# Special Functions

Yury Holubeu *

July 14, 2025

This note is not aimed for distribution.

Subject is discussed in detail. The note has solved problems and summary of special topics. Readers who have opened this note for the first time are highly recommended to read the preface.

## Contents



*https://yuriholubeu.github.io/, yuri.holubev@gmail.com

# Preface and main motivation

### Основная мотивация изучать спецфункции

**Часто решение диффура или уравнения в частных производных дается спецфункциями, так что знаешь их - быстро решишь, не знаешь - не решишь и всё**

До них догадываться - отдельное исследование, на которое ни у кого нет времени, кроме тех, кто этим заниматься всерьез решил. Так что нужно знать основные, иначе много будет тормозов.

And sometimes some strange methods are proposed, and to see that something is done not in a good way, one needs to get used to how to compute functions in a good way.

(раскрою эту мысль потом лучше и подробнее)

**There are a lot of applications of special functions in QFT, condensed matter, electrodynamics, aerodynamics, etc.**

So there is a big probability to apply some special function in real applications. So basics of special functions are an exactly required preparation for many real scientific problems.

# Part I
# Main Special Functions in a Nutshell

## 1 Most used special functions

### 1.1 Typical special functions for differential equations and physics

#### 1.1.1 Bessel functions

**Суть**

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\nu^2\right)y=0. \qquad \text{ур. Бесселя } \nu\text{-го порядка}$$

$$J_\nu(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-x^2/2\right)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)};$$

$$J_\nu(x)=\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{\Gamma(1+\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu {}_1F_1\left(\nu+\frac{1}{2},2\nu+1,2\mathrm{i}z\right).$$

(?? где какая форма ур-я применяется?)

$$j_l(x):=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}J_{l+\frac{1}{2}}(x), \quad l=0,1,...$$

выражается через элементарные, например,

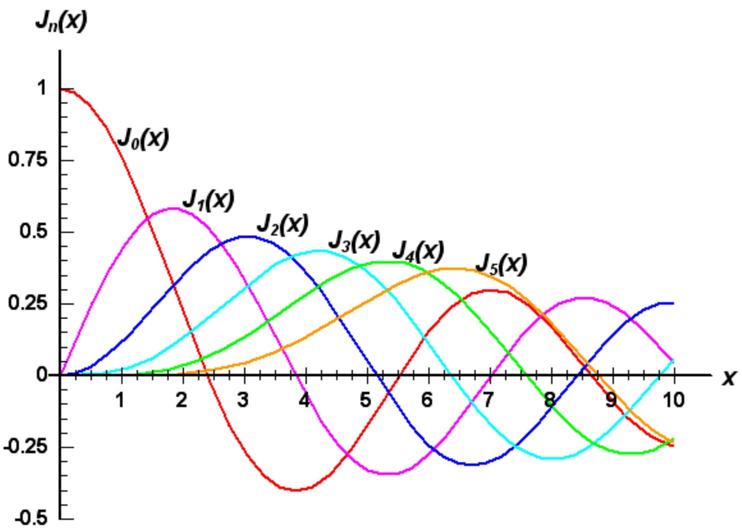
$$j_0(x)=\frac{\sin x}{x}; \qquad j_1(x)=\frac{\sin x}{x^2}-\frac{\cos x}{x}; \qquad j_2(x)=\left(\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x}\right)\sin x-\frac{3}{x^2}\cos x.$$

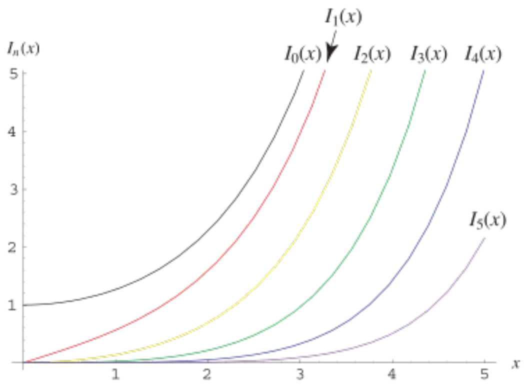
Функция Эйри $\mathrm{Ai}(x)$ является регулярным решением уравнения

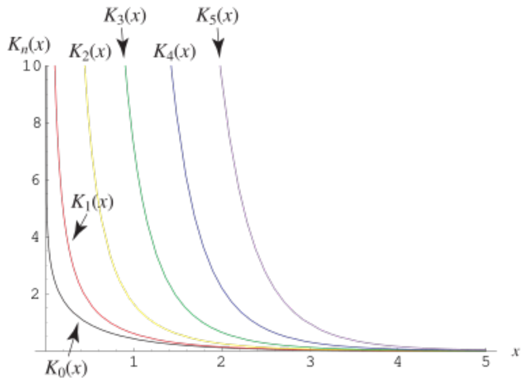
$$y''-xy=0,$$

$$\mathrm{Ai}(x)=\frac{1}{3}\sqrt{x}\left[I_{-1/3}(\zeta)-I_{1/3}(\zeta)\right]; \qquad \mathrm{Ai}(-x)=\frac{1}{3}\sqrt{x}\left[J_{-1/3}(\zeta)+J_{1/3}(\zeta)\right],$$

$I_\nu(\zeta)=\mathrm{i}^{-\nu}J_\nu(\mathrm{i}\zeta); \quad \zeta=\frac{2}{3}x^{3/2}.$






Функции Бесселя - коэффициенты разложения $\exp(i\boldsymbol{kr})$ в ряд Фурье по $\exp(in\varphi)$:

$$\exp(iz\sin\varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(z)\exp(in\varphi) \qquad z = kr$$

Добавляя $\pi$ к $\varphi$, находим $\exp(-iz\sin\varphi) = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n J_n(z)\exp(in\varphi)$, а $\exp(-iz\sin\varphi) = \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} J_{-n}(z)\exp(in\varphi)$, поэтому

$$J_{-n} = (-1)^n J_n.$$

Подставляя (???) $t = e^{i\varphi}$, находим ряд Лорана по $t$

$$\exp\left[\frac{z}{2}(t - 1/t)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z)t^n$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}(t-1/t)\exp\left[\frac{z}{2}(t-1/t)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \partial_z J_n(z)t^n$$

Подставляя здесь вместо экспоненты разложение (3.21)(???) и собирая коэффициенты при степенях $t$, находим

$$\frac{d}{dz}J_n(z) = \frac{1}{2}\left[J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)\right].$$

Дифференцируем $\exp\left[\frac{z}{2}(t-1/t)\right] = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z)t^n$ по $t$, что дает

$$\frac{z}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\exp\left[\frac{z}{2}(t-1/t)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} nJ_n(z)t^{n-1}.$$

Подставляя здесь в место экспоненты разложение (3.21) и собирая коэффициенты при степенях $t$, находим

$$\frac{2n}{z}J_n(z) = J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z).$$

Получаем рекуррентные соотношения $\frac{d}{dz}(z^n J_n) = z^n J_{n-1}$, $J_n' + \frac{n}{z}J_n = J_{n-1}$, $\frac{d}{dz}\frac{J_n}{z^n} = -\frac{J_{n+1}}{z^n}$, $J_n' - \frac{n}{z}J_n = -J_{n+1}$. В частности $dJ_0/dz = -J_1$. Это же:

$$z^{-2n+1}\frac{d}{dz}\left[z^n J_n(z)\right] = z^{-n+1}J_{n-1}(z).$$

Дифференцируем по $z$ и используя для преобразования правой части рекуррентное соотношение (3.25), находим замкнутое уравнение на $J_n$

$$\frac{d^2}{dz^2}J_n + \frac{1}{z}\frac{d}{dz}J_n + J_n - \frac{n^2}{z^2}J_n = 0,$$

которое называется уравнением Бесселя. Отметим, что мы снова сталкиваемся с оператором Штурма-Лиувилля (2.6).

Рассмотрим случай малых $z, z \ll 1$. В этом случае третьим слагаемым в уравнении (3.26) можно пренебречь и мы приходим к уравнению

$$\frac{d^2}{dz^2}g + \frac{1}{z}\frac{d}{dz}g - \frac{n^2}{z^2}g = 0,$$

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} d\theta \exp(iz\sin\theta - in\theta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} d\theta\cos(z\sin\theta - n\theta)$$

$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$.

$$\frac{z^n}{2\pi n!}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} d\theta (i\sin\theta)^n \exp(in\theta) = \frac{z^n}{2^n n!},$$

$$J_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!(n+m)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m}$$

$$J_n(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\hat{L}J_n(qx) = -q^2 J_n(qx),$$
$$\hat{L} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} - \frac{n^2}{x^2}.$$

$$\int\limits_0^{\infty} dx x J_n(kx) J_n(qx) = k^{-1}\delta(k-q),$$

$k > 0, q > 0$.

*Proof.*

$$\int_0^\infty dx x J_n(kx) J_n(qx) \to \int dx \frac{2}{\pi\sqrt{kq}} \cos(kx)\cos(qx).$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz \cos(kz)\cos(qz) = \pi\delta(k-q),$$

□

Соотношение (3.34) позволяет сформулировать разложение функций, заданных при положительных значениях аргумента, в интеграл по функциям Бесселя, аналогичное разложению в интеграл Фурье. Прямое и обратное преобразования функции $f(x)$ имеют вид

$$\breve{f}(q) = \int_0^\infty dx x J_n(qx) f(x),$$

$$f(x) = \int_0^\infty dq q J_n(qx) \breve{f}(q).$$

Выбор $n$ в этом соотношении диктуется условиями решаемой задачи.

Разложение по функциям Бесселя на конечном интервале:

$$J_n(qx)\frac{d^2 J_n(kx)}{dx^2} + J_n(qx)\frac{1}{x}\frac{dJ_n(kx)}{dx} - J_n(kx)\frac{d^2 J_n(qx)}{dx^2} - J_n(kx)\frac{1}{x}\frac{dJ_n(qx)}{dx} = \left(q^2-k^2\right) J_n(qx) J_n(kx).$$

Интегрируя это соотношение с весом $x$ на интервале $0 < x < z$, находим

$$J_n(qz) kz J_n'(kz) - J_n(kz) qz J_n'(qz) = \left(q^2-k^2\right) \int_0^z dx x J_n(qx) J_n(kx)$$

Используя рекуррентное соотношение (3.25), находим

$$\int_0^z dx x J_n(qx) J_n(kx) = \frac{J_n(kz) qz J_{n+1}(qz) - J_n(qz) kz J_{n+1}(kz)}{q^2-k^2}. \qquad \Rightarrow \qquad k \to q$$

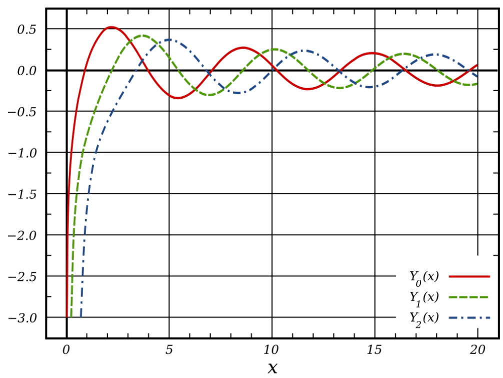
$$\int_0^z dx x \left[J_n(kx)\right]^2 = \frac{z^2}{2}\left(J_{n+1}^2 + J_n^2\right) - \frac{nz}{k} J_{n+1} J_n,$$

Рассмотрим теперь задачу на собственные значения (3.32) на интервале $0 < x < 1$ на классе функций, обращающихся в ноль на конце интервала, при $x = 1$. Это условие приводит к дискретному набору собственных чисел $\gamma_k : J_n(\gamma_k) = 0$. Набор $\gamma_k$ зависит от индекса функции Бесселя $n$. Величины $\gamma_k$ неограниченно растут с увеличением номера $k$.

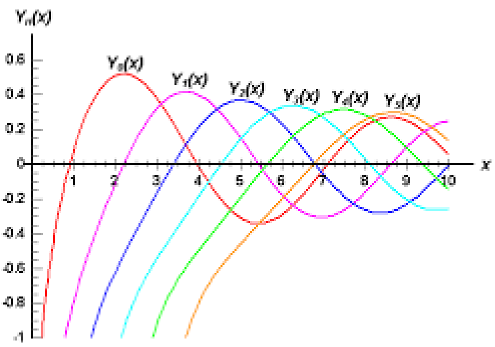
$$\text{(orthogonality)} \qquad \int_0^1 dx x J_n(\gamma_k x) J_n(\gamma_j x) = 0 \qquad \gamma_k \neq \gamma_j;$$

$$\int_0^1 dx x \left[J_n(\gamma_k x)\right]^2 = \frac{1}{2} J_{n+1}^2(\gamma_k).$$

$$\forall\ f(x) \qquad f(x)=\sum_k f_k J_n\left(\gamma_k x\right); \qquad f_k=\frac{2}{J_{n+1}^2\left(\gamma_k\right)}\int dx x f(x) J_n\left(\gamma_k x\right).$$




neuman function:




$$Y_\alpha(x)=\frac{J_\alpha(x)\cos(\alpha\pi)-J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}.$$

In the case of integer order $n$, the function is defined by taking the limit as a non-integer $\alpha$ tends to $n$:

$$Y_n(x)=\lim_{\alpha\to n} Y_\alpha(x)$$

Plot of the Bess second kind $Y_n$ complex plane If $n$ is a nonnegative integer, we have the series [16]

$$Y_n(z)=-\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{-n}}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z^2}{4}\right)^k+\frac{2}{\pi}J_n(z)\ln\frac{z}{2}-\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^n}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(\psi(k+1)+\psi(n+k+1))\frac{\left(-\frac{z^2}{4}\right)^k}{k!(n+k)!}$$

where $\psi(z)$ is the digamma function, the logarithmic derivative of the gamma function. [17] There is also a corresponding integral formula (for $\operatorname{Re}(x)>0$): [18]

$$Y_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x\sin\theta-n\theta)d\theta-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(e^{nt}+(-1)^n e^{-nt}\right)e^{-x\sinh t}dt.$$

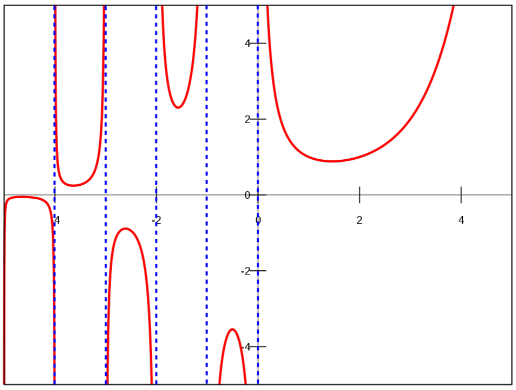
In the case where $n=0$,

$$Y_0(x)=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos(x\cos\theta)\left(e+\ln\left(2x\sin^2\theta\right)\right)d\theta.$$

### 1.1.2 Gamma-, beta-function

**Суть**

$$\Gamma(z) := \int\limits_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{Re}(z) > 0$$




$$\Gamma(z) := \int\limits_0^1 (-\ln x)^{z-1}dx \qquad \text{(опр. Эйлера)} \quad x = e^{-t}$$

(? from int b p) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

After $\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$ and $x = y^2$:

$$\Gamma(z) = \frac{2^{z+1}}{z} \int\limits_0^1 y(-\ln y)^z dy.$$

Интеграл в этой формуле сходится при $\mathrm{Re}(z) > -1$, хотя она обычно используется для положительных вещественных значений аргумента (предпочтительные значения - вблизи 1). В случае вещественного аргумента $z > 0$ подынтегральная функция имеет единственную особую точку - устранимый разрыв при $y = 0$, и если доопределить её в этой точке значением 0, она станет непрерывной на всём отрезке $[0; 1]$. Таким образом, интеграл является собственным, что упрощает численное интегрирование.

Аналитическое продолжение исходной формулы на всю комплексную плоскость, кроме целых чисел:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{i2\pi z} - 1} \int\limits_L t^{z-1}e^{-t}dt, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}. \qquad \text{(инт. Римана - Ханкеля)}$$

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!n^z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{0, -1, -2, ...\}. \qquad \text{Гаусс}$$

$$\Gamma(z) := \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^z}{1+\frac{z}{n}}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{0, -1, -2, ...\}. \qquad \text{Эйлер}$$

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{0, -1, -2, ...\}. \qquad \text{Вейерштрасс}$$

$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right) \approx 0,57722$ - постоянная Эйлера - Маскерони.

$$\Gamma(n+1) = n!. \qquad \text{(натур } n\text{)}$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}. \qquad \text{формула дополнения Эйлера}$$

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right) = n^{\frac{1}{2}-nz}\cdot(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(nz), \qquad \text{формула умножения Гаусса}$$

В частности, при n = 2

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z).$$

Гамма-функция не имеет нулей на всей комплексной плоскости. Она является мероморфной на комплексной плоскости и имеющей простые полюсы в точках $z = 0, -1, -2, -3, ...$ Гамма-функция имеет полюс первого порядка в $z = -n$ для любого натурального $n$ и нуля;

$$\operatorname{Res}_{z=-n}\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

$$\overline{\Gamma(z)} = \Gamma(\bar{z}).$$

Гамма-функция дифференцируема бесконечное число раз, и $\Gamma'(x) = \psi(x)\Gamma(x)$, $\psi(x)$, часто называют «пси-функцией» или дигамма-функцией.

$$\Gamma(1) = 1; \qquad \Gamma(n+1) = n! \quad (n \in \mathbb{N});$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}; \qquad \Gamma(-1/2) = -2\sqrt{\pi};$$

$$\Gamma(n+1/2) = \sqrt{\pi}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n} \quad (n \in \mathbb{N});$$

$$\Gamma(-n+1/2) = \sqrt{\pi}\frac{(-2)^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

### Main properties of Gamma function

$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Иногда используется т.н. $\Pi(z) := \Gamma(z+1)$. Именно этой функцией (а не Г-функцией) пользовались Гаусс, Риман, и многие другие немецкие математики XIX века.

### О применениях (!?!?!?!?!)

(предполагаю, что тут о многом сказать нужно)

### Логарифм гамма-функции

$$\ln\Gamma(z) = \left(z-\frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \int\limits_0^\infty \left[\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right]\frac{e^{-xz}}{x}dx, \quad \operatorname{Re} z > 0$$

$$\ln\Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{1}{2}\ln 2\pi + 2\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(x/z)}{e^{2\pi x} - 1}dx, \quad \operatorname{Re} z > 0$$

(Жак Бине, 1839)

$$\ln\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty \left[z - 1 - \frac{1 - e^{-(z-1)x}}{1 - e^{-x}}\right]\frac{e^{-x}}{x}dx, \quad \operatorname{Re} z > 0 \qquad \text{(Мальмстен)}$$

All интегралы вида

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{2\pi x}\cos\varphi - 1}{e^{4\pi x} - 2e^{2\pi x}\cos\varphi + 1}\operatorname{arctg}\frac{u}{x}dx, \quad 0 < u \leqslant 1, \quad 0 < \varphi < 2\pi u$$

также сводятся к логарифмам гамма-функции. В частности, формула, аналогичная второй формуле Бине с «сопряжённым» знаменателем, имеет следующий вид:

$$\ln\Gamma(z) = -\left(z - \frac{1}{2}\right)\cdot\left\{1 - \ln\left(z - \frac{1}{2}\right)\right\} + \frac{1}{2}\ln 2\pi - 2\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\left[x/\left(z - \frac{1}{2}\right)\right]}{e^{2\pi x} + 1}dx, \quad \operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$$

Кроме того, Мальмстен также получил ряд интегральных формул для логарифма гамма-функции, содержащих гиперболические функции с логарифмом в подынтегральном выражении (или, что то же, логарифм логарифма с полиномами). В частности,

$$\ln\Gamma(z) = \frac{1}{2}\ln\pi - \frac{1}{2}\ln\sin\pi z - \frac{2z-1}{2}\ln 2\pi - \frac{\sin 2\pi z}{2\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\ln x}{\operatorname{ch} x - \cos 2\pi z}dx, \quad 0 < \operatorname{Re} z < 1$$

### О решении задач на гамма-функцию (!??!???!?)

(предполагаю, что тут о многом сказать нужно)

### Вычисление интегралов через гамма-функцию

$$\int\limits_0^\infty x^\alpha \exp\left(-ax^\beta\right)dx = a^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}\cdot\frac{1}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) \qquad \{a, \alpha, \beta\} = \text{const}$$

В частности:

$$\int\limits_0^\infty x^\alpha \exp\left(-x^2/a^2\right)dx = a^{\alpha+1}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$$

$$\int\limits_0^\infty x^\alpha \exp(-x/a)dx = a^{\alpha+1}\cdot\Gamma(\alpha+1)$$

*Proof.*

$$\int_0^\infty x^\alpha \exp\left(-ax^\beta\right) dx = a^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \int_0^\infty \left(a^{1/\beta}x\right)^\alpha \exp\left[-\left(a^{1/\beta}x\right)^\beta\right] d\left(a^{1/\beta}x\right)$$

$$a^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \int_0^\infty \kappa^\alpha \exp\left(-\kappa^\beta\right) d\kappa = \frac{a^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}}{\beta} \int_0^\infty \kappa^{\alpha+1-\beta} \exp\left(-\kappa^\beta\right) d\kappa^\beta$$

$$\frac{a^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}}{\beta} \int_0^\infty \varkappa^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1} \exp(-\varkappa) d\varkappa = a^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \cdot \frac{1}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)$$

□

**Свойства по ПТФ**

Правая часть соотношения (3.3) определена и для $z$ с отрицательной действительной частью, то есть осуществляет аналитическое продолжение $\Gamma(z)$ на эту область переменной $z$. Контурный интеграл в (3.3) не имеет особенностей в плоскости $z$. Следовательно, особенности функции $\Gamma(z)$ определяются разностью 1 - $\exp(2\pi iz)$, которая обращается в ноль при целых (как положительных, так и отрицательныхгх) z. При положительных целых $z$ в ноль обращается также и контурный интеграл, то есть мы приходим к неопределенности, которая должна раскрываться по правилу Лопиталя. В любом случае, $\Gamma(z)$ не имеет особенностей при целых положительных $z$, в соответствии с приведенным выше анализом. При целых отрицательных $z$ контурный интеграл в ноль не обращается, и мы приходим к выводу, что в этих точках $\Gamma(z)$ имеет простые полюса.

Найдем вычеты функции $(z)$ в полюсах $z = 0, -1, -2, \ldots$. При $z = -n$ ($n$ - целое неотрицательное) контурный интеграл в (3.3) сводится к вычету в нуле, поскольку значения подынтегральной функции на берегах разреза совпадают между собой. Вычисляя этот вычет, находим

$$\int_C dt t^{-n-1} e^{-t} = -2\pi i(-1)^n (n!)^{-1}.$$

Таким образом

$$\operatorname{res} \Gamma(-n) = (-1)^n (n!)^{-1}.$$

Можно найти асимптотическое выражение гамма-функции $\Gamma(z)$ при больших положительных значениях $z$, воспользовавшись методом перевала: $t \to tz$,

$$\Gamma(z) = z^z \int_0^\infty \frac{dt}{t} \exp[z(\ln t - t)], \qquad \max \quad t = 1$$

$$\Gamma(z) \overset{\Re z \gg 1}{\approx} \sqrt{\frac{2\pi}{z}} z^z \exp(-z).$$

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} \qquad \text{(Стирлинг)}$$

**Beta-function**

$$B(\alpha,\beta)=\int\limits_0^1 dx x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\qquad \mathrm{Re}(\alpha),\mathrm{Re}(\beta)>0.$$

$$s^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta)=\int\limits_0^s dx x^{\alpha-1}(s-x)^{\beta-1}.\qquad \Rightarrow \qquad \cdot e^{-s} \qquad \Rightarrow \qquad \int$$

$$\Gamma(\alpha+\beta)B(\alpha,\beta)=\int\limits_0^\infty ds e^{-s}\int\limits_0^s dx x^{\alpha-1}(s-x)^{\beta-1}.$$

Замена переменных $s=x+y$ сводит правую часть к произведению интегралов по $x$ по $y$, которые дают произведение $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$. Таким образом, мы приходим к соотношению (3.8).

### 1.1.3 Hypergeometric function

**Суть**

$$ {}_pF_q\left(a_1,...,a_p;b_1,...,b_q;z\right):=1+\frac{a_1...a_p}{b_1...b_q}z+\frac{a_1\left(a_1+1\right)a_2\left(a_2+1\right)...a_p\left(a_p+1\right)}{b_1\left(b_1+1\right)b_2\left(b_2+1\right)\cdots b_q\left(b_q+1\right)}\frac{z^2}{2}+\cdots=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(a_1\right)^{(n)}...\left(a_p\right)^{(n)}}{\left(b_1\right)^{(n)}...\left(b_p\right)^{(n)}}\frac{z^n}{n!}$$

Частные важные случаи это ${}_2F_1$ и ${}_1F_1$

**Суть функции ${}_2F_1$**

Функцию ${}_2F_1$ альтернативно можно определить как регулярное в нуле решение:

$$z(1-z)f''(z)+(c-(a+b+1)z)f'(z)-abf(z)=0,\quad f(0)=1$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:
(место убедиться в эквивалентности определений)

Можно убедиться, что второе линейно-независимое решение этого уравнения тоже можно выразить через гипергеометрическую функцию. Общее решение имеет следующий вид (при $c\neq 1$)

$$f(z)=C_1{}_2F_1(a,b;c;z)+C_2z^{1-c}{}_2F_1(b-c+1,a-c+1;2-c;z)$$

К уравнению такого вида можно свести очень большой класс дифференциальных уравнений. В действительности, имеется классификация линейных дифференциальных уравнений с дробно-рациональными коэффициентами по их особенностям в комплексной плоскости (особенностями уравнения, записанного в канонической форме $f^{(n)}(z)+p_1(z)f^{(n-1)}(z)+\cdots+p_n(z)f(z)=0$, называются особенности функций $p_k(z)$ - точки, где она обрапается в бесконечность ) - в частности, у гипергеометрической функции их ровно три: $z=\{0,1,\infty\}$; и более или менее любое уравнение с тремя особенностями можно свести к гипергеометрическому виду.

Функцию ${}_2F_1$ не определена при целых отрицательных $c$ (знаменатель зануляется). Радиус сходимости ряда равен единице, и в действительности у гипергеометрической функции в точке $z = 1$ имеется особенность. Единственное исключение из этого правила - это когда либо $a$, либо $b$ - отрицательное целое число: в таком случае, ряд обраывается и превращается в полином конечной степени, имеющий, естественно, бесконечный радиус сходимости. Последнее замечание будет важно при поиске связанных состояний.

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}{}_2F_1(a,b,a+b+1-c,1-z)+ \\
+\frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(1-z)^{c-a-b}{}_2F_1(c-a,c-b;c+1-a-b;1-z)
\end{aligned}
$$

**Суть функции** ${}_1F_1(a;b;z)$

$$
{}_1F_1(a;b;z) := 1 + \frac{a}{b}z + \frac{a(a+1)}{b(b+1)}\frac{z^2}{2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{(n)}}{b^{(n)}}\frac{z^n}{n!}
$$

Альтернативное определение - через решение дифференциального уравнения следующего вида:

$$
zf''(z) + (b-z)f'(z) - af(z) = 0, \quad f(0) = 1
$$

тоже выражается через гипергеометрическую функцию [6] : $f^{(2)}(z) = z^{1-b}{}_1F_1(a-b+1;2-b;z)$. Как и с обычной гипергеометрической функцией, несложно видеть, что при целых отрицательных $b = -n$ функция не определена, а при целых отрицательных $a = -n$ она является конечным полиномом степени $n$.

В общем случае, отношение соседних коэффициентов разложения в ряд ведёт себя как $1/n$, поэтому радиус сходимости этого ряда - бесконечность (в отличии ${}_2F_1$, где радиус сходимости был единичным).

Асимптотическое поведение на бесконечности следующее:

$$
{}_1F_1(a;b;z) \approx \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)}z^{a-b}e^z, \quad z \gg 1
$$

Опять-таки, мы ранее говорили, что всякое уравнение с тремя особенностями сводится к гипергеометрическому виду так и всякое уравнение с коэффициентами, которые представляют собой линейные функции $z$ приводится к Вырожденному гипергеометрическому виду.

**Другие функции через гипергеометрическую**

(википедия)
$(1+x)^n = F(-n,b;b;-x)$
$x^n = F(-n,b;b;1-x)$
$\frac{1}{x}\ln(1+x) = F(1,1;2;-x)$
$\frac{1}{x}\arcsin(x) = F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};x^2\right)$
$e^x = \lim_{n\to\infty} F\left(1,n;1;\frac{x}{n}\right)$
$\cos x = \lim_{a,b\to\infty} F\left(a,b;\frac{1}{2};-\frac{x^2}{4ab}\right)$
$\cosh x = \lim_{a,b\to\infty} F\left(a,b;\frac{1}{2};\frac{x^2}{4ab}\right)$
Полный эллиптический интеграл первого рода:

$K(k)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2};1;k^2\right)$
(не нужно это будет - поставлю в даль.)

**Вырожденная гипергеометрическая функция $\Phi(\alpha,\gamma,z)$ ПТФ**

$$z\frac{d^2u}{dz^2}+(\gamma-z)\frac{du}{dz}-\alpha u=0$$

$\alpha$ и $\gamma$ - произвольные параметры. Уравнение (3.81) переписывается в виде $u''+(\gamma/z-1)u'-(\alpha/z)u=0$, то есть мы снова сталкиваемся с оператором ШтурмаЛиувилля (2.6). Функция $\Phi(\alpha,\gamma,z)$ характеризуется тем, что она аналитична и имеет единичное значение в точке $z=0$: $\Phi(\alpha,\gamma,0)=1$.

Уравнение (3.81) позволяет найти коэффициенты разложения вырожденной гипергеометрической функции $\Phi(\alpha,\gamma,z)$ в ряд Тейлора около точки $z=0$. Вычисляя последовательно коэффициенты этого разложения из уравнения (3.81) с учетом условия $\Phi(\alpha,\gamma,0)=1$, мы находим

$$\Phi=1+\frac{\alpha}{\gamma}\frac{z}{1!}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z^2}{2!}+...$$

с очевидным способом построения коэффициентов ряда. При отрицательных целых $\alpha$ ряд (3.82) обрывается и $\Phi(\alpha,\gamma,z)$ сводится к полиному. При больших $n$ отношение коэффициентов при степенях $z^n$ и $z^{n-1}$ в разложении (3.82) стремится к $1/n$. Поэтому ряд (3.82) сходится на всей плоскости комплексного переменного, то есть единственной особенностью вырожденной гипергеометрической функции является бесконечность, которая является существенной особой точкой $\Phi(\alpha,\gamma,z)$.

(!!! важный абзац про разрыв ряда, ибо из такого и считаем связные состояния в квантмехе!!!)

При неотрицательных целых $\alpha$ ряд (3.82) обрьгвается и вырожденная гипергеометрическая функция $\Phi(\alpha,\gamma,z)$ сводится к полиному. В частности справедливы соотношения

$$H_{2n}(x)=(-1)^n\frac{(2n)!}{n!}\Phi\left(-n,1/2,x^2\right)$$
$$H_{2n+1}(x)=2(-1)^n\frac{(2n+1)!}{n!}x\Phi\left(-n,3/2,x^2\right)$$

которые сводят полиномы Эрмита к вырожденной гипергеометрической функции.

Уравнение (3.81) является дифференциальным уравнением второго порядка и потому имеет два линейно независимых решения, одним из которых является вырожденная гипергеометрическая функция $\Phi(\alpha,\gamma,z)$. Второе независимое решение можно найти, заметив, что если $u$ удовлетворяет уравнению (3.81), то $z^{\gamma-1}u$ также удовлетворяет вырожденному гипергеометрическому уравнению с коэффициентами $\alpha'=\alpha-\gamma+1$, $\gamma'=2-\gamma$. Таким образом, общим решением уравнения (3.81) является

$$u=c_1\Phi(\alpha,\gamma,z)+c_2z^{1-\gamma}\ \Phi(\alpha-\gamma+1,2-\gamma,z),$$

При $\gamma=1$ оба члена в сумме (3.85) совпадают. Этот случай требует особого рассмотрения, тогда в общем решении возникает дополнительный логарифмический множитель.

Уравнение (3.81) является дифференциальным уравнением, в котором переменная $z$ входит линейно. В этом случае можно найти интегральное представление решения этого уравнения при помощи метода Лапласа, смотри раздел 3.7.1. Составляем функции $P$ и $Q$ в соответствии с выражениями (3.96): $P=\gamma t-\alpha, Q=t(t-1)$, и далее находим

$Z = t^{\alpha-1}(t-1)^{\gamma-\alpha-1}$. Таким образом, решение уравнения (3.81) может быть записано в виде контурного интеграла

$$u = \int_C dt e^{tz} t^{\alpha-1}(t-1)^{\gamma-\alpha-1}.$$

Применяя аналогичную процедуру к $z^{\gamma-1}u$, мы находим

$$u = z^{1-\gamma} \int_C dt e^{tz} t^{\alpha-\gamma}(t-1)^{-\alpha}.$$

$tz \to t$,

$$u = \int_C dt e^{t} t^{\alpha-\gamma}(t-z)^{-\alpha}.$$

Контур $C$ в интеграле (3.86) естественно выбрать так, чтобы он приходил из $-\infty$ и возвращался в $-\infty$ (обходя каким-то образом особенности подынтегрального выражения, имеющиеся при $t = 0$ и $t = z$), тогда произведение $ZQ\exp(t)$ на концах этого контура будет равно нулю.

Интеграл (3.86) не имеет особенностей при $z = 0$, если контур интегрирования "охватывает" обе особенности. Выберем контур $C$, который приходит "снизу" из $-\infty$ огибает особенности "справа" и возвращался в $-\infty$ "сверху", смотри рисунок 3.12. Интеграл по этому контуру должен с точностью до множителя совпадать с вырожденной гипергеометрической функцией $\Phi(\alpha,\gamma,z)$. Мы считаем, что разрезы функций $t^{\alpha-\gamma}$ и $(t-z)^{-\alpha}$ идут в $-\infty$, а значения этих функций при положительном значении переменной положительны. При $z = 0$ контур интегрирования превращается в $C^*$, изображенный на рисунке 3.3, при этом возникает обратная гамма-функция, смотри (3.10). Вспоминая теперь, что $\Phi(\alpha,\gamma,0) = 1$, находим

$$\Phi(\alpha,\gamma,z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{2\pi i} \int_C dt e^{t} t^{\alpha-\gamma}(t-z)^{-\alpha}.$$

При целых отрицательных значениях $\gamma$ ряд (3.82) не определен, так как, начиная с некоторого члена, знаменатель обращается в ноль.

Этому соответствует наличие полюса у $\Gamma(\gamma)$ в соотношении (3.87). В то же время сам контурный интеграл в соотношении (3.87) остается конечным и при целых отрицательных значениях $\gamma$. Поэтому $\Phi(\alpha,\gamma,z)$, как функция $\gamma$, имеет простые полюса при $\gamma = 0, -1, -2, ...$ Производя в равенстве (3.87) замену $t \to t + z$, мы находим соотношение

$$\Phi(\alpha,\gamma,z) = e^z \Phi(\gamma-\alpha,\gamma,-z).$$

Дифференцирование по $z$ соотношения (3.87) и интегрирование по частям в контурном интеграле позволяет получить ряд соотношений:

$$\frac{d}{dz}\Phi(\alpha,\gamma,z) = \frac{\alpha}{\gamma}\Phi(\alpha+1,\gamma+1,z),$$

$$\frac{z}{\gamma}\Phi(\alpha+1,\gamma+1,z) = \Phi(\alpha+1,\gamma,z) - \Phi(\alpha,\gamma,z),$$

$$\alpha\Phi(\alpha+1,\gamma+1,z) = (\alpha-\gamma)\Phi(\alpha,\gamma+1,z) + \gamma\Phi(\alpha,\gamma,z).$$

При больших положительных $z$ основной вклад в контурный интеграл в (3.87) определяется окрестностью особой точки $t = z$. Делая замену переменных $t = z + \zeta$ и пренебрегая зависимостью от $\zeta$ в $t^{\alpha-\gamma}$, мы находим

$$\Phi(\alpha, \gamma, z) \approx \frac{\Gamma(\gamma)}{2\pi i} e^z z^{\alpha-\gamma} \int\limits_{C^*} d\zeta e^\zeta \zeta^{-\alpha},$$

где контур $C^*$ изображен на рисунке 3.3. Этот контурный интеграл сводится к обратной гамма-функции, и мы получаем окончательно

$$\Phi(\alpha, \gamma, z) \approx \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha-\gamma}$$

Асимптотическое выражение (3.92) справедливо и в комплексной области для $z$ с большой положительной действительной частью.

### 1.1.4 Spherical functions

**Об определении и основных свойствах (????)**

$$\begin{aligned}
Y_{00} &= \sqrt{\frac{1}{4\pi}}; & Y_{2,\pm 2} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\theta \mathrm{e}^{\pm 2i\phi}; \\
Y_{1,\pm 1} &= \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta \mathrm{e}^{\pm i\phi}; & Y^{2,\pm 1} &= \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta\cos\theta \mathrm{e}^{\pm i\phi}; \\
Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta; & Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \left(3\cos^2\theta - 1\right).
\end{aligned}$$

Функции Лежандра первого рода (присоединенными «полиномами» Лежандра) - регулярные в точках $\pm 1$ решения

$$\left(1 - x^2\right) y'' - 2xy' + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1 - x^2}\right] y = 0,$$
$$l = 0, 1, ...; \quad m = 0, \pm 1, ..., \pm l.$$

При $m = 0$ они становятся полиномами Лежандра.

$$P_l^{|m|}(x) = \frac{1}{2^l l!} \left(1 - x^2\right)^{|m|/2} \frac{\mathrm{d}^{l+|m|}}{\mathrm{d}x^{l+|m|}} \left(x^2 - 1\right)^l.$$ Формула Родрига

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos\theta) \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi},$$

$$\left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + l(l+1)\right] Y_{lm}(\theta, \varphi) = 0; \qquad \left[\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\varphi} + m\right] Y_{lm}(\theta, \varphi) = 0$$

базис:

$$\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\pi} Y^*_{l'm'}(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta, \varphi) \sin\theta \mathrm{d}\theta = \delta_{l'l}\delta_{m'm}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}\left(\theta', \varphi'\right) Y_{lm}(\theta, \varphi) = \delta\left(\cos\theta' - \cos\theta\right) \delta\left(\varphi' - \varphi\right)$$

$$\cos\theta\; Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(l+1)^2 - m^2}{(2l+1)(2l+3)}}\; Y_{l+1,m}(\theta, \varphi) + \sqrt{\frac{l^2 - m^2}{(2l-1)(2l+1)}}\; Y_{l-1,m}(\theta, \varphi),$$

**Теория по Мэтьюзу и Уоллеру**

Присоединенное дифференциальное уравнение Лежандра имеет вид [см. Формулу (1.69)]

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0$$

Легко убедиться, что если $y$-решение дифференциального уравнения Лежандра, то

$$\left(1-x^2\right)^{m/2}(d/dx)^m y$$

- решение присоединенного уравнения (?? нет, не легко, я не понял пока, как???). Для положительного целого числа $m$ определим т.н. присоединенную функцию Лежандра

$$P_n^m(x)=\left(1-x^2\right)^{m/2}\left(\frac{d}{dx}\right)^m P_n(x).$$

$$\int\limits_{-1}^{+1}P_l^m(x)P_{l'}^m(x)dx=\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}\qquad m=m'$$

Подчеркнем, что равенство (7.29) справедливо, если обе функции имеют одинаковые значения m. Это условие ортогональности можно получить тем же путем, что и (7.19).

Присоединенные функции Лежандра с фиксированным $m$ представляют также полную систему функций в том смысле, что произвольную (разумную) функцию $f(x)$ можно разложить в ряд вида

$$f_\Delta(x)=\sum_{n=m}^{\infty}c_nP_n^m(x).$$

Комбинируя (7.30) с идеей рядов Фурье, которые уже рассматривались в гл. 4, мы видим, что функцию $f(\Omega)$, где $\Omega$ обозначает совокупность углов $\theta$ и $\phi$, можно раз- ложить в ряд

$$f(\Omega)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}A_{mn}P_n^{|m|}(\cos\theta)\exp(\mathrm{i}m\phi).$$

Продолжим кратко рассмотрение основных свойств $P_n^{|m|}$. Обычно определяют $c\phi$ е р ичес ки е г армон и к и

$$Y_{lm}(\Omega)=\left[\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{1/2}P_l^{|m|}(\cos\theta)\exp(\mathrm{i}m\phi)\times\begin{cases}(-1)^m, & \text{если } m\geqslant 0,\\ 1, & \text{если } m<0\end{cases}=$$

$\int d\Omega Y_{lm}^*(\Omega)Y_{l'm'}(\Omega)=\delta_{ll}\delta_{mm'}.$

$$=\frac{1}{2^l l!}\left[\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]^{1/2}\exp(\mathrm{i}m\phi)(-\sin\theta)^m\times\frac{d^{l+m}}{d(\cos\theta)^{l+m}}\left(\cos^2\theta-1\right)^l.$$

$$Y_{l,-m}(\Omega)=(-1)^mY_{lm}^*(\Omega).$$

$$f(\Omega)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}B_{lm}Y_{lm}(\Omega),\qquad B_{lm}=\int d\Omega Y_{lm}^*(\Omega)f(\Omega).$$

Покажем полезность таких разложений по сферическим гармоникам на примере так называемой т е оремы сложения для сферических гармоник. Подставляя (7.37) в (7.36), получаем

$$f(\Omega)=\int d\Omega' f\left(\Omega'\right)\sum_{lm} Y_{lm}^{*}\left(\Omega'\right)Y_{lm}(\Omega).$$

150 Так как (7.38) верно для произвольной $f(\Omega)$, то

$$\sum_{lm} Y_{lm}^{*}\left(\Omega'\right)Y_{lm}(\Omega)=\delta\left(\Omega-\Omega'\right).$$

Функция $\delta\left(\Omega-\Omega'\right)$ характеризуется свойствами $\delta\left(\Omega-\Omega'\right)=0$ при $\Omega\neq\Omega'$, $\int d\Omega\delta(\Omega)=1^{\circ}$. Функция $\delta\left(\Omega-\Omega'\right)$, конечно, зависит только от угла $\gamma$ между направлениями $\Omega$ и $\Omega'$. Из формул сферической тригонометрии находим

$$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos\left(\phi-\phi'\right).$$

Так как функция $\delta\left(\Omega-\Omega'\right)$ зависит только от $\gamma$, разложим ее в ряд по полиномам Лежавдра

$$\delta\left(\Omega-\Omega'\right)=\sum_{l} B_l P_l(\cos\gamma)$$

$$B_l:=\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{+1} d(\cos\gamma)\delta\left(\Omega-\Omega'\right)P_l(\cos\gamma)=\frac{2l+1}{4\pi}\int d\Omega\delta\left(\Omega-\Omega'\right)P_l(\cos\gamma),$$

так как $2\pi d(\cos\gamma)$ как раз равно элементу телесного угла на сфере. Используя свойства (7.40) функции $\delta\left(\Omega-\Omega'\right)$, из (7.42) получаем

$$B_l=\frac{2l+1}{4\pi}P_l(1)=\frac{2l+1}{4\pi}.$$

Теперь, используя (7.39), (7.41) и (7.43), находим

$$\sum_{lm} Y_{lm}^{*}\left(\Omega'\right)Y_{lm}(\Omega)=\sum_{l}\frac{2l+1}{4\pi}P_l(\cos\gamma).$$

Чтобы закончить вывод, постулируем свойство сферических гармоник, справедливость которого будет очевидна после прочтевия гл. 8. Если произвольно повернуть оси координат, любая сферическая гармоника $Y_{lm}(\Omega)$ становится линейной комбинацией сферических гармоник $Y_{lm'}(\bar{\Omega})$ от новых угловых координат $\bar{\Omega}$.

Подчеркнем, что в с е. э т и г ар мо ни к и имею т о д и н аков ы й й д е к с $l$, т. е.

$$Y_{lm}(\Omega)=\sum_{m'=-l}^{ll} C_{mm'}^{l} Y_{lm'}(\bar{\Omega})$$

причем коэффициенты $C_{mm'}^{l}$ зависят от величины поворота $\Omega\rightarrow\bar{\Omega}$, а также от $l, m$ и $m'$.

Так как из (7.32) $Y_{l_0}=\sqrt{(2l+1)/4\pi}P_l(\cos\theta)$, то член $P_l(\cos\gamma)$ в (7.44) можно записать как $P_l(\cos\gamma)=\sqrt{4\pi/(2l+1)}Y_{l0}(\bar{\Omega})$, $\bar{\Omega}$ - угловые координаты того же направления, что и $\Omega$, но в другой системе координат, полярная ось которой направлена вдоль $\Omega'$. Тогда из (7.45) имеем (с переставленными $\Omega$ и $\Omega'$)

$$P_l(\cos\gamma)=\sum_{m'=-l}^{l} A_{0m'}^{l}\left(\Omega'\right)Y_{lm'}(\Omega).$$

Сравнивая с (7.44), видим, что члены для каждого значения $l$ равны, т. $\theta$.

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^{*}\left(\Omega'\right) Y_{lm}(\Omega).$$

С помищью (7.32) выражение (7.46) можно переписать через присоединонные полиномы Лежандра:

$$P_l(\cos\gamma) = P_l(\cos\theta)P_l\left(\cos\theta'\right) + 2\sum_{m=1}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(\cos\theta)P_l^m\left(\cos\theta'\right)\cos m\left(\phi-\phi'\right)$$

Уравнение (7.46) [(или (7.47)] и есть искомая теорема сложения.
(??!??!?!? так они нормированы на дельта функцию или на полином лежандра???)
(??? visual interpretation is still not a thing that I understand)

**O сферических функций для квантовой механики (?)**

(ЛЛ3 укажу многое, тут много формул!!!)
Рекуррентное соотношение

$$\cos\theta Y_{lm}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{(l+1)^2-m^2}{(2l+1)(2l+3)}}Y_{l+1,m}(\theta,\varphi) + \sqrt{\frac{l^2-m^2}{(2l-1)(2l+1)}}Y_{l-1,m}(\theta,\varphi),$$

**O сферических функций для УМФ (?)**

(просто указание, что такие-то уравнения сводятся к ним и такие-то там особенности.)

**O Scalar spherical harmon**

**O Generalized spherical-harmonic tensor**

**O tensor spherical harmonics**

## 1.2 Typical general functions

(see note on function analysis for this also)

### 1.2.1 Properties of general function form functional analysis

(по идее в матане тоже это будет.)

Умножсение обобщенных функций может быть опрелелено либо как предел произведения $\varepsilon$ -представлений, либо как функционал. Во втором случае, если $f$ и $g$ - две обобщенные функнии. то произведение их определяется как:

$$(g\cdot f,\varphi) = (g, f\varphi)$$

### 1.2.2 $\delta$-, $\theta(x)-, \operatorname{sign} x, p\frac{1}{x}$ functions

**$\delta$-функция Дирака**

$$\delta(\mathbf{r}) := \delta(x)\delta(y)\delta(z) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r}}\mathrm{d}^3\mathbf{k}$$

где интегрирование совершается по всему k-пространству. Соответственно, основное свойство (10.1) теперь принимает вил

$$\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\delta(\mathbf{r})f(\mathbf{r}) = f(0)$$

где интегрирование выполняется по некоторой области, включающей точку $\mathbf{r} = 0$.

Если функция $f(\mathbf{r}) = f(|\mathbf{r}|) = f(r)$ и при этом регулярна в нуле, свойсво (10.41) можно переписать как

$$\int \delta(\mathbf{r})f(r)\mathrm{d}^3\mathbf{r} = \int f(r)r^2\ \mathrm{d}r \int \delta(\mathbf{r})\mathrm{d}\Omega = f(0)$$

Выражение (10.42) позволяет ввести «радиальную ф функцию $\delta(r)$ :

$$\delta(r) = \frac{1}{2\pi}\frac{\delta(r)}{r^2} = -\frac{1}{2\pi}\frac{\delta'(r)}{r}$$

$\delta$-функции в нуле. При этом данная операция вполне допустима, посколь- ку элемент объема содержит $r^2$. Множитель $1/2\pi$ учитыгает что интегпи- делить как $1/z$, но с особым выбором пути интегрирования (контура) для каждой функции.

Действительно, это свойство вытекает из формул... (10.24) и (10.33) и рис. 10.1 и 10.2.

Заметим, что дтя $\delta$-функции выбирается замкнутый контур, обходящий точку 0. Контуры интегрирования, дающие различные обобщенные функции из функции $1/z$, представлены на общем рис. 10.3.

1. Произведение двух функций $\mathrm{p}\frac{1}{r}$ не определено. Действительно,

$$\mathrm{p}\frac{1}{x}\cdot\mathrm{p}\frac{1}{x} = \left(\mathrm{p}\frac{1}{x}, \mathrm{p}\frac{1}{x}\varphi(x)\right) = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}\ \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x^2}\ \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{M}{\varepsilon}\to\infty.$$

2. Определена производная от функции р

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{p}\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) = -\left(\mathrm{p}\frac{1}{x}, \varphi'(x)\right) = -\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi'(x)-\varphi'(0)}{x}\ \mathrm{d}x = -\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi'(x)+\varphi'(0)-x\varphi'(0)}{x^2}\ \mathrm{d}x.$$

Если воспользоваться $\varepsilon$ -представлением. получаем

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{p}\frac{1}{x}\right)_\varepsilon = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x}{x^2+\varepsilon^2} = -\frac{x^2-\varepsilon^2}{\left(x^2+\varepsilon^2\right)^2}$$

3.

$$\mathrm{p}\frac{1}{x}\cdot\delta(x) = -\frac{1}{2}\delta'(x)$$

*Proof.* (???)

$$\left(\mathrm{p}\frac{1}{x}\right)_\varepsilon = \frac{x}{x^2+\varepsilon^2}, \quad \delta_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{\pi\left(x^2+\varepsilon^2\right)}, \quad \delta'_\varepsilon(x) = -\frac{2\varepsilon x}{\pi\left(x^2+\varepsilon^2\right)}$$

□

4. Можно так же показать, что не опрелелено произвеление лвухх $\delta$-функций, имеющих одинаковый аргумент.

5. Так же как и во втором примере, используя $\varepsilon$ -прелставления можно показать, что

$$\left(\mathrm{p}\frac{1}{x}+\pi\delta(x)\right)\left(\mathrm{p}\frac{1}{x}-\pi\delta(x)\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{p}\frac{1}{x}$$

6. Определено произведение двух функций Сохоцкого:

$$\frac{1}{x-\mathrm{i}0}\cdot\frac{1}{x-\mathrm{i}0}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{x-\mathrm{i}0}=-\mathrm{i}\pi\delta'(x)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{p}\frac{1}{x}$$

В смысле обобщенных функций

$$\int\limits_0^\infty \sin k_1 x\cos kx\ \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+k_1}-\frac{1}{k-k_1}\right)$$

$$\delta(ax+by)\delta(cx+dy)=\det\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1}\delta(x)\delta(y)$$

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\lim_{K\to\infty}\int\limits_{-K}^{K}\mathrm{e}^{\mathrm{i}Kx}\ \mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\lim_{K\to\infty}\int\limits_0^K\cos Kx\ \mathrm{d}x\equiv\frac{1}{\pi}\lim_{K\to\infty}\frac{\sin Kx}{x}.$$

$$\delta'(x)=\frac{1}{\pi}\lim_{K\to\infty}\left(\frac{K\cos Kx}{x}-\frac{\sin Kx}{x^2}\right)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta'(x)\mathrm{d}x=-f'(0)$$

**Представления дельта-функции**

(maybe I'll delete it, since I didn't need this though out my research...)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta\left(x-x_0\right)\mathrm{d}x=f\left(x_0\right)$$

$$\delta(-x)=\delta(x)$$

$$\delta(ax)=\frac{1}{|a|}\delta(x)$$

$$\delta(f(x))=\sum_i\frac{1}{\left|f'\left(x_i\right)\right|}\delta\left(x-x_i\right)$$

$f\left(x_i\right)=0, x_i$ - простые (некратные) корни.

$x\delta(x)=0$

$$\delta(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{\pi\left(x^2+\varepsilon^2\right)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\varepsilon|k|}\mathrm{e}^{\pm ikx}\ \mathrm{d}k$$

$$\left.\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{\pi\left(x^2+\varepsilon^2\right)}\right|_{x\neq 0}=0$$

**Дельта функция в представлении (??)**

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sin Nx}{\pi x}=\frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\int\limits_{-N}^{N}\mathrm{e}^{\pm ikx}\,\mathrm{d}k=\frac{1}{\pi}\lim_{N\to\infty}\int\limits_{0}^{N}\cos kx\,\mathrm{d}k\qquad\text{Дирихле}$$

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Nx}\,\mathrm{d}x=f(x)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}Nx}}{\mathrm{i}N}\bigg|_a^b-\frac{1}{\mathrm{i}N}\int\limits_a^b f'(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Nx}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\mathrm{i}N}\left(f(b)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Nb}-f(a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Na}\right)+O\left(\frac{1}{N^2}\right)\bigg|_{N\to\infty}\to 0$$

$$\int\limits_a^b\lim_{N\to\infty}\frac{\sin Nx}{\pi x}\varphi(x)\mathrm{d}x=0$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Nx}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y=1$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Nx}{x}\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(0)\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Nx}{x}\,\mathrm{d}x=\varphi(0).$$

**Дельта функция в представлении гауссовой экспоненты**

$$\delta(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}\mathrm{e}^{-x^2/\varepsilon}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}\mathrm{e}^{-x^2/\varepsilon}\bigg|_{x\neq 0}=0,\qquad\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}\mathrm{e}^{-x^2/\varepsilon}\bigg|_{x=0}=\infty,\qquad\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}\mathrm{e}^{-x^2/\varepsilon}\mathrm{d}x=1$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}\mathrm{e}^{-x^2/\varepsilon}\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(0)\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}\mathrm{e}^{-x^2/\varepsilon}\mathrm{d}x=\varphi(0)$$

$$\delta(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon\sin^2(x/\varepsilon)}{\pi x^2}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon\sin^2(x/\varepsilon)}{\pi x^2}\bigg|_{x\neq 0}=0,\quad\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon\sin^2(x/\varepsilon)}{\pi x^2}\bigg|_{x=0}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi\varepsilon}=\infty$$

$$I(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\alpha y}{y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$\frac{\partial I(\alpha)}{\partial\alpha}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{2\sin\alpha y\cos\alpha y}{y}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2\alpha y}{y}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=1$$

$I(\alpha) = \alpha + \mathrm{const} \qquad \Rightarrow \qquad I(0) = 0, \qquad \Rightarrow \qquad I(\alpha) = \alpha.$

Заметим теперь, что заменой $x/\varepsilon = y$ мы сводим нужный нам интеграл к вспомогательному при $\alpha = 1$. Таким образом убеждаемся, что функция под знаком предела нормирована на 1. Далее, воспользовавшись теоремой Римана-Лебега, убеждаемся, что рассматриваемое представление удовлетворяет основному свойству $\delta$-функции (10.1).

$$\delta(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{N}{2} \mathrm{e}^{-N|x|} \qquad \text{Пикар}$$

Здесь так же как в представлении Дирихле $\varepsilon = N^{-1}$. Легко убеждаемся:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N}{2} \mathrm{e}^{-N|x|}\Big|_{x\neq 0} = 0, \quad \lim_{N\to\infty} \frac{N}{2} \mathrm{e}^{-N|x|}\Big|_{x=0} = \lim_{N\to\infty} \frac{N}{2} = \infty$$

Интеграл в бесконечных пределах равен 1 и не зависит от параметра $N$.

$$\delta(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{N}{2\pi \operatorname{ch} Nx} \qquad \text{Стильтьес}$$

$$[\delta(x)] = [x]^{-1}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = f(0)$$

$$(f(x)\delta(x), \varphi(x)) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_\varepsilon(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = f(0)\varphi(0) = f(0) \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\delta(x))\mathrm{d}x = -f'(0)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\delta(x))\mathrm{d}x = (-1)^n f^{(n)}(0)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\, \mathrm{d}x = 2\pi\delta(k)$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\mathrm{e}^{ikx}\, \mathrm{d}x = 1$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{|z|=\varepsilon} \varphi(z)\frac{\mathrm{d}z}{z} = \varphi(0)$$

Например,

$$I = \int\limits_0^\infty \cos k_1 x \cos kx \ \mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\cos\left(k+k_1\right)x + \cos\left(k-k_1\right)x\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \mathrm{Re}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+k_1)x} + \mathrm{e}^{\mathrm{l}(k-k_1)x}\right)\mathrm{d}x = 2\pi\left(\delta\left(k+k_1\right) + \delta\left(k-k_1\right)\right)$$

Для $\delta(\sin x)$ по свойству (10.20) вычисляем нули функции, стоящей в качестве аргумента $\delta$-функции: $x_n = \pi n$, соответственно $\sin' x_n = \cos x_n = (-1)^n$. Поэтому можно записать:

$$\delta(\sin x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n)$$

3. Разложить в ряд Фурье на отрезке $-\pi \le x \le \pi$ функцию

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - \pi n)$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-inx} \ \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \delta(x - 2\pi k)\mathrm{e}^{-inx} \ \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}$$

поэтому имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - \pi n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{inx}$$

4. Показать, что в смысле обобщенных функций справедлива формула:

$$\pm\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\lim_{N\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{\pm iNx}}{x \mp \mathrm{i}0} = \delta(x)$$

Если точка $x = 0 \notin [a, b]$, по теореме Римана-Лебега

$$\pm\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\lim_{N\to\infty}\int\limits_a^b \frac{\mathrm{e}^{\pm iNx}}{x \mp \mathrm{i}0}\varphi(x)\mathrm{d}x = 0$$

Обходя точку $x = 0$ в комплексной плоскости по контуру, показанному на рис. 10.1, получаем

$$\pm\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\lim_{N\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\pm iNx}}{x \mp \mathrm{i}0}\varphi(x)\mathrm{d}x = \pm\frac{\varphi(0)}{2\pi\mathrm{i}}\lim_{N\to\infty}\int\limits_{C_\pm} \frac{\mathrm{e}^{\pm iNx}}{x \mp \mathrm{i}0} \ \mathrm{d}x \ \ = \pm\frac{\varphi(0)}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{C_\pm} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \varphi(0)$$

Что соответствует основному свойству $\delta$-функции.

$$\delta\left[\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)\right] = \frac{1}{\left|x_1 - x_2\right|}\left(\delta\left(x - x_1\right) + \delta\left(x - x_2\right)\right)$$

$$\delta\left(x^2 - a^2\right) = \frac{1}{2|a|}(\delta(x - a) + \delta(x + a))$$

$$I = \int\limits_0^\infty \sin k_1 x \sin kx \; \mathrm{d}x$$

4. Используя теорему Римана-Лебега, показать, что в смысле обобщенных функций

$$\pm\frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \lim_{N\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{\pm iNx}}{x \pm \mathrm{i}0} = 0$$

5. Показать, что

$$x^n \delta^{(k)}(x) = 0 \quad \text{при} \quad k = 0, 1, ..., n-1.$$

6. Показать, что при $k \geq n$ справедлива формула:

$$x^n \delta^{(k)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(k-n)!} \delta^{(k-n)}(x)$$

Указание. Воспользоваться формулой Лейбница дифференцирования произведения двух функций:

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(f(x)g(x)) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i f^{(i)}(x) g^{(k-i)}(x) \qquad C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!}$$

В частности,

$$x\delta^{(k)}(x) + k\delta^{(k-1)}(x) = 0 \quad \text{при} \quad n = 1$$
$$x^n \delta^{(n)}(x) = (-1)^n n! \delta(x) \quad \text{при} \quad n = k$$

### О применениях дельта функции в задачи теорвера

(абзац про задачу про билетик. потом порешаю еще, тут отдельно нужно подумать.)

### Функция Хевисайда

Функция Хевисайда или функция включения $\theta(x)$ определяется как

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

Производная $\theta$-функции есть $\delta$-функция. Действительно,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \theta'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \theta(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_0^\infty \varphi'(x)\mathrm{d}x = \varphi(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

Заметим, что производная любой функции, имеющей разрыв первого рода, выражается через $\delta$-функцию.

Функцию Хевисайда можно представить как предел $\varepsilon$ -последовательности:

$$\theta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon} + \frac{1}{2}$$

Функцию $\operatorname{sign} x = |x|/x$ можно выразить через функцию Хевисайда:

$$\operatorname{sign} x = 2\theta(x) - 1 = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x > 0 \\ 0 & \text{при} \quad x = 0 \\ -1 & \text{при} \quad x < 0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}|x| = \operatorname{sign} x$$

Производная функции $\operatorname{sign} x$. (???)

В смысле обобщенных функций

$$\lim_{N\to\infty}(-i)N\theta(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Nx} = \delta(x)$$

Указание. Проинтегрировать по частям и воспользоваться теоремой Римана-Лебега.

**Функция $\mathrm{p}\frac{1}{x}$**

Обобщенная функция $\mathrm{p}\frac{1}{x}$ определяется через функционал следующим образом:

$$\left(\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,\mathrm{d}x$$

С произвольной функцией $f(x)$ такой интеграл называется интегралом в смысле главного значения и обозначается как

$$V\cdot p\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x \equiv \mathrm{p}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

Часто в физике возникают следующие ситуации, когда необходимо использовать обобщенную функцию $\mathrm{p}\frac{1}{x}$, аппроксимируемую функциями:

$$\mathrm{p}\frac{1}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{x}{x^2+\varepsilon^2} = \frac{1}{2\mathbf{i}}\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{k}{|k|}\mathbf{e}^{-|k|\varepsilon}\mathbf{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k$$

$$\mathrm{p}\frac{1}{x} = \lim_{N\to\infty}\frac{1-\cos Nx}{x} = \lim_{N\to\infty}\int\limits_{0}^{N}\sin kx\,\mathrm{d}k$$

Действительно, в случае (10.31) получаем

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to+0}\lim_{x\to+0}\left(\int\limits_{-\infty}^{-x}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int\limits_{x}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right) + \varphi(0)\lim_{\varepsilon\to+0}\lim_{x\to+0}\int\limits_{-x}^{x}\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \left(\mathrm{p}\frac{1}{x}, \varphi(x)\right)$$

В случае (10.32) справедливость представления доказывается аналогично, но следует дополнительно воспользоваться теоремой Римана-Лебега.

Функционал (10.30) можно представить в виде интеграла в комплексной плоскости $z$ по контуру $C_+$ или $C_-$, обходящему точку $x = 0$ по полуокружности радиуса $\varepsilon \to 0$ соответственно сверху или снизу (рис. 10.2) и вычитания или добавления полувычета $i\pi\varphi(0)$ :

$$\left(\mathrm{p}\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{C_+}\frac{\varphi(z)}{z}\,\mathrm{d}z \mp \mathrm{i}\pi\varphi(0)$$

От интеграла по контуру в комплексной плоскости (10.33) можно перейти к интегралу по действительной оси, записав его в виде

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{C_\pm}\frac{\varphi(z)}{z}\,\mathrm{d}z=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)\mathrm{d}x}{x\mp\mathrm{i}\varepsilon}=\left(\frac{1}{x\mp\mathrm{i}0},\varphi(x)\right)=\left(\mathrm{p}\frac{1}{x},\varphi(x)\right)\pm\mathrm{i}\pi(\delta(x),\varphi(x))$$

$$\frac{1}{x\pm i0}=\mathrm{p}\frac{1}{x}\mp\mathrm{i}\pi\delta(x)$$

Формулы Сохоцкого могут быть также легко получены в предельном переходе дия $\varepsilon$ -последовательностях:

$$\frac{1}{x\pm\mathrm{i}\varepsilon}=\frac{x\mp\mathrm{i}\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}=\frac{x^2}{x^2+\varepsilon^2}\mp\mathrm{i}\pi\frac{\varepsilon}{\pi\left(x^2+\varepsilon^2\right)}$$

$\mathrm{p}\frac{1}{x}$ есть производная от $\ln|x|$, ибо

$$\left(\frac{\mathrm{d}\ln|x|}{\mathrm{d}x},\varphi(x)\right)=(\ln|x|,\varphi'(x))=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\ln|x|)\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

$$\lim\nolimits_{\varepsilon\to+0}\left(\ln|x|\varphi(x)|_{-\infty}^{-\varepsilon}+\ln|x|\varphi(x)|_{\varepsilon}^{\infty}-\int\limits_{|x|>\varepsilon}\tfrac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right)$$
$$\lim\nolimits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{|x|>\varepsilon}\tfrac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x=\left(\mathrm{p}\tfrac{1}{x},\varphi(x)\right)$$

$$\delta_\pm(x):=\pm\frac{i}{2\pi}\frac{1}{x\pm i0}$$

$$\delta_\pm(x)=\pm\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{x\pm\mathrm{i}\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty\mathrm{e}^{-\varepsilon k\pm\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k$$

$$\delta_+(x)+\delta_-(x)=\delta_(x)$$
$$\delta_+(x)-\delta_-(x)=\tfrac{i}{\pi}\mathrm{p}\tfrac{1}{x}$$

## 1.3 A little bit less useful special functions

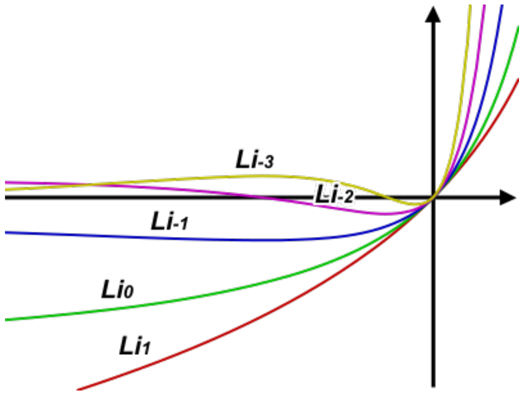
### 1.3.1 Polylogarithms (??)

(see wiki)

**Main properties of polylogarithms**

$$\mathrm{Li}_s(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s} = z + \frac{z^2}{2^s} + \frac{z^3}{3^s} + \cdots$$

$$\mathrm{Li}_{s+1}(z) = \int_0^z \frac{\mathrm{Li}_s(t)}{t} dt$$




$$\mathrm{Li}_s\left(e^{\mu}\right) = -\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i} \oint_H \frac{(-t)^{s-1}}{e^{t-\mu}-1} dt$$

where $H$ is the Hankel contour, $s \neq 1, 2, 3, ...$, and the $t = \mu$ pole of the integrand does not lie on the non-negative real axis. The contour can be modified so that it encloses the poles of the integrand at $t - \mu = 2k\pi i$, and the integral can be evaluated as the sum of the residues (Wood 1992, § 12, 13; Gradshteyn & Ryzhik 1980, § 9.553):

$$\mathrm{Li}_s\left(e^{\mu}\right) = \Gamma(1-s) \sum_{k=-\infty}^{\infty} (2k\pi i - \mu)^{s-1}$$

This will hold for $\mathrm{Re}(s) < 0$ and all $\mu$ except where $e^{\mu} = 1$. For $0 < \mathrm{Im}(\mu) \leq 2\pi$ the sum can be split as:

$$\mathrm{Li}_s\left(e^{\mu}\right) = \Gamma(1-s) \left[ (-2\pi i)^{s-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(k + \frac{\mu}{2\pi i}\right)^{s-1} + (2\pi i)^{s-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(k + 1 - \frac{\mu}{2\pi i}\right)^{s-1} \right]$$

where the two series can now be identified with the Hurwitz zeta function:

$$\mathrm{Li}_s\left(e^{\mu}\right) = \frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}} \left[ i^{1-s} \zeta\left(1-s, \frac{\mu}{2\pi i}\right) + i^{s-1} \zeta\left(1-s, 1 - \frac{\mu}{2\pi i}\right) \right] \quad (0 < \mathrm{Im}(\mu) \leq 2\pi)$$

$$1 = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt \quad (\mathrm{Re}(s) > 0)$$

$$\mathrm{Li}_s(z) = \frac{1}{2} z + \frac{z}{2\Gamma(s)} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} \coth \frac{t - \ln z}{2} dt \quad (\mathrm{Re}(s) > 0)$$

$$\coth\frac{t-\ln z}{2} = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2k\pi i + t - \ln z}$$

then reversing the order of integral and sum, and finally identifying the summands with an integral representation of the upper incomplete gamma function, one obtains:

$$\mathrm{Li}_s(z) = \frac{1}{2}z + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\Gamma(1-s, 2k\pi i - \ln z)}{(2k\pi i - \ln z)^{1-s}}$$

### 1.3.2 Polynomials: Hermit, Legendre, Laguerre, Chebyshev

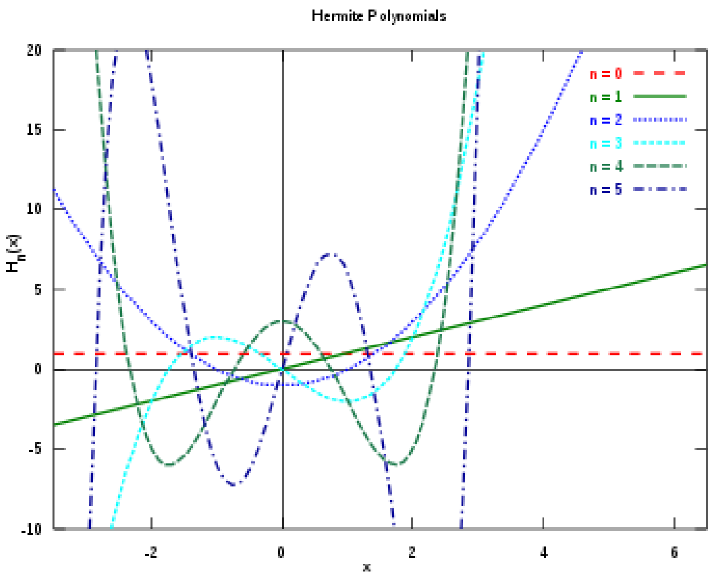
**О Полиномы Эрмита**

**Суть**

производящая ф-я
их ортог-сть
интегр представление

$$\exp\left(-t^2 + 2tx\right) \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_n(x)$$

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2$$




Легко понять, что $H_n(x)$ является полиномом $n$-ой степени, поскольку наибольшая степень $x$ при $t^n$ в разложении производящей функции $\exp\left(-t^2+2tx\right)$ в ряд Тейлора получается при разложении $\exp(2tx)$. Производящая функция $\exp\left(-t^2+2tx\right)$ инвариантна относительно преобразования $t, x \to -t, -x$. При этом преобразовании в правой части изменяет знак аргумент $H_n$, а $t^n$ заменяется на $(-1)^n t^n$,

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x).$$

Полагая в выражении (3.65) $x = 0$ и раскладывая $\exp(-t^2)$ в ряд по $t$, находим следующие значения четных полиномов Эрмита в нуле

$$H_{2n}(0) = (-1)^n 2^n (2n-1)!!,$$

$(2n-1)!! \equiv (2n-1)(2n-3)...$ Далее, при малых $x$ справедливо соотношение $\exp(-t^2+2tx) \approx \exp(-t^2)(1+2tx)$. Снова раскладьгая $\exp(-t^2)$ в ряд по $t$, находим следующие значения производных нечетных полиномов Эрмита в нуле

$$H'_{2n+1}(0) = (-1)^n 2^{n+1}(2n+1)!!.$$

Дифференцируя соотношение (3.65) по $x$ и приравнивая коэффициенты при степенях $t$ в получившихся рядах, мы находим выражение для производной

$$\frac{dH_n(x)}{dx} = 2nH_{n-1}(x)$$

Далее, беря производную по $t$ от соотношения (3.65) и приравнивая коэффициенты при степенях $t$ в получившихся рядах, мы получаем

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$

$H_n(x)$ имеет ровно $n$ нулей при действительном $x$. Другими словами, все корни уравнения $H_n(x) = 0$ действительны.

*Proof.* (induction)

Если $H_n(x)$ имеет $n$ нулей, то в соответствии с (3.69) функция $H_{n+1}(x)$ имеет $n$ экстремумов. Между ними лежит $n-1$ нулей функции $H_{n+1}(x)$. Еще два нуля $H_{n+1}(x)$ лежат вне крайних экстремумов $H_{n+1}(x)$, поскольку на больших $x$ в полиноме доминирует член с наивысшей степенью $x$, то есть на больших $x$ функция $H_{n+1}(x)$ монотонно стремится к $\infty$ или $-\infty$.

□

Выражая в соотношении (3.69) $H_{n-1}$ в соответствии с (3.70), находим

$$\left(\frac{d}{dx} - 2x\right) H_n = -H_{n+1}.$$

$$H_n(x) = (-1)^n \exp\left(x^2\right) \frac{d^n}{dx^n} \exp\left(-x^2\right).$$

Соотношение (3.72) очевидно, выполняется при $n = 0$, и воспроизводится при применении оператора в левой части (3.71), поскольку $(d/dx - 2x)[\exp(x^2) A] = \exp(x^2)\, dA/dx$ для произвольной функции $A(x)$. Соотношение (3.72) еще раз показывает, что $H_n$ является полиномом степени $n$.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t}\right) \exp\left(-t^2 + 2tx\right) = 0.$$

$$\frac{d^2 H_n}{dx^2} - 2x\frac{dH_n}{dx} + 2nH_n = 0. \qquad \text{Storm-Liuv oper}$$

Уравнение (3.73) инвариантно относительно замены $x \to -x$ и потому имеет четные и нечетные решения, в соответствии со сказанном выше о четности полиномов Эрмита.

Even solution:

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}.$$

$$a_{k+1} = \frac{2k-n}{(k+1)(2k+1)}a_k,$$

При четных $n$ ряд по $x$ обрывается на $k = n/2$, и мы и меем дело с конечным полиномом, пропорциональным $H_n$ с четным индексом. При нечетных $n$ мы имеем дело с бесконечным рядом, который сходится при всех (комплексных) $x$ поскольку $a_{k+1} \approx a_k/k$ при больших $k$ (второе, дополнительное решение к полиному Эрмита).

Аналогичным образом исследуется нечетное решение уравнения (3.73), разложение которого в ряд по степеням $x$ пропорционально $H_n(x)$ для нечетных $n$ и дает второе (дополнительное к полиному Эрмита) решение уравнения (3.73) при четных $n$.

$$H_n(x) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dt(x+it)^n \exp\left(-t^2\right)$$

*Proof.*

$$\exp\left(-\xi^2 + 2\xi x\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-t^2 + 2\xi(x+it)\right]$$

Раскладывая обе части этого соотношения в ряд по $\xi$.

□

Представляем подынтегральное выражение в соотношении (3.74) в виде $\exp\left[n\ln(x+it) - t^2\right]$. Для больших $n$ можно использовать метод перевала, мы находим две перевальные точки $t_\pm = ix/2 \pm \sqrt{n/2 - x^2/4}$. Деформируя контур интегрирования так, чтобы он проходил через эти перевальные точки и суммируя соответствующие перевальные вклады, находим

$$H_n(x) \approx \sqrt{2}(2n/e)^{n/2} \exp\left(x^2/2\right) \cos(\sqrt{2n}x - \pi n/2),$$

справедливое при $n \gg x^2, 1$.

Обращаем внимание на осциллирующий характер выражения (3.75). Осцилляции возникают, когда перевальные точки $t_\pm = ix/2 \pm \sqrt{n/2 - x^2/4}$ имеют противоположные дей ствительные части, что и обеспечивает условие $n \gg x^2, 1$. В обратном предельном случае $x^2 \gg n$ обе перевальные точки $t_\pm = ix/2 \pm \sqrt{n/2 - x^2/4}$ лежат на мнимой оси. В этом случае контур интегрирования следует деформировать таким образом, чтобы он проходил через ближайшую к действительной оси перевальную точку. (Отметим, что попытка провести контур через вторую перевальную точку некорректна, поскольку эта перевальная точка соответствует минимуму, а не максимуму подынтегрального выражения.) Вычисление перевального значения интеграла приводит к поведению $H_n \propto x^n$, то есть на больших $x \gg \sqrt{n}$ главный вклад в $H_n$ определяется старшим членом полинома, как и следовало ожидать. Отметим, что на интервале $-\sqrt{n} < x < \sqrt{n}$, где работает приближение (3.75), осцилляции дают $\sim n$ нулей функции $H_n$, в соответствии с общими свойствами $H_n$.

Уравнение (3.73) для $H_n$ может быть рассмотрено, как уравнение на собственные значения с оператором Штурма-Лиувилля (2.6) с $Q = -2x, U = 0$. Отсюда следует условие ортогональности (2.68)

$$\int dx \exp\left(-x^2\right) H_n(x) H_m(x) = 0$$

где в соответствие с (2.67) $\rho = \exp(-x^2)$, а интегрирование идет вдоль действительной оси. Найдем теперь константы $A_n$, фигурирующие в выражении (2.69):

$$A_n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \exp\left(-x^2\right) H_n^2(x) = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

Таким образом, любую функцию $f(x)$, заданную на действительных $x$ и не слишком быстро стремящуюся к бесконечности при $x \to \pm\infty$, можно разложить в ряд по полиномам Эрмита

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(x) \qquad a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^n n!} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} H_n(x) f(x)$$

Условие полноты:

$$\sum_n \frac{\exp\left(-x^2/2 - y^2/2\right)}{2^n n! \sqrt{\pi}} H_n(x) H_n(y) = \delta(x-y).$$

**О применениях**

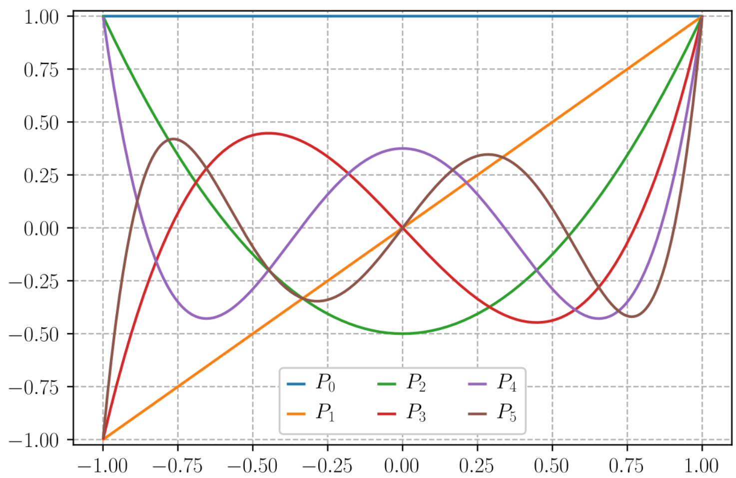
(отработаю, напишу формулы!)

Полиномы Эрмита возникают в задаче о квантовом осцилляторе, которая является одной из базисных задач квантовой механики. Помимо этого, они возникают в различных задачах, требующих рассмотрения функций на всей прямой, в отличие от полиномов Лежандра, которые относятся к отрезку $(-1,1)$. Кроме того, в ряде случаев разложение функции по полиномам Эрмита оказывается более эффективным, чем ряд Тейлора.

### О Многочленах Лежандра (!?!?)

(тут к теормину по математике 2 заготовки!)

**Суть**




**Теория**

Напомним, что в трехмерном пространстве Лапласиан электростатического потенциала точечного заряда $1/R$ равен нулю, $\nabla^2(1/R) = 0$. Здесь $R$ - расстояние от точки наблюдения до точечного заряда. Поместим точечный заряд в точку $(0,0,1)$ и перейдем к сферической системе координат $r,\theta,\varphi$. В этом случае $R=\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}$. Условие же $\nabla^2 R^{-1}=0$ записывается в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)R^{-1}+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial R^{-1}}{\partial\theta}\right)=0$$

Здесь отсутствует производные по $\varphi$, поскольку $R$ от этой переменной не зависит. Переходя к переменной $\mu=\cos\theta$, которая меняется от $-1$ до $+1$, мы находим

$$\left(r^2\partial_r^2+2r\partial_r\right)R^{-1}+\partial_\mu\left[\left(1-\mu^2\right)\partial_\mu R^{-1}\right]=0$$

$$\text{(definition of } P_n(\mu)\text{)}\qquad \frac{1}{\sqrt{1-2r\mu+r^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\mu)r^n. \qquad \text{for} \quad r<1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r\mu+r^2}}=\frac{r^{-1}}{\sqrt{r^{-2}-2r^{-1}\mu+1}}. \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{\sqrt{1-2r\mu+r^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\mu)r^{-1-n}.$$

$$P_n(1)=1 \qquad P_n(-1)=(-1)^n$$

$$P_0(\mu)=1, \qquad P_1(\mu)=\mu, \qquad P_2(\mu)=\frac{1}{2}\left(3\mu^2-1\right).$$

$P_{2n+1}(0)=0.$

Подставляя правую часть соотношения (3.44) вместо $R^{-1}$ в уравнение (3.43), мы приходим к уравнениям

$$\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\mu}P_n\right]+n(n+1)P_n=0,$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2}P_n+\cot\theta\frac{dP_n}{d\theta}+n(n+1)P_n=0, \qquad \mu=\cos\theta$$

$$\hat{K}_1\frac{1}{\sqrt{1-2r\mu+r^2}}=0, \qquad \hat{K}_1:=\partial_r-\mu\left(2r\partial_r+1\right)+\left(r^2\partial_r+r\right),$$

которое легко проверяется непосредственно. Применяя оператор $\hat{K}_1$ к правой части (3.44) и приравнивая к нулю коэффициенты при всех степенях $r$, находим следующее рекуррентное соотношение

$$(n+1)P_{n+1}-(2n+1)\mu P_n+nP_{n-1}=0.$$

Это соотношение позволяет явно находить $P_{n+1}(\mu)$, если известны выражения для $P_{n-1}(\mu)$ и $P_n(\mu)$. Таким образом, стартуя с первых двух полиномов Лежандра, можно, последовательно применяя (3.51), найти выражение для произвольного полинома Лежандра.

Далее, имеет место тождество

$$\hat{K}_2\frac{1}{\sqrt{1-2r\mu+r^2}}=0,$$
$$\hat{K}_2=\partial_r+(1-\mu/r)\partial_\mu$$

которое легко проверяется непосредственно. Применяя оператор $\hat{K}_2$ к правой части (3.44) и приравнивая к нулю коэффициенты при всех степенях $r$, находим соотношение

$$nP_n - \mu \frac{d}{d\mu} P_n + \frac{d}{d\mu} P_{n-1} = 0,$$

которое переписывается в виде

$$(n+1) P_n = \frac{d}{d\mu} \left( \mu P_n \right) - \frac{d}{d\mu} P_{n-1}$$

Для полиномов Лежандра справедливо следующее выражение

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\mu^n} \left( \mu^2 - 1 \right)^n .$$

Это соотношение можно доказать по индукции, исходя из рекуррентного соотношения (3.51): если (3.55) справедливо для $P_{n-1}$ и $P_n$, то в силу (3.51) оно справедливо и для $P_{n+1}$. Кроме того, выражение (3.55) легко проверяется для первых двух полиномов Лежандра (3.46), что завершает доказательство.

Соотношение (3.54) означает, что член $n(n+1)P_n$ в уравнении (3.47) записывается в виде полной производной. Беря первообразную от получившегося выражения, находим

$$\left( \mu^2 - 1 \right) \frac{d}{d\mu} P_n(\mu) = n \left[ \mu P_n(\mu) - P_{n-1}(\mu) \right]$$

Константа интегрирования здесь равна нулю, поскольку при $\mu = 1$ обе части соотношения (3.56) обращаются в ноль. Соотношения (3.56) позволяют свести производные от полиномов Лежандра к комбинации самих этих полиномов.

Соотношение (3.44) можно использовать для получения интегрального представления для полиномов Лежандра. Воспользовавшись теоремой о вычете, мы находим из соотношения (3.44)

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z^{n+1}} \frac{1}{\sqrt{1 - 2z\mu + z^2}},$$

где интеграл идет против часовой стрелки по небольшому замкнутому контуру, охватывающему начало координат. Корень квадратный имеет точки ветвления по $z$ при $z_\pm = \mu \pm i\sqrt{1-\mu^2}$, которые лежат на единичной окружности, если $\mu$ - действительное число и $|\mu| < 1$. Эти точки ветвления расположены в точках $z_\pm = \exp(\pm i\theta)$, $\mu = \cos\theta$. Таким образом, разрез функции $(1 - 2z\mu + z^2)^{-1/2}$ можно провести вдоль дуги единичной окружности в плоскости $z$, которая определяется условиями $\theta < \vartheta < 2\pi - \theta$, $\theta$ предполагается лежащим в интервале $0 < \theta < \pi$, а $\vartheta$ - аргумент $z$. Это построение предст авлено на ри сунке 3.10, где разрез показан черной дугой. Деформируем теперь контур интегрирования в приведенном выше интеграле. Сначала мы увеличим его радиус, а затем "вывернем" через бесконечность. В результате контур будет охватывать разрез функции $(1 - 2z\mu + z^2)^{-1/2}$. Эта последовательность деформаций проиллюстрирована на рисунке 3.10, где контуры интегрирования показаны синим цветом. Прижимая контур интегрирования к разрезу, мы сводим интеграл к интегралу по разрезу от скачка функции $z^{-n-1} \left(1 - 2z\mu + z^2\right)^{-1/2}$, которая имеет противоположные знаки по берегам разреза. Мы можем подставить на разрезе $z = e^{i\vartheta}$, тогда $1 - 2z\mu + z^2 = 2e^{i\vartheta}(\cos\theta - \cos\vartheta)$. Преобразуем интегрирование по контуру к интегрированию по углу $dz = ie^{i\vartheta} d\vartheta$. В результате получаем

$$P_n(\cos\theta) = \frac{2}{\pi} \int\limits_\theta^\pi d\vartheta \frac{\sin[(n+1/2)\vartheta]}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\vartheta)}},$$

где синус возник в результате суммирования вкладов от верхней и от нижней полудуг.

Интегральное представление (3.57) позволяет найти асимптотическое выражение для полиномов Лежандра при больших $n$. В этом случае в силу быстрой осцилляции $\sin[(n+1/2)\vartheta]$ главный вклад в интеграл набирается вблизи нижнего предела интегрирования из-за знаменателя в (3.57). Подставляя $\vartheta = \theta + x$, раскладывая по $x$ подынтегральное выражение и устремляя затем верхний предел интегрирования к бесконечности, мы находим

$$P_n(\cos\theta) \approx \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty dx \frac{\sin[(n+1/2)(\theta+x)]}{\sqrt{2\sin\theta x}}$$

Вычисляя здесь интеграл по $x$, мы находим асимптотическое выражение

$$P_n(\cos\theta) \approx \frac{2\cos[(n+1/2)\theta - \pi/4]}{\sqrt{(2n+1)\pi\sin\theta}}$$

Выражение (3.59) можно получить также методом WKB (смотри раздел 3.7.3), который работает как раз при больших $n$. Чтобы применить этот метод, перепишем уравнение (3.48) в терминах переменной $t = \ln\tan(\theta)$. Тогда оно принимает вид уравнения (3.106):

$$\frac{d^2P_n}{dt^2} + \frac{n(n+1)}{\cosh^2 t}P_n = 0.$$

Таким образом

$$p = i(n+1/2)/\cosh t = i(n+1/2)\sin\theta,$$
$$S = \int dt p(t) = i(n+1/2)\theta,$$

где мы подставили $\sqrt{n(n+1)} \approx n+1/2$. При больших $n$ выполняется неравенство $dp/dt \ll p^2$, что оправдывает применение метода W KB. Суммируя теперь два члена (3.107), мы и получаем выражение (3.59). Разумеется, приведенным методом невозможно получить общий множитель и сдвиг фазы.

Рассмотрим теперь произвольное решение уравнения (3.47), регулярное в точке $\mu = 1$, когда оно разлагается в ряд Тейлора по $x = \mu - 1$. Перепишем уравнение (3.47) в терминах переменной $x$:

$$\left(2x + x^2\right)P'' + 2(1+x)P' - n(n+1)P = 0,$$

где штрих означает дифференцирование по $x$. Подставляя в это выражение разложение в ряд Тейлора $P$ по $x$, $P = \sum\limits_k p_k x^k$, мы находим рекуррентное соотношение

$$2(k+1)^2 p_{k+1} = [n(n+1) - k(k+1)]p_k.$$

Таким образом, при целом $n$ цепочка соотношений обрывается на $k = n$, и решение оказывается конечным полиномом, который (с точностью до множителя) совпадает с $P_n(\mu)$. Если же $n$ не является неотрицательным целым числом, то в разложении присутствуют все степени $x$. В пределе больших $k$ мы имеем $p_{k+1} = -(1/2)p_k$. Отсюда следует, что радиус сходимости этого ряда равен 2, и, более того, он приводит к простому полюсу при $x = -2$, то есть $\mu = -1$. Таким образом, мы доказали, что полиномами Лежандра исчерпываются решения уравнения (3.47), регулярные как в точке $\mu = 1$, так и в точке $\mu = -1$. Как следует из уравнения (3.47), полиномы Лежандра являются собственными функциями оператора

$$\hat{L} = \frac{d}{d\mu}\left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\mu}$$

который является самосопряженным на классе функций, заданных на интервале $-1 < \mu < 1$ и остающихся ограниченными на этом интервале, включая конечные точки. Самосопряженность оператора (3.61), то есть свойство (2.60), смотри раздел 2.4.1, легко проверяется интегрированием по частям. Поэтому полиномы Лежандра удовлетворяют условиям ортогональности (2.61):

$$\int\limits_{-1}^{1} d\mu P_n(\mu)P_l(\mu) = 0$$

если $n \neq l$.

Соотношение (3.62) можно получить и из уравнения (3.48), в соответствии с которым полиномы Лежандра являются собственными функциями оператора Птурма-Лиувилля (2.6) с $Q = \cot\theta$ и $U = 0$. В этом случае в соответствии с $(2.67)\rho = \sin\theta$. Интервал же интегрирования по углу $\theta$ распространяется от 0 до $\pi$. У словие (2.61) переписывается в виде $\int d\mu f_n f_m = 0$, $\mu = \cos\theta$. Таким образом, в терминах переменной $\mu$ полиномьг лежандра ортогональны с весом единица на интервале - ние (3.62).

Нормировочный множитель для полиномов Лежандра дается выражением

$$\int\limits_{-1}^{1} d\mu P_n^2(\mu) = \frac{2}{2n+1}.$$

Общее соотношение (2.64) означает, что полиномы Лежандра, как полная система собственных функций оператора (3.61), конечных на интервале $(-1, +1)$, удовлетворяют соотношению

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1/2)P_k(x)P_k(y) = \delta(x-y).$$

#### О применениях многочленов Лежандра (!?!??!)

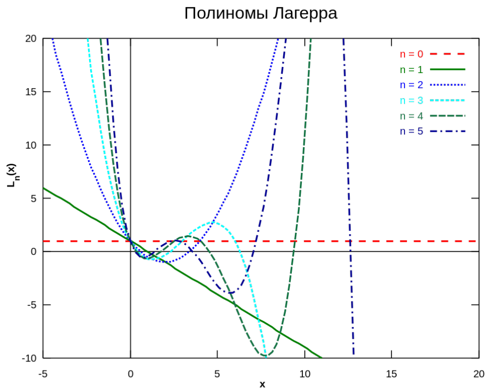
При решении задач теории поля или квантовой механики зачастую возникают случаи, когда описывающие поле уравнения обладают симметрией относительно вращений вокруг некоторой точки. В этом случае задача допускает разделение переменных. Типичным примером является уравнение Шрёдингера для частицы, помещенной в центрально-симметричное поле, потенциал которого $U$ зависит только от расстояния $r$ до некоторой точки, в которую мы поместим начало координат. При решении такого рода уравнений, дифференциальная часть которого управляется Лапласианом, возникают полиномы Лежандра.

### О Многочлены Лагерра (!?!?)

#### Суть

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0, \qquad \text{(ур. Лагерра)}$$
$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x}x^n\right) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\binom{n}{k}x^k. \qquad \text{(ф. Родрига)}$$

Они ортогональны со скалярным произведением $\langle f, g\rangle = \int\limits_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}dx$.




$$L_{k+1}(x) = \frac{1}{k+1}\left[(2k+1-x)L_k(x) - kL_{k-1}(x)\right], \quad \forall k \geqslant 1, \qquad \begin{array}{l} L_0(x) = 1, \\ L_1(x) = 1 - x. \end{array}$$

Обобщённые полиномы Лагерра

Обобщённые полиномы Лагерра $L_n^a(x)$ являются решениями уравнения:

$$xy'' + (a+1-x)y' + ny = 0,$$

так что $L_n(x) = L_n^0(x)$.

| $n$ | $L_n(x)$ |
|---|---|
| 0 | $1$ |
| 1 | $-x+1$ |
| 2 | $\frac{1}{2}(x^2-4x+2)$ |
| 3 | $\frac{1}{6}(-x^3+9x^2-18x+6)$ |
| 4 | $\frac{1}{24}(x^4-16x^3+72x^2-96x+24)$ |
| 5 | $\frac{1}{120}(-x^5+25x^4-200x^3+600x^2-600x+120)$ |
| 6 | $\frac{1}{720}(x^6-36x^5+450x^4-2400x^3+5400x^2-4320x+720)$ |

**О применениях**

Многочлены Лагерра применяются в квантовой механике, в радиальной части решения уравнения Шрёдингера для атома с одним электроном. Имеются и другие применения многочленов Лагерра.

(укажу, как конкретно)

## О Многочлены Чебышева

**Суть**

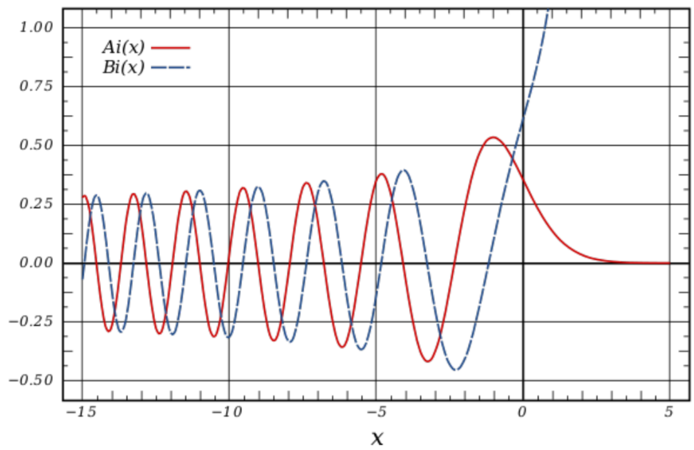
$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$
$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$$

**О применениях**

(в вычматах как-то используются, но мне не до них пока что)

### 1.3.3 Airy function

**Суть**




(?? хватит такого мелкого раздела на неё???)

**Определение**

Типично уравнение Эйри определяет поведения волновых функций (в квантовой механике) вблизи точки поворота, то есть вблизи точки, где энергия частицы сравнивается с потенциалом.

Уравнение Эйри (3.11) линейно по переменной $x$. Поэтому его можно эффективно решить методом Лапласа. Запишем решение в виде контурного интеграл

$$Y(x) = \int\limits_C dt Z(t) \exp(xt)$$

$C$ - некоторый контур в комплексной плоскости $t$. Мы будем счит ать, что подынтегральное выражение достаточно быстро стремится к нулю на концах этого контура (которые могут быть и в бесконечности).

Подставим уравнение (3.11) в представление (3.12), используем соотношение $x\exp(xt) = d\exp(xt)/dt$ и производим интегрирование по ч астям по $t$, счит ая граничные члены равными нулю (что обеспечивается быстрым стремлением подынтегрального выражения к нулю на концах контура интегрирования). В результате мы находим уравнение

$$\frac{dZ}{dt} = -t^2 Z,$$

решение которого имеет вид $Z \propto \exp\left(-t^3/3\right)$. Подставляя это выражение в (3.12), находим общее решение уравнения Эйри (3.11)

$$Y(x) \propto \int\limits_C dt \exp\left(xt - t^3/3\right).$$

Контур $C$ в представлении (3.13) должен начинаться и оканчиваться в областях, где подынтегральное выражение в (3.13) стремится к нулю. Очевидно, что для этого контур $C$ должен приходить из бесконечности и уходить в бесконечность. Поскольку поведение $\exp(xt$ - $t^3/3)$ в бесконечности определяется фактором $-t^3$, имеется три сектора, в которых подынтегральное выражение в (3.13) стремится к нулю: $-\pi/6 < \operatorname{Arg} t < \pi/6$, $\pi/2 < \operatorname{Arg} t < 5\pi/6$, $7\pi/6 < \operatorname{Arg} t < 3\pi/2$ смотри рисунок 3.4, секторы I,II,III,

Контур $C$ должен начинаться в одном из этих секторов и заканчиваться в другом. Имеется три варианта. Однако получающиеся интегралы линейно связаны между собой, поскольку сумма интегралов по контурам, идущих из сектора I в сектор II, из сектора II в сектор III, и из сектора III в сектор I, равн а, очевидно, нулю. Таким образом, имеется два линейно независи мых решения, что соответствует второму порядк у уравнения Эйри.

Решению, которое остается конечным при $x \to \pm\infty$ соответствует контур, идущий из сектора III в сектор I. Можно выбирать различную форму такого контура (смотри рисунок 3.4), единственное требование к форме контура заключается в том, чтобы $\exp\left(xt - t^3/3\right)$ стремилось к нулю на концах этого контура. Это связано с возможностью деформации контура в области аналитичности подынтегрального выражения, которой в данном случае является вся комплексная плоскость. В частности, можно выбрать контур, идущий вдоль мнимой оси. Введя обозначение $t = iu$, мы сводим этот интеграл к виду

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty du \cos\left(xu + u^3/3\right),$$

где множитель выбран традиционным образом. Введенная (3.14) функция называется функцией Эйри первого рода (или просто функцией Эйри).

Установим асимптотическое поведение функции Эйри при больших значениях $|x|$. При больших отрицательных $x$ в интеграле (3.14) имеется точка стационарной фазы $u = \sqrt{|x|}$, окрестность которой дает основной вклад в интеграл при больших $|x|$.Применяя метод стационарной фазы (смотри раздел 3.7.2), находим, используя выражение (3.102)

$$\mathrm{Ai(x)} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}|x|^{1/4}}\cos\left(-\frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

При больших положительных $x$ стационарная точка в интеграле (3.14) отсутствует. Чтобы найти соответствующую асимптотику, мы должны вернуться на шаг назад:

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty} dt \exp\left(tx - t^3/3\right)$$

Теперь мы должны применить обобщенный метод перевала, смотри раздел 3.7.2. Контур интегрирования должен быть деформирован так, чтобы он проходил через перевальную точку $t = -x^{1/2}$ (смотри вертикальную прямую на рисунке 3.4). Вычисляя интеграл в соответствии с (3.105), находи м

$$\mathrm{Ai(x)} \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}}\exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right)$$

Второе решение:

$$\mathrm{Bi}(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty du\left[\exp\left(xu - u^3/3\right) + \sin\left(xu + u^3/3\right)\right]$$

Функция Эйри 2го рода

Выражение для Bi получается, если взять сумму контурных интегралов для контуров, идущих из сектора I в сектор II и из сектора III в сектор II. Выбирая эти интегралы, как идущие сначала вдоль мнимой оси, а затем вдоль действительной оси, мы и приходим к выражению (3.17). Коэффициент в (3.17) традиционен.

$$\mathrm{Bi}(x) \approx \frac{1}{\pi^{1/2} x^{1/4}} \exp\left(\frac{2}{3} x^{3/2}\right) \qquad x \gg 1$$

$$\mathrm{Bi}(x) \approx \frac{1}{\pi^{1/2} |x|^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3} |x|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) \qquad x \ll -1$$

Сравнение функции Bi(x) и ее асимптотик приведены на рисунке 3.7.

Асимптотическое поведение функций Эйри $\mathrm{Ai}(x)$ и $\mathrm{Bi}(x)$ можно установить и методом WKB, смотри раздел 3.7.3. Уравнение Эйри (3.11) является частным случаем уравнения (3.106), при этом $U = x$. Таким образом $p = \sqrt{x}$ и $S = (2/3)x^{3/2}$. Таким образом, в соответствие с (3.107) при больших положительных $x$ мы находим следующее поведение

$$x^{-1/4} \exp\left(\pm 2x^{3/2}/3\right).$$

Знак + относится к функции $\mathrm{Bi}(x)$, смотри (3.18), а знак минус относится к функци $\mathrm{Ai}(x)$, смотри (3.16). При больших отрицательных $x$ мы находим следующее поведение

$$|x|^{-1/4} \exp\left(\pm 2i|x|^{3/2}/3\right).$$

Поскольку $\mathrm{Ai}(x)$ и $\mathrm{Bi}(x)$ являются действительными функциями, то в соответствие с (3.109) для них поведение при больших отрицательных $x$ имеет вид

$$|x|^{-1/4} \cos\left(2|x|^{3/2}/3 + \varphi\right),$$

$\varphi$ - некоторая фаза. Это поведение соответствует асимптотикам (3.15) и (3.19).

**Другое про Айри**

**О подходе через теорию Пикара-Лефшица (????)**

(пока этот вопрос остается, не шарю, но интересно будет дописать)

### 1.3.4 Elliptic Jacobi functions

**Суть**

$$u := \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m \sin^2 \theta}}$$

$$\mathrm{sn}\, u := \sin \varphi$$

$$\mathrm{cn}\, u := \cos \varphi$$

$$\mathrm{dn}\, u := \sqrt{1 - m \sin^2 \varphi}$$

эллиптические функции являются функциями двух аргументов: амплитуды $\varphi$ и параметра $m$.

Оставшиеся девять эллиптических функций легко построить из трёх вышеприведённых. (??? мб допишу потом). Заметьте, что когда $\varphi = \pi/2$, то $u$ равен четверти периода $K$. (???)

$$F(\theta,k) := \int\limits_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}, \qquad \text{Эл. инт. 1 р. в норм. ф. Лежандра}$$

$$E(\theta,k) := \int\limits_0^\theta \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}d\theta \qquad \text{Эл. инт. 2 р. в норм. ф. Лежандра}$$

$$\Pi(\theta,n,k) := \int\limits_0^\theta \frac{d\theta}{\left(1+n\sin^2\theta\right)\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \qquad \text{Эл. инт. 3 р. в норм. ф. Лежандра}$$

Полные эллиптические интегралы 1, 2 и 3 рода:

$$K(k) := F\left(\frac{\pi}{2},k\right),$$
$$E(k) := E\left(\frac{\pi}{2},k\right),$$
$$\Pi(n,k) := \Pi\left(\frac{\pi}{2},n,k\right)$$

Неполные и полные интегралы 2 и 3 рода часто одинаково обозначаются ($E$ и $\Pi$).

Заменяя $x=\sin\varphi$, получаем:

$$F(x,k) = \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}, \qquad \text{Эл. инт. 1 р. в норм. ф. Якоби}$$

$$E(x,k) = \int\limits_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx, \qquad \text{Эл. инт. 1 р. в норм. ф. Якоби}$$

$$\Pi(x,n,k) = \int\limits_0^x \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}. \qquad \text{Эл. инт. 1 р. в норм. ф. Якоби}$$

Предполагается, что $0<k<1$.

Свойства:

1. Поскольку $0<1-k^2\sin^2\theta<1$ при $0<k<1$, то

$$F(\theta,k) > E(\theta,k), \qquad K(k) > E(k)$$

$$\frac{d(aF+bE)}{d\theta} = \frac{a+b\left(1-k^2\sin^2\theta\right)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \frac{(a+b)-bk^2\sin^2\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},$$
$$\frac{d^2F}{d\theta^2} = k^2\sin\theta\cos\theta\left(\frac{dF}{d\theta}\right)^3,$$
$$\frac{d^2E}{d\theta^2} = -k^2\sin\theta\cos\theta\frac{dF}{d\theta}$$

**Другие интегралы через эллиптические**

3. Положив $a=-b=1/k^2$, получим из формулы для $\frac{d(aF+bE)}{d\theta}$

$$G_1(\theta,k) \equiv \frac{F(\theta,k)-E(\theta,k)}{k^2} = \int\limits_0^\theta \frac{\sin^2\theta d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}.$$

4. Положив $a = 1 - 1/k^2, b = 1/k^2$, получим из формулы для $\frac{d(aF+bE)}{d\theta}$

$$G_2(\theta, k) \equiv \frac{1}{k^2}E(\theta, k) - \frac{1-k^2}{k^2}F(\theta, k) = \int\limits_0^\theta \frac{\cos^2\theta d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}.$$

5. Производные эллиптических интегралов по параметру:

$$\frac{\partial F}{\partial k} = \int\limits_0^\theta \frac{k\sin^2\theta d\theta}{\left(1-k^2\sin^2\theta\right)^{3/2}} = \frac{1}{k'^2}\left(\frac{E-k'^2F}{k} - \frac{k\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\right),$$

$k'^2 = 1-k^2$. Эта формула проверяется дифференцированием правой и левой ее части по $\theta$ с учетом формулы для $\frac{d(aF+bE)}{d\theta}$. Согласно (2.295) имеем

$$\frac{\partial E}{\partial k} = -\int\limits_0^\theta \frac{k\sin^2\theta d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \frac{E-F}{k}.$$

6. Пусть $\nu > \mu > 1$. Рассмотрим функцию

$$G_4(\theta, \mu, \nu) = \int\limits_0^\theta \frac{\cos^2\theta d\theta}{\sqrt{\mu-\sin^2\theta}\sqrt{\nu-\sin^2\theta}}.$$

Чтобы выразить ее через эллиптические интегралы, сделаем замену $\sin^2\theta = u$. Тогда $2\sin\theta\cos\theta d\theta = du$ и

$$G_4(u, \mu, \nu) = \int\limits_0^u \frac{\sqrt{1-x}dx}{2\sqrt{x(\mu-x)(\nu-x)}}.$$

Воспользуемся табличным известным интегралом

$$\int\limits_d^u \frac{\sqrt{c-x}dx}{\sqrt{(a-x)(b-x))(x-d)}} = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}\left[(a-d)\Pi\left(\beta, \frac{d-c}{a-c}, r\right) - (a-c)F(\beta, r)\right],$$

$a > b > c \geqslant u > d$ и $\beta = \arcsin\sqrt{\frac{(a-c)(u-d)}{(c-d)(a-u)}}$, $r = \sqrt{\frac{(a-b)(c-d)}{(a-c)(b-d)}}$.

(!! так вот оказывается, где вылазят эл интегралы!!! чет совсем в матане и спецфункциях плохая к ним подготовка.)

Положив $a = \nu, b = \mu, c = 1, d = 0$, получим

$$G_4(\theta, \mu, \nu) = \frac{1}{\sqrt{\mu(\nu-1)}}\left[\nu\Pi\left(\beta, \frac{1}{1-\nu}, r\right) - (\nu-1)F(\beta, r)\right],$$

и $\beta = \arcsin\sqrt{\frac{(\nu-1)\sin^2\theta}{\nu-\sin^2\theta}}$, $r = \sqrt{\frac{\nu-\mu}{\mu(\nu-1)}}$.

При $\theta = \pi/2$ имеем $\beta = \pi/2$. Тогда

$$G_4\left(\frac{\pi}{2}, \mu, \nu\right) = \frac{1}{\sqrt{\mu(\nu-1)}}\left[\nu\Pi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{1-\nu}, r\right) - (\nu-1)K(r)\right].$$

7. Рассмотрим выражение $\sigma = \cos^2\theta\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}$. Домножив и поделив его на $\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}$, имеем

$$\sigma = \frac{\cos^2\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} - \frac{k^2\cos^2\theta\sin^2\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}.$$

Используя (2.294), преобразуем второе слагаемое

$$-\frac{k^2\cos^2\theta\sin^2\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \cos\theta\sin\theta\frac{d^2E}{d\theta^2} = \frac{d\left(\cos\theta\sin\theta\frac{dE}{d\theta}\right)}{d\theta} - \left(2\cos^2\theta-1\right)\frac{dE}{d\theta} =$$
$$= \frac{d\left(\cos\theta\sin\theta\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\right)}{d\theta} - 2\sigma + \frac{dE}{d\theta}.$$

Следовательно,

$$3\sigma = \frac{\cos^2\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} + \frac{d\left(\cos\theta\sin\theta\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\right)}{d\theta} + \frac{dE}{d\theta}.$$

Отсюда с учетом $G_2$ (????) находим

$$G_3(\theta,k) \equiv \int\limits_0^\theta \cos^2\theta\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}d\theta =$$
$$= \frac{1}{3}\cos\theta\sin\theta\cdot\sqrt{1-k^2\sin^2\theta} + \frac{1+k^2}{3k^2}E(\theta,k) - \frac{1-k^2}{3k^2}F(\theta,k).$$

$$G_5(\theta,\mu,\nu)\Big|_{\nu>\mu>1} := \int\limits_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\mu-\sin^2\theta}\sqrt{\nu-\sin^2\theta}} \overset{\sin^2\theta=u}{=} \int\limits_0^u \frac{dx}{2\sqrt{(1-x)x(\mu-x)(\nu-x)}}.$$

$$\int\limits_d^u \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(c-x))(x-d)}} = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}F(\beta,r),$$

$a>b>c\geqslant u>d$, а $\beta$ и $r$ находятся из (2.299). Положив $a=\nu, b=\mu$, $c=1, d=0$, получим

$$G_5(\theta,\mu,\nu) = \frac{1}{\sqrt{\mu(\nu-1)}}F(\beta,r)$$

$\beta$ и $r$ находятся из (2.301).

9. Пусть $\nu>\mu>1$. Рассмотрим функцию

$$G_6(\theta,\mu,\nu) \equiv \int\limits_0^\theta \frac{\sin^2\theta d\theta}{\sqrt{\mu-\sin^2\theta}\sqrt{\nu-\sin^2\theta}}.$$

Заметим, что $G_6(\theta,\mu,\nu) = G_5(\theta,\mu,\nu) - G_4(\theta,\mu,\nu)$, поэтому

$$G_6(\theta,\mu,\nu) = \frac{1}{\sqrt{\mu(\nu-1)}}\left[F(\beta,r) - \Pi\left(\beta,\frac{1}{1-\nu},r\right)\right],$$

$\beta$ и $r$ находятся из (2.301).

### Физические применения эллиптических интегралов

(важный абзац про применения, где они нужны??)

**Эллиптический интеграл 1 рода в двух словах**

Эллиптический интеграл 1 рода есть

$$F(k)=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}}$$

- так называемый полный эллиптической интеграл первого рода. При $\sin(\varphi_0/2)\approx\varphi_0/2\ll 1$ (малые колебания) разложение функции $K(k)$ дает

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{1}{16}\varphi_0^2+...\right)$$

(?? что еще нужно про него знать?)

Встречается он в задаче про период колебания математического маятника.

и еще где?

**эллиптический интеграл 2 рода**

тут хз.

**Типичные математические преобразования для прихода к эллиптическим интегралам**

что-то там нужно заменять как синус, пока что не отработал.

**О применениях эллиптических интегралов**

(в пер действие-угол встречаются, но я еще не оттренировал это, просто видел, что есть, потом прописывать буду.)

При построении переменных действие-угол решение может выражаться в специальных функциях, называемых эллиптическими интегралами.

Но кст рил, в маятниках, задаче Кеплера и особено в пер действие-угол, больше особо не замечал применений.

**примеры применения**

КдФ (??? не усвоил это???)

Механика (?? тоже пока не вижу это??)

**Определение в терминах тета-функций**

Эллиптический модуль $k$ равен $k=\left(\frac{\vartheta_{10}}{\vartheta}\right)^2$. Полагая $u=\pi\vartheta^2 z$, получим

$$\mathrm{sn}(u;k)=-\frac{\vartheta_{\vartheta_{11}}(z;\tau)}{\vartheta_{10}\vartheta_{01}(z;\tau)}$$

(мб удалю, не нужно это было пока никогда)

# Part II
# Theory of Typical Special Functions

### 1.3.5 Функции Бесселя

**Теория**

Решение волнового уравнения можно разложить по плоским волнам, зави си мость поля от координат в плоской волне определяется фактором $\exp(i\boldsymbol{kr})$, где $\boldsymbol{k}$ - волновой вектор, а $\boldsymbol{r}$ - радиус-вектор. В двумерном случае $\boldsymbol{r} = (x, y)$. Часто удобным бывает решать задачи в полярной системе координат $r, \varphi$, где $r$ - расстояние от начала отсчета до точки наблюдения, а $\varphi$ - полярный угол. При соответствующем выборе начала отсчета полярного угла $\varphi$ скалярное произведение $\boldsymbol{kr} = rk\sin\varphi$. Функции Бесселя являются коэффициентами р азложения $\exp(i\boldsymbol{kr})$ в ряд Фурье по угловым гармоникам:

$$\exp(iz\sin\varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(z)\exp(in\varphi)$$

где $z = kr$. Графики нескольких первых функций Бесселя приведены на рисунке 3.8. Добавляя $\pi$ к $\varphi$, находим

$$\exp(-iz\sin\varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n J_n(z)\exp(in\varphi)$$

Сравнивая это выражение с прямым разложением

$$\exp(-iz\sin\varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_{-n}(z)\exp(in\varphi)$$

мы заключаем, что $J_{-n} = (-1)^n J_n$. Подставляя в выражение (3.20)$t = e^{i\varphi}$, находим ряд Лорана по $t$

$$\exp\left[\frac{z}{2}(t-1/t)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z)t^n$$

$$\exp\left[\frac{z}{2}(t-1/t)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z)t^n$$

Здесь $t$ может быть произвольным комплексным числом. Дифференцируем соотношение (3.21) по $z$, что дает

$$\frac{1}{2}(t-1/t)\exp\left[\frac{z}{2}(t-1/t)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \partial_z J_n(z)t^n$$

Подставляя здесь вместо экспоненты разложение (3.21) и собирая коэффициенты при степенях $t$, находим

$$\frac{d}{dz}J_n(z) = \frac{1}{2}\left[J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)\right].$$

Дифференцируем соотношение (3.21) по $t$, что дает

$$\frac{z}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\exp\left[\frac{z}{2}(t-1/t)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} nJ_n(z)t^{n-1}.$$

Подставляя здесь в место экспоненты разложение (3.21) и собирая коэффициенты при степенях $t$, находим

$$\frac{2n}{z}J_n(z) = J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z).$$

Комбинируя (3.22) и (3.23), находим следующие рекуррентные соотношения $\frac{d}{dz}(z^n J_n) = z^n J_{n-1}$, $\quad J_n' + \frac{n}{z}J_n = J_{n-1}$, $\frac{d}{dz}\frac{J_n}{z^n} = -\frac{J_{n+1}}{z^n}$, $\quad J_n' - \frac{n}{z}J_n = -J_{n+1}$. В частности $dJ_0/dz = -J_1$. Рекуррентное соотношение (3.24) можно переписать в следующем виде

$$z^{-2n+1}\frac{d}{dz}\left[z^n J_n(z)\right] = z^{-n+1}J_{n-1}(z).$$

Дифференцируя это соотношение по $z$ и используя для преобразования правой части рекуррентное соотношение (3.25), находим замкнутое уравнение на $J_n$

$$\frac{d^2}{dz^2}J_n + \frac{1}{z}\frac{d}{dz}J_n + J_n - \frac{n^2}{z^2}J_n = 0,$$

которое называется уравнением Бесселя. Отметим, что мы снова сталкиваемся с оператором Штурма- Лиувилля (2.6). Рассмотрим случай малых $z, z \ll 1$. В этом случае третьим слагаемым в уравнении (3.26) можно пренебречь и мы приходим к уравнению

$$\frac{d^2}{dz^2}g + \frac{1}{z}\frac{d}{dz}g - \frac{n^2}{z^2}g = 0,$$

которое имеет степенные решения $g_1 = z^n$ и $g_2 = z^{-n}$. Обратим внимание на причину, по которой уравнение (3.27) имеет степенные решения, и которая заключается в том, что при преобразовании $z \to Az$, где $A$ - произвольный фактор, все три слагаемых в уравнении (3.27) преобр азуются одинаковым образом, то есть ур авнение переходит в себя. Это означает, что существуют решения уравнения (3.27), которые при преобразовании $z \to Az$ переходят в себя с точностью до множителя, именно этим свойством обладают степенные решения. Поскольку уравнение Бесселя (3.26) не обладает указанным свойством симметрии уравнения (3.27), его решение не может быть степенным. Тем не менее решения $g_1 = z^n$ и $g_2 = z^{-n}$ определяют поведение произвольного решения уравнения Бесселя (3.26) при малых $z$. Обр атим внимание на то, что при $n > 0$ решение $g_2$ сингулярно в нуле, то есть стремится к бесконечности при

$z \to 0$. Поэтому, если функция $g$ регулярна в нуле, то ее поведение определяется $g_1$, то есть $g \propto z^n$ при малых $z$. Это поведение с точностью до множителя определяет решение уравнения Бесселя (3.26). Такими решениями являются функции Бесселя $J_n(z)$, первый член разложения которой по $z$ определяется (3.29).

Заметим, что при $n = 0$ оба решения уравнения (3.27), $g_1 = z^n$ и $g_2 = z^{-n}$, совпадают между собой, то есть, как говорят, имеет место вырождение. Чтобы разобраться с этим случаем, следует вернуться к уравнению (3.27), в котором надо положить $n = 0$. Это уравнение является уравнением первого порядка для $dg/dz$, решением которого, очевидно, является $dg/dz = C_1/z$, где $C_1$ - произвольная константа. Интегрируя это уравнение дальше, мы находим общее решение $g = C_2 + C_1 \ln z$, где $C_2$ - вторая произвольная константа. (Отметим, что возникновение логарифма типично для вырожденных случаев.) Таким образом, и при $n = 0$ имеется два решения уравнения (3.27), одно из которых (константа) регулярно в нуле, а второе (логарифм) сингулярно. Решение уравнения (3.27) при $n = 0$, которое является регулярным в нуле, пропорционально $J_0(z)$.

Выписывая обратное преобразование Фурье к (3.20), находим следующее представление функций Бесселя

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \tfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} d\theta \exp(iz\sin\theta - in\theta) \\ &= \tfrac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} d\theta \cos(z\sin\theta - n\theta) \end{aligned}$$

которое называется представлением Парсеваля. При получении второго равен ства в (3.28) мы воспользовались тем, что мнимая часть первого интеграла равна нулю из-за того, что мнимая часть $\exp(iz\sin\theta - in\theta)$ антисимметрична по $\theta$, и что косинус является четной функцией. Отметим, что представление (3.28) автоматически приводит к соотношению $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$.

Таким образом, функция $J_n(qx)$ является собственной функцией дифференциального оператора (3.33), который относится к типу операторов Штурма-Лиувилля (2.6), с собственным значением $-q^2$ . условие ортогональности (2.68) с весом $\rho = x$ для разных $q$. В данном случае речь идет о непрерывном спектре ($q$ может принимать непрерывный ряд значений), поэтому функции должны быть нормированы на $\delta$-функцию. Соответствующее соотношение имеет вид

$$\int\limits_0^\infty dx x J_n(kx) J_n(qx) = k^{-1}\delta(k-q),$$

где $k > 0, q > 0$. Приведем доказательство соотношения (3.34). Вклад значениях аргумента, поэтому в интеграле (3.34) мы можем использовать асимптотическое выражение (3.31). В результате находим

$$\int\limits_0^\infty dx x J_n(kx) J_n(qx) \to \int dx \frac{2}{\pi\sqrt{kq}} \cos(kx)\cos(qx).$$

Принимая во внимание соотношение

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dz \cos(kz)\cos(qz) = \pi\delta(k-q),$$

где $q$ и $k$ считаются положительными, и учитывая, что интеграл по $x$ идет только по положительным значениям, мы и приходим к соотношению (3.34).

Ряд (3.30) абсолютно сходится при всех действительных $z$, поскольку отношение коэффициентов при степенях $(z/2)^{n+2m+2}$ и $(z/2)^{n+2m}$ равно $-[(m+2)(m+1)(n+m+2)(n+m+1)]^{-1}$, то есть стремится к нулю с ростом m. Таким образом, ряд (3.30) определяет функцию Бесселя при всех действительных $z$. Более того, он определяет и функцию комплексного переменного, которая получается аналитическим продолжением $J_n(z)$ с действительных $z$. Поскольку ряд (3.30) является абсолютно сходящимся, то функция $J_n(z)$ не имеет особенностей на всей плоскости комплексного переменного $z$. В то же время бесконечность является существенной особой точкой функции Бесселя $J_n(z)$.

Соотношение (3.28) позволяет найти асимптотическое поведение функций Бесселя при больших значениях $z$. В этом случае работает приближение стационарной фазы, смотри раздел 3.7.2. Положение точки стационарной фазы получается из условия равенства нулю производной аргумента косинуса по $\theta$ в выражении (3.28), что дает $z\cos\theta_0 = n$. Таким образом, в силу большого значения $z$ стационарная фаза близка к $\pi/2$ (что предполагает неравенство $z \gg n$). Используя выражение для приближения стационарной фазы (3.102), находим

$$J_n(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Таким образом, $J_n(z)$ осциллирует с амплитудой, которая стремится к нулю при $z \to \infty$.

Раскладывая правую часть соотношения (3.28) по $z$, мы заключаем что при $n > 0$ первый член разложения $J_n(z)$ по $z$ равен

$$\frac{z^n}{2\pi n!}\int_{-\pi}^{+\pi} d\theta (i\sin\theta)^n \exp(in\theta) = \frac{z^n}{2^n n!},$$

в соответствии с анализом, проведенным при малых $z$. Следующие члены разложения функции Бесселя по $z$ можно найти из того же выражения (3.28). В результате мы получаем следующий ряд Тейлора для функций Бесселя

$$J_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m}$$

Отметим, что это ряд по целым степеням $z$, который содержит только четные или только нечетные степени $z$, в зависимости от четности $n$.

Изучим разложение по функциям Бесселя на конечном интервале. Для этого нам понадобится ряд вспомогательных соотношений. Из (3.32, 3.33) следует

$$\begin{aligned} &J_n(qx)\tfrac{d^2}{dx^2}J_n(kx) + J_n(qx)\tfrac{1}{x}\tfrac{d}{dx}J_n(kx) \\ &-J_n(kx)\tfrac{d^2}{dx^2}J_n(qx) - J_n(kx)\tfrac{1}{x}\tfrac{d}{dx}J_n(qx) \\ &= \left(q^2-k^2\right) J_n(qx)J_n(kx). \end{aligned}$$

Интегрируя это соотношение с весом $x$ на интервале $0 < x < z$, находим

$$\begin{aligned} &J_n(qz)kzJ_n'(kz) - J_n(kz)qzJ_n'(qz) \\ &= \left(q^2-k^2\right)\int_0^z dx x J_n(qx)J_n(kx) \end{aligned}$$

Используя рекуррентное соотношение (3.25), находим

$$\begin{aligned} &\int_0^z dx x J_n(qx)J_n(kx) \\ &= \frac{J_n(kz)qzJ_{n+1}(qz) - J_n(qz)kzJ_{n+1}(kz)}{q^2-k^2}. \end{aligned}$$

Устремляя здесь $k$ к $q$ и раскрывая получившуюся неопределенность по правилу Лопиталя, находим

$$\int_0^z dx x \left[J_n(kx)\right]^2 = \frac{z^2}{2}\left(J_{n+1}^2 + J_n^2\right) - \frac{nz}{k}J_{n+1}J_n,$$

где аргументы функций Бесселя равны $kz$, и мы и спользовали рекуррентные соотношения (3.24, 3.25)

Р ассмотрим теперь задачу на собственные значения (3.32) на интервале $0 < x < 1$ на классе функций, обращающихся в ноль на конце интервала, при $x = 1$. Это условие приводит к дискретному набору собственных чисел $q = \gamma_k$, для которых $J_n(\gamma_k) = 0$. Набор $\gamma_k$ зависит от индекса функции Бесселя $n$. Величины $\gamma_k$ неограниченно растут с увеличением номера $k$.

### 1.3.6 Гамма-функция

**Интегральное определение**

Если вещественная часть комплексного числа $z$ положительна, то гамма-функция определяется через абсолютно сходящийся интеграл

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{Re}(z) > 0$$

Это определение было получено Лежандром из оригинального определения Эйлера (1730 г.)

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^1 (-\ln x)^{z-1} dx$$

через замену переменной $x = e^{-t}$, и на сегодняшний день именно определение Лежандра известно как классическое определение Гамма-функции. Интегрируя по частям классическое определение, легко видеть, что $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Для приближённого вычисления значений гамма-фуункции удобнее третья формула, также полученная из определения Эйлера путём применения равенства $\Gamma(z) = \Gamma(z+1)/z$ и замены переменной $x = y^2$:

$$\Gamma(z) = \frac{2^{z+1}}{z} \int\limits_0^1 y(-\ln y)^z dy.$$

Интеграл в этой формуле сходится при $\mathrm{Re}(z) > -1$, хотя она обычно используется для положительных вещественных значений аргумента (предпочтительные значения - вблизи 1). В случае вещественного аргумента $z > 0$ подынтегральная функция имеет единственную особую точку - устранимый разрыв при $y = 0$, и если доопределить её в этой точке значением 0, она станет непрерывной на всём отрезке $[0;1]$. Таким образом, интеграл является собственным, что упрощает численное интегрирование. Существует непосредственное аналитическое продолжение исходной формулы на всю комплексную плоскость, кроме целых чисел, называемое интегралом Римана - Ханкеля:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{e^{i2\pi z} - 1} \int\limits_L t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}.$$

Определение по Гауссу

Оно верно для всех комплексных z, за исключением 0 и отрицательных целых чисел

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)! n^z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)}, \quad z \in \mathbb{C} \backslash \{0, -1, -2, ...\}.$$

Определение по Эйлеру

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^z}{1 + \frac{z}{n}}, \quad z \in \mathbb{C} \backslash \{0, -1, -2, ...\}.$$

Определение по Вейерштрассу

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n}, \quad z \in \mathbb{C} \backslash \{0, -1, -2, ...\}.$$

где $\gamma = \lim_{n\to\infty} \left( \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right) \approx 0,57722$ - постоянная Эйлера - Маскерони[1].

