлера для функционала $J_1(v)$:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial v} - \frac{d}{du} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial v'} = 0 \tag{6}$$

В этом и заключается инвариантность уравнения Эйлера. Итак, формула всех экстремалей (1) получается из формулы экстремалей для функционала $J(v)$, если в ней сделать обратную замену к замене $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$.

Example 3.

Найти экстремали функционала

$$J(y) = \int_0^{\ln 2} \left(e^{-x} y'^2 - e^x y^2 \right) dx, \quad y(0) = 1, \quad y(\ln 2) = 2$$

$\triangle$ Уравнение Эйлера для $J(y)$ имеет вид

$$y'' - y' + e^{2x} y = 0$$

Так сразу неясно, как решить это уравнение. Поэтому в функционале сделаем замену переменных $x = \ln u, y = v$. Исходный функционал преобразуется к виду

$$J_1(v) = \int_1^2 \left(e^{-\ln u} \cdot u^2 \cdot v'^2 - e^{\ln u} \cdot v^2\right) \frac{du}{u} = \int_1^2 \left(v'^2 - v^2\right) du$$

Для $J_1(v)$ уравнением Эйлера будет уравнение $v'' + v = 0$, которое легко решается. Его общим решением будет

$$v = A \sin(u + \varphi)$$

где A и φ - постоянные. Переходя к координатам x, y, получим уравнение экстремалей исходного функционала

$$y = A \sin\left(e^x + \varphi\right)$$

Приведем теперь пример, показывающий, что уравнение Эйлера (5) необходимое, но не достаточное условие локального экстремума функционала (1).

Example 4.

Решить простейшую вариационную задачу:

$$J(y) = \int_0^\pi \left[\left(y'(x)\right)^2 - \frac{25}{4} y^2(x)\right] dx, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 2$$

$\triangle$ Уравнение Эилера: $y'' + \frac{25}{4} y = 0$.
Его общее решение: $y = C_1 \cos \frac{5x}{2} + C_2 \sin \frac{5x}{2}$.
Допустимая экстремаль: $\hat{y}(x) = \cos \frac{5x}{2} + 2 \sin \frac{5x}{2}$.
Нетрудно определить, что при $\forall \eta(x) \in \dot{\mathbb{C}}^1[0, \pi]$

$$\Delta J(\hat{y}) = J(\hat{y} + \eta) - J(\hat{y}) = \int_0^\pi \left[\eta'^2(x) - \frac{25}{4} \eta^2(x)\right] dx$$

Возьмем $\eta_{m,n}(x) = \frac{1}{n} \sin mx \in \dot{\mathbb{C}}^1[0, \pi]$, где параметры $m \in N, n \in \mathrm{N}$. Тогда

$$\Delta J(\hat{y}) = J\left(\hat{y} + \eta_{m,n}\right) - J(\hat{y}) = \left(m^2 - \frac{25}{4}\right) \cdot \frac{\pi}{2n^2}$$

Следовательно, $\Delta J(\hat{y}) < 0$ при $m < \frac{5}{2}$ и $\Delta J(\hat{y}) \geq 0$ при $m \geq \frac{5}{2}$. Значит, $\hat{y}(x)$ не дает решения вариационной задачи.

13.9.2 § 2. Generalizations of the simplest variational problem for the case of functionals of a more general integral type

В этом параграфе будут рассмотрены вариационные задачи для интегралов трех типов:

1. интегралов, зависящих от нескольких неизвестных функций,
2. интегралов, содержащих производные высших порядков,
3. двойных интегралов.

Во всех случаях будет поставлена соответствующая вариационная задача и установлено необходимое условие решення такой задачи.

1. Функционалы, зависящие от нескольких функций

Пусть $\mathbb{C}_n^l[a,b]$ обозначает множество всех вектор-функций $y(x)$ с n непрерывно дифференцируемыми на $[a,b]$ декартовыми прямоугольными координатами $y_1(x),...,y_n(x)$. Для $\forall y(x), z(x) \in \mathbb{C}_n^l[a,b]$ введем расстояние
между ними по формуле:

$$\|y(x)-z(x)\|_{C_n'[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |y(x)-z(x)| + \max_{x\in[a,b]} |\, y'(x)-z'(x)\|.$$

Тогда $\mathbb{C}_n^1[a,b]$ является линейным нормированным пространством.
Рассмотрим интеграл

$$J(y) = \int_a^b F\left[x, y(x), y'(x)\right] dx \tag{1}$$

где a, b - заданные числа, $a < b$, и $F(x,y,p)$ - заданная дважды непрерывно дифференцируемая функция при всех $x \in [a,b], (y,p) \in R_{(y,p)}^{2n}$ ($R_{(y,p)}^{2n}$ – $2n$-мерное пространство с декартовыми прямоугольными координатами $y = (y_1,...,y_n)\,, p = (p_1,...,p_n)$), на множестве вектор-функций

$$M = \left\{y(x) \in \mathbb{C}_n^1[a,b] : y(a) = A, y(b) = B\right\}$$

где A и B - заданные числовые n-мерные векторы.
При заданных условиях интеграл (1), очевидно, определяет функционал с областью определения M в пространстве $\mathbb{C}_n^1[a,b]$.

Definition

Говорят, что $\hat{y}(x) \in M$ дает слабый локальный минимум (1), если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любой $y(x) \in M$, для которой $\|y(x)-\hat{y}(x)\|_{C_n^1[a,b]} < \epsilon$, получаем $J(y) \geq J(\hat{y})$.

Аналогично определяется понятие слабого локального максимума для (1). Слабые локальные минимум и максимум для (1) объединяются термином слабого локального экстремума функционала (1). Как и в случае простейшей задачи, для функционала (1) можно определить и понятие абсолютного экстремума.

Theorem 1

Если дважды непрерывно дифференцируемая вектор-фунжция $\hat{y}(x) \in M$ дает слабый локальный экстремул функционала (1), то $\hat{y}(x)$ необходимо на $[a,b]$ удовлетворяет системе уравнений Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\cdot\frac{\partial F}{\partial y_i'} = 0, \quad i = \widetilde{1,n} \tag{2}$$

Proof

Обозначим компоненты $\hat{y}(x)$ через $\hat{y}_1(x),...,\hat{y}_n(x)$. Положив в (1) $y_2(x) \equiv \hat{y}_2(x),...,y_n(x) \equiv \hat{y}_n(x)$, получим для функционала $J\left(y_1\right)$ простейшую задачу, решением которой является $\hat{y}_1(x)$. Из необходимого условия решения простейшей вариационной задачи получаем тогда, что $\hat{y}(x)$ удовлетворяет первому уравнению системы (2). Далее в (1), фиксируя $y_1(x) \equiv \hat{y}_1(x), y_3(x) \equiv \hat{y}_3(x),...,y_n(x) \equiv \hat{y}_n(x)$, получаем простейшую вариационную задачу для $J\left(y_2\right)$, решением которой служит $\hat{y}_2(x)$. Выполнение уравнения Эйлера для $\hat{y}_2(x)$ означает, что $\hat{y}(x)$ удовлетворяет второму

уравнению системы (2). и т.д. Наконец, полагая в (1)
$y_1(x) \equiv \hat{y}_1(x), ..., y_{n-1}(x) \equiv \hat{y}_{n-1}(x)$, получим простейшую вариационную задачу для $J(y_n)$, решением которой является $\hat{y}_n(x)$. Следовательно, $\hat{y}_n(x)$ удовлетворяет n-му уравнению системы (2) уравнению Эйлера, а это значит, что $\hat{y}(x)$ удовлетворяет всей системе (2).

Definition

Всякое решение системы уравнений Эилера (2) называется экстремалью функционала (1), а всякая экстремаль (1), принадлежащая множеству M, называется допустимой экстремалью функционала (1).

Из теоремы 1 следует, что только среди допустимых экстремалей функционала (1) могут быть функции, дающие (1) слабый локальный экстремум. Но допустимая экстремаль не обязана давать этот экстремум для (1) всегда. Система Эйлера (2) содержит n уравнений второго порядка для $y_1(x), ..., y_n(x)$.

В общем случае решение системы (3) зависит от $2n$ параметров. Для получения допустимых экстремалей функционала (1) нужно определить эти параметры из заданных $2n$ граничных условий $y(a) = A, y(b) = B$.

Example 1.

Найти допустимые экстремали функционала

$$J(y,z) = \int_0^{\pi/2} \left[(y')^2 + (z')^2 + 2yz + 2xy \right] dx$$
$$y(0) = -1, \quad z(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad z\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

$\triangle$ Система уравнений Эйлера для $J(y,z)$ имеет вид

$$\begin{cases} x + z - y'' = 0 \\ y - z'' = 0 \end{cases}$$

Подставляя $y = z''$ в первое уравнение системы, получаем

$$z^{(IV)} - z = x$$

Общее решение этого уравнения

$$z = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x - x$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 - произвольные постоянные. Так как

$$y = z'' = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - c_3 \cos x - c_4 \sin x$$

то, подставляя y, z в граничные условия, получим линейную систему для определения c_1, c_2, c_3, c_4. Отсюда находим, что $c_1 = c_2 = c_4 = 0$, $c_3 = 1$. Следовательно, пара функций $y = -\cos x, z = \cos x - x$ определяет допустимую экстремаль.

2. Функционалы, содержащие производные высших порядков

Обозначим через $\mathbb{C}^k[a,b]$ множество всех k раз непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ скалярных функций. Для $\forall y_1(x), y_2(x) \in \mathbb{C}^k[a,b]$ введем расстояние между ними по формуле:

$$\|y_1(x) - y_2(x)\|_{\mathbb{C}^k[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} |y_1(x) - y_2(x)| +$$
$$+ \sum_{j=1}^{k} \max_{x\in[a,b]} \left| y_1^{(j)}(x) - y_2^{(j)}(x) \right| .$$

Тогда $\mathbb{C}^k[a,b]$ является линейным нормированным простраиством.
Через $\mathbb{C}^\star[a,b]$ будем обозначать множество всех тех $y(x) \in \mathbb{C}^\star[a,b]$, для которых $y^{(j)}(a) = y^{(j)}(b) = 0, j = \overline{0, k-1}$.

Имеет место следующее обобщение основной леммы вариационного исчисления.

Lemma 1.

Если $f(x) \in \mathbb{C}[a,b]$ и $\int_a^b f(x)\eta(x)dx = 0 \quad \partial\kappa\Re\forall\eta(x) \in \dot{\mathbb{C}}^k[a,b]$, то $f(x) \equiv 0$ на $[a,b]$.

Эта лемма доказывается в точности тем же способом, что и основная лемма вариационного исчисления, с тем только изменением, что в качестве $\eta(x)$ берется функция

$$\eta(x) = \begin{cases} [x - (x_0 - \varepsilon)]^{2k} \cdot [x - (x_0 + \varepsilon)]^{2k}, & x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] , \\ 0, & x \notin [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] . \end{cases}$$

Рассмотрим интеграл вида

$$J(y) = \int_a^b F\left[x, y(x), y'(x), ..., y^{(k)}(x)\right] dx \tag{3}$$

где a, b - заданные числа, $a < b, F(x, y, p_1, ..., p_k)$ - заданная функция, непрерывно дифференцируемая $(k+1)$ раз при всех $x \in [a,b]$, $(y, p_1, ..., p_k) \in R^{k+1}_{y,p_1,...,p_k}$. Здесь $R^{k+1}_{y,p_1,...,p_k}$ обозначает ($k+1$)-мерное пространство с декартовыми прямоугольными координатами $y, p_1, ..., p_k$.

Определим интеграл (3) на множестве функций

$$M = \left\{ y(x) \in \mathbb{C}^\star[a,b] : y^{(j)}(a) = A_j, y^{(j)}(b) = B_j, j = \overline{0, k-1} \right\}$$

где A_j, B_j-заданные числа при всех $j = \overline{0, k-1}$. Интеграл (3) задает функционал с областью определения M в пространстве $\mathbb{C}^k[a,b]$.

Definition

Говорят, что $\hat{y}(x) \in M$ дает слабый локальный минимум функционала (3), если $\exists\varepsilon > 0$ такое, что любая $y(x) \in M$, для которой
$\|y(x) - \hat{y}(x)\|_{c^\star[a,b]} < \varepsilon$, выполнено неравенство $J(y) \geq J(\hat{y})$. Аналогично определяется для (3) слабый локальный максимум. Термин слабый локальный экстремум функционала (3) объединяет понятия слабых локальных минимума и максимума для (3).

Нас будет интересовать необходимое условие слабого локального экстремума функционала (3) при $k > 1$, поскольку при $k = 1$ отсюда получаем уже известную нам простейшую вариационную задачу.

Сначала определим понятие первой вариации для функционала (3).
Пусть $y(x) \in M$ и $\eta(x) \in \dot{\mathbb{C}}^k[a,b]$. Рассмотрим функцию $\Phi(\alpha) = J(y + \alpha\eta)$, где $\alpha \in R$. При фиксированных $y(x)$ и $\eta(x)$ функция $F\left[x, y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta', ..., y^{(k)} + \alpha\eta^{(k)}\right]$ и ее производная $\frac{\partial F}{\partial \alpha}$ - непрерывны для $x \in [a,b]$ и $|\alpha| \leq \varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$. Следовательно, по теореме из курса анализа собственный интеграл $\Phi(\alpha)$ является непрерывно дифференцируемой функцией α при $|\alpha| \leq \varepsilon$ и по правилу Лейбница

$$\Phi'(0) = \left.\frac{dJ(y+\alpha\eta)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} =$$
$$= \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\eta'(x) + \cdots + \frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}\cdot\eta^{(k)}(x)\right]dx$$

Definition

Выражение $\Phi'(0)$, где $\eta(x)$ - любая функция из $\dot{\mathbb{C}}^k[a,b]$, называется первой вариацией функционала (3) и обозначается $\delta J[y,\eta(x)]$. Таким образом,

$$\delta J[y,\eta(x)] = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'(x) + \cdots + \frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}\eta^{(k)}(x)\right]dx$$

где $\forall\eta(x)\in\dot{\mathbb{C}}^k[a,b]$.

Theorem 2

Пусть $\hat{y}(x)\in M$ является $2k$ раз непрерывно дифференцируемой функцией и дает слабый локальный эхстремум функционала (3). Тогда $\hat{y}(x)$ необходимо на $[a,b]$ удовлетворяет уравнению Эйлера-Пуассона

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\cdot\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\cdot\frac{\partial F}{\partial y''} - \cdots + (-1)^k\frac{d^k}{dx^k}\cdot\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} = 0. \tag{4}$$

(здесь $\frac{d}{dx}$ - полная производная по x).

Proof

Если $\hat{y}(x)$ дает слабый локальный экстремум функционалу (1), то $\alpha = 0$ дает локальный экстремум функции $\Phi(\alpha)$. Это устанавливается рассуждением, аналогичным проведенному в теореме 1 § 1. Значит, $\Phi'(0) = 0$. Из определения $\delta J[y,\eta(x)]$ получаем, что тогда $\delta J[\hat{y},\eta(x)] = 0$ для всех $\eta(x)\in\dot{\mathbb{C}}^k[a,b]$.

Проинтегрируем по частям каждое слагаемое в формуле $\delta J[\hat{y},\eta(x)]$ начиная со второю, столько раз, сколько нужно, чтобы избавиться от всех производных $\eta(x)$. Это законно в силу того, что F пепрерывно дифференцируема $(k+1)$ раз и что $\hat{y}(x)$ непрерывно дифференцируема $2k$ раз. Все проинтегрированные члены обратятся в нуль из-за нулевых граничных условий для $\eta(x)$ и ее производных. В результате получаем равенство

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\cdot\frac{\partial F}{\partial y'} + \cdots + (-1)^k\frac{d^k}{dx^k}\cdot\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}\right]_{y=\hat{y}(x)}\cdot\eta(x)dx = 0$$

где $\forall\eta(x)\in\mathbb{C}^k[a,b]$.
Условия теоремы на F и $\hat{y}(x)$ обеспечивают непрерывность на $[a,b]$ выражения в квадратных скобках под знаком интеграла. Из обобщения основной леммы вариационного исчисления, леммы 1 , тогда следует, что это выражение - тождественный нуль на $[a,b]$. А это и значит, что $\hat{y}(x)$ удовлетворяет уравнению (4). $\square$

Definition

Каждое решение уравпения (4) называется экстремалью функционала (3), а решение уравнения (4), принадлежащее M, называется допустимой экстремалью функционала (3).

В общем случае уравнение (4) является дифференциальным уравнением порядка $2k$ и имеет семейство решений, зависящее от $2k$ параметров. Чтобы на практике определить допустимые экстремали (3), необходимо эти параметры найти из $2k$ граничных условий $y^{(j)}(a) = A_j, y^{(j)}(b) = B_j,\ j = \overline{0, k-1}$. Из теоремы 2 получаем, что топько среди допустимых экстремалей функционала (3) может быть функция, реализующая экстремум функционала (3).

Заметим, что при условиях теоремы 2 тот факт, что $\hat{y}(x)$ - экстремаль (3), эквивалентен условию $\delta J[\hat{y}, \eta(x)] = 0$ для всех допустимых $\eta(x)$. Поэтому допустимой экстремалью можно было бы и пазвать решение уравнения $\delta J[y, \eta(x)] = 0$ при всех допустимых $\eta(x)$.

Аналогично простейшей вариационной задаче для функционала (1) можно ввести и понятие абсолютного экстремума.

Example 2.

Найти допустимые экстремали функционала

$$J(y) = \int_0^1 \left[(y'')^2 + (y')^2 - 24xy\right] dx,$$
$$y(0) = y(1) = 0, \quad y'(0) = 2, \quad y'(1) = -4.$$

$\triangle$ Уравнение Эилера для $J(y)$ имеет вид

$$y^{(IV)} - y'' = 12x$$

Его решение

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + c_4 e^x - 2x^3.$$

Из граничных условий находим, что $c_1 = c_3 = c_4 = 0, c_2 = 2$.
Допустимая экстремаль: $y = 2x\,(1 - x^2)$.

3. Случай двойных интегралов

Пусть Q - ограниченная, измеримая по Жордану область плоскости $R^2_{(x,y)}$ с декартовыми прямоугольными координатами x, y и пусть $\bar{Q}$ замыкание Q. Обозначим через $\mathbb{C}^1(\bar{Q})$ множество всех непрерывно дифференцируемых на $\bar{Q}$ функций. Для $\forall u(x,y), v(x,y) \in \mathbb{C}^l(\bar{Q})$ введем расстояние между ними по формуле

$$\|u(x,y) - v(x,y)\|_{\mathbb{C}^1(\bar{Q})} = \max_{(x,y)\in\bar{Q}} |u(x,y) - v(x,y)| +$$
$$+ \max_{(x,y)\in\bar{Q}} \left|\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right| + \max_{(x,y)\in\bar{Q}} \left|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right|$$

Множество $\mathbb{C}^1(\bar{Q})$ с введенным расстоянием является линейным нормированным пространством.

Границу области Q обозначим через ∂Q и будем считать в дальнейшем ∂Q кусочно-гладкой кривой.

Через $\dot{\mathbb{C}}^1(\bar{Q})$ обозначим множество всех тех $u(x,y) \in \mathbb{C}^1(\bar{Q})$, для которьх $u|_{\partial Q} = 0$, а через $\mathbb{C}(\bar{Q})$ обозначим множество всех непрерывных на $\bar{Q}$ функций.

Имеет место двумерный аналог основной леммы вариационного исчисления.

Lemma 2.

Если $f(x,y) \in \mathbb{C}(\bar{Q})$ и $\iint_Q f(x,y)\eta(x,y)dxdy = 0$ для $\forall \eta(x,y) \in \dot{\mathbb{C}}^1(\bar{Q})$, то $f(x,y) \equiv 0$ в области $\bar{Q}$.

Proof

Рассуждаем от противного. Пусть существует точка $(\zeta,\eta) \in Q$ такая, что $f(\zeta,\eta) > 0$. В силу непрерывности $f(x,y)$ найдется внутри Q круг $K_r(\zeta,\eta)$ радиуса r с цептром в точке (ζ,η) такой, что $f(x,y) > 0$ для $\forall (x,y) \in K_r(\zeta,\eta)$. Попожим $(K_r(\zeta,\eta) \subset Q)$

$$\eta(x,y) = \begin{cases} [(x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2 - r^2], & (x,y) \in K_r(\zeta,\eta), \\ 0, & (x,y) \notin K_r(\zeta,\eta). \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $\eta(x,y) \in \dot{\mathbb{C}}^1(\bar{Q})$. Но

$$\iint_Q f(x,y)\eta(x,y)dxdy = \iint_{K_r(\zeta,\eta)} f(x,y)\eta(x,y)dxdy > 0$$

что противоречит условию леммы 2 .

Рассмотрим теперь двойной интеграл

$$J(u) = \iint_Q F\left[x, y, u(x,y), \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right] dxdy \tag{5}$$

где $F(x,y,u,v,w)$ - заданная дважды непрерывно дифференцируемая функция при $\forall (x,y) \in \bar{Q}, \forall (u,v,w) \in R^3_{(u,v,w)}$. Здесь $R^3_{(u,v,w)}$ обозначает пространство с декартовыми прямоугольными координатами u, v, w.

Интеграл (5) будем рассматривать на множестве функций

$$M = \left\{ u(x,y) \in \mathbb{C}^1(\bar{Q}) : u|_{\partial Q} = g(x,y) \right\}$$

где $g(x,y)$ - заданная непрерывная на кривой ∂Q функция.
В силу условий на F и $u(x,y)$ интеграл (5) является функционалом с областью определения M в пространстве $\mathbb{C}^l(\bar{Q})$.

Definition

Говорят, что функция $\hat{u}(x,y) \in M$ дает слабый локальный минимум (максимум) функционалу (5), если $\exists \varepsilon > 0$ такое, что для любой $u(x,y) \in M$, для которой $\|u(x,y) - \hat{u}(x,y)\|_{\mathbb{C}^1(\bar{Q})} < \varepsilon$, выполняется неравенство $J(u) \geq J(\hat{u})(J(u) \leq J(\hat{u}))$.

Слабые локальные минимум и максимум объединяются термином слабого локального экстремума (5).

Для функционала (5) вводится также естественным образом и понятие абсолютного экстремума.

Для того, чтобы установить необходимее условие слабого локального экстремума функционала (5), введем понятие первой вариации функционала (5).

Пусть $u(x,y) \in M$ и $\eta(x,y) \in \dot{\mathbb{C}}^1(\bar{Q})$. Рассмотрим функцию $\Phi(\alpha) = J(u + \alpha\eta)$, где $\alpha \in R$. При фиксированных $u(x,y), \eta(x,y)$ функции F, $\frac{\partial F}{\partial \alpha}$ - непрерывны $\forall (x,y) \in \bar{Q}$ и $|\alpha| \leq \varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$. Поэтому по теореме из курса анализа собственный интеграл $\Phi(\alpha)$ является непрерывно дифференцируемой функцией α и по правилу Лейбница

$$\Phi'(0) = \left.\frac{dJ(u+\alpha\eta)}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \\ = \iint_Q \left[\frac{\partial F}{\partial u}\eta + \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\right] dxdy$$

где $p = \frac{\partial u}{\partial x}, q = \frac{\partial u}{\partial y}, \forall \eta(x,y) \in \dot{\mathbb{C}}^1(\bar{Q})$.

Definition

Выражение $\Phi'(0)$ называется первой вариацией функционала (5) и обозначается $\delta J(u,\eta)$, где $\eta = \eta(x,y)$ - произвольная функция из $\dot{\mathbb{C}}^1(\bar{Q})$.

Теперь докажем необходимое условие слабого локального экстремума для (5).

Theorem 3

Пусть $\hat{u}(x,y) \in M$ является двающы непрерывно дифференцируемой функцией в $\bar{Q}$ и дает слабый локальный экстремум функционала (5). Тогда $\hat{u}(x,y)$ необходимо в Q удовлетворяет уравнению Эилера-Остроградского

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial q} = 0 \tag{6}$$

(здесь $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ - полные частные производные).

Proof

Так как $\hat{u}(x,y)$ дает экстремум функционалу (5), то функция $\Phi(\alpha)$ имеет экстремум при $\alpha = 0$. Следовательно, $\Phi'(0) = 0$, а, значит, и $\delta J(\hat{u},\eta) = 0$ для всех $\eta(x,y) \in \hat{\mathbb{C}}^1(\bar{Q})$. Заметив, что

$$\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial F}{\partial p}\right) - \eta\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial p}$$
$$\frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial F}{\partial q}\right) - \eta\frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial q}$$

и воспользовавшись формулой Грина и тем фактом, что $\eta|_{\partial Q} = 0$, последние два слагаемые в формуле $\delta J(\hat{u},\eta)$ преобразуем следующим образом:

$$\iint_Q \left(\frac{\partial F}{\partial p}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial q}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) dxdy = \\ = \iint_Q \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial F}{\partial p}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial F}{\partial q}\right)\right] dxdy - \iint_Q \eta\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial q}\right) dxdy = \\ = -\int_Q \eta\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial q}\right) dxdy + \int_{\partial Q} \eta\frac{\partial F}{\partial p}dy - \eta\frac{\partial F}{\partial q}dx = \\ = -\iint_Q \eta\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial F}{\partial q}\right) dxdy$$

Таким образом, имеем, что для $\forall \eta(x,y) \in \dot{\mathbb{C}}^1(\bar{Q})$

$$\iint_Q \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial F}{\partial q} \right) \eta(x,y) dxdy = 0$$

Отсюда в силу леммы 2 получаем уравнение (6).

Definition

Всякое решение уравнения (6) называется экстремалью функционала (5), а всякая экстремаль (5), принадлежащая M, называется допустимой экстремалью функционала (5). Уравнение (6) представляет собой уравнение в частных производных второго порядка.

Проведенные построения переносятся и на тот случай, когда вместо двойного интеграла (5) рассматривается n-кратный интеграл.

Example 3.

Для функционала

$$J(u) = \iint_Q \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy, \quad u|_{\partial Q} = g(x,y)$$

уравнением Эйлера-Остроградского является уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Известно, что гармоническая функция $u(x,y)$ в Q, для которой $u|_{\partial Q} = g(x,y)$, существует и единственна. Однако не при всякой непрерывной $g(x,y)$ можно ожидать, что эта функция является допустимой экстремалью функционала (5), так как не всегда можно утверждать, что первые производные функции $u(x,y)$ непрерывны в замкнутой области $\bar{Q}$, т.е. что функционал (5) для построенной гармонической функции $u(x,y)$ имеет конечное значение.

13.9.3 § 3. Variational problems with a free end, with a movable boundary and the Boltz problem

В этом параграфе рассмотрены обобщения простейшей вариационной задачи, во-первых, на случай более общего поведения искомой кривой на границе и, во-вторых, на случай функционала неинтегрального типа.

1. Задача со свободным концом

Рассмогрим интеграл

$$J(y) = \int_a^b F\left[x, y(x), y'(x)\right] dx \tag{1}$$

где a, b - заданные числа, $a < b, F(x,y,p)$ - заданная дважды непрерывно дифференцируемая функция при всех $x \in [a,b]$ и $\forall (y,p) \in R^2_{(y,p)}$, на множестве функций $M = \left\{ y(x) \in \mathbb{C}^l[a,b] : y(a) = A \right\}$, где A - заданное число.

Интеграл (1) является функционалом с областью определения M в пространстве $\mathbb{C}^1[a,b]$. Определения слабого локального и абсолютного экстремумов фупкционала (1) в точности такие же, как и в случае простейшей вариационной задачи, но под M теперь надо понимать только что указапный класс функций.

Definition

Задача нахождения слабого локального экстремума функционала (1) называется задачей со свободным концом.

Свое название эта задача получила из-за того, что при $x = b$ значения $y(x) \in M$ не задаются, т.е. конец $x = b$ отрезка $[a, b]$ является свободным концом.

Приведем необходимое условие решения задачи со свободным копцом.

Theorem 1

Если дважды непрерывно дифференцируемая фунхция $\hat{y}(x) \in M$ является решением задачи со свободным концом, то $\hat{y}(x)$ необходимо на $[a, b]$ удовлетворяет уравнению Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

и граничному условию при $x = b$ вида

$$\left.\frac{\partial F\left[x, y(x), y\left(x'\right)\right]}{\partial y'}\right|_{x=0} = 0. \tag{2}$$

Proof

Возьмем $\forall \eta(x) \in \mathbb{C}^l[a, b]$, для которой $\eta(a) = 0$, и рассмотрим $\Phi(\alpha) = J(\hat{y} + \alpha\eta)$ при $\alpha \in R$. В силу условий на F и $\hat{y}(x)$ собственный интеграл, зависящий от параметра, $\Phi(\alpha)$ является непрерывно дифференцируемой функцией α. По известной теореме из курса анализа

$$\Phi'(0) = \left.\frac{d}{d\alpha} J(\hat{y} + \alpha\eta)\right|_{\alpha=0} = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'(x)\right]_{y=\underline{y}(x)} dx.$$

Поскольку $\hat{y}(x)$ - решение задачи со свободным концом, то $\alpha = 0$ точка экстремума для функции $\Phi(\alpha)$. Значит,

$$0 = \Phi'(0) = \int_a^b \left.\left[\frac{\partial F}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'(x)\right]\right|_{y=\dot{y}(x)} dx$$

Интегрируя по частям второе слагаемое и используя условие $\eta(a) = 0$, получаем равенство

$$\left.\frac{\partial F\left[x, \hat{y}(x), \hat{y}'(x)\right]}{\partial y'}\right|_{x=0} \cdot \eta(b) + \int_a^b \left.\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial F}{\partial y'}\right]\right|_{y=\dot{y}(x)} dx = 0.$$

Это равенство выполняется для $\forall \eta(x) \in \mathbb{C}^1[a, b]$, для которой $\eta(a) = 0$. Это равенство должно выполняться в том числе и для $\forall \eta(x) \in \dot{\mathbb{C}}^1[a, b]$. Тогда $\eta(b) = 0$ и, как в простейшей вариационной зацаче, получасм уравнение Эйлера для $\hat{y}(x)$. Рассматривая теперь $\eta(x) \in \mathbb{C}^l[a, b]$ с произвольными значениями $\eta(b)$, получаем равенство $\left.\frac{\partial F[x, \hat{y}(x), y'(x)]}{\partial y'}\right|_{x=b} \cdot \eta(b) = 0$, поскольку $\left.\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial F}{\partial y'}\right]\right|_{y=y(x)} \equiv 0$ на $[a, b]$. Огсюда и следует грапичное условие (2) для $\hat{y}(x)$.

Definition

Всякое решение уравнения Эйлера для (1) называется экстремалью задачи со свободным концом, а экстремаль, удовлетворяющая условию $y(a) = A$ и условию (2), называется допустимой экстремалью этой задачи.

Итак, из теоремы 1 следует, что всякое решение задачи со свободным концом необходимо является допустимой экстремалью этой задачи.

Example 1.

Рассмотрим задачу о брахистохроне (см. пример 2 § 1), но будем теперь считать, что $y(0) = 0$ и что при $x = l$ нет граничного условия, т.е. конец $x = l$ свободен. Найдем допустимые экстремали такой задачи.

Д Экстремали, удовлетворяющие условию $y(0) = 0$, являются циклоидами, параметрические уравнения которых $x = c(t - \sin t), y = c(1 - \cos t)$. Для определения c используем граничное условие при $x = l$:

$$\left.\frac{y'}{\sqrt{y\left(1+y'^2\right)}}\right|_{x=l} = 0,$$

откуда $y'(l) = 0$, т.е. циклоида должна пересекать прямую $x = l$ под прямым углом. Следовательно, точка ($l, y(l)$) должна быть вершиной циклоиды. Так как для вершины $t = \pi$, то $l = c\pi$. Значит, допустимая экстремаль имеет параметрические уравнения

$$x = \frac{l}{\pi}(t - \sin t), \quad y = \frac{l}{\pi}(1 - \cos t).$$

Замечание. Мы рассмотрели случай, когда конец $x = b$ свободен. Совершенно аналогично рассматривается случай, когда оба конца $x = a$, $x = b$ отрезка свободны от граничных условий. Тогда для допустимой экстремали задачи должны выполняться граничные условия вида (2) для $x = a$ и для $x = b$. Задачу с обоими свободными концами называют иногда задачей без ограничений.

Example 2.

Решить задачу без ограничений для функционала

$$J(y) = \int_0^1 e^x \left[(y')^2 + 6y^2 + 12y\right] dx$$

Д Допустимые экстремали задачи являются решениями граничной задачи

$$\begin{gathered} y'' + y' - 6y = 6, \\ y'(0) = y'(1) = 0. \end{gathered}$$

Решением ее является $\hat{y}(x) \equiv -1$. Для $\forall \eta(x) \in \mathbb{C}^1[0,1]$ имеем

$$\begin{aligned} J(\hat{y}+\eta) - J(\hat{y}) &= \int_0^1 e^x \left[\eta^2 + 6\eta^2 + 2\hat{y}'\eta' + 12\hat{y}\eta + 12\eta\right] dx = \\ &= \int_0^1 e^x \left[\eta^2 + 6\eta^2\right] dx + 2e^x\hat{y}' \cdot \eta|_{x=0}^1 + \\ &\quad + \int_0^1 \left[12e^x + 12e^x\hat{y} - \frac{d}{dx}\left(2e^x\hat{y}'\right)\right] \eta dx = \\ &= \int_0^1 e^x \left[\eta^2 + 6\eta^2\right] dx \geq 0 \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались интегрированием по частям, граничными условиями для $\hat{y}(x)$ и уравнением Эйлера для $\hat{y}(x)$.

Следовательно, $\hat{y}(x)$ дает абсолютный минимум для рассматриваемой задачи без ограничений.

2. Задача с подвижной границей

В п. 1 конец экстремали может перемещаться по вертикальной прямой $x = b$. Рассмотрим теперь интеграл (1) на множестве M тех функций $y(x) \in \mathbb{C}^1[a,b]$, для которых $y(a) = A$ и правая граничная точка $(b, y(b))$ в зависимости от $y(x)$ может перемещаться по некоторой непрерывно дифференцируемой кривой Γ, заданной уравнением $y = f(x), x \in [c,d]$, $c > a$, так что $y(b) = f(b)$. На множестве M таких функций $y(x)$ интеграл (1) задает функционал. Здесь подлежит определению и функция $y(x)$ и правый конец b ее отрезка определения.

Слабый локальный и абсолютный экстремумы для такого функционала определяются аналогично тому, как это сделано для простейпей вариационной задачи.

Задача нахождения спабого локального экстремума для (1) с указанной здесь областью определения называется задачей с подвижной (правой) границей. Укажем необходимые условия решения такой задачи.

Theorem 2

Пусть решение $\hat{y}(x)$ задачи с подвижной (правой) границей принадлежит $\mathbb{C}^2[a,b]$. Тогда $\hat{y}(x)$ необходимо на $[a,b]$ удовлетворяет уравнению Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

и условию трансверсальности при $x = b$:

$$\left\{F\left[x, y(x), y'(x)\right] + \left[f'(x) - y'(x)\right]\frac{\partial F\left[x, y(x), y'(x)\right]}{\partial y'}\right\}_{x=b} = 0. \tag{3}$$

Пусть $y(x,\alpha)$ - семейство произвольных дважды непрерывно дифференцируемых функций при $\forall\alpha \in R$, причем $y(x,0) = \hat{y}(x), y(0,\alpha) = A$. Рассмотрим при $|\alpha| \le \varepsilon$ собственный интеграл, зависящий от параметра α :

$$\Phi(\alpha) = \int_a^{x(\alpha)} F\left[x, y(x,\alpha), \frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial x}\right] dx$$

где $x(\alpha)$ - произвольная непрерывно дифференцируемая функция и $x(0) = b$. При условиях теоремы 2 , как следует из курса анализа, $\Phi(\alpha)$ непрерывно дифференцируемая функция и $\Phi(0) = J(\hat{y})$,

$$\Phi'(0) = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right]\Bigg|_{y=\hat{y}(x)} dx + F\left[b, \hat{y}(b), \hat{y}'(b)\right]\delta x$$

где $\delta x = x'(0)$, $\quad \delta y = \frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0}$, $\quad \delta y' = \frac{\partial}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial x}\Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial y(x,\alpha)}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0} = \frac{d}{dx}\delta y$.

Выражение $\Phi'(0)$ называется первой вариацией в задаче с подвижным правым концом и обозначается через $\delta J(\hat{y}, \delta y)$. Так как $\hat{y}(x)$-решение задачи, то $\alpha = 0$ дает зкстремум функции $\Phi(\alpha)$. Значит, $\Phi'(0) = 0$ и, следовательно, $\delta J(\hat{y}, \delta y) = 0$ при всех допустимых вариациях $\delta y(x)$. Проинтегрировав по частям второе слагаемое под знаком интеграла и воспользовавшись тем, что $\eta(a) = 0$, получаем равенство

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\cdot\frac{\partial F}{\partial y'}\right]_{y=\hat{y}(x)} \cdot \delta y(x)dx + F\left[b, \hat{y}(b), \hat{y}'(b)\right]\delta x +$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial y'}\left[b, \hat{y}(b), \hat{y}'(b)\right]\delta y(b) = 0$$

Если $y_1 = y[x(\alpha), \alpha]$, то

$$\delta y_1 = \left\{\frac{d}{d\alpha} y[x(\alpha), \alpha]\right\}_{\alpha=0} \cdot \alpha =$$
$$= \left(\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{dx}{d\alpha} + \frac{dy}{d\alpha}\right)_{\alpha=0} \cdot \alpha = \hat{y}(b)\delta x + \delta y(b)$$

Рассуждая, как и в теореме 1 , отсюда получим, что $\hat{y}(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера и следующему равенству

$$\left\{F\left[b, \hat{y}(b), \hat{y}'(b)\right] - \hat{y}'(b)\frac{\partial F}{\partial y'}\left[b, \hat{y}(b), \hat{y}'(b)\right]\right\}\delta x +$$
$$+ \frac{\partial F}{\partial y'}\left[b, \hat{y}(b), \hat{y}'(b)\right]\delta y_1 = 0$$

Замечая, что $f'(b) = \frac{\delta y_1}{\delta x}$, приходим к условию трансверсальности (3) для $\hat{y}(x)$.

Definition

Всякое решение уравнения Эйлера называется экстремалью задачи с подвижной границей, а экстремаль, удовлетворяющая условию $y(a) = A$ и условию (3), называется допустимой экстремалью этой задачи.

Замечание. Можно рассматривать задачу и с двумя подвижными концами $x = a, x = b$.

Отметим также, что условие трансверсальности устанавливает зависимость между угловыми коэффициентами $f'(x)$ и $\hat{y}'(x)$ в граничной точке. В частности, если граничная точка ($b, y(b)$) перемещается по горизонтальной прямой y = const, то условие трансверсальности принимает вид

$$\left[F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right]_{x=b} = 0.$$

Example 3.

Наити расстояние d от точки $(-2, 3\sqrt{3})$ до попуокружности $y = \sqrt{1-(x-1)^2}, x \in [0, 2]$.
$\triangle$ Задача сводится к нахождению минимума

$$J(y) = \int_{-2}^{b} \sqrt{1+y^2}dx$$

при условиях $y(-2) = 3\sqrt{3}$ и $f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$. Репения уравнения Эилера имеют вид $y = c_1x + c_2$, где c_1, c_2 - произвольные постоянные. Для трех неизвестных c_1, c_2, b имеем систему трех уравнений вида:

$$-2c_1 + c_2 = 3\sqrt{3}, \quad c_1b + c_2 = \sqrt{1-(b-1)^2}$$
$$\sqrt{1+c_1^2} + \left(\frac{1-b}{\sqrt{1-(b-1)^2}} - c_1\right)\frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}} = 0$$

Эта система дает решение: $b = \frac{1}{2}, c_1 = -c_2 = -\sqrt{3}$.
Получаем допустимую экстремаль: $y = -x\sqrt{3} + \sqrt{3}$.

Эта экстремаль дает минимум $J(y)$, равный искомому расстоянию d :

$$d = \int_{-2}^{1/2} \sqrt{1 + (\sqrt{3})^2} dx = 5$$

3. Задача Больца

Пусть a, b - заданные числа, $a < b$. На множестве всех функций из $\mathbb{C}^1[a, b]$ рассмотрим выражение

$$J(y) = \int_a^b F\left[x, y(x), y'(x)\right] dx + f[y(a), y(b)] \tag{4}$$

где $F(x, y, p)$ - заданная дважды непрерывно дифференцируемая функция при $\forall x \in [a, b], \forall (y, p) \in R^2_{(y,p)}, f(\zeta, \eta)$ - заданная непрерывно дифференцируемая функция на всей декартовой плоскости $R^2_{(\zeta,\eta)}$.

Выражение (4) задает функционал, областью определения которого является все пространство $\mathbb{C}^1[a, b]$.

Аналогично простейшей вариационной задаче для функционала (4) можно определить слабый локальный и абсопютный экстремумы.

Definition

Задача нахождения слабого локального экстремума функционала (4) называется задачей Больца.

Theorem 3

Если $\hat{y}(x) \in \mathbb{C}^2[a, b]$ является решением задачи Больца, то необходимо $\hat{y}(x)$ на $[a, b]$ удовлетворяет уравнению Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

и условиям трансверсальности при $x = a, x = b$ вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y'} F\left[x, y(x), y'(x)\right]_{x=a} &= \frac{\partial f[y(a), y(b)]}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial y'} F\left[x, y(x), y'(x)\right]_{x=b} &= -\frac{\partial f[y(a), y(b)]}{\partial \eta} \end{aligned} \tag{5}$$

Proof

Поскольку $\hat{y}(x)$ дает решение задачи Больца, то функция $\Phi(\alpha) = J(\hat{y} + \alpha\eta)$, где $\alpha \in R, \eta(x) \in \mathbb{C}^1[a, b]$, имеет экстремум при $\alpha = 0$. Из условий теоремы 3 следует, что функции F и $\frac{\partial F}{\partial \alpha}$, рассматриваемые при
$y = \hat{y} + \alpha\eta$, непрерывны при $x \in [a, b], |\alpha| \leq \varepsilon$, при некотором $\varepsilon > 0$. Значит, по известной теореме из курса анализа $\Phi'(\alpha)$ - непрерывна и

$$\Phi'(0) = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\eta'(x)\right]\Bigg|_{y=\hat{y}(x)} dx+$$
$$+\left.\frac{\partial f}{\partial \zeta}\right|_{y=\hat{y}(x)}\cdot\eta(a) + \left.\frac{\partial f}{\partial \eta}\right|_{y=\hat{y}(x)}\cdot\eta(b)$$

По теореме Ферма $\Phi'(0) = 0, \forall\eta(x) \in \mathbb{C}^1[a,b]$. В частности, $\Phi'(0) = 0$ для $\forall\eta(x) \in \dot{\mathbb{C}}^1[a,b]$. Тогда получаем, что при $\forall\eta(x) \in \dot{\mathbb{C}}^1[a,b]$

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\eta'(x)\right]_{y=\hat{y}(x)}\cdot dx = 0$$

Интегрируя по частям второе слагаемое, как и в случае простейшей вариационной задачи, устанавливаем, что $\hat{y}(x)$ удовлетворяет уравнению Эилера. Учитывая это обстоятельство, для $\forall\eta(x) \in \mathbb{C}^1[a,b]$ из равенства $\Phi'(0) = 0$ интегрированием по частям находим, что

$$0 = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\eta'\right]\Bigg|_{y=\hat{y}(x)} dx + \left.\frac{\partial f}{\partial \eta}\right|_{y=\hat{y}(x)}\cdot\eta(a)+$$
$$+\left.\frac{\partial f}{\partial \eta}\right|_{y=\hat{y}(x)}\cdot\eta(b) = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\cdot\frac{\partial F}{\partial y'}\right]_{y=\hat{y}(x)}\cdot\eta(x)dx+$$
$$+\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{y=\hat{y}(x)}\cdot\eta(x)\Bigg|_{x=a}^{b} + \left.\frac{\partial f}{\partial \zeta}\right|_{y=\hat{y}(x)}\cdot\eta(a) + \left.\frac{\partial f}{\partial \eta}\right|_{y=\hat{y}(x)}\cdot\eta(b) =$$
$$= \left\{\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\left[x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x)\right]\right|_{x=b} + \frac{\partial f\left[\hat{y}(a),\hat{y}'(b)\right]}{\partial \eta}\right\}\eta(b)+$$
$$+\left\{\frac{\partial f\left[\hat{y}(a),\hat{y}'(b)\right]}{\partial \zeta} - \left.\frac{\partial F\left[x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x)\right]}{\partial y'}\right|_{x=a}\right\}\eta(a).$$

В силу произвольности $\eta(a)$ и $\eta(b)$ отсюда приходим к условиям трансверсальности (5).

Definition

Всякое решение уравнения Эйлера для функционала (4) называется экстремалью задачи Больца, а всякая экстремаль задачи Больца, удовлетворяющая условиям трансверсальности (5), называется допустимой экстремалью задачи Больца.

Из теоремы 3 следует, что всякое решение задачи Больца необходимо является допустимой экстремалью (4).

Example 4.

Решить задачу Больца для функционала

$$J(y) = \int_1^2 x^2\left[y'(x)\right]^2 dx - 2y(1) + y^2(2)$$

$\triangle$ Уравнение Эйлера дает экстремали $y = \frac{c_1}{x} + c_2$, а условия трансверсальности дают граничные условия $y'(1) = -1, 4y'(2) = -y(2)$. Отсюда $\hat{y}(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$ - допустимая экстремаль. Пусть $\forall\eta(x) \in \mathbb{C}^1[1,2]$.

$$J(\hat{y}+\eta) - J(\hat{y}) = \int_1^2 x^2\left[\eta'^2 + 2\hat{y}'\cdot\eta'\right]dx - 2\eta(1) + 2\hat{y}(2)\eta(2) + \eta^2(2)$$

Интегрируя по частям вторее слагаемое под знаком интеграла и используя уравнение Эилера для $\hat{y}(x)$ и условия трансверсальности, получаем

$$J(\hat{y}+\eta)-J(\hat{y})=\int_1^2 x^2\left[\eta'(x)\right]^2 dx+\eta^2(2)\geq 0$$

Таким образом, $\hat{y}(x)$ дает в задаче Больца абсолютный минимум.

13.9.4 § 4. On the strong local extremum and the absolute extremum of the functionals

Рассмотрим вновь интеграл

$$J(y)=\int_a^b F\left[x,y(x),y'(x)\right]dx \tag{1}$$

где a,b - заданные числа, $a<b, F(x,y,p)$ - заданная дважды непрерывно дифференцируемая функция для $\forall x\in[a,b], \forall(y,p)\in R^2_{(y,p)}$, при заданных граничных условиях

$$y(a)=A,\quad y(b)=B,$$

где A и B - заданные числа.
Наряду со слабым экстремумом для (1) рассматривается и сильный экстремум. При этом несколько расширяется область определения интеграла (1). Обозначим через $K\mathbb{C}^1[a,b]$ множество всех непрерывных на $[a,b]$ функций, имеющих на $[a,b]$ непрерывиую производную, за исключением, быть может, конечного числа точек из $[a,b]$, в которых производная терпит разрыв первого рода. Пусть

$$M=\left\{y(x)\in K\mathbb{C}^1[a,b]: y(a)=A, y(b)=B\right\}$$

Понятно, что интеграл (1), рассматриваемый на множестве M, является функционалом с областью определения M. После введения в $K\mathbb{C}^l[a,b]$ нормы функций $y(x)$

$$\|y(x)\|_{\mathbb{C}[a,b]}=\max_{x\in[a,b]}|y(x)|$$

множество $K\mathbb{C}^1[a,b]$ становится линейным нормированным пространством.

Definition

Говорят, что $\hat{y}(x)\in M$ дает функционалу (1) сильный локальный минимум (максимум), если $\exists\varepsilon>0$ такое, что для пюбой $y(x)\in M$, для которой $\|y(x)-\hat{y}(x)\|_{C[a,b]}<\varepsilon$, выполняется неравенство $J(y)\geq J(\hat{y})(J(y)\leq J(\hat{y}))$.

Сильные локальные минимум и максимум объединяются термином сильного локального экстремума.

Сильный локальный экстремум геометрически отличается от слабого локального экстремума для (1) тем, что для сильного экстремума рассматриваются кривые на $[a,b]$ близкие по ординатам к кривой $\hat{y}(x)$, а для слабого экстремума требуется близость этих кривых к $\hat{y}(x)$ как по ординатам, так и по угловым коэффициентам касательных к кривым.

Поскольку множество $K\mathbb{C}^1[a,b]\supset\mathbb{C}^1[a,b]$, то, если $\hat{y}(x)\in\mathbb{C}^1[a,b]$ дает сильный экстремум (1), $\hat{y}(x)$ дает (1) и слабый экстремум. Поэтому для таких функций

необходимое условие слабого экстремума является необходимым условием сильного, а достаточное условие сильного экстремума является достаточным условием слабого.

Приведем пример, в котором допустимая экстремаль $\hat{y}(x) \in \mathbb{C}^1[a,b]$ дает слабый локальный минимум, но не дает сильного локального минимума.

Example 1.

Исследовать слабый и сильный экстремумы для функционала

$$J(y) = \int_0^1 [y'(x)]^3\, dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

$\triangle$ Уравнение Эйлера дает экстремали $y = c_1 x + c_2$. Единственной допустимой экстремалью является $\hat{y} = x$. Покажем, что $\hat{y} = x$ дает слабый локальный минимум. В самом деле, если $\forall \eta(x) \in \dot{\mathbb{C}}^1[0,1]$, то

$$J(\hat{y} + \eta) - J(\hat{y}) = \int_0^1 (\eta')^2 (3 + \eta')\, dx \geq 0$$

поскольку $3 + \eta'(x) > 0$, если взять $\|\eta(x)\|_{\mathbb{C}^1[0,1]} < 3$.

Покажем, что $\hat{y} = x$ не дает сильного экстремума. Возьмем

$$\zeta_n = \begin{cases} -\sqrt{n}, & x \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \\ 0, & x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right], \\ \frac{2}{\sqrt{n}} & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$$

и $\eta_n(x) = \int_0^x \zeta_n(x) dx, \quad n \geq 2$.
Ясно, что $\eta_n(x) \in K\mathbb{C}^1[0,1]$ и $\|\eta_n(x)\|_{\text{c } 0,1]} \to 0$ при $n \to \infty$. Пусть $y_n(x) = \hat{y}(x) + \eta_n(x)$. Тогда $y_n(x) \to \hat{y}(x)$ в $\mathbb{C}[0,1]$ при $n \to \infty$ и

$$J(y_n) = \int_0^1 (1 + \eta_n')^3\, dx =$$
$$= 1 + \int_0^{1/n} \left(3n - n^{3/2}\right) dx + \int_{1/2}^1 \left(\frac{12}{n} + \frac{8}{n\sqrt{n}}\right) dx = -\sqrt{n} + o(1) \to \infty$$

т.е. $\hat{y}$ не доставляет сильного локального минимума.

Приведем пример функционала, для которого нет слабого минимума в классе $\mathbb{C}^1[a,b]$, но есть сильный минимум в классе $K\mathbb{C}^1[a,b]$.

Example 2.

Рассмотрим функционал

$$J(y) = \int_0^2 y^2 (1 - y')^2\, dx, \quad y(0) = 0, \quad y(2) = 1$$

$\triangle$ Уравнение Эилера для него дает экстремали $y = c_1 x + c_2$. Из граничных условий следует, что $\hat{y}(x) = \frac{1}{2}x$ - допустимая экстремаль. Нетрудно убедиться, что $\hat{y}(x)$ не дает слабого минимума. С другой стороны, на функции

$$y_0(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1], \\ 1, & x \in [1,2] \end{cases}$$

функционал $J(y_0) = 0$, так как подынтегральная функция $\equiv 0$. Поскольку $J(y) \geq 0$ для любой допустимой фупкции $y(x)$ и $J(y_0) = 0$, то на $y_0(x)$ заведомо реализуется сильный минимум.

Этот пример показывает необходимость рассмотрения сильного экстремума в классе функций $K\mathbb{C}^1[a,b]$ даже для тех функционалов (1), для которых функция F - дважды непрерывно дифференцируемая.

Всякий абсолютный экстремум (1) является одновременно и слабым и сильным локальным экстремумом. Следовательно, необходимые условия слабого экстремума являются необходимыми условиями для абсолютного

экстремума, но, вообще говоря, не наоборот. Достаточные условия абсолютного экстремума будут достаточными условиями слабого и сильного экстремумов, но, в общем случае, не наоборот.

Как известно, всякая непрерывная функция на отрезке достигает своего абсолютного экстремума (наибольшего и наименьшего значения). Для функционалов тоже можно ввести понятие непрерывиости в линейном нормированном пространстве. Так, например, функционал (1) является непрерывным в пространстве $\mathbb{C}^1[a,b]$. Однако не всегда функционал (1) достигает, например, своего абсолютного минимума в классе функций из $\mathbb{C}^1[a,b]$ (см. пример 2). Поэтому вопрос о существовании абсолютного экстремума функционала (1) и его обобщений является значительно более сложным, чем для функции многих переменных. Известны некоторые достаточные условия, например, теорема Тонелли, при которых функционал (1) имеет абсолютный экстремум. Заметим, что точные верхняя и нижняя грани для функционалов типа (1) могут не достигаться не только во всем $\mathbb{C}^l[a,b]$, но также и на ограниченном замкнутом множестве из $\mathbb{C}^1[a,b]$, например, на единичном шаре в $\mathbb{C}^1[a,b]$, т.е. на множестве всех тех функций $y(x) \in \mathbb{C}^1[a,b]$, для которых $\|y(x)\|_{\mathbb{C}^1[a,b]} \leq 1$.

Теоремы существования играют центральную роль для так называемых прямых методов вариационного исчисления, основанных на построении последовательности функций, сходящейся к искомой функции, реализующей экстремум для (1). Причина появления прямых методов в том, что решение вариационной задачи приводит к необходимости решения граничной задачи для уравнения Эйлера, а доказательство существования решений таких граничных задач теория дифференциальных уравнений дает лишь в редких случаях. Прямые методы вариационного исчисления полезны и для теории дифференциальных уравнений. Ведь если дифференциалыпе уравнение является уравнением Эйлера для функционала (1) и если прямым методом установлено, что (1) имеет абсолютный экстремум в классе $\mathbb{C}^1[a,b]$, то тем самым доказано, что соответствующая краевая задача имеет репение. Методы решения граничных задач для дифференциальных уравнений, основанные на исследовании экстремума соответствующего функционала, называются вариационными методами решения граничных задач. Можно, например, доказать сушествование и единственность решения граничной задачи вида

$$[p(x)y']' - q(x)y = f(x), \quad p(x) \in \mathbb{C}^1[a,b], \quad p(x) > 0, \quad q(x) \in \mathbb{C}[a,b],$$
$$q(x) \geq 0, \quad f(x) \in \mathbb{C}[a,b], \quad y(a) = A, \quad y(b) = B,$$

рассмотрев задачу на абсолютный минимум функционала

$$J(y) = \int_a^b \left[p(x)y'^2 + q(x)y^2 + 2f(x)y\right] dx$$

в классе функций $y(x) \in \mathbb{C}^l[a,b]$, удовлетворяющих заданным граничным условиям.

13.9.5 § 5 Isoperimetric problem.

В §§ 2-3 рассмотрены обобщения простейшей вариационной задачи на случай более общих функционалов и на случай более общего поведения неизвестных функций на границе. Обобщения простейшей вариационной задачи можно получать по-другому, подчинив искомую функцию не только граничным условиям, но и некоторым дополнительным условиям связи.

Proof

такого рода задачах пойдет речь в настоящем параграфе. Общим моментом при решении таких задач является использование метода множителей Лагранжа - аналога известного из курса анализа метода множителей Лагранжа, применяемого там для решения задач на условный экстремум для функций многих переменных.

Пусть функции $F(x,y,p)$ и $G(x,y,p)$ - заданы и дважды непрерывно дифференцируемы для $\forall x \in [a,b]$ и $\forall (y,p) \in R^2_{(y,p)}$. Рассмотрим интеграл

$$J(y) = \int_a^b F\left[x, y(x), y'(x)\right] dx \tag{1}$$

на множестве функций

$$M = \left\{ y(x) \in \mathbb{C}^1[a,b] : y(a) = A, y(b) = B, K(y) = \int_a^b G\left[x, y(x), y'(x)\right] dx = l \right\},$$

где A, B и l-заданные числа.
Функции $y(x) \in M$ называются допустимыми. Ясно, что интеграл (1) задает функционал с областью определения M в простраистве $\mathbb{C}^l[a,b]$. Условие $K(y) = l$ называется условием связи.

Definition

Говорят, что допустимая функция $\hat{y}(x)$ дает слабый локальный минимум (максимум) функционала (1), если $\exists \varepsilon > 0$ такое, что для всякой допустимой функции $y(x)$ такой, что $\|y(x) - \hat{y}(x)\|_{\mathbb{C}^1[a,b]} < \epsilon,$ выполнено неравенство $J(y) \geq J(\hat{y})(J(y) \leq J(\hat{y}))$.

Слабые локальные минимум и максимум объединяются термином слабый локальный экстремум. Для функционала (1) понятным образом вводится и абсолютный экстремум.

Definition

Изопериметрической задачей называется задача нахождения слабого локального экстремума функционала (1). Название задачи происходит от ее простейшего примера: задачи нахождения замкнутой кривой заданной длины, ограничивающей наибольшую площадь.

Чтобы установить необходимое условие решения изопериметрической задачи, введем в рассмотрение функцию

$$L\left(x, y, y', \lambda\right) = F\left(x, y, y'\right) + \lambda G\left(x, y, y'\right), \quad \forall \lambda \in R.$$

Она называется лагранжианом, а параметр λ называется неопределенным множителем Лагранжа.

Кроме того, рассмотрев функционал $K(y)$ на множестве тех $y(x) \in \mathbb{C}^1[a,b]$, для которых $y(a) = A, y(b) = B$, согласно § 1 можно найти вариацию функционала $K(y)$:

$$\delta K[y,\eta(x)] = \int_a^b \left\{ \frac{\partial G}{\partial y}\eta(x) + \frac{\partial G}{\partial y'}\eta'(x) \right\} dx, \quad \forall \eta(x) \in \dot{\mathbb{C}}^l[a,b]$$

Theorem

Пусть дважды непрерывно дифференчируемая допустимая sункция $\hat{y}(x)$ является решением изопериметрической задачи и пусть вариация $\delta K[\hat{y},\eta(x)] \not\equiv 0$ для есех $\eta(x) \in \dot{\mathbb{C}}^1[a,b]$. Тогда найдется такой множитель Лагранжа λ, что $\hat{y}(x)$ необходимо на $[a,b]$ удовлетворяет уравнению Эйлера вида

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial L}{\partial y'} = 0. \tag{2}$$

Proof

Из условия теоремы следует, что $\exists \eta_0(x) \in \dot{\mathbb{C}}^l[a,b]$ такая, что $\delta K\left[\hat{y},\eta_0(x)\right] \neq 0$.
Возьмем теперь $\forall \eta(x) \in \dot{\mathbb{C}}^1[a,b]$ и рассмотрим функции

$$\begin{aligned} u = \varphi(\alpha,\beta) &= J\left[\hat{y}(x) + \alpha\eta(x) + \beta\eta_0(x)\right], \\ v = \psi(\alpha,\beta) &= K\left[\hat{y}(x) + \alpha\eta(x) + \beta\eta_0(x)\right], \end{aligned}$$

где $\alpha,\beta \in R$. В силу условий на $\hat{y}(x), F$ и G к этим интегралам можно применить теоремы о непрерывности и дифференцируемости собственных интегралов, зависящих от параметров. Из этих теорем следует, что $\varphi(\alpha,\beta)$ и $\psi(\alpha,\beta)$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями в некоторой окрестности $\alpha = \beta = 0$ и что

$$\begin{aligned} &\varphi(0,0) = J(\hat{y}), \quad \frac{\partial\varphi(0,0)}{\partial\alpha} = \delta J[\hat{y}(x),\eta(x)], \quad \frac{\partial\varphi(0,0)}{\partial\beta} = \delta J\left[\hat{y}(x),\eta_0(x)\right], \\ &\psi(0,0) = K(\hat{y}), \quad \frac{\partial\psi(0,0)}{\partial\alpha} = \delta K[\hat{y}(x),\eta(x)], \quad \frac{\partial\psi(0,0)}{\partial\beta} = \delta K\left[\hat{y}(x),\eta_0(x)\right]. \end{aligned}$$

Здесь, например,

$$\delta J[\hat{y}(x),\eta(x)] = \int_a^b \left[\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=\hat{y}(x)} \cdot \eta(x) + \left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{y=\hat{y}(x)} \cdot \eta'(x) \right] dx.$$

Покажем, что якобиан

$$\left.\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v}\right|_{u=v=0} \equiv 0, \quad \forall \eta(x) \in \mathbb{C}^1[a,b].$$

Рассуждаем от противного. Пусть этот якобиан отличен от нуля для некоторого $\tilde{\eta}(x) \in \dot{\mathbb{C}}^l[a,b]$. Тогда из теоремы о системе неявных функций следует, что система уравнений

$$u = \varphi(\alpha,\beta), \quad v = \psi(\alpha,\beta)$$

однозначно разрешима относительно α,β в некоторой окрестности $\alpha = \beta = 0$. Предположив для определенности, что $\hat{y}(x)$ дает локальный минимум в изопериметрической задаче, рассмотрим систему уравнений

$$\varphi(\alpha,\beta) = \varphi(0,0) - \varepsilon, \quad \psi(\alpha,\beta) = \psi(0,0), \quad \varepsilon > 0$$

По указанной выше теореме существует единственное решение ($\hat{\alpha},\hat{\beta}$) этой системы из окрестности $\alpha = \beta = 0$:

$$\varphi(\hat{\alpha},\hat{\beta}) = \varphi(0,0) - \varepsilon = J(\hat{y}) - \varepsilon, \quad \psi(\hat{\alpha},\hat{\beta}) = \psi(0,0) = K(\hat{y}) = l.$$

Это значит, что найдется функция вида $\hat{y}(x) + \hat{\alpha}\tilde{\eta}(x) + \hat{\beta}\eta_0(x)$ такая, что

$$J\left(\hat{y} + \hat{\alpha}\tilde{\eta} + \hat{\beta}\eta_0\right) = J(\hat{y}) - \varepsilon < J(\hat{y}),$$
$$K\left(\hat{y} + \hat{\alpha}\tilde{\eta} + \hat{\beta}\eta_0\right) = l.$$

Это противоречит тому, что $\hat{y}(x)$ дает локальный минимум. Наше предположение неверно и якобиан

$$\left.\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(\alpha,\beta)}\right|_{\alpha=\beta=0} = \begin{vmatrix} \delta J(\hat{y},\eta) & \delta K(\hat{y},\eta) \\ \delta J\left(\hat{y},\eta_0\right) & \delta K\left(\hat{y},\eta_0\right) \end{vmatrix} \equiv 0, \quad \forall \eta(x) \in \mathbb{C}^1[a,b].$$

Положим $\lambda = -\frac{\delta J(\hat{y},\eta_0)}{\delta K(\hat{y},\eta_0)}$. Поскольку $\delta K\left(\hat{y},\eta_0\right) \neq 0$, то $\lambda \neq \infty$. Тогда для любого $\eta(x) \in \mathfrak{C}^1[a,b]$ получаем тождество

$$\delta J(\hat{y},\eta) + \lambda \delta K(\hat{y},\eta) \equiv 0$$

В интегральной форме это тождество имеет вид:

$$\int_a^b \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y} + \lambda\frac{\partial G}{\partial y}\right)_{y=\hat{y}(x)} \cdot \eta(x) + \left(\frac{\partial F}{\partial y'} + \lambda\frac{\partial G}{\partial y'}\right)_{y=\hat{y}(x)} \cdot \eta'(x)\right] dx \equiv 0$$

Учитывая формулу для L, интегрируя по частям слагаемое, содержащее $\eta'(x)$ и применяя основную лемму вариационного исчисления, отсюда получаем уравнение Эйлера (2).