Примечание: иногда используется альтернативная, так называемая пи-функция, которая является обобщением факториала и связана с гамма-функцией соотношением $\Pi(z) = \Gamma(z+1)$. Именно этой функцией (а не Γ-функцией) пользовались Гаусс, Риман, и многие другие немецкие математики XIX века.

Если $z = n$ - натуральное число, то

$$\Gamma(n+1) = n\,!.$$

Основное свойство гамма-функции - это её рекуррентное уравнение

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

которое при фиксированном начальном условии единственным образом определяет логарифмически выпуклое решение.

Для гамма-функции справедлива формула дополнения Эйлера:

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Также справедлива и формула умножения Гаусса:

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right) = n^{\frac{1}{2}-nz}\cdot(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\Gamma(nz),$$

Частный случай этой формулы при n = 2 был получен Лежандром:

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z).$$

Гамма-функция не имеет нулей на всей комплексной плоскости. $\Gamma(z)$ является мероморфной на комплексной плоскости и имеющей простые полюсы в точках $z = 0, -1, -2, -3, ...$[1] Гамма-функция имеет полюс первого порядка в $z = -n$ для любого натурального $n$ и нуля; вычет в этой точке задаётся так:

$$\mathrm{Res}_{z=-n}\,\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Полезное свойство, которое может быть получено из предельного определения:

$$\overline{\Gamma(z)} = \Gamma(\bar{z}).$$

Гамма-функция дифференцируема бесконечное число раз, и $\Gamma'(x) = \psi(x)\Gamma(x)$, где $\psi(x)$, часто называют «пси-функцией» или дигамма-суункцией. Гамма-функция и бета-функция связаны следующим соотношением:

$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

**О применениях**

(предполагаю, что тут о многом сказать нужно)

### Логарифм Гамма-функции

По целому ряду причин наряду с гамма-функцией часто рассматривают и логарифм гамма-функции — первообразную дигамма-функции. Для него справедливы следующие интегральные представления:

$$\ln\Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{1}{2}\ln 2\pi + \int\limits_0^\infty \left[\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right]\frac{e^{-xz}}{x}dx, \quad \operatorname{Re} z > 0$$

$$\ln\Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{1}{2}\ln 2\pi + 2\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(x/z)}{e^{2\pi x} - 1}dx, \quad \operatorname{Re} z > 0$$

данные Жаком Бине в 1839-м году (эти формулы ещё часто называют первой и второй формулой Бине соответственно для логарифма гамма-функции) [3]. Несколько отличные интегральные формулы для логарисрма гамма-функции также появлялись в работах Мальмстена, Лерха и некоторых других. Так, Мальмстен получил формулу, схожую с первой формулой Бине $e$[3]

$$\ln\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty \left[z - 1 - \frac{1 - e^{-(z-1)x}}{1 - e^{-x}}\right]\frac{e^{-x}}{x}dx, \quad \operatorname{Re} z > 0$$

а Лерх показывает, что все интегралы вида

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{2\pi x}\cos\varphi - 1}{e^{4\pi x} - 2e^{2\pi x}\cos\varphi + 1}\operatorname{arctg}\frac{u}{x}dx, \quad 0 < u \leqslant 1, \quad 0 < \varphi < 2\pi u$$

также сводятся к логарифмам гамма-функции. В частности, формула, аналогичная второй формуле Бине с «сопряжённым» знаменателем, имеет следующий вид:

$$\ln\Gamma(z) = -\left(z - \frac{1}{2}\right)\cdot\left\{1 - \ln\left(z - \frac{1}{2}\right)\right\} + \frac{1}{2}\ln 2\pi - 2\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}\left[x/\left(z - \frac{1}{2}\right)\right]}{e^{2\pi x} + 1}dx, \quad \operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$$

(см. упр. 40 B[4]) Кроме того, Мальмстен также получил ряд интегральных формул для логарифма гамма-функции, содержащих гиперболические функции с логарифмом в подынтегральном выражении (или, что то же, логарифм логарифма с полиномами). В частности,

$$\ln\Gamma(z) = \frac{1}{2}\ln\pi - \frac{1}{2}\ln\sin\pi z - \frac{2z-1}{2}\ln 2\pi - \frac{\sin 2\pi z}{2\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\ln x}{\operatorname{ch} x - \cos 2\pi z}dx, \quad 0 < \operatorname{Re} z < 1$$

### О решении задач на Гамма-функцию (!??!???!?)

(предполагаю, что тут о многом сказать нужно)

### Вычисление интегралов

Важным применением Гамма функции служит сведение к ней интегралов следующего вида, где , $\alpha, \beta$ - постоянные параметры

$$\int\limits_0^\infty x^\alpha \exp\left(-ax^\beta\right)dx = a^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}\cdot\frac{1}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)$$

Доказательство После вынесения параметра:

$$\int\limits_0^\infty x^\alpha \exp\left(-ax^\beta\right) dx = a^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \int\limits_0^\infty \left(a^{1/\beta}x\right)^\alpha \exp\left[-\left(a^{1/\beta}x\right)^\beta\right] d\left(a^{1/\beta}x\right)$$

Внесения дифференциала:

$$a^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \int\limits_0^\infty \kappa^\alpha \exp\left(-\kappa^\beta\right) d\kappa = \frac{a^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}}{\beta} \int\limits_0^\infty \kappa^{\alpha+1-\beta} \exp\left(-\kappa^\beta\right) d\kappa^\beta$$

И замены переменной:

$$\frac{a^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}}{\beta} \int\limits_0^\infty \varkappa^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1} \exp(-\varkappa) d\varkappa = a^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \cdot \frac{1}{\beta} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)$$

В частности, для широко встречающихся в приложениях физики интегралов Гауссова типа:

$$\int\limits_0^\infty x^\alpha \exp\left(-x^2/a^2\right) dx = a^{\alpha+1} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$$

И Эйлеровых интегралов:

$$\int\limits_0^\infty x^\alpha \exp(-x/a) dx = a^{\alpha+1} \cdot \Gamma(\alpha+1)$$

**Свойства по ПТФ**

Правая часть соотношения (3.3) определена и для $z$ с отрицательной действительной частью, то есть осуществляет аналитическое продолжение $\Gamma(z)$ на эту область переменной $z$. Контурный интеграл в (3.3) не имеет особенностей в плоскости $z$. Следовательно, особенности функции $\Gamma(z)$ определяются разностью 1 - $\exp(2\pi i z)$, которая обращается в ноль при целых (как положительных, так и отрицательныгх) z. При положительных целых $z$ в ноль обращается также и контурный интеграл, то есть мы приходим к неопределенности, которая должна раскрываться по правилу Лопиталя. В любом случае, $\Gamma(z)$ не имеет особенностей при целых положительных $z$, в соответствии с приведенным выше анализом. При целых отрицательных $z$ контурный интеграл в ноль не обращается, и мы приходим к выводу, что в этих точках $\Gamma(z)$ имеет простые полюса.

Найдем вычеты функции $(z)$ в полюсах $z = 0, -1, -2, ...$. При $z = -n$ ($n$ - целое неотрицательное) контурный интеграл в (3.3) сводится к вычету в нуле, поскольку значения подынтегральной функции на берегах разреза совпадают между собой. Вычисляя этот вычет, находим

$$\int\limits_C dt t^{-n-1} e^{-t} = -2\pi i (-1)^n (n!)^{-1}.$$

Таким образом

$$\text{res}\ \Gamma(-n) = (-1)^n (n!)^{-1}.$$

График зависи мости Гамма-функции от своего (действительного) аргумента приведен на рисунке 3.2. В точках $x = -n$ функция $\Gamma$ стремится к бесконечности. Можно найти асимптотическое выражение Гамма-функции $\Gamma(z)$ при больших положительных значениях $z$, воспользовавшись методом перевала, смотри раздел 3.7.2. Для этого в интеграле (3.1) произведем замену $t \to tz$, которая приводит его к виду

$$\Gamma(z) = z^z \int\limits_0^\infty \frac{dt}{t} \exp[z(\ln t - t)],$$

то есть к виду (3.98). Стоящая в экспоненте функция $\ln t - t$ достигает максимума в точке $t = 1$. Используя теперь приближение (3.99), находим

$$\Gamma(z) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{z}} z^z \exp(-z).$$

Это соотношение дает приближенное (работающее при больших $n$) выражение для факториала $n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$, которое называется формулой Стирлинга. Отметим, что асимптотика (3.7) справедлива и для комплексных $z$ при условии большого положительного значения действительной части $z$.

Через Гамма-функции выражается так называемый интеграл Эйлера первого рода:

$$B(\alpha, \beta) = \int\limits_0^1 dx x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

где действительные части $\alpha$ и $\beta$ предполагаются положительными. Для доказатель ства ооотношения (3.8) рассмотрим немного более общий интеграл

$$s^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta) = \int\limits_0^s dx x^{\alpha-1}(s-x)^{\beta-1}.$$

Интегрируя обе части этого соотношения по  с весом $e^{-s}$, мы получаем

$$\Gamma(\alpha+\beta) B(\alpha, \beta) = \int\limits_0^\infty ds e^{-s} \int\limits_0^s dx x^{\alpha-1}(s-x)^{\beta-1}.$$

Замена переменных $s = x + y$ сводит правую часть к произведению интегралов по $x$ по $y$, которые дают произведение $(\alpha)\Gamma(\beta)$. Таким образом, мы приходим к соотношению (3.8).

### 1.3.7 Применения Гамма функции в КТП

(тут много всего может быть, очень сильно применяется.)

### 1.3.8 Бета-функция

**Суть**

### 1.3.9 Гипергеометрическая функция (!??!!?)

**Суть**

В общем виде гипергеометрическая функция может зависеть от цифр $p, q$ и многих параметров и имеет вид:

$$\begin{aligned} {}_pF_q\left(a_1, ..., a_p; b_1, ..., b_q; z\right) &= 1 + \frac{a_1 ... a_p}{b_1 ... b_q} z + \frac{a_1\left(a_1+1\right) a_2\left(a_2+1\right) ... a_p\left(a_p+1\right)}{b_1\left(b_1+1\right) b_2\left(b_2+1\right) \cdots b_q\left(b_q+1\right)} \frac{z^2}{2} + \cdots = \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{\left(a_1\right)^{(n)} ... \left(a_p\right)^{(n)}}{\left(b_1\right)^{(n)} ... \left(b_p\right)^{(n)}} \frac{z^n}{n!} \end{aligned}$$

Частные важные случаи это ${}_2F_1$ и ${}_1F_1$

Поговорим про ${}_2F_1$. Альтернативно её можно определить как регулярное в нуле решение следующего дифференциального уравнения:

$$z(1-z)f''(z) + (c-(a+b+1)z)f'(z) - abf(z) = 0, \quad f(0) = 1$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

(место убедиться в эквивалентности определений)

Можно убедиться, что второе линейно-независимое решение этого уравнения тоже можно выразить через гипергеометрическую функцию. Общее решение имеет следующий вид (при $c \neq 1$)

$$f(z) = C_1 {}_2F_1(a, b; c; z) + C_2 z^{1-c} {}_2F_1(b-c+1, a-c+1; 2-c; z)$$

К уравнению такого вида можно свести очень большой класс дифференциальных уравнений. В действительности, имеется классификация линейных дифференциальных уравнений с дробно-рациональными коэффициентами по их особенностям в комплексной плоскости (особенностями уравнения, записанного в канонической форме $f^{(n)}(z) + p_1(z)f^{(n-1)}(z) + \cdots + p_n(z)f(z) = 0$, называются особенности функций $p_k(z)$ - точки, где она обрапается в бесконечность ) - в частности, у гипергеометрической функции их ровно три: $z = \{0, 1, \infty\}$; и более или менее любое уравнение с тремя особенностями можно свести к гипергеометрическому виду.

Продолжая обсуждение свойств этой функции, отметим, что она не определена при целых отрицательных $c$ (знаменатель зануляется). Радиус сходимости ряда равен единице, и в действительности у гипергеометрической функции в точке $z = 1$ имеется особенность. Единственное исключение из этого правила - это когда либо $a$, либо $b$ - отрицательное целое число: в таком случае, ряд обраывается и превращается в полином конечной степени, имеющий, естественно, бесконечный радиус сходимости. Последнее замечание будет важно при поиске связанных состояний.

**свойства гипергеометрической функции**

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} {}_2F_1(a, b, a+b+1-c, 1-z) + \\ + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1-z)^{c-a-b} {}_2F_1(c-a, c-b; c+1-a-b; 1-z) \end{aligned}$$

**Вырожденная гипергеометрическая функция ${}_1F_1(a; b; z)$**

На прошлом семинаре обсуждался общий класс гипергеометрических функций $pF_q$; однако для приложений наиболее часто встречаются именно функции ${}_2F_1$ (обсуждённая на прошлом семинаре) и ${}_1F_1$. Она, естественно, тоже определяется через гипергеометрический ряд [5]:

$${}_1F_1(a; b; z) = 1 + \frac{a}{b}z + \frac{a(a+1)}{b(b+1)}\frac{z^2}{2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{(n)}}{b^{(n)}} \frac{z^n}{n!}$$

Кроме того, альтернативное её определение - через решение дифференциального уравнения следующего вида:

$$zf''(z) + (b-z)f'(z) - af(z) = 0, \quad f(0) = 1$$

тоже выражается через гипергеометрическую функцию [6] : $f^{(2)}(z) = z^{1-b}{}_1F_1(a-b+1; 2-b; z)$. Как и с обычной гипергеометрической функцией, несложно видеть, что при целых отрицательных $b=-n$ функция не определена, а при целых отрицательных $a=-n$ она является конечным полиномом степени $n$.

В общем случае, отношение соседних коэффициентов разложения в ряд ведёт себя как $1/n$, поэтому радиус сходимости этого ряда - бесконечность (в отличии ${}_2F_1$, где радиус сходимости был единичным).

Асимптотическое поведение на бесконечности следующее:

$$ {}_1F_1(a;b;z) \approx \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} z^{a-b} e^z, \quad z \gg 1 $$

Опять-таки, мы ранее говорили, что всякое уравнение с тремя особенностями сводится к гипергеометрическому виду так и всякое уравнение с коэффициентами, которые представляют собой линейные функции $z$ приводится к Вырожденному гипергеометрическому виду.

**Гипергеометрическое уравнение**

хз какое

**запись других функций через гипергеометрическую**

(википедия)
$(1+x)^n = F(-n, b; b; -x)$
$x^n = F(-n, b; b; 1-x)$
$\frac{1}{x}\ln(1+x) = F(1,1;2;-x)$
$\frac{1}{x}\arcsin(x) = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; x^2\right)$
$e^x = \lim_{n\to\infty} F\left(1, n; 1; \frac{x}{n}\right)$
$\cos x = \lim_{a,b\to\infty} F\left(a, b; \frac{1}{2}; -\frac{x^2}{4ab}\right)$
$\cosh x = \lim_{a,b\to\infty} F\left(a, b; \frac{1}{2}; \frac{x^2}{4ab}\right)$
Полный эллиптический интеграл первого рода:
$K(k) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right)$

### Теория ПТФ

Вырожденная гипергеометрическая функция $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ (confluent hypergeometric function) возникает во многих задачах математической физики. Она является решением вырожденного гипергеометрического уравнения

$$ z\frac{d^2u}{dz^2} + (\gamma - z)\frac{du}{dz} - \alpha u = 0 $$

где $\alpha$ и $\gamma$ - произвольные параметры. Уравнение (3.81) переписывается в виде $u'' + (\gamma/z - 1)u' - (\alpha/z)u = 0$, то есть мы снова сталкиваемся с оператором ШтурмаЛиувилля (2.6). Функция $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ характеризуется

тем, что она аналитична в точке $z=0$ и имеет единичное значение в нуле: $\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$.

Уравнение (3.81) позволяет найти коэффициенты разложения вырожденной гипергеометрической функции $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ в ряд Тейлора около точки $z=0$. Вычисляя последовательно коэффициенты этого разложения из уравнения (3.81) с учетом условия $\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$, мы находим

$$\Phi = 1 + \frac{\alpha}{\gamma}\frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z^2}{2!} + ...$$

с очевидным способом построения коэффициентов ряда. При отрицательных целых $\alpha$ ряд (3.82) обрывается и $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ сводится к полиному. При больших $n$ отношение коэффициентов при степенях $z^n$ и $z^{n-1}$ в разложении (3.82) стремится к $1/n$. Поэтому ряд (3.82) сходится на всей плоскости комплексного переменного, то есть единственной особенностью вырожденной гипергеометрической функции является бесконечность, которая является существенной особой точкой $\Phi(\alpha, \gamma, z)$.

При неотрицательных целых $\alpha$ ряд (3.82) обрьгвается и вырожденная гипергеометрическая функция $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ сводится к полиному. В частности справедливы соотношения

$$H_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \Phi\left(-n, 1/2, x^2\right)$$
$$H_{2n+1}(x) = 2(-1)^n \frac{(2n+1)!}{n!} x\Phi\left(-n, 3/2, x^2\right)$$

которые сводят полиномы Эрмита к вырожденной гипергеометрической функции.

Уравнение (3.81) является дифференциальным уравнением второго порядка и потому имеет два линейно независимых решения, одним из которых является вырожденная гипергеометрическая функция $\Phi(\alpha, \gamma, z)$. Второе независимое решение можно найти, заметив, что если $u$ удовлетворяет уравнению (3.81), то $z^{\gamma-1}u$ также удовлетворяет вырожденному гипергеометрическому уравнению с коэффициентами $\alpha' = \alpha - \gamma + 1$, $\gamma' = 2 - \gamma$. Таким образом, общим решением уравнения (3.81) является

$$u = c_1\Phi(\alpha, \gamma, z) + c_2 z^{1-\gamma}\Phi(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z),$$

где $c_1$ и $c_2$ - произвольные константы. При $\gamma = 1$ оба члена в сумме (3.85) совпадают. Этот случай требует особого рассмотрения, тогда в общем решении возникает дополнительный логарифмический множитель.

Уравнение (3.81) является дифференциальным уравнением, в котором переменная $z$ входит линейно. В этом случае можно найти интегральное представление решения этого уравнения при помощи метода Лапласа, смотри раздел 3.7.1. Составляем функции $P$ и $Q$ в соответствии с выражениями (3.96): $P = \gamma t - \alpha, Q = t(t-1)$, и далее находим $Z = t^{\alpha-1}(t-1)^{\gamma-\alpha-1}$. Таким образом, решение уравнения (3.81) может быть записано в виде контурного интеграла

$$u = \int\limits_C dt e^{tz} t^{\alpha-1}(t-1)^{\gamma-\alpha-1}.$$

Применяя аналогичную процедуру к $z^{\gamma-1}u$, мы находим

$$u = z^{1-\gamma}\int\limits_C dt e^{tz} t^{\alpha-\gamma}(t-1)^{-\alpha}.$$

Производя в этом интеграле замену переменной интегрирования $tz \to t$, мы получаем

$$u = \int\limits_C dt e^{t} t^{\alpha-\gamma}(t-z)^{-\alpha}.$$

Контур $C$ в интеграле (3.86) естественно выбрать так, чтобы он приходил из $-\infty$ и возвращался в $-\infty$ (обходя каким-то образом особенности подынтегрального выражения, имеющиеся при $t = 0$ и $t = z$), тогда произведение $ZQ\exp(t)$ на концах этого контура будет равно нулю.

Интеграл (3.86) не имеет особенностей при $z = 0$, если контур интегрирования "охватывает" обе особенности. Выберем контур $C$, который приходит "снизу" из $-\infty$ огибает особенности "справа" и возвращался в $-\infty$ "сверху", смотри рисунок 3.12. Интеграл по этому контуру должен с точностью до множителя совпадать с вырожденной гипергеометрической функцией $\Phi(\alpha, \gamma, z)$. Мы считаем, что разрезы функций $t^{\alpha-\gamma}$ и $(t-z)^{-\alpha}$ идут в $-\infty$, а значения этих функций при положительном зн ачении переменной положительны. При $z = 0$ контур интегрирования превращается в $C^*$, изображенный на рисунке 3.3, при этом возникает обратная Гамма-функция, смотри (3.10). Вспоминая теперь, что $\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$, находим

$$\Phi(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{2\pi i} \int\limits_C dt e^t t^{\alpha-\gamma} (t-z)^{-\alpha}.$$

При целых отрицательных значениях $\gamma$ ряд (3.82) не определен, так как, начиная с некоторого члена, знаменатель обращается в ноль. Этому соответствует наличие полюса у $\Gamma(\gamma)$ в соотношении (3.87). В то же время сам контурный интеграл в соотношении (3.87) остается конечным и при целых отрицательных значениях $\gamma$. Поэтому $\Phi(\alpha, \gamma, z)$, как функция $\gamma$, имеет простые полюса при $\gamma = 0, -1, -2, ...$ Производя в равенстве (3.87) замену $t \to t + z$, мы находим соотношение

$$\Phi(\alpha, \gamma, z) = e^z \Phi(\gamma - \alpha, \gamma, -z).$$

Дифференцирование по $z$ соотношения (3.87) и интегрирование по частям в контурном интеграле позволяет получить ряд соотношений:

$$\frac{d}{dz}\Phi(\alpha, \gamma, z) = \frac{\alpha}{\gamma}\Phi(\alpha+1, \gamma+1, z),$$
$$\frac{z}{\gamma}\Phi(\alpha+1, \gamma+1, z) =$$
$$\Phi(\alpha+1, \gamma, z) - \Phi(\alpha, \gamma, z),$$
$$\alpha\Phi(\alpha+1, \gamma+1, z) =$$
$$(\alpha-\gamma)\Phi(\alpha, \gamma+1, z) + \gamma\Phi(\alpha, \gamma, z).$$

При больших положительных $z$ основной вклад в контурный интеграл в (3.87) определяется окрестностью особой точки $t = z$. Делая замену переменных $t = z + \zeta$ и пренебрегая зависимостью от $\zeta$ в $t^{\alpha-\gamma}$, мы находим

$$\Phi(\alpha, \gamma, z) \approx \frac{\Gamma(\gamma)}{2\pi i} e^z z^{\alpha-\gamma} \int\limits_{C^*} d\zeta e^\zeta \zeta^{-\alpha},$$

где контур $C^*$ изображен на рисунке 3.3. Этот контурный интеграл сводится к обратной Гамма-функции, и мы получаем окончательно

$$\Phi(\alpha, \gamma, z) \approx \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha-\gamma}$$

$$\Phi(\alpha, \gamma, z) \approx \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha-\gamma}$$

Асимптотическое выражение (3.92) справедливо и в комплексной области для $z$ с большой положительной действительной частью.

## 1.4 Спецфункции по Ландау

### 1.4.1 Функция Эйри

**b. Функция Эйри by Landau**

Уравнение

$$y'' - xy = 0$$

тоже относится к типу Лапласа. Следуя общему методу, составляем функции

$$P = t^2, \quad Q = -1, \quad Z = -\exp\left(-t^3/3\right), \quad V = \exp\left(xt - t^3/3\right),$$

так что решение может быть представлено в виде

$$y(x) = \text{ const } \cdot \int\limits_C \exp\left(xt - t^3/3\right) dt,$$

причем путь интегрирования $C$ должен быть выбран так, чтобы на обоих его концах функция $V$ обращалась в нуль. Для этого

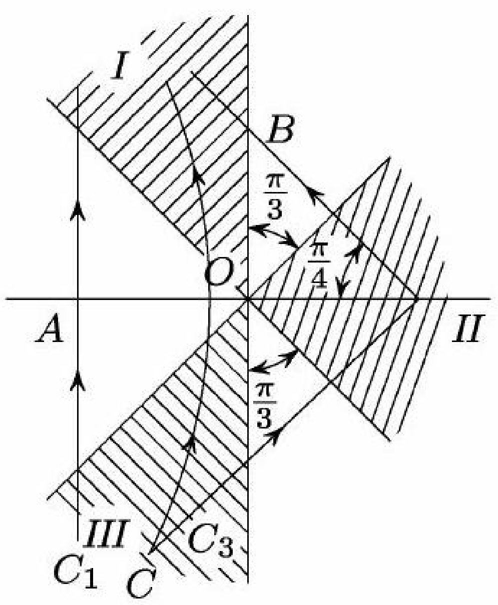



Рис. 54 эти концы должны уходить на бесконечность в тех областях плоскости комплексного переменного $t$, в которых $\mathrm{Re}\,(t^3) >> 0$ (на рис. 54 эти области заштрихованы).

Решение, конечное при всех $x$, получим, выбрав путь $C$ так, как это изображено на рисунке. Он может быть смещен произвольным образом, при условии только, чтобы его концы уходили на бесконечность в тех же двух заштрихованных секторах ($I$ и III на рис. 54). Заметим, что, выбрав путь, проходящий, например, в секторах III и II, мы получили бы решение, обращающееся при $x \to \infty$ в бесконечность.

Смещая путь $C$ так, чтобы он совпал с мнимой осью, получаем функцию (b.2) в виде (делаем подстановку $t = iu$)

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty \cos\left(ux + \frac{u^3}{3}\right) du.$$

Постоянную в (b.2) мы положили равной $-i/2\sqrt{\pi}$ и обозначили определенную таким образом функцию через $\Phi(x)$; ее называют функиией Эйри.

Асимптотическое выражение для $\Phi(x)$ при больших значениях $x$ можно получить, вычисляя интеграл (b.2) методом перевала. При $x > 0$ показатель степени в подынтегральном выражении имеет экстремум при $t = \pm\sqrt{x}$, а направление его «наиболее крутого спада» параллельно мнимой оси. Соответственно этому, для получения асимптотического выражения для больших положительных значений $x$ разлагаем показатель по степеням

Мы следуем определению, предложенному В. А. Фоком (см. Г. Д. Яковлева, Таблицы функций Эйри. -М.: Наука, 1969; $\Phi(x)$ - одна из двух введенных Фоком функций, обозначаемая им как $V(x)$). В литературе используется также определение функции Эйри, отличающееся от (b.3) постоянным множителем: $\mathrm{Ai}x = \Phi(x)/\sqrt{\pi}$, так что $\int \mathrm{Ai}\, x dx = 1$. $t + \sqrt{x}$ и интегрируем вдоль прямой $C_1$ (см. рис. 54), параллельной мнимой оси (расстояние $OA = \sqrt{x}$). Делая подстановку $t = -\sqrt{x} + iu$, получаем

$$\Phi(x) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2} - \sqrt{x}u^2\right) du$$

откуда

$$\Phi(x) \approx \frac{1}{2x^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right).$$

Таким образом, при больших положительных $x$ функция $\Phi(x)$ затухает экспоненциально.

Для получения асимптотического выражения при больших отрицательных значениях $x$ замечаем, что при $x < 0$ показатель степени имеет экстремумы при

$$t = i\sqrt{|x|} \quad \text{и} \quad t = -i\sqrt{|x|},$$

а направление наиболее крутого спада в этих точках - соответственно вдоль прямых под углами $\mp\pi/4$ к вещественной оси. Выбирая в качестве пути интегрирования ломаную линию $C_3$ (расстояние $OB = \sqrt{|x|}$), получим после простых преобразований

$$\Phi(x) = \frac{1}{|x|^{1/4}} \sin\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Таким образом, в области больших отрицательных $x$ функция $\Phi(x)$ имеет осциллирующий характер. Укажем, что первый (наибольший) максимум функции $\Phi(x)$ есть $\Phi(-1,02) = 0,95$.

Функция Эйри может быть выражена с помощью бесселевых функций порядка 1/3. Уравнение (b.1), как легко убедиться, имеет решение

$$\sqrt{x} Z_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)$$

где $Z_{1/3}(x)$ - любое решение уравнения Бесселя порядка 1/3. Решение, совпадающее с (b.3), есть

$$\Phi(x) = \frac{\sqrt{\pi x}}{3}\left[I_{-1/3}\left(\tfrac{2}{3}x^{3/2}\right) - I_{1/3}\left(\tfrac{2}{3}x^{3/2}\right)\right] \equiv \sqrt{\frac{x}{3\pi}} K_{1/3}\left(\tfrac{2}{3}x^{3/2}\right) \quad \text{при } x > 0, \qquad \text{(b.6}$$

$$\Phi(x) = \frac{\sqrt{\pi|x|}}{3}\left[J_{-1/3}\left(\tfrac{2}{3}|x|^{3/2}\right) + J_{1/3}\left(\tfrac{2}{3}|x|^{3/2}\right)\right] \quad \text{при } x < 0,$$

где

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix), \quad K_\nu(x) = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\left[I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)\right].$$

С помощью рекуррентных соотношений

$$K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x) = -\frac{2\nu}{x} K_\nu(x),$$
$$2K_\nu(x) = -K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x)$$

легко найти для производной функции Эйри выражение

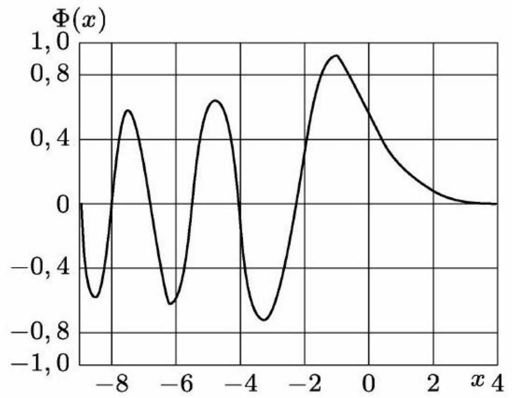



Рис. 55

$$\Phi'(x) = -\frac{x}{\sqrt{3}\pi} K_{2/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)$$
при $x > 0$.
При $x = 0$
$$\Phi(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{3^{2/3}\Gamma(2/3)} = 0,629,$$
$$\Phi'(0) = \frac{3^{1/6}\Gamma(2/3)}{2\sqrt{\pi}} = -0,459.$$

На рис. 55 дан график функции Эйри.

**Определение**

В данном разделе мы анализируем решения уравнения Эйри (Airy) которое возникает в ряде физических приложений. Пожалуй, наиболее важным приложением уравнения Эйри является определение поведения волновых функций (в квантовой механике) вблизи точки поворота, то есть вблизи точки, где энергия частицы сравнивается с потенциалом. Решения уравнения (3.11) демонстрируют ряд универсальных особенностей этого поведения.

Уравнение Эйри (3.11) линейно по переменной $x$. Поэтому его можно эффективно решить методом Лапласа, смотри раздел 3.7.1, где обсуждается общее уравнение (3.93). Приведем здесь логику раздела 3.7.1 для частного случая уравнения (3.11). Запишем решение этого уравнения в виде контурного интеграл

$$Y(x) = \int_C dt Z(t) \exp(xt)$$

Где $C$ - некоторый контур в комплексной плоскости $t$. Мы будем счит ать, что подынтегр альное выражение достаточно быстро стремится к нулю на концах этого контура (которые могут быть и в бесконечности).

Подставим уравнение (3.11) в представление (3.12), используем соотношение $x \exp(xt) = d \exp(xt)/dt$ и производим интегрирование по ч астям по $t$, счит ая граничные члены равными нулю (что обеспечивается быстрым стремлением подынтегрального выражения к нулю на концах контура интегрирования). В результате мы находим уравнение

$$\frac{dZ}{dt} = -t^2 Z,$$

решение которого имеет вид $Z \propto \exp\left(-t^3/3\right)$. Подставляя это выражение в (3.12), находим общее решение уравнения Эйри (3.11)

$$Y(x) \propto \int\limits_C dt \exp\left(xt - t^3/3\right).$$

Контур $C$ в представлении (3.13) должен начин аться и оканчив аться в областях, где подынтегр альное выр ажение в (3.13) стремится к нулю. Очевидно, что для этого контур $C$ должен приходить из бесконечности и уходить в бесконечность. Поскольку поведение $\exp(xt$ - $t^3/3)$ в бесконечности определяется фактором $-t^3$, имеется три сектора, в которых подынтегральное выражение в (3.13) стремится к нулю: $-\pi/6 < \operatorname{Arg} t < \pi/6$, $\pi/2 < \operatorname{Arg} t < 5\pi/6, 7\pi/6 < \operatorname{Arg} t < 3\pi/2$ смотри рисунок 3.4, юкторы I,II,III, Контур $C$ должен начин аться в одном из этих секторов и заканчиваться в другом. Имеется три варианта. Однако получающиеся интегралы линейно связаны между собой, поскольку сумма интегралов по контурам, идущих из сектора I в сектор II, из сектора II в сектор III, и из сектора III в сектор I, равн а, очевидно, нулю. Таким образом, имеется два линейно независи мых решения, что соответствует второму порядк у уравнения Эйри.

Решению, которое остается конечным при $x \to \pm\infty$ соответствует контур, идущий из сектора III в сектор I. Можно выбирать различную форму такого контура (смотри рисунок 3.4), единственное требование к форме контура заключается в том, чтобы $\exp\left(xt - t^3/3\right)$ стремилось к нулю на концах этого контура. Это связано с возможностью деформации контура в области аналитичности подынтегрального выражения, которой в данном случае является вся комплексная плоскость. В частности, можно выбрать контур, идущий вдоль мнимой оси. Введя обозначение $t = iu$, мы сводим этот интеграл к виду

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty du \cos\left(xu + u^3/3\right),$$

где множитель выбран традиционным образом. Введенная (3.14) функция называется функцией Эйри первого рода (или просто функцией Эйри).

Установим асимптотическое поведение функции Эйри при больших значениях $|x|$. При больших отрицательных $x$ в интеграле (3.14) имеется точка стационарной фазы $u = \sqrt{|x|}$, окрестность которой дает основной вклад в интеграл при больших $|x|$.Применяя метод стационарной фазы (смотри раздел 3.7.2), находим, используя выражение (3.102)

$$\mathrm{Ai(x)} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}|x|^{1/4}} \cos\left(-\frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

При больших положительных $x$ стационарная точка в интеграле (3.14) отсутствует. Чтобы найти соответствующую асимптотику, мы должны вернуться на шаг назад:

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-i\infty}^{+i\infty} dt \exp\left(tx - t^3/3\right)$$

Теперь мы должны применить обобщенный метод перевала, смотри раздел 3.7.2. Контур интегрирования должен быть деформирован так, чтобы он проходил через перевальную точку $t = -x^{1/2}$ (смотри вертикальную прямую на рисунке 3.4). Вычисляя интеграл в соответствии с (3.105), находи м

$$\mathrm{Ai(x)} \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right)$$

График зависимости функции Эйри от $x$ приведен на рисунке 3.5. На этом же гр афике красным цветом приведены асимптотики $(3.15, 3.16)$.

В качестве второго решения уравнения Эйри (3.11) выбирают обычно функцию

$$\begin{aligned}\mathrm{Bi}(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty du\,\big[&\exp\left(xu - u^3/3\right)\\ &+ \sin\left(xu + u^3/3\right)\big]\end{aligned}$$

которая называется функцией Эйри второго рода. Выражение для Bi получается, если взять сумму контурных интегралов для контуров, идущих из сектора I в сектор II и из сектора III в сектор II. Выбирая эти интегралы, как идущие сначала вдоль мнимой оси, а затем вдоль действительной оси, мы и приходим к выражению (3.17). Коэффициент в (3.17) традиционен. Сравнение функций йри Ai и Bi проведено на рисунке 3.6.

**Задача**

3.2.1. Найти значения $\mathrm{Ai}(0), \mathrm{Ai}'(0), \mathrm{Bi}(0)$, $\mathrm{Bi}'(0)$.

Асимптотическое поведение функции Bi при больших положительных значениях аргумента определяется выражением

$$\mathrm{Bi}(x) \approx \frac{1}{\pi^{1/2}x^{1/4}} \exp\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)$$

Асимптотическое поведение функции Bi при больших отрицательных значениях аргумента определяется выражением

$$\mathrm{Bi}(x) \approx \frac{1}{\pi^{1/2}|x|^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Сравнение функции Bi(x) и ее асимптотик приведены на рисунке 3.7.

**Задача**

3.2.2. Получить асимптотическое поведение $\oint \mathrm{Bi}(x)$ при $x \to \pm\infty$

Асимптотическое поведение функций Эйри $\mathrm{Ai}(x)$ и $\mathrm{Bi}(x)$ можно установить и методом WKB, смотри раздел 3.7.3. Уравнение Эйри (3.11) является частным случаем уравнения (3.106), при этом $U = x$. Таким образом $p = \sqrt{x}$ и $S = (2/3)x^{3/2}$. Таким образом, в соответствие с (3.107) при больших положительных $x$ мы находим следующее поведение

$$x^{-1/4} \exp\left(\pm 2x^{3/2}/3\right).$$

Знак + относится к функции $\mathrm{Bi}(x)$, смотри (3.18), а знак минус относится к функци $\mathrm{Ai}(x)$, смотри (3.16). При больших отрицательных $x$ мы находим следующее поведение

$$|x|^{-1/4} \exp\left(\pm 2i|x|^{3/2}/3\right).$$

Поскольку $\mathrm{Ai}(x)$ и $\mathrm{Bi}(x)$ являются действительными функциями, то в соответствие с (3.109) для них поведение при больших отрицательных $x$ имеет вид

$$|x|^{-1/4} \cos\left(2|x|^{3/2}/3 + \varphi\right),$$

где $\varphi$ - некоторая фаза. Это поведение соответствует асимптотикам (3.15) и (3.19).

**Задача**

3.2.3. Найти асимптотики решения уравнения $d^2Y/dx^2 - x^3Y = 0$ при больших значениях $|x|$.

**асимптот поведение**

вот это хоть затронуто было

**явление Стокса для нее**

**О подходе через теорию Пикара-Лефшица (????)**

(пока этот вопрос остается, не шарю.)

### 1.4.2 d. Вырожденная гипергеометрическая функция

Вырожденная гипергеометрическая функиия определяется рядом

$$F(\alpha, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma}\frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z^2}{2!} + ...,$$

сходящимся при всех конечных $z$; параметр $\alpha$ произволен, а параметр $\gamma$ предполагается не равным нулю или целому отрицательному числу. Если $\alpha$ есть целое отрицательное число (или нуль), то $F(\alpha, \gamma, z)$ сводится к полиному степени $|\alpha|$.

Функция $F(\alpha, \gamma, z)$ удовлетворяет уравнению

$$zu'' + (\gamma - z)u' - \alpha u = 0$$

в чем легко убедиться непосредственной проверкой. Подстановкой $u = z^{1-\gamma}u_1$ это уравнение преобразуется в уравнение того же вида

$$zu_1'' + (2 - \gamma - z)u_1' - (\alpha - \gamma + 1)u_1 = 0.$$

Отсюда видно, что при нецелом $\gamma$ уравнение (d.2) имеет также частный интеграл $z^{1-\gamma}F(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z)$, линейно независимый

Уравнение (d.2) с целым отрицательным значением $\gamma$ не нуждается в особом рассмотрении, так как может быть сведено (преобразованием к уравнению (d.3)) к случаю целых положительных $\gamma$. от (d.1), так что общее решение уравнения (d.2) имеет вид

$$u = c_1F(\alpha, \gamma, z) + c_2z^{1-\gamma}F(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z).$$

Второй член, в противоположность первому, имеет при $z = 0$ особую точку.

Уравнение (d.2) относится к типу Лапласа, и его решения могут быть представлены в виде контурных интегралов. Следуя общему методу, составляем функции

$$P(t) = \gamma t - \alpha, \quad Q(t) = t(t-1), \quad Z(t) = t^{\alpha-1}(t-1)^{\gamma-\alpha-1},$$

так что

$$u = \int e^{tz}t^{\alpha-1}(t-1)^{\gamma-\alpha-1}dt$$

Путь интегрирования должен быть выбран таким образом, чтобы после его прохождения функция $V(t) = e^{tz}t^{\alpha}(t-1)^{\gamma-\alpha}$ возвращалась к исходному значению.

Применяя тот же метод к уравнению (d.3), можно получить для $u$ контурный интеграл другого вида

$$u = z^{1-\gamma} \int e^{tz} t^{\alpha-\gamma} (t-1)^{-\alpha} dt$$

В этом интеграле удобно сделать подстановку $tz \to t$, приводящую его к виду

$$u(z) = \int e^{t} (t-z)^{-\alpha} t^{\alpha-\gamma} dt$$

причем соответствующая функция $V(t) = e^t t^{\alpha-\gamma+1} (t-z)^{1-\alpha}$.

Подынтегральное выражение в (d.6) имеет, вообще говоря, две особые точки - при $t = z$ и при $t = 0$. Выберем контур интегрирования $C$, приходящий из

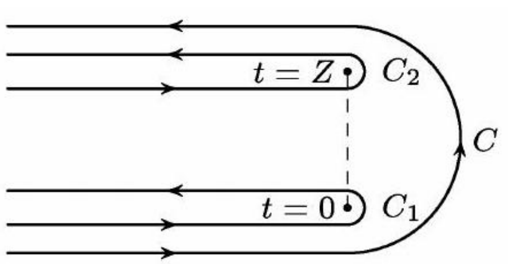



Рис. 56 бесконечности ($\mathrm{Re}\, t \to -\infty$), обходящий обе особые точки в положительном направлении и уходящий снова на бесконечность (рис. 56). Этот контур удовлетворяет требуемым условиям, так как на его концах функция $V(t)$ обращается в нуль. Интеграл (d.6), взятый по контуру $C$, не имеет особой точки при $z = 0$; поэтому он должен совпадать, с точностью до постоянного множителя, с не имеющей особенностей функцией $F(\alpha, \gamma, z)$. При $z = 0$ обе особые точки подынтегрального выражения совпадают; согласно известной формуле теории Г-функций

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_C e^t t^{-\gamma} dt = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}$$

Поскольку $F(\alpha, \gamma, 0) = 1$, то очевидно, что

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{2\pi i} \int\limits_C e^t (t-z)^{-\alpha} t^{\alpha-\gamma} dt.$$

В (d.5) подынтегральное выражение имеет особые точки $t = 0$ и $t = 1$. Если $\mathrm{Re}(\gamma - \alpha) > 0$, а $\gamma$-не целое положительное число, то в качестве пути интегрирования можно выбрать контур $C'$, выходящий из точки $t = 1$, обходящий в положительном направлении точку $t = 0$ и возвращающийся в $t = 1$ (рис. 57);

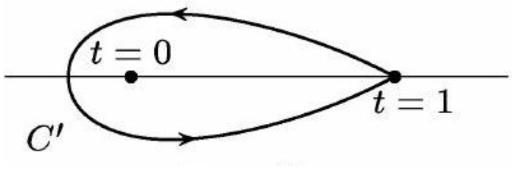



Рис. 57

при $\mathrm{Re}(\gamma - \alpha) > 0$ в результате обхода вдоль такого контура функция $V(t)$ возвращается к исходному значению нуль (если $\gamma$ - целое положительное число, то в качестве $C'$ можно выбрать любой контур, обходящий обе точки $t = 0$ и $t = 1$). Определенный таким образом интеграл тоже не имеет особенности при $z = 0$ и связан с $F(\alpha, \gamma, z)$ соотношением

$$F(\alpha, \gamma, z) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \oint_{C'} e^{tz}(-t)^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1} dt$$

По поводу интегралов (d.8), (d.9) надо сделать следующее замечание. При нецелых $\alpha$ и $\gamma$ подынтегральные выражения этих интегралов являются неоднозначными функциями. Их значения в каждой точке предполагаются выбранными условием, что возводимая в степень комплексная величина берется с наименьшим по абсолютной величине значением аргумента.

Отметим полезное соотношение

$$F(\alpha, \gamma, z) = e^z F(\gamma - \alpha, \gamma, -z),$$

которое получается непосредственно, если сделать в интеграле (d.8) подстановку $t \to t + z$.

Мы уже упоминали, что если $\alpha = -n$, где $n$ - целое положительное число, то функция $F(\alpha, \gamma, z)$ сводится к полиному. Для этих полиномов можно получить короткую формулу. Делая в интеграле (d.9) подстановку $t \to 1-(t/z)$ и применяя к получившемуся интегралу формулу Коши, найдем следующую формулу:

$$F(-n, \gamma, z) = \frac{1}{\gamma(\gamma+1)...(\gamma+n-1)} z^{1-\gamma} e^z \frac{d^n}{dz^n} \left(e^{-z} z^{\gamma+n-1}\right).$$

Если к тому же $\gamma = m$, где $m$ - целое положительное число, то имеет место также и формула

$$F(-n, m, z) = \frac{(-1)^{m-1}}{m(m+1)...(m+n-1)} e^z \frac{d^{m+n-1}}{dz^{m+n-1}} \left(e^{-z} z^n\right).$$

Эта формула получается применением формулы Коши к интегралу, получающемуся из (d.8) подстановкой $t \to z - t$.

Полиномы $F(-n, m, z) (0 \leqslant m \leqslant n)$ совпадают, с точностью до постоянного множителя, с обобщенными полиномами Лагерра:

$$L_n^m(z) = (-1)^m \frac{(n!)^2}{m!(n-m)!} F(-(n-m), m+1, z) =$$
$$= \frac{n!}{(n-m)!} e^z \frac{d^n}{dz^n} e^{-z} z^{n-m} = (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!} e^z z^{-m} \frac{d^{n-m}}{dz^{n-m}} e^{-z} z^n.$$

Полиномы $L_n^m$ при $m = 0$ обозначают, как $L_n(z)$, и называют просто полиномами Лагерра; согласно (d.13) имеем

$$L_n(z) = e^z \frac{d^n}{dz^n} \left(e^{-z} z^n\right).$$

Интегральное представление (d.8) удобно для получения асимптотического разложения вырожденной гипергеометрической функции при больших $z$. Деформируем контур так, что он превращается в два контура $C_1$ и $C_2$ (см. рис. 56), обходящих соответственно точки $t = 0$ и $t = z$; нижнюю ветвь пути $C_2$ и верхнюю ветвь $C_1$ надо представлять себе смыкающимися на бесконечности. Имея в виду получить разложение по обратным степеням $z$, выносим в подынтегральном выражении $(-z)^{-\alpha}$ за скобку. В интеграле по контуру $C_2$ делаем подстановку $t \to t + z$; тем самым мы преобразуем контур $C_2$ в контур $C_1$. В результате представляем формулу (d.8) в виде

$$F(\alpha,\gamma,z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}(-z)^{-\alpha}G(\alpha,\alpha-\gamma+1,-z)+\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}e^z z^{\alpha-\gamma}G(\gamma-\alpha,1-\alpha,z)$$

где

$$G(\alpha,\beta,z)=\frac{\Gamma(1-\beta)}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{-\alpha}t^{\beta-1}e^t dt$$

При возведении в степень в формуле (d.14) $-z$ и $z$ должны браться с наименьшим по абсолютной величине значением аргумента. Наконец, разлагая в подынтегральном выражении $(1+t/z)^{-\alpha}$ по степеням $t/z$ и применяя формулу (d.7), получим в результате для $G(\alpha,\beta,z)$ асимптотический ряд

$$G(\alpha,\beta,z)=1+\frac{\alpha\beta}{1!z}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!z^2}+...$$

Формулами (d.14) и (d.16) определяется асимптотическое разложение функции $F(\alpha,\gamma,z)$.

При целом положительном $\gamma$ второй член в общем решении (d.4) уравнения (d.2) либо совпадает с первым (если $\gamma=1$), либо теряет вовсе смысл (если $\gamma>1$). В качестве системы двух линейно независимых решений можно в этом случае выбрать два слагаемых в формуле (d.14), т. е. интегралы (d.8), взятые по контурам $C_1$ и $C_2$ (эти контуры, как и контур $C$, удовлетворяют требуемым условиям, так что интегралы вдоль них - тоже решения уравнения (d.2)). Асимптотический вид этих решений определяется уже полученными формулами; остается найти их разложение по восходящим степеням $z$. Для этого исходим из равенства (d.14) и аналогичного равенства для функции $z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,2-\gamma,z)$. Из этих двух равенств выражаем $G(\alpha,\alpha-\gamma+1,-z)$ через $F(\alpha,\gamma,z)$ и $F(\alpha-\gamma+1,2-\gamma,z)$, после чего полагаем $\gamma=p+\varepsilon$($p$-целое положительное число) и переходим к пределу $\varepsilon\to 0$, раскрывая неопределенности по правилу Лопиталя. В результате довольно длинного вычисления получается следующее разложение:

$$\begin{aligned}G(\alpha,\alpha-p+1,-z)=\frac{\sin\pi\alpha\cdot\Gamma(p-\alpha)}{\pi\Gamma(p)}z^{\alpha}\Big\{\ln z\cdot F(\alpha,p,z)+\\+\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Gamma(p)\Gamma(\alpha+s)[\psi(\alpha+s)-\psi(p+s)-\psi(s+1)]}{\Gamma(\alpha)\Gamma(s+p)\Gamma(s+1)}z^s+\\+\sum_{s=1}^{p-1}(-1)^{s+1}\frac{\Gamma(s)\Gamma(\alpha-s)\Gamma(p)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(p-s)}z^{-s}\Big\}\end{aligned}$$

где $\psi$ обозначает логарифмическую производную от Г-функции: $\psi(\alpha)=\Gamma'(\alpha)/\Gamma(\alpha)$.

### 1.4.3 e. Гипергеометрическая функция

Гипергеометрическая функиия определяется внутри круга $|z|<1$ рядом

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)=1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}\frac{z}{1!}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z^2}{2!}+...,$$

а при $|z|>1$ получается аналитическим продолжением этого ряда (см. (e.6)). Гипергеометрическая функция является одним из частных интегралов дифференциального уравнения

$$z(1-z)u''+[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]u'-\alpha\beta u=0.$$

Параметры $\alpha$ и $\beta$ произвольны, а $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$ Функция $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, очевидно, симметрична по параметрам $\alpha$ и $\beta$[1]).

Второе независимое решение уравнения (e.2) есть

$$z^{1-\gamma} F(\beta - \gamma + 1, \alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z);$$

оно имеет особую точку при $z = 0$.

Мы приведем здесь для справочных целей ряд соотношений, которым удовлетворяет гипергеометрическая функция.

Функция $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ может быть представлена при всех $z$, если $\mathrm{Re}(\gamma - \alpha) > 0$, в виде интеграла

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \\ = -\frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \oint_{C'} (-t)^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} (1-tz)^{-\beta} dt,$$

взятого по контуру $C'$, изображенному на рис. 57. В том, что этот интеграл действительно удовлетворяет уравнению (e.2), легко убедиться непосредственной подстановкой; постоянный множитель подобран так, чтобы при $z = 0$ получилась единица.

Подстановка

$$u = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} u_1$$

Вырожденная гипергеометрическая функция получается из $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ предельным переходом $F(\alpha, \gamma, z) = \lim F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{z}{\beta}\right)$ при $\beta \to \infty$.

В литературе используется также обозначение ${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, z)$ для гипергеометрической и ${}_1F_1(\alpha, \gamma, z)$ для вырожденной гипергеометрической функций. Индексы слева и справа от буквы $F$ указывают число параметров, фигурирующих соответственно в числителях и знаменателях членов ряда. в уравнение (e.2) приводит к уравнению того же вида с параметрами $\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma$ соответственно вместо $\alpha, \beta, \gamma$. Отсюда следует равенство

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma, z)$$

(обе части равенства удовлетворяют одному и тому же уравнению и их значения при $z = 0$ совпадают).

Подстановка $t \to t/(1 - z + zt)$ в интеграле (e.3) приводит к следующему соотношению между гипергеометрическими функциями от переменных $z$ и $z/(z-1)$:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = (1-z)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma - \beta, \gamma, \frac{z}{z-1}\right)$$

Значение многозначного выражения $(1-z)^{-\alpha}$ в этой формуле (и аналогичных выражений во всех следующих ниже формулах) определяется условием, что возводимая в степень комплексная величина берется с наименьшим по абсолютной величине значением аргумента.

Далее, приведем без вывода важную формулу, связывающую гипергеометрические функции от переменных $z$ и $1/z$:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} (-z)^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha + 1 - \gamma, \alpha + 1 - \beta, \frac{1}{z}\right) + \\ + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} (-z)^{-\beta} F\left(\beta, \beta + 1 - \gamma, \beta + 1 - \alpha, \frac{1}{z}\right). \quad (\text{e. } 6)$$

Эта формула выражает $F(\alpha,\beta,\gamma,z)$ в виде ряда, сходящегося при $|z|>1$, т. е. представляет собой аналитическое продолжение исходного ряда (e.1).

Формула

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}F(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma,1-z)+$$
$$+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma+1-\alpha-\beta,1-z)$$

связывает гипергеометрические функции от $z$ и $1-z$ (мы также приводим ее без вывода). Комбинируя (e.7) с (e.6), получим соотношения

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}(1-z)^{-\alpha}F\left(\alpha,\gamma-\beta,\alpha+1-\beta,\frac{1}{1-z}\right)+$$
$$+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}(1-z)^{-\beta}F\left(\beta,\gamma-\alpha,\beta+1-\alpha,\frac{1}{1-z}\right),$$

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}\;z^{-\alpha}F\left(\alpha,\alpha+1-\gamma,\alpha+\beta+1-\gamma,\frac{z-1}{z}\right)+$$
$$+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}z^{\beta-\gamma}F\left(1-\beta,\gamma-\beta,\gamma+1-\alpha-\beta,\frac{z-1}{z}\right).$$

Каждый из членов сумм в правых частях равенств (e.6)-(e.9) представляет сам по себе решение гипергеометрического уравнения.

Если $\alpha$ (или $\beta$) есть целое отрицательное число (или нуль), $\alpha=-n$, то гипергеометрическая функция сводится к полиному $n$-й степени и может быть представлена в виде

$$F(-n,\beta,\gamma,z)=\frac{z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma+n-\beta}}{\gamma(\gamma+1)...(\gamma+n-1)}\frac{d^n}{dz^n}\left[z^{\gamma+n-1}(1-z)^{\beta-\gamma}\right].$$

Эти полиномы совпадают, с точностью до постоянного множителя, с полиномами Якоби, определяемыми как

$$P_n^{(a,b)}(z)=\frac{(a+1)(a+2)...(a+n)}{n!}F\left(-n,a+b+n+1,a+1,\frac{1-z}{2}\right)=$$
$$=\frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-z)^{-a}(1+z)^{-b}\frac{d^n}{dz^n}\left[(1-z)^{a+n}(1+z)^{b+n}\right].$$

При $a=b=0$ полиномы Якоби совпадают с полиномами Лежандра. При $n=0$ $P_0^{(a,b)}=1$.

**Integrals by hypergeometric functions: Example 1 from Landau**

Рассмотрим интеграл вида

$$J^{\nu}_{\alpha\gamma}=\int\limits_0^\infty e^{-\lambda z}z^\nu F(\alpha,\gamma,kz)dz.$$

Предполагается, что он сходится. Для этого должно быть $\operatorname{Re}\nu>>-1$ и $\operatorname{Re}\lambda>|\operatorname{Re}k|$; если $\alpha$ есть целое отрицательное число, то вместо второго условия достаточно потребовать, чтобы было $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$. Воспользовавшись для $F(\alpha,\gamma,kz)$ интегральным представлением (d.9) и произведя интегрирование по $dz$ под знаком контурного интегрирования, получим

$$J^{\nu}_{\alpha\gamma} = -\frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}\lambda^{-\nu-1}\Gamma(\nu+1)\oint_{C'}(-t)^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-(k/\lambda)t)^{-\nu-1}dt.$$

Учитывая (e.3), находим окончательно

$$J^{\nu}_{\alpha\gamma} = \Gamma(\nu+1)\lambda^{-\nu-1}F(\alpha,\nu+1,\gamma,k/\lambda).$$

В случаях, когда функция $F(\alpha,\nu+1,\gamma,k/\lambda)$ сводится к полиномам, получаем соответственно и для интеграла $J^{\nu}_{\alpha\gamma}$ выражения через элементарные функции:

$$J^{\gamma+n-1}_{\alpha\gamma} = (-1)^n\Gamma(\gamma)\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[\lambda^{\alpha-\gamma}(\lambda-k)^{-\alpha}\right],$$

$$J^{\nu}_{-n\gamma} = (-1)^n\frac{\Gamma(\nu+1)(\lambda-k)^{\gamma+n-\nu-1}}{\gamma(\gamma+1)...(\gamma+n-1)}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[\lambda^{-\nu-1}(\lambda-k)^{\nu-\gamma+1}\right],$$

$$J^{n}_{\alpha m} = \frac{(-1)^{m-n}}{k^{m-1}(1-\alpha)(2-\alpha)...(m-1-\alpha)}\left\{-(m-1)!\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[\lambda^{\alpha-1}(\lambda-k)^{m-\alpha-1}\right]+\right.$$
$$\left.+n!(m-n-1)...(m-1)\lambda^{\alpha-n-1}(\lambda-k)^{-1+m-n-\alpha}\frac{d^{m-n-2}}{d\lambda^{m-n-2}}\left[\lambda^{m-\alpha-1}(\lambda-k)^{\alpha-1}\right]\right\}$$

($m,n$ - целые числа, $0\leqslant n\leqslant m-2$).
(???)

**Integrals by hypergeometric functions: Example 2 from Landau**

Далее, вычислим интеграл

$$J_\nu = \int\limits_0^\infty e^{-kz}z^{\nu-1}[F(-n,\gamma,kz)]^2dz$$

($n$ - целое положительное, $\mathrm{Re}\,\nu > 0$). Для вычисления исходим из более общего интеграла, содержащего в подынтегральном выражении $e^{-\lambda z}$ вместо $e^{-kz}$. Одну из функций $F(-n,\gamma,kz)$ пишем в виде интеграла (d.9), после чего интегрирование по $dz$с помощью формулы (f.3) дает

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda z}z^{\nu-1}[F(-n,\gamma,kz)]^2dz = -\frac{1}{2\pi i}(-1)^n\frac{\Gamma(1+n)\Gamma^2(\gamma)\Gamma(\nu)}{\Gamma^2(\gamma+n)}\times$$
$$\times\oint_{C'}(\lambda-kt-k)^{\gamma+n-\nu}(-t)^{-n-1}(1-t)^{\gamma+n-1}\times$$
$$\times\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[(\lambda-kt)^{-\nu}(\lambda-kt-k)^{\nu-\gamma}\right]dt.$$

Производную $n$-го порядка по $\lambda$ можно, очевидно, заменить, выразив через производную того же порядка по $t$; сделав это, полагаем $\lambda=k$, возвращаясь, таким образом, к интегралу $J_\nu$:

$$J_\nu = -\frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\nu)\Gamma^2(\gamma)}{\Gamma^2(\gamma+n)k^\nu}\times$$
$$\times\oint_{C'}(-t)^{\gamma-\nu-1}(1-t)^{\gamma+n-1}\frac{d^n}{dt^n}\left[(1-t)^{-\nu}(-t)^{\nu-\gamma}\right]dt.$$

Производя $n$-кратное интегрирование по частям, переносим операцию $(d/dt)^n$ на выражение $(-t)^{\gamma-\nu-1}(1-t)^{\gamma+n-1}$ и раскрываем производную по формуле Лейбница. В результате получаем сумму интегралов, каждый из которых сводится к известному интегралу Эйлера. Окончательно получается следующее выражение для искомого интеграла:

$$J_\nu = \frac{\Gamma(\nu)n!}{k^\nu \gamma(\gamma+1)...(\gamma+n-1)}\times$$
$$\times\left\{1+\sum_{s=0}^{n-1}\frac{n(n-1)...(n-s)(\gamma-\nu-s-1)(\gamma-\nu-s)...(\gamma-\nu+s)}{[(s+1)!]^2\gamma(\gamma+1)...(\gamma+s)}\right\}.$$

Легко видеть, что между интегралами $J_\nu$ имеет место следующее соотношение ($p$ - целое число):

$$J_{\gamma+p} = \frac{(\gamma-p-1)(\gamma-p)...(\gamma+p-1)}{k^{2p+1}}J_{\gamma-1-p}.$$

Аналогичным образом вычисляется интеграл

$$J = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda z}z^{\gamma-1}F(\alpha,\gamma,kz)F(\alpha',\gamma,k'z)\,dz.$$

Представляем функцию $F(\alpha',\gamma,k'z)$ в виде интеграла (d.9) и после интегрирования по $dz$ с помощью формулы (f.3) (с $n=0$) находим

$$J = -\frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma(1-\alpha')\Gamma^2(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha')}\oint_{C'}(-t)^{\alpha'-1}(1-t)^{\gamma-\alpha'-1}(\lambda-k't)^{\alpha-\gamma}(\lambda-k't-k)^{-\alpha}\,dt.$$

Подстановкой $t\to\lambda t/(k't+\lambda-k')$ этот интеграл приводится к виду (e.3), давая в результате

$$J = \Gamma(\gamma)\lambda^{\alpha+\alpha'-\gamma}(\lambda-k)^{-\alpha}(\lambda-k')^{-\alpha'}F\left(\alpha,\alpha',\gamma,\frac{kk'}{(\lambda-k)(\lambda-k')}\right).$$

Если $\alpha$ (или $\alpha'$) есть целое отрицательное число $\alpha=-n$, то с помощью соотношения (e.7) это выражение может быть переписано в виде

$$J = \frac{\Gamma^2(\gamma)\Gamma(\gamma+n-\alpha')}{\Gamma(\gamma+n)\Gamma(\gamma-\alpha')}\lambda^{-n+\alpha'-\gamma}(\lambda-k)^n(\lambda-k')^{-\alpha'}F\left(-n,\alpha',-n+\alpha'+1-\gamma,\frac{\lambda(\lambda-k-k')}{(\lambda-k)(\lambda-k')}\right).$$

Наконец, рассмотрим интегралы вида

$$J_\nu^{sp}(\alpha,\alpha') = \int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{k+k'}{2}z\right)z^{\gamma-1+s}F(\alpha,\gamma,kz)F(\alpha',\gamma-p,k'z)\,dz.$$

Значения параметров предполагаются такими, что интеграл сходится абсолютно; $s,p$ - целые положительные числа. Простейший из этих интегралов $J_\gamma^{00}(\alpha,\alpha')$ равен, согласно (f.10),

$$J_\gamma^{00}(\alpha,\alpha') = 2^\gamma\Gamma(\gamma)(k+k')^{\alpha+\alpha'-\gamma}(k'-k)^{-\alpha}\times$$
$$\times(k-k')^{-\alpha'}F\left(\alpha,\alpha',\gamma,-\frac{4kk'}{(k'-k)^2}\right),$$

а если $\alpha$ (или $\alpha'$) - целое отрицательное число ($\alpha = -n$), то, согласно (f.11), можно также написать

$$\begin{aligned} J_\gamma^{00}\left(-n,\alpha'\right) =& 2^\gamma \frac{\Gamma(\gamma)\left(\gamma-\alpha'\right)\left(\gamma-\alpha'+1\right)...\left(\gamma-\alpha'+n-1\right)}{\gamma(\gamma+1)...(\gamma+n-1)}\times \\ & \times(-1)^n\left(k+k'\right)^{-n+\alpha'-\gamma}\left(k-k'\right)^{n-\alpha'}\times \\ & \times F\left[-n,\alpha',\alpha'+1-n-\gamma,\left(\frac{k+k'}{k-k'}\right)^2\right]. \end{aligned}$$

Общая формула для $J_\gamma^{sp}\left(\alpha,\alpha'\right)$ может быть выведена, но она настолько сложна, что ею неудобно пользоваться. Удобнее пользоваться рекуррентными формулами, позволяющими свести интегралы $J_\gamma^{sp}\left(\alpha,\alpha'\right)$ к интегралу с $s=p=0$[1]) Формула

$$J_\gamma^{sp}\left(\alpha,\alpha'\right)=\frac{\gamma-1}{k}\left\{J_{\gamma-1}^{s,p-1}\left(\alpha,\alpha'\right)-J_{\gamma-1}^{s,p-1}\left(\alpha-1,\alpha'\right)\right\}$$

дает возможность свести $J_\gamma^{sp}\left(\alpha,\alpha'\right)$ к интегралу с $p=0$. После этого формула

$$\begin{aligned} J_\gamma^{s+1,0}\left(\alpha,\alpha'\right)=\frac{4}{k^2-k'^2}\Big\{&\left[\frac{\gamma}{2}\left(k-k'\right)-k\alpha+k'\alpha'-k's\right]J_\gamma^{s0}\left(\alpha,\alpha'\right)+ \\ & +s\left(\gamma-1+s-2\alpha'\right)J_\gamma^{s-1,0}\left(\alpha,\alpha'\right)+2\alpha' s J_\gamma^{s-1,0}\left(\alpha,\alpha'+1\right)\Big\} \end{aligned}$$

позволяет произвести окончательное приведение к интегралу с $s=p=0$.

### 1.4.4 Эллиптические функции Якоби (!?)

(целая книга про них написана, так что и я поизучаю, очень много задач на них!!!)
(see maybe P. F. Byrd. M. D. Friedman)

**Обозначение**

Определение как обратные к эллиптическим интегралам эллиптическому интегралу первого рода.

Пусть

$$u=\int\limits_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1-m\sin^2\theta}}$$

По определению:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn} u &= \sin\varphi \\ \operatorname{cn} u &= \cos\varphi \\ \operatorname{dn} u &= \sqrt{1-m\sin^2\varphi} \end{aligned}$$

эллиптические функции являются функциями двух аргументов: амплитуды $\varphi$ и параметра $m$. Оставшиеся девять эллиптических функций легко построить из трёх вышеприведённых. Это будет сделано ниже. Заметьте, что когда $\varphi=\pi/2$, то $u$ равен четверти периода $K$.

**Определение в терминах тета-функций**

Эллиптический модуль $k$ равен $k=\left(\frac{\vartheta_{10}}{\vartheta}\right)^2$. Полагая $u=\pi\vartheta^2 z$, получим

$$\operatorname{sn}(u;k)=-\frac{\vartheta_{\vartheta_{11}}(z;\tau)}{\vartheta_{10}\vartheta_{01}(z;\tau)}$$

**примеры применения**

КдФ (??? не усвоил это???)
Механика (?? тоже пока не вижу это??)

### 1.4.5 Эллиптические функции (!?)

(вообще в спецфункциях именно про них раздел!!! пока не дохожу просто, так что пока тут)

(в матане заготовлю интегралы эти!)

**Эллиптические интегралы по Барбашовой**

Дадим определения этих функций.

Эллиптические интегралы 1, 2 и 3 рода в нормальной форме Лежандра или неполными эллиптическими интеграла ми 1,2 и 3 рода это функции $F(\theta, k), E(\theta, k)$ и $\Pi(\theta, n, k)$ независимой переменной $\theta$ и параметров $n, k$

$$F(\theta, k) = \int\limits_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}},$$

$$E(\theta, k) = \int\limits_0^\theta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

$$\Pi(\theta, n, k) = \int\limits_0^\theta \frac{d\theta}{\left(1 + n \sin^2 \theta\right) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$$

Полные эллиптические интегралы 1, 2 и 3 рода это функции параметров $k, n$

$$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right),$$

$$E(k) = E\left(\frac{\pi}{2}, k\right),$$

$$\Pi(n, k) = \Pi\left(\frac{\pi}{2}, n, k\right)$$

Для неполных и полных интегралов 2 и 3 рода принято использовать одинаковые обозначения, а именно $E$ и $\Pi$.

Эллиптические интегралы 1,2 и 3 рода в нормальной форме Якоби получаются заменой $x = \sin \varphi$:

$$F(x, k) = \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - k^2 x^2}},$$

$$E(x, k) = \int\limits_0^x \frac{\sqrt{1 - k^2 x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} dx,$$

$$\Pi(x, n, k) = \int\limits_0^x \frac{dx}{(1 + n x^2) \sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - k^2 x^2}}.$$

**Некоторые свойства $F(\theta, k)$, $E(\theta, k)$ и $\Pi(\theta, n, k)$**

(барбашова и др.)

Приведем некоторые свойства эллиптических интегралов $F(\theta, k)$, $E(\theta, k)$ и $\Pi(\theta, n, k)$ (см. (2.162)).

Предполагается, что $0 < k < 1$.

1. Поскольку $0 < 1 - k^2 \sin^2\theta < 1$ при $0 < k < 1$, то $F(\theta, k) > E(\theta, k), \quad K(k) > E(k)$ (?? и что с того???)

2. Выполняются следующие равенства

$$\frac{d(aF + bE)}{d\theta} = \frac{a + b\left(1 - k^2\sin^2\theta\right)}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}} = \frac{(a + b) - bk^2\sin^2\theta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}},$$

$$\frac{d^2F}{d\theta^2} = k^2\sin\theta\cos\theta\left(\frac{dF}{d\theta}\right)^3, \quad \frac{d^2E}{d\theta^2} = -k^2\sin\theta\cos\theta\frac{dF}{d\theta}$$

(??? это вообще нужно????)

**Применения эллиптических интегралов для вычисления других**

3. Положив $a = -b = 1/k^2$, получим из формулы для $\frac{d(aF+bE)}{d\theta}$

$$G_1(\theta, k) \equiv \frac{F(\theta, k) - E(\theta, k)}{k^2} = \int\limits_0^\theta \frac{\sin^2\theta d\theta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}}.$$

4. Положив $a = 1 - 1/k^2, b = 1/k^2$, получим из формулы для $\frac{d(aF+bE)}{d\theta}$

$$G_2(\theta, k) \equiv \frac{1}{k^2}E(\theta, k) - \frac{1 - k^2}{k^2}F(\theta, k) = \int\limits_0^\theta \frac{\cos^2\theta d\theta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}}.$$

5. Производные эллиптических интегралов по параметру:

$$\frac{\partial F}{\partial k} = \int\limits_0^\theta \frac{k\sin^2\theta d\theta}{\left(1 - k^2\sin^2\theta\right)^{3/2}} = \frac{1}{k'^2}\left(\frac{E - k'^2F}{k} - \frac{k\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}}\right),$$

где $k'^2 = 1 - k^2$. Эта формула проверяется дифференцированием правой и левой ее части по $\theta$ с учетом формулы для $\frac{d(aF+bE)}{d\theta}$. Согласно (2.295) имеем

$$\frac{\partial E}{\partial k} = -\int\limits_0^\theta \frac{k\sin^2\theta d\theta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}} = \frac{E - F}{k}.$$

6. Пусть $\nu > \mu > 1$. Рассмотрим функцию

$$G_4(\theta, \mu, \nu) = \int\limits_0^\theta \frac{\cos^2\theta d\theta}{\sqrt{\mu - \sin^2\theta}\sqrt{\nu - \sin^2\theta}}.$$

Чтобы выразить ее через эллиптические интегралы, сделаем замену $\sin^2\theta = u$. Тогда $2\sin\theta\cos\theta d\theta = du$ и

$$G_4(u, \mu, \nu) = \int\limits_0^u \frac{\sqrt{1 - x}dx}{2\sqrt{x(\mu - x)(\nu - x)}}.$$

Воспользуемся табличным известным интегралом

$$\int\limits_d^u \frac{\sqrt{c-x}dx}{\sqrt{(a-x)(b-x))(x-d)}} = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}\left[(a-d)\Pi\left(\beta,\frac{d-c}{a-c},r\right)-(a-c)F(\beta,r)\right],$$

где $a>b>c\geqslant u>d$ и $\beta=\arcsin\sqrt{\frac{(a-c)(u-d)}{(c-d)(a-u)}}$, $r=\sqrt{\frac{(a-b)(c-d)}{(a-c)(b-d)}}$.

(!! так вот оказывается, где вылазят эл интегралы!!! чет совсем в матане и спецфункциях плохая к ним подготовка.)

Положив $a=\nu, b=\mu, c=1, d=0$, получим

$$G_4(\theta,\mu,\nu)=\frac{1}{\sqrt{\mu(\nu-1)}}\left[\nu\Pi\left(\beta,\frac{1}{1-\nu},r\right)-(\nu-1)F(\beta,r)\right],$$

и $\beta=\arcsin\sqrt{\frac{(\nu-1)\sin^2\theta}{\nu-\sin^2\theta}}$, $r=\sqrt{\frac{\nu-\mu}{\mu(\nu-1)}}$.

При $\theta=\pi/2$ имеем $\beta=\pi/2$. Тогда

$$G_4\left(\frac{\pi}{2},\mu,\nu\right)=\frac{1}{\sqrt{\mu(\nu-1)}}\left[\nu\Pi\left(\frac{\pi}{2},\frac{1}{1-\nu},r\right)-(\nu-1)K(r)\right].$$

7. Рассмотрим выражение $\sigma=\cos^2\theta\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}$. Домножив и поделив его на $\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}$, имеем

$$\sigma=\frac{\cos^2\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}-\frac{k^2\cos^2\theta\sin^2\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}.$$

Используя (2.294), преобразуем второе слагаемое

$$-\frac{k^2\cos^2\theta\sin^2\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=\cos\theta\sin\theta\frac{d^2E}{d\theta^2}=\frac{d\left(\cos\theta\sin\theta\frac{dE}{d\theta}\right)}{d\theta}-$$

$$-\left(2\cos^2\theta-1\right)\frac{dE}{d\theta}=\frac{d\left(\cos\theta\sin\theta\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\right)}{d\theta}-2\sigma+\frac{dE}{d\theta}.$$

Следовательно,

$$3\sigma=\frac{\cos^2\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}+\frac{d\left(\cos\theta\sin\theta\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\right)}{d\theta}+\frac{dE}{d\theta}.$$

Отсюда с учетом $G_2$ (????) находим

$$G_3(\theta,k)\equiv\int\limits_0^\theta\cos^2\theta\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}d\theta=$$

$$=\frac{1}{3}\cos\theta\sin\theta\cdot\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}+\frac{1+k^2}{3k^2}E(\theta,k)-\frac{1-k^2}{3k^2}F(\theta,k).$$

8. Пусть $\nu>\mu>1$. Рассмотрим функцию

$$G_5(\theta,\mu,\nu)\equiv\int\limits_0^\theta\frac{d\theta}{\sqrt{\mu-\sin^2\theta}\sqrt{\nu-\sin^2\theta}}.$$

Чтобы выразить ее через эллиптические интегралы, сделаем замену $\sin^2\theta = u$. Тогда $2\sin\theta\cos\theta d\theta = du$ и

$$G_5(u,\mu,\nu) = \int\limits_0^u \frac{dx}{2\sqrt{(1-x)x(\mu-x)(\nu-x)}}.$$

Воспользуемся табличным интегралом

$$\int\limits_d^u \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(c-x))(x-d)}} = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}}F(\beta,r),$$

где $a > b > c \geqslant u > d$, а $\beta$ и $r$ находятся из (2.299). Положив $a = \nu, b = \mu,\ c = 1, d = 0$, получим

$$G_5(\theta,\mu,\nu) = \frac{1}{\sqrt{\mu(\nu-1)}}F(\beta,r)$$

где $\beta$ и $r$ находятся из (2.301).

9. Пусть $\nu > \mu > 1$. Рассмотрим функцию

$$G_6(\theta,\mu,\nu) \equiv \int\limits_0^\theta \frac{\sin^2\theta d\theta}{\sqrt{\mu-\sin^2\theta}\sqrt{\nu-\sin^2\theta}}.$$

Заметим, что $G_6(\theta,\mu,\nu) = G_5(\theta,\mu,\nu) - G_4(\theta,\mu,\nu)$, поэтому

$$G_6(\theta,\mu,\nu) = \frac{1}{\sqrt{\mu(\nu-1)}}\left[F(\beta,r) - \Pi\left(\beta,\frac{1}{1-\nu},r\right)\right],$$

где $\beta$ и $r$ находятся из (2.301).

### Эллиптический интеграл 1 рода в двух словах

Эллиптический интеграл 1 рода есть

$$F(k) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}}$$

- так называемый полный эллиптической интеграл первого рода. При $\sin(\varphi_0/2) \approx \varphi_0/2 \ll 1$ (малые колебания) разложение функции $K(k)$ дает

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\varphi_0^2 + ...\right)$$

(?? что еще нужно про него знать?)

Встречается он в задаче про период колебания математического маятника.

и еще где?

### эллиптический интеграл 2 рода

тут хз.

**Типичные математические преобразования для прихода к эллиптическим интегралам**

что-то там нужно заменять как синус, пока что не отработал.

**О применениях эллиптических интегралов**

(в пер действие-угол встречаются, но я еще не оттренировал это, просто видел, что есть, потом прописывать буду.)

При построении переменных действие-угол решение может выражаться в специальных функциях, называемых эллиптическими интегралами.

Но кст рил, в маятниках, задаче Кеплера и особено в пер действие-угол, больше особо не замечал применений.

# 2 Сферические функции

(тут много теории будет и у нее много приложений!)
(почитаю тут статьи потом!)

### 2.0.1 Теория

**Суть сферических функций**

Функциями Лежандра первого рода (присоединенными «полиномами» Лежандра) называются регулярные в точках $\pm 1$ решения дифференциального уравнения

$$\left(1-x^{2}\right) y''-2 x y'+\left[l(l+1)-\frac{m^{2}}{1-x^{2}}\right] y=0,$$
$$l=0,1, \ldots ; \quad m=0, \pm 1, \ldots, \pm l .$$

При $m=0$ они становятся полиномами Лежандра. Приведем здесь формулу Родрига для этих функций:

$$P_{l}^{|m|}(x)=\frac{1}{2^{l} l!}\left(1-x^{2}\right)^{|m| / 2} \frac{\mathrm{d}^{l+|m|}}{\mathrm{d} x^{l+|m|}}\left(x^{2}-1\right)^{l} .$$

Присоединенные «полиномы» Лежандра входят в структуру сферических функций:

$$Y_{l m}(\theta, \varphi)=\sqrt{\frac{2 l+1}{4 \pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_{l}^{|m|}(\cos \theta) \mathrm{e}^{\mathrm{i} m \varphi},$$

являющихся регулярными на единичной сфере решениями уравнений

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{\sin ^{2} \theta} \frac{\partial^{2}}{\partial \varphi^{2}}+l(l+1)\right] \Psi(\theta, \varphi)=0;$$
$$\left[\mathrm{i} \frac{\partial}{\partial \varphi}+m\right] \Psi(\theta, \varphi)=0$$

и образующими на ней полную ортонормированную систему - базис:

$$\int_{0}^{2 \pi} \mathrm{d} \varphi \int_{0}^{\pi} Y_{l' m'}^{*}(\theta, \varphi) Y_{l m}(\theta, \varphi) \sin \theta \mathrm{d} \theta=\delta_{l' l} \delta_{m' m}$$
$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y_{l m}^{*}\left(\theta', \varphi'\right) Y_{l m}(\theta, \varphi)=\delta\left(\cos \theta'-\cos \theta\right) \delta\left(\varphi'-\varphi\right)$$

Сферические функции удовлетворяют рекуррентному соотношению $\cos\theta Y_{lm}(\theta,\varphi) =$

$$= \sqrt{\frac{(l+1)^2-m^2}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1,m}(\theta,\varphi) + \sqrt{\frac{l^2-m^2}{(2l-1)(2l+1)}} Y_{l-1,m}(\theta,\varphi),$$

представляющему собой разложение его левой части по базису сферических функций. Приведем явный вид некоторых сферических функций:

$$Y_{00}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$Y_{10}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta; \quad Y_{1\pm1}(\theta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\varphi}.$$

**Теория по Мэтьюзу и Уоллеру**

$$\begin{aligned}
Y_{00} &= \sqrt{\frac{1}{4\pi}}; & Y_{2,\pm2} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta \mathrm{e}^{\pm2\mathrm{i}\phi};\\
Y_{1,\pm1} &= \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta \mathrm{e}^{\pm2i\phi}; & Y^{2,\pm1} &= \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta \mathrm{e}^{\pm21\phi};\\
Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta; & Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\theta-1\right).
\end{aligned}$$

Присоединенное дифференциальное уравнение Лежандра имеет вид [см. Формулу (1.69)]

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y = 0$$

Легко убедиться, что если $y$-решение дифференциального уравнения Лежандра, то $\left(1-x^2\right)^{m/2}(d/dx)^m y$ - решение присоединенного уравнения. Для положительного целого числа $m$ определим

$$P_n^m(x) = \left(1-x^2\right)^{m/2}\left(\frac{d}{dx}\right)^m P_n(x).$$

Величину $P_n^m$ называют п рис оед и нен ной ф ун кц ие й Л еж ан дра.

Интеграл ортогональности и нормировки пртисоединенных функций Лежандра имеет вид

$$\int\limits_{-1}^{+1} P_l^m(x)P_{l'}^m(x)dx = \frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}$$

Подчеркнем, что равенство (7.29) справедливо, если обе функции имеют одинаковые значения m. Это условие ортогональности можно получить тем же путем, что и (7.19).

Присоединенные функции Лежандра с фиксированным $m$ представляют также полную систему функций в том смысле, что произвольную (разумную) функцию $f(x)$ можно разложить в ряд вида

$$f_\Delta(x) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n P_n^m(x).$$

Комбинируя (7.30) с идеей рядов Фурье, которые уже рассматривались в гл. 4, мы видим, что функцию $f(\Omega)$, где $\Omega$ обозначает совокупность углов $\theta$ и $\phi$, можно раз- ложить в ряд

$$f(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} A_{mn}P_n^{|m|}(\cos\theta)\exp(\mathrm{i}m\phi).$$

Продолжим кратко рассмотрение основных свойств $P_n^{|m|}$. Обычно определяют *сф* е р ичес ки е г армон и к и

$$Y_{lm}(\Omega)=\left[\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{1/2}P_l^{|m|}(\cos\theta)\exp(\mathrm{i}m\phi)\times$$
$$\times\begin{cases}(-1)^m, & \text{если } m\geqslant 0,\\ 1, & \text{если } m<0.32)\end{cases}$$

Предлагаем читателю проверить, что (7.32) можно записать также в виде

$$Y_{lm}(\Omega)=\frac{1}{2^l l!}\left[\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]^{1/2}\exp(\mathrm{i}m\phi)(-\sin\theta)^m\times\frac{d^{l+m}}{d(\cos\theta)^{l+m}}\left(\cos^2\theta-1\right)^l.$$

Это равенство верно как для положительных, так и для отрицательных $m$. Из (7.32) либо из (7.33) следует, что

$$Y_{l,-m}(\Omega)=(-1)^m Y_{lm}^*(\Omega).$$

В (7.32) нормировочная константа выбрана так, что

$$\int d\Omega Y_{lm}^*(\Omega)Y_{l'm'}(\Omega)=\delta_{ll}\delta_{mm'}.$$

Разложение (7.31) теперь можно записать в виде

$$f(\Omega)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}B_{lm}Y_{lm}(\Omega),$$

причем $B_{lm}$ легко находится из (7.35):

$$B_{lm}=\int d\Omega Y_{lm}^*(\Omega)f(\Omega).$$

Покажем полезность таких разложений по сферическим гармоникам на примере так называемой т е оремы сложения для сферических гармоник. Подставляя (7.37) в (7.36), получаем

$$f(\Omega)=\int d\Omega' f\left(\Omega'\right)\sum_{lm}Y_{lm}^*\left(\Omega'\right)Y_{lm}(\Omega).$$

150 Так как (7.38) верно для произвольной $f(\Omega)$, то

$$\sum_{lm}Y_{lm}^*\left(\Omega'\right)Y_{lm}(\Omega)=\delta\left(\Omega-\Omega'\right).$$

Функция $\delta\left(\Omega-\Omega'\right)$ характеризуется свойствами $\delta\left(\Omega-\Omega'\right)=0$ при $\Omega\neq\Omega'$, $\int d\Omega\delta(\Omega)=1°$. Функция $\delta\left(\Omega-\Omega'\right)$, конечно, зависит только от угла $\gamma$ между направлениями $\Omega$ и $\Omega'$. Из формул сферической тригонометрии находим

$$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos\left(\phi-\phi'\right).$$

Так как функция $\delta\left(\Omega-\Omega'\right)$ зависит только от $\gamma$, разложим ее в ряд по полиномам Лежавдра

$$\delta\left(\Omega-\Omega'\right)=\sum_l B_l P_l(\cos\gamma)$$

Коэффициенты $B_l$ даются формулой [см. формулу (7.21)]

$$B_l = \frac{2l+1}{2}\int\limits_{-1}^{+1} d(\cos\gamma)\delta\left(\Omega-\Omega'\right)P_l(\cos\gamma) =$$

$$= \frac{2l+1}{4\pi}\int d\Omega\delta\left(\Omega-\Omega'\right)P_l(\cos\gamma),$$

так как $2\pi d(\cos\gamma)$ как раз равно элементу телесного угла на сфере. Используя свойства (7.40) функции $\delta\left(\Omega-\Omega'\right)$, из (7.42) получаем

$$B_l = \frac{2l+1}{4\pi}P_l(1) = \frac{2l+1}{4\pi}.$$

Теперь, используя (7.39), (7.41) и (7.43), находим

$$\sum_{lm} Y^*_{lm}\left(\Omega'\right)Y_{lm}(\Omega) = \sum_l \frac{2l+1}{4\pi}P_l(\cos\gamma).$$

Чтобы закончить вывод, постулируем свойство сферических гармоник, справедливость которого будет очевидна после прочтевия гл. 8. Если произвольно повернуть оси координат, любая сферическая гармоника $Y_{lm}(\Omega)$ становится линейной комбинацией сферических гармоник $Y_{lm'}(\bar{\Omega})$ от новых угловых координат $\bar{\Omega}$. Подчеркнем, что в с е. э т и г ар мо ни к и имею т о д и н аков ы й й д е к с $l$, т. е.

$$Y_{lm}(\Omega) = \sum_{m'=-l}^{ll} C^l_{mm'}Y_{lm'}(\bar{\Omega})$$

причем коэффициенты $C^l_{mm'}$ зависят от величины поворота $\Omega \to \bar{\Omega}$, а также от $l, m$ и $m'$.

Так как из (7.32) $Y_{l_0} = \sqrt{(2l+1)/4\pi}P_l(\cos\theta)$, то член $P_l(\cos\gamma)$ в (7.44) можно записать как $P_l(\cos\gamma) = \sqrt{4\pi/(2l+1)}Y_{l0}(\bar{\Omega})$, где $\bar{\Omega}$ - угловые координаты того же направления, что и $\Omega$, но в другой системе координат, полярная ось которой направлена вдоль $\Omega'$. Тогда из (7.45) имеем (с переставленными $\Omega$ и $\Omega'$)

$$P_l(\cos\gamma) = \sum_{m'=-l}^{l} A^l_{0m'}\left(\Omega'\right)Y_{lm'}(\Omega).$$

Сравнивая с (7.44), видим, что члены для каждого значения $l$ равны, т. $\theta$.

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}\left(\Omega'\right)Y_{lm}(\Omega).$$

С помищью (7.32) выражение (7.46) можно переписать через присоединенные полиномы Лежандра:

$$P_l(\cos\gamma) = P_l(\cos\theta)P_l\left(\cos\theta'\right) +$$

$$+2\sum_{m=1}^{l}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P^m_l(\cos\theta)P^m_l\left(\cos\theta'\right)\cos m\left(\phi-\phi'\right)$$

Уравнение (7.46) [(или (7.47)] и есть искомая теорема сложения.

(??!??!?!? так они нормированы на дельта функцию или на полином лежандра???)

### 2.0.2 Свойства сферических функций для квантовой механики (?)

(отдельно, наверное, указать это нужно.)
Сферические функции удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\cos\theta Y_{lm}(\theta,\varphi) =$$
$$= \sqrt{\frac{(l+1)^2-m^2}{(2l+1)(2l+3)}}Y_{l+1,m}(\theta,\varphi) + \sqrt{\frac{l^2-m^2}{(2l-1)(2l+1)}}Y_{l-1,m}(\theta,\varphi),$$

### 2.0.3 Scalar spherical harmon

### 2.0.4 Generalized spherical-harmonic tensor

### 2.0.5 tensor spherical harmonics

# 3 Некоторые многочлены

### 3.0.1 Полиномы Эрмита

#### Суть

производящая ф-я
их ортог-сть
интегр представление

#### Теория

Полиномы Эрмита возникают в задаче о квантовом осцилляторе, которая является одной из базисных задач квантовой механики. Помимо этого, они возникают в различных задачах, требующих рассмотрения функций на всей прямой, в отличие от полиномов Лежандра, которые относятся к отрезку $(-1,1)$. Кроме того, в ряде случаев разложение функции по полиномам Эрмита оказывается более эффективным, чем ряд Тейлора. Полиномы Эрмита определяются, как коэффициенты разложения в ряд Тейлора производящей функции:

$$\exp\left(-t^2+2tx\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_n(x)$$

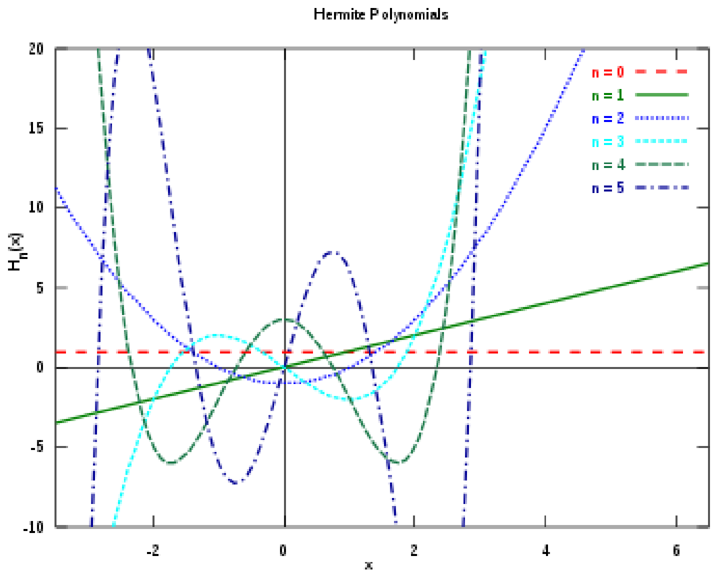
где $n$ называется индексом полинома Эрмита. Легко понять, что $H_n(x)$ является полиномом $n$-ой степени, поскольку наибольшая степень $x$ при $t^n$ в разложении производящей функции $\exp\left(-t^2+2tx\right)$ в ряд Тейлора получается при разложении $\exp(2tx)$. Производящая функция $\exp\left(-t^2+2tx\right)$ инвариантна относительно преобразования $t,x\to -t,-x$. При этом преобразовании в правой части изменяет знак аргумент $H_n$, а $t^n$ заменяется на $(-1)^n t^n$. Поскольку разложение должно остаться прежним, мы находим $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$. Другими словами полиномы Эрмита с четным индексом являются четными функциями $x$, а полиномы Эрмита с нечетным индексом являются нечетными функциями $x$.

Раскладывая $\exp\left(-t^2+2tx\right)$ до второго порядка по $t$, находим выражения для первых трех полиномов ЭрмиТа

$$H_0(x)=1,\quad H_1(x)=2x,\quad H_2(x)=4x^2-2$$

Следующие полиномы Эрмита могут быть найдены, если разложить $\exp(-t^2 + 2tx)$ до следующих порядков по t.

Графики нескольких первых полиномов Эрмита приведены на рисунке ниже.




Полагая в выражении (3.65) $x = 0$ и раскладывая $\exp(-t^2)$ в ряд по $t$, находим следующие значения четных полиномов Эрмита в нуле

$$H_{2n}(0) = (-1)^n 2^n (2n-1)!!,$$

где $(2n-1)!! \equiv (2n-1)(2n-3)...$ Далее, при малых $x$ справедливо соотношение $\exp(-t^2 + 2tx) \approx \exp(-t^2)(1 + 2tx)$. Снова раскладыгая $\exp(-t^2)$ в ряд по $t$, находим следующие значения производных нечетных полиномов Эрмита в нуле

$$H'_{2n+1}(0) = (-1)^n 2^{n+1} (2n+1)!!.$$

Дифференцируя соотношение (3.65) по $x$ и приравнивая коэффициенты при степенях $t$ в получившихся рядах, мы находим выражение для производной

$$\frac{dH_n(x)}{dx} = 2nH_{n-1}(x)$$

Далее, беря производную по $t$ от соотношения (3.65) и приравнивая коэффициенты при степенях $t$ в получившихся рядах, мы получаем

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$

Это рекуррентное соотношение позволяет последовательно вычислять полиномы Эрмита, стартуя с первых двух.

Соотношение (3.69) приводит нас к выводу, что функция $H_n(x)$ имеет ровно $n$ нулей при действительном $x$.

Другими словами, все корни уравнения $H_n(x) = 0$ действительны. Проведем доказательство по индукции. Если $H_n(x)$ имеет $n$ нулей, то в соответствии с (3.69) функция $H_{n+1}(x)$ имеет $n$ экстремумов. Между ними лежит $n-1$ нулей функции $H_{n+1}(x)$. Еще два нуля $H_{n+1}(x)$ лежат вне крайних экстремумов $H_{n+1}(x)$, поскольку на больших $x$ в полиноме доминирует член с наивысшей степенью $x$, то есть на больших $x$ функция $H_{n+1}(x)$ монотонно стремится к $\infty$ или $-\infty$.

Выражая в соотношении (3.69) $H_{n-1}$ в соответствии с (3.70), находим

$$\left(\frac{d}{dx} - 2x\right) H_n = -H_{n+1}.$$

Это соотношение легко позволяет доказать по индукции выражение

$$H_n(x) = (-1)^n \exp\left(x^2\right) \frac{d^n}{dx^n} \exp\left(-x^2\right).$$

Соотношение (3.72) очевидно, выполняется при $n = 0$, и воспроизводится при применении оператора в левой части (3.71), поскольку $(d/dx - 2x)\left[\exp\left(x^2\right) A\right] = \exp\left(x^2\right) dA/dx$ для произвольной функции $A(x)$. Соотношение (3.72) еще раз показывает, что $H_n$ является полиномом степени $n$.

**Задача**

3.5.1. Доказать, что старший член разлоюения $H_n(x)$ имеет вид $2^n x^n$.

**Задача**

3.5.2. Получить соотношение (3.65) из (3.72).

Легко проверить, что

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t}\right) \exp\left(-t^2 + 2tx\right) = 0.$$

При меняя приведенный дифференциальный оператор к правой части соотношения (3.65) и приравнивая результат к нулю, мы находим замкнутое дифференциальное уравнение на полином Эрмита $n$-го порядка

$$\frac{d^2 H_n}{dx^2} - 2x\frac{dH_n}{dx} + 2nH_n = 0.$$

Отметим, что оператор в (3.73) относится к типу Штурма-Лиувилля (2.6). Уравнение (3.73) инвариантно относительно замены $x \to -x$ и потому имеет четные и нечетные решения, в соответствии со сказанном выше о четности полиномов Эрмита. Уравнение (3.73) может быть получено и иначе. Подставляем в правую часть соотношения (3.69) $H_{n-1}$, выраженное в соответствии с (3.70) и дифференцируем получившееся соотношение по $x$. Выражая затем из (3.69) $dH_{n+1}/dx$, находим уравнение (3.73).

Четное решение уравнения (3.73) может быть разложено в ряд по четным степеням $x$:

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}.$$

Подставляя это выражсние в уравнение (3.73) и при равнивая коэффициенты при степенях $x$, мы находим рекуррентное соотношение

$$a_{k+1} = \frac{2k - n}{(k+1)(2k+1)} a_k,$$

которое позволяет последовательно вычислять коэффициенты разложения $u$ в ряд по $x$. При четных $n$ ряд по $x$ обрывается на $k = n/2$, и мы и меем дело с конечным полиномом, пропорциональным $H_n$ с четным индексом. При нечетных $n$ мы имеем дело с бесконечным рядом, который сходится при всех (комплексных) $x$ поскольку $a_{k+1} \approx a_k/k$ при больших $k$.

Этот ряд представляет второе (дополнительное к полиному Эрмита) решение уравнения (3.73) при нечетных $n$. Аналогичным образом исследуется нечетное решение уравнения (3.73), разложение которого в ряд по степеням $x$ пропорционально $H_n(x)$ для нечетных $n$ и дает второе (дополнительное к полиному Эрмита) решение уравнения (3.73) при четных $n$.

Чтобы получить интегральное представление для полиномов Эрмита, используем соотношение

$$\exp\left(-\xi^2+2\xi x\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{\sqrt{\pi}}\exp\left[-t^2+2\xi(x+it)\right]$$

Раскладывая обе части этого соотношения в ряд по $\xi$, находи м

$$H_n(x)=\frac{2^n}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dt(x+it)^n\exp\left(-t^2\right)$$

Представляем подынтегральное выражение в соотношении (3.74) в виде $\exp\left[n\ln(x+it)-t^2\right]$. Для больших $n$ можно использовать метод перевала, мы находим две перевальные точки $t_\pm=ix/2\pm\sqrt{n/2-x^2/4}$. Деформируя контур интегрирования так, чтобы он проходил через эти перевальные точки и суммируя соответствующие перевальные вклады, находим

$$H_n(x)\approx\sqrt{2}(2n/e)^{n/2}\exp\left(x^2/2\right)\cos(\sqrt{2n}x-\pi n/2),$$

справедливое при $n\gg x^2,1$.

Обращаем внимание на осциллирующий характер выражения (3.75). Осцилляции возникают, когда перевальные точки $t_\pm=ix/2\pm\sqrt{n/2-x^2/4}$ имеют противоположные дей ствительные части, что и обеспечивает условие $n\gg x^2,1$. В обратном предельном случае $x^2\gg n$ обе перевальные точки $t_\pm=ix/2\pm\sqrt{n/2-x^2/4}$ лежат на мнимой оси. В этом случае контур интегрирования следует деформировать таким образом, чтобы он проходил через ближайшую к действительной оси перевальную точку. (Отметим, что попытка провести контур через вторую перевальную точку некорректна, поскольку эта перевальная точка соответствует минимуму, а не максимуму подынтегрального выражения.) Вычисление перевального значения интеграла приводит к поведению $H_n\propto x^n$, то есть на больших $x\gg\sqrt{n}$ главный вклад в $H_n$ определяется старшим членом полинома, как и следовало ожидать. Отметим, что на интервале $-\sqrt{n}<x<\sqrt{n}$, где работает приближение (3.75), осцилляции дают $\sim n$ нулей функции $H_n$, в соответствии с общими свойствами $H_n$.

Уравнение (3.73) для $H_n$ может быть рассмотрено, как уравнение на собственные значения с оператором Штурма-Лиувилля (2.6) с $Q=-2x, U=0$. Отсюда следует условие ортогональности (2.68)

$$\int dx\exp\left(-x^2\right)H_n(x)H_m(x)=0$$

где в соответствие с (2.67) $\rho=\exp\left(-x^2\right)$, а интегрирование идет вдоль действительной оси. Найдем теперь константы $A_n$, фигурирующие в выражении (2.69):

$$A_n=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\exp\left(-x^2\right)H_n^2(x)=2^n n!\sqrt{\pi}$$

**Задача**

Доказать соотношение (3.77).

Указание: составить комбинацию $\exp(-t^2+2tx-s^2+2sx)$, выразить ее через двойную сумму по полиномам Эрмита из соотношения (3.65) и проинтегрировать получившееся раветство по $x$ с весом $\exp\left(-x^2\right)$. На этом пути получатся и соотношения ортогональности (3.76).

Таким образом, любую функцию $f(x)$, заданную на действительных $x$ и не слишком быстро стремящуюся к бесконечности при $x \to \pm\infty$, можно разложить в ряд по полиномам Эрмита

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(x)$$
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^n n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} H_n(x) f(x)$$

Это разложение представляет собой моди фиксацию разложения в ряд Тейлора.

Отметим, что условие полноты (2.70) имеет вид

$$\sum_n \frac{\exp\left(-x^2/2 - y^2/2\right)}{2^n n! \sqrt{\pi}} H_n(x) H_n(y) = \delta(x-y).$$

**Задача**

3.5.4. Доказать непосредственно условие полноты (3.80).

**Задача**

3.5.5. Найти значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp\left(-x^2\right) H_{2n}(xy).$$

**Задача**

3.5.6. Найти значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp\left[-(x-y)^2\right] H_n(x)$$

**Задача**

3.5.7. Найти значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx x \exp\left(-x^2\right) H_{2n-1}(xy)$$

**Задача**

3.5.8. Найти значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx x^n \exp\left(-x^2\right) H_n(xy)$$

Примечание: Ответ выражается через полином Лежандра.

**Задача**

3.5.9. Найти значение интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty} dx \exp\left(-x^2\right) \sinh(\beta x) H_{2n+1}(x)$$

**Задача**

3.5.10. Найти значение интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty} dx \exp\left(-x^2\right) \cosh(\beta x) H_{2n}(x)$$

**Задача**

3.5.11. Доказать соотношение

$$H_n(x) = \exp\left(-\frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2}\right)(2x)^n.$$

Указание: просуммировать по $n$ правую часть этого соотношения с весом $t^n/n\ !$ и показать, что эта сумма сводится кевой части соотношения (3.65).

## 3.0.2 a. Полиномы Эрмита

Уравнение

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

относится к типу уравнений, которые могут быть решены с помощью метода Лапласа.

Этот метод применим вообще к линейным уравнениям вида

$$\sum_{m=0}^{n} (a_m + b_m x)\frac{d^m y}{dx^m} = 0,$$

коэффициенты которого не выше первой степени по $x$, и заключается в следующем. Составляем полиномы

$$P(t) = \sum_{m=0}^{n} a_m t^m, \quad Q(t) = \sum_{m=0}^{n} b_m t^m$$

и с их помощью функцию

$$Z(t) = \frac{1}{Q}\exp\int\frac{P}{Q}dt$$

определенную с точностью до постоянного множителя. Тогда решение рассматриваемого уравнения может быть выражено в виде комплексного интеграла

$$y = \int\limits_C Z(t)e^{xt}dt$$

где путь интегрирования $C$ выбран так, чтобы интеграл имел значение конечное и отличное от нуля, причем функция

$$V = e^{xt} QZ$$

должна возвращаться к своему начальному значению, после того как $t$ опишет всю линию $C$ (контур $C$ может быть как замкнутым, так и незамкнутым). В случае уравнения (a.1) имеем

$$P = t^2 + 2n; \quad Q = -2t, \quad Z = -\frac{1}{2t^{n+1}} e^{-t^2/4}, \quad V = \frac{1}{t^n} e^{xt - t^2/4},$$

так что его решение имеет вид

$$y = \int \exp\left(xt - \frac{t^2}{4}\right) \frac{dt}{t^{n+1}}.$$

Для физических применений достаточно ограничиться рассмотрением значений $n > -1/2$. Для таких $n$ можно выбрать в качестве пути интегрирования контуры $C_1$ или $C_2$ (рис. 52), удовлетворяющие необходимым условиям, поскольку на их концах ($t = +\infty$ или $t = -\infty$) функция $V$ обращается в нуль.

Выясним, при каких значениях параметра $n$ уравнение (a.1) имеет решения, конечные при всех конечных значениях $x$ и стремящиеся при $x \to \pm\infty$ к бесконечности не быстрее конечной степени $x$. Рассмотрим сначала нецелые значения $n$. Интегралы ( a.2) по $C_1$ и $C_2$ дают здесь два независимых решения уравнения (a.1). Преобразуем интеграл по $C_1$, введя переменную $u$ согласно $t = 2(x - u)$. Находим, опуская постоянный множитель,

$$y = e^{x^2} \int\limits_{C_1'} \frac{e^{-u^2}}{(u - x)^{n+1}} du,$$

где интегрирование производится по контуру $C_1'$ в плоскости комплексного переменного $u$, изображенному на рис. 53.

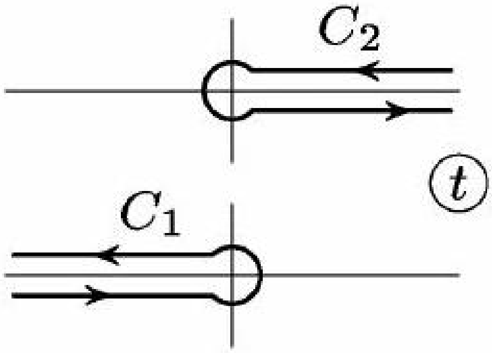



Рис. 52

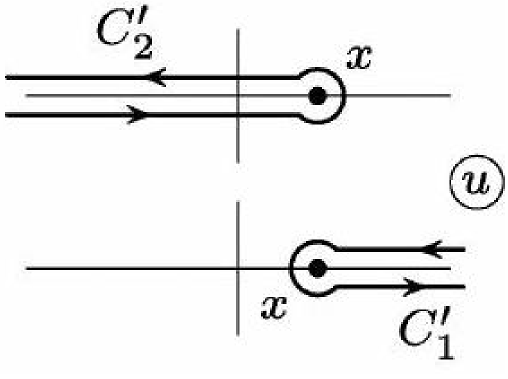


Рис. 53

При $x \to +\infty$ весь путь интегрирования $C_1'$ сдвигается на бесконечность, и интеграл в формуле (a.3) стремится к нулю, как $e^{-x^2}$. Но при $x \to -\infty$ путь интегрирования простирается вдоль всей вещественной оси, и интеграл в (a.3) не стремится к нулю экспоненциально, так что функция $y(x)$ обращается в бесконечность в основном, как $e^{x^2}$. Аналогично легко убедиться в том, что интеграл (a.2) по контуру $C_2$ расходится экспоненциально при $x \to \infty$.

При целых же положительных значениях $n$ (включая значение нуль) интегралы вдоль прямолинейных участков пути интегрирования взаимно уничтожаются, и оба интеграла (a.3)по $C_1'$ и $C_2'$ - сводятся к интегралу по замкнутому пути вокруг точки $u = x$. (1 Эти пути непригодны при целых отрицательных $n$, поскольку при таких $n$ интеграл (a.2) вдоль них обратился бы тождественно в нуль.) Таким образом, мы получим решение

$$y(x) = e^{x^2} \oint \frac{e^{-u^2}}{(u-x)^{n+1}} du,$$

удовлетворяющее поставленным условиям. Согласно известной формуле Коши для производных от аналитической функции

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(t)}{(t-x)^{n+1}} dt$$

это есть, с точностью до постоянного множителя, полином Эрмuта

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

В раскрытом виде полином $H_n$, расположенный по убывающим степеням $x$, имеет вид

$$H_n(x) = (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1}(2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2}(2x)^{n-4} - \dots$$

Он содержит степени $x$ только той же четности, что и число $n$. Выпишем несколько первых полиномов Эрмита

$$H_0 = 1, \quad H_1 = 2x, \quad H_2 = 4x^2 - 2, \quad H_3 = 8x^3 - 12x,$$
$$H_4 = 16x^4 - 48x^2 + 12.$$

Для вычисления нормировочного интеграла заменяем $e^{-x^2} H_n$ выражением из (a.4) и, интегрируя $n$ раз по частям, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n H_n(x) \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \frac{d^n H_n}{dx^n} dx.$$

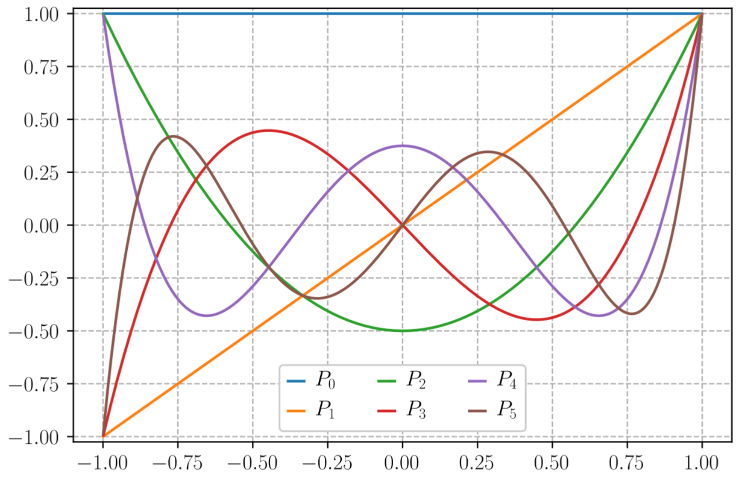
Но $d^n H_n / dx^n$ есть постоянная, равная $2^n n$ !; в результате получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

### 3.0.3 Многочлены Лежандра (!?!?)

(тут к теормину по математике 2 заготовки!)

### Суть




### Теория

Напомним, что в трехмерном пространстве Лапласиан электростатического потенциала точечного заряда $1/R$ равен нулю, $\nabla^2(1/R) = 0$. Здесь $R$ - расстояние от точки наблюдения до точечного заряда. Поместим точечный заряд в точку $(0, 0, 1)$ и перейдем к сферической системе координат $r, \theta, \varphi$. В этом случае $R = \sqrt{1 - 2r\cos\theta + r^2}$. Условие же $\nabla^2 R^{-1} = 0$ записывается в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) R^{-1} + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial R^{-1}}{\partial\theta}\right) = 0$$

Здесь отсутствует производные по $\varphi$, поскольку $R$ от этой переменной не зависит. Переходя к переменной $\mu = \cos\theta$, которая меняется от $-1$ до $+1$, мы находим

$$\left(r^2\partial_r^2 + 2r\partial_r\right) R^{-1} + \partial_\mu\left[\left(1 - \mu^2\right)\partial_\mu R^{-1}\right] = 0$$

Полиномы Лежандра $P_n(\mu)$ вводятся, как коэффициенты разложения в ряд Тейлора величины $R^{-1}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r\mu + r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) r^n.$$

Поскольку особенности левой части (3.44) по $r$ (точки ветвления) $\mu \pm i\sqrt{1 - \mu^2}$ лежат на единичном расстоянии от начала координат, то радиус сходимости ряда в правой части (3.44) равен единице, то есть он сходится при $r < 1$. Заметим, что

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r\mu + r^2}} = \frac{r^{-1}}{\sqrt{r^{-2} - 2r^{-1}\mu + 1}}.$$

Это позволяет записать эквивалентное (3.44) разложение по отрицательным степеням $r$:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r\mu + r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) r^{-1-n}.$$

Этот ряд сходится при $r > 1$. Как следует из (3.44) или (3.45), функция $P_n(\mu)$ является полиномом $n$-го порядка, симметричным по $\mu$ при четных $n$ и антисимметричным по $\mu$ при нечетных $n$. Отметим также равенство $P_n(1) = 1$. Оно непосредственно следует из того, что при $\mu = 1 R = 1 - r$, а $(1-r)^{-1} = \sum r^n$. Аналогично получается равенство $P_n(-1) = (-1)^n$

Явный вид полиномов Лежандра может быть найден прямым разложением $R^{-1}$ в соответствии с (3.44) или (3.45). Первые три полинома Лежандра равны

$$P_0(\mu) = 1, \quad P_1(\mu) = \mu, \quad P_2(\mu) = \frac{1}{2}\left(3\mu^2 - 1\right).$$

Графики нескольких первых полиномов Лежандра приведены на рисунке 3.9, где они изображены на интервале $-1 < \mu < 1$. В силу антисимметрии полинома для нечетного индекса $P_{2n+1}(0) = 0$.

Подставляя правую часть соотношения (3.44) вместо $R^{-1}$ в уравнение (3.43), мы приходим к уравнениям

$$\frac{d}{d\mu}\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\mu}P_n\right] + n(n+1)P_n = 0,$$

которые являются коэффициентами разложения получившегося соотношения по степеням $r$. В терминах угла $\theta, \mu = \cos\theta$, уравнение (3.47) переписываются в виде

$$\frac{d^2}{d\theta^2}P_n + \cot\theta\frac{dP_n}{d\theta} + n(n+1)P_n = 0,$$

Воспользуемся тождеством

$$\hat{K}_1\frac{1}{\sqrt{1-2r\mu+r^2}} = 0$$

$$\hat{K}_1 = \partial_r - \mu\left(2r\partial_r + 1\right) + \left(r^2\partial_r + r\right),$$

которое легко проверяется непосредственно. Применяя оператор $\hat{K}_1$ к правой части (3.44) и приравнивая к нулю коэффициенты при всех степенях $r$, находим следующее рекуррентное соотношение

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)\mu P_n + nP_{n-1} = 0.$$

Это соотношение позволяет явно находить $P_{n+1}(\mu)$, если известны выражения для $P_{n-1}(\mu)$ и $P_n(\mu)$. Таким образом, стартуя с первых двух полиномов Лежандра, можно, последовательно применяя (3.51), найти выражение для произвольного полинома Лежандра.

Далее, имеет место тождество

$$\hat{K}_2\frac{1}{\sqrt{1-2r\mu+r^2}} = 0,$$

$$\hat{K}_2 = \partial_r + (1-\mu/r)\partial_\mu$$

которое легко проверяется непосредственно. Применяя оператор $\hat{K}_2$ к правой части (3.44) и приравнивая к нулю коэффициенты при всех степенях $r$, находим соотношение

$$nP_n - \mu\frac{d}{d\mu}P_n + \frac{d}{d\mu}P_{n-1} = 0,$$

которое переписывается в виде

$$(n+1)P_n = \frac{d}{d\mu}\left(\mu P_n\right) - \frac{d}{d\mu}P_{n-1}$$

Для полиномов Лежандра справедливо следующее выражение

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\mu^n} \left(\mu^2 - 1\right)^n .$$

Это соотношение можно доказать по индукции, исходя из рекуррентного соотношения (3.51): если (3.55) справедливо для $P_{n-1}$ и $P_n$, то в силу (3.51) оно справедливо и для $P_{n+1}$. Кроме того, выражение (3.55) легко проверяется для первых двух полиномов Лежандра (3.46), что завершает доказательство.

Соотношение (3.54) означает, что член $n(n+1)P_n$ в уравнении (3.47) записывается в виде полной производной. Беря первообразную от получившегося выражения, находим

$$\left(\mu^2 - 1\right) \frac{d}{d\mu} P_n(\mu) = n \left[\mu P_n(\mu) - P_{n-1}(\mu)\right]$$

Константа интегрирования здесь равна нулю, поскольку при $\mu = 1$ обе части соотношения (3.56) обращаются в ноль. Соотношения (3.56) позволяют свести производные от полиномов Лежандра к комбинации самих этих полиномов.

Соотношение (3.44) можно использовать для получения интегрального представления для полиномов Лежандра. Воспользовавшись теоремой о вычете, мы находим из соотношения (3.44)

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z^{n+1}} \frac{1}{\sqrt{1 - 2z\mu + z^2}},$$

где интеграл идет против часовой стрелки по небольшому замкнутому контуру, охватывающему начало координат. Корень квадратный имеет точки ветвления по $z$ при $z_\pm = \mu \pm i\sqrt{1-\mu^2}$, которые лежат на единичной окружности, если $\mu$ - действительное число и $|\mu| < 1$. Эти точки ветвления расположены в точках $z_\pm = \exp(\pm i\theta)$, где $\mu = \cos\theta$. Таким образом, разрез функции $(1 - 2z\mu + z^2)^{-1/2}$ можно провести вдоль дуги единичной окружности в плоскости $z$, которая определяется условиями $\theta < \vartheta < 2\pi - \theta$, где $\theta$ предполагается лежащим в интервале $0 < \theta < \pi$, а $\vartheta$ - аргумент $z$. Это построение предст авлено на ри сунке 3.10, где разрез показан черной дугой. Деформируем теперь контур интегрирования в приведенном выше интеграле. Сначала мы увеличим его радиус, а затем "вывернем" через бесконечность. В результате контур будет охватывать разрез функции $(1 - 2z\mu + z^2)^{-1/2}$. Эта последовательность деформаций проиллюстрирована на рисунке 3.10, где контуры интегрирования показаны синим цветом. Прижимая контур интегрирования к разрезу, мы сводим интеграл к интегралу по разрезу от скачка функции $z^{-n-1}\left(1 - 2z\mu + z^2\right)^{-1/2}$, которая имеет противоположные знаки по берегам разреза. Мы можем подставить на разрезе $z = e^{i\vartheta}$, тогда $1 - 2z\mu + z^2 = 2e^{i\vartheta}(\cos\theta - \cos\vartheta)$. Преобразуем интегрирование по контуру к интегрированию по углу $dz = ie^{i\vartheta}d\vartheta$. В результате получаем

$$P_n(\cos\theta) = \frac{2}{\pi} \int\limits_\theta^\pi d\vartheta \frac{\sin[(n+1/2)\vartheta]}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\vartheta)}},$$

где синус возник в результате суммирования вкладов от верхней и от нижней полудуг.

Интегральное представление (3.57) позволяет найти асимптотическое выражение для полиномов Лежандра при больших $n$. В этом случае в силу быстрой осцилляции $\sin[(n + 1/2)\vartheta]$ главный вклад в интеграл набирается вблизи нижнего предела интегрирования из-за знаменателя в (3.57). Подставляя $\vartheta = \theta + x$, раскладывая по $x$ подынтегральное выражение и устремляя затем верхний предел интегрирования к бесконечности, мы находим

$$P_n(\cos\theta) \approx \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty dx \frac{\sin[(n+1/2)(\theta+x)]}{\sqrt{2\sin\theta x}}$$

Вычисляя здесь интеграл по $x$, мы находим асимптотическое выражение

$$P_n(\cos\theta) \approx \frac{2\cos[(n+1/2)\theta - \pi/4]}{\sqrt{(2n+1)\pi\sin\theta}}$$

Выражение (3.59) можно получить также методом WKB (смотри раздел 3.7.3), который работает как раз при больших $n$. Чтобы применить этот метод, перепишем уравнение (3.48) в терминах переменной $t = \ln\tan(\theta)$. Тогда оно принимает вид уравнения (3.106):

$$\frac{d^2 P_n}{dt^2} + \frac{n(n+1)}{\cosh^2 t} P_n = 0.$$

Таким образом

$$p = i(n+1/2)/\cosh t = i(n+1/2)\sin\theta,$$
$$S = \int dt p(t) = i(n+1/2)\theta,$$

где мы подставили $\sqrt{n(n+1)} \approx n+1/2$. При больших $n$ выполняется неравенство $dp/dt \ll p^2$, что оправдывает применение метода W KB. Суммируя теперь два члена (3.107), мы и получаем выражение (3.59). Разумеется, приведенным методом невозможно получить общий множитель и сдвиг фазы.

Рассмотрим теперь произвольное решение уравнения (3.47), регулярное в точке $\mu = 1$, когда оно разлагается в ряд Тейлора по $x = \mu - 1$. Перепишем уравнение (3.47) в терминах переменной $x$:

$$\left(2x + x^2\right) P'' + 2(1+x)P' - n(n+1)P = 0,$$

где штрих означает дифференцирование по $x$. Подставляя в это выражение разложение в ряд Тейлора $P$ по $x$, $P = \sum\limits_k p_k x^k$, мы находим рекуррентное соотношение

$$2(k+1)^2 p_{k+1} = [n(n+1) - k(k+1)]p_k.$$

Таким образом, при целом $n$ цепочка соотношений обрывается на $k = n$, и решение оказывается конечным полиномом, который (с точностью до множителя) совпадает с $P_n(\mu)$. Если же $n$ не является неотрицательным целым числом, то в разложении присутствуют все степени $x$. В пределе больших $k$ мы имеем $p_{k+1} = -(1/2)p_k$. Отсюда следует, что радиус сходимости этого ряда равен 2, и, более того, он приводит к простому полюсу при $x = -2$, то есть $\mu = -1$. Таким образом, мы доказали, что полиномами Лежандра исчерпываются решения уравнения (3.47), регулярные как в точке $\mu = 1$, так и в точке $\mu = -1$. Как следует из уравнения (3.47), полиномы Лежандра являются собственными функциями оператора

$$\hat{L} = \frac{d}{d\mu}\left(1-\mu^2\right)\frac{d}{d\mu}$$

который является самосопряженным на классе функций, заданных на интервале $-1 < \mu < 1$ и остающихся ограниченными на этом интервале, включая конечные точки. Самосопряженность оператора (3.61), то есть свойство (2.60), смотри раздел 2.4.1, легко проверяется интегрированием по частям. Поэтому полиномы Лежандра удовлетворяют условиям ортогональности (2.61):

$$\int_{-1}^{1} d\mu P_n(\mu) P_l(\mu) = 0$$

если $n \neq l$.

Соотношение (3.62) можно получить и из уравнения (3.48), в соответствии с которым полиномы Лежандра являются собственными функциями оператора Птурма-Лиувилля (2.6) с $Q = \cot\theta$ и $U = 0$. В этом случае в соответствии с (2.67)$\rho = \sin\theta$. Интервал же интегрирования по углу $\theta$ распространяется от 0 до $\pi$. У словие (2.61) переписывается в виде $\int d\mu f_n f_m = 0$, где $\mu = \cos\theta$. Таким образом, в терминах переменной $\mu$ полиномьг лежандра ортогональны с весом единица на интервале - ние (3.62).

Нормировочный множитель для полиномов Лежандра дается выражением

$$\int_{-1}^{1} d\mu P_n^2(\mu) = \frac{2}{2n+1}.$$

Общее соотношение (2.64) означает, что полиномы Лежандра, как полная система собственных функций оператора (3.61), конечных на интервале $(-1, +1)$, удовлетворяют соотношению

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k + 1/2) P_k(x) P_k(y) = \delta(x - y).$$

**О применениях многочленов Лежандра (!?!??!)**

При решении задач теории поля или квантовой механики зачастую возникают случаи, когда описывающие поле уравнения обладают симметрией относительно вращений вокруг некоторой точки. В этом случае задача допускает разделение переменных. Типичным примером является уравнение Шрёдингера для частицы, помещенной в центрально-симметричное поле, потенциал которого $U$ зависит только от расстояния $r$ до некоторой точки, в которую мы поместим начало координат. При решении такого рода уравнений, дифференциальная часть которого управляется Лапласианом, возникают полиномы Лежандра.

### 3.0.4 с. Полиномы Лежандра

Полиномы Лежандра $P_l(\cos\theta)$ определяются формулой

$$P_l(\cos\theta) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{(d\cos\theta)^l} \left(\cos^2\theta - 1\right)^l.$$

Они удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{dP_l}{d\theta} \right) + l(l+1) P_l = 0.$$

[0]В математической литературе есть много хороших изложений теории шаровых функций. Здесь мы приводим для справок лишь некоторые основные соотношения, совершенно не занимаясь систематическим изложением теории этих функций.

Присоединенные полиномы Лежандра определяются формулой

$$P_l^m(\cos\theta) = \sin^m\theta \frac{d^m P_l(\cos\theta)}{(d\cos\theta)^m} = \frac{1}{2^l l!}\sin^m\theta \frac{d^{l+m}}{(d\cos\theta)^{l+m}}\left(\cos^2\theta - 1\right)^l$$

или эквивалентной ей

$$P_l^m(\cos\theta) = (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!2^l l!}\sin^{-m}\theta \frac{d^{l-m}}{(d\cos\theta)^{l-m}}\left(\cos^2\theta - 1\right)^l,$$

причем $m = 0, 1, ..., l$. Присоединенные полиномы удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP_l^m}{d\theta}\right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P_l^m = 0.$$

Нормировочный интеграл полиномов Лежандра $\int\limits_{-1}^{1}[P_l(\mu)]^2\,d\mu$ $(\mu = \cos\theta)$ вычисляется подстановкой в него выражений (с.1) и $l$-кратным интегрированием по частям, после чего он оказывается равным

$$\frac{(-1)^l}{2^{2l}(l!)^2}\int\limits_{-1}^{1}\left(\mu^2-1\right)^l\frac{d^{2l}}{d\mu^{2l}}\left(\mu^2-1\right)^l d\mu = \frac{(2l)!}{2^{2l}(l!)^2}\int\limits_{-1}^{1}\left(1-\mu^2\right)^l d\mu.$$

Подстановкой $u = (1-\mu)/2$ этот интеграл приводит к $B$-интегралу Эйлера и дает

$$\int\limits_{-1}^{1}[P_l(\mu)]^2\,d\mu = \frac{2}{2l+1}.$$

Аналогичным образом легко убедиться в том, что функции $P_l(\mu)$ с различными $l$ взаимно ортогональны:

$$\int\limits_{-1}^{1}P_l(\mu)P_{l'}(\mu)d\mu = 0, \quad l \neq l'.$$

Вычисление нормировочного интеграла для присоединенных полиномов легко произвести аналогичным образом, написав $[P_l^m(\mu)]^2$ в виде произведения выражений (с.3) и (с.4) и интегрируя $l-m$ раз по частям; в результате получается

$$\int\limits_{-1}^{1}[P_l^m(\mu)]^2\,d\mu = \frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}.$$

Легко также убедиться в том, что функции $P_l^m$ с различными $l$ (и одинаковыми $m$) взаимно ортогональны:

$$\int\limits_{-1}^{1}P_l^m(\mu)P_{l'}^m(\mu)d\mu = 0, \quad l \neq l'.$$

Вычисление интегралов от произведений трех полиномов Лежандра рассматривалось в 107.

Для полиномов Лежандра имеет место следующая теорема сложения. Пусть $\gamma$ - угол между двумя направлениями, определяемыми сферическими углами $\theta, \varphi$ и $\theta', \varphi'$ : $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + +\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi')$. Тогда

$$P_l(\cos\gamma) = P_l(\cos\theta) P_l(\cos\theta') +$$
$$+ \sum_{m-1}^{l} 2\frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos\theta) P_l^m(\cos\theta') \cos\left[m(\varphi-\varphi')\right].$$

Эта теорема может быть также записана в терминах шаровых функций (определенных согласно (28.7)) в виде

$$P_l(\mathbf{n}\mathbf{n}') = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*(\mathbf{n}') Y_{lm}(\mathbf{n}).$$

Здесь $\mathbf{n}, \mathbf{n}'$ - два единичных вектора, а $Y_{ln}(\mathbf{n})$ означает сферическую функцию от полярного угла и азимута направления $\mathbf{n}$ относительно фиксированной системы координат.