Замечание. Условие теоремы о том, что $\delta K[\hat{y},\eta(x)] \not\equiv 0$, равносильно тому, что $\hat{y}(x)$ не является экстремалью простейшей вариационной задачи для $K(y)$.

Definition

Всякое решение уравнения Эйлера (2) называется экстремалью изопериметрической задачи, а всякая экстремаль, являющаяся допустимой функцией, называется допустимой экстремалью изопериметрической задачи.

Из доказанной теоремы следует, что решение изопериметрической задачи необходимо является ее допустимой экстремалью. Заметим, что всякая экстремаль изопериметрической задачи служит экстремалью некоторой простейшей вариационной задачи для функции Лагранжа $\int_a^b L dx$.

В общем случае экстремали изопериметрической задачи зависят от трех параметров c_1, c_2, λ. Допустимые экстремали находят из двух граничных условий и условия связи $K(y) = l$.

Пример. Решить изопериметрическую задачу:

$$J(y) = \int_0^\pi \left[y'(x)\right]^2 dx, \quad y(0) = y(\pi) = 0, \quad \int_0^\pi y(x)\sin x dx = 1$$

$\triangle$ Здесь лагранжиан $L = y'^2 + \lambda y \sin x$. Уравнение Эилера для L дает экстремали $y = -\frac{\lambda}{2}\sin x + c_1 x + c_2$. Из граничных условий и условия связи находим, что $c_1 = c_2 = 0, \lambda = -\frac{4}{\pi}$. Таким образом, $\hat{y}(x) = \frac{2}{\pi}\sin x$ - допустимая экстремаль. Покажем, что она дает абсолютный минимум в изопериметрической задаче.

Действительно, при всякой допустимой функции $y(x) = \hat{y}(x) + \eta(x)$ (для этого надо взять $\forall \eta(x) \in \dot{\mathbb{C}}^1[0,\pi]$, для которой $\int_0^\pi \eta(x)\sin x dx = 0$) имеем, что

$$
\begin{aligned}
J(\hat{y}+\eta)-J(\hat{y}) &= \int_0^\pi \left[(\hat{y}'+\eta')^2-(\hat{y}')^2\right]dx = 2\int_0^\pi \hat{y}'\cdot\eta' dx + \int_0^\pi (\eta')^2\,dx = \\
&= 2\hat{y}'(x)\cdot\eta(x)|_{x=0}^{\pi} - 2\int_0^\pi \hat{y}''(x)\eta(x)dx + \int_0^\pi (\eta')^2\,dx = \\
&= 2\int_0^\pi \frac{2}{\pi}\sin x\eta(x)dx + \int_0^\pi (\eta')^2\,dx = \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^\pi \eta(x)\sin x dx + \int_0^\pi (\eta')^2\,dx = \int_0^\pi (\eta')^2\,dx \geq 0
\end{aligned}
$$

Замечания.

1. Изопериметрическая задача обобщается на случай нескольких условий связи

$$
K_i(y) \equiv \int_a^b G_i\left[x, y(x), y'(x)\right]dx = l_i, \quad i=\overline{1,m}
$$

и на случай функционалов $J(y)$, зависящих от вектор-функции $y(x)$.
2) Если $\hat{y}(x)$ не является ни экстремалью $J(y)$, ни экстремалью $K(y)$, то справедлив так называемый принцип взаимности: $\hat{y}(x)$ - экстремаль задачи на экстремум $J(y)$ при условии $K(y)=l$ и одновременно $\hat{y}(x)-$ экстремаль задачи на экстремум $K(y)$ при условии $J(y)=l$. Это видно из того, что можно ввести лагранжиан $L=\lambda_1 F+\lambda_2 G$, куда функции F и G входят симметрично.

13.9.6 § 6. The Lagrange Problem

В этом параграфе будут рассмотрены условия свизи несколько иного рода, чем в предыдущем параграфе.

Пусть $F(x,y,z,p,q)$ - заданная дважды непрерывно дифференцируемая функция при $\forall x\in[a,b]$ и $\forall(y,z,p,q)\in R^4$, где R^4 - пространство с декартовыми прямоугольными координатами y,z,p,q, и пусть $g(x,y,z)$ заданная дважды непрерывно дифференцируемая функция при $\forall x\in[a,b]$ и $\forall(y,z)\in R^2_{(y,z)}$.

Рассмотрим интеграл

$$
J(y,z)=\int_a^b F\left[x,y(x),z(x),y'(x),z'(x)\right]dx \tag{1}
$$

на множестве пар функций ($y(x),z(x)$)

$$
\begin{aligned}
M=\big\{&(y(x),z(x))\in\mathbb{C}_2^1[a,b]: y(a)=A_1, z(a)=A_2, y(b)=B_1,\\
&z(b)=B_2, g[x,y(x),z(x)]=0, \forall x\in[a,b]\big\}.
\end{aligned}
$$

Уравиение $g(x,y,z)=0$ называется условием конечной (или геометрической) связи для неизвестных y,z. Заметим, что из определения M следуют условия согласования уравнения связи с граничными условиями:

$$
g\left(a,A_1,A_2\right)=g\left(b,B_1,B_2\right)=0.
$$

Всякая пара функций ($y(x),z(x)$) из множества M называется допустимой.

Интеграл (1), рассматриваемый на множестве M, задает функционал в пространстве $C_2^1[a,b]$ (см. п. 1 § 2).

Definition

Говорят, что допустимая пара функций ($\hat{y}(x), \hat{z}(x)$) дает слабый локальный минимум (максимум) функционала (1), если $\exists \varepsilon > 0$, что для любой допустимой пары ($y(x), z(x)$) такой, для которой $\|(y(x), z(x)) - (\hat{y}(x), \hat{z}(x))\|_{C_2^1[a,b]} < \varepsilon$, справедливо неравенство $J(y, z) \geq J(\hat{y}, \hat{z})(J(y, z) \leq J(\hat{y}, \hat{z}))$.

Слабые локальные минимум и максимум объединяются термином слабого локального экстремума. Для (1) можно ввести и понятие абсолютного экстремума.

Definition

Задачей Лагранжа называется задача нахождения слабого локального экстремума для функционала (1).

Нетрудно указать геометрический смысл задачи Лагранжа. Пусть уравнение связи $g(x, y, z) = 0$ задает некоторую поверхность S в $R^3_{(x,y,z)}$. Условия согласования фиксируют две точки на S : $D_1\,(a, A_1, A_2)$ и $D_2\,(b, B_1, B_2)$, а пара функций $y = y(x), z = z(x), x \in [a, b]$, задает пространственную кривую γ. Задача Лагранжа тогда геометрически означает (см. рис. 3), что требуется найти среди всех непрерывно дифференцируемых кривых γ, лежащих на заданной поверхности S и соединяющих заданные точки D_1, D_2, такую кривую, которая дает слабый локальный экстремум интегралу (1).

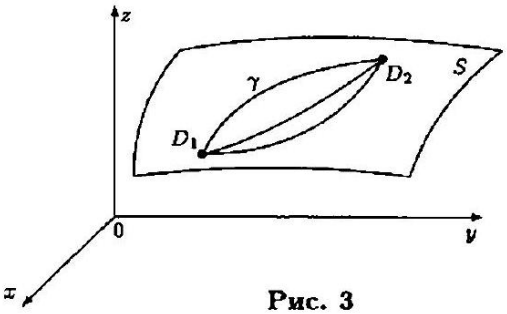


Рис. 3

Задачу Лагранжа можно решать методами, аналогичными методам решения задачи на условный экстремум для функций многих переменных. Прямой метод заключается в том, что разрешают условие связи $g(x, y, z) = 0$ относительно y или z, найденное выражение подставляют в интеграл (1) и получают уже простейшую вариационную задачу для $J(z)$ или $J(y)$. Однако прямой метод проходит лишь для узкого класса функций $g(x, y, z)$. Более удобен для решения задачи Лагранжа метод неопределенных множителей Лагранжа, как и в случае изопериметрической задачи. Составим лагранжиан $L = F\,(x, y, z, y', z') + \lambda(x) g(x, y, z)$, где $\lambda(x)$ - любая функция из $\mathbb{C}[a, b]$, называемая неопределенным множителем Лагранжа.

Теперь можно установить необходимое условие решения задачи Лагранжа.

Theorem

Пусть дьажды непрерывно дифференцируемая допустимая пара функций ($\hat{y}(x), \hat{z}(x)$) является решением задачи Лагранжа и пусть $\left[\frac{\partial g(x,\hat{y}(x),\hat{z}(x))}{\partial y}\right]^2 + \left[\frac{\partial g(x,\hat{y}(x),\hat{z}(x))}{\partial z}\right]^2 > 0$ для всех $x \in [a, b]$. Тогда существует множитель Лагранжа $\lambda(x) \in \mathbb{C}[a, b]$ такой, что пара функций ($\hat{y}(x), \hat{z}(x)$) необходимо на $[a, b]$ удовлетьоряет системе уравнений Эйлера вида

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial L}{\partial z'} = 0. \tag{2}$$

Фиксируем произвопьную точку $D_0\,(x_0, \hat{y}\,(x_0)\,, \hat{z}\,(x_0))$ гладкой кривой $\gamma : y = \hat{y}(x), z = \hat{z}(x), x \in [a, b]$. В этой точке, по условию теоремы, по крайней мере одна из производных

$\frac{\partial g}{\partial y}$, $\frac{\partial g}{\partial z}$ отлична от нуля. Пусть для определенности $\frac{\partial g(D_0)}{\partial z} \neq 0$. Так как $g\left(D_0\right) = 0$ и в некоторой окрестности D_0 функция дважды непрерывно дифференцируема, то по теореме о неявной функции найдется такая дважды непрерывно дифференцируемая в окрестности точки $(x_0, \hat{y}\left(x_0\right))$ функция $z = \varphi(x, y)$, что $g[x, y, \varphi(x, y)] \equiv 0$ и $\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ в окрестности точки $(x_0, \hat{y}\left(x_0\right))$.

Пусть окрестностью x_0 является (x_1, x_2). Тогда

$$J(y, z) = \left(\int_a^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \int_{x_2}^{b}\right) F\left[x, y(x), z(x), y'(x), z'(x)\right] dx$$

причем $\forall x \in (x_1, x_2)$

$$F\left[x, y, z, y', z'\right] = F\left[x, y, \varphi(x, y), y', \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot y'\right] \equiv \Phi\left(x, y, y'\right)$$

Рассмотрим интеграл

$$J_0(y) = \int_{x_1}^{x_2} \Phi\left[x, y(x), y'(x)\right] dx$$

при граничных условиях $y\left(x_1\right) = \hat{y}\left(x_1\right), y\left(x_2\right) = \hat{y}\left(x_2\right)$. Поскольку гладкая кривая γ дает решение задачи Лагранжа, то ее часть $\gamma_0 : y = \hat{y}(x),\ z = \varphi[x, \hat{y}(x)], x \in [x_1, x_2]$, тоже является решением задачи Лагранжа в окрестности точки D_0. В самом деле, пусть для определенности кривая γ дает минимум. Тогда $J(\tilde{\gamma}) \geq J(\gamma)$ для любой достаточно близкой гладкой кривой $\tilde{\gamma}$, лежащей на поверхности $\mathcal{S}$ с концами в точках D_1 и D_2 (см. рис. 3). Обозначим через $\tilde{\gamma}$ кривую, полученную из γ заменой γ_0 на достаточно близкую к ней гладкую дугу $\tilde{\gamma}_0$ на S. Тогда

$$\begin{aligned} 0 \leq J(\tilde{\gamma}) - J(\gamma) &= J\left[(\gamma - \gamma_0) + \tilde{\gamma}_0\right] - J\left[(\gamma - \gamma_0) + \gamma_0\right] = \\ &= J\left(\gamma - \gamma_0\right) + J\left(\tilde{\gamma}_0\right) - J\left(\gamma - \gamma_0\right) - J\left(\gamma_0\right) = J\left(\tilde{\gamma}_0\right) - J\left(\gamma_0\right). \end{aligned}$$

Итак, γ_0-решение задачи Лагранжа в окрестности точки D_0. Следовательно, проекция γ_0 на плоскость x, y-кривая $y = \hat{y}(x), x \in [x_1, x_2]$, является решением простейшей вариационной задачи для $J_0(y)$ т.е. $\hat{y}(x)$ необходимо на $[x_1, x_2]$ удовлетворяет уравнению Эилера

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y'}\right]_{y=\hat{y}(x)} \equiv 0, \quad x \in [x_1, x_2]. \tag{3}$$

Выразим в (3) производные от Φ через производные от F и g. Используя формулу производной сложной функции Φ, что законно в силу свойств

гладкости функций F и φ, получаем:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z'}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cdot y'\right)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y'} = \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{\partial F}{\partial z'} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$\frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y'} = \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial z'} + \frac{\partial F}{\partial z'}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cdot y'\right).$$

Подставляя в (3), находим, что

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial F}{\partial y'}\right]_{y=\hat{y}(x)} \equiv \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial y}\left[-\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial F}{\partial z'}\right]\right\}_{y=\hat{y}(x)}, \quad x \in [x_1, x_2]$$

Но по теореме о неявной функции $\left(\frac{\partial g}{\partial z} \neq 0\right) \forall x \in [x_1, x_2]$

$$\frac{\partial g[x, \hat{y}(x), \tilde{z}(x)]}{\partial y} + \frac{\partial g[x, \hat{y}(x), \hat{z}(x)]}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi[x, \hat{y}(x)]}{\partial y} = 0$$

Учитывая это обстоятельство, предыдущее тождество запишется так:

$$\left\{\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right]\frac{\partial g}{\partial z}\right\}_{y=\hat{y}(x), z=\hat{z}(x)} \equiv \left\{\left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial z'}\right]\frac{\partial g}{\partial y}\right\}_{y=\hat{y}(x), z=\hat{z}(x)}, \quad x \in [x_1, x_2] \qquad (4)$$

Полагая

$$\left\{\frac{\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial F}{\partial z'}}{\frac{\partial g}{\partial z}}\right\}_{y=\hat{y}(x), z=\tilde{z}(x)} = \lambda(x)$$

и учитывая вид лагранжиана L, из (4) получаем, что пара функций $(\hat{y}(x), \hat{z}(x))$ удовлетворяет системе уравнений Эилера (2) в окрестности точки $x_0 \in [a, b]$. Так как точка x_0 - произвольная, то пара $(\hat{y}(x), \hat{z}(x))$ удовлетворяет (2) на всем $[a, b]$.

Definition

Всякое решение системы уравнений Эйлера (2), являющееся допустимой парой функций, называется допустимой экстремалью задачи Лагранжа.

Из доказанной теоремы следует, что всякое решение задачи Лагранжа необходимо является допустимой экстремалью этой задачи. Кроме того, всякое решение задачи Лагранжа является экстремалью некоторой простейшей вариационной задачи для функции Лагранжа $\int_a^b L dx$.

Пример. Среди всех кривых на сфере с центром в начале координат радиуса R, соединяющих две заданные точки сферы, найти кривую

наименьшей длины (такую кривую принято называть геодезической кривой на сфере).
$\triangle$ Зададимся параметрическими уравнениями сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$:

$$x = R\cos\varphi\cos\psi, \quad y = R\sin\varphi\cos\psi, \quad z = R\sin\psi,$$
$$\varphi \in [0, 2\pi], \quad \psi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Пусть $\varphi = \varphi(\psi)$ - уравнение искомой кривой на сфере. Длина ее отрезка между заданными точками сферы, соответствующими значениям ψ_1 и ψ_2 параметра ψ, равна

$$J(\varphi) = \int_{\varphi_1}^{\psi_2} \sqrt{E\varphi'^2 + 2F\varphi' \cdot \psi' + G\psi'^2} d\psi$$

где E, F, G - коэффициенты первой квадратичной формы сферы. В нашем случае

$$J(\varphi) = R\int_{\psi_1}^{\psi_2} \sqrt{1 + \cos^2\psi\left[\varphi'(\psi)\right]^2} d\psi$$

Уравнение Эйлера

$$\frac{d}{d\psi} \cdot \frac{\cos^2\psi \cdot \varphi'}{\sqrt{1 + \cos^2\psi \cdot (\varphi')^2}} = 0$$

дает решения $\varphi(\psi) = \arccos(c_1 \operatorname{tg}\psi) + c_2$. Отсюда

$$\operatorname{tg}\psi = A\cos\varphi(\psi) + B\sin\varphi(\psi), \quad A = \frac{1}{c_1}\cos c_2, \quad B = \frac{1}{c_1}\sin c_2.$$

Умножая обе части равенства для $\operatorname{tg}\psi$ на $R\cos\psi$, получим

$$R\sin\psi = AR\cos\varphi\cos\psi + BR\sin\varphi\cos\psi.$$

Переходя к декартовым координатам, отсюда

$$z = Ax + By.$$

Получили уравнение плоскости, проходящей через центр сферы и пересекающей сферу по большому кругу. Следовательно, геодезической кривой на сфере является меньшая дуга большого круга, соединяющая две заданные точки сферы.

Замечание. Задача Лагранжа обобщается на случай функционалов, зависящих от $n \geq 2$ неизвестных фупкций, и $m < n$ уравнений связи. При этом связи могут быть как конечные, т.е. не содержащие производных неизвестных функций, так и дифференциальные, т.е. содержащие производные первого порядка от неизвестных функций.

13.9.7 § 7. Sufficient conditions of weak local extremum

Как известно, для функций конечного числа переменных исследование второго дифференциала дает дополнительные необходимые условия для максимума и минимума, позволяющие их различать, а также достаточные условия максимума и минимума. Аналогично поступают и в спучае функционалов.

Рассмотрим функционал

$$J(y) = \int_a^b F\left[x, y(x), y'(x)\right] dx \tag{1}$$

где a и b-заданные числа, $a < b$, и $F(x, y, p)$-заданная трижды непрерывно дифференцируемая функция при $\forall x \in [a, b]$ и $\forall (y, p) \in R^2_{(y,p)}$, с областью определения в $\mathbb{C}^1[a, b]$

$$M = \left\{y(x) \in \mathbb{C}^l[a, b] : y(a) = A, y(b) = B\right\}$$

где A и B - заданные числа.

Введем понятие второй вариации функционала (1). С этой целью возьмем $y(x) \in M$, произвольную функцию $\eta(x) \in \dot{\mathbb{C}}^l[a, b]$, произвольный параметр $\alpha \in R$ и рассмотрим при фиксированных $y(x), \eta(x)$

$$\Phi(\alpha) = J(y + \alpha\eta) = \int_a^b F\left[x, y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta'\right] dx$$

Так как $F\left[x, y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta'\right]$ - трижды непрерывно дифференцируемая функция $x \in [a, b]$ и $|\alpha| \leq \varepsilon$ при $\forall \varepsilon > 0$, то по теореме из курса анализа $\Phi(\alpha)$ - дважды непрерывно дифференцируема в окрестности $\alpha = 0$ и

$$\Phi''(0) = \left.\frac{d^2 J(y + \alpha\eta)}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=0} =$$
$$= \int_a^b \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \eta^2(x) + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\eta(x) \cdot \eta'(x) + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\left(\eta'(x)\right)^2\right] dx.$$

Definition

Выражение $\Phi''(0) = \frac{d^2 J(y+\alpha\eta)}{d\alpha^2}\Big|_{\alpha=0}$ называется второй вариацией функционала (1) и обозначается $\delta^2 J[y,\eta(x)]$, где $\eta(x)$ - произвольная функция, принадпежащая $\dot{\mathbb{C}}^1[a,b]$.

Преобразуем $\delta^2 J[y,\eta(x)]$, проинтегрировав второе слагаемое по частям:

$$\delta^2 J = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \cdot \eta^2(x)\Big|_{x=a}^{b} + \int_a^b \left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\right)\eta^2(x) + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\left(\eta'(x)\right)^2\right] dx$$

Внеинтегральное слагаемое равно нулю, так как $\eta(x) \in \dot{\mathbb{C}}^1[a,b]$. Положим

$$P(x) = \frac{\partial^2 F\left[x, y(x), y'(x)\right]}{\partial y'^2},$$
$$Q(x) = \frac{\partial^2 F\left[x, y(x), y'(x)\right]}{\partial y^2} - \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 F\left[x, y(x), y'(x)\right]}{\partial y \partial y'}.$$

Окончательная формула $\delta^2 J[y,\eta(x)]$ выглядит так:

$$\delta^2 J[y,\eta(x)] = \int_a^b \left[P(x)\left(\eta'\right)^2 + Q(x)\eta^2\right] dx \tag{2}$$

где $\forall \eta(x) \in \dot{\mathbb{C}}^1[a,b]$.

Definition

Будем говорить, что для $y(x)$ на $[a,b]$ выполнено условие Лежандра, если $P(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$. Если $P(x) > 0, \forall x \in [a,b]$, то говорят, что для $y(x)$ на $[a,b]$ выполнено усиленное условие Лежандра.

Theorem 1

Если $\hat{y}(x) \in M$ дает слабый локальный минимум $J(y)$ (соответственно максимум $J(y)$), то необходимо $\delta^2 J[\hat{y},\eta(x)] \geq 0$ (соответственно $\delta^2 J[\hat{y},\eta(x)] \leq 0$) для всех $\eta(x) \in \hat{\mathbb{C}}^1[a,b]$.

Пусть для определенности $\hat{y}(x) \in M$ дает слабый локальный минимум $J(y)$. Допустим противное, что $\delta^2 J[\hat{y},\eta(x)] < 0$ для некоторой $\eta(x) \in \dot{\mathbb{C}}^1[a,b]$. Рассмотрим семейство функций $\hat{y}(x) + \alpha\eta(x)$, где $\alpha \in R, \eta(x) \in \dot{\mathbb{C}}^1[a,b]$. Тогда, разлагая F по формуле Тейлора в окрестности $\alpha = 0$, получаем

$$J(\hat{y} + \alpha\eta) - J(\hat{y}) = \alpha\delta J(\hat{y},\eta) + \frac{\alpha^2}{2}\delta^2 J(\hat{y},\eta) + \varepsilon(\alpha) r(\hat{y},\eta),$$

где

$$\delta J(\hat{y},\eta) = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\Big|_{y=\hat{y}(x)} \cdot \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{y=\hat{y}(x)} \cdot \eta'(x)\right] dx$$

$\varepsilon(\alpha) \to 0$ при $\alpha \to 0$.

Так как по условию $\hat{y}(x)$ дает минимум (1), то $\delta J(\hat{y},\eta) = 0$ и, значит, знак правой части при достаточно малых α совпадает со знаком $\delta^2 J(\hat{y},\eta)$, т.е. $J(\hat{y} + \alpha\eta) - J(\hat{y}) < 0$, что противоречит условию минимума.

Для практического применения более удобным является следующее необходимее условие слабого локального минимума (соответственно максимума).

Theorem 2

Если $\hat{y}(x) \in M$ дает слабый локальный минимум (соответственно максимум) функционала (1), то необходимо, чтобы для $\hat{y}(x)$ выполнялось условие Лежандра $P(x) \geq 0$ (условие Лежаждра $P(x) \leq 0$).

Пусть для определенности $\hat{y}(x) \in M$ дает минимум (1). Рассуждаем от противного. Пусть $\exists x_0 \in (a,b)$ такое, что $P(x_0) < 0$. Из непрерывности $P(x)$ следует, что $\exists \varepsilon > 0$ такое, что $P(x) < \frac{1}{2}P(x_0), \forall x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. Возьмем функцию

$$\eta(x) = \begin{cases} \sin^2 \pi \frac{x - x_0 + \varepsilon}{2\varepsilon}, & x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon], \\ 0, & x \notin [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]. \end{cases}$$

Очевидно, $\eta(x) \in \dot{\mathbb{C}}^1[a,b]$, так как $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset (a,b)$.
Тогда

$$\begin{aligned} &\int_a^b \left[P(x)\left(\eta'(x)\right)^2 + Q(x)\eta^2(x)\right] dx = \\ &= \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} P(x)\frac{\pi^2}{4\varepsilon^2}\sin^2 2\pi\frac{x - x_0 + \varepsilon}{2\varepsilon}dx + \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} Q(x)\sin^4 \pi\frac{x - x_0 + \varepsilon}{2\varepsilon}dx < \\ &< \frac{\pi^2 P(x_0)}{4\varepsilon} + 2\varepsilon \max_{x\in[a,b]} |Q(x)| < 0 \end{aligned}$$

если взять достаточно малое $\varepsilon > 0$, т.е. $\delta^2 J[\hat{y}, \eta(x)] < 0$, что противоречит теореме 1.

Неотрицательность $\delta^2 J[\hat{y}, \eta(x)]$ - необходимое, но не достаточное условие локального минимума. Перейдем к получению достаточных условий слабого локального экстремума функционала (1).

Рассмотрим функционал для фиксированной функции $\hat{y}(x) \in M$

$$K(\hat{y}, \eta) = \int_a^b \left[P(x)\left(\eta'(x)\right)^2 + Q(x)\eta^2(x)\right] dx \tag{3}$$

на множестве всех $\eta(x) \in \dot{\mathbb{C}}^l[a,b]$. Он называется квадратичным функционалом в $\mathbb{C}^l[a,b]$.

Definition

Квадратичный функционал $K(\hat{y}, \eta)$ называется положительно определенным, если найдется число $d > 0$ такое, что

$$K(\hat{y}, \eta) \geq d \int_a^b \left[\left(\eta'(x)\right)^2 + \eta^2(x)\right] dx$$

для $\forall \eta(x) \in \dot{\mathbb{C}}^1[a,b]$.

Функционал $K(\hat{y}, \eta)$ называется отрицательно определенным, если найдется число $d > 0$ такое, что

$$K(\hat{y}, \eta) \leq -d \int_a^b \left[\left(\eta'(x)\right)^2 + \eta^2(x)\right] dx$$

для $\forall \eta(x) \in \dot{\mathbb{C}}^1[a,b]$.

Theorem 3

Если для $\hat{y}(x) \in M$ и $\forall \eta(x) \in \mathscr{C}^1[a,b] \delta J[\hat{y}, \eta(x)] = 0$ и $K(\hat{y}, \eta)$ - положительно определенный кеадратичный фунжционал, то функция $\hat{y}(x) \in M$ дает строгий слабый локальный минимум функционала (1). Если же для $\hat{y}(x) \in M u \forall \eta(x) \in \dot{\mathbb{C}}^1[a,b] \delta J[\hat{y}, \eta(x)] = 0 u K(\hat{y}, \eta)$ - отрицателью определенный квадратичный функционал, то функция $\hat{y}(x) \in M$ дает строгий слабый локальный максимум функционала (1).

Замечание. Слабый локальный минимум для (1) называется строгим, если равенство $J(y) = J(\hat{y})$ справедливо лишь при $y(x) \equiv \hat{y}(x)$ на $[a,b]$.

Пусть $\forall \eta(x) \in \overset{\circ}{C}{}^1 [a,b]$. Разлагая функцию F по формуле Тейлора, получаем, что

$$\Delta J(\hat{y}) = J(\hat{y}+\eta) - J(\hat{y}) = \int_a^b \left[\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=\hat{y}(x)} \cdot \eta(x) + \left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{y=\hat{y}(x)} \cdot \eta'(x) \right] dx +$$
$$+ \frac{1}{2} \int_a^b \left\{ \left[\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_{y=\hat{y}(x)} + \varepsilon_1(x) \right] \eta^2 + 2 \left[\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\right|_{y=\hat{y}(x)} + \varepsilon_2(x) \right] \eta \cdot \eta' + \right.$$
$$\left. + \left[\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_{y=\hat{y}(x)} + \varepsilon_3(x) \right] \eta'^2 \right\} dx$$

где $\varepsilon_i(x) = \varepsilon_i[\hat{y}(x), \eta(x)], \max_{x\in[a,b]} |\varepsilon_i(x)| \to 0, \|\eta\|_{\mathbf{C}_{[a,b]}} \to \mathbf{0}, i = 1,2,3$. Отсюда

$$J(\hat{y}+\eta) - J(\hat{y}) = \frac{1}{2} K(\hat{y}, \eta) + \frac{1}{2} \int_a^b \varepsilon(x) dx$$

где $\int_a^b \varepsilon(x) dx = \int_a^b \left[\varepsilon_1(x)\eta^2 + 2\varepsilon_2(x)\eta \cdot \eta' + \varepsilon_3(x)\eta'^2 \right] dx$.
Так как $2|\eta\eta'| \le \eta^2 + \eta'^2$, то

$$2 \left| \int_a^b \varepsilon_2(x) \eta\eta' dx \right| \le \int_a^b |\varepsilon_2(x)| \left(\eta^2 + \eta'^2 \right) dx$$

Следовательно,

$$\left| \int_a^b \varepsilon(x) dx \right| \le \int_a^b \left\{ \left(|\varepsilon_1(x)| + |\varepsilon_2(x)| \right) \eta^2 + \left(|\varepsilon_2(x)| + |\varepsilon_3(x)| \right) \eta^2 \right\} dx \le$$
$$\le 2E(\eta) \int_a^b \left\{ \eta^2(x) + \eta^2(x) \right\} dx$$

где $E(\eta) = \max_{x\in[a,b]} \{|\varepsilon_1(x)|, |\varepsilon_2(x)|, |\varepsilon_3(x)|\}$. Так как $\max_{x\in[a,b]} |\varepsilon_i(x)| \to 0$ при $\|\eta(x)\|_{\mathbb{C}^1[a,b]} \to 0$, то найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что $2E(\eta) < \frac{d}{2}$, $\forall \eta(x) \in \dot{\mathbb{C}}^1[a,b], \|\eta(x)\|_{\mathbb{C}^1[a,b]} < \varepsilon$.

Если $K(\hat{y}, \eta)$ - положительно определенный функционал, то при так выбранных $\eta(x) \not\equiv 0$ имеем

$$\Delta J(\hat{y}) \ge \frac{d}{2} \int_a^b \left[\eta^2(x) + \eta^2(x) \right] dx > 0$$

т.е. имеем строгий слабый локальный минимум. Если же $K(\hat{y}, \eta)$ - отрицательно определенный функционал, то при выбранных выше $\eta(x) \not\equiv 0$ получаем $\Delta J(\hat{y}) < 0$, т.е. имеем строгий слабый локальный максимум. $\square$

Условия теоремы 3 трудно проверяемы на практике. Поэтому приведем более простые достаточные условия для слабого локального экстремума (1).

Заметим, что уравнение Эйлера для функционала (3) имеет вид

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{d\eta(x)}{dx}\right]-Q(x)\eta(x)=0, \quad x\in[a,b]. \tag{4}$$

Уравнение (4) называется уравнением Якоби. Здесь коэффициенты $P(x)$ и $Q(x)$ зависят от функции $\hat{y}(x)\in M$.

Говорят, что точка $c\in(a,b]$ является сопряженной с точкой a, если уравнение Якоби (4) имеет решение $\eta(x)\not\equiv 0, \eta(a)=0$, такое, что $\eta(c)=0$.

Definition

Говорят, что для $\hat{y}(x)\in M$ выполнено условие Якоби, если (a,b) не содержит точек, сопряженных с точкой a. Говорят, что для $\hat{y}(x)\in M$ выполнено усиленное условие Якоби, если $(a,b]$ не содержит точек, сопряженных с точкой a.

Лемма. Пусть выполнены усиленное условие Лежандра и усиленное условие Якоби. Тогда $\exists w(x)\in\mathbb{C}^1[a,b]$ такая, что

$$K(\hat{y},\eta)=\int_a^b P(x)\left[\eta'(x)+\frac{w(x)}{P(x)}\cdot\eta(x)\right]^2dx$$

О Для $\forall\eta(x)\in\dot{\mathbb{C}}^1[a,b]$ и $\forall w(x)\in\mathbb{C}^1[a,b]$

$$\int_a^b\left[w(x)\cdot\eta^2(x)\right]'dx=0$$

Добавляя к интегралу (3) это выражение, получаем $(P(x)>0)$:

$$K(\hat{y},\eta)=\int_a^b P\left[\eta'^2+\frac{2}{P}w\cdot\eta\cdot\eta'+\frac{Q+w'}{P}\eta^2\right]dx$$

Потребуем, чтобы тождественно на $[a,b]$ выражение в квадратных скобках было полным квадратом, т.е. чтобы дискриминант тождественно обращался в нуль на $[a,b]$. Это означает, что $w(x)$ должна удовлетворять уравнению Риккати на $[a,b]$:

$$P(x)w'-w^2+P(x)Q(x)=0. \tag{5}$$

Если такое решение (5) $w(x)$ существует на $[a,b]$, то

$$K(\hat{y},\eta)=\int_a^b P(x)\left[\eta'(x)+\frac{w(x)}{P(x)}\eta(x)\right]^2dx$$

Таким образом, доказательство леммы свелось к доказательству существования решения уравнения Риккати (5). С этой целью сделаем в (5) замену $w=-\frac{u'}{u}\cdot P$, где $u=u(x)$ - новая неизвестная функция. Уравнение (5) примет вид (5'):

$$\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{du}{dx}\right]-Q(x)u=0 \tag{5'}$$

Если показать, что уравнение (5') имеет на $[a,b]$ решение $u_0(x)\neq 0$, то в силу замены функция $w(x)$ будет построена. Для (5') существует и единственно решение $u_1(x)$, удовлетворяющее начальному условию $u_1(a)=0$, $u_1'(a)=1$, так как $P(x)>0$ на $[a,b]$. Тогда $u_1(x)>0,\forall x\in(a,b]$, так как выполнено усиленное условие Якоби. Решение (5') $u_0(x)$ с начальным условием $u_0(a)=\varepsilon, u_0'(a)=1$, где $\varepsilon>0$ и достаточно мало, существует, единственно на $[a,b]$ и непрерывно зависит от ε. Так как $u_1(x)>0$, $\forall x\in(a,b]$, то $u_0(x)>0,\forall x\in[a,b]$.

Theorem 4

Пусть:

1. $\delta J[\hat{y}, \eta(x)] = 0$ для $\hat{y}(x) \in M$ и любой допустимой $\eta(x)$,
2. для $\hat{y}(x)$ на $[a, b]$ выполнено усиленное условие Лежандра,
3. для $\hat{y}(x)$ на $[a, b]$ выполнено усиленное условие Якоби.

Тогда $\hat{y}(x)$ дает функционалу (1) строгий слабый локальный минимум.

Proof

Из леммы следует, что $K(\hat{y}, \eta) \geq 0, \forall \eta(x) \in \dot{\mathbb{C}}^1[a, b]$. Покажем, что $K(\hat{y}, \eta) > 0$ при $\eta(x) \not\equiv 0$. Если $\exists \eta_0(x)$ такая, что $K(\hat{y}, \eta_0) = 0$, то функционал $K(\hat{y}, \eta)$ достигает на $\eta_0(x)$ абсолютного минимума. Поэтому $\eta_0(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера (4). Кроме того, так как $K(\hat{y}, \eta_0) = 0$ и выполнено условие $P(x) > 0$ на $[a, b]$, то из представления $K(\hat{y}, \eta_0)$ в лемме следует, что

$$\eta_0'(x) + \frac{w(x)}{P(x)}\eta_0(x) = 0, \quad \forall x \in [a, b]$$

т.е. $\eta_0(a) = \eta_0'(a) = 0$, так как $\eta_0(x) \in \dot{\mathbb{C}}^l[a, b]$. По теореме единственности $\eta_0(x) \equiv 0$ на $[a, b]$. Итак, $K(\hat{y}, \eta) > 0$ при $\eta(x) \not\equiv 0$. Пусть $p = \min_{x \in [a,b]} P(x) > 0$. Покажем, что для $\forall \eta(x) \in \dot{\mathbb{C}}^1[a, b]$

$$K(\hat{y}, \eta) \geq \frac{p}{2} \int_a^b [\eta'(x)]^2 \, dx \tag{6}$$

Рассмотрим функционал

$$\tilde{K}(\hat{y}, \eta) = \int_a^b \left[\left(P(x) - \frac{1}{2}p \right) \eta'^2(x) + Q(x)\eta^2(x) \right] dx$$

Для него уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{d}{dx} \left[\left(P - \frac{1}{2}p \right) \frac{d\eta}{dx} \right] - Q\eta = 0. \tag{7}$$

Покажем, что это уравнение имеет положительное решение на всем $[a, b]$. В самом деле, пусть $\eta_0(x)$ - решение этого уравнения с начальным условием $\eta_0(a) = 0, \eta_0'(a) = 1$. Так как $\eta_0(x) > 0$ при $\forall x \in (a, b]$ изза выполнения усиленного условия Якоби, то по теореме о непрерывной зависимости решений от параметров решение $\eta(x)$ уравнения (7) при начальных условиях $\eta(a) = \varepsilon, \eta'(a) = 1$, где малое $\varepsilon > 0$, существует, единственно и положительно на всем $[a, b]$. Но тогда для функционала $\tilde{K}(\hat{y}, \eta)$ выполнены условия леммы. Из леммы следует, что $\tilde{K}(\hat{y}, \eta) > 0$. Поэтому

$$K(\hat{y}, \eta) = \tilde{K}(\hat{y}, \eta) + \frac{1}{2}p \int_a^b \eta'^2(x)dx \geq \frac{1}{2}p \int_a^b \eta'^2(x)dx$$

т.е. неравенство (6) установлено.

Покажем теперь, что квадратичный функционал (3) является положительно определенным в $\mathbb{C}^l[a, b]$. В самом деле, так как $\eta(a) = 0$, то $\eta(x) = \int_0^x \eta'(t)dt$ и по неравенству Коши-Буняковского

$$\eta^2(x) = \left(\int_0^t \eta'(t)dt\right)^2 \leq (b-a)\int_a^0 \eta'^2(x)dx, \quad \forall x \in [a,b]$$

Отсюда

$$\int_a^b \eta'^2(x)dx \geq \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b \eta^2(x)dx.$$

Тогда при $\forall \eta(x) \in \dot{\mathbb{C}}^l[a,b]$

$$K(\hat{y},\eta) \geq \frac{1}{2}p\int_a^b \eta'^2(x)dx \geq \frac{1}{4}p\int_a^b \eta'^2(x)dx + \\ + \frac{p}{4(b-a)^2}\int_a^b \eta^2(x)dx \geq d\int_a^b \left[\eta'^2(x)+\eta^2(x)\right]dx,$$

где $d = \min\left(\frac{p}{4}, \frac{p}{4(b-a)^2}\right)$. Теперь теорема 4 следует из теоремы 3.

Замечания.

1. Достаточные условия для строгого слабого локального максимума получаются, если условие 2) теоремы 4 заменить усиленным условием Лежандра вида $P(x) < 0, \forall x \in [a,b]$.

2. Если условие 3) теоремы 4 не выполняется и найдется точка $c \in (a,b)$, сопряженная с точкой a, то можно доказать, что $\hat{y}(x)$ не дает слабого локального минимума. Отсюда следует, что условие Якоби, если выполнено усиленное условие Лежандра, необходимо для слабого локального минимума.

Пример. Исследовать на слабый экстремум

$$J(y) = \int_0^a \left[y^3(x) - y^2(x)\right]dx, \quad y(0)=0, \quad y(a)=A, \quad a>0$$

$\triangle$ Допустимая экстремаль: $\dot{y}(x) = \frac{Ax}{a}$. Так как $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\left(3y'-1\right)$, то $P(x) > 0$ при $3A >$ a и $P(x) < 0$ при $3A < a$, т.е. выполнено усиленное условие Лежандра при $3A \neq a$. В данном случае уравнение Якоби $\frac{d}{dx}\left[P(x)\frac{du}{dx}\right] = 0$ при $u(0)=0$ имеет решения $u = cx$. Они не имеют нулей при $\forall x \in (0,a]$ т.е. при $3A \neq a$ выполнено усиленное условие Якоби.

Из теоремы 4 следует, что при $3A > a$ допустимая экстремаль дает слабый локальный минимум, а при $3A < a$ допустимая экстремаль дает слабый локальный максимум.

Пусть теперь $3A = a$. Покажем, что допустимая экстремаль не дает слабого локального экстремума. При $\forall \eta(x) \in \dot{\mathbb{C}}^1[0,a]$

$$J(\hat{y}+\eta) - J(\hat{y}) = \int_0^a \left[3\hat{y}'\eta'^2 + \eta'^3 - \eta'^2\right]dx = \int_0^a \eta'^3(x)dx$$

Если взять $\eta_n(x) = \frac{x}{n^2}\sin\frac{n\pi x}{a}$, где n - любое целое ненулевое число, то нетрудно увидеть, что $\int_0^a \eta_n'^3(x)dx$ меняет знак при изменении знака n. Это значит, что при $3A = a$ нет слабого локального экстремума.

Упражнения к главе 9

1. Решить простейшую вариационную задачу:

$$J(y) = \int_1^2 \left(3x^2yy' - x^3y^2 + \frac{6y}{x}\right) dx, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = \frac{1}{8}$$

2. Найти допустимые экстремали функционалов:
а) $J(y) = \int_0^{\pi/4} \left[(y')^2 - y^2 + 4y\cos x\right] dx, \quad y(0) = 0,$
б) $J(y) = \int_1^2 \left[x\,(y')^2 - 8x^2y' + 16xy - \frac{4}{x}y^2\right] dx,$
в) $J(y,z) = \int_0^{\pi/2} \left[-(y')^2 + (z')^2 + 2yz + 2xy\right] dx, y(0) = -1, z(0) = 1,$ $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad z\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}.$
г) $J(y) = \int_0^1 \left[-(y'')^2 + (y')^2 + 24xy\right] dx, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad y'(0) = 2, \quad y'(1) = -4.$

3. Наити допустимую экстремаль и выяснить, при каких значениях параметра a на ней достигается минимум функционала

$$J(y) = \int_0^1 \left[x + x^2 + y^2 + a\,(y')^2\right] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

4. Каким необходимым граничным условиям удовлетворяет функция, дающая минимум функционалу

$$J(y) = \int_a^b \left[(y')^2 + f(x,y)\right] dx + 2y(a)\cdot y(b)$$

если $f(x,y)$ - заданная дважды непрерывно дифференцируемая функция на всей плоскости x, y ?

5. Решить изопериметрическую задачу:

$$J(y) = \int_0^\pi (y')^2\, dx, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = -1, \quad \int_0^\pi y\cos dx = \frac{\pi}{2}.$$

6. Найти минимум функционала

$$J(y) = \int_0^\pi (y')^2\, dx$$

если $y(0) = y(\pi) = 0, \int_0^\pi y^2 dx = 1.$

Part III
Problems

14 Typical differential equations

Обсудим примеры решений разных дифференциальных уравнений.

14.1 1. First-order equations.

14.1.1 Problems about Linear Equations with Constant Coefficients

МФТИ-Т.1 Решить $2x(\sqrt{x}+1)y' + y^2 + \sqrt{x} = 0$

Это нетривиальное уравнение на первую производную, следовательно оно может быть именным - да, это типичное уравнение Риккати.

Угадаем, что решение может иметь вид $y = C\sqrt{x}$, подставим, получим квадратное уравнение на C, решим, получим $C = -1$.

Подставим $y = -\sqrt{x} + z(x)$, получим уравнение Бернулли:

$$2x(\sqrt{x}+1)z'(x) + 2\sqrt{x}z = -z^2$$

Подставим $z = \frac{1}{u}$, получим:

$$-2x(\sqrt{x}+1)u' + 2\sqrt{x}u = -1$$

решаем однородное, получаем $u = C(\sqrt{x}+1)^2$, подставляем с $C = C(x)$, получаем

$$C + \text{const} = \int \frac{dx}{2x(\sqrt{x}+1)^3}$$

введя $t \equiv \sqrt{x}+1$, разложив $\frac{1}{(t^3(t-1))} = -\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3} + \frac{1}{(t-1)}$, находим

$$u = \frac{1}{2} + (\sqrt{x}+1)^2\ln(\sqrt{x}) + (\sqrt{x}+1)^2\ln(\sqrt{x}+1) + \sqrt{x} + 1 + \text{const}(\sqrt{x}+1)^2$$

в итоге ответ:

$$y = -\sqrt{x} + \left(\frac{1}{2} + (\sqrt{x}+1)^2\ln(\sqrt{x}) + (\sqrt{x}+1)^2\ln(\sqrt{x}+1) + \sqrt{x} + 1 + \text{const}(\sqrt{x}+1)^2\right)^{-1}$$

МФТИ-Т.2

Решить задачу Коши: $y'' + 2y' = \frac{y'^2}{y+1} + \frac{y'}{x}\ln\left(\frac{y+1}{y'}\right), \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = \frac{2}{e}$.

(потом порешаю, чет пока не пошла.)

ФР. $x^2 + y^2 + xy - x^2y' = 0, \quad y(e) = 0$

Решаем делением, а далее элементарным преобразованием

$y' = \frac{x^2+y^2+xy}{x^2} = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)$ Замена: $y_{/x} = v \to y = v(x)\cdot x$, mo yy $y' = v + x\frac{dv}{dx}$; $\frac{y(e)}{e} = v(e) \Rightarrow v(e) = 0$ $v + x\frac{dv}{dx} = 1 + v^2 + v \to x\frac{dv}{dx} = 1 + v^2 \Rightarrow \Rightarrow \int \frac{dv}{1+v^2} = \int \frac{dx}{x} \to 3$ arcty $v = \ln x + c$, marsa $v(l) = 0$ wa tar yas > arcty $y/x = \ln x - 1$ Umb.

ФР. $y' = x\sqrt{y} + \frac{xy}{x^2-1}, \quad x > 1$

Уравнение Бернулли, решается без проблем по алгоритмам для уравнения Бернулли.

ФР. $\left(2xe^{x^2-y^2} - \sin x\right)dx - \left(2ye^{x^2-y^2} + \sin y\right)dy = 0$

Типичное уравнение в полных дифференциалах, это легко проверяется, дальше элементарно все считается.

ФР. $y'' = 2\left(y'-1\right)\cot x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi + 13, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$

Решается по алгоритму для уравнений без y: $\int \frac{d(p-1)}{p-1} = 2 \cdot \int \frac{d(\sin x)}{\sin x}$ $\ln|p-1| = 2\ln|\sin x| + \ln C_1$ $p-1 = C_1 \sin^2 x$ $\frac{dy}{dx} = C_1 \sin^2 x + 1$ $\int dy = c_1 \int \sin^2 x \cdot dx + \int dx$ $y = c_1 \cdot \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx + \int dx$ $y = \frac{c_1}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + x + c_2$ (3 $3 = c_1 + 1$ $c_1 = 2$ $\pi + 13 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + c_2$ $C_2 = 13$ $y = 2x + 13 - \frac{\sin 2x}{2}$ $y = 2x - \cos x \cdot \sin x + 13$ 2

Важно как всегда для таких: не делать никаких сложных ходов, а решать простыми.

ФР. $2\left(y'\right)^2 = y''(y-1), \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = -1$

Решаем обычной заменой $2\left(y'\right)^2 = y''(y-1)$ $y(1) = 2$ $y'(1) = -1$ $y' = p$ $y'' = \frac{p \cdot dp}{dy}$ $2p^2 = p \cdot \frac{dp}{dy}(y-1)$ $(: p \neq 0$ $y' \neq 0$ $y \neq \text{Const} \to 2p = \frac{dp}{dy}(y-1)$ $\int \frac{dp}{p} = 2\int \frac{d(y-1)}{y-1}$ $\ln|p\Big) = 2 \cdot \ln(y-1) + \ln C_1$ $\frac{dy}{dx} = p = c_1 \cdot (y-1)^2$ $-1 = C_1 \cdot (2-1)^2 = c_1$ $\frac{dy}{dx} = -(y-1)^2$ $\int \frac{d(y-1)}{(y-1)^2} = -\int dx$ $\frac{1}{y-1} = x + C_2$ $\frac{1}{2-1} = 1 + C_2$ $C_2 = 0$ $y - 1 = \frac{1}{x}$ $y = \frac{x+1}{x}$

14.1.2 Problems about equations with separating variables and homogeneous equations

Тут все просто, абсолютно ничего сложного.

Р-2.пр.3. Решить $2xydx = \left(x^2 + y^2\right) dy$

Перед нами типичное однородное уравнение, которое решается заменой $y = xz$. Приходим к уравнению с разделяющимися переменными:

$$x\left(1 + z^2\right) dz + z\left(z^2 - 1\right) dx = 0.$$

Заметим, что $z = 0, \pm 1$ - решения этого уравнения. Тогда из замены следует, что $y = 0$ и $y = \pm x$ - решения исходного уравнения. При $z \neq 0, \pm 1$ уравнение с разделяющимися переменными можно записать в виде

$$\frac{dx}{x} + \left(\frac{2z}{z^2 - 1} - \frac{1}{z}\right) dz = 0.$$

Решив это уравнение и использовав замену $z = \frac{y}{x}$, получаем решения заданного уравнения:

$$x^2 - y^2 = Cy, \quad y = 0.$$

Тут все просто, важно только не потерять решения.
Ответ: $x^2 - y^2 = Cy, y = 0, y = \pm x$.

Р-2.1. Решить $y' = y^2 - y$.

Разделяем переменные, не забываем решение $y = 0$. В правой части преобразовываем $\frac{1}{y(y-1)} = 1/(-1+y) - 1/y$, приходим к $Ce^x = \ln \frac{y-1}{y}$, отсюда ответ: $y = (1 - ce^x)^{-1}, y = 0$.

Заметим, что тут можно было бы бы написать ответ: $y = (1 + ce^x)^{-1}, y = 0$, хотя изначально константа была только положительная. Это потому что просто можно менять константы на другую со знаком, пока так объясняю это.

Р-2.2. Решить $\left(x^2 + x\right) y' - (2x+1)y = 0$.

Замечаем, что $y = 0$ решение. Разделяем переменные: $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} + \frac{dx}{x+1}$ получаем ответ: $y = Cx(x+1), y = 0$.

Р-2.3. Решить $xy' \cos y + \sin y = \sin^2 y$

Замечаем, что $\sin(y) = 1$ решение, разделяем переменные, вычисляем интеграл, заменяя $\sin(y) \equiv t$, приходим к ответу: $Cx = \frac{\sin y - 1}{\sin y}, \sin(y) = 1$.

Р-2.4. Решить

$y' \cos x + y(1+y) \sin x = 0$.

P-2.5. Решить

$2xydx = \left(1 - x^2\right) dy.$

P-2.6. Решить

$x^3ydy = (x - 1)dx.$

P-2.7. Решить

$yy' \cos x = (1 - y) \sin x.$

P-2.8. Решить

$x\left(1 - y^2\right) y' = y\left(1 + y^2\right).$

P-2.9. Решить

$\left(x^2 - 1\right) ydx = x\left(x^2 + 1\right) dy.$

P-2.10. Решить

$x(y + 1)dy = \left(1 - y^2\right) dx.$

P-2.11. Решить $xy' + y^2\left(\frac{1}{x} - 3x\right) = 0$

Спокойно переменные разделяются, при этом $y = 0$ есть решение, интегрируем, получаем ответ: $\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = C - 3x, y = 0.$

P-2.12. Решить

$\left(1 - x^2\right)^2 yy' + x = 0.$

P-2.13. Решить

$(x + 1)y' + y(y + 1) = 0.$

P-2.14. Решить

$\left(1 + y^2\right) ydx = x\left(1 + 2y^2\right) dy.$

P-2.15. Решить

$x^2\left(x^2 + 4\right) y' = \cos^2 y.$

P-2.16. Решить

$y' \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg} y = 0.$

P-2.17. Решить

$(1 + \cos x)yy' = \left(1 + y^2\right) \sin x.$

P-2.18. Решить

$ye^x dy + xe^{y^2} dx = 0.$

P-2.19. Решить

$x(1 + y)y' + (\sqrt{x} + \ln x)\left(1 + y^2\right) = 0.$

P-2.20. Решить

$(x-1)yy' + \left(x^2+1\right)(y+1)^2 = 0.$

P-2.21. Решить

$x^2dx + \left(1+x^6\right)\sqrt{1-2y}dy = 0.$

P-2.22. Решить

$y'\sqrt{1-x^4} + x\left(1+e^y\right) = 0.$

P-2.23. Решить

$y'\frac{\sin^2 x}{\cos x} + e^{-y}\sqrt{1+e^y} = 0.$

14.1.3 Problems about variable substitution method

P-2.24

$(2x+y+2)dx - (4x+2y+9)dy = 0.$

P-2.25 Решить $(4-x-2y)dx - 2(1+x+2y)dy = 0$**.**

P-2.2 Решить $(2y-x+1)dx + (4y-2x+6)dy = 0$**.**

P-2.27 Решить $(y-3x+2)dx + (3x-y-1)dy = 0$**.**

P-2.28. Найти решение, удовл. н.. у.: $2y\left(1+y^2\right)dx + x\left(3y^2+y+3\right)dy = 0, \quad y(1) = 1$

Без проблем разделяем переменные, раскладываем функцию от y на дроби, интегрируем, находим константу из начальных условий, получаем: $\ln x^2 + 3\ln y + \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{4}$

P-2.29. Найти решение, удовл. н.. у.:

$x(2y-1)y' + 4y^2 = 0, \quad y(-1) = -1.$

P-2.30. Найти решение, удовл. н.. у.:

$x(1+y)y' = y^2, \quad y(1) = 1.$

P-2.31. Найти решение, удовл. н.. у.:

$3x(x+1)y' = (x+2)y, \quad y(1) = -1.$

P-2.32. Найти решение, удовл. н.. у.:

$(y+2)y' = \sin 2x, \quad y(0) = 1.$

P-2.33. Найти решение, удовл. н.. у.:

$\left(e^x+1\right)^2 y' + \left(e^{2x}-1\right)y = 0, \quad y(0) = \frac{1}{4}.$

P-2.34. Найти решение, удовл. н.. у.:

$\left(x^2+x\right)y' - \left(x^2+x+1\right)y = 0, \quad y(1) = \frac{e}{2}.$

P-2.35. Найти решение, удовл. н.. у.:

$\left(x^3+x\right)y' - \left(3x^2-1\right)y = 0, \quad y(-1) = -4.$

P-2.36. Найти решение, удовл. н.. у.:

$y' + 3y^2 = 3y, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$

P-2.37. Найти решение, удовл. н.. у.:

$y' = \left(y + y^4\right) \text{ th } x, \quad y(0) = 1.$

P-2.38. Найти решение, удовл. н.. у.:

$xy' + y(1+y)\sin x = 0, \quad y(0) = 1.$

P-2.39. Найти решение, удовл. н.. у.:

$2y' = \left(y^2 - 2y\right) e^{x^2}, \quad y(0) = 1.$

P-2.55

Доказать, что решение задачи Коши существует и единственно при любых начальных данных для уравнения $y' = a(x) \cdot b(y)$, где $a(x), b(y)$ заданные и непрерывные соответственно на интервалах $(\alpha, \beta), (\gamma, \delta)$ функции, причем $b(y) \neq 0$.

P-2.56

Пусть функции $f(x), g(y)$ непрерывны на всей числовой оси, причем

P-2.56

Пусть функции $f(x), g(y)$ непрерывны на всей числовой оси, причем

$$|f(x)| \leqslant \frac{A}{(1+|x|)^{1+\varepsilon}}, \quad 0 < g(y) \leqslant B(1+|y|),$$

где A, B, ε - положительные постоянные. Доказать, что при любых x_0, y_0 существует единственное, определенное при $-\infty < x < +\infty$ решение уравнения

$$y' = f(x) \cdot g(y),$$

удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$ и имеющее конечные $\lim_{x \to -\infty} y(x)$, $\lim_{x \to +\infty} y(x)$.

P-2.57

$xy' = y\left(1 + \ln \frac{y}{x}\right).$

P-2.58

$xy' = \frac{x^2+y^2}{x+y}.$

P-2.59

$xdy = \left(y + \sqrt{x^2+y^2}\right) dx.$

P-2.60

$xydx = \left(x^2 - y^2\right) dy.$

P-2.61

$xdy = \left(y - \sqrt{x^2+y^2}\right) dx.$

P-2.62

$(x+2y)dx + ydy = 0.$

P-2.63

$\left(xy+y^2\right)y'=y^2.$

P-2.64

$(2x+y)y'=x+2y.$

P-2.65

$\left(x^3+y^3\right)y'=x^2y.$

P-2.66

$(x+2y)y'+y=0.$

P-2.71. $(3xdy-ydx)\left(x^2+y^2\right)+x^2ydy-xy^2dx=0.$

Имеем однородное уравнение, так что решаем $y(x)=z(x)x$, получаем после сокращений:

$$dzx^4(3(1+z^2)+z)=-2x^3z(1+z^2)dx.$$

замечаем, что решения $y=0, x=0$, разделяем переменные, приходим у к уравнению:

$$dz)\frac{3}{z}+\frac{1}{1+z^2})=-2\frac{dx}{x},$$

получаем уравнение, из которого можно легко выразить ответ: $\ln\left|\frac{y^3}{x}\right|+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=C$

Ответ: $\ln\left|\frac{y^3}{x}\right|+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=C, y=0, x=0.$

P-2.72

$(x+y+1)dx+(x-y+3)dy=0.$

P-2.73

$(2x-y-2)dx+(x+y-4)dy=0.$

P-2.74

$(x+2y-5)dx+(y-x-4)dy=0.$

P-2.75

$(x-1)y'+3x+2y+3=0.$

P-2.76

$(x+y-2)y'+x-y=0.$

P-2.77

$(2x+y-3)y'+y+1=0.$

P-2.78

$(x+2y)y'+2x+5y-1=0.$ Найти решения уравнений, удовлетворяющие заданному н. у. (79-83):

P-2.79

$y'=\frac{2x+y}{x-2y}, \quad y(1)=0.$

P-2.80

$y' = \frac{y-2x}{x+2y}; y(1) = 0$

P-2.81

$\left(y^2 - 3x^2\right) y' + xy = 0, \quad y(1) = \sqrt{6}.$

P-2.82

$xyy' = (x - 2y)^2, \quad y(1) = 2.$

P-2.83

$(x - y)^2 y' = 4xy, \quad y(-1) = 2.$ Решить уравнения, приведя их с помощью замены вида $y = z^m$ к однородным уравнениям (84-87):

P-2.84

$\left(4x^2 + y^4\right) dy - 2xydx = 0.$

P-2.85

$\left(3x^2y^2 + 1\right) y' + 3xy^3 = 0.$

P-2.86

$y' = 4x^2 - \frac{y^2}{x^4}.$

P-2.87

$y' = x + \frac{x^3}{y}.$

P-2.88

Найти интегральные кривые уравнения

$$xy' = 2\left(y + \sqrt{y^2 - x^4}\right),$$

проходящие через а) точку $(2, 5)$,
б)точку $(1, 1)$.

P-2.90

Составить дифференциальное уравнение траекторий, пересекающих под углом $\varphi = \frac{\pi}{4}$ параболы с общей вершиной и общей осью.

P-2.92

Составить дифференциальное уравнение семейства окружностей, имеющих центр на прямой $y = x$ и проходящих через начало координат.

14.1.4 Problems about the simplest Bernoulli and Riccati equations

P-3.пр.1. Найти общее решение $xy' = y - 2x^2$

Имеем типичное неоднородное уравнение. Ищем общее решение однородного $xy' = y$. Преобразовав, получим $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$, а также решение $y = 0$. Получаем общее решение однородного уравнения $y = Cx$, где C - произвольная постоянная.

Далее варьируем постоянную, т. е. ищем решение заданного уравнения в виде $y = C(x) \cdot x$, подставим, получим

$$C(x) = -2x + A$$

где A - произвольная постоянная. Следовательно, общее решение заданного уравнения имеет вид

$$y = Ax - 2x^2.$$

Р-3.пр.2. Решить $xy' + 4y = 3xy^2$

Решаем как типичное уравнение Бернулли. Очевидно, что $y = 0$ - решение. При $y \neq 0$, подставим $z = \frac{1}{y}$, получаем линейное уравнение $xz' - 4z + 3x = 0$. Решив это уравнение методом вариации постоянной, находим $z = Cx^4 + x$, где C - произвольная постоянная. Следовательно, $y = 0$ и $\frac{1}{y} = Cx^4 + x$ - все множество решений заданного уравнения.

Р-3.пр.3. Решить $x^2y' + 2x^2y^2 - 5xy + 4 = 0$

Решаем как типичное уравнение Риккати. Угадываем, что $y_0(x) = \frac{1}{x}$ является решением заданного уравнения. Подставим $y = z + \frac{1}{x}$, получим уравнение Бернулли $z' = \frac{z}{x} - 2z^2$. Замена $u = \frac{1}{z}$ при $z \neq 0$ дает линейное уравнение $u' + \frac{u}{x} = 2$. $u = \frac{C}{x} + x$, где C - произвольная постоянная. Отсюда получаем решение заданного уравнения

$$y = \frac{x}{C + x^2} + \frac{1}{x}$$

Найти общее решение уравнений (1-31):

Р-3.1. Решить $y' + y = 2e^x$

Решаем однородное, потом варьируем постоянную, ответ: $y = Ce^{-x} + e^x$.

Р-3.2

$xy' = y - 2x^2$.

Р-3.3

$y^2dx + (xy - 1)dy = 0$.

Р-3.4

$2ydx + \left(\frac{3}{y} - x\right) dy = 0$.

Р-3.5

$x\left(4 - x^2\right) y' = 2x^2y + 1$.

Р-3.6

$xy' = x^2 + y$.

Р-3.7

$y' = \frac{y}{x} - x$.

Р-3.8

$(x + y)dx = xdy$.

Р-3.9

$2x^3y' = 2x^2y - 3$.

Р-3.10

$ydx - \left(x + y^2\right) dy = 0$.

P-3.11. $ydx = (3x - y^2)\,dy$

Решаем относительно $x(y) : yx' - 3x = -y^2$, решаем однородное, варьируем постоянную, не забываем константное решение, в итоге ответ: $x = y^2 + Cy^3, y = 0$.

P-3.12

$y' = y + 2xe^x$.

P-3.13

$\left(x + y^2 \cos y\right) dy = ydx$.

P-3.14

$xy' = x^2 + y - \frac{1}{x}$.

P-3.15

$y' = \frac{y}{x} - 2x^2$.

P-3.16

$x^4 dy = \left(2 - x^3 y\right) dx$.

P-3.17

$ydx = (2y - x)dy$.

P-3.18

$dx = (2x + e^y)\,dy$.

P-3.19

$x^3 y' + 2x^2 y = 2\ln x$.

P-3.20

$(\sin x - 1)y' + y\cos x = \sin x$.

P-3.21

$y' + 2xy = 2\left(1 + 2x^2\right)$.

P-3.22

$xy' - 2y = 2x^4$.

P-3.23

$x^4 y' + 2x^3 y = 1$.

P-3.24

$x^2 y' + 2xy = 1$.

P-3.25

$xy' - 3y = 4x^2$.

P-3.26

$x^3y' + x^2y = x^2 - 1.$

P-3.27

$4y' + 12x^2y = 3x^2.$

P-3.28

$xy' + \left(1 + x^2\right) y + x = 0.$

P-3.29

$x\left(y - \sqrt{1 + x^2}\right) dx + \left(1 + x^2\right) dy = 0.$

P-3.30

$y' + y \operatorname{tg} x = e^x \cos x.$

P-3.31

$\left(1 + y^2\right) dx + \left(xy - y^3\right) dy = 0.$

P-3.32

$xy' - y = x^2.$
Уравнения (32-35) искусственным приемом решаются короче, чем методом вариации постоянной.

P-3.33

$\left(y + x^3 \cos x\right) dx - xdy = 0.$
Уравнения (32-35) искусственным приемом решаются короче, чем методом вариации постоянной.

P-3.34

$x^2y' + xy + 1 = 0.$
Уравнения (32-35) искусственным приемом решаются короче, чем методом вариации постоянной.

P-3.35

$\left(1 + y^2\right) dx + (2xy - 1)dy = 0.$
Уравнения (32-35) искусственным приемом решаются короче, чем методом вариации постоянной.

P-3.36 Найти решения уравнений, удовлетворяющие н. у.

$xy' + 2y = 3x, \quad y(-1) = 1.$

P-3.37

$x^2y' = 5xy + 6, \quad y(1) = 1.$

P-3.38

$xy' = 7y + x^4, \quad y(1) = -\frac{1}{3}.$

P-3.39

$xy' = 5y + 3x^2, \quad y(-1) = -1.$

P-3.40

$\left(1 + x^2\right) y' = 2xy - 2x, \quad y(0) = 2.$

P-3.41

$y' - y \operatorname{tg} x = \sin x, \quad y(0) = 0.$

P-3.42

$\left(x^2 + x\right) y' - \left(x^2 + x + 1\right) y + x^3 = 0, \quad y(1) = 1.$

P-3.43

$xy' = 3y + 2x^5, \quad y(-1) = 1.$

P-3.44

$xy' - 2y = 2x^4, \quad y(1) = 1.$

P-3.45

$x^2 y' + y = 4, \quad y(-1) = 5.$

P-3.46

Найти ортогональные траектории семейства кривых $y + x = Ce^{-x} + 1$.

P-3.47 Решить

$4xy' + (4x + 1)y^2 - 4y = 0.$

P-3.48

$2xy' + 2y = x^2 y^2.$

P-3.49

$y' = xy^2 + \frac{y}{x}.$

P-3.50

$2xy' = 3y - 4xy^3.$

P-3.51

$xy' - y + 2xy^2 \ln x = 0.$

P-3.52

$2xy' + 2xy^3 = y.$

P-3.53

$2x^2 y' + xy = 2y^3.$

P-3.54

$xy' + 4y = 3xy^2.$

P-3.54

$y' - \frac{y}{x} = y^2.$

P-3.56

$xy' = 2y - 4x^2 y^2.$

P-3.57

$y' - y + 2xy^3 = 0.$

P-3.58

$xy' + 3xy^2 = 2y.$

P-3.59

$xy' - y + 4y^3 = 0.$

P-3.60

$y' + y \operatorname{tg} x + 4y^2 \sin x = 0.$

P-3.61

$xy' + 3y = 4x^2y^2.$

P-3.62

$xy' + 2xy^2 = 3y.$

P-3.63

$y(y+1)dx + (x+1)dy = 0.$

P-3.64

$y' \cos x + y \sin x + 3y^2 \cos x = 0.$

P-3.64

$5xy^4y' = y^5 + 4.$

P-3.66

$y\left(4xy^2 - 3\right)dx + 2xdy = 0.$

P-3.67

$8y' + 3x^2y\left(y^2 - 4\right) = 0.$

P-3.68

$ydx + \left(2x^2y - 3x\right)dy = 0.$

P-3.69

$3x^2dx - \left(x^3 + y + 1\right)dy = 0.$

P-3.70

$y^3dx + \left(x^3 \ln y - xy^2\right)dy = 0.$

P-3.71

$ydx + \left(4x^3 - x\right)dy = 0.$

P-3.72

$\left(y^2 - 1\right)dx - y\left[x + \left(y^2 - 1\right)\sqrt{x}\right]dy = 0.$

P-3.73

Найти решение уравнения $4xyy' - 3y^2 + x^2 = 0$, удовл. н. у. $y(1) = 1$.

P-3.74

Найти интегральную кривую уравнения $ydx - 4\left(x + y^2\sqrt{x}\right)dy = 0$, проходящую через точку $(0, 1)$.

P-3.74

Найти интегральную кривую уравнения $dx - xy\left(1 + xy^2\right)dy = 0$, пересекающую биссектрисы обоих координатных углов при $x = 1$.

Уравнения задач (76-81) искусственным приемом решаются короче, чем методом сведения к линейному уравнению.

P-3.76

$xy' - y + xy^2 = 0$.

P-3.77

$x^3y' - x^2y - y^3 = 0$.

P-3.78

$ydx - x\left(xy^2 + 1\right)dy = 0$.

P-3.79

$4xy' + 4xy^2 = 4y - y^2$.

P-3.80

Найти решение уравнения $\sin^2 x\,(y' \sin x - y\cos x) = y^2 \cos x$, удовлетворяющее условию $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

P-3.81

Найти решение уравнения $\cos^2 x\,(y' \cos x + y\sin x) + y^2 \sin x = 0$, удовлетворяющее условию $y(0) = 1$.

С помощью подбора какого-либо решения найти общее решение уравнений $(82 - 95)$:

P-3.82

$2x^2y' + x^2y^2 + 4 = 2xy$.

P-3.83

$x^2y' + x^2y^2 + 2xy = 2$.

P-3.84

$4y' = y^2 + \frac{4}{x^2}$.

P-3.84

$xy' = y^2 + 2(x + 1)y + x^2 + x$.

P-3.86

$x^2y' = x^2y^2 + 3xy + 3$.

P-3.87

$x^2y' = y^2 + 2xy - 2x^2$.

P-3.88

$y' = y^2 - 2xy + x^2.$

P-3.89

$y' = y^2 - 2xy + x^2 - 3.$

P-3.90

$y' + e^{-x}y^2 + y = 3e^x.$

P-3.91

$y' - e^x y^2 + 3y = e^{-x}.$

P-3.92

$y' = y^2 - 2y\sin x + \cos x + \sin^2 x.$

P-3.93

$y' + y^2 - 2y\cos x + \sin x + \cos^2 x = 0.$

P-3.94

$x^2y' - 5xy + x^2y^2 + 8 = 0.$

P-3.94

$\left(3x^2 + 2y\right)(1+y)dx + \left(2x - x^3\right)dy = 0.$

P-3.96

Доказать, что уравнение $y' = ky + f(x)$, где $k = \text{const} \neq 0, f(x)$ - непрерывная и периодическая функция, имеет только одно периодическое решение. Найти его.

Еще пара задач

97. Доказать, что у уравнения $xy' + ay = f(x), x > 0$, где $a = \text{const} \neq 0$, $f(x)$ - непрерывная ограниченная функция, существует только одно решение, ограниченное при $x > 0$.

98. Доказать, что у уравнения $xy' + \alpha y = f(x), 0 < x < a$, где $\alpha = \text{const} > 0, a > 0, f(x)$ - непрерывная функция при $0 < x \leqslant a$ и $\lim_{x\to+0} f(x) = \beta$, существует только одно решение, ограниченное при $0 < x < a$ и имеющее предел при $x \to +0$. Найти этот предел.

99. Доказать, что у уравнения $y' = a(x)y + b(x), 0 < x < +\infty$, где $a(x)$, $b(x)$ - непрерывные при $0 \leqslant x < +\infty$ функции, $b(x)$ - ограничена, $a(x) \geqslant a_0 = \text{const} > 0$, существует только одно решение, ограниченное при $0 < x < +\infty$.

100. Пусть $a(x), b(x)$ - непрерывные при $0 \leqslant x < +\infty$ функции, имеющие конечные $\lim_{x\to+\infty} a(x) = A > 0, \lim_{x\to+\infty} b(x) = B$. Доказать, что существует единственное решение $y_0(x)$ уравнения $y' = a(x)y + b(x)$, $0 < x < +\infty$, имеющее конечный предел при $x \to +\infty$. Найти $\lim_{x\to+\infty} y_0(x)$.

Указание. Рассмотреть ограниченное решение и доказать, что оно имеет конечный предел при $x \to +\infty$. Можно воспользоваться правилом Лопиталя. 101. Пусть $a(x), b(x)$ - непрерывные при $0 \leqslant x < +\infty$ функции, причем существует конечный $\lim_{x\to+\infty} a(x) = A > 0$ и $\lim_{x\to+\infty} xb(x) = 1$. Пусть $y_0(x)$ - решение уравнения $y' = a(x)y + b(x), 0 < x < +\infty$, имеющее конечный предел при $x \to +\infty$. Найти $\lim_{x\to+\infty} y_0(x)$.

14.1.5 Problems about first-order equations not solved with respect to the derivative, special solutions

(тут их очень много, лишь пару выгрузил)
(???? что за особое решение???)

P-6.1

$y^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0.$

P-6.3

$8xy'^3 = y\left(12y^{r2} - 9\right).$

P-6.5

$x^3y'^2 + x^2yy' + 1 = 0.$

P-6.7

$y'^3 - 3x^2y' + 4xy = 0.$

P-6.9

$y' = \ln \frac{y}{y'-1}.$

P-6.11

$x^3y'^2 - 4x^2yy' + 4xy^2 + 4y' = 0$

P-6.13

$5xy'^2 + 1 = yy'\left(1 + yy'\right).$

P-6.15

$\frac{1}{4}y'^2 - y' + y = 2x - 3.$

P-6.17

$y'^2 + xy^2y' + y^3 = 0.$

P-6.19

$y'^2 - 2yy' + 4e^{2x} = 0.$

P-6.21

$4y'^2 + 3x^5y' = 9x^4y.$

P-6.23

$y = y' + \frac{1}{2}\left(x - \ln y'\right).$

P-6.2

$y'^2 + 2x^3y' - 4x^2y = 0.$

P-6.4

$x^2y'^2 - 4x(y+2)y' + 4y(y+2) = 0.$

P-6.6

$y'^2 - 3xy^{\frac{2}{3}}y' + 9y^{\frac{5}{3}} = 0.$

P-6.8

$y^2y'^2 + 2xyy' - y^2 + 1 = 0.$

P-6.10

$xy'^2 - 2yy' + 2y = 0.$

P-6.12

$8y^2y'^3 - 3y + 6(x-2)y' = 0.$

P-6.14

$x^3y^2y'^2 - 2x^2y^3y' + xy^4 + 2yy' = 0.$

P-6.16

$y'^2 - 8xy' + 8x^2 + 4y = 0.$

P-6.18

$2y^2y'^2 - 2xy'^2 + 4yy' + 1 = 0.$

P-6.20

$x^4y'^2 + xy' + y = 0.$

P-6.22

$\left(1 - x^2\right) y'^2 + 2xyy' + x^2 = 0.$

P-6.24

$yy' \left(yy' - 1\right) = x - y^2.$

P-6.51

$4y'^3 - 3x^2y' + 4xy = 0.$

P-6.52

$4yy'^2 - 2xy'^3 - x^2 = 0.$

P-6.53

$4xyy'^2 - 8x^2y'^3 = 1.$

P-6.54

$2xyy'^2 = 4x^3 + \left(x^2 + 1\right) y'^3.$

P-6.55

$2yy' + 2y - 3x = xy'^2.$

P-6.56

$4x^2y + y'^2 = 2x\left(x^2 + 1\right) y'.$

P-6.57

$\frac{y}{xy'} + \ln y' = 1.$

P-6.58

$xy' = y\left(1 + \ln y'\right).$

P-6.59

$xy'^2 = y' - \frac{3}{4}e^{-2y}$.

P-6.60

$4x^6y - x^7y' + \frac{1}{8}y'^2 = 0$.

P-6.61

$\frac{4}{9}y'^3 - 3x^4y' + 6x^3y = 0$.

P-6.62

$(xy' + y)^2 + 20x^2y' = 0$.

P-6.63

$x^8 + 5xy' + y'^2 = 5y + 4x^5 + 2x^4y'$.

P-6.64

$xy^4y' + 3y^5 + y^{14} = 0$.

P-6.65

$xy'^3 + 3yy'^2 + 27y^4 = 0$.

P-6.66

$x^4 + 3xy' + y'^2 = 3y + 2x^3 + 2x^2y'$.

14.1.6 Problems Exact Differential Equations

Решается тут все или заменой переменных или интегрирующим множителем.

(пока лень решать, не актуальные задачи, по идее проблем с ними не должно быть, просто возиться приходится, прежде чем пойму, как привести к полным дифференциалам.)

P-4.пр.1 Решить $(3x^2 + y - 1)\,dx + (x + 3y^2 - 1)\,dy = 0$.

Заданное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, поскольку оно задано на всей плоскости (x, y) и $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 1$. Функцию $u(x, y)$ находим из системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + y - 1 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = x + 3y^2 - 1 \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем $u(x, y) = x^3 + x(y - 1) + \varphi(y)$, где $\varphi(y)$ - произвольная непрерывно дифференцируемая функция y. Подставляя его во второе уравнение системы, получаем $\varphi'(y) = 3y^2 - 1$. Отсюда находим $\varphi(y)$, а, значит, и функцию $u(x, y)$.В данном примере можно взять $u(x, y) = x^3 + y^3 + xy - x - y$. Следовательно, решения заданного уравнения задаются формулой

$$x^3 + xy + y^3 - x - y = C.$$

P-4.пр.2 Решить $(y - 4xy^3)\,dx = (2x^2y^2 + x)\,dy$.

Заметим сначала, что $y = 0$ - решение уравнения. Пусть $y \neq 0$. Уравнение запишем в следующем виде

$$ydx - xdy = 2y^2\left(x^2dy + 2xydx\right).$$

Если разделить уравнение на y^2, то уравнение примет вид

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = 2d\left(x^2y\right).$$

Получили уравнение в полных дифференциалах, из которого находим, что ответ: $y = 0, x = 2x^2y^2 + Cy$, где C - произвольная постоянная.

Кстати, интегрирующим множителем заданного уравнения служит функция $\frac{1}{y^2}$.

Р-4.пр.3 Решить $(x^2 + xy^2)\,dx + (x^2y + y^3)\,dy = 0$

Здесь $\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy$, $\frac{\partial N}{\partial x} = 2xy$, так что условие (2) выполнено и, следовательно, данное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах. Это уравнение легко привести к виду $du = 0$ непосредственной группировкой его членов. С этой целью перепишем его так: Очевидно, что

$$x^3dx + xy(ydx + xdy) + y^3dy = 0$$

$$x^3dx = d\left(\frac{x^4}{4}\right), \quad xy(ydx + xdy) = xyd(xy) = d\left(\frac{(xy)^2}{2}\right), \quad y^3dy = d\left(\frac{y^4}{4}\right)$$

Поэтому изначальное уравнение можно записать в виде

$$d\left(\frac{x^4}{4}\right) + d\left(\frac{(xy)^2}{2}\right) + d\left(\frac{y^4}{4}\right) = 0 \text{ или } d\left(\frac{x^4}{4} + \frac{(xy)^2}{2} + \frac{y^4}{4}\right) = 0.$$

Следовательно, $x^4 + 2(xy)^2 + y^4 = C$ есть общий интеграл исходного уравнения.

ФР. $y^2dx + (e^x - y)\,dy = 0$

Подбором находим, что следует домножить на $\frac{e^{-x}}{y}$, получим $ye^{-x}dx + \frac{dy}{y} - e^{-x}dy = 0$, то есть $d\left(ye^{-x} - \ln y\right) = 0$. т.о. $ye^{-x} - \ln y = c$ Интегрирующий множитель $\mu = \frac{e^{-x}}{y}$

Р-4.1 Решить

$\left(1 - 3x^2 - y\right)dx = \left(x - 3y^2\right)dy.$

Р-4.2

$\left(y^2 - 2x^3\right)dx + 2xydy = 0.$

Р-4.3

$\left[(x-y)^2 - x\right]dx + \left[y - (x-y)^2\right]dy = 0.$

Р-4.4

$(y - \sin x)dx + (x + e^y)\,dy = 0.$

Р-4.5

$(y - x)dx + \left(x + 2e^{2y}\right)dy = 0.$

Р-4.13

$\left(1 + 3x^2\ln y\right)dx + \left(3y^2 + \frac{x^3}{y}\right)dy = 0.$

Р-4.14

$\left(2x - \frac{\sin^2 y}{x^2}\right)dx + \left(2y + \frac{\sin 2y}{x}\right)dy = 0.$

Р-4.15

$\left(\frac{y}{x^2} + \frac{1}{y}\right)dx - \left(\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x} + 2y\right)dy = 0.$

P-4.16

$e^{\frac{y}{x}}\left(1-\frac{y}{x}\right)dx+\left(1+e^{\frac{y}{x}}\right)dy=0$

P-4.17

$\frac{y}{x}dx+[1+\ln(xy)]dy=0, x>0, y>0.$

P-4.18

$\left(1+\frac{2x}{y^3}\right)dx+\left(\frac{1}{y^2}-\frac{3x^2}{y^4}\right)dy=0.$

P-4.19

$2xydx+\left(y^2-x^2\right)dy=0.$

P-4.20

$2xydx=\left(x^2-2y^3\right)dy.$

P-4.21

$(3\sqrt{x-y}-2x)dx=(3\sqrt{x-y}-2y)dy.$

P-4.22

$\left(y-3x^2y^3\right)dx-\left(x+x^3y^2\right)dy=0.$

P-4.23

$\left(2xy^2+y\right)dx-\left(x^2y+2x\right)dy=0.$

P-4.24

$ydx=\left(x-2y^3\right)dy.$

P-4.25

$x^3dy+2\left(y-x^2\right)ydx=0.$

P-4.33

$\left(\frac{1}{x}-y\right)dx=\frac{1}{y}dy.$

P-4.34

$\left(2x^3y+x^2y^4\right)dx+\left(x^4+x^3y^3\right)dy=0.$

P-4.35

$\left(3x^2y+7y^2\right)dx-\left(2x^3+5xy\right)dy=0.$

P-4.36

$\left(2y-x^2y^2\right)dx=\left(x^3y-x\right)dy.$

P-4.37

$\left(4x^3y+3y^2\right)dx-\left(2x^4+xy\right)dy=0.$

P-4.38

$$(3xdy - ydx)\left(x^2 + y^2\right) + x^2ydy - xy^2dx = 0.$$

P-4.39

$$\left(3x^2 + 2y\right)(1 + y)dx + \left(2x - x^3\right)dy = 0.$$

P-4.40

$$\left(xy^3 + 2y\right)dx + \left(x - x^2y^2\right)dy = 0.$$

P-4.41

$$3xdy + ydx + xy^3(xdy + ydx) = 0.$$

P-4.42

$$xy^2dx + \left(x^2y - x\right)dy = 0.$$

P-4.43

$$x\left(x^2 + y^2\right)dy + y(ydx - xdy) = 0.$$

P-4.44

$$\left(xy^3 + y\right)dx + \left(2x + x^2y^2\right)dy = 0.$$

P-4.45

$$2x^4(xdx + ydy) + \left(x^2 + y^2\right)^2(xdy - 3ydx) = 0.$$

P-4.46

$$y(2ydx - xdy) + x^2(ydx + 2xdy) = 0.$$

P-4.47

$$\left(y^2 - 3x^2\right)dy + xydx = 0.$$

P-4.48

$$xdy - ydx = x\sqrt{x^2 + y^2} \cdot dx.$$

P-4.49

$$xdy - 2ydx + xy^2(2xdy + ydx) = 0.$$

P-4.53

$$2xdy + ydx + xy^3(xdy + 2ydx) = 0.$$

P-4.54

$$\left(y^2 + y\right)dx + \left(xy + 2x + \tfrac{1}{y}\right)dy = 0.$$

P-4.55

$$\left[\left(3x^2 + 2\right)y + 3x\right]dx + \left(2x - x^3\right)dy = 0.$$

P-4.56

$xy' - y = 2x^3 e^{-\frac{y}{x}}$.

P-4.57

$2xy^3 dx + x^2 y^2 dy = \left(1 - y^2\right) dy$.

P-4.58

$\left(2xy^2 - y\right) dx + \left(y^2 \ln y + x - y\right) dy = 0$.

P-4.59

$x^2 yy' + x^3 = \left(x^2 + y^2\right)^2$.

P-4.60

$4x^2 y^2 dx + x^3 (2y - 1) dy = 0$.

14.1.7 Problems about researching the Cauchy problem (?!)

(нужно заготовить теорию!)

P-5.пр.1

Доказать, что если функции $f(x, y)$ и $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывны в области G плоскости $R^2_{(x,y)}$, то $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица по y равномерно по x на каждом компакте $K \subset G$.

Доказательство

Рассуждаем от противного. Пусть утверждение неверно. Тогда найдутся компакт $K_0 \subset G$ и последовательности $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}, L_n > 0, \forall n \in N$, $\{(x_n, y'_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset K_0, \{(x_n, y''_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset K_0$ такие, что

$$\left|f\left(x_n, y'_n\right) - f\left(x_n, y''_n\right)\right| > L_n \left|y'_n - y''_n\right|.$$

Так как K_0 - компакт, то из последовательностей точек (x_n, y'_n) и (x_n, y''_n) можно выбрать сходящиеся подпоследовательности $\left(x_{n_k}, y'_{n_k}\right) \to \to (x_0, y'_0) \in K_0, \left(x_{n_k}, y''_{n_k}\right) \to (x_0, y''_0) \in K_0$ при $k \to \infty$. Рассмотрим функцию

$$F\left(x, y', y''\right) = \frac{f\left(x, y'\right) - f\left(x, y''\right)}{y' - y''}, \quad y' \neq y'',$$

в достаточно малой окрестности точки (x_0, y'_0, y''_0). Если $y'_0 \neq y''_0$, то из непрерывности $f(x, y)$ следует ограниченность функции $F\left(x, y', y''\right)$ в этой окрестности. Если же $y'_0 = y''_0 = y_0$, то из непрерывности $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ следует выполнение условия Липшица по y равномерно по x в окрестности точки (x_0, y_0), что означает ограниченность $F\left(x, y', y''\right)$ и в этом случае. Но ограниченность $F\left(x, y', y''\right)$ противоречит нашему предположению о компакте K_0 при достаточно больших n_k. Это доказывает утверждение примера 1.

P-5.пр.2

Выполнено ли условие Липшица по y равномерно по x для функции $f(x, y)$ в полукруге $x^2 + y^2 < R^2, y > 0, R > 0$, если:
а)$f(x, y) = x^2 \sin x + y^3$,
б)$f(x, y) = x + |y|$,
в)$f(x, y) = x + \sqrt{y}$? ΔВ случае а) для любых двух точек (x, y_1) и (x, y_2) из полукруга имеем:

$$\left|f\left(x, y_1\right) - f\left(x, y_2\right)\right| = \left|y_1^3 - y_2^3\right| = \left|y_1 - y_2\right| \cdot \left|y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{3}{2}\left(y_1^2 + y_2^2\right)\left|y_1 - y_2\right| \leqslant 3R^2 \left|y_1 - y_2\right|.$$

Значит в случае а) условие Липшица выполнено. В случае

б)условие Липшица тоже выполнено, так как

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| = ||y_1|-|y_2|| \leqslant |y_1-y_2|.$$

Покажем, что в случае

в)условие Липшица не выполняется. Рассуждаем от противного. Пусть это условие выполнено в полукруге с некоторой постоянной Липшица $L>0$. Тогда для точек $(0,1)$ и $(0,y)$, где $0<y<\varepsilon$, $\varepsilon>0$ и достаточно мало, имеем

$$|f(0,y)-f(0,1)| = |\sqrt{y}-1| \leqslant L|y-1|.$$

Отсюда $L(\sqrt{y}+1) \geqslant 1$, что невозможно при достаточно малых $y>0$. Противоречие. Условие Липшица не имеет места.

Р-5.пр.3

Указать какой-либо отрезок, на котором существует решение задачи Коши, если:

а)$y' = y^2+x^2, \quad y(0)=0, |x|\leqslant 1, |y|\leqslant 1,$

б)$y' = x+\sin\left(x^2+y\right), \quad y(0)=0,\ |x|\leqslant 1,$

в)$y' = |x|+\sin y^2+\cos y^2, \quad y(0)=0.$

Известно, что решение задачи Коши $y' = f(x,y), y(x_0) = y_0$, где $f(x,y)$ и $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывны в прямоугольнике $\Pi = \{(x,y) : |x-x_0|\leqslant\alpha, |y- \ -y_0|\leqslant\beta\}$, всегда существует на $[x_0-\delta, x_0+\delta]$, где $\delta = \min\left(\alpha, \frac{\beta}{M}\right), M = \max|f(x,y)|$ при $(x,y)\in\Pi$.

В случае а) имеем $\alpha=\beta=1, M=2$ и, значит, решение существует при $|x|\leqslant\frac{1}{2}$.

В случае

б)имеем $\alpha=1, \beta=\infty, M=2$ и, значит, решение существует при $|x|\leqslant 1$.

В случае

в)для всех $|x|\leqslant a$ при любом $a>0$ имеем $\alpha=a, \beta=\infty$, $M=2$. Следовательно, решение существует для $|x|\leqslant a$ при любом $a>0$, т. е. для всех $x\in(-\infty,+\infty)$.

Р-5.пр.4 Методом последовательных приближений найти решение задачи Коши: $y'+y = x+1, \quad y(0)=0$.

В нашем случае последовательные приближения задаются формулами

$$y_0(x)\equiv 0, y_k(x) = \int\limits_0^x \left[\xi+1-y_{k-1}(\xi)\right]d\xi, k=1,2,3,...$$

Методом математической индукции можно проверить, что $y_k(x) = x+(-1)^k\frac{x^k}{k!}, k=1,2,3,...$ Отсюда следует, что при $|x|\leqslant a$ для любого $a>0 y_k(x)$ при $k\to\infty$ равномерно стремится к x. Значит, $y=x$ является решением задачи Коши.

Р-5.пр.5

Доказать, что последовательность функций $y_n(x)$, определяемая соотношениями

$$y_0(x)\equiv 0, y_n(x) = 2\frac{1-x}{x}-\frac{1}{9}\int\limits_1^x y_{n-1}^2(t)dt, n=1,2,3,...,$$

сходится равномерно на $[1,2]$ и не сходится равномерно на $[1,8]$.

Заданная последовательность функций служит последовательными приближениями решения задачи Коши вида

$$y' = -\frac{2}{x^2}-\frac{y^2}{9}, \quad y(1)=0.$$

Рассмотрим сначала эту задачу в области $G = \{(x,y) : x\in[1,2], |y| \leqslant \leqslant b, b>0\}$. В этой области $G\max\left|-\frac{2}{x^2}-\frac{y^2}{9}\right| = M \leqslant 2+\frac{b^2}{9}$ и $\max\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \max\left|-\frac{2y}{9}\right| = N\leqslant\frac{2b}{9}$. Из теоремы существования решения задачи Коши следует, что последовательные приближения сходятся равномерно на $[1,1+\delta]$, где число $\delta>0$ одновременно удовлетворяет двум оценкам: $\delta<\frac{b}{M} = \frac{b}{2+\frac{b^2}{9}}$, $\delta<\frac{1}{N} = \frac{9}{2b}$. Выбирая число b так, чтобы обе оценки совпали, получаем $b=3\sqrt{2}, \delta<\frac{3}{2\sqrt{2}}$. Ясно, что $\delta=1$ удовлетворяет этому неравенству. Решая на $[1,8]$ уравнение Риккати, получаем $y = \frac{3}{x}+\frac{3}{x+Cx^{\frac{2}{3}}}$. Из начального условия $C=-2$. При $x\to 8$ получаем $y\to\infty$, что противоречит равномерной сходимости.

При исследовании зависимости решения задачи Коши от параметров и начальных данных используются уравнения в вариациях.

P-5.пр.6

Найти $\frac{\partial\varphi(x,1,0)}{\partial y_0}$ от решения $y=\varphi\left(x,1,y_0\right)$ задачи Коши $y'=2y+x^3y^2-x^2y^3, \quad y(1)=y_0$
Очевидно, что решением заданного уравнения при н. у. $y(1)=0$ является $y=\varphi(x,1,0)\equiv 0$.
Известно, что искомая функция $u=\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}$ должна быть решением уравнения в вариациях по y_0

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left[2+2x^3y-3x^2y^2\right]u,$$

где $y=\varphi(x,1,0)\equiv 0$, при н. у. $u|_{x_0=1}=1$. Другими словами, для нахождения функции $u=\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}$ необходимо решить задачу Коши вида

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2u, \quad u(1)=1.$$

Искомым решением является $u=e^{2(x-1)}$.

P-5.пр.7

Найти $\frac{\partial\varphi(x,1,0)}{\partial x_0}$ от решения $y=\varphi\left(x,x_0,1\right)$ задачи Коши $y'=y-1+2xy^2\left(y^2-1\right), y\left(x_0\right)=1$.
Очевидно, что решением заданного уравнения при н. у. $y(0)=1$ является $y=\varphi(x,0,1)\equiv 1$.
Известно, что искомая функция $v=\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}$ должна быть решением уравнения в вариациях по x_0

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\left[1+8xy^3-4xy\right]v,$$

где коэффициент при v берется при значении $y\equiv 1$ и при н. у. $v|_{x=0}=-\left[y-1+2xy^2\left(y^2-1\right)\right]\big|_{\substack{x=0\\y=1}}=0$.
Следовательно, для нахождения функции v нужно решить задачу Коши вида

$$\frac{\partial v}{\partial x}=(1+4x)v, \quad v(0)=0.$$

Отсюда искомое решение $v\equiv 0$.

P-5.1

Выполнено ли условие Липшица для функции $f(y)$, если:
а)$f(y)=y^2, |y|\leqslant\alpha, \alpha>0$,
б)$f(y)=|y|, |y|\leqslant\alpha, \alpha>0$,
в)$f(y)=\sqrt{|y|}, |y|\leqslant\alpha, \alpha>0$?

P-5.2

Доказать, что из выполнения условия Липшица для функции $f(y)$ на $[\alpha,\beta]$ следует непрерывность $f(y)$ на $[\alpha,\beta]$

P-5.3

Выполнено ли условие Липшица по y равномерно по x для функции $f(x,y)$ в круге $x^2+y^2\leqslant R^2, R>0$, если
а)$f(x,y)=x^2+y^2$
б)$f(x,y)=x\cdot|y|$,
в)$f(x,y)=x\sqrt{|y|}$?

P-5.4

Доказать, что если функция $f(x,y)$ непрерывна по x в области G и удовлетворяет в G условию Липшица по y равномерно по x, то $f(x,y)$ - непрерывна в G.

P-5.5

Показать, что не дифференцируемые по y при $y=0$ функции $f_1(x,y)=|y|(1+\sin x)$ и $f_2(x,y)=|y|(1+\cos x)$ удовлетворяют условию Липшица по y равномерно по x на всей плоскости $R^2_{(x,y)}$.

P-5.6

Показать, что функция $f(x,y) = a(x)y + b(x)$ удовлетворяет условию Липшица по y равномерно по x в полосе $|x| \leqslant \alpha, \alpha > 0$, если только $a(x)$ и $b(x)$ - непрерывные функции при $|x| \leqslant \alpha$.

P-5.7

Показать, что функция $f(x,y) = \left[1 + a^2(x)\right] y^2$, где $a(x)$ - непрерывная функция при $|x| \leqslant \alpha, \alpha > 0$, не удовлетворяет условию Липшица по y равномерно по x в полосе $|x| \leqslant \alpha$.

P-5.9

Доказать, что функция $f(x,y) = x \cdot y$ не удовлетворяет условию Липшица по y равномерно по x на всей плоскости $R^2_{(x,y)}$.

P-5.10

Методом последовательных приближений найти решение задачи Коши, если:
а)$y' + y = x + 1, \quad y(0) = 1,$
б)$y' + y = 2e^x, \quad y(0) = 1,$
в)$y' - y = 1 - x, \quad y(0) = 1,$
г)$y' - y = e^{2x}, \quad y(0) = 1.$

P-5.11

Методом последовательных приближений найти приближения $y_0(x)$, $y_1(x), y_2(x)$ к решению задачи Коши, если:
а)$y' = y^2 - x, \quad y(0) = 1,$
б)$y' = y^2 + x^3, \quad y(0) = 0,$
в)$y' = 2y^2 + x, \quad y(0) = 1,$
г)$y' = x^2 - 2y^2, \quad y(0) = 0.$

P-5.12

Оценить погрешность, получаемую при замене решения $y(x)$ задачи Коши его последовательным приближением $y_3(x)$, если:
а)$y' = y^2 + 2x, \quad y(0) = 0, |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1,$
б)$y' = y^2 + x^2, \quad y(0) = 0, |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1.$

P-5.13

Доказать, что последовательность функций $y_n(x)$, определяемая соотношениями $y_0(x) \equiv 0$, $y_n(x) = e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-2x} - \frac{3}{2} + \int\limits_0^x \left[2y_{n-1}(t)e^{-t} - y^2_{n-1}(t)\right] dt, n = 1, 2, 3, \ldots$ сходится равномерно на $[0, 0.2]$ и не сходится равномерно на $[0, 1]$.

P-5.14

Доказать, что последовательность функций $y_n(x)$, определяемая соотношениями $y_0(x) \equiv 0$ $y_n(x) = \frac{1}{2}\left(1 - x^2\right) + \int\limits_1^x \frac{1}{t}\left[(2t+1)y_{n-1}(t) - y^2_{n-1}(t)\right] dt, n = 1, 2, 3, \ldots$ сходится равномерно на $[1, 1.1]$ и не сходится равномерно на $[1, 2]$.

P-5.15

Доказать, что последовательность функций $y_n(x)$, определяемая соотношениями

$$y_0(x) \equiv 0,$$

$$y_n(x) = \cos x - 2 - \int\limits_0^x \sin t \left[y_{n-1}(t) - \cos t\right]^2 dt, n = 1, 2, 3, \ldots$$

сходится равномерно на $[0, 0.1]$ и не сходится равномерно на $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

P-5.16

Доказать, что последовательность функций $y_n(x)$, определяемая соотношениями

$$y_0(x) \equiv 0,$$
$$y_n(x) = x + 2\int\limits_0^x \cos(x-t)y_{n-1}(t)dt, n = 1, 2, 3, ...$$

сходится равномерно на любом отрезке и найти ее предел.

P-5.18

Доказать, что последовательность функций $y_n(x)$, определяемая соотношениями $y_0(x) \equiv 0$, $y_n(x) = 4 + 5\int\limits_0^x \sin(x-t)y_{n-1}(t)dt, n = 1, 2, 3, ...$ сходится равномерно на любом отрезке и найти ее предел.

P-5.19

Доказать, что последовательность функций $y_n(x)$, определяемая соотношениями $y_0(x) \equiv 0$, $y_n(x) = 5(\cos x + \sin x) + \int\limits_0^x [1 + 2(x-t)]y_{n-1}(t)dt, n = 1, 2, 3, ...$ сходится равномерно на любом отрезке и найти ее предел.

P-5.20

Используя какое-либо достаточное условие единственности решения задачи Коши, указать области, через каждую точку которых прохо- дит единственная интегральная кривая уравнения:
а)$y' = y^2 + x^4$,
б)$y' = x + \sqrt[3]{y-x}$,
в)$y' = y^3 + \sqrt{x+y}$,
г)$(x+y)y' = x\ln y$,
д) $xy' = e^x + \operatorname{ctg} y$, е) $y' = y + \sqrt{y - x^2}$,
ж) $y' = (y+1)(y-1)^{\frac{2}{3}}$.

P-5.21

Найти значения вещественных параметров α, β и линии на плоскости, в каждой точке которых нарушается единственность решения уравнения: а) $y' = y^\alpha(1-y)^\beta$,
б)$y' = y^\alpha \ln^\beta \frac{1}{y}$,
в)$y' \ln y = y^\alpha(1-y)^\beta$.

P-5.22

При каких начальных данных x_0, y_0, y_1 задача Коши $y'' = f(x, y, y')$, $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$ имеет единственное решение, если:
а)$f(x, y, y') = \frac{1}{x}\left(y' + \sqrt{y-1}\right)$,
б)$f(x, y, y') = \frac{1}{yy'}\ln(xy-1)$,
в)$f(x, y, y') = \frac{1}{y'}\sqrt[3]{y-x}$, г)$f(x, y, y') = \frac{1}{y}\left(\cos y' + x^2 \ln y'\right)$,
д) $f(x, y, y') = \frac{1}{y}\left(x - \sqrt[3]{y'-y}\right)$,
е) $f(x, y, y') = x^3 e^y + \sin\left(y' - x^2\right)^{\frac{2}{3}}$.

P-5.23

Показать, что уравнение $y'' = 3(y')^{\frac{2}{3}}$ при начальных условиях $y(0) = y'(0) = 0$ имеет два решения. Почему это не противоречит теореме существования и единственности решения задачи Коши?

P-5.24

Показать, что уравнение $y'' = 2\sqrt{|y'|}$ при начальных условиях $y(0) = y'(0) = 0$ имеет два решения. Почему это не противоречит теореме существования и единственности решения задачи Коши?

P-5.28

При каких $n \in N$ уравнение $y^{(n)} = f(x,y)$, где $f(x,y)$ и $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ - непрерывны на всей плоскости $R^2_{(x,y)}$, могут иметь среди своих решений две функции:
а)$y_1 = x, y_2 = x + x^2$?
б)$y_1 = 1 - \cos x, y_2 = \frac{1}{2}x^2$?

P-5.29

Найти производную по параметру λ при $\lambda = 0$ от решения $y = \varphi(x,\lambda)$ задачи Коши:
а)$y' = y + \lambda\left(x^2 + y^2\right), \quad y(0) = 0,$
б)$y' = -y + \lambda\left(x + y^2\right), \quad y(0) = 0,$
в)$y' = 2y + \lambda\left(y^2 - x^2\right), \quad y(0) = 0,$ г)$y' = -3y + \lambda\left(y^2 - x\right), \quad y(0) = 0,$ д) $y' = y - y^2 + \lambda\left(x + y^3\right), \quad y(0) = 0,$ е) $y' = y^2 - y + \lambda\left(y^4 - x\right), \quad y(0) = 0,$ ж) $y' = 2xy + \lambda\left(y^4 + 2x\right), \quad y(0) = 0,3\big)$ $y' = -2xy + \lambda\left(y^3 - 2x\right), \quad y(0) = 0.$

P-5.30

Найти $\frac{\partial\varphi(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}$ при $y_0 = 0$ от решения $y = \varphi\left(x, x_0, y_0\right)$ задачи Коши $y' = f(x,y), y\left(x_0\right) = y_0$, если:
а)$y' = 2y + x^2y^2 - y^3, \quad y(0) = y_0,$
б)$y' = y + 2xy^2 + y^3, \quad y(0) = y_0,$
в)$y' = -2y + 2x^2y^2 + y^3, \quad y(0) = y_0,$ г)$y' = -y - y^2 - x^2y^3, \quad y(0) = y_0.$

P-5.31

Показать, что $\frac{\partial\varphi(x,0,0)}{\partial x_0} = 0$ для решения $y = \varphi\left(x, x_0, 0\right)$ задачи Коши $y' = f(x,y), y\left(x_0\right) = 0$, если:
а)$y' = y + x\left(y^3 + y^2\right), \quad y(0) = 0,$
б)$y' = -y + 2x\left(y^3 - y^2\right), \quad y(0) = 0,$
в) $y' = 2y - x\left(y^2 + y^4\right), \quad y(0) = 0,\big)$ $y' = -2y - x^2y\left(y^2 + 2y\right), \quad y(0) = 0.$

P-5.32

Найти с точностью до $O\left(x, \lambda^2\right)$ решение задачи Коши:
а)$y' = 2xy + \lambda\left(2x + y^2\right), \quad y(0) = 0,$
б)$y' = -2xy + \lambda\left(y^2 - 2x\right), \quad y(0) = 0,$
в)$y' = y^2 + y + \lambda(1 + x), \quad y(0) = 0,$
г)$y' = y^2 - y + \lambda x, \quad y(0) = 0,$ д) $y' = -y^2 + y + \lambda x, \quad y(0) = 0,$ е) $y' = -y^2 - y + \lambda x, \quad y(0) = 0.$

P-5.33

Пусть $y = \varphi(x,\lambda)$ решение задачи Коши $y' = y + \sin y, \quad y(0) = \lambda$. Найти $\frac{\partial\varphi(x,0)}{\partial\lambda}$ и $\frac{\partial^2\varphi(x,0)}{\partial\lambda^2}$.

P-5.34

Пусть $y = \varphi(x,\lambda)$ решение задачи Коши $y' = \lambda(1 - x) + y - y^2, \quad y(0) = 0$. Найти $\frac{\partial\varphi(x,0)}{\partial\lambda}$ и $\frac{\partial^2\varphi(x,0)}{\partial\lambda^2}$.

P-5.35

Пусть $y = \varphi(x,\alpha,\beta)$ решение задачи Коши $y'' = \alpha y - y^2, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = \beta$. Найти $\frac{\partial\varphi(x,1,0)}{\partial\alpha}$ и $\frac{\partial\varphi(x,1,0)}{\partial\beta}$.

P-5.36

Пусть $y = \varphi(x,\alpha,\beta)$ решение задачи Коши $y'' = y + 3\sin y, \quad y(0) = \alpha,\ y'(0) = \beta$. Найти $\frac{\partial\varphi(x,0,0)}{\partial\alpha}$ и $\frac{\partial\varphi(x,0,0)}{\partial\beta}$.

P-5.37

Пусть $y(x)$ при $x \geqslant 0$ удовлетворяет уравнению $y' = 1 + x + 100 \sin y$ и н. у. $y(0) = 0$. Доказать, что $y(x) > 0$ для всех $x > 0$.

P-5.38

Функция $y(x)$ при $x \geqslant 0$ удовлетворяет уравнению $y' = 2 + x^2 + \sin^3 y$ и н. у. $y(0) = 0$. Имеет ли нули $y(x)$ при $x > 0$?

P-5.39

Функция $y(x)$ при $x \geqslant 0$ удовлетворяет уравнению $y' = x + \cos y$. Имеет ли $y(x)$ асимптоту при $x \to +\infty$?

P-5.40

Функция $y(x)$ при $x \geqslant 0$ удовлетворяет уравнению $y' = x + \frac{1}{1+y^2}$. Существует ли конечный $\lim_{x\to+\infty} y(x)$?

P-5.41

Доказать, что каждое решение уравнения $y' = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ определено при $-\infty < x < +\infty$ и имеет конечные пределы при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$

14.2 Higher-order equations

14.2.1 Problems about the main types of equations that allow lowering the order

P-7.пр.1

Решить

$$y^2 y'' = y y'^2 - 2y'.$$

Заметим, что $y = C$ - решение уравнения. Пусть далее $y \neq C$. Перенеся yy'^2 в левую часть уравнения, разделим обе его части на y^3. Получаем

$$\frac{yy'' - y'^2}{y^2} = -\frac{2y'}{y^3}, \quad \left(\frac{y'}{y}\right)' = \left(\frac{1}{y^2}\right)'.$$

Отсюда

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{y^2} + C, \quad yy' = 1 + Cy^2.$$

В случае $C = 0$ имеем

$$yy' = 1, \quad \left(y^2\right)' = 2, \quad y^2 = 2x + \tilde{c}.$$

В случае $C \neq 0$ получаем

$$\frac{yy'}{1 + Cy^2} = 1, \quad \frac{1}{2c} \ln\left|1 + Cy^2\right| = x + C_0.$$

Последнюю формулу можно преобразовать к виду

$$y^2 = C_1 + C_2 e^{-\frac{2x}{C_1}}, \quad C_1 \neq 0.$$

Ответ. $y = C, y^2 = 2x + C, y^2 = C_1 + C_2 e^{-\frac{2x}{C_1}}$, где C, C_1, C_2 - произвольные постоянные, при этом $C_1 \neq 0$.

Р-7.пр.2

Решить
$$x^4y''' + 2x^3y'' = 1.$$

Сделаем замену $y'' = z$. Тогда $y''' = z'$ и уравнение преобразуется к виду $x^2z' + 2xz = \frac{1}{x^2}$. Отсюда $\left(x^2z\right)' = \left(-\frac{1}{x}\right)', x^2z = -\frac{1}{x} + C, z = -\frac{1}{x^3} + \frac{c}{x^2}$. Возвращаясь к y, имеем

$$y'' = \frac{c}{x^2} - \frac{1}{x^3}, \quad y' = \frac{C_1}{x} + \frac{1}{2x^2} + C_2, \quad y = C_1 \ln|x| - \frac{1}{2x} + C_2x + C_3.$$

Ответ. $y = C_1 \ln|x| + C_2x + C_3 - \frac{1}{2x}$, где C_1, C_2, C_3 - произвольные постоянные.

Р-7.пр.3

Решить
$$y''(y-1) + y'(y-1)^2 = y'^2.$$

Заметим, что $y = C$ - решение уравнения. Пусть далее $y \neq C$. Положив $y - 1 = u$, получим уравнение

$$uu'' + u^2u' = u'^2.$$

Возьмем u за новую независимую переменную и положим $u'(x) = z(u)$. Тогда $u''(x) = z \cdot z'(u)$ и уравнение примет вид $uz \cdot z' + u^2z = z^2$. Заметим, что $z \neq 0$, так как случай $z = 0$ дает $y = C$.

Сократив уравнение на z, получаем

$$uz' - z = -u^2, \quad \frac{uz' - z}{u^2} = -1, \quad \left(\frac{z}{u}\right)' = -1, \quad z = -u^2 + Cu.$$

Отсюда $u'(x) = -u^2 + Cu$. В случае $C = 0 u = \frac{1}{x+C_0}$, а в случае $C \neq 0 \frac{1}{c} \ln\left|\frac{u}{C-u}\right| = x + C_0$. Полагая $u = y - 1$ и упростив полученное выражение, получаем ответ:

$$y = C, \quad y = 1 + \frac{1}{x+c}, \quad y = 1 + \frac{C_1C_2e^{C_2x}}{1 + C_1e^{C_2x}},$$

где C, C_1, C_2 - произвольные постоянные.

Р-7.7.пр.4

Решить задачу Коши

$$2(y+x)y'' + y'^2 + 2y' + \frac{1}{(y+x)^2} = 0, \quad y(\sqrt{2}) = 1 - \sqrt{2}, \quad y'(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1.$$

Положив $u = y + x$, преобразуем уравнение к виду

$$2uu'' + u'^2 - 1 + \frac{1}{u^2} = 0.$$

Так как это уравнение не содержит x, то положим $u'(x) = z(u)$. При этом $u'' = z \cdot z'(u)$ и уравнение примет вид $2uzz' + z^2 - 1 + \frac{1}{u^2} = 0$.

Это уравнение Бернулли. Положив $w = z^2$, получаем $uw' + w = 1 - \frac{1}{u^2}$, $(uw)' = 1 - \frac{1}{u^2}, uw = u + \frac{1}{u} + C, w = u'^2 = 1 + \frac{1}{u^2} + \frac{c}{u}$.

Учитывая начальные данные и равенство $u' = y' + 1$, находим, что $u'(\sqrt{2}) = \sqrt{2}, u(\sqrt{2}) = 1$. Тогда $C = 0, u'^2 = 1 + \frac{1}{u^2}, u' = \frac{\sqrt{1+u^2}}{u}$, $\sqrt{1+u^2} = x + C$. Из условия $u(\sqrt{2}) = 1$ следует, что $C = 0$. Тогда $\sqrt{1 + (y+x)^2} = x$. Учитывая начальные данные для y, получаем отсюда ответ. $y = \sqrt{x^2 - 1} - x$.

Р-7.7.пр.5

Решить задачу Коши

$$yy'' = \left(y'^5 + y'^2\right) \text{ th } y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

Решить уравнения $(1 - 17)$:

P-7.1

$xy'' + xy'^2 + y' = 0, x \neq 0$

P-7.2

$y''^3 + y'^5 = (y'' + y')\, y''y'^2.$

P-7.3

$y'' = \frac{y'}{x} \ln \frac{y'}{x} + \frac{y'}{x}.$

P-7.4

$4y''\sqrt{y} = 1.$

P-7.5

$yy'' - y'^2 = y'y^2.$

P-7.6

$3yy'y'' = y'^3 + 2.$

P-7.7

$5yy'^3y'' = y'^5 + 4.$

P-7.8

$yy'' = 7y'^2 + y^4y'.$

P-7.9

$yy'' = 2y'^2 - 4y^2y'^3.$

P-7.10

$\left(y^3 + y\right) y'' - \left(3y^2 - 1\right) y'^2 = 0.$

P-7.11

$yy''' - y'y'' = 0.$

P-7.12

$yy'' = 2y' + 2y'^2.$

P-7.13

$\left(1 + y^2\right) y'' + 2yy'^2 = y'.$

P-7.14

$\left(1 + y^2\right) y'' = y\left(y'^2 - 1\right).$

P-7.15

$4xy'' - y''^2 = 4\,(y' + 1).$

P-7.16

$2(1 - y)y'' = y'^2 + 1.$

P-7.17

$2yy'y'' - y''^2 = y'^3$. Найти решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям $(18-38)$:

P-7.18

$y''\sin^3 x - \left(y'\sin^2 x + y'^2\right)\cos x = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

P-7.19

$y''\cos^3 x + \left(y'\cos^2 x + y'^2\right)\sin x = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$

P-7.20

$(x+1)y^{(n)} = y^{(n-1)}, n \geqslant 2, y^{(n-2-k)}(0) = (n-2-k)!, k = 0, 1, ..., n-2,\ y^{(n-1)}(0) = 0.$

P-7.21

$xy^{(n)} = y^{(n-1)}, n \geqslant 2, y^{(n-2-k)}(0) = (n-2-k)!, k = 0, 1, ..., n-2,\ y^{(n-1)}(0) = 0.$

P-7.22

$y'' = 5y\sqrt{y}, \quad y(0) = 1, y'(0) = -2.$

P-7.23

$y'' = y'^2 + (1-y)y', \quad y(1) = y'(1) = 1.$

P-7.24

$y'' + y'^2 = y'e^y, \quad y(0) = 0, y'(0) = \frac{1}{2}.$

P-7.25

$yy'' - y'^2 + 2 = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0.$

P-7.26

$yy'' = y^2y'^3 + y'^2, \quad y(0) = 1, y'(0) = -3.$

P-7.27

$3y'y'' = e^y, \quad y(-3) = 0, y'(-3) = 1.$

P-7.28

$2yy'' = y'^2\left(3 - 4yy'^2\right), \quad y(4) = 1, y'(4) = -1.$

P-7.29

$yy'' - y'^2 = y^4, \quad y(1) = 2, y'(1) = -4.$

P-7.30

$yy'' = 5y'^2 + 3y^2y', \quad y(1) = 1, y'(1) = -1.$

P-7.31

$yy'' = \left(4y'^4 - y'^2\right)e^y, \quad y(0) = 1, y'(0) = -\frac{1}{2}.$

P-7.32

$2y^2y'' = 2y'^4 - yy'^2, \quad y(1) = y'(1) = 1.$

P-7.33

$2y^2y'' + y'^2 = 4, \quad y(0) = 1, y'(0) = -2.$

P-7.34

$3y'y'' - y'^3 - y + 2 = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$

P-7.35

$2\left(y^2 + y\right)y'' - \left(y^2 + y + 1\right)y^2 + y^3 = 0, \quad y(2) = 1, y'(2) = -1.$

P-7.36

$2\left(e^y + 1\right)^2 y'' + \left(e^{2y} - 1\right)y'^2 + 1 = 0, \quad y(1) = 0, y'(1) = \frac{1}{2}.$

14.2.2 Problems about homogeneous and homogeneous in the generalized sense of the equation

P-7.пр.6

Решить

$$x^2yy'' - 5xyy' - x^2y'^2 = 6y^2, \quad x \neq 0.$$

Заметим сначала, что $y = 0$ - решение уравнения. Пусть далее $y \neq \neq 0$. Убедившись в однородности по y, y', y'' заданного уравнения, вводим новую функцию z с помощью равенства $y' = yz$. После сокращения на $y \neq 0$ получаем уравнение $x^2z' - 5xz = 6$.

Общим решением этого линейного уравнения первого порядка является $z = Cx^5 - \frac{1}{x}$. Отсюда и из замены находим, что

$$\frac{y'}{y} = Cx^5 - \frac{1}{x}.$$

Решая это уравнение, получаем ответ:

$$y = \frac{C_1}{x}e^{C_2x^6},$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные.

P-7.пр.7

Решить

$$xyy'' + xy'^2 = 3yy', \quad x \neq 0.$$

Данное уравнения является однородным по y, y', y'' и его можно решить, понизив порядок уравнения с помощью рекомендуемой замены.

Однако уравнение можно решить и по-другому. Заметим, что $y = C$ - решение уравнения. Пусть далее $y \neq C$. Если иметь ввиду, что

$$(xyy')' = xyy'' + xy'^2 + yy',$$

то заданное уравнение можно записать в виде

$$(xyy')' = \left(2y^2\right)'.$$

Отсюда $xyy' = 2y^2 + C$ или $\left(xy^2\right)' = 4y^2 + 2C$. Полагая $y^2 = u$, получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$xu' = 4u + 2C.$$

Интегрируя его, получаем ответ. $y^2 = C_1x^4 + C_2$, где C_1 и C_2 - произвольные постоянные.

P-7.пр.8

Решить задачу Коши

$$x^2\left(y''+2yy'\right)+2xy^2-2y=0, \quad y(1)=3, \quad y'(1)=-3.$$

Подставив в уравнение λx вместо x, $\lambda^s y$ вместо y, $\lambda^{s-1}y'$ вместо y' и $\lambda^{s-2}y''$ вместо y'', потребуем, чтобы параметр λ входил в одинаковой степени во все слагаемые. Если это возможно, то после сокращения на множитель с такой степенью λ получим опять то же уравнение. Для определения числа s имеем равенства

$$2+s-2=2+s+s-1=1+2s=s$$

которые выполняются при $s=-1$. Полагая $x=e^t, y=z(t)e^{-t}$, находим, чТо

$$\begin{aligned} y'(x)&=\left[z(t)e^{-t}\right]'\cdot e^{-t}=\left(z'-z\right)e^{-2t}\\ y''(x)&=\left[\left(z'-z\right)e^{-2t}\right]'\cdot e^{-t}=\left(z''-3z'+2z\right)e^{-3t}\end{aligned}$$

После подстановки в уравнение выражений для x, y, y', y'' и сокращения на e^{-t}, получаем уравнение

$$z''-3z'+2zz'=0$$

в которое не входит t. Заметим, что $z=C$ - решение этого уравнения. Из замены следует, что $y=\frac{c}{x}$ - решение исходного уравнения. При $C=3$ такое решение удовлетворяет заданным начальным условиям. В силу теоремы единственности решения задачи Коши, которая в нашем случае выполняется при $x\neq 0$, других решений заданная задача Коши не имеет. Ответ. $y=\frac{3}{x}$. Решить уравнения (39-53):

P-7.39

$xyy''-(x+1)yy'=xy'^2, x\neq 0.$

P-7.40

$yy''-y'^2+y^2\sin x=0.$

P-7.41

$yy''+\frac{yy'}{x}-y'^2=0.$

P-7.42

$xyy''+yy'=xy'^2+y^2, x\neq 0.$

P-7.43

$y^2y'''-3yy'y''+2y^3+y^3\sin x=0.$

P-7.44

$x^2yy''=\left(xy'+y\right)^2, x\neq 0.$

P-7.45

$xyy''-yy'=2xy'^2, x\neq 0.$

P-7.46

$yy''+yy'\operatorname{tg}x+2y'^2=0.$

P-7.47

$yy''+yy'\operatorname{tg}x=2y'^2.$

P-7.48

$yy'' - \frac{yy'}{x+1} = 2y'^2.$

P-7.49

$xyy'' + 2xy'^2 = 2yy', x \neq 0.$

P-7.50

$xyy'' + xy'^2 + yy' = 0, x \neq 0.$

P-7.51

$y^2y'' - yy'\left(y' + \frac{y}{x}\right) + \frac{4}{x}y'^3 = 0.$

P-7.52

$yy'y'' - \frac{yy'^2}{x} - y'^3 = x^3y^3$

P-7.53

$(x+1)yy'' + yy' = xy'^2, x \neq -1.$ Найти решение уравнения при заданных начальных условиях (54-67):

P-7.54

$yy'' = (1-x)y'^2, \quad y(1) = 1, y'(1) = 2.$

P-7.55

$\left(yy'' - y'^2\right)\sin x + y^2 = (\sin x - \cos x)yy', y\left(\frac{\pi}{2}\right) = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

P-7.56

$xyy'' - xy'^2 + y'\left(y' + y\right)\sin x = 0, \quad y(1) = 1, y'(1) = -1.$

P-7.57

$4xyy'' - 4yy' + y'^2 = 0, \quad y(-1) = 1, y'(-1) = -4.$

P-7.58

$xyy'' - 4xy'^2 + 4yy' = 0, \quad y(1) = 1, y'(1) = 2.$

P-7.59

$2xy^2y'' - 2xyy'^2 + 2xy'^3 = y'y^2, \quad y(1) = y'(1) = -1.$

P-7.60

$(1 - \sin x)yy'' + yy'\cos x = y'^2, \quad y(0) = 2, y'(0) = 1.$

P-7.61

$y^2\left(y'' - y'\right) = y'^2\left(y - 2xy'\right), \quad y(1) = y'(1) = e.$

P-7.62

$xyy'' + x(2\ln x - 1)y'^2 = yy', \quad y(1) = 1, y'(1) = -2.$

P-7.63

$xyy'' + \left(1 + x^2\right) yy' + xy^2 = xy'^2, \quad y(1) = 1, y'(1) = -1.$

P-7.64

$y^2y'' - \frac{3}{2}x^2y^2y' + \frac{3}{8}x^2y'^3 - yy'^2 = 0, \quad y(1) = 1, y'(1) = -2.$

P-7.65

$x^2y'' + 2x^2yy' + 2xy^2 - 2y = 0,$
а)$y(1) = 2, y'(1) = 0,$
б)$y(1) = -1,\ y'(1) = 1.$

P-7.66

$x^4y'' - xyy' + 2\left(y - x^2\right) y = 0, \quad y(1) = 1, y'(1) = \frac{1}{2}.$

14.2.3 Problems solved by different methods

Все задачи этого пункта можно решать методами, изложенными в п. 1 и п. 2.