Умножим равенство (c.10) на $P_{l'}(\cos\theta)$ и проинтегрируем его по $do = \sin\theta d\theta d\varphi$. Интегрирование по $d\varphi$ обращает в нуль все члены в правой части равенства, содержащие множители $\cos\left[m(\varphi-\varphi')\right]$; с учетом (c.6), (c.7) получим

$$\int P_l(\cos\gamma) P_{l'}(\cos\theta) do = \delta_{ll'} \frac{4\pi}{2l+1} P_l(\cos\theta').$$

Этот результат можно записать в симметричном виде

$$\int P_l(\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2) P_{l'}(\mathbf{n}_1\mathbf{n}_3) do_1 = \delta_{ll'} \frac{4\pi}{2l+1} P_l(\mathbf{n}_2\mathbf{n}_3)$$

где $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ - три единичных вектора, а интегрирование производится по направлениям одного из них - $\mathbf{n}_1$. Наконец, приведем выражения нескольких первых нормированных сферических функций $Y_{lm}$:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{10} = i\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \quad Y_{1,\pm1} = \pm i\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta \cdot e^{\pm i\varphi}$$
$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(1-3\cos^2\theta\right), \quad Y_{2,\pm1} = \pm\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\cos\theta\sin\theta \cdot e^{\pm i\varphi}$$
$$Y_{2,\pm2} = -\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta \cdot e^{\pm 2i\varphi}, \quad Y_{30} = -i\sqrt{\frac{7}{16\pi}}\cos\theta\left(5\cos^2\theta-3\right)$$
$$Y_{3,\pm1} = \pm i\sqrt{\frac{21}{64\pi}}\sin\theta\left(5\cos^2\theta-1\right)e^{\pm i\varphi},$$
$$Y_{3,\pm2} = -i\sqrt{\frac{105}{32\pi}}\cos\theta\sin^2\theta \cdot e^{\pm 2i\varphi}, \quad Y_{3,\pm3} = \pm i\sqrt{\frac{35}{64\pi}}\sin^3\theta \cdot e^{\pm 3i\varphi}.$$

### 3.0.5 Присоединенные полиномы Лежандра

### 3.0.6 Многочлены Лагерра (!?!?)

#### Суть (??)

В математике многочлены Лагерра, названные в честь Эдмона Лагерра (1834–1886), являются каноническими решениями уравнения Лагерра:

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0,$$

являющегося линейным дифференциальным уравнением второго порядка. В физической кинетике эти же многочлены (иногда с точностью до нормировки) принято называть полиномами Сонина или Сонина - Лагерра[1]. Многочлены Лагерра также используются в квадратурной формуле Гаусса - Лагерра численного вычисления интегралов вида:

$$\int_0^\infty f(x)e^{-x}dx.$$

Многочлены Лагерра, обычно обозначающиеся как $L_0, L_1, ...,$ являются последовательностью полиномов, которая может быть найдена по формуле Родрига

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x}x^n\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \left( \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) x^k.$$

Эти полиномы ортогональны друг другу со скалярным произведением:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}dx.$$

Последовательность полиномов Лагерра - это последовательность Шесрфера. Многочлены Лагерра применяются в квантовой механике, в радиальной части решения уравнения Шрёдингера для атома с одним электроном. Имеются и другие применения многочленов Лагерра.

В следующей таблице приведены несколько первых многочленов Лагерра:

| $n$ | $L_n(x)$ |
|---|---|
| 0 | $1$ |
| 1 | $-x+1$ |
| 2 | $\frac{1}{2}\left(x^2-4x+2\right)$ |
| 3 | $\frac{1}{6}\left(-x^3+9x^2-18x+6\right)$ |
| 4 | $\frac{1}{24}\left(x^4-16x^3+72x^2-96x+24\right)$ |
| 5 | $\frac{1}{120}\left(-x^5+25x^4-200x^3+600x^2-600x+120\right)$ |
| 6 | $\frac{1}{720}\left(x^6-36x^5+450x^4-2400x^3+5400x^2-4320x+720\right)$ |

Рекуррентная формула

Полиномы Лагерра можно определить рекуррентной формулой:

$$L_{k+1}(x) = \frac{1}{k+1}\left[(2k+1-x)L_k(x) - kL_{k-1}(x)\right], \quad \forall k \geqslant 1,$$

предопределив первые два полинома как:

$$L_0(x) = 1,$$
$$L_1(x) = 1 - x.$$

Обобщённые полиномы Лагерра

Обобщённые полиномы Лагерра $L_n^a(x)$ являются решениями уравнения:

$$xy'' + (a+1-x)y' + ny = 0,$$

так что $L_n(x) = L_n^0(x)$.

### 3.0.7 Многочлены Чебышева

**Суть**

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$
$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$$

**О применениях**

**О применениях в вычислительной математике (??)**

(напишу потом, пока только там их встречал. почему именно они нужны, а не другие?)

# Part III
# Generalized functions

## 3.1 Свойства обобщенных функций

(по идее в матане тоже это будет.)

**свойства обобщенных функций**

Умножсение обобщенных функций может быть опрелелено либо как предел произведения $\varepsilon$ -представлений, либо как функционал. Во втором случае, если $f$ и $g$ - две обобщенные функнии. то произведение их определяется как:

$$(g \cdot f, \varphi) = (g, f\varphi)$$

видно, что одна из функций (в данном случае $f$) должна быть достаточно «хрошей», чтобы имеюшаяся сингулярность функции $g$ не превысипа ционал, так и вычисляя производную какого-либо $\varepsilon$-прелставления Трехмерная функция $\delta(\mathbf{r})$ опрелеляется как

$$\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{r}} \mathrm{d}^3\mathbf{k}$$

где интегрирование совершается по всему k-пространству. Соответственно, основное свойство (10.1) теперь принимает вил

$$\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}\delta(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) = f(0)$$

где интегрирование выполняется по некоторой области, включающей точку $\mathbf{r} = 0$.

Если функция $f(\mathbf{r}) = f(|\mathbf{r}|) = f(r)$ и при этом регулярна в нуле, свойсгво (10.41) можно переписать как

$$\int \delta(\mathbf{r}) f(r) \mathrm{d}^3\mathbf{r} = \int f(r) r^2 \, \mathrm{d}r \int \delta(\mathbf{r}) \mathrm{d}\Omega = f(0)$$

Выражение (10.42) позволяет ввести «радиальную ф функцию $\delta(r)$ :

$$\delta(r) = \frac{1}{2\pi} \frac{\delta(r)}{r^2} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\delta'(r)}{r}$$

$\delta$-функции в нуле. При этом данная операция вполне допустима, посколь- ку элемент объема содержит $r^2$. Множитель $1/2\pi$ учитыгает что интегпи- делить как $1/z$, но с особым выбором пути интегрирования (контура) для каждой функции.

Действительно, это свойство вытекает из формул... (10.24) и (10.33) и рис. 10.1 и 10.2.

Заметим, что дтя $\delta$-функции выбирается замкнутый контур, обходящий точку 0. Контуры интегрирования, дающие различные обобщенные функции из функции $1/z$, представлены на общем рис. 10.3.

1. Произведение двух функций $\wp \frac{1}{r}$ не определено. Действительно, согласно (10.39) можем записать:

$$\wp\frac{1}{x} \cdot \wp\frac{1}{x} = \left(\wp\frac{1}{x}, \wp\frac{1}{x}\varphi(x)\right) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x^2} \, \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{M}{\varepsilon} \to \infty.$$

2. Вместе с тем определена производная от функции $\wp$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\wp\frac{1}{x},\varphi(x)\right)=-\left(\wp\frac{1}{x},\varphi'(x)\right)=-\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi'(x)-\varphi'(0)}{x}\,\mathrm{d}x=$$

$$=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi'(x)+\varphi'(0)-x\varphi'(0)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Если воспользоваться $\varepsilon$ -представлением. получаем

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\wp\frac{1}{x}\right)_\varepsilon=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}=-\frac{x^2-\varepsilon^2}{\left(x^2+\varepsilon^2\right)^2}$$

3. Покажем, что

$$\wp\frac{1}{x}\cdot\delta(x)=-\frac{1}{2}\delta'(x)$$

Действительно, воспользуемся $\varepsilon$ -прелставлениями обеих функтий:

$$\left(\wp\frac{1}{x}\right)_\varepsilon=\frac{x}{x^2+\varepsilon^2},\quad \delta_\varepsilon(x)=\frac{\varepsilon}{\pi\left(x^2+\varepsilon^2\right)},\quad \delta'_\varepsilon(x)=-\frac{2\varepsilon x}{\pi\left(x^2+\varepsilon^2\right)}$$

результат (10.44).

4. Можно так же показать, что не опрелелено произвеление лвуxх $\delta$-функций, имеющих одинаковый аргумент.

5. Так же как и во втором примере, используя $\varepsilon$ -прелставления можно показать, что

$$\left(\wp\frac{1}{x}+\pi\delta(x)\right)\left(\wp\frac{1}{x}-\pi\delta(x)\right)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\wp\frac{1}{x}$$

6. Определено произведение двух функций Сохошкого:

$$\frac{1}{x-\mathrm{i}0}\cdot\frac{1}{x-\mathrm{i}0}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{x-\mathrm{i}0}=-\mathrm{i}\pi\delta'(x)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\wp\frac{1}{x}$$

1. Показать, что в смысле обобщенных функций

$$\int\limits_0^\infty\sin k_1x\cos kx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+k_1}-\frac{1}{k-k_1}\right)$$

2. Показать, что при $a\neq b$ произведение

$$\delta(x-a)\delta(x-b)=0$$

3. Доказать формулу:

$$\delta(ax+by)\delta(cx+dy)=\det\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{-1}\delta(x)\delta(y)$$

## 3.2 Дельта функция дирака

### 3.2.1 Основы дельта-функции

**определение**

Оперирование с идеальными объектами в физике такими как дит к появлению в математическом аппарате, описывающем эти объек- ты, так называемых обобщенных функций. Наиболее известные и част выражениях, умноженными на «хорошую" функцию. Поэтому свойст- ва обобщенных функций определяются свойствами интегралов - они имеют интегральный смысл.

Таким образом, математическая теория обобщенных функций стnоится на сопоставлении им функционалов, т. е. интегральных выражений. содержащих произведения с хорошими «функциями». Например. пляя $\delta(x)$-функции определяется функционал с пооизвотьной «хороших функцией:

$$(\delta(x), \varphi(x)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \varphi(0)$$

В функционале происходит «сглаживание (усрелнение) сингупапиости $\delta$-функции. В физике это отвечает замене молели точечнота обтеита некоторым распределением в єфизически бесконечно маломм облеме так что среднее значение распределенного объекта совпалает с величиной точечного.

Прежде всего подчеркнем, что $\delta$-функция - это операторная величина, которая приобретает «реальный» смысл только если она стоит под знаком интеграла. Иными словами, $\delta$-функция есть ядро линейного интегрального оператора. При этом само ядро не есть функция в обычном смысле.

Представления и определения $\delta$-функции мы рассмотрим в следующем параграфе, а сейчас приведем, пожалуй, самое распространенное определение:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{K\to\infty} \int\limits_{-K}^{K} \mathrm{e}^{\mathrm{i}Kx}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \lim_{K\to\infty} \int\limits_{0}^{K} \cos Kx\, \mathrm{d}x \equiv \frac{1}{\pi} \lim_{K\to\infty} \frac{\sin Kx}{x}.$$

Сам по себе предел $K \to \infty$ выражения (10.2), конечно, не существует, однако, если его правую часть умножить на «хорошую» (обычную) функцию, регулярную при $x = 0$ и проинтегрировать по интервалу, включаюшшему точку $x = 0$, а после интегрирования выполнить предельный переход, предел будет существовать:

$$\int\limits_{-a}^{b} \delta(x) f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \lim_{K\to\infty} \int\limits_{-aK}^{bK} f\left(\frac{y}{K}\right) \frac{\sin y}{y}\, \mathrm{d}y = f(0)$$

Формула (10.3) определяет основное свойство $\delta$-функции и ее можно рассматривать как определение (10.1).

Наглядно $\delta(x)$ можно представить себе как функцию, равную нулю при всех $x \neq 0$, но имеюшую в точке $x = 0$ столь сильную сингулярНОСТЬ, чТО

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\mathrm{d}x = 1$$

Если формально продифференцировать определение (10.2), получим определение производной от $\delta$-функции:

$$\delta'(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{K\to\infty}\left(\frac{K\cos Kx}{x} - \frac{\sin Kx}{x^2}\right)$$

которая имеет «реальный» смысл только в интегральном выражении. Если после выполнения интегрирования выполнить предельный перехол так же, как и в формуле (10.3), получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)\mathrm{d}x = -f'(0)$$

Заметим, что интегрированием по частям, выражение (10.3) сводится к выражению (10.6), где производная $\delta$-функции опрелелена в соответствии с(10.5)

**представления дельта-функции**

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся случаи появления $\delta$-функции, когда некоторый параметр стремится к нулю. 1. Бесконечно медленное (адиабатическое) изменение физической величины (как правило - некоторого взаимодействия). В этом случае имеем интегральное выражение:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{\pi\left(x^2+\varepsilon^2\right)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\varepsilon|k|}\mathrm{e}^{\pm ikx}\ \mathrm{d}k$$

Действительно, выражение (10.7) обладает необходимыми свойствами:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{\varepsilon}{\pi\left(x^2+\varepsilon^2\right)}\right|_{x\neq 0} = 0$$

и соответственно при $x = 0$ получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi\varepsilon} = \infty$$

Вычислим теперь интеграл от дроби, стоящей под знаком предела:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon\mathrm{d}x}{\pi\left(x^2+\varepsilon^2\right)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}y}{\pi\left(1+y^2\right)} = \frac{2\pi\mathrm{i}}{\pi}\ \mathrm{res}\ \left.\frac{1}{1+y^2}\right|_{y=\mathrm{i}} = 1$$

**Дельта функция в представлении Дирихле**

2. Периодически меняюшееся взаимодействие (представление Дирихле)

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\sin Nx}{\pi x} = \frac{1}{2\pi}\lim_{N\to\infty}\int\limits_{-N}^{N}\mathrm{e}^{\pm ikx}\ \mathrm{d}k = \frac{1}{\pi}\lim_{N\to\infty}\int\limits_{0}^{N}\cos kx\ \mathrm{d}k$$

Здесь роль малого $\varepsilon$ играет $1/N$. В дальнейшем придется часто пользоваться теоремой Римана-Лебега: интеграл от произведения медленно меняющейся функции $f(x)$ и периодической функции с малым периодом и средиим за период равным нулю мал и в пределе равен нулю. Это имеет место, например для функций: $\exp(\mathrm{i}Nx), \sin Nx, \cos Nx$ при $N \to \infty$. Действительно, беря по частям интеграл, получаем

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Nx}\ \mathrm{d}x = f(x)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}Nx}}{\mathrm{i}N}\bigg|_a^b - \frac{1}{\mathrm{i}N}\int\limits_a^b f'(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Nx}\ \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{i}N}\left(f(b)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Nb} - f(a)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Na}\right) + O\left(\frac{1}{N^2}\right)\bigg|_{N\to\infty} \to 0$$

Проверим теперь выполнение основных свойств $\delta$-функции для выражения (10.8). Заметим, что в конечных пределах

$$\int\limits_a^b \lim_{N\to\infty}\frac{\sin Nx}{\pi x}\varphi(x)\mathrm{d}x = 0$$

но интеграл в бесконечных пределах (по всей оси) отличен от нуля и равен

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Nx}{x}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin y}{y}\ \mathrm{d}y = 1$$

Таким образом, согласно сформулированной выше теореме получаем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Nx}{x}\varphi(x)\mathrm{d}x = \varphi(0)\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Nx}{x}\ \mathrm{d}x = \varphi(0).$$

Следовательно, функция (10.8) удовлетворяет основному свойству $\delta$-функции (10.1). Рассмотренные два представления наиболее часто встречаются в физических задачах.

**Дельта функция в представлении гауссовой экспоненты:**

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}\mathrm{e}^{-x^2/\varepsilon}$$

Легко видеть, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}\mathrm{e}^{-x^2/\varepsilon}\bigg|_{x\neq 0} = 0, \quad \text{Но} \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}\mathrm{e}^{-x^2/\varepsilon}\bigg|_{x=0} = \infty.$$

Сама функция по знаком предела (10.10) выбрана нормированной на единицу:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}\mathrm{e}^{-x^2/\varepsilon}\mathrm{d}x = 1$$

Для любой хорошей функции, как и в представлении Дирихле можем записать:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}\mathrm{e}^{-x^2/\varepsilon}\varphi(x)\mathrm{d}x = \varphi(0)\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}}\mathrm{e}^{-x^2/\varepsilon}\mathrm{d}x = \varphi(0)$$

**Дельта функция в представлении, похожем на Дирихле**

(?? никак не называется?)

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon \sin^2(x/\varepsilon)}{\pi x^2}$$

Вновь легко проверяем:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon \sin^2(x/\varepsilon)}{\pi x^2}\bigg|_{x\neq 0} = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon \sin^2(x/\varepsilon)}{\pi x^2}\bigg|_{x=0} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi\varepsilon} = \infty$$

Осталось убедиться, что интеграл в бесконечных пределах от рассматриваемой функции равен 1. Для этого вычислим интеграл

$$I(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \alpha y}{y^2}\,\mathrm{d}y$$

Интеграл вычисляется дифференцированием по параметру $\alpha$:

$$\frac{\partial I(\alpha)}{\partial\alpha} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\alpha y\cos\alpha y}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\alpha y}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = 1$$

Решая тривиальное дифференциальное уравнение $I'(\alpha) = 1$, получаем: $I(\alpha) = \alpha +$ const с «ачальным» условием $I(0) = 0$, поэтому $I(\alpha) = \alpha$. Заметим теперь, что заменой $x/\varepsilon = y$ мы сводим нужный нам интеграл к вспомогательному при $\alpha = 1$. Таким образом убеждаемся, что функция под знаком предела нормирована на 1. Далее, воспользовавшись теоремой Римана-Лебега, убеждаемся, что рассматриваемое представление удовлетворяет основному свойству $\delta$-функции (10.1).

**Дельта функция в представлении Пикара**

$$\delta(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{N}{2}\mathrm{e}^{-N|x|}$$

Здесь так же как в представлении Дирихле $\varepsilon = N^{-1}$. Легко убеждаемся:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N}{2}\mathrm{e}^{-N|x|}\bigg|_{x\neq 0} = 0, \quad \lim_{N\to\infty} \frac{N}{2}\mathrm{e}^{-N|x|}\bigg|_{x=0} = \lim_{N\to\infty}\frac{N}{2} = \infty$$

Интеграл в бесконечных пределах равен 1 и не зависит от параметра $N$.

**Представление Стильтьеса**

$$\delta(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{N}{2\pi\,\mathrm{ch}\,Nx}$$

$$\delta(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{N}{2\pi\,\mathrm{ch}\,Nx}$$

Проверяем выполнение необходимых требований:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N}{2\pi\,\mathrm{ch}\,Nx}\bigg|_{x\neq 0} = 0, \quad \lim_{N\to\infty} \frac{N}{2\pi\,\mathrm{ch}\,Nx}\bigg|_{x=0} = \lim_{N\to\infty}\frac{N}{2\pi} = \infty$$

Убедимся, что функция нормирована на единицу:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{N\,\mathrm{d}x}{2\pi\,\mathrm{ch}\,Nx} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{N\mathrm{e}^{-Nx}}{\pi\left(1+\mathrm{e}^{-2Nx}\right)}\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} y\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1$$

Убелиться в том, что представление (10.14) удовлетворяет необходимому свойству (10.1) можно так же, как в случае с быстро убываюшей гауссовой экспонентой (10.8).

В заключение параграфа отметим, что $\delta$-функция размерна, ее размерность обратна размерности аргумента:

$$[\delta(x)] = [x]^{-1}$$

**свойства**

Подчеркнем еще раз, что свойства обобщенных функций не зависят от выбора представления, аппроксимирующего данную функцию: свойства обобщенных функций выполняются в пространстве основных, «хороших функций. Например, в классе функций $C^{\infty}$, которые при $|x| \to \infty$ стремятся к нулю вместе со своими производными любого порядка быстрее любой степени $1/|x|$. Таким образом, равенства в формулах понимаются как равенства соответствующих функционалов. В этом смысле обобщенную функцию можно рассматривать как ядро линейного интегрального оператора.

Например, основное свойство $\delta$-функции (10. 1) для какой-либо функции $f(x)$ записанное в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = f(0)$$

следует понимать как::

$$(f(x)\delta(x), \varphi(x)) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_{\varepsilon}(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = f(0)\varphi(0) =$$

$$= f(0)\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta_{\varepsilon}(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

Поскольку все свойства в классе основных функций переносятся на исследуемые функции, в физике принято в записи формул опускать функЦии $\varphi(x)$, и оставлять только «нужные ф функции $f(x)$, как это представлено в формуле (10.1$a$). Перечислим основные свойства $\delta$-функции.

1. При «сдвиге» аргумента $\delta$-функции имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta\left(x - x_0\right)\mathrm{d}x = f\left(x_0\right)$$

2. $\delta$-функции четная:

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

3. $\delta$-функции однородная:

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$$

Свойства (10.17) – (10.19) легко доказываются заменой переменной под интегралом в определении (10.1).

4. $\delta$-функция от функции:

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i)|}\delta(x - x_i)$$

где $f(x_i) = 0, x_i$ - простые (некратные) корни.

Это свойство легко доказывается разложением функции $f(x)$ в ряд Тейлора до первого порядка в окрестностях нулей: $f(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + ...$ с учетом свойств (10.18) и (10.19)

5. $x\delta(x) = 0$

6. Производная $\delta$-функции может быть записана только в интегральном соотношении:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\delta(x))\mathrm{d}x = -f'(0)$$

Это свойство доказывается интегрированием по частям с учетом обращения в нуль на пределах интегрирования «хороших» функций. Свойство (10.21) обобщается на производную любого порядка:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\delta(x))\mathrm{d}x = (-1)^n f^{(n)}(0)$$

7. Интегральное представление (фурье-образ) $\delta$-функции:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\ \mathrm{d}x = 2\pi\delta(k)$$

Это свойство можно рассматривать как обратное преобразование Фурье для 1, поскольку из перечисленных выше свойств следует:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\mathrm{e}^{ikx}\ \mathrm{d}x = 1$$

8. Функционал, определяющий действие $\delta$-функции, можно представить интегралом по замкнутому контуру в комплексной плоскости:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{|z|=\varepsilon} \varphi(z)\frac{\mathrm{d}z}{z} = \varphi(0)$$

### 3.2.2 Применения

**математические преобразования**

Примеры 1. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_0^{\infty} \cos k_1 x \cos kx\ \mathrm{d}x$$

Для вычисления интеграла следует воспользоваться интегральным представлением (10.22):

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\cos\left(k+k_1\right)x + \cos\left(k-k_1\right)x\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \mathrm{Re}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+k_1)x} + \mathrm{e}^{\mathrm{l}(k-k_1)x}\right) \mathrm{d}x = 2\pi\left(\delta\left(k+k_1\right) + \delta\left(k-k_1\right)\right)$$

2. Вычислить $\delta(\sin x)$. Согласно свойству (10.20) вычисляем нули функции, стоящей в качестве аргумента $\delta$-функции: $x_n = \pi n$, соответственно $\sin' x_n = \cos x_n = (-1)^n$. ГIоэтому можно записать:

$$\delta(\sin x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n)$$

3. Разложить в ряд Фурье на отрезке $-\pi \leq x \leq \pi$ функцию

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - \pi n)$$

Примеры 1. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_{0}^{\infty} \cos k_1 x \cos kx \ \mathrm{d}x$$

Для вычисления интеграла следует воспользоваться интегральным представлением (10.22):

$$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\cos\left(k+k_1\right)x + \cos\left(k-k_1\right)x\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \mathrm{Re}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k+k_1)x} + \mathrm{e}^{\mathrm{l}(k-k_1)x}\right) \mathrm{d}x = 2\pi\left(\delta\left(k+k_1\right) + \delta\left(k-k_1\right)\right)$$

2. Вычислить $\delta(\sin x)$. Согласно свойству (10.20) вычисляем нули функции, стоящей в качестве аргумента $\delta$-функции: $x_n = \pi n$, соответственно $\sin' x_n = \cos x_n = (-1)^n$. ГIоэтому можно записать:

$$\delta(\sin x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n)$$

3. Разложить в ряд Фурье на отрезке $-\pi \leq x \leq \pi$ функцию

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - \pi n)$$

Коэффициенты Фурье равны

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-inx} \ \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \delta(x - 2\pi k)\mathrm{e}^{-inx} \ \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}$$

поэтому имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-\pi n)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$$

4. Показать, что в смысле обобщенных функций справедлива формула:

$$\pm\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\lim_{N\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{\pm iNx}}{x\mp\mathrm{i}0}=\delta(x)$$

Если точка $x=0\notin[a,b]$, по теореме Римана-Лебега

$$\pm\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\lim_{N\to\infty}\int\limits_a^b\frac{\mathrm{e}^{\pm iNx}}{x\mp\mathrm{i}0}\varphi(x)\mathrm{d}x=0$$

Обходя точку $x=0$ в комплексной плоскости по контуру, показанному на рис. 10.1, получаем

$$\pm\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\lim_{N\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\pm iNx}}{x\mp\mathrm{i}0}\varphi(x)\mathrm{d}x=\pm\frac{\varphi(0)}{2\pi\mathrm{i}}\lim_{N\to\infty}\int\limits_{C_\pm}\frac{\mathrm{e}^{\pm iNx}}{x\mp\mathrm{i}0}\,\mathrm{d}x=$$

$$=\pm\frac{\varphi(0)}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{C_\pm}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\varphi(0)$$

Что соответствует основному свойству $\delta$-функции.

Упражнения

1. Показать, что

$$\delta\left[\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)\right]=\frac{1}{\left|x_1-x_2\right|}\left(\delta\left(x-x_1\right)+\delta\left(x-x_2\right)\right)$$

2. Получить полезную формулу:

$$\delta\left(x^2-a^2\right)=\frac{1}{2|a|}(\delta(x-a)+\delta(x+a))$$

3. Вычислить интеграл

$$I=\int\limits_0^\infty\sin k_1x\sin kx\;\mathrm{d}x$$

4. Используя теорему Римана-Лебега, показать, что в смысле обобщенных функций

$$\pm\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\lim_{N\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{\pm iNx}}{x\pm\mathrm{i}0}=0$$

5. Показать, что

$$x^n\delta^{(k)}(x)=0\quad\text{при}\quad k=0,1,...,n-1.$$

6. Показать, что при $k\geq n$ справедлива формула:

$$x^n\delta^{(k)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{(k-n)!}\delta^{(k-n)}(x)$$

Указание. Воспользоваться формулой Лейбница дифференцирования произведения двух функций:

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(f(x)g(x))=\sum_{i=0}^k C_k^if^{(i)}(x)g^{(k-i)}(x)$$

где

$$C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!}$$

В частности, имеем

$$x\delta^{(k)}(x) + k\delta^{(k-1)}(x) = 0 \quad \text{при} \quad n = 1$$
$$x^n\delta^{(n)}(x) = (-1)^n n!\delta(x) \quad \text{при} \quad n = k$$

### 3.2.3 Дополнения

о разных штуках, которые мы также часто используем, схожих с ней.

!! все, что не связано с дельта-функцией вынесу в запись про функан!!!

#### Применения дельта функции

##### Задача о трамвайном билете с помощью дельта функции и метода перевала (?!!!!)

(оч крутая задача, жаль, что вряд ли скоро ей займусь. другие решения не обсуждаю, где-то в другом месте их напишу, эту задачу подробно обсужу скорее всего в записи по математике.)

"Билетик" - это последовательность вида

$$n_1 n_2 ... n_N m_1 m_2 ... m_N$$

где для каждого $i = 1, ..., N$ параметры $n_i$ и $m_i$ - это целые числа от 0 до 9.

Будем называть билетик "счастливым", если у него

$$\sum_{i=1}^{N} n_i = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

Обозначим число счастливых билетиков как $H(N)$. Ваша задача посчитать $H(N)$ в пределе $N \gg 1$.

Действовать можно следующим образом.

- Докажите, что для целых $a$ и $b$ выполняется

$$\delta_{a,b} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2\pi} e^{ix(a-b)},$$

где $\delta_{a,b} = 1$, если $a = b$, и $\delta_{a,b} = 0$, если $a \neq b$.

- Придумайте, как можно использовать свойство из прошлого пункта для того, чтобы представить $H(N)$ в виде интеграла от некоторой функции.

- Примените к полученному интегралу метод перевала. Это даст Вам асимптотическую формулу для $H(N)$.

Назовем билетик с $N = 3$ "трамвайным". Точное число счастливых трамвайных билетиков равно 55252. Наивно можно было бы ожидать, что раз $N = 3$ - число порядка единицы, то приближенный ответ для $H(3)$, полученный при помощи метода перевала, будет очень неточным. Так ли это? Иными словами, какова относительная погрешность асимптотического ответа для числа счастливых трамвайных билетиков?

#### интересные вопросы про дельта-функцию

там нам загадок полно задают, их сюда и буду писать в параграфах.

особенно обсудим вопросы про ошибочное представление про нее.

### 3.2.4 Функция Хевисайда $\theta(x), \operatorname{sign} x$

Функция Хевисайда или функция включения $\theta(x)$ определяется как

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

Производная $\theta$-функции есть $\delta$-функция. Действительно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{\infty} \theta(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\int_{0}^{\infty} \varphi'(x)\mathrm{d}x = \varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

Заметим, что производная любой функции, имеющей разрыв первого рода, выражается через $\delta$-функцию.

Функцию Хевисайда можно представить как предел $\varepsilon$ -последовательности:

$$\theta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon} + \frac{1}{2}$$

Функцию $\operatorname{sign} x = |x|/x$ можно выразить через функцию Хевисайда:

$$\operatorname{sign} x = 2\theta(x) - 1 = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x > 0 \\ 0 & \text{при} \quad x = 0 \\ -1 & \text{при} \quad x < 0 \end{cases}$$

Упражнения

1. Показать, что

$$\frac{d}{dx}|x| = \operatorname{sign} x$$

2. Определить производную функции $\operatorname{sign} x$.
3. Доказать, что в смысле обобщенных функций

$$\lim_{N\to\infty} (-i)N\theta(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}Nx} = \delta(x)$$

Указание. Проинтегрировать по частям и воспользоваться теоремой Римана-Лебега.

### 3.2.5 Функция $\wp\frac{1}{x}$

Обобщенная функция $\wp\frac{1}{x}$ определяется через функционал следующим образом:

$$\left(\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) = \lim_{\varepsilon\to 0} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\,\mathrm{d}x$$

С произвольной функцией $f(x)$ такой интеграл называется интегралом в смысле главного значения и обозначается как

$$V \cdot p \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x \equiv \wp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

Часто в физике возникают следующие ситуации, когда необходимо использовать обобщенную функцию $\wp\frac{1}{x}$, аппроксимируемую функциями:

$$\wp\frac{1}{x}=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}=\frac{1}{2\mathbf{i}}\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{k}{|k|}\mathbf{e}^{-|k|\varepsilon}\mathbf{e}^{\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k$$

$$\wp\frac{1}{x}=\lim_{N\to\infty}\frac{1-\cos Nx}{x}=\lim_{N\to\infty}\int\limits_{0}^{N}\sin kx\,\mathrm{d}k$$

Действительно, в случае (10.31) получаем

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\varphi(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to+0}\lim_{x\to+0}\left(\int\limits_{-\infty}^{-x}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x+\int\limits_{x}^{\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right)+\varphi(0)\lim_{\varepsilon\to+0}\lim_{x\to+0}\int\limits_{-x}^{x}\frac{x}{x^2+\varepsilon^2}\,\mathrm{d}x=$$
$$=\left(\wp\frac{1}{x},\varphi(x)\right)$$

В случае (10.32) справедливость представления доказывается аналогично, но следует дополнительно воспользоваться теоремой Римана-Лебега.

Функционал (10.30) можно представить в виде интеграла в комплексной плоскости $z$ по контуру $C_+$ или $C_-$, обходящему точку $x=0$ по полуокружности радиуса $\varepsilon\to 0$ соответственно сверху или снизу (рис. 10.2) и вычитания или добавления полувычета $i\pi\varphi(0)$ :

$$\left(\wp\frac{1}{x},\varphi(x)\right)=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{C_+}\frac{\varphi(z)}{z}\,\mathrm{d}z\mp\mathrm{i}\pi\varphi(0)$$

От интеграла по контуру в комплексной плоскости (10.33) можно перейти к интегралу по действительной оси, записав его в виде

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{C_\pm}\frac{\varphi(z)}{z}\,\mathrm{d}z=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(x)\mathrm{d}x}{x\mp\mathrm{i}\varepsilon}=\left(\frac{1}{x\mp\mathrm{i}0},\varphi(x)\right)=\left(\wp\frac{1}{x},\varphi(x)\right)\pm\mathrm{i}\pi(\delta(x),\varphi(x))$$

Полученная формула (10.34) позволяет ввести еше две новые обобщенные функции Сохоцкого:

$$\frac{1}{x\pm i0}=\wp\frac{1}{x}\mp\mathrm{i}\pi\delta(x)$$

Формулы Сохоцкого могут быть также легко получены в предельном переходе дия $\varepsilon$ -последовательностях:

$$\frac{1}{x\pm\mathrm{i}\varepsilon}=\frac{x\mp\mathrm{i}\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}=\frac{x^2}{x^2+\varepsilon^2}\mp\mathrm{i}\pi\frac{\varepsilon}{\pi\left(x^2+\varepsilon^2\right)}$$

Пример Показать, что обобщенная функция $\wp\frac{1}{x}$ есть производная от $\ln|x|$. Действительно, запишем функционал:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\ln|x|}{\mathrm{d}x},\varphi(x)\right)=(\ln|x|,\varphi'(x))=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\ln|x|)\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

Выделяя теперь $\varepsilon$ -окрестность 0 и разбивая интеграл на три, получаем

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln|x|\varphi(x)|_{-\infty}^{-\varepsilon}+\ln|x|\varphi(x)|_{\varepsilon}^{\infty}-\int\limits_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right)$$
$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x=\left(\wp\frac{1}{x},\varphi(x)\right)$$

Упражнение Показать, что фурье-образ функции $1/x$ можно получить из представления (10.32), и он равен

$$\tilde{f}(k)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x=-\mathrm{i}\pi\,\mathrm{sign}\,k$$

С обобщенными функциями Сохоцкого можно связать еще две функции, имеющие большое применение в физике:

$$\delta_{\pm}(x)=\pm\frac{i}{2\pi}\frac{1}{x\pm i0}$$

Обобщенные функции (10.36) получаются в $\varepsilon$ -последовательностях

$$\delta_{\pm}(x)=\pm\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{x\pm\mathrm{i}\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\varepsilon k\pm\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}k$$

Функции $\delta_{+}$ обладают полезными свойствами:

$$\delta_{+}(x)+\delta_{-}(x)=\delta_{(}x)$$
$$\delta_{+}(x)-\delta_{-}(x)=\frac{i}{\pi}\wp\frac{1}{x}$$

# Part IV
# Problems

## 4 Problems about typical special functions

### 4.0.1 Problems about Γ-function

**L.**

3.1.2. Найти контурное представление Γ(z) в терминах $(-t)^{z-1}e^{-t}$.

**L.3.1.3. Integrals by Gamma function**

Show that

$$\int_0^\infty duu^{z-1}\cos u = \cos(\pi z/2)\Gamma(z); \qquad \int_0^\infty duu^{z-1}\sin u = \sin(\pi z/2)\Gamma(z)$$

Установить область применимости этих выражений.

**Solution**

**L.3.1.4. Compute** $\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \cos^a\varphi \sin^b\varphi$

**L.3.1.5. Prove that** $\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}}\Gamma(2z)$.

**L.3.theor Prove that** $\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$.

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \int_0^\infty dtt^{-z}e^{-t}\int_0^\infty dss^{z-1}e^{-8}.$$

Произведя здесь замену $s = t\zeta$ и взяв интеграл по $t$ мы находим

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \int_0^\infty d\zeta\frac{\zeta^{z-1}}{1+\zeta}.$$

Чтобы взять стоящий здесь интеграл по $\zeta$ следует преобразовать его в контурный интеграл

$$\int_0^\infty d\zeta\frac{\zeta^{z-1}}{1+\zeta} = \frac{1}{1-\exp(2\pi i z)}\int_C d\zeta\frac{\zeta^{z-1}}{1+\zeta}$$

где контур $C$ изображен на рисунке 3.1. После этого контур можно дефор миров ать, загибая его 'усы' в левую полуплоскость. После этого интеграл сведется к вычету в точке $\zeta = -1$, что и дает выражение, стоящее в правой части (3.9).

Строго говоря, приведенные рассуж дения спр аведливы для $0 < \mathrm{Re}\, z < 1$. Однако принцип аналитического продолжения позволяет распространить его на произвольные $z$. В частности, соотношение (3.9) позволяет легко воспроизвести выражение для вычетов (3.6). Как следует из оо отношения (3.9), $\Gamma^{-1}(z)$ не имеет полю сов в плоскости $z$, то есть Γ(z) нигде не обращается в ноль.

**L.**

3.1.6. Получить интегральное представление

$$\Gamma^{-1}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C^*} dt t^{-z} e^t,$$

zде контур $C^*$ изображен ма рисунке 3.3.

**L.3.1.7. Compute** $\int\limits_0^1 dz \ln \Gamma(z)$.

(??)

**L.**

3.1.8. Найтu $|\Gamma(1/2 + ix)|$, де $x$ действительное число.

**LebOsin.2021.ex2.v1.aut.5.**

Вычислить интеграл вдоль мнимой оси $(1 > a > 0, 1 > b > 0)$:

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(a-s)\Gamma(s-b) z^{-s} \frac{ds}{2\pi i}. \tag{36}$$

**Solution**

Для начала обговорим пределы применимости наших дальнейших вычислений.
$b + 1 > a$
Воспользуемся формулой Стирлинга для оценки произведения гамма-функций:

$$\Gamma(a-s)\Gamma(s-b) = \frac{\pi}{\sin \pi(a-s)} \cdot \frac{\Gamma(s-b)}{\Gamma(s-a+1)} \overset{s\to\infty}{\propto} \frac{s^{a-b-1}}{\sin \pi(a-s)}. \tag{37}$$

Сходимость интеграла по признаку Дирихле и лемме Жордана требует, что бы степень в показателе была как минимум отрицательна. Заметим также, что синус на мнимой оси даст экспоненциальное затухание этого выражения порядка $e^{-\pi|s|}$.

- $z^{-s} = \exp(-s \ln z)$, где $\ln z = \ln |z| + i \arg z; \quad \arg z \in (-\pi; \pi)$.

Действительно, такое определение для возведения в степень не будет мешать сходимости интеграла по мнимой оси, т.к. вклад от гамма-функций содержит $e^{-\pi|s|}$.

### 5.1 Первый способ.

По лемме Жордана мы можем замыкать контур на $\pm\infty$ в зависимости от знака $\ln |z|$.

- $|z| > 1$

В этом случае мы замыкаем дугу направо, обход идет по часовой стрелке. Гамма-функции в положительной действительной плоскости обладают особенностями в точках $s = a + n, n \in \mathbb{N}_0$ и одной точке $s = b (b < 1)$. Как известно, у гаммафункции вычеты в точках $-n$ имеют значение:

$$\operatorname*{res}_{-n}\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}, n \in \mathbb{N}_0. \tag{38}$$

Таким образом:

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(a-s)\Gamma(s-b)z^{-s}\frac{ds}{2\pi i} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\Gamma(a-b+n)z^{-a-n} - \Gamma(a-b)z^{-b}. \tag{39}$$

Обратим внимание, что:

$$\frac{\Gamma(a-b+n)}{n!} = \frac{\Gamma(a-b)}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(a-b+k) = (-1)^n\Gamma(a-b)\binom{b-a}{n} \tag{40}$$

Но мы знаем, что разложение в ряд Тейлора степеней имеет именно подобные коэффициенты разложения:

$$\begin{aligned} \textstyle\int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(a-s)\Gamma(s-b)z^{-s}\frac{ds}{2\pi i} = \sum_{n=0}^{\infty}\Gamma(a-b)\binom{b-a}{n}z^{-n}z^{-a} - \Gamma(a-b)z^{-b} = \\ = \Gamma(a-b)\left[z^{-a}\left(1+\tfrac{1}{z}\right)^{b-a} - z^{-b}\right] = \Gamma(a-b)z^{-b}\left[(z+1)^{b-a}-1\right]. \end{aligned} \tag{41}$$

- $|z| < 1$

В этом случае дугу наоборот надо замыкать налево и особенностями подинтегрального выражения будут лишь точки $s = b - n, n \in \mathbb{N}$. Таким образом:

$$\begin{aligned} &\int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(a-s)\Gamma(s-b)z^{-s}\frac{ds}{2\pi i} = \sum_{n=1}^{\infty}\Gamma(a-b+n)\frac{(-1)^n}{n!}z^{-b}z^n = \\ &\sum_{n=0}^{\infty}\Gamma(a-b+n)\frac{(-1)^n}{n!}z^{-b}z^n - \Gamma(a-b)z^{-b} = \\ &= \Gamma(a-b)z^{-b}\left[(1+z)^{b-a}-1\right] \end{aligned} \tag{42}$$

Итого, получаем ответ:

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(a-s)\Gamma(s-b)z^{-s}\frac{ds}{2\pi i} = \Gamma(a-b)z^{-b}\left[(1+z)^{b-a}-1\right]. \tag{43}$$

### 5.2 Второй способ.

$$\Gamma(a-s)\Gamma(s-b) = \frac{1}{s-b}\Gamma(a-s)\Gamma(s-b+1) = \frac{\Gamma(a-b+1)B(a-s,s-b+1)}{s-b} \tag{44}$$

При подстановке в интеграл с учетом интегрального представления бета-функции, получаем (на этапе вычисления считаем $z \in \mathbb{R}_+$):

$$
\begin{gathered}
\int_{-i\infty}^{i\infty}\Gamma(a-s)\Gamma(s-b)z^{-s}\frac{ds}{2\pi i}=\Gamma(a-b+1)\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{ds}{2\pi i}\frac{\exp(-s\ln z)}{s-b}\int_0^1 dt\cdot t^{a-s-1}(1-t)^{s-b}=\\
=\Gamma(a-b+1)\int_0^1 dt\cdot t^{a-1}(1-t)^{-b}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{ds}{2\pi i}\frac{\exp(-s\ln z)}{s-b}\left(\frac{1-t}{t}\right)^s=\\
=\Gamma(a-b+1)\int_0^1 dt\cdot t^{a-1}(1-t)^{-b}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{ds}{2\pi i}\frac{\exp\left(-s\ln\frac{zt}{1-t}\right)}{s-b}=\\
=-\Gamma(a-b+1)\int_{1/(1+z)}^{1} dt\cdot t^{a-1}(1-t)^{-b}\left(\frac{1-t}{zt}\right)^b=\\
=\Gamma(a-b+1)z^{-b}\frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{(z+1)^{a-b}-1}\right]=\\
=\Gamma(a-b)z^{-b}\left[(z+1)^{b-a}-1\right].
\end{gathered}
\tag{45}
$$

Ясно однако, что исходный интеграл является аналитической функцией $z$ и потому на общей области определения ответ для интеграла и сам интеграл будут совпадать. Провести явное вычисление тоже можно, но для этого надо воспользоваться интегральным представление бета-функции, контур в котором идет так, чтобы $\arg zt/(1-t)=0$. Это происходит на линиях:

$$
t=\frac{r}{z+r}, r\in\mathbb{R}_+. \tag{46}
$$

При этом контур интегрирования в определении бета-функции просто сдвигается и гнется в комплексную плоскость.

### LebOsin.2021.ex2.v2.aut.5.

Для $p>0,\epsilon\to+0$ и $z\in\mathbb{C}$ найти значение интеграла:

$$
\int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty}\frac{\Gamma(s/p)}{p}z^{-s}\frac{ds}{2\pi i}. \tag{37}
$$

Прежде, чем начать вычисления, определим, что мы понимаем в данном случае под возведением в степень:

- $z^{-s}=\exp(-s\ln z)$, где $\ln z=\ln|z|+i\arg z;\quad \arg z\in(-\pi;\pi)$.

Гамма-функция в комплексной плоскости обладает особенностями в точках $s=-n, n\in\mathbb{N}_0$. Как известно, у гамма-функции вычеты в точках $-n$ имеют значение:

$$
\mathrm{res}_{-n}\,\Gamma(z)=\frac{(-1)^n}{n!}, n\in\mathbb{N}_0
$$

Для положительных $s$ гамма-функция растет с ростом $s$ по формуле Стрилинга и, естественно, никакая показательная функция не может перебить этот рост. Поэтому замыкать контур интегрирования вправо нельзя. Наоборот, контур интеграла можно замкнуть влево. Вдали на мнимой оси гамма-функция экспоненциально убывает, а показательная функция $z^{-s}$ растет очень медленно ($\epsilon\to+0$) экспоненциально, и падения гамма-функции не перебьет. Поэтому мы с гарантией можем замкнуть контур налево. Таким образом:

$$
\int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty}\frac{\Gamma(s/p)}{p}z^{-s}\frac{ds}{2\pi i}=\int_{\epsilon/p-i\infty}^{\epsilon/p+i\infty}\Gamma(s)z^{-sp}\frac{ds}{2\pi i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^{np}=\exp\left(-z^p\right)
$$

### 4.0.2 Problems about функции Бесселя

**L.**

3.3.1. Доказать правила дифференцирования (3.22), исходя из соотношения (3.28).

**L.3.3.2. Compute** $\int\limits_0^\infty dz \exp(-az) J_0(z)$

**L.3.3.3. Compute** $\int\limits_0^\infty dz \exp(-az) J_1(z)$

**L.3.3.4. Compute** $\int\limits_0^\infty dz \frac{J_2(z)}{z^2}$.

**L.**

3.3.5. Построить разложение в ряд (3.30), исходя из соотношения (3.28).

**L.**

3.3.6. Найти асимптотическое выражение Функции Бесселя при болвших по абсолютной величине отрицательных $z$.

В силу уравнения (3.26) функция $J_n(qx)$ удовлетворяет уравнению

$$\hat{L} J_n(qx) = -q^2 J_n(qx),$$
$$\hat{L} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} - \frac{n^2}{x^2}.$$

**L.**

3.3.7. Доказать соотношение (3.34), исходя из представления (3.20).

Соотношение (3.34) позволяет сформулировать разложение функций, заданных при положительных значениях аргумента, в интеграл по функциям Бесселя, аналогичное разложению в интеграл Фурье. Прямое и обратное преобразования функции $f(x)$ имеют вид

$$\breve{f}(q) = \int\limits_0^\infty dx x J_n(qx) f(x),$$
$$f(x) = \int\limits_0^\infty dq q J_n(qx) \breve{f}(q).$$

Выбор $n$ в этом соотношении диктуется условиями решаемой задачи.

**L.**

3.3.8. Разложить в интеграл (3.36) с $n = 0$ функцию $f(x) = \exp\left(-p^2 x^2\right)$.

**Задача**

3.3.9. Найти значения $\gamma_k$ для болвших значений этого параметра.

В силу общих свойств задач на собственные значения, смотри раздел 2.4.1, формула (2.68), находи м свойство ортогональности

$$\int_0^1 dxxJ_n(\gamma_k x)\,J_n(\gamma_j x) = 0$$

если $\gamma_k \neq \gamma_j$. Действительно, левая часть соотношения (3.32) представляет собой оператор Штурма-Ли увилля (2.6) с $Q = 1/x$, поэтому в силу (2.67) находим $\rho = x$. Подставляя в соотношении (3.38) $z = 1$, получаем

$$\int_0^1 dx\,[J_n(\gamma_k x)]^2 = \frac{1}{2}J^2_{n+1}(\gamma_k)\,.$$

**Задача**

3.3.10. Прямо доказать соотношение ортогональности (3.39).

Соотношения (3.39, 3.40) позволяют сформулировать правила разложения функции $f(x)$, заданной на интервале $0 < x < 1$, по набору функций $J_n(\gamma_k x)$:

$$f(x) = \sum_k f_k J_n(\gamma_k x)\,,$$
$$f_k = \frac{2}{J^2_{n+1}(\gamma_k)} \int dxxf(x)J_n(\gamma_k x)\,.$$

Это разложение является аналогом разложения в ряд Фурье.

**Задача**

3.3.11. Разлоюить функцию $J_1(x) - xJ_1(1)$ на интервале $(0, 1)$ в ряд (3.41) по $J_1(\gamma_k x)$.

### 4.0.3 Problems about функции Айри

**L.**

3.2.1. Найти значения $\mathrm{Ai}(0), \mathrm{Ai}'(0), \mathrm{Bi}(0)$, $\mathrm{Bi}'(0)$.

**L.**

3.2.2. Получить асимптотическое поведение функции $\mathrm{Bi}(x)$ при $x \to \pm\infty$

**L.**

3.2.3. Найти асимптотики решения уравнения $d^2Y/dx^2 - x^3Y = 0$ при больших значениях $|x|$.

### 4.0.4 Problems about гипергеометрическую функцию

**L.**

3.6.1. Доказать, что $\Phi(\alpha, \alpha, z) = \exp(z)$.

**L.**

3.6.2. Доказать соотношения (3.89, 3.90, 3.91).

**L.**

3.6.3. Найти поведение выроьденной гипергеометрической функиии $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ при $\gamma \quad \to 0$. Выполняется ли при малых $\gamma$ соотношение $\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$?

**L.**

3.6.4. Найти значение $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ при целых положительных $\alpha$ и $\gamma, \alpha \geq \gamma$.Проверить выполнение условия $\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$. Указание: в этом случае интеграл (3.87) сводится к вычету в точке $t = z$.

**L.**

3.6.5. Найти второе независимое решение выроьденного гипергеометрического уравнения (3.81) при $\gamma = 1$. Указание: в соответствии с (3.85) при произволвном $\gamma$ второе независимое решение моэтно записать в виде

$$\frac{1}{1-\gamma}\left[z^{1-\gamma}\Phi(\alpha-\gamma+1, 2-\gamma, z) - \Phi(\alpha, \gamma, z)\right]$$

здесь надо перейти к пределу $\gamma \to 1$.

## 4.1 Problems about polynomials

(пока вообще не актуальные они)

### 4.1.1 Problems about многочлены Лежандра

**Задача**

3.4.1. Найти значение $P_{2n}(0)$.

**L.**

3.4.2. Найти выражение для $P_3(\mu)$, воспользовавшись рекуррентным соотношением (3.51).

**L.**

3.4.3. Доказать соотношение

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)P_k(x)P_k(y) = (n+1)\frac{P_n(x)P_{n+1}(y) - P_{n+1}(x)P_n(y)}{y-x}.$$

Указание: действовать по индукиии с учетом рекуррентного соотношения (3.51).

**L.**

3.4.4. Показать, что в силу (3.51) соотношение (3.55) справедливо для $P_{n+1}$, если (3.55) справедливо для $P_{n-1}$ и $P_n$.

**L.**

3.4.5. Показать, что в силу (3.54) соотношение (3.55) справедливо для $P_n$, если (3.55) справедливо для $P_{n-1}$.

**L.**

3.4.6. Найти значение $P_{2n}(0)$, исходя из (3.55).

**L.**

3.4.7. Докаюите, что если соотношение (3.56) справедливо для $n-1$, то в силу соотношений (3.51,3.54) оно справедливо и для.

**L.**

3.4.8. Вывести соотношения (3.56), исходя из соотношения (3.55).

**L.**

3.4.9. Проверить выполнение уравнения (3.47) для полиномов Лежандра, исходя из формул дифференцирования (3.54,3.56).

**L.**

3.4.10. Получить выражение (3.59) из (3.58).

**L.**

3.4.11. Прямо доказать соотношение ортогональности (3.62). Указание: восполвзоватвся представлением (3.55).

**L.**

3.4.12. Получить выражение для нормировочного множителя (3.63). Указание: восполвзоваться соотношением (3.44).

**L.**

3.4.13. Прямо получить соотношение (3.64). Указание: воспользоваться результатом задачи (3.4.3)

**L.**

3.4.14. Найтu $\int\limits_{-1}^{1} dx x^2 P_{n-1}(x) P_{n+1}(x)$.

**L.**

3.4.15. Найти разложение в ряд по полиномам Лежандра $P_n(x)$ монома $x^k$.

### 4.1.2 Problems about полиномы Эрмита

**L.**

3.5.1. Доказать, что старший член разлоюения $H_n(x)$ имеет вид $2^n x^n$.

**L.**

3.5.2. Получить соотношение (3.65) из (3.72).

**L.**

Доказать соотношение (3.77).

Указание: составить комбинацию $\exp(-t^2+2tx-s^2+2sx)$, выразить ее через двойную сумму по полиномам Эрмита из соотношения (3.65) и проинтегрировать получившееся раветство по $x$ с весом $\exp\left(-x^2\right)$. На этом пути получатся и соотношения ортогональности (3.76).

**L.**

3.5.4. Доказать непосредственно условие полноты (3.80).

**L.**

3.5.5. Найти значение интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \exp\left(-x^2\right) H_{2n}(xy).$$

**L.**

3.5.6. Найти значение интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \exp\left[-(x-y)^2\right] H_n(x)$$

**L.**

3.5.7. Найти значение интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dxx \exp\left(-x^2\right) H_{2n-1}(xy)$$

**L.**

3.5.8. Найти значение интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dxx^n \exp\left(-x^2\right) H_n(xy)$$

Примечание: Ответ выражается через полином Лежандра.

**L.**

3.5.9. Найти значение интеграла

$$\int\limits_{0}^{+\infty} dx \exp\left(-x^2\right) \sinh(\beta x) H_{2n+1}(x)$$

**L.**

3.5.10. Найти значение интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty} dx \exp\left(-x^2\right) \cosh(\beta x) H_{2n}(x)$$

**L.**

3.5.11. Доказать соотношение

$$H_n(x) = \exp\left(-\frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2}\right)(2x)^n.$$

Указание: просуммировать по $n$ правую часть этого соотношения с весом $t^n/n$ ! и показать, что эта сумма сводится кевой части соотношения (3.65).

### 4.1.3 Other problems about polynomials

**LebOsin.2021.ex3.4.**

Compute интеграл для натуральных (целых неотрицательных) $n, l$

$$\int_{-1}^{1} x^2 P_n(x) P_l(x) dx. \tag{51}$$

Мы сразу можем выделить несколько фактов для упрощения решения:

- Ответ симметричен по $n, l$
- Если степени многочленов различаются более, чем на 2, $|n-l| > 2$, то по свойству, что многочлен Лежандра ортогонален на отрезке $[-1;1]$ с весом 1 любому многочлену степени ниже него, интеграл равен 0 .
- Многочлены Лежандра $P_n(x)$ четны, если $n$ - четно, и нечетны, если $n$ нечетно. Если $n$ и $l$ имеют несовпадающие четности, то интеграл равен 0, как интеграл от нечетной функции, проинтегрированной в симметричных пределах.

Таким образом, нам надо рассмотреть два случая: $n = l$ и $n = l + 2(n = l - 2$ отдельно не надо смотреть, по симметрии ответа).

- $n = l + 2$

В этом случае процедура использует свойство ортогональности:

$$\int_{-1}^{1} x^2 P_n(x) P_{n-2}(x) dx = a_{n-2} \int_{-1}^{1} x^n P_n(x) dx = \frac{a_{n-2}}{a_n} \|P_n\|^2 \tag{52}$$

Здесь мы ввели обозначения:

$$P_n(x) = a_n x^n + ..., \|P_n\|^2 = \int_{-1}^{1} P_n^2(x) dx \tag{53}$$

На семинаре мы получали, что:

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}, \|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1} \tag{54}$$

А потому:

$$\int_{-1}^{1} x^2 P_n(x) P_{n-2}(x) dx = \frac{(2n-4)!}{2^{n-2}[(n-2)!]^2} \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!} \frac{2}{2n+1} = \frac{2n(n-1)}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)} \tag{55}$$

- $n = l$

Из методических соображений мы приведем "лобовое" решение задачи с использованием только ортогональности и формулы Родрига:

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[ \left(1-x^2\right)^n \right]. \tag{56}$$

Для вычисления нам понадобится не только самая старшая степень полинома Лежандра, но и следующая за ней (предположим, что $n \geq 2$):

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[ \left(1-x^2\right)^n \right] = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[ \sum_{k=0}^{n} x^{2k} C_n^k \right] = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} x^n - \frac{n(2n-2)!}{2^n n!(n-2)!} x^{n-2} + .... \tag{57}$$

Тогда, т.к. $n$-ый полином Лежандра ортогонален любому многочлену степени меньше $n$, то:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} x^2 P_n(x) P_n(x) dx &= \int_{-1}^{1} \left[ \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} x^{n+2} + \frac{n(2n-2)!}{2^n n!(n-2)!} x^n \right] P_n(x) dx \overset{(56)}{=} \\
\overset{(56)}{=} \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} \frac{(-1)^n}{2^n n!} &\int_{-1}^{1} x^{n+2} \frac{d^n}{dx^n} \left[ \left(1-x^2\right)^n \right] dx - \frac{n(2n-2)!}{2^n n!(n-2)!} \frac{1}{a_n} \|P_n\|^2 \text{ by pts.} \\
\overset{\text{by pts.}}{=} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^3} \frac{(n+2)!}{2!} &\int_{-1}^{1} x^2 \left(1-x^2\right)^n dx - \frac{n(2n-2)!}{2^n n!(n-2)!} \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!} \frac{2}{2n+1} \overset{x^2=t}{=} \\
\overset{x^2=t}{=} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \frac{(n+2)(n+1)}{2} &\int_{0}^{1} t^{1/2}(1-t)^n dx - \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n+1)} = \\
= \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \frac{(n+2)(n+1)}{2} &B\left(\frac{3}{2}, n+1\right) - \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n+1)} = \\
= \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \frac{(n+2)(n+1)}{2} &\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) n!}{\Gamma\left(n+2+\frac{1}{2}\right)} - \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n+1)}
\end{aligned} \tag{58}$$

Здесь мы воспользуемся известным значением гамма-функции:

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!} \sqrt{\pi}. \tag{59}$$

Таким образом:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} x^2 P_n(x) P_n(x) dx &= \tfrac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \tfrac{(n+2)(n+1)}{2} \tfrac{n! 4^{n+2}(n+2)!}{2(2n+4)!} - \tfrac{n(n-1)}{(2n-1)(2n+1)} \\
&= \tfrac{(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)} - \tfrac{n(n-1)}{(2n-1)(2n+1)} = \tfrac{\left(n^2+3n+2\right)(2n-1) - n(n-1)(2n+3)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \\
&= \tfrac{2\left(2n^2+2n-1\right)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}.
\end{aligned} \tag{60}$$

В случае $n = 0, 1$ легко убедиться, что написанная формула по прежнему верна:

$$n = 0: \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}, n = 1: \int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5} \tag{61}$$

Написанное выражение - правильный ответ, но, очевидно, получается после достаточно длинных вычислений. Гораздо проще в этой задаче воспользоваться и другими известными свойствами полиномов Лежандра, как, например, рекуррентная формула:

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \Rightarrow xP_n(x) = \frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(x) + \frac{n}{2n+1}P_{n-1}(x). \tag{62}$$

Прямая подстановка в интеграл (51) при $n = l$ дает с учетом ортогональности:

$$\begin{gathered}\int_{-1}^{1} x^2 P_n^2(x) dx = \int_{-1}^{1} \left[\frac{(n+1)^2}{(2n+1)^2}P_{n+1}^2(x) + \frac{n^2}{(2n+1)^2}P_{n-1}^2(x) + \frac{2n(n+1)}{(2n+1)^2}P_{n-1}(x)P_{n+1}(x)\right] dx \overset{\text{orth.}}{=} \\ \overset{\text{orth.}}{=} \int_{-1}^{1} \left[\frac{(n+1)^2}{(2n+1)^2}P_{n+1}^2(x) + \frac{n^2}{(2n+1)^2}P_{n-1}^2(x)\right] dx = \\ = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)^2}\frac{2}{2n+3} + \frac{n^2}{(2n+1)^2}\frac{2}{2n-1} = \frac{2\left(2n^2+2n-1\right)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}.\end{gathered} \tag{63}$$

Этим же рассуждением, можно было решить и пункт с $n = l \pm 2$.
Итого, ответ:

$$\int_{-1}^{1} x^2 P_n(x) P_l(x) dx = \begin{cases} \frac{2n(n-1)}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)}, & n = l+2 \\ \frac{2\left(2n^2+2n-1\right)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}, & n = l \\ \frac{2(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}, & n = l-2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}. \tag{64}$$

**LebOsin.2021.ex3.5.**

Разложите $e^{kx}$ в ряд по многочленам Эрмита (найдите коэффициенты $A_n$):

$$e^{kx} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n H_n(x) \tag{65}$$

### 5.1 Решение через формулу Родрига.

Используя свойство ортогональности, можно записать:

$$A_n = \frac{\left(e^{kx}, H_n(x)\right)}{\|H_n\|^2} = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{kx} H_n(x) dx \tag{66}$$

Воспользуемся формулой Родрига для полиномов Эрмита:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \tag{67}$$

Прямая подстановка в формулу (66) дает с учетом интегрирования по частям:

$$A_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{kx} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} dx \overset{\text{by pts.}}{=} \frac{k^n}{2^n n!\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{kx} e^{-x^2} dx = \frac{k^n}{2^n n!} e^{k^2/4} \tag{68}$$

Итого:

$$e^{kx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{2^n n!} e^{k^2/4} H_n(x) \tag{69}$$

**5.2 Решение через производящую функцию.**

Воспользуемся производящей функцией для полиномов Эрмита:

$$e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n \tag{70}$$

Взяв $k = 2t$, мы получаем мгновенно:

$$e^{-k^2/4} e^{kx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{2^n n!} k^n \Rightarrow e^{kx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{2^n n!} e^{k^2/4} H_n(x). \tag{71}$$

# 5 Problems from applications

### 5.0.1 Problems from quantum optics

(write from Piasotski's work)

# Part V
# Other Special Functions

(тут всё из книг про табличные интегралы, чего только нет! соберу что-то, что интересно или чего касался.)

## 6 Другие спецфункции

### 6.1 Similar functions to hypergeometric function

#### 6.1.1 Hurwitz zeta function $\zeta(s,a) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}$

**Main formulas**

**Main theory**

(см. вики, там хорошо написано)

**Other theory**

#### 6.1.2 The polylogarithm $\mathrm{Li}_s(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s} = z\Phi(z,s,1)$

**Main formulas**

**Main theory**

(см. вики, там хорошо написано)

**Other theory**

#### 6.1.3 The Riemann zeta function $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \Phi(1,s,1)$

**Main formulas**

**Main theory**

(см. вики, там хорошо написано)

**Other theory**

#### 6.1.4 The Dirichlet eta function $\eta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = \Phi(-1,s,1)$

**Main formulas**

**Main theory**

(см. вики, там хорошо написано)

**Other theory**

### 6.1.5 The Dirichlet beta function $\beta(s) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^s} = 2^{-s}\Phi\left(-1, s, \frac{1}{2}\right)$

**Main formulas**

**Main theory**

(см. вики, там хорошо написано)

**Other theory**

### 6.1.6 The Legendre chi function $\chi_s(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)^s} = \frac{z}{2^s}\Phi\left(z^2, s, \frac{1}{2}\right)$

**Main formulas**

**Main theory**

(см. вики, там хорошо написано)

**Other theory**

### 6.1.7 The inverse tangent integral $\mathrm{Ti}_s(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)^s} = \frac{z}{2^s}\Phi\left(-z^2, s, \frac{1}{2}\right)$

**Main formulas**

**Main theory**

(см. вики, там хорошо написано)

**Other theory**

### 6.1.8 Lerch transcendent $\Phi(z, s, \alpha) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+\alpha)^s}$

**Main formulas**

**Main theory**

(см. вики, там хорошо написано)

**Other theory**

### 6.1.9 K-функция

(пока не встречалась, но известная, хз, потом мб встретится.)

**Теория**

K-функция, обычно обозначаемая $K(z)$, является обобщением гиперфакториала для комплексных чисел, подобно тому, как Гаммафункция является обобщением для факториала. Формально, K-функция определяется, как

$$K(z) = (2\pi)^{(-z-1)/2} \exp\left[\binom{z}{2} + \int\limits_0^{z-1} \ln(t!)dt\right].$$

Также определяется в замкнутой форме:

$$K(z) = \exp\left[\zeta'(-1, z) - \zeta'(-1)\right]$$

где $\zeta'(z)$ обозначает производную дзета-фуунцци Римана, $\zeta(a, z)$ - это дзета-фуункция Гурвица и

$$\zeta'(a, z) \stackrel{\text{def}}{=} \left[\frac{d\zeta(s, z)}{ds}\right]_{s=a}.$$

K-функция связана с Гамма-фуункцией и с G-функцией Барнса; для целых чисел $n$ можно написать:

$$K(n) = \frac{(\Gamma(n))^{n-1}}{G(n)}.$$

Также

$$K(n+1) = 1^1 2^2 3^3 \cdots n^n.$$

Для положительных аргументов принимает минимальное значение $0,879786843...$ в точке $x_{\min} = 0,53768886...$

## 6.2 Special functions of complex variable

### 6.2.1 Weierstrass elliptic function $\wp(u)$

(see wiki if needed)

**Definition**

Let $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ be two complex numbers that are linearly independent over $\mathbb{R}$ and let $\Lambda := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 := \{m\omega_1 + n\omega_2 : m, n \in \mathbb{Z}\}$ be the period lattice generated by those numbers. Then the $\wp$-function is defined as follows:

$$\wp(z, \omega_1, \omega_2) := \wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right)$$

This series converges locally uniformly absolutely in the complex torus $\mathbb{C}/\Lambda$. It is common to use 1 and $\tau$ in the upper half-plane $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ as generators of the lattice. Dividing by $\omega_1$ maps the lattice $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ isomorphically onto the lattice $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ with $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$. Because $-\tau$ can be substituted for $\tau$, without loss of generality we can assume $\tau \in \mathbb{H}$, and then define $\wp(z, \tau) := \wp(z, 1, \tau)$. With that definition, we have

$$\wp(z, \omega_1, \omega_2) = \omega_1^{-2} \wp(z/\omega_1, \omega_2/\omega_1)$$

**Определение (?????)**

(проверю, норм ли оно????? никогда не думал, что они в неявном виде определяются!!)

Эллиптической функцией называют такую мероморфную функцию $f$, определённую на области $\mathbb{C}$, для которой существуют два ненулевых комплексных числа  и $b$, таких что

$$f(z+a)=f(z+b)=f(z), \quad \forall z\in C,$$

а также частное $\frac{a}{b}$ не является действительным числом. Из этого следует, что для любых целых $m$ и $n$

$$f(z+ma+nb)=f(z), \quad \forall z\in C.$$

Любое комплексное число $\omega$, такое что

$$f(z+\omega)=f(z), \quad \forall z\in C,$$

называют периодом функции $f$. Если периоды  и $b$ таковы, что любое $\omega$ может быть записано как

$$\omega=ma+nb$$

то $a$ и $b$ называют фундаментальными периодами. Каждая эллиптическая функция обладает парой фундаментальных периодов. Параллелограмм $\Pi$ с вершинами в $0, a, b, a+b$ называется фундаментальным параллелоараммом.

СВоЙстВа

- Не существует отличных от констант целых эллиптических функций (первая теорема Лиувилля).

- Любая эллиптическая функция с периодами $a$ и $b$ может быть представлена в виде

$$f(z)=h(\wp(z))+g(\wp(z))\wp'(z),$$

рациональна. - Эллиптические функции неэлементарны, это было доказано Якоби в 1830-х годах.

**Properties**

- $\wp$ is a meromorphic function with a pole of order 2 at each period $\lambda$ in $\Lambda$.

- $\wp$ is a homogeneous function in that:

$$\wp\left(\lambda z,\lambda\omega_1,\lambda\omega_2\right)=\lambda^{-2}\wp\left(z,\omega_1,\omega_2\right).$$

- $\wp$ is an even function. That means $\wp(z)=\wp(-z)$ for all $z\in\mathbb{C}\backslash\Lambda$, which can be seen in the following way:

$$\begin{aligned}\wp(-z)&=\frac{1}{(-z)^2}+\sum_{\lambda\in\Lambda\backslash\{0\}}\left(\frac{1}{(-z-\lambda)^2}-\frac{1}{\lambda^2}\right)\\&=\frac{1}{z^2}+\sum_{\lambda\in\Lambda\backslash\{0\}}\left(\frac{1}{(z+\lambda)^2}-\frac{1}{\lambda^2}\right)\\&=\frac{1}{z^2}+\sum_{\lambda\in\Lambda\backslash\{0\}}\left(\frac{1}{(z-\lambda)^2}-\frac{1}{\lambda^2}\right)=\wp(z).\end{aligned}$$

The second last equality holds because $\{-\lambda:\lambda\in\Lambda\}=\Lambda$. Since the sum converges absolutely this rearrangement does not change the limit.

- The derivative of $\wp$ is given by: [6]

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{1}{(z-\lambda)^3}.$$

- $\wp$ and $\wp'$ are doubly periodic with the periods $\omega_1$ and $\omega_2$[6] This means:

$$\begin{aligned} \wp\left(z+\omega_1\right) = \wp(z) = \wp\left(z+\omega_2\right), \text{ and} \\ \wp'\left(z+\omega_1\right) = \wp'(z) = \wp'\left(z+\omega_2\right). \end{aligned}$$

It follows that $\wp(z+\lambda) = \wp(z)$ and $\wp'(z+\lambda) = \wp'(z)$ for all $\lambda \in \Lambda$.

(there are also beautiful plots that I don't need and don't understand, so I'm not writing about them)

**Gradstein Pyzhik properties of Weierstrass elliptic function**

8.160 Эллиптическая функиия Вейеритрасса $\wp(u)$ определяется равенством:

1. $8(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{n,n}' \left\{ \frac{1}{(u-2m\omega_1-2n\omega_2)^2} - \frac{1}{(2m\omega_1+2n\omega_2)^2} \right\}$, Cu 307(6) где знак $\sum$ указывает на то, что суммирование распространяетея на все комбинации целых значений $m$ и $n$, за исключением комбинации $m = n = U_>$ a $2\omega_1$ и $2\omega_2$ суть периоды функции $\wp(u)$. Очевидно,

2. $8\left(u+2m\omega_1+2n\omega_2\right) = 8(u)$ и $\operatorname{Im}\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) \neq 0$,

3. $\frac{d}{du} \odot (u) = -2 \sum_{m,n} \frac{1}{(u-2m\omega_1-2n\omega_2)^3}$, где суммирование распространяется на все целые значения $m$ и $n$. Ряды 8.160 1. и 8.1603. сходятся повсюду, за исключением полюсөв, т. е. точек $2m\omega_1 + 2n\omega_2$($m$ и $n$ - делые числа).

**Overview of applications**

## 6.3 Other

(I'll classify it later)

### 6.3.1 Шаровые функции

(такое есть и все. из сборника Градштейна Рыжика)

7.11 Паровые функции 7.111 $\int\limits_{\cos\varphi}^{1} \mathrm{P}_\vartheta(x)dx = \sin\varphi \mathrm{P}_v^{-1}(\cos\varphi)$ 7.112

1. $\int\limits_{-1}^{1} \mathrm{P}_n^m(x)\mathrm{P}_k^m(x)dx = 0 \quad [n \neq k] = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!} \quad [n = k].$ CM III 185, VB II 120

2. $\int\limits_{-1}^{1} \mathrm{Q}_n^m(x)\mathrm{P}_k^m(x)dx = (-1)^m \frac{1-(-1)^{n+k}(n+m)'}{(k-n)(k+n+1)(n-m)!}.$ ВТФ I 171(18)

3. $\int\limits_{-1}^{1} P_v(x)P_\sigma(x)dx = \frac{2\pi\sin\pi(\sigma-v)+4\sin(\pi v)\sin(\pi\sigma)[\psi(v+1)-\psi(\sigma+1)]}{\pi^2(\sigma-v)(\sigma+v+1)} = \frac{\pi^2-2(\sin\pi v)^2\psi'(v+1)}{\pi^2\left(v+\frac{1}{2}\right)}[\sigma = v].$ ВТФ I 170(9)$u$

4 $\int\limits_{-1}^{1} \mathrm{Q}_v(x)\mathrm{Q}_\sigma(x)dx = = \frac{[\psi(v+1)-\psi(\sigma+1)][1+\cos(\pi\sigma)\cos(v\pi)]-\frac{\pi}{2}\sin\pi(v-\sigma)}{(\sigma-v)(\sigma+v+1)}$ $[\sigma+v+1 \neq 0; v,\sigma \neq -1,-2,-3,...];$ ВТФ 170(11)

$$= \frac{\frac{1}{i}\pi^2 - \psi'(v+1)\left[1+(\cos v\pi)^2\right]}{2v+1} \quad [v = \sigma, v \neq -1,-2,-3,...].$$

BTΦ I 170 (12)

5. $\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_v(x)\mathrm{Q}_\sigma(x)dx = = \frac{1-\cos\pi(\sigma-v)-2\pi^{-1}\sin(\pi v)\cos(\pi\sigma)[\psi(v+1)-\psi(\sigma+1)]}{(v-\sigma)(v+\sigma+1)}$ $[\operatorname{Re} v > 0, \operatorname{Re}\sigma > 0, \sigma \neq v]$; BTΦI 170(13) $= -\frac{\sin(2v\pi)\psi'(v+1)}{\pi(2v+1)}[\operatorname{Re} v > 0, \sigma = v]$. BTΦ I 171(14)

## 6.4 1. Series Transformations and Special Functions

### 6.4.1 1

#### 1.1 Index Shift Identity

The following identity holds:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+c}^{n+c} a_{k-c}. \tag{1.1}$$

Proof. The index $k$ in $\sum_{k=m}^{n} a_k$ ranges from $m$ to $n$ :

$$m \leq k \leq n.$$

Replace $k$ with $j-c$,

$$m \leq j-c \leq n.$$

On solving this compound inequality, we get

$$m+c \leq j \leq n+c.$$

This indicates that if we replace the index $k$ with $j-c$, the index $j$ will range from $m+c$ to $n+c$ :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m+c}^{n+c} a_{j-c}.$$

Replace $j$ with $k$ to finish the proof.

Example 1: Let $a_k = \frac{H_k}{k+1}$ and $m=0$ then shift the index by -1 ,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{H_k}{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{H_{k-1}}{k}$$

Example 2: Let $a_k = H_k x^{k-1}$ and $m=3$ then shift the index by $+2$ ,

$$\sum_{k=3}^{n} H_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n-2} H_{k+2} x^{k+1}$$

#### 1.2 Reversing the Order of the Sum Terms

The following identity holds:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_{n-k+m}. \tag{1.2}$$

Proof. Applying the previous proof, we have

$$m \leq k \leq n.$$

Replace $k$ with $n-j+m$,

$$m \leq n+m-j \leq n$$

or

$$m \leq j \leq n.$$

This shows that if we replace the index $k$ with $n-j+m$, the index $j$ will range from $m$ to $n$ as well:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{j=m}^{n} a_{n-j+m}.$$

The proof completes on replacing $j$ with $k$.
This type of transformation reverses the order of the sum terms. To see that, let $m=1$ and $n=4$. The LHS sum gives

$$\sum_{k=1}^{4} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4,$$

which is equivalent to the RHS sum:

$$\sum_{k=1}^{4} a_{5-k} = a_4 + a_3 + a_2 + a_1$$

but in reversed order.
Example 1: Put $a_k = \frac{1}{k}$ and $m=1$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n-k+1} \tag{1.3}$$

Example 2: Put $a_k = k^2$ and $m=3$,

$$\sum_{k=3}^{n} k^2 = \sum_{k=3}^{n} (n-k+3)^2$$

**1.3 Splitting a Sum Into Odd and Even Terms**

Let $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ be an absolutely convergent series. Then we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \tag{1.4}$$

Proof.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \\ &= (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots) + (a_2 + a_4 + a_6 + \cdots) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}.\end{aligned}$$

Example 1: Put $a_n = \frac{1}{n^2}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$$

or

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Example 2: Put $a_n = \frac{H_n}{n^3}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{2n+1}}{(2n+1)^3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{2n}}{(2n)^3}$$

### 1.4 Converting the Summand $a_{2n}$ to $a_n$

Let $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ be an absolutely convergent series. Then we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \tag{1.5}$$

Proof. Starting with the RHS,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a^n =& a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + (-a_1 + a_2 - a_3 + \cdots) \\
=& 2a_2 + 2a_4 + 2a_6 + \cdots \\
=& 2\left(a_2 + a_4 + a_6 + \cdots\right) \\
=& 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}
\end{aligned}$$

Applying the same approach, we also find

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \tag{1.6}$$

Example 1: Let $a_n = \frac{1}{(n+1)^4}$ in (1.5),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^4}$$

Example 2: Let $a_n = \frac{H_{n+1}}{(n+3)^3}$ in (1.6),

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{2n+1}}{(2n+3)^3} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n+1}}{(n+3)^3} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{H_{n+1}}{(n+3)^3}$$

The following sum is related:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n. \tag{1.7}$$

To prove it, start with LHS:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi) &= a_1 \cos(\pi) + a_2 \cos(2\pi) + a_3 \cos(3\pi) + \cdots \\
&= -a_1 + a_2 - a_3 + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n
\end{aligned}
$$

### 1.5 Converting the Summand $a_{2n+1}$ to $a_n$

Let $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ be an absolutely convergent series. Then we have

$$
\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n. \tag{1.8}
$$

**Proof**

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a^n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots - (-a_1 + a_2 - a_3 + \cdots) \\
&= 2a_1 + 2a_3 + 2a_5 + \cdots \\
&= 2\left(a_1 + a_3 + a_5 + \cdots\right) \\
&= 2\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}
\end{aligned}
$$

Let's shift the index of the LHS sum in (1.8) by -1 ,

$$
\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a^n. \tag{1.9}
$$

Example 1: Set $a_n = \frac{H_n}{n^3}$ in (1.8),

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{2n+1}}{(2n+1)^3} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^3} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{H_n}{n^3}
$$

Example 2: Set $a_n = \frac{1}{n^4}$ in (1.9),

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}
$$

### 1.6 Converting the Summand (-1) $^n a_{2n}$ to $i^n a_n$

Let $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ be an absolutely convergent series. Then we have

$$
\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_{2n} = \Re \sum_{n=1}^{\infty} i^n a_n. \tag{1.10}
$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} i^n a_n &= ia_1 + i^2 a_2 + i^3 a_3 + i^4 a_4 + i^5 a_5 + i^6 a_6 + \cdots \\
&= ia_1 - a_2 - ia_3 + a_4 + ia_5 - a_6 + \cdots \\
&= i\left(a_1 - a_3 + a_5 - \cdots\right) + \left(-a_2 + a_4 - a_6 + \cdots\right) \\
&= i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_{2n+1} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_{2n}.
\end{aligned} \tag{1.11}
$$

The proof follows on comparing the real parts of both sides.
Example 1: Put $a_n = \frac{x^n}{n^3}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)^3} = \Re \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{x^n}{n^3}$$

Example 2: Put $a_n = \frac{H_{n+1}}{n^2}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{H_{2n+1}}{(2n)^2} = \Re \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{H_{n+1}}{n^2}$$

A different form for the sum (1.10) is

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \tag{1.12}$$

To show that, start with the RHS:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) &= a_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + a_2 \cos(\pi) + a_3 \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) \\
&\quad + a_4 \cos(2\pi) + a_5 \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) + a_6 \cos(3\pi) + \cdots \\
&= 0 - a_2 + 0 + a_4 + 0 - a_6 + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_{2n}
\end{aligned}
$$

### 1.7 Converting the Summand (-1) $^n a_{2n+1}$ to $i^n a_n$

Let $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ be an absolutely convergent series. Then we have

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_{2n+1} = \Im \sum_{n=1}^{\infty} i^n a_n \tag{1.13}$$

Proof. Compare the imaginary parts of both sides of (1.11).
Example 1: Let $a_n = \frac{1}{n^3}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \Im \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^3}$$

Example 2: Let $a_n = \frac{H_n}{(n+1)^2}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{H_{2n+1}}{(2n+2)^2}=\Im\sum_{n=1}^{\infty}i^n\frac{H_n}{(n+1)^2}$$

We also have

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)=&a_1\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+a_2\sin(\pi)+a_3\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\\&+a_4\sin(2\pi)+a_5\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)+a_6\sin(3\pi)+\cdots\\&=a_1+0-a_3+0+a_5+0-\cdots\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_{2n+1}\end{aligned}\tag{1.14}$$

## 1.8 The Logarithmic Form of the Product Formula

The following identity holds:

$$\sum_{n=m}^{r}\ln\left(a_n\right)=\ln\prod_{n=m}^{r}a_n.\tag{1.15}$$

**Proof**

$$\begin{aligned}\sum_{n=m}^{r}\ln\left(a_n\right)&=\ln\left(a_m\right)+\ln\left(a_{m+1}\right)+\cdots+\ln\left(a_r\right)\\&=\ln\left(a_m\times a_{m+1}\times\cdots\times a_r\right)\\&=\ln\prod_{n=m}^{r}a_n\end{aligned}$$

Example 1: Let $a_n=n$,

$$\sum_{n=1}^{r}\ln(n)=\ln\prod_{n=1}^{r}n=\ln(1\times 2\times 3\times\cdots\times r)=\ln(r!)$$

Example 2: Let $a_n=e^n$,

$$\ln\prod_{n=1}^{r}e^n=\sum_{n=1}^{r}\ln\left(e^n\right)=\sum_{n=1}^{r}n=\frac{r(r+1)}{2}.$$

## 1.9 Rearrangement Theorem for Double Series

The following identity holds:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{m}a_m b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n}^{\infty}a_m b_n\tag{1.16}$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{m}a_m b_n &= a_1\sum_{n=1}^{1}b_n + a_2\sum_{n=1}^{2}b_n + a_3\sum_{n=1}^{3}b_n + \cdots \\
&= a_1\left(b_1\right) + a_2\left(b_1+b_2\right) + a_3\left(b_1+b_2+b_3\right) + \cdots \\
&= b_1\left(a_1+a_2+\cdots\right) + b_2\left(a_2+a_3+\cdots\right) + b_3\left(a_3+a_4+\cdots\right) + \cdots \\
&= b_1\sum_{m=1}^{\infty}a_m + b_2\sum_{m=2}^{\infty}a_m + b_3\sum_{m=3}^{\infty}a_m + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}b_n\sum_{m=n}^{\infty}a_m \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n}^{\infty}a_m b_n
\end{aligned}
$$

If we apply the same steps above, we also find

$$
\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{m-1}a_m b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n+1}^{\infty}a_m b_n \tag{1.17}
$$

Example 1: Let $a_m = p^m$ and $b_n = p^n$,

$$
\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{m}p^{m+n} = \sum_{n=1}^{\infty}p^n\left(\sum_{m=n}^{\infty}p^m\right)
$$

{use the geometric series formula for the inner sum assuming $|p| < 1$ }

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty}p^n\left(\frac{p^n}{1-p}\right) \\
&= \frac{1}{1-p}\sum_{n=1}^{\infty}\left(p^2\right)^n
\end{aligned}
$$

{use the geometric series formula again}

$$
= \frac{1}{1-p}\left(\frac{p^2}{1-p^2}\right)
$$

Example 2: Let $a_m = x^m$ and $b_n = \bar{H}_n$,

$$
\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{m}x^m\bar{H}_n = \sum_{n=1}^{\infty}\bar{H}_n\left(\sum_{m=n}^{\infty}x^m\right)
$$

{use the geometric series formula assuming $|x| < 1$ }

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty}\bar{H}_n\left(\frac{x^n}{1-x}\right) \\
&= \frac{1}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{H}_n x^n
\end{aligned}
$$

{substitute the result (2.29)}

$$= \frac{1}{1-x}\left(\frac{\ln(1+x)}{1-x}\right)$$
$$= \frac{\ln(1+x)}{(1-x)^2}.$$

## 1.10 The Logarithm of a Complex Number

The logarithm of a complex number, $z = x + iy$, is given by

$$\ln(x+iy) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) + i\arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad x > 0. \tag{1.18}$$

Proof. We begin with converting to polar coordinates,

$$x + iy = r\cos(\theta) + ir\sin(\theta)$$
$$= r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

On using Euler's formula:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{1.19}$$

which can be proved by expanding $\cos(x), \sin(x)$, and $e^x$ in Taylor series, we have

$$x + iy = re^{i\theta}$$

Take the logarithm of both sides,

$$\ln(x+iy) = \ln\left(re^{i\theta}\right) = \ln(r) + \ln\left(e^{i\theta}\right) = \ln(r) + i\theta.$$

The proof completes on substituting $r = \sqrt{x^2+y^2}$ and $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.
The constraint $x > 0$ in (1.18) shows that this rule is valid only when the complex number is in the first or fourth quadrant of the complex plane.
In general, for positive $x$ and $y$, where $x = y \neq 0$ and $y \neq 0$, we have

$$\ln(x+iy) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) + i\arctan\left(\frac{y}{x}\right); \tag{1.20}$$
$$\ln(-x+iy) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) + i\left[\pi - \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right]; \tag{1.21}$$
$$\ln(-x-iy) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) - i\left[\pi - \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right]; \tag{1.22}$$
$$\ln(x-iy) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) - i\arctan\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1.23}$$

For the case $y = 0$, we use

$$\ln(-x) = \ln(x) + i\pi, \quad x > 0. \tag{1.24}$$

Note that (1.22) and (1.23) follows from replacing $i$ with $-i$ in (1.21) and (1.20) respectively. To prove (1.21), we sum it with its conjugate,

$$\ln(-x+iy) + \ln(x+iy) = \ln\left(-x^2-y^2\right) = \ln(-1) + \ln\left(x^2+y^2\right)$$

or

$$
\begin{aligned}
\ln(-x+iy) &= \ln(-1) + \ln\left(x^2+y^2\right) - \ln(x+iy) \\
&\{ \text{ write } \ln(-1) = i\pi \text{ given in (1.25) and recall (1.20)}\} \\
&= i\pi + \ln\left(x^2+y^2\right) - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) - \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) + i\left[\pi - \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right].
\end{aligned}
$$

To prove (1.24), set $x = \pi$ in Euler's formula (1.19) to get

$$e^{i\pi} = -1.$$

Take the log of both sides,

$$i\pi = \ln(-1). \tag{1.25}$$

Add $\ln(x)$ to both sides,

$$\ln(x) + i\pi = \ln(x) + \ln(-1) = \ln(-x).$$

Using the rules from (1.20) to (1.23), we find:

$$\ln(1+i) = \frac{1}{2}\ln(2) + i\frac{\pi}{4} \tag{1.26}$$

$$\ln(-1+i) = \frac{1}{2}\ln(2) + i\frac{3\pi}{4} \tag{1.27}$$

$$\ln(-1-i) = \frac{1}{2}\ln(2) - i\frac{3\pi}{4} \tag{1.28}$$

$$\ln(1-i) = \frac{1}{2}\ln(2) - i\frac{\pi}{4} \tag{1.29}$$

$$\ln(i) = i\frac{\pi}{2} \tag{1.30}$$

$$\ln(-i) = -i\frac{\pi}{2} \tag{1.31}$$

## 1.11 Gamma Function

### 1.11.1 Definition

The gamma function is defined by

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t, \quad \Re(z) > 0 \tag{1.32}$$

For a different integral form, let $t = -n\ln(x)$ and so $\mathrm{d}t = -\frac{n}{x}\,\mathrm{d}x$,

$$
\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_1^0 (-n\ln(x))^{z-1}e^{n\ln(x)}\left(-\frac{n}{x}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= (-1)^{z-1}n^z \int_0^1 x^{n-1}\ln^{z-1}(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Divide both sides by $n^z\Gamma(z)$,

$$\frac{1}{n^z} = \frac{(-1)^{z-1}}{\Gamma(z)} \int_0^1 x^{n-1}\ln^{z-1}(x)\mathrm{d}x, \quad \Re(z) > 0 \tag{1.33}$$

### 1.11.2 Functional Equation

One of the key properties of the gamma function is

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad z \notin \mathbb{Z}_{\leq 0} \tag{1.34}$$

Proof. Replace $z$ with $z+1$ in (1.32),

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t}\ \mathrm{d}t$$

{apply integration by parts (IBP)}

$$= \underbrace{-\ t^z e^{-t}\Big|_0^\infty}_{0} + z\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\ \mathrm{d}t$$

$$= z\Gamma(z)$$

Note that by using

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\ \mathrm{d}t = -\ e^{-t}\Big|_0^\infty = -0+1 = 1$$

and $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, we see that:

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= 1\cdot\Gamma(1) = 1\cdot 1 = 1! \\
\Gamma(3) &= 2\cdot\Gamma(2) = 2\cdot 1! = 2! \\
\Gamma(4) &= 3\cdot\Gamma(3) = 3\cdot 2! = 3! \\
\Gamma(5) &= 4\cdot\Gamma(4) = 4\cdot 3! = 4!
\end{aligned}$$

So, in general, we have

$$\Gamma(z) = (z-1)! \quad z \in \mathbb{Z}^+ \tag{1.35}$$

Employing this identity in (1.33) gives

$$\frac{1}{n^z} = \frac{(-1)^{z-1}}{(z-1)!}\int_0^1 x^{n-1}\ln^{z-1}(x)\mathrm{d}x, \quad z \in \mathbb{Z}^+ \tag{1.36}$$

### 1.11.3 Stirling's Approximation

Stirling's approximation is an approximation for factorials:

$$n! \sim \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n} \tag{1.37}$$

where $f(n) \sim g(n)$ means $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = 1$.

The following proof is due to Steven Krantz [7, p. 277-278]:

Proof. Begin with the definition of the gamma function:

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t}\ \mathrm{d}t$$

$$\{\text{ let } t = n + x\sqrt{2n}\}$$

$$= \sqrt{2}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^\infty e^{-x\sqrt{2n}}\left(1+x\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n\ \mathrm{d}x$$

$$\left\{\text{ write } \left(1+x\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^n = e^{n\ln\left(1+x\sqrt{\frac{2}{n}}\right)}\right\}$$

$$= \sqrt{2} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{\infty} e^{n \ln\left(1+x\sqrt{\frac{2}{n}}\right) - x\sqrt{2n}} \, \mathrm{d}x$$

Divide both sides by $\sqrt{2} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$ then let $n \to \infty$, we get

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^{\infty} e^{n \ln\left(1+x\sqrt{\frac{2}{n}}\right) - x\sqrt{2n}} \, \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lim_{n\to\infty} \left[n \ln\left(1+x\sqrt{\frac{2}{n}}\right) - x\sqrt{2n}\right]} \mathrm{d}x$$

To find this limit, let $x\sqrt{\frac{2}{n}} = y$ and so $n = \frac{2x^2}{y^2}$,

$$\lim_{n\to\infty} \left[ n \ln \left( 1 + x\sqrt{\frac{2}{n}} \right) - x\sqrt{2n} \right] = 2x^2 \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y) - y}{y^2}$$

{apply L'Hôpital's rule since we have the case 0/0 }

$$= 2x^2 \lim_{y\to 0} \frac{\frac{1}{1+y} - 1}{2y}$$

$$= x^2 \lim_{y\to 0} \frac{-1}{1+y}$$

$$= -x^2$$

Plug this limit back, we get

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$$

This integral is called the Gaussian integral, which evaluates to $\sqrt{\pi}$ by using the polar coordinates [45]. Thus,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} = \sqrt{\pi}$$

Divide both sides by $\sqrt{\pi}$ to finish the proof.

To evaluate the Gaussian integral in a different way, split the integral at $x = 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x}_{x\to -x} + \int_{0}^{\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$$

$$= 2 \int_{0}^{\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$$

$$\overset{x=\sqrt{y}}{=} \int_{0}^{\infty} y^{-\frac{1}{2}} e^{-y} \, \mathrm{d}y$$

$$\{\text{set } z = 1/2 \text{ in } (1.32)\}$$

$$= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

where $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ given in (1.41).

Remark: The substitution $x \to -x$ used above means that we substitute $x = -u$. After simplifying and having everything in terms of $u$, we change $u$ to $x$. Other common substitutions that will be frequently used are $x \to 1-x, x \to \frac{1}{x}, x \to \sqrt{x}$, $x \to x^2$, and $x \to \frac{1-x}{1+x}$.

### 1.11.4 Expressing the Gamma Function as a Product

The gamma function is also expressed as

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{z+k}, \quad z \notin \mathbb{Z}_{\leq 0} \tag{1.38}$$

Proof. By the functional equation (1.34), we have:

$$\begin{aligned}
&\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \\
&\Gamma(z+2) = (z+1) \cdot \Gamma(z+1) = (z+1) \cdot z\Gamma(z) \\
&\Gamma(z+3) = (z+2) \cdot \Gamma(z+2) = (z+2) \cdot (z+1) \cdot z\Gamma(z)
\end{aligned}$$

This can be generalized to

$$\Gamma(z+n+1) = (z+n) \cdot (z+n-1) \cdots (z+1) \cdot z\Gamma(z)$$

or

$$\begin{aligned}
\Gamma(z) &= \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\cdots(z+n)} \\
&= \frac{\Gamma(z+n+1)}{z\prod_{k=1}^{n}(z+k)} \\
&= \frac{\Gamma(z+n+1)}{z} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{z+k}.
\end{aligned}$$

### 1.11.5 Euler's Definition as an Infinite Product

Another form of the gamma function is

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^z}{1+\frac{z}{k}}, \quad z \notin \mathbb{Z}_{\leq 0} \tag{1.39}$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^z}{1+\frac{z}{k}} &= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^z}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^z \left(1+\frac{z}{k}\right)} \\
&\left\{ \text{use } \prod_{k=1}^{n} a_k b_k = \prod_{k=1}^{n} a_k \prod_{k=1}^{n} b_k \right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^z}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^z} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{z}{k}} \\
&\left\{ \text{use } \prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_n} = \prod_{k=1}^{n-1} a_k \text{ for the first product } \right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n-1} \left(1+\frac{1}{k}\right)^z \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+z} \\
&\left\{ \text{write } \prod_{k=1}^{n-1} \left(1+\frac{1}{k}\right)^z = n^z \text{ and } \prod_{k=1}^{n} k = n! \right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} n^z n! \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k+z}
\end{aligned}
$$

{this product is given in (1.38)}

$$
= \lim_{n\to\infty} n^z n! \frac{z\Gamma(z)}{\Gamma(n+z+1)}
$$

{use Stirling's approximation for $n!$ and $\Gamma(n+z+1)$ }

$$
\begin{aligned}
&= z\Gamma(z) \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} n^z}{\sqrt{2\pi} (n+z)^{n+z+\frac{1}{2}} e^{-n-z}} \\
&= z\Gamma(z) e^z \lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+z+\frac{1}{2}}}{(n+z)^{n+z+\frac{1}{2}}} \\
&= z\Gamma(z) e^z \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+z}\right)^{z+\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{n+z}\right)^n \\
&= z\Gamma(z) e^z \frac{\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+z}\right)^{z+\frac{1}{2}}}{\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right)^n} \\
&= z\Gamma(z) e^z \frac{(1)^{z+\frac{1}{2}}}{e^z} \\
&= z\Gamma(z)
\end{aligned}
$$

The identity $\prod_{k=1}^{n-1} \left(1+\frac{1}{k}\right)^z = z^2$ used in the proof can be explained as follows:

$$
\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n-1} \left(1+\frac{1}{k}\right)^z &= \prod_{k=1}^{n-1} \frac{(k+1)^z}{k^z} \\
&= \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (k+1)^z}{\prod_{k=1}^{n-1} k^z} \\
&= \frac{2^z \cdot 3^z \cdots (n-1)^z \cdot n^z}{1^z \cdot 2^z \cdots (n-1)^z} \\
&= n^z
\end{aligned}
$$

### 1.11.6 Euler's Reflection Formula

Euler's reflection formula is given by:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi \csc(\pi z), \quad z \notin \mathbb{Z} \tag{1.40}$$

Proof. Set $a = z$ and $b = 1 - z$ in the beta function (1.50):

$$\mathrm{B}(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}} \, \mathrm{d}x$$

we obtain

$$\begin{aligned}
\Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \int_0^\infty \frac{x^{z-1}}{1+x} \, \mathrm{d}x \\
&= \left(\int_0^1 + \int_1^\infty\right) \frac{x^{z-1}}{1+x} \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{x^{z-1}}{1+x} \, \mathrm{d}x + \underbrace{\int_1^\infty \frac{x^{z-1}}{1+x} \, \mathrm{d}x}_{x \to 1/x} \\
&= \int_0^1 \frac{x^{z-1}}{1+x} \, \mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^{-z}}{1+x} \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\left\{ \text{expand } \frac{1}{1+x} \text{ in series in both integrals} \right\}$$

$$= \int_0^1 x^{z-1} \left(\sum_{n=0}^\infty (-1)^n x^n\right) \mathrm{d}x + \int_0^1 x^{-z} \left(\sum_{n=0}^\infty (-1)^n x^n\right) \mathrm{d}x$$

{interchange integration and summation}

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \int_0^1 x^{n+z-1} \, \mathrm{d}x + \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \int_0^1 x^{n-z} \, \mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n+z} + \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n-z+1}
\end{aligned}$$

{separate the first term of the first sum and shift the index of the second

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n+z} - \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n-z} \\
&= \frac{1}{z} - 2\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n z}{n^2 - z^2} \\
&= \frac{1}{z}\left(1 - 2\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n z^2}{n^2 - z^2}\right)
\end{aligned}$$

{recall the identity (2.98)}

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{z}(\pi z \csc(\pi z)) \\
&= \pi \csc(\pi z)
\end{aligned}$$

Setting $z = \frac{1}{2}$ in (1.40) yields

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi \csc\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

or

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \tag{1.41}$$

Remark: The interchange of integration and summation used in the proof above is justified by Lebesgue's dominated convergence theorem [13]:

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n(x)\mathrm{d}x \tag{1.42}$$

where $X$ is the integration interval.

This theorem will be frequently used throughout the book where it's applicable. So we are not going to re-explain why the interchange is justified if used again.

### 1.11.7 Legendre Duplication Formula

The Legendre duplication formula is given by

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{2\sqrt{\pi}\Gamma(2n)}{4^n\Gamma(n)} \tag{1.43}$$

The following proof may be found in [46]:

Proof. Letting $a = b = n$ in the beta function in (1.46):

$$\mathrm{B}(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\ \mathrm{d}x$$

yields

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma^2(n)}{\Gamma(2n)} &= \int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{n-1}\ \mathrm{d}x \\
&\overset{x=\frac{1+u}{2}}{=} 2^{1-2n}\int_{-1}^1 \left(1-u^2\right)^{n-1}\ \mathrm{d}u \\
&= 2^{1-2n}\left(\int_{-1}^0 + \int_0^1\right)\left(1-u^2\right)^{n-1}\ \mathrm{d}u \\
&= 2^{1-2n}\underbrace{\int_{-1}^0 \left(1-u^2\right)^{n-1}\ \mathrm{d}u}_{u\to -u} + 2^{1-2n}\int_0^1 \left(1-u^2\right)^{n-1}\ \mathrm{d}u \\
&= 2^{1-2n}\int_0^{\int_0^1 \left(1-u^2\right)^{n-1}\ \mathrm{d}u + 2^{1-2n}\int_0^1 \left(1-u^2\right)^{n-1}\ \mathrm{d}u} \\
&= 2^{1-2n}\int_0^1 2\left(1-u^2\right)^{n-1}\ \mathrm{d}u \qquad (1.44) \\
&\overset{u=\sqrt{x}}{=} 2^{1-2n}\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{n-1}\ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

{use the definition of the beta function (1.46)}

$$= 2^{1-2n}\ \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, n\right)$$

{recall the property of the beta function (1.47)}

$$= \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n)}{4^n\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)}$$

The proof completes on substituting $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ given in (1.41). Further, substitute $u = \cos(x)$ in (1.44) to have

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1}(x)\mathrm{d}x = \frac{4^n\Gamma^2(n)}{4\Gamma(2n)}$$

Let's simplify the RHS. By the definition of the binomial coefficient:

$$\binom{a}{b} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma(a-b+1)}$$

we have

$$\binom{2n}{n} = \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma^2(n+1)}$$

$$\{\text{ use } \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \text{ given in } (1.34)\}$$

$$= \frac{2\Gamma(2n)}{n\Gamma^2(n)}$$

or

$$\frac{\Gamma^2(n)}{\Gamma(2n)} = \frac{2}{\binom{2n}{n}n}$$

Thus,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1}(x)\mathrm{d}x = \frac{4^n}{\binom{2n}{n}}\frac{1}{2n} \tag{1.45}$$

More results of the gamma function may be found in [44].

### 6.4.2 2

#### 1.12 Beta Function

#### 1.12.1 Definition

The beta function is defined by

$$\mathrm{B}(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\ \mathrm{d}x, \quad \Re(a), \Re(b) > 0 \tag{1.46}$$

One of the key identities of the beta function is the Beta-Gamma identity:

$$\mathrm{B}(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \tag{1.47}$$

The following proof may be found in [48]:

Proof. Using the definition of the gamma function in (1.32), we have

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \left(\int_0^\infty e^{-x}x^a \, \mathrm{d}x\right)\left(\int_0^\infty e^{-y}y^b \, \mathrm{d}y\right)$$
$$\{ \text{ let } x = zt \text{ and } y = z(1-t)\}$$
$$= \int_0^\infty \int_0^1 e^{-z}(zt)^{a-1}(z(1-t))^{b-1}z \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}z$$
$$= \left(\int_0^\infty e^{-z}z^{a+b-1} \, \mathrm{d}z\right)\left(\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} \, \mathrm{d}t\right)$$
$$= \Gamma(a+b)\mathrm{B}(a,b)$$

The proof follows on dividing both sides by $\Gamma(a+b)$.
Another identity is the symmetry:

$$\mathrm{B}(a,b) = \mathrm{B}(b,a). \tag{1.48}$$

To prove it, let $1-x=y$ in (1.46),

$$\mathrm{B}(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} \, \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 y^{b-1}(1-y)^{a-1} \, \mathrm{d}y$$
$$= \mathrm{B}(b,a)$$

### 1.12.2 Trigonometric Integral Representation

A different integral form of the beta function is

$$\mathrm{B}(a,b) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2a-1}(x)\sin^{2b-1}(x)\mathrm{d}x, \quad \Re(a), \Re(b) > 0 \tag{1.49}$$

Proof. Let $x = \cos^2(\theta)$ in (1.46) and so $dx = -2\cos(\theta)\sin(\theta)d\theta$,

$$\mathrm{B}(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} \, \mathrm{d}x$$
$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(\cos^2(\theta)\right)^{a-1}\left(1-\cos^2(\theta)\right)^{b-1}(-2\cos(\theta)\sin(\theta)\mathrm{d}\theta)$$
$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(\cos^2(\theta)\right)^{a-1}\left(\sin^2(\theta)\right)^{b-1}(-2\cos(\theta)\sin(\theta)\mathrm{d}\theta)$$
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2a-1}(\theta)\sin^{2b-1}(\theta)\mathrm{d}\theta$$

### 1.12.3 Improper Integral Representation

Another form of the beta function is

$$\mathrm{B}(a,b) = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}} \, \mathrm{d}x, \quad \Re(a), \Re(b) > 0. \tag{1.50}$$

Proof. Let $x = \frac{y}{1+y}$ in (1.46) and so $dx = \frac{dy}{(1+y)^2}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}(a,b) &= \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{y}{1+y}\right)^{a-1}\left(1-\frac{y}{1+y}\right)^{b-1}\frac{\mathrm{d}y}{(1+y)^2} \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{y}{1+y}\right)^{a-1}\left(\frac{1}{1+y}\right)^{b-1}\frac{\mathrm{d}y}{(1+y)^2} \\
&= \int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}}\ \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

### 1.12.4 Powerful Integral Representation

We also have

$$\mathrm{B}(a,b) = \int_0^1 \frac{x^{a-1}+x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\ \mathrm{d}x, \quad \Re(a), \Re(b) > 0 \tag{1.51}$$

The following proof is due to Cornel Vălean [32, p. 72]:
Proof. Let $x \to \frac{1}{x}$,

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1}+x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\ \mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{x^{a-1}+x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\ \mathrm{d}x$$

$$\left\{ \text{add } \int_0^1 \frac{x^{a-1}+x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\ \mathrm{d}x \text{ to both sides then divide by } 2 \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \tfrac{1}{2}\int_0^1 \tfrac{x^{a-1}+x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\ \mathrm{d}x + \tfrac{1}{2}\int_1^\infty \tfrac{x^{a-1}+x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\ \mathrm{d}x \\
&= \tfrac{1}{2}\left(\int_0^1 + \int_1^\infty\right) \tfrac{x^{a-1}+x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\ \mathrm{d}x \\
&= \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \tfrac{x^{a-1}+x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}}\ \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

{use the definition of the beta function (1.50)}

$$= \tfrac{1}{2}\ \mathrm{B}(a,b) + \tfrac{1}{2}\ \mathrm{B}(b,a)$$

$\{$ write $\mathrm{B}(b,a) = \mathrm{B}(a,b)$ given in

$$\begin{aligned}
&= \tfrac{1}{2}\ \mathrm{B}(a,b) + \tfrac{1}{2}\ \mathrm{B}(a,b) \\
&= \mathrm{B}(a,b)
\end{aligned}$$

## 1.13 Dirichlet Eta Function

### 1.13.1 Definition

The Dirichlet eta function is defined by

$$\eta(z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^z}, \quad \Re(z) > 0 \tag{1.52}$$

### 1.13.2 Integral Representation

The integral representation of the eta function is

$$\eta(z) = \frac{(-1)^{z-1}}{\Gamma(z)} \int_0^1 \frac{\ln^{z-1}(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x, \quad \Re(z) > 0 \tag{1.53}$$

Proof. By using (1.33):

$$\frac{1}{n^z} = \frac{(-1)^{z-1}}{\Gamma(z)} \int_0^1 x^{n-1} \ln^{z-1}(x)\mathrm{d}x$$

we have

$$\begin{aligned}
\eta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^z} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left( \frac{(-1)^{z-1}}{\Gamma(z)} \int_0^1 x^{n-1} \ln^{z-1}(x)\mathrm{d}x \right) \\
&\{\text{interchange integration and summation}\} \\
&= \frac{(-1)^{z-1}}{\Gamma(z)} \int_0^1 \ln^{z-1}(x) \left( \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1} \right) \mathrm{d}x \\
&\{\text{ use the geometric series formula }\} \\
&= \frac{(-1)^{z-1}}{\Gamma(z)} \int_0^1 \ln^{z-1}(x) \left( \frac{1}{1+x} \right) \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

### 1.13.3 Evaluation of $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{0})$

The following result is very essential for later calculations:

$$\eta(0) = \frac{1}{2} \tag{1.54}$$

The following proof is due to Jack D'Aurizio [9]:

Proof (i). Let's start with the integral form of the Dirichlet eta function,

$$\begin{aligned}
\eta(z) &= \frac{(-1)^{z-1}}{\Gamma(z)} \int_0^1 \frac{\ln^{z-1}(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{x=e^{-t}}{=} \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{1+e^t}\,\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{IBP}}{=} \frac{1}{\Gamma(z)} ( \underbrace{\left. \frac{t^z}{z\,(1+e^t)} \right|_0^{\infty}}_{0} + \frac{1}{z} \int_0^{\infty} \frac{t^z e^t}{(1+e^t)^2}\,\mathrm{d}t) \\
&\{\text{ write } z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)\} \\
&= \frac{1}{\Gamma(z+1)} \int_0^{\infty} \frac{t^z e^t}{(1+e^t)^2}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Take the limit on both sides letting $z \to 0^+$,

$$\eta(0) = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^{\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^2}\,\mathrm{d}t = -\left. \frac{1}{1+e^t} \right|_0^{\infty} = \frac{1}{2}$$

Proof (ii).

$$
\begin{aligned}
\eta(0) &= \lim_{s\to 0^+} \eta(s) \\
&= \lim_{s\to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} \\
&= \lim_{s\to 0^+} \left( \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{n-1}}{n^s} \right)
\end{aligned}
$$

$\{$change the order of the limits$\}$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 1^-} \left( \lim_{s\to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{n-1}}{n^s} \right) \\
&= \lim_{x\to 1^-} \left( \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1} \right) \\
&= \lim_{x\to 1^-} \left( \frac{1}{1+x} \right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

A justification for this proof may be found in [20].

### 1.14 Riemann Zeta Function

#### 1.14.1 Definition

The Riemann zeta function is defined by

$$
\zeta(z) = 1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}, \quad \Re(z) > 1 \tag{1.55}
$$

The zeta function $\zeta(z)$ can be related to the Dirichlet eta function $\eta(z)$ by setting $a_n = \frac{1}{n^z}$ in (1.5):

$$
\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n
$$

which gives us

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^z}
$$

Rearrange the terms and write $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = \zeta(z)$,

$$
\zeta(z) = \frac{1}{1-2^{1-z}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^z}
$$

Since the series on the RHS is defined for $\Re(z) > 0$, the domain of $\zeta(z)$ is extended to $\Re(z) > 0$, meaning that

$$
\zeta(z) = \frac{\eta(z)}{1-2^{1-z}} \quad \Re(z) > 0, z \neq 1. \tag{1.56}
$$

The input value $z = 1$ is excluded because it makes the factor $\frac{1}{1-2^{1-z}}$ undefined.
Examples:

$$\zeta(2) = 2\eta(2)$$
$$\zeta(3) = \frac{4}{3}\eta(3)$$
$$\zeta(4) = \frac{8}{7}\eta(4)$$
$$\zeta(5) = \frac{16}{15}\eta(5)$$

To find the value of $\zeta(0)$, let $z \to 0^+$in (1.56),

$$\zeta(0) = -\eta(0) = -\frac{1}{2} \tag{1.57}$$

where we used $\eta(0) = \frac{1}{2}$ given in (1.54).

### 1.14.2 Integral Representation

The integral form of the Riemann zeta function is

$$\zeta(z) = \frac{(-1)^{z-1}}{\Gamma(z)} \int_0^1 \frac{\ln^{z-1}(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x, \quad \Re(z) > 1 \tag{1.58}$$

Proof. Using (1.36):

$$\frac{1}{n^z} = \frac{(-1)^{z-1}}{\Gamma(z)} \int_0^1 x^{n-1} \ln^{z-1}(x)\mathrm{d}x$$

we have

$$\begin{aligned}
\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{z-1}}{\Gamma(z)} \int_0^1 x^{n-1} \ln^{z-1}(x)\mathrm{d}x \right) \\
&\{ \text{ interchange integration and summation } \} \\
&= \frac{(-1)^{z-1}}{\Gamma(z)} \int_0^1 \ln^{z-1}(x) \left( \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \right) \mathrm{d}x \\
&\{ \text{ use the geometric series formula } \} \\
&= \frac{(-1)^{z-1}}{\Gamma(z)} \int_0^1 \ln^{z-1}(x) \left( \frac{1}{1-x} \right) \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

### 1.14.3 Evaluation of $\boldsymbol{\zeta(2)}$

Leonhard Euler was the first one to prove

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{1.59}$$

The following proof is due to Sujeethan Balendran [3]:
Proof. Squaring both sides of

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

we have

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{16} &= \left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}\right)\left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\right)\\
&= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y\ \mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+y^2)}\\
&\overset{y=t/x}{=} \int_0^1 \int_0^x \frac{\mathrm{d}t\ \mathrm{d}x}{x(1+x^2)(1+t^2/x^2)}
\end{aligned}$$

{change the order of integration}

$$= \int_0^1 \int_t^1 \frac{\mathrm{d}x\ \mathrm{d}t}{x(1+x^2)(1+t^2/x^2)}$$

$$x = \sqrt{u}\frac{1}{2}\int_0^1 \left[\int_{t^2}^1 \frac{\mathrm{d}u}{(1+u)(u+t^2)}\right]\mathrm{d}t$$

$$\text{write } \frac{1}{(1+u)(u+t^2)} = \frac{1}{1-t^2}\left(\frac{1}{u+t^2} - \frac{1}{1+u}\right)\}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1-t^2}\left[\int_{t^2}^1 \frac{\mathrm{d}u}{u+t^2} - \int_{t^2}^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u}\right]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1-t^2}\left[\ln(u+t^2) - \ln(1+u)\right]_{u=t^2}^{u=1}\ \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1-t^2}\left[\ln\left(\frac{1+t^2}{2}\right) - \ln\left(\frac{2t^2}{1+t^2}\right)\right]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1-t^2}\ln\left(\frac{\left(1+t^2\right)^2}{4t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{1+t^2}{2t}\right)}{1-t^2}\ \mathrm{d}t$$

$$= \quad \overset{t=\frac{1-x}{1+x}}{2} \int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)}{x}\ \mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{y}\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)}{y}\ \mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{1-y^2}{(1-y)^2}\right)}{y}\ \mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{4}\underbrace{\frac{1}{y}}_{y\to\sqrt{y}}\frac{\ln\left(1-y^2\right)}{y}\ \mathrm{d}y - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln(1-y)}{y}\ \mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^1 \frac{\ln(1-y)}{y}\ \mathrm{d}y - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln(1-y)}{y}\ \mathrm{d}y$$

$$= -\frac{3}{8}\int_0^1 \frac{\ln(1-y)}{y}\ \mathrm{d}y$$

$$\{\text{expand} \ln(1-y) \text{ in series}\}$$

$$= -\frac{3}{8}\int_0^1 \frac{1}{y}\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n}\right)\mathrm{d}y$$

{interchange integration and summation}

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{8}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\int_0^1 y^{n-1}\ \mathrm{d}y\\
&= \frac{3}{8}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)\\
&= \frac{3}{8}\zeta(2)
\end{aligned}$$

So we have $\frac{\pi^2}{16} = \frac{3}{8}\zeta(2)$ or $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ and the proof is complete.

### 1.14.4 Evaluation of $\boldsymbol{\zeta(2n)}$

Let $n \in \mathbb{Z}^+$. Then the following identity holds:

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n+1} B_{2n} (2\pi)^{2n}}{2(2n)!} \tag{1.60}$$

Proof. Separating the first term using $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$, we have

$$\sum_{n=0}^{\infty} \zeta(2n) x^{2n} = -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \zeta(2n) x^{2n}$$

$$\{\text{expand } \zeta(2n) \text{ in series }\}$$

$$= -\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} \right) x^{2n}$$

{change the order of summations}

$$= -\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \left( x^2/k^2 \right)^n \right)$$

{use the geometric series formula}

$$= -\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2/k^2}{1 - x^2/k^2}$$

$$= -\frac{1}{2} \left( 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{k^2 - x^2} \right)$$

{use the result (2.96)}

$$= -\frac{1}{2} \pi x \cot(\pi x)$$

{expand $\cot(\pi x)$ in Taylor series given in (1.172)}

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B_{2n} (2\pi)^{2n}}{2(2n)!} x^{2n}$$

So we have

$$\sum_{n=0}^{\infty} \zeta(2n) x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} B_{2n} (2\pi)^{2n}}{(2n)!} x^{2n}$$

The proof finishes on comparing the coefficients of $x^{2n}$.

Examples:

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$$

$$\zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}$$

$$\zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93555}$$

## 1.15 Dirichlet Beta Function

### 1.15.1 Definition

The Dirichlet beta function is defined by

$$\beta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^z} = 1 - \frac{1}{3^z} + \frac{1}{5^z} - \cdots, \quad \Re(z) > 0 \tag{1.61}$$

### 1.15.2 Integral Representation

The integral form of the Dirichlet beta function is

$$\beta(z) = \frac{(-1)^{z-1}}{\Gamma(z)} \int_0^1 \frac{\ln^{z-1}(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \Re(z) > 0 \tag{1.62}$$

Proof. By writing

$$\frac{1}{(2n+1)^z} = \frac{(-1)^{z-1}}{\Gamma(z)} \int_0^1 x^{2n} \ln^{z-1}(x)\mathrm{d}x$$

which follows from (1.33), we have

$$\begin{aligned}
\beta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^z} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{(-1)^{z-1}}{\Gamma(z)} \int_0^1 x^{2n} \ln^{z-1}(x)\mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{(-1)^{z-1}}{\Gamma(z)} \int_0^1 \ln^{z-1}(x) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \left(-x^2\right)^n \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{(-1)^{z-1}}{\Gamma(z)} \int_0^1 \frac{\ln^{z-1}(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

### 1.15.3 Dirichlet Beta-Polygamma Relation

Let $a \in \mathbb{Z}^+$. Then we have

$$\beta(a) = \frac{(-1)^a 2^{1-2a}}{(a-1)!} \psi^{(a-1)}\left(\frac{1}{4}\right) - \left(1 - \frac{1}{2^a}\right)\zeta(a) \tag{1.63}$$

Proof.

$$\beta(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^a}$$

$$\left\{ \text{use } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = 2\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ given in (1.6)} \right\}$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)^a} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^a}$$

The first sum:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)^a} = \frac{1}{4^a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1/4)^a}$$

{make use of the definition (1.152)}

$$= \frac{(-1)^a 2^{-2a}}{(a-1)!}\psi^{(a-1)}\left(\frac{1}{4}\right). \tag{1.64}$$

The second sum: Set $a_n = \frac{1}{(n+1)^a}$ in (1.6),

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^a} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^a} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^a}$$

{shift the index $n$ by -1 in both series on the RHS}

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^a}$$
$$= \frac{1}{2}\zeta(a) + \frac{1}{2}\eta(a)$$

Substitute $\eta(a) = (1-2^{1-a})\,\zeta(a)$ given in (1.56), we have

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^a} = \left(1-2^{-a}\right)\zeta(a) \tag{1.65}$$

The proof completes on collecting the two sums.

Examples:

$$\beta(2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = -\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\psi^{(1)}\left(\frac{1}{4}\right)}{48} - \frac{3}{4}\zeta(2);$$
$$\beta(4) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^4} = -\frac{1}{6}\int_0^1 \frac{\ln^3(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\psi^{(3)}\left(\frac{1}{4}\right)}{768} - \frac{15}{16}\zeta(4);$$
$$\beta(6) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^6} = -\frac{1}{120}\int_0^1 \frac{\ln^5(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\psi^{(5)}\left(\frac{1}{4}\right)}{245760} - \frac{63}{64}\zeta(6);$$
$$\beta(8) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^8} = -\frac{1}{5040}\int_0^1 \frac{\ln^7(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\psi^{(7)}\left(\frac{1}{4}\right)}{165150720} - \frac{255}{256}\zeta(8).$$

### 1.15.4 Evaluation of $\boldsymbol{\beta(2a+1)}$

Let $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Then we have

$$\beta(2a+1) = \frac{|E_{2a}|}{2(2a)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2a+1} \tag{1.66}$$

Proof. Replace $z$ with $2a+1$ in (1.62) then write $\Gamma(2a+1) = (2a)!$,

$$\beta(2a+1) = \frac{1}{(2a)!}\int_0^1 \frac{\ln^{2a}(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2a)!}\left(\int_0^\infty - \int_1^\infty\right)\frac{\ln^{2a}(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(2a)!}\int_0^\infty \frac{\ln^{2a}(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \underbrace{\frac{1}{(2a)!}\int_1^\infty \frac{\ln^{2a}(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x}_{x\to 1/x} \\
&= \frac{1}{(2a)!}\int_0^\infty \frac{\ln^{2a}(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \underbrace{\frac{1}{(2a)!}\int_0^1 \frac{\ln^{2a}(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x}_{\beta(2a+1)}
\end{aligned}
$$

Rearrange the terms, we get

$$\beta(2a+1) = \frac{1}{2(2a)!}\int_0^\infty \frac{\ln^{2a}(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

and this integral is given in (3.21).

**Examples:**

$$
\begin{aligned}
\beta(1) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} \\
\beta(3) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^2(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^3}{32} \\
\beta(5) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^5} = \frac{1}{24}\int_0^1 \frac{\ln^4(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{5\pi^5}{1536} \\
\beta(7) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^7} = \frac{1}{720}\int_0^1 \frac{\ln^6(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{16\pi^7}{184320}
\end{aligned}
$$

### 6.4.3 3

**1.16 Polylogarithm Function**

**1.16.1 Definition**

The polylogarithm function of order $a$ is defined by

$$\mathrm{Li}_a(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^a} = z + \frac{z^2}{2^a} + \frac{z^3}{3^a} + \cdots, \quad |z| \le 1 \tag{1.67}$$

where $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ is the modulus of the complex number, $z = x+iy$.
Let's discuss the case $a = 1$ :

$$\mathrm{Li}_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n} = -\ln(1-z) \tag{1.68}$$

This function diverges when $|z| = 1$ and converges to $-\ln(2)$ when $z = -1$, and so the case $a = 1$ is valid when $z = -1$, but invalid when $|z| = 1$. Actually the range of $a$ can be extended to the whole complex plane. To keep it simple, we will consider only the case $a \in \mathbb{Z}^+$since that is all we need for later calculations.

Note that

$$\mathrm{Li}_a(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)^n}{n^a} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} = \zeta(a) \tag{1.69}$$

and

$$\mathrm{Li}_a(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^a} = -\eta(a) = \left(2^{1-a} - 1\right)\zeta(a). \tag{1.70}$$

**Examples:**

$$\begin{aligned}
\mathrm{Li}_2(-1) &= -\frac{1}{2}\zeta(2); \\
\mathrm{Li}_3(-1) &= -\frac{3}{4}\zeta(3); \\
\mathrm{Li}_4(-1) &= -\frac{7}{8}\zeta(4); \\
\mathrm{Li}_5(-1) &= -\frac{15}{16}\zeta(5).
\end{aligned}$$

It's also valid to set $z = i$ in (1.67) since $|i| = 1$ assuming $a = 2, 3, 4, \cdots$,

$$\mathrm{Li}_a(i) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^a}$$

$$\left\{ \text{use } \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \sum_{n=0}^{\infty} f(2n+1) + \sum_{n=1}^{\infty} f(2n) \text{ given in (1.4)} \right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1}}{(2n+1)^a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^{2n}}{(2n)^a}$$

$$= i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^a} + 2^{-a}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^a}$$

{use the definitions (1.61) and (1.52)}

$$= i\beta(a) - 2^{-a}\eta(a)$$

$$\left\{ \text{write } \eta(a) = \left(1 - 2^{1-a}\right)\zeta(a) \text{ given in (1.56)} \right\}$$

$$= i\beta(a) + \left(2^{1-2a} - 2^{-a}\right)\zeta(a)$$

Thus,

$$\mathrm{Li}_a(i) = \left(2^{1-2a} - 2^{-a}\right)\zeta(a) + i\beta(a) \tag{1.71}$$

**Examples:**

$$\operatorname{Li}_2(i) = -\frac{1}{8}\zeta(2) + i\beta(2) = -\frac{1}{8}\zeta(2) + iG \tag{1.72}$$

$$\operatorname{Li}_3(i) = -\frac{3}{32}\zeta(3) + i\beta(3) = -\frac{3}{32}\zeta(3) + i\frac{\pi^3}{32} \tag{1.73}$$

$$\operatorname{Li}_4(i) = -\frac{7}{128}\zeta(4) + i\beta(4) \tag{1.74}$$

### 1.16.2 Integral Representation

Let $z \in \mathbb{C}\backslash(1,\infty)$. Then we have

$$\operatorname{Li}_a(z) = \frac{(-1)^{a-1}}{(a-1)!}\int_0^1 \frac{z\ln^{a-1}(t)}{1-zt}\,\mathrm{d}t \tag{1.75}$$

The following proof is due to Cornel Vălean [32, p. 70-72]:
Proof. Force integration by parts repeatedly,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{z\ln^{a-1}(t)}{1-zt}\,\mathrm{d}t\\
&= -\ln(1-zt)\ln^{a-1}(t)\Big|_{t=0}^{t=1} + (a-1)\int_0^1 \frac{\ln(1-zt)\ln^{a-2}(t)}{t}\,\mathrm{d}t\\
&= 0 + (a-1)\int_0^1 \frac{\ln(1-zt)\ln^{a-2}(t)}{t}\,\mathrm{d}t\\
&= (a-1)\left(-\operatorname{Li}_2(zt)\ln^{a-2}(t)\Big|_{t=0}^{t=1} + (a-2)\int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_2(zt)\ln^{a-3}(t)}{t}\,\mathrm{d}t\right)\\
&= (a-1)(a-2)\int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_2(zt)\ln^{a-3}(t)}{t}\,\mathrm{d}t\\
&= -(a-1)(a-2)(a-3)\int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_3(zt)\ln^{a-4}(t)}{t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

{apply integration by parts for another $a-4$ times }

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{a-1}(a-1)(a-2)(a-3)\cdots 1\int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_{a-1}(zt)}{t}\,\mathrm{d}t\\
&= (-1)^{a-1}(a-1)!\operatorname{Li}_a(zt)\Big|_{t=0}^{t=1}\\
&= (-1)^{a-1}(a-1)!\operatorname{Li}_a(z)
\end{aligned}$$

Let's replace $z$ with $\frac{z}{z-1}$ in (1.75),

$$\operatorname{Li}_a\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{(-1)^a}{(a-1)!}\int_0^1 \frac{z\ln^{a-1}(t)}{1-z+zt}\,\mathrm{d}t, \quad z \in \mathbb{C}\backslash[1,\infty) \tag{1.76}$$

A different integral form is

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^a} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a-1}}\frac{z^n}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a-1}}\left(\int_0^z t^{n-1}\,\mathrm{d}t\right)\\
&= \int_0^z \frac{1}{t}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n^{a-1}}\right)\mathrm{d}t\\
&= \int_0^z \frac{1}{t}\left(\mathrm{Li}_{a-1}(t)\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Thus,

$$\mathrm{Li}_a(z) = \int_0^z \frac{\mathrm{Li}_{a-1}(t)}{t}\,\mathrm{d}t, \quad z\in\mathbb{C} \tag{1.77}$$

This proof is valid if $|z| \le 1$ since we used the definition $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^a}$, but the integral form extends the range of $z$ to the whole complex plane.