P-7.68

С помощью подстановки $y = z^2$ Решить

$$2x^2yy'' + 4y^2 = x^2y'^2 + 2xy\left(y' + \sqrt{y}\right), \quad x \neq 0.$$

Решить уравнения $(69 - 87)$:

P-7.69

$yy'' - 2y'^2 = 0.$

P-7.70

$\left(y^2 + y\right) y'' - (2y + 1)y'^2 = 0.$

P-7.71

$3yy'' - 5y'^2 = 0.$

P-7.72

$4yy'^2y'' = y'^4 + 3.$

P-7.73

$x^2y'' = 2y'(y - x), x \neq 0.$

P-7.74

$xy'' = y' + 2x^2yy', x \neq 0.$

P-7.75

$yy'' + 4y' = y'^2.$

P-7.76

$y'' = \left(\frac{y'}{x}\right)^2 + 2\frac{y'}{x}.$

P-7.77

$2y\left(xy''+y'\right)=x(x+2)y^{r2}, x\neq 0.$

P-7.78

$x^2yy''=\left(xy'-2y\right)^2, x\neq 0.$

P-7.79

$yy''=\left(y^3+y'\right)y'.$

P-7.80

$yy''+2y'^2=3yy'.$

P-7.81

$(y+1)y''+\frac{y'}{y+1}=y'^2.$

P-7.82

$2x^2yy''+4y^2=x^2y'^2+2xyy', x\neq 0.$

P-7.83

$x^2yy''+x^2y'^2-5xyy'+4y^2=0, x\neq 0.$

P-7.84

$x^4y''-x^2\left(xy'-y\right)-\left(xy'-y\right)^3=0, x\neq 0.$
Найти решение уравнения при заданных начальных условиях $(88-95)$:

P-7.88

$xyy''+y^2=xy'^2+(x-1)yy', \quad y(1)=y'(1)=2.$

P-7.89

$(1+y)y''+xy'^2=0, \quad y(1)=0, y'(1)=\frac{1}{2}.$

P-7.90

$y\left(y''+y'\right)=y^{r2}\left(xy^2-1\right), \quad y(0)=y'(0)=1.$

P-7.91

$(y+2)y''+y'^2=\cos 2x, \quad y(0)=-2, y'(0)=1.$

P-7.92

$2\left(yy''-y'^2\right)=\left(y'^2-2y'y\right)e^{x^2}, \quad y(0)=1, y'(0)=2.$

P-7.93

$x\left(yy''-y'^2\right)=yy'\ln\frac{y}{y'}, \quad y(1)=y'(1)=1.$

P-7.94

$xy'''-y''=x^2\cos x, y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0, y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1, y''\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}.$

P-7.95

$3y''y''' - 2y''^3 = 16, \quad y(1) = 2, y'(1) = 0, y''(1) = -2$. Найти интегральные кривые, а) касающиеся прямой $y = 1$,

б)пересекающие прямую $y = 1$ под углом $\varphi = \frac{\pi}{4}$ или $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, для уравнений $(96 - 97)$:

P-7.96

$2\left(yy'' - y'^2\right) + 3yy'^4 = 0.$

P-7.97

$y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)y'^2 = 0.$

P-7.98

Для уравнения $\left(1 + y'^2\right) y''' = 3y'y''^2$ найти интегральные кривые, пересекающие ось ординат под прямым углом и имеющие в точке пересечения кривизну, равную а) нулю,

б)единице.

Найти решение уравнения при заданных условиях $(99 - 102)$:

P-7.99

$y'' + 2(1 - y)y' = 0, y'(x) \geqslant 0$ В$(x, 1)$.

P-7.100

$yy'' - 2y'^2 = 2y^4y', \quad y(2) = \sqrt[4]{y'(2)} \neq 0.$

P-7.101

$2yy'' - y'^2 + 2yy'^4 = 0, \quad y(1) \cdot y'^2(1) = 1.$

P-7.102

$yy'' + yy' \operatorname{tg} x = (1 - \sin x)y'^2, \quad y(0) \cdot y'(0) < 0.$

14.2.4 Problems about linear equations with constant coefficients

P-8.пр.1

Решить следующие линейные однородные уравнения:

а)$y^{IV} - 6y''' + 8y'' + 6y' - 9y = 0,$

б)$y^{IV} + 6y''' + 13y'' + 12y' + 4y = 0,$

в)$y^{IV} - 3y''' + 5y'' - y' - 10y = 0.$

а) Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - 6\lambda^3 + 8\lambda^2 + 6\lambda - 9 = 0.$$

Легко видеть, что его корнями являются $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$. Чтобы найти остальные корни, достаточно разделить левую часть характеристического уравнения на $\left(\lambda^2 - 1\right)$. Тогда уравнение можно разложить на множители следующего вида

$$\left(\lambda^2 - 1\right)\left(\lambda^2 - 6\lambda + 9\right) = \left(\lambda^2 - 1\right)(\lambda - 3)^2 = 0.$$

Таким образом получаем еще один корень $\lambda_3 = 3$ кратности два. Следовательно, общее решение заданного уравнения имеет вид

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^x + (C_3 + C_4x)\, e^{3x},$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 - произвольные постоянные.

б)Нетрудно проверить, что $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = -2$ являются корнями характеристического уравнения

$$\lambda^4 + 6\lambda^3 + 13\lambda^2 + 12\lambda + 4 = 0.$$

В таком случае это уравнение можно представить в виде

$$(\lambda+1)^2(\lambda+2)^2=0.$$

Отсюда видно, что оба корня $\lambda_1=-1, \lambda_2=-2$ кратности два. Значит, общее решение заданного уравнения имеет вид

$$y=(C_1+C_2x)\,e^{-x}+(C_3+C_4x)\,e^{-2x},$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 - произвольные постоянные.

в)Характеристическое уравнение

$$\lambda^4-3\lambda^3+5\lambda^2-\lambda-10=0$$

имеет корни $\lambda_1=-1, \lambda_2=2$. Разделив левую часть этого уравнения на $(\lambda+1)(\lambda-2)$, получаем следующее представление характеристического уравнения

$$(\lambda+1)(\lambda-2)\left(\lambda^2-2\lambda+5\right)=0.$$

Это дает еще два комплексно сопряженные корни $\lambda_3=1-2i, \lambda_4=1+2i$. Сдедовательно, общее решение заданного уравнения имеет вид

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+e^x\left(C_3\cos 2x+C_4\sin 2x\right)$$

Для решения линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами используются чаще всего метод неопределенных коэффициентов и принцип суперпозиции.

Р-8.пр.2

Решить линейное неоднородное уравнение

$$y'''-y''-4y'+4y=-8(\cos 2x+2\sin 2x)-3e^x.$$

Сначала составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^3-\lambda^2-4\lambda+4=0.$$

Его корнями являются $\lambda_1=-2, \lambda_2=1, \lambda_3=2$. Поэтому общее решение соответствующего линейного однородного уравнения имеет вид

$$y_0(x)=C_1e^{-2x}+C_2e^x+C_3e^{2x}$$

где C_1, C_2, C_3 - произвольные постоянные. Чтобы получить общее решение заданного уравнения, необходимо найти какое-либо его решение $y_1(x)$ и прибавить к уже найденному общему решению $y_0(x)$ линейного однородного уравнения. Согласно принципу суперпозиции решение $y_1(x)=y_2(x)+y_3(x)$, где $y_2(x)$ - какое-либо решение уравнения

$$y'''-y''-4y'+4y=-8(\cos 2x+2\sin 2x),$$

а $y_3(x)$ - какое-либо решение уравнения

$$y'''-y''-4y'+4y=-3e^x.$$

Решение $y_2(x)$ ищем в виде

$$y_2(x)=a\cos 2x+b\sin 2x$$

а решение $y_3(x)$ ищем в виде

$$y_3(x)=cxe^x,$$

где коэффициенты a, b, c находим подстановкой $y_2(x)$ и $y_3(x)$ в соответствующие уравнения. Подстановка $y_2(x)$ и $y_3(x)$ в уравнения дает $a=-1$,$b=0, c=1$. Таким образом, $y_1(x)=-\cos 2x+xe^x$ - решение исходного уравнения. Общее решение заданного уравнения $y(x)=y_0(x)+y_1(x)$. Другим методом решения линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами является метод вариации постоянных.

Р-8.пр.3 Решить методом вариации постоянных $y'' + y = \frac{1}{\cos^2 x}$

(!!! напишу лучше метод вариации постоянных!! пока нужную систему получаю медленнее, чем мог бы.)

Решить методом вариации постоянных

$$y'' + y = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 + 1 = 0$. Его корни $\lambda_1 = -i, \lambda_2 = i$, и общее решение линейного однородного уравнения имеет вид

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные. Общее решение неоднородного ищем в виде

$$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x,$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ - неизвестные пока непрерывно дифференцируемые функции. Согласно методу вариации постоянных составим систему уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0, \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \dfrac{1}{\cos^2 x}. \end{cases}$$

Отсюда находим, что $C_1'(x) = \frac{1}{\cos x}, C_2'(x) = -\frac{\sin x}{\cos^2 x}$. Интегрируя, получаем

$$C_1(x) = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d \sin x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} \right| + A,$$

$$C_2(x) = -\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d \cos x}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\cos x} + B,$$

где A и B - произвольные постоянные. Подставляя найденные значения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в выражение для y, найдем общее решение заданного уравнения

$$y = A \cos x + B \sin x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} \right| \cos x - \operatorname{tg} x.$$

(?? с этим вроде были проблемы, нужно потренироваться еще!)

Р-8.пр.4. $y'' - 4y' + 3y = 2\left(e^t + e^{3t}\right)$ на метод Лапласа

(??? нужны эти таблицы и методы в теории, пока слабо там!)

Операционным методом решить задачу Коши

$$y'' - 4y' + 3y = 2\left(e^t + e^{3t}\right), \quad t \geqslant 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 1.$$

(??? зачем как ниже мы так считаем, что ноль??? подставили просто бы и всё??)

Будем считать, что при $t < 0$ решение $y(t) \equiv 0$ и правая часть уравнения тождественный нуль. Тогда так продолженные на всю числовую ось $t \in (-\infty, +\infty)$ решение и правая часть уравнения являются оригиналами. Если $y(t) \risingdotseq Y(p)$, то в силу свойств преобразования Лапласа и начальных условий $y'(t) \risingdotseq pY(p) + 1, y''(t) \risingdotseq p^2 Y(p) + p - 1$. Продолженная нулем при $t < 0$ правая часть уравнения имеет своим преобразованием Лапласа функцию $2\left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-3}\right)$. Переходя в исходном уравнении к преобразованию Лапласа, т. е. умножая его на e^{-pt} и интегрируя по t от нуля до бесконечности, получаем алгебраическое уравнение для нахождения $Y(p)$

$$p^2 Y(p) + p - 1 - 4[pY(p) + 1] + 3Y(p) = 2\left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-3}\right).$$

Если считать комплексный параметр p таким, что $\operatorname{Re} p > 3$, то из алгебраического уравнения находим

$$Y(p) = \frac{1}{(p-1)(p-3)} \left[\frac{2}{p-1} + \frac{2}{p-3} - p + 5\right].$$

Разложим правую часть на простые дроби

$$Y(p) = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{(p-1)^2} + \frac{c}{p-3} + \frac{D}{(p-3)^2}.$$

Приравнивая выражения для $Y(p)$, находим

$$A = -2, B = -1, C = 1, D = 1.$$

Переходя к оригиналам, получаем искомое решение

$$y(t) = (t+1)e^{3t} - (t+2)e^t.$$

P-8.пр.5 уравнение Эйлера

Решить при $x > 0$ уравнение Эйлера

$$x^2y'' - xy' - 3y = 4x^3.$$

Стандартно, уравнение Эйлера решается заменой $x = e^t$, $y' = e^{-t}y'_t$, $y'' = e^{-2t}\left(y''_{tt} - y'_t\right)$. Подставим, получим:

$$y'' - 2y' - 3y = 4e^{3t}.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$. Следовательно, общее решение полученного уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{3t} + ate^{3t}$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные, а коэффициент a находится подстановкой функции ate^{3t} в уравнение. Подстановка в уравнение дает $a = 1$. Сделав обратную замену $t = \ln x$, получаем общее решение заданного уравнения Эйлера

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2x^3 + x^3\ln x.$$

Решить линейные однородные уравнения (1-38):

P-8.1

$y'' - 4y' + 3y = 0.$

P-8.2

$y'' - 6y' + 8y = 0.$

P-8.3

$y'' + 3y' + 2y = 0.$

P-8.4

$y'' - y' - 2y = 0.$

P-8.5

$y'' + 5y' + 6y = 0.$

P-8.6

$y'' - 4y' + 8y = 0.$

P-8.7

$y'' - 6y' + 18y = 0.$

P-8.8

$y'' - 2y' + 10y = 0.$

P-8.9

$y'' + 2y' + 5y = 0.$

P-8.10

$y'' + 2y' + 2y = 0.$

P-8.11

$y'' - 4y' + 4y = 0.$

P-8.12

$y'' - 6y' + 9y = 0.$

P-8.13

$y'' - 8y' + 16y = 0.$

P-8.14

$y''' + 4y'' - y' - 4y = 0.$

P-8.15

$y''' + 3y'' - y' - 3y = 0.$

P-8.16

$y''' - 7y'' + 14y' - 8y = 0.$

P-8.17

$y''' + 4y'' + 5y' + 2y = 0.$

P-8.18

$y''' + 3y'' - 4y = 0.$

P-8.19

$y''' - 3y'' + 7y' - 5y = 0.$

P-8.20

$y''' + y'' + 4y' + 4y = 0.$

P-8.21

$y''' + 3y'' + 4y' + 2y = 0.$

P-8.22

$y''' - y'' + y' - y = 0.$

P-8.23

$y^{IV} - y''' + 2y' = 0.$

P-8.24

$y^{IV} - 7y''' + 14y'' - 8y' = 0.$

P-8.25

$y^{IV} - 5y''' + 7y'' - 3y' = 0.$

P-8.26

$y^{IV} - 6y''' + 9y'' + 4y' - 12y = 0.$

P-8.27

$y^{IV} + 5y''' + 9y'' + 7y' + 2y = 0.$

P-8.28

$y^{IV} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = 0.$

P-8.29

$y^{IV} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0.$

P-8.30

$y^{IV} - 2y'' + y = 0.$

P-8.31

$y^{IV} + 6y''' + 12y'' + 8y' = 0.$

P-8.32

$y^{IV} + 2y''' - 2y'' + 2y' - 3y = 0.$

P-8.33

$y^{IV} - 5y''' + 5y'' + 5y' - 6y = 0.$

P-8.34

$y^{IV} + 5y'' + 4y = 0.$

P-8.35

$y^{IV} + 8y'' + 16y = 0.$

P-8.36

$y^{IV} + 3y'' + 2y = 0.$

P-8.37

$y^{IV} + 18y'' + 81y = 0.$

P-8.38

$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0.$ Решить линейные неоднородные уравнения $(39 - 151)$:

P-8.39

$y'' - 3y' + 2y = (1 + x)e^{2x}.$

P-8.40

$y'' + 2y' + y = x^2 e^{-x}.$

P-8.41

$y'' - y' - 2y = -9xe^{-x}.$

P-8.42

$y'' + y' - 6y = -18x^2e^{-x}$.

P-8.43

$y'' - y = e^x \cos x$.

P-8.44

$y'' - y' + \frac{1}{2}y = e^x \sin x$.

P-8.45

$y'' - 4y' + 4y = x^2 + 2e^{2x}$.

P-8.46

$y'' + y' - 2y = 2xe^{-2x} + 5\sin x$.

P-8.47

$y'' + 4y = 4xe^{-2x} - \sin 2x$.

P-8.48

$y'' + 2y' - 3y = 2\cos x - 8xe^{-3x}$.

P-8.49

$y'' + 9y = 6xe^{-3x} - 3\cos 3x$.

P-8.50

$y'' + 6y' + 9y = 36xe^{3x}$.

P-8.51

$y'' - 4y' + 4y = 32xe^{-2x}$.

P-8.52

$y'' + y' = (5 - 2x)e^{-x} - 10\sin 2x$.

P-8.53

$y'' - y' = (4x + 3)e^x - 2\cos x$.

P-8.54

$y'' - 4y' = -8e^{2x}\cos 2x - 8x + 2$.

P-8.55

$y'' - 4y' + 13y = -9\cos 2x - 8\sin 2x$.

P-8.56

$y'' + 4y' + 4y = 2e^{-2x}$.

P-8.57

$y'' - 2y' + 5y = 4\cos x + 2\sin x$.

P-8.58

$y'' - 8y' + 20y = -2e^{3x}(2\cos x + \sin x)$.

P-8.59

$y'' + y' - 6y = -5e^{-3x}$.

P-8.60

$y'' - 2y' + y = 2e^{x}$

P-8.61

$y'' - 7y' + 12y = -e^{3x}$.

P-8.62

$y'' - 2y' + 3y = 4\cos x - 2\sin x + 4e^{3x}$.

P-8.63

$y'' + 2y' - 3y = (2 - 8x)e^{-3x}$.

P-8.64

$y'' - y' - 12y = e^{-2x}(7\cos x - 5\sin x) - 7e^{-3x}$.

P-8.65

$y'' + 4y = 2\cos 2x - 8x\sin 2x$.

P-8.66

$y'' + 4y = 2\cos^2 x$.

P-8.67

$y'' + 16y = 2\sin^2 x$.

P-8.68

$y'' - 5y' + 6y = 10\sin x + e^{2x}$.

P-8.69

$y'' + 2y' + y = xe^{-x}$.

P-8.70

$y'' - 7y' + 6y = \sin x + xe^{x}$.

P-8.71

$y'' + y = 2\sin x \cdot \sin 2x$.

P-8.72

$y''' - 2y'' - 3y' = e^{-2x}$.

P-8.73

$y''' - 2y'' - 3y' = x + 1$.

P-8.74

$y''' - y'' + y' - y = 2\cos x.$

P-8.75

$y''' - 2y'' + 2y' = 5\cos x + 2x.$

P-8.76

$y''' + 4y' = \operatorname{ch}^2 x.$

P-8.77

$y''' - 4y' = \cos^2 x.$

P-8.78

$y''' + 16y' = \operatorname{sh}^2 2x.$

P-8.96

$y''' - 3y'' + 4y = 6e^{2x}.$

P-8.97

$y''' - y'' - y' + y = e^{-x}(3\sin x - 4\cos x)$

P-8.98

$y''' - 8y'' + 19y' - 12y = 2e^{3x} - 8\cos x - 36\sin x.$

P-8.99

$y''' + y'' = e^{-x} + 2\cos x.$

P-8.100

$y''' - 2y'' = \sin x.$

P-8.101

$y''' - 2y'' = e^{2x}$

P-8.102

$y''' + y'' - 2y' = e^{3x}.$

P-8.103

$y''' + y'' - 2y' = 2 - x.$

P-8.104

$y''' + 2y'' = \cos x.$

P-8.105

$y''' - 2y'' + 2y' = 4x + \cos x.$

P-8.106

$y''' - 16y' = 48x^2 + 2\cos^2 2x.$

P-8.107

$y''' - 2y'' + 2y' = 20\sin^2\frac{x}{2}$.

P-8.108

$y''' + 4y' = e^{2x} - 8\sin 2x$.

P-8.109

$y''' + y'' + 4y' + 4y = 40\sin^2 x$.

P-8.110

$y''' + 2y'' = 2e^{-2x}$.

P-8.111

$y''' - 4y'' + 5y' = 15x^2 - 4x + 8\sin x$.

P-8.112

$y''' - 2y'' + 2y' = 6x^2 + 2 + 20\cos 2x$.

P-8.113

$y''' - 6y'' + 10y' = 13\cos x + 10x$.

P-8.114

$y''' + 2y'' + 5y' = 2x - 17\sin 2x$

P-8.115

$y''' - 2y'' + y' = 2x + 2\cos x$.

P-8.116

$y''' - 2y'' = 16\sin 2x - 12x$.

P-8.117

$y''' - y'' + y' - y = 4xe^x + 4$.

P-8.118

$y''' + y'' + y' + y = 4xe^{-x} + 4$.

P-8.119

$y''' - y'' + 4y' - 4y = 40\cos^2 x$.

P-8.120

$y^{IV} - 2y'' + y = 1 + x^2$.

P-8.121

$y^{IV} - y = e^x\cos x$

P-8.122

$y^{IV} + 2y'' + y = x^2 + 9\sin 2x$.

P-8.132

$4y^{IV} - y'' = 12x\,\mathrm{sh}^2\,\frac{x}{2} + 3\,(8 - xe^{-x})$.

P-8.133

$y^{IV} - 4y'' = 16\,\mathrm{ch}^2\,x - 8$

P-8.134

$y^{IV} - 2y''' + 2y'' = 10\cos^2 x + 5\,(xe^x - 1)$.

P-8.135

$y^{IV} - 2y''' - 3y'' = 8\,\mathrm{sh}\,x + 10xe^x$.

P-8.136

$y^{IV} + 2y'' + y = 18\sin^2 x + 3\sin 2x + x^3$.

P-8.137

$y^{IV} - 2y'' + y = 8\,\mathrm{ch}^2\,\frac{x}{2} + x^2 - 2e^{-x}$.

P-8.138

$y^{IV} + y''' - 2y'' = 3e^x + 32e^{2x}$.

P-8.139

$y^{IV} + y'' = 8\cos^2\frac{x}{2}$.

P-8.140

$y^{IV} - 3y'' - 4y = 24\cos 2x + 20e^{2x}$.

P-8.141

$y^{IV} + 3y''' - 4y'' = 5\,\mathrm{sh}\,x$.

P-8.142

$y^{IV} - y = -8(\cos x + 3\sin x)e^{2x} - 4e^{-x}$.

P-8.143

$y^{IV} - y'' = 4x\cos x + 12\sin x - 2e^x$.

P-8.144

$y^{IV} - 4y''' + 3y'' = 4\cos x + 8\sin x + 6$.

P-8.145

$y^{IV} + 7y''' + 16y'' + 10y' = -5e^{-x}$.

P-8.146

$y^{IV} - 3y''' + 4y' = -\cos x + 7\sin x + 4$.

P-8.147

$y^{IV} + 3y''' + 3y'' + y' = 2(\sin x - \cos x) + 2x + 6.$

P-8.148

$y^{IV} - 2y'' + y = 8e^x - 4\cos x.$

P-8.149

$y^{IV} - y''' - y'' - y' - 2y = -6e^{-x}.$

P-8.150

$y^{IV} - y''' - 3y'' + y' + 2y = -5(\cos x + \sin x)e^{-x}.$

14.2.5 Problems about the method of variation of constants

$(152 - 171)$:

P-8.152

$y'' + y = \frac{1}{\sin^2 x}.$

P-8.153

$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}.$

P-8.154

$y'' - 3y' + 2y = \frac{e^x}{1+e^x}$

P-8.155

$y'' - y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

P-8.156

$y'' - 2y' = 5(3 - 4x)\sqrt{x}$

P-8.157

$y'' - 2y' + 10y = \frac{9e^x}{\cos 3x}.$

P-8.158

$y'' - 4y' + 8y = 4\left(7 - 21x + 18x^2\right)\sqrt[3]{x}.$

P-8.159

$y'' + y = -\operatorname{ctg}^2 x.$

P-8.160

$y'' - 4y = \left(15 - 16x^2\right)\sqrt{x}.$

P-8.161

$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x+1}.$

P-8.162

$y'' + 3y' = \frac{3x-1}{x^2}$

P-8.163

$y'' - 4y' + 4y = \frac{2e^{2x}}{1+x^2}$

P-8.164

$y'' + y' = 7(4+3x)\sqrt[3]{x}.$

P-8.165

$y'' + 2y' + 2y = \frac{e^{-x}}{\sin x}.$

P-8.166

$y'' + 2y = 2 - 4x^2 \sin x^2$

P-8.167

$y'' + 2y' + 5y = \frac{2e^{-x}}{\cos 2x}$

P-8.168

$y'' + 2y' + y = (x+2)\left(\ln x + \frac{1}{x}\right)$

P-8.169

$y'' - 2y = -2 - 4x^2 \cos x^2.$

P-8.170

$y'' - y' = -\frac{x+1}{x^2}.$

P-8.171

$y'' - 2y' = \frac{1}{x} - 2\ln(ex).$

14.2.6 Problems about the operating method (?!!!)

при $t \geqslant 0$ задачу Коши (172-183):

P-8.172

$y'' - 3y' + 2y = e^{-t}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$

P-8.173

$y'' - y' - 2y = 3te^t, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

P-8.174

$y'' - 5y' + 4y = (10t+1)e^{-t}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

P-8.175

$y'' + 5y' + 6y = e^{-2t}, \quad y(0) = -1, y'(0) = 0.$

P-8.176

$y'' - 2y' + y = 2e^t, \quad y(0) = y'(0) = 1.$

P-8.177

$y'' + 2y' + y = (t+2)e^{-t}, \quad y(0) = 1, y'(0) = -1.$

P-8.178

$y'' - 2y' - 3y = 4e^{3t} - 4e^{-t}, \quad y(0) = 2, y'(0) = 0.$

P-8.179

$y'' + y = 4\cos t, \quad y(0) = 1, y'(0) = -1.$

P-8.180

$y'' + y = 5te^{2t}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$

P-8.181

$y'' + 9y = 6\cos 3t + 9\sin 3t, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0.$

P-8.182

$y'' + 4y = 4(\cos 2t + \sin 2t), \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$

P-8.183

$y'' + y = 2(\cos t - \sin t), \quad y(0) = 1, y'(0) = 2.$

14.2.7 Problems about Euler's equation

Решить при $x > 0$ (184-207):

P-8.184

$x^2y'' + 2xy' - 12y = 0.$

P-8.185

$2x^2y'' - xy' - 2y = 0.$

P-8.186

$4x^2y'' - 3y = 0.$

P-8.187

$x^2y'' - 2xy' - 4y = 0.$

P-8.188

$x^2y'' + 5xy' + 8y = 0.$

P-8.189

$2x^2y'' - 3xy' + 3y = 0.$

P-8.190

$x^2y'' - 6y = 0.$

P-8.191

$2x^2y'' + 5xy' - 2y = 0.$

P-8.204

$x^2y'' + 3xy' - 3y = -\frac{3}{x^2}$

P-8.205

$x^2y'' - xy' - 8y = 11x^3 \ln x.$

P-8.206

$2x^2y'' + xy' - y = -\frac{6}{x}$

P-8.207

$x^2y'' - 2y = \frac{4}{x^2}.$

14.2.8 Problems about arbitrary method for Cauchy problem

$(208 - 236)$:

P-8.208

$y'' + y = -2\sin x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$

P-8.209

$y'' - y' - 2y = -18xe^{-x}, \quad y(1) = 5e^{-1}, y'(1) = 3e^{-1}.$

P-8.210

$9y'' + y = 6\sin\frac{x}{3}, \quad y(3\pi) = 0, y'(3\pi) = 1.$

P-8.211

$y'' + y = \cos(x - 1), \quad y(0) = y'(0) = 0.$

P-8.212

$4y'' + y = 4\cos\frac{x}{2}, \quad y(\pi) = 0, y'(\pi) = \frac{\pi}{2}.$

P-8.213

$y'' + y = 2\sin(x + 1), \quad y(0) = y'(0) = 0.$

P-8.214

$y'' - 2y' + y = 2e^x, \quad y(1) = 0, y'(1) = -e.$

P-8.215

$y'' - 3y' + 2y = 2xe^x, \quad y(1) = e, y'(1) = 5e.$

P-8.216

$y'' - 4y' = -8e^{2x}\cos 2x - 8x + 2, \quad y(0) = 5, y'(0) = -6.$

P-8.217

$y'' + 3y' + 2y = -2\cos 2x - 6\sin 2x - e^{-2x}, \quad y(0) = 3, y'(0) = -7.$

P-8.218

$y'' - 2y' - 3y = 4\cos x - 2\sin x + 4e^{3x}, \quad y(0) = 5, y'(0) = 7.$

P-8.219

$y'' + y = \sin(x-1), \quad y(0) = y'(0) = 0.$

P-8.220

$y'' + y = \frac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$

P-8.227

$4x^2y'' - 3y = 5x^2, \quad y(1) = 1, y'(1) = 2.$

P-8.228

$x^2y'' + xy' - y = 2x, \quad y(1) = 0, y'(1) = 1.$

P-8.229

$y''' + y' = 2x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 2.$

P-8.230

$y''' - y' = 6 - 3x^2, \quad y(1) = y'(1) = 0, y''(1) = 3.$

P-8.231

$y^{IV} + 2y'' + y = 0, \quad y(0) = y''(0) = 0, y'(0) = 2, y'''(0) = -4.$

P-8.232

$y''' + 6y'' + 11y' + 6y = x^2 + x + 1, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$

P-8.233

$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 1, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$

P-8.234

$y^{IV} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = \frac{\pi}{2} + 4\cos x, \quad y(0) = \frac{\pi}{2}, y'(0) = 1, y''(0) = 0,\ y'''(0) = -3.$

P-8.235

$y^{(8)} + 2y^{(6)} - 2y'' - y = 0, \quad y(0) = y''(0) = y^{(4)}(0) = y^{(6)}(0) = 0, y'(0) = 2,\ y'''(0) = 2, y^{(5)}(0) = -1, y^{(7)}(0) = 11$

P-8.236

$y^{(8)} - y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = y''(0) = y'''(0) = y^{(4)}(0) = y^{(5)}(0) = y^{(6)}(0) = y^{(7)}(0) = 0.$

P-8.237

Найти решение уравнения $y''' - 3y' - 2y = xe^{-x}$, ограниченное при $x \to +\infty$ и удовлетворяющее условиям $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

P-8.239

Доказать, что любое решение уравнения

$$y^V - y^{IV} - 9y''' + y'' + 20y' + 12 = 0$$

однозначно представимо в виде суммы решений уравнений $y''' - y''$ - $-5y' - 3y = 0$ и $y'' - 4y = 0$.

P-8.240

Верно ли, что каждое решение уравнения $y'' - y' - 2y = 0$ удовлетворяет уравнению

$$y^V - 3y^{IV} - y''' + 7y'' - 4y = 0?$$

14.2.9 Problems about second-order linear equations with variable coefficients

P-9.пр.1

Найти общее решение уравнения

$$xy'' - (1+x)y' + 2(1-x)y = 9x^2e^{2x}, \quad x > 0.$$

Рассмотрим однородное уравнение

$$xy'' - (1+x)y' + 2(1-x)y = 0$$

и попробуем найти его решение вида $e^{\alpha x}$. Подставив $e^{\alpha x}$ в это уравнение, находим $\alpha = 2$. Следовательно, e^{2x} - решение. Запишем формулу Лиувилля-Остроградского для однородного уравнения:

$$\begin{vmatrix} e^{2x} & y \\ 2e^{2x} & y' \end{vmatrix} = Ce^{\int \frac{1+x}{x}dx} = Cxe^x.$$

Отсюда $e^{2x}y' - 2e^{2x}y = Cxe^x$. При делении обеих частей этого уравнения на e^{4x} получаем уравнение

$$\left(\frac{y}{e^{2x}}\right)' = Cxe^{-3x}.$$

Отсюда находим общее решение однородного уравнения

$$y = C_1e^{2x} + C_2(1+3x)e^{-x},$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные. Чтобы найти общее решение заданного уравнения, применим метод вариации постоянных. Ищем решение неоднородного уравнения в таком же виде, как общее решение однородного уравнения, но считаем C_1 и C_2

не произвольными постоянными, а некоторыми непрерывно дифференцируемыми функциями. Для их нахождения составляем линейную систему уравнений для $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ следующего вида:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{2x} + C_2'(x)(1+3x)e^{-x} = 0 \\ 2C_1'(x)e^{2x} + C_2'(x)(2-3x)e^{-x} = 9xe^{2x} \end{cases}$$

Из этой системы находим, что $C_1'(x) = 1+3x, C_2'(x) = -e^{3x}$. Следовательно, $C_1(x) = A + x + \frac{3}{2}x^2, C_2(x) = B - \frac{1}{3}e^{3x}$, где A и B - произвольные постоянные. Таким образом, общее решение заданного уравнения имеет вид

$$y = e^{2x}\left(A + x + \frac{3}{2}x^2\right) + (1+3x)e^{-x}\left(B - \frac{1}{3}e^{3x}\right) =$$
$$= Ae^{2x} + B(1+3x)e^{-x} + \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}\right)e^{2x}.$$

Другим распространенным методом решения линейных уравнений с переменными коэффициентами является метод замены переменных.

P-9.пр.2

Найти общее решение уравнения

$$x^4y'' + 2x^3y' - y = \frac{2e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} - 1}, \quad x > 0,$$

с помощью замены $x = -\frac{1}{t}$.

После замены уравнение принимает вид

$$y''_{tt} - y = \frac{e^{-t}}{e^{-t} - 1}$$

Решая это уравнение методом вариации постоянных, находим, что

$$y(t) = e^t\left(A - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}\ln\frac{e^t}{1-e^t}\right) + e^{-t}\left(B + \frac{1}{2}\ln\left(1-e^t\right)\right),$$

где A и B - произвольные постоянные. Полагая $t = -\frac{1}{x}$, после приведения подобных членов отсюда получаем общее решение заданного уравнения

$$y = Ae^{-\frac{1}{x}} + Be^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2x}e^{-\frac{1}{x}} + \operatorname{sh}\left(\frac{1}{x}\right)\ln\left(1 - e^{-\frac{1}{x}}\right).$$

Найти общее решение уравнений (1-66):

P-9.1

$\left(2x^2 + 3x\right)y'' - 6(x+1)y' + 6y = x(2x+3)^2, x > 0.$

P-9.2

$x(x+4)y'' - (2x+4)y' + 2y = x + 4, x > 0.$

P-9.3

$\left(2x - x^2\right)y'' + \left(x^2 - 2\right)y' + (2 - 2x) = \left(2x - x^2\right)^2.$

P-9.4

$\frac{\ln x + 1}{2\ln x + 3}y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = (\ln x + 1)^2.$

P-9.5

$x(1+2x)y'' + 2(1+x)y' - 2y = (1+2x)^2\sin x, x > 0.$

P-9.6

$(1 - \ln x)y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = (1 - \ln x)^2.$

P-9.7

$xy'' - (1+x)y' + y = \frac{x^2}{1+x}, x > 0.$

P-9.8

$x^2y'' - 2x(1+x)y' + 2(1+x)y = 2x^3e^{2x}.$

P-9.9

$(2x+1)y'' + (4x-2)y' - 8y = 4(2x+1)^3.$

P-9.10

$2xy'' + (4x+1)y' + (2x+1)y = e^{-x}, x > 0.$

P-9.11

$xy'' - (6x+2)y' + (9x+6)y = 12x^3e^{3x}.$

P-9.12

$(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2e^x.$

P-9.13

$xy'' - (2x+1)y' + 2y = 16x^2e^{4x}.$

P-9.14

$x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = x^3e^x.$

P-9.15

$\left(x^2 - 3x\right)y'' + \left(6 - x^2\right)y' + (3x-6)y = (x-3)^2.$

P-9.16

$xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 2x^2e^{2x}.$

P-9.17

$(x-1)y'' - (x+1)y' + 2y = (x-1)^3e^x.$

P-9.18

$x(2x+1)y'' + 2\left(1 - 2x^2\right)y' - 4(x+1)y = (2x+1)^2, x > 0.$

P-9.19

$x(x+3)y'' + \left(12 - x^2\right)y' - 3(x+4)y = (x+3)^2, x > 0.$

P-9.20

$2x(x-2)y'' + \left(x^2 - 8\right)y' + (x-4)y = (x-2)^2, x > 2.$

P-9.21

$x(x-2)y'' + \left(x^2 - 6\right)y' + 2(x-3)y = (x-2)^2, x > 2.$

P-9.22

$x^2y'' - x\left(x^2 + 3\right)y' + \left(x^2 + 3\right)y = 10x^5 \sin x^2.$

P-9.23

$(x-1)y'' + (1-2x)y' + xy = \frac{1}{2}(x-1)^2.$

P-9.24

$x^2(x-1)y'' + 2xy' - 2y = x^3e^x.$

P-9.25

$xy'' + (2-2x)y' + (x-2)y = e^{2x}, x > 0.$

P-9.26

$\left(1-x^2\right)y'' + 2y' - \frac{2}{x+1}y = (1-x)^2(1+x)e^{-x}.$

P-9.27

$x(x+1)y'' + 2y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^2e^{2x}, x > 0.$

P-9.28

$x(3x+2)y'' + 3\left(2-3x^2\right)y' - 18(x+1)y = (3x+2)^2 \cdot x > 0.$

P-9.29

$2x(x+2)y'' + \left(8-x^2\right)y' - (x+4)y = (x+2)^2, x > 0.$

P-9.30

$x(3x-2)y'' + 3\left(3x^2-2\right)y' + 18(x-1)y = (3x-2)^2, x > \frac{2}{3}.$

P-9.31

$(\ln x)y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = \ln^2 x.$

P-9.32

$2xy'' - (x+2)y' + y = \frac{x^3}{x+2}, x > 0.$

P-9.33

$xy'' - (4x-2)y' + 4(x-1)y = e^{2x}\cos x.$

P-9.34

$x^2y'' + x(-2 + x\operatorname{tg} x)y' + (2 - x\operatorname{tg} x)y = x^3e^x\cos x, 0 < x < \frac{\pi}{2}.$

P-9.35

$(1-x)y'' + (2-4x)y' - 4xy = e^{-2x}\sin x.$

P-9.36

$(x+1)y'' + (x-1)y' - 2y = e^{-x}(x+1)^3.$

P-9.37

$\left(2x-x^2\right)y'' + 2y' - \frac{2}{x}y = (2-x)^2xe^{-x}.$

P-9.38

$(x-1)^2y'' - \left(x^2-1\right)y' + (x+1)y = (x-1)^3(3x-2)e^x.$

P-9.46

$xy'' - (4x+2)y' + (4x+4)y = x^2e^{2x}, x > 0$

P-9.47

$y'' - 3y' \operatorname{ctg} x + \left(\frac{3}{\sin^2 x} - 2\right) y = 2\sin^2 x, 0 < x < \pi.$

P-9.48

$(x \ln x)y'' + (\ln x + 1)y' - \frac{y}{x \ln x} = \frac{2 \ln x}{x}, x > 1.$

P-9.49

$\left(1 + x^2\right) y'' + xy' - y = \frac{x^2}{1+x^2}.$

P-9.50

$x^2y'' + x(x-2)y' + (2-x)y = x^4e^{-x}.$

P-9.51

$xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = 3xe^x.$

P-9.52

$x(x-1)y'' + (4x-2)y' + 2y = e^{-x}.$

P-9.53

$x(x+1)y'' + (4x+2)y' + 2y = 6(x+1).$

P-9.54

$(x-1)y'' - 2xy' + (x+1)y = 3e^x.$

P-9.55

$xy'' - 2(4x-1)y' + 8(2x-1)y = 2e^{2x}.$

P-9.56

$(2x+3)y'' - 2y' - \frac{6}{x^2}y = 3(2x+3)^2.$

P-9.57

$(2x+1)y'' - 2y' - (2x+3)y = 3(2x+1)^2 \cdot e^{\frac{x}{2}}.$

P-9.58

$2xy'' - (x+4)y' + \left(1 + \frac{4}{x}\right) y = x^3.$

P-9.59

$xy'' + (2x-1)y' + (x-1)y = 8x^2e^x, x > 0.$

P-9.60

$x(x-1)^2y'' - 2(x-1)y' + 2y = x(x-1)^3e^{-x}, x > 1.$

P-9.61

$(x-2)y'' - (4x-7)y' + (4x-6)y = 4x(x-2)^2e^{2x}, x > 2.$

P-9.64

$x^2(x-3)y'' - x^2(x-2)y' + 2\left(x^2-3x+3\right)y = (x-3)^2.$

P-9.65

$x^2(x-1)y'' + x\left(2-4x+x^2\right)y' - 2(x-1)^2y = x^3(x-1)^2.$

P-9.66

$x^3(x-4)y'' - x^2(x-2)^2y' + 2x\left(x^2-5x+8\right)y = (x-4)^2, x > 0.$

P-9.67

Найти общее решение уравнения, если известны два его решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$:
а)$y'' - y'\operatorname{tg}x + 2y = 2\operatorname{tg}x + \frac{\sin x}{\cos^3 x}, 0 < x < \frac{\pi}{2}$ $y_1 = \operatorname{tg}x, y_2 = \operatorname{tg}x + 2\sin x.$
б)$y'' + 4xy' + \left(4x^2+2\right)y = \left(4x^2+4x+3\right)e^x$ $y_1 = e^x, y_2 = e^x + e^{-x^2}.$
в)$xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = (x-1)e^{2x}, x > 0,$ $y_1 = e^{2x}, y_2 = e^{2x} - e^x.$
г)$xy'' + 2y' - xy = 2 - x^2, x > 0,$ $y_1 = x, y_2 = x + \frac{e^x}{x}$ д) $x(2x+1)y'' + 2(x+1)y' - 2y = 3x^2 + 3x + 1, x > 0$

$$y_1 = \frac{1}{2}(x+1)^2, y_2 = \frac{1}{2}\left(x^2-1\right)$$

P-9.68

Составить и решить линейное дифференциальное уравнение второго порядка, если известны его правая часть $f(x)$ и фундаментальная система решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ соответствующего линейного однородного уравнения:
а)$f(x) = 1 - x^2, y_1 = x, y_2 = x^2 + 1.$
б)$f(x) = 1, y_1 = x, y_2 = x^2 - 1.$
в)$f(x) = \cos 2x, y_1 = \sin^2 x, y_2 = \cos^2 x.$

P-9.69

Решить

$$\left(1-x^2\right)y'' - xy' + y = \frac{1}{x}\sqrt{1-x^2}, \quad 0 < x < 1,$$

с помощью замены $x = \cos t, 0 < t < \frac{\pi}{2}.$

P-9.70

Решить

$$x^4y'' + 2x^3y' - y = \frac{2e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$$

с помощью замены $x = -\frac{1}{t}.$

P-9.71

Решить

$$2xy'' + y' = 2(y + \operatorname{th}x)$$

с помощью замены $x = \frac{t^2}{4}, t > 0.$

P-9.72

Решить

$$y'' + y'\operatorname{tg}x = 4\left(y + \cos^2 x\right)\cos^2 x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

с помощью замены $t = \sin x.$ Приведением к виду $z'' + a(x)z = f(x)$ решить уравнения $(73-76)$:

P-9.73

$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 2x^{\frac{5}{2}}e^x$

P-9.74

$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 2.$

P-9.75

$\left(1+x^2\right)^2 y'' + 2x\left(1+x^2\right)y' + y = 1 + x^2.$

P-9.76

$y'' - \frac{6}{x}y' + \left(\frac{12}{x^2} + 1\right)y = 0.$

P-9.77

Пусть функция $p(x)$ определена и непрерывна при $x \geqslant 0$ и пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$ - решения уравнения $y'' + p(x)y = 0$, причем $\lim_{x\to+\infty} y_i(x) = 0$, производные $y_i'(x)$ ограничены при $x \geqslant 0, i = 1, 2$. Доказать, что $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы при $x \geqslant 0$.

P-9.78

Пусть $y_1(x), y_2(x)$ - два линейно независимые решения уравнения $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0$. Указать подстановку, приводящую к линейному уравнению порядка $n-2$.

P-9.79

Пусть решение $y(x)$ уравнения $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - n^2\right)y = 0, n > 0$, $x > 0$, положительно при малых $x > 0$ и $y(+0) = 0$, Доказать, что точка первого положительного максимума этого решения находится от нуля на расстоянии, которое не меньше чем n.

P-9.80

Пусть $a(x)$ - непрерывная функция при $x \geqslant 0$. Доказать, что если уравнение $y'' + a(x)y = 0$ имеет решение $y(x)$ такое, что $\lim_{x\to+\infty} y'(x) = +\infty$, то оно имеет также нетривиальное решение, стремящееся к нулю при $x \to +\infty$.

P-9.81

Пусть функции $a(x)$ и $b(x)$ непрерывны на всей оси, причем $a(x)$ - нечетная, а $b(x)$ - четная. Доказать, что решение уравнения $y''+ +a(x)y'+b(x)y = 0$, удовлетворяющее условию $y'(0) = 0$, есть четная функция.

P-9.82

Пусть функция $q(x)$ непрерывна на всей оси и периодична с периодом

P-9.1

Доказать, что если нетривиальное решение уравнения $y'' + q(x)y = 0$, удовлетворяет условиям $y(0) = y(1) = 0$, то $y(x+1) = Cy(x)$, $C = \text{const}$.

P-9.83

Найти два линейно независимые решения в виде степенного ряда уравнения $y'' + 4xy = 0$.

P-9.84

а) Найти решение уравнения $xy''-y'-4x^3y = 0$ в виде стегенного ряда при условиях $y(0) = 1, y''(0) = 0$. Определить радиус сходимости ряда.

б)Решить $y'' - \frac{y'}{x} - 4x^2y = 0$. Указание. Найти сумму ряда в п. а).

P-9.85

а) Найти решение уравнения $xy''-2y'+9x^5y = 0$ в виде степенного ряда при условиях $y(0) = 0, y'''(0) = 6$. Определить радиус сходимости ряда.

б)Решить $y'' - \frac{2}{x}y' + 9x^4y = 0$. Указание. Найти сумму ряда в п. а).

P-9.86

Проинтегрировать при $x > 0$ с помощью ряда по степеням x уравнение $4xy'' + 2y' + y = 0$
Указание. Для отыскания решения уравнения, линейно независимого в решением, представимым степенным рядом, сделать в уравнении замену $y = \sqrt{x} \cdot z$.

P-9.87

Найти при $0 < x < 1$ общее решение уравнения $2x(1-x)y'' + (1 - -x)y' + 3y = 0$ в виде ряда по степеням x. Указание. Воспользоваться Указанием к задаче 86.

P-9.88

а) Найти при $0 < x < \sqrt{2}$ решение уравнения

$$\left(2x + x^3\right) y'' - y' - 6xy = 0$$

в виде степенного ряда по x. Определить радиус сходимости ряда.
б)Найти общее решение заданного уравнения в виде ряда по степеням x.

14.3 Tasks for systems of equations

14.3.1 Problems about linear systems with constant coefficients

P-11.пр.1

Найти общее решение линейной системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - 2te^t, \\ \dot{y} = 5x - y - (2t+6)e^t. \end{cases}$$

Продифференцируем первое уравнение системы:

$$\ddot{x} = \dot{x} - 2\dot{y} - 2(t+1)e^t.$$

В полученное выражение подставим выражение $\dot{y}$ из второго уравнения системы:

$$\ddot{x} = \dot{x} - 2(t+1)e^t - 10x + 2y + 2(2t+6)e^t = \dot{x} - 10x + 2y + (2t+10)e^t.$$

Подставив сюда выражение $2y$ из первого уравнения системы, получаем уравнение для $x(t)$:

$$\ddot{x} + 9x = 10e^t.$$

Его решением является $x(t) = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t + e^t$, где C_1 и C_2 - произвольные постоянные. Подставив $x(t)$ в первое уравнение системы, находим $y(t) = \frac{1}{2}(C_1 - 3C_2)\cos 3t + \frac{1}{2}(3C_1 + C_2)\sin 3t - te^t$.
Таким образом, общее решение заданной системы уравнений имеет вид

$$x(t) = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t + e^t,$$

$$y(t) = \frac{1}{2}(C_1 - 3C_2)\cos 3t + \frac{1}{2}(3C_1 + C_2)\sin 3t - te^t.$$

Для решения линейных систем третьего порядка с постоянными коэффициентами удобным является метод, использующий нахождение собственных значений, собственных и присоединенных векторов матрицы системы.

P-11.пр.2

Найти общее решение линейной системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x - z, \\ \dot{y} = -2x + 3y - z, \\ \dot{z} = 4x + 5z \end{cases}$$

Для матрицы системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

из уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$, где E - единичная матрица третьего порядка, находим собственное значение $\lambda = 3$ кратности три. Из линейной алгебраической системы уравнений $(A - \lambda E)h = 0$, где вектор $h \neq 0$ имеет три компоненты, находим два линейно независимые собственные векторы

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Из системы уравнений $(A - \lambda E)h_3 = h_2$ находим присоединенный вектор h_3 к вектору h_2:

$$h_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, искомое общее решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right],$$

где C_1, C_2, C_3 - произвольные постоянные.

Линейные системы уравнений можно решать с помощью матричной экспоненты.

P-11.пр.3

С помощью матричной экспоненты решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -x + 3y. \end{cases}$$

Для матрицы системы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ находим собственное значение $\lambda = 2$ кратности два. Ему соответствуют собственный вектор $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и присоединенный вектор $h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. В базисе из векторов h_1, h_2 матрица A принимает нормальную жорданову форму $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Из определения матричной экспоненты находим, что

$$e^{tJ} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если через H обозначить матрицу, у которой первый столбец h_1 и второй столбец h_2, то

$$e^{tA} = H e^{tJ} H^{-1} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix}.$$

Общее решение заданной системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix},$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные. Линейные неоднородные системы уравнений можно решать методом вариации постоянных.

Р-11.пр.4

Методом вариации постоянных решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = x - y + \frac{1}{2\sin t}. \end{cases}$$

Линейную однородную систему $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = x - y, \end{cases}$ решаем методом исключения. Ее решение имеет вид

$$\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \\ y = \frac{1}{2}\left[(C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + C_2)\sin t\right], \end{cases}$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные. Решение заданной линейной неоднородной системы уравнений ищем в виде

$$\begin{cases} x = C_1(t) \cos t + C_2(t) \sin t, \\ y = \frac{1}{2}\left[(C_1(t) - C_2(t))\cos t + (C_1(t) + C_2(t))\sin t\right], \end{cases}$$

где $C_1(t)$ и $C_2(t)$ - некоторые непрерывно дифференцируемые функции, которые находятся подстановкой x и y в заданную систему уравнений. Подстановка x и y в заданную систему уравнений дает следующую линейную алгебраическую систему для $\dot{c}_1(t)$ и $\dot{c}_2(t)$:

$$\begin{cases} \dot{c}_1(t)\cos t + \dot{c}_2(t)\sin t = 0, \\ \dot{c}_1(t)\sin t - \dot{c}_2(t)\cos t = \frac{1}{\sin t}. \end{cases}$$

Отсюда находим $\dot{c}_1(t) = 1, \dot{c}_2(t) = -\operatorname{ctg} t$ и, значит, $C_1(t) = t + C_1$, $C_2(t) = -\ln|\sin t| + C_2$, где C_1 и C_2 - произвольные постоянные. Подставляя найденные значения $C_1(t)$ и $C_2(t)$, получим общее решение заданной системы уравнений

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + t\cos t - \sin t \ln|\sin t|,$$

$$y = \frac{1}{2}\left[(C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + C_2)\sin t + (t + \ln|\sin t|)\cos t + (t - \ln|\sin t|)\sin t\right].$$

Линейные системы уравнений можно также решать операционным методом, т. е. методом, использующим преобразование Лапласа.

Р-11.пр.5

Операционным методом решить задачу Коши при $t \geqslant 0$:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + 4e^{3t}, \\ \dot{y} = 4x - y - 8e^{3t}, x(0) = 1, \quad y(0) = 0. \end{cases}$$

Положим при $t < 0$ решение $x(t), \quad y(t)$ системы и свободные члены системы тождественно равными нулю. Тогда так продолженные на всю числовую ось $t \in (-\infty, +\infty)$ решение и свободные члены системы являются оригиналами. Пусть $x(t) \risingdotseq X(p), \quad y(t) \risingdotseq Y(p)$. Тогда $\dot{x}(t) \risingdotseq pX(p) - 1$, $\dot{y}(t) \risingdotseq pY(p)$.

Переходя в заданной системе уравнений к преобразованиям Лапласа, т. е. умножая каждое уравнение системы на e^{-pt} и интегрируя его по t от нуля до бесконечности, получаем линейную алгебраическую систему уравнений для нахождения $X(p)$ и $Y(p)$

$$\begin{cases} (p-3)X(p) + Y(p) = 1 + \frac{4}{p-3} \\ -4X(p) + (p+1)Y(p) = -\frac{8}{p-3} \end{cases}$$

Если считать комплексный параметр p таким, что $\operatorname{Re} p > 3$, то из полученной системы уравнений находим

$$X(p) = \frac{(p+1)(p-3) + 4(p+3)}{(p-3)(p-1)^2}, \quad y(p) = \frac{4(7-p)}{(p-3)(p-1)^2}.$$

Разлагая выражения для $X(p)$ и $Y(p)$ на простые дроби, имеем

$$X(p) = \frac{6}{p-3} - \frac{5}{p-1} - \frac{6}{(p-1)^2}, \quad y(p) = \frac{4}{p-3} - \frac{4}{p-1} - \frac{12}{(p-1)^2}.$$

Переходя к оригиналам, получаем искомое решение

$$x(t) = 6e^{3t} - (5 + 6t)e^t, \quad y(t) = 4e^{3t} - 4(1 + 3t)e^t.$$

Решить линейные однородные системы второго порядка (1-14):

P-11.1

$$\begin{cases} \dot{x} = -5x - 6y, \\ \dot{y} = 8x + 9y. \end{cases}$$

P-11.2

$$\begin{cases} \dot{x} = 10x - 6y, \\ \dot{y} = 18x - 11y. \end{cases}$$

P-11.3

$$\begin{cases} \dot{x} = -6x + 8y \\ \dot{y} = -4x + 6y \end{cases}$$

P-11.4

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - 3y, \\ \dot{y} = 6x + 7y \end{cases}$$

P-11.5

$$\begin{cases} \dot{x} = -5x - 4y, \\ \dot{y} = 10x + 7y. \end{cases}$$

P-11.6

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x - 6y, \\ \dot{y} = 3x - y \end{cases}$$

P-11.7

$$\begin{cases} \dot{x} = -12x - 8y \\ \dot{y} = 20x + 12y \end{cases}$$

P-11.8

$$\begin{cases} \dot{x} = -5x - 10y, \\ \dot{y} = 5x + 5y. \end{cases}$$

P-11.9

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - 4y, \\ \dot{y} = 2x + 2y. \end{cases}$$

P-11.10

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x + 4y, \\ \dot{y} = -9x - 7y. \end{cases}$$

P-11.11

$$\begin{cases} \dot{x} = 6x + y, \\ \dot{y} = -16x - 2y. \end{cases}$$

P-11.12

$$\begin{cases} \dot{x} = -5x + 4y, \\ \dot{y} = -x - y. \end{cases}$$

P-11.13

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y, \\ \dot{y} = -4x + 2y. \end{cases}$$

P-11.14

$$\begin{cases} \dot{x} = -5x + 4y, \\ \dot{y} = -9x + 7y \end{cases}$$

Решить линейные однородные системы уравнений третьего порядка (15116):

P-11.15

$$\begin{cases} \dot{x} = -5x - 2y - 2z, \\ \dot{y} = 10x + 4y + 2z, \\ \dot{z} = 2x + y + 3z. \end{cases}$$

P-11.16

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y - 4z, \\ \dot{y} = -8x - 3y + 2z, \\ \dot{z} = -2x - 4y + 6z. \end{cases}$$

P-11.17

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 6y - 4z, \\ \dot{y} = 9x - 5y + 6z, \\ \dot{z} = 15x - 18y + 15z. \end{cases}$$

P-11.18

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 2y - z, \\ \dot{y} = -6x + 2y - 2z, \\ \dot{z} = -6x - 2y - z, \end{cases}$$

P-11.19

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x + y - z \\ \dot{y} = x + 3y + z \\ \dot{z} = 7x + 3y + z \end{cases}$$

P-11.20

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y - z, \\ \dot{y} = -2x + 2y + z, \\ \dot{z} = 4x + 2y + 3z. \end{cases}$$

P-11.33

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - 2z, \\ \dot{y} = -x + z, \\ \dot{z} = 2x + 2y - z. \end{cases}$$

P-11.34

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y, \\ \dot{y} = x + 2y + z, \\ \dot{z} = 3y + 2z. \end{cases}$$

P-11.35

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 3y + z, \\ \dot{y} = 3x - 2y + 2z, \\ \dot{z} = -x + 2y. \end{cases}$$

P-11.36

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y - z, \\ \dot{y} = -2x + y - 2z, \\ \dot{z} = x + 2y + z \end{cases}$$

P-11.37

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = x + z, \\ \dot{z} = x + z. \end{cases}$$

P-11.38

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y - z, \\ \dot{y} = 3x - 7y + z, \\ \dot{z} = 5x - 5y - 3z. \end{cases}$$

P-11.39

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 6y + 3z \\ \dot{y} = -8y + 6z \\ \dot{z} = 3x - 12y + 7z \end{cases}$$

P-11.40

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - 3y + z \\ \dot{y} = x - 8y + 3z \\ \dot{z} = 3x - 7y \end{cases}$$

P-11.47

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 8y + z, \\ \dot{y} = x - 2y + z, \\ \dot{z} = 3x - 12y - 5z. \end{cases}$$

P-11.48

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2z, \\ \dot{y} = x + 2y + z, \\ \dot{z} = -x - y. \end{cases}$$

P-11.49

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 4y, \\ \dot{y} = x - y + z \\ \dot{z} = 3y - z \end{cases}$$

P-11.50

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y + 2z, \\ \dot{y} = 2x + z, \\ \dot{z} = -2x + 2y - 2z. \end{cases}$$

P-11.51

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z, \\ \dot{y} = x + y, \\ \dot{z} = 4x + y + 2z. \end{cases}$$

P-11.52

$$\begin{cases} \dot{x} = y - z, \\ \dot{y} = -y + z, \\ \dot{z} = x - z \end{cases}$$

P-11.53

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + z, \\ \dot{y} = -3y + 2z, \\ \dot{z} = 3x - 2y - 3z \end{cases}$$

P-11.54

$$\begin{cases} \dot{x} = -5x - 4y + 9z, \\ \dot{y} = 10x + 9y - 10z, \\ \dot{z} = x + y + 3z. \end{cases}$$

P-11.55

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2z, \\ \dot{y} = 2x - y + 2z, \\ \dot{z} = x - y + z \end{cases}$$

P-11.56

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 7y - z, \\ \dot{y} = 2x - 3y - z, \\ \dot{z} = -2x + 2y + 3z. \end{cases}$$

P-11.61

$$\begin{cases} \dot{x} = 7x - 10y - 4z \\ \dot{y} = 4x - 7y - 4z \\ \dot{z} = -6x + 7y + z \end{cases}$$

P-11.62

$$\begin{cases} \dot{x} = 7x + 8y - 2z \\ \dot{y} = -5x - 7y + z \\ \dot{z} = 6x + 8y - z \end{cases}$$

P-11.63

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y \\ \dot{y} = x - 2z \\ \dot{z} = -y + 2z \end{cases}$$

P-11.64

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y \\ \dot{y} = 3x - z \\ \dot{z} = 4y - 2z \end{cases}$$

P-11.65

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + y \\ \dot{y} = 4x + y \\ \dot{z} = 4x + z \end{cases}$$

P-11.66

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 4x + 2y + 4z \\ \dot{z} = -2x - y - z \end{cases}$$

P-11.81

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + 3z, \\ \dot{y} = -6x + y - 5z, \\ \dot{z} = -3x + 2y - 4z. \end{cases}$$

P-11.82

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y + z, \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = -2x - 3y - 4z. \end{cases}$$

P-11.83

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y - z, \\ \dot{y} = -4x + 2y - z, \\ \dot{z} = 16x + 4y + 6z \end{cases}$$

P-11.84

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y - z, \\ \dot{y} = 4x + 2y - 2z, \\ \dot{z} = 6x + 7y - 6z. \end{cases}$$

P-11.85

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y - 4z, \\ \dot{y} = x + 4y - z, \\ \dot{z} = 3x + 6y - 4z. \end{cases}$$

P-11.86

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 5y - 2z, \\ \dot{y} = -x + 5y - 2z, \\ \dot{z} = -2x + 15y - 6z. \end{cases}$$

P-11.99

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + 2y - z, \\ \dot{y} = -2x + y + z, \\ \dot{z} = 2x + 3y + z. \end{cases}$$

P-11.100

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - 2z, \\ \dot{y} = 2x + y - 3z, \\ \dot{z} = 2x - y + z \end{cases}$$

P-11.101

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y + 2z, \\ \dot{y} = -3x + 2y - 3z, \\ \dot{z} = -6x + 8y - 8z. \end{cases}$$

P-11.102

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + 2z, \\ \dot{y} = -4x - 2y - 3z, \\ \dot{z} = -3x + 3y - 6z. \end{cases}$$

P-11.103

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y - z, \\ \dot{y} = -6x - 6y + z, \\ \dot{z} = -4x - 2y - 2z. \end{cases}$$

P-11.104

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x - y - z, \\ \dot{y} = 5x + 3y + z, \\ \dot{z} = 16x + 4y + 5z. \end{cases}$$

P-11.105

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 5y + z, \\ \dot{y} = -x + 3y - z, \\ \dot{z} = 4x + 5y + 2z. \end{cases}$$

P-11.106

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x - 3y - 2z, \\ \dot{y} = 6x + 6y + 2z, \\ \dot{z} = 7x + 4y + 5z. \end{cases}$$

P-11.113

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y - z, \\ \dot{y} = 8x + 4y + 4z, \\ \dot{z} = 6x - 6y + 2z. \end{cases}$$

P-11.114

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + z, \\ \dot{y} = 3x - 6y + 3z, \\ \dot{z} = 4x - 16y + 5z. \end{cases}$$

P-11.115

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 4y - 4z, \\ \dot{y} = 4x - 6y + 12z, \\ \dot{z} = -8x - 8y + 6z. \end{cases}$$

P-11.116

$$\begin{cases} \dot{x} = 6x - 3y + 7z, \\ \dot{y} = -3x - 2y + z, \\ \dot{z} = -7x - y - 4z. \end{cases}$$

14.3.2 Problems about matrix exponent

С помощью матричной экспоненты решить линейные однородные системы уравнений (117-136):

P-11.117

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$$

P-11.118

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$$

P-11.119

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + y \\ \dot{y} = x - 3y \end{cases}$$

P-11.120

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = 2x - 2y \end{cases}$$

P-11.121

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = -4x + 2y \end{cases}$$

P-11.122

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = -x + 5y \end{cases}$$

P-11.123

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$$

P-11.124

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = x + 4y \end{cases}$$

P-11.125

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = -x - y \end{cases}$$

P-11.126

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$$

P-11.129

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = -5x + 3y \end{cases}$$

P-11.130

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$$

P-11.131

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y, \\ \dot{y} = x - 3y \end{cases}$$

P-11.132

$$\begin{cases} \dot{x} = z, \\ \dot{y} = y, \\ \dot{z} = 0. \end{cases}$$

P-11.133

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 2x + 2y, \\ \dot{z} = 3z \end{cases}$$

P-11.134

$$\begin{cases} \dot{x} = z + y, \\ \dot{y} = x - y, \\ \dot{z} = -x - z. \end{cases}$$

P-11.135

$$\begin{cases} \dot{x} = z \\ \dot{y} = x + y \\ \dot{z} = z \end{cases}$$

P-11.136

$$\begin{cases} \dot{x} = z, \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = 0. \end{cases}$$

14.3.3 Problems about inhomogeneous systems of equations

Решить линейные неоднородные системы уравнений (137-168):

P-11.137

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + 37\sin t \\ \dot{y} = -4x - 5y \end{cases}$$

P-11.138

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 5y - 2e^t \\ \dot{y} = x - y - e^t \end{cases}$$

P-11.139

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + 36t \\ \dot{y} = -4x - 5y \end{cases}$$

P-11.140

$$\begin{cases} \dot{x} = 11x - 8y + 4e^{7t} \\ \dot{y} = 20x - 13y \end{cases}$$

P-11.141

$$\begin{cases} \dot{x} = 6x - 3y + 30e^t \\ \dot{y} = 15x - 6y + 45t \end{cases}$$

P-11.142

$$\begin{cases} \dot{x} = -5x - y \\ \dot{y} = x - 3y - 9e^{2t} \end{cases}$$

P-11.143

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x + 4y + 7e^{2t} \\ \dot{y} = -9x - 7y + t^2 + 1 \end{cases}$$

P-11.144

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y - e^{-t} \\ \dot{y} = -2x - 2y - e^{-t} \end{cases}$$

P-11.145

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x + e^t + e^{-t} \end{cases}$$

P-11.146

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x - 4y + 2e^{2t} \\ \dot{y} = 6x + 6y + 2t \end{cases}$$

P-11.147

$$\begin{cases} \dot{x} = -6x - 10y + 4\sin 2t \\ \dot{y} = 4x + 6y \end{cases}$$

P-11.148

$$\begin{cases} \dot{x} = -7x + 2y + e^{-t} \\ \dot{y} = -15x + 4y \end{cases}$$

P-11.149

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x - 3y + t + 1 \\ \dot{y} = 6x + 6y + 2t \end{cases}$$

P-11.150

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + y - e^{-t} \\ \dot{y} = -4x + y \end{cases}$$

P-11.151

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y - 2e^{t} \\ \dot{y} = -3x - 2y - 2e^{t} \end{cases}$$

P-11.152

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y \\ \dot{y} = x + 2y + 2e^{3t} \end{cases}$$

P-11.153

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \cos 2t - 2\sin 2t, \\ \dot{y} = -x + 2y + 2\sin 2t + 3\cos 2t. \end{cases}$$

P-11.154

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - 2te^{t} \\ \dot{y} = 5x - y - (2t + 6)e^{t}. \end{cases}$$

P-11.155

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 3y - 2x - 2(t + 1)e^{t}. \end{cases}$$

P-11.156

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x - y + 5\sin t, \\ \dot{y} = 4x + y + 3\sin t - \cos t. \end{cases}$$

P-11.157

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 5, \\ \dot{y} = x + 2y + z, \\ \dot{z} = -2y + 2z \end{cases}$$

P-11.158

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + 3y - 3z, \\ \dot{y} = -3x - 2y + 3z, \\ \dot{z} = 3x + 3y - 2z + 2e^{-t} \end{cases}$$

P-11.161

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z + \cos t, \\ \dot{y} = 5x - 4y + 3z + \sin t, \\ \dot{z} = 4x - 4y + 3z + 2\sin t - 2\cos t. \end{cases}$$

P-11.162

$$\begin{cases} \dot{x} = x + z - 2\operatorname{ch} t + 3\operatorname{sh} t, \\ \dot{y} = -2x + 2y + 2z + 4\operatorname{sh} t, \\ \dot{z} = 3x - 2y + z - \operatorname{sh} t. \end{cases}$$

P-11.163

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - 3z + 2e^{2t} \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z - 2e^{2t} \\ \dot{z} = x + y - 2z \end{cases}$$

P-11.164

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z - 2e^{t} \\ \dot{y} = -x + y + z + 2e^{t} \\ \dot{z} = x - z - e^{t} \end{cases}$$

P-11.165

$$\begin{cases} \dot{x} = -9x + 3y + 7z + 2 \\ \dot{y} = x + y - z + 4 \\ \dot{z} = -11x + 3y + 9z \end{cases}$$

P-11.166

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z - 2e^{-t} \\ \dot{y} = x + 2y - z - e^{-t} \\ \dot{z} = x - y + 2z - 3e^{-t} \end{cases}$$

P-11.167

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y + t^2, \\ \dot{y} = -y - z + 2t, \\ \dot{z} = -z + t. \end{cases}$$

P-11.168

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y + t \\ \dot{y} = x - 2z - 3t^2 \\ \dot{z} = -y + 2z + 3t - 2 \end{cases}$$

14.3.4 Problems about the system of equations by the method of variation of constants

Методом вариации постоянных решить линейные неоднородные системы уравнений (169 – 186):

P-11.169

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + 4y + \frac{1}{1+e^t}, \\ \dot{y} = -2x + 4y - \frac{1}{1+e^t}. \end{cases}$$

P-11.170

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y + \frac{e^t}{1+e^t}, \\ \dot{y} = 2x + 2y + \frac{e^t}{1+e^t}. \end{cases}$$

P-11.171

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 8y + \operatorname{tg} 4t \\ \dot{y} = 4x - 4y \end{cases}$$

P-11.172

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 6y + \frac{1}{\cos^3 3t} \\ \dot{y} = 3x - 3y \end{cases}$$

P-11.173

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y + \frac{e^t}{\sin 2t} \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$$

P-11.174

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + y, \\ \dot{y} = -4x + y + \frac{1}{te^t} \end{cases}$$

P-11.175

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = -4x - y + \frac{e^t}{2\sqrt{t}} \end{cases}$$

P-11.176

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - \ln t \\ \dot{y} = -4x - 2y + \ln t \end{cases}$$

P-11.177

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 4y + \frac{e^{3t}}{1+e^{2t}} \\ \dot{y} = 2x + 5y \end{cases}$$

P-11.178

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x - 2y + \frac{e^{2t}}{1+e^t} \\ \dot{y} = 10x + 6y \end{cases}$$

P-11.179

$$\begin{cases} \dot{x} = -6x + 8y, \\ \dot{y} = -4x + 6y - \frac{2}{\operatorname{ch} 2t}. \end{cases}$$

P-11.180

$$\begin{cases} \dot{x} = -7x + 2y, \\ \dot{y} = -15x + 4y + \frac{e^{-2t}}{1+e^{2t}}. \end{cases}$$

P-11.181

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x - 6y + \frac{3e^{2t}}{\cos^3 3t} \\ \dot{y} = 3x - y \end{cases}$$

P-11.182

$$\begin{cases} \dot{x} = 10x - 6y \\ \dot{y} = 18x - 11y - \frac{3e^t}{\operatorname{ch} 3t} \end{cases}$$

P-11.183

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y - \frac{1}{1+e^{-t}} \\ \dot{y} = -3x - 2y - \frac{1}{1+e^{-t}} \end{cases}$$

P-11.184

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y + t\ln t \\ \dot{y} = -4x + 2y + 2t\ln t \end{cases}$$

P-11.185

$$\begin{cases} \dot{x} = -8x - 4y, \\ \dot{y} = 20x + 8y - 4\operatorname{ctg} 4t. \end{cases}$$

P-11.186

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 2y, \\ \dot{y} = 8x - 4y + \sqrt{t}. \end{cases}$$

14.3.5 Problems about the system of equations by the operator method

(!! потренирую потом)
Решить операционным методом задачу Коши при $t \geqslant 0(187 - 197)$:

P-11.187

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 3x - 2y, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$$

P-11.188

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -2x - y, \\ x(0) = 1, \quad y(0) = -1. \end{cases}$$

P-11.189

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + e^{2t}, \\ \dot{y} = -2x + 4y + e^{2t}, \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 2. \end{cases}$$

P-11.190

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + 2e^{-t}, \\ \dot{y} = 3x + 4y + e^{-t}, \\ x(0) = y(0) = -1. \end{cases}$$

P-11.191

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y + e^{-t}, \\ \dot{y} = x - 2y + e^{-t}, \end{cases}$$

P-11.192

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y + e^{t}, \\ \dot{y} = x + 2y + 3e^{t}, \end{cases} \quad x(0) = -1, \quad y(0) = 1. \quad x(0) = y(0) = 1.$$

P-11.193

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y + t, \\ \dot{y} = x - y + 2, \\ x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$$

P-11.194

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + 5y + 4, \\ \dot{y} = -4x - 4y + 4t, \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 3. \end{cases}$$

P-11.195

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y + 3t + 6, \\ \dot{y} = -10x - y + 6t + 3, \\ x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$$

P-11.196

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y + e^{2t}, \\ \dot{y} = 2x + 2y + 2e^{2t}, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$$

P-11.197

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y + e^{t}, \\ \dot{y} = -4x - 2y + te^{t}, \quad x(0) = y(0) = 0. \\ x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$$

14.3.6 Problems about the system of diffusers by an arbitrary method

Решить каким-либо методом задачу Коши (198-224):

P-11.198

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y + e^{t}, \\ \dot{y} = -4x - 2y + te^{t}, \\ x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$$

P-11.199

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + \frac{1}{2}y, \\ \dot{y} = -18x - 4y + 18te^{2t}, \\ x(0) = \frac{1}{3}, \quad y(0) = 2. \end{cases}$$

P-11.200

$$\begin{cases} \dot{x} = 7x - 2y + 8te^{-t}, \\ \dot{y} = 8x - y, \end{cases}$$

P-11.201

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x + 3y, \\ \dot{y} = -3x - y + 9te^{5t} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = \frac{1}{2}. \quad x(0) = \frac{1}{3}, \quad y(0) = 0. \end{cases}$$

P-11.202

$$\begin{cases} \dot{x} = 11x - 2y + 12te^{-t}, \\ \dot{y} = 18x - y, \\ x(0) = -\frac{2}{3}, \quad y(0) = 0. \end{cases}$$

P-11.203

$$\begin{cases} \dot{x} = -5x - 2y + 24e^t, \\ \dot{y} = -3x - 4y, \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 2. \end{cases}$$

P-11.206

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y, \\ \dot{y} = x + 2y + 2e^{3t}, \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 2. \end{cases}$$

P-11.207

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + 37\sin t \\ \dot{y} = -4x - 5y \\ x(0) = 0, \quad y(0) = -1 \end{cases}$$

P-11.208

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + (1 - 4t)e^{-t}, \\ \dot{y} = -2x - 2y + 2te^{-t}, \\ x(0) = y(0) = -1. \end{cases}$$

P-11.209

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 5y - 2e^t \\ \dot{y} = x - y - e^t \\ x(0) = 2, \quad y(0) = 1 \end{cases}$$

P-11.210

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - 2z, \\ \dot{y} = x - y - z, \\ \dot{z} = -x - y - z, \\ x(0) = 3, \quad y(0) = 0, z(0) = 1. \end{cases}$$

P-11.211

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + z, \\ \dot{y} = y - x + z, \\ \dot{z} = 3z - x - y, \\ x(0) = 3, \quad y(0) = 0, z(0) = 1. \end{cases}$$

P-11.212

$$\begin{cases} \dot{x} = y - z, \\ \dot{y} = -y + z, \\ \dot{z} = x - z, \\ x(0) = y(0) = 0, z(0) = 1. \end{cases}$$

P-11.213

$$\begin{cases} \dot{x} = x - z, \\ \dot{y} = y + z, \\ \dot{z} = -x - y - z, \\ x(0) = y(0) = 1, z(0) = -1. \end{cases}$$

P-11.214

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = x + z, \\ \dot{z} = x + z, \\ x(0) = 0, \quad y(0) = z(0) = 1. \end{cases}$$

P-11.215

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y + z, \\ \dot{y} = -y + z, \\ \dot{z} = x - y - z, \\ x(0) = y(0) = 0, z(0) = 1. \end{cases}$$

P-11.222

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + 2z, \\ \dot{y} = x + 2z, \\ \dot{z} = -2x + y - z + 1, \\ x)0) = y)0) = z)0) = 0. \end{cases}$$

P-11.??

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z + 1, \\ \dot{y} = -x + y + z, \\ \dot{z} = x - z + 1, \\ x(0) = z(0) = 1, \quad y(0) = 0. \end{cases}$$

P-11.225

Найти все решения системы, стремящиеся к нулю при $t \to -\infty$:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y - 3z \\ \dot{y} = -7x - 2y + 9z \\ \dot{z} = -2x - y + 4z \end{cases}$$

P-11.226

Найти все решения системы, ограниченные при $t \to +\infty$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \\ \dot{x}_2 = -4x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 \\ \dot{x}_3 = -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \\ \dot{x}_4 = -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \end{cases}$$

P-11.227

Показать, что решение системы уравнений $\dot{x}_1 = -a^2 x_2, \dot{x}_2 = x_1$ при каждом из граничных условий: 1) $x_1(0) = 0, x_1(T) = b, 2)\, x_1(0) = \ = 0, x_2(T) = b, 3)\, x_2(0) = 0, x_1(T) = b, 4)\, x_2(0) = 0, x_2(T) = b$ В зависимости от выбора параметров a, b и $T > 0$ либо существует и единственно, либо существует и неединственно, либо не существует.

P-11.228

Найти решение системы

$$\begin{cases} \ddot{x} - 8x + \sqrt{6}\dot{y} = 0, \\ \ddot{y} - \sqrt{6}\dot{x} + 2y = 0, \end{cases}$$

удовл. н. у. $x(0) = 1, \quad y(0) = \dot{y}(0) = \dot{x}(0) = 0.$

P-11.229

Найти решение системы

$$\begin{cases} \ddot{x} - \dot{y} + \dot{z} - 4x - 2y - 2z = \sin 2t, \\ 2\dot{x} - \ddot{y} + \ddot{z} + 3y - 4z = 0, \\ \dot{x} + \ddot{z} - 2x - y - 4z = 0, \end{cases}$$

удовл. н. у. $x(0) = \dot{x}(0) = y(0) = \dot{y}(0) = z(0) = \dot{z}(0) = 0$

P-11.230

Пусть $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$. Доказать, что $e^{tA} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos\beta t & \sin\beta t \\ -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}$.

P-11.231

Пусть квадратная матрица второго порядка A имеет собственные значения λ_1, λ_2 и $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Доказать, что тогда

$$e^{tA} = e^{\lambda_1 t} \cdot E + \frac{e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} (A - \lambda_1 E),$$

где E - единичная матрица второго порядка.

P-11.232

Пусть квадратная порядка n матрица A имеет собственное значение λ_0 кратности n. Доказать, что тогда

$$e^{tA} = e^{\lambda_0 t} \left[E + \frac{t}{1!} (A - \lambda_0 E) + \frac{t^2}{2!} (A - \lambda_0 E)^2 + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} (A - \lambda_0 E)^{n-1} \right],$$

где E - единичная матрица порядка n.

P-11.233

Пусть λ - собственное значение квадратной матрицы A и пусть h - соответствующий ему собственный вектор A. Доказать, что тогда e^{λ} - собственное значение матрицы e^A, а h - соответствующий ему собственный вектор e^A.

P-11.234

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ - собственные значения квадратной матрицы A (с учетом их кратности). Доказать, что определитель $\left|e^{tA}\right|$ матрицы e^{tA} удовлетворяет равенству $\left|e^{tA}\right| = e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)t}$.

P-11.235

Доказать, что матричные ряды для $\sin A$ и $\cos A$

$$\sin A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1}, \quad \cos A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} A^{2k}$$

сходятся для любой квадратной матрицы A.

14.3.7 Problems about linear systems of equations with variable coefficients

стр 150

P-12.пр.1

По заданной фундаментальной матрице $\Phi(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$ составить линейную однородную систему.

Неизвестная матрица $A(x)$ находится из условия, что $\Phi(x)$ - решение матричного уравнения $Y'(x) = A(x)Y(x)$. Отсюда $A(x) = \Phi'(x) \cdot \Phi^{-1}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Искомая система имеет вид

$$y_1' = y_2, y_2' = -y_1.$$

Формула Лиувилля-Остроградского позволяет по заданному решению линейной однородной системы найти общее решение этой системы.

P-12.пр.2

Известно, что вектоР-12.функция $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ - решение системы

Пусть решением системы является вектоР-12.функция с компонентами $y_1 = \varphi(x), y_2 = \psi(x)$, причем $\varphi(0) = 1, \psi(0) = 0$. По формуле ЛиувиллеОстроградского имеем:

$$\begin{vmatrix} \varphi(x) & x \\ \psi(x) & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} e^{\int\limits_0^x \frac{2\zeta d\zeta}{1+\zeta^2}} = 1 + x^2.$$

Отсюда $\varphi(x) - x\psi(x) = 1 + x^2$. Подставляя выражение для $\varphi(x)$ во второе уравнение системы, получаем задачу Коши для $\psi(x)$

$$\psi'(x) = -2, \psi(0) = 0.$$

Следовательно, $\psi(x) = -2x, \varphi(x) = 1 - x^2$. Тогда общее решение заданной системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 - x^2 \\ -2x \end{pmatrix}.$$

P-12.пр.3

Может ли система $\begin{cases} y_1' = -x^3 y_1 + y_2 \sin x, \\ y_2' = x^4 y_1 + e^x y_2 \end{cases}$ иметь два ограниченных на $(-\infty, +\infty)$ линейно независимые решения?

Ответ на поставленный вопрос отрицательный, поскольку допустив противное, получаем, что определитель Вронского этих решений является ограниченной на $(-\infty, +\infty)$ функцией и отличен от нуля. С другой стороны первообразная следа матрицы системы

$$\int\limits_0^x \left(-x^3 + e^x\right) dx = -\frac{x^4}{4} + e^x - 1$$

является неограниченной на $(-\infty, +\infty)$ функцией. Это противоречит формуле Лиувилля-Остроградского.

P-12.1

Пусть задана линейная система $y'(x) = \varphi(x)Ay(x)$, где $\varphi(x)$ - непрерывная на промежутке I функция и A - числовая квадратная матрица порядка n. Доказать, что замена $t = \int\limits_{x_0}^x \varphi(\zeta)d\zeta$ дает линейную систему $y'(t) = Ay(t)$.

P-12.2

Пусть $\Phi(x)$ - фундаментальная матрица линейной системы $z'(x) = B(x)z(x)$, где $B(x)$ - квадратная порядка n и непрерывная на промежутке I матрица. Показать, что замена $y(x) = \Phi(x)z(x)$ в линейной системе $y'(x) = A(x)y(x)$ с квадратной порядка n и непрерывной на I матрицей $A(x)$ дает линейную систему вида $z'(x) = \Phi^{-1}(x)[A(x) - B(x)]\Phi(x)z(x)$. В задачах (3-9) исследовать линейную зависимость вектоР-12.функций на $(-\infty, +\infty)$:

P-12.3

$\begin{pmatrix} \operatorname{sh} x \\ \operatorname{ch} x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \operatorname{ch} x \\ \operatorname{sh} x \end{pmatrix}.$

P-12.4

$\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2x \\ 2x \end{pmatrix}$

P-12.5

$e^x \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}, e^x \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}.$

P-12.6

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin^2 x \\ \sin 2x \\ 2\cos 2x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos^2 x \\ -\sin 2x \\ -2\cos 2x \end{pmatrix}.$$

P-12.7

$$\begin{pmatrix} e^x \\ e^x \\ e^x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \operatorname{sh} x \\ \operatorname{ch} x \\ \operatorname{sh} x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \operatorname{ch} x \\ \operatorname{sh} x \\ \operatorname{ch} x \end{pmatrix}.$$

P-12.8

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2 \\ x^2 \\ x^2 \end{pmatrix}$. 9. $\begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^2|x| \\ x|x| \\ |x| \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ В задачах (10-18) по заданной фундаментальной матрице $\Phi(x)$ найти матрицу $A(x)$ линейной однородной системы $y'(x) = A(x)y(x)$.

P-12.10

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 1 & -x \\ x & 1 \end{pmatrix}.$$

P-12.11

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 1 & x^2 \\ -x^2 & 1 \end{pmatrix}.$$

P-12.12

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ xe^x & e^x \end{pmatrix}.$$

P-12.13

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ xe^x & e^{2x} \end{pmatrix}.$$

P-12.14

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} e^x \cos x & -\sin x \\ e^x \sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$

P-12.15

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{pmatrix}.$$

P-12.16

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{pmatrix}, x > 0$$

P-12.17

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} x & 1 \\ x^2 & 2x \end{pmatrix}, x > 0.$$

P-12.18

$\Phi(x) = \begin{pmatrix} e^{-x}+x & 1 \\ xe^{x} & e^{x} \end{pmatrix}$ В задачах (19-23) по заданному решению $\bar{y}(x)$ линейной однородной системы найти фундаментальную матрицу $\Phi(x)$ этой системы:

P-12.19

$\bar{y}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{cases} y_1' = \frac{1}{1+x^4}\left(2x^3y_1 - 2xy_2\right) \\ y_2' = \frac{1}{1+x^4}\left(2xy_1 + 2x^3y_2\right) \end{cases}$

P-12.20

$\bar{y}(x) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{cases} y_1' = \frac{1}{1+x^2}\left(xy_1 + y_2\right) \\ y_2' = \frac{1}{1+x^2}\left(-y_1 + xy_2\right). \end{cases}$

P-12.22

$\bar{y}(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ e^{-x}(1-x) \end{pmatrix}, \begin{cases} y_1' = (1-2x)y_1 - 2y_2, \\ y_2' = \left(2x^2 - 2x - 1\right)y_1 + (2x-1)y_2. \end{cases}$

P-12.23

$\bar{y}(x) = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}, \begin{cases} y_1' = y_1\cos^2 x + (\sin x\cos x - 1)y_2, \\ y_2' = (\sin x\cos x + 1)y_1 + y_2\sin^2 x \end{cases}$

P-12.24

Пусть квадратная порядка n матрица $A(x)$ непрерывна на промежутке I и при всех $x \in I$ перестановочна со своей первообразной, т. е. $A(x)\cdot\int\limits_{x_0}^{x} A(\zeta)d\zeta = \int\limits_{x_0}^{x} A(\zeta)d\zeta\cdot A(x)$, где $x_0 \in I$. Доказать, что тогда фундаментальной матрицей $\Phi(x)$ линейной однородной системы $y'(x) = A(x)y(x)$ является матрица

$$\Phi(x) = e^{\int\limits_{x}^{x} A(\zeta)d\zeta}$$

P-12.25

Пусть квадратная порядка n и непрерывная на промежутке I матрица $A(x) = HJ(x)H^{-1}$, где $J(x)$ - жорданова и непрерывна на I матрица, а H - числовая невырожденная порядка n матрица. Доказать, что матрица $A(x)$ перестановочна со своей первообразной на промежутке I и что на I фундаментальной матрицей системы $y'(x) = A(x)y(x)$ является матрица

$$\Phi(x) = He^{\int\limits_{x_0}^{x} J(\zeta)d\zeta}H^{-1}, x_0 \in I.$$

Используя результат предыдущей задачи, в задачах (26-37) найти фундаментальные матрицы $\Phi(x)$ линейных однородных систем.

P-12.26

$\begin{cases} y_1' = (2x-1)y_1 + y_2, \\ y_2' = -y_1 + (2x+1)y_2. \end{cases}$

P-12.27

$\begin{cases} y_1' = -(1+2x)y_1 + y_2, \\ y_2' = -y_1 + (1-2x)y_2. \end{cases}$

P-12.28

$\begin{cases} y_1' = (2x+1)y_1 + y_2, \\ y_2' = -y_1 + (2x-1)y_2. \end{cases}$

P-12.29

$$\begin{cases} y_1' = (\cos x - 2)y_1 + 4y_2 \\ y_2' = (-3y_1 + 5y_2)\cos x \end{cases}$$

P-12.30

$$\begin{cases} y_1' = -(2 + \sin x)y_1 + 4y_2 \\ y_2' = -y_1 - y_2 \sin x \end{cases}$$

P-12.31

$$\begin{cases} y_1' = (2 + \cos x)y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 + (\cos x - 1)y_2. \end{cases}$$

P-12.34

$$\begin{cases} y_1' = y_1 \cos x - y_2 \sin x, \\ y_2' = -y_1 \sin x + y_2 \cos x. \end{cases}$$

P-12.35

$$\begin{cases} y_1' = y_1 \sin x + y_2 \cos x, \\ y_2' = y_1 \cos x + y_2 \sin x. \end{cases}$$

P-12.36

$$\begin{cases} y_1' = -2xy_2, \\ y_2' = -2xy_1. \end{cases}$$

P-12.37

$$\begin{cases} y_1' = 3x^2 y_2 \\ y_2' = 3x^2 y_1 \end{cases}$$

P-12.38

Может ли система $y_1' = \frac{y_1}{1+x^2} + (1+x)^3 y_2, y_2' = y_1 \ln|x| - 4y_2$ иметь два ограниченных на $(-\infty, 0)$ линейно независимые решения?

P-12.39

Может ли система $y_1' = \frac{y_1}{1-x^2} - xy_2, y_2' = y_1 \operatorname{tg} x + 3y_2$ иметь два ограниченных на $(-1, 1)$ линейно независимые решения?

P-12.40

Пусть $\Phi(x)$ - фундаментальная матрица линейной системы $y'(x) = A(x)y(x)$, где $A(x)$ - квадратная порядка n матрица с непрерывными на $(-\infty, +\infty)$ элементами $a_{ij}(x)$, причем $a_{ij}(x + w) = a_{ij}(x)$,

$$\int\limits_0^w a_{ij}(x)dx = \alpha_{ij}, i, j = \overline{1, n}, w > 0. \text{ Доказать, что}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \ln|\det \Phi(x)| = \frac{1}{w} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}.$$

15 Other types and tasks

15.1 Other challenges

15.1.1 Problems about Sturm's theorem

(тут ничего сложного, но еще нужно собрать теорию)

P-10.пр.1

Доказать, что любое нетривиальное решение уравнения $y'' + 2xy' + 5y = 0$ на интервале $(-\infty, +\infty)$ имеет не более 6 нулей.

Заменой $y = e^{\frac{-x^2}{2}} \cdot z$ заданное уравнение приводится к виду $z'' + \left(4 - x^2\right) z = 0$. При $|x| \geqslant 2$ всякое нетривиальное решение полученного уравнения имеет не более одного нуля. При $|x| \leqslant 2$ имеем $4 - x^2 \leqslant 4$. Поскольку любое нетривиальное решение уравнения $z'' + 4z = 0$ на отрезке $[-2, 2]$ имеет не более трех нулей, то по теореме Штурма любое нетривиальное решение уравнения $z'' + \left(4 - x^2\right) z = 0$ имеет на $[-2, 2]$ тоже не более трех нулей. Так как число нулей любого нетривиального решения заданного уравнения в силу замены совпадает с числом нулей нетривиальных решений уравнения $z'' + \left(4 - x^2\right) z = 0$, то задача решена. Решение граничной задачи, собственные значения и собственные функции граничной задачи находятся подстановкой общего решения уравнения в заданные граничные условия.

P-10.пр.2

Найти решение граничной задачи

$$y'' + y = 3\cos 2x, \quad y(0) = -1, y'(\pi) = 0.$$

Общим решением заданного уравнения является $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ - $-\cos 2x$. Подставляя это решение в граничные условия, получаем систему для нахождения постоянных C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 - 1 = -1 \\ -C_2 = 0 \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = C_2 = 0$ и, значит, решением граничной задачи является $y = -\cos 2x$.

P-10.пр.3

Найти собственные значения и собственные функции граничной задачи $y'' = \lambda y, x \in [0, 1], \quad y(0) = y(1) = 0$.

Нетрудно видеть, что при $\lambda \geqslant 0$ граничная задача имеет лишь тривиальное решение, т. е. никакое $\lambda \geqslant 0$ не может быть собственным значением граничной задачи. Пусть $\lambda < 0$. Тогда общим решением уравнения является $y = C_1 \cos x\sqrt{-\lambda} + C_2 \sin x\sqrt{-\lambda}$ и подстановка его в граничные условия дает уравнения для нахождения постоянных C_1 и C_2:

$$C_1 = C_2 \sin\sqrt{-\lambda} = 0.$$

Так как собственными функциями являются нетривиальные решения граничной задачи, то $C_2 \neq 0$. Значит, $\sin\sqrt{-\lambda} = 0$. Отсюда находим, что собственными значениями задачи являются числа $\lambda_n = -n^2\pi^2$, а соответствующими им собственными функциями являются $y_n(x) = C_n \sin n\pi x$, где $n = 1, 2, 3, ...$, а C_n - произвольная постоянная, отличная от нуля. Для нахождения функции Грина граничной задачи следует воспользоваться ее определением.

P-10.1

Доказать, что каждое нетривиальное решение уравнения $y'' + +\frac{1}{1+\sqrt{x}} y = 0$ имеет на интервале $(0, +\infty)$ бесконечное множество нулей.

P-10.2

Доказать, что каждое нетривиальное решение уравнения $y'' + +\frac{1}{4(x^2+1)} y = 0$ имеет на промежутке $[0, +\infty)$ лишь конечное число нулей.

P-10.3

Доказать, что каждое нетривиальное решение уравнения $y''+ +\frac{1}{1+x^2}y = 0$ имеет на промежутке $[0, +\infty)$ бесконечное число нулей.

P-10.4

Доказать, что любое нетривиальное решение уравнения $y''-xy'+y = 0$ на интервале $(-\infty, +\infty)$ имеет не более пяти нулей.

P-10.5

Доказать, что любое нетривиальное решение уравнения $y'' - (x-3)^2y'+ +(x+1)y = 0$ на интервале $(-\infty, +\infty)$ имеет не более шести нулей.

P-10.6

Доказать, что любое нетривиальное решение уравнения $y'' + x^2y'+ +(x+4)y = 0$ на интервале $(-\infty, +\infty)$ имеет не более шести нулей.

P-10.7

Доказать, что решение $J_0(x)$ уравнения Бесселя $xy'' + y' + xy = 0$ при $0.1 < x < 10$ имеет не менее трех нулей.

P-10.8

Доказать, что нетривиальное решение $y_\alpha(x)$ уравнения $xy''+ + \left(\frac{1}{2} - x\right) y'-\alpha y = 0$ при любом значении вещественного параметра α имеет на интервале $(1, +\infty)$ лишь конечное число нулей.

P-10.9

Доказать, что решение $J_1(x)$ уравнения Бесселя $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - 1\right) y = 0$ имеет один из нулей на интервале $(3, 7)$.

P-10.10

Доказать, что каждое нетривиальное решение уравнения $y'' + \frac{2}{x}y'+ +e^xy = 0$ на промежутке $[1, +\infty)$ имеет бесконечно много нулей $x_1 < < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$ и при этом $\lim_{n\to+\infty} |x_n - x_{n-1}| = 0$.

P-10.11

Доказать, что каждое нетривиальное решение уравнения $x^2y''+ +2x^2y' + \left(\frac{1}{2}x^2 - 2\right) y = 0$ на интервале $(0, +\infty)$ имеет не более одного нуля.

15.1.2 Boundary value problems

Найти решение граничной задачи (12-24):

P-10.12

$y'' - y' = 2e^{2x}, y'(0) = 2, \quad y(1) = e^2.$

P-10.13

$y'' - y = 2\sin x, \quad y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

P-10.14

$y'' + y' = 2, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2.$

P-10.15

$x^2y'' + 2xy' - 12y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y(x) = O\left(\frac{1}{x^4}\right)$ при $x \to +\infty$.

P-10.16

$y'' - y = e^{2x}, \quad y(0) = \frac{1}{3}, \quad y(1) = \frac{1}{3}e^2$.

P-10.17

$y'' - 4y = 4, \quad y(0) = -1, \quad y(1) = 0$.

P-10.18

$y'' + y = 0, \quad y(0) = y'(0), y\left(\frac{\pi}{2}\right) + y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

P-10.19

$y'' + y = 0, \quad y(0) = y'(0), y\left(\frac{\pi}{2}\right) = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2$.

P-10.20

$x^2y'' + 2xy' = \frac{1}{x}, \quad y(1) = 1, \quad y(e) = 0$.

P-10.21

$x^2y'' + 2xy' - 6y = x^3, \quad y(x) = O\left(x^2\right)$ при $x \to 0, \quad y(1) = 1$.

P-10.22

$x^2y'' + xy' - y = 2x, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = 2\ln 2$.

P-10.23

$y'' + \pi^2 y = 1, \quad y(0) = y(1) = 0$.

P-10.24

$y'' + \pi^2 y = 3\pi^2 \sin 2\pi x, \quad y(0) = y(1) = 0$. Найти собственные значения и собственные функции граничной задачи $(25 - 34)$:

P-10.25

$y'' = \lambda y, \quad y(0) = y'(1) = 0$.

P-10.26

$y'' = \lambda y, y'(0) = y(1) = 0$.

P-10.27

$y'' = \lambda y, y'(0) = y'(1) = 0$.

P-10.28

$y'' = \lambda y, \quad y(0) = y(1), y'(0) = y'(1)$.

P-10.29

$y'' = \lambda y, \quad y(0) = 0, \quad y(x) = O(1)$ при $x \to +\infty$.

P-10.30

$y'' = \lambda y, \quad y(x) = O(1)$ при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$.

P-10.31

$x^2y'' - xy' + y = \lambda y, \quad y(1) = y(2) = 0.$

P-10.32

$x^2y'' - xy' + y = \lambda y, \quad y(x) \to 0$ при $x \to 0, \quad y(1) = 0.$

P-10.33

$x^2y'' - xy' + y = \lambda y, \quad y(1) = 0, \quad y(x) = O(1)$ при $x \to +\infty$.

P-10.34

$x^2y'' + 3xy' + y = \lambda y, \quad y(1) = 0, \quad y(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

P-10.35

Доказать, что всякое вещественное число λ является собственным значением граничной задачи $y'' = \lambda y, \quad y(0) = y(1), y'(0) = -y'(1)$.

P-10.36

При каких значениях вещественного параметра λ граничная задача $y'' + \lambda^2 y = 0, \quad y(0) = 0, y'(1) = \lambda y(1)$ имеет нетривиальные решения? Найти эти решения.

P-10.37

Рассматривается граничная задача на собственные значения

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad y(x) \not\equiv 0,$$

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = y(1)\cos\beta + y'(1)\sin\beta = 0,$$

где $q(x)$ - заданная непрерывная функция на $[0,1], \alpha$ и β - заданные числа. Доказать, что: а) собственные значения граничной задачи вещественны,

б)собственные функции $y(x,\lambda_1)$ и $y(x,\lambda_2)$ соответствующие различным собственным значениям λ_1 и λ_2 ортогональны, т. е. $\int\limits_0^1 y(x,\lambda_1)\cdot y(x,\lambda_2)\,dx = 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$.

P-10.38

Рассматривается граничная задача вида

$$-y'' + q(x)y = \lambda y + f(x),$$

$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = y(1)\cos\beta + y'(1)\sin\beta = 0$, где $q(x), f(x)$ - заданные непрерывные функции на $[0,1], \alpha$ и β - заданные числа. Доказать, что а) если параметр λ не совпадает ни с одним собственным значением граничной задачи, то граничная задача имеет единственное решение,

б)если же λ - некоторое собственное

значение граничной задачи и ему соответствует собственная функция $y(x,\lambda)$, то граничная задача разрешима только в том случае, когда $\int\limits_0^1 f(x)y(x,\lambda)dx = 0$.

P-10.39

Показать, что все собственные функции граничной задачи $-y'' = \lambda y$, $y'(0) = y'(\pi) = 0$ обладают следующими свойствами:

а) n-я собственная функция на $[0,\pi]$ имеет ровно n нулей,

б)нули n-й и $(n+1)$-й собственных функций перемежаются.

15.1.3 Problems about Green's function $G(x,\zeta)$ of the boundary value problem (!!!!!)

(???? почему она в разделе про Штурма находится??? они же никак не связаны?)

P-10.40

$y'' + y = f(x), \quad y(0) = y'(1) = 0.$

P-10.41

$y'' + 4y = f(x), y'(0) = y(1) = 0.$

P-10.42

$y'' - 4y = f(x), y'(0) = 0, 2y(1) = y'(1).$

P-10.43

$y'' - y' = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = y'(1).$

P-10.44

$y'' - y = f(x), \quad y(0) = y(1) = 0.$
$G(x,\zeta) = -\frac{1}{\operatorname{sh} 1}\begin{cases}\operatorname{sh} x \operatorname{sh}(1-\zeta), & 0 \leqslant x \leqslant \zeta \\ \operatorname{sh}\zeta \operatorname{sh}(1-x), & \zeta \leqslant x \leqslant 1\end{cases}$

P-10.45

$x^2y'' + 3xy' - 3y = f(x), \quad y(1) = 0, \quad y(2) = 2y'(2).$
$G(x,\zeta) = \begin{cases}\frac{1}{4}\zeta^2\left(\frac{1}{x^3} - x\right), & 1 \leqslant x \leqslant \zeta \\ \frac{1}{4}x\left(\frac{1}{\zeta^2} - \zeta^2\right), & \zeta \leqslant x \leqslant 2\end{cases}$

P-10.46

$\left(x^2+1\right)y'' + 2xy' = f(x), \quad y(0) = y'(1) = 0.$
$G(x,\zeta) = \begin{cases}-\operatorname{arctg} x, & 0 \leqslant x \leqslant \zeta \\ -\operatorname{arctg}\zeta, & \zeta \leqslant x \leqslant 1\end{cases}$

P-10.47

$xy'' + y' = f(x), \quad y(1) = y(2) = 0.$
$G(x,\zeta) = \frac{1}{\ln 2}\begin{cases}\ln x \ln\frac{\zeta}{2}, & 1 \leqslant x \leqslant \zeta \\ \ln\zeta \ln\frac{x}{2}, & \zeta \leqslant x \leqslant 2\end{cases}$

P-10.48

$x^2y'' + xy' - y = f(x), \quad y(1) = y'(2) = 0.$
$G(x,\zeta) = -\frac{1}{10\zeta^2}\begin{cases}\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(\zeta^2+4\right), & 1 \leqslant x \leqslant \zeta, \\ \left(\zeta^2+1\right)\left(x + \frac{4}{x}\right), & \zeta \leqslant x \leqslant 2.\end{cases}$

P-10.49

$x^2y'' - xy' - 3y = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \to +\infty$.
$G(x,\zeta) = -\frac{1}{4}\begin{cases}\frac{x^3}{\zeta^4}, & 0 \leqslant x \leqslant \zeta \\ \frac{1}{x}, & \zeta \leqslant x < +\infty.\end{cases}$

P-10.50

$x^2y'' + 2xy' - 12y = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y(x) = O(1)$ при $x \to +\infty$. $G(x,\zeta) = -\frac{1}{7}\begin{cases} \frac{x^3}{\zeta^4}, & 0 \leqslant x \leqslant \zeta \\ \frac{\zeta^3}{x^4}, & \zeta \leqslant x < +\infty \end{cases}$

P-10.51

Пусть $p(x)$ - непрерывная функция на $[a,b]$ и $p^* = \max p(x) > 0$ при $x \in [a,b]$. Доказать, что граничная задача $y'' + p(x)y = f(x), \quad y(a) = A$, $y(b) = B$ имеет единственное решение при всех A и B и для любой непрерывной $f(x)$ на $[a,b]$, если выполнено условие $(b-a) < \frac{\pi}{\sqrt{p^*}}$.

P-10.52

Пусть $a(x)$ - непрерывно дифференцируемая положительная функция на всей оси и пусть $y_1(x), y_2(x)$ - линейно независимые решения уравнения $y'' + a(x)y = 0$. Доказать, что нули $y_1'(x)$ и $y_2'(x)$ перемежаются.
Указание. Показать, что y_1 и y_2 удовлетворяют соотношению $y_2y_1'' - y_1y_2'' = 0$.

P-10.53

Пусть на множестве $D = \{0 \leqslant x \leqslant 1, -\infty < y < +\infty\}$ функции $f(x,y)$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывны и $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \geqslant 0$. Доказать, что граничная задача $y'' = f(x,y), \quad y(0) = y(1) = 0$ может иметь только одно решение. Указание. Рассмотреть какому уравнению удовлетворяет разность двух решений.

15.2 Tasks for special methods (!?!?)

(если стану умным, то тут много буду тренироваться!)

15.2.1 Problems about the iteration method

(уже решал, из механики соберу)
(????? откуда это, даже не помню???)

Мэтьюз-Уолкер-?

$$dy/dx = \exp(-2xy).$$

Посмотрим на решение вблизи $x \to \infty$. Предположим, что $y > 0$. Следовательно, $dy/dx \approx 0$ и $y \approx a = =$ const. Теперь подставим это предположительное решение снова в (1.77): $dy/dx \approx \exp(-2ax)$. Тогда $y \approx \approx a - \exp(-2ax)/2a$. Выполним еще одну итерацию

$$\frac{dy}{dx} \approx \exp\left[-2x\left(a - \frac{\exp(-2ax)}{2a}\right)\right] \approx$$
$$\approx \exp(-2ax)\left(1 - \frac{x}{a}\exp(-2ax) + ...\right);$$
$$y \approx a - \frac{\exp(-2ax)}{2a} - \frac{1}{4a^2}\left(x + \frac{1}{4a}\right)\exp(-4ax) + ...$$

Если ряд (1.78) сходится, то, вероятно, он представляет собой решение. Вообще говоря, ряд расходится.

Мэтьюз-Уолкер-?

$$d^2y/dx^2 = x - y^2$$

(см. графическое рассмотрение, рис. 1.3).. Попробуем подставить $y \approx \sqrt{x}$. Тогда $y'' \approx 0$, так что $y = ax + b$: Это не похоже на первую попытку, так как мы не очень искусно работали с «малым» членом y''. Выберем другой путь:

$$y^2 = x - y'' \approx x - (\sqrt{x})'' = x\left(1 + \frac{1}{4}x^{-5/2}\right)$$
$$y \approx \sqrt{x} + \frac{1^-}{8}x^{-2}$$

Следующая итерация дает

$$y = \sqrt{x} + \frac{1}{8}x^{-2} - \frac{49}{128}x^{-9/2} + ...$$

По указанной выше классификации это решение типа 2. Можно искать решение другим методом. Напишем

$$y = \sqrt{x} + \eta(x), \quad |\eta| \ll |\sqrt{x}|$$

29

15.2.2 Problems about the averaging method

(уже решал, из механики соберу)

15.2.3 Problems about geometric methods (???)

(мб Арнольда почитаю, порешаю, пока хз, не буду этим заниматься.)

15.3 Tasks for autonomous systems of differential equations

15.3.1 Problems about the behavior of phase trajectories near gross equilibrium positions

Р-пр.1

Найти положения равновесия, определить их характер и нарисовать фазовые траектории линеаризованных систем в окрестности положений равновесия для автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y^2 \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 2 \end{cases}$$

Приравнивая правые части системы нулю, находим положения равновесия $(1, 1)$ и $(1, -1)$.

Рассмотрим сначала точку $(1, 1)$. Для дальнейшего удобно ее преобразовать в начало координат. С этой целью сделаем замену переменных

$x - 1 = u, y - 1 = v$ в заданной системе. Система примет вид

$$\begin{cases} \dot{u} = u - 2v - v^2, \\ \dot{v} = 2u + 2v + u^2 + v^2 \end{cases}$$

для которой точка $(0, 0)$ - положение равновесия. Линеаризованная в точке $(0, 0)$ система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{u} = u - 2v \\ \dot{v} = 2u + 2v \end{cases}$$

Находим собственные значения матрицы этой системы

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

из уравнения

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 6 = 0.$$

Так как собственные значения $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(3 \pm i\sqrt{15})$, то положение равновесия является неустойчивым фокусом. Следовательно, кроме положения равновесия $(0, 0)$, остальными траекториями являются спирали. Для определения направления движения по спиралям при $t \to +\infty$ достаточно найти вектор фазовой скорости $\boldsymbol{a}$ линеаризованной системы в какой-нибудь точке. Например, в точке $(1, 0)$ вектор скорости $\boldsymbol{a}$ имеет координаты $(1, 2)$, Следовательно, при $t \to +\infty$ движение по спиралям направлено против часовой стрелки. Поведение фазовых траекторий в этом случае схематически показано на следующем рисунке.

(спираль вокруг нуля против часовой стрелки)

Для другого положения равновесия $(1, -1)$ замена переменных $x - 1 = u, y + 1 = v$ дает систему вида

$$\begin{cases} \dot{u} = u + 2v - v^2, \\ \dot{v} = 2u - 2v + u^2 + v^2. \end{cases}$$

Линеаризация этой системы в точке $(0,0)$ имеет вид

$$\begin{cases} \dot{u} = u + 2v, \\ \dot{v} = 2u - 2v. \end{cases}$$

Собственные значения матрицы этой системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

находим из уравнения

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0.$$

Получаем $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 2$. Так как λ_1 и λ_2 разных знаков, то положение равновесия $(0,0)$ является седлом. Для того, чтобы нарисовать картину поведения фазовых траекторий, осталось найти линейно независимые собственные векторы h_1 и h_2 для λ_1 и λ_2. Для $\lambda_1 = -3$ собственный вектор $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, а для $\lambda_2 = 2$ собственный вектор $h_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Известно, что в случае седла траекториями являются гиперболы, для которых прямые, определяемые векторами h_1 и h_2, служат асимптотами. Лучи этих прямых тоже траектории.

Поведение фазовых траекторий в этом случае схематически показано на следующем рисунке, где стрелки указывают направление движения по траекториям при $t \to +\infty$.

Р-пр.2

Для уравнения $\ddot{x} + x^3 - e^{-\frac{4\dot{x}}{x}} = 0$ найти положения равновесия, определить их характер и нарисовать фазовые траектории линеаризованного уравнения в окрестности положений равновесия.

Введя обозначение $\dot{x} = y$, преобразуем уравнение к системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x^3 + e^{-\frac{4y}{x}}. \end{cases}$$

По определению положениями равновесия и фазовыми траекториями заданного уравнения являются соответственно положения равновесия и фазовые траектории этой системы. Приравнивая нулю правые части системы, находим положение равновесия $(1,0)$. Перенося начало координат в положение равновесия $(1,0)$ с помощью замены $x = u+1, y = v$, получаем автономную систему

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -(u+1)^3 + e^{-\frac{4v}{v+1}} \end{cases}$$

Разлагая правую часть системы по формуле Тейлора в окрестности $(0,0)$ и ограничиваясь лишь линейными членами разложения, получаем линеаризованную систему вида

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = -3u - 4v \end{cases}$$

Матрица этой системы $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ имеет собственные значения $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3$. Соответствующие им линейно независимыми собственными векторами являются

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Положение равновесия $(0,0)$ линеаризованной системы - устойчивый узел. Поведение фазовых траекторий схематически показано на следующем рисунке, где стрелки указывают направление движения по траекториям при $t \to +\infty$.

Найти положения равновесия, определить их характер и нарисовать фазовые траектории линеаризованных систем в окрестности положений равновесия для автономных систем $(1-52)$:

Р-1

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{2x+2y} + x \\ \dot{y} = \arccos\left(x - x^3\right) - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

P-2

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(1-y) \\ \dot{y} = \sqrt[3]{x-4y} + x - 2. \end{cases}$$

P-3

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln\left(1+\sqrt{1+4y-y^3}\right) - \ln 2, \\ \dot{y} = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(x+3y)\pi + 2 - y. \end{cases}$$

P-4

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(5-2x-2y) \\ \dot{y} = e^{xy} - 1 \end{cases}$$

P-5

$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{sh}\left(y - x^2 - x\right) \\ \dot{y} = 3x - x^2 - y \end{cases}$$

P-6

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y^2 - 1 \\ \dot{y} = \sin x - y^2 + 1 \end{cases}$$

P-7

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(x+y) \\ \dot{y} = x^3 + y^3 - 1 \end{cases}$$

P-8

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x^2 - xy + 2 \\ \dot{y} = x^2 - x - 2 \end{cases}$$

P-9

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + x + 2y^2 - 2 \\ \dot{y} = x + y^2 \end{cases}$$

P-11

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{x^2-y} - e^{2x} \\ \dot{y} = -x - 2y - y^2 \end{cases}$$

P-10

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - y - 2 \\ \dot{y} = -xy - 3y^2 - 2 \end{cases}$$

P-13

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - 2x - y^2 \\ \dot{y} = e^{-4x} - 1 \end{cases}$$

P-12

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - x^2 \\ \dot{y} = \sqrt{1+4y} - \sqrt{1+2x+2y^2} \end{cases}$$

P-14

$$\begin{cases} \dot{x} = -3 + 2x + y \\ \dot{y} = \operatorname{arctg}(xy) \end{cases}$$

P-23

$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{arctg}\left(x^2 - x + y\right) \\ \dot{y} = \ln\left(1 + x^2 + 3x - y\right) \end{cases}$$

P-24

$$\begin{cases} \dot{x} = e^x - y - 1 \\ \dot{y} = x + \ln(1 + y) \end{cases}$$

P-25

$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{sh} y \\ \dot{y} = e^x - 1 \end{cases}$$

P-26

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(1 + x + 4y) \\ \dot{y} = \arcsin\left(x + y - \frac{x^2}{4}\right) \end{cases}$$

P-27

$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{sh}(x - y) \\ \dot{y} = e^{(x+y+2xy)} - 1 \end{cases}$$

P-28

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{-x+4y} \\ \dot{y} = \operatorname{arctg}\left(4x - y - \frac{5x^2}{4}\right). \end{cases}$$

P-31

$$\begin{cases} \dot{x} = \pi + \operatorname{arctg}\left(x^3 - 8 - \operatorname{tg} y\right) - y, \\ \dot{y} = 2x + 12 \operatorname{tg} y - 4. \end{cases}$$

P-32

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{y^3 - 1 - 6x^2} - x, \\ \dot{y} = \sqrt{2y - 3} - \sqrt{2x^2 - 1} \end{cases}$$

P-33

$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{sh}\left(2x + y - x^2\right), \\ \dot{y} = \ln\left(1 + 3x - x^2\right). \end{cases}$$

P-34

$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{arctg}(x - y - 4), \\ \dot{y} = 2x - 2y - 4\sqrt[3]{x^2 - 1}. \end{cases}$$

P-35

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(2 - x + y), \\ \dot{y} = x - y - e^{4\left(x^2 - 1\right)} \end{cases}$$

P-36

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - 2x - y^2 \\ \dot{y} = -1 - 6x + y^2 \end{cases}.$$

P-37

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + 2y - 4, \\ \dot{y} = -2x - xy. \end{cases}$$

P-38

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 4y^2, \\ \dot{y} = 2 - 2y. \end{cases}$$

P-39

$$\begin{cases} \dot{x} = 8 + 4y - 2xy \\ \dot{y} = x^2 - 4y^2 \end{cases}$$

P-40

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt[3]{7x + y} + y - 2, \\ \dot{y} = -\ln(1 + x) \end{cases}$$

P-41

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{1-2x-3y} + x \\ \dot{y} = \operatorname{arctg}\left(x^2 - 1\right) \end{cases}$$

P-42

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{2}\sqrt{4 - 6y - 4y^3} - 1, \\ \dot{y} = \ln\left(x^3 - 7y\right) + 2y. \end{cases}$$

P-43

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{-\frac{y}{x}-1} - x \\ \dot{y} = \operatorname{arctg}\left(x^3 - x\right) \end{cases}$$

P-44

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - e^{x^2-y} \\ \dot{y} = \operatorname{th}\left(2 + x - x^2\right). \end{cases}$$

P-45

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{1 + 2x - 5y} - 1, \\ \dot{y} = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{5}x^2 - 2y\right). \end{cases}$$

P-46

$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{arctg}(x - y - 1) \\ \dot{y} = \sqrt[3]{3x^2 + 3y - 2} - 1. \end{cases}$$

Найти положения равновесия, определить их характер и нарисовать фазовые траектории линеаризованного уравнения в окрестности положений равновесия для уравнений (53-82):

P-53

$$\ddot{x} + \dot{x} = \ln\left(1 - 3x + x^2 - \dot{x}\right).$$

P-54

$$\ddot{x} + \dot{x} + 1 = \sqrt[3]{1 + x + x^2 - \dot{x}}.$$

P-55

$$\ddot{x} + x^3 = e^{-\frac{4\dot{x}}{x}}.$$

P-56

$$\ddot{x} + 3\dot{x} = \ln\left(\dot{x} + x^3\right).$$

P-57

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x - 2x^2 + 1 = 0.$$

P-58

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 2x^2 - x - 3 = 0.$$

P-60

$$\ddot{x} - e^{2\dot{x}} - x^3 = 0.$$

P-59

$$\ddot{x} - (1 + \dot{x})^2 + x^5 = 0.$$

P-61

$$2\ddot{x} + 5\sin\dot{x} + \sqrt{1 + 4x} - 1 = 0.$$

P-62

$$\ddot{x} - \arcsin(x - 2\dot{x}) + 7\ln(1 - x) = 0.$$

P-63

$$\ddot{x}\cos\dot{x} - 4\operatorname{tg}\dot{x}\sqrt{1 - \sin x} + 3x = 0.$$

P-64

$$\ddot{x} - e^{3x - 4\dot{x}} + 2\ln(1 - x) + 1 = 0.$$

P-65

$$\ddot{x} + \operatorname{tg}(2x + 6\dot{x}) - 3\ln(1 - x) = 0.$$

P-66

$$\ddot{x} + x^5[1 + \ln(1 + 2\dot{x})] = (1 + 2\dot{x})^2.$$

P-67

$$\ddot{x} + 2e^{\dot{x}} - x^3\cos\dot{x} = 3.$$

P-68

$$\ddot{x} + (2 + \dot{x})^2\operatorname{arctg}\dot{x} + x^3 = 1.$$

P-69

$$\ddot{x} = 5\,\mathrm{arctg}(x-1) + 4e^{\dot{x}}\sin\dot{x}.$$

P-70

$$\ddot{x} = (3\dot{x} - 2x)e^{\dot{x}^2}.$$

P-71

$$\ddot{x} + (4\dot{x} + 3x)e^{x^2} = 0.$$

P-72

$$\ddot{x} - (\dot{x} + 4x)^3 + 2\dot{x} + 1 = 0.$$

15.3.2 Problems about the behavior of phase trajectories near noncoarse equilibrium positions and on the entire phase plane

P-14.пр.1

Исследовать при всех значениях вещественного параметра a поведение фазовых траекторий в окрестности положения равновесия $(0,0)$ для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + ax\left(x^2+y^2\right), \\ \dot{y} = x + ay\left(x^2+y^2\right) \end{cases}$$

Точка $(0,0)$ является центром для линеаризованной системы в точке $(0,0)$ при $a=0$

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x, \end{cases}$$

поскольку матрица линеаризации имеет собственные значения $\lambda = \pm i$. Чтобы исследовать поведение фазовых траекторий заданной системы при $a \neq 0$, перейдем к полярным координатам $x(t) = r(t)\cos\varphi(t), \quad y(t) = = r(t)\sin\varphi(t)$. Получаем систему вида

$$\begin{cases} \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi = -r\sin\varphi + ar^3\cos\varphi, \\ \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi = r\cos\varphi + ar^3\sin\varphi, \end{cases}$$

откуда находим

$$\begin{cases} \dot{r} = ar^3, \\ r\dot{\varphi} = r. \end{cases}$$

При $r=0$ имеем положение равновесия. При $r>0\varphi = t + C$ и $\varphi \to +\infty$ при $t \to +\infty$, а $\dot{r} < 0$ при $a<0$ и $\dot{r} > 0$ при $a > 0$.

Отсюда следует, что при $r>0$ траекториями системы служат спирали, движение по которым идет против часовой стрелки, причем при $a<0$ спирали закручииваются вокруг $(0,0)$ при $t \to +\infty$, а при $a>0$ спирали раскручиваются вокруг $(0,0)$ при $t \to +\infty$.

При исследовании поведения фазовых траекторий на всей фазовой плоскости необходимо находить не только положения равновесия системы, но и предельные циклы.

P-14.пр.2

Исследовать при всех значениях вещественного параметра a поведение фазовых траекторий на всей фазовой плоскости для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + ax\left(x^2+y^2-1\right) \\ \dot{y} = x + ay\left(x^2+y^2-1\right) \end{cases}$$

При $a=0$ имеем линейную систему, для которой начало координат является центром. Пусть $a \neq 0$. После перехода к полярным координатам $x(t) = r(t)\cos\varphi(t), \quad y(t) = r(t)\sin\varphi(t)$ получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{r} = ar\left(r^2-1\right), \\ r\dot{\varphi} = r \end{cases}$$

$r = 0$ дает положение равновесия $(0,0)$, а $r = 1$ является решением. При $r > 0, r \neq 1$, траекториями являются спирали. Если $a < 0$, то $\dot{r} > 0$ при $0 < r < 1$ и, значит спирали раскручиваются вокруг $r = 0$ против часовой стрелки при $t \to +\infty$ и стремятся изнутри к окружности $r = 1$. При $a < 0$ и $r > 1$ имеем $\dot{r} < 0$. Спирали против часовой стрелки извне накручиваются на окружность $r = 1$ при $t \to +\infty$. Таким образом, при $a < 0$ окружность $r = 1$ является устойчивым предельным циклом.

Если $a > 0$, то при $0 < r < 1$ спирали закручиваются вокруг $r = 0$ при $t \to +\infty$, а при $r > 1$ спирали раскручиваются вокруг окружности при $t \to +\infty$ против часовой стрелки, так как $\varphi \to +\infty$ при $t \to +\infty$. В этом случае окружность $r = 1$ является неустойчивым предельным циклом системы.