By using the integral representation of $\mathrm{Li}_a(z)$ and $\mathrm{Li}_a(-z)$, we find

$$\begin{aligned}
\mathrm{Li}_a(z) + \mathrm{Li}_a(-z) &= \frac{(-1)^{a-1}}{(a-1)!}\int_0^1 \ln^{a-1}(t)\left(\frac{z}{1-zt} - \frac{z}{1+zt}\right)\mathrm{d}t\\
&= \frac{(-1)^{a-1}}{(a-1)!}\int_0^1 \ln^{a-1}(t)\left(\frac{2tz^2}{1-z^2t^2}\right)\mathrm{d}t\\
&\overset{t=\sqrt{y}}{=} 2^{1-a}\frac{(-1)^{a-1}}{(a-1)!}\int_0^1 \frac{z^2\ln^{a-1}(y)}{1-z^2y}\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

{replace $z$ with $z^2$ in (1.75) to get this integral}

$$= 2^{1-a}\,\mathrm{Li}_a\left(z^2\right)$$

Then, we have

$$\mathrm{Li}_a(z) + \mathrm{Li}_a(-z) = 2^{1-a}\,\mathrm{Li}_a\left(z^2\right), \quad z\in\mathbb{C} \tag{1.78}$$

A different approach, assuming $|z| \le 1$, is

$$\begin{aligned}
\mathrm{Li}_a(z) + \mathrm{Li}_a(-z) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^a} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{n^a}\\
&\left\{\text{use } \sum_{n=1}^{\infty}a_n + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = 2\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n} \text{ given in (1.5)}\right\}\\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)^a}\\
&= 2^{1-a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(z^2\right)^n}{n^a}\\
&= 2^{1-a}\,\mathrm{Li}_a\left(z^2\right)
\end{aligned}$$

Let's differentiate the polylogarithm function with respect to $z$,

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{Li}_a(z) = \frac{\partial}{\partial z}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^a}$$

{differentiate term by term}

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{n^a}$$

$$= \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{a-1}}$$

$$= \frac{\mathrm{Li}_{a-1}(z)}{z} \tag{1.79}$$

### 1.16.3 Dilogarithm Reflection Formula

Let $z \in \mathbb{C}$. Then the following identity holds:

$$\mathrm{Li}_2(z) + \mathrm{Li}_2(1-z) = \zeta(2) - \ln(z)\ln(1-z). \tag{1.80}$$

Proof. Differentiate $\mathrm{Li}_2(1-z)$ then integrate,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Li}_2(1-z) &= \int \mathrm{d}\left(\mathrm{Li}_2(1-z)\right) \\
&= \int \frac{-\mathrm{Li}_1(1-z)}{1-z}\, \mathrm{d}z \\
&\{ \text{ use } \mathrm{Li}_1(x) = -\ln(1-x) \text{ given in (1.68)}\} \\
&= \int \frac{\ln(z)}{1-z}\, \mathrm{d}z \\
&\overset{\text{IBP}}{=} -\ln(1-z)\ln(z) + \int \frac{\ln(1-z)}{z}\, \mathrm{d}z \\
&= -\ln(1-z)\ln(z) - \mathrm{Li}_2(z) + c
\end{aligned}$$

To find $c$, let $z = 1$,

$$\mathrm{Li}_2(0) = 0 - \mathrm{Li}_2(1) + c$$

or $c = \mathrm{Li}_2(1) = \zeta(2)$ and the proof is complete.
Setting $z = \frac{1}{2}$ in (1.80) gives

$$\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\zeta(2) - \frac{1}{2}\ln^2(2). \tag{1.81}$$

Additionally, set $z = i$ in (1.80),

$$\mathrm{Li}_2(i) + \mathrm{Li}_2(1-i) = \zeta(2) - \ln(i)\ln(1-i).$$

Substitute the values (1.30), (1.29), and (1.72) to have

$$\mathrm{Li}_2(1-i) = \frac{3}{8}\zeta(2) - i\left(\frac{\pi}{4}\ln(2) + G\right). \tag{1.82}$$

Replacing $i$ with $-i$ in (1.82) yields

$$\mathrm{Li}_2(1+i) = \frac{3}{8}\zeta(2) + i\left(\frac{\pi}{4}\ln(2) + G\right). \tag{1.83}$$

### 1.16.4 Landen's Dilogarithm Identity

Let $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Then the following identity holds:

$$\mathrm{Li}_2(1-z) + \mathrm{Li}_2\left(\frac{z-1}{z}\right) = -\frac{1}{2}\ln^2(z) \tag{1.84}$$

Proof. Differentiate $\mathrm{Li}_2\left(\frac{z-1}{z}\right)$ then integrate,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Li}_2\left(\frac{z-1}{z}\right) &= \int \mathrm{d}\left(\mathrm{Li}_2\left(\frac{z-1}{z}\right)\right) \\
&= \int \frac{\mathrm{Li}_1\left(\frac{z-1}{z}\right)}{z(1-z)}\mathrm{d}z \\
&= -\int \frac{\ln(z)}{z(1-z)}\mathrm{d}z \\
&= -\int \frac{\ln(z)}{z}\,\mathrm{d}z - \int \frac{\ln(z)}{1-z}\,\mathrm{d}z \\
&= -\frac{1}{2}\ln^2(z) - \mathrm{Li}_2(1-z) + c
\end{aligned}$$

The proof finishes on extracting $c = 0$ by putting $z = 1$.
Let's set $z = 1 - i$ in (1.84),

$$\mathrm{Li}_2(i) + \mathrm{Li}_2\left(\frac{1-i}{2}\right) = -\frac{1}{2}\ln^2(1-i).$$

Substitute the values (1.72), (1.30), and (1.29),

$$\mathrm{Li}_2\left(\frac{1-i}{2}\right) = \frac{5}{16}\zeta(2) - \frac{1}{8}\ln^2(2) - i\left(G - \frac{\pi}{8}\ln(2)\right). \tag{1.85}$$

Replace $i$ with $-i$,

$$\mathrm{Li}_2\left(\frac{1+i}{2}\right) = \frac{5}{16}\zeta(2) - \frac{1}{8}\ln^2(2) + i\left(G - \frac{\pi}{8}\ln(2)\right). \tag{1.86}$$

Other way to find this result is by setting $z = -1 + i$ in (1.87).

### 1.16.5 Dilogarithm Inversion Formula

Let $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Then the following formula holds:

$$\mathrm{Li}_2(-z) + \mathrm{Li}_2\left(-\frac{1}{z}\right) = -\frac{\ln^2(z)}{2} - 2\eta(2) \tag{1.87}$$

**Proof**

$$\begin{aligned}\operatorname{Li}_2(-z)+\operatorname{Li}_2\left(-\frac{1}{z}\right) &= \int \mathrm{d}\left(\operatorname{Li}_2(-z)+\operatorname{Li}_2\left(-\frac{1}{z}\right)\right)\\
&= \int (-\frac{\ln(1+z)}{z}+\frac{\ln\left(\frac{1+z}{z}\right)}{z}\Bigg)\,\mathrm{d}z\\
&= -\int \frac{\ln(z)}{z}\,\mathrm{d}z\\
&= -\frac{1}{2}\ln^2(z)+c\end{aligned}$$

Set $z=1$, we get $c = 2\operatorname{Li}_2(-1) = -2\eta(2)$ and the proof is finalized.

### 1.16.6 Relation Involving Four Dilogarithm Functions

Let $z \in \mathbb{C}\backslash\{-1\}$. Then the following identity holds:

$$\begin{aligned}&\operatorname{Li}_2\left(\frac{2z}{1+z}\right)-\operatorname{Li}_2\left(\frac{z}{1+z}\right)+\operatorname{Li}_2\left(\frac{1+z}{2}\right)\\
&= \operatorname{Li}_2(z)+\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)+\ln(2)\ln(1+z)\end{aligned} \tag{1.88}$$

Proof. Let

$$f(z) = \operatorname{Li}_2\left(\frac{2z}{1+z}\right)-\operatorname{Li}_2\left(\frac{z}{1+z}\right)+\operatorname{Li}_2\left(\frac{1+z}{2}\right)$$

we have

$$\begin{aligned}f(z) = \int \mathrm{d}f(z) &= \int \left(\frac{\ln(2)}{1+z}-\frac{\ln(1-z)}{z}\right)\mathrm{d}z\\
&= \ln(2)\ln(1+z)+\operatorname{Li}_2(z)+c\end{aligned}$$

Setting $z=0$ gives $c = f(1) = \operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)$ and the proof is finalized.

### 1.16.7 Another Relation Involving Dilogarithm Functions

Let $z \in \mathbb{C}\backslash\{-1\}$. Then the following identity holds:

$$\begin{aligned}&\operatorname{Li}_2\left(\frac{2z}{1+z}\right)-\operatorname{Li}_2\left(\frac{z}{1+z}\right)-\operatorname{Li}_2\left(\frac{1-z}{2}\right)-\operatorname{Li}_2(z)+\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)\\
&= \ln(1-z)\ln\left(\frac{1+z}{2}\right)\end{aligned} \tag{1.89}$$

Proof. Let

$$f(z) = \operatorname{Li}_2\left(\frac{2z}{1+z}\right)-\operatorname{Li}_2\left(\frac{z}{1+z}\right)-\operatorname{Li}_2\left(\frac{1-z}{2}\right)-\operatorname{Li}_2(z)+\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)$$

we have

$$
\begin{aligned}
f(z) = \int \mathrm{d}f(z) &= \int \left( \frac{\ln(1-z)}{1+z} - \frac{\ln(1+z)}{1-z} + \frac{\ln(2)}{1-z} \right) \mathrm{d}z \\
&= \int \left( \frac{\ln(1-z)}{1+z} - \frac{\ln(1+z)}{1-z} \right) \mathrm{d}z + \int \frac{\ln(2)}{1-z}\, \mathrm{d}z \\
&= \int \mathrm{d}(\ln(1-z)\ln(1+z)) - \ln(2)\ln(1-z) \\
&= \ln(1-z)\ln(1+z) - \ln(2)\ln(1-z) \\
&= \ln(1-z)\ln\left(\frac{1+z}{2}\right) + c
\end{aligned}
$$

The proof completes on extracting $c = 0$ by setting $z = 0$.

### 1.16.8 Landen's Trilogarithm Identity

Let $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Then the following identity holds:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Li}_3(z) + \mathrm{Li}_3(1-z) + \mathrm{Li}_3\left(\frac{z-1}{z}\right) &= \zeta(3) + \frac{1}{6}\ln^3(z) + \zeta(2)\ln(z) \\
&\quad -\frac{1}{2}\ln^2(z)\ln(1-z) \qquad (1.90)
\end{aligned}
$$

**Proof**

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Li}_3\left(\frac{z-1}{z}\right) &= \int \mathrm{d}\left(\mathrm{Li}_3\left(\frac{z-1}{z}\right)\right) \\
&= \int -\frac{\mathrm{Li}_2\left(\frac{z-1}{z}\right)}{z(1-z)}\mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

{make use of Landen's dilogarithm identity (1.84)}

$$
\begin{aligned}
&= \int \left( \frac{\mathrm{Li}_2(1-z)}{z(1-z)} + \frac{\ln^2(z)}{2z(1-z)} \right) \mathrm{d}z \\
&= \int \left( \frac{\mathrm{Li}_2(1-z)}{z} + \frac{\mathrm{Li}_2(1-z)}{1-z} + \frac{1}{2}\frac{\ln^2(z)}{z} + \frac{1}{2}\frac{\ln^2(z)}{1-z} \right) \mathrm{d}z \\
&= \underbrace{\int \frac{\mathrm{Li}_2(1-z)}{x}\, \mathrm{d}z}_{\text{IBP}} - \mathrm{Li}_3(1-z) + \frac{1}{6}\ln^3(z) + \frac{1}{2}\int \frac{\ln^2(z)}{1-z}\, \mathrm{d}z \\
&= \ln(z)\,\mathrm{Li}_2(1-z) - \mathrm{Li}_3(1-z) + \frac{1}{6}\ln^3(z) - \frac{1}{2}\int \frac{\ln^2(z)}{1-z}\, \mathrm{d}z.
\end{aligned}
$$

For the remaining integral, force integration by parts twice,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\ln^2(z)}{1-z}\, \mathrm{d}z &= -\ln(1-z)\ln^2(z) + 2\int \frac{\ln(1-z)\ln(z)}{z}\, \mathrm{d}z \\
&= -\ln(1-z)\ln^2(z) - 2\,\mathrm{Li}_2(z)\ln(z) + 2\int \frac{\mathrm{Li}_2(z)}{z}\, \mathrm{d}z \\
&= -\ln(1-z)\ln^2(z) - 2\,\mathrm{Li}_2(z)\ln(z) + 2\,\mathrm{Li}_3(z) \qquad (1.91)
\end{aligned}
$$

Plug this integral back in,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Li}_3\left(\frac{z-1}{z}\right) &= \ln(z)\left[\operatorname{Li}_2(1-z)+\operatorname{Li}_2(z)\right]+\frac{1}{2}\ln(1-z)\ln^2(z)+\frac{1}{6}\ln^3(z)\\
&\quad -\operatorname{Li}_3(1-z)-\operatorname{Li}_3(z)\\
&\quad \{\text{make use of (1.80) for the first term}\}\\
&= \ln(z)[\zeta(2)-\ln(x)\ln(1-x)]+\frac{1}{2}\ln(1-z)\ln^2(z)+\frac{1}{6}\ln^3(z)\\
&\quad -\operatorname{Li}_3(1-z)-\operatorname{Li}_3(z)\\
&= \zeta(2)\ln(z)-\frac{1}{2}\ln(1-z)\ln^2(z)+\frac{1}{6}\ln^3(z)-\operatorname{Li}_3(1-z)-\operatorname{Li}_3(z)+c
\end{aligned}$$

and the proof follows on extracting $c=\zeta(3)$ by setting $z=1$.

Setting $z=\frac{1}{2}$ in (1.90) yields

$$\operatorname{Li}_3\left(\frac{1}{2}\right)+\operatorname{Li}_3\left(\frac{1}{2}\right)+\operatorname{Li}_3(-1)=\zeta(3)-\frac{1}{6}\ln^3(2)-\zeta(2)\ln(2)+\frac{1}{2}\ln^3(2).$$

Substitute $\operatorname{Li}_3(-1)=-\frac{3}{4}\zeta(3)$ given in (1.70),

$$\operatorname{Li}_3\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{8}\zeta(3)-\frac{1}{2}\ln(2)\zeta(2)+\frac{1}{6}\ln^3(2). \tag{1.92}$$

For another result, set $z=i$ in (1.90) then consider the real parts of both sides,

$$\begin{aligned}
&\Re\left\{\operatorname{Li}_3(i)+\operatorname{Li}_3(1-i)+\operatorname{Li}_3\left(\frac{i-1}{i}\right)\right\}\\
&=\zeta(3)+\Re\left\{\frac{1}{6}\ln^3(i)+\zeta(2)\ln(i)-\frac{1}{2}\ln^2(i)\ln(1-i)\right\}.
\end{aligned}$$

Since $\operatorname{Li}_3\left(\frac{i-1}{i}\right)=\operatorname{Li}_3(1+i)$ and $\Re\operatorname{Li}_3(1-i)=\Re\operatorname{Li}_3(1+i)$, we have

$$\begin{aligned}
&\Re\left\{\operatorname{Li}_3(i)+2\operatorname{Li}_3(1+i)\right\}\\
&=\zeta(3)+\Re\left\{\frac{1}{6}\ln^3(i)+\zeta(2)\ln(i)-\frac{1}{2}\ln^2(i)\ln(1-i)\right\}.
\end{aligned}$$

Collect the results from (1.73), (1.30), and (1.29),

$$\Re\operatorname{Li}_3(1+i)=\frac{3}{16}\ln(2)\zeta(2)+\frac{35}{64}\zeta(3)=\Re\operatorname{Li}_3(1-i). \tag{1.93}$$

### 1.16.9 First Polylogarithm Inversion Formula

Let $z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Then the following two formulas hold:

$$\operatorname{Li}_{2a}(-z)+\operatorname{Li}_{2a}\left(-\frac{1}{z}\right)=-2\sum_{k=0}^{a}\frac{\eta(2a-2k)}{(2k)!}\ln^{2k}(z) \tag{1.94}$$

$$\operatorname{Li}_{2a+1}(-z)-\operatorname{Li}_{2a+1}\left(-\frac{1}{z}\right)=-2\sum_{k=0}^{a}\frac{\eta(2a-2k)}{(2k+1)!}\ln^{2k+1}(z) \tag{1.95}$$

Proof. Divide both sides of (1.87) by $z$ then integrate from $z=1$ to $z$,

$$\operatorname{Li}_3(-z) - \operatorname{Li}_3\left(-\frac{1}{z}\right) = -\frac{\ln^3(z)}{3!} - 2\eta(2)\ln(z). \tag{1.96}$$

Repeat the same process,

$$\operatorname{Li}_4(-z) + \operatorname{Li}_4\left(-\frac{1}{z}\right) = -\frac{\ln^4(z)}{4!} - 2\eta(2)\frac{\ln^2(z)}{2} - 2\eta(4), \tag{1.97}$$

again,

$$\operatorname{Li}_5(-z) - \operatorname{Li}_5\left(-\frac{1}{z}\right) = -\frac{\ln^5(z)}{5!} - 2\eta(2)\frac{\ln^3(z)}{3!} - 2\eta(4)\ln(z). \tag{1.98}$$

This pattern gives (1.94) and (1.95), which can be written in one identity:

$$\operatorname{Li}_a(-z) + (-1)^a \operatorname{Li}_a\left(-\frac{1}{z}\right) = -2\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor} \frac{\eta(2k)}{(a-2k)!} \ln^{a-2k}(z) \tag{1.99}$$

By writing the integral forms of $\operatorname{Li}_{2a+1}(-z)$ and $\operatorname{Li}_{2a+1}\left(-\frac{1}{z}\right)$, we have

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Li}_{2a+1}(-z) - \operatorname{Li}_{2a+1}\left(-\frac{1}{z}\right) \\
&= \frac{1}{(2a)!}\int_0^1 \frac{-z\ln^{2a}(y)}{1+zy}\,\mathrm{d}y - \frac{1}{(2a)!}\int_0^1 \frac{-\frac{1}{z}\ln^{2a}(y)}{1+\frac{y}{z}}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{(2a)!}\int_0^1 \ln^{2a-1}(y)\left(\frac{-z}{1+zy} + \frac{1}{z+y}\right)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{(2a)!}\int_0^1 \frac{(1-z^2)\ln^{2a}(y)}{(1+zy)(z+y)}\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

So we have

$$\int_0^1 \frac{(1-z^2)\ln^{2a}(y)}{(1+zy)(z+y)}\mathrm{d}y = -2(2a)!\sum_{k=0}^{a} \frac{\eta(2a-2k)}{(2k+1)!}\ln^{2k+1}(z). \tag{1.100}$$

Similarly,

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Li}_{2a}(-z) + \operatorname{Li}_{2a}\left(-\frac{1}{z}\right) \\
&= \frac{-1}{(2a-1)!}\int_0^1 \frac{-z\ln^{2a-1}(y)}{1+zy}\,\mathrm{d}y - \frac{1}{(2a-1)!}\int_0^1 \frac{-\frac{1}{z}\ln^{2a-1}(y)}{1+\frac{y}{z}}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{(2a-1)!}\int_0^1 \ln^{2a-1}(y)\left(\frac{z}{1+zy} + \frac{1}{z+y}\right)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{(2a-1)!}\int_0^1 \frac{(1+2zy+z^2)\ln^{2a-1}(y)}{(1+zy)(z+y)}\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Therefore,

$$\int_0^1 \frac{(1+2zy+z^2)\ln^{2a-1}(y)}{(1+zy)(z+y)}\mathrm{d}y = -2(2a-1)!\sum_{k=0}^{a} \frac{\eta(2a-2k)}{(2k)!}\ln^{2k}(z). \tag{1.101}$$

Let's put $z = -1 + i$ in (1.96) then consider the real parts of both sides,

$$\Re\left\{\mathrm{Li}_3(1-i)-\mathrm{Li}_3\left(\frac{1+i}{2}\right)\right\}=\Re\left\{-\zeta(2)\ln(-1+i)-\frac{1}{6}\ln^3(-1+i)\right\}$$

Substitute the values (1.27) and (1.93),

$$\Re\,\mathrm{Li}_3\left(\frac{1+i}{2}\right)=\frac{\ln^3(2)}{48}-\frac{\ln(2)}{32}\zeta(2)+\frac{35}{64}\zeta(3)=\Re\,\mathrm{Li}_3\left(\frac{1-i}{2}\right). \tag{1.102}$$

Put $z=-1+i$ in (1.96) then consider the imaginary parts,

$$\begin{aligned}\Im\left\{\mathrm{Li}_3(1-i)-\mathrm{Li}_3\left(\frac{1+i}{2}\right)\right\}&=\Im\left\{-\zeta(2)\ln(-1+i)-\frac{1}{6}\ln^3(-1+i)\right\}\\&=-\frac{7\pi^3}{128}-\frac{3\pi}{32}\ln^2(2)\end{aligned} \tag{1.103}$$

### 1.16.10 Second Polylogarithm Inversion Formula

Let $\Re(z)\le 1$. Then the following two formulas hold:

$$\mathrm{Li}_{2a}(z)+\mathrm{Li}_{2a}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{i\pi\ln^{2a-1}(z)}{(2a-1)!}+2\sum_{k=0}^{a}\frac{\zeta(2a-2k)}{(2k)!}\ln^{2k}(z); \tag{1.104}$$

$$\mathrm{Li}_{2a+1}(z)-\mathrm{Li}_{2a+1}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{i\pi\ln^{2a}(z)}{(2a)!}+2\sum_{k=0}^{a}\frac{\zeta(2a-2k)}{(2k+1)!}\ln^{2k+1}(z) \tag{1.105}$$

Proof.

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}_2(z)+\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{z}\right)&=\int \mathrm{d}\left(\mathrm{Li}_2(z)+\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{z}\right)\right)\\&=\int\left(-\frac{\ln(1-z)}{z}+\frac{\ln\left(\frac{z-1}{z}\right)}{z}\right)\mathrm{d}z\\&=-\int\frac{\ln(-z)}{z}\,\mathrm{d}z\\&\{\text{ write }(-1)=i\pi\}\\&=-\int\frac{i\pi+\ln(z)}{z}\,\mathrm{d}z\\&=-i\pi\ln(z)-\frac{1}{2}\ln^2(z)+c.\end{aligned}$$

Setting $z=1$ gives $c=2\mathrm{Li}_2(1)=2\zeta(2)$. Therefore

$$\mathrm{Li}_2(z)+\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{z}\right)=-i\pi\ln(z)-\frac{1}{2}\ln^2(z)+2\zeta(2). \tag{1.106}$$

Keep integrating (1.106) from $z=1$ to $z$ after dividing by $z$, we get

$$\mathrm{Li}_3(z) - \mathrm{Li}_3\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{i\pi \ln^2(z)}{2} - \frac{\ln^3(z)}{3!} + 2\zeta(2)\ln(z) \tag{1.107}$$

$$\mathrm{Li}_4(z) + \mathrm{Li}_4\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{i\pi \ln^3(z)}{3!} - \frac{\ln^4(z)}{4!} + 2\zeta(2)\frac{\ln^2(z)}{2} + 2\zeta(4) \tag{1.108}$$

$$\mathrm{Li}_5(z) - \mathrm{Li}_5\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{i\pi \ln^4(z)}{4!} - \frac{\ln^5(z)}{5!} + 2\zeta(2)\frac{\ln^3(z)}{3!} + 2\zeta(4)\ln(z) \tag{1.109}$$

This pattern shows

$$\mathrm{Li}_{2a}(z) + \mathrm{Li}_{2a}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{i\pi \ln^{2a-1}(z)}{(2a-1)!} + 2\sum_{k=0}^{a}\frac{\zeta(2a-2k)}{(2k)!}\ln^{2k}(z)$$

$$\mathrm{Li}_{2a+1}(z) - \mathrm{Li}_{2a+1}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{i\pi \ln^{2a}(z)}{(2a)!} + 2\sum_{k=0}^{a}\frac{\zeta(2a-2k)}{(2k+1)!}\ln^{2k+1}(z)$$

The last two identities are defined for $\Re(z) \geq 1$ and this fact explains why their imaginary parts are negatives unlike those in (1.104) and (1.105).

To finish the proof, let $z \to \frac{1}{z}$.

By writing the integral forms of $\mathrm{Li}_{2a}(z)$ and $\mathrm{Li}_{2a}\left(\frac{1}{z}\right)$, we have

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Li}_{2a}(z) + \mathrm{Li}_{2a}\left(\frac{1}{z}\right)\\
&= \frac{-1}{(2a-1)!}\int_0^1 \frac{z\ln^{2a-1}(y)}{1-zy}\,\mathrm{d}y - \frac{-1}{(2a-1)!}\ \text{P.V.}\ \int_0^1 \frac{\frac{1}{z}\ln^{2a-1}(y)}{1-\frac{y}{z}}\,\mathrm{d}y\\
&= \frac{-1}{(2a-1)!}\ \text{P.V.}\ \int_0^1 \ln^{2a-1}(y)\left(\frac{z}{1-zy} + \frac{1}{z-y}\right)\mathrm{d}y\\
&= \frac{-1}{(2a-1)!}\ \text{P.V.}\ \int_0^1 \frac{(1-2zy+z^2)\ln^{2a-1}(y)}{(1-zy)(z-y)}\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

where P. V. stands for the Cauchy principal value [42].

Comparing this integral identity with (1.104), we see that

$$\text{P. V.}\ \int_0^1 \frac{(1-2zy+z^2)\ln^{2a-1}(y)}{(1-zy)(z-y)}\mathrm{d}y = -2(2a-1)!\sum_{k=0}^{a}\frac{\zeta(2a-2k)}{(2k)!}\ln^{2k}(z) \tag{1.110}$$

We ignored the imaginary part, $-i\pi\ln^{2a-1}(z)$, since P. V. integral is always real.

Similarly,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Li}_{2a+1}(z) - \mathrm{Li}_{2a+1}\left(\frac{1}{z}\right)\\
&= \frac{-1}{(2a)!}\int_0^1 \frac{z\ln^{2a}(y)}{1-zy}\,\mathrm{d}y - \frac{-1}{(2a)!}\ \text{P.V.}\ \int_0^1 \frac{\frac{1}{z}\ln^{2a}(y)}{1-\frac{y}{z}}\,\mathrm{d}y\\
&= \frac{-1}{(2a)!}\ \text{P.V.}\ \int_0^1 \ln^{2a}(y)\left(\frac{z}{1-zy} + \frac{1}{z-y}\right)\mathrm{d}y\\
&= \frac{-1}{(2a)!}\ \text{P.V.}\ \int_0^1 \frac{(1-z^2)\ln^{2a}(y)}{(1-zy)(z-y)}\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Comparing this integral identity with (1.105), we see that

$$\text{P. V.} \int_0^1 \frac{(1-z^2)\ln^{2a}(y)}{(1-zy)(z-y)}\mathrm{d}y = -2(2a)!\sum_{k=0}^{a}\frac{\zeta(2a-2k)}{(2k+1)!}\ln^{2k+1}(z). \tag{1.111}$$

Setting $z = 2$ in (1.106), (1.107), (1.108), and (1.109), since they are defined for $z \geq 1$, yields:

$$\mathrm{Li}_2(2) = \frac{3}{2}\zeta(2) - \pi\ln(2)i \tag{1.112}$$

$$\mathrm{Li}_3(2) = \frac{7}{8}\zeta(3) + \frac{3}{2}\ln(2)\zeta(2) - \frac{\pi}{2}\ln^2(2)i \tag{1.113}$$

$$\mathrm{Li}_4(2) = -\mathrm{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) + 2\zeta(4) + \ln^2(2)\zeta(2) - \frac{1}{24}\ln^4(2) - \frac{\pi}{6}\ln^3(2)i \tag{1.114}$$

$$\mathrm{Li}_5(2) = \mathrm{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right) + 2\ln(2)\zeta(4) + \frac{1}{3}\ln^3(2)\zeta(2) - \frac{1}{120}\ln^5(2) - \frac{\pi}{24}\ln^4(2)i \tag{1.115}$$

The values of $\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)$ and $\mathrm{Li}_3\left(\frac{1}{2}\right)$, given in (1.81) and (1.92), were used in (1.112) and (1.113). These four results can also be obtained by setting $z = \frac{1}{2}$ in (1.104) and (1.105).

For more results of polylogarithm functions, check [15].

## 1.17 Harmonic Number

### 1.17.1 Definition

The $n$-th generalized harmonic number of order $a$ is defined by

$$H_n^{(a)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^a} = 1 + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \cdots + \frac{1}{n^a}. \tag{1.116}$$

One of the properties of the harmonic number is

$$H_n^{(a)} - H_{n-1}^{(a)} = \frac{1}{n^a}, \tag{1.117}$$

which can be proved by taking the difference of

$$H_n^{(a)} = 1 + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^a} + \frac{1}{n^a}$$

and

$$H_{n-1}^{(a)} = 1 + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^a}$$

With $a = 1$ in (1.116) and (1.117), we have:

$$H_n^{(1)} = H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \tag{1.118}$$

$$H_n - H_{n-1} = \frac{1}{n} \tag{1.119}$$

Another property is

$$H_{2n}^{(a)} - 2^{-a}H_n^{(a)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^a} \tag{1.120}$$

To show that, begin with the RHS:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^a} &= 1 + \frac{1}{3^a} + \frac{1}{5^a} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^a} \\
&\left\{ \text{add and subtract } \frac{1}{2^a} + \frac{1}{4^a} + \frac{1}{6^a} + \cdots + \frac{1}{(2n)^a} \right\} \\
&= 1 + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \cdots + \frac{1}{(2n)^a} - \left( \frac{1}{2^a} + \frac{1}{4^a} + \frac{1}{6^a} + \cdots + \frac{1}{(2n)^a} \right) \\
&= 1 + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \cdots + \frac{1}{(2n)^a} - \frac{1}{2^a} \left( 1 + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} \cdots + \frac{1}{n^a} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^a} - \frac{1}{2^a} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a} \\
&= H_{2n}^{(a)} - 2^{-a} H_n^{(a)}
\end{aligned}
$$

Let's define

$$
f_n = H_{2n}^{(a)} - 2^{-a} H_n^{(a)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^a}
$$

we have

$$
\begin{aligned}
f_{n+1} - f_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)^a} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^a} \\
&\left\{ \text{use } \sum_{k=1}^{n+1} f(k) - \sum_{k=1}^{n} f(k) = f(n+1) \right\} \\
&= \frac{1}{(2n+1)^a}
\end{aligned} \tag{1.121}
$$

### 1.17.2 Integral Representation

The integral form of $H_n^{(a)}$ is defined by

$$
H_n^{(a)} = \frac{(-1)^{a-1}}{(a-1)!} \int_0^1 \frac{\ln^{a-1}(x)\,(1-x^n)}{1-x}\, \mathrm{d}x, \quad \Re(n) > -1 \tag{1.122}
$$

Proof. Using (1.36):

$$
\frac{1}{k^a} = \frac{(-1)^{a-1}}{(a-1)!} \int_0^1 x^{k-1} \ln^{a-1}(x) \mathrm{d}x
$$

we have

$$
\begin{aligned}
H_n^{(a)} =& \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a} = \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{(-1)^{a-1}}{(a-1)!} \int_0^1 x^{k-1} \ln^{a-1}(x) \mathrm{d}x \right) \\
& \{ \text{ switch integration and summation } \} \\
=& \frac{(-1)^{a-1}}{(a-1)!} \int_0^1 \ln^{a-1}(x) \left( \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} \right) \mathrm{d}x \\
& \{ \text{ use the geometric series } \} \\
=& \frac{(-1)^{a-1}}{(a-1)!} \int_0^1 \ln^{a-1}(x) \left( \frac{1-x^n}{1-x} \right) \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

This proof is valid if $n$ is a positive integer since we employed the finite geometric series. To justify the extension $\Re(n) > -1$, force integration by parts then use the derivatives of the beta function.

Note that setting $a = 1$ in (1.122) gives

$$
H_n = \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x} \, \mathrm{d}x, \quad \Re(n) > -1 \tag{1.123}
$$

Integrating this integral by parts yields

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x} \, \mathrm{d}x &= - \ln(1-x) \left(1 - x^n\right)\Big|_0^1 - n \int_0^1 x^{n-1} \ln(1-x) \mathrm{d}x \\
&= 0 - n \int_0^1 x^{n-1} \ln(1-x) \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

or

$$
\int_0^1 x^{n-1} \ln(1-x) \mathrm{d}x = -\frac{H_n}{n}. \tag{1.124}
$$

Let's break up the integrand in (1.122),

$$
H_n^{(a)} = \frac{(-1)^{a-1}}{(a-1)!} \int_0^1 \frac{\ln^{a-1}(x)}{1-x} \, \mathrm{d}x - \frac{(-1)^{a-1}}{(a-1)!} \int_0^1 \frac{x^n \ln^{a-1}(x)}{1-x} \, \mathrm{d}x
$$

{substitute the result from (3.8) for the first integral}

$$
= \zeta(a) - \frac{(-1)^{a-1}}{(a-1)!} \int_0^1 \frac{x^n \ln^{a-1}(x)}{1-x} \, \mathrm{d}x. \tag{1.125}
$$

Reorder the terms and replace $a$ with $a + 1$,

$$
\int_0^1 \frac{x^n \ln^a(x)}{1-x} \, \mathrm{d}x = (-1)^a a! \left( \zeta(a+1) - H_n^{(a+1)} \right), \quad a \in \mathbb{Z}^+. \tag{1.126}
$$

### 1.17.3 Infinite Series Representation

Another form of $H_n^{(a)}$ is

$$
H_n^{(a)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k^a} - \frac{1}{(k+n)^a} \right), \quad n \notin \mathbb{Z}^-. \tag{1.127}
$$

Proof. Expand $\frac{1}{1-x}$ in series,

$$\begin{aligned}
H_n^{(a)} &= \frac{(-1)^{a-1}}{(a-1)!}\int_0^1 \frac{\ln^{a-1}(x)\,(1-x^n)}{1-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{(-1)^{a-1}}{(a-1)!}\int_0^1 \ln^{a-1}(x)\,(1-x^n)\left(\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}\right)\mathrm{d}x \\
&\quad \{\text{ switch integration and summation }\} \\
&= \frac{(-1)^{a-1}}{(a-1)!}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^1 \ln^{a-1}(x)\left(x^{k-1}-x^{k+n-1}\right)\mathrm{d}x\right) \\
&\quad \{\text{ make use of the result (1.36)}\} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^a}-\frac{1}{(k+n)^a}\right)
\end{aligned}$$

We also have

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(k+m)^a}-\frac{1}{(k+n)^a}\right) &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(k+m)^a}-\frac{1}{(k+n)^a}+\frac{1}{k^a}-\frac{1}{k^a}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^a}-\frac{1}{(k+n)^a}\right)-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^a}-\frac{1}{(k+m)^a}\right) \\
&= H_n^{(a)}-H_m^{(a)} \qquad (1.128)
\end{aligned}$$

Taking $a=1$ in (1.127) and (1.128) gives

$$H_n = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+n}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{n}{k(k+n)} \qquad (1.129)$$

$$H_n - H_m = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+m}-\frac{1}{k+n}\right) \qquad (1.130)$$

To find the derivative of the harmonic number, rewrite (1.127) as

$$H_n^{(a)} = \zeta(a) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+n)^a}, \quad a \in \mathbb{Z}_{>1} \qquad (1.131)$$

Next, differentiate both sides with respect to $n$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial n}H_n^{(a)} &= 0 + a\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+n)^{a+1}} \\
&= a\left(\zeta(a+1)-H_n^{(a+1)}\right) \qquad (1.132)
\end{aligned}$$

### 6.4.4 4

### 1.18 Skew Harmonic Number

#### 1.18.1 Definition

The $n$-th generalized skew harmonic number of order $a$ is defined by

$$\bar{H}_n^{(a)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^a} = 1 - \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^a}. \tag{1.133}$$

One of the properties of the skew harmonic number is

$$\bar{H}_n^{(a)} - \bar{H}_{n-1}^{(a)} = \frac{(-1)^{n-1}}{n^a}. \tag{1.134}$$

To show that, take the difference of

$$\bar{H}_n^{(a)} = 1 - \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(n-1)^a} + \frac{(-1)^{n-1}}{n^a}$$

and

$$\bar{H}_{n-1}^{(a)} = 1 - \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(n-1)^a}$$

Taking $a = 1$ in (1.133) and (1.134) gives:

$$\bar{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \tag{1.135}$$

$$\bar{H}_n - \bar{H}_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \tag{1.136}$$

Another property is

$$\bar{H}_{2n} = H_{2n} - H_n. \tag{1.137}$$

To show that, we begin with the definition of $\bar{H}_{2n}$ :

$$\begin{aligned}
\bar{H}_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\
&\quad \{ \text{ split the terms into odd and even } \} \\
&= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) \\
&\quad \left\{ \text{ add and subtract } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n} \right\} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - 2\left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
&= H_{2n} - H_n
\end{aligned}$$

A similar property is

$$\bar{H}_{2n+1} = H_{2n+1} - H_n, \tag{1.138}$$

which can be proved by using the definition of $\bar{H}_{2n+1}$ :

$$
\begin{aligned}
\bar{H}_{2n+1} &= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\
&\left\{ \text{use } \sum_{k=1}^{n+1} f(k) = \sum_{k=1}^{n} f(k) + f(n+1) \right\} \\
&= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{1}{2n+1} \\
&= \bar{H}_{2n} + \frac{1}{2n+1} \\
&\{ \text{ substitute (1.137)} \} \\
&= H_{2n} - H_n + \frac{1}{2n+1} \\
&\left\{ \text{use } H_{2n} + \frac{1}{2n+1} = H_{2n+1} \right\} \\
&= H_{2n+1} - H_n
\end{aligned}
$$

### 1.18.2 Integral Representation

The integral form of $\bar{H}_n^{(a)}$ is defined by

$$
\bar{H}_n^{(a)} = \frac{(-1)^{a-1}}{(a-1)!} \int_0^1 \frac{\ln^{a-1}(x)\,(1-(-x)^n)}{1+x}\,\mathrm{d}x, \quad \Re(n) > -1. \tag{1.139}
$$

**Proof**

$$
\begin{aligned}
\bar{H}_n^{(a)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^a} &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left( \frac{(-1)^{a-1}}{(a-1)!} \int_0^1 x^{k-1} \ln^{a-1}(x) \mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{(-1)^{a-1}}{(a-1)!} \int_0^1 \ln^{a-1}(x) \left( \sum_{k=1}^{n} (-x)^{k-1} \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{(-1)^{a-1}}{(a-1)!} \int_0^1 \ln^{a-1}(x) \left( \frac{1-(-x)^n}{1+x} \right) \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

This proof is valid if $n$ is a positive integer since we employed the finite geometric series. To justify the extension $\Re(n) > -1$, force integration by parts then use the derivatives of the beta function.

With $a = 1$, we have

$$
\begin{aligned}
\bar{H}_n &= \int_0^1 \frac{1-(-x)^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} - \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \ln(2) - \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{1.140}
$$

### 1.18.3 Infinite Series Representation

Another form of $\bar{H}_n^{(a)}$ is

$$\bar{H}_n^{(a)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{k-1}}{k^a} + \frac{(-1)^{k+n}}{(k+n)^a} \right), \quad n \notin \mathbb{Z}^-. \tag{1.141}$$

Proof. Expand $\frac{1}{1+x}$ in series,

$$\begin{aligned} \bar{H}_n^{(a)} &= \frac{(-1)^{a-1}}{(a-1)!} \int_0^1 \frac{\ln^{a-1}(x)\,(1-(-x)^n)}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{(-1)^{a-1}}{(a-1)!} \int_0^1 \ln^{a-1}(x)\,(1-(-x)^n) \left( \sum_{k=1}^{\infty} (-x)^{k-1} \right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{(-1)^{a-1}}{(a-1)!} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_0^1 \ln^{a-1}(x) \left( (-x)^{k-1} - (-x)^{k+n-1} \right) \mathrm{d}x \right) \end{aligned}$$

{make use of the result in (1.36)}

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{k-1}}{k^a} + \frac{(-1)^{k+n}}{(k+n)^a} \right).$$

Setting $a = 1$ in (1.141) gives

$$\begin{aligned} \bar{H}_n &= \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^{k+n}}{k+n} \right) \\ &= \ln(2) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n}}{k+n}. \end{aligned} \tag{1.142}$$

Multiplying both sides of by $(-1)^n$ gives

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+n} = (-1)^n \left( \bar{H}_n - \ln(2) \right) \tag{1.143}$$

## 1.19 Digamma Function

### 1.19.1 Definition

The digamma function is defined as

$$\psi(n) = \frac{d}{dn} \ln(\Gamma(n)) = \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} \tag{1.144}$$

### 1.19.2 Digamma Reflection Formula

One of the key properties of the digamma function is

$$\psi(n) - \psi(1-n) = -\pi \cot(\pi n), \quad n \notin \mathbb{Z} \tag{1.145}$$

Proof. Using the definition $\psi(n) = \frac{d}{dn} \ln(\Gamma(n))$, we have

$$\psi(1-n) = -\frac{d}{dn} \ln(\Gamma(1-n))$$

Take the difference of $\psi(n)$ and $\psi(1-n)$,

$$\begin{aligned}
\psi(n) - \psi(1-n) &= \frac{d}{dn}\ln(\Gamma(n)) + \frac{d}{dn}\ln(\Gamma(1-n)) \\
&= \frac{d}{dn}\ln(\Gamma(n)\Gamma(1-n)) \\
&\{\text{ recall Euler's reflection formula (1.40)}\} \\
&= \frac{d}{dn}\ln(\pi\csc(\pi n)) \\
&= -\frac{\pi\csc(\pi n)\cot(\pi n)}{\csc(\pi n)} \\
&= -\pi\cot(\pi n)
\end{aligned}$$

### 1.19.3 Digamma-Harmonic Number Identity

Let $n \notin \mathbb{Z}^-$. Then the following identity holds:

$$\psi(n+1) = H_n - \gamma \tag{1.146}$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\psi(n+1) &= \frac{d}{dn}\ln(\Gamma(n+1)) \\
&\{\text{ use } n\Gamma(n) = \Gamma(n+1) \text{ in the identity (1.39)}\} \\
&= \frac{d}{dn}\ln\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^n}{\left(1+\frac{n}{k}\right)} \\
&\left\{\text{ use } \ln\prod_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty}\ln(a_k) \text{ given in (1.15) }\right\} \\
&= \frac{d}{dn}\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^n}{\left(1+\frac{n}{k}\right)}\right) \\
&= \frac{d}{dn}\sum_{k=1}^{\infty}\left(n\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \ln\left(\frac{k+n}{k}\right)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{k+n}\right)
\end{aligned}$$

{add and subtract $1/k$ then insert the limit}

$$= \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\left(\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{k+n} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k}\right)$$

{rearrange the terms}

$$\begin{aligned}
&= \lim_{m\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{m}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\right) + \lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+n}\right) \\
&\left\{\text{ note that } \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k} = H_m \text{ and } \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+n}\right) = H_n\right\}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{m\to\infty} (\underbrace{\ln\left(\frac{2}{1}\right) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{m+1}{m}\right)}_{\text{telescoping series}} - H_m) + H_n$$

$$= \lim_{m\to\infty} (\ln(m+1) - H_m) + H_n$$

$$\{\text{let}\, m+1 = n\}$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\ln(n) - H_{n-1}) + H_n$$

$$\left\{ \text{write } H_{n-1} = H_n - \frac{1}{n} \text{ given in (1.119)} \right\}$$

$$= -\lim_{n\to\infty} (H_n - \ln(n)) + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + H_n$$

{the first limit is the Euler-Mascheroni constant (1.164)}

$$= -\gamma + 0 + H_n.$$

The range of $n$ can be extended to $\Re(n) > -1$ since the integral forms of $H_n$ and $\psi(n+1)$ are defined for $\Re(n) > -1$.
Let's set $n = 0$ in (1.146),

$$\psi(1) = -\gamma. \tag{1.147}$$

Now set $n = -\frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} \psi\left(\frac{1}{2}\right) + \gamma = H_{-\frac{1}{2}} &= \int_0^1 \frac{1 - x^{-\frac{1}{2}}}{1-x}\, \mathrm{d}x \\ &\overset{\sqrt{x}=y}{=} -2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+y} = -2\ln(2) \end{aligned} \tag{1.148}$$

We also have

$$\begin{aligned} \psi(n+1) - \psi(n) &= H_n - \gamma - (H_{n-1} - \gamma) \\ &= H_n - H_{n-1} = \frac{1}{n} \end{aligned} \tag{1.149}$$

## 1.20 Polygamma Function

### 1.20.1 Definition

The polygamma function is defined as

$$\psi^{(a)}(n) = \frac{d^a}{dn^a}\psi(n) = \frac{d^{a+1}}{dn^{a+1}} \ln(\Gamma(n)) \tag{1.150}$$

Observe that

$$\psi^{(0)}(n) = \psi(n).$$

### 1.20.2 Series Representation

Another form of the polygamma function is

$$\psi^{(a)}(n+1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{a+1} a!}{(k+n)^{a+1}}, \quad a \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, n \notin \mathbb{Z}^{-} \tag{1.151}$$

Proof (i). Using the definition of the polygamma function, we get

$$\begin{aligned}
\psi^{(a)}(n+1) &= \frac{d^{a+1}}{dn^{a+1}} \ln(\Gamma(n+1)) \\
&\{ \text{ write } n\Gamma(n) = \Gamma(n+1) \text{ in } (1.39)\} \\
&= \frac{d^{a+1}}{dn^{a+1}} \ln \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^n}{1+\frac{n}{k}} \\
&= \frac{d^{a+1}}{dn^{a+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^n}{1+\frac{n}{k}}\right) \\
&= \frac{d^{a+1}}{dn^{a+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(n \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \ln\left(\frac{k+n}{k}\right)\right) \\
&\left\{ \text{ use } \frac{d^q}{dx^q} \ln(x) = \frac{(-1)^{q-1}(q-1)!}{x^q} \text{ for the second sum } \right\}
\end{aligned}$$

{and note that the first sum vanishes when $a \geq 1$ }

$$= 0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^a a!}{(k+n)^{a+1}}.$$

Proof (ii). Differentiate both sides of (1.146):

$$\psi(n+1) = H_n - \gamma$$

$a$ times with respect to $n$ using the fact $\frac{d^a}{dn^a}\psi(n) = \psi^{(a)}(n)$,

$$\psi^{(a)}(n+1) = \frac{d^a}{dn^a}(H_n - \gamma)$$

{recall the series representation (1.129)}

$$\begin{aligned}
&= \frac{d^a}{dn^a} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+n}\right) - 0 \\
&\left\{ \text{ use } \frac{d^a}{dx^a}\frac{1}{x} = \frac{(-1)^a a!}{x^{a+1}} \right\} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{a+1} a!}{(k+n)^{a+1}}
\end{aligned}$$

If we replace $n$ with $n-1$ in (1.151) then shift the index by $+1$ , we get

$$\psi^{(a)}(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{a+1} a!}{(k+n)^{a+1}}, \quad n \notin \mathbb{Z}_{\leq 0} \tag{1.152}$$

### 1.20.3 Integral Representation

The integral form of the polygamma function is

$$\psi^{(a)}(n+1) = -\int_0^1 \frac{x^n \ln^a(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x, \quad \Re(n) > -1 \tag{1.153}$$

**Proof (i).**

$$\begin{aligned}
\psi^{(a)}(n+1) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^a a!}{(k+n)^{a+1}} \\
&= -\sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_0^1 x^{k+n-1} \ln^a(x)\mathrm{d}x \right) \\
&= -\int_0^1 x^n \ln^a(x) \left( \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} \right) \mathrm{d}x \\
&= -\int_0^1 x^n \ln^a(x) \left( \frac{1}{1-x} \right) \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

This proof is valid if $n \notin \mathbb{Z}^-$since we used the definition $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+n)^{a+1}}$.
The extension $\Re(n) > -1$ can be justified by applying integration by parts then using the derivatives of the beta function.
Proof (ii). Differentiating both sides of (1.146) $a$ times with respect to $n$,

$$\psi^{(a)}(n+1) = \frac{d^a}{dn^a}\left(H_n - \gamma\right)$$

{recall the integral form (1.123)}

$$= \frac{d^a}{dn^a} \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

{use differentiation under the integral sign theorem (2.63)}

$$= \int_0^1 \frac{\partial^a}{\partial n^a} \frac{1-x^n}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

$$\left\{ \text{use } \frac{\partial^a}{\partial n^a} x^n = \ln^a(x) x^n \right\}$$

$$= -\int_0^1 \frac{x^n \ln^a(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

By the way, comparing (1.126) with (1.153) yields

$$\psi^{(a)}(n+1) = (-1)^a a! \left( H_n^{(a+1)} - \zeta(a+1) \right), \quad \Re(n) > -1. \tag{1.154}$$

### 1.20.4 Evaluation of $\psi^{(a)}(1)$

Let $a \in \mathbb{Z}^+$. Then we have

$$\psi^{(a)}(1) = (-1)^{a-1} a! \zeta(a+1). \tag{1.155}$$

Proof. Put $n = 0$ in (1.151),

$$\psi^{(a)}(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{a-1}a!}{k^{a+1}} = (-1)^{a-1}a!\zeta(a+1).$$

**Examples:**

$$\psi^{(1)}(1) = \zeta(2)$$
$$\psi^{(2)}(1) = -2\zeta(3)$$
$$\psi^{(3)}(1) = 6\zeta(4)$$
$$\psi^{(4)}(1) = -24\zeta(5).$$

By the way, using the definition of the Taylor series:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{dx^n} f(x)\right]_{x=0} x^n$$

we have

$$\psi(1-x) + \gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n(\psi(1-x)+\gamma)}{dx^n}\right]_{x=0} x^n$$

$$\{\text{ separate the first term using } \psi(1) = -\gamma\}$$

$$= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n(\psi(1-x)+\gamma)}{dx^n}\right]_{x=0} x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[(-1)^n \psi^{(n)}(1-x)\right]_{x=0} x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\psi^{(n)}(1)}{n!} x^n$$

{substitute the value of $\psi^{(a)}(1)$ }

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \zeta(n+1) x^n$$

$$\{\text{ shift the index }\}$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \zeta(n+2) x^{n+1}$$

or

$$\frac{\psi(1-x)+\gamma}{x} = -\sum_{n=0}^{\infty} \zeta(n+2) x^n, \quad |x| < 1 \tag{1.156}$$

### 1.20.5 Evaluation of $\psi^{(a)}\left(\frac{1}{2}\right)$

Let $a \in \mathbb{Z}^+$. Then we have

$$\psi^{(a)}\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^a a! \left(1 - 2^{a+1}\right) \zeta(a+1) \tag{1.157}$$

Proof. Put $n = \frac{1}{2}$ in (1.152),

$$\psi^{(a)}\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{a+1} a!}{(k+1/2)^{a+1}}$$
$$=(-1)^{a-1} a! 2^{a+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^{a+1}}.$$

This sum is given in (1.65) and the proof is finished.
Examples:

$$\psi^{(1)}\left(\frac{1}{2}\right) = 3\zeta(2)$$

$$\psi^{(2)}\left(\frac{1}{2}\right) = -14\zeta(3)$$
$$\psi^{(3)}\left(\frac{1}{2}\right) = 90\zeta(4)$$
$$\psi^{(4)}\left(\frac{1}{2}\right) = -744\zeta(5)$$

### 1.20.6 Evaluation of $\psi^{(2a)}\left(\frac{1}{4}\right)$

Let $a \in \mathbb{Z}^+$. Then we have

$$\psi^{(2a)}\left(\frac{1}{4}\right) = \left(2^{2a} - 2^{1+4a}\right)(2a)!\zeta(2a+1) - \frac{|E_{2a}|}{4}(2\pi)^{2a+1}. \tag{1.158}$$

Proof. Replace $a$ with $2a+1$ in (1.63),

$$\beta(2a+1) = -\frac{2^{-1-4a}}{(2a)!}\psi^{(2a)}\left(\frac{1}{4}\right) - \left(1 - 2^{-1-2a}\right)\zeta(2a+1) \tag{1.159}$$

Combine (1.66) and (1.159) to finish the proof.

**Examples:**

$$\psi^{(2)}\left(\frac{1}{4}\right) = -56\zeta(3) - 2\pi^3;$$
$$\psi^{(4)}\left(\frac{1}{4}\right) = -11904\zeta(5) - 40\pi^5;$$
$$\psi^{(6)}\left(\frac{1}{4}\right) = -5852160\zeta(7) - 1952\pi^7;$$
$$\psi^{(8)}\left(\frac{1}{4}\right) = -5274501120\zeta(9) - 177280\pi^9.$$

### 1.20.7 Evaluation of $\psi^{(2a)}\left(\frac{3}{4}\right)$

Let $a \in \mathbb{Z}^+$. Then we have

$$\psi^{(2a)}\left(\frac{3}{4}\right) = \psi^{(2a)}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{|E_{2a}|}{2}(2\pi)^{2a+1} \tag{1.160}$$

Proof. Differentiate both sides of (1.145):

$$\psi(1-n)-\psi(n)=\pi\cot(\pi n)$$

$2a$ times with respect to $n$ then let $n\to\frac{1}{4}$,

$$\psi^{(2a)}\left(\frac{3}{4}\right)-\psi^{(2a)}\left(\frac{1}{4}\right)=\pi\lim_{n\to\frac{1}{4}}\frac{d^{2a}}{dn^{2a}}\cot(\pi n).$$

By employing the identity $\cot(x)=\csc(2x)+\cot(2x)$, we obtain

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\frac{1}{4}}\frac{d^{2a}}{dn^{2a}}\cot(\pi n) &= \lim_{n\to\frac{1}{4}}\frac{d^{2a}}{dn^{2a}}\csc(2\pi n)+\lim_{n\to\frac{1}{4}}\frac{d^{2a}}{dn^{2a}}\cot(2\pi n)\\ &\{\text{ let } n=m/2 \text{ and so } \to dn=dm/2\}\\ &=2^{2a}\lim_{m\to\frac{1}{2}}\frac{d^{2a}}{dm^{2a}}\csc(\pi m)+2^{2a}\lim_{m\to\frac{1}{2}}\frac{d^{2a}}{dm^{2a}}\cot(\pi m)\end{aligned}$$

{these two limits are given in (1.169) and (1.177)}

$$\begin{aligned}&=2^{2a}\left|E_{2a}\right|\pi^{2a}+0\\ &=\left|E_{2a}\right|(2\pi)^{2a}.\end{aligned}\tag{1.161}$$

**Examples:**

$$\begin{aligned}\psi^{(2)}\left(\frac{3}{4}\right)&=\psi^{(2)}\left(\frac{1}{4}\right)+4\pi^3\\ \psi^{(4)}\left(\frac{3}{4}\right)&=\psi^{(4)}\left(\frac{1}{4}\right)+80\pi^5\\ \psi^{(6)}\left(\frac{3}{4}\right)&=\psi^{(6)}\left(\frac{1}{4}\right)+3904\pi^7\\ \psi^{(8)}\left(\frac{3}{4}\right)&=\psi^{(8)}\left(\frac{1}{4}\right)+354560\pi^9\end{aligned}$$

## 1.21 Catalan's Constant

Catalan's constant, denoted by $G$, is defined as

$$G=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}=1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\cdots\tag{1.162}$$

The Catalan's constant is a special case of the Dirichlet beta function (1.61):

$$\beta(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^z}.$$

In (1.63), we also see that

$$G=-\int_0^1\frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\psi^{(1)}\left(\frac{1}{4}\right)}{48}-\frac{3}{4}\zeta(2).\tag{1.163}$$

For more integral and series representations of the Catalan's constant, check [41].

## 1.22 Euler-Mascheroni Constant

The Euler-Mascheroni constant is defined as

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(H_n - \ln(n)\right). \tag{1.164}$$

The Euler-Mascheroni constant, denoted by $\gamma$, is defined as the area bounded by the two functions, $y = 1/x$ and $y = 1/\lfloor x \rfloor$, where $\lfloor x \rfloor$ is the floor function, over the interval $x \in [1, \infty)$. To get the form in (1.164), we calculate the bounded area over the interval $x \in [1, n]$ then we let integer $n \to \infty$ :

$$\begin{aligned}
\gamma &= \lim_{n\to\infty} \left( \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{\lfloor x \rfloor} - \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x} \right) \\
&\left\{ \text{note that } \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{\lfloor x \rfloor} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} = H_{n-1} \right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left( H_{n-1} - \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x} \right) \\
&\left\{ \text{we have } H_{n-1} = H_n - \frac{1}{n} \text{ and } \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(n) \right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left( H_n - \frac{1}{n} - \ln(n) \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(H_n - \ln(n)\right) - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(H_n - \ln(n)\right) - 0
\end{aligned}$$

For more representations of the Euler-Mascheroni constant, see [43].

## 1.23 Euler Numbers

The Euler numbers are defined as

$$E_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \sum_{j=0}^{2k} (-1)^{k+j} 2^{-k} j^n \binom{2k}{j} (k-j)^{2n}. \tag{1.165}$$

Some values:

$$E_0 = 1, E_2 = -1, E_4 = 5, E_6 = -61$$

while the odd-indexed Euler numbers are all zero.
The Euler numbers appear in the Taylor series of $\operatorname{sech} x$ :

$$\operatorname{sech} x = 1 - \frac{x^2}{2!} + 5\frac{x^4}{4!} - 61\frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{x^n}{n!}.$$

Let's replace $x$ with $ix$ then consider the real parts of both sides, we have

$$\Re\{\operatorname{sech}(ix)\} = \Re \sum_{n=0}^{\infty} i^n E_n \frac{x^n}{n!}$$

Using $\Re\{\operatorname{sech}(ix)\} = \sec(x)$ and $\Re \sum_{n=0}^{\infty} i^n a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n}$, which follows from applying the same approach shown in (1.10), we have

$$\sec(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n E_{2n}}{(2n)!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|E_{2n}|}{(2n)!} x^{2n}. \tag{1.166}$$

Let's differentiate both sides $2a$ times with respect to $x$ then let $x \to 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{d^{2a}}{dx^{2a}} \sec(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{d^{2a}}{dx^{2a}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|E_{2k}|}{(2k)!} x^{2k} \\
&\left\{ \text{use } \frac{d^q}{dx^q} x^n = \frac{n!}{(n-q)!} x^{n-q}, \quad n \geq q \right\} \\
&= \lim_{x\to 0} \sum_{2k\geq 2a} \frac{|E_{2k}|}{(2k-2a)!} x^{2k-2a} \\
&= \lim_{x\to 0} \sum_{k=a}^{\infty} \frac{|E_{2k}|}{(2k-2a)!} x^{2k-2a} \\
&= \lim_{x\to 0} \left( \frac{|E_{2a}|}{0!} x^0 + \frac{|E_{2a+2}|}{2!} x^2 + \frac{|E_{2a+4}|}{4!} x^4 + \cdots \right) \\
&= |E_{2a}|\,. 
\end{aligned} \tag{1.167}$$

Applying the same approach, we get

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{d^{2a-1}}{dx^{2a-1}} \sec(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{d^{2a-1}}{dx^{2a-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|E_{2k}|}{(2k)!} x^{2k} \\
&= \lim_{x\to 0} \sum_{2k\geq 2a-1} \frac{|E_{2k}|}{(2k-2a+1)!} x^{2k-2a+1} \\
&\{ \text{ since the index is an integer, we write } \} \\
&\left\{ \begin{array}{c} \sum_{2k\geq 2a-1} f(k) = \sum_{n\geq a-\frac{1}{2}} f(k) = \sum_{k=a}^{\infty} f(k) \\ = \lim_{x\to 0} \sum_{k=a}^{\infty} \frac{|E_{2k}|}{(2k-2a+1)!} x^{2k-2a+1} \end{array} \right. \\
&= \lim_{x\to 0} \left( \frac{|E_{2a}|}{1!} x + \frac{|E_{2a+2}|}{3!} x^3 + \frac{|E_{2a+4}|}{5!} x^5 + \cdots \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

The following two limits are related: Set $s = t + \frac{1}{2}$, we have

$$
\begin{aligned}
\lim_{s\to\frac{1}{2}} \frac{d^{2a}}{ds^{2a}} \csc(s\pi) &= \lim_{t\to 0} \frac{d^{2a}}{dt^{2a}} \csc\left(t\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{d^{2a}}{dt^{2a}} \sec(t\pi) \\
&\{ \text{ let } t = x/\pi \text{ and so } dt = dx/\pi \} \\
&= \pi^{2a} \lim_{x\to 0} \frac{d^{2a}}{dx^{2a}} \sec(x) \\
&\{ \text{ substitute the limit (1.167)} \} \\
&= |E_{2a}|\, \pi^{2a} \qquad (1.169)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{s\to\frac{1}{2}} \frac{d^{2a-1}}{ds^{2a-1}} \csc(s\pi) &= \lim_{t\to 0} \frac{d^{2a-1}}{dt^{2a-1}} \csc\left(t\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{d^{2a-1}}{dt^{2a-1}} \sec(t\pi) \\
&= \pi^{2a-1} \lim_{x\to 0} \frac{d^{2a-1}}{dx^{2a-1}} \sec(x) \\
&\{ \text{ substitute the limit (1.168)} \} \\
&= 0. \qquad (1.170)
\end{aligned}
$$

## 1.24 Bernoulli Numbers

The Bernoulli numbers are defined as

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j j^n \binom{k}{j}}{k+1} \qquad (1.171)$$

Some values:

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}, B_5 = 0, B_6 = \frac{1}{40}.$$

Note that $B_{2n+1} = 0$ for $n \in Z^+$.

The Bernoulli numbers appear in the Taylor series of $\frac{x}{e^x-1}$ :

$$\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{1}{2}\frac{x}{1!} + \frac{1}{6}\frac{x^2}{2!} - \frac{1}{30}\frac{x^4}{4!} + \frac{1}{40}\frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

Let's replace $x$ with $2ix$ then consider the real parts of both sides, we have

$$\Re\left\{\frac{2ix}{e^{2ix}-1}\right\} = \Re\sum_{n=0}^{\infty} i^n B_n \frac{(2x)^n}{n!}.$$

Using $\Re\left\{\frac{2ix}{e^{2ix}-1}\right\} = x\cot(x)$ and $\Re\sum_{n=0}^{\infty} i^n a_n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_{2n}$, we have

$$\cot(x) = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B_{2n}}{(2n)!}(2x)^{2n} \qquad (1.172)$$

By employing $\tan(x) = \cot(x) - 2\cot(2x)$, we find

$$\tan(x) = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(1-2^{2n}\right)B_{2n}}{(2n)!}(2x)^{2n}. \tag{1.173}$$

Let's differentiate both sides ( $2a-1$ ) times with respect to $x$ then let $x \to 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{d^{2a-1}}{dx^{2a-1}}\tan(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{d^{2a-1}}{dx^{2a-1}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(1-2^{2n}\right)B_{2n}2^{2n}}{(2n)!}x^{2n-1}\\
&= \lim_{x\to 0}\sum_{2n-1\geq 2a-1}\frac{(-1)^n\left(1-2^{2n}\right)B_{2n}2^{2n}(2n-1)!}{(2n)!(2n-2a)!}x^{2n-2a}\\
&= \lim_{x\to 0}\sum_{n=a}^{\infty}\underbrace{\frac{(-1)^n\left(1-2^{2n}\right)B_{2n}2^{2n}}{(2n)(2n-2a)!}}_{f(n)}x^{2n-2a}\\
&= \lim_{x\to 0}\left(f(a)x^0+f(a+1)x^2+f(a+2)x^4+\cdots\right)\\
&= f(a) = \frac{(-1)^a}{a}\left(1-2^{2a}\right)B_{2a}2^{2a-1}.
\end{aligned} \tag{1.174}$$

Applying the same approach, we get

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{d^{2a}}{dx^{2a}}\tan(x) &= \lim_{x\to 0}\frac{d^{2a}}{dx^{2a}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(1-2^{2n}\right)B_{2n}2^{2n}}{(2n)!}x^{2n-1}\\
&= \lim_{x\to 0}\sum_{n=a+1}^{\infty}\underbrace{\frac{(-1)^n\left(1-2^{2n}\right)B_{2n}2^{2n}}{(2n)(2n-2a-1)!}}_{f(n)}x^{2n-2a-1}\\
&= \lim_{x\to 0}\left(f(a+1)x+f(a+2)x^3+f(a+3)x^5+\cdots\right)\\
&= 0.
\end{aligned} \tag{1.175}$$

The following two limits are related: Set $s = t+\frac{1}{2}$, we have

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to\frac{1}{2}}\frac{d^{2a-1}}{ds^{2a-1}}\cot(s\pi) &= \lim_{t\to 0}\frac{d^{2a-1}}{dt^{2a-1}}\cot\left(t\pi+\frac{\pi}{2}\right)\\
&= -\lim_{t\to 0}\frac{d^{2a-1}}{dt^{2a-1}}\tan(t\pi)\\
&\{\text{ let } t = x/\pi \text{ and so } dt = dx/\pi\}\\
&= -\pi^{2a-1}\lim_{x\to 0}\frac{d^{2a-1}}{dx^{2a-1}}\tan(x)\\
&\{\text{ plug in the limit (1.174)}\}\\
&= \frac{(-1)^a}{a}\left(2^{2a}-1\right)B_{2a}(2\pi)^{2a-1}
\end{aligned} \tag{1.176}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to\frac{1}{2}}\frac{d^{2a}}{ds^{2a}}\cot(s\pi) &= \lim_{t\to 0}\frac{d^{2a}}{dt^{2a}}\cot\left(t\pi+\frac{\pi}{2}\right)\\
&= -\lim_{t\to 0}\frac{d^{2a}}{dt^{2a}}\tan(t\pi)\\
&= -\pi^{2a}\lim_{x\to 0}\frac{d^{2a}}{dx^{2a}}\tan(x)
\end{aligned}$$

{substitute the limit (1.175)}

$$= 0. \tag{1.177}$$

## 6.5 2. Generating Functions and Powerful Identities

Before we start deriving the generating functions, we need to prove the following series identity:

Let $a_0 = 0$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{1-x} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) x^n \tag{2.1}$$

Proof. Multiply both sides of

$$1 = \frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x}$$

by $a_n x^n$ then take the summation over $n \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{1-x} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - \frac{1}{1-x} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

{let the index $n$ of the second sum start from 0 since $a_0 = 0$ }

$$= \frac{1}{1-x} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - \frac{1}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

{ shift the index $n$ of the second sum by -1}

$$= \frac{1}{1-x} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - \frac{1}{1-x} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n$$

$$= \frac{1}{1-x} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) x^n$$

### 6.5.1 2.1 Generating Functions

2.1.1 $\sum_{n=1}^{\infty} H_n^{(a)} x^n$

Let $|x| < 1$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_n^{(a)} x^n = \frac{\operatorname{Li}_a(x)}{1-x} \tag{2.2}$$

Proof. Since $H_0^{(a)} = 0$, it's valid to set $a_n = H_n^{(a)}$ in (2.1),

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} H_n^{(a)} x^n &= \frac{1}{1-x} \sum_{n=1}^{\infty} \left(H_n^{(a)} - H_{n-1}^{(a)}\right) x^n \\
&\left\{ \text{ write } H_n^{(a)} - H_{n-1}^{(a)} = \frac{1}{n^a} \text{ given in (1.117) } \right\} \\
&= \frac{1}{1-x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^a} \\
&= \frac{\operatorname{Li}_a(x)}{1-x}
\end{aligned}$$

Let the index $n$ in (2.2) start from 0 since $H_0^{(a)} = 0$

$$\frac{\operatorname{Li}_a(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(a)} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} H_{n-1}^{(a)} x^{n-1} \tag{2.3}$$

The last step follows from shifting the index $n$ by -1 .
For a different proof, see [32, pp. 348-349].
If we set $a = 1$ in (2.2) and (2.3) using $\operatorname{Li}_1(x) = -\ln(1-x)$, we get

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}, \quad |x| < 1 \tag{2.4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_{n-1} x^{n-1} = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}, \quad |x| < 1 \tag{2.5}$$

The result (2.4) is also proved in (2.60).

2.1.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n} x^n$

Let $-1 \le x < 1$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n} x^n = \operatorname{Li}_2(x) + \frac{1}{2} \ln^2(1-x) \tag{2.6}$$

Proof (i).

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} H_n \frac{x^n}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty} H_n \left( \int x^{n-1} \, \mathrm{d}x \right) \\
&= \int \frac{1}{x} \left( \sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n \right) \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

{recall the generating function (2.4)}

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{1}{x} \left( -\frac{\ln(1-x)}{1-x} \right) \mathrm{d}x \\
&= -\int \frac{\ln(1-x)}{x} \, \mathrm{d}x - \int \frac{\ln(1-x)}{1-x} \, \mathrm{d}x \\
&= \operatorname{Li}_2(x) + \frac{1}{2} \ln^2(1-x) + c.
\end{aligned}$$

Set $x = 0$, we get $c = 0$ and the proof is complete.
Proof (ii).

$$
\begin{aligned}
\ln^2(1-x) &= (-\ln(1-x))(-\ln(1-x)) \\
&\quad \{\text{expand both logs in series}\} \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right) \\
&\quad \left\{ \text{use the Cauchy product (2.65) where } a_n = \frac{1}{n} \text{ and } b_n = \frac{1}{n} \right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{n-k+1}\right) \\
&\quad \left\{ \text{write } \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right) \right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n-k+1}\right) \\
&\quad \left\{ \text{use } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n-k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ given in (1.3)} \right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} (2H_n)
\end{aligned}
$$

{let the index $n$ start from 0 since $H_0 = 0$ }

$$
= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n}{n+1} x^{n+1}
$$

{shift the index $n$ by -1 }

$$
\begin{aligned}
&= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}}{n} x^n \qquad (2.7) \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n - \frac{1}{n}}{n} x^n \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n} x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n} x^n - 2\operatorname{Li}_2(x).
\end{aligned}
$$

2.1.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^2} x^n$

Let $|x| \le 1$. Then the following identity holds:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^2} x^n &= \operatorname{Li}_3(x) - \operatorname{Li}_3(1-x) + \ln(1-x)\operatorname{Li}_2(1-x) \\
&\quad + \frac{1}{2}\ln(x)\ln^2(1-x) + \zeta(3) \qquad (2.8)
\end{aligned}
$$

Proof.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^2} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n} \left( \int x^{n-1} \, \mathrm{d}x \right)$$
$$= \int \frac{1}{x} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n} x^n \right) \mathrm{d}x$$
$$\{ \text{ recall the generating function (2.6) } \}$$
$$= \int \frac{1}{x} \left( \mathrm{Li}_2(x) + \frac{1}{2} \ln^2(1-x) \right) \mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{\mathrm{Li}_2(x)}{x} \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int \frac{\ln^2(1-x)}{x} \, \mathrm{d}x$$

The first integral is $\mathrm{Li}_3(x)$. For the second, force integration by parts twice,

$$\int \frac{\ln^2(1-x)}{x} \, \mathrm{d}x = \ln(x) \ln^2(1-x) + 2 \int \frac{\ln(x) \ln(1-x)}{1-x} \, \mathrm{d}x$$
$$= \ln(x) \ln^2(1-x) + 2 \left( \ln(1-x) \, \mathrm{Li}_2(1-x) + \int \frac{\mathrm{Li}_2(1-x)}{1-x} \, \mathrm{d}x \right)$$
$$= \ln(x) \ln^2(1-x) + 2 \ln(1-x) \, \mathrm{Li}_2(1-x) - 2 \, \mathrm{Li}_3(1-x) \tag{2.9}$$

Combining the two integrals, we get

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^2} x^n = \mathrm{Li}_3(x) - \mathrm{Li}_3(1-x) + \ln(1-x) \, \mathrm{Li}_2(1-x)$$
$$+ \frac{1}{2} \ln(x) \ln^2(1-x) + c$$

Set $x = 0$ to get $c = \zeta(3)$ and the proof os complete.

### 2.1.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n} x^n$

Let $-1 \leq x < 1$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n} x^n = \mathrm{Li}_3(x) + 2 \, \mathrm{Li}_3(1-x) - \ln(1-x) \, \mathrm{Li}_2(1-x)$$
$$-\zeta(2) \ln(1-x) - 2\zeta(3) \tag{2.10}$$

Proof.

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_n^{(2)} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} H_n^{(2)} \left( \int x^{n-1} \, \mathrm{d}x \right)$$
$$= \int \frac{1}{x} \left( \sum_{n=1}^{\infty} H_n^{(2)} x^n \right) \mathrm{d}x$$
$$\{ \text{ set } a = 2 \text{ in (2.2) to get this sum } \}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \frac{1}{x}\left(\frac{\operatorname{Li}_2(x)}{1-x}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\operatorname{Li}_2(x)}{x}\, \mathrm{d}x + \underbrace{\int \frac{\operatorname{Li}_2(x)}{1-x}\, \mathrm{d}x}_{\text{IBP}} \\
&= \operatorname{Li}_3(x) - \ln(1-x)\operatorname{Li}_2(x) - \int \frac{\ln^2(1-x)}{x}\, \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$\{\text{ this integral is evaluated in (2.9)}\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \operatorname{Li}_3(x) + 2\operatorname{Li}_3(1-x) - \ln(1-x)\left[\operatorname{Li}_2(x) + \ln(x)\ln(1-x)\right] \\
&\quad -2\ln(1-x)\operatorname{Li}_2(1-x)
\end{aligned}
$$

$$\{\text{ make use of the reflection formula (1.84) for the third term }\}$$

$$= \operatorname{Li}_3(x) + 2\operatorname{Li}_3(1-x) - \ln(1-x)\operatorname{Li}_2(1-x) - \zeta(2)\ln(1-x) + c,$$

where $c = -2\zeta(3)$ by putting $x = 0$.
For a different method, substitute (2.8) in (2.68).
2.1.5 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^2 - H_n^{(2)}\right)x^n$

Let $|x| < 1$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^2 - H_n^{(2)}\right)x^n = \frac{\ln^2(1-x)}{1-x} \tag{2.11}$$

Proof. Set $a_n = H_n^2 - H_n^{(2)}$ in (2.1),

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^2 - H_n^{(2)}\right)x^n = \frac{1}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(H_n^2 - H_n^{(2)}\right) - \left(H_{n-1}^2 - H_{n-1}^{(2)}\right)\right)x^n$$

$$\left\{\text{ write } H_{n-1}^2 = \left(H_n - \frac{1}{n}\right)^2 \text{ and } H_{n-1}^{(2)} = H_n^{(2)} - \frac{1}{n^2}\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n - \frac{1}{n}\right)\frac{x^n}{n} \\
&= \frac{2}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n-1}}{n}x^n
\end{aligned}
$$

{substitute the result (2.7)}

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{1-x}\left(\frac{1}{2}\ln^2(1-x)\right) \\
&= \frac{\ln^2(1-x)}{1-x}.
\end{aligned}
$$

This result is also proved in (2.60).
Furthermore, let the index in (2.11) start from 0 since $H_0^2 - H_0^{(2)} = 0$,

$$\frac{\ln^2(1-x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(H_n^2 - H_n^{(2)}\right) x^n$$

$$\{\text{ shift the index by } -1\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(H_{n-1}^2 - H_{n-1}^{(2)}\right) x^{n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(H_n - \frac{1}{n}\right)^2 - \left(H_n^{(2)} - \frac{1}{n^2}\right)\right) x^{n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(H_n^2 - H_n^{(2)} - \frac{2H_n}{n} + \frac{2}{n^2}\right) x^{n-1}. \tag{2.12}$$

Check [32, p. 355] for an alternative proof.

2.1.6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^2 - H_n^{(2)}}{n} x^n$

Let $-1 \le x < 1$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(H_n^2 - H_n^{(2)}\right) \frac{x^n}{n} = 2\ln(1-x)\operatorname{Li}_2(1-x) - 2\operatorname{Li}_3(1-x)$$
$$+ \ln(x)\ln^2(1-x) - \frac{1}{3}\ln^3(1-x) + 2\zeta(3) \tag{2.13}$$

**Proof**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(H_n^2 - H_n^{(2)}\right) \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(H_n^2 - H_n^{(2)}\right) \left(\int x^{n-1}\, \mathrm{d}x\right)$$

$$= \int \frac{1}{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(H_n^2 - H_n^{(2)}\right) x^n\right) \mathrm{d}x$$

{recall the generating function (2.11)}

$$= \int \frac{1}{x} \left(\frac{\ln^2(1-x)}{1-x}\right) \mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{\ln^2(1-x)}{x}\, \mathrm{d}x + \int \frac{\ln^2(1-x)}{1-x}\, \mathrm{d}x$$

$$\{\text{the first integral is found in (2.9)}\}$$

$$= \ln(x)\ln^2(1-x) + 2\ln(1-x)\operatorname{Li}_2(1-x) - 2\operatorname{Li}_3(1-x)$$
$$-\frac{1}{3}\ln^3(1-x) + c.$$

On setting $x = 0$, we get $c = 2\zeta(3)$ and the proof is finalized.

2.1.7 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^2}{n} x^n$

Let $-1 \le x < 1$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^2}{n} x^n = \operatorname{Li}_3(x) - \ln(1-x)\operatorname{Li}_2(x) - \frac{1}{3}\ln^3(1-x) \tag{2.14}$$

Proof. The proof follows on combining the results (2.10) and (2.13). Check [32, p. 349-350] for another approach.

2.1.8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^3} x^n$

Let $-1 \leq x < 1$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^3} x^n = \operatorname{Li}_4\left(\frac{x}{x-1}\right) - \operatorname{Li}_4(1-x) + 2\operatorname{Li}_4(x) - \ln(1-x)\operatorname{Li}_3(1-x)$$
$$+\zeta(3)\ln(1-x) + \frac{1}{2}\zeta(2)\ln^2(1-x) - \frac{1}{6}\ln(x)\ln^3(1-x) + \frac{1}{24}\ln^4(1-x) + \zeta(4) \tag{2.15}$$

Proof. Replace $z$ with $1-x$ in (1.90),

$$\operatorname{Li}_3(1-x) + \operatorname{Li}_3(x) + \operatorname{Li}_3\left(\frac{x}{x-1}\right)$$
$$= \zeta(3) + \frac{1}{6}\ln^3(1-x) + \zeta(2)\ln(1-x) - \frac{1}{2}\ln^2(1-x)\ln(x)$$

Divide both sides by $x(1-x)$ then integrate,

$$\int \frac{\operatorname{Li}_3(1-x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x + \int \frac{\operatorname{Li}_3(x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x + \int \frac{\operatorname{Li}_3\left(\frac{x}{x-1}\right)}{x(1-x)}\mathrm{d}x$$
$$= \zeta(3)\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1-x)} + \frac{1}{6}\int \frac{\ln^3(1-x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x + \zeta(2)\int \frac{\ln(1-x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x$$
$$-\frac{1}{2}\int \frac{\ln^2(1-x)\ln(x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x$$

First integral:

$$\int \frac{\operatorname{Li}_3(1-x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x = \underbrace{\int \frac{\operatorname{Li}_3(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x}_{\text{IBP}} + \int \frac{\operatorname{Li}_3(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \ln(x)\operatorname{Li}_3(1-x) + \int \frac{\ln(x)\operatorname{Li}_2(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x - \operatorname{Li}_4(1-x)$$
$$= \ln(x)\operatorname{Li}_3(1-x) + \frac{1}{2}\operatorname{Li}_2^2(1-x) - \operatorname{Li}_4(1-x)$$

Second integral:

$$\int \frac{\operatorname{Li}_3(x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{Li}_3(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \underbrace{\int \frac{\operatorname{Li}_3(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x}_{\text{IBP}}$$
$$= \operatorname{Li}_4(x) - \ln(1-x)\operatorname{Li}_3(x) + \int \frac{\ln(1-x)\operatorname{Li}_2(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \operatorname{Li}_4(x) - \ln(1-x)\operatorname{Li}_3(x) - \frac{1}{2}\operatorname{Li}_2^2(x)$$

Third integral: Let $x = \frac{y}{y-1}$,

$$\int \frac{\operatorname{Li}_3\left(\frac{x}{x-1}\right)}{x(1-x)}\mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{Li}_3(y)}{y}\,\mathrm{d}y = \operatorname{Li}_4(y) = \operatorname{Li}_4\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

Fourth integral:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1-x)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{1-x} = \ln(x) - \ln(1-x)$$

Fifth integral:

$$\int \frac{\ln^3(1-x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x = \int \frac{\ln^3(1-x)}{x}\ \mathrm{d}x + \int \frac{\ln^3(1-x)}{1-x}\ \mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{\ln^3(1-x)}{x}\ \mathrm{d}x - \frac{1}{4}\ln^4(1-x).$$

Sixth integral: Let $x = \frac{y}{y-1}$,

$$\int \frac{\ln(1-x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x = -\int \frac{\ln(1-y)}{y}\ \mathrm{d}y = \mathrm{Li}_2(y) = \mathrm{Li}_2\left(\frac{x}{x-1}\right).$$

Seventh integral:

$$\int \frac{\ln^2(1-x)\ln(x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x = \underbrace{\int \frac{\ln^2(1-x)\ln(x)}{1-x}\ \mathrm{d}x}_{\text{IBP}} + \int \frac{\ln^2(1-x)\ln(x)}{x}\ \mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{3}\ln^3(1-x)\ln(x) + \frac{1}{3}\int \frac{\ln^3(1-x)}{x}\ \mathrm{d}x + \int \frac{\ln^2(1-x)\ln(x)}{x}\ \mathrm{d}x$$

By expanding $\ln^2(1-x)$ in series given in (2.7), we have

$$\int \frac{\ln^2(1-x)\ln(x)}{x}\ \mathrm{d}x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n-1}}{n}\int x^{n-1}\ln(x)\mathrm{d}x$$
$$\overset{\text{IBP}}{=}\ 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n - \frac{1}{n}}{n}\left(\frac{\ln(x)}{n}x^n - \frac{x^n}{n^2}\right)$$
$$= 2\ln(x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^2}x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^3}x^n - 2\ln(x)\,\mathrm{Li}_3(x) + 2\,\mathrm{Li}_4(x)$$
$$\{\text{ substitute the result (2.8)}\}$$
$$= 2\,\mathrm{Li}_4(x) - 2\ln(x)\,\mathrm{Li}_3(1-x) + 2\ln(x)\ln(1-x)\,\mathrm{Li}_2(1-x)$$
$$+\ln^2(x)\ln^2(1-x) + 2\zeta(3)\ln(x) - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^3}x^n.$$

Plug this integral back,

$$\int \frac{\ln^2(1-x)\ln(x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x$$
$$= 2\,\mathrm{Li}_4(x) - \frac{1}{3}\ln^3(1-x)\ln(x) - 2\ln(x)\,\mathrm{Li}_3(1-x) + \ln^2(x)\ln^2(1-x)$$
$$+2\ln(x)\ln(1-x)\,\mathrm{Li}_2(1-x) + 2\zeta(3)\ln(x)$$
$$-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^3}x^n + \frac{1}{3}\int \frac{\ln^3(1-x)}{x}\ \mathrm{d}x.$$

By collecting all seven integrals, the integral $\int \frac{\ln^3(1-x)}{x}\ \mathrm{d}x$ nicely cancels out,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^3}x^n=\operatorname{Li}_4\left(\frac{x}{x-1}\right)-\operatorname{Li}_4(1-x)+2\operatorname{Li}_4(x)-\ln(1-x)\operatorname{Li}_3(1-x)$$
$$+\frac{1}{24}\ln^4(1-x)-\frac{1}{6}\ln(x)\ln^3(1-x)+\zeta(3)\ln(1-x)$$
$$+\frac{1}{2}\operatorname{Li}_2^2(1-x)+\ln(x)\ln(1-x)\operatorname{Li}_2(1-x)+\frac{1}{2}\ln^2(x)\ln^2(1-x)$$
$$-\frac{1}{2}\operatorname{Li}_2^2(x)-\zeta(2)\operatorname{Li}_2\left(\frac{x}{x-1}\right).$$

The last two lines can be further simplified:

$$\frac{1}{2}\operatorname{Li}_2^2(1-x)+$$
$$-\frac{\ln(x)\ln(1-x)\operatorname{Li}_2(1-x)+\frac{1}{2}\ln^2(x)\ln^2(1-x)-\zeta(2)\operatorname{Li}_2\left(\frac{x}{x-1}\right)}{}$$
$$=\frac{1}{2}\left[\operatorname{Li}_2(1-x)+\ln(x)\ln(1-x)\right]^2-\frac{1}{2}\operatorname{Li}_2^2(x)-\zeta(2)\operatorname{Li}_2\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

{use the dilogarithm reflection formula (1.80) for the first term}

$$=\frac{1}{2}\left[\zeta(2)-\operatorname{Li}_2(x)\right]^2-\frac{1}{2}\operatorname{Li}_2^2(x)-\zeta(2)\operatorname{Li}_2\left(\frac{x}{x-1}\right)$$
$$=\frac{5}{4}\zeta(4)-\zeta(2)\operatorname{Li}_2(x)-\zeta(2)\operatorname{Li}_2\left(\frac{x}{x-1}\right)$$
$$=\frac{5}{4}\zeta(4)-\zeta(2)\left[\operatorname{Li}_2(x)+\operatorname{Li}_2\left(\frac{x}{x-1}\right)\right]$$

{make use of Landen's dilogarithm identity (1.84)}

$$=\frac{5}{4}\zeta(4)-\zeta(2)\left[-\frac{1}{2}\ln^2(1-x)\right]$$
$$=\frac{5}{4}\zeta(4)+\frac{1}{2}\zeta(2)\ln^2(1-x).$$

Thus,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^3}x^n=\operatorname{Li}_4\left(\frac{x}{x-1}\right)-\operatorname{Li}_4(1-x)+2\operatorname{Li}_4(x)-\ln(1-x)\operatorname{Li}_3(1-x)$$
$$+\frac{1}{24}\ln^4(1-x)-\frac{1}{6}\ln(x)\ln^3(1-x)+\zeta(3)\ln(1-x)$$
$$+\frac{5}{4}\zeta(4)+\frac{1}{2}\zeta(2)\ln^2(1-x)+c.$$

Set $x=0$, we get $c=-\frac{1}{4}\zeta(4)$ and this finalizes the proof.

2.1.9 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^2}x^n$

Let $-1\le x<1$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^2}x^n = -2\operatorname{Li}_4\left(\frac{x}{x-1}\right)+2\operatorname{Li}_4(1-x)-\operatorname{Li}_4(x)+\frac{1}{2}\operatorname{Li}_2^2(x)$$
$$+2\ln(1-x)\operatorname{Li}_3(1-x)-\frac{1}{12}\ln^4(1-x)-\zeta(2)\ln^2(1-x)$$
$$-2\zeta(3)\ln(1-x)+\frac{1}{3}\ln(x)\ln^3(1-x)-2\zeta(4) \tag{2.16}$$

Proof. Substitute (2.15) in (2.69).

2.1.10 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n}x^n$

Let $-1 \le x < 1$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n}x^n = \operatorname{Li}_4(x)-\ln(1-x)\operatorname{Li}_3(x)-\frac{1}{2}\operatorname{Li}_2^2(x) \tag{2.17}$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}H_n^{(3)}\frac{x^n}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty}H_n^{(3)}\left(\int x^{n-1}\,\mathrm{d}x\right)\\
&= \int\frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}H_n^{(3)}x^n\right)\mathrm{d}x\\
&\{\text{ set } a=3 \text{ in (2.2) to get this sum }\}\\
&= \int\frac{1}{x}\left(\frac{\operatorname{Li}_3(x)}{1-x}\right)\mathrm{d}x\\
&= \int\frac{\operatorname{Li}_3(x)}{x}\,\mathrm{d}x+\underbrace{\int\frac{\operatorname{Li}_3(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x}_{\text{IBP}}\\
&= \operatorname{Li}_4(x)-\ln(1-x)\operatorname{Li}_3(x)+\int\frac{\ln(1-x)\operatorname{Li}_2(x)}{x}\,\mathrm{d}x\\
&= \operatorname{Li}_4(x)-\ln(1-x)\operatorname{Li}_3(x)-\frac{1}{2}\operatorname{Li}_2^2(x)+c.
\end{aligned}$$

The proof completes on extracting $c=0$ by setting $x=0$.

**2.1.11** $\sum_{n=1}^{\infty}H_n^3x^n$

Let $|x|<1$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty}H_n^3x^n = \frac{1}{1-x}\Big[\operatorname{Li}_3(x)+3\operatorname{Li}_3(1-x)+\frac{3}{2}\ln(x)\ln^2(1-x)$$
$$-3\zeta(2)\ln(1-x)-\ln^3(1-x)-3\zeta(3)\Big] \tag{2.18}$$

Proof. Set $a_n = H_n^3$ in (2.1),

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} H_n^3 x^n &= \frac{1}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^3 - H_{n-1}^3\right)x^n \\
&= \frac{1}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^3 - \left(H_n - \frac{1}{n}\right)^3\right)x^n \\
&= \frac{1}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3H_n^2}{n} - \frac{3H_n}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)x^n \\
&= \frac{3}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n}x^n - \frac{3}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^2}x^n + \frac{\operatorname{Li}_3(x)}{1-x}.
\end{aligned}$$

Gathering the results (2.14) and (2.8) ends the proof.
A different method may be found in [32, p. 352-354].

2.1.12 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n^2}x^n$

Let $|x| \le 1$. Then the following identity holds:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n^2}x^n &= \operatorname{Li}_4(x) - 2\operatorname{Li}_4(1-x) + 2\ln(1-x)\operatorname{Li}_3(1-x) + \frac{1}{2}\operatorname{Li}_2^2(x) \\
&\quad - \ln^2(1-x)\operatorname{Li}_2(1-x) - \frac{1}{3}\ln(x)\ln^3(1-x) + 2\zeta(4) \qquad (2.19)
\end{aligned}$$

**Proof**

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n^2}x^n &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n}\left(\int x^{n-1}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \int \frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n}x^n\right)\mathrm{d}x \\
&\qquad \{\text{ recall the generating function (2.14) }\} \\
&= \int \frac{1}{x}\left(\operatorname{Li}_3(x) - \ln(1-x)\operatorname{Li}_2(x) - \frac{1}{3}\ln^3(1-x)\right)\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\operatorname{Li}_3(x)}{x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\ln(1-x)\operatorname{Li}_2(x)}{x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int \frac{\ln^3(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \operatorname{Li}_4(x) + \frac{1}{2}\operatorname{Li}_2^2(x) - \frac{1}{3}\int \frac{\ln^3(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

For the remaining integral, set $1-x=y$ then expand $\frac{1}{1-y}$ in series,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\ln^3(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x &= -\int \frac{\ln^3(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty}\int y^{n-1}\ln^3(y)\mathrm{d}y \\
&\overset{\text{IBP}}{=} -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln^3(y)\frac{y^n}{n} - 3\ln^2(y)\frac{y^n}{n^2} + 6\ln(y)\frac{y^n}{n^3} - 6\frac{y^n}{n^4}\right) \\
&= \ln^3(y)\ln(1-y) + 3\ln^2(y)\operatorname{Li}_2(y) - 6\ln(y)\operatorname{Li}_3(y) + 6\operatorname{Li}_4(y) \\
&\qquad \{\text{substitute}^y = 1-x \text{ back }\} \\
&= \ln^3(1-x)\ln(x) + 3\ln^2(1-x)\operatorname{Li}_2(1-x) - 6\ln(1-x)\operatorname{Li}_3(1-x) \\
&\qquad +6\operatorname{Li}_4(1-x).
\end{aligned} \tag{2.20}
$$

Thus, we have

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n^2}x^n &= \frac{1}{2}\operatorname{Li}_2^2(x) - \frac{1}{3}\ln^3(1-x)\ln(x) - \ln^2(1-x)\operatorname{Li}_2(1-x) \\
&\quad +2\ln(1-x)\operatorname{Li}_3(1-x) - 2\operatorname{Li}_4(1-x) + \operatorname{Li}_4(x) + c
\end{aligned}
$$

The proof follows on extracting $c = 2\zeta(4)$ by setting $x = 0$.

### 2.1.13 $\sum_{n=1}^{\infty} H_n H_n^{(2)} x^n$

Let $|x| < 1$. Then the following identity holds:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} H_n H_n^{(2)} x^n = \frac{1}{1-x}\Big[&\operatorname{Li}_3(x) + \operatorname{Li}_3(1-x) + \frac{1}{2}\ln(x)\ln^2(1-x) \\
&-\zeta(2)\ln(1-x) - \zeta(3)\Big]
\end{aligned} \tag{2.21}
$$

Proof. Set $a_n = H_n H_n^{(2)}$ in (2.1),

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} H_n H_n^{(2)} x^n &= \frac{1}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n H_n^{(2)} - H_{n-1}H_{n-1}^{(2)}\right)x^n \\
&= \frac{1}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n H_n^{(2)} - \left(H_n - \frac{1}{n}\right)\left(H_n^{(2)} - \frac{1}{n^2}\right)\right)x^n \\
&= \frac{1}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^2}x^n + \frac{1}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n}x^n - \frac{\operatorname{Li}_3(x)}{1-x}.
\end{aligned}
$$

Collect the results (2.8) and (2.10) to complete the proof.
Another approach may be found in [32, pp. 350-552].

2.1.14 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^3 - 3H_nH_n^{(2)} + 2H_n^{(3)}\right)x^n$

Let $|x| < 1$. Then the following identity holds:

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^3 - 3H_nH_n^{(2)} + 2H_n^{(3)}\right)x^n = -\frac{\ln^3(1-x)}{1-x} \tag{2.22}
$$

Proof. Set $a_n = H_n^3 - 3H_nH_n^{(2)} + 2H_n^{(3)}$ in (2.1),

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^3-3H_nH_n^{(2)}+2H_n^{(3)}\right)x^n$$
$$=\frac{1}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^3-3H_nH_n^{(2)}+2H_n^{(3)}-H_{n-1}^3+3H_{n-1}H_{n-1}^{(2)}-2H_{n-1}^{(3)}\right)x^n$$
$$=\frac{3}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^2-H_n^{(2)}\right)\frac{x^n}{n}-\frac{6}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^2}x^n+\frac{6\operatorname{Li}_3(x)}{1-x}.$$

The proof ends on collecting the results (2.13) and (2.8).
For a different proof, check (2.60).

### 2.1.15 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_nH_n^{(2)}}{n}x^n$

Let $-1\le x<1$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_nH_n^{(2)}}{n}x^n=-\operatorname{Li}_4\left(\frac{x}{x-1}\right)+\operatorname{Li}_4(1-x)-\ln(1-x)\operatorname{Li}_3(1-x)$$
$$+\frac{1}{2}\ln^2(1-x)\operatorname{Li}_2(1-x)+\frac{1}{6}\ln(x)\ln^3(1-x)-\frac{1}{24}\ln^4(1-x)-\zeta(4)\tag{2.23}$$

Proof. By using the identity (2.62), we get

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^3+3H_nH_n^{(2)}+2H_n^{(3)}}{n}y^n$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\int_0^1 x^{n-1}\ln^3(1-x)\mathrm{d}x\right)y^n$$
$$=-\int_0^1\frac{\ln^3(1-x)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(xy)^n\right)\mathrm{d}x$$

{use the geometric series formula}

$$=-\int_0^1\frac{\ln^3(1-x)}{x}\left(\frac{xy}{1-xy}\right)\mathrm{d}x$$
$$\overset{1-x=t}{=}-\int_0^1\frac{y\ln^3(t)}{1-y+yt}\,\mathrm{d}t$$

{make use of the integral form (1.76)}

$$=6\operatorname{Li}_4\left(\frac{y}{y-1}\right).\tag{2.24}$$

To establish another relation, write $\frac{y^n}{n}=\int_0^y x^{n-1}\,\mathrm{d}x$ to get

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^3-3H_nH_n^{(2)}+2H_n^{(3)}}{n}y^n$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^3-3H_nH_n^{(2)}+2H_n^{(3)}\right)\left(\int_0^y x^{n-1}\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= \int_0^y \frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^3 - 3H_nH_n^{(2)} + 2H_n^{(3)}\right)x^n\right)\mathrm{d}x$$

{recall the generating function (2.22)}

$$= \int_0^y \frac{1}{x}\left(-\frac{\ln^3(1-x)}{1-x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= -\int_0^y \frac{\ln^3(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^y \frac{\ln^3(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

{the first integral is given in (2.20)}

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4}\ln^4(1-y) - \ln^3(1-y)\ln(y) - 3\ln^2(1-y)\operatorname{Li}_2(1-y) \\ &\quad +6\ln(1-y)\operatorname{Li}_3(1-y) - 6\operatorname{Li}_4(1-y) + 6\zeta(4) \end{aligned} \tag{2.25}$$

The proof finalizes on taking the difference of (2.24) and (2.25).

### 2.1.16 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^3}{n}x^n$

Let $-1 \le x < 1$. Then the following identity holds:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^3}{n}x^n &= -3\operatorname{Li}_4\left(\frac{x}{x-1}\right) - 3\operatorname{Li}_4(1-x) - 2\operatorname{Li}_4(x) + \operatorname{Li}_2^2(x) \\ &+ 3\ln(1-x)\operatorname{Li}_3(1-x) + 2\ln(1-x)\operatorname{Li}_3(x) + \frac{1}{8}\ln^4(1-x) \\ &- \frac{3}{2}\ln^2(1-x)\operatorname{Li}_2(1-x) - \frac{1}{2}\ln(x)\ln^3(1-x) + 3\zeta(4) \end{aligned} \tag{2.26}$$

Proof. Combine (2.24) and (2.25),

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^3}{n}x^n &= -3\operatorname{Li}_4\left(\frac{x}{x-1}\right) - \frac{1}{2}\ln^3(1-y)\ln(x) - \frac{3}{2}\ln^2(1-x)\operatorname{Li}_2(1-x) \\ &\quad +3\ln(1-x)\operatorname{Li}_3(1-x) - 3\operatorname{Li}_4(1-x) + \frac{1}{8}\ln^4(1-x) \\ &\quad +3\zeta(4) - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n}x^n \end{aligned}$$

The last sum is evaluated in (2.17).

### 2.1.17 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^4 - 6H_n^2H_n^{(2)} + 8H_nH_n^{(3)} + 3\left(H_n^{(2)}\right)^2 - 6H_n^{(4)}\right)x^n$

Let $|x| < 1$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^4 - 6H_n^2H_n^{(2)} + 8H_nH_n^{(3)} + 3\left(H_n^{(2)}\right)^2 - 6H_n^{(4)}\right)x^n = \frac{\ln^4(1-x)}{1-x} \tag{2.27}$$

Proof. Put $a_n = H_n^4 - 6H_n^2H_n^{(2)} + 8H_nH_n^{(3)} + 3\left(H_n^{(2)}\right)^2 - 6H_n^{(4)}$ in (2.1),

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^4-6H_n^2H_n^{(2)}+8H_nH_n^{(3)}+3\left(H_n^{(2)}\right)^2-6H_n^{(4)}\right)x^n$$
$$=\tfrac{1}{1-x}\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\left(H_n^4-H_{n-1}^4\right)-6\left(H_n^2H_n^{(2)}-H_{n-1}^2H_{n-1}^{(2)}\right)$$
$$+8\left(H_nH_n^{(3)}-H_{n-1}H_{n-1}^{(3)}\right)+3\left(\left(H_n^{(2)}\right)^2-\left(H_{n-1}^{(2)}\right)^2\right)$$
$$-6\left(H_n^{(4)}-H_{n-1}^{(4)}\right)\Big]x^n$$
$$=\tfrac{1}{1-x}[\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4H_n}{n^3}+\frac{2H_n^{(2)}}{n^2}-\frac{6}{n^4}\right)x^n}_{S_1}$$
$$+4\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H_n^3}{n}-\frac{3H_nH_n^{(2)}}{n}+\frac{2H_n^{(3)}}{n}-\frac{3H_n^2}{n^2}+\frac{3}{n^4}\right)x^n}_{S_2}]$$

The sum $S_1$ is the Cauchy product of $\operatorname{Li}_2^2(x)$ given in (2.69). For $S_2$, collect the results (2.14), (2.18), and (2.21) to get

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^3-3H_nH_n^{(2)}+2H_n^{(3)}-\frac{3H_n^2}{n}+\frac{3}{n^3}\right)x^n$$
$$=-\frac{x\ln^3(1-x)}{1-x}+3\ln(1-x)\operatorname{Li}_2(x)$$

Divide both sides of this identity by $x$ then integrate using $\int x^{n-1}\,\mathrm{d}x=\frac{x^n}{n}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H_n^3}{n}-\frac{3H_nH_n^{(2)}}{n}+\frac{2H_n^{(3)}}{n}-\frac{3H_n^2}{n^2}+\frac{3}{n^4}\right)x^n:=S_2$$
$$=-\int\frac{\ln^3(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x+3\int\frac{\ln(1-x)\operatorname{Li}_2(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{4}\ln^4(1-x)-\frac{3}{2}\operatorname{Li}_2^2(x)+c$$

Setting $x=0$ gives $c=0$. Collect $S_1$ and $S_2$ to complete the proof.
Different proofs can be found in (2.60) and [32, p. 355].

2.1.18 $\sum_{n=1}^{\infty}\bar{H}_n^{(a)}x^n$

Let $-1\le x<1$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\bar{H}_n^{(a)}x^n=-\frac{\operatorname{Li}_a(-x)}{1-x}\tag{2.28}$$

Proof (i). Since $\bar{H}_0^{(a)}=0$, it's valid to set $a_n=\bar{H}_n^{(a)}$ in (2.1),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{H}_n^{(a)} x^n = \frac{1}{1-x} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\bar{H}_n^{(a)} - \bar{H}_{n-1}^{(a)}\right) x^n$$

$$\left\{ \text{write } \bar{H}_n^{(a)} - \bar{H}_{n-1}^{(a)} = \frac{(-1)^{n-1}}{n^a} \text{ given in (1.134)} \right\}$$

$$= \frac{-1}{1-x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n^a}$$

$$= -\frac{\operatorname{Li}_a(-x)}{1-x}$$

Proof (ii).

$$-\frac{\operatorname{Li}_a(-x)}{1-x} = (-\operatorname{Li}_a(-x)) \left(\frac{1}{1-x}\right)$$

{expand both functions in Taylor series}

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^a} x^n\right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}\right)$$

$$= \frac{1}{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^a} x^n\right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} 1 x^n\right)$$

$$\left\{ \text{employ (2.65) where } a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^a} \text{ and } b_n = 1 \right\}$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^a} \cdot 1\right) x^{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^a}\right) x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{H}_n^{(a)}}{x^n}$$

Setting $a = 1$, we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{H}_n x^n = -\frac{\operatorname{Li}_1(-x)}{1-x} = \frac{\ln(1+x)}{1-x}, \quad |x| < 1 \tag{2.29}$$

2.1.19 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{H}_n}{n} x^n$

Let $-1 \le x < 1$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{H}_n}{n} x^n = \operatorname{Li}_2\left(\frac{1-x}{2}\right) - \operatorname{Li}_2(-x) - \ln(2)\ln(1-x) - \operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) \tag{2.30}$$

The following proof may be found in [8, p. 4]:

Proof.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{H}_n}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{H}_n \left(\int x^{n-1}\, \mathrm{d}x\right)$$

$$= \int \frac{1}{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \bar{H}_n x^n\right) \mathrm{d}x$$

{recall the generating function (2.29)}

$$= \int \frac{1}{x}\left(\frac{\ln(1+x)}{1-x}\right) \mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{\ln(1+x)}{x}\, \mathrm{d}x + \int \frac{\ln(1+x)}{1-x}\, \mathrm{d}x$$

$$\left\{ \text{write } \ln(1+x) = \ln\left(\frac{1+x}{2}\right) + \ln(2) \text{ in the second integral} \right\}$$

$$= \int \frac{\ln(1+x)}{x}\, \mathrm{d}x + \int \frac{\ln\left(\frac{1+x}{2}\right)}{1-x}\, \mathrm{d}x + \int \frac{\ln(2)}{1-x}\, \mathrm{d}x$$

$$\left\{ \text{note that } \frac{d}{dx} \operatorname{Li}_2\left(\frac{1-x}{2}\right) = \frac{\ln\left(\frac{1+x}{2}\right)}{1-x} \right\}$$

$$= -\operatorname{Li}_2(-x) + \operatorname{Li}_2\left(\frac{1-x}{2}\right) - \ln(2)\ln(1-x) + c$$

The proof finishes on extracting $c = \operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)$ by setting $x = 0$.

2.1.20 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{H}_n}{n^2} x^n$

Let $-1 \le x < 1$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{H}_n}{n^2} x^n = \operatorname{Li}_3\left(\frac{2x}{1+x}\right) - \operatorname{Li}_3\left(\frac{x}{1+x}\right) - \operatorname{Li}_3\left(\frac{1+x}{2}\right) - \operatorname{Li}_3(-x)$$
$$- \operatorname{Li}_3(x) + \operatorname{Li}_3\left(\frac{1}{2}\right) + \ln(1+x)\left[\operatorname{Li}_2(x) + \operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln(2)\ln(1+x)\right]. \tag{2.31}$$

**Proof**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{H}_n}{n^2} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{H}_n}{n}\left(\int x^{n-1}\, \mathrm{d}x\right)$$

$$= \int \frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{H}_n}{n} x^n\right) \mathrm{d}x$$

{recall the generating function (2.30)}

$$= \int \frac{1}{x}\left(\operatorname{Li}_2\left(\frac{1-x}{2}\right) - \operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{Li}_2(-x) - \ln(2)\ln(1-x)\right) \mathrm{d}x$$

$$= \underbrace{\int \frac{\operatorname{Li}_2\left(\frac{1-x}{2}\right) - \operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)}{x}\, \mathrm{d}x}_{\text{IBP}}$$
$$- \int \frac{\operatorname{Li}_2(-x)}{x}\, \mathrm{d}x - \ln(2)\int \frac{\ln(1-x)}{x}\, \mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \ln(x)\left(\operatorname{Li}_2\left(\frac{1-x}{2}\right) - \operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)\right) - \int \frac{\ln(x)\ln(1+x)}{1-x}\,\mathrm{d}x \\
&+ \ln(2)\int \frac{\ln(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\operatorname{Li}_2(-x)}{x}\,\mathrm{d}x - \ln(2)\int \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \ln(x)\left(\operatorname{Li}_2\left(\frac{1-x}{2}\right) - \operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)\right) - \int \frac{\ln(x)\ln(1+x)}{1-x}\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \ln(2)\operatorname{Li}_2(1-x) - \operatorname{Li}_3(-x) + \ln(2)\operatorname{Li}_2(x) \qquad (2.32)
\end{aligned}
$$

For the remaining integral, set $a = \ln(x)$ and $b = \ln(1+x)$ in the algebraic identity:

$$2ab = a^2 + b^2 - (a-b)^2$$

to have

$$2\ln(x)\ln(1+x) = \ln^2(x) + \ln^2(1+x) - \ln^2\left(\frac{x}{1+x}\right)$$

Divide both sides by $1-x$ then integrate,

$$2\int \frac{\ln(x)\ln(1+x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\ln^2(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\ln^2(1+x)}{1-x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\ln^2\left(\frac{x}{1+x}\right)}{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

First integral: Expand $\frac{1}{1-x}$ in series,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\ln^2(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty} \int x^{n-1}\ln^2(x)\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{IBP}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln^2(x)\frac{x^n}{n} - 2\ln(x)\frac{x^n}{n^2} + 2\frac{x^n}{n^3}\right) \\
&= -\ln^2(x)\ln(1-x) - 2\ln(x)\operatorname{Li}_2(x) + 2\operatorname{Li}_3(x) \qquad (2.33)
\end{aligned}
$$

Second integral: Substitute $1+x=y$,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\ln^2(1+x)}{1-x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\ln^2(y)}{2-y}\,\mathrm{d}y \\
&\left\{\text{expand } \frac{1}{2-y} \text{ in Taylor series as } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{n-1}}{2^n}\right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int y^{n-1}\ln^2(y)\mathrm{d}y \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\ln^2(y)\frac{y^n}{n} - 2\ln(y)\frac{y^n}{n^2} + 2\frac{y^n}{n^3}\right) \\
&= -\ln^2(y)\ln\left(1-\frac{y}{2}\right) - 2\ln(y)\operatorname{Li}_2\left(\frac{y}{2}\right) + 2\operatorname{Li}_3\left(\frac{y}{2}\right) \\
&\{\text{substitute } y = 1+x \text{ back}\} \\
&= -\ln^2(1+x)\ln\left(\frac{1-x}{2}\right) - 2\ln(1+x)\operatorname{Li}_2\left(\frac{1+x}{2}\right) + 2\operatorname{Li}_3\left(\frac{1+x}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Third integral: Substitute $\frac{x}{1+x} = t$,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\ln^2\left(\frac{x}{1+x}\right)}{1-x}\, \mathrm{d}x &= \int \frac{\ln^2(t)}{(1-t)(1-2t)} \mathrm{d}t \\
&= 2\int \frac{\ln^2(t)}{1-2t}\, \mathrm{d}t - \int \frac{\ln^2(t)}{1-t}\, \mathrm{d}t \\
&= -\ln^2(t)\ln(1-2t) - 2\ln(t)\operatorname{Li}_2(2t) + 2\operatorname{Li}_3(2t) \\
&\quad + \ln^2(t)\ln(1-t) + 2\ln(t)\operatorname{Li}_2(t) - 2\operatorname{Li}_3(t) \\
&= -\ln^2(t)\ln\left(\frac{1-2t}{1-t}\right) - 2\ln(t)\left(\operatorname{Li}_2(2t) - \operatorname{Li}_2(t)\right) + 2\operatorname{Li}_3(2t) - 2\operatorname{Li}_3(t) \\
&\qquad \left\{ \text{substitute } t = \frac{x}{1+x} \text{ back} \right\} \\
&= 2\operatorname{Li}_3\left(\frac{2x}{1+x}\right) - 2\operatorname{Li}_3\left(\frac{x}{1+x}\right) - \ln^2\left(\frac{x}{1+x}\right)\ln(1-x) \\
&\quad -2\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)\left(\operatorname{Li}_2\left(\frac{2x}{1+x}\right) - \operatorname{Li}_2\left(\frac{x}{1+x}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Gather the three integrals then divide by 2 ,

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\ln(x)\ln(1+x)}{1-x}\, \mathrm{d}x &= \operatorname{Li}_3\left(\frac{x}{1+x}\right) - \operatorname{Li}_3\left(\frac{2x}{1+x}\right) + \operatorname{Li}_3\left(\frac{1+x}{2}\right) \\
&\quad + \operatorname{Li}_3(x) + \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)\left(\operatorname{Li}_2\left(\frac{2x}{1+x}\right) - \operatorname{Li}_2\left(\frac{x}{1+x}\right)\right) \\
&\quad - \ln(1+x)\operatorname{Li}_2\left(\frac{1+x}{2}\right) - \ln(x)\operatorname{Li}_2(x) - \frac{1}{2}\ln^2(x)\ln(1-x) \\
&\quad -\frac{1}{2}\ln^2(1+x)\ln\left(\frac{1-x}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{x}{1+x}\right)\ln(1-x)
\end{aligned}
$$

Substitute this integral in (2.32) then factor $\ln(1+x), \ln(x)$, and $\ln(2)$ out,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{H}_n}{n^2} x^n &= \operatorname{Li}_3\left(\frac{2x}{1+x}\right) - \operatorname{Li}_3\left(\frac{x}{1+x}\right) - \operatorname{Li}_3\left(\frac{1+x}{2}\right) - \operatorname{Li}_3(-x) \\
&\quad - \operatorname{Li}_3(x) + \ln(1+x)\left[\operatorname{Li}_2\left(\frac{2x}{1+x}\right) - \operatorname{Li}_2\left(\frac{x}{1+x}\right) + \operatorname{Li}_2\left(\frac{1+x}{2}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\ln(x)\left[\operatorname{Li}_2\left(\frac{2x}{1+x}\right)-\operatorname{Li}_2\left(\frac{x}{1+x}\right)-\operatorname{Li}_2\left(\frac{1-x}{2}\right)-\operatorname{Li}_2(x)\right.\\
&\left.+\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)\right]+\ln(2)\left[\operatorname{Li}_2(x)+\operatorname{Li}_2(1-x)\right]+\frac{1}{2}\ln^2(1+x)\ln\left(\frac{1-x}{2}\right)\\
&-\frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{x}{1+x}\right)\ln(1-x)+\frac{1}{2}\ln^2(x)\ln(1-x)+c\\
&\{\text{ substitute the relations (1.88), (1.89), and (1.80)}\}\\
&=\operatorname{Li}_3\left(\frac{2x}{1+x}\right)-\operatorname{Li}_3\left(\frac{x}{1+x}\right)-\operatorname{Li}_3\left(\frac{1+x}{2}\right)-\operatorname{Li}_3(-x)\\
&-\operatorname{Li}_3(x)+\ln(1+x)\left[\operatorname{Li}_2(x)+\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)+\ln(2)\ln(1+x)\right]\\
&-\ln(x)[\ln(1-x)\ln(1+x)-\ln(2)\ln(1-x)]\\
&+\ln(2)[\zeta(2)-\ln(x)\ln(1-x)]+\frac{1}{2}\ln^2(1+x)\ln\left(\frac{1-x}{2}\right)\\
&-\frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{x}{1+x}\right)\ln(1-x)+\frac{1}{2}\ln^2(x)\ln(1-x)+c,
\end{aligned}
$$

where $c=\operatorname{Li}_3\left(\frac{1}{2}\right)-\ln(2)\zeta(2)$ by setting $x=0$.
The proof completes on simplifying the last three lines to $-\frac{1}{2}\ln(2)\ln^2(1+x)$. A different proof may be found in [8, p. 9].

### 2.1.21 $\sum_{n=1}^{\infty} H_{\frac{n}{2}}x^n$

Let $|x|<1$. Then the following identity holds:

$$
\sum_{n=1}^{\infty} H_{\frac{n}{2}}x^n=\frac{-2\ln(2)x}{1-x^2}-\frac{2\ln(1-x)}{1-x^2} \tag{2.34}
$$

The following proof is due to Wolfgang Hintze [12]:
Proof. start with considering the integral form of the harmonic number,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} H_{\frac{n}{2}}x^n&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^1\frac{1-y^{\frac{n}{2}}}{1-y}\,\mathrm{d}y\right)x^n\\
&=\int_0^1\frac{1}{1-y}\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}(x\sqrt{y})^n\right)\mathrm{d}y\\
&=\int_0^1\frac{1}{1-y}\left(\frac{x}{1-x}-\frac{x\sqrt{y}}{1-x\sqrt{y}}\right)\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\sqrt{y}=u}{=} \int_0^1 \frac{2u}{1-u^2}\left(\frac{x}{1-x}-\frac{xu}{1-xu}\right) \mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 \frac{2u}{1-u^2}\left(\frac{x(1-u)}{(1-x)(1-xu)}\right) \mathrm{d}u \\
&\int_0^1 \frac{2xu}{(1-x)(1+u)(1-xu)} \mathrm{d}u \\
&= \frac{-2x}{1-x^2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u} - \frac{2}{1-x^2}\int_0^1 \frac{-x}{1-xu}\ \mathrm{d}u \\
&= \frac{-2x}{1-x^2}\ln(1+u)\Big|_0^1 - \frac{2}{1-x^2}\ln(1-xu)\Big|_0^1 \\
&= \frac{-2x\ln(2)}{1-x^2} - \frac{2\ln(1-x)}{1-x^2}.
\end{aligned}
$$

2.1.22 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{\frac{n}{2}}}{n} x^n$

Let $-1 \leq x < 1$. Then the following identity holds:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{\frac{n}{2}}}{n} x^n = \operatorname{Li}_2\left(\frac{1-x}{2}\right) - \operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) + 2\operatorname{Li}_2(x) + \frac{1}{2}\ln^2(1-x) \\
+ \ln(1+x)\ln\left(\frac{1-x}{2}\right)
\end{aligned}
\tag{2.35}
$$

The following proof is also due to Wolfgang Hintze [12]:

Proof.

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{\frac{n}{2}}}{n} x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} H_{\frac{n}{2}}\left(\int x^{n-1}\ \mathrm{d}x\right) \\
&= \int \frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} H_{\frac{n}{2}} x^n\right) \mathrm{d}x \\
&\{\text{ recall the generating function (2.34) }\} \\
&= \int \frac{1}{x}\left(\frac{-2\ln(2)x}{1-x^2} - \frac{2\ln(1-x)}{1-x^2}\right) \mathrm{d}x \\
&= \ln(2)\int -\frac{2\ \mathrm{d}x}{1-x^2} - 2\int \frac{\ln(1-x)}{x}\ \mathrm{d}x + \int \frac{\ln(1-x)}{1+x}\ \mathrm{d}x - \int \frac{\ln(1-x)}{1-x}\ \mathrm{d}x \\
&= \ln(2)\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + 2\operatorname{Li}_2(x) + \int \frac{\ln(1-x)}{1+x}\ \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\ln^2(1-x).
\end{aligned}
$$

For the remaining integral, apply integration by parts,

$$\int \frac{\ln(1-x)}{1+x}\, \mathrm{d}x = \ln(1+x)\ln(1-x) + \int \frac{\ln(1+x)}{1-x}\, \mathrm{d}x$$

$$\left\{ \text{write } \ln(1+x) = \ln\left(\frac{1+x}{2}\right) + \ln(2) \right\}$$

$$= \ln(1+x)\ln(1-x) + \int \frac{\ln\left(\frac{1+x}{2}\right)}{1-x}\, \mathrm{d}x + \int \frac{\ln(2)}{1-x}\, \mathrm{d}x$$

$$= \ln(1+x)\ln(1-x) + \operatorname{Li}_2\left(\frac{1-x}{2}\right) - \ln(2)\ln(1-x)$$

$$= \operatorname{Li}_2\left(\frac{1-x}{2}\right) + \ln(1+x)\ln\left(\frac{1-x}{2}\right).$$

Plug this integral back in,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{\frac{n}{2}}}{n} x^n = \operatorname{Li}_2\left(\frac{1-x}{2}\right) + 2\operatorname{Li}_2(x) + \frac{1}{2}\ln^2(1-x)$$
$$+ \ln(1+x)\ln\left(\frac{1-x}{2}\right) + c$$

The proof follows on extracting $c = -\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)$ by setting $x = 0$.

**2.1.23** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{\frac{n}{2}}}{n^2} x^n$

Let $-1 \le x < 1$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{\frac{n}{2}}}{n^2} x^n = \operatorname{Li}_3\left(\frac{2x}{1+x}\right) - \operatorname{Li}_3\left(\frac{x}{1+x}\right) - \operatorname{Li}_3\left(\frac{1+x}{2}\right) + \operatorname{Li}_3\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$+ \ln(1+x)\left[\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{1+x}\right) + \operatorname{Li}_2(x) + \operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln(1+x)\ln\left(\frac{x}{2}\right)\right]$$
$$- \frac{1}{2}\operatorname{Li}_3\left(1-x^2\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)\operatorname{Li}_2\left(1-x^2\right) + \ln(2)\left[\operatorname{Li}_2(-x) - \operatorname{Li}_2(x)\right]$$
$$+ \operatorname{Li}_3(x) + \frac{1}{3}\ln^3(1+x) + \frac{1}{2}\ln(x)\ln^2\left(1-x^2\right) - \frac{1}{2}\zeta(3) + \operatorname{Li}_3\left(\frac{1}{1+x}\right). \tag{2.36}$$

Proof. Bring back (2.35):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{\frac{n}{2}}}{n} x^n = \operatorname{Li}_2\left(\tfrac{1-x}{2}\right) - \operatorname{Li}_2\left(\tfrac{1}{2}\right) + 2\operatorname{Li}_2(x) - \ln(2)\ln(1+x)$$
$$+\tfrac{1}{2}\ln^2(1-x) + \ln(1+x)\ln(1-x)$$

$$\left\{ \text{use } \tfrac{1}{2}\ln^2(1-x) + \ln(1+x)\ln(1-x) = \tfrac{1}{2}\ln^2\left(1-x^2\right) - \tfrac{1}{2}\ln^2(1+x) \right\}$$
$$= \operatorname{Li}_2\left(\tfrac{1-x}{2}\right) - \operatorname{Li}_2\left(\tfrac{1}{2}\right) + 2\operatorname{Li}_2(x) - \ln(2)\ln(1+x)$$
$$+\tfrac{1}{2}\ln^2\left(1-x^2\right) - \tfrac{1}{2}\ln^2(1+x)$$

Take the difference of this identity and (2.30) then replace $x$ with $y$, we reach

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{\frac{n}{2}}}{n} y^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{H}_n}{n} y^n = 2\operatorname{Li}_2(y) + \operatorname{Li}_2(-y) + \frac{1}{2}\ln^2\left(1-y^2\right)$$
$$-\frac{1}{2}\ln^2(1+y) + \ln(2)\ln\left(\frac{1-y}{1+y}\right)$$

Divide both sides by $y$ then integrate from $y = 0$ to $x$ using $\int_0^x y^{n-1}\, \mathrm{d}y = \frac{x^n}{n}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{\frac{n}{2}}}{n^2}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{H}_n}{n^2}x^n$$
$$=2\operatorname{Li}_3(x)+\operatorname{Li}_3(-x)+\frac{1}{2}\int_0^x\frac{\ln^2\left(1-y^2\right)}{y}\,\mathrm{d}y-\frac{1}{2}\int_0^x\frac{\ln^2(1+y)}{y}\,\mathrm{d}y$$
$$+\ln(2)\left[\operatorname{Li}_2(-x)-\operatorname{Li}_2(x)\right]$$

First integral: Substitute $1-y^2=t$,

$$\int_0^x\frac{\ln^2\left(1-y^2\right)}{y}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_{1-x^2}^1\frac{\ln^2(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$$

{recall the result (2.33)}

$$=\frac{1}{2}\left[-\ln^2(t)\ln(1-t)-2\ln(t)\operatorname{Li}_2(t)+2\operatorname{Li}_3(t)\right]_{1-x^2}^1$$
$$=\zeta(3)+\ln(x)\ln^2\left(1-x^2\right)+\ln\left(1-x^2\right)\operatorname{Li}_2\left(1-x^2\right)-\operatorname{Li}_3\left(1-x^2\right)$$

Second integral: Substitute $\frac{1}{1+y}=t$,

$$\int_0^x\frac{\ln^2(1+y)}{y}\,\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{1+x}}^1\frac{\ln^2(t)}{t(1-t)}\mathrm{d}t$$
$$=\int_{\frac{1}{1+x}}^1\frac{\ln^2(t)}{t}\,\mathrm{d}t+\int_{\frac{1}{1+x}}^1\frac{\ln^2(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$$

{recall the result (2.33) for the second integral}

$$=\frac{1}{3}\ln^3(t)-\ln^2(t)\ln(1-t)-2\ln(t)\operatorname{Li}_2(t)+2\operatorname{Li}_3(t)\Big|_{\frac{1}{1+x}}^1$$
$$=2\zeta(3)-2\operatorname{Li}_3\left(\frac{1}{1+x}\right)-2\ln(1+x)\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{1+x}\right)$$
$$+\ln(x)\ln^2(1+x)-\frac{2}{3}\ln^3(1+x)$$

Collect these two integrals along with (2.31) to finalize the proof.