Исследовать при всех значениях вещественного параметра поведение фазовых траекторий в окрестности положения равновесия $(0,0)$ для систем (1-11):

P-14.1

$$\begin{cases} \dot{x} = -2y + ax\sqrt{x^2+y^2} \\ \dot{y} = 2x + ay\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

P-14.2

$$\begin{cases} \dot{x} = y + ax\left(x^2+y^2\right) \\ \dot{y} = -x + ay\left(x^2+y^2\right) \end{cases}$$

P-14.3

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y + ax\sqrt{x^2+y^2} \\ \dot{y} = -4x + ay\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

P-14.4

$$\begin{cases} \dot{x} = -3y + ax\left(x^2+y^2\right)^2 \\ \dot{y} = 3x + ay\left(x^2+y^2\right)^2 \end{cases}$$

P-14.5

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y + ax\left(x^2+y^2\right)^2 \\ \dot{y} = -2x + ay\left(x^2+y^2\right)^2 \end{cases}$$

P-14.6

$$\begin{cases} \dot{x} = -ay + x\left(x^2+y^2\right) \\ \dot{y} = ax + y\left(x^2+y^2\right) \end{cases}$$

P-14.7

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - axy^2 \\ \dot{y} = x + ax^2y \end{cases}$$

P-14.8

$$\begin{cases} \dot{x} = y - axy^2 \\ \dot{y} = -x + ax^2y \end{cases}$$

P-14.9

$$\begin{cases} \dot{x} = -y\left(x^2+y^2-a\right) \\ \dot{y} = x\left(x^2+y^2-a\right) \end{cases}$$

P-14.10

$$\begin{cases} \dot{x} = y\left(-a+x^2+y^2\right) \\ \dot{y} = -x\left(-a+x^2+y^2\right) \end{cases}$$

P-14.11

$\begin{cases} \dot{x} = -y\left(x^2+y^2+a^2\right) \\ \dot{y} = x\left(x^2+y^2+a^2\right) \end{cases}$ Исследовать при всех значениях вещественного параметра a поведение фазовых траекторий на всей фазовой плоскости для систем $(12-21)$:

P-14.12

$$\begin{cases} \dot{x} = y + ax\left(x^2+y^2-2\right), \\ \dot{y} = -x + ay\left(x^2+y^2-2\right) \end{cases}$$

P-14.13

$$\begin{cases} \dot{x} = -2y + ax\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)\left(2-\sqrt{x^2+y^2}\right) \\ \dot{y} = 2x + ay\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)\left(2-\sqrt{x^2+y^2}\right) \end{cases}$$

P-14.15

$$\begin{cases} \dot{x} = -ay + x\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sin\frac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dot{y} = ax + y\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sin\frac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

P-14.16

$$\begin{cases} \dot{x} = \left[-y + ax\left(x^2+y^2-1\right)\right]\left(x^2+y^2-1\right) \\ \dot{y} = \left[x + ay\left(x^2+y^2-1\right)\right]\left(x^2+y^2-1\right) \end{cases}$$

P-14.17

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y + ax\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sin^2\frac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dot{y} = -2x + ay\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sin^2\frac{\pi}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

P-14.18

$$\begin{cases} \dot{x} = \left[y + ax\left(x^2+y^2-2\right)\right]\left(x^2+y^2-2\right) \\ \dot{y} = \left[-x + ay\left(x^2+y^2-2\right)\right]\left(x^2+y^2-2\right) \end{cases}$$

P-14.19

$$\begin{cases} \dot{x} = -ay + x\left(x^2+y^2-2\right) \\ \dot{y} = ax + y\left(x^2+y^2-2\right) \end{cases}$$

P-14.20

$$\begin{cases} \dot{x} = -ay + x\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right) \\ \dot{y} = ax + y\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right) \end{cases}$$

P-14.21

$\begin{cases} \dot{x} = -y + ax\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)^2, \\ \dot{y} = x + ay\left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)^2. \end{cases}$ На всей фазовой плоскости нарисовать схематически фазовые траектории систем (22-45):

P-14.22

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 \\ \dot{y} = y \end{cases}$$

P-14.23

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

P-14.32

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2, \\ \dot{y} = -xy. \end{cases}$$

P-14.33

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 1, \\ \dot{y} = -xy. \end{cases}$$

P-14.34

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin x, \\ \dot{y} = y \cos x. \end{cases}$$

P-14.35

$$\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = y - y^2. \end{cases}$$

P-14.36

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = y^2 - 2xy. \end{cases}$$

P-14.37

$$\begin{cases} \dot{x} = xy^2, \\ \dot{y} = x^2 + y^3. \end{cases}$$

P-14.38

$$\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = x + y^2. \end{cases}$$

P-14.39

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y, \\ \dot{y} = 3x^2. \end{cases}$$

P-14.40

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{x} \\ \dot{y} = \sqrt{y} \end{cases}$$

P-14.41

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 + 2xy - x^2, \\ \dot{y} = x^2 + 2xy - y^2 \end{cases}$$

P-14.42

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x^2 - y^4, \\ \dot{y} = xy. \end{cases}$$

P-14.43

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy, \\ \dot{y} = x + 2y^2. \end{cases}$$

P-14.44

$$\begin{cases} \dot{x} = xe^y \\ \dot{y} = ye^y \end{cases}$$

P-14.45

$$\begin{cases} \dot{x} = x\left(y - x^2\right), \\ \dot{y} = y\left(y - x^2\right). \end{cases}$$

15.3.3 Problems about the stability of equilibrium positions

P-15.пр.1

Исследовать устойчивость положений равновесия с помощью системы первого приближения автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - 2x - y^2 \\ \dot{y} = e^{-4x} - 1 \end{cases}$$

Найдем сначала положения равновесия системы. Для этого необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} 1 - 2x - y^2 = 0, \\ e^{-4x} - 1 = 0. \end{cases}$$

Получаем два положения равновесия: $(0, 1)$ и $(0, -1)$. Исследуем устойчивость положения равновесия $(0, 1)$. С этой целью в автономной системе сделаем замену $y - 1 = y_1$ и правые части полученной системы разложим по формуле Тейлора в окрестности точки $(0, 0)$, являющейся положением равновесия новой системы. Имеем

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - 2x - (1 + y_1)^2 = -2x - 2y_1 - y_1^2, \\ \dot{y}_1 = -4x + o(x). \end{cases}$$

Матрица

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет собственные значения $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -4$. Следовательно, положение равновесия $(0, 1)$ является неустойчивым.

Для исследования устойчивости второго положения равновесия $(0, -1)$ в заданной системе сделаем замену $y + 1 = y_1$. Тогда точка $(0, -1)$ перейдет в точку $(0, 0)$ и можно в окрестности $(0, 0)$ разложить по формуле Тейлора правые части новой системы. Получаем

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - 2x - (y_1 - 1)^2 = -2x + 2y_1 - y_1^2, \\ \dot{y}_1 = -4x + o(x) \end{cases}$$

Матрица

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет собственные значения $\lambda_1 = -1 + i\sqrt{7}, \lambda_2 = -1 - i\sqrt{7}$. Следовательно, положение равновесия $(0, -1)$ является асимптотически устойчивым. В тех случаях, когда вещественные части всех собственных значений матрицы A неположительны, причем хотя бы одно собственное значение A имеет вещественную часть равную нулю, исследование устойчивости положений равновесия нелинейной автономной системы с помощью системы первого приближения, как правило невозможно, так как начинают влиять нелинейные члены. В таких случаях используют метод функций Ляпунова (второй метод Ляпунова).

P-15.пр.2

Исследовать устойчивость положений равновесия автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y^2 \\ \dot{y} = -xy - y^3 \end{cases}$$

Единственным положением равновесия является точка $(0,0)$. В этом случае матрица

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

не позволяет воспользоваться теоремой Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Применим второй метод Ляпунова. Если взять в качестве функции Ляпунова функцию $V(x,y) = x^2 + y^2$, то ее производная в силу автономной системы

$$\begin{aligned} \dot{V}(x,y) &= \frac{\partial V}{\partial x}\left(-x + y^2\right) + \frac{\partial V}{\partial y}\left(-xy - y^3\right) = 2x\left(-x + y^2\right) + 2y\left(-xy - y^3\right) = \\ &= -2\left(x^2 + y^4\right) \leqslant 0, \end{aligned}$$

причем $\dot{V}(x,y) = 0$ лишь при $x = y = 0$. По теореме Ляпунова отсюда следует, что точка $(0,0)$ является асимптотически устойчивым положением равновесия системы.

Исследовать устойчивость положений равновесия с помощью системы первого приближения (1-15):

P-15.1

$$\begin{cases} \dot{x} = -3 + 2x + y \\ \dot{y} = \operatorname{arctg}(xy) \end{cases}$$

P-15.2

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y \\ \dot{y} = \ln\left(3x^2 - 1\right) - \ln 2. \end{cases}$$

P-15.3

$$\begin{cases} \dot{x} = 4 - x(3y + 2) - 9y^2 \\ \dot{y} = \ln \frac{1+x}{1-2x} \end{cases}$$

P-15.4

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 y + y^2 \\ \dot{y} = \ln\left(x^3 + y\right) - 3y \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = \operatorname{sh}(x - y) \\ \dot{y} = e^{2xy + x + y} - 1 \end{cases}$$

P-15.6

$$\ddot{x} + \dot{x} = \ln\left(1 - 3x + x^2 - \dot{x}\right).$$

P-15.7

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y^2 \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 2 \end{cases}$$

P-15.8

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x - 8y + 3 \\ \dot{y} = \ln \frac{x}{y} \end{cases}$$

P-15.9

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{2x+2y} + x, \\ \dot{y} = \arccos\left(x - x^3\right) - \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

P-15.10

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{xy} + y^2 - 3, \\ \dot{y} = \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \end{cases}$$

P-15.11

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(x+y) \\ \dot{y} = x^3 + y^3 - 1 \end{cases}$$

P-15.12

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{\frac{xy^3}{2}} + y^2 - 3 \\ \dot{y} = 4 \operatorname{arctg} \frac{x}{y^5} \end{cases}$$

P-15.13

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{x^2-2y} - e^{2x} \\ \dot{y} = -x - 2y - y^2 \end{cases}$$

P-15.14

$$\ddot{x} + \dot{x} + 1 = \sqrt[3]{1 + x + x^2 - \dot{x}}.$$

P-15.15

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - x^2 \\ \dot{y} = \sqrt{1+4y} - \sqrt{1+2x+2y^2}. \end{cases}$$

P-15.16

При каких значениях вещественного параметра a система

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + ay, \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$$

Исследовать устойчивость положения равновесия $(0,0,0)$ для линейных систем (18-27):

P-15.18

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = x - 2z \\ \dot{z} = -y + 2z \end{cases}$$

P-15.19

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y, \\ \dot{y} = 3x - z, \\ \dot{z} = 4y - 2z. \end{cases}$$

P-15.20

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2z, \\ \dot{y} = x + 2y + z, \\ \dot{z} = -x - y \end{cases}$$

P-15.21

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 4y, \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = 3y - z. \end{cases}$$

P-15.22

$$\begin{cases} \dot{x} = y - z, \\ \dot{y} = -y + z, \\ \dot{z} = x - z. \end{cases}$$

P-15.23

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 8y + z, \\ \dot{y} = x - 2y + z \\ \dot{z} = 3x - 12y - 5z. \end{cases}$$

P-15.24

$$\begin{cases} \dot{x} = 7x - 10y - 4z, \\ \dot{y} = 4x - 7y - 4z, \\ \dot{z} = -6x + 7y + z. \end{cases}$$

P-15.25

$$\begin{cases} \dot{x} = 7x - 4y + z \\ \dot{y} = 7x - 3y + z \\ \dot{z} = 4x - 2y + 2z \end{cases}$$

P-15.26

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y + 2z \\ \dot{y} = -3x - y + z \\ \dot{z} = -x + 2y \end{cases}$$

P-15.27

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + z \\ \dot{y} = -y - z \\ \dot{z} = y - z \end{cases}$$

с помощью функции Ляпунова вида $V(x, y) = ax^2 + by^2$ исследовать устойчивость точки $(0, 0)$ для автономных систем $(28 - 36)$:

P-15.28

$$\begin{cases} \dot{x} = -2y - x^3, \\ \dot{y} = x - y^3 \end{cases}$$

P-15.29

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 2x^3 \\ \dot{y} = -2x - y^3 \end{cases}$$

P-15.30

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y^2 \\ \dot{y} = xy - x^2y \end{cases}$$

P-15.31

$$\begin{cases} \dot{x} = -xy^2, \\ \dot{y} = -y - 2x^2y. \end{cases}$$

P-15.32

$$\begin{cases} \dot{x} = -xy^2 \\ \dot{y} = -4xy^2 - 2y^3 \end{cases}$$

P-15.33

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y^2, \\ \dot{y} = xy + y^3 \end{cases}$$

P-15.34

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y + x^3 \\ \dot{y} = -x + y^3 \end{cases}$$

P-15.35

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + 2x^3 \\ \dot{y} = 2x + y^3 \end{cases}$$

P-15.36

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x^2y - 2x^3, \\ \dot{y} = -x^2y \end{cases}$$

P-15.37

Рассмотрим уравнения $\dot{x} = -\operatorname{grad} V(x)$, описывающие движение некоторых механических систем. Здесь $x = (x_1, ..., x_n)$ и $V(x)$ - потенциальная энергия механической системы, имеющая минимум при $x = 0$. Взяв $V(x)$ в качестве функции Ляпунова, показать, что $x = 0$ является устойчивым положением равновесия системы.

P-15.38

Показать, что если функция Ляпунова $V(x), x = (x_1, ..., x_n)$ для автономной системы $\dot{x} = f(x)$ определяет асимптотически устойчивое положение равновесия $x = 0$, то $V(x)$ для системы $\dot{x} = -f(x)$ определяет неустойчивое положение равновесия $x = 0$.

P-15.39

Пусть A - матрица квадратичной формы в n-мерном вещественном евклидовом пространстве. С помощью функции Ляпунова $V(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ показать, что $x = 0$ для системы $\dot{x} = Ax$ является асимптотически устойчивым положением равновесия, если квадратичная форма отрицательно определенная, и $x = 0$ является неустойчивым положением равновесия, если квадратичная форма положительно определенная.

15.3.4 Problems about the first integrals

ПРимеР 1. Проверить, что функция $u(x, y, z) = \frac{1}{x}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$ при $x \neq 0$ является первым интегралом системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xz \\ \dot{y} = 2yz \\ \dot{z} = z^2 - x^2 - y^2 \end{cases}$$

Достаточно установить, что $\dot{u}(x, y, z) = 0$ при $x \neq 0$. Имеем

$$\dot{u} = 2xz \cdot \frac{x^2 - y^2 - z^2}{x^2} + 2yz \cdot \frac{2y}{x} + \left(z^2 - x^2 - y^2\right) \cdot \frac{2z}{x} =$$
$$= \frac{2}{x}\left[z\left(x^2 - y^2 - z^2\right) + 2y^2z + z\left(z^2 - x^2 - y^2\right)\right] = 0$$

P-16.пр.2

Показать что функции $u_1(x, y, z) = \frac{1}{x}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$,
$u_2(x, y, z) = \frac{y}{x}$ являются независимыми первыми интегралами при $x > 0$, $z > 0$ для автономной системы примера 1.

Сначала проверим, что u_2 - первый интеграл системы примера 1. ИмееМ

$$\dot{u}_2 = 2xz \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + 2yz\frac{1}{x} = 0.$$

Итак, u_1, u_2 - первые интегралы системы примера 1. Они являются независимыми при $x > 0, z > 0$, так как матрица Якоби

$$\left\| \begin{array}{ccc} \frac{x^2-y^2-z^2}{x^2} & \frac{2y}{x} & \frac{2z}{x} \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} & 0 \end{array} \right\|$$

имеет ранг 2 при $x > 0, z > 0$. В самом деле, при $x > 0, z > 0$ определитель из элементов второго и третьего столбцов матрицы Якоби

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{2y}{x} & \frac{2z}{x} \\ \frac{1}{x} & 0 \end{array} \right| = -\frac{2z}{x^2} \neq 0.$$

Р-16.пр.3

Найдя первый интеграл, решить систему при $x > 0, z > 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -x^2, \\ \dot{y} = xy - 2z^2, \\ \dot{z} = xz. \end{array} \right.$$

Перемножая крест-накрест первое и третье уравнения, получаем $z\dot{x} = -x\dot{z}$. Отбрасывая dt, находим отсюда, что $xz = C_1$. Значит, $u = xz-$ первый интеграл. Из третьего уравнения находим $z = C_1t + C_2$. Тогда $x = \frac{C_1}{C_1t+C_2}$. Подставляя найденные x, z во второе уравнение системы, получаем уравнение для y:

$$\dot{y} = \frac{C_1y}{C_1t + C_2} - 2\left(C_1t + C_2\right)^2.$$

Это линейное уравнение первого порядка, общим решением которого является

$$y = \left(C_1t + C_2\right)\left(C_3 - C_1t^2 - 2C_2t\right).$$

Р-16.пр.4

Найдя два независимые первые интегралы системы, решить при $x > z > 0, y > 0$ систему

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = x^2 + z^2 \\ \dot{y} = y(x - z) \\ \dot{z} = 2xz \end{array} \right.$$

получим уравнение

$$2xzdx = \left(x^2 + z^2\right)dz,$$

которое можно записать в виде $d\left(\frac{x^2}{z}\right) = dz$. Отсюда $\frac{x^2}{z} - z = C_1$. Значит, $u_1 = \frac{x^2}{z} - z$ - первый интеграл системы. Вычтем из первого уравнения третье уравнение и рассмотрим полученное уравнение со вторым уравнением системы. Имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} - \dot{z} = (x - z)^2, \\ \dot{y} = y(x - z). \end{array} \right.$$

Перемножая крест-накрест эти два уравнения, сокращая на $x-z \neq 0$ и отбрасывая dt, получаем $yd(x-z) = (x - z)dy$. Отсюда $x - z = C_2y$ и, значит, $u_2 = \frac{x-z}{y}$ - первый интеграл системы. Можно проверить, что при $x > z > 0, y > 0$ первые интегралы u_1, u_2 являются независимыми. Подставляя $x - z = C_2y$ во второе уравнение исходной системы, получаем $\dot{y} = C_2y^2$. Отсюда $y(t) = \frac{1}{C_3-C_2t}$. Из системы $\left\{ \begin{array}{l} x - z = C_2y, \\ x^2 - z^2 = C_1z \end{array} \right.$ находим $z = \frac{C_2^2y^2}{C_1-2C_2y}, x = C_2y + \frac{C_2^2y^2}{C_1-2C_2y}$. Подставляя в эти формулы выражение для $y(t)$, получаем, что

$$z(t) = \frac{C_2^2}{(C_3 - C_2t)\left(C_1C_3 - C_1C_2t - 2C_2\right)},$$
$$x(t) = \frac{C_2\left(C_1C_3 - C_1C_2t - C_2\right)}{(C_3 - C_2t)\left(C_1C_3 - C_1C_2t - 2C_2\right)}.$$

Найдя первый интеграл, решить системы $(1 - 17)$ в указанных областях:

P-16.1

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x}{(x+y)^2}, \\ \dot{y} = \frac{y}{(x+y)^2}, (x > 0, y > 0). \end{cases}$$

P-16.2

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 y \\ \dot{y} = xy^2, (x > 0, y > 0). \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = \frac{x^2}{y} \\ \dot{y} = x, (x > 0, y > 0) \end{cases}$$

P-16.4

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x}{x-y} \\ \dot{y} = \dfrac{y}{x-y}, (x > y > 0) \end{cases}$$

P-16.5

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{x}{y} \\ \dot{y} = \frac{y}{x}, (x > 0, y > 0) \end{cases}$$

P-16.6

$$\begin{cases} \dot{x} = x - xy \\ \dot{y} = -x + xy, (x > 0, x + y > 1) \end{cases}$$

P-16.7

$$\begin{cases} \dot{x} = y - xy, \\ \dot{y} = -y + xy, (y > 0, x + y > 1). \end{cases}$$

P-16.8

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{x}{x^2+y^2}, \\ \dot{y} = \frac{y}{x^2+y^2}, (x > 0, y > 0) \end{cases}$$

P-16.9

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = \frac{y^2}{x}, (x > 0, y > 0, xy < 2). \end{cases}$$

P-16.10

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{y} \\ \dot{y} = \frac{y^2}{x}, (x > 0, y > 0). \end{cases}$$

P-16.11

$$\begin{cases} \dot{x} = xy - x^2 \\ \dot{y} = y^2 \\ \dot{z} = z^2 + 2yz, (x > 0, y > 0, z > 0) \end{cases}$$

P-16.12

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2, \\ \dot{y} = yz, \\ \dot{z} = -z^2, (y > 0, z > 0) \end{cases}$$

P-16.13

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^2 \\ \dot{y} = xy - 2z^2 \\ \dot{z} = xz, (x > 0) \end{cases}$$

P-16.14

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 + z, \\ \dot{y} = y^2 e^{3x}, \\ \dot{z} = (1+z)^2, (y > 0, z > -1). \end{cases}$$

P-16.15

$$\begin{cases} \dot{x} = (1-x)^4, \\ \dot{y} = (x-1)^3, \\ \dot{z} = z^3 e^{-y}, (x > 1, z > 0). \end{cases}$$

P-16.16

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2y+z), \\ \dot{y} = xe^z + y, \\ \dot{z} = -(2y+z), (x > 0). \end{cases}$$

P-16.17

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y^2, \\ \dot{y} = y, \\ \dot{z} = x + y^2 + z, (y > 0). \end{cases}$$

Найдя два независимые первые интегралы системы, решить системы (18-26) в указанных областях:

P-16.20

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x+y) \\ \dot{y} = -y(x+y) \\ \dot{z} = -z(x-y), (x > 0, y > 0, z > 0) \end{cases}$$

P-16.21

$$\begin{cases} \dot{x} = x(y-z) \\ \dot{y} = -y(y+z) \\ \dot{z} = z(y+z), (x > 0, y > 0, z > 0) \end{cases}$$

P-16.23

$$\begin{cases} \dot{x} = xy, \\ \dot{y} = y, \\ \dot{z} = xe^{-y} + z, (y > 0). \end{cases}$$

P-16.24

$$\begin{cases} \dot{x} = xz \\ \dot{y} = x + yz \\ \dot{z} = -z^2, (z > 0). \end{cases}$$

P-16.25

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 3x^2 z^2, \\ \dot{y} = 3x^2 y^2 z, \\ \dot{z} = z, (x > 0, y > 0, z > 0). \end{cases}$$

P-16.26

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ \dot{y} = 2x^3 - xy - z, \\ \dot{z} = xz - 2x^4, (x > 0). \end{cases}$$

P-16.27

С помощью первого интеграла убедиться в том, что положение равновесия $(0, 0)$ является центром для систем

а) $\begin{cases} \dot{x} = -y - xy^2 \\ \dot{y} = x + x^2 y \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dot{x} = x^2 y + y^3 \\ \dot{y} = -xy^2 - x^3 \end{cases}$

15.4 Problems of partial differential equations of the first order

(??? мб тут олимпиадные задачи потом порешаю, посмотрим, пока все-таки не совсем до них)

15.4.1 Problems about Linear Homogeneous Equations

ПримеР 1. При $x > 0, z > 0$ найти общее решение уравнения

$$3xyz^2 \frac{\partial u}{\partial x} + 3y^2 z^2 \frac{\partial u}{\partial y} - \left(2x^2 + yz^3\right) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

и решить для этого уравнения задачу Коши с начальным условием $u = x^4 + xz^3$ при $y = \frac{1}{x}$.

Найдем независимые первые интегралы характеристической системы для заданного уравнения

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 3xyz^2 \\ \dot{y}(t) = 3y^2 z^2 \\ \dot{z}(t) = -\left(2x^2 + yz^3\right). \end{cases}$$

Перемножив крест-накрест первых два уравнения этой системы, имеем

$$3y^2 z^2 \dot{x}(t) = 3xyz^2 \dot{y}(t).$$

Сократив на $3yz^2$ и отбросив dt, получаем

$$ydx = xdy.$$

Отсюда $y = C_1 x$ и, значит, $u_1 = \frac{y}{x}$ - первый интеграл. Подставив найденное значение $y = C_1 x$ в первое и третье уравнения характеристической системы, имеем

$$\begin{cases} \dot{x} = 3C_1 x^2 z^2, \\ \dot{z} = -\left(2x^2 + C_1 xz^3\right). \end{cases}$$

Перемножая крест-накрест эти уравнения, сокращая на x и отбрасывая dt, получаем

$$-\left(2x + C_1 z^3\right) dx = 3C_1 xz^2 dz.$$

Полагая $C_1 z^3 = t$, отсюда для t находим линейное уравнение первого порядка

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{t}{x} - 2,$$

общим решением которого служит $t = \frac{C_2}{x} - x$. Подставляя $C_1 z^3$ вместо t и $\frac{y}{x}$ вместо C_1, находим еще один первый интеграл $u_2 = x^2 + yz^3$. Общим решением заданного уравнения является

$$u = F\left(\frac{y}{x}, x^2 + yz^3\right),$$

где $F(u_1, u_2)$ - произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Чтобы решить задачу Коши, рассматриваем систему уравнений

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ u_1 = \frac{y}{x} \\ u_2 = x^2 + yz^3. \end{cases}$$

Из этой системы уравнений находим, что

$$x^4 + xz^3 = \frac{u_2}{u_1}$$

Следовательно, решением задачи Коши является

$$u = \frac{x}{y}\left(x^2 + yz^3\right) = \frac{x^3}{y} + xz^3$$

P-17.пр.2

При $x < 0, z > 0$ найти общее решение уравнения

$$xy\frac{\partial u}{\partial x} + \left(2x^3y + y^2\right)\frac{\partial u}{\partial y} - \left(x + 2x^3z + yz\right)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

и решить для этого уравнения задачу Коши с начальным условием $u = \frac{y}{x}$ при $2x + yz = 0$.
Составляем характеристическую систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = xy \\ \dot{y}(t) = 2z^3y + y^2 \\ \dot{z}(t) = -\left(x + 2x^3z + yz\right) \end{cases}$$

Перемножая крест-накрест первые два уравнения системы, сокращая на y и отбрасывая dt, получаем для y линейное уравнение первого порядка

$$xdy = \left(2x^3 + y\right)dx$$

общим решением которого является $y = C_1x + x^3$. Значит, первым интегралом является $u_1 = \frac{y}{x} - x^2$. Умножая первое уравнение характеристической системы на $\frac{1}{y}$, второе уравнение на $\frac{z}{y}$ и складывая полученные выражения с третьим уравнением, находим, что

$$\frac{\dot{x}}{y} + \frac{z}{y}\dot{y} + \dot{z} = 0.$$

Отбрасывая dt, отсюда $dx + zdy + ydz = 0$ или $dx + d(yz) = 0$. Следовательно, $x + yz = C_2$, значит, $u_2 = x + yz$ - первый интеграл характеристической системы. Общим решением заданного уравнения является

$$u = F\left(\frac{y}{x} - x^2, x + yz\right),$$

где $F(u_1, u_2)$ - произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Для решения задачи Коши составляем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + yz = 0 \\ u_1 = \frac{y}{x} - x^2 \\ u_2 = x + yz \end{cases}$$

Из этой системы находим, что

$$\frac{y}{x} = u_1 + u_2^2.$$

Следовательно, решением задачи Коши является

$$u = \frac{y}{x} - x^2 + (x + yz)^2 = \frac{y}{x} + 2xyz + y^2z^2$$

Найти общее решение уравнения и решить задачу Коши с указанным начальным условием (1-100):

P-17.1

$x\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}y\frac{\partial u}{\partial y} + \left(z + x^4y^2\right)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = \frac{2z - x^2}{2x^2}$ при $xy = -1$.

P-17.2

$x\frac{\partial u}{\partial x} + \left(y + \frac{x^4}{z}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + 2z\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = \frac{yz^5 - 1}{z^7}$ при $xz = 1$.

P-17.3

$\frac{z}{y}\frac{\partial u}{\partial x} - 2yz\frac{\partial u}{\partial y} + \left(z^2 + 2xy - 1\right)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = xy - \frac{1}{2}$ при $xy + z^2 = 1$.

P-17.4

$\left(x^2 + z^2\right)\frac{\partial u}{\partial x} + 2\left(xy - xz^3\right)\frac{\partial u}{\partial y} + 2xz\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = \frac{y}{z} - \frac{z^2}{2}$ при $x^2 - z^2 = 2$.

P-17.5

$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z^2(x - 3y)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = \frac{x^2}{y}$ при $3yz = 1$.

P-17.6

$\left(y + 2z^2\right)\frac{\partial u}{\partial x} - 2x^2z\frac{\partial u}{\partial y} + x^2\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = \frac{4z^3 - x^3}{3}$ при $y + z^2 + yz = 0$.

P-17.7

$xy^3\frac{\partial u}{\partial x} + x^2z^2\frac{\partial u}{\partial y} + y^3z\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = y^4$ при $xz^3 = 1$.

P-17.8

$x\frac{\partial u}{\partial x} + (xz + y)\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = 1 - x$ при $x + y - z = 0$.

P-17.9

$x(x + z)\frac{\partial u}{\partial x} + y(x - z)\frac{\partial u}{\partial y} - z(x + z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = x + y$ при $z = 1, x > 0$

P-17.10

$2y\left(x - y^2\right)\frac{\partial u}{\partial x} - \left(x - y^2\right)\frac{\partial u}{\partial y} - 4yz\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = xy^2$ при $z = 1$.

P-17.11

$x(x + y)\frac{\partial u}{\partial x} - y(x + y)\frac{\partial u}{\partial y} - z(x - y)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = x^2 + y^2$ при $z = 1$.

P-17.12

$x(y - z)\frac{\partial u}{\partial x} - y(y + z)\frac{\partial u}{\partial y} + z(y + z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = y^2 - x$ при $z = 1$.

P-17.13

$2xz\frac{\partial u}{\partial x} + 2yz\frac{\partial u}{\partial y} + \Big(2x^2 + y'\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = \frac{z^2}{y}$ при $y = x^2$.

P-17.14

$(z + 2x - 2y)\frac{\partial u}{\partial x} + (z - 2x + 2y)\frac{\partial u}{\partial y} - 2z\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = xz^4$ при $x + y = 0$.

P-17.15

$xz\frac{\partial u}{\partial x} - yz\frac{\partial u}{\partial y} + \left(x^3y + x^2\right)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = \left(\frac{z}{y}\right)^2$ при $y = x$.

P-17.16

$(z - x + 3y)\frac{\partial u}{\partial x} + (z + x - 3y)\frac{\partial u}{\partial y} - 2z\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = \frac{4y}{z}$ при $x = 3y$.

P-17.17

$x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} + \left(x^2y + z\right)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = x^3$ при $z = x$.

P-17.18

$xy\frac{\partial u}{\partial x} - x^2\frac{\partial u}{\partial y} + yz\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = x$ при $z = x^2 + y^2$

P-17.19

$2x\frac{\partial u}{\partial x} + (y+z)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0, u = \left(\frac{y}{z}\right)^2$ при $x = z^2$.

P-17.20

$\left(x^2 + y^2\right)\frac{\partial u}{\partial x} + 2xy\frac{\partial u}{\partial y} + xz\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = \left(\frac{x}{z}\right)^2$ при $y = z$.

P-17.21

$(2xz - x)\frac{\partial u}{\partial x} + (2yz - y)\frac{\partial u}{\partial y} + \left(3z^2 - 3z - y^2\right)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = xz$ при $y = z$.

P-17.22

$\left(2x^2z^2 + x\right)\frac{\partial u}{\partial x} - \left(4xyz^2 - y\right)\frac{\partial u}{\partial y} - \left(4xz^3 - z\right)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = yz^2$ при $x = z$.

P-17.23

$\left(x^3y^2 + x\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(y - 3x^2y^3\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \left(x^2y^2z + z\right)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = x^3z$ при $y = x$.

P-17.24

$\left(x^2y + 2x\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(2xy^2 + y\right)\frac{\partial u}{\partial y} - (xyz + 2z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = yz + y + \frac{1}{y}$ при $x = y$.

P-17.25

$x^2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(2xy - y^2\right)\frac{\partial u}{\partial y} + (2xz - yz)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = \frac{y^2}{z}$ при $x = 2y$.

P-17.26

$2x\frac{\partial u}{\partial x} + \left(2y - 3xz^2\right)\frac{\partial u}{\partial y} - 3z\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = y - \frac{2}{x}$ при $xz = 2$.

P-17.27

$x\frac{\partial u}{\partial x} + \left(x^2 + y + z^2\right)\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = \frac{y}{x}$ при $x^2 + z^2 = z$.

P-17.28

$\left(3x - y^2\right)\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + \left(z + x - y^2\right)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = z - y^2$ при $x = 3y^2$.

P-17.29

$(x + y + z)\frac{\partial u}{\partial x} - 2y\frac{\partial u}{\partial y} + (x - y + z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = \frac{z}{y}$ при $x = z$.

P-17.35

$xz^2\frac{\partial u}{\partial x} + 2\left(y - z^2\right)y\frac{\partial u}{\partial y} - z^3\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = x^2e^z$ при $y = z, z < 0$.

P-17.36

$x^2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(2z - e^y\right)\frac{\partial u}{\partial y} + z^2\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = \frac{(z-x)^2}{x^2}$ при $y = \ln x$.

P-17.37

$(x + z)\frac{\partial u}{\partial x} + (y + z)\frac{\partial u}{\partial y} + (x + y)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = (1 + z)(1 - 2z)^2$ при $x + y = 1$.

P-17.38

$xy\frac{\partial u}{\partial x}+(x-2z)\frac{\partial u}{\partial y}+yz\frac{\partial u}{\partial z}=0, u=x$ при $y^2=2x$.

P-17.39

$x^2z\frac{\partial u}{\partial x}+y^2z\frac{\partial u}{\partial y}+(x+y)\frac{\partial u}{\partial z}=0, u=e^{-\frac{z^2}{2}}$ при $x=2y$.

P-17.40

$(1+z)\frac{\partial u}{\partial x}+y^2e^{3x}\frac{\partial u}{\partial y}+(1+z)^2\frac{\partial u}{\partial z}=0, u=e^{2x}$ при $y=2(1+z)e^{-3x}$.

P-17.41

$z\left(x+y^2\cos y\right)\frac{\partial u}{\partial x}+yz\frac{\partial u}{\partial y}+y\cos y\frac{\partial u}{\partial z}=0, u=\frac{3z^2}{2}$ при $x=2y\sin y+yz^2$ $\left(0<y<\frac{\pi}{2}\right)$

P-17.42

$z\cos x\frac{\partial u}{\partial x}+z(1-y\sin x)\frac{\partial u}{\partial y}+(1-z)\sin x\frac{\partial u}{\partial z}=0, u=e^z(z-1)$ при $y=1+\sin x$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

P-17.43

$(1-x)^4\frac{\partial u}{\partial x}+(1-x)^3\frac{\partial u}{\partial y}+z^3e^{-y}\frac{\partial u}{\partial z}=0, u=\frac{1}{(x-1)^2}$ при $z=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-1)^{\frac{3}{2}}e^{\frac{y}{2}}, (x>1)$.

P-17.46

$\left(xy-x^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}+y^2\frac{\partial u}{\partial y}+\left(e^{\frac{y}{x}}+yz\right)\frac{\partial u}{\partial z}=0, u=\frac{y}{1+y}$ при $y=x\ln z, y>0$.

P-17.47

$x\frac{\partial u}{\partial x}+(z-y)\frac{\partial u}{\partial y}+xz\operatorname{ctg}x\frac{\partial u}{\partial z}=0, u=\sin x+\cos x$ при $z=xy$, $\left(0<x<\frac{\pi}{4}\right)$

P-17.48

$(x+2ze^y)\frac{\partial u}{\partial x}+(x-y)\frac{\partial u}{\partial y}+z(x-y)\frac{\partial u}{\partial z}=0, u=e^x$ при $x=2y, z>0$.

P-17.49

$\left(x+y^2+2z\right)\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+y^2\frac{\partial u}{\partial z}=0, u=xy-y^3$ при $z=y^2$.

P-17.50

$x(2y+z)\frac{\partial u}{\partial x}+(xe^z+y)\frac{\partial u}{\partial y}-(2y+z)\frac{\partial u}{\partial z}=0, u=z$ при $y+z=0, x>0$.

P-17.51

$(x+y)\frac{\partial u}{\partial x}+(2ze^x-y)\frac{\partial u}{\partial y}+(x+y)z\frac{\partial u}{\partial z}=0, u=z^2$ при $2x+y=0,\ z>0$.

P-17.52

$xy\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+(xe^{-y}+z)\frac{\partial u}{\partial z}=0, u=x^2$ при $z=(y-x)e^{-y}$

P-17.53

$x^2(1+xz)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{xz}{y}\frac{\partial u}{\partial y}+(1+xz)\frac{\partial u}{\partial z}=0, u=xy^2$ при $xz=1, x>0$.

P-17.54

$\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{x+yz}\frac{\partial u}{\partial z}=0, u=x$ при $z=0$.

P-17.55

$xy\frac{\partial u}{\partial x} + y^2\frac{\partial u}{\partial y} + \left(x^2 + y^2z^2\right)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = y^2$ при $z = 0$.

P-17.56

$x(1 - xy)\frac{\partial u}{\partial x} + xy^2\frac{\partial u}{\partial y} + z\left(xy^2 + xy - 1\right)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = xz(x - 1)$ при $y = xz$, $x > 0, y < 0$.

P-17.60

$2xe^{2z}\frac{\partial u}{\partial x} - 2e^{2z}\frac{\partial u}{\partial y} + x(1 - y)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = \left(\frac{1}{x} + y\right)e^{-y}$ при $z = 0$

P-17.61

$x\cos z\frac{\partial u}{\partial x} - \operatorname{tg} y \cdot \cos z\frac{\partial u}{\partial y} + x(\operatorname{tg} y - y)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = x\sin x\left(x^2 + \sin z\right)$ при $y = x\left(0 < y < \frac{\pi}{2}, 0 < z < \frac{\pi}{2}\right)$.

P-17.62

$xz\frac{\partial u}{\partial x} + (x + yz)\frac{\partial u}{\partial y} - z^2\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = xy - x^2$ при $z = 1$.

P-17.63

$\left(x^2 + y^2\right)\frac{\partial u}{\partial x} + 2xy\frac{\partial u}{\partial y} + e^{-z}\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = e^z$ при $x = 2y, x > y > 0$.

P-17.64

$(x + y - z)\frac{\partial u}{\partial x} + (1 + z)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = y(1 + x + y)$ при $z = 0$.

P-17.65

$x^2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(2xy - y^2\right)\frac{\partial u}{\partial y} + z^2\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = yz - y - z$ при $x = yz$.

P-17.66

$(y - z)\frac{\partial u}{\partial x} + (x - z)\frac{\partial u}{\partial y} + (y - x)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = 2(x - y)$ при $x - z = 2y$.

P-17.67

$2y\cos^2 x\frac{\partial u}{\partial x} + \left(1 + y^2\sin 2x\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\sin 2z}{y}\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = x - 1 + \operatorname{ctg} z$ при $y^2\cos^2 x = 1, \left(0 < x < \frac{\pi}{4}, 0 < z < \frac{\pi}{4}\right)$.

P-17.68

$\left(x^3 + y^3\right)\frac{\partial u}{\partial x} + x^2y\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{y^3\sqrt{1+z^2}}{x}\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = z + \sqrt{1 + z^2}$ при $x^3 = 3y^3\ln x$.

P-17.69

$\left(2y^2 + z\right)\frac{\partial u}{\partial x} + 2xy\frac{\partial u}{\partial y} + 2xz\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = \frac{x^2}{z}$ при $y^2 = z$

P-17.74

$z^2(z - y)\frac{\partial u}{\partial x} + y^2(2z - y)\frac{\partial u}{\partial y} + yz^2\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = e^{\frac{x}{z}}$ при $y = \frac{z}{2}, z > 0$.

P-17.75

$x(y - x)\frac{\partial u}{\partial x} + y^2\frac{\partial u}{\partial y} + yz^2e^{\frac{y}{x}}\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = y\left(1 + e^{-\frac{y}{x}}\right)$ при $z = 1, y > 0$.

P-17.76

$\left(x^2 + z^2\right)\frac{\partial u}{\partial x} + y(x - z)\frac{\partial u}{\partial y} + 2xz\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = x + z$ при $y = z$.

P-17.77

$\frac{x}{2}\frac{\partial u}{\partial x} - y\left(1 + x^2yz\right)\frac{\partial u}{\partial y} - z\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = z$ при $x^2y = 1$.

P-17.78

$2z\left(x - y^2\right)\frac{\partial u}{\partial x} + 2yz\frac{\partial u}{\partial y} + \left(y^2 + z^2\right)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = x + z^2$ при $y^2 = 1 - x$.

P-17.79

$2xy\frac{\partial u}{\partial x} + \left(1 - y^2 - 2xz\right)\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{y}{x}\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = \frac{1}{2} - y^2$ при $y^2 + xz = 1$.

P-17.80

$\left(x + \frac{z^4}{y}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = xy$ при $z = 1$.

P-17.81

$x^2z\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} + (2y + z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = 1 + \frac{1}{xy}$ при $y + z = 1$.

P-17.82

$\left(y - z^3\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(x + z^3\right)\frac{\partial u}{\partial y} - z\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = y^2 - x^2$ при $z = 1$.

P-17.83

$2xy\frac{\partial u}{\partial x} + \left(2x - y^2\right)\frac{\partial u}{\partial y} + y^3z\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = x^2z^2$ при $y^2 = 2x$.

P-17.84

$\left(x - 2x^2y\right)\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + 2x^2z^2\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = y^2z$ при $x - y = 0$.

P-17.92

$x(2z - x)\frac{\partial u}{\partial x} + 2z^2(z - x)\frac{\partial u}{\partial y} + xz\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = \frac{y}{2 - z^2}$ при $xz = 2, xz > 0$.

P-17.93

$3xyz\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z(2 + 3yz)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = xy^3$ при $x = yz, xz < 0$.

P-17.94

$2\frac{\partial u}{\partial x} + 2xz^2\frac{\partial u}{\partial y} + xz^3\left(2yz^2 - 2 - z^2\right)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = x^2z^2$ при $y = 0$.

P-17.95

$x\frac{\partial u}{\partial x} + y(3 + 4xy)\frac{\partial u}{\partial y} + 4xyz\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = \frac{x^7}{y}$ при $z = xy, x > 0, y > 0,\ z > 0$.

P-17.96

$yz\frac{\partial u}{\partial x} + y^2z(1 - xy)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = yz^2$ при $x = 0$.

P-17.97

$\left(x - y^2\right)\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + \left(x + y^2 + z\right)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = \frac{z}{2y^2}$ при $x = y^2, y > 0$.

P-17.98

$\left(2x + y^2 + z\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \left(z - 2y + y^2\right)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, u = \frac{x - e^y}{2}$ при $z = x - y^2$.

P-17.99

$x^2\frac{\partial u}{\partial x}+y(2z-y)\frac{\partial u}{\partial y}+z^2\frac{\partial u}{\partial z}=0, u=1-\frac{z}{y}$ при $z=2x$.

P-17.100

$\left[(x+y-z)^2+y-z-2\right]\frac{\partial u}{\partial x}+(z+1)\frac{\partial u}{\partial y}+(y-1)\frac{\partial u}{\partial z}=0, u=\frac{1}{x+y+1}$ при $z=1, y>1$.
Решить, преобразовав его к указанным новым независимым переменным (101-102):

P-17.101

$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0, u=x+y, v=x-y$

P-17.102

$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, u=x, v=x+y, t=x+z$

15.4.2 Problems about Quasilinear and Nonlinear Equations

(??? как с интегрируемыми системами это связано??? вроде тут простейшие эти уравнения?)

P-18.пр.1

Найти общее решение уравнения

$$(z-y)\frac{\partial z}{\partial x}+(x-z)\frac{\partial z}{\partial y}=y-x$$

и ту интегральную поверхность этого уравнения, которая проходит через прямую $x=1, y=z$.
Характеристическая система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=z-y, \\ \dot{y}(t)=x-z, \\ \dot{z}(t)=y-x. \end{cases}$$

Сложив первые два уравнения, рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}+\dot{y}=x-y, \\ \dot{z}=y-x. \end{cases}$$

Отсюда $\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}=0$ или $dx+dy+dz=0$, что дает первый интеграл

$$u_1=x+y+z.$$

Если первое уравнение характеристической системы умножить на x, второе уравнение умножить на y, третье уравнение умножить на z и сложить, то получаем $x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z}=0$ или $xdx+ydy+zdz=0$. Отсюда находим еще один первый интеграл

$$u_2=x^2+y^2+z^2$$

Общее решение уравнения задается формулой

$$F\left(x+y+z, x^2+y^2+z^2\right)=0,$$

где $F(u_1,u_2)$ - произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Для решения задачи Коши, исключая x, y, z из системы

$$\begin{cases} x=1, y=z, \\ u_1=x+y+z, \\ u_2=x^2+y^2+z^2, \end{cases}$$

находим, что $u_2=1+\frac{1}{2}(u_1-1)^2$. Следовательно, решение задачи Коши задает функция

$$x^2+y^2+z^2=1+\frac{1}{2}(x+y+z-1)^2.$$

Если кривая γ задана параметрически

$$x = \varphi_1(\tau), y = \varphi_2(\tau), z = \varphi_3(\tau),$$

то из системы уравнений

$$\begin{cases} x = \varphi_1(\tau), y = \varphi_2(\tau), z = \varphi_3(\tau) \\ u_1 = u_1(x, y, z) \\ u_2 = u_2(x, y, z) \end{cases}$$

находим связь $\Phi(u_1, u_2) = 0$. Тогда уравнение $\Phi[u_1(x, y, z), u_2(x, y, z)] = 0$ задает искомую интегральную поверхность, проходящую через кривую γ.

P-18.пр.2

Найти интегральную поверхность уравнения

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

проходящую черех кривую $x = \tau, y = \tau^2, z = 0$.

Составим характеристическую систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x, \\ \dot{y}(t) = y, \\ \dot{z}(t) = z - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \end{cases}$$

Перемножая крест-накрест первые два уравнения системы и отбрасывая dt, находим, что $ydx = xdy$. Отсюда $u_1 = \frac{y}{x}$ - первый интеграл. Умножая первое уравнение на x, второе - на y, третье - на z и складывая, имеем

$$x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = x^2 + y^2 + z^2 - z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Перемножая крест-накрест это выражение с третьим уравнением системы, получаем после отбрасывания dt

$$\left(z - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)(xdx + ydy + zdz) = \left(x^2 + y^2 + z^2 - z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)dz.$$

Отсюда Значит, $u_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + z$. Из системы уравнений

$$\begin{cases} x = \tau, y = \tau^2, z = 0, \\ u_1 = \frac{y}{x} \\ u_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + z \end{cases}$$

находим, что $u_2^2 = u_1^2 + u_1^4$. Тогда искомая интегральная поверхность задается уравнением

$$\left(z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^2 = \frac{y^2}{x^2} + \frac{y^4}{x^4}.$$

В задачах (1-33) найти интегральную поверхность уравнения, проходящую через заданную линию.

P-18.1

$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2, x^2 + y^2 = 1, z = x^2 - 1.$

P-18.2

$\left(x^2 - y^2\right)\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} + xyz = 0, z = x, y = 1.$

P-18.3

$xz^4\frac{\partial z}{\partial x} + yz^4\frac{\partial z}{\partial y} = x^2y^2, z = x^2, y = \frac{1}{x}.$

P-18.4

$\left(x^2y - x\right)\frac{\partial z}{\partial x} - xy^2\frac{\partial z}{\partial y} = z, z = x, y = 1.$

P-18.5

$\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=xz, y=1, z=x.$

P-18.6

$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=x+y, x=0, y=z.$

P-18.7

$\left(y^2+z^2-x^2\right)\frac{\partial z}{\partial x}-2xy\frac{\partial z}{\partial y}+2xz=0, x=0, z=y^2.$

P-18.8

$(z-y)\frac{\partial z}{\partial x}+(x-z)\frac{\partial z}{\partial y}=y-x, x=y=z.$

P-18.9

$xz\frac{\partial z}{\partial x}+yz\frac{\partial z}{\partial y}+x^2+y^2=0, x=1, y=z.$

P-18.10

$\left(x^2-y^2-z^2\right)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}-2xz=0, x=0, y=\sin\tau, z=\cos\tau.$

P-18.11

$(x-y)\frac{\partial z}{\partial x}+(x+y)\frac{\partial z}{\partial y}-z=0, x=\cos\tau, y=\sin\tau, z=\tau.$

P-18.12

$y^4z\frac{\partial z}{\partial x}-xy^3z\frac{\partial z}{\partial y}+x\left(x^2+y^2\right)=0, x=\sqrt{\tau}, y=1, z=\sqrt{\tau^2+\tau}.$

P-18.13

$\left(x^2-y^2+z^2\right)\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz, x=1, y=\operatorname{ch}\tau, z=\operatorname{sh}\tau.$

P-18.14

$\left(xy-x^2\right)\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2+2yz, y=1, z=2x.$

P-18.15

$x\left(4-x^2\right)\frac{\partial z}{\partial x}+\left(2x^2y+1\right)\frac{\partial z}{\partial y}=x, x=1, y=-z.$

P-18.16

$2x^3\frac{\partial z}{\partial x}+y\left(2x^2-y^2\right)\frac{\partial z}{\partial y}=1+z^2, x=1, y=\operatorname{arctg} z.$

P-18.17

$(2x+y)\frac{\partial z}{\partial x}+(x+2y)\left(\frac{\partial z}{\partial y}-1\right)=0, x=0, z=2y.$

P-18.18

$y^2\frac{\partial z}{\partial x}+yz\frac{\partial z}{\partial y}=-z^2, x-y=0, x-yz=1.$

P-18.19

$(z-y)^2\frac{\partial z}{\partial x}+xz\frac{\partial z}{\partial y}=xy, x=0, y=0.$

P-18.20

$y\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x}, x = 1, z = y^2.$

P-18.21

$(xz + y)\frac{\partial z}{\partial x} + (x + yz)\frac{\partial z}{\partial y} = 1 - z^2, z = 2, 2x = 3y.$

P-18.22

$(2y - z)\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z, y = 3z^2, x + z - 4y = 0.$

P-18.23

$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = x + y + z, x + 2y = 0, z = 0.$

P-18.24

$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z, y = x^2, z = 2xy.$

P-18.25

$-x^2\frac{\partial z}{\partial x} + \left(xy - 2z^2\right)\frac{\partial z}{\partial y} = xz, xy = 1, x + z = 0.$

P-18.26

$\left(2x + y^2 + z^2\right)\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z, y - z + 1 = 0, z = 2x.$

P-18.27

$-(x + 3yz)\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z, x + 2yz = 0, yz = 1.$

P-18.28

$\left(2y^3 - x^2\right)\frac{\partial z}{\partial x} - 2xy\frac{\partial z}{\partial y} + 2x^3 = 0, y = z = 1.$

P-18.29

$\left(z^2 - y^2\right)\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial z}{\partial y} + y = 0, x = 0, y = z.$

P-18.30

$\left(x + y^2 + z^2\right)\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z, x = y = 1$

P-18.31

$\left(x^2 - y^2\right)\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} + xyz = 0, z = x, y = 1.$

P-18.32

$2x\frac{\partial z}{\partial x} + (y + z)\frac{\partial z}{\partial y} = y + z, x = y^3, z = 0$

P-18.33

$3y\frac{\partial z}{\partial x} + (x + 2y)\frac{\partial z}{\partial y} = 3\cos^2 z \cdot \operatorname{tg} z, x + 3y = 1, z = \frac{\pi}{4}\left(0 < z < \frac{\pi}{2}\right).$

P-18.34

Найти поверхность, проходящую через окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z = 1$ и ортогональную к семейству сфер $x^2 + y^2 + z^2 = bx$.

P-18.35

Решить

$$-y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=yz^2,$$

преобразовав его к новым независимым переменным $u=x^2+y^2$. $v=x$.

P-18.36

Решить

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z,$$

преобразовав его к новым независимым переменным $u=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}, v=y$. В задачах (37-40) найти решение нелинейного уравнения, удовлетворяющего указанному н. у..

P-18.37

$x+y\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}, u=x, y=0$

P-18.38

$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+y\frac{\partial u}{\partial y}=0, u=x, y=1$

P-18.39

$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2=u, u=x, y=1.$

P-18.40

$x\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2=\frac{\partial u}{\partial y}, u=x, y=1.$

P-18.41

Определить функцию $z=z(x,y)$, удовлетворяющую одновременно двум уравнениям

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0, x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y^2}{x^2+y^2}.$$

P-18.42

Определить функцию $u=u(x,y)$, удовлетворяющую одновременно двум уравнениям

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0, \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^3=2(x-y)^3.$$

15.5 Variational Calculus Tasks

15.5.1 Problems about the simplest variations

P-пр.1

Решить простейшую вариационную задачу, если

$$J(y)=\int\limits_0^1\left[xy^2+x^2yy'+\left(1+x^2\right)\left(y'\right)^2\right]dx,\quad y(0)=0,\quad y(1)=1.$$

Уравнение Эйлера имеет вид

$$\left[\left(1+x^2\right)y'\right]'=0.$$

Экстремали задаются равенством $y = C_1 \operatorname{arctg} x + C_2$, где C_1 и C_2 - произвольные постоянные. Используя граничные условия, получаем допустимую экстремаль $\hat{y}(x) = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} x$. Проверим, действительно ли на $\hat{y}(x)$ достигается экстремум $J(y)$. Для любой $\eta(x) \in^{\circ 1} [0,1]$ имеем

$$\Delta J(\hat{y}) = J(\hat{y}+\eta) - J(\hat{y}) = \int\limits_0^1 \left\{ x(\hat{y}+\eta)^2 + x^2(\hat{y}+\eta)\left(\hat{y}'+\eta'\right) + \right.$$

$$\left. + \left(1+x^2\right)\left(\hat{y}'+\eta'\right)^2 - x\hat{y}^2 - x^2\hat{y}\hat{y}' + \left(1+x^2\right)\left(\hat{y}'\right)^2 \right\} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left[2x\hat{y} + x^2\hat{y}'\right]\eta dx + \int\limits_0^1 \left[x^2\hat{y} + x^2\eta + 2\left(1+x^2\right)\hat{y}'\right]\eta' dx +$$

$$+ \int\limits_0^1 \left[x\eta^2 + \left(1+x^2\right)\left(\eta'\right)^2\right] dx$$

Во втором интеграле проинтегрируем по частям. Получаем

$$\int\limits_0^1 \left[x^2\hat{y} + x^2\eta + 2\left(1+x^2\right)\hat{y}'\right]\eta' dx = \left[x^2\hat{y} + 2\left(1+x^2\right)\hat{y}'\right]\eta(x)\Big|_{x=0}^1 +$$

$$+ \frac{1}{2}x^2\eta^2(x)\Big|_{x=0}^1 - \int\limits_0^1 \left\{\left[x^2\hat{y} + 2\left(1+x^2\right)\hat{y}'\right]'\eta + x\eta^2\right\} dx =$$

$$= -\int \left\{\left[x^2\hat{y} + 2\left(1+x^2\right)\hat{y}'\right]'\eta + x\eta^2\right\} dx$$

так как проинтегрированная часть обращается в нуль, поскольку $\eta(x)$ обращается в нуль на концах $[0,1]$. Подставляя найденное выражение второго слагаемого в $\Delta J(\hat{y})$, находим

$$\Delta J(\hat{y}) = \int\limits_0^1 \left\{2x\hat{y} + x^2\hat{y}' - \left[x^2\hat{y} + 2\left(1+x^2\right)\hat{y}'\right]\right\}\eta dx + \int\limits_0^1 \left(1+x^2\right)\left(\eta'\right)^2 dx =$$

$$= -\int\limits_0^1 2\left[\left(1+x^2\right)\hat{y}'\right]'\eta dx + \int\limits_0^1 \left(1+x^2\right)\left(\eta'\right)^2 dx = \int\limits_0^1 \left(1+x^2\right)\left(\eta'\right)^2 dx > 0.$$

Здесь был использован тот факт, что $\hat{y}(x)$ - экстремаль и, значит, $\int\limits_0^1 \left[\left(1+x^2\right)\hat{y}'\right]'\eta dx = 0$

Таким образом, допустимая экстремаль $\hat{y}(x)$ дает абсолютный минимум в заданной простейшей вариационной задаче.

Р-пр.2

Решить простейшую вариационную задачу, если

$$J(y) = \int\limits_1^2 \left[6y^2 + x^2\left(y'\right)^2 + 12x^3y\right] dx, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 8$$

Уравнение Эйлера

$$x^2y'' + 2xy' - 6y = 6x^3$$

определяет семейство экстремалей

$$y = \frac{C_1}{x^3} + C_2x^2 + x^3,$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные. Используя граничные условия, находим допустимую экстремаль $\hat{y}(x) = x^3$. (???)