### 2.1.24 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}H_nx^n$

Let $|x|<1$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}H_nx^n=\frac{2}{\sqrt{1-x}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}}\right). \tag{2.37}$$

The following proof is due to Amrik Nimbran [1, p. 5]:
Proof. Using the integral form of the harmonic number, we have

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}H_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\left(\int_0^1\frac{1-y^n}{1-y}\,\mathrm{d}y\right)x^n$$
$$=\int_0^1\frac{1}{1-y}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}(xy)^n\right)\mathrm{d}y$$

{make use of the Taylor series}

$$= \int_0^1 \frac{1}{1-y}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - \frac{1}{\sqrt{1-xy}}\right) \mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-x}} \int_0^1 \frac{\sqrt{1-xy}-\sqrt{1-x}}{(1-y)\sqrt{1-x}} \, \mathrm{d}y$$
$$\overset{\sqrt{1-x}=}{=} t\frac{2}{\sqrt{1-x}} \int_{\sqrt{1-x}}^1 \frac{t-\sqrt{1-x}}{t^2-(1-x)} \mathrm{d}t$$
$$= \frac{2}{\sqrt{1-x}} \int_{\sqrt{1-x}}^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{1-x}}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{1-x}} \ln(t+\sqrt{1-x})\Big|_{t=\sqrt{1-x}}^{t=1}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{1-x}}[\ln(1+\sqrt{1-x}) - \ln(2\sqrt{1-x})]$$
$$= \frac{2}{\sqrt{1-x}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}}\right)$$

### 2.1.25 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{H_n}{n} x^n$

Let $|x| \le 1$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{H_n}{n} x^n = 2\,\mathrm{Li}_2\left(\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}\right) \tag{2.38}$$

**Proof**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{H_n}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} H_n \left(\int x^{n-1} \, \mathrm{d}x\right)$$
$$= \int \frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} H_n x^n\right) \mathrm{d}x$$

{recall the generating function (2.37)}

$$= \int \frac{1}{x}\left(\frac{2}{\sqrt{1-x}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}}\right)\right) \mathrm{d}x$$
$$\overset{\sqrt{1-x}=y}{=} -4\int \frac{\ln\left(\frac{1+y}{2y}\right)}{1-y^2} \, \mathrm{d}y$$
$$\overset{y=\frac{1-t}{1+t}}{=} -2\int \frac{\ln(1-t)}{t} \, \mathrm{d}t$$
$$= 2\,\mathrm{Li}_2(t)$$

{ substitute $t = (1-y)/(1+y)$ back }

$$= 2\,\mathrm{Li}_2\left(\frac{1-y}{1+y}\right)$$

$$\{\text{ substitute } y = \sqrt{1-x} \text{ back }\}$$
$$= 2\operatorname{Li}_2\left(\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}\right) + c$$

Setting $x = 0$ gives $c = 0$ and the proof is completed.

2.1.26 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{H_n}{n^2} x^n$

Let $-1 \leq x < 1$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{H_n}{n^2} x^n = -4\ln\left(1+\sqrt{\frac{2x}{1+x}}\right)\operatorname{Li}_2\left(\sqrt{\frac{2x}{1+x}}\right)$$
$$+2\operatorname{Li}_3\left(\sqrt{\frac{2x}{1+x}}\right) - 4\int_0^{\sqrt{\frac{2x}{1+x}}} \frac{\ln(1-t)\ln(1+t)}{t}\, \mathrm{d}t \tag{2.39}$$

Proof.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{H_n}{n^2} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{H_n}{n} \left(\int_0^x y^{n-1}\, \mathrm{d}y\right)$$
$$= \int_0^x \frac{1}{y}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{H_n}{n} y^n\right) \mathrm{d}y$$
$$\{\text{ recall the generating function (2.38)}\}$$
$$= \int_0^x \frac{1}{y}\left(2\operatorname{Li}_2\left(\frac{1-\sqrt{1-y}}{1+\sqrt{1-y}}\right)\right) \mathrm{d}y$$
$$\overset{\sqrt{1-y}}{=} u$$
$$\overset{\frac{1-u}{1+u}=t}{=} 2\int_0^{\sqrt{1-x}} \frac{u\operatorname{Li}_2\left(\frac{1-u}{1+u}\right)}{1-u^2}\, \mathrm{d}u$$
$$= 2\int_0^{\sqrt{\frac{2x}{1+x}}} \frac{(1-t)\operatorname{Li}_2(t)}{t(1+t)} \mathrm{d}t$$
$$= 2\operatorname{Li}_3\left(\sqrt{\frac{2x}{1+x}}\operatorname{Li}_2(t)\right.$$
$$t$$
$$-4\int_0^{\sqrt{\frac{2x}{1+x}}} \frac{\operatorname{Li}_2(t)}{1+t}\, \mathrm{d}t$$
$$\overset{\text{IBP}}{}$$
$$\sqrt{\frac{2x}{1+x}}\ \frac{\ln(1-t)\ln(1+t)}{t}\, \mathrm{d}t.$$

2.1.27 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2H_{2n}-H_n}{n} x^{2n}$

Let $|x| < 1$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2H_{2n}-H_n}{n} x^{2n} = 2\operatorname{arctanh}^2(x) \tag{2.40}$$

Proof. Squaring both sides of $\operatorname{arctanh}(x) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$, we get

$$\operatorname{arctanh}^2(x) = \frac{1}{4}\ln^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{c} \text{use } \frac{1}{4}(a-b)^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}(a+b)^2 \\ \{ \text{ with } a = \ln(1-x) \text{ and } b = \ln(1+x)\} \\ = \frac{1}{2}\ln^2(1-x) + \frac{1}{2}\ln^2(1+x) - \frac{1}{4}\ln^2\left(1-x^2\right) \\ \{ \text{ expand all squared logs in series as in (2.7)}\} \\ = \sum_{n=1}^\infty \frac{H_{n-1}}{n}x^n + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{H_{n-1}}{n}x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^\infty \frac{H_{n-1}}{n}x^{2n} \\ \{ \text{ use } \sum_{n=1}^\infty a_n + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n = 2\sum_{n=1}^\infty a_{2n} \text{ for the first two sums } \} \\ = 2\sum_{n=1}^\infty \frac{H_{2n-1}}{2n}x^{2n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^\infty \frac{H_{n-1}}{n}x^{2n} \\ = 2\sum_{n=1}^\infty \frac{H_{2n}-\frac{1}{2n}}{2n}x^{2n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^\infty \frac{H_n - \frac{1}{n}}{n}x^{2n} \\ = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^\infty \frac{2H_{2n}-H_n}{n}x^{2n} \end{array}\right.$$

If we replace $x$ with $ix$ in (2.40) then use $\operatorname{arctanh}^2(ix) = -\arctan^2(x)$, we get

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{2H_{2n}-H_n}{n}x^{2n} = -2\arctan^2(x), \quad |x| \le 1 \tag{2.41}$$

Additionally, by differentiating (2.40) and (2.41) with respect to $x$, we find

$$\sum_{n=1}^\infty \left(2H_{2n} - H_n\right)x^{2n-1} = \frac{2\operatorname{arctanh}(x)}{1-x^2} \tag{2.42}$$

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \left(2H_{2n} - H_n\right)x^{2n-1} = -\frac{2\arctan(x)}{1+x^2} \tag{2.43}$$

2.1.28 $\sum_{n=1}^\infty \frac{H_{2n}}{2n+1}x^{2n+1}$

Let $|x| < 1$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{H_{2n}}{2n+1}x^{2n+1} = -\frac{1}{2}\operatorname{arctanh}(x)\ln\left(1-x^2\right) \tag{2.44}$$

**Proof**

$$\begin{aligned}\operatorname{arctanh}(x)\ln\left(1-x^2\right) &= \frac{1}{2}\{\ln(1+x) - \ln(1-x)\}\{\ln(1+x) + \ln(1-x)\} \\ &= \frac{1}{2}\ln^2(1+x) - \frac{1}{2}\ln^2(1-x)\end{aligned}$$

{expand both squared logs in series as in (2.7)}

$$= \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{H_{n-1}}{n}x^n - \sum_{n=1}^\infty \frac{H_{n-1}}{n}x^n$$

$$\left\{ \text{ use } \sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n - \sum_{n=1}^\infty a_n = -2\sum_{n=0}^\infty a_{2n+1} \right\}$$

$$= -2\sum_{n=0}^\infty \frac{H_{2n}}{2n+1}x^{2n+1}$$

{let the index start from 1 since $H_0 = 0$ }

$$= -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{2n}}{2n+1} x^{2n+1}$$

Let's differentiate both sides of (2.44) with respect to $x$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_{2n} x^{2n} = \frac{x \operatorname{arctanh}(x)}{1-x^2} - \frac{\ln\left(1-x^2\right)}{2\left(1-x^2\right)}$$

2.1.29 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{2n}}{2n+1} x^{2n+1}$

Let $|x| \leq 1$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{2n}}{2n+1} x^{2n+1} = -\frac{1}{2} \arctan(x) \ln\left(1+x^2\right) \tag{2.45}$$

Proof. By writing $\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^x t^{2n}\, \mathrm{d}t$, we get

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{2n}}{2n+1} x^{2n+1} = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n H_{2n} \left(\int_0^x t^{2n}\, \mathrm{d}t\right)$$

$$\{\text{ write } -1 = i^2\}$$

$$= \int_0^x \left(2\sum_{n=1}^{\infty} (ix)^{2n} H_{2n}\right) \mathrm{d}t$$

$$\left\{\text{use } 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ given in (1.5)}\right\}$$

$$= \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} (it)^n H_n + \sum_{n=1}^{\infty} (-it)^n H_n\right) \mathrm{d}t$$

$$\{\text{ make use of the generating function (2.4)}\}$$

$$= \int_0^x \left(-\frac{\ln(1-it)}{1-it} - \frac{\ln(1+it)}{1+it}\right) \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^x \left(-\frac{\ln(1-it) + \ln(1+it) + it(\ln(1-it) - \ln(1+it))}{1+t^2}\right) \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^x \left(-\frac{\ln\left(1+t^2\right) + 2t\arctan(t)}{1+t^2}\right) \mathrm{d}t$$

$$= -\int_0^x \frac{\ln\left(1+t^2\right)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t - \int_0^x \frac{2t\arctan(t)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$$

{integrate the second integral by parts}

$$= -\int_0^x \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{1+x^2}\, \mathrm{d}t - \ln\left(1+t^2\right) \arctan(t)\Big|_0^x + \int_0^x \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{1+x^2}\, \mathrm{d}t$$

$$= -\ln\left(1+x^2\right) \arctan(x) + 0$$

$$= -\ln\left(1+x^2\right) \arctan(x)$$

For a different proof, replace $x$ with $ix$ in (2.44) then use $\operatorname{arctanh}(ix) = i\arctan(x)$.

2.1.30 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{H_n - H_{2n}}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) x^{2n}$

Let $|x| < 1$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H_n - H_{2n}}{n} - \frac{1}{2n^2}\right)x^{2n} = \ln(1-x)\ln(1+x) \tag{2.46}$$

Proof (i). Put $a = \ln(1-x)$ and $b = \ln(1+x)$ in the algebraic identity:

$$ab = \frac{1}{4}(a+b)^2 - \frac{1}{4}(a-b)^2,$$

we have

$$\begin{aligned}
\ln(1-x)\ln(1+x) &= \frac{1}{4}\ln^2\left(1-x^2\right) - \frac{1}{4}\ln^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\\
&= \frac{1}{4}\ln^2\left(1-x^2\right) - \operatorname{arctanh}^2(x)
\end{aligned}$$

{expand the first squared log in series as in (2.7)}
{ and substitute the result of $\operatorname{arctanh}^2(x)$ given in (2.40)}

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n-1}}{n}x^{2n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2H_{2n} - H_n}{n}x^{2n}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n - \frac{1}{n}}{n}x^{2n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2H_{2n} - H_n}{n}x^{2n}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H_n - H_{2n}}{n} - \frac{1}{2n^2}\right)x^{2n}.
\end{aligned}$$

Proof (ii). Differentiate $\ln(1-x)\ln(1+x)$ then integrate back,

$$\begin{aligned}
\ln(1-x)\ln(1+x) &= \int \mathrm{d}(\ln(1-x)\ln(1+x))\\
&= \int \frac{\ln(1-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\ln(1+x)}{1-x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

{recall the generating function (2.29)}

$$\begin{aligned}
&= \int\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \bar{H}_n x^n\right)\mathrm{d}x - \int\left(\sum_{n=1}^{\infty}\bar{H}_n x^n\right)\mathrm{d}x\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \bar{H}_n\left(\int x^n\,\mathrm{d}x\right) - \sum_{n=1}^{\infty}\bar{H}_n\left(\int x^n\,\mathrm{d}x\right)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \bar{H}_n \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{H}_n \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$$

$$\left\{ \text{use } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n = -2\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \text{ given in (1.9)} \right\}$$

$$= -2\sum_{n=1}^{\infty} \bar{H}_{2n-1} \frac{x^{2n}}{2n}$$

$$\left\{ \text{employ } \bar{H}_{n-1} = \bar{H}_n + \frac{(-1)^n}{n} \text{ given in (1.136)} \right\}$$

$$= -2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\bar{H}_{2n} + \frac{1}{2n}\right) \frac{x^{2n}}{2n}$$

$$\{ \text{ recall the relation (1.137)}\}$$

$$= -2\sum_{n=1}^{\infty} \left(H_{2n} - H_n + \frac{1}{2n}\right) \frac{x^{2n}}{2n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{H_n - H_{2n}}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) x^{2n} + c$$

By setting $x = 0$, we find $c = 0$ and the proof is complete.
For a different proof, see [32, p. 334].

### 6.5.2 2.2 Series Expansion of Powers of $\arcsin(z)$

**2.2.1 Series Expansion of $\arcsin(z)$**

Let $|z| \leq 1$. Then the following identity holds:

$$\arcsin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \tag{2.47}$$

Proof. Differentiate $\arcsin(z)$ then integrate,

$$\arcsin(z) = \int \mathrm{d}(\arcsin(z))$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \, \mathrm{d}z$$

$$\left\{ \text{expand } \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \text{ in Taylor series as } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} z^{2n} \right\}$$

$$= \int \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} z^{2n} \right) \mathrm{d}z$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \left( \int z^{2n} \, \mathrm{d}z \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + c.$$

Extracting $c = 0$ by setting $z = 0$ completes the proof.

### 2.2.2 Series Expansion of $\frac{\arcsin(z)}{\sqrt{1-z^2}}$

Let $|z| < 1$. Then the following identity holds:

$$\frac{\arcsin(z)}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} \frac{z^{2n-1}}{n} \tag{2.48}$$

The following proof may be found in [47]:

**Proof**

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} \frac{z^{2n-1}}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty} z^{2n-1}\left(\frac{4^n}{\binom{2n}{n}}\frac{1}{2n}\right)\\
&\{\text{ recall the integral } (1.45)\}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} z^{2n-1}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1}(x)\mathrm{d}x\right)\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{z\sin(x)}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(z^2\sin^2(x)\right)^n\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

{employ the geometric series formula}

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{z\sin(x)}\left(\frac{z^2\sin^2(x)}{1-z^2\sin^2(x)}\right)\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{z\sin(x)}{1-z^2+z^2\cos^2(x)}\mathrm{d}x\\
&= -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\arctan\left(\frac{z\cos(x)}{\sqrt{1-z^2}}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\arctan\left(\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\right)\\
&= \frac{\arcsin(z)}{\sqrt{1-z^2}}.
\end{aligned}$$

To justify the last step, differentiate $\arctan\left(\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\right)$ then integrate back. If we integrate both sides of (2.48) from $z = 0$ to $z$, we get

$$\arcsin^2(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} \frac{z^{2n}}{n^2}, \quad |z| \le 1. \tag{2.49}$$

### 2.2.3 Series Expansion of $\arcsin^3(z)$

Let $|z| \le 1$. Then the following identity holds:

$$\arcsin^3(z) = 6\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\left(H_{2n}^{(2)} - \frac{1}{4}H_n^{(2)}\right)\frac{z^{2n+1}}{2n+1}. \tag{2.50}$$

The following proof may be found in [47]:
Proof. Let $\arcsin(z) = x$ in (2.47):

$$\arcsin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

and write

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^2 \frac{1}{(2n)!},$$

we have

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2n)!}{2^n n!}\right)^2 \frac{\sin^{2n+1}(x)}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 f_n(x), \tag{2.51}$$

where

$$f_n(x) = \frac{\sin^{2n+1}(x)}{(2n+1)!}, \quad b_n = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

Note that

$$f_n''(x) = f_n(x) - (2n+1)^2 f_n(x),$$
$$b_{n+1} = (2n+1)b_n.$$

In light of (2.51), write

$$x^3 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n^2 f_n(x) \tag{2.52}$$

Assuming $a_0 = 0$ allows the index $n$ to start from 1 ,

$$x^3 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n^2 f_n(x)$$

Differentiate twice with respect to $x$ to get

$$x = \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n^2 f_n''(x)$$

$$\{\text{ substitute } f_n''(x)\}$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n^2 f_{n-1}(x) - \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)^2 a_n b_n^2 f_n(x)$$

{shift the index $n$ by $+1$ in the first sum}
{and let $n$ start from 0 in the second sum since we assumed $a_0 = 0$ }

$$= \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} b_{n+1}^2 f_n(x) - \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^2 a_n b_n^2 f_n(x)$$

$$\{\text{ substitute } b_{n+1} \text{ in the first sum }\}$$

$$= \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^2 a_{n+1} b_n^2 f_n(x) - \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^2 a_n b_n^2 f_n(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^2 (a_{n+1} - a_n)}{6} b_n^2 f_n(x) \tag{2.53}$$

By comparing the series in (2.51) and (2.53), we see that

$$1 = \frac{(2n+1)^2\,(a_{n+1} - a_n)}{6}$$

or

$$a_{n+1} - a_n = \frac{6}{(2n+1)^2}$$

Employing the generalization (1.121), we find

$$a_n = 6\left(H_{2n}^{(2)} - \frac{1}{4}H_n^{(2)}\right)$$

Notice that $a_n$ meets our assumption $(a_0 = 0)$ since $H_0^{(2)} = 0$. Substitute $a_n$ in (2.52),

$$\begin{aligned} x^3 &= 6\sum_{n=0}^{\infty}\left(H_{2n}^{(2)} - \frac{1}{4}H_n^{(2)}\right) b_n^2 f_n(x) \\ &\qquad \{\text{ substitute } b_n \text{ and } f_n(x)\} \\ &= 6\sum_{n=0}^{\infty}\left(H_{2n}^{(2)} - \frac{1}{4}H_n^{(2)}\right)\left(\frac{(2n)!}{2^n n!}\right)^2 \frac{\sin^{2n+1}(x)}{(2n+1)!} \\ &\qquad \left\{\text{ write } (n!)^2 = (2n)!\binom{2n}{n}\right\} \\ &= 6\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\left(H_{2n}^{(2)} - \frac{1}{4}H_n^{(2)}\right)\frac{\sin^{2n+1}(x)}{2n+1}. \end{aligned}$$

Let $x = \arcsin(z)$ to finish the proof.

### 2.2.4 Series Expansion of $\arcsin^4(z)$

Let $|z| \le 1$. Then the following identity holds:

$$\arcsin^4(z) = \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{\binom{2n}{n}}\frac{H_{n-1}^{(2)} z^{2n}}{n^2} \tag{2.54}$$

The following proof may be found in [47]:
Proof. Set $\arcsin(z) = x$ in (2.49):

$$\arcsin^2(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{\binom{2n}{n}}\frac{z^{2n}}{n^2}$$

and write

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(2n)!}{(n(n-1)!)^2}$$

we get

$$x^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(2^n(n-1)!)^2\frac{\sin^{2n}(x)}{(2n)!} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 f_n(x), \tag{2.55}$$

where

$$f_n(x) = \frac{\sin^{2n}(x)}{(2n)!}, \quad b_n = 2^n(n-1)!.$$

Note that

$$\begin{aligned} f_n''(x) =& f_{n-1}(x) - (2n)^2 f_n(x) \\ b_{n+1} =& 2nb_n \end{aligned}$$

In light of (2.55), write

$$x^4 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n^2 f_n(x). \tag{2.56}$$

Assuming $a_1 = 0$ allows the index $n$ to start from 2,

$$x^4 = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} a_n b_n^2 f_n(x).$$

Upon differentiating twice with respect to $x$, we get

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{1}{24}\sum_{n=2}^{\infty} a_n b_n^2 f_n''(x) \\ &\{\text{substitute } f_n''(x)\ \} \\ &= \frac{1}{24}\sum_{n=2}^{\infty} a_n b_n^2 f_{n-1}(x) - \frac{1}{24}\sum_{n=2}^{\infty} a_n (2n)^2 b_n^2 f_n(x) \end{aligned}$$

{shift the index $n$ of the first sum by $+1$ }
{and let $n$ start from 1 in the second sum since we assumed $a_1 = 0$ }

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{24}\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} b_{n+1}^2 f_n(x) - \frac{1}{24}\sum_{n=1}^{\infty} a_n (2n)^2 b_n^2 f_n(x) \\ &\{\text{ substitute } b_{n+1} \text{ in the first sum }\} \\ &= \frac{1}{24}\sum_{n=1}^{\infty} (2n)^2 a_{n+1} b_n^2 f_n(x) - \frac{1}{24}\sum_{n=1}^{\infty} (2n)^2 a_n b_n^2 f_n(x) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2 \left(a_{n+1} - a_n\right)}{12} b_n^2 f_n(x). \end{aligned} \tag{2.57}$$

By comparing the coefficients of $f_n(x)$ in (2.55) and (2.57), we see that

$$1 = \frac{(2n)^2 \left(a_{n+1} - a_n\right)}{12}$$

or

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3}{n^2}.$$

Using (1.117), we find

$$a_n = 3H_{n-1}^{(2)}.$$

Notice that $a_n$ meets our assumption ( $a_1 = 0$ ).

Substitute $a_n$ in (2.56), we obtain

$$x^4 = \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty} H_{n-1}^{(2)} b_n^2 f_n(x)$$
$$\{\text{ substitute } b_n \text{ and } f_n(x)\}$$
$$= \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty} H_{n-1}^{(2)} \left(2^n (n-1)!\right)^2 \frac{\sin^{2n}(x)}{(2n)!}$$
$$\left\{ \text{write } (2n)! = (n(n-1)!)^2 \binom{2n}{n} \right\}$$
$$= \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} \frac{H_{n-1}^{(2)} \sin^{2n}(x)}{n^2}.$$

Let $x = \arcsin(z)$ to complete the proof.
By differentiating both sides of (2.50) and (2.54), we obtain

$$\frac{\arcsin^2(z)}{\sqrt{1-z^2}} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \left( H_{2n}^{(2)} - \frac{1}{4} H_n^{(2)} \right) z^{2n} \quad |z| < 1 \tag{2.58}$$

and

$$\frac{\arcsin^3(z)}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} \frac{H_{n-1}^{(2)} z^{2n-1}}{n}. \quad |z| < 1. \tag{2.59}$$

### 6.5.3 2.3 Identities by Binomial Coefficient

Let $|x| < 1$ and $a \in \mathbb{Z}^+$. Then the following identity holds:

$$(-1)^a \frac{\ln^a(1-x)}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} f(a,n) x^n, \tag{2.60}$$

where

$$f(a,n) = (-1)^{a-1}(a-1)! \left( H_n^{(a)} + \sum_{j=1}^{a-1} \frac{(-1)^j}{j!} H_n^{(a-j)} f(j,n) \right).$$

**Proof**

$$(-1)^a \frac{\ln^a(1-x)}{1-x} = \lim_{m \to 1} (-1)^a \ln^a(1-x)(1-x)^{-m}$$

$$= \lim_{m\to 1} \frac{\partial^a}{\partial m^a}(1-x)^{-m}$$

$$\left\{ \text{ expand } (1-x)^{-m} \text{ in Taylor series } \right\}$$

$$= \lim_{m\to 1} \frac{\partial^a}{\partial m^a} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} x^n$$

$$\left\{ \text{ let the index start from one since } \frac{\partial^a}{\partial m^a}\binom{m-1}{0} = 0 \right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{m\to 1} \frac{\partial^a}{\partial m^a} \binom{m+n-1}{n} x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} f(a,n) x^n$$

Let's find the derivative of the binomial coefficient,

$$\frac{\partial}{\partial m}\binom{m+n-1}{n} = \frac{\partial}{\partial m}\frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m)}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{use } \frac{d}{dx}\Gamma(x) = \Gamma(x)\psi(x) \} \\ = \frac{\Gamma(m)\Gamma(m+n)\psi(m+n) - \Gamma(m+n)\Gamma(m)\psi(m)}{\Gamma(n+1)\Gamma^2(m)} \end{array} \right.$$

$$= \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m)}(\psi(m+n) - \psi(m))$$

$$= \binom{m+n-1}{n}(\psi(m+n) - \psi(m))$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{use } \psi(x) = H_{x-1} - \gamma = \sum_{k=1}^{x-1} \frac{1}{k} - \gamma \} \\ = \binom{m+n-1}{n}\left(\sum_{k=1}^{m+n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k}\right) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{c} a \\ \text{use } \sum_{k=1}^{a} f_k = \sum_{k=1}^{b-1} f_k + \sum_{k=b}^{a} f_k, a > b \text{ for the first sum} \end{array} \right\}$$

$$= \binom{m+n-1}{n}\left(\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=m}^{m+n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k}\right)$$

$$= \binom{m+n-1}{n}\left(\sum_{k=m}^{m+n-1} \frac{1}{k}\right)$$

$\{$ shift the index by $-m\}$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{m+n-1}{n}}{k+m}.$$

Keep differentiating with respect to $m$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial m^2}\binom{m+n-1}{n} = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{m+n-1}{n}}{(k+m)^2} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{\partial}{\partial m}\binom{m+n-1}{n}}{k+m}$$

$$\frac{\partial^3}{\partial m^3}\binom{m+n-1}{n} = 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\binom{m+n-1}{n}}{(k+m)^3} - 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{\partial}{\partial m}\binom{m+n-1}{n}}{(k+m)^2}$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{\partial^2}{\partial m^2}\binom{m+n-1}{n}}{k+m}$$

Observing these derivatives, we can generalize the $a$-th derivative to

$$\frac{\partial^a}{\partial m^a}\binom{m+n-1}{n}$$
$$= (-1)^{a-1}(a-1)!\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\binom{m+n-1}{n}}{(k+m)^a}+\sum_{j=1}^{a-1}\frac{(-1)^j}{j!}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\frac{\partial^j}{\partial m^j}\binom{m+n-1}{n}}{(k+m)^{a-j}}\right). \tag{2.61}$$

Let $m\to 1$ and remember $\lim_{m\to 1}\frac{\partial^a}{\partial m^a}\binom{m+n-1}{n} = f(a,n)$ observing that

$$\lim_{m\to 1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+m)^r}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+1)^r}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^r}=H_n^{(r)}$$

and

$$\lim_{m\to 1}\binom{m+n-1}{n}=\binom{n}{n}=1,$$

we get

$$f(a,n)=(-1)^{a-1}(a-1)!\left(H_n^{(a)}+\sum_{j=1}^{a-1}\frac{(-1)^j}{j!}H_n^{(a-j)}f(j,n)\right)$$

and the proof is complete.

**Examples:**

$$-\frac{\ln(1-x)}{1-x}=\sum_{n=1}^{\infty}H_n x^n;$$
$$\frac{\ln^2(1-x)}{1-x}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^2-H_n^{(2)}\right)x^n;$$
$$-\frac{\ln^3(1-x)}{1-x}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^3-3H_nH_n^{(2)}+2H_n^{(3)}\right)x^n;$$
$$\frac{\ln^4(1-x)}{1-x}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^4-6H_n^2H_n^{(2)}+8H_nH_n^{(3)}+3\left(H_n^{(2)}\right)^2-6H_n^{(4)}\right)x^n.$$

### 6.5.4 2.4 Identities by Beta Function

Let $n,a\in\mathbb{Z}^+$. Then the following identity holds:

$$\int_0^1 x^{n-1}\ln^a(1-x)\mathrm{d}x=t(a,n) \tag{2.62}$$

where

$$t(a,n)=(-1)^a(a-1)!\left(\frac{H_n^{(a)}}{n}+\sum_{j=1}^{a-1}\frac{(-1)^j}{j!}H_n^{(a-j)}t(j,n)\right)$$

Proof. Let $x\to 1-x$,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{n-1}\ln^a(1-x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 \ln^a(x)(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x\\
&= \lim_{m\to 1}\int_0^1 x^{m-1}\ln^a(x)(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x\\
&= \lim_{m\to 1}\int_0^1 \frac{\partial^a}{\partial m^a}x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x\\
&= \lim_{m\to 1}\frac{\partial^a}{\partial m^a}\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

{recall the definition of the beta function (1.46)}

$$\begin{aligned}
&= \lim_{m\to 1}\frac{\partial^a}{\partial m^a}\,\mathrm{B}(m,n)\\
&= t(a,n)
\end{aligned}$$

Let's find the derivative of the beta function,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial m}\,\mathrm{B}(m,n) &= \frac{\partial}{\partial m}\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}\\
= \Gamma(m)&\frac{\Gamma(m+n)\Gamma(n)\psi(n)-\Gamma(m+n)\psi(m+n)\Gamma(n)}{\Gamma^2(m+n)}\\
&= -\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}(\psi(m+n)-\psi(n))\\
&= -\mathrm{B}(m,n)(\psi(m+n)-\psi(n))\\
&= -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\mathrm{B}(m,n)}{k+m}
\end{aligned}$$

The $a$-th derivative can be generalized exactly the same way as in (2.61) to

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^a}{\partial m^a}\,\mathrm{B}(m,n)\\
&= (-1)^a(a-1)!\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\mathrm{B}(m,n)}{(k+m)^a}+\sum_{j=1}^{a-1}\frac{(-1)^{a-j}}{j!}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\frac{\partial^j}{\partial m^j}}{(k+m)^{a-j}}\,\mathrm{B}(m,n)\right.
\end{aligned}$$

Let $m\to 1$ and remember $\lim_{m\to 1}\frac{\partial^a}{\partial m^a}\,\mathrm{B}(m,n)=t(a,n)$ observing that

$$\lim_{m\to 1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(k+m)^r}=H_n^{(r)}$$

and

$$\lim_{m\to 1}\,\mathrm{B}(m,n)=B(1,n)=\frac{\Gamma(1)\Gamma(n)}{\Gamma(n+1)}=\frac{\Gamma(n)}{n\Gamma(n)}=\frac{1}{n}$$

we get

$$t(a,n)=(-1)^a(a-1)!\left(\frac{H_n^{(a)}}{n}+\sum_{j=1}^{a-1}\frac{(-1)^j}{j!}H_n^{(a-j)}t(j,n)\right)$$

and the proof is complete.

Remark: In the proof above, we used Leibniz integral rule [49]:

$$\frac{d^a}{dm^a}\int_p^q f(x,m)\mathrm{d}x = \int_p^q \frac{\partial^a}{\partial m^a} f(x,m)\mathrm{d}x \tag{2.63}$$

which can be written as

$$\frac{\partial^a}{\partial m^a}\int_p^q f(x,m,n)\mathrm{d}x = \int_p^q \frac{\partial^a}{\partial m^a} f(x,m,n)\mathrm{d}x \tag{2.64}$$

since the integrand is defined in terms of three variables ( $x, m, n$ ).

**Examples:**

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{n-1}\ln(1-x)\mathrm{d}x &= -\frac{H_n}{n};\\
\int_0^1 x^{n-1}\ln^2(1-x)\mathrm{d}x &= \frac{H_n^2 + H_n^{(2)}}{n};\\
\int_0^1 x^{n-1}\ln^3(1-x)\mathrm{d}x &= -\frac{H_n^3 + 3H_nH_n^{(2)} + 2H_n^{(3)}}{n};\\
\int_0^1 x^{n-1}\ln^4(1-x)\mathrm{d}x &= \frac{H_n^4 + 6H_n^2H_n^{(2)} + 8H_nH_n^{(3)} + 3\left(H_n^{(2)}\right)^2 + 6H_n^{(4)}}{n}.
\end{aligned}$$

The first identity is also proved in (1.124).

### 6.5.5 2.5 Identities by Cauchy Product

#### 2.5.1 Cauchy Product of Two Power Series

Let $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ be two power series. The Cauchy product of these two series is given by

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}\right)x^{n+1} \tag{2.65}$$

Proof.

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n\right)\\
&= \left(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots\right)\left(b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots\right)\\
&= (a_1b_1)\,x^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)\,x^3 + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1)\,x^4 + \cdots\\
&= \left(\sum_{k=1}^{1} a_kb_{2-k}\right)x^2 + \left(\sum_{k=1}^{2} a_kb_{3-k}\right)x^3 + \left(\sum_{k=1}^{3} a_kb_{4-k}\right)x^4 + \cdots\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_kb_{n-k+1}\right)x^{n+1}.
\end{aligned}$$

Applying the steps above also gives

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n, \tag{2.66}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{2k} b_{n-2k}\right) x^n. \tag{2.67}$$

### 2.5.2 Cauchy Product of $-\ln(1-x)\operatorname{Li}_2(x)$

Let $-1 \leq x < 1$. Then the following identity holds:

$$-\ln(1-x)\operatorname{Li}_2(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n} x^n - 3\operatorname{Li}_3(x) \tag{2.68}$$

We apply the same approach as in [32, p. 516]:
Proof. Expand $\operatorname{Li}_2(x)$ and $\ln(1-x)$ in series,

$$\begin{aligned}
(\operatorname{Li}_2(x))(-\ln(1-x)) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right) \\
&\left\{ \text{employ (2.65) where } a_n = \frac{1}{n^2} \text{ and } b_n = \frac{1}{n} \right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2(n-k+1)}\right) x^{n+1}
\end{aligned}$$

{use the partial fraction decomposition for the inner sum}

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+1)k^2} + \frac{1}{(n+1)^2 k} + \frac{1}{(n+1)^2(n-k+1)}\right) x^{n+1}$$

$$\left\{ \text{use } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = H_n^{(2)} \text{ and } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n-k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n \text{ given in (1.3)} \right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H_n^{(2)}}{(n+1)} + \frac{2H_n}{(n+1)^2}\right) x^{n+1}$$

$\left\{ \text{ let the index } n \text{ start from 0 since } H_0^{(2)} = H_0 = 0 \right\}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{H_n^{(2)}}{n+1} + \frac{2H_n}{(n+1)^2} \right) x^{n+1}$$

$$\{ \text{ shift the index } n \text{ by } -1 \}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{H_{n-1}^{(2)}}{n} + \frac{2H_{n-1}}{n^2} \right) x^{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{H_n^{(2)} - \frac{1}{n^2}}{n} + \frac{2H_n - \frac{2}{n}}{n^2} \right) x^{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n} x^n + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^2} x^n - 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$$

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n} x^n - 3\operatorname{Li}_3(x).$$

### 2.5.3 Cauchy Product of $\operatorname{Li}_2^2(x)$

Let $|x| \leq 1$. Then the following identity holds:

$$\operatorname{Li}_2^2(x) = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^3} x^n + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^2} x^n - 6\operatorname{Li}_4(x) \tag{2.69}$$

Proof. Divide both sides of (2.68):

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n} x^n - 3\operatorname{Li}_3(x) = -\ln(1-x)\operatorname{Li}_2(x)$$

by $x$ then integrate using $\int x^{n-1}\, \mathrm{d}x = \frac{x^n}{n}$,

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^3} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^2} x^n - 3\operatorname{Li}_4(x)$$

$$= \int \frac{-\ln(1-x)\operatorname{Li}_2(x)}{x}\, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Li}_2^2(x) + c$$

The proof finishes on extracting $c = 0$ by setting $x = 0$.

### 2.5.4 Cauchy Product of $-\ln(1-x)\operatorname{Li}_3(x)$

Let $-1 \leq x < 1$. Then the following identity holds:

$$-\ln(1-x)\operatorname{Li}_3(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^3} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(3)}}{n} - 4\operatorname{Li}_4(x). \tag{2.70}$$

**Proof**

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{Li}_3(x))\,(-\ln(1-x)) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)\\
&\left\{\text{ employ (2.65) where } a_n=\frac{1}{n^3} \text{ and } b_n=\frac{1}{n}\right\}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3(n-k+1)}\right)x^{n+1}
\end{aligned}
$$

{make use of the partial fraction decomposition for the inner sum}

$$
\begin{aligned}
&=\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+1)k^3}+\frac{1}{(n+1)^2k^2}+\frac{1}{(n+1)^3k}\\
&\quad+\frac{1}{(n+1)^3(n-k+1)}\Big)\,x^{n+1}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H_n^{(3)}}{n+1}+\frac{H_n^{(2)}}{(n+1)^2}+\frac{2H_n}{(n+1)^3}\right)x^{n+1}\\
&\left\{\text{ let the index } n \text{ start from 0 since } H_0^{(3)}=H_0^{(2)}=H_0=0\right\}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{H_n^{(3)}}{n+1}+\frac{H_n^{(2)}}{(n+1)^2}+\frac{2H_n}{(n+1)^3}\right)x^{n+1}\\
&\quad\{\text{ shift the index } n \text{ by } -1\}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H_{n-1}^{(3)}}{n}+\frac{H_{n-1}^{(2)}}{n^2}+\frac{2H_{n-1}}{n^3}\right)x^{n}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H_n^{(3)}-\frac{1}{n^3}}{n}+\frac{H_n^{(2)}-\frac{1}{n^2}}{n}+2\frac{H_n-\frac{1}{n}}{n^2}\right)x^{n}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^2}x^n+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^3}x^n-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^4},
\end{aligned}
$$

where the last sum is $\mathrm{Li}_4(x)$.

### 2.5.5 Cauchy Product of $\mathrm{Li}_2(x)\mathrm{Li}_3(x)$

Let $|x|\le 1$. Then the following identity holds:

$$
\mathrm{Li}_2(x)\,\mathrm{Li}_3(x)=6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^4}x^n+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^3}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n^2}x^n-10\,\mathrm{Li}_5(x). \tag{2.71}
$$

**Proof (i).**

$$\begin{aligned}
\operatorname{Li}_3(x)\operatorname{Li}_2(x) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3(n-k+1)^2}\right)x^{n+1}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+1)^2k^3}+\frac{2}{(n+1)^3k^2}+\frac{1}{(n+1)^3(n-k+1)^2}\right.\\
&\qquad \left.+\frac{3}{(n+1)^4k}+\frac{3}{(n+1)^4(n-k+1)}\right)x^{n+1}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H_n^{(3)}}{(n+1)^2}+3\frac{H_n^{(2)}}{(n+1)^3}+6\frac{H_n}{(n+1)^4}\right)x^{n+1}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H_{n-1}^{(3)}}{n^2}+3\frac{H_{n-1}^{(2)}}{n^3}+6\frac{H_{n-1}}{n^4}\right)x^{n}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H_n^{(3)}-\frac{1}{n^3}}{n^2}+3\frac{H_n^{(2)}-\frac{1}{n^2}}{n^3}+6\frac{H_n-\frac{1}{n}}{n^4}\right)x^{n}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n^2}x^n+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^3}x^n+6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^4}x^n-10\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^5}.
\end{aligned}$$

The last sum is $\operatorname{Li}_5(x)$.

Proof (ii).

$$\begin{aligned}
\operatorname{Li}_2(x)\operatorname{Li}_3(x) &= \int \mathrm{d}\left(\operatorname{Li}_2(x)\operatorname{Li}_3(x)\right)\\
&= \int \frac{1}{x}\left(\operatorname{Li}_2^2(x)-\ln(1-x)\operatorname{Li}_3(x)\right)\mathrm{d}x\\
&\qquad \{\text{substitute the results (2.69) and (2.70)}\}\\
&= \int \frac{1}{x}\left(6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^3}x^n+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^2}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n}x^n-10\operatorname{Li}_4(x)\right)\mathrm{d}x\\
&\qquad \{\text{interchange integration and summation}\}\\
&= \left(6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^3}+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n}\right)\int x^{n-1}\,\mathrm{d}x-10\int\frac{\operatorname{Li}_4(x)}{x}\,\mathrm{d}x\\
&= 6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^4}x^n+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^3}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n^2}-10\operatorname{Li}_5(x)+c.
\end{aligned}$$

The proof finalizes on finding $c=0$ by setting $x=0$.

### 2.5.6 Cauchy Product of $\operatorname{Li}_3^2(x)$

Let $|x|\le 1$. Then the following identity holds:

$$\operatorname{Li}_3^2(x)=12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^5}x^n+6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^4}x^n+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n^3}x^n-20\operatorname{Li}_6(x). \tag{2.72}$$

Proof. Divide both sides of (2.71) by $x$ then integrate,

$$6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^5}x^n+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^4}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n^3}x^n-10\operatorname{Li}_6(x)$$
$$=\int\frac{\operatorname{Li}_2(x)\operatorname{Li}_3(x)}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\operatorname{Li}_3^2(x)+c$$

where $c=0$ by setting $x=0$.

### 2.5.7 Cauchy Product of $-\ln(1-x)\operatorname{Li}_4(x)$

Let $-1\le x<1$. Then the following identity holds:

$$-\ln(1-x)\operatorname{Li}_4(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^4}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^3}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n^2}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(4)}}{n}x^n-5\operatorname{Li}_5(x) \tag{2.73}$$

The following proof is due to Cornel Vălean [32, p. 516]:

**Proof**

$$(\operatorname{Li}_4(x))(-\ln(1-x))=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^4}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^4(n-k+1)}\right)x^{n+1}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H_n^{(4)}}{n+1}+\frac{H_n^{(3)}}{(n+1)^2}+\frac{H_n^{(2)}}{(n+1)^3}+2\frac{H_n}{(n+1)^4}\right)x^{n+1}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H_{n-1}^{(4)}}{n}+\frac{H_{n-1}^{(3)}}{n^2}+\frac{H_{n-1}^{(2)}}{n^3}+2\frac{H_{n-1}}{n^4}\right)x^n$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H_n^{(4)}-\frac{1}{n^4}}{n}+\frac{H_n^{(3)}-\frac{1}{n^3}}{n^2}+\frac{H_n^{(2)}-\frac{1}{n^2}}{n^3}+2\frac{H_n-\frac{1}{n}}{n^4}\right)x^n$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H_n^{(4)}}{n}+\frac{H_n^{(3)}}{n^2}+\frac{H_n^{(2)}}{n^3}+2\frac{H_n}{n^4}-\frac{5}{n^5}\right)x^n$$
$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^4}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^3}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n^2}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(4)}}{n}x^n-5\operatorname{Li}_5(x)$$

and we are done with the proof.

Applying the Cauchy product, we also find, for $|x|\le 1$, the following identities:

$$\operatorname{Li}_2(x)\operatorname{Li}_4(x) = 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^5}x^n + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^4}x^n + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n^3}x^n$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(4)}}{n^2}x^n - 15\operatorname{Li}_6(x);$$
$$\operatorname{Li}_3(x)\operatorname{Li}_4(x) = 20\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^6}x^n + 10\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^5}x^n + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n^4}x^n$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(4)}}{n^3}x^n - 35\operatorname{Li}_7(x);$$
$$\operatorname{Li}_4^2(x) = 40\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^7}x^n + 20\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^6}x^n + 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n^5}x^n$$
$$+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(4)}}{n^4}x^n - 70\operatorname{Li}_8(x).$$

Note that the third identity follows from dividing both sides of the second by $x$ then integrating.

### 6.5.6 2.6 Identities by Abel's Summation

#### 2.6.1 Abel's Summation

Given two finite sums $\sum_{k=1}^{n} a_k$ and $\sum_{k=1}^{n} b_k$, define $A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Then

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = A_n b_n + A_{m-1} b_{m-1} - \sum_{k=m}^{n-1} A_k\left(b_{k+1} - b_k\right). \tag{2.74}$$

Proof. By the given sum $A_n$, one can write

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + a_k$$

and so

$$A_{k-1} = \sum_{i=1}^{k-1} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}$$

Subtracting the two sums yields

$$a_k = A_k - A_{k-1}$$

Multiply both sides by $b_k$ then take the summation from $k = m$ to $n$,

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n}\left(A_k - A_{k-1}\right) b_k$$
$$= \sum_{k=m}^{n} A_k b_k - \sum_{k=m}^{n} A_{k-1} b_k$$

For the first sum, use the fact that $\sum_{k=m}^{n} f(k) = f(n) + \sum_{k=m}^{n-1} f(k)$,

$$\sum_{k=m}^{n} A_k b_k = A_n b_n + \sum_{k=m}^{n-1} A_k b_k$$

For the second sum, use $\sum_{k=m}^{n} f(k) = f(m) + \sum_{k=m+1}^{n} f(k)$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} A_{k-1} b_k &= A_{m-1} b_m + \sum_{k=m+1}^{n} A_{k-1} b_k \\ &\{\text{ shift the index } k \text{ by } +1\} \\ &= A_{m-1} b_m + \sum_{k=m}^{n-1} A_k b_{k+1}\end{aligned}$$

Combining the two sums, we obtain

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} a_k b_k &= A_n b_n - A_{m-1} b_m + \sum_{k=m}^{n-1} A_k b_k - \sum_{k=m}^{n-1} A_k b_{k+1} \\ &= A_n b_n - A_{m-1} b_m - \sum_{k=m}^{n-1} A_k \left(b_{k+1} - b_k\right)\end{aligned}$$

and the proof is finished.

Notice that $A_{m-1} = 0$ when $m = 0, 1$. Thus, (2.74) can be written as

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k b_k &= A_n b_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k \left(b_{k+1} - b_k\right) \\ \sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= A_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k \left(b_{k+1} - b_k\right)\end{aligned}$$

Also notice that the index $k$ in the RHS of the last identity can start from 0 since $A_0 = 0$. Therefore,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k \left(b_{k+1} - b_k\right), \quad A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{2.75}$$

You may find in [6, Theorem 2.20, p. 55] a proof for a similar formula:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} + A_{m-1} b_m - \sum_{k=m}^{n} A_k \left(b_{k+1} - b_k\right)$$

### 2.6.2 First Application

Let $p, q \in \mathbb{Z}_{>1}$. Then the following identity holds:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k^{(p)}}{k^q} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k^{(q)}}{k^p} = \zeta(p)\zeta(q) + \zeta(p+q) \tag{2.76}$$

Proof. Let $a_k = \frac{1}{k^q}$ and $b_k = H_k^{(p)}$ in (2.75),

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k^{(p)}}{k^q} &= \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^q}\right)H_n^{(p)} - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i^q}\right)\left(H_{k+1}^{(p)}-H_k^{(p)}\right)\\
&\left\{ \text{ use } H_{k+1}^{(p)} = H_k^{(p)} + \frac{1}{(k+1)^p} \text{ given in (1.117) } \right\}\\
&= H_n^{(q)}H_n^{(p)} - \sum_{k=0}^{n-1}\left(H_k^{(q)}\right)\left(\frac{1}{(k+1)^p}\right)\\
&\{ \text{ shift the index } k \text{ by } -1\}\\
&= H_n^{(q)}H_n^{(p)} - \sum_{k=1}^{n}\frac{H_{k-1}^{(q)}}{k^p}\\
&= H_n^{(q)}H_n^{(p)} - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{H_k^{(q)}}{k^p} - \frac{1}{k^{p+q}}\right)\\
&= H_n^{(q)}H_n^{(p)} + \zeta(q+p) - \sum_{k=1}^{n}\frac{H_k^{(q)}}{k^p}
\end{aligned}
$$

Reorganize the terms, we have

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k^{(p)}}{k^q} + \sum_{k=1}^{n}\frac{H_k^{(q)}}{k^p} = H_n^{(q)}H_n^{(p)} + \zeta(q+p).$$

Next, take the limit on both sides letting $n \to \infty$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k^{(p)}}{k^q} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k^{(q)}}{k^p} = \lim_{n\to\infty}\left\{H_n^{(q)}H_n^{(p)} + \zeta(q+p)\right\}.$$

The proof follows on writing

$$\lim_{n\to\infty}H_n^{(a)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^a} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^a} = \zeta(a).$$

For a different approach, see [32, p. 358].

Setting $q = p$ in (2.76) yields

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k^{(p)}}{k^p} = \frac{\zeta^2(p)+\zeta(2p)}{2} \tag{2.77}$$

**Examples:**

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k^{(2)}}{k^2} = \frac{\zeta^2(2)+\zeta(4)}{2} = \frac{7}{4}\zeta(4)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k^{(3)}}{k^3} = \frac{\zeta^2(3)+\zeta(6)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k^{(4)}}{k^4} = \frac{\zeta^2(4)+\zeta(8)}{2} = \frac{13}{12}\zeta(8)$$

### 2.6.3 Second Application

Let $p \in \mathbb{Z}_{>1}$. Then the following identity holds:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(H_k^{(p)}\right)^2}{k^p} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k^{(p)}}{k^{2p}} = \frac{\zeta^3(p) - \zeta(3p)}{3} \tag{2.78}$$

Proof. Let $a_k = \frac{1}{k^p}$ and $b_k = \left(H_k^{(p)}\right)^2$ in (2.75),

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(H_k^{(p)}\right)^2}{k^p}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^p}\right) \left(H_n^{(p)}\right)^2 - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^p}\right) \left(\left(H_{k+1}^{(p)}\right)^2 - \left(H_k^{(p)}\right)^2\right)$$

$$\left\{ \text{use } H_{k+1}^{(p)} = H_k^{(p)} + \frac{1}{(k+1)^p} \text{ given in (1.117)} \right\}$$

$$= H_n^{(p)} \left(H_n^{(p)}\right)^2 - \sum_{k=0}^{n-1} H_k^{(p)} \left(\frac{2H_k^{(p)}}{(k+1)^p} + \frac{1}{(k+1)^{2p}}\right)$$

{ shift the index $k$ by -1}

$$= \left(H_n^{(p)}\right)^3 - \sum_{k=1}^{n} H_{k-1}^{(p)} \left(\frac{2H_{k-1}^{(p)}}{k^p} + \frac{1}{k^{2p}}\right)$$

$$= \left(H_n^{(p)}\right)^3 - \sum_{k=1}^{n} \left(H_k^{(p)} - \frac{1}{k^p}\right) \left(\frac{2H_k^{(p)} - \frac{2}{k^p}}{k^p} + \frac{1}{k^{2p}}\right)$$

$$= \left(H_n^{(p)}\right)^3 - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(H_k^{(p)}\right)^2}{k^p} + 3\sum_{k=1}^{n} \frac{H_k^{(p)}}{k^{2p}} - H_n^{(3p)}$$

Rearranging the terms,

$$3\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(H_k^{(p)}\right)^2}{k^p} - 3\sum_{k=1}^{n} \frac{H_k^{(p)}}{k^{2p}} = \left(H_n^{(p)}\right)^3 - H_n^{(3p)}.$$

Take the limit on both sides letting $n \to \infty$,

$$3\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(H_k^{(p)}\right)^2}{k^p} - 3\sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k^{(p)}}{k^{2p}} = \lim_{n\to\infty} \left\{\left(H_n^{(p)}\right)^3 - H_n^{(3p)}\right\}$$

The proof completes on writing $\lim_{n\to\infty} H_n^{(a)} = \zeta(a)$.
Another approach may be found in [32, p. 359].

**Examples:**

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(H_k^{(2)}\right)^2}{k^2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k^{(2)}}{k^4}=\frac{\zeta^3(2)-\zeta(6)}{3}=\frac{9}{8}\zeta(6)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(H_k^{(3)}\right)^2}{k^3}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k^{(3)}}{k^6}=\frac{\zeta^3(3)-\zeta(9)}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(H_k^{(4)}\right)^2}{k^4}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k^{(4)}}{k^8}=\frac{\zeta^3(4)-\zeta(12)}{3}=\frac{493}{5528}\zeta(12)$$

where we used $\zeta^3(2)=\frac{35}{8}\zeta(6)$ and $\zeta^3(4)=\frac{7007}{5528}\zeta(12)$.

### 2.6.4 Third Application

Let $p,q\in\mathbb{Z}_{>1}$. Then the following identity holds:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k^{(q)}}{(2k+1)^p}=\left(1-\frac{1}{2^p}\right)\zeta(q)\zeta(p)+\left(\frac{1}{2^p}-2^{q-1}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k^{(p)}}{k^q}$$
$$-2^{q-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^kH_k^{(p)}}{k^q} \tag{2.79}$$

The following proof is by applying the same technique as in [35]:
Proof. Let $a_k=\frac{1}{(2k-1)^p}$ and $b_k=H_k^{(q)}-\zeta(q)$ in (2.75),

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{H_k^{(q)}-\zeta(q)}{(2k-1)^p}$$
$$=\left(H_n^{(q)}-\zeta(q)\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i-1)^p}-\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(2i-1)^p}\right)\left(H_{k+1}^{(q)}-H_k^{(q)}\right).$$

Let $n\to\infty$ and write $\lim_{n\to\infty}H_n^{(q)}=\zeta(q)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k^{(q)}-\zeta(q)}{(2k-1)^p}=0-\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(2i-1)^p}\right)\left(H_{k+1}^{(q)}-H_k^{(q)}\right)$$

$$\left\{\text{ use }\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(2i-1)^p}=H_{2k}^{(p)}-2^{-p}H_k^{(p)}\text{ given in (1.120) }\right\}$$

$$\left\{\text{ and }H_{k+1}^{(q)}-H_k^{(q)}=\frac{1}{(k+1)^q}\right\}$$

$$=2^{-p}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{H_k^{(p)}}{(k+1)^q}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{H_{2k}^{(p)}}{(k+1)^q}$$

$$\{\text{ shift both indexes by }-1\}$$

$$=2^{-p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_{k-1}^{(p)}}{k^q}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_{2k-2}^{(p)}}{k^q}$$

$$=2^{-p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k^{(p)}-\frac{1}{k^p}}{k^q}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_{2k}^{(p)}-\frac{1}{(2k)^p}-\frac{1}{k^q}}{(2k-1)^p}$$

$$=2^{-p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k^{(p)}}{k^q}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_{2k}^{(p)}}{k^q}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^q(2k-1)^p}$$

$$\{\text{use (1.5) for the second sum}\}$$

$$=2^{-p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k^{(p)}}{k^q}-2^{q-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k^{(p)}}{k^q}-2^{q-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^kH_k^{(p)}}{k^q}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^q(2k-1)^p}$$

$$=\left(2^{-p}-2^{q-1}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k^{(p)}}{k^q}-2^{q-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^kH_k^{(p)}}{k^q}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^q(2k-1)^p}\qquad(2.80)$$

On the other hand,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k^{(q)} - \zeta(q)}{(2k-1)^p} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k^{(q)}}{(2k-1)^p} - \zeta(q) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^p} \\
&\{ \text{ separate the first term of the first sum } \} \\
&= 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{H_k^{(q)}}{(2k-1)^p} - \zeta(q) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^p} \\
&\{ \text{ shift both indexes by } +1 \} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_{k+1}^{(q)}}{(2k+1)^p} - \zeta(q) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^p} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k^{(q)} + \frac{1}{(k+1)^q}}{(2k+1)^p} - \zeta(q) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^p} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k^{(q)}}{(2k+1)^p} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^q (2k+1)^p} - \zeta(q) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^p} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k^{(q)}}{(2k+1)^p} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^q (2k-1)^p} - \zeta(q) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^p} \\
&\left\{ \text{write } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^q (2k-1)^p} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^q (2k-1)^p} \right\} \\
&\{ \text{ and recall the result of the latter sum } (1.65) \} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k^{(q)}}{(2k+1)^p} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^q (2k-1)^p} - \zeta(q) \left(1 - 2^{-p}\right) \zeta(p).
\end{aligned}
$$

Combining (2.80) and (2.81) completes the proof.

## 6.5.7 2.7 Identities By Fourier Series

### 2.7.1 Fourier Series

Let $f(x)$ be a function with a period of $2L$ and integrable on the interval $[-L, L]$. Then its Fourier series is given by

$$
f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \tag{2.82}
$$

where

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) \mathrm{d}x \\
a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \mathrm{d}x \\
b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Proof. Let $f\left(\frac{Ly}{\pi}\right)$ be integrable on the interval $[-\pi, \pi]$. Expand it in cosine and sine series,

$$f\left(\frac{Ly}{\pi}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos(ny)+\sum_{n=0}^{\infty}B_n\sin(ny),$$

where $A_n$ and $B_n$ are the coefficients of the two series. Separate the first term of both series using $\cos(0)=1$ and $\sin(0)=0$,

$$f\left(\frac{Ly}{\pi}\right)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(ny)+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin(ny). \tag{2.83}$$

To find $A_0$, integrate both sides of (2.83) from $y=-\pi$ to $\pi$,

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{Ly}{\pi}\right)\mathrm{d}y\\
&=\int_{-\pi}^{\pi}A_0\ \mathrm{d}y+\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(ny)\mathrm{d}y+\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin(ny)\mathrm{d}y\\
&=A_0y|_{-\pi}^{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(ny)\mathrm{d}y+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(ny)\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Employing the rule:

$$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x & \text{if } f(x) \text{ is even function } (f(-x)=f(x))\\ 0 & \text{if } f(x) \text{ is odd function } (f(-x)=-f(x))\end{cases}$$

and the fact that $\cos(ny)$ is an even function and $\sin(ny)$ is an odd function, we get

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{Ly}{\pi}\right)\mathrm{d}y&=2\pi A_0+2\sum_{n=1}^{\infty}A_n\int_0^{\pi}\cos(ny)\mathrm{d}y+0\\
&=2\pi A_0+2\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left.\frac{\sin(ny)}{n}\right|_0^{\pi}\\
&=2\pi A_0+2\sum_{n=1}^{\infty}A_n\frac{\sin(n\pi)}{n}\\
&\{\text{ note that } \sin(n\pi)=0 \text{ for integer } n\}\\
&=2\pi A_0+0
\end{aligned}$$

or

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{Ly}{\pi}\right)\mathrm{d}y.$$

To find $A_n$, multiply both sides of (2.83) by $\cos(ny)$ then integrate from $-\pi$ to $\pi$,

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{py}{\pi}\right)\cos(ny)\mathrm{d}y\\
&=\int_{-\pi}^{\pi}A_0\cos(ny)\mathrm{d}y+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(ny)\mathrm{d}y+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(ny)\cos(ny)\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

{the last integral is 0 since the integrand is an odd function}

$$
\begin{aligned}
&= A_0 \frac{\sin(ny)}{n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{2ny+\sin(2ny)}{4n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{2A_0\sin(n\pi)}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\left(\frac{\sin(2n\pi)}{2n}+\pi\right) \\
&= 0 + \pi\sum_{n=1}^{\infty} A_n
\end{aligned}
$$

or

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{Ly}{\pi}\right)\cos(ny)\mathrm{d}y.$$

To find $B_n$, multiply both sides of (2.83) by $\sin(ny)$ then integrate from $-\pi$ to $\pi$,

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{Ly}{\pi}\right)\sin(ny)\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} A_0\sin(ny)\mathrm{d}y + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(ny)\sin(ny)\mathrm{d}y + \sum_{n=1}^{\infty} B_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(ny)\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

{the first two integrals are 0 since their integrands are odd functions}

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{2ny-\sin(2ny)}{4n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} B_n\left(\pi - \frac{\sin(2n\pi)}{2n}\right) \\
&= \pi\sum_{n=1}^{\infty} B_n
\end{aligned}
$$

or

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{Ly}{\pi}\right)\sin(ny)\mathrm{d}y.$$

Plugging the results $A_0, A_n$, and $B_n$ in (2.83) yields

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{Ly}{\pi}\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{Ly}{\pi}\right)\mathrm{d}y + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{Ly}{\pi}\right)\cos(ny)\mathrm{d}y\right)\cos(ny) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{Ly}{\pi}\right)\sin(ny)\mathrm{d}y\right)\sin(ny)
\end{aligned}
$$

Substitute $\frac{Ly}{\pi} = x$,

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\mathrm{d}x}_{a_o} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x\right)}_{a_n} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x\right)}_{b_n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$
$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right].$$

Let's replace $x$ with $x + 2L$ to find

$$\cos\left(\frac{n\pi}{L}(x+2L)\right) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L} + 2n\pi\right)$$
$$= \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos(2n\pi) - \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin(2n\pi)$$
$$\{\text{ notice that } \cos(2n\pi) = 1 \text{ and } \sin(2n\pi) = 0 \text{ for integer } n\}$$
$$= \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

and

$$\sin\left(\frac{n\pi}{L}(x+2L)\right) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L} + 2n\pi\right)$$
$$= \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos(2n\pi) + \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin(2n\pi)$$
$$= \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Since $\cos\left(\frac{n\pi}{L}(x+2L)\right) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ and $\sin\left(\frac{n\pi}{L}(x+2L)\right) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, we have $f(x+2L) = f(x)$, which indicates that $f(x)$ is $2L$ periodic. Also notice that $f(x)$ is integrable on the interval $[-L, L]$ and the proof is complete.

### 2.7.2 Fourier Series of Even Function

Let $f(x)$ be an even function with a period of $2L$ and integrable on the interval $[-L, L]$. Then its Fourier series is given by

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{2.84}$$

where

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\mathrm{d}x$$
$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x$$

Proof. Let's recall the definitions of $a_0, a_n$, and $b_n$ from (2.82):

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\mathrm{d}x$$

{the integrand is an even function}

$$= \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\mathrm{d}x$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x$$

{the integrand is an even function}

$$= \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x$$

{the integrand is an odd function}

$$= 0.$$

The proof follows on plugging $a_0, a_n$, and $b_n$ in (2.82).

### 2.7.3 Fourier Series of Odd Function

Let $f(x)$ be an odd function with a period of $2L$ and integrable on the interval $[-L, L]$. Then its Fourier series is given by

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{2.85}$$

where

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x$$

Proof. Let's recall the definitions of $a_0, a_n$, and $b_n$ from (2.82):

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\mathrm{d}x$$

{the integrand is an odd function}

$$= 0$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x$$

{the integrand is an odd function}

$$= 0$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x$$

{the integrand is an even function}

$$= \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x.$$

The proof completes on plugging $a_0, a_n$, and $b_n$ in (2.82).

### 2.7.4 Fourier Series of $\cos(zx)$

Let $z \notin \mathbb{Z}$. Then the following identity holds:

$$\cos(zx) = \frac{2z\sin(\pi z)}{\pi}\left(\frac{1}{2z^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(nx)}{n^2 - z^2}\right). \tag{2.86}$$

Proof. Since $\cos(zx)$ is an even function, we recall (2.84):

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

where

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\mathrm{d}x, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x.$$

Since $\cos(zx) = \cos(zx + 2\pi)$, which indicates that the period of the function is $2\pi$ and so $L = \pi$, its Fourier expansion is given by

$$\cos(zx) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx). \tag{2.87}$$

Let's find $a_0$ and $a_n$ :

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(zx)\mathrm{d}x = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}.\\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(zx)\cos(nx)\mathrm{d}x\\
&\{\text{ make use of } 2\cos(x)\cos(y) = \cos(x-y) + \cos(x+y)\}\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos((z-n)x) + \cos((z+n)x)]\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((z-n)x)}{z-n} + \frac{\sin((z+n)x)}{z+n}\right]_0^{\pi}\\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((z-n)\pi)}{z-n} + \frac{\sin((z+n)\pi)}{z+n}\right]\\
&\{\text{ use } \sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)\}\\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{n\cos(\pi z)\sin(\pi n) - z\sin(\pi z)\cos(\pi n)}{n^2 - z^2}\right)\\
&\{\text{ note that } \sin(n\pi) = 0 \text{ for integer } n\}\\
&= -\frac{2}{\pi}\left(\frac{z\sin(\pi z)\cos(\pi n)}{n^2 - z^2}\right)
\end{aligned}$$

Substitute the results of $a_0$ and $a_n$ in (2.87),

$$\begin{aligned}
\cos(zx) &= \frac{2z\sin(\pi z)}{\pi}\left(\frac{1}{2z^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)\cos(nx)}{n^2 - z^2}\right)\\
&\left\{\text{ use } \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\pi) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \text{ given in (1.7) }\right\}\\
&= \frac{2z\sin(\pi z)}{\pi}\left(\frac{1}{2z^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(nx)}{n^2 - z^2}\right)
\end{aligned}$$

### 2.7.5 Fourier Series of $\sin(zx)$

Let $z \notin \mathbb{Z}$. Then the following identity holds:

$$\sin(zx) = -\frac{2\sin(\pi z)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n\sin(nx)}{n^2-z^2} \tag{2.88}$$

Proof. Since $\sin(zx)$ is an odd function, we recollect (2.85):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x$$

Since $\sin(zx) = \sin(zx+2\pi)$, which indicates that the function is $2\pi$ periodic and so $L=\pi$, its Fourier expansion is given by

$$\sin(zx) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \tag{2.89}$$

Let's find $b_n$ :

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(zx)\sin(nx)\mathrm{d}x \\
&\{\text{make use of } 2\sin(x)\sin(y) = \cos(x-y)-\cos(x+y)\} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos((z-n)x)-\cos((z+n)x)]\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((z-n)x)}{z-n}-\frac{\sin((z+n)x)}{z+n}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((z-n)\pi)}{z-n}-\frac{\sin((z+n)\pi)}{z+n}\right] \\
&\{\text{ use } \sin(x\pm y) = \sin(x)\cos(y)\pm\cos(x)\sin(y)\} \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{z\cos(\pi z)\sin(\pi n)-n\sin(\pi z)\cos(\pi n)}{n^2-z^2}\right) \\
&\{\text{ we have } \sin(n\pi)=0 \text{ for integer } n\} \\
&= -\frac{2}{\pi}\left(\frac{n\sin(\pi z)\cos(\pi n)}{n^2-z^2}\right)
\end{aligned}$$

Plugging $b_n$ in (2.89),

$$\begin{aligned}
\sin(zx) &= -\frac{2\sin(\pi z)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)n\sin(nx)}{n^2-z^2} \\
&= -\frac{2\sin(\pi z)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n\sin(nx)}{n^2-z^2}
\end{aligned}$$

### 2.7.6 Fourier Series of $\ln(\sin(x))$

Let $0<x<\pi$. Then the following identity holds:

$$\ln(\sin(x)) = -\ln(2)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{n} \tag{2.90}$$

Proof (i). Notice that $\ln|\sin(x)|$ is an even function and has a period of $\pi$, since $\ln|\sin(x)| = \ln|\sin(x+\pi)|$ and so $L = \frac{\pi}{2}$. Thus, based on (2.84), its Fourier expansion is given by

$$\ln|\sin(x)| = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2nx), \tag{2.91}$$

where

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln|\sin(x)|\mathrm{d}x, \quad a_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln|\sin(x)|\cos(2nx)\mathrm{d}x$$

We have

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln|\sin(x)|\mathrm{d}x \\ &\{\text{ note that } \ln|\sin(x)| = \ln(\sin(x)) \text{ for } 0 < x < \pi\} \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\mathrm{d}x \\ &\{\text{ this integral is given in (3.89)}\} \\ &= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\ln(2)\right) = -\ln(2) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln|\sin(x)|\cos(2nx)\mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\cos(2nx)\mathrm{d}x \\ &\overset{\text{IBP}}{=\!=} \underbrace{\frac{4}{2\pi n}\sin(2nx)\ln(\sin(x))\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{0} - \frac{1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2nx)\cot(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

{this integral is given in (3.88)}

$$= -\frac{1}{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{4n}$$

Plug $a_0$ and $a_n$ in (2.91),

$$\ln|\sin(x)| = -\ln(2) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{n}$$

The proof follows on noticing that $\ln|\sin(x)| = \ln(\sin(x))$ for $0 < x < \pi$.
Proof (ii). By considering the real parts of Euler's formula (1.19), we have

$$\cos(x) = \Re e^{ix}$$

Therefore,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{n} = \Re\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2inx}}{n} = \Re\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(e^{2ix}\right)^n}{n}$$

$$
\begin{gathered}
= -\Re \ln\left(1 - e^{2ix}\right) \\
\left\{ \text{ write } e^{2ix} = \cos(2x) + i\sin(2x) \right\} \\
= -\Re \ln(1 - \cos(2x) - i\sin(2x)) \\
\left\{ \text{ use } \ln(x+iy) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) + i\arctan\left(\frac{y}{x}\right), x>0 \text{ given in (1.18)} \right\} \\
\{ \text{ since } 1-\cos(2x) > 0 \text{ for } 0 < x < \pi \} \\
= -\Re \left\{ \frac{1}{2}\ln\left[(1-\cos(2x))^2 + \sin^2(2x)\right] + i\arctan\left(\frac{-\sin(2x)}{1-\cos(2x)}\right) \right\} \\
\left\{ \text{ use } 1-\cos(2x) = 2\sin^2(x) \text{ and } \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \right\} \\
= -\Re \left\{ \frac{1}{2}\ln\left[4\sin^4 x + 4\sin^2(x)\cos^2(x)\right] + i\arctan\left(\frac{-2\sin(x)\cos(x)}{2\sin^2(x)}\right) \right\} \\
= -\Re \left\{ \frac{1}{2}\ln\left[4\sin^2(x)\left(\sin^2(x)+\cos^2(x)\right)\right] + i\arctan(-\cot(x)) \right\} \\
\left\{ \text{ write } \arctan(-\cot(x)) = \arctan\left(-\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) = -\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \right\} \\
= -\Re \left\{ \frac{1}{2}\ln(2\sin(x))^2 - i\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \right\} \\
= \Re \left\{ -\ln(2\sin(x)) + i\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \right\} \qquad (2.92) \\
= -\ln(2) - \ln(\sin(x))
\end{gathered}
$$

Additionally, by considering the imaginary parts in (2.92), we see that

$$\frac{\pi}{2} - x = \Im \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2inx}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2nx)}{n}$$

Replace $x$ with $\frac{x}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}, \quad 0 < x < 2\pi.$$

This identity is very useful. To show that, integrate both sides with respect to $x$,

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{\pi}{2}x - \frac{x^2}{4} + c.$$

To find the constant $c$, set $x = 0$,

$$c = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\zeta(2) = -\frac{\pi^2}{6}.$$

Therefore,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi^2}{6}, \quad 0 \le x \le 2\pi$$

Integrating the latter identity from $x = 0$ to $x$ gives

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3} = \frac{x^3}{12} - \frac{\pi}{4}x^2 + \frac{\pi^2}{6}x, \quad 0 \le x \le 2\pi$$

and so on.

### 2.7.7 Fourier Series of $\ln(\cos(x))$

Let $|x| < \frac{\pi}{2}$. Then the following identity holds:

$$\ln(\cos(x)) = -\ln(2) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(2nx)}{n} \tag{2.93}$$

Proof (i). Let $x = \frac{\pi}{2} - y$ in (2.90) then write $\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \cos(y)$, we get

$$\begin{gathered}
\ln(\cos(y)) = -\ln(2) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n - 2ny)}{n} \\
\{\text{ use } \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\} \\
= -\ln(2) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n)\cos(2ny) + \sin(\pi n)\sin(2ny)}{n} \\
= -\ln(2) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(2nx)}{n}
\end{gathered}$$

Proof (ii).

$$\begin{gathered}
\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(2nx)}{n} = \Re \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{2inx}}{n} \\
\textstyle = \Re \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-e^{2ix}\right)^n}{n} \\
= -\Re \ln\left(1 + e^{2ix}\right) \\
= -\Re \ln(1 + \cos(2x) + i\sin(2x)) \\
\left\{ \text{ use } \ln(x+iy) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right) + i\arctan\left(\frac{y}{x}\right), x > 0 \text{ given in (1.18)} \right\} \\
\\
\{\text{ since } 1 + \cos(2x) > 0 \text{ for } |x| < \pi/2\} \\
= -\Re\left\{\frac{1}{2}\ln\left[(1+\cos(2x))^2 + \sin^2(2x)\right] + i\arctan\left(\frac{\sin(2x)}{1+\cos(2x)}\right)\right\} \\
\left\{\text{ use } 1 + \cos(2x) = 2\cos^2(x) \text{ and } \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)\right\} \\
= -\Re\left\{\frac{1}{2}\ln\left[4\cos^4(x) + 4\sin^2(x)\cos^2(x)\right] + i\arctan\left(\frac{2\sin(x)\cos(x)}{2\cos^2(x)}\right)\right\} \\
= -\Re\left\{\frac{1}{2}\ln\left[4\cos^2(x)\left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right)\right] + i\arctan(\tan(x))\right\} \\
= -\Re\left\{\frac{1}{2}\ln(2\cos(x))^2 + ix\right\} \\
= \Re\{-\ln(2\cos(x)) - ix\} \qquad (2.94) \\
= -\ln(2\cos(x)) \\
= -\ln(2) - \ln(\cos(x))
\end{gathered}$$

### 2.7.8 Fourier Series of $\ln(\tan(x))$

Let $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Then the following identity holds:

$$\ln(\tan(x)) = -2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos((4n+2)x)}{2n+1} \tag{2.95}$$

Proof. Set $a_n = \frac{\cos(2nx)}{n}$ in (1.8):

$$2\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}a_n - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n,$$

we have

$$\begin{aligned}
2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(4n+2)x)}{2n+1} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(2nx)}{n} \\
&\{\text{ collect the results (2.90) and (2.93)}\} \\
&= -\ln(2) - \ln(\sin(x)) - (-\ln(2) - \ln(\cos(x))) \\
&= -\ln(\sin(x)) + \ln(\cos(x)) \\
&= -\ln(\tan(x))
\end{aligned}$$

### 2.7.9 Series Representation of $\cot(\pi z)$

Let $z \notin \mathbb{Z}$. Then the following identity holds:

$$\pi z\cot(\pi z) = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^2}{n^2-z^2} \tag{2.96}$$

Proof. Set $x = \pi$ in (2.86),

$$\cos(\pi z) = \frac{2z\sin(\pi z)}{\pi}\left(\frac{1}{2z^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(n\pi)}{n^2-z^2}\right)$$

Make use of $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\pi) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ to finish the proof.
If we replace $z$ with $iz$ in (2.96) and use $\cot(iz) = -i\coth(z)$, we obtain

$$\pi z\coth(\pi z) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^2}{n^2+z^2}, \quad z \neq \mathbb{Z}i \tag{2.97}$$

### 2.7.10 Series Representation of $\csc(\boldsymbol{\pi z})$

Let $z \neq \mathbb{Z}$. Then the following identity holds:

$$\pi z\csc(\pi z) = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^2}{n^2-z^2} \tag{2.98}$$

Proof. Set $x = 0$ in (2.86).
A different series representation for this function is

$$\pi z\csc(\pi z) = 2\sum_{k=0}^{\infty}\eta(2k)z^{2k} \tag{2.99}$$

This can be demonstrated by manipulating the series in (2.98):

$$
\begin{aligned}
\pi z \csc(\pi z) &= 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^2}{n^2 - z^2} \\
&= 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^2/n^2}{1 - z^2/n^2} \\
&= 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \sum_{k=1}^{\infty} \left(z^2/n^2\right)^k \right) \\
&= 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} z^{2k} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2k}} \right) \\
&= 1 - 2\sum_{k=1}^{\infty} z^{2k}(-\eta(2k)) \\
&= 2\left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \eta(2k) z^{2k} \right)
\end{aligned}
$$

{substitute $1/2 = \eta(0)$ given in (1.54)}

$$
= 2\sum_{k=0}^{\infty} \eta(2k) z^{2k}.
$$

Another form is the Euler's Product Formula of $\csc(\pi z)$ :

$$
\pi z \csc(\pi z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n^2 - z^2}{n^2} \right)^{-1}, \quad z \notin \mathbb{Z} \tag{2.100}
$$

To prove it, divide both sides of (2.96) by $z$ then integrate from $z = 0$ to $x$,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{2z}{n^2 - z^2}\, \mathrm{d}z &= \int_0^x \left( \frac{1}{z} - \pi \cot(\pi z) \right) \mathrm{d}z \\
&= \ln(z) + \ln \csc(\pi z)\big|_0^x \\
&= \ln(x \csc(\pi x)) - \lim_{z \to 0} \ln(z \csc(\pi z)) \\
&\left\{ \text{ use } \lim_{z \to 0} z \csc(\pi z) = 1/\pi \right\} \\
&= \ln(x \csc(\pi x)) + \ln(\pi) \\
&= \ln(\pi x \csc(\pi x))
\end{aligned}
$$

For the sum,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{2z}{n^2 - z^2}\, \mathrm{d}z &= \sum_{n=1}^{\infty} - \ln\left(n^2 - z^2\right)\big|_0^x \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( \frac{n^2 - x^2}{n^2} \right)^{-1}
\end{aligned}
$$

{make use of the rule (1.15)}

$$
= \ln \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n^2 - x^2}{n^2} \right)^{-1}.
$$

Thus, we have

$$\ln \prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n^2 - x^2}{n^2} \right)^{-1} = \ln(\pi x \csc(\pi x)).$$

Exponentiating both sides with base $e$ completes the proof.

Replace $z$ with $iz$ in (2.98) and (2.100) then use $\csc(iz) = -i \operatorname{csch}(z)$,

$$\pi z \operatorname{csch}(\pi z) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^2}{n^2 + z^2}, \quad z \neq \mathbb{Z}i \tag{2.101}$$

$$\pi z \operatorname{csch}(\pi z) = -\prod_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n^2 + z^2}{n^2} \right)^{-1}, \quad z \neq \mathbb{Z}i \tag{2.102}$$

### 2.7.11 Series Representation of $\sec\left(\frac{\pi}{2}z\right)$

Let $z \neq 2\mathbb{Z} + 1$. Then the following identity holds:

$$\sec\left(\frac{\pi}{2}z\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n+1)^2 - z^2} \tag{2.103}$$

Proof. Set $x = \frac{\pi}{2}$ in (2.88), we obtain

$$\begin{aligned} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)}{\sin(\pi z)} &= -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{n^2 - z^2} \\ &\left\{ \text{ use } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n+1} \text{ given in (1.14) } \right\} \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n+1)^2 - z^2} \end{aligned}$$

The proof completes on writing

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)}{\sin(\pi z)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}z\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{2}z\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)} = \frac{1}{2} \sec\left(\frac{\pi}{2}z\right).$$

Replace $z$ with $iz$ then use $\sec(iz) = \operatorname{sech}(z)$,

$$\operatorname{sech}\left(\frac{\pi}{2}z\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n+1)^2 + z^2}, \quad z \neq (2\mathbb{Z} + 1)i \tag{2.104}$$

### 2.7.12 Series Representation of $\sin(x)$

Let $|x| < \frac{\pi}{2}$. Then the following identity holds:

$$\sin(x) = -\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n \sin(2nx)}{4n^2 - 1}. \tag{2.105}$$

Proof. The proof follows from (2.88) on setting $z = \frac{1}{2}$ then replacing $x$ with $2x$.

**2.7.13 Series Representation of** $\tan(x)\ln(\sin(x))$

Let $0 < x < \pi$. Then the following identity holds:

$$\tan(x)\ln(\sin(x)) = -\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^1 \frac{1-t}{1+t}t^{n-1}\,\mathrm{d}t\right)\sin(2nx) \tag{2.106}$$

The following proof is due to Cornel Vălean [32, p. 243]:
Proof. By the change of variable $t = e^{-2y}$, we have

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^1 \frac{1-t}{1+t}t^{n-1}\,\mathrm{d}t\right)\sin(2nx)\\
=&2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\infty} \frac{1-e^{-2y}}{1+e^{-2y}}e^{-2ny}\,\mathrm{d}y\right)\sin(2nx)\\
=&2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\infty} \tanh(y)e^{-2ny}\,\mathrm{d}y\right)\sin(2nx)\\
=&2\int_0^{\infty}\tanh(y)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sin(2nx)e^{-2ny}\right)\mathrm{d}y\\
=&2\int_0^{\infty}\tanh(y)\left(\Im\sum_{n=1}^{\infty}e^{2inx}e^{-2ny}\right)\mathrm{d}y\\
=&\,2\int_0^{\infty}\tanh(y)\left(\Im\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{2ix-2y}\right)^n\right)\mathrm{d}y\\
=&\,2\int_0^{\infty}\tanh(y)\left(\Im\frac{e^{2ix-2y}}{1-e^{2ix-2y}}\right)\mathrm{d}y\\
=&\,2\int_0^{\infty}\tanh(y)\left(\frac{1}{2}\frac{\sin(2x)}{\cosh(2y)-\cos(2x)}\right)\mathrm{d}y\\
=&\,\sin(2x)\int_0^{\infty}\frac{\sinh(y)}{\cosh(y)\left(2\cosh^2(y)-1-\cos(2x)\right)}\mathrm{d}y\\
&\{\text{set} \cosh(y) = 1/t\}\\
=&\,\sin(2x)\int_0^1 \frac{t}{2-(1+\cos(2x))t^2}\,\mathrm{d}t\\
&\{\text{ use } 1+\cos(2x) = 2\cos^2(x)\}\\
=&\,\frac{1}{2}\sin(2x)\int_0^1\frac{t}{1-\cos^2(x)t^2}\,\mathrm{d}t\\
=&\,\frac{1}{2}\sin(2x)\left[-\frac{\ln\left(1-\cos^2(x)t^2\right)}{2\cos^2(x)}\right]_{t=0}^{t=1}\\
=&-\frac{1}{2}\cdot 2\sin(x)\cos(x)\left(\frac{\ln(\sin(x))}{\cos^2(x)}\right)\\
=&-\tan(x)\ln\left(\sin^2(x)\right)
\end{aligned}$$

Note that the value $x = \frac{\pi}{2}$ is included in the domain of $\tan(x)\ln(\sin(x))$ since $\lim_{x\to 0}\tan(x)\ln(\sin(x)) = 0$ by L'Hôpital's rule.

Further, by letting $x \to \frac{\pi}{2} - x$ in (2.106) and using $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(x), \tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cot(x)$, and $\sin\left(2n\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) = -(-1)^n\sin(2nx)$ for integer $n$, we get

$$\cot(x)\ln(\cos(x)) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\int_0^1 \frac{1-t}{1+t} t^{n-1}\, \mathrm{d}t\right) \sin(2nx), \quad |x| < \frac{\pi}{2} \tag{2.107}$$

Keep in mind that $\lim_{x\to 0}\cot(x)\ln(\cos(x)) = 0$ justifies why the value $x = 0$ is included in the domain of the function. Additionally, by using the identity

$$\begin{aligned}
\tan(x)\ln(\sin(x)) + \cot(x)\ln(\cos(x)) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\ln(\sin(x)) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\ln(\cos(x)) \\
&= \frac{\sin^2(x)\ln(\sin(x)) + \cos^2(x)\ln(\cos(x))}{\sin(x)\cos(x)} \\
&= \frac{\sin^2(x)\ln(\sin(x)) + \left(1-\sin^2(x)\right)\ln(\cos(x))}{\sin(x)\cos(x)} \\
&= \frac{\sin^2(x)(\ln(\sin(x)) - \ln(\cos(x))) + \ln(\cos(x))}{\sin(x)\cos(x)} \\
&= \tan(x)\ln(\tan(x)) + 2\csc(2x)\ln(\cos(x))
\end{aligned}$$

we find, for $0 < x < \frac{\pi}{2}$, that

$$\begin{aligned}
&\tan(x)\ln(\tan(x)) + 2\csc(2x)\ln(\cos(x)) \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty}(1-(-1)^n)\left(\int_0^1 \frac{1-t}{1+t} t^{n-1}\, \mathrm{d}t\right)\sin(2nx) \\
&\qquad \{\text{make use of (1.8)}\} \\
&= -2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^1 \frac{1-t}{1+t} t^{2n}\, \mathrm{d}t\right)\sin((4n+2)x).
\end{aligned} \tag{2.108}$$

### 2.7.14 Series Representation of $\ln^2(2\cos(x))$

Let $|x| < \frac{\pi}{2}$. Then the following identity holds:

$$\ln^2(2\cos(x)) = x^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{H_{n-1}}{n}\cos(2nx). \tag{2.109}$$

Proof. Since $\cos(x) = \Re e^{ix}$, we have

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{H_{n-1}}{n}\cos(2nx) &= \Re \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{H_{n-1}}{n} e^{2inx} \\
&= \Re \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}}{n}\left(-e^{2ix}\right)^n \\
&\{\text{replace } x \text{ with } -e^{2ix} \text{ in the generating function (2.7)}\} \\
&= \frac{1}{2}\Re \ln^2\left(1+e^{2ix}\right) \\
&\{\text{ recall the result of } \ln\left(1+e^{2ix}\right) \text{ from (2.94)}\} \\
&= \frac{1}{2}\Re(\ln(2\cos(x)) + ix)^2 \\
&= \frac{1}{2}\Re\left(\ln^2(2\cos(x)) + 2ix\ln(2\cos(x)) - x^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln^2(2\cos(x)) - \frac{x^2}{2}
\end{aligned}$$

If we replace $x$ with $\frac{\pi}{2}-x$ in (2.109) using $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)$ and $\left(\cos\left(2n\left(\frac{\pi}{2}- \quad x\right)\right)=\right.$ $(-1)^n\cos(2nx)$ for integer $n$, we have

$$\ln^2(2\sin(x))=\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n-1}}{n}\cos(2nx),\quad 0<x<\pi \tag{2.110}$$

### 2.7.15 Series Representation of $\ln^3(2\cos(x))$

Let $|x|<\frac{\pi}{2}$. Then the following identity holds:

$$\ln^3(2\cos(x))=3x^2\ln(2\cos(x))-3\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{H_{n-1}^2-H_{n-1}^{(2)}}{n}\cos(2nx) \tag{2.111}$$

**Proof**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_{n-1}^2-H_{n-1}^{(2)}\right)\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_{n-1}^2-H_{n-1}^{(2)}\right)\int_0^x x^{n-1}\,\mathrm{d}x$$

{let the index start from 2 then shift it by $+1$ }

$$=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^2-H_n^{(2)}\right)x^n\right)\mathrm{d}x$$

{recall the generating function (2.60)}

$$=\int_0^x\left(\frac{\ln^2(1-x)}{1-x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{3}\ln^3(1-x)$$

Replace $x$ with $-e^{2ix}$ then consider the real parts using $\Re\left\{e^{2inx}\right\}=\cos(2nx)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{H_{n-1}^2-H_{n-1}^{(2)}}{n}\cos(2nx)=-\frac{1}{3}\Re\ln^3\left(1+e^{2ix}\right)$$

$$=-\frac{1}{3}\Re(\ln(2\cos(x))+ix)^3$$

$$=-\frac{1}{3}\left(-3x^2\ln(2\cos(x))+\ln^3(2\cos(x))\right)$$

If we replace $x$ with $\frac{\pi}{2}-x$ in (2.109), we obtain

$$\ln^3(2\sin(x))=3\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2\ln(2\sin(x))-3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n-1}^2-H_{n-1}^{(2)}}{n}\cos(2nx). \tag{2.112}$$

### 2.7.16 Series Representation of $\ln^a(2\cos(x))$

Let $|x|<\frac{\pi}{2}$ and $a\in\mathbb{Z}_{>1}$. Then the following identity holds:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{a}{2}\rfloor}\binom{a}{2k}\left(-x^2\right)^k\ln^{a-2k}(2\cos(x))$$
$$=(-1)^a a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}f(a-1,n-1)\cos(2nx), \tag{2.113}$$

where

$$f(a,n)=(-1)^{a-1}(a-1)!\left(H_n^{(a)}+\sum_{j=1}^{a-1}\frac{(-1)^j}{j!}f(j,n)H_n^{(a-j)}\right)$$

Proof. Applying the previous proof,

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(a-1,n-1)\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}f(a-1,n-1)\int_0^x x^{n-1}\ \mathrm{d}x$$

{let the index start from 2 then shift it by $+1$ }

$$=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}f(a-1,n)x^n\right)\mathrm{d}x$$

{recall the generating function (2.60)}

$$=\int_0^x\left((-1)^{a-1}\frac{\ln^{a-1}(1-x)}{1-x}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{(-1)^a}{a}\ln^a(1-x)$$

Replace $x$ with $-e^{2ix}$ then consider the real parts,

$$(-1)^a a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(a-1,n-1)(-1)^n}{n}\cos(2nx)=\Re\left\{\ln^a\left(1+e^{2ix}\right)\right\}$$
$$=\Re\{\ln(2\cos(x))+ix\}^a$$
$$\left\{\text{ use the binomial theorem } (x+y)^a=\sum_{k=0}^{a}\binom{a}{k}y^{a-k}x^k\right\}$$
$$=\Re\sum_{k=0}^{a}\binom{a}{k}(ix)^k\ln^{a-k}(2\cos(x))$$
$$\left\{\text{ use } \sum_{k=0}^{a}f(k)=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{a}{2}\rfloor}f(2k)+\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{a-1}{2}\rfloor}f(2k+1)\right\}$$
$$=\Re\left\{\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{a}{2}\rfloor}\binom{a}{2k}(-1)^k x^{2k}\ln^{a-2k}(2\cos(x))\right.$$
$$\left.+i\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{a-1}{2}\rfloor}\binom{a}{2k+1}(-1)^k x^{2k+1}\ln^{a-2k-1}(2\cos(x))\right\}$$

{ignore the second sum since we are after the real part}

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor} \binom{a}{2k} \left(-x^2\right)^k \ln^{a-2k}(2\cos(x)).$$

**Examples:**

$$\ln^2(2\cos(x)) - x^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{H_{n-1}}{n}\cos(2nx)$$

$$\ln^3(2\cos(x)) - 3x^2\ln(2\cos(x)) = -3\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{H_{n-1}^2 - H_{n-1}^{(2)}}{n}\cos(2nx)$$

$$\ln^4(2\cos(x)) - 6x^2\ln^2(2\cos(x)) + x^4$$

$$= 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{H_{n-1}^3 - 3H_{n-1}H_{n-1}^{(2)} + 2H_{n-1}^{(3)}}{n}\cos(2nx)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln_{n-1}^4(2\cos(x)) - 10x^2\ln^3(2\cos(x)) + 5x^4\ln(2\cos(x))}{(-1)^n n}$$

Let's integrate both sides of (2.113) from $x = 0 \to \frac{\pi}{2}$ to get

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor} \binom{a}{2k} \left(-x^2\right)^k \ln^{a-2k}(2\cos(x)) \right) \mathrm{d}x$$

$$=(-1)^a a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} f(a-1, n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2nx)\mathrm{d}x$$

$$=(-1)^a a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} f(a-1, n-1) \frac{\sin(n\pi)}{2n}.$$

Since $\sin(n\pi) = 0$ for integer $n$, the integral simplifies to

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor} \binom{a}{2k} \left(-x^2\right)^k \ln^{a-2k}(2\cos(x)) \right) \mathrm{d}x = 0 \tag{2.114}$$

Replacing $x$ with $\frac{\pi}{2} - x$ in (2.109) and (2.114) gives

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor} \binom{a}{2k} (-1)^k \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{2k} \ln^{a-2k}(2\sin(x))$$

$$= (-1)^a a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(a-1, n-1)}{n}\cos(2nx)$$

and

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{a}{2} \rfloor} \binom{a}{2k} (-1)^k \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{2k} \ln^{a-2k}(2\sin(x)) \right) \mathrm{d}x = 0$$

## 6.6 3. Logarithmic Integrals

### 6.6.1 3.1 Generalized Logarithmic Integrals

3.1.1 $\int_0^1 \frac{x^{2s}}{1+x}\,\mathrm{d}x$
Let $\Re(s) > -\frac{1}{2}$. Then the following identity holds:

$$\int_0^1 \frac{x^{2s}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln(2) + H_s - H_{2s}. \tag{3.1}$$

Proof.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^{2s}}{1+x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1-1+x^{2s}}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} - \int_0^1 \frac{1-x^{2s}}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ &\left\{\text{write } \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1-x^2}\right\} \\ &= \ln(2) - \int_0^1 \frac{1-x^{2s}}{1-x}\,\mathrm{d}x + \underbrace{\int_0^1 \frac{2x\left(1-x^{2s}\right)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x}_{x=\sqrt{y}} \\ &= \ln(2) - \int_0^1 \frac{1-x^{2s}}{1-x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1-y^s}{1-y}\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

{recall the integral form of the harmonic number (1.123)}

$$= \ln(2) - H_{2s} + H_s.$$

Moreover, forcing integration by part yields

$$\int_0^1 \frac{x^{2s}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln(2) - 2s\int_0^1 x^{2s-1}\ln(1+x)\mathrm{d}x$$

or

$$\int_0^1 x^{2s-1}\ln(1+x)\mathrm{d}x = \frac{H_{2s}-H_s}{2s} \tag{3.2}$$

An alternative proof for (3.2) may be found in [28].
Let's replace $2s$ with $s$ in (3.1),

$$\int_0^1 \frac{x^s}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln(2) + H_{\frac{s}{2}} - H_s \tag{3.3}$$

This integral can be expressed in a different closed form:

$$\int_0^1 \frac{x^s}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(H_{\frac{s}{2}} - H_{\frac{s-1}{2}}\right), \quad \Re(s) > -1 \tag{3.4}$$

To show that, use the integral form of the harmonic number,

$$
\begin{aligned}
H_{\frac{s}{2}} - H_{\frac{s-1}{2}} &= \int_0^1 \frac{1-x^{\frac{s}{2}}}{1-x}\ \mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1-x^{\frac{s-1}{2}}}{1-x}\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{x^{\frac{s-1}{2}} - x^{\frac{s}{2}}}{1-x}\ \mathrm{d}x \\
&\overset{x=y^2}{=} 2\int_0^1 \frac{y^s - y^{s+1}}{1-y^2}\ \mathrm{d}y \\
&=2\int_0^1 \frac{y^s(1-y)}{1-y^2}\ \mathrm{d}y \\
&= 2\int_0^1 \frac{y^s}{1+y}\ \mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

Employing $H_s = \psi(s+1) + \gamma$ given in (1.146) yields

$$
\begin{aligned}
H_{\frac{s}{2}} - H_{\frac{s-1}{2}} &= \psi\left(\frac{s+2}{2}\right) + \gamma - \left(\psi\left(\frac{s+1}{2}\right) + \gamma\right) \\
&= \psi\left(\frac{s+2}{2}\right) - \psi\left(\frac{s+1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Consequently,

$$
\int_0^1 \frac{x^s}{1+x}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\psi\left(\frac{s+2}{2}\right) - \frac{1}{2}\psi\left(\frac{s+1}{2}\right) \tag{3.5}
$$

If we replace $s$ with $2s$ in (3.4), and then comparing it with (3.1) and, we see that

$$
H_{s-\frac{1}{2}} = 2H_{2s} - H_s - 2\ln(2) \tag{3.6}
$$

### 3.1.2 $\int_0^1 x^{2s-1} \operatorname{arctanh}(x)\mathrm{d}x$

Let $\Re(s) > -\frac{1}{2}$. Then the following identity holds:

$$
\int_0^1 x^{2s-1} \operatorname{arctanh}(x)\mathrm{d}x = \frac{2H_{2s} - H_s}{4s} \tag{3.7}
$$

Proof. By writing $\operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1-x)$, we have

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 x^{2s-1} \operatorname{arctanh}(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 x^{2s-1}\ln(1+x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1 x^{2s-1}\ln(1-x)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

{collect the results (3.2) and (1.124)}

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{H_{2s} - H_s}{2s} + \frac{1}{2}\cdot\frac{H_{2s}}{2s} \\
&= \frac{2H_{2s} - H_s}{4s}
\end{aligned}
$$

### 3.1.3 $\int_0^1 \frac{\ln^q(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$

Let $q \in \mathbb{Z}^+$. Then the following identity holds:

$$\int_0^1 \frac{\ln^q(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = (-1)^q q!\zeta(q+1) \tag{3.8}$$

Proof. Expand $\frac{1}{1-x}$ in series then interchange integration and summation,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln^q(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 x^{n-1}\ln^q(x)\mathrm{d}x \\ &\{\text{make use of (1.36)}\} \\ &= (-1)^q q!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{q+1}} \\ &= (-1)^q q!\zeta(q+1).\end{aligned}$$

**Examples:**

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x &= -\zeta(2); \\ \int_0^1 \frac{\ln^2(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x &= 2\zeta(3); \\ \int_0^1 \frac{\ln^3(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x &= -6\zeta(4); \\ \int_0^1 \frac{\ln^4(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x &= 24\zeta(5).\end{aligned}$$

The following two integrals are related:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(x)\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x &\overset{\text{IBP}}{=} \frac{1}{q}\int_0^1 \frac{\ln^q(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x \\ &= (-1)^q (q-1)!\zeta(q+1) \qquad (3.9) \\ \int_0^1 \frac{x\ln^q(x)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x &\overset{x=\sqrt{y}}{=} \frac{1}{2^{q+1}}\int_0^1 \frac{\ln^q(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{(-1)^q q!}{2^{q+1}}\zeta(q+1) \qquad (3.10)\end{aligned}$$

### 3.1.4 $\int_0^1 \frac{\ln^q(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x$

Let $q \in \mathbb{Z}^+$. Then the following identity holds:

$$\int_0^1 \frac{\ln^q(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = (-1)^q q!\left(1-\frac{1}{2^q}\right)\zeta(q+1) \tag{3.11}$$

Proof. By writing

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1-x^2}$$

we get

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln^q(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{\ln^q(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x - \underbrace{\int_0^1 \frac{2x\ln^q(x)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x}_{x^2\to x} \\
&= \int_0^1 \frac{\ln^q(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2^q}\int_0^1 \frac{\ln^q(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left(1-\frac{1}{2^q}\right)\int_0^1 \frac{\ln^q(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

This integral is given in (3.8).

**Examples:**

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\zeta(2) \\
\int_0^1 \frac{\ln^2(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x &= \frac{3}{2}\zeta(3) \\
\int_0^1 \frac{\ln^3(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x &= -\frac{21}{4}\zeta(4) \\
\int_0^1 \frac{\ln^4(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x &= \frac{45}{2}\zeta(5)
\end{aligned}
$$

The following two integrals are related:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(x)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x &\overset{\text{IBP}}{=} \frac{-1}{q}\int_0^1 \frac{\ln^q(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= (-1)^{q-1}(q-1)!\left(1-\frac{1}{2^q}\right)\zeta(q+1) \qquad (3.12) \\
\int_0^1 \frac{x\ln^q(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &\overset{x=\sqrt{y}}{=} \frac{1}{2^{q+1}}\int_0^1 \frac{\ln^q(y)}{1+y}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{(-1)^q q!}{2^{q+1}}\left(1-\frac{1}{2^q}\right)\zeta(q+1) \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

### 3.1.5 $\int_0^1 \frac{\ln^q(x)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

Let $q \in \mathbb{Z}^+$. Then the following identity holds:

$$
\int_0^1 \frac{\ln^q(x)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = (-1)^q q!\left(1-\frac{1}{2^{q+1}}\right)\zeta(q+1). \qquad (3.14)
$$

Proof. By writing

$$
\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x^2},
$$

we get

$$\int_0^1 \frac{\ln^q(x)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\ln^q(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x - \underbrace{\int_0^1 \frac{x\ln^q(x)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x}_{x\to\sqrt{x}}$$
$$= \int_0^1 \frac{\ln^q(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2^{q+1}}\int_0^1 \frac{\ln^q(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \left(1-\frac{1}{2^{q+1}}\right)\int_0^1 \frac{\ln^q(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$$
$$= (-1)^q q!\left(1-\frac{1}{2^{q+1}}\right)\zeta(q+1)$$

**Examples:**

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{4}\zeta(2)$$
$$\int_0^1 \frac{\ln^2(x)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{7}{4}\zeta(3)$$
$$\int_0^1 \frac{\ln^3(x)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{45}{8}\zeta(4)$$
$$\int_0^1 \frac{\ln^4(x)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{93}{4}\zeta(5)$$

The following two integrals are related:
By making the substitution $\frac{1-x}{1+x} = y$, we get

$$\int_0^1 \frac{\ln^q\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{\ln^q(y)}{1-y^2}\,\mathrm{d}y$$
$$= 2(-1)^q q!\left(1-\frac{1}{2^{q+1}}\right)\zeta(q+1) \tag{3.15}$$

By integration by parts, we have

$$\int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\ln^{q-1}(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{q}\int_0^1 \frac{\ln^q(x)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= 2(-1)^q (q-1)!\left(1-\frac{1}{2^{q+1}}\right)\zeta(q+1) \tag{3.16}$$

### 3.1.6 $\int_0^1 \frac{\ln^q(1-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x$

Let $q \in \mathbb{Z}^+$. Then the following identity holds:

$$\int_0^1 \frac{\ln^q(1-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = (-1)^q q!\,\mathrm{Li}_{q+1}\left(\frac{1}{2}\right) \tag{3.17}$$

Proof. We begin with the change of variable $1-x=t$,

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln^q(1-x)}{1+x}\ \mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{\ln^q(t)}{2-t}\ \mathrm{d}t \\
&\left\{\text{expand } \frac{1}{2-t} \text{ in series as } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{2^n}\right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_0^1 t^{n-1} \ln^q(t)\mathrm{d}t \\
&\{\text{make use of (1.36)}\} \\
&= (-1)^q q! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^{q+1}} \\
&= (-1)^q q! \operatorname{Li}_{q+1}\left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

**Examples:**

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{1+x}\ \mathrm{d}x &= -\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\zeta(2) + \frac{1}{2}\ln^2(2) \\
\int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{1+x}\ \mathrm{d}x &= 2\operatorname{Li}_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4}\zeta(3) - \ln(2)\zeta(2) + \frac{1}{3}\ln^3(2) \\
\int_0^1 \frac{\ln^3(1-x)}{1+x}\ \mathrm{d}x &= -6\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) \\
\int_0^1 \frac{\ln^4(1-x)}{1+x}\ \mathrm{d}x &= 24\operatorname{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

The values of $\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)$ and $\operatorname{Li}_3\left(\frac{1}{2}\right)$ are given in (1.81) and (1.92).

### 3.1.7 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{z\ln^q(x)}{1-zx}\ \mathrm{d}x$

Let $q \in \mathbb{Z}^+$and $z \in \mathbb{C}\backslash[2,\infty)$. Then the following identity holds:

$$
\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{z\ln^q(x)}{1-zx}\ \mathrm{d}x = (-1)^q q! \sum_{k=0}^{q} \frac{\ln^{q-k}(2)}{(q-k)!} \operatorname{Li}_{k+1}\left(\frac{z}{2}\right). \tag{3.18}
$$

Proof. Let $y = 2x$,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{z\ln^q(x)}{1-zx}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\frac{z}{2}[\ln(y)-\ln(2)]^q}{1-\frac{z}{2}y}\,\mathrm{d}y$$

$$\left\{\text{use the binomial theorem } (x-y)^q = \sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}(-y)^{q-k}x^k\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}(-\ln(2))^{q-k}\int_0^1 \frac{\frac{z}{2}\ln^k(y)}{1-\frac{z}{2}y}\,\mathrm{d}y$$

$$\{\text{ use the definition (1.75)}\}$$

$$= \sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}(-\ln(2))^{q-k}(-1)^k k!\,\mathrm{Li}_{k+1}\left(\frac{z}{2}\right)$$

$$= (-1)^q q!\sum_{k=0}^{q}\frac{\ln^{q-k}(2)}{(q-k)!}\,\mathrm{Li}_{k+1}\left(\frac{z}{2}\right)$$

Setting $z=1$ yields

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^q(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = (-1)^q q!\sum_{k=0}^{q}\frac{\ln^{q-k}(2)}{(q-k)!}\,\mathrm{Li}_{k+1}\left(\frac{1}{2}\right). \tag{3.19}$$

**Examples:**

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\zeta(2)-\frac{1}{2}\ln^2(2);$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^2(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = \frac{7}{4}\zeta(3)+\frac{1}{3}\ln^3(2);$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^3(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln^2(2)\zeta(2)-\frac{21}{4}\ln(2)\zeta(3)-\frac{1}{2}\ln^4(2)-6\,\mathrm{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right);$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^4(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = \frac{21}{2}\ln^2(2)\zeta(3)-4\ln^3(2)\zeta(2)+\ln^5(2)+24\ln(2)\,\mathrm{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$+24\mathrm{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right)$$

### 3.1.8 $\int_0^1 \frac{\ln^q(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$

Let $q\in\mathbb{Z}^+$. Then the following identity holds:

$$\int_0^1 \frac{\ln^q(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln^{q+1}(2)}{q+1}+q!\zeta(q+1)-q!\sum_{k=0}^{q}\frac{\ln^{q-k}(2)}{(q-k)!}\,\mathrm{Li}_{k+1}\left(\frac{1}{2}\right) \tag{3.20}$$

The following proof is due to Kam Au [2, p. 4]:
Proof. Putting $\frac{1}{1+x}=y$,

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln^q(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x &= (-1)^q \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln^q(y)}{y(1-y)}\mathrm{d}y \\
&= (-1)^q \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln^q(y)}{y}\,\mathrm{d}y + (-1)^q \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln^q(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y}_{\int_0^1 - \int_0^{1/2}} \\
&= (-1)^q \left((-1)^q \frac{\ln^{q+1}(2)}{q+1}\right) + (-1)^q \left(\int_0^1 \frac{\ln^q(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^q(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y\right).
\end{aligned}
$$

The proof follows on substituting the results (3.8) and (3.19).

**Examples:**

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\zeta(2) \\
\int_0^1 \frac{\ln^2(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\zeta(3) \\
\int_0^1 \frac{\ln^3(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x &= 6\zeta(4) - \frac{21}{4}\ln(2)\zeta(3) + \frac{3}{2}\ln^2(2)\zeta(2) - \frac{1}{4}\ln^4(2) \\
&\quad -6\,\mathrm{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) \\
\int_0^1 \frac{\ln^4(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x &= 24\zeta(5) - \frac{21}{2}\ln^2(2)\zeta(3) + 4\ln^3(2)\zeta(2) - \frac{4}{5}\ln^5(2) \\
&\quad -24\ln(2)\,\mathrm{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) - 24\,\mathrm{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

3.1.9 $\int_0^\infty \frac{\ln^{2q}(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Let $q \in \mathbb{Z}^+$. Then the following identity holds:

$$
\int_0^\infty \frac{\ln^{2q}(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = |E_{2q}| \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2q+1} \tag{3.21}
$$

Proof. Make the change of variable $x = \sqrt{y}$,

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\ln^{2q}(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= 2^{-2q-1} \int_0^\infty \frac{y^{-\frac{1}{2}}\ln^{2q}(y)}{1+y}\,\mathrm{d}y \\
&= 2^{-2q-1} \lim_{m\to\frac{1}{2}} \int_0^\infty \frac{y^{m-1}\ln^{2q}(y)}{1+y}\,\mathrm{d}y \\
&= 2^{-2q-1} \lim_{m\to\frac{1}{2}} \int_0^\infty \frac{\partial^{2q}}{\partial m^{2q}} \frac{y^{m-1}}{1+y}\,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

{ use differentiation under the integral sign theorem (2.63)}

$$= 2^{-2q-1} \lim_{m\to\frac{1}{2}} \frac{d^{2q}}{dm^{2q}} \int_0^\infty \frac{y^{m-1}}{1+y}\, \mathrm{d}y$$

set $a = m$ and $b = 1 - m$ in the beta function (1

$$= 2^{-2q-1} \lim_{m\to\frac{1}{2}} \frac{d^{2q}}{dm^{2q}} \Gamma(m)\Gamma(1-m)$$

{recall Euler's reflection formula (1.40)}

$$= 2^{-2q-1}\pi \lim_{m\to\frac{1}{2}} \frac{d^{2q}}{dm^{2q}} \csc(m\pi)$$

{ this limit is given in (1.169)}

$$= 2^{-2q-1}\pi \left|E_{2q}\right| \pi^{2q}$$

$$= \left|E_{2q}\right| \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2q+1}.$$

**Examples:**

$$\int_0^\infty \frac{\ln^2(x)}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi^3}{8}$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln^4(x)}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{5\pi^5}{32}$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln^6(x)}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{61\pi^7}{128}$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln^8(x)}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1385\pi^9}{512}$$

For the odd case $(2q+1)$, let $x \to \frac{1}{x}$

$$\int_0^\infty \frac{\ln^{2q+1}(x)}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = -\int_0^\infty \frac{\ln^{2q+1}(x)}{1+x^2}\, \mathrm{d}x$$

{add the integral to both sides then divide by 2 }

$$= 0. \tag{3.22}$$

3.1.10 $\int_0^\infty \frac{\ln^q(1+x)}{1+x^2}\, \mathrm{d}x$

Let $q \in \mathbb{Z}^+$. Then the following identity holds:

$$\int_0^\infty \frac{\ln^q(1+x)}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = q!\Im\left\{\mathrm{Li}_{q+1}(1+i)\right\} \tag{3.23}$$

The following proof is due to Cornel Vălean [34]:

Proof. Let $x = \frac{1}{y}$,

$$\int_0^\infty \frac{\ln^q(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\ln^q\left(\frac{1+y}{y}\right)}{1+y^2}\,\mathrm{d}y$$
$$f^{\frac{y}{1+y}=x}(-1)^q \int_0^1 \frac{\ln^q(x)}{x^2+(1-x)^2}\,\mathrm{d}x$$
$$\left\{ \text{write } \frac{1}{x^2+(1-x)^2} = \Im \frac{1+i}{1-(1+i)x} \right\}$$
$$= (-1)^q \Im \int_0^1 \frac{(1+i)\ln^q(x)}{1-(1+i)x}\,\mathrm{d}x$$
$$\{ \text{ set } z = 1+i \text{ in } (1.75)\}$$
$$= q!\Im\left\{\mathrm{Li}_{q+1}(1+i)\right\}$$

Notice that the first line of the proof shows

$$\int_0^\infty \frac{\ln^q\left(\frac{1+x}{x}\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = q!\Im\left\{\mathrm{Li}_{q+1}(1+i)\right\}$$

3.1.11 $\int_0^1 \frac{\ln^q\left(\frac{1+x}{x}\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Let $q \in \mathbb{Z}^+$. Then the following identity holds:

$$\int_0^1 \frac{\ln^q\left(\frac{1+x}{x}\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = q!\sum_{k=0}^{q} \frac{\ln^{q-k}(2)}{(q-k)!}\Im\left\{\mathrm{Li}_{k+1}\left(\frac{1+i}{2}\right)\right\}. \tag{3.24}$$

Proof. With $y = \frac{x}{1+x}$, we have

$$\int_0^1 \frac{\ln^q\left(\frac{1+x}{x}\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = (-1)^q \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^q(y)}{y^2+(1-y)^2}\,\mathrm{d}y$$
$$= (-1)^q\Im \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1+i)\ln^q(y)}{1-(1+i)y}\,\mathrm{d}y$$

The proof completes on setting $z = 1+i$ in (3.18).

3.1.12 $\int_0^1 \frac{\ln^q(1-x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Let $q \in \mathbb{Z}^+$. Then the following identity holds:

$$\int_0^1 \frac{\ln^q(1-x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = (-1)^q q!\Im\left\{\mathrm{Li}_{q+1}\left(\frac{1+i}{2}\right)\right\}. \tag{3.25}$$

Proof. Let $1-x=y$,

$$\int_0^1 \frac{\ln^q(1-x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\ln^q(y)}{1+(1-y)^2}\,\mathrm{d}y$$
$$\left\{ \text{write } \frac{1}{1+(1-y)^2} = \Im \frac{i}{1+i-iy} \right\}$$
$$= \Im \int_0^1 \frac{i\ln^q(y)}{1+i-iy}\,\mathrm{d}y$$

$\{$ to get this integral, set $z=-i$ in (1.76)$\}$

$$= (-1)^q q!\Im\left\{\mathrm{Li}_{q+1}\left(\frac{-i}{-i-1}\right)\right\}$$
$$= (-1)^q q!\Im\left\{\mathrm{Li}_{q+1}\left(\frac{1+i}{2}\right)\right\}.$$

With $q = 2$, we have

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= 2\Im\left\{\operatorname{Li}_3\left(\frac{1+i}{2}\right)\right\} \\
&\quad \{\text{recall the relation (1.103)}\} \\
&= \frac{7\pi^3}{64} + \frac{3\pi}{16}\ln^2(2) - 2\Im\{\operatorname{Li}_3(1+i)\} \qquad (3.26)
\end{aligned}
$$

Applying the same approach, we also have

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x\ln^q(1-x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &\overset{1-x=y}{=} \int_0^1 \frac{(1-y)\ln^q(y)}{1+(1-y)^2}\,\mathrm{d}y \\
&\quad \left\{\text{write } \frac{1-y}{1+(1-y)^2} = \Re\frac{i}{1+i-iy}\right\} \\
&= \Re\int_0^1 \frac{i\ln^q(y)}{1+i-iy}\,\mathrm{d}y \\
&= (-1)^q q!\Re\left\{\operatorname{Li}_{q+1}\left(\frac{1+i}{2}\right)\right\} \qquad (3.27)
\end{aligned}
$$

### 3.1.13 $\int_0^1 \frac{\ln^q(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Let $q \in \mathbb{Z}^+$. Then the following identity holds:

$$
\int_0^1 \frac{\ln^q(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = q!\Im\left(\operatorname{Li}_{q+1}(1+i) - \sum_{k=0}^{q}\frac{\ln^{q-k}(2)}{(q-k)!}\operatorname{Li}_{k+1}\left(\frac{1+i}{2}\right)\right) \qquad (3.28)
$$

Proof. With $y = \frac{1}{1+x}$, we have

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln^q(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= (-1)^q\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln^q(y)}{y^2+(1-y)^2}\,\mathrm{d}y \\
&= (-1)^q\Im\underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{(1+i)\ln^q(y)}{1-(1+i)y}\,\mathrm{d}y}_{\int_0^1 - \int_0^{1/2}} \\
&= (-1)^q\Im\left(\int_0^1 \frac{(1+i)\ln^q(y)}{1-(1+i)y}\,\mathrm{d}y - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1+i)\ln^q(y)}{1-(1+i)y}\,\mathrm{d}y\right).
\end{aligned}
$$

The proof completes on setting $z = 1+i$ in (1.75) and (3.18).

With $q = 2$, we have

$$
\int_0^1 \frac{\ln^2(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -2\ln(2)G + 2\Im\left\{\operatorname{Li}_3(1+i) - \operatorname{Li}_3\left(\frac{1+i}{2}\right)\right\}
$$

{recall the relation (1.103)}

$$
= 4\Im\{\operatorname{Li}_3(1+i)\} - \frac{7\pi^3}{64} - \frac{3\pi}{16}\ln^2(2) - 2\ln(2)G. \qquad (3.29)
$$

Applying the same approach, we get

$$\int_0^1 \frac{x\ln^q(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = (-1)^q\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln^q(y)}{y}\,\mathrm{d}y + (-1)^q\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{(1-2y)\ln^q(y)}{y^2+(1-y)^2}\,\mathrm{d}y$$

$$\left\{\text{ write } \frac{1-2y}{y^2+(1-y)^2} = \Re\frac{1+i}{1-(1+i)y} \text{ in the second integral }\right\}$$

$$= \frac{\ln^{q+1}(2)}{q+1} + (-1)^q\Re\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{(1+i)\ln^q(y)}{1-(1+i)y}\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{\ln^{q+1}(2)}{q+1} + (-1)^q\Re\left(\int_0^1 \frac{(1+i)\ln^q(y)}{1-(1+i)y}\,\mathrm{d}y - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1+i)\ln^q(y)}{1-(1+i)y}\,\mathrm{d}y\right)$$

$$\{\text{ set } z=1+i \text{ in (1.75) and (3.18) to get these two integrals }\}$$

$$= \frac{\ln^{q+1}(2)}{q+1} + q!\Re\left(\operatorname{Li}_{q+1}(1+i) - \sum_{k=0}^{q}\frac{\ln^{q-k}(2)}{(q-k)!}\operatorname{Li}_{k+1}\left(\frac{1+i}{2}\right)\right). \tag{3.30}$$

**3.1.14** $\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}\left(\frac{x}{1-x}\right)}{1+x}\,\mathrm{d}x$

Let $q \in \mathbb{Z}_{>1}$. Then the following identity holds:

$$\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}\left(\frac{x}{1-x}\right)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \left(1+(-1)^q\right)(q-1)!\eta(q)$$
$$- 2(-1)^q(q-1)!\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{q}{2}\rfloor}\frac{\eta(2k)}{(q-2k)!}\ln^{q-2k}(2) \tag{3.31}$$

Proof. Start with the change of variable $\frac{x}{1-x}=y$,

$$\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}\left(\frac{x}{1-x}\right)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\ln^{q-1}(y)}{(1+y)(1+2y)}\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(y)}{(1+y)(1+2y)}\mathrm{d}y + \underbrace{\int_1^\infty \frac{\ln^{q-1}(y)}{(1+y)(1+2y)}\mathrm{d}y}_{y\to 1/y}$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(y)}{(1+y)(1+2y)}\mathrm{d}y - (-1)^q\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(y)}{(1+y)(2+y)}\mathrm{d}y$$

$$\{\text{ decompose both integrands }\}$$

$$= \int_0^1 \frac{2\ln^{q-1}(y)}{1+2y}\,\mathrm{d}y + (-1)^q\int_0^1 \frac{\frac{1}{2}\ln^{q-1}(y)}{1+\frac{1}{2}y}\,\mathrm{d}y - \left(1+(-1)^q\right)\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(y)}{1+y}\,\mathrm{d}y$$

$$\{\text{ use (1.75) for the first two integrals and (1.53) for the last }\}$$

$$= (-1)^q(q-1)!\left(\operatorname{Li}_q(-2) + (-1)^q\operatorname{Li}_q\left(-\frac{1}{2}\right)\right) + \left(1+(-1)^q\right)(q-1)!\eta(q).$$

The proof finishes on setting $z=2$ in (1.99).

**Examples:**

$$\int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)}{1+x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln^2(2)$$
$$\int_0^1 \frac{\ln^2\left(\frac{x}{1-x}\right)}{1+x}\,\mathrm{d}x = 2\ln(2)\zeta(2) + \frac{1}{3}\ln^3(2)$$
$$\int_0^1 \frac{\ln^3\left(\frac{x}{1-x}\right)}{1+x}\,\mathrm{d}x = -3\ln^2(2)\zeta(2) - \frac{1}{4}\ln^4(2)$$
$$\int_0^1 \frac{\ln^4\left(\frac{x}{1-x}\right)}{1+x}\,\mathrm{d}x = 42\ln(2)\zeta(4) + 4\ln^3(2)\zeta(2) + \frac{1}{5}\ln^5(2)$$

**3.1.15** $\int_0^\infty \frac{x^{s-1}\ln(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x$

Let $-1 < \Re(s) < 1$. Then the following identity holds:

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}\ln(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = -\pi\csc(\pi s)(\psi(1-s)+\gamma) \tag{3.32}$$

The following proof may be found in [16]:
Proof.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^{s-1}\ln(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{r\to 1}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}\ln(1+x)}{(1+x)^r}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{r\to 1}\int_0^\infty -\frac{\partial}{\partial r}\frac{x^{s-1}}{(1+x)^r}\,\mathrm{d}x \\
&\{\text{use differentiation under the integral sign theorem (2.64)}\} \\
&= -\lim_{r\to 1}\tfrac{\partial}{\partial r}\textstyle\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{(1+x)^r}\,\mathrm{d}x \\
&= -\lim_{r\to 1}\tfrac{\partial}{\partial r}\,\mathrm{B}(s,r-s) \\
&= -\lim_{r\to 1}\tfrac{\partial}{\partial r}\tfrac{\Gamma(s)\Gamma(r-s)}{\Gamma(r)} \\
&\{\text{ let } a=s \text{ and } b=r-s \text{ in the beta function (1.51) }\} \\
&\{\text{ use } \Gamma'(x)=\Gamma(x)\psi(x) \text{ given in (1.144)}\} \\
&= -\Gamma(s)\lim_{r\to 1}\tfrac{\Gamma(r-s)(\psi(r-s)-\psi(r))}{\Gamma(r)} \\
&= -\Gamma(s)\Gamma(1-s)(\psi(1-s)-\psi(1)) \\
&= -\pi\csc(\pi s)(\psi(1-s)+\gamma) \\
&\{\text{ recall Euler's reflection formula (1.40) and write } \psi(1)=-\gamma\}
\end{aligned}$$

3.1.16 $\int_0^\infty \frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1+x)}{x(1+x)}\mathrm{d}x$

Let $q \in \mathbb{Z}^+$. Then the following identity holds:

$$\int_0^\infty \frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1+x)}{x(1+x)}\mathrm{d}x = 2(2q-1)!\sum_{k=0}^{q-1}\eta(2k)\zeta(2q-2k+1). \tag{3.33}$$

The following proof may be found in [18]:
Proof.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1+x)}{x(1+x)}\mathrm{d}x &= \lim_{s\to 0}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}\ln^{2q-1}(x)\ln(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{s\to 0}\int_0^\infty \frac{\partial^{2q-1}}{\partial s^{2q-1}}\frac{x^{s-1}\ln(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

{ use differentiation under the integral sign theorem (2.63)}

$$= \lim_{s\to 0} \frac{d^{2q-1}}{ds^{2q-1}} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}\ln(1+x)}{1+x}\, \mathrm{d}x$$

{ this integral is given in (3.32)}

$$= -\lim_{s\to 0} \frac{d^{2q-1}}{ds^{2q-1}} \pi \csc(\pi s)(\psi(1-s)+\gamma)$$

{ multiply by $s/s$}

$$= -\lim_{s\to 0} \frac{d^{2q-1}}{ds^{2q-1}} (\pi s \csc(\pi s)) \left(\frac{\psi(1-s)+\gamma}{s}\right)$$

{expand both functions in series as in (2.99) and (1.156)}

$$= -\lim_{s\to 0} \frac{d^{2q-1}}{ds^{2q-1}} \left(2\sum_{n=0}^{\infty} \eta(2n)s^{2n}\right)\left(-\sum_{n=0}^{\infty} \zeta(n+2)s^n\right)$$

{ let $a_{2n} = \eta(2n)$ and $b_n = \zeta(n+2)$ in (2.67)}

$$= 2\lim_{s\to 0} \frac{d^{2q-1}}{ds^{2q-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \eta(2k)\zeta(n-2k+2))}_{f_n} s^n$$

$$= 2\lim_{s\to 0} \frac{d^{2q-1}}{ds^{2q-1}} \sum_{n=0}^{\infty} f_n s^n$$

$$\left\{ \text{use } \frac{d^a}{ds^a} s^n = \frac{n!}{(n-a)!} s^{n-a}, \quad n \geq a \right\}$$

$$= 2\lim_{s\to 0} \sum_{n=2q-1}^{\infty} \frac{n!}{(n-2q+1)!} f_n s^{n-2q+1}$$

$$= 2\lim_{s\to 0} \left( (2q-1)! f_{2q-1} + (2q)! f_{2q} s + \frac{(2q+1)!}{2} f(2q+1)s^2 + \cdots \right)$$

$$= 2(2q-1)! f_{2q-1}$$

$$= 2(2q-1)! \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{2q-1}{2} \rfloor} \eta(2k)\zeta(2q-2k+1)$$

$$= 2(2q-1)! \sum_{k=0}^{q-1} \eta(2k)\zeta(2q-2k+1).$$

**Examples:**

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x)\ln(1+x)}{x(1+x)}\mathrm{d}x = \zeta(3)$$
$$\int_0^\infty \frac{\ln^3(x)\ln(1+x)}{x(1+x)}\mathrm{d}x = 6\zeta(5) + 6\zeta(2)\zeta(3)$$
$$\int_0^\infty \frac{\ln^5(x)\ln(1+x)}{x(1+x)}\mathrm{d}x = 120\zeta(7) + 120\zeta(2)\zeta(5) + 210\zeta(3)\zeta(4)$$
$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\ln^7(x)\ln(1+x)}{x(1+x)}\mathrm{d}x = {} & 5040\zeta(9) + 5040\zeta(2)\zeta(7) + 9765\zeta(3)\zeta(6) \\ & +8820\zeta(4)\zeta(5)\end{aligned}$$

**3.1.17** $\int_0^\infty \frac{\ln^{2q}(x)\ln\left(1+x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

The following identity may be found in [17]:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\ln^{2q}(x)\ln\left(1+x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\ln(2)\left|E_{2q}\right|\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2q+1} \\ +\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2q+1}\sum_{k=1}^{q}\binom{2q}{2k}\frac{(2k)!}{\pi^{2k}}\left|E_{2q-2k}\right|\left(2^{2k+1}-1\right)\zeta(2k+1).\end{aligned} \tag{3.34}$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\ln^{2q}(x)\ln(1+x)}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x &= \lim_{s\to\frac{1}{2}}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}\ln^{2q}(x)\ln(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{s\to\frac{1}{2}}\int_0^\infty \frac{\partial^{2q}}{\partial s^{2q}}\frac{x^{s-1}\ln(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{s\to\frac{1}{2}}\frac{d^{2q}}{ds^{2q}}\int_0^\infty \frac{x^{s-1}\ln(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&\quad \{\text{ this integral is given in (3.32)}\} \\
&= -\pi\lim_{s\to\frac{1}{2}}\frac{d^{2q}}{ds^{2q}}\csc(s\pi)(\psi(1-s)+\gamma) \\
&\left\{\text{ use } \frac{d^q}{ds^q}(f(s)*g(s)) = \sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}\frac{d^{q-k}}{ds^{q-k}}f(s)*\frac{d^k}{ds^k}g(s)\right\} \\
&= -\pi\sum_{k=0}^{2q}\binom{2q}{k}\lim_{s\to\frac{1}{2}}\frac{d^{2q-k}}{ds^{2q-k}}\csc(s\pi)\lim_{s\to\frac{1}{2}}\frac{d^k}{ds^k}(\psi(1-s)+\gamma) \\
&\left\{\begin{array}{c}\text{use } \sum_{k=0}^{2q}f(k) = \sum_{k=0}^{q}f(2k+1)+\sum_{k=0}^{q}f(2k) \\ q\binom{2q}{2k+1}\lim_{s\to\frac{1}{2}}\frac{d^{2q-2k-1}}{ds^{2q-2k-1}}\csc(s\pi)\lim_{s\to\frac{1}{2}}\frac{d^{2k+1}}{ds^{2k+1}}(\psi(1-s)+\gamma) \\ -\pi\sum_{k=0}^{q}\binom{2q}{2k}\lim_{s\to\frac{1}{2}}\frac{d^{2q-2k}}{ds^{2q-2k}}\csc(s\pi)\lim_{s\to\frac{1}{2}}\frac{d^{2k}}{ds^{2k}}(\psi(1-s)+\gamma)\end{array}\right. \\
&\left\{\text{ ignore the first sum since } \lim_{s\to\frac{1}{2}}\frac{d^{2q-2k-1}}{ds^{2q-2k-1}}\csc(s\pi) = 0 \text{ given in (1.170)}\right\}
\end{aligned}$$

{and use the result (1.169) for the first limit in the second sum}

$$= -\pi \sum_{k=0}^{q} \binom{2q}{2k} |E_{2q-2k}| \pi^{2q-2k} \lim_{s\to\frac{1}{2}} \frac{d^{2k}}{ds^{2k}} (\psi(1-s)+\gamma)$$

{separate the first term using $\psi(1/2)+\gamma = -2\ln(2)$ given in (1.148)}

$$= 2\ln(2)\,|E_{2q}|\,\pi^{2q+1}$$
$$-\pi \sum_{k=1}^{q} \binom{2q}{2k} |E_{2q-2k}| \pi^{2q-2k} \lim_{s\to\frac{1}{2}} \frac{d^{2k}}{ds^{2k}} (\psi(1-s)+\gamma)$$

{use the definition of the polygamma function (1.150)}

$$= 2\ln(2)\,|E_{2q}|\,\pi^{2q+1}$$
$$-\pi \sum_{k=1}^{q} \binom{2q}{2k} |E_{2q-2k}| \pi^{2q-2k} \psi^{(2k)}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$\Big\{$ substitute the result of $\psi^{(q)}(1/2)$ given in (1.157) $\Big\}$

$$= 2\ln(2)\,|E_{2q}|\,\pi^{2q+1}$$
$$+\pi \sum_{k=1}^{q} \binom{2q}{2k} |E_{2q-2k}| \pi^{2q-2k} (2k)! \left(2^{2k+1}-1\right) \zeta(2k+1).$$

The proof completes on setting $\sqrt{x} = y$ in the integral:

$$\int_0^\infty \frac{\ln^{2q}(x)\ln(1+x)}{\sqrt{x}(1+x)} \mathrm{d}x = 2^{2q+1} \int_0^\infty \frac{\ln^{2q}(y)\ln\left(1+y^2\right)}{1+y^2}\ \mathrm{d}y.$$

**Examples:**

$$\int_0^\infty \frac{\ln^2(x)\ln\left(1+x^2\right)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{\pi^3}{4}\ln(2) + \frac{7\pi}{4}\zeta(3);$$
$$\int_0^\infty \frac{\ln^4(x)\ln\left(1+x^2\right)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{5}{16}\pi^5\ln(2) + \frac{21}{8}\pi^3\zeta(3) + \frac{93}{4}\pi\zeta(5);$$
$$\int_0^\infty \frac{\ln^6(x)\ln\left(1+x^2\right)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{61}{64}\pi^7\ln(2) + \frac{525}{64}\pi^5\zeta(3) + \frac{1395}{16}\pi^3\zeta(5) + \frac{5715}{8}\pi\zeta(7);$$
$$\int_0^\infty \frac{\ln^8(x)\ln\left(1+x^2\right)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{1385}{256}\pi^9\ln(2) + \frac{2989}{64}\pi^7\zeta(3) + \frac{16275}{32}\pi^5\zeta(5) + \frac{40005}{8}\pi^3\zeta(7) + \frac{160965}{4}\pi\zeta(9). \tag{5}$$

**3.1.18** $\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(x)\ln\left(1+x^2\right)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$

Let $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Then the following identity holds:

$$\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(x)\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -(2q+1)!\beta(2q+2) + \ln(2)\,|E_{2q}|\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2q+1}$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2q+1}\sum_{k=1}^{q}\binom{2q}{2k}\frac{(2k)!}{\pi^{2k}}|E_{2q-2k}|\left(2^{2k+1}-1\right)\zeta(2k+1) \tag{3.35}$$

**Proof**

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(x)\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \frac{\ln^{2q}(x)\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \underbrace{\int_1^\infty \frac{\ln^{2q}(x)\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x}_{x\to 1/x} \\
&= \int_0^\infty \frac{\ln^{2q}(x)\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\ln^{2q}(x)\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&\quad +2\int_0^1 \frac{\ln^{2q+1}(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&\left\{\text{add } \int_0^1 \frac{\ln^{2q}(x)\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \text{ to both sides then divide by 2}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\ln^{2q}(x)\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\ln^{2q+1}(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

These two integrals are given in (3.34) and (1.62) respectively.