Для всякой $\eta(x) \in C^1[1,2]$ имеем

$$\Delta J(\hat{y}) = J(\hat{y}+\eta) - J(\hat{y}) = \int\limits_1^2 \left\{6(\hat{y}+\eta)^2 + x^2\left(\hat{y}'+\eta'\right)^2 + 12x^3(\hat{y}+\eta) - 6\hat{y}^2 - x^2\left(\hat{y}'\right)^2 - 12x^3\hat{y}\right\} dx =$$

$$= \int\limits_1^2 \left[6\eta^2 + x^2\left(\eta'\right)^2\right] dx + \int\limits_1^2 \left(12\hat{y} + 12x^3\right)\eta dx + 2\int\limits_1^2 x^2(\hat{y})'\eta' dx$$

Проинтегрируем по частям в последнем интеграле и воспользуемся тем, что $\eta(1) = \eta(2) = 0$. Тогда получаем

$$\Delta J(\hat{y}) = \int\limits_1^2 \left[6\eta^2 + x^2\left(\eta'\right)^2\right] dx + \int\limits_1^2 \left[12\hat{y} + 12x^3 - \frac{d}{dx}\left(2x^2\hat{y}'\right)\right]\eta dx.$$

Но выражение в квадратных скобках во втором интеграле

$$12\hat{y} + 12x^3 - \frac{d}{dx}\left(2x^2\hat{y}'\right) = -2\left(x^2\hat{y}'' + 2x^2\hat{y}' - 6\hat{y} - 6x^3\right) \equiv 0$$

на $[1,2]$, так как $\hat{y}(x)$ - решение уравнения Эйлера. Следовательно,

$$\Delta J(\hat{y}) = \int\limits_1^2 \left[6\eta^2 + x^2\left(\eta'\right)^2\right] dx > 0.$$

Это значит, что $\hat{y}(x)$ дает абсолютный минимум. Δ

P-1 Решить вариационную задачу $J(y) = \int\limits_0^1 \left(y+y'\right)^2 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$**.**

P-2 Решить вариационную задачу $J(y) = \int\limits_1^e \left[\frac{2y}{x} + yy' + x^2\left(y'\right)^2\right] dx, \quad y(1) = 1, \quad y(e) = 0.$

P-3

$$J(y) = \int^3 \left[2y - yy' + x\left(y'\right)^2\right] dx, \quad y(1) = 1, \quad y(3) = 4.$$

P-4

$$J(y) = \int\limits_0^{\pi/4} \left[4y^2 + \left(y'\right)^2 + 8y\right] dx, \quad y(0) = -1, y\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = 0.$$

P-5

$$J(y) = \int\limits_0^1 \left[\left(y'\right)^2 + y^2 + 2e^{2x}y\right] dx, \quad y(0) = \tfrac{1}{3}, \quad y(1) = \tfrac{1}{3}e^2.$$

P-6

$$J(y) = \int\limits_0^{\pi/2} \left[\left(y'\right)^2 + 4y^2 + 2y\cos x\right] dx, \quad y(0) = \tfrac{4}{5}, y\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = e^{\pi}.$$

P-7

$$J(y) = \int\limits_{-2}^{-1} \left[x^2\left(y'\right)^2 + 12y^2\right] dx, \quad y(-2) = \tfrac{1}{16}, \quad y(-1) = 1.$$

P-8

$$J(y)=\int_1^2\left[2y+yy'+x^2\left(y'\right)^2\right]dx,\quad y(1)=0,\quad y(2)=1+\ln 2.$$

P-9

$$J(y)=\int_1^2\left[xy'+y\right]^2dx,\quad y(1)=1,\quad y(2)=\tfrac{1}{2}$$

P-10

$$J(y)=\int_0^\pi\left[\left(y'+y\right)^2+2y\sin x\right]dx,\quad y(0)=0,\quad y(\pi)=1$$

P-11

$$J(y)=\int_0^1\left[x^3+\tfrac{1}{2}y^2+2\left(y'\right)^2\right]dx,\quad y(0)=0,\quad y(1)=2.$$

P-12

$$J(y)=\int_1^2\left[x\left(y'\right)^2+\tfrac{y^2}{x}+\tfrac{2y\ln x}{x}\right]dx,\quad y(1)=0,\quad y(2)=1-\ln 2$$

P-13

$$J(y)=\int_1^2\left[\tfrac{3y^2}{x^3}+\frac{\left(y'\right)^2}{x}+8y\right]dx,\quad y(1)=0,\quad y(2)=8\ln 2$$

P-14

$$J(y)=\int_1^2\left[x\left(y'\right)^2+\tfrac{y^2}{x}+4y\right]dx,\quad y(1)=0,\quad y(2)=2\ln 2$$

P-20

$$J(y)=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left[y-\tfrac{1}{2}\left(y'\right)^2\right]\sin x dx, y\left(\tfrac{\pi}{4}\right)=-\ln\sqrt{2}, y\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=0.$$

P-21

$$J(y)=\int_1^e\left[\tfrac{1}{2}x\left(y'\right)^2+\tfrac{2yy'}{x}-\tfrac{y^2}{x^2}\right]dx,\quad y(1)=1,\quad y(e)=2.$$

P-22

$$J(y)=\int_0^1\left[(1+x)e^xy+\tfrac{1}{2}e^x\left(y'\right)^2\right]dx,\quad y(0)=1,\quad y(1)=\tfrac{3}{2}.$$

P-23

$$J(y)=\int_1^2\left[\tfrac{3y^2}{x^3}+x^2+\frac{\left(y'\right)^2}{x}\right]dx,\quad y(1)=2,\quad y(2)=8\tfrac{1}{2}.$$

P-24

$$J(y)=\int_1^2\left[x\left(y'\right)^2+\tfrac{y^2}{x}\right]dx,\quad y(1)=2,\quad y(2)=2\tfrac{1}{2}.$$

P-25

$$J(y)=\int\limits_1^4\left[\sqrt{x}\,(y')^2+\tfrac{y^2}{2x\sqrt{x}}\right]dx,\quad y(1)=2,\quad y(4)=4\tfrac{1}{2}.$$

P-30

$$J(y)=\int\limits_0^{\pi/2}\left[(y')^2+2yy'+4y^2\right]dx,\quad y(0)=0, y\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=\operatorname{sh}\pi.$$

P-31

$$J(y)=\int\limits_{1/4}^{1/2}\left[\tfrac{(y')^2}{(x-1)^2}-\tfrac{2y^2}{x(x-1)^3}\right]dx, y\left(\tfrac{1}{4}\right)=1, y\left(\tfrac{1}{2}\right)=2.$$

P-32

$$J(y)=\int\limits_1^2\left[(y')^2+\tfrac{2y^2}{x^2}+\tfrac{8y}{x^4}\right]dx,\quad y(1)=1,\quad y(2)=\tfrac{1}{4}$$

P-33

$$J(y)=\int\limits_0^{1/2}\left[\tfrac{(y')^2}{x^2-1}-\tfrac{2y^2}{(x^2-1)^2}\right]dx,\quad y(0)=1, y\left(\tfrac{1}{2}\right)=2.$$

P-34

$$J(y)=\int\limits_{-2}^{-1}\left[x^3\,(y')^2+3xy^2-\tfrac{6y}{x}\right]dx,\quad y(-2)=\tfrac{1}{4},\quad y(-1)=1.$$

P-40

$$J(y)=\int\limits_1^2\left[(y')^2+\tfrac{2y^2}{x^2}\right]dx,\quad y(1)=0,\quad y(2)=\tfrac{7}{2}.$$

P-41

$$J(y)=\int\limits_0^{\pi/4}\left[\tfrac{(y')^2}{\cos x}+\tfrac{y}{\cos^2 x}\right]dx,\quad y(0)=0, y\left(\tfrac{\pi}{4}\right)=\tfrac{1}{2}.$$

P-42

$$J(y)=\int\limits_1^2\left[(xy'+y)^2+\left(1+x^2\right)y'\right]dx,\quad y(1)=-\tfrac{1}{2},\quad y(2)=1.$$

P-43

$$J(y)=\int\limits_0^{\pi/4}\left[(y')^2\cos^2 x+x^2yy'+xy^2-2y'\cos^3 x\right]dx,\quad y(0)=0, y\left(\tfrac{\pi}{4}\right)=\tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

P-48

$$J(y)=\int\limits_0^2\left[4\,(y')^2+y^2+4xy\right]dx,\quad y(0)=1,\quad y(2)=e-4.$$

P-49

$$J(y)=\int\limits_0^{\pi}\left[(y')^2+8y'\sin^2 x+4y\right]dx,\quad y(0)=0,\quad y(\pi)=\pi^2.$$

P-50

$$J(y) = \int_0^1 \left[(y')^2 + y^2 + x^2 y' \right] dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 1 + e^{-1}.$$

P-51

$$J(y) = \int_0^\pi \left[(y')^2 + y^2 - 4y \sin x \right] dx, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = e^{\pi}.$$

P-52

$$J(y) = \int_0^\pi \left[(y')^2 + y^2 + 10y' \left(x + \sin^2 x \right) \right] dx, \quad y(0) = 6, \quad y(\pi) = 5 + e^{-\pi}.$$

P-53

$$J(y) = \int_0^1 \left[4xyy' - (y')^2 - 4y^2 + \left(12x^2 - 4 \right) y \right] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

P-59

$$J(y) = \int_1^4 \left[\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} \right) y^2 + 2yy' \ln x - 4 (y')^2 - 10y \right] dx, \quad y(1) = -1 \quad y(4) = 0.$$

$y(4) = 0$

P-60

$$J(y) = \int_0^2 \left[(y')^2 + xyy' + \tfrac{3}{4} y^2 + \left(\tfrac{x^2}{2} - 6 \right) y \right] dx, \quad y(0) = 5, \quad y(2) = e.$$

P-61

$$J(y) = \int_1^2 \left[12xy - \tfrac{12}{x} yy' - 3 (y')^2 \right] dx, \quad y(1) = \tfrac{1}{2}, \quad y(2) = 0.$$

P-62

$$J(y) = \int_0^1 \left[(y')^2 - 2yy' \cos x + (4 + \sin x) y^2 + 4 \left(2x^2 - 3 \right) y \right] dx, \quad y(0) = 2, \; y(1) = e^2.$$

P-63

$$J(y) = \int_0^2 e^{3x} \left[(y')^2 + 4y^2 \right] dx, \quad y(0) = e^{10} - 1, \quad y(2) = 0.$$

P-69

$$J(y) = \int_{1/4}^1 \left[6xy' - \sqrt{x} y^2 - x^2 \sqrt{x} (y')^2 \right] dx, y \left(\tfrac{1}{4} \right) = -1, \quad y(1) = 1.$$

P-70

$$J(y) = \int_1^2 \left[\tfrac{4}{x} (y')^2 + \tfrac{5}{x^2} yy' - \tfrac{8\sqrt{x}}{x^3} y \right] dx, \quad y(1) = -\tfrac{1}{2}, \quad y(2) = 0.$$

P-71

$$J(y)=\int\limits_1^3\left[2\sqrt{x}\,(y')^2+\tfrac{y^2}{x\sqrt{x}}-\tfrac{8y'}{x\sqrt{x}}\right]dx,\quad y(1)=-2,\quad y(3)=2.$$

P-72

$$J(y)=\int\limits_1^4\left[15\sqrt{x}y+3x^2yy'-x^3\,(y')^2\right]dx,\quad y(1)=1,\quad y(4)=-3.$$

P-79

$$J(y)=\int\limits_1^3\left[8xy-x^2\,(y')^2-x^2yy'-(x+6)y^2\right]dx,\quad y(1)=0,\quad y(3)=-6$$

P-80

$$J(y)=\int\limits_1^3\left[x^2\,(y')^2+x^2yy'+xy^2+4xy\right]dx,\quad y(1)=y(3)=4$$

P-81

$$J(y)=\int\limits_2^4\left[x^2yy'+8x^2y-x^2\,(y')^2+(x-2)y^2\right]dx,\quad y(2)=0,\quad y(4)=-8.$$

P-88

$$J(y)=\int\limits_1^2\left[x^3\,(y')^2-11x^2yy'-3xy^2-10x^2y\right]dx,\quad y(1)=3,\quad y(2)=10.$$

P-89

$$J(y)=\int\limits_1^2\left[x^2\,(y')^2-14xyy'-y^2-8xy\right]dx,\quad y(1)=2,\quad y(2)=6.$$

P-90

$J(y)=\int\limits_1^4\left[(y')^2+\frac{3}{4x^2}y^2\right]dx,\quad y(1)=1,\quad y(4)=8.$ Найти значения вещественного параметра a, при которых на допустимой экстремали достигается минимум (91-93):

P-91

$$J(y)=\int\limits_0^1\left[y-2y'+a\,(y')^2\right]dx,\quad y(0)=0,\quad y(1)=1.$$

P-92

$J(y)=\int\limits_0^1\left[(y')^2+ax\,(y')^2\right]dx,\quad y(0)=0,\quad y(1)=\ln|1+a|.$ Найти допустимые экстремали (94-101):

P-94

$$J(y)=\int\limits_0^1 y^n\,(y')^2\,dx,\quad y(0)=0,\quad y(1)=1.$$

P-95

$$J(y)=\int\limits_0^1\left[y^2\,(y')^2+9y^2\right]dx,\quad y(0)=0,\quad y(1)=-5.$$

P-96

$$J(y)=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\left[(y')^2\sin x+2y\cos x\right]dx, y\left(\tfrac{\pi}{4}\right)=0, y\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=\tfrac{\pi}{4}.$$

P-97

$$J(y)=\int\limits_0^1\left[\left(\tfrac{y'}{y}\right)^2-xy'-y\right]dx,\quad y(0)=1,\quad y(1)=e^{-1}.$$

P-98

$$J(y)=\int\limits_1^2\left[\ln y'-3yy'-xy'\right]dx,\quad y(1)=-\ln 2,\quad y(2)=0.$$

P-99

$$J(y)=\int\limits_0^{1/2}\left[y+xy'-\tfrac{1}{y}\left(y'\right)^3\right]dx,\quad y(0)=\tfrac{2}{3}, y\left(\tfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\tfrac{3}{2}}.$$

В задачах (102-105) показать, что допустимая экстремаль не дает экстремум функционала:

P-102

$$J(y)=\int\limits_0^{\pi}\left[(y')^2-\tfrac{16}{9}y^2+2y\sin x\right]dx,\quad y(0)=0,\quad y(\pi)=-\tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

P-103

$$J(y)=\int\limits_0^{\pi}\left[(y')^2-\tfrac{9}{4}y^2+18y\right]dx,\quad y(0)=4,\quad y(\pi)=0.$$

P-104

$$J(y)=\int\limits_0^{\pi}\left[(y')^2-\tfrac{25}{9}y^2+68e^xy\right]dx,\quad y(0)=9,\quad y(\pi)=9e^{\pi}.$$

P-105

$J(y)=\int\limits_0^{\pi}\left[(y')^2-\tfrac{25}{16}y^2+50xy\right]dx,\quad y(0)=0,\quad y(\pi)=16\pi.$ Показать, что простейшие вариационные задачи (106–107) не имеют смысла:

P-106

$$J(y)=\int\limits_0^1\left[x^2y'+2xy\right]dx,\quad y(0)=0,\quad y(1)=1.$$

P-107

$$J(y)=\int\limits_1^2\tfrac{1}{x^2}\left[xy'-y\right]dx,\quad y(1)=0,\quad y(2)=2.$$

15.5.2 Problems about the generalization of the simplest variational problem

Р-пр.1 Решить задачу со свободным концом $J(y) = \int\limits_1^2 \left[\frac{6x-12}{x} yy' - (y')^2 + 8xy'\right] dx, \quad y(1) = 0$

(?? что-то пока не понял, как такое делать вообще?)

Уравнение Эйлера имеет вид

$$x^2 y'' - 6y = 4x^2.$$

Экстремали задаются формулой

$$y(x) = \frac{C_1}{x^2} + C_2 x^3 - x^2.$$

Граничное условие при $x = 2$ находим из уравнения

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=2} = \left.\left[\frac{6x-12}{x} y - 2y' + 8x\right]\right|_{x=2} = -2y'(2) + 16 = 0.$$

Отсюда $y'(2) = 8$. Это условие вместе с условием $y(1) = 0$ определяют допустимую эксгремаль $\hat{y}(x) = x^3 - x^2$.

Пусть $\eta(x)$ - произвольная непрерывно дифференцируемая на $[1, 2]$ функция, для которой $\eta(1) = 0$. Тогда

$$\Delta J(\hat{y}) = J(\hat{y} + \eta) - J(\hat{y}) = \int\limits_1^2 \left\{\frac{6x-12}{x}(\hat{y} + \eta)(\hat{y}' + \eta') - (\hat{y}' + \eta')^2 + 8x(\hat{y}' + \eta') - \frac{6x-12}{x}\hat{y}\hat{y}' + (\hat{y}')^2 - 8x\hat{y}'\right\} dx =$$

$$= \int\limits_1^2 \left\{\frac{6x-12}{x}(\eta\hat{y}' + \hat{y}\eta' + \eta\eta') - 2\hat{y}'\eta' - (\eta')^2 + 8x\eta'\right\} dx.$$

Если проинтегрировать по частям слагаемые в этом интеграле, содержащие η', воспользоваться уравнением Эйлера для $\hat{y}(x)$ и условиями $\hat{y}'(2) = 8, \eta(1) = 0$, то получим

$$\Delta J(\hat{y}) = -\int\limits_1^2 \left[(\eta')^2 + \frac{6}{x^2}\eta^2\right] dx < 0.$$

Значит, допустимая экстремаль $\hat{y}(x)$ в рассматриваемой задаче дает абсолютный максимум.

Р-пр.2

Решить задачу без ограничений, если

$$J(y) = \int\limits_0^1 \left[(y')^2 + y^2 + 2ye^x\right] dx.$$

Уравнение Эйлера $y'' - y = e^x$ дает множество экстремалей задачи $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + \frac{1}{2}xe^x$. Граничными условиями для $y(x)$ являются: $y'(0) = y'(1) = 0$. Определив C_1 и C_2 из этих граничных условий, находим допустимую экстремаль

$$\hat{y}(x) = \frac{\left(1 - 2e^2\right)e^x - e^{2-x}}{2\left(e^2 - 1\right)} + \frac{1}{2}xe^x.$$

Для всякой негтрерывно дифференцируемой на $[0, 1]$ функции $\eta(x)$ имеем

$$\Delta J(\hat{y}) = J(\hat{y} + \eta) - J(\hat{y}) = \int\limits_0^1 \left[2\hat{y}'\eta' + (\eta')^2 + 2\hat{y}\eta + \eta^2 + 2e^x\eta\right] dx =$$

$$= 2\hat{y}'(x)\eta(x)|_{x=0}^1 + \int\limits_0^1 \eta\left[2\hat{y} + 2e^x - 2\hat{y}''\right] dx + \int\limits_0^1 \left[(\eta')^2 + \eta^2\right] =$$

$$= \int\limits_0^1 \left[(\eta')^2 + \eta^2\right] dx$$

так как проинтегрированная часть обращается в нуль в силу граничных условий $\hat{y}'(0) = \hat{y}'(1) = 0$ и первый интеграл равен нулю в силу того, что $\hat{y}(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера. Поскольку из полученного равенства следует $\Delta J(\hat{y}) > 0$ для всех рассматриваемых $\eta(x)$, то $\hat{y}(x)$ дает абсолютный минимум. Решить задачу со свободным концом (1-10):

P-1

$$J(y) = \int\limits_0^2 \left[2xy + (y')^2\right] dx, \quad y(0) = 0$$

P-2

$$J(y) = \int\limits_0^1 \left[2y + 6y' + (y')^2\right] dx, \quad y(0) = 0.$$

P-3

$$J(y) = \int\limits_1^2 \left[x^2 (y')^2 + 6y^2 + 2x^3 y\right] dx, \quad y(1) = \tfrac{1}{6}$$

P-4

$$J(y) = \int\limits_0^1 \left[y + xy' + (y')^2\right] dx, \quad y(0) = 0.$$

P-5

$$J(y) = \int\limits_1^2 \left[x^2 (y')^2 + 12y^2\right] dx, \quad y(1) = 97$$

P-6

$$J(y) = \int\limits_1^2 \left[\frac{(y')^2}{x} + \frac{3y^2}{x^3}\right] dx, \quad y(2) = \tfrac{19}{2}.$$

P-7

$$J(y) = \int\limits_1^2 \left[x^3 (y')^2 + 3xy^2\right] dx, \quad y(2) = \tfrac{49}{24}.$$

P-8

$$J(y) = \int\limits_1^2 \left[x^3 (y')^2 - 8\left(x^2 - x\right) yy' + 4y^2 + 8x^2 y'\right] dx, \quad y(2) = -7.$$

P-9

$$J(y) = \int\limits_1 \left[8yy' \ln x - x (y')^2 + 6xy'\right] dx, \quad y(3) = 15.$$

P-10

$$J(y) = \int\limits_1^2 \left[\tfrac{1}{2} (y')^2 - \frac{3\left(x^2-1\right)}{x^2} yy' - \frac{8y'}{x}\right] dx, \quad y(2) = 10.$$ Решить задачу без ограничений (11-12):

P-11

$$J(y) = \int\limits_0^{\pi/2} \left[4y^2 + (y')^2 + 2y \cos x\right] dx.$$

P-12

$J(y) = \int\limits_1^e \left[x\left(y'\right)^2 + \frac{y^2}{x} + \frac{2y\ln x}{x}\right] dx$. Найти допустимые экстремали в задаче без ограничений (13-15):

P-13

$J(y) = \int\limits_1^2 \left[2y + yy' + x^2\left(y'\right)^2\right] dx.$

P-14

$J(y) = \int\limits_1^2 \left[2y - yy' + x\left(y'\right)^2\right] dx$

15.5.3 Problems about functions from two variables

P-пример

Исследовать на экстремум функционал, если

$$J\left(y_1, y_2\right) = \int\limits_1^2 \left[6y_1^2 + x^2\left(y_1'\right)^2 + \left(y_2'\right)^2\right] dx, \quad y_1(1) = y_2(1) = 1, \quad y_1(2) = 4, y_2(2) = 2.$$

Система уравнений Эйлера имеет вид

$$\begin{cases} 12y_1 - \left[2x^2y_1'\right]' = 0 \\ y_2'' = 0 \end{cases}$$

Отсюда находим экстремали $y_1(x) = C_1x^2 + \frac{C_2}{x^3}, y_2(x) = C_1x + C_2$. Подставляя $y_1(x), y_2(x)$ в заданные граничные условия, получаем допустимую экстремаль $\hat{y}_1(x) = x^2, \hat{y}_2(x) = x$.

Покажем, что на допустимой экстремали заданный функционал имеет абсолютный минимум. Пусть (см. §1) $\eta_1(x) \in \overset{\circ}{1}{}^1\ [1,2], \eta_2(x) \in^{\circ 1} [1,2]$.

Тогда

$$\Delta J\left(\hat{y}_1, \hat{y}_2\right) = J\left(\hat{y}_1 + \eta_1, \hat{y}_2 + \eta_2\right) - J\left(\hat{y}_1, \hat{y}_2\right) =$$
$$= \int\limits_1^2 \left[6\left(2\hat{y}_1\eta_1 + \eta_1^2\right) + x^2\left(2\hat{y}_1'\eta_1' + \left(\eta_1'\right)^2\right) + \left(2\hat{y}_2'\eta_2' + \left(\eta_2'\right)^2\right)\right] dx.$$

Интегрируя по частям слагаемые, содержащие η_1' и η_2', и учитывая, что $\eta_1(1) = \eta_1(2) = \eta_2(1) = \eta_2(2) = 0$, отсюда находим

$$\Delta J\left(\hat{y}_1, \hat{y}_2\right) = \int\limits_1^2 \left[12\hat{y}_1 - \left(2x^2\hat{y}_1'\right)'\right]\eta_1 dx - 2\int\limits_1^2 \hat{y}_2''\eta_2 dx +$$
$$+ \int\limits_1^2 \left[6\eta_1^2 + x^2\left(\eta_1'\right)^2 + \left(\eta_2'\right)^2\right] dx$$

Первые два интеграла равны нулю, так как $\hat{y}_1(x)$ и $\hat{y}_2(x)$ удовлетворяют системе уравнений Эйлера. Поскольку последний интеграл неотрицательный, то $\Delta J\left(\hat{y}_1, \hat{y}_2\right) > 0$ при всех рассматриваемых $\eta_1(x)$ и $\eta_2(x)$. Значит, пара функций $\hat{y}_1(x), \hat{y}_2(x)$ дает абсолютный минимум функционала. Исследовать на экстремум функционал. если:

P-1

$J\left(y_1, y_2\right) = \int\limits_0^1 \left[\left(y_1'\right)^2 + \left(y_2'\right)^2\right] dx, \quad y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = y_2(1) = 1.$

P-2

$J\left(y_1, y_2\right) = \int\limits_0^1 \left[y_2^2 + \left(y_1'\right)^2 + \left(y_2'\right)^2\right] dx, \quad y_1(0) = 0, y_2(0) = 1, \quad y_1(1) = 1, y_2(1) = e$

P-3

$$J\left(y_1, y_2\right)=\int\limits_0^1\left[y_1^2+y_2^2+\left(y_1'\right)^2+\left(y_2'\right)^2\right] dx, \quad y_1(0)=y_2(0)=1, \quad y_1(1)=y_2(1)=e.$$

P-4

$J\left(y_1, y_2\right)=\int\limits_1^2\left[12 y_1^2+y_2^2+x^2\left(y_1'\right)^2+\left(y_2'\right)^2\right] dx, \quad y_1(1)=1, y_2(1)=e, \; y_1(2)=8, y_2(2)=e^2$ Найти допустимые экстремали (5-11):

P-5

$$J\left(y_1, y_2\right)=\int\limits_0^{\pi / 2}\left[\left(y_1'\right)^2+\left(y_2'\right)^2-2 y_1 y_2\right] dx, \quad y_1(0)=1, y_2(0)=-1, y_1\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}, y_2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=-e^{\frac{\pi}{2}}$$

P-6

$$J\left(y_1, y_2\right)=\int\limits_0^1\left[2 y_1+y_2^2+\left(y_1'\right)^2+\left(y_2'\right)^2\right] dx, \quad y_1(0)=0, y_2(0)=1, \quad y_1(1)=\tfrac{1}{2}, \; y_2(1)=e^{-1}.$$

P-7

$$J\left(y_1, y_2\right)=\int\limits_0^{\pi / 2}\left[2 y_1 y_2+\left(y_1'\right)^2+\left(y_2'\right)^2\right] dx, \quad y_1(0)=y_2(0)=1, y_1\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=$$

$$=y_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}$$

P-8

$$J\left(y_1, y_2\right)=\int\limits_0^1\left[y_1 y_2+y_1' y_2'\right] dx, \quad y_1(0)=y_2(0)=1, \quad y_1(1)=y_2(1)=e.$$

P-9

$$J\left(y_1, y_2\right)=\int\limits_0^{\pi / 2}\left[y_1' y_2'-y_1 y_2\right] dx, \quad y_1(0)=y_2(0)=0, y_1\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=y_2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=1.$$

P-10

$$J\left(y_1, y_2\right)=\int\limits_0^1\left[2 y_1^2+2 y_1 y_2+\left(y_1'\right)^2-\left(y_2'\right)^2\right] dx, \quad y_1(0)=y_2(0)=0, \quad y_1(1)=2 \operatorname{sh} e, y_2(1)=-2 \operatorname{sh} e.$$

P-11

$$J\left(y_1, y_2\right)=\int\limits_0^{\pi / 2}\left[2 y_1 y_2-2 y_1^2+\left(y_1'\right)^2-\left(y_2'\right)^2\right] dx, \quad y_1(0)=y_2(0)=0, y_1\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=1, y_2\left(\tfrac{\pi}{2}\right)^0=-1.$$

P-12

Показать, что задача на экстремум при

$$J\left(y_1, y_2\right)=\int\limits_0^1\left[y_1 y_2'+y_2 y_1'\right] dx, \quad y_1(0)=y_2(0)=0, \quad y_1(1)=y_2(1)=1$$

не имеет смысла.

15.5.4 Problems about second-order derivative functionals

Р-пример

Исследовать на экстремум функционал, если

$$J(y) = \int\limits_0^1 \left[(y')^2 + (y'')^2\right] dx, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y(1) = e - 2, y'(1) = e - 1.$$

Уравнение Эйлера-Пуассона имеет вид

$$-2y'' + 2y^{IV} = 0.$$

Экстремали задаются формулой

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 x + C_4.$$

Используя граничные условия, получаем допустимую экстремаль

$$\hat{y}(x) = e^x - x - 1.$$

Покажем, что $\hat{y}(x)$ дает абсолютный мишимум функционала. Для всякой дважды непрерывно дифференцируемой на $[0, 1]$ функции $\eta(x)$, удовлетворяющей граничным условиям

$$\eta(0) = \eta'(0) = \eta(1) = \eta'(1) = 0,$$

имеем

$$\Delta J(\hat{y}) = J(\hat{y} + \eta) - J(\hat{y}) = \int\limits_0^1 \left[2\hat{y}'\eta' + (\eta')^2 + 2\hat{y}''\eta'' + (\eta'')^2\right] dx$$

Проинтегрируем по частям первое слагаемое один раз, а третье слагаемое дважды. В силу граничных условий для $\eta(x)$ проинтегрированная часть обратится в нуль и получаем

$$\Delta J(\hat{y}) = \int\limits_0^1 \left[-2\hat{y}'' + 2\hat{y}^{IV}\right] \eta dx + \int\limits_0^1 \left[(\eta')^2 + (\eta'')^2\right] dx.$$

Так как $\hat{y}(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера-Пуассона, то первый интеграл равен нулю. Поэтому

$$\Delta J(\hat{y}) = \int\limits_0^1 \left[(\eta')^2 + (\eta'')^2\right] dx > 0.$$

Значит, $\hat{y}(x)$ дает абсолютный минимум функционала. Исследовать функционал на экстремум, если:

Р-1

$$J(y) = \int\limits_0^1 \left[-2xy + (y'')^2\right] dx, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y(1) = \tfrac{1}{5!}, y'(1) = \tfrac{1}{12}$$

Р-2

$$J(y) = \int\limits_0^1 \left[2e^x y - (y'')^2\right] dx, \quad y(0) = y'(0) = 1, \quad y(1) = e, y'(1) = 2e.$$

Р-3

$$J(y) = \int\limits_0^{\pi/2} \left[2y \sin x + (y'')^2\right] dx, \quad y(0) = 0, y'(0) = -1, y\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = -1,\ y'\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \tfrac{\pi^2}{4}.$$

Р-4

$$J(y) = \int\limits_0^1 \left[4(y')^2 + (y'')^2\right] dx, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y(1) = \tfrac{1}{4}\left(e^2 - 3\right), y'(1) = \tfrac{1}{2}\left(e^2 - 1\right).$$

P-5

$$J(y)=\int\limits_0^1\left[y^2+2\left(y'\right)^2+\left(y''\right)^2\right]dx,\quad y(0)=y'(0)=0,\quad y(1)=2\,\mathrm{sh}\,e, y'(1)=2e.$$

P-6

$J(y)=\int\limits_0^{\pi/2\sqrt{2}}\left[16y^2+\left(y''\right)^2\right]dx,\quad y(0)=y'(0)=y\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)=0, y'\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)=-2\sqrt{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{2}$. Найти допустимые экстремали $(7-9)$:

P-7

$$J(y)=\int\limits_0^{\pi/2}\left[\left(y''\right)^2-\left(y'\right)^2\right]dx,\quad y(0)=y'(0)=y\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=0, y'\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=2-\tfrac{\pi}{2}.$$

P-8

$$J(y)=\int\limits_0^{\pi/4}\left[\left(y''\right)^2-4\left(y'\right)^2\right]dx,\quad y(0)=y'(0)=0, y\left(\tfrac{\pi}{4}\right)=\tfrac{\pi}{2}-2, y'\left(\tfrac{\pi}{4}\right)=0.$$

P-9

$$J(y)=\int\limits_0^{\pi/2}\left[y^2-2\left(y'\right)^2+\left(y''\right)^2\right]dx,\quad y(0)=y'(0)=0, y\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=\tfrac{\pi}{2}, y'\left(\tfrac{\pi}{2}\right)=1.$$

P-10

Показать, что задача на экстремум при

$$J(y)=\int\limits_0^1\left[xy''+2yy'+y'\right]dx,\quad y(0)=y'(0)=0,\quad y(1)=y'(1)=1,$$

не имеет смысла.

15.5.5 Isoperimetric problems (?)

(что-то такое вообще давно не решал.)

P-пр. Решить изопериметрическую задачу для $J(y)=\int\limits_0^{\pi}\left(y'\right)^2dx,\quad y(0)=1,\quad y(\pi)=-1,\quad \int\limits_0^{\pi}y\cos x dx=\frac{\pi}{2}$

Уравнение Эйлера для лагранжиана $L=\left(y'\right)^2+\lambda y\cos x$ имеет вид

$$2y''=\lambda\cos x.$$

Экстремали задаются формулой $y(x)=C_1x+C_2-\frac{\lambda}{2}\cos x$. Используя граничные условия и условия связи, получаем допустимую экстремаль $\hat{y}(x)=\cos x$. Покажем, что на ней изопериметрическая задача имеет абсолютный минимум.

Возьмем любую $\eta(x)\in{}^1[0,\pi]$, для которой $\int\limits_0^{\pi}\eta\cos x dx=0$. Тогда на $\hat{y}(x)+\eta(x)$ определен функционал $J(y)$ и можно рассмотреть

$$\Delta J(\hat{y})=J(\hat{y}+\eta)-J(\hat{y})=\int\limits_0^{\pi}\left[2\hat{y}'\eta'+\left(\eta'\right)^2\right]dx.$$

Интегрируя по частям первое слагаемое и учитывая, что $\eta(0) = \eta(\pi) = 0$, получаем

$$\Delta J(\hat{y}) = -2\int\limits_0^\pi \hat{y}''\eta dx + \int\limits_0^\pi (\eta')^2\, dx.$$

В силу уравнения Эйлера и условия связи для $\eta(x)$

$$\int\limits_0^\pi \hat{y}''\eta dx = \lambda \int\limits_0^\pi \eta \cos x dx = 0.$$

Следовательно,

$$\Delta J(\hat{y}) = \int\limits_0^\pi (\eta')^2\, dx > 0$$

и, значит, $\hat{y}(x)$ дает абсолютный минимум.

(??? ничего не понял, нужно все переучивать.)

Решить изопериметрическую задачу $(1-10)$:

P-1

$$J(y) = \int\limits_0^\pi (y')^2\, dx, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = \pi, \int\limits_0^\pi y \sin x dx = 0.$$

P-2

$$J(y) = \int\limits_0^1 (y')^2\, dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = e - 3, \int\limits_0^1 y e^x dx = 0.$$

P-3

$$J(y) = \int\limits_0^1 (y')^2\, dx, \quad y(0) = 2e + 1, \quad y(1) = 2, \int\limits_0^1 e^{-x} y dx = e.$$

P-4

$$J(y) = \int\limits_0^1 (y')^2\, dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 2, \int\limits_0^1 xy dx = 1.$$

P-5

$$J(y) = \int\limits_0^1 \left[y^2 + (y')^2\right] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = -1, \int\limits_0^1 y e^{-x} dx = \tfrac{3e^{-1} - e}{4}.$$

P-6

$$J(y) = \int\limits_0^1 \left[y^2 + (y')^2\right] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 4e, \int\limits_0^1 y e^x dx = 1 + e^2.$$

P-7

$$J(y) = \int\limits_0^1 \left[2xy + (y')^2\right] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 3, \int\limits_0^1 xy dx = 1.$$

P-8

$$J(y) = \int\limits_1^2 x\,(y')^2\, dx, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = 12, \int\limits_1^2 xy dx = 9.$$

P-9

$$J(y)=\int\limits_0^{\pi}\left[2y+3y'+(y')^2\right]dx,\quad y(0)=0,\quad y(\pi)=\pi^2,\int\limits_0^{\pi}y\sin x dx=\pi^2-1.$$

P-10

$$J(y)=\int\limits_0^{\pi}\left[(y')^2+y^2+2y\cos x\right]dx,\quad y(0)=2,\quad y(\pi)=-2,\int\limits_0^{\pi}y\cos x dx=$$
$$=\pi$$

$= \pi$. Найти допустимые экстремали изопериметрической задачи (11-14):

P-11

$$J(y)=\int\limits_0^{1}\left[2yy'+(y')^2\right]dx,\quad y(0)=y(1)=0,\int\limits_0^{1}\left[4xy'+yy'\right]dx=4.$$

P-12

$$J(y)=\int\limits_0^{1}\left[yy'+4xy'\right]dx,\quad y(0)=y(1)=0,\int\limits_0^{1}\left[2yy'+(y')^2\right]dx=4.$$

P-13

$$J(y)=\int\limits_0^{1}\left[yy'+2(y')^2\right]dx,\quad y(0)=y(1)=0,\int\limits_0^{1}\left[yy'-8xy'\right]dx=8.$$

P-14

$$J(y)=\int\limits_0^{1}\left[yy'-8xy'\right]dx,\quad y(0)=y(1)=0,\int\limits_0^{1}\left[yy'+2(y')^2\right]dx=8.$$

P-15

Найти минимум $J(y)=\int\limits_0^{\pi}(y')^2dx$, если $y(0)=y(\pi)=0,\int\limits_0^{\pi}y^2dx=1$.

P-16

Найти минимум $J(y)=\int\limits_0^{1}\left[y^2+(y')^2\right]dx$, если $y(0)=y(1)=0,\ \int\limits_0^{1}y^2dx=1$

15.5.6 Problems about Sufficient conditions of a strict weak local extremum in the simplest variational problem

Исследовать на экстремум (1-9):

P-1

$$J(y)=\int\limits_0^{\pi}(y')^3dx,\quad y(0)=0,\quad y(\pi)=a\pi, a\neq 0.$$

P-2

$$J(y)=\int\limits_0^{1}\left[(y')^3+3(y')^2+y'\right]dx,\quad y(0)=0,\quad y(1)=1.$$

P-3

$$J(y) = \int\limits_0^1 \frac{dx}{(y')^3}, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

P-4

$$J(y) = \int\limits_1^2 \frac{x^4 dx}{(y')^3}, \quad y(1) = \frac{1}{2}, \quad y(2) = 2.$$

P-5

$$J(y) = \int\limits_1^2 \frac{(y')^3 dx}{x^2}, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 4$$

P-6

$$J(y) = \int\limits_1^2 x^2 (y')^3 \, dx, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = \ln 2$$

P-7

$$J(y) = \int\limits_1^2 y^3 (y')^3 \, dx, \quad y(1) = 2, \quad y(2) = 2\sqrt{2}.$$

P-8

$$J(y) = \int\limits_0^1 \frac{(y')^3}{y^3} dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = e.$$

P-9

$$J(y) = \int\limits_1^2 e^{-2x} \left[(y')^2 - y^2\right] dx, \quad y(1) = e, \quad y(2) = e^2.$$

15.6 Curve and trajectory problems

15.6.1 Orthogonal Trajectory Problems

(?? зачем они вообще нужны??? пока просто лежат, а там посмотрим)

P-2.пр.2

Найти ортогональные траектории семейства кривых

$$y = \operatorname{tg}(\ln Cx).$$

Сначала составим дифференциальное уравнение заданного семейства кривых. Дифференцируя по x уравнение заданного семейства и исключая параметр C, получаем уравнение

$$y' = \frac{1}{x \cdot \cos^2(\ln Cx)} = \frac{1}{x}\left[1 + \operatorname{tg}^2(\ln Cx)\right] = \frac{1 + y^2}{x}.$$

Заменяя в этом уравнении y' на $\left(-\frac{1}{y'}\right)$, находим дифференциальное уравнение ортогональных траекторий

$$-x = \left(1 + y^2\right) y'.$$

Заменив y' на $\frac{dy}{dx}$ и решив полученное уравнение с разделенными переменными, находим уравнение ортогональных траекторий $3x^2 + 2y^3 + 6y = C$.

(???)

Найти ортогональные траектории для заданных семейств плоских кривых $(40 - 50)$:

P-40

$y = C(x+1)e^{-x}$

P-41

$y^2 = Ce^{x^2+y^2}$.

P-42

$\left(Ce^{-x^2} - 1\right) y = 2.$

P-43

$y = C\sin x - 2.$

P-44

$y\left(1 + Ce^{x}\right) = 1.$

P-45

$y = C\cos x + 2.$

P-48

$y^2 = Ce^{-(x+y)}$.

P-49

$xy = Ce^{y}$.

P-50

$2x + y - 1 = Ce^{2y-x}$.

P-51

Найти ортогональные траектории семейства эллипсов, имеющих общую большую ось.

P-52

Найти ортогональные траектории семейства гипербол, имеющих общую мнимую ось.

P-53

Семейство кривых задано в полярных координатах уравнением $r(\varphi) = Cf(\varphi)$, где $f(\varphi)$ - непрерывно дифференцируемая функция. Составить дифференциальное уравнение ортогональных траекторий. Найти ортогональные траектории семейства кривых $r = Ce^{\varphi}$.

P-54

Семейство кривых в полярных координатах задается уравнением $r'(\varphi) = rf(\varphi)$, где $f(\varphi)$ - непрерывная функция. Составить дифференциальное уравнение семейства ортогональных траекторий. Найти ортогональные траектории семейства кривых $r = C\cos\varphi$.

P-89

Найти ортогональные траектории семейства окружностей, проходящих через начало координат, центры которых лежат на оси абсцисс.

P-91

а) Составить дифференциальное уравнение ортогональных траекторий семейства кривых

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2xy.$$

б)Найти ортогональные траектории семейства кривых

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2xy.$$

Указание. Перейти к полярным координатам.

15.6.2 Tasks on the approximate image of integral curves

(займусь этим, когда понадобится, 1я глава Романко)

Составить дифференциальные уравнения семейства кривых $(1-18)$: 1. $y = Cx^2 - x$. 2. $y = x^2 + Cx$. 3. $y = (x-C)^2$. 4. $(y-C)^2 = 2x$. 5. $(x-C)^2 + y^2 = 1$. 6. $x^2 + (y-C)^2 = 1$. 7. $2x^2 + Cy^2 = 1$. 8. $(y-C)^2 = \frac{1}{x}$. 9. $x^2 + 2x - (y-C)^2 = 2$. 10. $y = \operatorname{tg}(x+C)$. 11. $Cx = \sin Cy$. 12. $Cy = \operatorname{tg} Cx$. 13. $x^2 = (C+y)e^y$. 14. $y^2 + 2Cxy + x^2 + 2x = 0$. 15. $y = A\cos(x+\varphi)$. 16. $y = (C_1 + C_2x)\,e^x$. 17. $y = \frac{C_1}{x} + C_2x$. 18. $y^2 = C_1x^2 + C_2x$.

Построить приближенно интегральные кривые уравнений $(19-38)$: 19. $y' = \frac{y-1}{x-1}$. 20. $y' = \frac{y}{x+1}$ 21. $y' = \frac{1-x}{y-1}$. 22. $y' = \frac{x+1}{1-y}$. 23. $y' = \frac{1-y}{x}$. 24. $y' = \frac{y}{1-x}$. 25. $y' = (x-1)y$. 26. $y' = x(y+1)$. 27. $y' = \frac{2x+y}{x-2y}$. 28. $y' = \frac{y-2x}{2y+x}$ 29. $y' = 2x + 2y + 1$. 30. $y' = 2x - 2y - 1$. 31. $y' = y - x^2 - 2x - 2$. 32. $y' = y - x^2 + 2x$. 33. $y' = -x^2 - \frac{y}{x}$. 34. $y' = \frac{y}{x} + x^2$. 35. $y' = y - x^3$. 36. $y' = 2xy - 2$. 37. $y' = x^2 + y^2 - 1$. 38. $y' = x^2 - y^2 - 1$.

P-2.61

Найти интегральную кривую уравнения $\left(1 - x^2y\right)dx + x^2(y-x)dy = 0$, пересекающую прямую $x = \frac{1}{2}$ под прямым углом.

15.6.3 Problems about applications in ecology

(хорошая подготовка для приложений могла бы быть.)

ФР. Задача про популяции при сборе урожая (??)

Исследовать решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = c_1x - \frac{a_1x^2}{1+b_1f} - f$$

Это уравнение о промысле (сборе урожая), оно описывает ситуацию, когда из популяционной системы, описываемой логистическим уравнением отбирается биомасса со скоростью f. Наличие в знаменателе второго слагаемого справа величины f определяет уменьшение конкуренции за счет отбора биомассы. Определить условия устойчивого существования популяции.

(??? и как находить эту систему положений равновесия???? вот и слабая теория, приехали.)

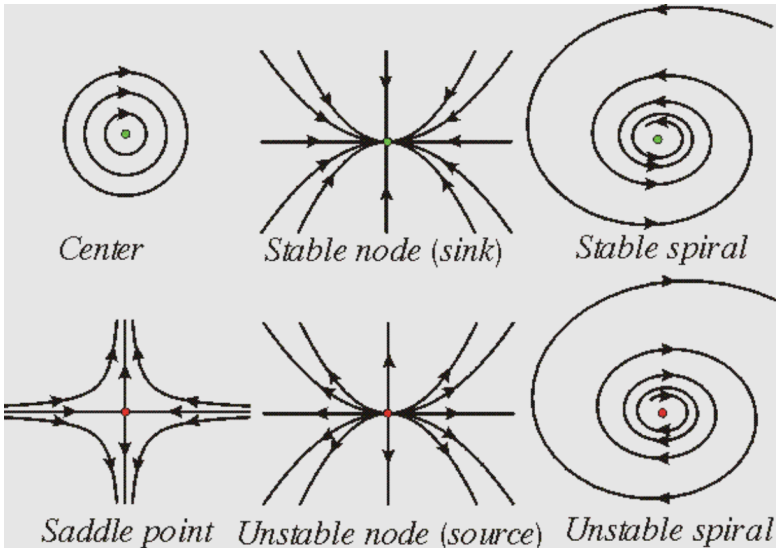
Part IV
—— Special Differential Equations in a Nutshell ——

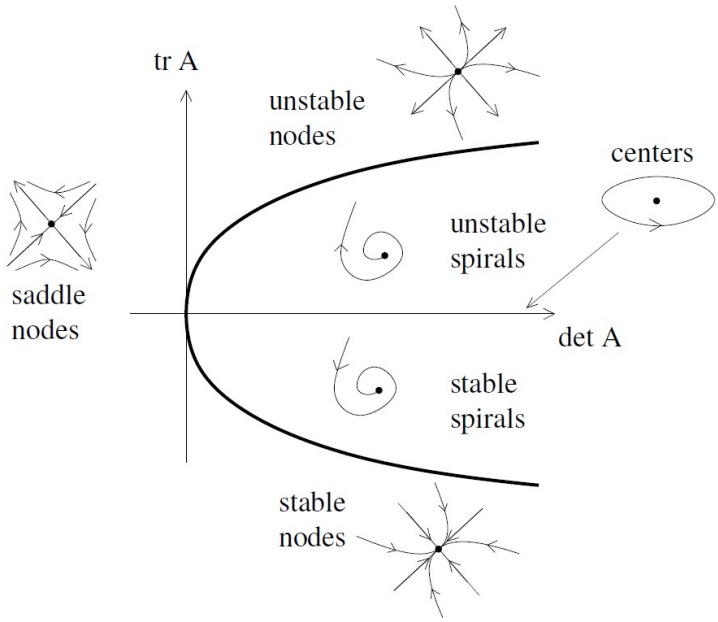
16 About another about Differential Equations

16.1 Other methods

(все классическое и менее популярное тут.)

16.1.1 phase trajectories and phase plane





Положения равновесия для диффура высшего порядка в окрестности грубых положений равновесия

(тут типичное типирование их.)

Об узле

Об седле

О фокусе

Об узле

О дикритическом узле

16.1.2 matrix exponent

тут нюансов много

границы применимости

нюансы применения этого метода

чтобы быстро считать

связь с теорией групп

(см. Адлер гл. 8 или Олвер П., пока знаю, что они есть, но и не до них)

16.1.3 method of characteristics

(???)

16.2 Other typical diffuser-related tasks

16.2.1 On Equations in Differentials

Общего метода отыскания интегрирующего множителя не существует. Тут просто нужно набраться опыта у преобразованиях.

Методы поиска интегрирующего множителя

Во всех типичных примерах алгоритм следующий:
0) смотрим, не является ли уравнение уравнением в полных дифференциалах
1) пробуем общие формулы. Для обозначений

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

смотрим, не являются ли функции ниже функциями только функциями от x или y:

$$\frac{d\ln\mu}{dx} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \qquad \frac{d\ln\mu}{dy} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{1}{M}$$

Если да, то интегрирующий множитель легко находится из этой формулы.

Если нет, то часто можно привести уравнение к уравнению в полных дифференциалах, домножив его на функции подобные функциям $\frac{1}{y}$, x, y, также очень часто можно еще домножить на какие-то элементарные функции, которые есть в исходном уравнении (типа e^x, e^{-x}, т.п.) Тогда интегрирующий множитель - как раз та функция, которую мы подбором нашли.

О том, что не делать для решения уравнений в полных дифференциалах (???)

(?) Не сводить к обычным диффурам, потому что не решишь их. Пока такой опыт, может быть, я ошибаюсь.

16.2.2 boundary value tasks

Доказательство наличия некоторого числа нулей на интервале (???)

(тут Теорема Штурма, а как конкретно - пока не помню.)

16.2.3 systems of linear diffusers with constant coefficients

Если функций 2 и система неоднородная, то перейти к диффуру высокого порядка

Если система 3x3 с постоянными коэффициентами, то находим собственное значение матрицы, дальше собственные и, если есть, присоединенные векторы, дальше в общую формулу подставляем решение

присоединенные ищем как

$$(A - \lambda E)h_{\text{прис.}} = h_{\text{собств.}}$$

(?? укажу эти методы линала, которые я забыл уже.)
(укажу их количество, чтобы ориентироваться.)

Если система однородная и коэффициенты постоянные, то можно перейти к матричной экспоненте (?)

(раскрою потом этот метод.)

Метод вариаций для систем (????)

(хз, много на это задач.)

Операционный метод для систем (???)

(еще очень много это отрабатывать, пока хз.)
(хз, много на это задач.)

16.2.4 systems of linear diffusers with variable coefficients

(?? тут жесть какая-то вообще я хз, вообще все забыл.)

16.2.5 Behavior of phase trajectories in the vicinity of noncoarse equilibrium positions and on the entire phase plane

Исследование положения равновесия при параметре

(? тоже такие есть задачи, пока я хз)

16.2.6 first integrals

Поиск первых интегралов

16.2.7 Autonomous Systems

Нормальная система дифференциальных уравнений

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}), \vec{x} \subset \Omega, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \tag{8.1}$$

правая часть которой не зависит от переменной t, называется автономной. При этом предполагается, что в области Ω функция $\vec{f}(\vec{x})$ удовлетворяет следующим требованиям:

1. $\vec{f}(\vec{x}) \in \mathbf{C}(\Omega)$;
2. $\vec{f}(\vec{x}) \in \mathrm{Lip}_{\vec{x}}\left(\bar{\Omega}_L\right)$.

Theorem

8.1. Каждая траектория автономной системы (8.1) принадлежит одному из следующих типов:

1. положение равновесия;
2. замкнутая траектория, которая соответствует периодическому решению с положительным наименьшим периодом;
3. незамкнутая траектория, которая соответсвует непериодическому решению.

(and then se start to analyse trajectories. write, why is it exactly for these systems???)

16.2.8 simplest problems in partial derivatives

(?? в чем отличие от умф?)

16.3 Variations: Special Methods

(тоже типичные задачи экзаменов!!)

16.3.1 Typical Methods (!!!)

16.3.2 Other variation methods (??)

(это очень даже может понадобиться, так что будет раздел для этого.)

16.4 Approximation methods

(see special note about it)

16.5 Stability theory

(see special note about them, I assume that here will be more than 6 special topics about it)

16.5.1 Stability theory: Basics

(write an obvious def-n here)
Theorem 9.1. (Спектральный признак устойчивости.)

1. Если все собственные значения матрицы A удовлетворяют неравенствам $\operatorname{Re}\lambda_i < 0, i = \overline{1,m}$, то нулевое решение асимптотически устойчиво.

2. Если собственные значения матрицы A удовлетворяют неравенствам $\operatorname{Re}\lambda_i \leq 0, i = \overline{1,m}$ и для тех λ_i, для которых $\operatorname{Re}\lambda_i = 0$, все соответствующие жордановы цепочки имеют длину, равную 1, то нулевое решение устойчиво по Ляпунову.

3. Если имеется λ_j, для которого $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$ или для которого $\operatorname{Re}\lambda_j == 0$, но соответствующие жордановы цепочки имеют длину ≥ 2, то нулевое решение неустойчиво.

Theorem 9.2.
Если нулевое решение однородной линейной системь уравнений

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$$

обладает одним из свойств:

1. устойчиво по Ляпунову,

2. асимптотически устойчиво,

3. неустойчиво, то все решения неоднородной линейной системы уравнений

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x} + \vec{f}(t)$$

обладают тем же свойством независимо от $\vec{f}(t)$.
Доказать теорему самим.

Theorem 9.3.
Пусть в системе (9.8) функция $\vec{F}(\vec{x}) \in C^1(\Omega)$ и удовлетворяет неравенству

$$\|\vec{F}(\vec{x})\| \leq \omega(\vec{x})\|\vec{x}\|,$$

где $\omega(\vec{x}) \to 0$ при $\|\vec{x}\| \to 0$. Тогда

1. если все собственные значения матрицы A удовлетворяют неравенствам $\operatorname{Re}\lambda_i < 0, i = \overline{1,n}$, то нулевое решение системы (9.8) асимптотически устойчиво;

2. если матрица A имеет хотя бы одно λ_j такое, что $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$, то нулевое решение системы (9.8) неустойчиво;

3. если среди собственных значений матрицы A имеются такие, что $\operatorname{Re}\lambda_i = 0$, а для остальных собственных значений $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$, то устойчивость нулевого решения зависит не только от матрицы A, но и от функции $\vec{F}(\vec{x})$.

Лемма.

Пусть непрерывная функция $\omega(t) \geq 0$ на промежутке $J \subseteq \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству

$$\omega(t) \leq B + \left| \int_{t_0}^{t} \omega(\tau) v(\tau) d\tau \right| \tag{9.13}$$

где непрерывная функция $v(t) > 0, t \in J$, а постоянная $B \geq 0$. Тогда при всех $t, t_0 \in J$

$$\omega(t) \leq B e^{\int_{t_0}^{t} v(\tau) d\tau}. \tag{9.14}$$

16.6 Methods of diffusers in other questions of physics

(по Мигдалу допишу, пока не думал про это)

Part V
Other Topics

17 Oscillation Theory: Some Models and Methods

(see my special note about them for now)

17.1 Theory of Stability: Selected Topics

17.1.1 Theory of Stability according to Ivanov A.P. MIPT (?)

1. Устойчивость линейных систем

Рассмотрим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Как известно, частные решения системы (1) можно получить алгебраически, решая характеристическое уравнение

$$\det \|A - \lambda E_n\| = 0$$

)E_n - единичная матрица соответствующего порядка) и полагая

$$x_k(t) = \exp(\lambda_k t)$$

причем мнимая экспонента раскладывается по формуле Эйлера

$$\exp(a + bi) = \exp(a)(\cos b + i \sin b)$$

Общее решение системы (1) - это сумма квазимногочленов, т.е. произведений частных решений (3) на многочлен, степень которого на единицу меньше кратности соответствующего корня:

$$x(t) = \sum P_k(t) \exp(\lambda_k t)$$

Определение. Положение равновесия $x = 0$ системы

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f(0) = 0$$

называется устойчивым (по Ляпунову), если всякое решение, стартующее из достаточно малой его окрестности U_δ, не покидает произвольно заданной окрестности U_c, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x_0 = x(t_0) \in U_s, \forall t > t_0, x(t) \in U_x$$

Понятие асимптотической устойчивости объединяет свойства устойчивости и притяжения. Последнее означает, что

$$\forall x_0 = x(t_0) \in U_s : \lim_{t \to \infty} x(t) = 0$$

В случае линейной системы (1) притяжение достаточно для асимптотической устойчивости. Справедливо следующее утверждение. Предложение 1. 1) Если все корни уравнения (2) лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости C (т.е. это - отрицательные действительные числа или мнимые числа с отрицательной действительной частью), то положение равновесия системы (1) асимптотически устойчиво. 2) Если хотя бы один из этих корней лежит в правой полуплоскости, то оно неустойчиво.

Доказательство. Для функции (3) утверждение следует из предельных свойств экспоненты. Для квазимногочлена (4) аналогичный вывод можно получить, применив правило Лопиталя-Бернулли. Замечание. Для выяснения расположения корней алгебраического уравнения с действительными коэффициентами обычно используют критерий Рауса-Гурвица. При решении прикладных задач высокой размерности можно

также решать характеристическое уравнение при помощи математических компьютерных пакетов. Необходимое условие устойчивости. Если все корни алгебраического уравнения с действительными коэффициентами лежат в левой полуплоскости, то его коэффициенты имеют одинаковые знаки. Критерий Рауса-Гурвица. Для того, чтобы все корни характеристического уравнения

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = 0, \quad a_i \in \mathbb{R}, a_0 > 0$$

имели отрицательные действительные части, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры матрицы (составлена для случая $n = 4$ с ясным обобщением)

$$G = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

были положительны. Примеры. 1. Исследовать устойчивость системы

$$\dddot{x} + 6\ddot{x} + 26\ddot{x} + 46\dot{x} + 65x = 0$$

Составим характеристическое уравнение сопоставляя производным соответствующие степени переменной λ:

$$\lambda^4 + 6\lambda^3 + 26\lambda^2 + 46\lambda + 65 = 0$$
$$\Rightarrow a_4 = 1, a_3 = 6, a_2 = 26, a_1 = 46, a_0 = 65$$

Составляем матрицу Гурвица и вычисляем ее угловые миноры:

$$G = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 & 65 & 0 & 0 \\ 6 & 26 & 46 & 65 \\ 0 & 1 & 6 & 26 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Delta_1 = 46 > 0, \Delta_2 = 46 * 26 - 65 * 6 = 806 > 0, \Delta_3 = \Delta_4 = 6\Delta_2 - 2116 > 0$$

Все миноры положительны, поэтому положение равновесия асимптотически устойчиво.

$$\dddot{x} + 3\dddot{x} - 2\ddot{x} + 4\dot{x} + 2x = 0$$

2. $\lambda^4 + 3\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda + 2 = 0$

$$\Rightarrow a_4 = 1, a_3 = 3, a_2 = -2, a_1 = 4, a_0 = 2$$

Далее,

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Delta_1 = 4 > 0, \Delta_2 = -14 < 0$$

Второй минор оказался отрицательным, и можно сделать вывод о неустойчивости без дальнейших вычислений. 3. $\ddot{x} + \dot{x} + x - \alpha y = 0, \quad \ddot{y} + \dot{y} + y - \beta x = 0$ В принципе, данную систему несложно свести к уравнению четвертого порядка для одной из переменных, а затем строить матрицу Гурвица по аналогии с предыдущими примерами. Однако в этом нет необходимости: проще вычислить определитель второго порядка, строки которого соответствуют уравнениям, а столбцы - переменным (по-прежнему каждой производной отвечает умножение на λ):

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + \lambda + 1 & -\alpha \\ -\beta & \lambda^2 + \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая этот определитель, получаем

$$\left(\lambda^2+\lambda+1\right)^2-\alpha\beta=\lambda^4+2\lambda^3+3\lambda^2+2\lambda+(1-\alpha\beta)=0$$

Необходимое условие устойчивости дает $\alpha\beta<1$. Для матрицы Гурвица имеем выражение

$$G=\begin{pmatrix} 2 & \gamma & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & \gamma \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma=1-\alpha\beta$$
$$\Delta_1=2>0, \Delta_2=6-2\gamma, \Delta_3=\Delta_4=8-4\gamma$$

В итоге получаем область асимптотической устойчивости $\gamma\in(0,2)\Rightarrow|\alpha\beta<1$. Интересно проверить ситуацию на границе этой области. В случае $\alpha\beta=1$ имеем $\lambda_1=0$, а если $\alpha\beta=-1$, то $\lambda_{1,2}=\pm i$. Оба этих случая относятся к числу критических (см. ниже).

Теоремы первого метода Ляпунова

Здесь речь идет о двух системах: нелинейной (5) и линейной (1), причем матрица A - это матрица Якоби для функции $f(x)$:

$$A=\left\|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right\|_{i,j=1}^n$$

Устанавливается связь между устойчивостью двух систем. Важно различать разницу между двумя понятиями. Термин «устойчивость в первом приближении» означает лишь устойчивость линейной системы (1). Более сильное свойство «устойчивость по первому приближению» означает, что обе системы устойчивы либо обе неустойчивы. Теорема 1. Если уравнение (2) имеет только корни с отрицательными вещественными частями, то положение равновесия системы (5) асимптотически устойчиво.

Теорема 2. Если уравнение (2) имеет хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то положение равновесия системы (5) неустойчиво. Пример

$$\begin{aligned}\dot{x}&=\sin\left(\alpha x+y^2\right)+\sqrt{4-\arcsin 2y}-2e^x\\ \dot{y}&=\operatorname{arctg}\left(x^3+\beta y\right)+\ln(1+3x), \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Исследовать устойчивость нулевого положения равновесия. Разложим правые части по формуле Тейлора и оторосим в полученных выражениях нелинейные члены. В итоге получим линейную систему

$$\dot{x}=(\alpha-2)x-y, \quad \dot{y}=3x+\beta y$$

Для матрицы (6) получаем

$$A=\begin{pmatrix} \alpha-2 & -1 \\ 3 & \beta \end{pmatrix}$$

Критерий асимптотической устойчивости: след матрицы (7) отрицателен, а ее детерминант положителен, т.е.

$$\alpha+\beta<2, (\alpha-2)\beta>-3$$

Особые случаи

Сформулированные в предыдущем разделе теоремы не охватывают всех возможностей: к особым случаям отнесем наличие корней

характеристического уравнения с нулевой вещественной частью (нули или чисто мнимые пары). При этом линейная система (1) будет устойчивой (не асимптотически) либо неустойчива в зависимости от отсутствия или наличия в нормальной форме (9)

жордановых клеток вида (12) или (13). Такие случаи называют особыми, или критическими, так как для них полная система (5) может быть и асимптотически устойчивой, и неустойчивой. Для решения используют следующие теоремы второго метода Ляпунова. Теорема Ляпунова об устойчивости. Пусть существует функция $V(x) > 0, V(0) = 0$, непрерывно дифференцируемая в окрестности нуля, для которой

$$\frac{dV}{dt} = (\operatorname{grad} V, f) \leq 0$$

то положение равновесия системы (5) устойчиво. Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости. Пусть существует функция $V(x) > 0, V(0) = 0$, непрерывно дифференцируемая в окрестности нуля, для которой

$$\frac{dV}{dt} = (\operatorname{grad} V, f) < 0$$

то положение равновесия системы (5) асимптотически устойчиво. Теорема Четаева о неустойчивости. Пусть существует функция $V(0) = 0$ для которой область $V(x) > 0$ примыкает к началу координат и во всех точках этой области

$$\frac{dV}{dt} = (\operatorname{grad} V, f) > 0$$

то положение равновесия системы (5) неустойчиво. Теорема Барбаиина - Красовского. Если в условиях теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости неравенство (9) - нестрогое, причем множество точек фазового пространства, для которых $dV/dt = 0$, не содержит целых траекторий системы, за исключением изолированного положения равновесия, то последнее асимптотически устойчиво. Примеры.

1. $\dot{x} = ax^2$, тогда $\lambda = 0$, причем линейная система $\dot{x} = 0$ устойчива. Несложно убедиться, что в случае $a > 0$ эта система первого порядка неустойчива, а в случае $a < 0$ - асимптотически устойчива. 2. Линейная система $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = 0$ неустойчива ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ с жордановой клеткой), т.к. общее решение $x_1 = C_2 t + C_1, x_2 = C_2$ возрастает в случае $C_2 \neq 0$ до бесконечности. Для стабилизации добавим нелинейные слагаемые:

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1^3, \dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2^3$$

Функция

$$V = \frac{x_1^4 + 2x_2^2}{4} > 0, \quad \dot{V} = x_1^3\left(x_2 - x_1^3\right) + x_2\left(-x_2^3 - x_1^3\right) = -x_1^6 - x_2^4 < 0$$

удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. 3. В следующей системе

$$\dot{x}_1 = x_2 + ax_1^3, \dot{x}_2 = -x_1 + ax_2^3$$

корни характеристического уравнения для линейной части чисто мнимые: $\lambda_{1,2} = \pm i$. Функция

$$V = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} > 0, \quad \dot{V} = a\left(x_2^4 + x_1^4\right)$$

удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости в случае $a < 0$ и условиям теоремы Четаева о неустойчивости в случае $a > 0$. Важно отметить, что критические случаи не следует рассматривать как некое исключение: в реальных системах, включающих некоторые конструкционные параметры, они часто возникают при изменении этих параметров, что кроме того, в консервативных и обобщенно-консервативных механических системах асимптотическая устойчивость невозможна, а устойчивость по Ляпунову возможна лишь в критических случаях.

Построение функций Ляпунова

В отличие от общего случая, когда для вывода об устойчивости достаточно рассмотреть линейное приближение, универсального алгоритма построения функции Ляпунова V в критических случаях не существует, и можно дать лишь некоторые рекомендации. Для системы (5) в критическом случае прежде всего можно попытаться построить подобрать V в виде квадратичной формы. Как правило, этого достаточно для решения учебных задач. Примеры. 1.

$$\dot{x} = -ay - x\left[x^{2020} + y^{2020}\right],$$
$$\dot{y} = ax - y\left[x^{2020} + y^{2020}\right]$$

Здесь линеаризованная система описывает гармонические колебания, корни характеристического уравнения чисто мнимые. Положим $V = x^2 + y^2 > 0$, тогда

$$V = 2x\left(-ay - x\left[x^{2020} + y^{2020}\right]\right) + 2y\left(ax - y\left[x^{2020} + y^{2020}\right]\right) =$$
$$= -2\left(x^2 + y^2\right)\left[x^{2020} + y^{2020}\right] < 0$$

Таким образом, выполнены условия теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. 2. $\dot{x} = 2xy, \dot{y} = x^2 + 2y^2$ В данной задаче линейных членов нет, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Пусть

$$V = ax^2 + bxy + cy^2, \text{ тогда}$$

$$\dot{V} = (2ax + by)2xy + (bx + 2cy)\left(x^2 + 2y^2\right) =$$
$$= bx^3 + 2(c + 2a)x^2y + 4bxy^2 + 4cy^3$$

Данная форма третьего порядка знакопеременна, что служит предпосылкой для применения теоремы Четаева. Положим $b = 0$, тогда

$$\dot{V} = 2(c + 2a)x^2y + 4cy^3 = 2y\left(2cy^2 + (c + 2a)x^2\right)$$

Если взять $a = -1, c = 3$, то второй сомножитель в этом выражении будет положительным. Сама функция $V = -x^2 + 3y^2$ положительна в области $y > |x|/\sqrt{3}$, что позволяет сделать вывод о неустойчивости. К такому же заключению приводит рассмотрение функции $V = xy$, положительной в первом квадранте, так как при этом $\dot{V} = x\left(x^2 + 4y^2\right) > 0$. 3. $\dot{x} = -x + y + \kappa x^3$ $\dot{y} = x - y + \kappa y^3, \quad \kappa \in \mathbb{R}$ Здесь один из корней характеристического уравнения линеаризованной системы равен нулю, второй отрицателен. Следовательно, в зависимости от нелинейных членов может иметь место как неустойчивость, так и асимптотическая устойчивость. Положим

$$V = ax^2 + bxy + cy^2 \Rightarrow \dot{V} = (2ax + by)\left(-x + y + \kappa x^3\right) + (bx + 2cy)\left(x - y + \kappa y^3\right) =$$
$$(x - y)(-(2a + b)x + (2c + b)y) + \kappa(2ax + by)x^3 + \kappa(bx + 2cy)y^3$$

Квадратичная часть $\dot{V}$ в общем случае знакопеременна, но если $a = c$, то

$$\dot{V} = -(2a + b)(x - y)^2 + \kappa(2ax + by)x^3 + \kappa(bx + 2ay)y^3$$

т.е. она знакопостоянна. Условия теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости можно удовлетворить в случае $k < 0$, полагая $a = c = 1, b = 0$. В случае $k > 0$ положим $a = c = 1, b = -2$, тогда $V = (x - y)^2 \geq 0$, $\dot{V} = 2\kappa(x - y)x^3 + 2\kappa(-x + y)y^3 = 2\kappa V\left(x^2 + xy + y^2\right)$, и выполнены условия теоремы Четаева о неустойчивости. Пример 4

$$\dot{x} = -x^3 - y^3 + xy^3$$
$$\dot{y} = x^3 - y^3 - x^4$$

Доказать асимптотическую устойчивость. В данной системе линейные члены в правой части отсутствуют. Будем строить функцию Ляпунова в виде однородной $V = V_2 + V_3 +$

$... + V_k + ...$, где V_k - однородная форма соответствующего порядка. Изучим поочередно производные этих форм в силу уравнений движения.

$$V_2 = ax^2 + bxy + cy^2 \Rightarrow \dot{V}_2 = (2ax + by)\left(-x^3 - y^3 + xy^3\right) + (bx + 2cy)\left(x^3 - y^3 - x^4\right) =$$
$$(b - 2a)x^4 + (2c - b)x^3y - (b + 2a)xy^3 - (b + 2c)y^4 + ... =$$
$$x^4\left((b - 2a) + (2c - b)z - (b + 2a)z^3 - (b + 2c)z^4\right) + ..., \quad z = y/x$$

Анализ знака полученного выражения далеко не прост. Может помочь компьютер: полагая a = 1, b = 0, строим график f(z) для различных > 0. Получаем, что при c=1.1 выполнены условия теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, причем члены четвертого порядка в уравнениях движения не играют роли. С другой стороны, имеется более простое решение: полагаем $V_2 \equiv 0$, тогда V_3 не может быть знакоопределенной, и надо считать $V_3 \equiv 0$. Для следующей формы можно взять простейшее выражение $V_4 = x^4 + y^4 > 0$. При этом $\dot{V}_4 = 4x^3\left(-x^3 - y^3 + xy^3\right) + 4y^3\left(x^3 - y^3 - x^4\right) = -4\left(x^6 + y^6\right) < 0$ Т.е. условия теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости выполнены. Заметим, что здесь члены седьмого порядка взаимно уничтожились благодаря специальному выбору членов четвертого порядка в исходной системе. На самом деле, вывод об асимптотической устойчивости вовсе от них не зависит. В некоторых задачах вид функции Ляпунова подбирается исходя из особенностей данной задачи. Пример 5. $\dot{x} = y, \dot{y} = -y^3 - x\left(y^2 + 1\right)$ В линейном приближении имеем пару чисто мнимых корней (устойчивость неасимптотическая). Умножим первое уравнение на x, второе - на $y/\left(1 + y^2\right)$ и сложим, В итоге получим

$$\frac{d}{dt}\left(x^2 + \ln\left(1 + y^2\right)\right) = -\frac{2y^4}{1 + y^2}$$

Выражение под знаком производной положительно; примем его за функцию Ляпунова. Правая часть отрицательна вне множества $y = 0$, на котором она обращается в нуль. Если подставить это значение в исходную систему, то получим $\dot{x} = 0, 0 = -x$, что означает $x \equiv 0$. Асимптотическая устойчивость следует из теоремы Барбашина - Красовского.