**Examples:**

$$\int_0^1 \frac{\ln^2(x)\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^3}{8}\ln(2) + \frac{7\pi}{8}\zeta(3) - 6\beta(4);$$
$$\int_0^1 \frac{\ln^4(x)\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{32}\pi^5\ln(2) + \frac{21}{16}\pi^3\zeta(3) + \frac{93}{8}\pi\zeta(5) - 120\beta(6);$$
$$\int_0^1 \frac{\ln^6(x)\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{61}{128}\pi^7\ln(2) + \frac{525}{128}\pi^5\zeta(3) + \frac{1395}{32}\pi^3\zeta(5) + \frac{5715}{16}\pi\zeta(7) - 5040\beta(8);$$
$$\int_0^1 \frac{\ln^8(x)\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1385}{512}\pi^9\ln(2) + \frac{2989}{128}\pi^7\zeta(3) + \frac{16275}{64}\pi^5\zeta(5) + \frac{40005}{16}\pi^3\zeta(7) + \frac{160965}{8}\pi\zeta(9) - 362880\beta(10)$$

## 6.6.2 3.1 Generalized Logarithmic Integrals 2

### 3.1.19 $\int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1+x)}{x(1+x)}\mathrm{d}x$

Let $q \in \mathbb{Z}^+$. Then the following identity holds:

$$\int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1+x)}{x(1+x)}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}(2q+1)(2q-1)!\eta(2q+1)$$
$$+(2q-1)!\sum_{k=0}^{q-1}\eta(2k)\zeta(2q-2k+1) \tag{3.36}$$

**Proof**

$$\int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1+x)}{x(1+x)}\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^\infty \frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1+x)}{x(1+x)}\mathrm{d}x - \underbrace{\int_1^\infty \frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1+x)}{x(1+x)}\mathrm{d}x}_{x\mapsto 1/x}$$
$$= \int_0^\infty \frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1+x)}{x(1+x)}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(x)\ln\left(\frac{1+x}{x}\right)}{1+x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^\infty \frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1+x)}{x(1+x)}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\ln^{2q}(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

By adding

$$\int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1+x)}{x(1+x)}\mathrm{d}x$$
$$= \underbrace{\int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x}_{\text{IBP}} - \int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{2q}\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

to both sides, the integral $\int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x$ nicely cancels out,

$$2\int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1+x)}{x(1+x)}\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^\infty \frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1+x)}{x(1+x)}\mathrm{d}x - \frac{2q+1}{2q}\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x. \tag{3.37}$$

These two integrals are given in (3.33) and (1.53) respectively.

**Examples:**

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1+x)}{x(1+x)}\mathrm{d}x = -\frac{5}{8}\zeta(3)$$
$$\int_0^1 \frac{\ln^3(x)\ln(1+x)}{x(1+x)}\mathrm{d}x = -\frac{177}{16}\zeta(5) + 3\zeta(2)\zeta(3)$$
$$\int_0^1 \frac{\ln^5(x)\ln(1+x)}{x(1+x)}\mathrm{d}x = -\frac{5655}{16}\zeta(7) + 60\zeta(2)\zeta(5) + 105\zeta(3)\zeta(4)$$
$$\int_0^1 \frac{\ln^7(x)\ln(1+x)}{x(1+x)}\mathrm{d}x = -\frac{642285}{32}\zeta(9) + 2520\zeta(2)\zeta(7) + 4410\zeta(4)\zeta(5) + \frac{9765}{2}\zeta(3)\zeta(6)$$

The following integral is related:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1+x)}{x(1+x)}\mathrm{d}x \\
&\quad \{ \text{ these two integrals are given in (3.36) and (3.12) } \} \\
&= \frac{1}{2}(2q-1)!\left((2q-1)\eta(2q+1) - 2\sum_{k=0}^{q-1}\eta(2k)\zeta(2q-2k+1)\right). \qquad (3.38)
\end{aligned}$$

3.1.20 $\int_0^1 \frac{x^{s-1}\ln(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$

Let $\Re(s) > -1$. Then the following identity holds:

$$\int_0^1 \frac{x^{s-1}\ln(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = \psi^{(1)}(s)(\psi(s)+\gamma) - \frac{1}{2}\psi^{(2)}(s). \qquad (3.39)$$

Proof.

$$\int_0^1 \frac{x^{s-1}\ln(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to 0}\int_0^1 \frac{x^{s-1}\ln(x)\ln(1-x)}{(1-x)^{1-r}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{r\to 0}\int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial s\partial r} x^{s-1}(1-x)^{r-1}\ \mathrm{d}x$$
$$= \lim_{r\to 0}\frac{\partial^2}{\partial s\partial r}\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{r-1}\ \mathrm{d}x$$
$$\{\text{ recall the beta function (1.46)}\}$$
$$= \lim_{r\to 0}\frac{\partial^2}{\partial s\partial r}\ \mathrm{B}(s,r)$$
$$= \lim_{r\to 0}\frac{\partial^2}{\partial s\partial r}\frac{\Gamma(s)\Gamma(r)}{\Gamma(s+r)}$$
$$= \lim_{r\to 0}\frac{\Gamma(s)\Gamma(r)}{\Gamma(s+r)}\big((\psi(s)-\psi(s+r))(\psi(r)-\psi(s+r))-\psi^{(1)}(s+r)\big)$$
$$\left\{\begin{array}{c}\text{write } \Gamma(r)=\frac{\Gamma(1+r)}{r} \text{ and } \psi(r)=\psi(1+r)-\frac{1}{r}\\ \{\text{ given in (1.34) and (1.149) respectively }\}\end{array}\right\}$$
$$= \lim_{r\to 0}\frac{\Gamma(s)\Gamma(1+r)}{\Gamma(s+r)}\times$$
$$\left\{\begin{array}{c}\lim_{r\to 0}\frac{(\psi(s)-\psi(s+r))\left(\psi(1+r)-\frac{1}{r}-\psi(s+r)\right)-\psi^{(1)}(s+r)}{r}\\ \text{multiply by } r/r \text{ and note that } \lim_{r\to 0}\frac{\Gamma(s)\Gamma(1+r)}{\Gamma(s+r)}=\frac{\Gamma(s)\Gamma(1)}{\Gamma(s)}=1\end{array}\right\}$$
$$= \lim_{r\to 0}\frac{(\psi(s)-\psi(s+r))(r\psi(1+r)-1-r\psi(s+r))-r\psi^{(1)}(s+r)}{r^2}$$
$$\{\text{ now we can apply L'Hôpital's rule since we have } 0/0\}$$
$$= \lim_{r\to 0}\frac{1}{2r}\left\{\psi^{(1)}(s+r)[r\psi(s+r)-r\psi(1+r)]+[\psi(s)-\psi(s+r)]\right.$$
$$\left.\psi(1+r)-\psi(s+r)-\psi^{(1)}(s+r)+r\psi^{(1)}(1+r)\big]-r\psi^{(2)}(s+r)\right\}$$
$$\{\text{ apply L'Hôpital's rule again since we have } 0/0\}$$
$$= \lim_{r\to 0}\frac{1}{2}\left\{2\psi^{(1)}(s+r)\left[\psi(s+r)+r\psi^{(1)}(s+r)-\psi(1+r)-r\psi^{(1)}(1+r)\right]\right.$$
$$+\psi^{(2)}(s+r)[r\psi(s+r)-b\psi(1+r)-1]+[\psi(s)-\psi(s+r)]$$
$$\left.\left[2\psi^{(2)}(s+r)+r\psi^{(2)}(s+r)-2\psi^{(2)}(1+r)-r\psi^{(2)}(1+r)\right]-r\psi^{(3)}(s+r)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{2\psi^{(1)}(s)(\psi(s)-\psi(1))-\psi^{(2)}(s)\right\}$$
$$\{\text{ write } \psi(1)=-\gamma \text{ given in (1.147)}\}$$
$$= \psi^{(1)}(s)(\psi(s)+\gamma)-\frac{1}{2}\psi^{(2)}(s)$$

Remark: We know that the beta function, $\mathrm{B}(s,r)=\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{r-1}\ \mathrm{d}x$, is defined for $\Re(s)>0$. However, its derivative in (3.39) is defined for $\Re(s)>-1$ due to the analytic continuation [40].

3.1.21 $\int_0^1 \frac{x^{s-1}\ln^{q-1}(x)\ln(1-x)}{1-x}\ \mathrm{d}x$

Let $s\notin\mathbb{Z}^-$ and $q\in\mathbb{Z}_{>1}$. Then the following identity holds:

$$\int_0^1 \frac{x^{s-1}\ln^{q-1}(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = \psi^{(q-1)}(s)(\psi(s)+\gamma) - \frac{1}{2}\psi^{(q)}(s) + \sum_{k=1}^{q-2}\binom{q-2}{k}\psi^{(q-k-1)}(s)\psi^{(k)}(s) \tag{3.40}$$

Proof.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^{s-1}\ln^{q-1}(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{\partial^{q-2}}{\partial s^{q-2}}\frac{x^{s-1}\ln(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{d^{q-2}}{ds^{q-2}}\int_0^1 \frac{x^{s-1}\ln(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x \\
&\qquad \{\text{ this integral is given in (3.39)}\} \\
&= \frac{d^{q-2}}{ds^{q-2}}\left(-\frac{1}{2}\psi^{(2)}(s) + \psi^{(1)}(s)(\psi(s)+\gamma)\right) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{d^{q-2}}{ds^{q-2}}\psi^{(2)}(s) + \frac{d^{q-2}}{ds^{q-2}}\psi^{(1)}(s)(\psi(s)+\gamma) \\
&\qquad \left\{\text{use } \frac{d^q}{ds^q}(f(s)*g(s)) = \sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}\frac{d^{q-k}}{ds^{q-k}}f(s)*\frac{d^k}{ds^k}g(s)\right\} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{d^{q-2}}{ds^{q-2}}\psi^{(2)}(s) + \sum_{k=0}^{q-2}\binom{q-2}{k}\frac{d^{q-k-2}}{ds^{q-k-2}}\psi^{(1)}(s)\frac{d^k}{ds^k}(\psi(s)+\gamma) \\
&\qquad \left\{\text{separate the first term since } \frac{d^k}{ds^k}(\psi(s)+\gamma) \neq \psi^{(k)}(s) \text{ for } k=0\right\} \\
&= -\frac{1}{2}\psi^{(q)}(s) + \psi^{(q-1)}(s)(\psi(s)+\gamma) + \sum_{k=1}^{q-2}\binom{q-2}{k}\psi^{(q-k-1)}(s)\frac{d^k}{ds^k}(\psi(s)+\gamma).
\end{aligned}$$

The proof completes on writing for $\frac{d^k}{ds^k}(\psi(s)+\gamma) = \psi^{(k)}(s)$ for $k \in \mathbb{Z}^+$.

3.1.22 $\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$

Let $q \in \mathbb{Z}_{>1}$. Then the following identity holds:

$$\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(-1)^q q!\zeta(q+1) - \frac{1}{2}(-1)^q(q-1)!\sum_{k=1}^{q-2}\zeta(q-k)\zeta(k+1) \tag{3.41}$$

Proof. Set $s=1$ in (3.40) then use $\psi(1)+\gamma=0$ given in (1.147), we get

$$\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\psi^{(q)}(1) + \sum_{k=1}^{q-2}\binom{q-2}{k}\psi^{(q-k-1)}(1)\psi^{(k)}(1)$$

The proof completes on using $\psi^{(a)}(1) = (-1)^{a-1}a!\zeta(a+1)$ given in (1.155).
Furthermore, replacing $q$ with $2q$ in (3.41) gives

$$\int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(2q)!\zeta(2q+1)$$
$$-\frac{1}{2}(2q-1)!\sum_{k=1}^{2q-2}\zeta(2q-k)\zeta(k+1)$$

We simplify this sum the same way as in [31, p. 2]. By using

$$\sum_{k=1}^{2q-2} f(k) = \sum_{k=1}^{q-1} f(2k-1) + \sum_{k=1}^{q-1} f(2k)$$

we have

$$\sum_{k=1}^{2q-2}\zeta(2q-k)\zeta(k+1)$$
$$=\sum_{k=1}^{q-1}\zeta(2q-2k+1)\zeta(2k) + \sum_{k=1}^{q-1}\zeta(2q-2k)\zeta(2k+1)$$

{use the rule (1.2) for the second sum}

$$=\sum_{k=1}^{q-1}\zeta(2q-2k+1)\zeta(2k) + \sum_{k=1}^{q-1}\zeta(2k)\zeta(2q-2k+1)$$
$$= 2\sum_{k=1}^{q-1}\zeta(2q-2k+1)\zeta(2k). \tag{3.42}$$

Thus,

$$\int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(2q)!\zeta(2q+1)$$
$$-(2q-1)!\sum_{k=1}^{q-1}\zeta(2q-2k+1)\zeta(2k) \tag{3.43}$$

**Examples:**

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = \zeta(3)$$
$$\int_0^1 \frac{\ln^2(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\zeta(4)$$
$$\int_0^1 \frac{\ln^3(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = 12\zeta(5) - 6\zeta(2)\zeta(3)$$
$$\int_0^1 \frac{\ln^4(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = 12\zeta^2(3) - 18\zeta(6)$$

The following integral is related:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(x)\ln(1-x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(x)\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x \\
&\{\text{ collect the results (3.41) and (3.9) }\} \\
&= \frac{1}{2}(-1)^q(q-1)!\left((q+2)\zeta(q+1) - \sum_{k=1}^{q-2}\zeta(q-k)\zeta(k+1)\right). \qquad (3.44)
\end{aligned}$$

Examples:

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x = 2\zeta(3)$$

$$\int_0^1 \frac{\ln^2(x)\ln(1-x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x = -\frac{5}{2}\zeta(4)$$

$$\int_0^1 \frac{\ln^3(x)\ln(1-x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x = 18\zeta(5) - 6\zeta(2)\zeta(3)$$

$$\int_0^1 \frac{\ln^4(x)\ln(1-x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x = 12\zeta^2(3) - 42\zeta(6)$$

### 3.1.23 $\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(x)\ln\left(1-x^2\right)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

Let $q \in \mathbb{Z}_{>1}$. Then the following identity holds:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(x)\ln\left(1-x^2\right)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = (-1)^q q!\left(1-\frac{1}{2^{q+1}}\right)\zeta(q+1) \\
&- 2(-1)^q(q-1)!\left(1-\frac{1}{2^q}\right)\ln(2)\zeta(q) \\
&- \frac{(-1)^q(q-1)!}{2^{q+1}}\sum_{k=1}^{q-2}\left(2^{q-k}-1\right)\left(2^{k+1}-1\right)\zeta(q-k)\zeta(k+1). \qquad (3.45)
\end{aligned}$$

Proof. Set $s=\frac{1}{2}$ in (3.40) then use $\psi^{(a)}\left(\frac{1}{2}\right)+\gamma = -2\ln(2)$ given in (1.148),

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(x)\ln(1-x)}{\sqrt{x}(1-x)}\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\psi^{(q)}\left(\frac{1}{2}\right) - 2\ln(2)\psi^{(q-1)}\left(\frac{1}{2}\right) \\
&+ \sum_{k=1}^{q-2}\binom{q-2}{k}\psi^{(q-k-1)}\left(\frac{1}{2}\right)\psi^{(k)}\left(\frac{1}{2}\right) \\
&\left\{\text{ make use of the result of } \psi^{(a)}(1/2) \text{ given in (1.157)}\right\} \\
&= -(-1)^q q!\left(2^{-1}-2^q\right)\zeta(q+1) - 2(-1)^q(q-1)!\left(2^q-1\right)\ln(2)\zeta(q) \\
&-(-1)^q(q-2)!\sum_{k=1}^{q-2}(q-k-1)\left(2^{q-k}-1\right)\left(2^{k+1}-1\right)\zeta(q-k)\zeta(k+1).
\end{aligned}$$

This sum can be further simplified. By using (1.2), we have

$$\sum_{k=1}^{q-2}(q-k-1)\left(2^{q-k}-1\right)\left(2^{k+1}-1\right)\zeta(q-k)\zeta(k+1)$$
$$=\sum_{k=1}^{q-2}k\left(2^{q-k}-1\right)\left(2^{k+1}-1\right)\zeta(q-k)\zeta(k+1)$$
$$\{\text{ add the sum to both sides then divide by } 2\}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{q-2}(q-k+k-1)\left(2^{q-k}-1\right)\left(2^{k+1}-1\right)\zeta(q-k)\zeta(k+1)$$
$$=\frac{q-1}{2}\sum_{k=1}^{q-2}\left(2^{q-k}-1\right)\left(2^{k+1}-1\right)\zeta(q-k)\zeta(k+1).$$

The proof completes on subbing $x=y^2$ in the integral:

$$\int_0^1\frac{\ln^{q-1}(x)\ln(1-x)}{\sqrt{x}(1-x)}\mathrm{d}x=2^q\int_0^1\frac{\ln^{q-1}(y)\ln\left(1-y^2\right)}{1-y^2}\,\mathrm{d}y.$$

**Examples:**

$$\int_0^1\frac{\ln(x)\ln\left(1-x^2\right)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{7}{4}\zeta(3)-\frac{3}{2}\ln(2)\zeta(2);$$
$$\int_0^1\frac{\ln^2(x)\ln\left(1-x^2\right)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{7}{2}\ln(2)\zeta(3)-\frac{45}{16}\zeta(4);$$
$$\int_0^1\frac{\ln^3(x)\ln\left(1-x^2\right)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{93}{4}\zeta(5)-\frac{45}{4}\ln(2)\zeta(4)-\frac{63}{8}\zeta(2)\zeta(3);$$
$$\int_0^1\frac{\ln^4(x)\ln\left(1-x^2\right)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{93}{2}\ln(2)\zeta(5)+\frac{147}{8}\zeta^2(3)-\frac{945}{16}\zeta(6).$$

### 3.1.24 $\int_0^1\frac{\ln^{q-1}(x)\ln(1+x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$

Let $q\in\mathbb{Z}_{>1}$. Then the following identity holds:

$$\int_0^1\frac{\ln^{q-1}(x)\ln(1+x)}{1-x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(-1)^q q!\zeta(q+1)$$
$$-2(-1)^q(q-1)!\left(1-\frac{1}{2^q}\right)\ln(2)\zeta(q)$$
$$-\frac{1}{2}(-1)^q(q-1)!\sum_{k=1}^{q-2}\eta(k+1)\eta(q-k) \tag{3.46}$$

Proof (i). Write

$$\frac{\ln(1+x)}{1-x}=\frac{\ln\left(1-x^2\right)}{1-x^2}+\frac{x\ln\left(1-x^2\right)}{1-x^2}-\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

to have

$$\int_0^1\frac{\ln^{q-1}(x)\ln(1+x)}{1-x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\ln^{q-1}(x)\ln\left(1-x^2\right)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$+\underbrace{\int_0^1 \frac{x\ln^{q-1}(x)\ln\left(1-x^2\right)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x}_{x^2\to x}-\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(x)\ln\left(1-x^2\right)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x+\left(2^{-q}-1\right)\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

These two integrals are given in (3.45) and (3.41) respectively.

The following second proof is due to Cornel Vălean [29]:

**Proof (ii).**

$$\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(x)\ln\left(\frac{2}{1+x}\right)}{1-x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x\left(\int_x^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+y}\right)\mathrm{d}x$$

$$\{\text{change the order of integration}\}$$

$$=\int_0^1\int_0^y \frac{\ln^{q-1}(x)}{(1+y)(1-x)}\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

$$\overset{x=yz}{=}\int_0^1\int_0^1 \frac{y\ln^{q-1}(yz)}{(1+y)(1-yz)}\mathrm{d}z\ \mathrm{d}y$$

$$\{\text{replace } z \text{ with } x \text{ then write } 1 \text{ as } 1/2+1/2\}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \frac{y\ln^{q-1}(xy)}{(1+y)(1-xy)}\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y+\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \frac{y\ln q-1(xy)}{(1+y)(1-xy)}\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \frac{y\ln^{q-1}(xy)}{(1+y)(1-xy)}\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y+\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \frac{x\ln\ln^{q-1}(xy)}{(1+x)(1-xy)}\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \frac{[(1+x)(1+y)-(1-xy)]\ln q-1(xy)}{(1+x)(1+y)(1-xy)}\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(xy)}{1-xy}\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y-\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(xy)}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

First integral: Let $x=\frac{t}{y}$,

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(xy)}{1-xy}\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\int_0^1\int_0^y \frac{\ln^{q-1}(t)}{y(1-t)}\mathrm{d}t\ \mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(t)}{1-t}\left(\int_t^1 \frac{\mathrm{d}y}{y}\right)\mathrm{d}t$$

$$=-\int_0^1 \frac{\ln^{q}(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$$

$$=-(-1)^q q!\zeta(q+1)$$

Second integral:

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(xy)}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^1 \frac{[\ln(x)+\ln(y)]^{q-1}}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$
$$\left\{ \text{use the binomial theorem } (x+y)^a = \sum_{k=0}^{a}\binom{a}{k} y^{a-k}x^k \right\}$$
$$= \int_0^1\int_0^1 \frac{\sum_{k=0}^{q-1}\binom{q-1}{k}\ln^{q-k-1}(y)\ln^k(x)}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$
$$= \sum_{k=0}^{q-1}\binom{q-1}{k}\left(\int_0^1 \frac{\ln^{q-k-1}(y)}{1+y}\ \mathrm{d}y\right)\left(\int_0^1 \frac{\ln^k(x)}{1+x}\ \mathrm{d}x\right)$$
$$= \underbrace{\binom{q-1}{0}\left(\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(y)}{1+y}\ \mathrm{d}y\right)\left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}\right)}_{\{\text{separate the first and last terms }\}}$$
$$+ \underbrace{\binom{q-1}{q-1}\left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+y}\right)\left(\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(x)}{1+x}\ \mathrm{d}x\right)}_{\text{first term}}$$
$$+ \sum_{k=1}^{q-2}\binom{q-1}{k}\left(\int_0^1 \frac{\ln^{q-k-1}(y)}{1+y}\ \mathrm{d}y\right)\left(\int_0^1 \frac{\ln k(x)}{1+x}\ \mathrm{d}x\right)$$
$$\{\text{ make use of the definition } (1.53)\}$$
$$= -2(-1)^q(q-1)!\ln(2)\eta(q)$$
$$= -2(-1)^q(q-1)!\ln(2)\eta(q) - (-1)^q(q-1)!\sum_{k=1}^{q-2}\eta(k+1)\eta(q-k)$$

Combine the two integrals,

$$\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(x)\ln\left(\frac{2}{1+x}\right)}{1-x}\ \mathrm{d}x$$
$$= -\frac{1}{2}(-1)^q q!\zeta(q+1) + (-1)^q(q-1)!\ln(2)\eta(q)$$
$$+\frac{1}{2}(-1)^q(q-1)!\sum_{k=1}^{q-2}\eta(q-k)\eta(k+1) \tag{3.47}$$

The proof completes on writing

$$\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(x)\ln\left(\frac{2}{1+x}\right)}{1-x}\ \mathrm{d}x$$
$$= \ln(2)\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(x)}{1-x}\ \mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(x)\ln(1+x)}{1-x}\ \mathrm{d}x$$
$$= -(-1)^q(q-1)!\ln(2)\zeta(q) - \int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(x)\ln(1+x)}{1-x}\ \mathrm{d}x$$

**Examples:**

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1+x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = \zeta(3) - \frac{3}{2}\ln(2)\zeta(2);$$
$$\int_0^1 \frac{\ln^2(x)\ln(1+x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\frac{19}{8}\zeta(4) + \frac{7}{2}\ln(2)\zeta(3);$$
$$\int_0^1 \frac{\ln^3(x)\ln(1+x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = 12\zeta(5) - \frac{45}{4}\ln(2)\zeta(4) - \frac{9}{4}\zeta(2)\zeta(3);$$
$$\int_0^1 \frac{\ln^4(x)\ln(1+x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\frac{333}{8}\zeta(6) + \frac{93}{2}\ln(2)\zeta(5) + \frac{27}{4}\zeta^2(3).$$

The following integral is related:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(x)\ln(1+x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(x)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(x)\ln(1+x)}{1-x}\,\mathrm{d}x \\
&\qquad \{ \text{ group the results (3.12) and (3.46) } \} \\
&= (-1)^{q-1}(q-1)!\left[2\left(1-\frac{1}{2^q}\right)\ln(2)\zeta(q) + \left(1-\frac{1}{2^q}-\frac{q}{2}\right)\zeta(q+1)\right. \\
&\qquad \left. +\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{q-2}\eta(q-k)\eta(k+1)\right].
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Let's replace $q$ with $2q$ in (3.46),

$$\int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1+x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(2q)!\zeta(2q+1)$$
$$-(2q-1)!\left(1-2^{-2q}\right)\ln(2)\eta(2q) - \frac{1}{2}(2q-1)!\sum_{k=1}^{2q-2}\eta(k+1)\eta(2q-k)$$

We simplify this sum the same way as in (3.42). By using

$$\sum_{k=1}^{2q-2} f(k) = \sum_{k=1}^{q-1} f(2k-1) + \sum_{k=1}^{q-1} f(2k)$$

we have

$$\sum_{k=1}^{2q-2}\eta(k+1)\eta(2q-k)$$

$$=\sum_{k=1}^{q-1}\eta(2k)\eta(2q-2k+1)+\sum_{k=1}^{q-1}\eta(2k+1)\eta(2q-2k)$$

{ use the rule (1.2) for the second sum }

$$=\sum_{k=1}^{q-1}\eta(2k)\eta(2q-2k+1)+\sum_{k=1}^{q-1}\eta(2q-2k+1)\eta(2k)$$

$$=2\sum_{k=1}^{q-1}\eta(2k)\eta(2q-2k+1) \tag{3.49}$$

Thus,

$$\int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1+x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}(2q)!\zeta(2q+1)-2(2q-1)!\left(1-2^{-2q}\right)\ln(2)\zeta(2q)$$

$$-(2q-1)!\sum_{k=1}^{q-1}\eta(2k)\eta(2q-2k+1) \tag{3.50}$$

For a short and different method to derive (3.50), divide both sides of (1.101):

$$\int_0^1 \frac{(1+2xy+x^2)\ln^{2q-1}(y)}{(1+xy)(x+y)}\mathrm{d}y=-2(2q-1)!\sum_{k=0}^{q}\frac{\eta(2q-2k)}{(2k)!}\ln^{2k}(x)$$

by $1+x$ then integrate using $\int_0^1 \frac{\ln^a(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x=(-1)^a a!\eta(a+1)$, we have

$$-2(2q-1)!\sum_{k=0}^{q}\eta(2q-2k)\eta(2k+1)$$

$$=\int_0^1\int_0^1 \frac{(1+2xy+x^2)\ln^{2q-1}(y)}{(1+x)(1+xy)(x+y)}\mathrm{d}y\ \mathrm{d}x$$

{change the order of integration}

$$=\int_0^1 \ln^{2q-1}(y)\left(\int_0^1 \frac{1+2xy+x^2}{(1+xy)(x+y)(1+x)}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 \ln^{2q-1}(y)\left(\frac{2\ln(1+y)}{1-y}+\frac{\ln(1+y)}{y}-\frac{\ln(y)}{1-y}-\frac{2\ln(2)}{1-y}\right)\mathrm{d}y$$

{ integrate the second integral by parts }

$$=2\int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(y)\ln(1+y)}{1-y}\,\mathrm{d}y-\frac{1}{2q}\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(y)}{1+y}\,\mathrm{d}y$$

$$-\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y-2\ln(2)\int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(y)\ln(1+y)}{1-y}\,\mathrm{d}y-(2q-1)!\eta(2q+1)$$

$$-(2q)!\zeta(2q+1)+2(2q-1)!\ln(2)\zeta(2q)$$

For the sum, separate the first and last terms,

$$\sum_{k=0}^{q} \eta(2q-2k)\eta(2k+1)$$
$$= \eta(2q)\eta(1) + \eta(2q+1)\eta(0) + \sum_{k=1}^{q-1} \eta(2q-2k)\eta(2k+1)$$

{use the rule (1.2) for the sum}

$$= \ln(2)\eta(2q) + \frac{1}{2}\eta(2q+1) + \sum_{k=1}^{q-1} \eta(2k)\eta(2q-2k+1)$$

Thus, we have

$$\int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(y)\ln(1+y)}{1-y}\,\mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{2}(2q)!\zeta(2q+1) - 2(2q-1)!\left(1-2^{-2q}\right)\ln(2)\zeta(2q)$$
$$-(2q-1)!\sum_{k=1}^{q-1} \eta(2k)\eta(2q-2k+1)$$

which matches (3.50).

### 3.1.25 $\int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1+x)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

Let $q \in \mathbb{Z}_{>1}$. Then the following identity holds:

$$\int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1+x)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = -(2q-1)!\left(1-\frac{1}{2^{2q}}\right)\ln(2)\zeta(2q)$$
$$+\frac{1}{2}(2q-1)(2q-1)!\left(1-\frac{1}{2^{2q+1}}\right)\zeta(2q+1)$$
$$-(2q-1)!\sum_{k=1}^{q-1}\left(1-2^{2k-2q-1}\right)\eta(2k)\zeta(2q-2k+1) \tag{3.51}$$

**Proof**

$$\int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1+x)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1+x)}{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

These two integrals are given in (3.38) and (3.50) respectively.

Examples:

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1+x)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{7}{16}\zeta(3) - \frac{3}{4}\ln(2)\zeta(2);$$

$$\int_0^1 \frac{\ln^3(x)\ln(1+x)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{279}{32}\zeta(5) - \frac{45}{8}\ln(2)\zeta(4) - \frac{21}{8}\zeta(2)\zeta(3);$$

$$\int_0^1 \frac{\ln^5(x)\ln(1+x)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{9525}{32}\zeta(7) - \frac{945}{8}\ln(2)\zeta(6) - \frac{465}{8}\zeta(2)\zeta(5) - \frac{735}{8}\zeta(3)\zeta(4);$$

$$\int_0^1 \frac{\ln^7(x)\ln(1+x)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1126755}{64}\zeta(9) - \frac{80325}{16}\ln(2)\zeta(8) - \frac{40005}{16}\zeta(2)\zeta(7) - \frac{68355}{16}\zeta(3)\zeta(6) - \frac{68355}{16}\zeta(4)\zeta(5).$$

**3.1.26** $\int_0^1 \frac{\ln^{2q-2}(x)\ln(1-x)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$

Let $q \in \mathbb{Z}^+$. Then the following identity holds:

$$\int_0^1 \frac{\ln^{2q-2}(x)\ln(1-x)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{2q+1}{2^{2q+1}} - 1\right)(2q-2)!\zeta(2q+1) + (2q-2)!\sum_{k=1}^{q-1}\left(2^{1-2k} - 2^{1-2q}\right)\zeta(2k)\zeta(2q-2k+1) \tag{3.52}$$

Proof. Write

$$\ln(1-x)\ln(1+x) = \frac{1}{2}\ln^2\left(1-x^2\right) - \frac{1}{2}\ln^2(1-x) - \frac{1}{2}\ln^2(1+x)$$

to have

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln^{2q-2}(x)\ln(1-x)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^1 \frac{\ln^{2q-2}(x)\ln^2\left(1-x^2\right)}{x}\,\mathrm{d}x}_{x^2\to x} \\
&\quad - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^{2q-2}(x)\ln^2(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^{2q-2}(x)\ln^2(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2^{1-2q}-1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^{2q-2}(x)\ln^2(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^{2q-2}(x)\ln^2(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2^{1-2q}-1}{2q-1}\int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2q-1}\int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

These two integrals are given in (3.43) and (3.38) respectively.
A different proof may be found in [31].

**Examples:**

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x = -\frac{5}{8}\zeta(3);$$
$$\int_0^1 \frac{\ln^2(x)\ln(1-x)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\zeta(2)\zeta(3) - \frac{27}{16}\zeta(5);$$
$$\int_0^1 \frac{\ln^4(x)\ln(1-x)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{9}{4}\zeta(3)\zeta(4) + \frac{45}{4}\zeta(2)\zeta(5) - \frac{363}{16}\zeta(7);$$
$$\int_0^1 \frac{\ln^6(x)\ln(1-x)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{135}{8}\zeta(3)\zeta(6) + \frac{675}{8}\zeta(4)\zeta(5)$$
$$+\frac{2835}{8}\zeta(2)\zeta(7) - \frac{22635}{32}\zeta(9).$$

3.1.27 $\int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x$
Let $q \in \mathbb{Z}^+$. Then the following identity holds:

$$\int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = 2(2q-1)!\left(\frac{1}{2^{2q}}-1\right)\ln(2)\zeta(2q)$$
$$+(2q-1)!\left(q+1-\frac{2q+1}{2^{2q+1}}\right)\zeta(2q+1)$$
$$-(2q-1)!\sum_{k=1}^{q-1}\zeta(2k)\eta(2q-2k+1) \tag{3.53}$$

Proof. Force integration by parts,

$$\int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1+x)}{1-x}\,\mathrm{d}x - (2q-1)\int_0^1 \frac{\ln^{2q-2}(x)\ln(1-x)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

These two integrals are given in (3.50) and (3.52) respectively.
Examples:

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{13}{8}\zeta(3) - \frac{3}{2}\ln(2)\zeta(2);$$
$$\int_0^1 \frac{\ln^3(x)\ln(1-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{273}{16}\zeta(5) - \frac{9}{2}\zeta(2)\zeta(3) - \frac{45}{4}\ln(2)\zeta(4);$$
$$\int_0^1 \frac{\ln^5(x)\ln(1-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{7575}{16}\zeta(7) - \frac{225}{2}\zeta(2)\zeta(5) - 90\zeta(3)\zeta(4)$$
$$-\frac{945}{4}\ln(2)\zeta(6);$$
$$\int_0^1 \frac{\ln^7(x)\ln(1-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{803565}{32}\zeta(9) - \frac{19845}{4}\zeta(2)\zeta(7) - 4725\zeta(4)\zeta(5)$$
$$-3780\zeta(3)\zeta(6) - \frac{80325}{8}\ln(2)\zeta(8).$$

The following integral is related:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1-x)}{x(1+x)}\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x\\
&\qquad \{\text{ group the results (3.9) and (3.53)}\}\\
&= -(2q-1)!\left[\left(q-\frac{2q+1}{2^{2q+1}}\right)\zeta(2q+1) - 2\left(1-\frac{1}{2^{2q}}\right)\ln(2)\zeta(2q)\right.\\
&\qquad \left. - \sum_{k=1}^{q-1}\zeta(2k)\eta(2q-2k+1)\right]. \qquad (3.54)
\end{aligned}$$

**3.1.28** $\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(x)\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Let $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Then the following identity holds:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(x)\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \frac{(2q)!}{2}\ln(2)\beta(2q+1) - \frac{(2q+1)!}{2}\beta(2q+2)\\
&\quad + (2q)!\sum_{k=0}^{q}\eta(2q-2k)\beta(2k+2) \qquad (3.55)
\end{aligned}$$

Proof. Divide both sides of (1.100):

$$-2(2q)!\sum_{k=0}^{q}\frac{\eta(2q-2k)}{(2k+1)!}\ln^{2k+1}(x) = \int_0^1 \frac{(1-x^2)\ln^{2q}(y)}{(1+xy)(x+y)}\mathrm{d}y$$

by $1+x^2$ then integrate from $x=0\to 1$ using $\int_0^1 \frac{\ln^a(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = (-1)^a a!\beta(a+1)$, which is given in (1.62), we get

$$\begin{aligned}
2(2q)!\sum_{k=0}^{q}\eta(2q-2k)\beta(2k+2) &= \int_0^1\int_0^1 \frac{(1-x^2)\ln^{2q}(y)}{(1+x^2)(1+xy)(x+y)}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\\
&\qquad \{\text{ change the order of integration }\}\\
&= \int_0^1 \ln^{2q}(y)\left(\int_0^1 \frac{1-x^2}{(1+x^2)(1+xy)(x+y)}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\
&= \int_0^1 \ln^{2q}(y)\left(\frac{2\ln(1+y)-\ln(y)-\ln(2)}{1+y^2}\right)\mathrm{d}y\\
&= 2\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(y)\ln(1+y)}{1+y^2}\,\mathrm{d}y - \int_0^1 \frac{\ln^{2q+1}(y)}{1+y^2}\,\mathrm{d}y - \ln(2)\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(y)}{1+y^2}\,\mathrm{d}y\\
&=2\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(x)\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + (2q+1)!\beta(2q+2) - (2q)!\ln(2)\beta(2q+1)
\end{aligned}$$

**Examples:**

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\ln(2);$$

$$\int_0^1 \frac{\ln^2(x)\ln(1+x)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = G\zeta(2) + \ln(2)\beta(3) - 2\beta(4);$$

$$\int_0^1 \frac{\ln^4(x)\ln(1+x)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = 21G\zeta(4) + 12\zeta(2)\beta(4) + 12\ln(2)\beta(5) - 48\beta(6);$$

$$\int_0^1 \frac{\ln^6(x)\ln(1+x)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{1395}{2}G\zeta(6) + 630\zeta(4)\beta(4) + 360\zeta(2)\beta(6) + 360\ln(2)\beta(7) - 2160\beta(8).$$

The integral $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$ is also calculated in (3.96).
The following is a related integral:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{\ln^{2q}(x)\ln(1+x)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{\ln^{2q}(x)\ln(1+x)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x + \underbrace{\int_1^\infty \frac{\ln^{2q}(x)\ln(1+x)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x}_{x\to 1/x} \\
&= 2\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(x)\ln(1+x)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\ln^{2q+1}(x)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x \\
&\qquad \{\text{ recall the results (3.55) and (1.62)}\} \\
&= (2q)!\ln(2)\beta(2q+1) + 2(2q)!\sum_{k=0}^{q}\eta(2q-2k)\beta(2k+2).
\end{aligned} \tag{3.56}$$

**3.1.29** $\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(x)\ln(1-x)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$

Let $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Then the following identity holds:

$$\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(x)\ln(1-x)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{(2q)!}{2}\ln(2)\beta(2q+1) - \frac{(2q+1)!}{2}\beta(2q+2) + (2q)!\sum_{k=0}^{q}\zeta(2q-2k)\beta(2k+2) \tag{3.57}$$

Proof. Divide both sides of (1.111):

$$-2(2q)!\sum_{k=0}^{q}\frac{\zeta(2q-2k)}{(2k+1)!}\ln^{2k+1}(x) = \text{P.V.}\int_0^1 \frac{(1-x^2)\ln^{2q}(y)}{(1-xy)(x-y)}\mathrm{d}y$$

by $1+x^2$ then integrate from $x = 0 \to 1$,

$$
\begin{aligned}
2(2q)!\sum_{k=0}^{q}\zeta(2q-2k)\beta(2k+2) &= \int_0^1\left[\text{ P. V. }\int_0^1 \frac{(1-x^2)\ln^{2q}(y)\mathrm{d}y}{(1+x^2)(1-yx)(x-y)}\right]\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 \ln^{2q}(y)\left[\text{ P. V. }\int_0^1 \frac{1-x^2}{(1+x^2)(1-yx)(x-y)}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\\
&= \int_0^1 \ln^{2q}(y)\left[\Re\left(\frac{2\ln(1-y)-\ln(-2y)}{1+y^2}\right)\right]\mathrm{d}y\\
&= \int_0^1 \ln^{2q}(y)\left[\Re\left(\frac{2\ln(1-y)-\ln(y)-\ln(2)-i\pi}{1+y^2}\right)\right]\mathrm{d}y\\
&= 2\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(y)\ln(1-y)}{1+y^2}\,\mathrm{d}y-\int_0^1 \frac{\ln^{2q+1}(y)}{1+y^2}\,\mathrm{d}y-\int_0^1 \frac{\ln(2)\ln^{2q}(y)}{1+y^2}\,\mathrm{d}y\\
&= 2\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(y)\ln(1-y)}{1+y^2}\,\mathrm{d}y+(2q+1)!\beta(2q+2)-(2)!\ln(2)\beta(2q+1)
\end{aligned}
$$

Note that we considered only the real part because P. V. integral is always real.

**Examples:**

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}\ln(2)-G$$

$$\int_0^1 \frac{\ln^2(x)\ln(1-x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=2G\zeta(2)+\ln(2)\beta(3)-4\beta(4)$$

$$\int_0^1 \frac{\ln^4(x)\ln(1-x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=24G\zeta(4)+24\zeta(2)\beta(4)+12\ln(2)\beta(5)-72\beta(6)$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln^6(x)\ln(1-x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= 720G\zeta(6)+720\zeta(4)\beta(4)+720\zeta(2)\beta(6)\\
&\quad +360\ln(2)\beta(7)-2880\beta(8)
\end{aligned}
$$

The integral $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ is also calculated in (3.97).

3.1.30 $\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(x)\ln\left(1-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Let $q\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Then the following identity holds:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(x)}{1}\ln\left(1-x^2\right)\\
&\quad + x^2\\
&\quad + 2(2q)!\sum_{k=0}^{q}\left(1-2^{2k-2q}\right)\zeta(2q-2k)\beta(2k+2)
\end{aligned}
\tag{3.58}
$$

Proof. By writing $\ln\left(1-x^2\right)=\ln(1-x)+\ln(1+x)$, we have

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(x)\ln\left(1-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 \frac{\ln^{2q}(x)\ln(1-x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x+\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(x)\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

These two integral are given in (3.57) and (3.55) respectively.

3.1.31 $\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(x)\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Let $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Then the following identity holds:

$$\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(x)\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{(2q)!}{2^{2q-1}}\sum_{k=0}^{q} 2^{2k}\zeta(2q-2k)\beta(2k+2). \tag{3.59}$$

Proof. Set $z = x^2$ in (1.111), we get

$$-4(2q)!\sum_{k=0}^{q} 2^{2k}\frac{\zeta(2q-2k)}{(2k+1)!}\ln^{2k+1}(x) = \text{P.V.}\int_0^1 \frac{(1-x^4)\ln^{2q}(y)}{(1-yx^2)(x^2-y)}\mathrm{d}y.$$

Divide both sides by $1+x^2$ then integrate from $x = 0 \to 1$,

$$\begin{aligned}
4(2q)!\sum_{k=0}^{q} 2^{2k}\zeta(2q-2k)\beta(2k+2) &= \int_0^1 \left[\text{P.V.}\int_0^1 \frac{(1-x^2)\ln^{2q}(y)}{(1-yx^2)(x^2-y)}\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \ln^{2q}(y)\left[\text{P.V.}\int_0^1 \frac{1-x^2}{(1-yx^2)(x^2-y)}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \ln^{2q}(y)\left[\Re\left(\frac{-\operatorname{arctanh}(\sqrt{y})-\operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)}{\sqrt{y}(1+y)}\right)\right]\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \frac{\ln^{2q}(y)}{\sqrt{y}(1+y)}\left[\Re\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\sqrt{y}}{1+\sqrt{y}}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\frac{1}{\sqrt{y}}}{1+\frac{1}{\sqrt{y}}}\right)\right)\right]\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \frac{\ln^{2q}(y)}{\sqrt{y}(1+y)}\left[\Re\left(\ln\left(\frac{1-\sqrt{y}}{1+\sqrt{y}}\right)+\frac{i\pi}{2}\right)\right]\mathrm{d}y \\
&\overset{\sqrt{y}=x}{=} 2^{2q+1}\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(x)\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

A different proof is by taking the difference of (3.55) and (3.57).

### 3.1.32 $\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(x)\arctan(x)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

Let $q \in \mathbb{Z}^+$. Then the following identity holds:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(x)\arctan(x)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= (2q)!\left(1-\frac{1}{2^{2q+1}}\right)\frac{\pi}{4}\zeta(2q+1) \\
&\quad -\frac{(2q)!}{4^q}\sum_{k=0}^{q} 2^{2k}\eta(2q-2k)\beta(2k+2)
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Proof. Set $z = x^2$ in (1.100), we have

$$-4(2q)!\sum_{k=0}^{q} 2^{2k}\frac{\eta(2q-2k)}{(2k+1)!}\ln^{2k+1}(x) = \int_0^1 \frac{(1-x^4)\ln^{2q}(y)}{(1+x^2y)(x^2+y)}\mathrm{d}y$$

Divide both sides by $1+x^2$ then integrate from $x = 0 \to 1$,

$$4(2q)!\sum_{k=0}^{q}2^{2k}\eta(2q-2k)\beta(2k+2)=\int_0^1\int_0^1\frac{(1-x^2)\ln^{2q}(y)}{(1+x^2y)\,(x^2+y)}\mathrm{d}y\ \mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\ln^{2q}(y)\left(\int_0^1\frac{1-x^2}{(1+x^2y)\,(x^2+y)}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\ln^{2q}(y)\left(\frac{\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)-\arctan(\sqrt{y})}{\sqrt{y}(1-y)}\right)\mathrm{d}y$$

$$\overset{\sqrt{y}=x}{=}2^{2q+1}\int_0^1\ln^{2q}(x)\left(\frac{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)-\arctan(x)}{1-x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$\{\text{ use }\ \arctan(1/x)=\pi/2-\arctan(x)\ \text{ for }\ x>0\}$$

$$=2^{2q}\pi\int_0^1\frac{\ln^{2q}(x)}{1-x^2}\ \mathrm{d}x-2^{2q+2}\int_0^1\frac{\ln^{2q}(x)\arctan(x)}{1-x^2}\ \mathrm{d}x. \tag{3.61}$$

Employ (3.14) for the first integral and the proof is finalized.

**Examples:**

$$\int_0^1\frac{\ln^2(x)\arctan(x)}{1-x^2}\ \mathrm{d}x=\frac{7\pi}{16}\zeta(3)-\frac{1}{4}G\zeta(2)-\beta(4)$$

$$\int_0^1\frac{\ln^4(x)\arctan(x)}{1-x^2}\ \mathrm{d}x=\frac{93\pi}{16}\zeta(5)-\frac{21}{16}G\zeta(4)-3\zeta(2)\beta(4)-12\beta(6)$$

$$\int_0^1\frac{\ln^6(x)\arctan(x)}{1-x^2}\ \mathrm{d}x=\frac{5715\pi}{32}\zeta(7)-\frac{1395}{128}G\zeta(6)-\frac{315}{8}\zeta(4)\beta(4)$$
$$-90\zeta(2)\beta(6)-360\beta(8)$$

$$\int_0^1\frac{\ln^8(x)\arctan(x)}{1-x^2}\ \mathrm{d}x=\frac{160965\pi}{16}\zeta(9)-\frac{40005}{256}G\zeta(8)-\frac{9765}{16}\zeta(6)\beta(4) \tag{4}$$
$$-2205\zeta(4)\beta(6)-5040\zeta(2)\beta(8)-20160\beta(10)$$

If we let $x=\frac{1-y}{1+y}$ then write $\arctan\left(\frac{1-y}{1+y}\right)=\frac{\pi}{4}-\arctan(y)$, we get

$$\int_0^1\frac{\ln^{2q}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\arctan(x)}{x}\ \mathrm{d}x=2\int_0^1\frac{\ln^{2q}(y)\left(\frac{\pi}{4}-\arctan(y)\right)}{1-y^2}\ \mathrm{d}y$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1\frac{\ln^{2q}(y)}{1-y^2}\ \mathrm{d}y-2\int_0^1\frac{\ln^{2q}(y)\arctan(y)}{1-y^2}\ \mathrm{d}y$$

$$\{\text{ recall the relation (3.61)}\}$$

$$=\frac{(2q)!}{2^{2q-1}}\sum_{k=0}^{q}2^{2k}\eta(2q-2k)\beta(2k+2) \tag{3.62}$$

**3.1.33** $\int_0^1\frac{\ln^{q-1}(x)\ln\left(1+x^2\right)}{1-x^2}\ \mathrm{d}x$

Let $q\in\mathbb{Z}_{>1}$. Then the following identity holds:

$$\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(x)\ln\left(1+x^2\right)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = (-1)^q(q-1)!\left(\frac{1}{2^q}-1\right)\ln(2)\zeta(q)$$
$$+(-1)^q q!\left(1-\frac{1}{2^{q+1}}\right)\zeta(q+1)$$
$$-(-1)^q(q-1)!\sum_{k=0}^{q-1}\beta(q-k)\beta(k+1) \tag{3.63}$$

The following proof is due to Sean Stewart [23, p. 92-95]:

Proof. Using the special case of the Leibniz integral rule [49]:

$$\frac{d}{dx}\int_a^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t = g(f(x))\cdot\frac{d}{dx}f(x)$$

where $a$ is a constant, we can write

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\ln^{q-1}(t)}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln^{q-1}(x)}{1-x^2}$$

Multiply both sides by $\ln\left(1+x^2\right)$ then integrate from $x=0\to 1$,

$$\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(x)\ln\left(1+x^2\right)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)\left(\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{\ln^{q-1}(t)}{1-t^2}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$
$$\overset{\text{IBP}}{=} \ln\left(1+x^2\right)\int_0^x \frac{\ln^{q-1}(t)}{1-t^2}\,\mathrm{d}t\bigg|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\left(\int_0^x \frac{\ln^{q-1}(t)}{1-t^2}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$
$$\overset{t=xu}{=} \ln(2)\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(t)}{1-t^2}\,\mathrm{d}t - 2\int_0^1\int_0^1 \frac{x^2\ln^{q-1}(xu)}{\left(1+x^2\right)\left(1-x^2u^2\right)}\mathrm{d}u\ \mathrm{d}x \tag{3.64}$$
$$\left\{\text{write } \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)\left(1-x^2u^2\right)} = \frac{1}{\left(1+u^2\right)\left(1-x^2u^2\right)} - \frac{1}{\left(1+u^2\right)\left(1+x^2\right)}\right\}$$
$$= \ln(2)\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(t)}{1-t^2}\,\mathrm{d}t + 2\int_0^1\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(xu)}{\left(1+x^2\right)\left(1+u^2\right)}\mathrm{d}u\ \mathrm{d}x$$
$$-2\underbrace{\int_0^1\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(xu)}{\left(1+u^2\right)\left(1-x^2u^2\right)}\mathrm{d}u\ \mathrm{d}x}_{0}$$
$$= \ln(2)\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(t)}{1-t^2}\,\mathrm{d}t + 2\int_0^1\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(xu)}{\left(1+x^2\right)\left(1+u^2\right)}\mathrm{d}u\ \mathrm{d}x$$
$$-2\int_0^1\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(xu)}{\left(1+x^2\right)\left(1-x^2u^2\right)}\mathrm{d}u\ \mathrm{d}x$$

{add step (3.64) to both sides then divide by two }

$$= \ln(2)\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(t)}{1-t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(xu)}{\left(1+x^2\right)\left(1+u^2\right)}\mathrm{d}u\ \mathrm{d}x$$
$$-\int_0^1\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(xu)}{1-x^2u^2}\,\mathrm{d}u\ \mathrm{d}x$$

First integral: Employ the result (3.14),

$$\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(t)}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = (-1)^{q-1}(q-1)!\left(1-\frac{1}{2^q}\right)\zeta(q).$$

Second integral: Use the binomial theorem,

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(xu)}{(1+x^2)(1+u^2)}\mathrm{d}x\ \mathrm{d}u = \int_0^1\int_0^1 \frac{[\ln(x)+\ln(u)]^{q-1}}{(1+x^2)(1+u^2)}\mathrm{d}x\ \mathrm{d}u$$
$$= \int_0^1\int_0^1 \frac{\sum_{k=0}^{q-1}\binom{q-1}{k}\ln^{q-k-1}(u)\ln^k(x)}{(1+x^2)(1+u^2)}\mathrm{d}x\ \mathrm{d}u$$
$$= \sum_{k=0}^{q-1}\binom{q-1}{k}\left(\int_0^1 \frac{\ln^{q-k-1}(u)}{1+u^2}\ \mathrm{d}u\right)\left(\int_0^1 \frac{\ln^k(x)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x\right)$$
$$\{\text{make use of the result (1.62)}\}$$
$$= \sum_{k=0}^{q-1}\binom{q-1}{k}\left((-1)^{(q-k-1)}(q-k-1)!\beta(q-k)\right)\left((-1)^k k!\beta(k+1)\right)$$
$$= (-1)^{q-1}(q-1)!\sum_{k=0}^{q-1}\beta(q-k)\beta(k+1)$$

Third integral: Let $x=\frac{t}{u}$,

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(xu)}{1-x^2u^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}u = \int_0^1\int_0^u \frac{\ln^{q-1}(t)}{u(1-t^2)}\mathrm{d}t\ \mathrm{d}u$$
$$= \int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(t)}{1-t^2}\left(\int_t^1 \frac{\mathrm{d}u}{u}\right)\mathrm{d}t$$
$$= -\int_0^1 \frac{\ln^q(t)}{1-t^2}\ \mathrm{d}t$$
$$= (-1)^{q-1}q!\left(1-\frac{1}{2^{q+1}}\right)\zeta(q+1)$$

Grouping the three integrals completes the proof.
Examples:

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1+x^2)}{1-x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{7}{4}\zeta(3)-\frac{3}{4}\ln(2)\zeta(2)-\frac{\pi}{2}G;$$
$$\int_0^1 \frac{\ln^2(x)\ln(1+x^2)}{1-x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{7}{4}\ln(2)\zeta(3)-\frac{45}{16}\zeta(4)+2G^2;$$
$$\int_0^1 \frac{\ln^3(x)\ln(1+x^2)}{1-x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{93}{4}\zeta(5)-\frac{45}{8}\ln(2)\zeta(4)-12G\beta(3)-3\pi\beta(4);$$
$$\int_0^1 \frac{\ln^4(x)\ln(1+x^2)}{1-x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{93}{4}\ln(2)\zeta(5)-\frac{12285}{128}\zeta(6)+48G\beta(4)+12\pi\beta(5)$$

### 3.1.34 $\int_0^1 x^{n-1}\operatorname{Li}_q(x)\mathrm{d}x$

Let $q\in\mathbb{Z}^+$. Then the following identity holds

$$\int_0^1 x^{n-1}\operatorname{Li}_q(x)\mathrm{d}x = (-1)^{q-1}\frac{H_n}{n^q}-\sum_{k=1}^{q-1}\frac{(-1)^k}{n^k}\zeta(q-k+1) \tag{3.65}$$

Proof. Let's evaluate the following integrals:

$$\int_0^1 x^{n-1}\operatorname{Li}_2(x)\mathrm{d}x \overset{\text{IBP}}{=} \frac{x^n}{n}\operatorname{Li}_2(x)\Big|_0^1 + \frac{1}{n}\int_0^1 x^{n-1}\ln(1-x)\mathrm{d}x$$

$$\{\text{ recall the result (1.124)}\}$$

$$= \frac{\zeta(2)}{n} + \frac{1}{n}\left(-\frac{H_n}{n}\right)$$

$$= \frac{\zeta(2)}{n} - \frac{H_n}{n^2} \tag{3.66}$$

$$\int_0^1 x^{n-1}\operatorname{Li}_3(x)\mathrm{d}x \overset{\text{IBP}}{=} \frac{x^n}{n}\operatorname{Li}_3(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{n}\int_0^1 x^{n-1}\operatorname{Li}_2(x)\mathrm{d}x$$

$$\{\text{ substitute the result (3.66)}\}$$

$$= \frac{\zeta(3)}{n} - \frac{1}{n}\left(\frac{\zeta(2)}{n} - \frac{H_n}{n^2}\right)$$

$$= \frac{\zeta(3)}{n} - \frac{\zeta(2)}{n^2} + \frac{H_n}{n^3}$$

$$\int_0^1 x^{n-1}\operatorname{Li}_4(x)\mathrm{d}x = \frac{x^n}{n}\operatorname{Li}_4(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{n}\int_0^1 x^{n-1}\operatorname{Li}_3(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\zeta(4)}{n} - \frac{1}{n}\left(\frac{\zeta(3)}{n} - \frac{\zeta(2)}{n^2} + \frac{H_n}{n^3}\right)$$

$$= \frac{\zeta(4)}{n} - \frac{\zeta(3)}{n^2} + \frac{\zeta(2)}{n^3} - \frac{H_n}{n^4} \tag{3.67}$$

In general, we have

$$\int_0^1 x^{n-1}\operatorname{Li}_q(x)\mathrm{d}x = \frac{\zeta(q)}{n} - \frac{\zeta(q-1)}{n^2} + \ldots + (-1)^q\frac{\zeta(2)}{n^{q-1}} + (-1)^{q-1}\frac{H_n}{n^q}$$

$$= \sum_{k=1}^{q-1}(-1)^{k-1}\frac{\zeta(q-k+1)}{n^k} + (-1)^{q-1}\frac{H_n}{n^q}$$

**3.1.35** $\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(1-x)\operatorname{Li}_2(x)}{x}\,\mathrm{d}x$

Let $q \in \mathbb{Z}^+$. Then the following identity holds:

$$\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(1-x)\operatorname{Li}_2(x)}{x}\,\mathrm{d}x = (2q)!\left(1 - \frac{q(2q+1)}{2}\right)\zeta(2q+3)$$
$$+(2q)!\sum_{k=1}^{q}(2k-1)\zeta(2q-2k+3)\zeta(2k) \tag{3.69}$$

Proof. With subbing $1-x=y$, we have

$$\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(1-x)\operatorname{Li}_2(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\ln^{2q}(y)\operatorname{Li}_2(1-y)}{1-y}\,\mathrm{d}y$$

$$\{\text{recall the dilogarithm reflection formula (1.80)}\}$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln^{2q}(y)}{1-y}\left(\zeta(2) - \ln(y)\ln(1-y) - \operatorname{Li}_2(y)\right)\mathrm{d}y$$

$$= \zeta(2)\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y - \int_0^1 \frac{\ln^{2q+1}(y)\ln(1-y)}{1-y}\,\mathrm{d}y - \int_0^1 \frac{\ln^{2q}(y)\operatorname{Li}_2(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y.$$

The first integral is given in (3.8). For the second, let $q \to q+1$ in (3.43),

$$\int_0^1 \frac{\ln^{2q+1}(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(2q+2)!\zeta(2q+3)$$
$$-(2q+1)!\sum_{k=1}^{q}\zeta(2q-2k+3)\zeta(2k)$$

For the third integral, expand $\frac{\operatorname{Li}_2(y)}{1-y}$ in series as shown in (2.3),

$$\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(y)\operatorname{Li}_2(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{\infty} H_{n-1}^{(2)}\int_0^1 y^{n-1}\ln^{2q}(y)\mathrm{d}y$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^{(2)} - \frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{(2q)!}{n^{2q+1}}\right)$$
$$= (2q)!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^{2q+1}} - (2q)!\zeta(2q+3)$$

{ replace $q$ with $q+1$ in (4.21) to get this sum }

$$= (2q)!\zeta(2)\zeta(2q+1) - \left(\frac{1}{2}(q+2)(2q+1)+1\right)(2q)!\zeta(2q+3)$$
$$+2(2q)!\sum_{k=1}^{q}k\zeta(2q-2k+2)\zeta(2k+1)$$

{reverse the order of the sum terms using (1.2)}

$$= (2q)!\zeta(2)\zeta(2q+1) - \left(\frac{1}{2}(q+2)(2q+1)+1\right)(2q)!\zeta(2q+3)$$
$$+2(2q)!\sum_{k=1}^{q}(q-k+1)\zeta(2q-2k+3)\zeta(2k)$$

Group the three integrals to finalize the proof.

**Examples:**

$$\int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)\operatorname{Li}_2(x)}{x}\,\mathrm{d}x = 2\zeta(2)\zeta(3) - \zeta(5)$$
$$\int_0^1 \frac{\ln^4(1-x)\operatorname{Li}_2(x)}{x}\,\mathrm{d}x = 24\zeta(2)\zeta(5) + 72\zeta(3)\zeta(4) - 96\zeta(7)$$
$$\int_0^1 \frac{\ln^6(1-x)\operatorname{Li}_2(x)}{x}\,\mathrm{d}x = 360\zeta(3)\zeta(6) + 2160\zeta(4)\zeta(5) + 7200\zeta(2)\zeta(7)$$
$$-6840\zeta(9)$$
$$\int_0^1 \frac{\ln^8(1-x)\operatorname{Li}_2(x)}{x}\,\mathrm{d}x = 282240\zeta(3)\zeta(8) + 120960\zeta(4)\zeta(7) + 201600\zeta(5)\zeta(6)$$
$$+40320\zeta(2)\zeta(9) - 685440\zeta(11)$$

**3.1.36** $\int_0^\infty \frac{\mathrm{Li}_q\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Let $q \in \mathbb{Z}^+$. Then the following identity holds:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Li}_q\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -2^{q-1}\pi\eta(q) \tag{3.70}$$

Proof. By writing the integral representation of $\mathrm{Li}_q\left(-x^2\right)$, we have

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\mathrm{Li}_q\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{(-1)^q}{(q-1)!}\int_0^1 \frac{x^2\ln^{q-1}(y)}{1+x^2y}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{(-1)^q}{(q-1)!}\int_0^1 \ln^{q-1}(y)\left(\int_0^\infty \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^2y\right)}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\
&= \frac{(-1)^q}{(q-1)!}\int_0^1 \ln^{q-1}(y)\left(\frac{\pi}{2}\frac{1}{y+\sqrt{y}}\right)\mathrm{d}y \\
&\overset{\sqrt{y}=x}{=} \frac{(-1)^q 2^{q-1}\pi}{(q-1)!}\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

This integral is given in (1.53).

**Examples:**

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\mathrm{Li}_1\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= -\pi\ln(2) \\
\int_0^\infty \frac{\mathrm{Li}_2\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= -\frac{\pi^3}{6} \\
\int_0^\infty \frac{\mathrm{Li}_3\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= -3\pi\zeta(3) \\
\int_0^\infty \frac{\mathrm{Li}_4\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= -\frac{7\pi^5}{90}
\end{aligned}$$

**3.1.37** $\int_0^\infty \frac{\mathrm{Li}_q(-x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Let $q \in \mathbb{Z}^+$. Then the following identity holds:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Li}_q(-x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{-\pi}{2^{q+1}}\eta(q) - q\beta(q+1) \tag{3.71}$$

Proof. Following the previous proof,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\mathrm{Li}_q(-x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{(-1)^q}{(q-1)!}\int_0^1 \frac{x\ln^{q-1}(y)}{1+xy}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{(-1)^q}{(q-1)!}\int_0^1 \ln^{q-1}(y)\left(\int_0^\infty \frac{x}{\left(1+x^2\right)(1+xy)}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\
&= \frac{(-1)^q}{(q-1)!}\int_0^1 \ln^{q-1}(y)\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{1+y^2} - \frac{\ln(y)}{1+y^2}\right)\mathrm{d}y \\
&= \frac{(-1)^q\pi}{2(q-1)!}\int_0^1 \frac{y\ln^{q-1}(y)}{1+y^2}\,\mathrm{d}y - \frac{(-1)^q}{(q-1)!}\int_0^1 \frac{\ln^q(y)}{1+y^2}\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

These two integrals are given in (3.13) and (1.62) respectively.

**Examples:**

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Li}_1(-x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4}\ln(2) - G$$
$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Li}_2(-x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi^3}{96} - 2\beta(3)$$
$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Li}_3(-x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{3\pi}{64}\zeta(3) - 3\beta(4)$$
$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{Li}_4(-x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{7\pi^5}{23040} - 4\beta(5)$$

### 6.6.3 3.1 Generalized Logarithmic Integrals 3

**3.1.38** $\int_0^1 \frac{Li_q(-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x$

Let $q \in \mathbb{Z}_{>1}$. Then the following identity holds:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_q(-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{q}{2} + \frac{1}{2^q} - 1\right)\zeta(q+1) - \ln(2)\eta(q) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{q-2}\eta(k+1)\eta(q-k) \tag{3.72}$$

Proof. Using $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x(1+x)}$, we have

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_q(-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_q(-x)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_q(-x)}{x(1+x)}\mathrm{d}x$$
$$= \mathrm{Li}_{q+1}(-x)\big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x}\left(\frac{(-1)^q}{(q-1)!}\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(y)}{1+xy}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$
$$= \mathrm{Li}_{q+1}(-1) - \frac{(-1)^q}{(q-1)!}\int_0^1 \ln^{q-1}(y)\left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)(1+yx)}\right)\mathrm{d}y$$
$$= -\left(1-2^{-q}\right)\zeta(q+1) - \frac{(-1)^q}{(q-1)!}\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(y)\ln\left(\frac{2}{1+y}\right)}{1-y}\,\mathrm{d}y$$

This integral is calculated in (3.47).

**Examples:**

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_2(-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\zeta(3) - \frac{1}{2}\ln(2)\zeta(2);$$
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_3(-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{16}\zeta(4) - \frac{3}{4}\ln(2)\zeta(3);$$
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_4(-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{17}{16}\zeta(5) - \frac{7}{8}\ln(2)\zeta(4) - \frac{3}{8}\zeta(2)\zeta(3);$$
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_5(-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{49}{64}\zeta(6) - \frac{9}{32}\zeta^2(3) - \frac{15}{16}\ln(2)\zeta(5).$$

**3.1.39** $\int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_{2q}(x)}{1+x}\ \mathrm{d}x$

Let $q \in \mathbb{Z}^+$. Then the following identity holds:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_{2q}(x)}{1+x}\ \mathrm{d}x = \ln(2)\zeta(2q) - \left(q - \frac{2q+1}{2^{2q+1}}\right)\zeta(2q+1) + \sum_{k=1}^{q-1}\left(1 - 2^{2k-2q}\right)\zeta(2k)\zeta(2q-2k+1) \tag{3.73}$$

**Proof**

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_{2q}(x)}{1+x}\ \mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_{2q}(x)}{x}\ \mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_{2q}(x)}{x(1+x)}\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{Li}_{2q+1}(x)\big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x}\left(\frac{-1}{(2q-1)!}\int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(y)}{1-xy}\ \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{Li}_{2q+1}(1) + \frac{1}{(2q-1)!}\int_0^1 \ln^{2q-1}(y)\left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)(1-yx)}\right)\mathrm{d}y \\
&= \zeta(2q+1) + \frac{1}{(2q-1)!}\int_0^1 \ln^{2q-1}(y)\left(\frac{\ln(2)-\ln(1-y)}{1+y}\right)\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

These two integrals are given in (3.11) and (3.57) respectively.

**Examples:**

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_2(x)}{1+x}\ \mathrm{d}x = \ln(2)\zeta(2) - \frac{5}{8}\zeta(3)$$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_4(x)}{1+x}\ \mathrm{d}x = \ln(2)\zeta(4) + \frac{3}{4}\zeta(2)\zeta(3) - \frac{59}{32}\zeta(5)$$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_6(x)}{1+x}\ \mathrm{d}x = \ln(2)\zeta(6) + \frac{3}{4}\zeta(3)\zeta(4) + \frac{15}{16}\zeta(2)\zeta(5) - \frac{377}{128}\zeta(7)$$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_8(x)}{1+x}\ \mathrm{d}x = \ln(2)\zeta(8) + \frac{3}{4}\zeta(3)\zeta(6) + \frac{15}{16}\zeta(4)\zeta(5) + \frac{63}{64}\zeta(2)\zeta(7) - \frac{2039}{512}\zeta(9)$$

**3.1.40** $\int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_{2q+1}(-x)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$

Let $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Then the following identity holds:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_{2q+1}(-x)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{-\pi}{2^{2q+3}}\eta(2q+1) - \frac{1}{2}(2q+1)\beta(2q+2) + \sum_{k=0}^{q}\eta(2q-2k)\beta(2k+2) \tag{3.74}$$

**Proof**

$$
\begin{aligned}
&(2p)!\int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_{2q+1}(-x)}{1+x^2}\, \mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\left(\int_0^1 \frac{-x\ln^{2q}(y)}{1+xy}\, \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 \ln^{2q}(y)\left(\int_0^1 \frac{-x}{(1+x^2)\,(1+xy)}\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y\\
&= \int_0^1 \ln^{2q}(y)\left(\frac{\ln(1+y)}{1+y^2} - \frac{\ln(2)}{2}\frac{1}{1+y^2} - \frac{\pi}{4}\frac{y}{1+y^2}\right) \mathrm{d}y\\
&= \int_0^1 \frac{\ln^{2q}(y)\ln(1+y)}{1+y^2}\, \mathrm{d}y - \frac{\ln(2)}{2}\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(y)}{1+y^2}\, \mathrm{d}y - \frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{y\ln^{2q}(y)}{1+y^2}\, \mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

Collect the results (3.55), (1.62), and (3.13) to finish the proof.

**Examples:**

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_1(-x)}{1+x^2}\, \mathrm{d}x &= -\frac{\pi}{8}\ln(2)\\
\int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_3(-x)}{1+x^2}\, \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}G\zeta(2) - \frac{3\pi}{128}\zeta(3) - \beta(4)\\
\int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_5(-x)}{1+x^2}\, \mathrm{d}x &= \frac{7}{8}G\zeta(4) + \frac{1}{2}\zeta(2)\beta(4) - \frac{15\pi}{2048}\zeta(5) - 2\beta(6)\\
\int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_7(-x)}{1+x^2}\, \mathrm{d}x &= \frac{31}{32}G\zeta(6) + \frac{7}{8}\zeta(4)\beta(4) + \frac{1}{2}\zeta(2)\beta(6) - \frac{63\pi}{32768}\zeta(7) - 3\beta(8)
\end{aligned}
$$

Note that $\int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_1(-x)}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\, \mathrm{d}x$, which is also calculated in (3.96).

### 3.1.41 $\int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_{2q+1}(x)}{1+x^2}\, \mathrm{d}x$

Let $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Then the following identity holds:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_{2q+1}(x)}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = &\frac{1}{2}(2q+1)\beta(2q+2) - \frac{\pi}{2^{2q+3}}\eta(2q+1)\\
&- \sum_{k=0}^{q}\zeta(2q-2k)\beta(2k+2) \qquad (3.75)
\end{aligned}
$$

**Proof**

$$
\begin{aligned}
&(2q)!\int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_{2q+1}(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\left(\int_0^1 \frac{x\ln^{2q}(y)}{1-xy}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1 \ln^{2q}(y)\left(\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1-xy)}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\
&=\int_0^1 \ln^{2q}(y)\left(\frac{\ln(2)}{2(1+y^2)}-\frac{\pi y}{4(1+y^2)}-\frac{\ln(1-y)}{1+y^2}\right)\mathrm{d}y\\
&=\frac{\ln(2)}{2}\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(y)}{1+y^2}\,\mathrm{d}y-\frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{y\ln^{2q}(y)}{1+y^2}\,\mathrm{d}y-\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(y)\ln(1-y)}{1+y^2}\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

These three integral are given in (1.62), (3.13), and (3.57) respectively.
Examples:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_1(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= G-\frac{\pi}{8}\ln(2)\\
\int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_3(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= 2\beta(4)-G\zeta(2)-\frac{3\pi}{128}\zeta(3)\\
\int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_5(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= 3\beta(6)-\beta(4)\zeta(2)-G\zeta(4)-\frac{15\pi}{2048}\zeta(5)\\
\int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_7(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= 4\beta(8)-\beta(6)\zeta(2)-\beta(4)\zeta(4)-G\zeta(6)-\frac{63\pi}{32768}\zeta(7)
\end{aligned}
$$

### 3.1.42 $\int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_{2q+1}\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Let $q\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Then the following identity holds:

$$
\int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_{2q+1}\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=-2^{2q-1}\pi\eta(2q+1)+2\sum_{k=0}^{q}2^{2k}\eta(2q-2k)\beta(2k+2) \tag{3.76}
$$

**Proof**

$$
\begin{aligned}
&(2q)!\int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_{2q+1}\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\left(\int_0^1 \frac{-x^2\ln^{2q}(y)}{(1+x^2)(1+x^2y)}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1 \ln^{2q}(y)\left(\int_0^1 \frac{-x^2}{(1+x^2)(1+x^2y)}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\
&=\int_0^1 \ln^{2q}(y)\left(\frac{\pi}{4}\frac{1}{1-y}-\frac{\arctan(\sqrt{y})}{\sqrt{y}(1-y)}\right)\mathrm{d}y\\
&=\frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y-\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(y)\arctan(\sqrt{y})}{\sqrt{y}(1-y)}\mathrm{d}y\\
&\overset{\sqrt{y}=x}{=}\frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y-2^{2q+1}\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(x)\arctan(x)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

These two integrals are given in (3.8) and (3.60).

**Examples:**

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_1(-x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = G - \frac{\pi}{2}\ln(2)$$
$$\int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_3(-x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 4\beta(4) + G\zeta(2) - \frac{3}{2}\pi\zeta(3)$$
$$\int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_5(-x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 16\beta(6) + 4\beta(4)\zeta(2) + \frac{7}{4}G\zeta(4) - \frac{15}{2}\pi\zeta(5)$$
$$\int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_7(-x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 64\beta(8) + 16\beta(6)\zeta(2) + 7\beta(4)\zeta(4) + \frac{31}{16}G\zeta(6) - \frac{63}{2}\pi\zeta(7)$$

3.1.43 $\int_0^\infty \frac{\ln^{2q}(x)}{1+yx^2}\,\mathrm{d}x$

Let $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Then the following identity holds:

$$\int_0^\infty \frac{\ln^{2q}(x)}{1+yx^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2q+1}}{\sqrt{y}} \sum_{j=0}^{q} \binom{2q}{2j} \frac{|E_{2q-2j}|}{\pi^{2j}} \ln^{2j}(y) \tag{3.77}$$

Proof. Make the change of variable $x = \frac{t}{\sqrt{y}}$, we have

$$\int_0^\infty \frac{\ln^{2q}(x)}{1+yx^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{y}} \int_0^\infty (\ln(\sqrt{y}) - \ln(t))^{2q} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

$$\left\{ \text{use the binomial theorem } (x+y)^a = \sum_{j=0}^{a} \binom{a}{j} x^j y^{a-j} \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{y}} \int_0^\infty \left( \sum_{j=0}^{2q} \binom{2q}{j} \ln^j(\sqrt{y})(-\ln(t))^{2q-j} \right) \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{y}} \sum_{j=0}^{2q} \binom{2q}{j} \ln^j(\sqrt{y}) \int_0^\infty \frac{(-\ln(t))^{2q-j}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\left\{ \text{use } \sum_{j=0}^{2q} f(j) = \sum_{j=0}^{q} f(2j) + \sum_{j=0}^{q} f(2j+1) \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{y}} \sum_{j=0}^{q} \binom{2q}{2j} \ln^{2j}(\sqrt{y}) \int_0^\infty \frac{\ln^{2q-2j}(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{y}} \sum_{j=0}^{q} \binom{2q}{2j+1} \ln^{2j+1}(\sqrt{y}) \int_0^\infty \frac{\ln^{2q-2j-1}(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

{based on (3.22), ignore the second sum since the power of $\ln(t)$ is odd

$$= \frac{1}{\sqrt{y}} \sum_{j=0}^{q} \binom{2q}{2j} \ln^{2j}(\sqrt{y}) \int_0^\infty \frac{\ln^{2q-2j}(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

This integral is found in (3.21).

**3.1.44** $\int_0^\infty \frac{\ln^{2q-1}(x)}{1+yx^2}\,\mathrm{d}x$

Let $q \in \mathbb{Z}^+$. Then the following identity holds:

$$\int_0^\infty \frac{\ln^{2q-1}(x)}{1+yx^2}\,\mathrm{d}x = \frac{-\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2q-1}}{2\sqrt{y}} \sum_{j=0}^{q-1} \binom{2q-1}{2j+1} \frac{|E_{2q-2j-2}|}{\pi^{2j}} \ln^{2j+1}(y) \tag{3.78}$$

\end{array}\right.

&-\frac{1}{\sqrt{y}} \sum_{j=0}^{q-1}\binom{2 q-1}{2 j} \ln ^{2 j}(\sqrt{y}) \int_{0}^{\infty} \frac{\ln ^{2 q-2 j-1}(t)}{1+t^{2}} \mathrm{~d} t

& \sum_{j=0}^{q-1}\binom{2 q-1}{2 j+1} \ln ^{2 j+1}(\sqrt{y}) \int_{0}^{\infty} \frac{\ln ^{2 q-2 j-2}(t)}{1+t^{2}} \mathrm{~d} t .
\end{aligned}
$$
Ignore the first sum and the proof follows on substituting (3.21).

**3.1.45** $\int_0^\infty \frac{\ln^{2q}(x)\operatorname{Li}_{2p+1}\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Let $q, p \in \mathbb{Z}^+$. Then the following identity holds:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\ln^{2q}(x)\operatorname{Li}_{2p+1}\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= |E_{2q}| \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2q+1} \zeta(2p+1) \\ -\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2q+1}}{(2p)!} \sum_{j=0}^{q} \binom{2q}{2j} \frac{(2p+2j)!}{\pi^{2j}} &|E_{2q-2j}| \left(2^{2j+2p+1}-1\right) \zeta(2j+2p+1).\end{aligned} \tag{3.79}$$

**Proof**

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{\ln^{2q}(x)\operatorname{Li}_{2p+1}\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \frac{\ln^{2q}(x)}{1+x^2} \left(\frac{1}{(2p)!}\int_0^1 \frac{-x^2\ln^{2p}(y)}{1+yx^2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(2p)!}\int_0^1 \ln^{2p}(y) \left(\int_0^\infty \frac{-x^2\ln^{2q}(x)}{(1+x^2)(1+yx^2)}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{(2p)!}\int_0^1 \frac{\ln^{2p}(y)}{1-y} \left(\int_0^\infty \frac{\ln^{2q}(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^\infty \frac{\ln^{2q}(x)}{1+yx^2}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

{these two integrals are given in (3.21) and (3.77)}

$$= \frac{|E_{2q}|}{(2p)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2q+1}\int_0^1 \frac{\ln^{2p}(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y$$

$$-\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2q+1}}{(2p)!}\sum_{j=0}^{q}\binom{2q}{2j}|E_{2q-2j}|\,\pi^{-2j}\int_0^1 \frac{\ln^{2j+2p}(y)}{\sqrt{y}(1-y)}\mathrm{d}y$$

$$\{\text{ let } \sqrt{y}=x \text{ in the second integral }\}$$

$$= \frac{|E_{2q}|}{(2p)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2q+1}\int_0^1 \frac{\ln^{2p}(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y$$

$$-\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2q+1}}{(2p)!}\sum_{j=0}^{q}\binom{2q}{2j}|E_{2q-2j}|\,\pi^{-2j}2^{2j+2p+1}\int_0^1 \frac{\ln^{2j+2p}(x)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

The proof completes on employing (3.8) and (3.14).
Examples:

$$\int_0^\infty \frac{\ln^2(x)\operatorname{Li}_3\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{93}{2}\pi\zeta(5)-\frac{3}{4}\pi^3\zeta(3)$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln^4(x)\operatorname{Li}_3\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{5715}{4}\pi\zeta(7)-\frac{279}{4}\pi^3\zeta(5)-\frac{15}{16}\pi^5\zeta(3)$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln^4(x)\operatorname{Li}_5\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{53655}{2}\pi\zeta(9)-\frac{5715}{8}\pi^3\zeta(7)-\frac{75}{16}\pi^5\zeta(5)$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln^6(x)\operatorname{Li}_5\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{9672075}{4}\pi\zeta(11)-\frac{804825}{8}\pi^3\zeta(9)-\frac{142875}{64}\pi^5\zeta(7)$$

$$-\frac{915}{64}\pi^7\zeta(5)$$

**3.1.46** $\int_0^\infty \frac{\ln^{2q-1}(x)\operatorname{li}_{2p}\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Let $q,p\in\mathbb{Z}^+$. Then the following identity holds:

$$\int_0^\infty \frac{\ln^{2q-1}(x)\operatorname{Li}_{2p}\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{-\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2q-1}}{2(2p-1)!}*$$

$$\sum_{j=0}^{q-1}\binom{2q-1}{2j+1}\frac{(2p+2j)!}{\pi^{2j}}|E_{2q-2j-2}|\left(2^{2j+2p+1}-1\right)\zeta(2j+2p+1) \tag{3.80}$$

Proof. Applying the previous proof, we have

$$\int_0^\infty \frac{\ln^{2q-1}(x)\operatorname{Li}_{2p}\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^\infty \frac{\ln^{2q-1}(x)}{1+x^2}\left(\int_0^1 \frac{x^2\ln^{2p-1}(y)}{(2p-1)!\left(1+yx^2\right)}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{(2p-1)!}\int_0^1 \ln^{2p-1}(y)\left(\int_0^\infty \frac{x^2\ln^{2q-1}(x)}{\left(1+x^2\right)\left(1+yx^2\right)}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{(2p-1)!}\int_0^1 \frac{\ln^{2p-1}(y)}{1-y}\left(\int_0^\infty \frac{\ln^{2q-1}(x)}{1+yx^2}\,\mathrm{d}x-\int_0^\infty \frac{\ln^{2q-1}(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

{the first integral is given in (3.78) and the second one is zero}

$$= \frac{-\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2q-1}}{2(2p-1)!}\sum_{j=0}^{q-1}\binom{2q-1}{2j+1}|E_{2q-2j-2}|\,\pi^{-2j}\int_0^1 \frac{\ln^{2j+2p}(y)}{\sqrt{y}(1-y)}\mathrm{d}y$$

$$\overset{\sqrt{y}=x}{=} \frac{-\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2q-1}}{(2p-1)!}\sum_{j=0}^{q-1}\binom{2q-1}{2j+1}|E_{2q-2j-2}|\,\pi^{-2j}2^{2j+2p}\int_0^1 \frac{\ln^{2j+2p}(x)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

and the proof completes on using (3.14).
Examples:

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x)\operatorname{Li}_2\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{7}{2}\pi\zeta(3)$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln^3(x)\operatorname{Li}_4\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1905}{2}\pi\zeta(7)-\frac{93}{4}\pi^3\zeta(5)$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln^5(x)\operatorname{Li}_4\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -53655\pi\zeta(9)-\frac{9525}{4}\pi^3\zeta(7)-\frac{775}{16}\pi^5\zeta(5)$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln^5(x)\operatorname{Li}_6\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1934415}{2}\pi\zeta(11)-\frac{53655}{2}\pi^3\zeta(9)-\frac{9525}{32}\pi^5\zeta(7)$$

### 3.1.47 $\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(x)\operatorname{Li}_{2p+1}\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Let $q, p \in \mathbb{Z}^+$. then the following identity holds:

$$\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(x)\operatorname{Li}_{2p+1}\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}|E_{2q}|\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2q+1}\zeta(2p+1)$$
$$-\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2q+1}}{2(2p)!}\sum_{j=0}^{q}\binom{2q}{2j}\frac{(2p+2j)!}{\pi^{2j}}|E_{2q-2j}|\left(2^{2j+2p+1}-1\right)\zeta(2j+2p+1)$$
$$+2\sum_{k=0}^{p}\frac{(2k+2q+1)!}{(2k+1)!}2^{2k}\eta(2p-2k)\beta(2k+2q+2) \tag{3.81}$$

**Proof**

$$\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(x)\operatorname{Li}_{2p+1}\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^\infty \frac{\ln^{2q}(x)\operatorname{Li}_{2p+1}\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \underbrace{\int_1^\infty \frac{\ln^{2q}(x)\operatorname{Li}_{2p+1}\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x}_{x\to 1/x}$$
$$= \int_0^\infty \frac{\ln^{2q}(x)\operatorname{Li}_{2p+1}\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\ln^{2q}(x)\operatorname{Li}_{2p+1}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

{add the integral to both sides then divide by 2 }

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\ln^{2q}(x)\operatorname{Li}_{2p+1}\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(x)}{1+x^2}\left(\operatorname{Li}_{2p+1}\left(-x^2\right)-\operatorname{Li}_{2p+1}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)\mathrm{d}x$$

The first integral is given in (3.79). For the second, set $z=x^2$ in (1.95) to get

$$\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(x)}{1+x^2}\left(\operatorname{Li}_{2p+1}\left(-x^2\right)-\operatorname{Li}_{2p+1}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1 \frac{\ln^{2q}(x)}{1+x^2}\left(-2\sum_{k=0}^{p}\frac{\eta(2p-2k)}{(2k+1)!}\ln^{2k+1}\left(x^2\right)\right)\mathrm{d}x$$
$$=-4\sum_{k=0}^{p}\frac{\eta(2p-2k)}{(2k+1)!}4^k\int_0^1 \frac{\ln^{2k+2q+1}(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$\{\text{make use of (1.62) to get this integral}\}$$
$$=4\sum_{k=0}^{p}\frac{(2k+2q+1)!}{(2k+1)!}4^k\eta(2p-2k)\beta(2k+2q+2).$$

Combining the two integral completes the proof.
Examples:

$$\int_0^1 \frac{\ln^2(x)\operatorname{Li}_3\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=80\beta(6)+6\zeta(2)\beta(4)-\frac{93}{4}\pi\zeta(5)-\frac{3\pi^3}{8}\zeta(3)$$
$$\int_0^1 \frac{\ln^4(x)\operatorname{Li}_3\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=3360\beta(8)+120\zeta(2)\beta(6)-\frac{5715}{8}\pi\zeta(7)$$
$$-\frac{279}{8}\pi^3\zeta(5)-\frac{15}{32}\pi^5\zeta(3)$$
$$\int_0^1 \frac{\ln^4(x)\operatorname{Li}_5\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=48384\beta(10)+3360\zeta(2)\beta(8)+210\zeta(4)\beta(6)$$
$$-\frac{53655}{4}\pi\zeta(9)-\frac{5715}{16}\pi^3\zeta(7)-\frac{75}{32}\pi^5\zeta(5)$$
$$\int_0^1 \frac{\ln^6(x)\operatorname{Li}_5\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=5322240\beta(12)+241920\zeta(2)\beta(10)+8820\zeta(4)\beta(8)$$
$$-\frac{9672075}{8}\pi\zeta(11)-\frac{804825}{16}\pi^3\zeta(9)-\frac{142875}{128}\pi^5\zeta(7)-\frac{915}{128}\pi^7\zeta(5)$$

3.1.48 $\int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(x)\operatorname{li}_{2p}\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
Let $q,p\in\mathbb{Z}^+$. Then the following identity holds:

$$\int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(x)\operatorname{Li}_{2p}\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{-\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2q-1}}{4(2p-1)!}*$$
$$\sum_{j=0}^{q-1}\binom{2q-1}{2j+1}\frac{(2p+2j)!}{\pi^{2j}}\left|E_{2q-2j-2}\right|\left(2^{2j+2p+1}-1\right)\zeta(2j+2p+1)$$
$$+\sum_{k=0}^{p}\frac{(2k+2q-1)!}{(2k)!}2^{2k}\eta(2p-2k)\beta(2k+2q) \tag{3.82}$$

Proof. We apply the previous proof,

$$\int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(x)\operatorname{Li}_{2p}\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^\infty \frac{\ln^{2q-1}(x)\operatorname{Li}_{2p}\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \underbrace{\int_1^\infty \frac{\ln^{2q-1}(x)\operatorname{Li}_{2p}\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x}_{x\to 1/x}$$
$$= \int_0^\infty \frac{\ln^{2q-1}(x)\operatorname{Li}_{2p}\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(x)\operatorname{Li}_{2p}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\ln^{2q-1}(x)\operatorname{Li}_{2p}\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(x)}{1+x^2}\left(\operatorname{Li}_{2p}\left(-x^2\right)+\operatorname{Li}_{2p}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)\mathrm{d}x.$$

The first integral is given in (3.80). For the second, set $z = x^2$ in (1.94)

$$\int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(x)}{1+x^2}\left(\operatorname{Li}_{2p}\left(-x^2\right)+\operatorname{Li}_{2p}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(x)}{1+x^2}\left(-2\sum_{k=0}^{p}\frac{\eta(2p-2k)}{(2k)!}\ln^{2k}\left(x^2\right)\right)\mathrm{d}x$$
$$= -2\sum_{k=0}^{p}\frac{\eta(2p-2k)}{(2k)!}4^k\int_0^1 \frac{\ln^{2k+2q-1}(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$=2\sum_{k=0}^{p}\frac{(2k+2q-1)!}{(2k)!}4^k\eta(2p-2k)\beta(2k+2q).$$

Put together the two integral to finish the proof.
Examples:

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)\operatorname{Li}_2\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 6\beta(4)+\frac{1}{2}\zeta(2)\beta(2)-\frac{7\pi}{4}\zeta(3)$$
$$\int_0^1 \frac{\ln^3(x)\operatorname{Li}_4\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 1680\beta(8)+120\zeta(2)\beta(6)+\frac{21}{4}\zeta(4)\beta(4)$$
$$-\frac{1905}{4}\pi\zeta(7)-\frac{93}{8}\pi^3\zeta(5)$$
$$\int_0^1 \frac{\ln^5(x)\operatorname{Li}_4\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 120960\beta(10)+5040\zeta(2)\beta(8)+105\zeta(4)\beta(6)$$
$$-\frac{53655}{2}\pi\zeta(9)-\frac{9525}{8}\pi^3\zeta(7)-\frac{775}{32}\pi^5\zeta(5)$$
$$\int_0^1 \frac{\ln^5(x)\operatorname{Li}_6\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 1774080\beta(12)+120960\zeta(2)\beta(10)+8820\zeta(4)\beta(8)$$
$$+\frac{465}{4}\zeta(6)\beta(6)-\frac{1934415}{4}\pi\zeta(11)-\frac{53655}{4}\pi^3\zeta(9)-\frac{9525}{64}\pi^5\zeta(7)$$

### 6.6.4 3.2 Integral Transformations

3.2.1 $\int_0^1 \frac{\ln^q(x)\ln^q(1-x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x$
The following identity holds:

$$\int_0^1 \frac{\ln^q(x)\ln^q(1-x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{\ln^q(x)\ln^q(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x. \tag{3.83}$$

Proof.

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{\ln^q(x)\ln^q(1-x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\int_0^1 \frac{\ln^q(x)\ln^q(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x}_{1-x\to x} + \int_0^1 \frac{\ln^q(x)\ln^q(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{\ln^q(1-x)\ln^q(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\ln^q(x)\ln^q(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^1 \frac{\ln^q(x)\ln^q(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

### 3.2.2 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^q(x)\ln^q(1-x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x$

The following identity holds:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^q(x)\ln^q(1-x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\ln^q(x)\ln^q(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x. \tag{3.84}$$

Proof. Making the substitution $1-x\to x$,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^q(1-x)\ln^q(x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln^q(x)\ln^q(1-x)}{(1-x)x}\,\mathrm{d}x$$

$$\left\{\text{add } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^q(1-x)\ln^q(x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x \text{ to both sides then divide by 2}\right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^q(1-x)\ln^q(x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln^q(1-x)\ln^q(x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^q(1-x)\ln^q(x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

This integral is given in (3.83).

### 3.2.3 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^q(2x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$

The following identity holds:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^q(2x)\ln(1-x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x = (-1)^{q+1}q!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{2^n n^{q+1}} \tag{3.85}$$

Proof. Start with subbing $x=\frac{y}{2}$,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^q(2x)\ln(1-x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\ln^q(y)\ln\left(1-\frac{y}{2}\right)}{y\left(1-\frac{y}{2}\right)}\mathrm{d}y$$

$$\left\{ \text{ expand } \frac{\ln(1-y/2)}{1-y/2} \text{ in series as given in (2.4) } \right\}$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln^q(y)}{y}\left(-\sum_{n=1}^{\infty} H_n \left(\frac{y}{2}\right)^n\right)\mathrm{d}y$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{2^n}\int_0^1 y^{n-1}\ln^q(y)\mathrm{d}y$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{2^n}\left(\frac{(-1)^q q!}{n^{q+1}}\right)$$

$$= (-1)^{q+1}q!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{2^n n^{q+1}}$$

Following the same steps above, we obtain

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^q(2x)\ln(1-x)}{1-x}\ \mathrm{d}x = (-1)^{q+1}q!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n-1}}{2^n n^{q+1}}$$

$$= (-1)^{q+1}q!\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{2^n n^{q+1}} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^{q+2}}\right)$$

$$= (-1)^q q!\left(\operatorname{Li}_{q+2}\left(\frac{1}{2}\right) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{2^n n^{q+1}}\right) \tag{3.86}$$

**3.2.4** $\int_0^1 \frac{\ln^q(1-x)\ln(1+x)}{x}\ \mathrm{d}x$

The following identity holds:

$$\int_0^1 \frac{\ln^q(1-x)\ln(1+x)}{x}\ \mathrm{d}x = (-1)^q q!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(q+1)}}{n2^n} \tag{3.87}$$

Proof. Using the integral form of $H_n^{(q+1)}$ given in (1.122), we have

$$(-1)^q q!\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(q+1)}}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}\left(\int_0^1 \frac{\ln^q(x)\left(1-x^n\right)}{1-x}\ \mathrm{d}x\right)$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln^q(x)}{1-x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-x^n}{n2^n}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln^q(x)}{1-x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n2^n}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln^q(x)}{1-x}\left(\ln(2)+\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)\right)\mathrm{d}x$$

$$\overset{1-x\to x}{=} \int_0^1 \frac{\ln^q(1-x)\ln(1+x)}{x}\ \mathrm{d}x$$

### 6.6.5 3.3 Results of Logarithmic Integrals

3.3.1 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2nx)\cot(x)\mathrm{d}x$
Let $n \in \mathbb{Z}^+$. Show that

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2nx)\cot(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \tag{3.88}$$

Solution. Since $\cos(x) = \Re e^{ix}$, which follows from Euler's formula, we have

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \cos((2k+1)x) &= \Re \sum_{k=0}^{n-1} e^{(2k+1)ix} \\ &= \Re \left\{ e^{ix} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{2ix}\right)^k \right\}\end{aligned}$$

{use the geometric series formula}

$$= \Re \left\{ e^{ix} \frac{1 - e^{2ixn}}{1 - e^{2ix}} \right\}$$

{make use of $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ and simplify }

$$\begin{aligned}&= \Re \left\{ \frac{\sin(2nx)}{2\sin(x)} + i \frac{\sin^2(nx)}{\sin(x)} \right\} \\ &= \frac{\sin(2nx)}{2\sin(x)}\end{aligned}$$

Separate the first term of the sum,

$$\frac{\sin(2nx)}{2\sin(x)} = \sum_{k=0}^{n-1} \cos((2k+1)x) = \cos(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \cos((2k+1)x).$$

Multiply both sides by $2\cos(x)$,

$$\sin(2nx)\cot(x) = 2\cos^2(x) + \sum_{k=1}^{n-1} 2\cos((2k+1)x)\cos(x).$$

Use $2\cos^2(x) = 1 + \cos(2x)$ and $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a-b) + \cos(a+b)$,

$$\sin(2nx)\cot(x) = 1 + \cos(2x) + \sum_{k=1}^{n-1} [\cos(2kx) + \cos((2k+2)x)].$$

Now integrate both sides from $x = 0$ to $\frac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2nx)\cot(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2x))\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=1}^{n-1} [\cos(2kx) + \cos((2k+2)x)]\mathrm{d}x\end{aligned}$$

{reverse the order of integration and summation}

$$= x + \frac{\sin(2x)}{2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sum_{k=1}^{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos(2kx)+\cos((2k+2)x)]\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\sin(\pi)}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{\sin(2kx)}{k} + \frac{\sin((2k+2)x)}{k+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{\pi}{2} + 0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin(k\pi)}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin(k\pi+\pi)}{k+1}$$

{use $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$ for the second sum}

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin(k\pi)}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin(k\pi)\cos(\pi)+\cos(k\pi)\sin(\pi)}{k+1}$$

{ note that $\sin(n\pi) = 0$ for integer $n$}

$$= \frac{\pi}{2}$$

### 3.3.2 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\mathrm{d}x$

Show that

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\ln(2) \tag{3.89}$$

Solution (i). By using the Fourier series of $\ln(\sin(x))$ given in (2.90), we have

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\ln(2) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{n}\right)\mathrm{d}x$$
$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(2)\mathrm{d}x - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2nx)\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{\pi}{2}\ln(2) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{\sin(2nx)}{2n}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= -\frac{\pi}{2}\ln(2) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{\sin(n\pi)}{2n}$$
$$= -\frac{\pi}{2}\ln(2) - 0$$

Solution (ii). Taking the log of both sides of the trigonometric identity:

$$\sin(x) = \frac{\sin(2x)}{2\cos(x)}$$

we get

$$\ln(\sin(x)) = \ln(\sin(2x)) - \ln(\cos(x)) - \ln(2).$$

Using this identity yields

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2x))\mathrm{d}x}_{2x=y} - \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))\mathrm{d}x}_{x=\pi/2-y} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(y))\mathrm{d}y - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\right)\mathrm{d}y - \frac{\pi}{2}\ln(2) \\
&= \frac{1}{2}(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(y))\mathrm{d}y + \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(y))\mathrm{d}y}_{y=\pi-u}) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(y))\mathrm{d}y - \frac{\pi}{2}\ln(2) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(y))\mathrm{d}y + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(u))\mathrm{d}u\right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(y))\mathrm{d}y - \frac{\pi}{2}\ln(2) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(y))\mathrm{d}y - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(y))\mathrm{d}y - \frac{\pi}{2}\ln(2) \\
&= -\frac{\pi}{2}\ln(2).
\end{aligned}
$$

**Solution (iii).**

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2b-1}(x)\ln(\sin(x))\mathrm{d}x \\
&= \lim_{b\to\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial b}\sin^{2b-1}(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\lim_{b\to\frac{1}{2}} \frac{d}{db}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2b-1}(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

{let $a = 1/2$ in the beta function (1.49) }

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\lim_{b\to\frac{1}{2}} \frac{d}{db}\frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, b\right) \\
&= \frac{1}{4}\lim_{b\to\frac{1}{2}} \frac{d}{db}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(b)}{\Gamma\left(b+\frac{1}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

{use $\Gamma'(x) = \Gamma(x)\psi(x)$ given in (1.144)}

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\lim_{b\to\frac{1}{2}} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)\left[\psi(b)-\psi\left(b+\frac{1}{2}\right)\right]}{\Gamma\left(b+\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{4}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)\left[\psi\left(\frac{1}{2}\right)-\psi(1)\right]}{\Gamma(1)}
\end{aligned}
$$

$\{$ write $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ and $\psi(1) = -\gamma\}$

$$
= \frac{\pi}{4}\left(\psi\left(\frac{1}{2}\right)+\gamma\right)
$$

{recall the result (1.148)}

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{4}(-2\ln(2)) \\
&= -\frac{\pi}{2}\ln(2).
\end{aligned}
$$

**3.3.3** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln(\sin(x))\mathrm{d}x$

Show that

$$
\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln(\sin(x))\mathrm{d}x = \frac{3}{16}\zeta(3) - \frac{3}{4}\ln(2)\zeta(2). \tag{3.90}
$$

Solution. Again, by using the Fourier series of $\ln(\sin(x))$, we get

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln(\sin(x))\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(-\ln(2) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{n}\right)\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2)x\ \mathrm{d}x - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(2nx)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\pi^2}{8}\ln(2) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{\cos(2nx)}{4n^2} + \frac{x\sin(2nx)}{2n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= -\frac{\pi^2}{8}\ln(2) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\cos(n\pi)}{4n^2} + \frac{\pi\sin(n\pi)}{4n} - \frac{1}{4n^2}\right) \\
&\left\{\text{use } \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\pi) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \text{ given in (1.7)}\right\} \\
&= -\frac{\pi^2}{8}\ln(2) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{(-1)^n}{4n^2} + \frac{0}{4n} - \frac{1}{4n^2}\right) \\
&= -\frac{\pi^2}{8}\ln(2) - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} \\
&= -\frac{\pi^2}{8}\ln(2) - \frac{1}{4}\operatorname{Li}_3(-1) + \frac{1}{4}\zeta(3).
\end{aligned}
$$

The solution completes on writing $\operatorname{Li}_3(-1) = -\frac{3}{4}\zeta(3)$ and $\frac{\pi^2}{6} = \zeta(2)$. Moreover, by using the Fourier series of $\ln(\cos(x))$ given in (2.93) and applying the same steps above, we get

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln(\cos(x))\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(-\ln(2) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(2nx)}{n}\right)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{3}{4}\ln(2)\zeta(2) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{(-1)^n}{4n^2} + \frac{0}{4n} - \frac{1}{4n^2}\right) \\
&= -\frac{3}{4}\ln(2)\zeta(2) - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3} \\
&= -\frac{3}{4}\ln(2)\zeta(2) - \frac{7}{16}\zeta(3) \qquad (3.91)
\end{aligned}
$$

### 3.3.4 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln^2(\sin(x))\mathrm{d}x$

Show that

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln^2(\sin(x))\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\ln^2(2) + \frac{\pi^3}{24} \tag{3.92}$$

Solution (i). Using

$$\ln^2(\sin(x)) = -\ln^2(2) - 2\ln(2)\ln(\sin(x)) + \ln^2(2\sin(x)),$$

we have

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln^2(\sin(x))\mathrm{d}x$$
$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln^2(2)\mathrm{d}x - 2\ln(2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln^2(2\sin(x))\mathrm{d}x$$

The first integral is $\frac{\pi}{2}\ln^2(2)$ and the second integral is $-\frac{\pi}{2}\ln(2)$ given in (3.89). For the third one, use the Fourier series of $\ln^2(2\sin(x))$ given in (2.110),

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln^2(2\sin(x))\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}}{n}\cos(2nx)\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2 \mathrm{d}x + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2nx)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^3\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}}{n}\cdot\frac{\sin(2nx)}{2n}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi^3}{24} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}}{n}\cdot\frac{\sin(n\pi)}{2n} \\
&= \frac{\pi^3}{24} + 0.
\end{aligned}$$

Combining the three integrals completes the solution.

Solution (ii).

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln^2(\sin(x))\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2b-1}(x)\ln^2(\sin(x))\mathrm{d}x \\
&= \lim_{b\to\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial b^2}\sin^{2b-1}(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\lim_{b\to\frac{1}{2}} \frac{d^2}{db^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2b-1}(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\lim_{b\to\frac{1}{2}} \frac{d^2}{db^2}\frac{1}{2}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},b\right) \\
&= \frac{1}{8}\lim_{b\to\frac{1}{2}} \frac{d^2}{db^2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(b)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+b\right)} \\
&= \frac{1}{8}\lim_{b\to\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(b)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+b\right)}\left[\left(\psi(b)-\psi\left(\frac{1}{2}+b\right)\right)^2+\psi^{(1)}(b)-\psi^{(1)}\left(\frac{1}{2}+b\right)\right] \\
&= \frac{1}{8}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)}\left[\left(\psi\left(\frac{1}{2}\right)-\psi(1)\right)^2+\psi^{(1)}\left(\frac{1}{2}\right)-\psi^{(1)}(1)\right]
\end{aligned}
$$

{recall the results (1.148), (1.157), and (1.155)}

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{8}\left[(-2\ln(2))^2+3\zeta(2)-\zeta(2)\right] \\
&= \frac{\pi}{2}\ln^2(2)+\frac{\pi^3}{24}
\end{aligned}
$$

### 3.3.5 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\ln(\cos(x))\mathrm{d}x$

Show that

$$
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\ln(\cos(x))\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\ln^2(2)-\frac{\pi^3}{48}. \tag{3.93}
$$

Solution (i). Let $a=\ln(\sin(x))$ and $b=\ln(\cos(x))$ in the algebraic identity:

$$
ab=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}(a-b)^2,
$$

we have

$$
\ln(\sin(x))\ln(\cos(x))=\frac{1}{2}\ln^2(\sin(x))+\frac{1}{2}\ln^2(\cos(x))-\frac{1}{2}\ln^2(\tan(x)).
$$

Exploiting this identity gives

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\ln(\cos(x))\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln^2(\sin(x))\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln^2(\cos(x))\mathrm{d}x}_{x=\pi/2-y}-\frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln^2(\tan(x))\mathrm{d}x}_{\tan(x)=y} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln^2(\sin(x))\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln^2(\sin(y))\mathrm{d}y-\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\ln^2(y)}{1+y^2}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln^2(\sin(x))\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{\ln^2(y)}{1+y^2}\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

These two integrals are given in (3.92) and (3.21).
Solution (ii).

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\ln(\cos(x))\mathrm{d}x$$
$$= \lim_{\substack{a\to 1/2\\ b\to 1/2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2a-1}(x)\sin^{2b-1}(x)\ln(\sin(x))\ln(\cos(x))\mathrm{d}x$$
$$= \lim_{\substack{a\to 1/2\\ b\to 1/2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial a\partial b}\cos^{2a-1}(x)\sin^{2b-1}(x)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{4}\lim_{\substack{a\to 1/2\\ b\to 1/2}} \frac{\partial^2}{\partial a\partial b}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2a-1}(x)\sin^{2b-1}(x)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{4}\lim_{\substack{a\to 1/2\\ b\to 1/2}} \frac{\partial^2}{\partial a\partial b}\frac{1}{2}\,\mathrm{B}(a,b)$$
$$= \frac{1}{8}\lim_{\substack{a\to 1/2\\ b\to 1/2}} \frac{\partial^2}{\partial a\partial b}\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$
$$= \frac{1}{8}\lim_{\substack{a\to 1/2\\ b\to 1/2}} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\left[(\psi(a)-\psi(a+b))(\psi(b)-\psi(a+b))-\psi^{(1)}(a+b)\right]$$
$$= \frac{1}{8}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)}\left[\left(\psi\left(\frac{1}{2}\right)-\psi(1)\right)^2-\psi^{(1)}(1)\right]$$

{recall the results (1.148) and (1.155)}

$$= \frac{\pi}{8}\left[(-2\ln(2))^2-\frac{\pi^2}{6}\right]$$
$$= \frac{\pi}{2}\ln^2(2)-\frac{\pi^3}{48}.$$

### 3.3.6 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln^2(\sin(x))\mathrm{d}x$

Show that

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln^2(\sin(x))\mathrm{d}x = \operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{19}{32}\zeta(4)+\frac{1}{2}\ln^2(2)\zeta(2)+\frac{1}{24}\ln^4(2). \tag{3.94}$$

Solution. By writing

$$\ln^2(\sin(x)) = -\ln^2(2)-2\ln(2)\ln(\sin(x))+\ln^2(2\sin(x)),$$

we get

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln^2(\sin(x))\mathrm{d}x$$
$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln^2(2)\mathrm{d}x-2\ln(2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln(\sin(x))\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln^2(2\sin(x))\mathrm{d}x$$

The first integral is $\frac{\pi^2}{8}\ln^2(2)$ and the second integral is given in (3.90). For the third one, again we use the Fourier series of $\ln^2(2\sin(x))$ to get

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln^2(2\sin(x))\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2 \, \mathrm{d}x + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n-1}}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(2nx)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi^4}{192} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n-1}}{n}\left[\frac{\cos(2nx)}{4n^2}+\frac{x\sin(2nx)}{2n}-\frac{1}{4n^2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{15}{32}\zeta(4) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n-1}}{n}\left(\frac{\cos(n\pi)}{4n^2}-\frac{\pi\sin(n\pi)}{4n}-\frac{1}{4n^2}\right)$$

$$= \frac{15}{32}\zeta(4) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n-\frac{1}{n}}{n}\left(\frac{(-1)^n}{4n^2}-\frac{1}{4n^2}\right)$$

$$= \frac{15}{32}\zeta(4) - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^3} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_n}{n^3}$$

{ the second sum is $\operatorname{Li}_4(-1) = -7/8\zeta(4)$ and }
{the last two sums are calculated in (4.4) and (4.86) respectively}

$$= \operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{19}{32}\zeta(4) + \frac{7}{8}\ln(2)\zeta(3) - \frac{1}{4}\ln^2(2)\zeta(2) + \frac{1}{24}\ln^4(2).$$

The solution finishes on grouping the three integrals.

### 3.3.7 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln^2(\cos(x))\mathrm{d}x$

Show that

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln^2(\cos(x))\mathrm{d}x = -\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{79}{32}\zeta(4) + \ln^2(2)\zeta(2) - \frac{1}{24}\ln^4(2). \tag{3.95}$$

Solution. By writing

$$\ln^2(\cos(x)) = -\ln^2(2) - 2\ln(2)\ln(\cos(x)) + \ln^2(2\cos(x)),$$

we get

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln^2(\cos(x))\mathrm{d}x$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln^2(2)\mathrm{d}x - 2\ln(2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln(\cos(x))\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln^2(2\cos(x))\mathrm{d}x$$

The first integral is $\frac{\pi^2}{8}\ln^2(2)$ and the second integral is given in (3.91). For the third one, we use the Fourier series of $\ln^2(2\cos(x))$ given in (2.109) to get

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln^2(2\cos(x))\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(x^2+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{H_{n-1}}{n}\cos(2nx)\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3\ \mathrm{d}x + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_{n-1}}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(2nx)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi^4}{64}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(H_n-\frac{1}{n}\right)}{n}\left(\frac{(-1)^n}{4n^2}-\frac{1}{4n^2}\right)$$

$$= \frac{45}{32}\zeta(4)-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^3}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_n}{n^3}$$

$$= -\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{79}{32}\zeta(4)-\frac{7}{8}\ln(2)\zeta(3)+\frac{1}{4}\ln^2(2)\zeta(2)-\frac{1}{24}\ln^4(2).$$

The solution finishes on grouping the three integrals.

**3.3.8** $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$

Show that

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}\ln(2) \tag{3.96}$$

Solution. Let $x \to \frac{1-x}{1+x}$,

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{2}{1+x}\right)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$$

$$= \ln(2)\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} - \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$$

{add the integral to both sides then divide by 2 }

$$= \frac{1}{2}\ln(2)\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{8}\ln(2)$$

**3.3.9** $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$

Show that

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}\ln(2) - G. \tag{3.97}$$

Solution. Let $x \to \frac{1-x}{1+x}$,

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{2x}{1+x}\right)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln(2x)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$$

{add the integral to both sides then divide by 2 }

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln(2x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x}_{x\to(1-x)/(1+x)}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(2)\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

The first integral is $\frac{\pi}{4}$ and the second is $-G$ given in (1.163).

3.3.10 $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$

Show that

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x = -\frac{5}{8}\zeta(3). \tag{3.98}$$

Solution. Using

$$\ln(1-x)\ln(1+x) = \frac{1}{4}\ln^2\left(1-x^2\right) - \frac{1}{4}\ln^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right),$$

we have

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\underbrace{\int_0^1 \frac{\ln^2\left(1-x^2\right)}{x}\,\mathrm{d}x}_{1-x^2=y} - \frac{1}{4}\underbrace{\int_0^1 \frac{\ln^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x}_{x=(1-y)/(1+y)}$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^1 \frac{\ln^2(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^2(y)}{1-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$\left\{\text{write } \frac{1}{1-y^2} = \frac{1}{1-y} - \frac{y}{1-y^2} \text{ in the second integral}\right\}$$

$$= -\frac{3}{8}\int_0^1 \frac{\ln^2(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^1 \frac{y\ln^2(y)}{1-y^2}\,\mathrm{d}y}_{y=\sqrt{t}}$$

$$= -\frac{3}{8}\int_0^1 \frac{\ln^2(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y + \frac{1}{16}\int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{5}{16}\int_0^1 \frac{\ln^2(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y$$

This integral is given in (3.8).

**3.3.11** $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$

Show that

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\zeta(3) + \frac{1}{3}\ln^3(2). \tag{3.99}$$

Solution (i). Using

$$\ln(x)\ln(1-x) = \frac{1}{2}\ln^2(1-x) - \frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{x}{1-x}\right) + \frac{1}{2}\ln^2(x)$$

we have

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^2(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^2\left(\frac{x}{1-x}\right)}{1-x}\,\mathrm{d}x}_{x/(1-x)=y} + \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^2(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x}_{\text{IBP}}$$

$$= \frac{1}{6}\ln^3(2) - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^2(y)}{1+y}\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\ln^3(2) + \underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x}_{\int_0^1 - \int_{1/2}^1}$$

$$= \frac{2}{3}\ln^3(2) - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^2(y)}{1+y}\,\mathrm{d}y$$

$$+ \underbrace{\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x}_{\text{IBP}} - \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x}_{1-x\to x}$$

$$= \frac{2}{3}\ln^3(2) - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^2(y)}{1+y}\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^2(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

{add the integral to both sides then divide by 2 }

$$= \frac{1}{3}\ln^3(2) + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x\ln^2(x)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

This integral is computed in (3.9).

Solution (ii). Apply integration by parts twice,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x &= \operatorname{Li}_2(1-x)\ln(1-x)\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{Li}_2(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x \\ &= -\ln(2)\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{Li}_3(1-x)\Big|_0^{\frac{1}{2}} \\ &= -\ln(2)\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{Li}_3\left(\frac{1}{2}\right) + \zeta(3)\end{aligned}$$

The values of $\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)$ and $\operatorname{Li}_3\left(\frac{1}{2}\right)$ are given in (1.81) and (1.92).

**3.3.12** $\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x$

Show that

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{8}\zeta(3). \tag{3.100}$$

Solution. By writing

$$\ln^2(1+x) = \frac{1}{2}\ln^2\left(1-x^2\right) + \frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \ln^2(1-x),$$

we have

$$\int_0^1 \frac{\ln^2(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^1 \frac{\ln^2(1-x^2)}{x}\,\mathrm{d}x}_{1-x^2\to x} + \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^1 \frac{\ln^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x}_{(1-x)/(1+x)\to x} - \underbrace{\int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x}_{1-x\to x}$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\ln^2(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\ln^2(x)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\ln^2(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$$
$$\left\{ \text{use } \frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{1-x} = \frac{-x}{1-x^2} \right\}$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\ln^2(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x - \underbrace{\int_0^1 \frac{x\ln^2(x)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x}_{x^2\to x}$$
$$= \frac{1}{8}\int_0^1 \frac{\ln^2(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\zeta(3) \tag{3.101}$$

The solution completes on applying integration by parts:

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^2(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

**3.3.13** $\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$

Show that

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{\sqrt{x}(1-x)}\mathrm{d}x = 7\zeta(3) - 6\ln(2)\zeta(2) \tag{3.102}$$

Solution (i). Make the change of variable $\sqrt{1-x} = y$,

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{\sqrt{x}(1-x)}\mathrm{d}x = 4\int_0^1 \frac{\ln(y)\ln(1-y^2)}{1-y^2}\,\mathrm{d}y$$
$$\overset{y=\frac{1-x}{1+x}}{=} 2\int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\ln\left(\frac{4x}{(1+x)^2}\right)}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$= 4\ln(2)\int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x + 2\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x + 4\int_0^1 \frac{\ln^2(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$-4\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

All these integrals are given in (3.15), (3.16), (3.101), and (3.98) respectively.
Solution (ii). Set $s = \frac{1}{2}$ in (3.39),

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{\sqrt{x}(1-x)}\mathrm{d}x = \psi^{(1)}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\psi\left(\frac{1}{2}\right)+\gamma\right) - \frac{1}{2}\psi^{(2)}\left(\frac{1}{2}\right).$$

The values of these terms are given in (1.157) and (1.148).

**3.3.14** $\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1+x)}{1-x}\, \mathrm{d}x$

Show that

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1+x)}{1-x}\, \mathrm{d}x = \zeta(3) - \frac{3}{2}\ln(2)\zeta(2). \tag{3.103}$$

Solution. By integration by parts,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \tfrac{\ln(1-x)\ln(1+x)}{x}\, \mathrm{d}x &= -\ln(2)\zeta(2) + \int_0^1 \tfrac{\mathrm{Li}_2(x)}{1+x}\, \mathrm{d}x \\ &= -\ln(2)\zeta(2) + \int_0^1 \tfrac{1}{1+x}\left(\int_0^1 -\tfrac{x\ln(u)}{1-xu}\, \mathrm{d}u\right) \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{3.104}$$

{change the order of integration}

$$= -\ln(2)\zeta(2) + \int_0^1 \ln(u)\left(\int_0^1 \frac{-x}{(1+x)(1-ux)}\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}u$$

{evaluate the inner integral by partial fraction decomposition}

$$\begin{aligned} &= -\ln(2)\zeta(2) + \int_0^1 \ln(u)\left(\frac{\ln(2)}{1+u} + \frac{\ln(1-u)}{u} - \frac{\ln(1-u)}{1+u}\right) \mathrm{d}u \\ &= -\ln(2)\zeta(2) + \ln(2)\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1+u}\, \mathrm{d}u + \underbrace{\int_0^1 \frac{\ln(u)\ln(1-u)}{u}\, \mathrm{d}u}_{\text{IBP}} \\ &\quad - \underbrace{\int_0^1 \frac{\ln(u)\ln(1-u)}{1+u}\, \mathrm{d}u}_{\text{IBP}} \\ &= -\ln(2)\zeta(2) + \ln(2)\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1+u}\, \mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^2(u)}{1-u}\, \mathrm{d}u \\ &\quad - \int_0^1 \frac{\ln(u)\ln(1+u)}{1-u}\, \mathrm{d}u + \int_0^1 \frac{\ln(1-u)\ln(1+u)}{u}\, \mathrm{d}u \\ &\quad \{\text{ collect the results (3.11) and (3.8)}\} \\ &= -\ln(2)\zeta(2) - \frac{1}{2}\ln(2)\zeta(2) + \zeta(3) \\ &\quad - \int_0^1 \frac{\ln(u)\ln(1+u)}{1-u}\, \mathrm{d}u + \int_0^1 \frac{\ln(1-u)\ln(1+u)}{u}\, \mathrm{d}u. \end{aligned}$$

The solution completes on canceling $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\ln(1+x)}{x}\, \mathrm{d}x$ from both sides. Moreover, plugging (3.98) in (3.104) gives

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_2(x)}{1+x}\, \mathrm{d}x = \zeta(3) - \frac{1}{2}\ln(2)\zeta(2). \tag{3.105}$$

**3.3.15** $\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{1+x}\, \mathrm{d}x$

Show that

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{1+x}\, \mathrm{d}x = \frac{13}{8}\zeta(3) - \frac{3}{2}\ln(2)\zeta(2). \tag{3.106}$$

Solution. By integration by parts,

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1+x)}{1-x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\ln(1-x)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

These two integrals are calculated in (3.103) and (3.98) respectively.

### 3.3.16 $\int_0^1 \frac{\ln(x)\arctan(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x$

Show that

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)\arctan(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(2)G - \frac{\pi^3}{64}. \tag{3.107}$$

Solution. By integration by parts,

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)\arctan(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}\left(\mathrm{Li}_2(-x) + \ln(x)\ln(1+x)\right)\arctan(x)$$
$$= \left(\mathrm{Li}_2(-x) + \ln(x)\ln(1+x)\right)\arctan(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_2(-x) + \ln(x)\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{\pi^3}{48} - \int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_2(-x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

{recall the relation involving these two integrals from (3.127)}

$$= -\frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{16}\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x - \frac{\ln(2)}{2}\int_0^1 \frac{\ln(y)}{1+y^2}\,\mathrm{d}y.$$

These two integrals are evaluated in (3.11) and (1.163).

3.3.17 $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Show that

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \Im\left\{\mathrm{Li}_3(1+i)\right\} - \frac{\pi^3}{32} - \ln(2)G. \tag{3.108}$$

Solution. By the substitution $x \to \frac{1-x}{1+x}$, we have

$$\int_0^1 \frac{\ln^2(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\ln^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - 2\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\ln^2(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

or

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^2(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^2(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

These integrals are given in (3.26), (3.29), and (1.66) respectively.

**3.3.18** $\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Show that

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 3\Im\left\{\operatorname{Li}_3(1+i)\right\} - \frac{5\pi^3}{64} - \frac{3\pi}{16}\ln^2(2) - 2\ln(2)G. \tag{3.109}$$

Solution.

$$\int_0^1 \frac{\ln^2(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\ln^2(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \underbrace{\int_1^\infty \frac{\ln^2(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x}_{x\to 1/x}$$

$$= \int_0^\infty \frac{\ln^2(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\ln^2\left(\frac{1+x}{x}\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^\infty \frac{\ln^2(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\ln^2(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + 2\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\ln^2(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

or

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\ln^2(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\ln^2(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^2(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

These integrals are given in (3.29), (3.23), and (1.66) respectively.

3.3.19 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^2(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$

Show that

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^2(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\ln^4(2) - \frac{1}{4}\zeta(4). \tag{3.110}$$

Solution. By integration by parts,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^2(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\ln^4(2) + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^2(1-x)\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{1-x\to x}{=\!=\!=} -\frac{1}{2}\ln^4(2) + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln^2(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

{add the integral to both sides then divide by 2 }

$$= -\frac{1}{4}\ln^4(2) + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^2(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

and this integral is given in (3.41).

3.3.20 $\int_0^1 \frac{\ln^2(x)\ln(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x$

Show that

$$\int_0^1 \frac{\ln^2(x)\ln(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = 4\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{15}{4}\zeta(4) + \frac{7}{2}\ln(2)\zeta(3) - \ln^2(2)\zeta(2) + \frac{1}{6}\ln^4(2) \tag{3.111}$$

Solution. By making the change of variable $y = \frac{x}{1+x}$,

$$\int_0^1 \frac{\ln^2(x)\ln(1+x)}{1+x}\,dx = -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^2\left(\frac{y}{1-y}\right)\ln(1-y)}{1-y}\,dy$$

$$= 2\underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(y)\ln^2(1-y)}{1-y}\,dy}_{\text{IBP}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^2(y)\ln(1-y)}{1-y}\,dy - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^3(1-y)}{1-y}\,dy$$

$$= -\frac{2}{3}\ln^4(2) + \frac{2}{3}\underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^3(1-y)}{y}\,dy}_{1-y=x} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^2(y)\ln(1-y)}{1-y}\,dy + \frac{1}{4}\ln^4(2)$$

$$= -\frac{5}{12}\ln^4(2) + \frac{2}{3}\underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln^3(x)}{1-x}\,dx}_{\int_0^1 - \int_0^{1/2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^2(y)\ln(1-y)}{1-y}\,dy$$

$$= -\frac{5}{12}\ln^4(2) + \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{\ln^3(x)}{1-x}\,dx - \frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^3(x)}{1-x}\,dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^2(y)\ln(1-y)}{1-y}\,dy.$$

These integrals are found in (3.8), (3.19), and (3.110) respectively.