О заблуждениях про метод Ляпунова

(коротко укажу. я думал, что тупо можно правую часть уравнения брать, это была большая ошибка! укажу это потом, чтобы не повторять ошибки!)

18 Numerical Methods

(see special note about them)

18.0.1 Basic numerical methods of solution

18.0.2 Software implementation

(полезная глава, как прогать их?)

18.0.3 Network Visualization and Modeling

как рисовать траектории, как динамику на фазовом пространстве изображать, какие свойства.

еще прогу подключу, конкретно коды вставлю, динамический хаос кстати запущу, полюбуюсь на них.

18.0.4 visualization of trajectories

Соберем однажды методы, какими можно строить графики траекторий.

18.0.5 visualization of attractors and chaotic equations

тоже очень интересно.

18.0.6 wolfram simulation

19 Other Analytical Methods

19.1 Perturbation Theory for Differential Equations

(по идее тут всё о них и будет.)

19.1.1 Typical Perturbation Theory

Теория (?)

Как правило, решения дифференциальных уравнений не могут быть найдены в аналитическом виде. В этом случае для их исследования следует при менять численные методы. В то же время существует ограниченный набор "базисных" задач, решения которых могут быть н айдены ан алитически. Р ассмотри м случай, когда ди фференциальное уравнение для величины уравнение сводится к виду

$$F\left(x, u, \partial_x u, ...\right) + \epsilon G\left(x, u, \partial_x u, ...\right) = 0.$$

Мы полагаем, что решение уравнения $F = 0$ известно ан алитически, а $\epsilon \ll 1$ - малый п араметр. В этом случае решение уравнения (5.58) можно и скать в виде ряда по к решению уравнения $F = 0$. Как правило, ряд по ϵ является асимптотическим.

Будем считать, что функция F линейна по старшей производной $\partial_x^n u$, а т акже являет ся регулярной функцией своих переменных, не и меющей по ним особенностей в интересующей нас области параметров. Этого всегда можно добиться преобр азов анием ур авнения $F = 0$. Построение возмущенного решения уравнения (5.58) сводится к следующему. Мы берем некоторое решение u_0 уравнения $F = 0$ и подставляем его в правую часть уравнения (5.58). После этого следует найти поправку u_1 к u_0, которую можно найти, как решение уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial u} u_1 + \frac{\partial F}{\partial\left(\partial_x u\right)} \partial_x u_1 + \cdots = \epsilon G,$$

которое получ ает ся линеариз ацией левой части уравнения (5.58). В производные $\partial F / \partial u, \partial F / \partial\left(\partial_x u\right)$ здесь н адо подставлять u_0. Приведенное линеаризованное уравнение следует решать с учетом граничных условий. В результате решения получается поправка $u_1 \propto \epsilon$.

Задача

5.5.1. Найти нулевой и первый по ε членъ решения ураєнения $\partial_x u + \gamma u + \epsilon x u = 0$ с граничны.м условием $u(0) = 1$. Сравнитв его с точным решением этого уравнения.

Чтобы найти поправку второго порядка по ϵ, u_2, следует подставить сумму $u = u_0 + u_1 + u_2$ в левую часть уравнения (5.58) и удержать в ней член, кв адратичный по ϵ. Для этого F следует разложить до первого порядка по u_2 и до второго порядка по u_1, В правой части уравнения (5.58) т акже следует найти вклад, кв адратичный по ϵ. Для этого в G следует подставить $u = u_0 + u_1$ и удержать член, линейный по u_1. В результате получит ся линейное уравнение на u_2, решение которого (с учетом гр аничных условий) и даст вклад второго по є порядка в u.

Обобщение этой процедуры на более высокие порядки очевидно. Мы должны каждый раз аписывать u в виде $u = u_0 + u_1 + u_2 + ...$ и последов ательно находить $u_1, u_2, ...$ решая линейное ур авнение на очередную поправку, которое получ ает ся в результ ате удержив ания в левой и правой части уравнения (5.58) членов соответствующего порядка по ϵ.

Несмотря на некоторую громоздкость, эта процедура позволяет прямым вычислением найти разложение u по ϵ.

Одн ако прямая теория возмущений по ϵ оказывает ся неприменимой вблизи особых точек, где коэффициент при старшей производной в функции F обращается в ноль. Она также непри менима при анализе пограничных слоев, которые формируются в случае, когда член со старшей производной отсутствует в F, но присутствует в G, то есть имеет малость ϵ. Далее мы разбираем эти специ альные случаи.

Теория по МУ(?)

Изложенный выше формализм, хотя и непосредствен, но довольно сложен в высших порядках. Рассмотрим кратко другой подход, который ведет к весьма элегантному «преобразованию" предыдущего ряда.

Требуется решить уравнение $Lu = \lambda u, (L^0 + Q)\, u = \lambda u$. Запишем его в виде

$$L_0 u - \lambda u = -Qu$$

В гл. 9 мы уже убедились в томі, что решіение уравнения $(L_0 - \lambda)\, u = f$ равно

$$u(\mathbf{x}) = \int G\left(\mathbf{x}, \mathbf{x}'\right) f\left(\mathbf{x}'\right) d^3x' = \sum_n u_n^0 \left(u_n^0 \cdot f\right) / \left(\lambda_n^0 - \lambda\right).$$

Следовательно, задача имеет формальное решение

$$u = \sum_n u_n^0 \left(u_n^0 \cdot Qu\right) / \left(\lambda - \lambda_n^0\right).$$

Конечно, пгериятность состоит в том, что в этом уравнении величина u встречается как справа, так и слева: Предположим, что при $Q \to 0 u \to u_n^0, \lambda \to \lambda_n^0$. Обозначим это решение u_n и выделим из суммы (10.26) n-й член. Это дает

$$u_n = c u_n^0 + \sum_{m \neq n} u_m^0 \left(u_m^0 \cdot Q u_n\right) / \left(\lambda_n - \lambda_m^0\right),$$

где

$$c = u_n^0 \cdot Q u_n / \left(\lambda_n - \lambda_n^0\right).$$

Решим теперь методом итераций точное уравнение (10.27) для u_n:

$$u_n = c u_n^0 + \sum_{m \neq n} \frac{u_m^0 \left(u_m^0 \cdot Q c u_n^0\right)}{\lambda_n - \lambda_m^0} +$$

$$+ \sum_{m \neq n} \sum_{p \neq n} \frac{u_m^0 \left(u_m^0 \cdot Q u_p^0\right) \left(u_p^0 \cdot Q c u_n^0\right)}{\left(\lambda_n - \lambda_m^0\right) \left(\lambda_n - \lambda_p^0\right)} + \ldots =$$

$$= c \left[u_n^0 + \sum_{m \neq n} \frac{u_m^0 Q_{mn}}{\lambda_n - \lambda_m^0} + \sum_{m \neq n} \sum_{p \neq n} \frac{u_m^0 Q_{mp} Q_{pn}}{\left(\lambda_m - \lambda_m^0\right) \left(\lambda_n - \lambda_p^0\right)} + \ldots \right].$$

Таким образом, из (10.28) и (10.29). имеем

$$c \left(\lambda_n - \lambda_n^0\right) = u_n^0 \cdot Q u_n =$$

$$= c \left[Q_{nn} + \sum_{m \neq n} \frac{Q_{nm} Q_{mn}}{\lambda_n - \lambda_m^0} + \sum_{m \neq n} \sum_{p \neq n} \frac{Q_{nm} Q_{mp} Q_{pn}}{\left(\lambda_n - \lambda_m^0\right) \left(\lambda_n - \lambda_p^0\right)} + \ldots \right],$$

откуда получаем элегантный точный ряд для λ_n:

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + Q_{nn} + \sum_{m\neq n} \frac{Q_{nm}Q_{mn}}{\lambda_n - \lambda_m^0} +$$
$$+ \sum_{m\neq n}\sum_{p\neq n} \frac{Q_{nm}Q_{mp}Q_{pn}}{(\lambda_n - \lambda_m^0)(\lambda_n - \lambda p)} + ...$$

Этот ряд лучіше, чем полученные ранее, так как можно сразу же написать член любого порядка; но он обладает тем недостатком, что содержит λ_n как справа, так и слева; возникающее уравнение для λ_n нужно решать либо итерациями, либо с помощью других приближений.

(!?!?!?? отработаю потом в механике, пока так и не дотянулся нормально до этого.)

Теория возмущений с вырождением (!?!??)

(тут тоже большая теория, которой не занимался, нужно будте - займусь.)

19.1.2 Solution near the singular point of the basic equation

Теория (?)

Мы будем называть особыми те точки, где коэффи циент при старшей производной в F обращается в ноль. Это является обобщением понятия особой точки, введенное в разделе 2.1.1. При наличии особой точки (которую мы без потери общности будем помещать в $x = 0$) нулевое прибли жение уравнения (5.58) должно строиться следующим образом. Оно задается решением уравнения $F = 0$ везде, за исключением узкой окрестности точки $x = 0$. Чтобы найти поведение функции u в этой области, в функциях F и G следует сохранить главные по x члены и решить получившееся уравнение. Его решение вне рассматривае мой области выходит на решение уравнения $F = 0$, а вблизи особой точки регулярно по x.

Продемон стрир уем сказанное н а при мере следующего уравнения первого порядка (Лайтхилл)

$$(x + \epsilon u)\partial_x u + (2 + x)u = 0.$$

Пренебрегая здесь членом с ϵ, находим уравнение $x\partial_x u+ (2 + x)u = 0$, которое и меет особую точку $x = 0$. Решение этого уравнения имеет вид

$$u = \frac{C}{x^2}\exp(-x)$$

где C - произвольная константа. Это решение обращается при $x \to 0$ в бесконечность. Чтобы исследовать поведение исходного уравнения (5.59) при малых x, слечлены по малому x, что сводится к пренебрежению x в факторе $2 + x$. В результате получае м уравнение

$$(x + \epsilon u)\partial_x u + 2u = 0.$$

Сравнение факторов x и ϵ позволяет найти ширину области, где существенен член с ϵ, эта ширина равна $(C\epsilon)^{1/3}$. Подстановка $u = x\eta/\epsilon$ приводит уравнение (5.61) к уравнению на η с разделяющимися переменными. Его решение дает

$$u(x + \epsilon u/3)^2 = C,$$

что при $x \gg (C\epsilon)^{1/3}$ сводится к $u = C/x^2$. Таким образом, решения (5.60) и (5.62) совп адают в промежуточной области $(C\epsilon)^{1/3} \ll x \ll 1$. При $x \ll (C\epsilon)^{1/3}$ решение u выходит на конст анту $u_0 = (9C/\epsilon^2)^{1/3}$. Обращаем внимание нанеаналитическую зависи мость u_0 от ϵ.

Задача

5.5.2. Построить нулевое приближение решения уравнения

$$(x+\epsilon u)\partial_x u+(3+x)u=0.$$

Рассмотрим следующее линейное уравнение второго порядка ($\epsilon>0$)

$$\left[\left(x^2+\epsilon\right)^2\partial_x^2+2\left(x^2+\epsilon\right)x\partial_x+1\right]u=0,$$

при положительных x. Пренебрегая ϵ в (5.63), получаем уравнен ие, решения которого $\cos(1/x),\sin(1/x)$ ведут себя сингулярно при $x\to 0$. Члены с ϵ в (5.63) становятся существенными при $x\sim\sqrt{\epsilon}$. При $x\ll\epsilon$ исходное уравнение (5.63) сводит ся к уравнению

$$\left(\epsilon^2\partial_x^2+1\right)u=0$$

решения которого $\cos(x/\epsilon),\sin(x/\epsilon)$ ведут себя регулярно при $x\to 0$. Можно найти решения и сходного уравнения (5.63)

$$\cos\left[\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\arctan\frac{x}{\sqrt{\epsilon}}\right],$$
$$\sin\left[\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\arctan\frac{x}{\sqrt{\epsilon}}\right],$$

которые покрывают обе асимптотические области. При $x\ll\sqrt{\epsilon}$ мы получаем из (5.64) $\cos(x/\epsilon),\sin(x/\epsilon)$, так как $\arctan(y)\approx y$ при малых y. При $x\gg\sqrt{\epsilon}$ сит уация чуть сложнее.

Задача

5.5.3. Проследить, как решения (5.64) переходят в решения $\cos(1/x),\sin(1/x)$ при $x\gg\sqrt{\epsilon}$.

В рассмотренных выше примерах удавалось аналитически найти выражения, которые были справедливы сразу в двух асимптотических областях. Как правило, этого сделать не удается, и в лучшем случае решение можно найти численно. Однако для общего анализа решения достаточно исследовать его поведение в каждой аси мптотической области и потребовать сшивки (то есть равен ства по порядку величины) найденных решений на сшивать надо как сами функции, так и их производные (кроме старшей). Это дает представление об общем характере решения и позволяет определить его изменения при вариациях ϵ.

Задача

5.5.4. Построить асимптотические решения уравнения ($x>0,\epsilon>0$)

$$(x+\epsilon)\partial_x^2+2\partial_x u+xu=0,$$

и проследить, как они переходят друг в друга.

19.1.3 Boundary layer

Теория (?)

Пограничный слой возникает в случае, когда дифференциальное уравнение, которому подчиняется функция или поле, имеет малый коэффициент при старшей производной. Пренебрежение членом со старшей производной упрощает уравнение, что в ряде случаев позволяет решить его ан алитически. Но это ан алитическое решение не

может удовлетворить граничным у словиям, поскольку порядок усеченного уравнения ниже, чем исходный. Поэтому задачу приходится решать отдельно для основной области, где работает усеченное уравнение, и для узкого слоя вблизи границы (пограничного слоя), где учет высшей производной обязателен. Общее решение находится сшивкой найденных выражений на границе этих областей.

Подобная ситуация возникает, например, при анализе гидродинамических уравнений при больших числах Рейнольдса. Тогда вязким членом в уравнении НавьеСтокса можно пренебречь при ан ализе течения в объеме (исключая течения с очень малыми масштабами), и мы приходим к уравнению Эйлера, которое имеет первый порядок по градиенту. Однако решения уравнения Эйлера не могут удовлетворить граничным условиям (нулевому значению скорости на границе). Поэтому вблизи границы имеется вязкий пограничный слой, течение в котором может быть проан ализировано только в рамках уравнения Навье-Стокса, содержащего вторую степень градиента.

Проиллюстрируем сказанное на простейшем примере уравнения

$$\epsilon\partial_x^2 u + \partial_x u + u = 0$$

где $\epsilon \ll 1$. Будем искать решение с граничными условия ми $u = 0, \partial_x u = 1$ при $x = 0$. Пренебрегая членом с ϵ в ур авнении (5.65), находим уравнение $\partial_x u + u = 0$, общее решение которого и меет вид $u = a\exp(-x)$. Очевидно, это решение не может удовлетворить граничным условиям. Поэтому при малых x решение требует коррекции. Поскольку $u = 0$ при $x = 0$, мы можем при малых x пренебречь членом с u в уравнении (5.65), что дает $\epsilon\partial_x^2 u + \partial_x u = 0$. Решение этого уравнения с данными граничными условиями имеет вид $u = \epsilon[1 - \exp(-x/\epsilon)]$. Условие применимости этого приближения имеет вид $\partial_x u \gg u$, что дает неравенство $x \ll \epsilon\ln(1/\epsilon)$, которое определяет толщину пограничного слоя. При $\epsilon\ln(1/\epsilon) \gg x \gg \epsilon$ най денное решение выходит на константу, равную ϵ. Сравнивая эту константу с $u = a\exp(-x)$, находим константу $a = \epsilon$. Таким образом, мы находим решение $u = \epsilon\exp(-x)$, которое работает при условии $x \gg \epsilon$.

Задача

5.5.5. Уравнение (5.65) решается точно. Найти его решение с граничными условиями $u = 0$, $\partial_x u = 1$ при $x = 0$ и сравнить его с найденнъм приближсенньм решен ием.

Переходим теперь к нелинейным уравнениям. В этом случ ае возможно существование нескольких решений уравнения и даже построение решения, которое задается различными выражения ми на разных интерв алах. На границах интервала должны быть выполнены условия "склейки": непрерывность функции и ее производных вплоть до производной, на единицу меньше порядка уравнения. Напри мер, для ур авнения первого порядка достаточно потребовать непрерывности самой функции, а для уравнения второго порядка должны быть непрерывны сама функция и ее первая производная. При этом возникает "контринтуитивная" ситуация, когда, скажем, для уравнения первого порядка в точке склейки производная функции может испытывать скачок. Понятие пограничного слоя позволяет прояснить эту ситуацию.

Рассмотрим в качестве примера уравнение первого порядка $(\partial_x u)^2 = 1$. Оно имеет решение $u = |x|$, которое удовлетворяет у словию неп рерывности, но имеет скачок производной в точке $x = 0$. Спрашивается, как возможно возникновение такого разрывного решения?

Для выяснения этого вопроса введе м в указанное уравнения вторую производную с малым коэффициентом: $\epsilon\partial_x^2 u + (\partial_x u)^2 = 1$. Это уравнение легко решается ан алитически, для чего следует ввести переменную $w = \partial_x u$, для которой приведенное уравнение является уравнением первого порядка с разделяющи мися переменными. Его решением (с точностью до сдвига по x) является $w = \tanh(x/\epsilon)$. Интегрирование этого выражения дает $u = \epsilon\ln\cosh(x/\epsilon)$.

Это решение бесконечно дифференцируемо и не имеет никаких особенностей на действительной оси. В то же время мы сталкиваемся с пограничным слоем толщиной ϵ, вне которого, то есть при $|x| \gg \epsilon$, функция $u \approx |x|$. Понятно, что в пределе $\epsilon \to 0$ мы получаем $u = |x|$, с разрывом производной. Обобщая это наблюдение, можно сказать, что решения с разрывами в производных являются следствием наличия пограничных слоев, толщина которых устремляет ся к нулю. Проан ализируем нелинейное уравнение

$$\epsilon\partial_x^2 u + \left(1 + u^2\right)\partial_x u - 2 = 0,$$

где $\epsilon \ll 1$. Снова будем искать решение с граничными условиями $u = 0, \partial_x u = 1$ при $x = 0$. Пренебрегая членом с ϵ в уравнении (5.66), находим уравнение, решение которого определяется соотношением $u + u^3/3 = 2\,(x - x_0)$, которое, очевидно, не может удовлетворить обеим граничным условиям. В силу того, что $u = 0$ для $x = 0$, при малых x членом с u^2 в уравнении (5.66) можно пренебречь. В результате мы находим уравнение $\epsilon\partial_x^2 u + \partial_x u - 2 = 0$, решение которого с принятыми граничными условиями находится из соотношения $\epsilon\partial_x u + u = 2x + \epsilon$. Решение, удовлетворяющее данным граничным условиям, имеет вид

$$u = 2x - \epsilon + \epsilon \exp(-x/\epsilon).$$

Критерием при мени мости (5.67) является $u \ll 1$, то есть $x \ll 1$. В то же время уже при $x \gg \epsilon$ решение (5.67) выходит на $2x - \epsilon$, откуда следует $x_0 = \epsilon/2$.

В рассмотренных примерах удавалось аналитически найти выражения, которые были справедливы сразу в двух асимптотических областях. Как правило, этого сделать не удается, и в лучшем случае решение можно найти численно. Однако для общего анализа решения достаточно исследовать его поведение в каждой асимптотической области и потребовать сшивки (то есть равенства по порядку величины) найденных решений на границе областей. Эта процедура дает пре дставление об общем характере решения и позволяет найти его изменения при вариациях ϵ.

Задача

5.5.6. Проанализировать решение уравнения $\epsilon\partial_x^2 u + \partial_x u + xu = 0$ при малых ϵ.

Пограничный слой может содержать несколько подслоев. Рассмотрим в качестве при мера ур авнение

$$\epsilon^3\partial_x^2 u + x^3\partial_x u + \left(x^2 - \epsilon\right) u = 0,$$

где $x > 0, \epsilon > 0, \epsilon \ll 1$. Полагая в (5.68) $\epsilon = 0$, находим уравнение $x\partial_x u + u = 0$. Его решение $\propto 1/x$, оно реализуется в основной области $x \gg \epsilon^{1/2}$. При $\epsilon^{2/3} \ll x \ll \epsilon^{1/2}$ можно пренебречь первым членом в (5.68) и x^2 по сравнению с ϵ, что приводит к уравнению $x^3\partial_x u - \epsilon u = 0$, решение которого $\propto \exp\left[-\epsilon/\left(2x^2\right)\right]$. При $x \ll \epsilon^{2/3}$ в (5.68) следует оставить только члены с ϵ, что приводит к уравнению $\epsilon^2\partial_x^2 u - u = 0$, решения которого $\exp(\pm x/\epsilon)$. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} u &= D\epsilon^{1/2}/x, \quad x \gg \epsilon^{1/2} \\ u &= C\exp\left[-\epsilon/\left(2x^2\right)\right], \quad \epsilon^{2/3} \ll x \ll \epsilon^{1/2} \\ u &= A\exp(x/\epsilon) + B\exp(-x/\epsilon), \quad x \ll \epsilon^{2/3} \end{aligned}$$

Эти выражения должны по порядку величины совпадать на границах областей, что дает два условия на константы A, B, C, D. Еще два соотношения дают граничные условия. Если, скажем, $u(0) \sim 1 u(1) \sim 1$, то $A \sim B \sim 1, \ln C \sim \epsilon^{-1/3}, D \sim C$.

Задача

5.5.7. Проанализ ировать решение уравнения $\epsilon^3\partial_x^2 u + \epsilon\sinh u\partial_x u + x\partial_x u + \tanh u = 0$ при малых ϵ. Рассмотреть случай граничного условия $u = 0$ при $x = 0$.

19.2 Other Methods of Solving Equations

19.2.1 Solutions Using Infinite Series (!?!??!)

(тоже типичная теория, пока тут, мб в раздел с основами помещу.)

19.3 Integrable Systems: Introduction

(тоже важно их указать, потому что это первый раздел, который вытекает из диффуров.)

19.4 Stochastic Differential Equations: Introduction

(see special note about them, random processes. I'll later write some basic topics about them also here)

19.5 Averaging Method (?!)

19.5.1 Typical method

Снова обратимся к дифференциальному уравнению (5.58), которое мы будем рассматривать в рамках временнОй эволюции. Поэтому независи мой переменной теперь будет время t, а уравнение (5.58) перепишется в виде

$$F\left(t, x, \partial_t x, ...\right) + \epsilon G\left(t, x, \partial_t x, ...\right) = 0$$

Уравнение (6.11) можно решать по теории возмущений, которая заключается в следующем. Сначала мы находим решение уравнения $F = 0$, затем подставляем это нулевое решение в G и находим из уравнения (6.11) первую по поправку к нулевому решению, и так далее. Тем самым решение будет найдено в виде ряда по є. эта процедура может быть осуществлена аналитически, если функции F, G достаточно просты. В противном случае ее можно осуществлять только численно. О днако в ряде случаев разложение по ϵ может разрушаться на больших временах t. Это происходит, если решение уравнения $F = 0$ имеет осцилляторный характер, а функция G приводит к резонансу с этими осцилляция ми. В этом случае в решении уравнения (6.11) возникают так называемые вековые (секулярные) члены, которые растут со временем быстрее, чем нулевое решение, то есть решение уравнения $F = 0$. Это приводит к тому, что со временем секулярные члены, несмотря на малость по є, могут стать сравнимыми с нулевым решением, что и приводит к его разрушению. Роль секулярных членов в ди фференциальных уравнениях исследовалась еще в 18 веке в работах Лагранжа и Лапласа при расчете эволюции планетных орбит.

В качестве простейшей иллюстрации сказанного рассмотрим уравнение

$$\partial_t^2 x + x = \epsilon x^3.$$

При $\epsilon = 0$ решение уравнения (6.12) имеет вид $x_0 = a\cos(t - \tau)$, где τ - произвольная кон станта. Подставляя это выражение в правую часть уравнения (6.12), мы находим уравнение для первой поправки x_1 к x_0:

$$\partial_t^2 x_1 + x_1 = \frac{1}{4}\epsilon a^3[\cos(3t - 3\tau) + 3\cos(t - \tau)].$$

Второе слагаемое в правой части (6.13) имеет частоту основного решения, то есть находится в резонансе с левой частью этого уравнения. Оно порождает следующий секулярный вклад в x_1:

$$x_1 = \frac{3}{8}\epsilon a^3 (t - \tau)\sin(t - \tau).$$

Очевидно, что на достаточно больших временах, когда $t \sim \left(\epsilon a^2\right)^{-1}$, приведенная поправка становится порядка нулевого решения, что и означает нарушение применимости разложения по ϵ.

Можно существенно усовершенствовать схему решения уравнения (6.12) по сравнению с прямой теорией возмущени й, построив прибли женное решение, которое работает на временах t много бОльших $\left(\epsilon a^2\right)^{-1}$. Будем искать решение уравнения в виде $x = a\cos(t - \tau)$, где a и τ являются медленными функциями времени. Под- став ляя это выражение в уравнение (6.12) и сохраняя только первые производные по времени от a, τ, находим следующее уравнение

$$-\partial_t a\sin(t - \tau) + \partial_t \tau a\cos(t - \tau) = \frac{3}{8}\epsilon a^3\cos(t - \tau)$$

где мы оставили в правой части только резонансный член. Опущенный (не резонансный) член дает поправки, малые по ϵ, на всех временах. Приравнивая к нулю коэффициенты при синусе и косинусе, находим си стему уравнений

$$\partial_t a = 0, \quad \partial_t \tau = \frac{3}{8}\epsilon a^2.$$

Очевидным решением системы (6.14) является $a = \text{const}$, $\tau = \tau_0 + (3/8)\epsilon a^2 t$, где τ_0 - произвольная константа. Таким образом, мы приходим к решению

$$x = a\cos\left[t - (3/8)\epsilon a^2 t - \tau_0\right]$$

которое представляет собой осцилляции с частотой $\omega = 1 - (3/8)\epsilon a^2$. Поправка к единице называется нелинейным сдвигом частоты.

Установим критерий применимости выражения (6.15). При выводе уравнения (6.14) мы отбросили члены с $\partial_t^2 \tau$ и с $\partial_t^2 a$. Малым параметром, по которо- му это можно сделать, является ϵa^2. Именно с этой относительной точностью найдено выражение для $\partial_t \tau$, поэтому поправка к этому выражению может быть оценена, как $\epsilon^2 a^4$. Таким образом, поправка к аргумен- ту косинуса в выражении $x = a\cos(t - \tau)$ может быть оценена, как $t\epsilon^2 a^4$, то есть решение (6.15) работает при условии $t \ll (\epsilon^2 a^4)^{-1}$.

Задача

6.2.1. Сравнить решение (6.15) с точным решением уравнения (6.12) и проверить критерий применимости выражения (6.15).

Приведенную выше схему можно обобщить на случай произвольного малого возмущения уравнения гармонического осциллятора. А именно, рассмотрим уравнение осциллятора с частотой 1 и добавим в правую часть этого уравнения произвольный малый член, зависящий от x и $\partial_t x$:

$$\partial_t^2 x + x = \epsilon G\left(x, \partial_t x\right).$$

Способ приближенного решения такого уравнения называется методом Боголюбова-Крылова. Введем вспомогательную переменную $z = x + i\partial_t x$. В терминах этой функци и уравнение (6.16) приобретает следующую форму

$$\partial_t z = -iz + i\epsilon G(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z).$$

Вводим абсолютное значение и фазу z : $z = a\exp(i\varphi)$. Тогда уравнение (6.17) переписывается в виде

$$\partial_t a = \epsilon \sin\varphi G(a\cos\varphi, a\sin\varphi),$$
$$\partial_t \tau = \epsilon \frac{\cos\varphi}{a} G(a\cos\varphi, a\sin\varphi),$$

где $\varphi = -t + \tau$. До сих пор преобразования были точными. Чтобы продвинуться дальше, заметим, что приращения a и τ за период малы в силу малости ϵ. Поэтому при вычислении этих приращений в правой части (6.18) и τ можно считать константами, что дает

$$\Delta a = \epsilon \int_0^{2\pi} d\varphi \sin\varphi G(a\cos\varphi, a\sin\varphi)$$

$$\Delta \tau = \epsilon \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\cos\varphi}{a} G(a\cos\varphi, a\sin\varphi)$$

Обратим внимание нато, что τ выпадает из выражений для этих приращений (в силу того, что начало отсчета периода произвольно). Таким образом, для медленной эволюции

(на больших временах) мы находим следующие эффективные уравнения

$$\partial_t a = \frac{\epsilon}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \sin\varphi G(a\cos\varphi, a\sin\varphi),$$
$$\partial_t \tau = \frac{\epsilon}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \frac{\cos\varphi}{a} G(a\cos\varphi, a\sin\varphi).$$

Легко проверить, что для проанализиров анной нами задачи (6.12), когда $G = x^3$, уравнения (6.19, 6.20) сводятся к уравнениям (6.14).

Задача

6.2.2. Найти поведение на больших временах амплитуды колебаний осуиллятора с нелинейным затуханием $\partial_t^2 x + x = -\epsilon\left(\partial_t x\right)^3$ при малом ϵ.

Задача

6.2.3. Проанализ ировать поведение решения уравнения $\partial_t^2 x + x = -\epsilon\partial_t x\left|\partial_t x\right|$ при малом ϵ.

Рассмотрим уравнение Ван дер Поля с малым множителем в правой части, $\epsilon \ll 1$:

$$\partial_t^2 x + x = \epsilon\left(1 - x^2\right)\partial_t x.$$

Уравнения (6.19, 6.20) для этого случая сводятся к

$$\partial_t a = \frac{\epsilon}{2} a\left(1 - a^2/4\right), \quad \partial_t \tau = 0.$$

Y$_{\text{равнение}}$ (6.22) описывает приближение амплитуды a к устойчивой фиксированной точке $a = 2$, которая соответствует асимптотическому режиму автоколебаний (предельному циклу).

Задача

6.2.4. Проанализ ировать поведение решения уравнения $\partial_t^2 x + x = -\epsilon\left(1 - x^2\right)^2\partial_t x$ при малом ϵ.

Задача

6.2.5. Проанализ ировать поведение решения уравнения $\partial_t^2 x + x = \epsilon\left(1 - x^2\right)\partial_t x + \epsilon x^3$ при малом ϵ. Метод Боголюбова-Крылов а может быть обобщен на случай явной зависимости функции G в уравнении (6.16) от времени при условии, что функция G остается приблизительно периодической функцией времени с периодом 2π. Для решения задачи в этом случае снова исходим из уравнений (6.18), где в правой части появляется явная зависимость от времени:

$$\partial_t a = \epsilon\sin\varphi G(t, a\cos\varphi, a\sin\varphi),$$
$$\partial_t \tau = \epsilon\frac{\cos\varphi}{a} G(t, a\cos\varphi, a\sin\varphi),$$

где $\varphi = -t + \tau$. Снова интегрируя по периоду и находя приращения a и τ, находим эффективные уравнения

$$\partial_t a = \frac{\epsilon}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\phi \sin\varphi G(t-\phi, a\cos\varphi, a\sin\varphi)$$

$$\partial_t \tau = \frac{\epsilon}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\phi \frac{\cos\varphi}{a} G(t-\phi, a\cos\varphi, a\sin\varphi)$$

где $\varphi = \tau - t + \phi$. Обратим внимание нато, что теперь τ явно входит в решение.

Задача

6.2.6. Найти решение уравнений (6.24,6.25) для резонансной накачки $G = \cos t$.

Задача

6.2.7. Найти решение уравнений $(6.24, 6.25)$ для резонансной параметрической накачки $G = x\cos(2t)$.

Задача

6.2.8. Найти решение уравнений $(6.24, 6.25)$ для осиилятора Ван дер Поля с накачкой $G = (1-x^2)\,\partial_t x + \kappa\cos t$

До сих пор мы приводили выражения для приближенных уравнений колебаний возмущенного осциллятора с единичной частотой. Все найденные выражения легко обобщ аются на случай конечной частоты осциллятора ω. Приведем соответств ующие выражения. Вместо уравнения (6.16) следует рассмотреть уравнение

$$\partial_t^2 x + \omega^2 x = \epsilon G,$$

где ω - собственная ч астота осциллятора. Будем искать решение этого уравнения в виде

$$x = a\cos(-\omega t + \theta),$$

где a, θ - медленные функции времени. Уравнения на эти функции являются прямым обобщением уравнений $(6.19, 6.20)$

$$\partial_t a = \frac{\epsilon}{\omega} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \sin(\varphi) G$$

$$\partial_t \theta = \frac{\epsilon}{\omega a} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \cos(\varphi) G$$

При вычислении интегр алов в правых частях $(6.28, 6.29)$ в функцию G следует подставить $u \to a\cos\varphi, \partial_t u \to \omega\sin\varphi$. Уравнения $(6.28, 6.29)$, очевидно, сводят ся к $(6.19, 6.20)$ при $\omega = 1$.

В качестве тривиального примера рассмотрим линейный осциллятор с затуханием. В этом случае $G = -2\partial_t x$, а ϵ является декрементом затухания. Подставляя это выражение в соотношения $(6.28, 6.29)$, находим $\partial_t\theta = 0, \partial_t a = -\epsilon a$. Как и следует, амплитуда a затухает со временем с декрементом ϵ.

19.5.2 Averaged equations for wave motion

Метод усре днения, развитый выше для колебательного движения, непосредст венно обобщается и для волнового движения. Как и для колебательного движения, мы будем считать, что в главном приближении волновое движение описывается линейными волновыми уравнениями, и будем изучать роль малых поправок, связанных с нелинейностью, внешни м воздей ствием, неоднородностью и так далее.

Р ассмотрим волновое движение, кот орое опи сывает ся полем $u(t, \boldsymbol{r})$, уравнение на которое имеет вид

$$\partial_t^2 u + \hat{\omega}^2 u = \epsilon G.$$

Здесь оператор $\hat{\varpi} = \varpi(-i\nabla)$ определяется законом дисперсии $\varpi(\boldsymbol{q})$ волнового движения, а G - некоторая функция поля u, его производных, а также, возможно, времени и координат. Параметр ϵ в правой части уравнения (6.30) считается малым. В нулевом приближении, когда $\epsilon = 0$, уравнение (6.30) сводится к чисто волновому линейному уравнению, которое, в частности, и меет решение в виде бегущей плоской волны с волновым вектором $\boldsymbol{q}$: $u = a\cos(-\omega t + \boldsymbol{qr} + \theta)$, где $\omega = \varpi(\boldsymbol{q})$, а θ - произвольная константа. Будем искать решение уравнения (6.30) в том же виде $u = a\cos(-\omega t + \boldsymbol{qr} + \theta)$, где теперь (с учетом дополнительного члена с G) параметры a и θ являются медленными функциями времени и коор динат.

Используем тот же прием, который позволил найти усредненные уравнения для возмущенного гармонического осциллятора. Для этого вводим функции u_1 и w: $\partial_t u_1 = \hat{\omega} u, w = u + iu_1$. Тогда уравнение (6.30) перепишет ся в виде уравнения первого порядка

$$\partial_t w = -i\hat{\omega} w + i\epsilon\hat{\varpi}^{-1} G.$$

Подставляя сюда $w = a\exp(-i\omega t + i\boldsymbol{qr} + i\theta)$, находи м

$$\partial_t a + ia\partial_t\theta + \boldsymbol{v}\nabla a + ia\boldsymbol{v}\nabla\theta = \frac{i\epsilon}{\omega} G\exp(-i\varphi),$$

где $\boldsymbol{v} = \partial\varpi/\partial\boldsymbol{q}$ - групповая скорость волны. При выводе мы использовали соотношение $\left(\psi = ae^{i\theta}\right)$

$$\varpi(-i\nabla)[\exp(i\boldsymbol{qr})\psi] = \exp(i\boldsymbol{qr})\varpi(\boldsymbol{q} - i\nabla)\psi,$$

и сохра $\varpi(\boldsymbol{q} - i\nabla)$ нулевой и первый члены разложения по ∇/q. Мы также заменили в правой части $\hat{\omega} \to \omega^{-1}$, что справедливо в главном порядке по ϵ. Выделяя в полученном уравнении действительную и мни мую ч асти, находим

$$\partial_t a + v\nabla a = \frac{\epsilon}{\omega}\sin(\varphi)G$$
$$\partial_t\theta + v\nabla\theta = \frac{\epsilon}{\omega a}\cos(\varphi)G$$

Усредняя эти уравнения по периоду, мы находим уравнения для медленных переменных

$$\partial_t a + \boldsymbol{v}\nabla a = \frac{\epsilon}{\omega}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{2\pi}\sin(\varphi)G$$

$$\partial_t\theta + \boldsymbol{v}\nabla\theta = \frac{\epsilon}{\omega a}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{2\pi}\cos(\varphi)G$$

В аргументе функции G в выражениях (6.33,6.34) следует подставлять $u \to a\cos\varphi, \nabla u \to -\boldsymbol{q}a\sin\varphi, \partial_t u \to \omega a\sin\varphi$. Последние выражения получаются в главном приближении по ϵ, что достаточно в силу того, что правая часть выражений (6.33, 6.34) уже содержит малость по ϵ. $\text{V}_{\text{равнения}}$ (6.33, 6.34) являются прямым обобщением уравнений (6.28, 6.29). Единст венная разница заключается в наличии переносного члена с градиентом. Можно сказать, что ур авнения (6.33, 6.34) совпадают с уравнениями (6.28, 6.29) в системе отсчета, которая движется с групповой скоростью $\boldsymbol{v}$. Следует, однако, помнить о том, что мы

имеем дело с полем, заданным в пространстве. И потому уравнения (6.33, 6.34) необходи мо решать с учетом граничных условий.

В качестве тривиальной иллюстрации сказанного рассмотрим случай затухающей волны. В этом случае $G = -2\partial_t u$, а ϵ является декрементом зат ухания волны. Подстановка этого выражения в соотношения (6.33, 6.34) приводит к уравнениям

$$\partial_t a + \boldsymbol{v}\nabla a = -\epsilon a, \quad \partial_t \theta + \boldsymbol{v}\nabla\theta = 0.$$

Решение уравнения для амплитуды a неоднозначно. Например, решениями этого уравнения являются $a \propto \exp(-\epsilon t)$ (a не зависит от координат), или $a \propto \exp\left(-\epsilon \boldsymbol{v}\boldsymbol{r}/v^2\right)$ (а не зависит от времени). Найти и стинное решение уравнения для амплитуды можно только с учетом граничных условий.

Перейдем теперь к уравнению на огибающую $\psi = a\exp(i\theta)$. В этом случае уравнения (6.33, 6.34) переписывают ся в виде

$$\partial_t\psi + \boldsymbol{v}\nabla\psi = \frac{i\epsilon}{\omega}\exp(i\theta)\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{2\pi}\exp(-i\varphi)G.$$

Например, для $G = u^3$ уравнение (6.35) сводится к

$$\partial_t\psi + v\nabla\psi = \frac{3i\epsilon}{8\omega}|\psi|^2\psi.$$

Если перейти в систему отсчета, движущуюся с групповой скоростью $\boldsymbol{v}$ и учесть следующий член разложения $\varpi(\boldsymbol{q} - i\nabla)$ по ∇/q в (6.32), то мы получим нелинейное уравнение Шрёдингера.

Задача

6.2.9. Найти уравнение на огибающую ψ для $G = u(\nabla u)^2$.

Задача

6.2.10. Найти уравнение на огибающую ψ для нелинейного затухания $G = -\partial_t u(\nabla u)^2$.

19.5.3 Other about the averaging method

(мб тут, мб в каталоге напишу, пока хз)

Применения в механике (!?!?!?!?!?)

Об усреднении в маятнике Капицы (!?!?!?!?)

(?? зашарю уже это наконец-то???)

19.5.4 Introduction to Exotic Methods of Avergaings

(there are books about them, I don't know them, maybe one day I'll read something about them...)

19.6 Dynamical Systems (???)

(write intro, see a special note about them also or mechanics)

19.7 Geometrical Methods for DE (???)

(потом по Арнольду мб пройду, пока не актуально.)

19.8 Exotic Differential Equations

19.8.1 Chaotic Trajectories

(тоже часто из всей теории только эта нужна, так что вот, заготовка про неё будет.)
(see that youtube video about them and write some theory)

19.8.2 Delayed differential equations

(такое тоже есть, потом пропишу)

Аналитические свойства

(пока по вики, я просто знаю, что такое есть, чуть что доучивать буду когда-то.)
- Continuous delay

$$\frac{d}{dt}x(t) = f\left(t, x(t), \int\limits_{-\infty}^{0} x(t+\tau)d\mu(\tau)\right)$$

- Discrete delay

$$\frac{d}{dt}x(t) = f\left(t, x(t), x\left(t-\tau_1\right), ..., x\left(t-\tau_m\right)\right)$$

for $\tau_1 > \cdots > \tau_m \geq 0$. - Linear with discrete delays

$$\frac{d}{dt}x(t) = A_0 x(t) + A_1 x\left(t-\tau_1\right) + \cdots + A_m x\left(t-\tau_m\right)$$

where $A_0, ..., A_m \in \mathbb{R}^{n\times n}$. - Pantograph equation

$$\frac{d}{dt}x(t) = ax(t) + bx(\lambda t)$$

where a, b and λ are constants and $0 < \lambda < 1$. This equation and some more general forms are named after the pantographs on trains.

Solving DDEs

DDEs are mostly solved in a stepwise fashion with a principle called the method of steps. For instance, consider the DDE with a single delay

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t), x(t-\tau))$$

with given initial condition $\phi : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^n$. Then the solution on the interval $[0, \tau]$ is given by $\psi(t)$ which is the solution to the inhomogeneous initial value problem

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = f(\psi(t), \phi(t-\tau))$$

with $\psi(0) = \phi(0)$. This can be continued for the successive intervals by using the solution to the previous interval as inhomogeneous term. In practice, the initial value problem is often solved numerically.

Example

Suppose $f(x(t), x(t-\tau)) = ax(t-\tau)$ and $\phi(t) = 1$. Then the initial value problem can be solved with integration,

$$x(t) = x(0) + \int\limits_{s=0}^{t} \frac{d}{dt}x(s)ds = 1 + a\int\limits_{s=0}^{t} \phi(s-\tau)ds$$

i.e., $x(t) = at + 1$, where the initial condition is given by $x(0) = \phi(0) = 1$. Similarly, for the interval $t \in [\tau, 2\tau]$ we integrate and fit the initial condition,

$$\begin{aligned} x(t) = x(\tau) + \int\limits_{s=\tau}^{t} \frac{d}{dt}x(s)ds &= (a\tau + 1) + a\int\limits_{s=\tau}^{t} (a(s-\tau)+1)ds \\ &= (a\tau + 1) + a\int\limits_{s=0}^{t-\tau} (as+1)ds, \end{aligned}$$

i.e., $x(t) = (a\tau + 1) + a(t-\tau)\left(\frac{1}{2}a(t-\tau) + 1\right)$.

Reduction to ODE (???)

In some cases, differential equations can be represented in a format that looks like delay differential equations.

Example 1

Consider an equation

$$\frac{d}{dt}x(t) = f\left(t, x(t), \int\limits_{-\infty}^{0} x(t+\tau)e^{\lambda\tau}d\tau\right).$$

Introduce $y(t) = \int\limits_{-\infty}^{0} x(t+\tau)e^{\lambda\tau}d\tau$ to get a system of ODEs

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x, y), \quad \frac{d}{dt}y(t) = x - \lambda y.$$

Example 2

An equation

$$\frac{d}{dt}x(t) = f\left(t, x(t), \int\limits_{-\infty}^{0} x(t+\tau)\cos(\alpha\tau + \beta)d\tau\right)$$

is equivalent to
(?????)

Программные вычисления

19.9 Calculus of Variations: Basic Methods

(put theory from typical textbook about them)

19.10 Calculus of Variations: Special Methods

(I know that they exists, but I never needed them. I'll look maybe later, there are big books about them)

19.11 Calculus of Variations: Special Methods for Applications in Physics

(here, I'll collect methods, that are used in articles in physics, which which I worked at least a little)

20 Some Famous Equations (??)

(пока без структуры, не так она нужна.)

20.1 Bernoulli equation

(тут подробно, в начале коротко обсудили уже)

20.1.1 Theory

пока хз

20.1.2 Attachments

потом всё это просмотрю

20.2 Riccati equation

(просто помню такое, много про него инфы, мб потом что-то соберу)

20.2.1 Theory

пока хз

20.2.2 Attachments

потом всё это просмотрю

20.3 Others

(все важные остальные тут)

20.3.1 Airy equation

всё про него заготовлю тут.

21 Applications and Preparation to Applications

отсылки на то, что в статьях подробно я прошел и изучил.

21.1 Creation of models of DE from Physical Ideas

(this is more connected to physics, so I'll write it after a lot of practice in physics. this question is not important at all from math side)

21.2 Applications in mathematics and other sciences

(большая важная г лава, которую буду делать когда на мастерский уровень буду выходить, пока нужно каталог решать!)

21.3 Applications in Physics

21.3.1 In mechanics

(уже скоро эту связку буду создавать, ибо механика уже супер развивается)

21.3.2 In quantum mechanics

(уже скоро эту связку буду создавать, ибо механика уже супер развивается)

21.3.3 On Applications in Other Physics

(уже скоро эту связку буду создавать, ибо механика уже супер развивается)

21.4 Life Applications

(??? I don't know but they may be applicable)

21.4.1 Economic applications

????

21.4.2 Environmental Applications (?)

(тоже касался там приложений.)

Part VI
Appendix

A Introduction and Overview

A.1 Extra Motivation

(позже пропишу, пока хватает)

Многочисленные применения в физике

Просто это один из самых важных предметов для физики. Без него все будет супер медленно и туго.

пролетим быстро по методам, потом усилим их профессиональными методами - потом пойдем применять.

применений вышей крыши, для этого и развиваю эту сборку.

Очень часто физическая модель сводится именно к диффуру и основной задачей становится только решить этот диффур

Поэтому с некоторой точки зрения для не таких заумных разделов физики диффуры - основной предмет. Поэтому не лень подготовить методы на типичные задачи.

Сложные задачи часто сводятся к специфическим методам решения диффуров, с которыми не разобраться, если не взята база

Так что знание диффуров отличит профессионала от новичка.

Теормин по механике мне четко указал, что без нормального понимания диффуров, профессионально механикой не получится заняться. Думаю, часто аналогичная ситуация будет.

Да, часто задачи сводятся к чему-то другому, но вероятность, что дело сведется к диффуру, наибольшая.

Иногда нужно проанализировать свойства диффура

когда там решение одно, когда несколько?

Тут без подготовки не приступиться, так что не сложно собрать теоретическую базу в 20-60 страниц, с которой анализ будет без проблем делаться.

формируют представление о мире

там про связь с хаосом.

пропишу это в первой части

возможно, вообще все в мире ими описывается (?????)

потом подумаю про их важность отдельно.

что не описать диффурами?

Наиболее прикладные темы дифференциальных уравнений

обсудим, какие темы на самом деле самые важные тут.

(пока слишком слабый уровень, чтобы видеть, что на самом деле можно использовать.)

Удивительные факты

(тоже многое можно будет написать, пока не тот уровень.)

A.2 The Mindset of Professionals

Осудим, какое мышление наиболее эффективное для усвоение предмета.
(!! оч важный раздел, ибо особый подход к предмету нужен, ибо 100500 подводных камней в нем!!)

A.2.1 Solving Effectively DE

С этими методами все быстро и решается, каждый день их и использую.

Проверки решений уравнений

Если задача важная, то всегда после решений идет проверка как ниже.

Проверяем, не потеряли ли мы какое-то константное решение.

(что-то очевидное)

Чаще всего просто по Вольфраму проверяем

Если нет ответов, то проверяем по вольфрмау! А также, не потеряли ли мы какие-то решения при преобразованиях, если можно, подставить решения в уравнение и посмотреть, такое ли оно? Это очень важно не забывать делать!
В помощь команды:

```
DSolve[eqn,u,x]
Apart[fraction]
Simplify[eqn]
```

Об отличиях с ответами

Если сравниваем с ответами, помним, что константа может иметь разные знаки. Это могло бы отнять время, потому что из-за разных знаков у констант вид решения может отличается от того, который в ответах.

A.2.2 Attitude to the DE (!?)

Дифференциальные уравнения - это набор относительно простых задач с небольшой для них теорией, а также специфических методов

Грубо говоря это так. Конечно, деталей везде полно, и многое есть сложного и неочевидного, тем не менее, грубо говоря это так и боятся нечего, спокойно каждый день можно по паре и прорешивать уравнений себе для разминки, главное только базовую теорию на минимальном уровне написать.

Важность лишь пары отдельных методов

Тут раскрою мысль, что мы пользуемся лишь парой методов. И именно они нужны, остальное - лишь общее образование, которое тоже полезно, но не настолько нужно, как пара методов, которые могут где угодно применяться.

Внимательность и последовательность

Очень важно всегда внимательно каждый шаг преобразований делать, иначе засядешь!
(остальное такое же тут укажу с опытом.)

Смысл дифференциальных уравнений

О том, что с помощью них описать можно, а что нельзя

(потом такой обзор приведу. неужели абслютно всё и можно??)

О философии за дифференциальными уравнениями

(там что пути по жизни это тоже траектории, что есть устойчивость, а есть большая зависимость от мелких начальных условиях. тоже важные общефилософские соображения, однако они напрямую не применяются, потому что все равно все сводится к тому, что сейчас конкретно происходит?)

заблуждение, что дифференциальные уравнения простые

как бы вроде и нет.
хотя кажутся и простыми.
тут подробнее напишу про тех, кто думает, что диффуры простые.
принципиально они их не начнут знать.

A.2.3 Ways to Guess Some Key Ideas

(overview how people guessed some key ideas for the first time)

не нужно думать, что все в жизни ими описывается (???)

пока хз.
но точно - циклиться на них это плохое дело.
в жизни слишком много парамтеров и слишком все сложно.

теоремы существования и типов решений очень важны в любой нестандартной ситуации (???)

пока просто не встречалось, но я слышал, что это нужно.
под вопросом это.

A.3 Acknowledgements

Currently, no one except me has worked on the sections of this note (with the exception of sections taken from books).

A.4 Literature

A.4.1 Main Literature

Минимальная

(пока хз, ни одну книгу я так и не прочитал, потому что лень.)
Диесперов Лекции по дифференциальным уравнениям
Базовый курс мфти, написан просто ужасно в плане верстки, в плане содержания, наверное, неплохо.
Петровский
Может, потом добавлю, основной сделаю.
Мэтьюз Уолкер (МУ (так мб потом буду обозначать, пока слишком мало из него выгрузок)
в некоторых курсах написано, что это хорошая книга, я почти не проверял, но если буду к мастерству выводить запись, то может быть буду много смотреть ее.

Books With Many Solved Problems

Романко В. К. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению
Основной задачник
Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям.
Мб добавлю потом, пока не вижу смысла.

По теории колебаний и волн

М.И.Рабинович, Д.И.Трубечков Введение в теорию колебаний и волн
Хороший большой учебник по колебаниям и волнам, скорее всего посмотрю потом.
А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. Теория колебаний
Книга про подробный анализ колебаний, уже в механике возникла потребность в этой теории.

По теории устойчивости

A.4.2 Extra Literature

По другим методам

Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
Много отсылок, но неизвестно, есть ли настоящая польза от этой книги, так что не буду заниматься вообще ей, пока стабильно типичные задачи не буду решать. Пока еще неделя тренировок для этого уровня требуется.

О тех же темах, что основная

Поятрязия Л. С. Обыкновенные дифференциальные у равнения, - Ижевск: Регулярная и хаотическая динамики, 2001.
пока почти не открывал, потом посмотрю.

А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников Дифференциальные уравнения
Милая небольшая книга, где много полезной информации, есть физические примеры. Для общего образования неплохая, просто редко есть время заниматься такого типа общим образованием. Читал ее часа 5, когда мне было 19 лет.

Филиппов А. Ф. Введение в теорию дифференциальных ур авнений. - Москва: Y_{pCC}, 2004,2007; - Москва: КомКнига, 2007, 2010, http://bookfi.org/book /791964.
пока почти не открывал, потом посмотрю.

Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. - Москва: ЛКИ, 2008.
пока почти не открывал, потом посмотрю мб.

Ромаяко В. К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. Москва: Лаборатория базовых зн ан ий, 2000-2011.
пока не открывал, потом посмотрю мб.

Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - Санкт-Петербург: Лань, 2003.
пока не открывал, потом посмотрю мб.

Умяов А. Е., Умяов Е. А. Основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - Москва: МФТ И, 2016, http://www.umnov.ru.
пока не открывал, потом посмотрю мб.

Гельфанд И. М., Фомия С.В. Вариационное исчисление, - Москва: Физматгиз, 1961, http://techlibrary,ru/bookpage. htm.

пока не открывал, потом посмотрю мб.

Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва: Физматлит, 2009.

Наверное, когда-то я раз открыл, понял, что быстро не разобраться и закрыл, итак есть куча другой хорошей литературы. Но, вроде, полезная книга.

Купцов. П., Николаев В.С. Курс лекций по теории обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие. - Москва: МФТ И, 2003.

пока не открывал, потом посмотрю мб.

Ипатова В. М., Пыркова О. А., Седов В. Н. Дифференци альные уравнения. Методы решений. - Москва: МФТ И, 2007, 2012.

пока не открывал, потом посмотрю мб.

Эрроусмит, Плейс Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями [1986]

какая-то хорошая мб книга, которой было в планах дополнить структуру.

О конкретных дифференциальных уравнениях

(если какой-то диффур буду долго изучать, сюда вставлю ссылку на книгу или статью.)

О численных решениях

Холодов Лобанов Евдокимов Разностные схемы для решения жестких ОДУ...

какие-то очень прямо интересные там примеры, потом добавлю некоторые вещи, когда особенно вычматы буду нормально проходить.

Основные об интегрируемых системах

(там кстати много вообще их, ну и ладно.)

О моделях

Ильина Свешников дифференциальные уравнения

что-то такое помню, там крутые модели, которыми потом дополню теорию, чисто запросто, написать теорию сперва бы.

О приложениях

A.4.3 History of DE in a Nutshell

(there are many discoveries and many applications, but it is a topic for a special book)

A.4.4 Features of This Note

описание глав и разделов

описание записи в целом

первая часть

вторая часть

приложения

какие вообще приложения я разбирал?

обозначения и константы

Обозначение Диесперова (??)

Следующие связные множества $(a, b) = \{t : a < t < b\}$; $[a, b) = \{t : a \leq t < b\}, \ldots$ будем называть промежутками и обозначать либо J, либо $< a, b >$.

Множество функций, непрерывных на промежутке J, обозначим $\mathbf{C}(J)$.

Множество функций, имеющих k непрерывных производных на J, обозначим $\mathbf{C}^k(J)$.

Через $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2_{t,x}$ обозначим область.

Множество функций $f(t, x)$, непрерывных в области Ω обозначим $\mathrm{C}(\Omega)$.

Множество функций $f(t, x)$ в области Ω, для которых все частные производные порядка k существуют и непрерывны, обозначим $\mathbf{C}^k(\Omega)$.

Окончание замечаний и примеров будет обозначаться символом $\diamond$.

Пусть функция $F(t, x, p)$ определена и непрерывна в области $G \subseteq \subseteq \mathbb{R}^3$

A.5 Puzzles for Different Situations

A.5.1 Puzzles for Interesting Discussion

A.5.2 Selected Fun Typical Problems

(all this should also be in the problem-solution section!)

B Bibliography

Литература

1. Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - Харьков: ОНТИ, 1939.
2. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. - М.: Физматгиз, 1959.
3. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения, - М.: Наука, 1975.
4. Ахиезер Н.И. Лекции по вариационному исчислению - М.: Состехиздат, 1955.
5. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования систем на плоскости. - М.: Наука, 1976.
6. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - М.: Наука, 1984.
7. Бибиков Ю. Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнекий. - М.: Высш. шк., 1991.
8. Вугров Я. С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. ФКП. - М.: Наука, 1985.
9. Влисс Г. А. Лекции по вариационному исчислению. - М.: ИЛ, 1950.
10. Буслаев В. С. Варнациониое исчисление. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980.
11. Вазов В. Асимитотические разложения решений обыкновенеых дифференциальных уравнений. - М.: Мнр. 1968.
12. Васильева А. В., Бутузов В. Ф. Асимитотические методы в теории сингулярных возмущений. - М.: Высш. шк., 1990.
13. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1976.
14. Галеев Э. М., Тихомиров В. М. Краткий курс теории экстремальных задач. - М.: Изд-во МГУ, 1989.
15. Дезин А. А. Общие вопросы теории граничных задач, - М.: Наука, 1980.
16. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. - М.: Наука, 1974.
17. Еругин Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. - Минск. Изд-во «Наука и техника», 1972.
18. Ибрагимов Н. Х. Опыт группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Знание, 1991.
19. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов В.Х. Математический анализ. - М.: Наука, 1979.
20. Камке Э. Справочник по обыкновениым дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1976.
21. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных пронзводных первого порядка. - М.: Наука, 1966.
22. Карташев А. П., Рождественский Б. Л. Обыкновенные дифференциальные уравкения и основы вариационного исчисления. - М.: Наука, 1980.
23. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: ИЛ, 1958.

24. Краснов М.Л., Кнселев А. И., Макаренко Г. И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравиениям. - М.: Высш. шк., 1978.

25. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа, - М.: Высш. шк., 1981, т. 1, 2.

26. Курант Р. Уравнения с частными производными. - М.: Мир, 1960.

27. Лаврентьев М.А., Люстерник Л. А. Курс вариационного исчисления. - М.; Л.: Гостехиздат, 1950.

28. Лизоркин П. И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений. - М.: Наука, 1981.

29. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. - Минск.: Выпэйш. школа, 1974.

30. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. - М.: Наука, 1983.

31. Наймарк М.А. Линейные диффереицциальные операторы. - М.: Наука, 1969.

32. Никольский С.М. Курс математического анализа. - М.: Наука, 1983, т. 1, 2.

33. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория днфференциальных уравнений. - М.; Л.: Гостекиздат, 1949.

34. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1978.

35. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1984.

36. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Наука, 1982.

37. Самойленко А.М., Кривошея С. А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи. - Киев: Вища школа, 1984.

38. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнеиия. - М.: ИЛ, 1953, т. 1; 1954, т. 2.

39. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. - М.: Наука, 1982.

40. Смириов В. И. Курс высшей математики. - М.: Наука, 1974, т. 2; 1969, т. 3, ч. 2; 1974, т. 4, ч. 1.

41. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. - М.: Физматгиз, 1959.

42. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. - М.: Наука, 1988.

43. Тихонов А.Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. - М.: Наука, 1979.

44. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. - М.: ИЛ, 1962.

45. Федорюх М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Наука, 1984.

46. Фнлиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1992.

47. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Мир, 1970.

48. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление, - М.: Наука, 1969.

49. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. - М.: Мир, 1986.

References