### 3.3.21 $\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x)\ln(1+x)}{x}\,dx$

Show that

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x)\ln(1+x)}{x}\,dx = 2\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{27}{16}\zeta(4) + \frac{7}{4}\ln(2)\zeta(3)$$
$$-\frac{1}{2}\ln^2(2)\zeta(2) + \frac{1}{12}\ln^4(2) \tag{3.112}$$

Solution. By writing

$$\ln(1-x)\ln(1+x) = \frac{1}{2}\ln^2\left(1-x^2\right) - \frac{1}{2}\ln^2(1-x) - \frac{1}{2}\ln^2(1+x)$$

we have

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x)\ln(1+x)}{x}\,dx = \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln^2\left(1-x^2\right)}{x}\,dx}_{1-x^2=y}$$
$$-\frac{1}{2}\underbrace{\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln^2(1-x)}{x}\,dx}_{1-x=y} - \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln^2(1+x)}{x}\,dx}_{\text{IBP}}$$
$$= \frac{1}{8}\int_0^1 \frac{\ln(1-y)\ln^2(y)}{1-y}\,dy - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln(1-y)\ln^2(y)}{1-y}\,dy$$
$$- \frac{1}{4}\ln^2(x)\ln^2(1+x)\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^2(x)\ln(1+x)}{1+x}\,dx$$
$$= -\frac{3}{8}\int_0^1 \frac{\ln(1-y)\ln^2(y)}{1-y}\,dy + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^2(x)\ln(1+x)}{1+x}\,dx$$

The solution finalizes on gathering the results (3.41) and (3.111).

**3.3.22** $\int_0^1 \frac{\ln^2(x)\ln(1-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x$

Show that

$$\int_0^1 \frac{\ln^2(x)\ln(1-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = -4\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) + \zeta(4) + \ln^2(2)\zeta(2) - \frac{1}{6}\ln^4(2) \tag{3.113}$$

Solution. Force integration by parts,

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{\ln^2(x)\ln(1-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{\ln^2(x)\ln(1+x)}{1-x}\,\mathrm{d}x - 2\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

These two integrals are given in (3.46) and (3.112) respectively.

**3.3.23** $\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln^2(1-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x$

Show that

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln^2(1-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = -6\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{11}{4}\zeta(4) - \frac{1}{4}\ln^4(2). \tag{3.114}$$

Solution. Employing

$$\begin{aligned}&\ln(x)\ln^2(1-x) \\ &= \ln^2(x)\ln(1-x) + \frac{1}{3}\ln^3\left(\frac{x}{1-x}\right) - \frac{1}{3}\ln^3(x) + \frac{1}{3}\ln^3(1-x)\end{aligned}$$

gives

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln^2(1-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{\ln^2(x)\ln(1-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x \\ +\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\ln^3\left(\frac{x}{1-x}\right)}{1+x}\,\mathrm{d}x &- \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\ln^3(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\ln^3(1-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

These integrals are given in (3.113), (3.31), (3.11), and (3.17) respectively.

3.3.24 $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\ln^2(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$

Show that

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\ln^2(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{8}\zeta(4). \tag{3.115}$$

Solution. By writing

$$\ln(1-x)\ln^2(1+x) = \frac{1}{6}\ln^3\left(1-x^2\right) + \frac{1}{6}\ln^3\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \frac{1}{3}\ln^3(1-x),$$

we get

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\ln^2(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{6}\underbrace{\int_0^1 \frac{\ln^3\left(1-x^2\right)}{x}\,\mathrm{d}x}_{1-x^2=y} + \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{\ln^3\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\underbrace{\int_0^1 \frac{\ln^3(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x}_{1-x=y}$$

$$= \frac{1}{12}\int_0^1 \frac{\ln^3(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y + \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{\ln^3\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\ln^3(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y$$

$$= -\frac{1}{6}\int_0^1 \frac{\ln^3(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\ln^3\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x$$

These two integrals are evaluated in (3.8) and (3.15) respectively.

**3.3.25** $\int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$

Show that

$$\int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x = 2\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{5}{8}\zeta(4) + \frac{7}{4}\ln(2)\zeta(3) - \frac{1}{2}\ln^2(2)\zeta(2) + \frac{1}{12}\ln^4(2) \tag{3.116}$$

Solution. By writing

$$\ln^2(1-x)\ln(1+x) = \frac{1}{6}\ln^3\left(1-x^2\right) - \frac{1}{6}\ln^3\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \frac{1}{3}\ln^3(1+x),$$

we get

$$\int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{6}\underbrace{\int_0^1 \frac{\ln^3\left(1-x^2\right)}{x}\,\mathrm{d}x}_{1-x^2=y} - \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{\ln^3\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\ln^3(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{12}\int_0^1 \frac{\ln^3(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y - \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{\ln^3\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\ln^3(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

These three integrals are given in (3.8), (3.15), and (3.20).

**3.3.26** $\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln^2(1-x)}{\sqrt{x}(1-x)}\mathrm{d}x$

Show that

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln^2(1-x)}{\sqrt{x}(1-x)}\mathrm{d}x = -15\zeta(4) + 28\ln(2)\zeta(3) - 12\ln^2(2)\zeta(2). \tag{3.117}$$

Solution. Make the change of variable $\sqrt{1-x} = y$,

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln^2(1-x)}{\sqrt{x}(1-x)}\mathrm{d}x = 4\int_0^1 \frac{\ln(y)\ln^2\left(1-y^2\right)}{1-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$\overset{y=\frac{1-x}{1+x}}{=} 2\int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\ln^2\left(\frac{4x}{(1+x)^2}\right)}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= 8\ln^2(2)\int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x + 8\ln(2)\int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$-8\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x + 8\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln^2(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$-16\ln(2)\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x + 16\ln(2)\int_0^1 \frac{\ln^2(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$+8\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\ln^2(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x - 8\int_0^1 \frac{\ln^3(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

All these integrals, but the fourth, are given in (3.15), (3.16), (3.112), (3.98), (3.20), (3.115), and (3.20). Regarding the fourth integral, integrate it by parts,

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln^2(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{\ln^2(x)\ln(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x,$$

which is given in (3.111).
A different method is by differentiating the beta function in (1.46),

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln^2(1-x)}{\sqrt{x}(1-x)}\mathrm{d}x = \lim_{\substack{a\to 1/2\\ b\to 0}} \frac{\partial^3}{\partial a\partial b^2}\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

but lengthy calculations will be involved and we had better let Mathematica do it. The Mathematica command for $\lim_{\substack{a\to 1/2\\ b\to 0}} \frac{\partial^3}{\partial a\partial b^2}\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ is
Normal[Series[D[Gamma[a]Gamma[b]/Gamma[a+b],{a,1},{b,2}]
,{a,1/2,0},{b,0,0}]]//FullSimplify//Expand

### 3.3.27 $\int_0^1 \frac{\ln^2(x)\arctan(x)}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$

Show that

$$\int_0^1 \frac{\ln^2(x)\arctan(x)}{x\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x = \frac{\pi^3}{16}\ln(2) - \frac{7\pi}{64}\zeta(3) + \beta(4) \tag{3.118}$$

The following solution is due to Kartick Betal [5]:
Solution. Let $I$ denote our integral,

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln^2(x)\arctan(x)}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x - \underbrace{\int_1^\infty \frac{\ln^2(x)\arctan(x)}{x\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x}_{x\to 1/x}$$

$$= \int_0^\infty \frac{\ln^2(x)\arctan(x)}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x\ln^2(x)\arctan(1/x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\left\{\text{ write } \arctan(1/x) = \tfrac{\pi}{2} - \arctan(x)\right\}$$

$$= \int_0^\infty \frac{\ln^2(x)\arctan(x)}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\int_0^1 \frac{x\ln^2(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x\ln^2(x)\arctan(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\left\{\text{ let } x^2\to x \text{ in the second integral }\right\}$$

$$\left\{\text{ and write } \tfrac{x}{1+x^2} = \tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{x(1+x^2)} \text{ in the third one }\right\}$$

$$= \int_0^\infty \frac{\ln^2(x)\arctan(x)}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x - \frac{\pi}{16}\int_0^1 \frac{\ln^2(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\ln^2(x)\arctan(x)}{x}\,\mathrm{d}x - I$$

{add $I$ to both sides and integrate the third integral by parts then divide by 2 }

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\ln^2(x)\arctan(x)}{x\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x - \frac{\pi}{32}\int_0^1 \frac{\ln^2(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{\ln^3(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

{recall the results (3.11) and (1.62)}

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\ln^2(x)\arctan(x)}{x\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x - \frac{3\pi}{64}\zeta(3) + \beta(4)$$

For the remaining integral, write $\arctan(x) = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2y^2}\,\mathrm{d}y$,

$$\int_0^\infty \frac{\ln^2(x)\arctan(x)}{x\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\ln^2(x)}{x\left(1+x^2\right)}\left(\int_0^1 \frac{x}{1+x^2y^2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$\left\{\text{write } \frac{1}{\left(1+x^2\right)\left(1+x^2y^2\right)} = \frac{1}{1-y^2}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{y^2}{1+x^2y^2}\right)\right\}$$

{then change the order of integration}

$$= \int_0^1 \frac{1}{1-y^2}(\underbrace{\int_0^\infty \frac{\ln^2(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x}_{x=t} - \underbrace{\int_0^\infty \frac{y^2\ln^2(x)}{1+x^2y^2}\,\mathrm{d}x)}_{xy=t}\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1-y^2}\left(\int_0^\infty \frac{\ln^2(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^\infty \frac{y\ln^2\left(\frac{t}{y}\right)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1-y^2}\left((1-y)\int_0^\infty \frac{\ln^2(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + 2y\ln(y)\int_0^\infty \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right.$$
$$\left. - y\ln^2(y)\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}y$$

{recall the result of the first integral from (3.21)} {and note that the second integral is 0 by using (3.22)}

$$= \int_0^1 \frac{1}{1-y^2}\left((1-y)\frac{\pi^3}{8} - \frac{\pi y\ln^2(y)}{2}\right)\mathrm{d}y$$
$$= \frac{\pi^3}{8}\int_0^1 \frac{1-y}{1-y^2}\,\mathrm{d}y - \frac{\pi}{2}\underbrace{\int_0^1 \frac{y\ln^2(y)}{1-y^2}\,\mathrm{d}y}_{y^2=x}$$
$$= \frac{\pi^3}{8}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+y} - \frac{\pi}{16}\int_0^1 \frac{\ln^2(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

{the second integral is given in (3.8)}

$$= \frac{\pi^3}{8}\ln(2) - \frac{\pi}{8}\zeta(3).$$

**3.3.28** $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^3(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$

Show that

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^3(x)\ln(1-x)}{1-x}\, \mathrm{d}x = 6\operatorname{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right) + 6\ln(2)\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{16}\zeta(5)$$
$$-3\zeta(2)\zeta(3) + \frac{21}{8}\ln^2(2)\zeta(3) - \ln^3(2)\zeta(2) + \frac{9}{20}\ln^5(2) \tag{3.119}$$

Solution. Make use of

$$\ln^3(x)\ln(1-x) = \frac{1}{4}\ln^4(x) + \frac{1}{4}\ln^4(1-x)$$

$$-\frac{1}{4}\ln^4\left(\frac{x}{1-x}\right) - \ln(x)\ln^3(1-x) + \frac{3}{2}\ln^2(x)\ln^2(1-x),$$

we have

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^3(x)\ln(1-x)}{1-x}\, \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^4(x)}{1-x}\, \mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^4(1-x)}{1-x}\, \mathrm{d}x - \frac{1}{4}\underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^4\left(\frac{x}{1-x}\right)}{1-x}\, \mathrm{d}x}_{x/(1-x)=y}$$
$$-\underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(x)\ln^3(1-x)}{1-x}\, \mathrm{d}x}_{\text{IBP}} + \frac{3}{2}\underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^2(x)\ln^2(1-x)}{1-x}\, \mathrm{d}x}_{\text{IBP}}$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2} \frac{\ln^4(x)}{1-x}\, \mathrm{d}x +} + \frac{\ln^5(2)}{20} - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\ln^4(y)}{1+y}\, \mathrm{d}y$$
$$-\frac{\ln^5(2)}{4} - \frac{1}{4}\underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^4(1-x)}{x}\, \mathrm{d}x}_{1-x\to x} + \frac{\ln^5(2)}{2} + \underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^3(1-x)\ln(x)}{x}\, \mathrm{d}x}_{1-x\to x}$$
$$= \frac{3}{10}\ln^5(2) + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^4(x)}{1-x}\, \mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\ln^4(y)}{1+y}\, \mathrm{d}y$$
$$-\frac{1}{4}\underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln^4(x)\, \mathrm{d}x}_{\int_0^1 - \int_0^{1/2}} + \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln^3(x)\ln(1-x)\, \mathrm{d}x}_{\int_0^1 - \int_0^{1/2}}$$
$$= \frac{3}{10}\ln^5(2) + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^4(x)}{1-x}\, \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^4(x)}{1-x^2}\, \mathrm{d}x$$
$$+\int_0^1 \frac{\ln^3(x)\ln(1-x)}{1-x}\, \mathrm{d}x - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^3(x)\ln(1-x)}{1-x}\, \mathrm{d}x$$

{add the integral to both sides then divide by 2 }

$$= \frac{3\ln^5(2)}{20} + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^4(x)}{1-x}\, \mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\ln^4(x)}{1-x^2}\, \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^3(x)\ln(1-x)}{1-x}\, \mathrm{d}x. \tag{3.120}$$

Gather the results (3.19), (3.14), and (3.41) to finish the solution.

3.3.29 $\int_0^1 \frac{\ln^3(x)\ln(1+x)}{1+x}\, \mathrm{d}x$

Show that

$$\int_0^1 \frac{\ln^3(x)\ln(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{87}{16}\zeta(5) - 3\zeta(2)\zeta(3). \tag{3.121}$$

Solution. Using $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x(1+x)}$, we have

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{\ln^3(x)\ln(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\int_0^1 \frac{\ln^3(x)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x}_{\text{IBP}} - \int_0^1 \frac{\ln^3(x)\ln(1+x)}{x(1+x)}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\ln^4(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\ln^3(x)\ln(1+x)}{x(1+x)}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Putting $q = 2$ in (3.37) gives

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{\ln^3(x)\ln(1+x)}{x(1+x)}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\ln^3(x)\ln(1+x)}{x(1+x)}\mathrm{d}x - \frac{5}{8}\int_0^1 \frac{\ln^4(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&\left\{ \text{let } x = \frac{1-t}{t} \text{ in the first integral} \right\} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^3\left(\frac{t}{1-t}\right)\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t - \frac{5}{8}\int_0^1 \frac{\ln^4(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^4(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t - \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{\ln^3(t)\ln(1-t)}{1-t}\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \frac{3}{2}\underbrace{\int_0^1 \frac{\ln^2(t)\ln^2(1-t)}{1-t}\,\mathrm{d}t}_{\text{IBP}} - \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln^3(1-t)}{1-t}\mathrm{d}t}_{\text{IBP}} - \frac{5}{8}\int_0^1 \frac{\ln^4(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^4(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t - \frac{3}{2}\int_0^{\frac{1}{1-}\ \frac{\ln^3(t)\ln(1-t)}{1-t}}\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \underbrace{\int_0^1 \frac{\ln^3(1-t)\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t}_{1-t\to t} - \frac{1}{8}\underbrace{\int_0^1 \frac{\ln^4(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t}_{1-t\to t} - \frac{5}{8}\int_0^1 \frac{\ln^4(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{8}\int_0^1 \frac{\ln^4(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^3(t)\ln(1-t)}{1-t}\,\mathrm{d}t - \frac{5}{8}\int_0^1 \frac{\ln^4(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{3.122}$$

Put this integral back,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{\ln^3(x)\ln(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{8}\int_0^1 \frac{\ln^4(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x - \frac{3}{8}\int_0^1 \frac{\ln^4(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^3(t)\ln(1-t)}{1-t}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{3}{8}\underbrace{\int_0^1 \frac{2x\ln^4(x)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x}_{x=\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^3(t)\ln(1-t)}{1-t}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{3}{128}\int_0^1 \frac{\ln^4(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^3(t)\ln(1-t)}{1-t}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

These two integrals are given in (3.8) and (3.41) respectively.

3.3.30 $\int_0^1 \frac{\ln^3(1-x)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$

Show that

$$\int_0^1 \frac{\ln^3(1-x)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x = 6\operatorname{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right)+6\ln(2)\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{81}{16} \tag{5}$$

$$-\frac{21}{8}\zeta(2)\zeta(3)+\frac{21}{8}\ln^2(2)\zeta(3)-\ln^3(2)\zeta(2)+\frac{1}{5}\ln^5(2) \tag{3.123}$$

The following solution is due to Myunghyun Song [21]:

Solution. Make use of

$$\ln^3(1-x)\ln(1+x) = \frac{1}{4}\ln^4(1-x)-\frac{1}{4}\ln^4(1+x)$$
$$+\frac{1}{16}\ln^4\left(1-x^2\right)-\frac{5}{16}\ln^4\left(\frac{1-x}{1+x}\right)-\frac{1}{2}\ln^3\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\ln(1+x),$$

we have

$$\int_0^1 \frac{\ln^3(1-x)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$=\underbrace{\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\ln^4(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x}_{1-x=y}-\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\ln^4(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{16}\underbrace{\int_0^1 \frac{\ln^4\left(1-x^2\right)}{x}\,\mathrm{d}x}_{1-x^2=y}$$
$$-\frac{5}{16}\int_0^1 \frac{\ln^4\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\underbrace{\int_0^1 \frac{\ln^3\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x}_{(1-x)/(1+x)=y}$$
$$=\frac{9}{32}\int_0^1 \frac{\ln^4(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y-\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\ln^4(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x-\frac{5}{16}\int_0^1 \frac{\ln^4\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$+\int_0^1 \frac{\ln^3(y)\ln(1+x)}{1-y^2}\,\mathrm{d}y-\ln(2)\int_0^1 \frac{\ln^3(y)}{1-y^2}\,\mathrm{d}y$$

These integrals are given in (3.8), (3.20), (3.15), (3.51), and (3.14) respectively.

3.3.31 $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\ln^3(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$

Show that

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\ln^3(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x = -6\operatorname{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right)-6\ln(2)\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4}\zeta(5)$$

$$+\frac{21}{8}\zeta(2)\zeta(3)-\frac{21}{8}\ln^2(2)\zeta(3)+\ln^3(2)\zeta(2)-\frac{1}{5}\ln^5(2) \tag{3.124}$$

Solution. Make use of

$$\ln(1-x)\ln^3(1+x)$$
$$=\frac{1}{8}\ln^4\left(1-x^2\right)-\frac{1}{8}\ln^4\left(\frac{1-x}{1+x}\right)-\ln^3(1-x)\ln(1+x),$$

we get

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\ln^3(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{8}\underbrace{\int_0^1 \frac{\ln^4\left(1-x^2\right)}{x}\,\mathrm{d}x}_{1-x^2=y} - \frac{1}{8}\int_0^1 \frac{\ln^4\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\ln^3(1-x)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{16}\int_0^1 \frac{\ln^4(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y - \frac{1}{8}\int_0^1 \frac{\ln^4\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\ln^3(1-x)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

These integrals are calculated in (3.8), (3.15), and (3.123).

**3.3.32** $\int_0^1 \frac{\ln^3(1+x)\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$

Show that

$$\int_0^1 \frac{\ln^3(1+x)\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = -12\,\mathrm{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right) - 12\ln(2)\,\mathrm{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{99}{16}\zeta(5)$$
$$+ 3\zeta(2)\zeta(3) - \frac{21}{4}\ln^2(2)\zeta(3) + 2\ln^3(2)\zeta(2) - \frac{2}{5}\ln^5(2) \tag{3.125}$$

Solution. Put $x = \frac{1-t}{t}$,

$$\int_0^1 \frac{\ln^3(1+x)\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = -\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln^3(t)\ln\left(\frac{1-t}{t}\right)}{t(1-t)}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln^4(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln^4(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t - \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln^3(t)\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t}_{\text{IBP}}$$
$$- \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln^3(t)\ln(1-t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{\ln^5(2)}{20} + \frac{3}{4}\underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln^4(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t}_{\int_0^1 - \int_0^{1/2}} - \underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln^3(t)\ln(1-t)}{1-t}\,\mathrm{d}t}_{\int_0^1 - \int_0^{1/2}}$$

$$= -\frac{\ln^5(2)}{20} + \frac{3}{4}\int_0^1 \frac{\ln^4(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t - \frac{3}{4}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^4(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$$
$$- \int_0^1 \frac{\ln^3(t)\ln(1-t)}{1-t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^3(t)\ln(1-t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$$

{recall the relation involving the last integral from (3.120)}

$$= \frac{\ln^5(2)}{10} - \frac{93}{16}\zeta(5) + \frac{3}{4}\int_0^1 \frac{\ln^4(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^4(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^3(t)\ln(1-t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$$

These integrals are computed in (3.8), (3.19), and (3.41) respectively.
A different approach involving the derivative of the beta function may be found in [30].

3.3.33 $\int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_2(-x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Show that

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_2(-x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{7\pi^3}{96} + \frac{3\pi}{16}\ln^2(2) + \frac{3}{2}\ln(2)G - 3\Im\operatorname{Li}_3(1+i) \tag{3.126}$$

Solution. Write $\operatorname{Li}_2(-x) = \int_0^1 \frac{x\ln(y)}{1+xy}\,\mathrm{d}y$, which follows from (1.75), we have

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_2(-x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\left(\int_0^1 \frac{x\ln(y)}{1+xy}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

{change the order of integration}

$$= \int_0^1 \ln(y)\left(\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

{evaluate the inner integral by partial fraction decomposition}

$$= \int_0^1 \ln(y)\left(\frac{\pi}{4}\frac{y}{1+y^2} + \frac{\ln(2)}{2}\frac{1}{1+y^2} - \frac{\ln(1+y)}{1+y^2}\right)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{\pi}{4}\underbrace{\int_0^1 \frac{y\ln(y)}{1+y^2}\,\mathrm{d}y}_{y=\sqrt{x}} + \frac{\ln(2)}{2}\int_0^1 \frac{\ln(y)}{1+y^2}\,\mathrm{d}y - \int_0^1 \frac{\ln(y)\ln(1+y)}{1+y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{\pi}{16}\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x + \frac{\ln(2)}{2}\int_0^1 \frac{\ln(y)}{1+y^2}\,\mathrm{d}y - \int_0^1 \frac{\ln(y)\ln(1+y)}{1+y^2}\,\mathrm{d}y. \tag{3.127}$$

The solution finalizes on recalling the results (3.11), (1.163), and (3.109).

### 3.3.34 $\int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_2^2(-x)}{x}\,\mathrm{d}x$

Show that

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_2^2(-x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\zeta(2)\zeta(3) - \frac{17}{16}\zeta(5). \tag{3.128}$$

Solution. By using (1.78):

$$\operatorname{Li}_2(-x) = \frac{1}{2}\operatorname{Li}_2\left(x^2\right) - \operatorname{Li}_2(x),$$

we write

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_2^2(-x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}\operatorname{Li}_2\left(x^2\right)-\operatorname{Li}_2(x)\right)^2\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{4}\underbrace{\int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_2^2\left(x^2\right)}{x}\,\mathrm{d}x}_{x^2\to x} - \int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_2\left(x^2\right)\operatorname{Li}_2(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_2^2(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{8}\int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_2^2(x)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_2\left(x^2\right)\operatorname{Li}_2(x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_2^2(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{9}{8}\int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_2^2(x)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_2\left(x^2\right)\operatorname{Li}_2(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$\left\{\text{ expand } \operatorname{Li}_2(x) \text{ and } \operatorname{Li}_2\left(x^2\right) \text{ in series }\right\}$$
$$= \frac{9}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^1 x^{n-1}\operatorname{Li}_2(x)\mathrm{d}x - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\int_0^1 x^{2n-1}\operatorname{Li}_2(x)\mathrm{d}x$$
$$\{\text{ recall the result (3.66) for both integrals }\}$$
$$= \frac{9}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{\zeta(2)}{n}-\frac{H_n}{n^2}\right) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{\zeta(2)}{2n}-\frac{H_{2n}}{(2n)^2}\right)$$
$$= \frac{9}{8}\zeta(2)\zeta(3) - \frac{9}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^4} - \frac{1}{2}\zeta(2)\zeta(3) + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{2n}}{(2n)^4}$$
$$\{\text{ make use of (1.5) for the latter sum }\}$$
$$= \frac{5}{8}\zeta(2)\zeta(3) - \frac{9}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^4} + 4\left(\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{n^4}\right)$$
$$= \frac{5}{8}\zeta(2)\zeta(3) + \frac{7}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^4} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{n^4} \tag{3.129}$$

Gather the results (4.4) and (4.93) to finish the solution.

**3.3.35** $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{Li}_2^2(x)}{x}\,\mathrm{d}x$

The following integral is proposed by Cornel Vălean [38]:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{Li}_2^2(x)}{x}\,\mathrm{d}x = -2\operatorname{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right) - 2\ln(2)\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{27}{32}\zeta(5) - \frac{5}{8}\ln(2)\zeta(4)$$
$$+\frac{7}{8}\zeta(2)\zeta(3) - \frac{7}{8}\ln^2(2)\zeta(3) + \frac{1}{2}\ln^3(2)\zeta(2) - \frac{7}{60}\ln^5(2) \tag{3.130}$$

Solution. By applying integration by parts twice, we have

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{Li}_2^2(x)}{x}\, \mathrm{d}x &= \operatorname{Li}_3(x)\operatorname{Li}_2(x)\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{Li}_3(x)\ln(1-x)}{x}\, \mathrm{d}x \\
&= \operatorname{Li}_3\left(\frac{1}{2}\right)\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) + \operatorname{Li}_4(x)\ln(1-x)\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{Li}_4(x)}{1-x}\, \mathrm{d}x \\
&\left\{ \text{use } \frac{\operatorname{Li}_4(x)}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} H_{n-1}^{(4)} x^{n-1} \text{ given in (2.3)} \right\} \\
&= \operatorname{Li}_3\left(\frac{1}{2}\right)\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) - \ln(2)\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} H_{n-1}^{(4)} \int_0^{\frac{1}{2}} x^{n-1}\, \mathrm{d}x \\
&\left\{ \text{write } \int_0^{\frac{1}{2}} x^{n-1}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{n2^n} \text{ and } H_{n-1}^{(4)} = H_n^{(4)} - \frac{1}{n^4} \right\} \\
&= \operatorname{Li}_3\left(\frac{1}{2}\right)\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) - \ln(2)\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(4)} - \frac{1}{n^4}}{n2^n} \\
&= \operatorname{Li}_3\left(\frac{1}{2}\right)\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) - \ln(2)\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(4)}}{n2^n}
\end{aligned}
$$

{set $q = 3$ in (3.87) to get the integral representation of the sum}

$$
\begin{aligned}
&= \operatorname{Li}_3\left(\frac{1}{2}\right)\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) - \ln(2)\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right) \\
&\quad -\frac{1}{6}\int_0^1 \frac{\ln^3(1-x)\ln(1+x)}{x}\, \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

This integral is given in (3.123) and the values of $\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)$ and $\operatorname{Li}_3\left(\frac{1}{2}\right)$ are given in (1.81) and (1.92) respectively.

**3.3.36** $\int_0^1 \frac{\ln^3(1-x)\operatorname{Li}_2(x)}{x}\, \mathrm{d}x$

Show that

$$
\int_0^1 \frac{\ln^3(1-x)\operatorname{Li}_2(x)}{x}\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\zeta(6) - 6\zeta^2(3). \tag{3.131}
$$

Solution. With subbing $1 - x = y$, we have

$$
\int_0^1 \frac{\ln^3(1-x)\operatorname{Li}_2(x)}{x}\, \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\ln^3(y)\operatorname{Li}_2(1-y)}{1-y}\, \mathrm{d}y
$$

$$
\begin{aligned}
&\{\text{recall the dilogarithm reflection formula (1.80)}\}\\
&= \int_0^1 \frac{\ln^3(y)}{1-y}\left(\zeta(2) - \ln(y)\ln(1-y) - \operatorname{Li}_2(y)\right) \mathrm{d}y\\
&= \zeta(2)\int_0^1 \frac{\ln^3(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y - \int_0^1 \frac{\ln^4(y)\ln(1-y)}{1-y}\,\mathrm{d}y - \int_0^1 \frac{\ln^3(y)\operatorname{Li}_2(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y\\
&\left\{\text{expand } \frac{\operatorname{Li}_2(y)}{1-y} \text{ in series as shown in (2.3)}\right\}\\
&= \zeta(2)\int_0^1 \frac{\ln^3(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y - \int_0^1 \frac{\ln^4(y)\ln(1-y)}{1-y}\,\mathrm{d}y - \sum_{n=1}^{\infty} H_{n-1}^{(2)}\int_0^1 y^{n-1}\ln^3(y)\mathrm{d}y\\
&= \zeta(2)\int_0^1 \frac{\ln^3(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y - \int_0^1 \frac{\ln^4(y)\ln(1-y)}{1-y}\,\mathrm{d}y - \sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^{(2)} - \frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{-3!}{n^4}\right)\\
&= \zeta(2)\int_0^1 \frac{\ln^3(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y - \int_0^1 \frac{\ln^4(y)\ln(1-y)}{1-y}\,\mathrm{d}y + 6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^4} - 6\zeta(6)
\end{aligned}
$$

These terms are given in (3.8), (3.41), and (4.56) respectively.

## 6.7 4 Harmonic Series

### 6.7.1 4.1 Generalized Harmonic Series

4.1.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{\frac{n}{p}}}{n^q}$
Let $p \in \mathbb{Z}^+$and $q \geq 2$. Then the following identity holds:

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{\frac{n}{p}}}{n^q} = (-1)^q p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{pn}}{(pn)^q} - \sum_{k=1}^{q-2} (-p)^{-k}\zeta(q-k)\zeta(k+1). \tag{4.1}
$$

Proof.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{\frac{n}{p}}}{n^q} = \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{q-1}}\left(\frac{H_{\frac{n}{p}}}{\frac{n}{p}}\right)\\
&\{\text{replace } n \text{ with } n/p \text{ in the identity (1.124)}\}\\
&= \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{q-1}}\left(-\int_0^1 x^{\frac{n}{p}-1}\ln(1-x)\mathrm{d}x\right)\\
&= -\frac{1}{p}\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{\frac{n}{p}}}{n^{q-1}}\right)\mathrm{d}x\\
&= -\frac{1}{p}\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\left(\operatorname{Li}_{q-1}\left(x^{\frac{1}{p}}\right)\right)\mathrm{d}x\\
&\overset{x=y^p}{=} -\int_0^1 \frac{\ln(1-y^p)\operatorname{Li}_{q-1}(y)}{y}\,\mathrm{d}y\\
&\{\text{ expand } \ln(1-y^p) \text{ in series }\}
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 y^{pn-1} \operatorname{Li}_{q-1}(y) \mathrm{d}y$$

$$\{\text{make use of (3.65) for the integral}\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( (-1)^q \frac{H_{pn}}{(pn)^{q-1}} - \sum_{k=1}^{q-2} (-1)^k \frac{\zeta(q-k)}{(pn)^k} \right)$$

$$= (-1)^q p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{pn}}{(pn)^q} - \sum_{k=1}^{q-2} (-p)^{-k} \zeta(q-k) \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k+1}} \right)$$

$$= (-1)^q p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{pn}}{(pn)^q} - \sum_{k=1}^{q-2} (-p)^{-k} \zeta(q-k) \zeta(k+1)$$

and the proof is finalized.

### 4.1.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{(n+s)^q}$

Let $s \notin \mathbb{Z}^-$and $q \in \mathbb{Z}_{>1}$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{(n+s)^q} = \frac{(-1)^q}{(q-1)!} \left( \psi^{(q-1)}(s)(\psi(s)+\gamma) - \frac{1}{2}\psi^{(q)}(s) \right)$$
$$+ \frac{(-1)^q}{(q-1)!} \sum_{k=1}^{q-2} \binom{q-2}{k} \psi^{(q-k-1)}(s) \psi^{(k)}(s) \tag{4.2}$$

**Proof**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{(n+s)^q} = \sum_{n=1}^{\infty} H_n \left( \frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!} \int_0^1 x^{n+s-1} \ln^{q-1}(x) \mathrm{d}x \right)$$
$$= \frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!} \int_0^1 x^{s-1} \ln^{q-1}(x) \left( \sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n \right) \mathrm{d}x$$

{recall the generating function (2.4)}

$$= \frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!} \int_0^1 x^{s-1} \ln^{q-1}(x) \left( -\frac{\ln(1-x)}{1-x} \right) \mathrm{d}x$$
$$= \frac{(-1)^q}{(q-1)!} \int_0^1 \frac{x^{s-1} \ln^{q-1}(x) \ln(1-x)}{1-x} \mathrm{d}x. \tag{4.3}$$

This integral is given in (3.40).

### 4.1.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^q}$

Let $q \in \mathbb{Z}_{>1}$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^q} = \frac{1}{2}(q+2)\zeta(q+1) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{q-2} \zeta(q-k)\zeta(k+1) \tag{4.4}$$

Proof (i). Set $s = 1$ in (4.3),

$$\frac{(-1)^q}{(q-1)!}\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{(n+1)^q} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n-1}}{n^q}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n - \frac{1}{n}}{n^q} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^q} - \zeta(q+1)$$

The integral on the LHS is given in (3.41).
The following second proof is by Rob Johnson [14]:
Proof (ii). Start with expanding $\zeta(q-k)$ and $\zeta(k+1)$ in series,

$$\zeta(q-k)\zeta(k+1) = \left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{q-k}}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{k+1}}\right).$$

Next, take the summation for both sides from $k = 1$ to $q-2$,

$$\sum_{k=1}^{q-2}\zeta(q-k)\zeta(k+1) = \sum_{k=1}^{q-2}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{q-k}}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{k+1}}\right)$$
$$\{\text{ change the order of summations }\}$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{q-2}\frac{1}{m^{q-k}n^{k+1}}$$
$$\{\text{ break up the middle sum }\}$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{m-1} + a_{n=m} + \sum_{n=m+1}^{\infty}\right)\sum_{k=1}^{q-2}\frac{1}{m^{q-k}n^{k+1}}$$
$$\{\text{ pull out the terms for } n = m\}$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{q-2}\frac{1}{m^{q+1}} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{m-1} + \sum_{n=m+1}^{\infty}\right)\sum_{k=1}^{q-2}\frac{1}{m^{q-k}n^{k+1}}$$
$$= \sum_{k=1}^{q-2}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{q+1}}\right) + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{m-1} + \sum_{n=m+1}^{\infty}\right)\frac{1}{m^q n}\left(\sum_{k=1}^{q-2}\frac{m^k}{n^k}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{q-2}\zeta(q+1) + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{m-1} + \sum_{n=m+1}^{\infty}\right)\left(\frac{1}{nm^{q-1}(n-m)} - \frac{1}{mn^{q-1}(n-m)}\right)$$
$$= (q-2)\zeta(q+1) + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{m-1}\left(\frac{1}{nm^{q-1}(n-m)} - \frac{1}{mn^{q-1}(n-m)}\right)$$
$$+ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=m+1}^{\infty}\left(\frac{1}{nm^{q-1}(n-m)} - \frac{1}{mn^{q-1}(n-m)}\right).$$

By using $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{m-1} a_m b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n+1}^{\infty} a_m b_n$ given in (1.17), the first double sum becomes

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{m-1}\left(\frac{1}{nm^{q-1}(n-m)} - \frac{1}{mn^{q-1}(n-m)}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{nm^{q-1}(n-m)} - \frac{1}{mn^{q-1}(n-m)}\right)$$

{swab the variables $n$ and $m$ }

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=m+1}^{\infty}\left(\frac{1}{nm^{q-1}(n-m)}-\frac{1}{mn^{q-1}(n-m)}\right).$$

Therefore, our sum simplifies to

$$\sum_{k=1}^{q-2}\zeta(q-k)\zeta(k+1)=(q-2)\zeta(q+1)$$

$$+2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=m+1}^{\infty}\left(\frac{1}{nm^{q-1}(n-m)}-\frac{1}{mn^{q-1}(n-m)}\right)$$

{ shift the index $n$ by $+m$}

$$=(q-2)\zeta(q+1)+2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+m)m^{q-1}n}-\frac{1}{m(n+m)^{q-1}n}\right)$$

$$=(q-2)\zeta(q+1)+2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+m)m^{q-1}n}-2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m(n+m)^{q-1}n}.$$

First sum:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+m)m^{q-1}n}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^q}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m}{n(n+m)}\right)$$

{recall the definition of $H_m$ (1.129)}

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{H_m}{m^q}.$$

Second sum: Multiply the summand by $\frac{n+m}{n+m}$,

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m(n+m)^{q-1}n}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+m}{m(n+m)^q n}$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m(n+m)^q}+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+m)^q n}$$

{swap the variables $m$ and $n$ in the first double sum}
{and change the order of summations in the second double sum}

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)^q}$$

{ shift the index $m$ by $-n$}

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{nm^q}$$

use $\sum_{m=n+1}^{\infty}a_m=\sum_{m=n}^{\infty}a_m-a_n$ for the inner sum }

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=n}^{\infty}\frac{1}{nm^q}-\frac{1}{n^{q+1}}\right)$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n}^{\infty}\frac{1}{nm^q}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{q+1}}$$

{ use $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n}^{\infty}a_m b_n=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{m}a_m b_n$ given in (1.16)}

$$=2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{nm^q}-2\zeta(q+1)$$

$$=2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^q}\left(\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}\right)-2\zeta(q+1)$$

$$=2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{H_m}{m^q}-2\zeta(q+1)$$

Collect the two sums to finish the proof.
Let's replace $q$ with $2q$ in (4.4),

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^{2q}} &= (q+1)\zeta(2q+1)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2q-2}\zeta(2q-k)\zeta(k+1)\\
&\quad\{\text{this sum is simplified in (3.42) }\}\\
&= (q+1)\zeta(2q+1)-\sum_{k=1}^{q-1}\zeta(2q-2k+1)\zeta(2k) \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

**Examples:**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^2}=2\zeta(3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^4}=3\zeta(5)-\zeta(2)\zeta(3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^6}=4\zeta(7)-\zeta(2)\zeta(5)-\zeta(3)\zeta(4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^8}=5\zeta(9)-\zeta(2)\zeta(7)-\zeta(3)\zeta(6)-\zeta(4)\zeta(5)$$

A special case of Euler sum is

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^{2q+1}}=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2q-1}(-1)^k\zeta(2q-k+1)\zeta(k+1) \qquad (4.6)$$

To show that, replace $q$ with $=2q$ in (3.65),

$$\frac{H_n}{n^{2q}}=-\int_0^1 x^{n-1}\operatorname{Li}_{2q}(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{2q-1}\frac{(-1)^k}{n^k}\zeta(2q-k+1)$$

Divide both sides by $n$ then consider the summation over $n\geq 1$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^{2q+1}}\\
&=-\int_0^1\frac{\operatorname{Li}_{2q}(x)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{2q-1}(-1)^k\zeta(2q-k+1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{k+1}}\\
&=\int_0^1\frac{\operatorname{Li}_{2q}(x)\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{2q-1}(-1)^k\zeta(2q-k+1)\zeta(k+1)
\end{aligned}$$

$$\{ \text{ expand } \operatorname{Li}_{2q}(x) \text{ in series } \}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2q}} \int_0^1 x^{n-1} \ln(1-x) \mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{2q-1} (-1)^k \zeta(2q-k+1)\zeta(k+1)$$

$$\{ \text{ make use of the result (1.124)} \}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2q}} \left( -\frac{H_n}{n} \right) - \sum_{k=1}^{2q-1} (-1)^k \zeta(2q-k+1)\zeta(k+1)$$

$$\{ \text{ add the sum to both sides then divide by 2} \}$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2q-1} (-1)^k \zeta(2q-k+1)\zeta(k+1)$$

**Examples:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^3} = \frac{5}{4}\zeta(4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^5} = \frac{7}{4}\zeta(6) - \frac{1}{2}\zeta^2(3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^7} = \frac{9}{4}\zeta(8) - \zeta(3)\zeta(5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^9} = \frac{11}{4}\zeta(10) - \zeta(3)\zeta(7) - \frac{1}{2}\zeta^2(5)$$

#### 4.1.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{H}_n}{n^q}$

Let $q \in \mathbb{Z}_{>1}$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{H}_n}{n^q} = 2\left(1 - \frac{1}{2^q}\right) \ln(2)\zeta(q) + \left(1 - \frac{1}{2^q} - \frac{q}{2}\right) \zeta(q+1)$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{q-2} \eta(q-k)\eta(k+1) \tag{4.7}$$

Proof (i).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{H}_n}{n^q} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{H}_n \left( \frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!} \int_0^1 x^{n-1} \ln^{q-1}(x) \mathrm{d}x \right)$$

$$
\begin{aligned}
=&\frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!}\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(x)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\bar{H}_n x^n\right)\mathrm{d}x\\
&\{\text{recall the generation function (2.29)}\}\\
=&\frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!}\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(x)}{x}\left(\frac{\ln(1+x)}{1-x}\right)\mathrm{d}x\\
=&\frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!}\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(x)\ln(1+x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

and this integral is found in (3.48).

Proof (ii). We apply Rob's approach, but here we begin with expanding $\eta(q-k)$ and $\eta(k+1)$ in series,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{q-2}\eta(q-k)\eta(k+1) &= \sum_{k=1}^{q-2}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m^{q-k}}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{k+1}}\right)\\
&\{\text{change the order of summations}\}\\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{q-2}\frac{(-1)^{m+n}}{m^{q-k}n^{k+1}}\\
&\{\text{break up the middle sum}\}\\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{m-1}+a_{n=m}+\sum_{n=m+1}^{\infty}\right)\sum_{k=1}^{q-2}\frac{(-1)^{m+n}}{m^{q-k}n^{k+1}}\\
&\{\text{ pull out the terms for } n=m\}\\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{q-2}\frac{1}{m^{q+1}}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{m-1}+\sum_{n=m+1}^{\infty}\right)\sum_{k=1}^{q-2}\frac{(-1)^{m+n}}{m^{q-k}n^{k+1}}\\
&= \sum_{k=1}^{q-2}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{q+1}}\right)+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{m-1}+\sum_{n=m+1}^{\infty}\right)\frac{(-1)^{m+n}}{m^q n}\left(\sum_{k=1}^{q-2}\frac{m^k}{n^k}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{q-2}\zeta(q+1)+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{m-1}+\sum_{n=m+1}^{\infty}\right)\left(\frac{(-1)^{m+n}}{nm^{q-1}(n-m)}-\frac{(-1)^{m+n}}{mn^{q-1}(n-m)}\right)\\
&= (q-2)\zeta(q+1)+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{m-1}\left(\frac{(-1)^{m+n}}{nm^{q-1}(n-m)}-\frac{(-1)^{m+n}}{mn^{q-1}(n-m)}\right)\\
&\quad+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=m+1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{m+n}}{nm^{q-1}(n-m)}-\frac{(-1)^{m+n}}{mn^{q-1}(n-m)}\right).
\end{aligned}
$$

By using $\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{m-1}a_m b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n+1}^{\infty}a_m b_n$ given in (1.17), the first double sum becomes:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{m-1}\left(\frac{(-1)^{m+n}}{nm^{q-1}(n-m)}-\frac{(-1)^{m+n}}{mn^{q-1}(n-m)}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n+1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{m+n}}{nm^{q-1}(n-m)}-\frac{(-1)^{m+n}}{mn^{q-1}(n-m)}\right)$$
$$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=m+1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+m}}{nm^{q-1}(n-m)}-\frac{(-1)^{n+m}}{mn^{q-1}(n-m)}\right).$$

Thus, our sum boils down to

$$\sum_{k=1}^{q-2}\eta(q-k)\eta(k+1)=(q-2)\zeta(q+1)$$
$$+2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=m+1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+m}}{nm^{q-1}(n-m)}-\frac{(-1)^{n+m}}{mn^{q-1}(n-m)}\right)$$

{ shift the index $n$ by $+m$}

$$=(q-2)\zeta(q+1)+2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n}}{(n+m)m^{q-1}n}-\frac{(-1)^{n}}{m(n+m)^{q-1}n}\right)$$
$$=(q-2)\zeta(q+1)+2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(n+m)m^{q-1}n}-2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{m(n+m)^{q-1}n}.$$

First sum:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(n+m)m^{q-1}n}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^q}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n m}{n(n+m)}\right)$$
$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^q}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+m}\right)$$

{recall the result of the second sum from (1.143)}

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^q}\left(-\ln(2)-(-1)^m\left[\bar{H}_m-\ln(2)\right]\right)$$
$$=-\ln(2)\zeta(q)-\ln(2)\eta(q)-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m\bar{H}_m}{m^q}$$

Second sum: Multiply the summand by $\frac{n+m}{n+m}$,

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{m(n+m)^{q-1}n}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}(n+m)}{m(n+m)^{q}n}$$
$$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{m(n+m)^{q}}+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(n+m)^{q}n}$$

{swap the variables $m$ and $n$ in the first double sum}
{and change the order of summations in the second double sum}

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m + (-1)^n}{n(n+m)^q}$$

$$\{ \text{ shift the index } m \text{ by } -n\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-n} + (-1)^n}{nm^q}$$

$$\left\{ \text{use } \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m = \sum_{m=n}^{\infty} a_m - a_n \right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^{m-n} + (-1)^n}{nm^q} - \frac{1 + (-1)^n}{n^{q+1}} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^{m-n} + (-1)^n}{nm^q} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n^{q+1}}$$

$$\left\{ \text{use } \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} a_m b_n = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{m} a_m b_n \text{ given in (1.16)} \right\}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{m} \left( \frac{(-1)^{m-n} + (-1)^n}{nm^q} \right) - \zeta(q+1) + \eta(q+1)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^q} \left( \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^{m-n} + (-1)^n}{n} \right) - \zeta(q+1) + \eta(q+1)$$

{recall the definition of $\bar{H}_n$ in (1.133) for the inner sum}

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^q} \left( -(-1)^m \bar{H}_m - \bar{H}_m \right) - \zeta(q+1) + \eta(q+1)$$

$$= -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \bar{H}_m}{m^q} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\bar{H}_m}{m^q} - \zeta(q+1) + \eta(q+1)$$

The proof finalizes on collecting the two sums then writing $\eta(s) = (1 - 2^{1-s})\,\zeta(s)$ given in (1.56).

Replace $q$ with $2q$ in (4.7),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{H}_n}{n^{2q}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{2q}}\right) \ln(2)\zeta(2q) + \left(1 - \frac{1}{2^{2q}} - q\right) \zeta(2q+1)$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2q-2} \eta(2q-k)\eta(k+1)$$

{this sum is simplified in (3.49)}

$$= 2\left(1 - \frac{1}{2^{2q}}\right) \ln(2)\zeta(2q) + \left(1 - \frac{1}{2^{2q}} - q\right) \zeta(2q+1)$$
$$+ \sum_{k=1}^{q-1} \eta(2q-2k+1)\eta(2k) \tag{4.9}$$

**Examples:**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{H}_n}{n^2}=\frac{3}{2}\ln(2)\zeta(2)-\frac{1}{4}\zeta(3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{H}_n}{n^3}=\frac{7}{4}\ln(2)\zeta(3)-\frac{5}{16}\zeta(4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{H}_n}{n^4}=\frac{15}{8}\ln(2)\zeta(4)+\frac{3}{8}\zeta(2)\zeta(3)-\frac{17}{16}\zeta(5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{H}_n}{n^5}=\frac{31}{16}\ln(2)\zeta(5)+\frac{9}{32}\zeta^2(3)-\frac{49}{64}\zeta(6)$$

For other proofs, check [19, Theorem 3.5, p. 9] and [11, Theorem 7.1 (i), p. 32].

4.1.5 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_n}{n^{2q}}$

Let $q\in\mathbb{Z}^+$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_n}{n^{2q}}=-\frac{1}{2}(2q+1)\eta(2q+1)+\sum_{k=0}^{q-1}\zeta(2q-2k+1)\eta(2k) \tag{4.10}$$

**Proof (i).**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_n}{n^q}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nH_n\left(\frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!}\int_0^1 x^{n-1}\ln^{q-1}(x)\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!}\int_0^1\frac{\ln^{q-1}(x)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}H_n(-x)^n\right)\mathrm{d}x$$

$$\{\text{ replace } x \text{ with } -x \text{ in (2.4) to get this sum }\}$$

$$=\frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!}\int_0^1\frac{\ln^{q-1}(x)}{x}\left(-\frac{\ln(1+x)}{1+x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{(-1)^q}{(q-1)!}\int_0^1\frac{\ln^{q-1}(x)\ln(1+x)}{x(1+x)}\mathrm{d}x. \tag{4.11}$$

Replace $q$ with $2q$ in (4.11),

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_n}{n^{2q}}=\frac{1}{(2q-1)!}\int_0^1\frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1+x)}{x(1+x)}\mathrm{d}x$$

This integral is given in (3.36).

Proof (ii). Using the integral form of $\bar{H}_n$ given in (1.140), we have

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\bar{H}_n}{n^{2q}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2q}}\left(\ln(2)-\int_0^1\frac{(-x)^n}{1+x}\,\mathrm{d}x\right)$$

$$=\ln(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2q}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2q}}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx$$

{make use of the identity (3.1) for the integral}

$$
\begin{aligned}
&= -\ln(2)\eta(2q) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2q}} \left(\ln(2) + H_{\frac{n}{2}} - H_n\right) \\
&= -\ln(2)\eta(2q) - \ln(2)\zeta(2q) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{\frac{n}{2}}}{n^{2q}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^{2q}}.
\end{aligned}
$$

The first sum can be simplified by setting $p = 2$ and replacing $q$ with $2q$ in (4.1),

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{\frac{n}{2}}}{n^{2q}} &= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{2n}}{(2n)^{2q}} - \sum_{k=1}^{2q-2}(-2)^{-k}\zeta(2q-k)\zeta(k+1) \\
&\quad \{\text{make use of (1.5) for the first sum}\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^{2q}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n}{n^{2q}} - \sum_{k=1}^{2q-2}(-2)^{-k}\zeta(2q-k)\zeta(k+1). \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

Substituting this sum yields

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \bar{H}_n}{n^{2q}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n}{n^{2q}} &= \sum_{k=1}^{2q-2}(-2)^{-k}\zeta(2q-k)\zeta(k+1) \\
&\quad - \ln(2)(\eta(2q) + \zeta(2q)) \qquad (4.13)
\end{aligned}
$$

To establish another relation, let $a_n = \frac{\bar{H}_n}{n^{2q}}$ in (1.5):

$$
\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}
$$

we obtain

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \bar{H}_n}{n^{2q}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{H}_n}{n^{2q}} &= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{H}_{2n}}{(2n)^{2q}} \\
&\left\{ \text{ substitute } \bar{H}_{2n} = H_{2n} - H_n \text{ given in (1.137)} \right\} \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{2n}}{(2n)^{2q}} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{(2n)^{2q}} \\
&\quad \{ \text{ employ (1.5) for the first sum } \} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n}{n^{2q}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^{2q}} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{(2n)^{2q}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n}{n^{2q}} + \left(1 - 2^{1-2q}\right)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^{2q}}.
\end{aligned}
$$

Rearrange the terms,

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \bar{H}_n}{n^{2q}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n}{n^{2q}} = \left(1 - 2^{1-2q}\right)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^{2q}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{H}_n}{n^{2q}} \qquad (4.14)
$$

Take the difference of (4.13) and (4.14) then divide by 2 ,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_n}{n^{2q}}=-\frac{1}{2}\ln(2)(\zeta(2q)+\eta(2q))+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2q-2}(-2)^{-k}\zeta(2q-k)\zeta(k+1)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{H}_n}{n^{2q}}-\frac{1-2^{1-2q}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^{2q}}$$

The last two sums are given in (4.9) and (4.5). As for the first, we have

$$\sum_{k=1}^{2q-2}(-2)^{-k}\zeta(2q-k)\zeta(k+1)=\sum_{k=1}^{q-1}\left[(-2)^{1-2k}+4^{k-q}\right]\zeta(2q-2k+1)\zeta(2k), \tag{4.15}$$

which follows from using the same technique as in (3.42).
For other proofs, check [4, II.1, pp. 4-7] and [26].

**Examples:**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_n}{n^2}=\frac{5}{8}\zeta(3);$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_n}{n^4}=\frac{1}{2}\zeta(2)\zeta(3)-\frac{59}{32}\zeta(5);$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_n}{n^6}=\frac{1}{2}\zeta(2)\zeta(5)+\frac{7}{8}\zeta(3)\zeta(4)-\frac{377}{128}\zeta(7);$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_n}{n^8}=\frac{1}{2}\zeta(2)\zeta(7)+\frac{31}{32}\zeta(3)\zeta(6)+\frac{7}{8}\zeta(4)\zeta(5)-\frac{2039}{512}\zeta(9).$$

#### 4.1.6 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\bar{H}_n}{n^{2q}}$

Let $q\in\mathbb{Z}^+$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\bar{H}_n}{n^{2q}}=\left(q-\frac{2q+1}{2^{2q+1}}\right)\zeta(2q+1)-2\left(1-\frac{1}{2^{2q}}\right)\ln(2)\zeta(2q)$$
$$-\sum_{k=1}^{q-1}\zeta(2k)\eta(2q-2k+1) \tag{4.16}$$

**Proof (i).**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\bar{H}_n}{n^{q}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\bar{H}_n\left(\frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!}\int_0^1 x^{n-1}\ln^{q-1}(x)\mathrm{d}x\right)$$
$$=\frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!}\int_0^1\frac{\ln^{q-1}(x)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\bar{H}_n(-x)^n\right)\mathrm{d}x$$

{replace $x$ with $-x$ in (2.29) to get this sum}

$$= \frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!} \int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(x)}{x} \left( \frac{\ln(1-x)}{1+x} \right) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{(-1)^{q}}{(q-1)!} \int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(x)\ln(1-x)}{x(1+x)} \mathrm{d}x \tag{4.17}$$

Replace $q$ with $2q$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \bar{H}_n}{n^{2q}} = \frac{-1}{(2q-1)!} \int_0^1 \frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1-x)}{x(1+x)} \mathrm{d}x$$

and this integral is given in (3.54).

Proof (ii). Combine (4.13) and (4.14) then divide by 2 ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \bar{H}_n}{n^{2q}} = -\frac{1}{2}\ln(2)(\zeta(2q)+\eta(2q)) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2q-2}(-2)^{-k}\zeta(2q-k)\zeta(k+1)$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{H}_n}{n^{2q}} + \frac{1-2^{1-2q}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^{2q}}$$

Combine the results (4.15), (4.9), and (4.5) to end the proof.

Examples:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \bar{H}_n}{n^{2}} = \frac{5}{8}\zeta(3) - \frac{3}{2}\ln(2)\zeta(2);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \bar{H}_n}{n^{4}} = \frac{59}{32}\zeta(5) - \frac{15}{8}\ln(2)\zeta(4) - \frac{3}{4}\zeta(2)\zeta(3);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \bar{H}_n}{n^{6}} = \frac{377}{128}\zeta(7) - \frac{63}{32}\ln(2)\zeta(6) - \frac{15}{16}\zeta(2)\zeta(5) - \frac{3}{4}\zeta(3)\zeta(4);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \bar{H}_n}{n^{8}} = \frac{2039}{512}\zeta(9) - \frac{255}{128}\ln(2)\zeta(8) - \frac{63}{64}\zeta(2)\zeta(7) - \frac{3}{4}\zeta(3)\zeta(6)$$
$$-\frac{15}{16}\zeta(4)\zeta(5).$$

### 4.1.7 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{\frac{n}{2}}}{n^{2q}}$

Let $q \in \mathbb{Z}_{>1}$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{\frac{n}{2}}}{n^{2q}} = \left(1 + \frac{2q+1}{2^{2q+1}}\right)\zeta(2q+1) - \frac{1}{2^{2q}}\sum_{k=1}^{q-1} 2^{2k}\zeta(2q-2k+1)\zeta(2k) \tag{4.18}$$

Proof (i).

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{\frac{n}{2}}}{n^q}=\sum_{n=1}^{\infty}H_{\frac{n}{2}}\left(\frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!}\int_0^1 x^{n-1}\ln^{q-1}(x)\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!}\int_0^1\frac{\ln^{q-1}(x)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}H_{\frac{n}{2}}x^n\right)\mathrm{d}x$$

{ recall the generating function (2.34)}

$$=\frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!}\int_0^1\frac{\ln^{q-1}(x)}{x}\left(\frac{-2\ln(2)x}{1-x^2}-\frac{2\ln(1-x)}{1-x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2(-1)^q\ln(2)}{(q-1)!}\int_0^1\frac{\ln^{q-1}(x)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x+\frac{(-1)^q}{(q-1)!}\int_0^1\frac{2\ln^{q-1}(x)\ln(1-x)}{x\,(1-x^2)}\mathrm{d}x$$

$$\left\{\text{ write }\frac{2}{x\,(1-x^2)}=\frac{2}{x}-\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\text{ in the second integral }\right\}$$

$$=\frac{2(-1)^q\ln(2)}{(q-1)!}\int_0^1\frac{\ln^{q-1}(x)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x+\frac{2(-1)^q}{(q-1)!}\int_0^1\frac{\ln^{q-1}(x)\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$-\frac{(-1)^q}{(q-1)!}\int_0^1\frac{\ln^{q-1}(x)\ln(1-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x+\frac{(-1)^q}{(q-1)!}\int_0^1\frac{\ln^{q-1}(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

Replace $q$ with $2q$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{\frac{n}{2}}}{n^{2q}}=\frac{2\ln(2)}{(2q-1)!}\int_0^1\frac{\ln^{2q-1}(x)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x+\frac{2}{(2q)!}\int_0^1\frac{\ln^{2q}(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

$$-\frac{1}{(2q-1)!}\int_0^1\frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{(2q-1)!}\int_0^1\frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

These integrals are given in (3.14), (3.8), (3.53), and (3.43) respectively.
Proof (ii). Substitute the results (4.5) and (4.10) in (4.12).
Examples:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{\frac{n}{2}}}{n^2}=\frac{11}{8}\zeta(3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{\frac{n}{2}}}{n^4}=\frac{37}{32}\zeta(5)-\frac{1}{4}\zeta(2)\zeta(3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{\frac{n}{2}}}{n^6}=\frac{135}{128}\zeta(7)-\frac{1}{16}\zeta(2)\zeta(5)-\frac{1}{4}\zeta(3)\zeta(4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{\frac{n}{2}}}{n^8}=\frac{521}{512}\zeta(9)-\frac{1}{64}\zeta(2)\zeta(7)-\frac{1}{4}\zeta(3)\zeta(6)-\frac{1}{16}\zeta(4)\zeta(5)$$

4.1.8 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_{\frac{n}{2}}}{n^{2q}}$

Let $q\in\mathbb{Z}^+$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_{\frac{n}{2}}}{n^{2q}}=\left(\frac{2q+3}{2^{2q+1}}-1\right)\zeta(2q+1)$$

$$-\sum_{k=1}^{q-1}\left(2^{1-2q}-2^{2k-2q}\right)\zeta(2q-2k+1)\zeta(2k)\tag{4.19}$$

Proof (i).

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_{\frac{n}{2}}}{n^q} &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n H_{\frac{n}{2}}\left(\frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!}\int_0^1 x^{n-1}\ln^{q-1}(x)\mathrm{d}x\right)\\
&= \frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!}\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(x)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}H_{\frac{n}{2}}(-x)^n\right)\mathrm{d}x\\
&\{\text{replace } x \text{ with } -x \text{ in the generating function (2.34)}\}\\
&= \frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!}\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(x)}{x}\left(\frac{2\ln(2)x}{1-x^2}-\frac{2\ln(1+x)}{1-x^2}\right)\mathrm{d}x\\
&= -\frac{2(-1)^q\ln(2)}{(q-1)!}\int_0^1\frac{\ln^{q-1}(x)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x+\frac{(-1)^q}{(q-1)!}\int_0^1\frac{2\ln^{q-1}(x)\ln(1+x)}{x\left(1-x^2\right)}\mathrm{d}x\\
&\left\{\text{ write }\frac{2x}{1-x^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x(1+x)}+\frac{1}{1-x}\text{ in the second integral }\right\}\\
&= -\frac{2(-1)^q\ln(2)}{(q-1)!}\int_0^1\frac{\ln^{q-1}(x)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x+\frac{(-1)^q}{(q-1)!}\int_0^1\frac{\ln^{q-1}(x)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x\\
&+\frac{(-1)^q}{(q-1)!}\int_0^1\frac{\ln^{q-1}(x)\ln(1+x)}{x(1+x)}\mathrm{d}x+\frac{(-1)^q}{(q-1)!}\int_0^1\frac{\ln^{q-1}(x)\ln(1+x)}{1-x}\,\mathrm{d}x \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

Replace $q$ with $2q$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_{\frac{n}{2}}}{n^{2q}}\\
&= -\frac{2\ln(2)}{(2q-1)!}\int_0^1\frac{\ln^{2q-1}(x)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{(2q-1)!}\int_0^1\frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x\\
&+\frac{1}{(2q-1)!}\int_0^1\frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1+x)}{x(1+x)}\mathrm{d}x+\frac{1}{(2q-1)!}\int_0^1\frac{\ln^{2q-1}(x)\ln(1+x)}{1-x}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

These integrals are given in (3.14), (3.12), (3.36), and (3.43) respectively.

Proof (ii). Set $a_n = H_{\frac{n}{2}}/n^{2q}$ in (1.5):

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = 2\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}-\sum_{n=1}^{\infty}a_n,$$

we get

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_{\frac{n}{2}}}{n^{2q}} = 2^{1-2q}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^{2q}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{\frac{n}{2}}}{n^{2q}}.$$

These two sums are found in (4.5) and (4.18).

**Examples:**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_{\frac{n}{2}}}{n^2}=-\frac{3}{8}\zeta(3);$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_{\frac{n}{2}}}{n^4}=\frac{1}{8}\zeta(2)\zeta(3)-\frac{25}{32}\zeta(5);$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_{\frac{n}{2}}}{n^6}=\frac{1}{32}\zeta(2)\zeta(5)+\frac{7}{32}\zeta(3)\zeta(4)-\frac{119}{128}\zeta(7);$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_{\frac{n}{2}}}{n^8}=\frac{1}{128}\zeta(2)\zeta(7)+\frac{31}{128}\zeta(3)\zeta(6)+\frac{7}{128}\zeta(4)\zeta(5)-\frac{501}{512}\zeta(9).$$

### 4.1.9 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^{2q-1}}$

Let $q\in\mathbb{Z}_{>1}$. Then the following identity holds:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^{2q-1}}=&\zeta(2)\zeta(2q-1)-\frac{1}{2}(q+1)(2q-1)\zeta(2q+1)\\&+2\sum_{k=1}^{q-1}k\zeta(2q-2k)\zeta(2k+1)\end{aligned}\tag{4.21}$$

Proof. First, let's find the following integral:

$$\int_0^1 x^{n-1}\ln(x)\ln(1-x)\mathrm{d}x=\frac{d}{dn}\int_0^1 x^{n-1}\ln(1-x)\mathrm{d}x$$

{recall the integral (1.124)}

$$=\frac{d}{dn}\left(-\frac{H_n}{n}\right)$$

{use the derivative of the harmonic number (1.132)}

$$=\frac{H_n}{n^2}+\frac{H_n^{(2)}}{n}-\frac{\zeta(2)}{n}.\tag{4.22}$$

Next, divide both sides by $n^a$ then take the summation over $n\geq 1$,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^{a+2}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^{a+1}}-\zeta(2)\zeta(a+1)\\
&=\int_0^1\frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^a}\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1\frac{\ln(x)\ln(1-x)\operatorname{Li}_a(x)}{x}\,\mathrm{d}x\\
&\{\text{ expand } \ln(1-x) \text{ in series }\}\\
&=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 x^{n-1}\ln(x)\operatorname{Li}_a(x)\mathrm{d}x\\
&=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{d}{dn}\int_0^1 x^{n-1}\operatorname{Li}_a(x)\mathrm{d}x\\
&\{\text{ recall the result (3.65)}\}\\
&=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{d}{dn}\left[(-1)^{a-1}\frac{H_n}{n^a}-\sum_{k=1}^{a-1}(-1)^k\frac{\zeta(a-k+1)}{n^k}\right]\\
&=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[(-1)^a\left(\frac{H_n^{(2)}}{n^a}+\frac{aH_n}{n^{a+1}}-\frac{\zeta(2)}{n^a}\right)+\sum_{k=1}^{a-1}k(-1)^k\frac{\zeta(a-k+1)}{n^{k+1}}\right]\\
&=-(-1)^a\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^{a+1}}+a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^{a+2}}-\zeta(2)\zeta(a+1)\right)\\
&\quad-\sum_{k=1}^{a-1}k(-1)^k\zeta(a-k+1)\zeta(k+2).
\end{aligned}
$$

Replace $a$ with $2q-2$ then reorder the terms,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^{2q-1}}&=\zeta(2)\zeta(2q-1)-\frac{1}{2}(2q-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^{2q}}\\
&-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2q-3}k(-1)^k\zeta(2q-k-1)\zeta(k+2)
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

The first sum is given in (4.5). For the second sum, note that the index $k$ can start from zero since the term ( $k=0$ ) is zero:

$$\sum_{k=1}^{2q-3} k(-1)^k \zeta(2q-k-1)\zeta(k+2) = \sum_{k=0}^{2q-3} k(-1)^k \zeta(2q-k-1)\zeta(k+2)$$

$$\left\{ \text{use } \sum_{k=0}^{2q-3} f(k) = \sum_{k=1}^{q-1} f(2k-2) + \sum_{k=1}^{q-1} f(2k-1) \right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{q-1} (2k-2)\zeta(2q-2k+1)\zeta(2k) - \sum_{k=1}^{q-1} (2k-1)\zeta(2q-2k)\zeta(2k+1)$$

$$\{ \text{ reverse the terms order of the second sum } \}$$

$$= \sum_{k=1}^{q-1} (2k-2)\zeta(2q-2k+1)\zeta(2k) - \sum_{k=1}^{q-1} (2q-2k-1)\zeta(2k)\zeta(2q-2k+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{q-1} (4k-2q-1)\zeta(2q-2k+1)\zeta(2k) \tag{4.24}$$

Therefore, our sum simplifies to

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^{2q-1}} = \zeta(2)\zeta(2q-1) - \frac{1}{2}(q+1)(2q-1)\zeta(2q+1)$$
$$+ 2\sum_{k=1}^{q-1} (q-k)\zeta(2q-2k+1)\zeta(2k)$$

The proof completes on writing

$$\sum_{k=1}^{q-1} (q-k)\zeta(2q-2k+1)\zeta(2k) = \sum_{k=1}^{q-1} k\zeta(2q-2k)\zeta(2k+1),$$

which follows from reversing the terms order.

**Examples:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^3} = 3\zeta(2)\zeta(3) - \frac{9}{2}\zeta(5);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^5} = 5\zeta(2)\zeta(5) + 2\zeta(3)\zeta(4) - 10\zeta(7).;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^7} = 7\zeta(2)\zeta(7) + 2\zeta(3)\zeta(6) + 4\zeta(4)\zeta(5) - \frac{35}{2}\zeta(9);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^9} = 9\zeta(2)\zeta(9) + 2\zeta(3)\zeta(8) + 6\zeta(4)\zeta(7) + 4\zeta(5)\zeta(6) - 27\zeta(11)$$

4.1.10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2q-1)}}{n^2}$

Let $q \in \mathbb{Z}_{>1}$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2q-1)}}{n^2}=\left(1+\frac{1}{2}(q+1)(2q-1)\right)\zeta(2q+1)$$
$$-2\sum_{k=1}^{q-1}k\zeta(2q-2k)\zeta(2k+1) \tag{4.25}$$

Proof. Set $p=2q-1$ and $q=2$ in (2.76):

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k^{(p)}}{k^q}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k^{(q)}}{k^p}=\zeta(p)\zeta(q)+\zeta(p+q),$$

we have

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2q-1)}}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^{2q-1}}=\zeta(2q-1)\zeta(2)+\zeta(2q+1).$$

Substituting the result (4.21) finishes the proof.

Examples:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n^2}=\frac{11}{2}\zeta(5)-2\zeta(2)\zeta(3);$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(5)}}{n^2}=11\zeta(7)-4\zeta(2)\zeta(5)-2\zeta(3)\zeta(4);$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(7)}}{n^2}=\frac{37}{2}\zeta(9)-6\zeta(2)\zeta(7)-2\zeta(3)\zeta(6)-4\zeta(4)\zeta(5);$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(9)}}{n^2}=28\zeta(11)-8\zeta(2)\zeta(9)-2\zeta(3)\zeta(8)-6\zeta(4)\zeta(7)-4\zeta(5)\zeta(6).$$

### 4.1.11 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n^{2q-1}}$

Let $q\in\mathbb{Z}_{>1}$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n^{2q-1}}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{2q-3}\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^k\zeta(2q-k-1)\zeta(k-j+1)\zeta(j+1)$$
$$-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{q-1}(2k+1)\zeta(2k)\zeta(2q-2k+1)+\frac{(q+1)(2q+3)}{6}\zeta(2q+1) \tag{4.26}$$

**Proof**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2+H_n^{(2)}}{n^{2q-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2n-2}}\left(\frac{H_n^2+H_n^{(2)}}{n}\right)$$

$$\{\text{ use the integral (2.62)}\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2n-2}}\left(\int_0^1 x^{n-1}\ln^2(1-x)\mathrm{d}x\right)$$

$$=\int_0^1\frac{\ln^2(1-x)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^{2q-2}}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\frac{\ln^2(1-x)\operatorname{Li}_{2q-2}(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\left\{\text{ expand }\ln^2(1-x)\text{ in series given in (2.7)}\right\}$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n-1}}{n}\int_0^1 x^{n-1}\operatorname{Li}_{2q-2}(x)\mathrm{d}x$$

$$\{\text{ recall the result (3.65)}\}$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n-\frac{1}{n}}{n}\left(-\frac{H_n}{n^{2q-2}}-\sum_{k=1}^{2q-3}(-1)^k\frac{\zeta(2q-k-1)}{n^k}\right).$$

Distributing and rearranging the terms,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n^{2q-1}}=\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^{2q}}-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^{2q-1}}$$
$$+\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{2q-3}(-1)^k\zeta(2q-k-1)\left(\zeta(k+2)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^{k+1}}\right).$$

Recall the relation involving $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^{2q-1}}$ from (4.23),

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n^{2q-1}}=\frac{2q+3}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^{2q}}-\frac{1}{3}\zeta(2)\zeta(2q-1)$$
$$+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{2q-3}(-1)^k\zeta(2q-k-1)\left(\frac{k+4}{2}\zeta(k+2)-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^{k+1}}\right)$$

$$\{\text{ substitute the Euler sums (4.5) and (4.4)}\}$$

$$=\frac{1}{6}(q+1)(2q+3)\zeta(2q+1)-\frac{1}{3}\zeta(2)\zeta(2q-1)$$
$$+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{2q-3}\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^k\zeta(2q-k-1)\zeta(k-j+1)\zeta(j+1)$$
$$-\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{2q-3}(-1)^k(k+2)\zeta(k+2)\zeta(2q-k-1)$$
$$-\frac{2q+3}{6}\sum_{k=1}^{q-1}\zeta(2q-2k+1)\zeta(2k)$$

The proof completes on writing

$$\sum_{k=1}^{2q-3}(-1)^k(k+2)\zeta(k+2)\zeta(2q-k-1)$$
$$=-2\zeta(2)\zeta(2q-1)+\sum_{k=1}^{q-1}(4k-2q-1)\zeta(2k)\zeta(2q-2k+1)$$

which follows from adding and subtracting the term ( $k=0$ ) then using the same idea in (4.24).

**Examples:**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n^3}=\frac{7}{2}\zeta(5)-\zeta(2)\zeta(3)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n^5}=6\zeta(7)-\zeta(2)\zeta(5)-\frac{5}{2}\zeta(3)\zeta(4)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n^7}=\frac{55}{6}\zeta(9)-\zeta(2)\zeta(7)-\frac{7}{2}\zeta(3)\zeta(6)+\frac{1}{3}\zeta^3(3)-\frac{5}{2}\zeta(4)\zeta(5)$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n^9}=11\zeta(11)-\zeta(2)\zeta(9)-\frac{9}{2}\zeta(3)\zeta(8)-\frac{5}{2}\zeta(4)\zeta(7)-\frac{7}{2}\zeta(5)\zeta(6)$$
$$+\zeta^2(3)\zeta(5).$$

**4.1.12** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_n^{(q)}}{n}$

Let $q\in\mathbb{Z}_{>1}$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_n^{(q)}}{n}=\ln(2)\eta(q)-\frac{q}{2}\zeta(q+1)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{q-2}\eta(q-j)\eta(j+1). \tag{4.27}$$

The following proof is due to Cornel Vălean [29]:
Proof (i). Using the integral form of $H_n^{(q)}$ given in (1.122), we have

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_n^{(q)}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!}\int_0^1\frac{\ln^{q-1}(x)\,(1-x^n)}{1-x}\,\mathrm{d}x\right)$$
$$=\frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!}\int_0^1\frac{\ln^{q-1}(x)}{1-x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!}\int_0^1\frac{\ln^{q-1}(x)}{1-x}(-\ln(2)+\ln(1+x))\mathrm{d}x$$
$$=\frac{(-1)^{q}}{(q-1)!}\int_0^1\frac{\ln^{q-1}(x)\ln\left(\frac{2}{1+x}\right)}{1-x}\,\mathrm{d}x. \tag{4.28}$$

This integral is given in (3.47).
Proof (ii). We continue what we reached in (4.28),

$$= \frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n^{(q)}}{n} = \frac{(-1)^q}{(q-1)!}\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(x)}{1-x}(\ln(2)-\ln(1+x))\mathrm{d}x}{(q-1)!}\ln(2)\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x - \frac{(-1)^q}{(q-1)!}\int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(x)\ln(1}{1-x}$$

$$\left\{ \text{write } \frac{\ln(1+x)}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{H}_n x^n \text{ given in (2.29)} \right\}$$

$$= -\ln(2)\zeta(q) - \frac{(-1)^q}{(q-1)!}\sum_{n=1}^{\infty} \bar{H}_n \int_0^1 x^n \ln^{q-1}(x)\mathrm{d}x$$

$$= -\ln(2)\zeta(q) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{H}_n}{(n+1)^q}$$

{let the index start from 0 then shift the index by -1 }

$$= -\ln(2)\zeta(q) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{H}_{n-1}}{n^q}$$

$$\left\{ \text{use } \bar{H}_{n-1} = \bar{H}_n + \frac{(-1)^n}{n} \text{ given in (1.136)} \right\}$$

$$= -\ln(2)\zeta(q) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{H}_n}{n^q} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{q+1}}$$

$$= -\ln(2)\zeta(q) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{H}_n}{n^q} - \eta(q+1)$$

Collect the result (4.7) and use $\eta(a) = (1-2^{1-a})\,\zeta(a)$ to finish the proof.
Examples:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n^{(2)}}{n} = \frac{1}{2}\ln(2)\zeta(2) - \zeta(3);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n^{(3)}}{n} = \frac{3}{4}\ln(2)\zeta(3) - \frac{19}{16}\zeta(4);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n^{(4)}}{n} = \frac{7}{8}\ln(2)\zeta(4) + \frac{3}{8}\zeta(2)\zeta(3) - 2\zeta(5);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n^{(5)}}{n} = \frac{15}{16}\ln(2)\zeta(5) + \frac{9}{32}\zeta^2(3) - \frac{111}{64}\zeta(6).$$

### 4.1.13 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(q)-H_n^{(q)}}{n}$

Let $q \in \mathbb{Z}_{>1}$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(q) - H_n^{(q)}}{n} = \frac{q}{2}\zeta(q+1) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{q-2} \zeta(q-j)\zeta(j+1) \tag{4.29}$$

Proof (i). Employ the integral form of $\zeta(q) - H_n^{(q)}$ given in (1.126),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(q) - H_n^{(q)}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!}\int_0^1 \frac{x^n \ln^{q-1}(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!} \int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(x)}{1-x} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \right) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{(-1)^{q}}{(q-1)!} \int_0^1 \frac{\ln^{q-1}(x)\ln(1-x)}{1-x} \, \mathrm{d}x$$

This integral is given in (3.41).

Proof (ii). Let $b_k = \zeta(q) - H_k^{(q)}$ and $a_k = \frac{1}{k}$ in (2.75):

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k \left(b_{k+1} - b_k\right), \quad A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

we have

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\zeta(q) - H_k^{(q)}}{k}$$

$$= \left(\zeta(q) - H_n^{(q)}\right) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{k=0}^{n-1} \left( \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \right) \left( -H_{k+1}^{(q)} + H_k^{(q)} \right)$$

$$= \left(\zeta(q) - H_n^{(q)}\right) H_n - \sum_{k=0}^{n-1} (H_k) \left( \frac{-1}{(k+1)^q} \right).$$

Let $n \mapsto \infty$ and use $\lim_{n\to\infty} H_n^{(q)} = \zeta(q)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(q) - H_k^{(q)}}{k} = 0 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_k}{(k+1)^q}$$

{shift the index $k$ by -1 }

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_{k-1}}{k^q}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k - \frac{1}{k}}{k^q}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_k}{k^q} - \zeta(q+1)$$

Collect the result (4.4) to finish the proof.

**Examples:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(2) - H_n^{(2)}}{n} = \zeta(3);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta(3)-H_n^{(3)}}{n}=\frac{1}{4}\zeta(4);$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta(4)-H_n^{(4)}}{n}=2\zeta(5)-\zeta(2)\zeta(3);$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta(5)-H_n^{(5)}}{n}=\frac{3}{4}\zeta(6)-\frac{1}{2}\zeta^2(3).$$

4.1.14 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{(2n+1)^q}$
Let $q\in\mathbb{Z}_{>1}$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{(2n+1)^q}=2\left(\frac{1}{2^q}-1\right)\ln(2)\zeta(q)+q\left(1-\frac{1}{2^{q+1}}\right)\zeta(q+1)$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{q-2}\left(2^{j+1}-1\right)\left(2^{-j}-2^{-q}\right)\zeta(q-j)\zeta(j+1) \tag{4.30}$$

**Proof (i).**

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{(2n+1)^q}&=\sum_{n=1}^{\infty}H_n\left(\frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!}\int_0^1 x^{2n}\ln^{q-1}(x)\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{(-1)^{q-1}}{(a-1)!}\int_0^1\ln^{q-1}(x)\left(\sum_{n=1}^{\infty}H_nx^{2n}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{(-1)^{q-1}}{(a-1)!}\int_0^1\ln^{q-1}(x)\left(\frac{-\ln\left(1-x^2\right)}{1-x^2}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{(-1)^{q}}{(q-1)!}\int_0^1\frac{\ln^{q-1}(x)\ln\left(1-x^2\right)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{4.31}$$

This integral is given in (3.45).
Proof (ii). Set $a_n=\frac{\bar{H}_n}{n^q}$ in (1.4):

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n},$$

we obtain

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{H}_n}{n^q}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\bar{H}_{2n+1}}{(2n+1)^q}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{H}_{2n}}{(2n)^q}$$

For the first sum, write $\bar{H}_{2n+1}=H_{2n+1}-H_n$ given in (1.138),

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\bar{H}_{2n+1}}{(2n+1)^q}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_{2n+1}}{(2n+1)^q}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n}{(2n+1)^q}$$

{make use of (1.5) for the first sum}
{and let the index start from 1 in the second sum since $H_0=0$ }

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_{n+1}}{(n+1)^q} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n H_{n+1}}{(n+1)^q} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{(2n+1)^q}$$

{shift the index $n$ of the first and second sums by -1 }

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^q} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{n^q} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{(2n+1)^q}$$

For the second sum, write $\bar{H}_{2n} = H_{2n} - H_n$ given in (1.137),

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{H}_{2n}}{(2n)^q} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{2n}}{(2n)^q} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{(2n)^q}$$

{ make use of (1.5) for the first sum}

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^q} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{n^q} - 2^{-q}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^q}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{n^q} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^q}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^q}.$$

Combining the two sums, we arrive at

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{(2n+1)^q} = \left(1 - \frac{1}{2^q}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^q} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{H}_n}{n^q}$$

and the proof follows on collecting the results (4.4) and (4.7).

**Examples:**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{(2n+1)^2} = \frac{7}{4}\zeta(3) - \frac{3}{2}\ln(2)\zeta(2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{(2n+1)^3} = \frac{45}{32}\zeta(4) - \frac{7}{4}\ln(2)\zeta(3);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{(2n+1)^4} = \frac{31}{8}\zeta(5) - \frac{15}{8}\ln(2)\zeta(4) - \frac{21}{16}\zeta(2)\zeta(3);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{(2n+1)^5} = \frac{315}{128}\zeta(6) - \frac{31}{16}\ln(2)\zeta(5) - \frac{49}{64}\zeta^2(3).$$

### 4.1.15 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{H}_n}{(2n+1)^q}$

Let $q \in \mathbb{Z}_{>1}$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{H}_n}{(2n+1)^q} = \left(1 - \frac{1}{2^q}\right)\ln(2)\zeta(q) - q\left(1 - \frac{1}{2^{q+1}}\right)\zeta(q+1) + \sum_{k=0}^{q-1}\beta(q-k)\beta(k+1) \tag{4.32}$$

The following proof is due to Sean Stewart [23, p. 92-95]:
Proof.

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{H}_n}{(2n+1)^q} &= \sum_{n=1}^{\infty}\bar{H}_n\left(\frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!}\int_0^1 x^{2n}\ln^{q-1}(x)\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!}\int_0^1 \ln^{q-1}(x)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\bar{H}_n x^{2n}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!}\int_0^1 \ln^{q-1}(x)\left(\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{1-x^2}\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

This integral is given in (3.63).

**Examples:**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{H}_n}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4}\ln(2)\zeta(2)-\frac{7}{4}\zeta(3)+\frac{\pi}{2}G;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{H}_n}{(2n+1)^3} = \frac{7}{8}\ln(2)\zeta(3)-\frac{45}{32}\zeta(4)+G^2;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{H}_n}{(2n+1)^4} = \frac{15}{16}\ln(2)\zeta(4)-\frac{31}{8}\zeta(5)+2G\beta(3)+\frac{\pi}{2}\beta(4);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{H}_n}{(2n+1)^5} = \frac{31}{32}\ln(2)\zeta(5)-\frac{4095}{1024}\zeta(6)+2G\beta(4)+\frac{\pi}{2}\beta(5).$$

### 4.1.16 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\bar{H}_n}{(2n+1)^{2q+1}}$

Let $q\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Then the following identity holds:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\bar{H}_n}{(2n+1)^{2q+1}} &= \ln(2)\beta(2q+1)-(2q+1)\beta(2q+2)\\ &\quad +2\sum_{k=0}^{q}\left(1-2^{2k-2q}\right)\zeta(2q-2k)\beta(2k+2)\end{aligned}\tag{4.33}$$

**Proof**

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\bar{H}_n}{(2n+1)^{2q+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\bar{H}_n\left(\frac{1}{(2q)!}\int_0^1 x^{2n}\ln^{2q}(x)\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{1}{(2q)!}\int_0^1 \ln^{2q}(x)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\bar{H}_n\left(-x^2\right)^n\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{(2q)!}\int_0^1 \ln^{2q}(x)\left(\frac{\ln\left(1-x^2\right)}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

This integral is given in (3.58).

For another proof with a different closed form, see [23, p. 92-95].
Examples:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\bar{H}_n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}\ln(2)-G$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\bar{H}_n}{(2n+1)^3}=\frac{3}{2}G\zeta(2)+\ln(2)\beta(3)-3\beta(4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\bar{H}_n}{(2n+1)^5}=\frac{15}{8}G\zeta(4)+\frac{3}{2}\zeta(2)\beta(4)+\ln(2)\beta(5)-5\beta(6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\bar{H}_n}{(2n+1)^7}=\frac{63}{32}G\zeta(6)+\frac{45}{24}\zeta(4)\beta(4)+\frac{3}{2}\zeta(2)\beta(6)+\ln(2)\beta(7)-7\beta(8)$$

4.1.17 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{H}_{2n}}{(2n+1)^{2q}}$

Let $q\in\mathbb{Z}^+$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{H}_{2n}}{(2n+1)^{2q}}=\frac{1}{2}(2q+1)\left(\frac{1}{2^{2q+1}}-1\right)\zeta(2q+1)$$

$$+2\left(1-\frac{1}{2^{2q}}\right)\ln(2)\zeta(2q)+\sum_{k=1}^{q-1}\left(1-\frac{1}{2^{2k}}\right)\zeta(2k)\eta(2q-2k+1) \tag{4.34}$$

Proof. Using

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+(-1)^n\right)a_n$$

we have

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{H}_{2n}}{(2n+1)^{2q}}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+(-1)^n\right)\frac{\bar{H}_n}{(n+1)^{2q}}$$

{let the index start from 0 then shift it by -1 }

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-(-1)^n\right)\frac{\bar{H}_{n-1}}{n^{2q}}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-(-1)^n\right)\frac{\bar{H}_n+\frac{(-1)^n}{n}}{n^{2q}}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{H}_n}{n^{2q}}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\bar{H}_n}{n^{2q}}-\frac{1}{2}\eta(2q+1)-\frac{1}{2}\zeta(2q+1).$$

These two sums are given in (4.9) and (4.16) respectively.
Examples:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{H}_{2n}}{(2n+1)^2}=\frac{3}{2}\ln(2)\zeta(2)-\frac{21}{16}\zeta(3);$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{H}_{2n}}{(2n+1)^4}=\frac{45}{24}\ln(2)\zeta(4)+\frac{9}{16}\zeta(2)\zeta(3)-\frac{155}{64}\zeta(5);$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{H}_{2n}}{(2n+1)^6}=\frac{63}{32}\ln(2)\zeta(6)+\frac{45}{64}\zeta(3)\zeta(4)+\frac{45}{64}\zeta(2)\zeta(5)-\frac{889}{256}\zeta(7);$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{H}_{2n}}{(2n+1)^8}=\frac{255}{128}\ln(2)\zeta(8)+\frac{189}{256}\zeta(3)\zeta(6)+\frac{225}{256}\zeta(4)\zeta(5)+\frac{189}{256}\zeta(2)\zeta(7)$$
$$-\frac{4599}{1024}\zeta(9).$$

4.1.18 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n^{(2p+1)}}{2n+1}$
Let $p\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n^{(2p+1)}}{2n+1}=-2^{2p-1}\pi\eta(2p+1)+2\sum_{k=0}^{p}2^{2k}\eta(2p-2k)\beta(2k+2). \tag{4.35}$$

**Proof**

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n^{(2p+1)}}{2n+1}&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n H_n^{(2p+1)}\int_0^1 x^{2n}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\left(\sum_{n=1}^{\infty}H_n^{(2p+1)}\left(-x^2\right)^n\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

{use the generating function (2.2)}

$$=\int_0^1\frac{\operatorname{Li}_{2p+1}\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

This integral is given in (3.76). For a different proof, set $q=0$ in (4.38).
Examples:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{2n+1}=G-\frac{\pi}{8}\ln(2);$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n^{(3)}}{2n+1}=4\beta(4)+G\zeta(2)-\frac{3\pi}{2}\zeta(3);$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n^{(5)}}{2n+1}=16\beta(6)+4\zeta(2)\beta(4)+\frac{7}{4}G\zeta(4)-\frac{15\pi}{2}\zeta(5);$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n^{(7)}}{2n+1}=64\beta(8)+16\zeta(2)\beta(6)+7\zeta(4)\beta(4)+\frac{31}{16}G\zeta(6)-\frac{63\pi}{2}\zeta(7).$$

4.1.19 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n H_{2n+1}}{(2n+1)^{2q+1}}$
Let $q\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nH_{2n+1}}{(2n+1)^{2q+1}}=(q+1)\beta(2q+2)-\frac{\pi}{2^{2q+3}}\eta(2q+1)$$
$$-\sum_{k=1}^{q}\zeta(2k+1)\beta(2q-2k+1) \tag{4.36}$$

Proof. By expanding $\frac{1}{1+x^2}$ in Taylor series, we have

$$\int_0^1\frac{\operatorname{Li}_{2q+1}(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\operatorname{Li}_{2q+1}(x)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n\right)\mathrm{d}x$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1 x^{2n}\operatorname{Li}_{2q+1}(x)\mathrm{d}x$$
$$\{\text{make use of the result (3.65)}\}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{H_{2n+1}}{(2n+1)^{2q+1}}-\sum_{k=1}^{2q}(-1)^k\frac{\zeta(2q-k+2)}{(2n+1)^k}\right)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nH_{2n+1}}{(2n+1)^{2q+1}}-\sum_{k=1}^{2q}(-1)^k\zeta(2q-k+2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^k}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nH_{2n+1}}{(2n+1)^{2q+1}}-\sum_{k=1}^{2q}(-1)^k\zeta(2q-k+2)\beta(k).$$

Substitute the result of the integral given in (3.75), we get

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nH_{2n+1}}{(2n+1)^{2q+1}}=\frac{2q+1}{2}\beta(2q+2)-\frac{\pi}{2^{2q+3}}\eta(2q+1)$$
$$-\sum_{k=0}^{q}\zeta(2q-2k)\beta(2k+2)+\sum_{k=1}^{2q}(-1)^k\zeta(2q-k+2)\beta(k)$$

For the first sum, separate the first term then reverse the order of the terms,

$$\sum_{k=0}^{q}\zeta(2q-2k)\beta(2k+2)=-\frac{1}{2}\beta(2q+2)+\sum_{k=1}^{q}\zeta(2q-2k+2)\beta(2k).$$

For the second sum, first reverse the order of the terms then use $\sum_{k=1}^{2q}a_k=\sum_{k=1}^{q}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{q}a_{2k}$ :

$$\sum_{k=1}^{2q}(-1)^k\zeta(2q-k+2)\beta(k)=\sum_{k=1}^{2q}(-1)^{k-1}\zeta(k+1)\beta(2q-k+1)$$
$$=\sum_{k=1}^{q}\zeta(2k)\beta(2q-2k+2)-\sum_{k=1}^{q}\zeta(2k+1)\beta(2q-2k+1)$$

Plug in these two sums to complete the proof.

It's worth to mention that by using (1.13), we have

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nH_{2n+1}}{(2n+1)^{2q+1}}=\Im\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^{2q+1}}$$

**Examples:**

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n H_{2n+1}}{2n+1}=G-\frac{\pi}{8}\ln(2)$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n H_{2n+1}}{(2n+1)^3}=2\beta(4)-\frac{35\pi}{128}\zeta(3)$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n H_{2n+1}}{(2n+1)^5}=3\beta(6)-\frac{\pi^3}{32}\zeta(3)-\frac{527\pi}{2048}\zeta(5)$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n H_{2n+1}}{(2n+1)^7}=4\beta(8)-\beta(5)\zeta(3)-\frac{\pi^3}{32}\zeta(5)-\frac{8255\pi}{32768}\zeta(7)$$

4.1.20 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{(2n+1)^{2q+1}}$
Let $q\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{(2n+1)^{2q+1}}=(2q+1)\beta(2q+2)-\frac{\ln(2)\,|E_{2q}|}{(2q)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2q+1}$$
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2q+1}\sum_{k=1}^{q}\frac{|E_{2q-2k}|}{(2q-2k)!\pi^{2k}}\left(2^{2k+1}-1\right)\zeta(2k+1) \tag{4.37}$$

**Proof**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{(2n+1)^{2q+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n H_n\left(\frac{1}{(2q)!}\int_0^1 x^{2n}\ln^{2q}(x)\mathrm{d}x\right)$$
$$=\frac{1}{(2a)!}\int_0^1\ln^{2q}(x)\left(\sum_{n=1}^{\infty}H_n\left(-x^2\right)^n\right)\mathrm{d}x$$

{use the generating function (2.4)}

$$=\frac{1}{(2q)!}\int_0^1\ln^{2q}(x)\left(-\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

and this integral is given in (3.35).
Examples:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{2n+1}=G-\frac{\pi}{2}\ln(2);$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{(2n+1)^3}=3\beta(4)-\frac{7\pi}{16}\zeta(3)-\frac{\pi^3}{16}\ln(2);$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{(2n+1)^5}=5\beta(6)-\frac{31\pi}{64}\zeta(5)-\frac{7\pi^3}{128}\zeta(3)-\frac{5\pi^5}{768}\ln(2);$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{(2n+1)^7}=7\beta(8)-\frac{127\pi}{256}\zeta(7)-\frac{31\pi^3}{512}\zeta(5)-\frac{35\pi^5}{6144}\zeta(3)-\frac{61\pi^7}{92160}\ln(2).$$

4.1.21 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n^{(2p+1)}}{(2n+1)^{2q+1}}$

Let $p \in \mathbb{Z}^+$and $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n^{(2p+1)}}{(2n+1)^{2q+1}} = \frac{|E_{2q}|}{2(2q)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2q+1} \zeta(2p+1)$$
$$-\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2q+1}}{2(2p)!(2q)!} \sum_{j=0}^{q} \binom{2q}{2j} \frac{(2p+2j)!}{\pi^{2j}} |E_{2q-2j}| \left(2^{2j+2p+1}-1\right) \zeta(2j+2p+1)$$
$$+\frac{2}{(2q)!} \sum_{k=0}^{p} \frac{(2k+2q+1)!}{(2k+1)!} 2^{2k} \eta(2p-2k) \beta(2k+2q+2) \tag{4.38}$$

**Proof**

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n^{(2p+1)}}{(2n+1)^{2q+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n H_n^{(2p+1)} \left(\frac{1}{(2q)!} \int_0^1 x^{2n} \ln^{2q}(x) \mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{(2q)!} \int_0^1 \ln^{2q}(x) \left(\sum_{n=1}^{\infty} H_n^{(2p+1)} \left(-x^2\right)^n\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(2q)!} \int_0^1 \ln^{2q}(x) \left(\frac{\operatorname{Li}_{2p+1}\left(-x^2\right)}{1+x^2}\right) \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

which is found in (3.81).

**Examples:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n^{(3)}}{(2n+1)^5} = 140\beta(8) + 5\zeta(2)\beta(6) - \frac{1905}{64}\pi\zeta(7) - \frac{93}{64}\pi^3\zeta(5) - \frac{5\pi^5}{256}\zeta(3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n^{(5)}}{(2n+1)^3} = 336\beta(8) + 40\zeta(2)\beta(6) + \frac{21}{4}\zeta(4)\beta(4) - \frac{1905\pi}{16}\zeta(7) - \frac{15\pi^3}{16}\zeta(5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n^{(5)}}{(2n+1)^7} = 7392\beta(12) + 336\zeta(2)\beta(10) + \frac{49}{4}\zeta(4)\beta(8) - \frac{214935}{128}\pi\zeta(11) - \frac{17885}{256}\pi^3\zeta(9) - \frac{3175}{2048}\pi^5\zeta(7) - \frac{61\pi^7}{6144}\zeta(5)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n^{(7)}}{(2n+1)^5} = 21120\beta(12) + 2016\zeta(2)\beta(10) + 245\zeta(4)\beta(8) + \frac{155}{16}\zeta(6)\beta(6) - \frac{214935}{32}\pi\zeta(11) - \frac{3577}{32}\pi^3\zeta(9) - \frac{105}{256}\pi^5\zeta(7)$$

### 4.1.22 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n^{(2p)}}{(2n+1)^{2q}}$

Let $q, p \in \mathbb{Z}^+$. Then the following identity holds:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n^{(2p)}}{(2n+1)^{2q}}=\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2q-1}}{4(2p-1)!(2q-1)!}*$$

$$\sum_{j=0}^{q-1}\binom{2q-1}{2j+1}\frac{(2p+2j)!}{\pi^{2j}}\left|E_{2q-2j-2}\right|\left(2^{2j+2p+1}-1\right)\zeta(2j+2p+1)$$

$$-\frac{1}{(2q-1)!}\sum_{k=0}^{p}\frac{(2k+2q-1)!}{(2k)!}2^{2k}\eta(2p-2k)\beta(2k+2q). \tag{4.39}$$

Proof. Applying the previous proof, we get

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n^{(2p)}}{(2n+1)^{2q}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n H_n^{(2p)}\left(\frac{-1}{(2q-1)!}\int_0^1 x^{2n}\ln^{2q-1}(x)\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{-1}{(2q-1)!}\int_0^1\ln^{2q-1}(x)\left(\sum_{n=1}^{\infty}H_n^{(2p)}\left(-x^2\right)^n\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{-1}{(2q-1)!}\int_0^1\ln^{2q-1}(x)\left(\frac{\operatorname{Li}_{2p}\left(-x^2\right)}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

and this integral is given in (3.82).

Examples:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n^{(2)}}{(2n+1)^4}=\frac{7\pi^3}{32}\zeta(3)+\frac{31\pi}{8}\zeta(5)-\frac{1}{2}\zeta(2)\beta(4)-20\beta(6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n^{(4)}}{(2n+1)^2}=\frac{31\pi}{2}\zeta(5)-\frac{7}{8}\zeta(4)\beta(2)-6\zeta(2)\beta(4)-40\beta(6)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n^{(4)}}{(2n+1)^6}=\frac{155}{768}\pi^5\zeta(5)+\frac{635}{64}\pi^3\zeta(7)+\frac{3577}{16}\pi\zeta(9)-\frac{7}{8}\zeta(4)\beta(6)$$

$$-42\zeta(2)\beta(8)-1008\beta(10)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n^{(6)}}{(2n+1)^4}=\frac{381}{32}\pi^3\zeta(7)+\frac{3577}{4}\pi\zeta(9)-\frac{31}{32}\zeta(6)\beta(4)-35\zeta(4)\beta(6)$$

$$-280\zeta(2)\beta(8)-2688\beta(10)$$

### 6.7.2 4.2 Non-Alternating Harmonic Series

4.2.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^2}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^2}=2\zeta(3) \tag{4.40}$$

Solution. Set $s=0$ and $q=2$ in (4.3), we get

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^2}=\int_0^1\frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x$$

$$\{\text{ set } q=1 \text{ in } (3.83)\}$$

$$=2\int_0^1\frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

This integral is given in (3.9).
For a different approach, set $x = 1$ in (2.8).

4.2.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^2}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^2} = \frac{17}{4}\zeta(4) \tag{4.41}$$

Solution. Put $x = 1$ in (2.69),

$$\operatorname{Li}_2^2(1) = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^3} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^2} - 6\operatorname{Li}_4(1).$$

The first sum is given in (4.4) and remember that $\operatorname{Li}_a(1) = \zeta(a)$. Check (2.77) for a different solution.

4.2.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^2}{n^2}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^2}{n^2} = \frac{17}{4}\zeta(4) \tag{4.42}$$

**Solution (i).**

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^2}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n}\left(\frac{H_n}{n}\right) \\
&\{\text{ recall the integral (1.124)}\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n}\left(-\int_0^1 x^{n-1}\ln(1-x)\mathrm{d}x\right) \\
&= -\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n}x^n\right)\mathrm{d}x \\
&\{\text{ recall the generating function (2.6) }\} \\
&= -\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\left(\operatorname{Li}_2(x) + \frac{1}{2}\ln^2(1-x)\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{Li}_2^2(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^3(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{1-x=y}{=} \frac{5}{4}\zeta(4) - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^3(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

This integral is given in (3.8) and the solution is complete.
Solution (ii).

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^2 + H_n^{(2)}}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{H_n^2 + H_n^{(2)}}{n} \right) \\
&\{ \text{ recall the integral (2.62)} \} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \int_0^1 x^{n-1} \ln^2(1-x) \mathrm{d}x \right) \\
&= \int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{x} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{x} (-\ln(1-x)) \mathrm{d}x \\
&\overset{1-x=y}{=} \int_0^1 \frac{\ln^3(y)}{1-y} \, \mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

Group the values (3.8) and (4.41) to finish the solution.
Solution (iii). Substitute $\frac{1}{n^2} = -\int_0^1 x^{n-1} \ln(x) \mathrm{d}x$ to get

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^2 - H_n^{(2)}}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( H_n^2 - H_n^{(2)} \right) \left( -\int_0^1 x^{n-1} \ln(x) \mathrm{d}x \right) \\
&= -\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \left( H_n^2 - H_n^{(2)} \right) x^n \right) \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

{recall the generating function (2.11)}

$$
\begin{aligned}
&= -\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x} \left( \frac{\ln^2(1-x)}{1-x} \right) \mathrm{d}x \\
&\overset{1-x=y}{=} -\int_0^1 \frac{\ln^2(y) \ln(1-y)}{y(1-y)} \mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

Collect the results (3.44) and (4.41) to complete the solution.
For different methods of evaluating (4.41) and (4.42), check [25].

### 4.2.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n H_{2n}}{n^2}$

Show that

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n H_{2n}}{n^2} = 4 \operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{13}{8}\zeta(4) + \frac{7}{2}\ln(2)\zeta(3) - \ln^2(2)\zeta(2) + \frac{1}{6}\ln^4(2) \tag{4.43}
$$

**Solution.**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_nH_{2n}-2H_{2n}^2}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n-2H_{2n}}{n}\left(\frac{H_{2n}}{n}\right)$$

$$\{\text{ replace } n \text{ with } 2n \text{ in } (1.124)\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n-2H_{2n}}{n}\left(-2\int_0^1 x^{2n-1}\ln(1-x)\mathrm{d}x\right)$$

$$=\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}\left(2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2H_{2n}-H_n}{n}x^{2n}\right)\mathrm{d}x$$

$$\{\text{ recall the generating function } (2.40)\}$$

$$=\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}\left(\ln^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right)\mathrm{d}x$$

$$\left\{\text{ use } a(a-b)^2=\frac{1}{6}(a+b)^3+\frac{1}{6}(a-b)^3+\frac{2}{3}a^3-2a^2b\right\}$$

$$\{\text{ with } a=\ln(1-x) \text{ and } b=\ln(1+x)\}$$

$$=\underbrace{\frac{1}{6}\int_0^1\ln^3\left(1-x^2\right)\,\mathrm{d}x}_{1-x^2\to x}+\frac{1}{6}\int_0^1\frac{\ln^3\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x+\underbrace{\frac{2}{3}\int_0^1\frac{\ln^3(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x}_{1-x\to x}$$

$$-2\int_0^1\frac{\ln^2(1-x)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{3}{4}\int_0^1\frac{\ln^3(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{6}\int_0^1\frac{\ln^3\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x-2\int_0^1\frac{\ln^2(1-x)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\text{collect the results } (3.8),\ (3.15),\ \text{and } (3.116)\}$$

$$=-\frac{2}{3}\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{41}{48}\zeta(4)-\frac{7}{12}\ln(2)\zeta(3)+\frac{1}{6}\ln^2(2)\zeta(2)-\frac{1}{36}\ln^4(2)$$

For the remaining sum, make use of (1.5) to have

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{2n}^2}{n^2}=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{2n}^2}{(2n)^2}$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n^2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_n^2}{n^2}$$

$$\{\text{ substitute the results } (4.42) \text{ and } (4.88)\}$$

$$=4\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{27}{8}\zeta(4)+\frac{7}{2}\ln(2)\zeta(3)-\ln^2(2)\zeta(2)+\frac{1}{6}\ln^4(2).$$

4.2.5 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^3}$
Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^3}=3\zeta(2)\zeta(3)-\frac{9}{2}\zeta(5). \tag{4.44}$$

Solution. Setting $x=1$ in (2.71) gives

$$
\begin{aligned}
3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n^2}&=\zeta(2)\zeta(3)+10\zeta(5)-6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^4}\\
&\quad\{\text{plug in the result (4.4)}\}\\
&=7\zeta(2)\zeta(3)-8\zeta(5)
\end{aligned}
\tag{4.45}
$$

Now let's set $p=2$ and $q=3$ in (2.76) to have

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n^2}=\zeta(2)\zeta(3)+\zeta(5).
\tag{4.46}
$$

Take the difference of these two relations to end the solution.
Also see (4.21) for another method.

4.2.6 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n^2}$

Show that

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n^2}=\frac{11}{2}\zeta(5)-2\zeta(2)\zeta(3)
\tag{4.47}
$$

Solution. Combine (4.45) and (4.46) after multiplying the latter by -3 .

4.2.7 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n^3}$

Show that

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n^3}=\frac{7}{2}\zeta(5)-\zeta(2)\zeta(3)
\tag{4.48}
$$

Solution (i). Substitute $\frac{1}{n^3}=\frac{1}{2}\int_0^1 x^{n-1}\ln^2(x)\mathrm{d}x$ to have

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2-H_n^{(2)}}{n^3}&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^2-H_n^{(2)}\right)\left(\frac{1}{2}\int_0^1 x^{n-1}\ln^2(x)\mathrm{d}x\right)\\
&=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\ln^2(x)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^2-H_n^{(2)}\right)x^n\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

{recall the generating function (2.11)}

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\ln^2(x)}{x}\left(\frac{\ln^2(1-x)}{1-x}\right)\mathrm{d}x\\
&\quad\{\text{ set } q=2 \text{ in (3.83)}\}\\
&=\int_0^1\frac{\ln^2(1-x)\ln^2(x)}{x}\\
&\overset{\text{IBP}}{=}\frac{2}{3}\int_0^1\frac{\ln^3(x)\ln(1-x)}{1-x}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

The solution completes on grouping (4.44) and (3.41).
Solution (ii).

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n-1}H_n}{n^3}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n-1}}{n}\left(\frac{H_n}{n^2}\right)\\
&\quad\{\text{ recall the integral (3.66)}\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}}{n} \left( \int_0^1 \frac{\zeta(2) - \operatorname{Li}_2(x)}{x} x^n \, \mathrm{d}x \right) \\
&= \int_0^1 \frac{\zeta(2) - \operatorname{Li}_2(x)}{x} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}}{n} x^n \right) \mathrm{d}x \\
&\quad \{ \text{ recall the generating function (2.7)} \} \\
&= \int_0^1 \frac{\zeta(2) - \operatorname{Li}_2(x)}{x} \left( \frac{1}{2} \ln^2(1-x) \right) \mathrm{d}x \\
&\quad \{ \text{ set } 1 - x = y \text{ in the first integral } \} \\
&= \frac{1}{2}\zeta(2) \int_0^1 \frac{\ln^2(y)}{1-y} \, \mathrm{d}y - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\ln^2(1-x) \operatorname{Li}_2(x)}{x} \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

By writing

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1} H_n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(H_n - \frac{1}{n}\right) H_n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^2}{n^3} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^4}
$$

we get

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^2}{n^3} = \frac{1}{2}\zeta(2) \int_0^1 \frac{\ln^2(y)}{1-y} \, \mathrm{d}y - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\ln^2(1-x) \operatorname{Li}_2(x)}{x} \, \mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^4}
$$

These terms are given in (3.8), (3.69), and (4.4) respectively.
Also check (4.26) for another solution.

### 4.2.8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n H_n^{(2)}}{n^2}$

Show that

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n H_n^{(2)}}{n^2} = \zeta(5) + \zeta(2)\zeta(3) \tag{4.49}
$$

Solution (i).

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^3 + 3H_n H_n^{(2)} + 2H_n^{(3)}}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{H_n^3 + 3H_n H_n^{(2)} + 2H_n^{(3)}}{n} \right) \\
&\quad \{\text{recall the integral (2.62)}\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( - \int_0^1 x^{n-1} \ln^3(1-x) \mathrm{d}x \right) \\
&= - \int_0^1 \frac{\ln^3(1-x)}{x} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \right) \mathrm{d}x \\
&= - \int_0^1 \frac{\ln^3(1-x)}{x} (-\ln(1-x)) \mathrm{d}x \\
&\overset{1-x=y}{=} \int_0^1 \frac{\ln^4(y)}{1-y} \, \mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

{this integral is given in (3.8)}

$$= 24\zeta(5) \tag{4.50}$$

Now write $\frac{1}{n^2} = -\int_0^1 x^{n-1}\ln(x)\mathrm{d}x$ to get

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^3 - 3H_nH_n^{(2)} + 2H_n^{(3)}}{n^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^3 - 3H_nH_n^{(2)} + 2H_n^{(3)}\right)\left(-\int_0^1 x^{n-1}\ln(x)\mathrm{d}x\right)$$

$$= -\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^3 - 3H_nH_n^{(2)} + 2H_n^{(3)}\right)x^n\right)\mathrm{d}x$$

{recall the generating function (2.22)}

$$= -\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x}\left(-\frac{\ln^3(1-x)}{1-x}\right)\mathrm{d}x$$

$$\overset{1-x=y}{=} \int_0^1 \frac{\ln^3(y)\ln(1-y)}{y(1-y)}\mathrm{d}y$$

{this integral is calculated in (3.44)}

$$= 18\zeta(5) - 6\zeta(2)\zeta(3) \tag{4.51}$$

Take the difference of (4.50) and (4.51) to finish the solution.

Solution (ii). Divide both sides of (2.7):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n-1}}{n}y^n = \frac{1}{2}\ln^2(1-y)$$

by $y$ then integrate from $y=0$ to $x$ using $\int_0^x y^{n-1}\,\mathrm{d}y = \frac{x^n}{n}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n-1}}{n^2}x^n = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\ln^2(1-y)}{y}\,\mathrm{d}y \tag{4.52}$$

Next, we consider the following double sum:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n-1}}{n^2(n+k)^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n-1}}{n^2}\left(-\int_0^1 x^{n+k-1}\ln(x)\mathrm{d}x\right)$$

$$= -\int_0^1 \ln(x)\left(\sum_{k=1}^{\infty}x^{k-1}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n-1}}{n^2}x^n\right)\mathrm{d}x$$

{the second sum is given in (4.52)}

$$= -\int_0^1 \ln(x)\left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{2}\int_0^x \frac{\ln^2(1-y)}{y}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

{change the order of integration}

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^2(1-y)}{y}\left(\int_y^1 \frac{\ln(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^2(1-y)}{y}\left(\operatorname{Li}_2(1-x)\big|_y^1\right)\mathrm{d}y$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^2(1-y)}{y}\left(-\operatorname{Li}_2(1-y)\right)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{x=y}{2}\int_0^1 \frac{\ln^2(y)\operatorname{Li}_2(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y$$

$$\left\{ \text{expand } \frac{\operatorname{Li}_2(y)}{1-y} \text{ in series given in (2.3)} \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} H_{n-1}^{(2)}\left(\int_0^1 y^{n-1}\ln^2(x)\mathrm{d}y\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^{(2)} - \frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{2}{n^3}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^3} - \zeta(5). \tag{4.53}$$

On the other hand, set $a=2$ in (1.131) to get

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(n+k)^2} = \zeta(2) - H_n^{(2)}$$

Multiply both sides by $\frac{H_{n-1}}{n}$ then take the summation over $n \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_{n-1}}{n^2(n+k)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n-1}}{n^2}\left(\zeta(2) - H_n^{(2)}\right)$$

$$= \zeta(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n-1}}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n H_n^{(2)}}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^3}. \tag{4.54}$$

Combine (4.54) and (4.53),

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n H_n^{(2)}}{n^2} = \zeta(5) + \zeta(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n-1}}{n^2}$$

$$\{\text{set } x=1 \text{ in (4.52)}\}$$

$$= \zeta(5) + \frac{1}{2}\zeta(2)\int_0^1 \frac{\ln^2(1-y)}{y}\,\mathrm{d}y$$

$$= \zeta(5) + \frac{1}{2}\zeta(2)\int_0^1 \frac{\ln^2(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

This integral is calculated in (3.8).

4.2.9 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^3}{n^2}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^3}{n^2} = 10\zeta(5) + \zeta(2)\zeta(3) \tag{4.55}$$

Solution. Combining (4.50) and (4.51) then dividing by 2 yields,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^3}{n^2} = 21\zeta(5) - 3\zeta(2)\zeta(3) - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(3)}}{n^2}$$

This sum is evaluated in (4.111).
For a different approach, see [32, pp. 401-402].

4.2.10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^4}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^4} = \zeta^2(3) - \frac{1}{3}\zeta(6) \tag{4.56}$$

Solution. Set $x = 1$ in (2.72),

$$\zeta^2(3) = 12\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^6} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(3)}}{n^3} + 6\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^4} - 20\zeta(6).$$

The first two sums are calculated in (4.4) and (2.77) respectively.

4.2.11 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(4)}}{n^2}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(4)}}{n^2} = \frac{37}{12}\zeta(6) - \zeta^2(3) \tag{4.57}$$

Solution. Putting $p = 2$ and $q = 4$ in (2.76) gives

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(4)}}{n^2} = \zeta(2)\zeta(4) + \zeta(6)$$

The first sum is given in (4.56) and note that $\zeta(2)\zeta(4) = \frac{7}{4}\zeta(6)$.

4.2.12 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^2}{n^4}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^2}{n^4} = \frac{97}{24}\zeta(6) - 2\zeta^2(3) \tag{4.58}$$

Solution.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^2 + H_n^{(2)}}{n^4} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\left(\frac{H_n^2 + H_n^{(2)}}{n}\right) \\
&\{\text{ recall the integral (2.62)}\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}\left(\int_0^1 x^{n-1}\ln^2(1-x)\mathrm{d}x\right) \\
&= \int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)\operatorname{Li}_3(x)}{x}\, \mathrm{d}x$$

$$\left\{ \text{ expand } \ln^2(1-x) \text{ in series given in (2.7) } \right\}$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-1}}{n} \left( \int_0^1 x^{n-1} \operatorname{Li}_3(x) \mathrm{d}x \right)$$

$$\{ \text{ recall the result of the integral from (3.67) } \}$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{H_n}{n} - \frac{1}{n^2} \right) \left( \frac{\zeta(3)}{n} - \frac{\zeta(2)}{n^2} + \frac{H_n}{n^3} \right)$$

$$= 2\zeta(3)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^2} - 2\zeta(2)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^3} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^5} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^2}{n^4}.$$

Rearrange the terms, we arrive at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^2}{n^4} = -2\zeta(3)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^2} + 2\zeta(2)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^3} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^5} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^4}.$$

The first three sums are given in (4.4) and the last is given in (4.56). The two series in (4.56) and (4.58) may be found evaluated differently in [25].

4.2.13 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(H_n^{(2)}\right)^2}{n^2}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(H_n^{(2)}\right)^2}{n^2} = \frac{35}{24}\zeta(6) - \zeta^2(3) \tag{4.59}$$

Solution. Substitute (4.56) in (2.6.3).

4.2.14 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n H_n^{(3)}}{n^2}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n H_n^{(3)}}{n^2} = \frac{227}{48}\zeta(6) - \frac{3}{2}\zeta^2(3) \tag{4.60}$$

Solution.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_nH_n^{(3)}}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n}\left(\frac{H_n}{n}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n}\left(-\int_0^1 x^{n-1}\ln(1-x)\mathrm{d}x\right)$$
$$=-\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n}x^n\right)\mathrm{d}x$$
{ recall the generating function (2.17)}
$$=-\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}\left(\operatorname{Li}_4(x)-\ln(1-x)\operatorname{Li}_3(x)-\frac{1}{2}\operatorname{Li}_2^2(x)\right)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1\frac{\ln^2(1-x)\operatorname{Li}_3(x)}{x}\,\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{\ln(1-x)\operatorname{Li}_4(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\ln(1-x)\operatorname{Li}_2^2(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$
{expand $\operatorname{Li}_3(x)$ and $\operatorname{Li}_4(x)$ in series }
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\int_0^1 x^{n-1}\ln^2(1-x)\mathrm{d}x-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\int_0^1 x^{n-1}\ln(1-x)\mathrm{d}x-\frac{1}{6}\operatorname{Li}_2^3(x)\Big|_0^1$$
{make use of (2.62) for the first integral}
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left(\frac{H_n^2}{n}+\frac{H_n^{(2)}}{n}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\left(-\frac{H_n}{n}\right)-\frac{1}{6}\zeta^3(2)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^5}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n^4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^4}-\frac{35}{48}\zeta(6)$$

These sums are found in (4.4), (4.58), and (4.56). Note that $\zeta^3(2)=\frac{35}{8}\zeta(6)$. Also check [32, p. 414-419] for an alternative solution.

4.2.15 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2H_n^{(2)}}{n^2}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2H_n^{(2)}}{n^2}=\frac{41}{12}\zeta(6)+2\zeta^2(3)\tag{4.61}$$

**Solution.**

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^4+3H_n^2H_n^{(2)}+2H_nH_n^{(3)}}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n}\left(\frac{H_n^3+3H_nH_n^{(2)}+2H_n^{(3)}}{n}\right)\\
&\{\text{ recall the integral (2.62)}\}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n}\left(-\int_0^1 x^{n-1}\ln^3(1-x)\mathrm{d}x\right)\\
&=-\int_0^1\frac{\ln^3(1-x)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n}x^n\right)\mathrm{d}x\\
&\{\text{ recall the generating function (2.6)}\}\\
&=-\int_0^1\frac{\ln^3(1-x)}{x}\left(\frac{1}{2}\ln^2(1-x)+\operatorname{Li}_2(x)\right)\mathrm{d}x\\
&\left\{\text{let}^{1-x}=y\text{ in the first integral }\right\}\\
&=-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\ln^5(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y-\int_0^1\frac{\ln^3(1-x)\operatorname{Li}_2(x)}{x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}\tag{4.62}$$

Next, write $\frac{H_n}{n^2}=\int_0^1\frac{\zeta(2)-\operatorname{Li}_2(x)}{x}x^n\,\mathrm{d}x$ given in (3.66) to have

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^4-3H_n^2H_n^{(2)}+2H_nH_n^{(3)}}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^3-3H_nH_n^{(2)}+2H_n^{(3)}\right)\frac{H_n}{n^2}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^3-3H_nH_n^{(2)}+2H_n^{(3)}\right)\left(\int_0^1\frac{\zeta(2)-\operatorname{Li}_2(x)}{x}x^n\,\mathrm{d}x\right)\\
&=\int_0^1\frac{\zeta(2)-\operatorname{Li}_2(x)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^3-3H_nH_n^{(2)}+2H_n^{(3)}\right)x^n\right)\mathrm{d}x\\
&\{\text{ recall the generating function (2.22)}\}\\
&=\int_0^1\frac{\zeta(2)-\operatorname{Li}_2(x)}{x}\left(-\frac{\ln^3(1-x)}{1-x}\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1\frac{\ln^3(1-x)}{x}\left(\operatorname{Li}_2(x)-\zeta(2)\right)\mathrm{d}x+\underbrace{\int_0^1\frac{\ln^3(1-x)}{1-x}\left(\operatorname{Li}_2(x)-\zeta(2)\right)\mathrm{d}x}_{\text{IBP}}\\
&=\int_0^1\frac{\ln^3(1-x)\operatorname{Li}_2(x)}{x}\,\mathrm{d}x-\zeta(2)\int_0^1\frac{\ln^3(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\int_0^1\frac{\ln^5(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1\frac{\ln^3(1-x)\operatorname{Li}_2(x)}{x}\,\mathrm{d}x-\zeta(2)\int_0^1\frac{\ln^3(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y-\frac{1}{4}\int_0^1\frac{\ln^5(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}\tag{4.63}$$

Take the difference of (4.62) and (4.63),

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2H_n^{(2)}}{n^2} &= \frac{1}{6}\zeta(2)\int_0^1\frac{\ln^3(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y-\frac{1}{24}\int_0^1\frac{\ln^5(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y\\
&\quad-\frac{1}{3}\int_0^1\frac{\ln^3(1-x)\operatorname{Li}_2(x)}{x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

The first two integrals are found in (3.8) and the last is given in (3.131).

4.2.16 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^4}{n^2}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^4}{n^2} = \frac{979}{24}\zeta(6) + 3\zeta^2(3) \tag{4.64}$$

Solution. Combine (4.62) and (4.63) then divide by 2 ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^4}{n^2} = -\frac{1}{2}\zeta(2)\int_0^1 \frac{\ln^3(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y - \frac{3}{8}\int_0^1 \frac{\ln^5(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n H_n^{(3)}}{n^2}$$

The sum on the RHS is given in (4.60) and the solution is finalized.
For different methods of computing (4.64) and (4.61), see [32, pp. 421-427].

**4.2.17** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n H_n^{(2)}}{n^3}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n H_n^{(2)}}{n^3} = -\frac{101}{48}\zeta(6) + \frac{5}{2}\zeta^2(3). \tag{4.65}$$

Solution.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^3 + 3H_nH_n^{(2)} + 2H_n^{(3)}}{n^3} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{H_n^3 + 3H_nH_n^{(2)} + 2H_n^{(3)}}{n}\right) \\
&\quad \{\text{ recall the integral (2.62)}\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(-\int_0^1 x^{n-1}\ln^3(1-x)\mathrm{d}x\right) \\
&= -\int_0^1 \frac{\ln^3(1-x)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^1 \frac{\ln^3(1-x)\operatorname{Li}_2(x)}{x}\,\mathrm{d}x. \qquad (4.66)
\end{aligned}$$

On the other hand, write $\frac{1}{n^3} = \frac{1}{2}\int_0^1 x^{n-1}\ln^2(x)\mathrm{d}x$ to have

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^3 - 3H_nH_n^{(2)} + 2H_n^{(3)}}{n^3} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(H_n^3 - 3H_nH_n^{(2)} + 2H_n^{(3)}\right)\left(\frac{1}{2}\int_0^1 x^{n-1}\ln^2(x)\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^2(x)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^3 - 3H_nH_n^{(2)} + 2H_n^{(3)}\right)x^n\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

{recall the generating function (2.22)}

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^2(x)}{x}\left(-\frac{\ln^3(1-x)}{1-x}\right)\mathrm{d}x \\
&\overset{1-x=y}{=} -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^3(y)\ln^2(1-y)}{y(1-y)}\mathrm{d}y \\
&\left\{\text{ expand } \frac{\ln^2(1-y)}{1-y} \text{ in series given in (2.11) }\right\} \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^2 - H_n^{(2)}\right)\int_0^1 y^{n-1}\ln^3(y)\mathrm{d}y \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^2 - H_n^{(2)}\right)\left(-\frac{3!}{n^4}\right) \\
&= 3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n^4} - 3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^4}
\end{aligned}
\tag{4.67}
$$

Take the difference of (4.66) and (4.67) then divide by 6 ,

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n H_n^{(2)}}{n^3} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^4} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n^4} - \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{\ln^3(1-x)\operatorname{Li}_2(x)}{x}\,\mathrm{d}x.
$$

The solution completes on gathering the results (4.56), (4.58), and (3.131). For another approach, check [32, p. 411-414] .

4.2.18 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^3}{n^3}$

Show that

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^3}{n^3} = \frac{93}{16}\zeta(6) - \frac{5}{2}\zeta^2(3) \tag{4.68}
$$

Solution. Combine (4.63) and (4.67) then divide by 2 ,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^3}{n^3} =& \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n^4} - \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^4} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n^3} \\
& - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^3(1-x)\operatorname{Li}_2(x)}{x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

These terms are calculated in (4.56), (4.58), (2.77), and (3.131). A different solution may be found in [25].

4.2.19 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^5}$

Show that

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^5} = 5\zeta(2)\zeta(5) + 2\zeta(3)\zeta(4) - 10\zeta(7) \tag{4.69}
$$

Solution. Set $a = 3$ in (1.131),

$$
H_n^{(3)} = \zeta(3) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(n+k)^3}
$$

Divide both sides by $n^4$ then consider the summation,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n^4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\left(\zeta(3)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(n+k)^3}\right)$$

{distribute then change the order of summation}

$$=\zeta(3)\zeta(4)-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4(n+k)^3}\right)$$

$$\left\{\text{ decompose }\frac{1}{n^4(n+k)^3}\text{ by partial fraction }\right\}$$

$$=\zeta(3)\zeta(4)-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{10}{k^6}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)+\frac{6}{k^5n^2}+\frac{4}{k^5(n+k)^2}-\frac{3}{k^4n^3}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{k^4(n+k)^3}+\frac{1}{k^3n^4}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{use } \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)=H_k \text{ given in (1.129) for the first term and use }\Big\}\\ \Big\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(k+n)^a}=\zeta(a)-H_k^{(a)}\text{ given in (1.127) for the third and fifth terms }\Big\}\\ =\zeta(3)\zeta(4)-\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{10H_k}{k^6}+\frac{6\zeta(2)}{k^5}+4\frac{\zeta(2)-H_k^{(2)}}{k^5}-\frac{3\zeta(3)}{k^4}\right.\\ \left.+\frac{\zeta(3)-H_k^{(3)}}{k^4}+\frac{\zeta(4)}{n^3}\right)\end{array}\right.$$

Upon rearranging the terms, the sum $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k^{(3)}}{k^4}$ cancels out from both sides,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k^{(2)}}{k^5}=\frac{5}{2}\zeta(2)\zeta(5)-\frac{1}{2}\zeta(3)\zeta(4)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k}{k^6}$$

The remaining sum is given in (4.4).
For an alternative solution, see (4.26).

**4.2.20** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n^5}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n^5}=6\zeta(7)-\zeta(2)\zeta(5)-\frac{5}{2}\zeta(3)\zeta(4)\tag{4.70}$$

Solution.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2+H_n^{(2)}}{n^5}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\left(\frac{H_n^2+H_n^{(2)}}{n}\right)$$

{recall the integral (2.62)}

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\left(\int_0^1 x^{n-1}\ln^2(1-x)\mathrm{d}x\right)$$

$$=\int_0^1\frac{\ln^2(1-x)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^4}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\frac{\ln^2(1-x)\operatorname{Li}_4(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

{ expand $\ln^2(1-x)$ in series given in (2.7)}

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{n-1}}{n}\int_0^1 x^{n-1}\operatorname{Li}_4(x)\mathrm{d}x$$

{recall the result (3.68) for the integral}

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H_n}{n}-\frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{\zeta(4)}{n}-\frac{\zeta(3)}{n^2}+\frac{\zeta(2)}{n^3}-\frac{H_n}{n^4}\right).$$

Reorder the terms, we reach

$$3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n^5} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^5}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^6}+2\zeta(4)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^2}$$
$$-2\zeta(3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^3}+2\zeta(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^4}-2\zeta(2)\zeta(5)$$

Gather the results (4.69) and (4.4) to end the solution.
Also check [32, p. 396-398] for a different method.

**4.2.21** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n^4}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n^4} = 18\zeta(7)-10\zeta(2)\zeta(5) \tag{4.71}$$

Solution. Divide both sides of (2.72):

$$\mathrm{Li}_3^2(x) = 12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^5}x^n+6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^4}x^n+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n^3}x^n-20\mathrm{Li}_6(x)$$

by $x$ then integrate using $\int_0^1 x^{n-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}$,

$$12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^6}+6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^5}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n^4}-20\zeta(7) = \int_0^1\frac{\mathrm{Li}_3^2(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

{ expand $\mathrm{Li}_3(x)$ in series }

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\int_0^1 x^{n-1}\,\mathrm{Li}_3(x)\mathrm{d}x$$

{ recall the result (3.67)}

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\left(\frac{\zeta(3)}{n}-\frac{\zeta(2)}{n^2}+\frac{H_n}{n^3}\right)$$

or

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n^4} = \frac{1}{2}\zeta(3)\zeta(4)-\frac{1}{2}\zeta(2)\zeta(5)+10\zeta(7)-\frac{11}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^6}-3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^5}$$

These two series are given in (4.4) and (4.69) respectively .

**4.2.22** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(4)}}{n^3}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(4)}}{n^3} = \zeta(3)\zeta(4) + 10\zeta(2)\zeta(5) - 17\zeta(7) \tag{4.72}$$

Solution. Setting $p = 3$ and $q = 4$ in (2.76),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(4)}}{n^3} = \zeta(4)\zeta(3) + \zeta(7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(3)}}{n^4}$$

This sum is computed in (4.71).

4.2.23 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^2 H_n^{(2)}}{n^3}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^2 H_n^{(2)}}{n^3} = \frac{19}{2}\zeta(3)\zeta(4) - 2\zeta(2)\zeta(5) - 7\zeta(7) \tag{4.73}$$

**Solution.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^4 + 6H_n^2 H_n^{(2)} + 8H_n H_n^{(3)} + 2\left(H_n^{(2)}\right)^2 + 6H_n^{(4)}}{n^3}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left( \frac{H_n^4 + 6H_n^2 H_n^{(2)} + 8H_n H_n^{(3)} + 2\left(H_n^{(2)}\right)^2 + 6H_n^{(4)}}{n} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left( \int_0^1 x^{n-1} \ln^4(1-x) \mathrm{d}x \right)$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln^4(1-x)}{x} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln^4(1-x) \operatorname{Li}_2(x)}{x} \mathrm{d}x$$

To establish another relation, multiply both sides of (2.27):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( H_n^4 - 6H_n^2 H_n^{(2)} + 8H_n H_n^{(3)} + 3\left(H_n^{(2)}\right)^2 - 6H_n^{(4)} \right) x^n = \frac{\ln^4(1-x)}{1-x}$$

by $\frac{\ln^2(x)}{2x}$ then integrate using $\frac{1}{2}\int_0^1 x^{n-1} \ln^2(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{n^3}$, we obtain

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^4-6H_n^2H_n^{(2)}+8H_nH_n^{(3)}+2\left(H_n^{(2)}\right)^2-6H_n^{(4)}}{n^3}\\
&=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\ln^2(x)\ln^4(1-x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x\\
&\overset{1-x=y}{=}\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\ln^2(1-y)\ln^4(y)}{y(1-y)}\mathrm{d}y\\
&\left\{\text{expand }\frac{\ln^2(1-y)}{1-y}\text{ in series given in (2.11)}\right\}\\
&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^2-H_n^{(2)}\right)\int_0^1 y^{n-1}\ln^4(y)\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^2-H_n^{(2)}\right)\left(\frac{4!}{n^5}\right)\\
&=12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n^5}-12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^5} \qquad (4.75)
\end{aligned}
$$

Take the difference of (4.74) and (4.75) then divide by 12 ,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2H_n^{(2)}}{n^3}&=\frac{1}{12}\int_0^1\frac{\ln^4(1-x)\operatorname{Li}_2(x)}{x}\ \mathrm{d}x\\
&-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(4)}}{n^3}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n^5}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^5}
\end{aligned}
$$

These terms are given in (3.69), (4.72), (4.70), and (4.69) respectively. Check [32, p. 456] for another solution.

#### 4.2.24 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^7}$

Show that

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^7}=7\zeta(2)\zeta(7)+2\zeta(3)\zeta(6)+4\zeta(4)\zeta(5)-\frac{35}{2}\zeta(9) \qquad (4.76)
$$

Solution. Set $a=2$ in (1.131),

$$
H_n^{(2)}=\zeta(2)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(n+k)^2}
$$

Divide both sides by $n^7$ then consider the summation,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^7}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^7}\left(\zeta(2)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(n+k)^2}\right)\\
&=\zeta(2)\zeta(7)-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^7(n+k)^2}\right)\\
=\zeta(2)\zeta(7)-\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg(\sum_{n=1}^{\infty}&\frac{7}{k^8}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)-\frac{6}{k^7n^2}-\frac{1}{k^7(n+k)^2}+\frac{5}{k^6n^3}\\
&-\frac{4}{k^5n^4}+\frac{3}{k^4n^5}-\frac{2}{k^3n^6}+\frac{1}{k^2n^7}\Bigg)\\
=\zeta(2)\zeta(7)-\sum_{k=1}^{\infty}&\left(\frac{7H_k}{k^8}-\frac{6\zeta(2)}{k^7}-\frac{1}{k^7}\left(\zeta(2)-H_k^{(2)}\right)+\frac{5\zeta(3)}{k^6}\right.\\
&\left.-\frac{4\zeta(4)}{k^5}+\frac{3\zeta(5)}{k^4}-\frac{2\zeta(6)}{k^3}+\frac{\zeta(7)}{k^2}\right)\\
=\zeta(2)\zeta(7)-7\sum_{k=1}^{\infty}&\frac{H_k}{k^8}+6\zeta(2)\zeta(7)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k^{(2)}}{k^7}-3\zeta(3)\zeta(6)+\zeta(4)\zeta(5).
\end{aligned}
$$

Therefore,

$$
2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^7}=7\zeta(2)\zeta(7)-3\zeta(3)\zeta(6)+\zeta(4)\zeta(5)-7\sum_{k=1}^{\infty}\frac{H_k}{k^8}
$$

The latter sum is given in (4.4). Another approach may be found in (4.26).
Remark: For integers $p$ and $q$, where $q>1, q\neq p$, and $p+q$ is even $>6$, there does not exist a closed form for the series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(p)}}{n^q}$.

### 6.7.3 4.3 Alternating Harmonic Series

**4.3.1** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_n}{n}$

Show that

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_n}{n}=\frac{1}{2}\ln^2(2)-\frac{1}{2}\zeta(2) \tag{4.77}
$$

Solution. Set $q=1$ in (4.11),

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_n}{n}&=-\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x(1+x)}\mathrm{d}x\\
&\overset{x=\frac{y}{1-y}}{=}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(1-y)}{y}\,\mathrm{d}y\\
&=\operatorname{Li}_2(y)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=-\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

The value $\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\zeta(2)-\frac{1}{2}\ln^2(2)$ is given in (1.81).
For a different approach, set $x=-1$ in (2.6) then write $\operatorname{Li}_2(-1)=-\frac{1}{2}\zeta(2)$.
4.3.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_{2n}}{n}$
Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{2n}}{n} = -\frac{5}{8}\zeta(2) + \frac{1}{4}\ln^2(2) \tag{4.78}$$

Solution (i). Let $a_n = \frac{H_n}{n}$ in (1.10):

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_{2n} = \Re \sum_{n=1}^{\infty} i^n a_n \tag{4.79}$$

we get

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{2n}}{n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{2n}}{2n} = 2\Re \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n H_n}{n}$$

$$\{\text{ set } x = i \text{ in the generating function (2.6)}\}$$

$$= 2\Re \left\{ \operatorname{Li}_2(i) + \frac{1}{2}\ln^2(1-i) \right\}$$

The values of these two terms are given in (1.72) and (1.29).

Solution (ii). Set $x = 1$ in (2.41):

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2H_{2n} - H_n}{n} x^{2n} = -2\arctan^2(x)$$

we get

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{2n}}{n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n}{n} - \arctan^2(1)$$

$$\{\text{recall the result (4.77)}\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln^2(2) - \frac{1}{2}\zeta(2)\right) - \frac{\pi^2}{16}$$

$$= -\frac{5}{8}\zeta(2) + \frac{1}{4}\ln^2(2)$$

### 4.3.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{2n}}{n^2}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{2n}}{n^2} = \frac{23}{16}\zeta(3) - \pi G. \tag{4.80}$$

Solution. Applying the previous approach,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{2n}}{n^2} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{2n}}{(2n)^2} = 4\Re \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n H_n}{n^2}$$

$$\{\text{set } x = i \text{ in the generating function (2.8) }\}$$

$$= 4\Re \left\{ \operatorname{Li}_3(i) - \operatorname{Li}_3(1-i) + \ln(1-i)\operatorname{Li}_2(1-i) + \frac{1}{2}\ln(i)\ln^2(1-i) + \zeta(3) \right\}$$

By using the values (1.82), (1.29), and (1.30), we find:

$$\ln(i)\ln^2(1-i) = \frac{\pi^2}{8}\ln(2) - \left(\frac{\pi^3}{32} - \frac{\pi}{8}\ln^2(2)\right)i \tag{4.81}$$

$$\ln(1-i)\operatorname{Li}_2(1-i) = -\frac{\pi}{4}G - \frac{\pi^2}{32}\ln(2) - \left(\frac{1}{2}\ln(2)G + \frac{\pi^3}{64} + \frac{\pi}{8}\ln^2(2)\right)i \tag{4.82}$$

Collect these two values along with (1.73) to finish the solution.

4.3.4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{n^2}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{n^2} = -\frac{5}{8}\zeta(3) \tag{4.83}$$

Solution (i). Put $q=2$ in (4.11),

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{n^2} = \int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1+x)}{x(1+x)}\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

These two integrals are calculated in (3.12) and (3.100).

Solution (ii). Setting $x=-1$ in (2.8),

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{n^2} = \operatorname{Li}_3(-1) - \operatorname{Li}_3(2) + \ln(2)\operatorname{Li}_2(2) + \frac{1}{2}\ln(-1)\ln^2(2) + \zeta(3).$$

The values of $\operatorname{Li}_3(2)$, and $\operatorname{Li}_2(2)$ are given in (1.113) and (1.112). An alternative solution may be found in [32, pp. 508-509].

4.3.5 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n^{(2)}}{n}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n^{(2)}}{n} = \frac{1}{2}\ln(2)\zeta(2) - \zeta(3). \tag{4.84}$$

Solution (i). Put $q=2$ in (4.28),

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n^{(2)}}{n} = -\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln\left(\frac{1+x}{2}\right)}{1-x}\,\mathrm{d}x$$
$$= -\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1+x)}{1-x}\,\mathrm{d}x + \ln(2)\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

These two integrals are given in (3.103) and (3.8).

Solution (ii). Setting $x=-1$ in (2.68) produces

$$-\ln(2)\operatorname{Li}_2(-1) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n^{(2)}}{n} - 3\operatorname{Li}_3(-1).$$

The first sum is found in (4.83).

Also check (4.27) for a different solution.

4.3.6 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n^{(3)}}{n}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n^{(3)}}{n}=\frac{3}{4}\ln(2)\zeta(3)-\frac{19}{16}\zeta(4). \tag{4.85}$$

Solution. Setting $x=-1$ in (2.17),

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n^{(3)}}{n}=\operatorname{Li}_4(-1)-\ln(2)\operatorname{Li}_3(-1)-\frac{1}{2}\operatorname{Li}_2^2(-1)$$

For another solution, see (4.27).

4.3.7 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{n^3}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{n^3}=2\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{11}{4}\zeta(4)+\frac{7}{4}\ln(2)\zeta(3)-\frac{1}{2}\ln^2(2)\zeta(2)+\frac{1}{12}\ln^4(2) \tag{4.86}$$

Solution (i). Put $q=3$ in (4.11),

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{n^3}=-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\ln^2(x)\ln(1+x)}{x(1+x)}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\ln^2(x)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\ln^2(x)\ln(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

These two integrals are given in (3.12) and (3.111).

Solution (ii). Expand $\ln(1-x)\ln(1+x)$ in series as given in (2.46),

$$\int_0^1\frac{\ln(1-x)\ln(1+x)\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\frac{\ln(x)}{x}\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H_{2n}-H_n}{n}+\frac{1}{2n^2}\right)x^{2n}\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H_{2n}-H_n}{n}+\frac{1}{2n^2}\right)\int_0^1 x^{2n-1}\ln(x)\mathrm{d}x$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{H_{2n}-H_n}{n}+\frac{1}{2n^2}\right)\left(-\frac{1}{(2n)^2}\right)$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{2n}}{(2n)^3}-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^3}+\frac{1}{8}\zeta(4)$$

$$\{\text{ make use of (1.5) for the first sum }\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{n^3}+\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^3}+\frac{1}{8}\zeta(4)$$

Collect the results (3.112) and (4.4) to finish the solution.

A different method is by putting $x=-1$ in (2.15). Also check [33].

4.3.8 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n^{(2)}}{n^2}$

Show that

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n^{(2)}}{n^2}=-4\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{51}{16}\zeta(4)-\frac{7}{2}\ln(2)\zeta(3)+\ln^2(2)\zeta(2)-\frac{1}{6}\ln^4(2).$

Solution. Put $x=-1$ in (2.69),

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n^{(2)}}{n^2}=3\operatorname{Li}_4(-1)+\frac{1}{2}\operatorname{Li}_2^2(-1)-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{n^3}$$

Substituting the results (4.86) completes the solution.
Also see [32, pp. 505-506] for a different method.
4.3.9 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n^2}{n^2}$
Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n^2}{n^2}=2\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{41}{16}\zeta(4)+\frac{7}{4}\ln(2)\zeta(3)-\frac{1}{2}\ln^2(2)\zeta(2)+\frac{1}{12}\ln^4(2) \tag{4.88}$$

**Solution.**

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n^2}{n^2}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{n}\left(\frac{H_n}{n}\right)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{n}\left(-\int_0^1 x^{n-1}\ln(1-x)\mathrm{d}x\right)\\
&=-\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n}(-x)^n\right)\mathrm{d}x\\
&\{\text{ recall the generating function (2.6)}\}\\
&=-\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}\left(\frac{1}{2}\ln^2(1+x)+\operatorname{Li}_2(-x)\right)\mathrm{d}x\\
&=-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\ln(1-x)\ln^2(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{\ln(1-x)\operatorname{Li}_2(-x)}{x}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

The first integral is found in (3.115). For the second, expand $\operatorname{Li}_2(-x)$ in series:

$$\begin{aligned}
\int_0^1\frac{\ln(1-x)\operatorname{Li}_2(-x)}{x}\,\mathrm{d}x&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\left(\int_0^1 x^{n-1}\ln(1-x)\mathrm{d}x\right)\\
&=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\left(-\frac{H_n}{n}\right)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{n^3}
\end{aligned}$$

This sum is calculated in (4.86) and the solution is finalized.
Also check [32, pp. 506-508] for a different solution.
4.3.10 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n H_n^{(2)}}{n}$
Show that

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n H_n^{(2)}}{n}&=-2\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)+\zeta(4)-\frac{7}{8}\ln(2)\zeta(3)+\frac{1}{4}\ln^2(2)\zeta(2)\\
&\quad-\frac{1}{12}\ln^4(2)
\end{aligned}\tag{4.89}$$

Solution. Using the identity (2.62), we have

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{H_n^3+3H_nH_n^{(2)}+2H_n^{(3)}}{n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(-\int_0^1 x^{n-1}\ln^3(1-x)\mathrm{d}x\right)$$
$$=\int_0^1 \ln^3(1-x)\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^{n-1}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1\frac{\ln^3(1-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x$$
$$\{\text{ make use of (3.17)}\}$$
$$=-6\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) \tag{4.90}$$

On the other hand, write $\frac{1}{n}=\int_0^1 x^{n-1}\,\mathrm{d}x$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{H_n^3-3H_nH_n^{(2)}+2H_n^{(3)}}{n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^3-3H_nH_n^{(2)}+2H_n^{(3)}\right)\left(\int_0^1 x^{n-1}\,\mathrm{d}x\right)$$
$$=\int_0^1\frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^3-3H_nH_n^{(2)}+2H_n^{(3)}\right)(-x)^n\right)\mathrm{d}x$$

{recall the generating function (2.22)}

$$=\int_0^1\frac{1}{x}\left(-\frac{\ln^3(1+x)}{1+x}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1\frac{\ln^3(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{\ln^3(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

{the first integral is $\ln^4(2)/4$ and the second one is given in (3.20)}

$$=6\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)-6\zeta(4)+\frac{21}{4}\ln(2)\zeta(3)-\frac{3}{2}\ln^2(2)\zeta(2)+\frac{1}{2}\ln^4(2). \tag{4.91}$$

Take the difference of (4.90) and (4.91) then divide by 6 to finalize the solution.

4.3.11 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_n^3}{n}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_n^3}{n}=-\frac{5}{8}\zeta(4)+\frac{9}{8}\ln(2)\zeta(3)-\frac{3}{4}\ln^2(2)\zeta(2)+\frac{1}{4}\ln^4(2) \tag{4.92}$$

Solution. Adding (4.90) and (4.91),

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_n^3}{n}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_n^{(3)}}{n}$$
$$=-6\zeta(4)+\frac{21}{4}\ln(2)\zeta(3)-\frac{3}{2}\ln^2(2)\zeta(2)+\frac{1}{2}\ln^4(2).$$

The second sum on the LHS is calculated in (4.85).

**4.3.12** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n}{n^4}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n}{n^4} = \frac{1}{2}\zeta(2)\zeta(3) - \frac{59}{32}\zeta(5). \tag{4.93}$$

Solution. Putting $q = 4$ in (4.11) gives

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n}{n^4} = \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{\ln^3(x)\ln(1+x)}{x(1+x)}\mathrm{d}x$$

$$\{\text{recall the result (3.122)}\}$$

$$= \frac{1}{16}\int_0^1 \frac{\ln^4(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{12}\int_0^1 \frac{\ln^3(t)\ln(1-t)}{1-t}\,\mathrm{d}t - \frac{5}{48}\int_0^1 \frac{\ln^4(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

These integrals are calculated in (3.8), (3.41), and (3.11) respectively. For another method, see [33].

4.3.13 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n^{(2)}}{n^3}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n^{(2)}}{n^3} = \frac{11}{32}\zeta(5) - \frac{5}{8}\zeta(2)\zeta(3). \tag{4.94}$$

Solution. Replace $x$ with $-x$ in (2.69),

$$\operatorname{Li}_2^2(-x) = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n}{n^3}x^n + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n^{(2)}}{n^2}x^n - 6\operatorname{Li}_4(-x).$$

Divide both sides by $x$ then integrate using $\int_0^1 x^{n-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}$,

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_2^2(-x)}{x}\,\mathrm{d}x = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n}{n^4} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n^{(2)}}{n^3} + \frac{45}{8}\zeta(5).$$

Substitute the relation involving this integral from (3.129),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n^{(2)}}{n^3} = \frac{45}{16}\zeta(5) + \frac{5}{16}\zeta(2)\zeta(3) + \frac{7}{16}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n}{n^4}. \tag{4.95}$$

These two series are computed in (4.4) and (4.93).

**4.3.14** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n^2}{n^3}$

Show that

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n^2}{n^3} &= -4\operatorname{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right) - 4\ln(2)\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{19}{32}\zeta(5) + \frac{11}{8}\zeta(2)\zeta(3) \\ &\quad - \frac{7}{4}\ln^2(2)\zeta(3) + \frac{2}{3}\ln^3(2)\zeta(2) - \frac{2}{15}\ln^5(2)\end{aligned} \tag{4.96}$$

Solution. Substitute $\frac{1}{n^3} = \frac{1}{2}\int_0^1 x^{n-1}\ln^2(x)\mathrm{d}x$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3}\left(H_n^2-H_n^{(2)}-\frac{2H_n}{n}+\frac{2}{n^2}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(H_n^2-H_n^{(2)}-\frac{2H_n}{n}+\frac{2}{n^2}\right)\left(\frac{1}{2}\int_0^1 x^{n-1}\ln^2(x)\mathrm{d}x\right)$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\ln^2(x)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^2-H_n^{(2)}-\frac{2H_n}{n}+\frac{2}{n^2}\right)(-x)^{n-1}\right)\mathrm{d}x$$

{recall the generating function (2.12)}

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\ln^2(x)}{x}\left(\frac{\ln^2(1+x)}{1+x}\right)$$
$$\overset{\text{IBP}}{=}\frac{1}{3}\int_0^1\frac{\ln(x)\ln^3(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Distribute then rearrange the terms,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_n^2}{n^3}=-2\operatorname{Li}_5(-1)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_n^{(2)}}{n^3}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_n}{n^4}$$
$$+\frac{1}{3}\int_0^1\frac{\ln(x)\ln^3(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

{recall the relation involving these two sums from (4.95)}

$$=-2\operatorname{Li}_5(-1)+\frac{45}{16}\zeta(5)+\frac{5}{16}\zeta(2)\zeta(3)+\frac{7}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_n}{n^4}$$
$$+\frac{1}{3}\int_0^1\frac{\ln(x)\ln^3(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

These terms are calculated in (4.4), (4.93), and (3.125) respectively. Check [32, pp. 517-519] for an alternative approach.

4.3.15 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_n^{(4)}}{n}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_n^{(4)}}{n}=-2\zeta(5)+\frac{7}{8}\ln(2)\zeta(4)+\frac{3}{8}\zeta(2)\zeta(3). \tag{4.97}$$

**Solution.**

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n^{(4)}}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n H_n^{(4)}\left(\int_0^1 x^{n-1}\,\mathrm{d}x\right)\\
&= \int_0^1 \frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} H_n^{(4)}(-x)^n\right)\mathrm{d}x\\
&\{\text{set } a=4 \text{ in (2.2) to get this sum }\}\\
&= \int_0^1 \frac{1}{x}\left(\frac{\operatorname{Li}_4(-x)}{1+x}\right)\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_4(-x)}{x}\,\mathrm{d}x - \underbrace{\int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_4(-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x}_{\text{IBP}}\\
&= \operatorname{Li}_5(-1)-\ln(2)\operatorname{Li}_4(-1)+\int_0^1 \frac{\ln(1+x)\operatorname{Li}_3(-x)}{x}\,\mathrm{d}x\\
&\overset{\text{IBP}}{=} \operatorname{Li}_5(-1)-\ln(2)\operatorname{Li}_4(-1)-\operatorname{Li}_2(-1)\operatorname{Li}_3(-1)+\int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_2^2(-x)}{x}\,\mathrm{d}x\\
&= -\frac{15}{16}\zeta(5)+\frac{7}{8}\ln(2)\zeta(4)-\frac{3}{8}\zeta(2)\zeta(3)+\int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_2^2(-x)}{x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

{recall the relation involving this integral from (3.129)}

$$\begin{aligned}
=&\frac{1}{4}\zeta(2)\zeta(3)+\frac{7}{8}\ln(2)\zeta(4)-\frac{15}{16}\zeta(5)\\
&+\frac{7}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^4}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{n^4}
\end{aligned}\tag{4.98}$$

The solution finalizes on substituting the results (4.4) and (4.93). For different approaches, see [32, p. 516] and (4.97).

4.3.16 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n^{(3)}}{n^2}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n^{(3)}}{n^2}=\frac{21}{32}\zeta(5)-\frac{3}{4}\zeta(2)\zeta(3)\tag{4.99}$$

**Solution.**

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n^{(3)}}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n^{(3)}}{n}\left(\int_0^1 x^{n-1}\,\mathrm{d}x\right)\\
&= \int_0^1 \frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n}(-x)^n\right)\mathrm{d}x\\
&\quad\{\text{recall the generating function}\}\\
&= \int_0^1 \frac{1}{x}\left(\operatorname{Li}_4(-x)-\ln(1+x)\operatorname{Li}_3(-x)-\frac{1}{2}\operatorname{Li}_2^2(-x)\right)\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_4(-x)}{x}\,\mathrm{d}x - \underbrace{\int_0^1 \frac{\ln(1+x)\operatorname{Li}_3(-x)}{x}\,\mathrm{d}x}_{\text{IBP}} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_2^2(-x)}{x}\,\mathrm{d}x\\
&= \operatorname{Li}_5(-1)+\operatorname{Li}_2(-1)\operatorname{Li}_3(-1) - \int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_2^2(-x)}{x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_2^2(-x)}{x}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{3}{8}\zeta(2)\zeta(3)-\frac{15}{16}\zeta(5)-\frac{3}{2}\int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_2^2(-x)}{x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

This integral is given in (3.128).

Check [32, pp. 513-515] for different methods for both series (4.99) and (4.94).

4.3.17 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n H_n^{(2)}}{n^2}$

Show that

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n H_n^{(2)}}{n^2} &= 4\operatorname{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right)+4\ln(2)\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{7}{4}\ln^2(2)\zeta(3)\\
&\quad -\frac{23}{8}\zeta(5)-\frac{2}{3}\ln^3(2)\zeta(2)-\frac{15}{16}\zeta(2)\zeta(3)+\frac{2}{15}\ln^5(2) \qquad (4.100)
\end{aligned}$$

**Solution.**

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{H_n^3+3H_nH_n^{(2)}+2H_n^{(3)}}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{H_n^3+3H_nH_n^{(2)}+2H_n^{(3)}}{n}\right)\\
&\quad\{\text{ recall the integral (2.62)}\}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(-\int_0^1 x^{n-1}\ln^3(1-x)\mathrm{d}x\right)\\
&= -\int_0^1 \frac{\ln^3(1-x)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n}\right)\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 \frac{\ln^3(1-x)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x \qquad (4.101)
\end{aligned}$$

On the other hand,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{H_n^3-3H_nH_n^{(2)}+2H_n^{(3)}}{n^2}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(H_n^3-3H_nH_n^{(2)}+2H_n^{(3)}\right)\left(-\int_0^1 x^{n-1}\ln(x)\mathrm{d}x\right)$$
$$=-\int_0^1\frac{\ln(x)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^3-3H_nH_n^{(2)}+2H_n^{(3)}\right)(-x)^n\right)\mathrm{d}x$$

{recall the generating function (2.22)}

$$=-\int_0^1\frac{\ln(x)}{x}\left(-\frac{\ln^3(1+x)}{1+x}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1\frac{\ln^3(1+x)\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x-\underbrace{\int_0^1\frac{\ln^3(1+x)\ln(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x}_{\text{IBP}}$$
$$=\int_0^1\frac{\ln^3(1+x)\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int_0^1\frac{\ln^4(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x. \tag{4.102}$$

Take the difference of the two relations in (4.101) and (4.102) then divide by 6 ,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_nH_n^{(2)}}{n^2}=\frac{1}{6}\int_0^1\frac{\ln^3(1-x)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$+\frac{1}{24}\int_0^1\frac{\ln^4(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{6}\int_0^1\frac{\ln^3(1+x)\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

These three integrals are given in (3.123), (3.20), and (3.125) respectively.

4.3.18 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_n^3}{n^2}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_n^3}{n^2}=-6\operatorname{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right)-6\ln(2)\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{9}{4}\zeta(5)+\frac{27}{16}\zeta(2)\zeta(3)$$
$$-\frac{21}{8}\ln^2(2)\zeta(3)+\ln^3(2)\zeta(2)-\frac{1}{5}\ln^5(2) \tag{4.103}$$

Solution. Combine (4.101) and (4.102) then divide by 2 ,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_n^3}{n^2}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\ln^3(1-x)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{8}\int_0^1\frac{\ln^4(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\ln^3(1+x)\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_n^{(3)}}{n^2}$$

These terms are given in (3.123), (3.20), (3.125), and (4.99) respectively. The two series (4.94) and (4.103) can be found computed differently in [32, pp. 520-523].

### 6.7.4 4.4 Harmonic Series with Powers of 2 in the Denominator

4.4.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n2^n}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n2^n} = \frac{1}{2}\zeta(2). \tag{4.104}$$

Solution (i). Set $x = \frac{1}{2}$ in (2.6),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n2^n} = \operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln^2(2),$$

where $\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\zeta(2) - \frac{1}{2}\ln^2(2)$ given in (1.81).
Solution (ii). Set $q = 0$ in (3.86),

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n2^n} &= \operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-x)}{1-x}\, \mathrm{d}x \\ &= \operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln^2(2) \\ &= \frac{1}{2}\zeta(2)\end{aligned}$$

Solution (iii). Set $q = 0$ in (3.87),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n2^n} = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\, \mathrm{d}x$$

$$= -\operatorname{Li}_2(-x)\Big|_0^1 = -\operatorname{Li}_2(-1) = \frac{1}{2}\zeta(2).$$

4.4.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^2 2^n}$
Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^2 2^n} = \zeta(3) - \frac{1}{2}\ln(2)\zeta(2) \tag{4.105}$$

Solution (i). Set $x = \frac{1}{2}$ in (2.8),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^2 2^n} = -\ln(2)\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln^3(2) + \zeta(3)\zeta(3) - \frac{1}{2}\ln(2)\zeta(2)$$

Solution (ii). Set $q = 1$ in (3.85),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^2 2^n} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(2x)\ln(1-x)}{x(1-x)} \mathrm{d}x$$

$$= \ln(2)\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-x)}{1-x}\, \mathrm{d}x + \ln(2)\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-x)}{x}\, \mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x(1-x)} \mathrm{d}x$$

{make use of (3.84) for the third integral}

$$= -\frac{1}{2}\ln^3(2) - \ln(2)\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) + \int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}\, \mathrm{d}x$$

This integral is given in (3.9).
A different approach may be found in [32, p. 500].

4.4.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n2^n}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n2^n} = \frac{5}{8}\zeta(3) \tag{4.106}$$

Solution (i). Put $x = \frac{1}{2}$ in (2.68) then reorganize the terms,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n2^n} = 3\operatorname{Li}_3\left(\frac{1}{2}\right) + \ln(2)\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^2 2^n}$$

Collect the values (4.105), (1.81), and (1.92).
Solution (ii). Set $q = 1$ in (3.87),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n2^n} = -\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

This integral is given in (3.98).

### 4.4.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^2}{n2^n}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^2}{n2^n} = \frac{7}{8}\zeta(3) \tag{4.107}$$

Solution.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^2 + H_n^{(2)}}{n2^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{H_n^2 + H_n^{(2)}}{n}\right) \\
&\quad \{\text{ recall the integral (2.62)}\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\int_0^1 x^{n-1}\ln^2(1-x)\mathrm{d}x\right) \\
&= \int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

{use the geometric series formula}

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{x}\left(\frac{\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}}\right)\mathrm{d}x \\
&\overset{1-x=y}{=} \int_0^1 \frac{\ln^2(y)}{1+y}\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Substituting the results (3.11) and (4.106) completes the solution.
An alternative solution is by setting $x = \frac{1}{2}$ in the generating function (2.14).
4.4.5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^3 2^n}$
Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^3 2^n} = \operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{8}\zeta(4) - \frac{1}{8}\ln(2)\zeta(3) + \frac{1}{24}\ln^4(2). \tag{4.108}$$

Solution. Set $a = 2$ in (3.86),

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^3 2^n}=\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln^2(2x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\ln^2(2)\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x-\ln(2)\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln^2(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

The last two integrals are computed in (3.99) and (3.110) respectively. A different way is by setting $x=\frac{1}{2}$ in (2.15). Also check [32, pp. 500-501].

4.4.6 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^2 2^n}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^2 2^n}=\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{16}\zeta(4)+\frac{1}{4}\ln(2)\zeta(3)-\frac{1}{4}\ln^2(2)\zeta(2)+\frac{1}{24}\ln^4(2) \tag{4.109}$$

Solution. let $x=\frac{1}{2}$ in (2.69),

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^2 2^n}=3\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\operatorname{Li}_2^2\left(\frac{1}{2}\right)-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^3 2^n}$$

The sum on the RHS is computed in (4.108).

### 4.4.7 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\boldsymbol{H_n^2}}{\boldsymbol{n^2 2^n}}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n^2 2^n}=-\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{37}{16}\zeta(4)-\frac{7}{4}\ln(2)\zeta(3)+\frac{1}{4}\ln^2(2)\zeta(2)-\frac{1}{24}\ln^4(2) \tag{4.110}$$

**Solution.**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2+H_n^{(2)}}{n^2 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}\left(\frac{H_n^2+H_n^{(2)}}{n}\right)$$

$$\{\text{ recall the integral (2.62)}\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}\left(\int_0^1 x^{n-1}\ln^2(1-x)\mathrm{d}x\right)$$

$$=\int_0^1\frac{\ln^2(1-x)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n}\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^1\frac{\ln^2(1-x)\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$1-x=y\qquad\int_0^1\frac{\ln^2(y)\ln\left(\frac{2}{1+y}\right)}{1-y}\,\mathrm{d}y$$

$$\{\text{ set } q=3 \text{ in (3.47) to get this integral }\}$$

$$=\frac{19}{8}\zeta(4)-\frac{3}{2}\ln(2)\zeta(3)$$

The second sum on the LHS is given in (4.109).

4.4.8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(3)}}{n2^n}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(3)}}{n2^n} = \operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{5}{16}\zeta(4) + \frac{7}{8}\ln(2)\zeta(3) - \frac{1}{4}\ln^2(2)\zeta(2) + \frac{1}{24}\ln^4(2) \tag{4.111}$$

Solution (i). Take $x = \frac{1}{2}$ in the generating function (2.17),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(3)}}{n2^n} = \operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) + \ln(2)\operatorname{Li}_3\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{Li}_2^2\left(\frac{1}{2}\right)$$

where the values of $\operatorname{Li}_3\left(\frac{1}{2}\right)$ and $\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)$ are given in (1.81) and (1.92).

Solution (ii). Put $q = 2$ in (3.87),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(3)}}{n2^n} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)\ln(1+x)}{x}\, dx$$

This integral is given in (3.116).

**4.4.9 $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^4 2^n}}$**

Show that

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^4 2^n} &= 2\operatorname{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right) + \ln(2)\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{6}\ln^3(2)\zeta(2) + \frac{1}{2}\ln^2(2)\zeta(3)\\ &\quad -\frac{1}{8}\ln(2)\zeta(4) - \frac{1}{2}\zeta(2)\zeta(3) + \frac{1}{32}\zeta(5) + \frac{1}{40}\ln^5(2)\end{aligned} \tag{4.112}$$

Solution. Set $a = 3$ in (3.86),

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^4 2^n} &= \operatorname{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^3(2x)\ln(1-x)}{1-x}\, dx\\ &= \operatorname{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6}\ln^3(2)\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-x)}{1-x}\, dx + \frac{1}{2}\ln^2(2)\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{1-x}\, dx\\ &\quad +\frac{1}{2}\ln(2)\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^2(x)\ln(1-x)}{1-x}\, dx + \frac{1}{6}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^3(x)\ln(1-x)}{1-x}\, dx.\end{aligned}$$

The last three integrals are given in (3.99), (3.110), and (3.119) respectively. For a different approach, see [32, pp. 501-502].

4.4.10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(4)}}{n2^n}$

The following sum is proposed by Cornel Vălean [37]:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(4)}}{n2^n} =&6\operatorname{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right) + 6\ln(2)\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{81}{16}\zeta(5) - \frac{21}{8}\zeta(2)\zeta(3)\\ &+ \frac{21}{8}\ln^2(2)\zeta(3) - \ln^3(2)\zeta(2) + \frac{1}{5}\ln^5(2)\end{aligned} \tag{4.113}$$

Solution. Put $q = 3$ in (3.87), we obtain

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(4)}}{n2^n} = -\frac{1}{6} \int_0^1 \frac{\ln^3(1-x)\ln(1+x)}{x} \, \mathrm{d}x$$

This integral is calculated in (3.123).

4.4.11 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^3 2^n}$

The following sum is proposed by Cornel Vălean [38]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^3 2^n} = -2\operatorname{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right) - 3\ln(2)\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{23}{64}\zeta(5) - \frac{1}{16}\ln(2)\zeta(4)$$
$$+\frac{23}{16}\zeta(2)\zeta(3) - \frac{23}{16}\ln^2(2)\zeta(3) + \frac{7}{12}\ln^3(2)\zeta(2) - \frac{13}{120}\ln^5(2) \tag{4.114}$$

Solution (i). Let $x = \frac{1}{2}$ in (2.73),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^3 2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(3)}}{n^2 2^n}$$
$$= 5\operatorname{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right) + \ln(2)\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^4 2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(4)}}{n2^n}. \tag{4.115}$$

Now put $x = \frac{1}{2}$ in (2.71),

$$3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^3 2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(3)}}{n^2 2^n}$$
$$= \operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)\operatorname{Li}_3\left(\frac{1}{2}\right) + 10\operatorname{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right) - 6\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^4 2^n}. \tag{4.116}$$

Take the difference of (4.115) and (4.116),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^3 2^n} = \frac{5}{2}\operatorname{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln(2)\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)\operatorname{Li}_3\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$-2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^4 2^n} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(4)}}{n2^n}$$

The two sums on the RHS are given in (4.112) and (4.113) respectively.

Solution (ii). Divide both sides of (2.69) by $x$ then integrate from $x = 0$ to $\frac{1}{2}$, using $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{n-1} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n2^n}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^3 2^n} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{Li}_2^2(x)}{x} \, \mathrm{d}x - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^4 2^n} + 3\operatorname{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right)$$

These two terms are calculated in (3.130) and (4.112).

**4.4.12** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n^2 2^n}$

The following sum is also proposed by Cornel Vălean [38]:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n^2 2^n}=4\operatorname{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right)+3\ln(2)\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{81}{64}\zeta(5)+\frac{5}{16}\ln(2)\zeta(4)$$
$$-\frac{7}{8}\zeta(2)\zeta(3)+\frac{7}{8}\ln^2(2)\zeta(3)-\frac{5}{12}\ln^3(2)\zeta(2)+\frac{11}{120}\ln^5(2) \tag{4.117}$$

Solution. Combine (4.115) and (4.116),

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n^2 2^n}=-\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(4)}}{n2^n}+\frac{5}{2}\operatorname{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}\ln(2)\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right)\operatorname{Li}_3\left(\frac{1}{2}\right)$$

Collect the value (4.113) to finalize the solution.

4.4.13 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n^3 2^n}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n^3 2^n}=-2\operatorname{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right)-\ln(2)\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{279}{64}\zeta(5)-\frac{37}{16}\ln(2)\zeta(4)$$
$$-\frac{9}{16}\zeta(2)\zeta(3)+\frac{7}{16}\ln^2(2)\zeta(3)+\frac{1}{12}\ln^3(2)\zeta(2)-\frac{1}{40}\ln^5(2) \tag{4.118}$$

Solution. Multiply both sides of (2.11):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^2-H_n^{(2)}\right)x^n=\frac{\ln^2(1-x)}{1-x}$$

by $\frac{\ln^2(x)}{x}$ then integrate from $x=0$ to $\frac{1}{2}$,

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln^2(1-x)\ln^2(x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^2-H_n^{(2)}\right)\int_0^{\frac{1}{2}}x^{n-1}\ln^2(x)\mathrm{d}x$$
$$=\ln(2)\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^2-H_n^{(2)}\right)\left(\frac{\ln(2)}{n2^n}+\frac{2}{n^2 2^n}\right)+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2-H_n^{(2)}}{n^3 2^n}$$
$$\left\{\text{write }\frac{\ln(2)}{n2^n}+\frac{2}{n^2 2^n}=-\int_0^{\frac{1}{2}}x^{n-1}(\ln(2)+2\ln(x))\mathrm{d}x\right\}$$
$$=\ln(2)\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^{(2)}-H_n^2\right)\left(\int_0^{\frac{1}{2}}x^{n-1}(\ln(2)+2\ln(x))\mathrm{d}x\right)+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2-H_n^{(2)}}{n^3 2^n}$$
$$=\ln(2)\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(2)+2\ln(x)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^{(2)}-H_n^2\right)x^n\right)\mathrm{d}x+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2-H_n^{(2)}}{n^3 2^n}$$
$$\{\text{ recall the generation function (2.11)}\}$$
$$=\ln(2)\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln(2)+2\ln(x)}{x}\left(-\frac{\ln^2(1-x)}{1-x}\right)\mathrm{d}x+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2-H_n^{(2)}}{n^3 2^n}.$$

Reorganizing the terms, we have

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{n^3 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^3 2^n}+\frac12\int_0^{\frac12}\frac{\ln^2(1-x)\ln^2(x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x \\ +\ln(2)\int_0^{\frac12}\frac{\ln(x)\ln^2(1-x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x+\frac12\ln^2(2)\int_0^{\frac12}\frac{\ln^2(1-x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x \tag{4.119}$$

First integral: Set $q=2$ in (3.84),

$$\int_0^{\frac12}\frac{\ln^2(1-x)\ln^2(x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\ln^2(1-x)\ln^2(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$\overset{\text{IBP}}{=}\frac23\int_0^1\frac{\ln^3(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

{this integral is given in (3.41)}

$$=8\zeta(5)-4\zeta(2)\zeta(3)$$

Second integral: Let $1-x=y$,

$$\int_0^{\frac12}\frac{\ln(x)\ln^2(1-x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x=\underbrace{\int_{\frac12}^1\frac{\ln(1-y)\ln^2(y)}{y}\,\mathrm{d}y}_{\text{IBP}}-\int_{\frac12}^1\frac{\ln(1-y)\ln^2(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac13\ln^4(2)+\frac13\underbrace{\int_{\frac12}^1\frac{\ln^3(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y}_{\int_0^1-\int_0^{1/2}}-\underbrace{\int_{\frac12}^1\frac{\ln(1-y)\ln^2(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y}_{\int_0^1-\int_0^{1/2}}$$

$$=\frac13\ln^4(2)+\frac13\int_0^1\frac{\ln^3(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y-\frac13\int_0^{\frac12}\frac{\ln^3(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y-\int_0^1\frac{\ln(1-y)\ln^2(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y$$
$$+\int_0^{\frac12}\frac{\ln(1-y)\ln^2(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y$$

{these integrals are given in (3.8), (3.19), (3.41), and (3.110)}

$$=2\operatorname{Li}_4\left(\frac12\right)-\frac94\zeta(4)+\frac74\ln(2)\zeta(3)-\frac12\ln^2(2)\zeta(2)+\frac1{12}\ln^4(2).$$

Third integral: Let $1-x=y$,

$$\int_0^{\frac12}\frac{\ln^2(1-x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x=\int_{\frac12}^1\frac{\ln^2(y)}{y}\,\mathrm{d}y+\underbrace{\int_{\frac12}^1\frac{\ln^2(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y}_{\int_0^1-\int_0^{1/2}}$$

$$=\frac13\ln^3(2)+\int_0^1\frac{\ln^2(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y-\int_0^{\frac12}\frac{\ln^2(y)}{1-y}\,\mathrm{d}y$$
{collect the results (3.8) and (3.19)}
$$=\frac14\zeta(3)$$

Plug the three integrals along with (4.114) in (4.119) to complete the solution. For a different method, check [22].

4.4.14 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_nH_n^{(2)}}{n^2 2^n}$

The following sum is proposed by Cornel Vălean [39]:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_nH_n^{(2)}}{n^22^n}=2\operatorname{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right)+\ln(2)\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{31}{32}\zeta(5)+\frac{1}{8}\ln(2)\zeta(4)$$
$$+\frac{1}{8}\zeta(2)\zeta(3)-\frac{1}{12}\ln^3(2)\zeta(2)+\frac{1}{40}\ln^5(2) \tag{4.120}$$

Solution. Divide both sides of (2.62):

$$-\int_0^1 x^{n-1}\ln^3(1-x)\mathrm{d}x=\frac{H_n^3+3H_nH_n^{(2)}+2H_n^{(3)}}{n}$$

by $n2^n$ then consider the summation over $n\geq 1$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^3}{n^22^n}+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_nH_n^{(2)}}{n^22^n}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n^22^n}\\
&=-\int_0^1\frac{\ln^3(1-x)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x/2)^n}{n}\right)\mathrm{d}x\\
&=-\int_0^1\frac{\ln^3(1-x)\ln(1-x/2)}{x}\,\mathrm{d}x\\
&\overset{1-x=y}{=}\int_0^1\frac{\ln^3(y)\ln\left(\frac{2}{1+y}\right)}{1-y}\,\mathrm{d}y\\
&\{\text{ set } q=4 \text{ in (3.47) to get this integral }\}\\
&=12\zeta(5)-\frac{21}{4}\ln(2)\zeta(4)-\frac{9}{4}\zeta(2)\zeta(3)
\end{aligned} \tag{4.121}$$

Next, divide both sides of (2.22):

$$-\frac{\ln^3(1-x)}{1-x}=\sum_{n=1}^{\infty}x^n\left(H_n^3-3H_nH_n^{(2)}+2H_n^{(3)}\right)$$

by $x$, then integrate using $\int_0^{\frac{1}{2}}x^{n-1}\ \mathrm{d}x=\frac{1}{n2^n}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^3-3H_nH_n^{(2)}+2H_n^{(3)}}{n2^n}=-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln^3(1-x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x \tag{4.122}$$

On the other hand, multiply both sides of (2.22) by $-\frac{\ln(x)}{x}$ then integrate,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln^3(1-x)\ln(x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^3-3H_nH_n^{(2)}+2H_n^{(3)}\right)\left(-\int_0^{\frac{1}{2}}x^{n-1}\ln(x)\mathrm{d}x\right)\\
&\overset{\text{IBP}}{=}\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^3-3H_nH_n^{(2)}+2H_n^{(3)}\right)\left(\frac{\ln(2)}{n2^n}+\frac{1}{n^22^n}\right).
\end{aligned}$$

Distribute then rearrange the terms,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^3}{n^2 2^n}-3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_nH_n^{(2)}}{n^2 2^n}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n^2 2^n}$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln^3(1-x)\ln(x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x-\ln(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^3-3H_nH_n^{(2)}+2H_n^{(3)}}{n2^n}$$

$$\left\{\text{the latter sum is equal to }-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln^3(1-x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x\text{ given in (4.122)}\right\}$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln^3(1-x)\ln(x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x+\ln(2)\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln^3(1-x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x$$

$$\underline{1-x\to x}\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\ln^3(x)\ln(1-x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x+\ln(2)\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\ln^3(x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x$$

First integral:

$$\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\ln^3(x)\ln(1-x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x$$

$$=\underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\ln^3(x)\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x}_{\text{IBP}}-\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\ln^3(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}\ln^5(2)+\frac{1}{4}\underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\ln^4(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x}_{\int_0^1-\int_0^{1/2}}-\underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\ln^3(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x}_{\int_0^1-\int_0^{1/2}}$$

$$=\frac{1}{4}\ln^5(2)+\frac{1}{4}\int_0^1\frac{\ln^4(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln^4(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$$
$$-\int_0^1\frac{\ln^3(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln^3(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

{these integrals are given in (3.8), (3.19), (3.41), and (3.119)}

$$=-12\operatorname{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right)-12\ln(2)\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{285}{16}\zeta(5)-3\zeta(2)\zeta(3)$$
$$-\frac{21}{4}\ln^2(2)\zeta(3)+2\ln^3(2)\zeta(2)-\frac{2}{5}\ln^5(2)$$

Second integral:

$$\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\ln^3(x)}{x(1-x)}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\ln^3(x)}{x}\,\mathrm{d}x+\underbrace{\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\ln^3(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x}_{\int_0^1-\int_0^{1/2}}$$

$$=-\frac{1}{4}\ln^4(2)+\int_0^1\frac{\ln^3(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln^3(x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

{ collect the results (3.8) and (3.19)}

$$=6\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)-6\zeta(4)+\frac{21}{4}\ln(2)\zeta(3)-\frac{3}{2}\ln^2(2)\zeta(2)+\frac{1}{4}\ln^4(2)$$

Combine the results of the two integrals,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^3}{n^2 2^n}-3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_nH_n^{(2)}}{n^2 2^n}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n^2 2^n}=-12\operatorname{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right)-6\ln(2)\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$+\frac{285}{16}\zeta(5)-6\ln(2)\zeta(4)-3\zeta(2)\zeta(3)+\frac{1}{2}\ln^3(2)\zeta(2)-\frac{3}{20}\ln^5(2) \qquad (4.123)$$

Take the difference of (4.121) and (4.123) to finishes the solution.

4.4.15 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^3}{n^2 2^n}$

The following sum is proposed by Cornel Vălean [39]:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^3}{n^2 2^n}=-14\operatorname{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right)-9\ln(2)\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{279}{16}\zeta(5)-\frac{25}{4}\ln(2)\zeta(4)$$
$$-\frac{7}{8}\zeta(2)\zeta(3)-\frac{7}{4}\ln^2(2)\zeta(3)+\frac{13}{12}\ln^3(2)\zeta(2)-\frac{31}{120}\ln^5(2) \qquad (4.124)$$

Solution. Combining (4.121) and (4.123) yields

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^3}{n^2 2^n}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n^2 2^n}=-12\operatorname{Li}_5\left(\frac{1}{2}\right)-6\ln(2)\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{477}{16}\zeta(5)$$
$$-\frac{45}{4}\ln(2)\zeta(4)-\frac{21}{4}\zeta(2)\zeta(3)+\frac{1}{2}\ln^3(2)\zeta(2)-\frac{3}{20}\ln^5(2)$$

The sum on the LHS is calculated in (4.117).

### 6.7.5 4.5 Harmonic Series with Powers of 2n + 1 in the Denominator

4.5.1 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nH_{2n+1}}{2n+1}$

Show that

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nH_{2n+1}}{2n+1}=G-\frac{\pi}{8}\ln(2) \qquad (4.125)$$

Solution (i). Set $a_n=\frac{H_n}{n}$ in (1.13), we have

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nH_{2n+1}}{2n+1}=\Im\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^nH_n}{n}$$
$$\{\text{ let } x=i \text{ in the generating function (2.6) }\}$$
$$=\Im\left\{\operatorname{Li}_2(i)+\frac{1}{2}\ln^2(1-i)\right\}$$

Gather the values (1.72) and (1.29) to finish the solution.

**Solution (ii).**

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{2n+1}}{2n+1} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(-\int_0^1 x^{2n} \ln(1-x) \mathrm{d}x\right) \\
&= -\int_0^1 \ln(1-x) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(-x^2\right)^n\right) \mathrm{d}x \\
&= -\int_0^1 \ln(1-x) \left(\frac{1}{1+x^2}\right) \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

This integral is calculated in (3.97).

**4.5.2** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{2n+1}}{(2n+1)^2}$

Show that

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{2n+1}}{(2n+1)^2} = \Im \operatorname{Li}_3(1+i) - \frac{\pi}{16} \ln^2(2) - \frac{1}{2} \ln(2) G \tag{4.126}$$

Solution. Let $a_n = \frac{H_n}{n^2}$ in (1.13),

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{2n+1}}{(2n+1)^2} = \Im \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n H_n}{n^2}$$

$\{$set $x = i$ in the generating function (2.8)$\}$

$$= \Im \left\{ \operatorname{Li}_3(i) - \operatorname{Li}_3(1-i) + \ln(1-i) \operatorname{Li}_2(1-i) + \frac{1}{2} \ln(i) \ln^2(1-i) + \zeta(3) \right\}.$$

Gather the values (1.73), (4.82), (1.30), and (1.29) to finish the solution.

4.5.3 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n^{(2)}}{2n+1}$

Show that

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n^{(2)}}{2n+1} = 4 \Im \operatorname{Li}_3(1-i) + \frac{5\pi^3}{48} + \frac{\pi}{4} \ln^2(2) + 2 \ln(2) G \tag{4.127}$$

**Solution.**

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n^{(2)}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n H_n^{(2)}\int_0^1 x^{2n}\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}H_n^{(2)}\left(-x^2\right)^n\right)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1\frac{\operatorname{Li}_2\left(-x^2\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$\overset{\text{IBP}}{=}-\frac{\pi^3}{48}+2\int_0^1\frac{\arctan(x)\ln\left(1+x^2\right)}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$\{\text{ employ the generating function (2.45)}\}$$
$$=-\frac{\pi^3}{48}-4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n H_{2n}}{2n+1}\int_0^1 x^{2n}\,\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{\pi^3}{48}-4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n H_{2n}}{(2n+1)^2}$$
$$=-\frac{\pi^3}{48}-4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n H_{2n+1}}{(2n+1)^2}+4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

These two sums are given in (4.126) and (1.66) respectively.

4.5.4 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n H_{2n+1}^{(2)}}{2n+1}$

Show that

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n H_{2n+1}^{(2)}}{2n+1}=2\Im\operatorname{Li}_3(1-i)+\frac{17\pi^3}{192}+\frac{\pi}{8}\ln^2(2)+\frac{1}{2}\ln(2)G \tag{4.128}$$

Solution. Set $a_n=\frac{H_n^{(2)}}{n}$ in (1.13),

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n H_{2n+1}^{(2)}}{2n+1}=\Im\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n H_n^{(2)}}{n}$$
$$\{\text{ employ the generating function (2.10)}\}$$
$$=\Im\left\{\operatorname{Li}_3(i)+2\operatorname{Li}_3(1-i)-\ln(1-i)\operatorname{Li}_2(1-i)-\zeta(2)\ln(1-i)-2\zeta(3)\right\}.$$

These terms are given in (1.73), (4.82), and (1.29).

### 4.5.5 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{(2n+1)^2}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{(2n+1)^2}=\frac{7}{4}\zeta(3)-\frac{3}{2}\ln(2)\zeta(2) \tag{4.129}$$

Solution. Set $q=2$ in (4.31), we obtain

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{(2n+1)^2}=\int_0^1\frac{\ln(x)\ln\left(1-x^2\right)}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

This integral is calculated in (3.102).
A different way to calculate this sum may be found in (3.45).
4.5.6 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n}{(2n+1)^2}$
Show that

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n}{(2n+1)^2} = 2\Im \operatorname{Li}_3(1-i) + \frac{3\pi^3}{32} + \frac{\pi}{8}\ln^2(2) - \ln(2)G \tag{4.130}$$

Solution. Write $H_{2n} = H_{2n+1} - \frac{1}{2n+1}$ in (3.1),

$$\ln(2) + H_n - H_{2n+1} + \frac{1}{2n+1} = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

Multiply both sides by $\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ then take the summation over $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\ln(2)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n}{(2n+1)^2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{2n+1}}{(2n+1)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \\
= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)^2}\right)\mathrm{d}x \\
= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\left(\int_0^1 -\frac{\ln(y)}{1+x^2y^2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
\overset{xy=t}{=} \int_0^1 \int_0^x \frac{\ln\left(\frac{x}{t}\right)}{x(1+x)\left(1+t^2\right)}\mathrm{d}t\ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

{change the order of integration}

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\left(\int_t^1 \frac{\ln\left(\frac{x}{t}\right)}{x(1+x)}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\left(\operatorname{Li}_2(-t) + \frac{1}{2}\ln^2(t) + \ln(2)\ln(t) + \frac{\pi^2}{12}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_2(-t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \ln(2)\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{\pi^2}{12}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\
&\left\{ \text{expand } \frac{1}{1+t^2} \text{ in series in the second and third integrals} \right\} \\
&= \int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_2(-t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^1 t^{2n}\ln^2(t)\mathrm{d}t \\
&\quad + \ln(2)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^1 t^{2n}\ln(t)\mathrm{d}t + \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_2(-t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} - \ln(2)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} + \frac{\pi^3}{48}
\end{aligned}$$

Reorganize the terms,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n}{(2n+1)^2} =& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{2n+1}}{(2n+1)^2} - 2\ln(2)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \\
&+ \int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_2(-t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{\pi^3}{48}
\end{aligned} \tag{4.131}$$

Put together the results (4.126), (1.162), and (3.126) to end the solution.

4.5.7 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{2n+1}}{(2n+1)^3}$

Show that

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{2n+1}}{(2n+1)^3} = 2\beta(4) - \frac{35\pi}{128}\zeta(3) \tag{4.132}$$

Solution. Using the series expansion of $\frac{\arctan(x)}{1+x^2}$ given in (2.43), we get

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x\ln^2(x)\arctan(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x\ln^2(x)\left(\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(H_n - 2H_{2n}\right)x^{2n-1}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(H_n - 2H_{2n}\right)\int_0^1 x^{2n}\ln^2(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(H_n - 2H_{2n}\right)\left(\frac{2}{(2n+1)^3}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{(2n+1)^3} - 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n H_{2n}}{(2n+1)^3} \\
&\left\{\text{use } H_{2n} = H_{2n+1} - \frac{1}{2n+1} \text{ in the last series}\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{(2n+1)^3} - 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n H_{2n+1}}{(2n+1)^3} + 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^4}.
\end{aligned}$$

Rearrange the terms,

$$\begin{aligned}
2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n H_{2n+1}}{(2n+1)^3} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{(2n+1)^3} + 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^4} \\
&\quad - \int_0^1 \frac{x\ln^2(x)\arctan(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&\left\{\text{write } 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^4} = \int_0^1 \frac{\ln^2(x)\arctan(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right\}
\end{aligned}$$

{which follows from expanding $\arctan(x)$ in series then integrating}

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{(2n+1)^3} + \int_0^1 \frac{\ln^2(x)\arctan(x)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x\ln^2(x)\arctan(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{(2n+1)^3} + \int_0^1 \frac{\ln^2(x)\arctan(x)}{x\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Collect the results (4.37) and (3.118) to finish the solution.

For a different method, check the generalization (4.36).

4.5.8 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{2n+1}^{(2)}}{(2n+1)^2}$

Show that

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{2n+1}^{(2)}}{(2n+1)^2} = -\beta(4) + \frac{35\pi}{64}\zeta(3) - \frac{\pi^2}{48}G \tag{4.133}$$

Solution. Set $x = i$ in (2.69) then take the imaginary parts of both sides,

$$\Im \mathfrak{Li}_2^2(i) = 4\Im \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^3} x^i + 2\Im \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^2} x^i - 6\Im \operatorname{Li}_4(i),$$

use $\Im \sum_{n=1}^{\infty} i^n a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n+1}$ given in (1.13),

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{2n+1}^{(2)}}{(2n+1)^2} = 3\Im \operatorname{Li}_4(i) + \frac{1}{2}\Im \operatorname{Li}_2^2(i) - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{2n+1}}{(2n+1)^3}$$

Using the value (1.72), we have

$$\operatorname{Li}_2^2(i) = \frac{5}{128}\zeta(4) - G^2 - \left(\frac{\pi^2}{24} G\right) i.$$

Collect this result along with (1.74) and (4.132), the solution is finished.

4.5.9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{(2n+1)^2}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{(2n+1)^2} = 8\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{121}{16}\zeta(4) + 7\ln(2)\zeta(3) - 2\ln^2(2)\zeta(2) + \frac{1}{3}\ln^4(2) \tag{4.134}$$

Solution (i).

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{(2n+1)^2} &= -\sum_{n=1}^{\infty} H_n^{(2)} \int_0^1 x^{2n} \ln(x) \mathrm{d}x \\
&= -\int_0^1 \ln(x) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^2\right)^n H_n^{(2)}\right) \mathrm{d}x \\
&= -\int_0^1 \frac{\ln(x) \operatorname{Li}_2\left(x^2\right)}{1-x^2} \mathrm{d}x \\
&\left\{ \text{ write } \operatorname{Li}_2\left(x^2\right) = 2\operatorname{Li}_2(x) + 2\operatorname{Li}_2(-x) \text{ given in (1.78)} \right\} \\
&= -2\int_0^1 \frac{\ln(x) \operatorname{Li}_2(x)}{1-x^2} \mathrm{d}x - 2\int_0^1 \frac{\ln(x) \operatorname{Li}_2(-x)}{1-x^2} \mathrm{d}x \\
&= -\int_0^1 \frac{\ln(x) \operatorname{Li}_2(x)}{1-x} \mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\ln(x) \operatorname{Li}_2(x)}{1+x} \mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\ln(x) \operatorname{Li}_2(-x)}{1-x} \mathrm{d}x \\
&\quad - \int_0^1 \frac{\ln(x) \operatorname{Li}_2(-x)}{1+x} \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

First integral: Expand $\frac{\operatorname{Li}_2(x)}{1-x}$ using (2.3),

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln(x) \operatorname{Li}_2(x)}{1-x} \mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty} H_{n-1}^{(2)} \int_0^1 x^{n-1} \ln(x) \mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(H_n^{(2)} - \frac{1}{n^2}\right)\left(-\frac{1}{n^2}\right) \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^{(2)}}{n^2} + \zeta(4)
\end{aligned}$$

Second integral: Expand $\frac{1}{1+x}$ in series,

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln(x)\operatorname{Li}_2(x)}{1+x}\, \mathrm{d}x &= -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \int_0^1 x^{n-1}\ln(x)\operatorname{Li}_2(x)\mathrm{d}x \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{H_n^{(2)}}{n^2} + \frac{2H_n}{n^3} - \frac{2\zeta(2)}{n^2}\right) \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n^{(2)}}{n^2} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{n^3} - \frac{5}{2}\zeta(4)
\end{aligned}
$$

Third integral: Expand $\operatorname{Li}_2(-x)$ in series,

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln(x)\operatorname{Li}_2(-x)}{1-x}\, \mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\int_0^1 \frac{x^n\ln(x)}{1-x}\, \mathrm{d}x \\
&\{\text{ set } a = 2 \text{ in (1.126) to get the integral }\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\left(H_n^{(2)} - \zeta(2)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n^{(2)}}{n^2} + \frac{5}{4}\zeta(4)
\end{aligned}
$$

Fourth integral: Expand $\frac{\operatorname{Li}_2(-x)}{1+x}$ using (2.3),

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln(x)\operatorname{Li}_2(-x)}{1+x}\, \mathrm{d}x &= -\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^n H_{n-1}^{(2)}\int_0^1 x^{n-1}\ln(x)\mathrm{d}x \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(H_n^{(2)} - \frac{1}{n^2}\right)\left(-\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n^{(2)}}{n^2} + \frac{7}{8}\zeta(4).
\end{aligned}
$$

Gathering the four integrals,

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{(2n+1)^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{n^3} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n^{(2)}}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^2} - \frac{5}{8}\zeta(4).
$$

These sums are found in (4.86), (4.87), and (4.41) respectively.

Solution (ii). Set $p = q = 2$ in the third application of Abel's summation (2.79),

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{(2n+1)^2} = \frac{5}{8}\zeta(4) - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^2} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n^{(2)}}{n^2}
$$

and these two sums are found in (4.87) and (4.41).

4.5.10 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{(2n+1)^2}$

Show that

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2}{(2n+1)^2} = 8\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{61}{16}\zeta(4) + \ln^2(2)\zeta(2) + \frac{1}{3}\ln^4(2). \tag{4.135}
$$

Solution. Write $\frac{1}{(2n+1)^2} = -\int_0^1 x^{2n}\ln(x)\mathrm{d}x$ to have

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^2-H_n^{(2)}}{(2n+1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^2-H_n^{(2)}\right)\left(-\int_0^1 x^{2n}\ln(x)\mathrm{d}x\right)$$
$$=-\int_0^1\ln(x)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n^2-H_n^{(2)}\right)x^{2n}\right)\mathrm{d}x$$
$$\left\{\text{ replace } x \text{ with } x^2 \text{ in } (2.11)\right\}$$
$$=-\int_0^1\ln(x)\left(\frac{\ln^2\left(1-x^2\right)}{1-x^2}\right)\mathrm{d}x$$
$$\overset{\sqrt{x}=y}{=}-\frac{1}{4}\int_0^1\frac{\ln(y)\ln^2(1-y)}{\sqrt{y}(1-y)}\mathrm{d}y.$$

Collect the results (4.134) and (3.117) to complete the solution.

4.5.11 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{(2n+1)^3}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{(2n+1)^3}=\frac{49}{8}\zeta(2)\zeta(3)-\frac{93}{8}\zeta(5) \tag{4.136}$$

Solution. Set $q=2$ and $p=3$ in (2.79),

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{(2n+1)^3}=\frac{7}{8}\zeta(2)\zeta(3)-\frac{15}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n^2}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_n^{(3)}}{n^2}$$

These two sums are given in (4.47) and (4.99).

4.5.12 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{(2n+1)^2}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{(2n+1)^2}=\frac{31}{2}\zeta(5)-8\zeta(2)\zeta(3) \tag{4.137}$$

Solution. Set $q=3$ and $p=2$ in (2.79),

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{(2n+1)^2}=\frac{3}{4}\zeta(2)\zeta(3)-\frac{15}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^3}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_n^{(2)}}{n^3}$$

These two sums are given in (4.44) and (4.94).

4.5.13 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{(2n+1)^3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_n^{(3)}}{n^3}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{(2n+1)^3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_n^{(3)}}{n^3}=-\frac{17}{16}\zeta^2(3)-\frac{31}{16}\zeta(6) \tag{4.138}$$

Solution. Set $q=p=3$ in (2.79),

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{(2n+1)^3}=\frac{7}{8}\zeta^2(3)-\frac{31}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n^3}-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_n^{(3)}}{n^3}$$

The first sum on the RHS is given in (2.77).

## 4.6 Skew Harmonic Series

4.6.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \bar{H}_n}{n}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \bar{H}_n}{n} = -\frac{1}{2}\zeta(2) - \frac{1}{2}\ln^2(2) \tag{4.139}$$

Solution. Set $q = 1$ in (4.17),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \bar{H}_n}{n} = \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x(1+x)} \mathrm{d}x$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} \,\mathrm{d}x}_{1-x=y} - \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{1+x} \,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln(y)}{1-y} \,\mathrm{d}y - \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{1+x} \,\mathrm{d}x$$

Put together the results (3.8) and (3.17) to complete the solution.

For an alternative solution, set $x = -1$ in the generating function (2.30).

4.6.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \bar{H}_n H_n}{n}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \bar{H}_n H_n}{n} = \frac{1}{3}\ln^3(2) - \ln(2)\zeta(2) - \frac{1}{4}\zeta(3) \tag{4.140}$$

Solution (i). Using the integral form of $\bar{H}_n$ given in (1.140), we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \bar{H}_n H_n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n}{n} \left( \ln(2) - \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} \,\mathrm{d}x \right)$$

$$= \ln(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n}{n} - \int_0^1 \frac{1}{1+x} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n} x^n \right) \mathrm{d}x$$

$$\{ \text{ recall the generating function (2.6)} \}$$

$$= \ln(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n}{n} - \int_0^1 \frac{1}{1+x} \left( \frac{1}{2}\ln^2(1-x) + \mathrm{Li}_2(x) \right) \mathrm{d}x$$

$$= \ln(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n}{n} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{1+x} \,\mathrm{d}x - \underbrace{\int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_2(x)}{1+x} \mathrm{d}x}_{\text{IBP}}$$

$$= \ln(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n}{n} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{1+x} \,\mathrm{d}x$$

$$- \ln(2)\zeta(2) - \int_0^1 \frac{\ln(1+x)\ln(1-x)}{x} \,\mathrm{d}x$$

The solution finalizes on combining the results (4.77), (3.17), and (3.98).

Solution (ii).

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \bar{H}_n H_n}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \bar{H}_n \left(\frac{H_n}{n}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \bar{H}_n \left(-\int_0^1 x^{n-1} \ln(1-x) \mathrm{d}x\right) \\
&= -\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \bar{H}_n (-x)^n\right) \mathrm{d}x \\
&\qquad \{\text{ replace } x \text{ with } -x \text{ in } (2.29)\} \\
&= -\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} \left(\frac{\ln(1-x)}{1+x}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{1+x} \, \mathrm{d}x - \underbrace{\int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{x} \, \mathrm{d}x}_{1-x=y} \\
&= \int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{1+x} \, \mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\ln^2(y)}{1-y} \, \mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

These two integrals are calculated in (3.17) and (3.8).

### 4.6.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{H}_n H_n}{n^2}$

Show that

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{H}_n H_n}{n^2} = -3 \operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{43}{16}\zeta(4) + \frac{3}{4} \ln^2(2)\zeta(2) - \frac{1}{8} \ln^4(2) \tag{4.141}
$$

The following solution is due to Sean Stewart [24]:

**Solution.**

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{H}_n H_n}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^2} \left(\ln(2) - \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x} \, \mathrm{d}x\right) \\
&= \ln(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^2} - \int_0^1 \frac{1}{1+x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^2} (-x)^n\right) \mathrm{d}x \\
&\qquad \{\text{ recall the generating function } (2.8)\} \\
&= \ln(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n^2} - \int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_3(-x)}{1+x} \, \mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_3(1+x)}{1+x} \, \mathrm{d}x \\
&- \int_0^1 \frac{\ln(1+x) \operatorname{Li}_2(1+x)}{1+x} \, \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\ln(-x) \ln^2(1+x)}{1+x} \, \mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\zeta(3)}{1+x} \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

First integral: Integrate by parts,

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_3(-x)}{1+x} \, \mathrm{d}x &= \ln(1+x) \operatorname{Li}_3(-x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\ln(1+x) \operatorname{Li}_2(-x)}{x} \, \mathrm{d}x \\
&= -\frac{3}{4} \ln(2)\zeta(3) + \frac{1}{2} \operatorname{Li}_2^2(-x)\Big|_0^1 \\
&= -\frac{3}{4} \ln(2)\zeta(3) + \frac{5}{16}\zeta(4)
\end{aligned}
$$

Second integral:

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_3(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{Li}_4(1+x)\big|_0^1 = \operatorname{Li}_4(2) - \zeta(4)$$

Third integral: Integrate by parts,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{\ln(1+x)\operatorname{Li}_2(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \operatorname{Li}_3(1+x)\ln(1+x)\big|_0^1 - \int \frac{\operatorname{Li}_3(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= \ln(2)\operatorname{Li}_3(2) - \operatorname{Li}_4(1+x)\big|_0^1 \\
&= \ln(2)\operatorname{Li}_3(2) - \operatorname{Li}_4(2) + \zeta(4)
\end{aligned}$$

Fourth integral: Integrate by parts twice,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{\ln(-x)\ln^2(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\operatorname{Li}_2(1+x)\ln^2(1+x)\big|_0^1 + 2\int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_2(1+x)\ln(1+x)}{1+x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\ln^2(2)\operatorname{Li}_2(2) + 2\ln(2)\operatorname{Li}_3(2) - 2\operatorname{Li}_4(2) + 2\zeta(4)
\end{aligned}$$

Fifth integral:

$$\int_0^1 \frac{\zeta(3)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \zeta(3)\ln(1+x)\big|_0^1 = \ln(2)\zeta(3)$$

Group all five integrals along with the result (4.4), we have
$\sum_{n=1}^\infty \frac{\bar{H}_n H_n}{n^2} = \frac{7}{4}\ln(2)\zeta(3) - \frac{53}{16}\zeta(4) + 3\mathrm{Li}_4(2) - 2\ln(2)\mathrm{Li}_3(2) + \frac{1}{2}\ln^2(2)\mathrm{Li}_2(2)$.
The values of $\mathrm{Li}_4(2), \mathrm{Li}_3(2)$, and $\mathrm{Li}_2(2)$ are given in (1.114), (1.113), and (1.112).

4.6.4 $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n \bar{H}_n H_n}{n^2}$

Show that

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n \bar{H}_n H_n}{n^2} = 3\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{29}{16}\zeta(4) - \frac{3}{4}\ln^2(2)\zeta(2) + \frac{1}{8}\ln^4(2) \tag{4.142}$$

**Solution.**

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n \bar{H}_n H_n}{n^2} &= \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n H_n}{n^2}\left(\ln(2) - \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \ln(2)\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n H_n}{n^2} - \int_0^1 \frac{1}{1+x}\left(\sum_{n=1}^\infty \frac{H_n}{n^2}x^n\right)\mathrm{d}x \\
&= \ln(2)\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n H_n}{n^2} - \int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_3(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_3(1-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$- \int_0^1 \frac{\ln(1-x)\operatorname{Li}_2(1-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln^2(1-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\zeta(3)}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

First integral: Expand $\frac{1}{1+x}$ in series,

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_3(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \int_0^1 x^{n-1}\operatorname{Li}_3(x)\mathrm{d}x$$

$$\{\text{recall the result (3.67)}\}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\zeta(3)}{n} - \frac{\zeta(2)}{n^2} + \frac{H_n}{n^3}\right)$$

$$= \ln(2)\zeta(3) - \frac{5}{4}\zeta(4) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{n^3}$$

Second integral: Let $1-x=y$,

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_3(1-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\operatorname{Li}_3(y)}{2-y}\,\mathrm{d}y$$

$$\left\{\text{expand } \frac{1}{2-y} \text{ in series as } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^{n-1}}{2^n}\right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\int_0^1 y^{n-1}\operatorname{Li}_3(y)\mathrm{d}y$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{\zeta(3)}{n} - \frac{\zeta(2)}{n^2} + \frac{H_n}{n^3}\right)$$

$$= \ln(2)\zeta(3) - \zeta(2)\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{2^n n^3}$$

Third integral: Let $1-x=y$,

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\operatorname{Li}_2(1-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\ln(y)\operatorname{Li}_2(y)}{2-y}\,\mathrm{d}y$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\int_0^1 y^{n-1}\ln(y)\operatorname{Li}_2(y)\mathrm{d}y$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\int_0^1 \frac{\partial}{\partial n}y^{n-1}\operatorname{Li}_2(y)\mathrm{d}y$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{d}{dn}\int_0^1 y^{n-1}\operatorname{Li}_2(y)\mathrm{d}y$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{d}{dn}\left(\frac{\zeta(2)}{n} - \frac{H_n}{n^2}\right)$$

{use the derivative of the harmonic number given in (1.132)}

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{2H_n}{n^3} + \frac{H_n^{(2)}}{n^2} - \frac{2\zeta(2)}{n^2}\right)$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{2^n n^3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{2^n n^2} - 2\zeta(2)\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right). \tag{4.143}$$

Fourth integral: Let $1-x=y$,

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\ln(x)\ln^2(1-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{\ln(1-y)\ln^2(y)}{2-y}\,\mathrm{d}y \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\int_0^1 y^{n-1}\ln(1-y)\ln^2(y)\mathrm{d}y \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\frac{d^2}{dn^2}\int_0^1 y^{n-1}\ln(1-y)\mathrm{d}y \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\frac{d^2}{dn^2}\left(-\frac{H_n}{n}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{2\zeta(3)}{n}+\frac{2\zeta(2)}{n^2}-\frac{2H_n}{n^3}-\frac{2H_n^{(2)}}{n^2}-\frac{2H_n^{(3)}}{n}\right) \\
&= 2\ln(2)\zeta(3)+2\zeta(2)\operatorname{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) \\
&\quad -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{2^n n^3}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{2^n n^2}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{2^n n}
\end{aligned} \tag{4.144}
$$

Combine all integrals then rearrange the terms,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\bar{H}_n H_n}{n^2} &= \frac{5}{4}\zeta(4)-2\ln(2)\zeta(3) \\
&+\ln(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{n^3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{2^n n}.
\end{aligned}
$$

These three sums are calculated in (4.83), (4.86), and (4.111) respectively.

4.6.5 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{H}_{2n}H_{2n}}{n^2}$

Show that

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{H}_{2n}H_{2n}}{n^2}=\frac{7}{4}\zeta(4). \tag{4.145}
$$

Solution. Put $a_n=\frac{\bar{H}_n H_n}{n^2}$ in (1.5):

$$
\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n,
$$

we have

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{H}_{2n}H_{2n}}{(2n)^2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{H}_n H_n}{n^2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\bar{H}_n H_n}{n^2}.
$$

These two sums are given in (4.141) and (4.142).

### 6.7.6 4.7 Harmonic Series with Rational Argument

4.7.1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_{\frac{n}{2}}}{n}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{\frac{n}{2}}}{n} = \ln^2(2) - \frac{1}{2}\zeta(2). \tag{4.146}$$

Solution (i). Replace $n$ with $\frac{n}{2}$ in (3.2),

$$\int_0^1 x^{n-1} \ln(1+x) \mathrm{d}x = \frac{H_n - H_{\frac{n}{2}}}{n} \tag{4.147}$$

Making use of this integral, we obtain

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{H_n - H_{\frac{n}{2}}}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \int_0^1 x^{n-1} \ln(1+x) \mathrm{d}x \right) \\
&= \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} \left( \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^n \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} \left( \frac{-x}{1+x} \right) \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2} \ln^2(2).
\end{aligned}$$

The first sum of the LHS is given in (4.77).
Solution (ii). Let $y = x^2$ in the integral (1.124), we get

$$\frac{H_n}{n} = -\int_0^1 y^{n-1} \ln(1-y) \mathrm{d}y = -2 \int_0^1 x^{2n-1} \ln\left(1-x^2\right) \mathrm{d}x.$$

Replace $n$ with $\frac{n}{2}$,

$$\frac{H_{\frac{n}{2}}}{n} = -\int_0^1 x^{n-1} \ln\left(1-x^2\right) \mathrm{d}x. \tag{4.148}$$

Utilizing this integral, we get

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_{\frac{n}{2}}}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( -\int_0^1 x^{n-1} \ln\left(1-x^2\right) \mathrm{d}x \right) \\
&= -\int_0^1 \frac{\ln\left(1-x^2\right)}{x} \left( \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^n \right) \mathrm{d}x \\
&= -\int_0^1 \frac{\ln\left(1-x^2\right)}{x} \left( \frac{-x}{1+x} \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x} \mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{1+x} \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

The first integral is $\frac{1}{2}\ln^2(2)$ and the second is given in (3.17).
For a different approach, set $x = -1$ in the generating function (2.35).

4.7.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{\frac{n}{2}}}{n^2}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{\frac{n}{2}}}{n^2} = \frac{11}{8}\zeta(3). \tag{4.149}$$

Solution. Employing the integral (4.148), we obtain

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{\frac{n}{2}}}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(-\int_0^1 x^{n-1}\ln\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x\right)\\
&= -\int_0^1 \frac{\ln\left(1-x^2\right)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 \frac{\ln\left(1-x^2\right)\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\ln(1+x)\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

These two integrals are given in (3.8) and (3.98).
For a different approach, see (4.18).

4.7.3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_{\frac{n}{2}}}{n^2}$

Show that

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_{\frac{n}{2}}}{n^2} = -\frac{3}{8}\zeta(3). \tag{4.150}
$$

Solution. Applying the previous solution,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_{\frac{n}{2}}}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(-\int_0^1 x^{n-1}\ln\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x\right)\\
&= -\int_0^1 \frac{\ln\left(1-x^2\right)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n}\right)\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 \frac{\ln\left(1-x^2\right)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 \frac{\ln^2(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\ln(1+x)\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

These two integrals are given in (3.20) and (3.98).
Check (4.19) for a different method.

4.7.4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{\frac{n}{2}}}{n^3}$

Show that

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{\frac{n}{2}}}{n^3} = -2\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{11}{4}\zeta(4) - \frac{7}{4}\ln(2)\zeta(3) + \frac{1}{2}\ln^2(2)\zeta(2) - \frac{1}{12}\ln^4(2) \tag{4.151}
$$

**Solution.**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n-H_{\frac{n}{2}}}{n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{H_n-H_{\frac{n}{2}}}{n}\right)$$

$$\{\text{ recall the integral (4.147)}\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\int_0^1 x^{n-1}\ln(1+x)\mathrm{d}x\right)$$

$$=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\frac{\ln(1+x)\operatorname{Li}_2(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\int_0^1 x^{n-1}\operatorname{Li}_2(x)\mathrm{d}x$$

$$\{\text{ recall the result (3.66)}\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{\zeta(2)}{n}-\frac{H_n}{n^2}\right)$$

$$=\zeta(2)\eta(2)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_n}{n^3} \tag{4.152}$$

Since $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^3}=\frac{5}{4}\zeta(4)$ given in (4.4) and $\zeta(2)\eta(2)=\frac{5}{4}\zeta(4)$, we have

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_{\frac{n}{2}}}{n^3}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_n}{n^3}$$

This sum is calculated in (4.86).

4.7.5 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_{\frac{n}{2}}}{n^3}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_{\frac{n}{2}}}{n^3}=2\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{27}{8}\zeta(4)+\frac{7}{4}\ln(2)\zeta(3)-\frac{1}{2}\ln^2(2)\zeta(2)+\frac{1}{12}\ln^4(2) \tag{4.153}$$

Solution. Applying the previous solution,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{H_n-H_{\frac{n}{2}}}{n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\left(\frac{H_n-H_{\frac{n}{2}}}{n}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\left(\int_0^1 x^{n-1}\ln(1+x)\mathrm{d}x\right)$$

$$=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\int_0^1\frac{\ln(1+x)\operatorname{Li}_2(-x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{Li}_2^2(-1)=\frac{5}{8}\zeta(4)$$

The first sum on the LHS is given in (4.86).

4.7.6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n H_{\frac{n}{2}}}{n^2}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n H_{\frac{n}{2}}}{n^2} = -3 \operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{97}{16}\zeta(4) - \frac{21}{8}\ln(2)\zeta(3) + \frac{3}{4}\ln^2(2)\zeta(2) - \frac{1}{8}\ln^4(2) \tag{4.154}$$

**Solution.**

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n^2 - H_n H_{\frac{n}{2}}}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n}\left(\frac{H_n - H_{\frac{n}{2}}}{n}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n}\left(\int_0^1 x^{n-1}\ln(1+x)\mathrm{d}x\right) \\
&= \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n}{n}x^n\right)\mathrm{d}x \\
&\quad \{\text{ recall the generating function (2.6)}\} \\
&= \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\left(\frac{1}{2}\ln^2(1-x) + \operatorname{Li}_2(x)\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln(1+x)\ln^2(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{\ln(1+x)\operatorname{Li}_2(x)}{x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

{the second integral is simplified in (4.152)}

$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln(1+x)\ln^2(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x + \frac{5}{4}\zeta(4) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n}{n^3}$.

The solution finalizes on collecting the results (4.42), (4.86), and (3.116).

4.7.7 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n H_{\frac{n}{2}}}{n^2}$

Show that

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n H_{\frac{n}{2}}}{n^2} &= 5 \operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{21}{4}\zeta(4) + \frac{35}{8}\ln(2)\zeta(3) - \frac{5}{4}\ln^2(2)\zeta(2) \\
&\quad + \frac{5}{24}\ln^4(2)
\end{aligned} \tag{4.155}$$

Solution.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{H_n^2-H_nH_{\frac{n}{2}}}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{H_n}{n}\left(\frac{H_n-H_{\frac{n}{2}}}{n}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{H_n}{n}\left(\int_0^1 x^{n-1}\ln(1+x)\mathrm{d}x\right)\\
&= \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n}(-x)^n\right)\mathrm{d}x\\
&\qquad \{\text{replace } x \text{ with } -x \text{ in } (2.6)\}\\
&= \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\left(\frac{1}{2}\ln^2(1+x)+\operatorname{Li}_2(-x)\right)\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1\frac{\ln^3(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{\ln(1+x)\operatorname{Li}_2(-x)}{x}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1\frac{\ln^3(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\operatorname{Li}_2^2(-x)\Big|_0^1\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1\frac{\ln^3(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x-\frac{5}{16}\zeta(4)
\end{aligned}$$

Collect the values (4.88) and (3.20) to finish the solution.

4.7.8 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_{\frac{n}{2}}}{n^4}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_{\frac{n}{2}}}{n^4}=\frac{1}{8}\zeta(2)\zeta(3)-\frac{25}{32}\zeta(5) \tag{4.156}$$

**Solution.**

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{H_n-H_{\frac{n}{2}}}{n^4} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\left(\frac{H_n-H_{\frac{n}{2}}}{n}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\left(\int_0^1 x^{n-1}\ln(1+x)\mathrm{d}x\right)\\
&= \int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n^3}\right)\mathrm{d}x\\
&= -\int_0^1\frac{\ln(1+x)\operatorname{Li}_3(-x)}{x}\,\mathrm{d}x\\
&\overset{\text{IBP}}{=} -\frac{3}{8}\zeta(2)\zeta(3)+\int_0^1\frac{\operatorname{Li}_2^2(-x)}{x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Recall the relation involving the latter integral from (3.129),

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_{\frac{n}{2}}}{n^4}=-\frac{1}{4}\zeta(2)\zeta(3)-\frac{7}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n^4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nH_n}{n^4}$$

Collecting the results (4.4) and (4.93) completes the solution.

For a different solution, see (4.19).

## 4.8 Harmonic Series with $\binom{2n}{n}$ in the Numerator

4.8.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{H_n}{n}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{H_n}{n} = 2\zeta(2) \tag{4.157}$$

Solution (i). By Taylor series, we have

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^n$$

or

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^n = \frac{1-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} \tag{4.158}$$

Using this identity, we obtain

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{H_n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \left( -\int_0^1 x^{n-1} \ln(1-x) \mathrm{d}x \right) \\
&= -\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^n \right) \mathrm{d}x \\
&= -\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} \left( \frac{1-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} \right) \mathrm{d}x \\
&= \underbrace{-\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x\sqrt{1-x}} \mathrm{d}x}_{\sqrt{1-x}=y} + \underbrace{\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} \mathrm{d}x}_{1-x=y} \\
&= -4\int_0^1 \frac{\ln(y)}{1-y^2} \mathrm{d}y + \int_0^1 \frac{\ln(y)}{1-y} \mathrm{d}y \\
&\left\{ \text{write } \frac{1}{1-y^2} = \frac{1}{1-y} - \frac{y}{1-y^2} \text{ in the first integral} \right\} \\
&= 4 \underbrace{\int_0^1 \frac{y\ln(y)}{1-y^2} \mathrm{d}y}_{y \to \sqrt{y}} - 3\int_0^1 \frac{\ln(y)}{1-y} \mathrm{d}y \\
&= -2\int_0^1 \frac{\ln(y)}{1-y} \mathrm{d}y \\
&= 2\zeta(2).
\end{aligned}$$

Solution (ii). Setting $x = 1$ in (2.38):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{H_n}{n} x^n = 2\operatorname{Li}_2\left( \frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}} \right)$$

we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{H_n}{n} = 2\operatorname{Li}_2(1) = 2\zeta(2)$$

4.8.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{(-1)^n H_n}{n}$
Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{(-1)^n H_n}{n} = 2\,\mathrm{Li}_2(2\sqrt{2}-3) \tag{4.159}$$

Solution. Set $x = -1$ in (2.38),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{(-1)^n H_n}{n} = 2\,\mathrm{Li}_2\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right) = 2\,\mathrm{Li}_2(2\sqrt{2}-3)$$

4.8.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{H_n}{n^2}$
Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{H_n}{n^2} = \frac{9}{2}\zeta(3) - 4\ln(2)\zeta(2) \tag{4.160}$$

**Solution (i).**

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{x^n}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \left(\int x^{n-1}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \int \frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^n\right) \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

{recall the generating function (4.158)}

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{1}{x}\left(\frac{1-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}\right) \mathrm{d}x \\
&\overset{\sqrt{1-x}=y}{=} -2\int \frac{\mathrm{d}y}{1+y} \\
&= -2\ln(1+y) \\
&= -2\ln(1+\sqrt{1-x}) + c
\end{aligned}$$

where $c = 2\ln(2)$ if we set $x = 0$. Then, we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{x^n}{n} = -2\ln(1+\sqrt{1-x}) + 2\ln(2) \tag{4.161}$$

Using this identity, we get

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\frac{H_n}{n^2}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n n}\left(\frac{H_n}{n}\right)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n n}\left(-\int_0^1 x^{n-1}\ln(1-x)\mathrm{d}x\right)\\
&=-\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\frac{x^n}{n}\right)\mathrm{d}x\\
&=-\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}(-2\ln(1+\sqrt{1-x})+2\ln(2))\mathrm{d}x\\
&=2\underbrace{\int_0^1\frac{\ln(1+\sqrt{1-x})}{x}\ln(1-x)\ \mathrm{d}x}_{0}-2\ln(2)\underbrace{\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}}_{1-x=y}\ \mathrm{d}x\\
&=8\int_0^1\frac{y\ln(1+y)\ln(y)}{1-y^2}\ \mathrm{d}y-2\ln(2)\int_0^1\frac{\ln(y)}{1-y}\ \mathrm{d}y\\
&=4\int_0^1\frac{\ln(1+y)\ln(y)}{1-y}\ \mathrm{d}y-4\int_0^1\frac{\ln(1+y)\ln(y)}{1+y}\ \mathrm{d}y-2\ln(2)\int_0^1\frac{\ln(y)}{1-y}\ \mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

These integrals are calculated in (3.103), (3.100), and (3.8) respectively.
Solution (ii). Set $x=1$ in (2.39),

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\frac{H_n}{n^2}=-4\ln(2)\zeta(2)+2\zeta(3)-4\int_0^1\frac{\ln(1+t)\ln(1-t)}{t}\ \mathrm{d}t
$$

This integral is computed in (3.98).

4.8.4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\frac{H_n^{(2)}}{n}$

Show that

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\frac{H_n^{(2)}}{n}=\frac{3}{2}\zeta(3) \tag{4.162}
$$

Solution. Multiply both sides of (4.22):

$$
\frac{H_n}{n^2}+\frac{H_n^{(2)}}{n}-\frac{\zeta(2)}{n}=\int_0^1 x^{n-1}\ln(x)\ln(1-x)\mathrm{d}x
$$

by $\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$ then take the summation over $n\geq 1$,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\frac{H_n}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\frac{H_n^{(2)}}{n}-\zeta(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\frac{1}{n}\\
&=\int_0^1\frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}x^n\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

{recall the generating function (4.158)}

$=\int_0^1\frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}\left(\frac{1-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}\right)\mathrm{d}x$

$$
=\underbrace{\int_0^1\frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x\sqrt{1-x}}\ \mathrm{d}x}_{1-x\to x}-\underbrace{\int_0^1\frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}\ \mathrm{d}x}_{\text{IBP}}
$$

$= \int_0^1 \frac{\ln(x)\ln(1-x)}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^2(x)}{1-x}\ \mathrm{d}x.$
{substitute the results (3.102) and (3.8)}

$$= 6\zeta(3) - 6\ln(2)\zeta(2)$$

The solution completes on collecting the result (4.160) and writing

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\frac{1}{n} = 2\ln(2)$$

which follows from (4.161) on setting $x = 1$.

### 4.8.5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\frac{H_{2n}^{(2)}}{n}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\frac{H_{2n}^{(2)}}{n} = 2\pi G + \frac{31}{8}\zeta(3) \tag{4.163}$$

Solution. By writing $\frac{1}{n} = 2\int_0^1 x^{2n-1}\ \mathrm{d}x$, we get

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\frac{H_{2n}^{(2)} - \frac{1}{4}H_n^{(2)}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\left(H_{2n}^{(2)} - \frac{1}{4}H_n^{(2)}\right)\left(2\int_0^1 x^{2n-1}\ \mathrm{d}x\right)$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x}\left(2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\left(H_{2n}^{(2)} - \frac{1}{4}H_n^{(2)}\right)x^{2n}\right)\mathrm{d}x$$

{recall the identity (2.58)}

$$= \int_0^1 \frac{1}{x}\left(\frac{\arcsin^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$$

$$\overset{x=\sin(u)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2\csc(u)\mathrm{d}u$$

$$\overset{\text{IBP}}{=} \underbrace{u^2\ln\left(\tan\left(\frac{u}{2}\right)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{0} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} u\ln\left(\tan\left(\frac{u}{2}\right)\right)\mathrm{d}u$$

{use the Fourier series of $\ln(\tan(x))$ given in (2.95)}

$$= -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} u\left(-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos((2n+1)u)}{2n+1}\right)\mathrm{d}u$$

$$= 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u\cos((2n+1)u)\mathrm{d}u$$

$$= 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{\pi\cos(n\pi)}{2(2n+1)} - \frac{\sin(n\pi)}{(2n+1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2}\right)$$

$$\left\{\text{use } \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\pi) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \text{ given in (1.7)}\right\}$$

$$= 2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} - 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}$$

{the first sum is the definition of the Catalan's constant ( 1.162)}
{and the second sum can be obtained from (1.65)}

$$= 2\pi G + \frac{7}{2}\zeta(3).$$

The second sum on the LHS is given in (4.162) and the solution is complete.

**4.8.6** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{H_n^2}{n}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{H_n^2}{n} = \frac{21}{2}\zeta(3) \tag{4.164}$$

Solution (i). By using the identity (2.62), we get

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{H_n^2 + H_n^{(2)}}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \left( \int_0^1 x^{n-1} \ln^2(1-x) \mathrm{d}x \right) \\
&= \int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{x} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^n \right) \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

{recall the generating function (4.158)}

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{x} \left( \frac{1-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} \right) \mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{x\sqrt{1-x}} \mathrm{d}x}_{\sqrt{1-x}=y} - \underbrace{\int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{x} \mathrm{d}x}_{1-x=y} \\
&= 8\int_0^1 \frac{\ln^2(y)}{1-y^2} \mathrm{d}y - \int_0^1 \frac{\ln^2(y)}{1-y} \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Gathering the results (3.14), (3.8), and (4.162) completes the solution.
Solution (ii).

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{H_n^2}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} H_n \left( \frac{H_n}{n} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} H_n \left( -\int_0^1 x^{n-1} \ln(1-x) \mathrm{d}x \right) \\
&= -\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} H_n x^n \right) \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

{ recall the generating function (2.37)}

$$\begin{aligned}
&= -\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} \left( \frac{2}{\sqrt{1-x}} \ln\left( \frac{1+\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}} \right) \right) \mathrm{d}x \\
&\overset{y=\frac{1-x}{1+x}}{=} 4 \underbrace{\frac{\ln^2(1-x)}{x}}_{\overset{\sqrt{1-x}=y}{=} 8\int_0^1 \frac{\ln(y)}{1-y^2} \ln\left(\frac{1+y}{2y}\right) \mathrm{d}y} \mathrm{d}x - 4\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\ln(1+x)}{x} \mathrm{d}x \\
&= 4\int_0^1 \frac{\ln^2(y)}{1-y} \mathrm{d}y - 4\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\ln(1+x)}{x} \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

These two integrals are given in (3.8) and (3.98).

### 4.8.7 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{H_n^2}{n^2}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{H_n^2}{n^2} = 32\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) - 14\zeta(4) + 7\ln(2)\zeta(3) - 8\ln^2(2)\zeta(2) + \frac{4}{3}\ln^4(2) \tag{4.165}$$

**Solution.**

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{H_n^2}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{H_n}{n}\left(\frac{H_n}{n}\right)\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{H_n}{n}\left(-\int_0^1 x^{n-1}\ln(1-x)\mathrm{d}x\right)\\
&= -\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \frac{H_n}{n} x^n\right)\mathrm{d}x\\
&\qquad \{\text{ recall the generating function (2.38)}\}\\
&= -\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\left(2\operatorname{Li}_2\left(\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}\right)\right)\mathrm{d}x\\
&\overset{\sqrt{1-x}=y}{=} 8\int_0^1 \frac{y\ln(y)\operatorname{Li}_2\left(\frac{1-y}{1+y}\right)}{1-y^2}\,\mathrm{d}y\\
&\overset{\frac{1-y}{1+y}=x}{=} -4\int_0^1 -4\int_0^1 \frac{(1-x)\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\operatorname{Li}_2(x)}{x(1+x)}\mathrm{d}x \quad \frac{\ln 2_2(x)}{x}\,\mathrm{d}x + 4\int_0^1 \frac{\ln(1+x)\operatorname{Li}_2(x)}{x}\,\mathrm{d}x\\
&\quad -8\int_0^1 \frac{\ln(1+x)\operatorname{Li}_2(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x + 8\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\operatorname{Li}_2(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

First integral:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\operatorname{Li}_2(x)}{x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\operatorname{Li}_2^2(x)\bigg|_0^1 = -\frac{1}{2}\zeta^2(2) = -\frac{5}{4}\zeta(4)$$

Second integral: We showed in (4.152)

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{\ln(1+x)\operatorname{Li}_2(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \zeta(2)\eta(2) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{n^3}\\
&\qquad \{\text{collect the result (4.86)}\}\\
&= 2\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2}\zeta(4) + \frac{7}{4}\ln(2)\zeta(3) - \frac{1}{2}\ln^2(2)\zeta(2) + \frac{1}{12}\ln^4(2)
\end{aligned}$$

Third integral: Perform integration by parts,

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)\operatorname{Li}_2(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln^2(2)\zeta(2) + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^2(1+x)\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

{ this integral is given in (3.115)}

$$= \frac{1}{2}\ln^2(2)\zeta(2) - \frac{3}{16}\zeta(4)$$

Fourth integral: Make use of the dilogarithm reflection formula (1.80),

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\operatorname{Li}_2(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln(1-x)\left[\zeta(2) - \ln(x)\ln(1-x) - \operatorname{Li}_2(1-x)\right]}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \zeta(2)\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{\ln(x)\ln^2(1-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

$$- \int_0^1 \frac{\ln(1-x)\operatorname{Li}_2(1-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

{these three integrals are given in (3.17), (4.144), and (4.143)}

$$= -\frac{5}{4}\zeta(4) - 2\ln(2)\zeta(3) + \frac{1}{2}\ln^2(2)\zeta(2) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(3)}}{n2^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n^{(2)}}{n^2 2^n}$$

{collect the results (4.111) and (4.109)}

$$= 3\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{29}{16}\zeta(4) - \frac{1}{4}\ln^2(2)\zeta(2) + \frac{1}{8}\ln^4(2)$$

The solution completes on grouping the four integrals.

## 4.9 Harmonic Series with $\binom{2n}{n}$ in the Denominator

### 4.9.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} \frac{H_n}{n^2}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} \frac{H_n}{n^2} = 6\ln(2)\zeta(2) + \frac{7}{2}\zeta(3) \tag{4.166}$$

Solution (i). Let $a = b = n$ in the beta function in (1.51):

$$\int_0^1 \frac{x^{a-1} + x^{b-1}}{(1+x)^{a+b}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{B}(a,b)$$

we have

$$\int_0^1 \frac{2x^{n-1}}{(1+x)^{2n}}\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma^2(n)}{\Gamma(2n)} = \frac{2}{n\binom{2n}{n}}$$

or

$$\frac{1}{n\binom{2n}{n}} = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{(1+x)^{2n}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x}\left(\frac{x}{(1+x)^2}\right)^n\,\mathrm{d}x \tag{4.167}$$

Using this result, we get

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{\binom{2n}{n}}\frac{H_n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}4^n\frac{H_n}{n}\frac{1}{n\binom{2n}{n}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}4^n\frac{H_n}{n}\left(\int_0^1\frac{1}{x}\left(\frac{x}{(1+x)^2}\right)^n\mathrm{d}x\right)$$

$$=\int_0^1\frac{1}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_n}{n}\left(\frac{4x}{(1+x)^2}\right)^n\right)\mathrm{d}x$$

{make use of (2.6) for the sum}

$$=\int_0^1\frac{1}{x}\left(\operatorname{Li}_2\left(\frac{4x}{(1+x)^2}\right)+\frac{1}{2}\ln^2\left(1-\frac{4x}{(1+x)^2}\right)\right)\mathrm{d}x$$

$$\overset{\text{IBP}}{=}\int_0^1\frac{2+2x}{x(1-x)}\ln(x)\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\left(\frac{2}{x}+\frac{4}{1-x}\right)\ln(x)\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^1\frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x+4\underbrace{\int_0^1\frac{\ln(x)\ln(1-x)}{1-x}\,\mathrm{d}x}_{1-x\to x}$$

$$-2\int_0^1\frac{\ln(x)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x-4\int_0^1\frac{\ln(x)\ln(1+x)}{1-x}\,\mathrm{d}x$$

$$=6\int_0^1\frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x-2\int_0^1\frac{\ln(x)\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x-4\int_0^1\frac{\ln(x)\ln(1+x)}{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

These integrals are given in (3.9), (3.12), and (3.103) respectively.
Solution (ii). Set $x=1$ in (2.39),

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{\binom{2n}{n}}\frac{H_n}{n^2}=-4\ln(2)\zeta(2)+2\zeta(3)-4\int_0^1\frac{\ln(1-t)\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

This integral is given in (3.98).

**Solution (iii).**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{\binom{2n}{n}}\frac{H_n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{\binom{2n}{n}n}\left(\frac{H_n}{n}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{\binom{2n}{n}n}\left(-\int_0^1x^{n-1}\ln(1-x)\mathrm{d}x\right)$$

$$=-\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{\binom{2n}{n}}\frac{x^n}{n}\right)\mathrm{d}x$$

{ replace $z$ with $\sqrt{x}$ in (2.48)}

$$=-\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}\left(2\frac{\sqrt{x}\arcsin(\sqrt{x})}{\sqrt{1-x}}\right)\mathrm{d}x$$

$$\overset{\sqrt{x}=\sin(u)}{=}-8\int_0^{\frac{\pi}{2}}u\ln(\cos(u))\mathrm{d}u$$

This integral is evaluated in (3.91).

4.9.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} \frac{H_{2n}}{n^2}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} \frac{H_{2n}}{n^2} = 3\ln(2)\zeta(2) + \frac{35}{4}\zeta(3) \tag{4.168}$$

Solution.

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} \frac{H_{2n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{\binom{2n}{n} n} \left(2\frac{H_{2n}}{2n}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{\binom{2n}{n} n} \left(-2\int_0^1 x^{2n-1}\ln(1-x)\mathrm{d}x\right) \\
&= -2\int_0^1 \ln(1-x)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} \frac{x^{2n-1}}{n}\right)\mathrm{d}x \\
&\{\text{recall the identity (2.48)}\} \\
&= -2\int_0^1 \ln(1-x)\left(2\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x \\
&\overset{x=\sin(u)}{=} -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} u\ln(1-\sin(u))\mathrm{d}u \\
&= -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} u\ln\left(2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{u}{2}\right)\right)\mathrm{d}u \\
&\overset{\frac{\pi}{4}-\frac{u}{2}=t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (16t-4\pi)\ln\left(2\sin^2(t)\right)\mathrm{d}t \\
&= \ln(2)\int_0^{\frac{\pi}{4}} (16t-4\pi)\mathrm{d}t + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (16t-4\pi)\ln(\sin(t))\mathrm{d}t \\
&\{\text{use the Fourier series of } \ln(\sin(t)) \text{ given in (2.90)}\} \\
&= \ln(2)\int_0^{\frac{\pi}{4}} (16t-4\pi)\mathrm{d}t + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (16t-4\pi)\left(-\ln(2)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nt)}{n}\right)\mathrm{d}t \\
&= -\ln(2)\int_0^{\frac{\pi}{4}} (16t-4\pi)\mathrm{d}t - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (16t-4\pi)\cos(2nt)\mathrm{d}t \\
&= -\ln(2)\left[-\frac{\pi^2}{2}\right] - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{4\cos(2nt)}{n^2} - \frac{2\pi\sin(2nt)}{n} + \frac{8t\sin(2nt)}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= 3\ln(2)\zeta(2) - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{4\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n^2} - \frac{4}{n^2}\right) \\
&\left\{ \text{ make use of } \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_{2n} \text{ given in (1.12) } \right\} \\
&= 3\ln(2)\zeta(2) - 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)^3} + 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} \\
&= 3\ln(2)\zeta(2) + \frac{35}{4}\zeta(3).
\end{aligned}$$

4.9.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} \frac{H_n}{n^3}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} \frac{H_n}{n^3} = -8\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) + \zeta(4) + 8\ln^2(2)\zeta(2) - \frac{1}{3}\ln^4(2) \tag{4.169}$$

**Solution.**

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} \frac{H_n}{n^3} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{\binom{2n}{n} n^2}\left(\frac{H_n}{n}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{\binom{2n}{n} n^2}\left(-\int_0^1 x^{n-1}\ln(1-x)\mathrm{d}x\right) \\
&= -\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} \frac{x^n}{n^2}\right)\mathrm{d}x \\
&\quad \{\text{set } z = \sqrt{x} \text{ in (2.49) to get this sum }\} \\
&= -\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\left(2\arcsin^2(\sqrt{x})\right)\mathrm{d}x \\
\sqrt{x} = \sin(\theta) &- 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cot(x)\ln(\cos(x))\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Let's recall the Fourier series of $\cot(x)\ln(\cos(x))$ given in (2.107):

$$\cot(x)\ln(\cos(x)) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\int_0^1 \frac{1-t}{1+t}t^{n-1}\,\mathrm{d}t\right)\sin(2nx), \quad 0 < x < \pi$$

On multiplying both sides by $x^2$ then integrating from $x = 0$ to $\frac{\pi}{2}$, we have

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cot(x)\ln(\cos(x))\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\int_0^1 \frac{1-t}{1+t}t^{n-1}\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin(2nx)\mathrm{d}x\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\int_0^1 \frac{1-t}{1+t}t^{n-1}\,\mathrm{d}t\right)\left(\frac{\cos(n\pi)}{4n^3} - \frac{3\zeta(2)\cos(n\pi)}{4n}\right. \\
&\qquad \left. -\frac{1}{4n^3} + \frac{\pi\sin(n\pi)}{4n^2}\right) \\
&\qquad \left\{\text{remember that } \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\pi) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n\right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\int_0^1 \frac{1-t}{1+t}t^{n-1}\,\mathrm{d}t\right)\left(\frac{(-1)^n}{4n^3} - \frac{3\zeta(2)(-1)^n}{4n} - \frac{1}{4n^3} + 0\right)
\end{aligned}$$

{change the order of integration and summation}

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1-t}{t(1+t)}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n^3} - \frac{3\zeta(2)t^n}{n} - \frac{(-t)^n}{n^3}\right) \mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^1 \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{1+t}\right)(\mathrm{Li}_3(t) + 3\zeta(2)\ln(1-t) - \mathrm{Li}_3(-t))\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_3(t) - \mathrm{Li}_3(-t)}{t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_3(t) - \mathrm{Li}_3(-t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$$
$$+ \frac{3}{4}\zeta(2)\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t - \frac{3}{2}\zeta(2)\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

First integral:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_3(t) - \mathrm{Li}_3(-t)}{t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{Li}_4(1) - \mathrm{Li}_4(-1) = \zeta(4) + \frac{7}{8}\zeta(4) = \frac{15}{8}\zeta(4)$$

Second integral: Apply integration by parts,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{Li}_3(t) - \mathrm{Li}_3(-t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{7}{4}\ln(2)\zeta(3) - \int_0^1 \frac{\ln(1+t)\,\mathrm{Li}_2(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{\ln(1+t)\,\mathrm{Li}_2(-t)}{t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{7}{4}\ln(2)\zeta(3) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\int_0^1 t^{n-1}\,\mathrm{Li}_2(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\,\mathrm{Li}_2^2(-t)\Big|_0^1$$
$$\{\text{ recall the result (3.66)}\}$$
$$= \frac{7}{4}\ln(2)\zeta(3) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{\zeta(2)}{n} - \frac{H_n}{n^2}\right) - \frac{5}{16}\zeta(4)$$
$$= \frac{7}{4}\ln(2)\zeta(3) - \frac{5}{4}\zeta(4) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{n^3} - \frac{5}{16}\zeta(4)$$
$$\{\text{ recall the result (4.86)}\}$$
$$= -2\,\mathrm{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{25}{16}\zeta(4) + \frac{1}{2}\ln^2(2)\zeta(2) - \frac{1}{12}\ln^4(2)$$

Third integral:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t = -\,\mathrm{Li}_2(1) = -\zeta(2)$$

Fourth integral: Let $1-x=y$,

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\ln(y)}{2-y}\,\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\int_0^1 y^{n-1}\ln(y)\mathrm{d}y$$
$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 2^n} = -\,\mathrm{Li}_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln^2(2) - \frac{1}{2}\zeta(2)$$

Combining all four integrals reveals

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cot(x)\ln(\cos(x))\mathrm{d}x = \mathrm{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{8}\zeta(4) - \ln^2(2)\zeta(2) + \frac{1}{24}\ln^4(2)$$

Plug this integral back to finish the solution.

4.9.4 $\sum_{n=1}^\infty \frac{4^n}{\binom{2n}{n}}\frac{H_n^{(2)}}{n^2}$

Show that

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{4^n}{\binom{2n}{n}}\frac{H_n^{(2)}}{n^2} = 8\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) - \zeta(4) + 4\ln^2(2)\zeta(2) + \frac{1}{3}\ln^4(2) \tag{4.170}$$

Solution (i). Set $x = 1$ in (2.54):

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}\arcsin^4 x &= \sum_{n=1}^\infty \frac{4^n}{\binom{2n}{n}}\frac{H_{n-1}^{(2)}x^{2n}}{n^2}\\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{4^n}{\binom{2n}{n}}\frac{H_n^{(2)}x^{2n}}{n^2} - \sum_{n=1}^\infty \frac{4^n}{\binom{2n}{n}}\frac{x^{2n}}{n^4},\end{aligned}$$

we obtain

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{4^n}{\binom{2n}{n}}\frac{H_n^{(2)}}{n^2} = \frac{15}{4}\zeta(4) + \sum_{n=1}^\infty \frac{4^n}{\binom{2n}{n}}\frac{1}{n^4}$$

By writing $\frac{1}{n^2} = -4\int_0^1 t^{2n-1}\ln(t)\mathrm{d}t$, we get

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^\infty \frac{4^n}{\binom{2n}{n}}\frac{1}{n^4} &= -4\sum_{n=1}^\infty \frac{4^n}{\binom{2n}{n}}\frac{1}{n^2}\int_0^1 t^{2n-1}\ln(t)\mathrm{d}t\\ &= -4\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t}\left(\sum_{n=1}^\infty \frac{4^n}{\binom{2n}{n}}\frac{t^{2n}}{n^2}\right)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

{recall the series expansion of $\arcsin^2(t)$ in (2.49)}

$$\begin{aligned}&= -8\int_0^1 \frac{\ln(t)\arcsin^2(t)}{t}\,\mathrm{d}t\\ &\overset{\text{IBP}}{=} 8\int_0^1 \frac{\ln^2(t)\arcsin(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t\\ &\overset{t=\sin(x)}{=} 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\ln^2(\sin(x))\mathrm{d}x\end{aligned}$$

{this integral is given in (3.94)}

$$= 8\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{19}{4}\zeta(4) + 4\ln^2(2)\zeta(2) + \frac{1}{3}\ln^4(2). \tag{4.171}$$

Solution (ii). Multiply both sides of (4.22):

$$\frac{H_n}{n^2} + \frac{H_n^{(2)}}{n} - \frac{\zeta(2)}{n} = \int_0^1 x^{n-1}\ln(x)\ln(1-x)\mathrm{d}x$$

by $\frac{4n}{n\binom{2n}{n}}$ then consider the summation,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{\binom{2n}{n}}\frac{H_n}{n^3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{\binom{2n}{n}}\frac{H_n^{(2)}}{n^2}-\zeta(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{\binom{2n}{n}}\frac{1}{n^2}$$
$$=\int_0^1\frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{\binom{2n}{n}}\frac{x^n}{n}\right)\mathrm{d}x$$
{replace $z$ with $\sqrt{x}$ in (2.48) to get the sum }
$$=\int_0^1\frac{\ln(x)\ln(1-x)}{x}\left(\frac{2\sqrt{x}\arcsin(\sqrt{x})}{\sqrt{1-x}}\right)\mathrm{d}x$$
$$\overset{\sqrt{x}=\sin(\theta)}{=}16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\ln(\sin(\theta))\ln(\cos(\theta))\mathrm{d}\theta.$$

The first sum is given in (4.169). For the third, set $z=1$ in (2.49),

$$\zeta(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{\binom{2n}{n}}\frac{1}{n^2}=\zeta(2)\left(\frac{\pi^2}{2}\right)=\frac{15}{2}\zeta(4)$$

For the integral, let $\theta\to\frac{\pi}{2}-\theta$ using $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin(\theta)$ and $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos(\theta)$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\ln(\sin(\theta))\ln(\cos(\theta))\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\ln(\cos(\theta))\ln(\sin(\theta))\mathrm{d}\theta$$
$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos(\theta))\ln(\sin(\theta))\mathrm{d}\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\ln(\cos(\theta))\ln(\sin(\theta))\mathrm{d}\theta$$

{add the main integral to both sides then divide by 2 }

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(\theta))\ln(\cos(\theta))\mathrm{d}\theta$$

{this integral is calculated in (3.93)}

$$=\frac{3}{4}\ln^2(2)\zeta(2)-\frac{15}{32}\zeta(4), \tag{4.172}$$

A different solution may be found in [32, p. 334]

4.9.5 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{\binom{2n}{n}}\frac{H_n^2}{n^2}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{\binom{2n}{n}}\frac{H_n^2}{n^2}=-24\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{81}{2}\zeta(4)+12\ln^2(2)\zeta(2)-\ln^4(2) \tag{4.173}$$

Solution. By using the identity (2.62), we get

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{\binom{2n}{n}}\frac{H_n^2+H_n^{(2)}}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{\binom{2n}{n}n}\left(\frac{H_n^2+H_n^{(2)}}{n}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{\binom{2n}{n}n}\left(\int_0^1x^{n-1}\ln^2(1-x)\mathrm{d}x\right)$$
$$=\int_0^1\frac{\ln^2(1-x)}{x}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{\binom{2n}{n}}\frac{x^n}{n}\right)\mathrm{d}x$$

{replace $z$ with $\sqrt{x}$ in (2.48) to get the sum}

$$= \int_0^1 \frac{\ln^2(1-x)}{x}\left(2\frac{\sqrt{x}\arcsin(\sqrt{x})}{\sqrt{1-x}}\right)\mathrm{d}x$$

$$\overset{\sqrt{x}=\sin(u)}{=} 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} u\ln^2(\cos(u))\mathrm{d}u$$

This integral and the second sum on the LHS are evaluated in (3.95) and (4.170).

4.9.6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} \frac{\boldsymbol{H}_{2n}}{n^3}$

Show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} \frac{H_{2n}}{n^3} = -20\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{65}{8}\zeta(4) + 8\ln^2(2)\zeta(2) - \frac{5}{6}\ln^4(2). \tag{4.174}$$

Solution. Differentiate both sides of (4.167):

$$\frac{1}{n\binom{2n}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{x}\left(\frac{x}{(1+x)^2}\right)^n \mathrm{d}x$$

with respect to $n$,

$$\frac{d}{dn}\frac{1}{n\binom{2n}{n}} = \frac{d}{dn}\int_0^1 \frac{1}{x}\left(\frac{x}{(1+x)^2}\right)^n \mathrm{d}x$$

{use differentiation under the integral sign theorem (2.63)}

$$= \int_0^1 \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{x}{(1+x)^2}\right)^n \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x}\ln\left(\frac{x}{(1+x)^2}\right)\left(\frac{x}{(1+x)^2}\right)^n \mathrm{d}x.$$

Let's find the derivative of $\frac{1}{n\binom{2n}{n}}$. By the definition of the binomial coefficient:

$$\binom{a}{b} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma(a-b+1)},$$

we have

$$\frac{1}{n\binom{2n}{n}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{\Gamma^2(n+1)}{\Gamma(2n+1)} = \frac{1}{n}\cdot\frac{(n\Gamma(n))^2}{2n\Gamma(2n)} = \frac{\Gamma^2(n)}{2\Gamma(2n)}.$$

Differentiate both sides,

$$\frac{d}{dn}\frac{1}{n\binom{2n}{n}} = \frac{d}{dn}\frac{\Gamma^2(n)}{2\Gamma(2n)}$$

$$\{\text{ use } \Gamma'(n) = \Gamma(n)\psi(n) \text{ given in (1.144)}\}$$

$$= \frac{2\Gamma(2n)\Gamma^2(n)\psi(n) - 2\Gamma(2n)\Gamma^2(n)\psi(2n)}{2\Gamma^2(2n)}$$

$$= (\psi(n) - \psi(2n))\frac{\Gamma^2(n)}{\Gamma(2n)}$$

$$\{\text{ use } \psi(n+1) = H_n - \gamma \text{ given in (1.146)}\}$$

$$= (H_{n-1} - \gamma - H_{2n-1} + \gamma)\frac{2}{n\binom{2n}{n}}$$

$$= \frac{2H_n}{n\binom{2n}{n}} - \frac{2H_{2n}}{n\binom{2n}{n}} - \frac{1}{n^2\binom{2n}{n}}$$

Therefore, we have

$$\frac{2H_n}{n\binom{2n}{n}}-\frac{2H_{2n}}{n\binom{2n}{n}}-\frac{1}{n^2\binom{2n}{n}}=\int_0^1\frac{1}{x}\ln\left(\frac{x}{(1+x)^2}\right)\left(\frac{x}{(1+x)^2}\right)^n\ \mathrm{d}x$$

Now multiply both sides by $\frac{4^n}{2n^2}$ then consider the summation,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{\binom{2n}{n}}\frac{H_n}{n^3}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{\binom{2n}{n}}\frac{H_{2n}}{n^3}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{\binom{2n}{n}}\frac{1}{n^4}\\
&=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{x}\ln\left(\frac{x}{(1+x)^2}\right)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{4x}{(1+x)^2}\right)^n}{n^2}\right]\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{x}\ln\left(\frac{x}{(1+x)^2}\right)\left[\operatorname{Li}_2\left(\frac{4x}{(1+x)^2}\right)\right]\mathrm{d}x\\
&\overset{\text{IBP}}{=}-\frac{5}{4}\zeta(4)-\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{2}\ln^2(x)+2\operatorname{Li}_2(-x)\right)\left[\frac{2(x-1)}{x(1+x)}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right]\mathrm{d}x\\
&=-\frac{5}{4}\zeta(4)+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\ln^2(x)\ln(1-x)}{x}\ \mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\ln^2(x)\ln(1+x)}{x}\ \mathrm{d}x\\
&\quad+2\int_0^1\frac{\ln(1-x)\operatorname{Li}_2(-x)}{x}\ \mathrm{d}x-2\int_0^1\frac{\ln(1+x)\operatorname{Li}_2(-x)}{x}\ \mathrm{d}x\\
&\quad-\int_0^1\frac{\ln^2(x)\ln(1-x)}{1+x}\ \mathrm{d}x+\int_0^1\frac{\ln 2(x)\ln(1+x)}{1+x}\ \mathrm{d}x\\
&\quad-4\int_0^1\frac{\ln(1-x)\operatorname{Li}_2(-x)}{1+x}\ \mathrm{d}x+4\int_0^1\frac{\ln(1+x)\operatorname{Li}_2(-x)}{1+x}\ \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

The first and third sums on the LHS are computed in (4.169) and (4.171).
First integral: Expand $\ln(1-x)$ in series,

$$\begin{aligned}
\int_0^1\frac{\ln^2(x)\ln(1-x)}{x}\ \mathrm{d}x&=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 x^{n-1}\ln^2(x)\mathrm{d}x\\
&=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=-2\zeta(4)
\end{aligned}$$

Second integral: Expand $\ln(1+x)$ in series,

$$\begin{aligned}
\int_0^1\frac{\ln^2(x)\ln(1+x)}{x}\ \mathrm{d}x&=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1)^n}{n}\int_0^1 x^{n-1}\ln^2(x)\mathrm{d}x\\
&=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}=\frac{7}{4}\zeta(4)
\end{aligned}$$

Third integral: Expand $\operatorname{Li}_2(-x)$ in series,

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\operatorname{Li}_2(-x)}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\int_0^1 x^{n-1}\ln(1-x)\mathrm{d}x$$
$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{n^3}$$
$$\{\text{ this sum is given in (4.86)}\}$$
$$= -2\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{11}{4}\zeta(4) - \frac{7}{4}\ln(2)\zeta(3) + \frac{1}{2}\ln^2(2)\zeta(2) - \frac{1}{12}\ln^4(2).$$

Fourth integral:

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)\operatorname{Li}_2(-x)}{x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\operatorname{Li}_2^2(-1) = -\frac{5}{16}\zeta(4).$$

The fifth and sixth integrals are given in (3.113) and (3.111) respectively.
Seventh integral: Expand $\frac{\operatorname{Li}_2(-x)}{1+x}$ in series given in (2.3),

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)\operatorname{Li}_2(-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n H_{n-1}^{(2)}\int_0^1 x^{n-1}\ln(1-x)\mathrm{d}x$$
$$= -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(H_n^{(2)} - \frac{1}{n^2}\right)\left(-\frac{H_n}{n}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n^{(2)} H_n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n H_n}{n^3}$$
$$\{\text{the first sum is given in (4.89)}\}$$
$$= \frac{15}{4}\zeta(4) - \frac{21}{8}\ln(2)\zeta(3) + \frac{3}{4}\ln^2(2)\zeta(2) - \frac{1}{6}\ln^4(2)$$

Eighth integral: Apply integration by parts,

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)\operatorname{Li}_2(-x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = -3\operatorname{Li}_4\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}\ln^2(2)\zeta(2) + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^3(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$\{\text{ substitute the result (3.20)}\}$$
$$= 3\zeta(4) - \frac{21}{8}\ln(2)\zeta(3) + \frac{1}{2}\ln^2(2)\zeta(2) - \frac{1}{8}\ln^4(2)$$

Put all together to finalize the solution.

Remark: Sometimes the two Mathematica commands for approximating $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ : NSum [f(n), {n, 1,Infinity}] and NSum [ $f(n), \{n, 1,$Infinity },WorkingPrecision->10] don't give the right approximation for series involving the binomial coefficient due to the slow convergence. The following replacement works fine and with high accuracy: major=Normal@Series[f(n),{n,Infinity,12}];
majorsum=Sum[major,{n,Infinity}]; majorsum + NSum [$f(n)$-major, $\{n, 1,$ Infinity }, NSumTerms- > 20, WorkingPrecision->20,Method->"WynnEpsilon"]

On reaching the end of the book, I would like to say that there are still a wide range of results about the harmonic series left to be discovered by the reader by employing and manipulating the identities provided in the second chapter. Even though the book has presented different solutions for several problems, there are still more paths to take to reach the same results since the realm of harmonic series is full of hidden secrets and magic.

Part VI
# Appendix

## A Обзор применений спецфункций в теоретической физике

(постепенно допишу, пока в записях по физике все это)

### A.0.1 Спецфункции в теории поля, гравитации, космологии

#### О применениях функций Бесселя очень коротко

**О функциях Бесселя в космологии**

(3/4 страницы тут про всякие штуки такие, напишу потом, пока в космологии это изучаю еще)

### A.0.2 Спецфункции в квантмехе и КТП

#### Применения гамма функции в КТП

(тут много всего может быть, очень сильно применяется.)

#### О применениях гипергеометрической функции в квантовой механике

(очень важный раздел, потому что как раз через нее многие задачи решаются!)

## B Введение и обсуждение спецфункций

### B.1 Особенности записи

(пока особо без особенностей, просто сборка функций)

#### О разных мелких особенностях

Я раздел с задачами вынес в отдельную запись, потому что не вижу смысла в одной записи это делать, все равно запись схожа очень со справочником, и все равно задачи по ним - по сути в очень многих разделах физики и математики.

### B.2 Acknowledgements

Currently, no one except me has worked on the sections of this note (with the exception of sections taken from books).

### B.3 Literature

#### Основная обучающая литература

Лебедев
Его лекции пока первые в планах в этой теме.

Ландау Лифшиц Квантовая механика

В некоторых местах обсуждается много свойств спецфункций, в том числе в контексте квантовой механики. очень многому можно научиться, многое добавлю в 1ю часть по ним!

Дж Мэтьюз и Р Уокер Математические методы физики

Очень хорошая книга со многими методами, отдельно посидеть стоит того.

**Другие полезные методички и лекционные записи**

В.С. Гаврилов Н.А. Денисова А.В. Калинин Функции Бесселя в задачах математической физики

Хорошая небольшая методичка, гуглится, нужно будет - продумаю.

**Физическая литература, решающая задачи с использованием спецфункций**

Dr. Walter Greiner Relativistic Quantum Mechanics

Очень крутая книга со многими примерами, много спецфункций нужно, многому научусь из неё!

Мигдал Крайнов приближенные методы квантовой теории

Чуть тоже есть интересных идей про спецфункции, подумаю про них тоже.

Ландау Квантовая механика

Много примеров, разные спецфункции используются, точно стоит того неделю подумать про нее с этой стороны. Подумаю потом, многое допишу!

Барбашов Когушев Попова Теормеех

Есть краткий обзор функций Якоби, полезные страницы.

**Другая профессиональная литература**

И. С. Градштейн, И. М. Рыжик Таблицы интегралов, рядов, произведений

Более 1100 страниц крайне сложных формул, некоторые добавил, но вообще, выйти на их уровень - отдельная большая тренировка, не до этого.

Paul F. Byrd, Morris D. Friedman Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists

Много свойств функций, в том числе эллиптических. Когда-то поизучаю, если дел важнее не будет.

# References