Linear Algebra

Yury Holubeu *

February 25, 2026

This note is not intended for distribution. Linear algebra is discussed in detail. Links below show the contents of problems, and of a summary of special topics.

Contents

*https://yuriholubeu.github.io/, yuri.holubev@gmail.com

1 Preface and main motivation

Let's discuss some minimum knowledge and motivation that would be good to understand for studying the subject.

Это типичный раздел математики

(про то, что есть узкоспециализированные разделы, а есть разделы, которые все учат, потому что много где нужно или понимать его, или знать определения, или уметь делать задачи)

Часто те или иные конструкции используются в математике

(следствие пред. параграфа, только тут конкретно указания приложений)

Часто те или иные конструкции используются в Physics

(write that It is really really useful there)

(write a paragraph about applications in physics, in condensed matter. some matrix operations in SC, change of basis in many particle physics... It is a super important subject there!)

(and also in mechanics, there are a lot of matrices, Silvestor criterion for stability so on)

(and also in gravity, there there is diff geom, which is based on lin alg)

(and later I'll write others)

(and later I'll write others)

(and later I'll write others)

Лучшие идейные головоломки

Лучшие технические головоломки

(потом соберу, мне еще каталог долго прописывать)

Part I

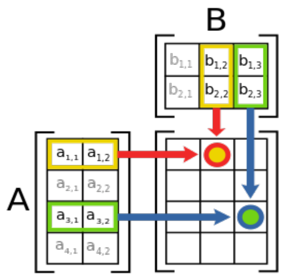
Typical Linear Algebra in a Nutshell

2 Typical topics of linear algebra

2.1 Matrices, Linear Maps

2.1.1 Matrices: Elementary Properties

Элементарные преобразования матриц



$$\operatorname{tr}(E_n) = n \qquad \operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr}(A)$$
$$\operatorname{tr}\left(A^T\right) = \operatorname{tr}(A) \qquad \operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B).$$
$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

$$\det(A/B) = \det A \cdot \det B^{-1} = \det A / \det B$$

Indices:

$$A_1{}^2 := (A^2{}_1)^T = A^1{}_2, \qquad A_2{}^1 = (A^1{}_2)^T = A^2{}_1,$$

(certain elements of transposed matrix are equivalent to the certain elements of non-transpose).

$$\left(A^{\mathrm{T}}\right)_{\beta}^{\bullet\alpha} = A^{\alpha}_{\bullet\beta}.$$

$$\left(A^{\dagger}\right)_{\beta}^{\bullet\alpha} = \left(A^{*}\right)^{\alpha}_{\bullet\beta}.$$

$$A^{\dagger} = A \quad \Rightarrow \quad A^{\alpha}_{\bullet\beta} = \left(A^{*}\right)_{\beta}^{\bullet}.$$

Weinstein-Aronszajn identity states that if A and B are matrices of size $m \times n$ and $n \times m$ respectively (either or both of which may be infinite) then, provided AB (and hence, also BA) is of trace class,

$$\det\left(I_m + AB\right) = \det\left(I_n + BA\right),$$

where I_k is the $k \times k$ identity matrix.

Типичные свойства матриц в Wolfram

Матрицы в Wolfram задаются построчно.

Inverse matrices: Typical method of evaluation

Основные свойства

Пусть квадратные матрицы A, B - невырожденные. Тогда:
$(A^{-1})^{-1} = A$
$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$, где det обозначает определитель.
$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
$\left(A^T\right)^{-1} = (A^{-1})^T$, где T обозначает операцию транспонирования.
$(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$ для любого коэффициента $k \neq 0$.
$(A-B)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}B(A-B)^{-1}$,
$(A+B)^{-1} = \left(I + A^{-1}B\right)^{-1} A^{-1}$,
$(A-B)^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(A^{-1}B\right)^k A^{-1}$

$$(A+B)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(A+B)^{-1}.$$

(допишу про это потом!)

Типичные примеры обратных матриц

$$\mathbf{A}^{-1} \equiv \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \qquad ad-bc = \det A \neq 0.$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} A & D & G \\ B & E & H \\ C & F & I \end{bmatrix} \qquad \det(\mathbf{A}) \neq 0$$

$$\begin{aligned} &A := (ei - fh), \quad D := -(bi - ch), \quad G := (bf - ce), \\ &B := -(di - fg), \quad E := (ai - cg), \quad H := -(af - cd), \\ &C := (dh - eg), \quad F := -(ah - bg), \quad I := (ae - bd). \end{aligned}$$

$$\det(\mathbf{A}) = aA + bB + cC$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \left(\frac{1}{2} \left[(\operatorname{tr} \mathbf{A})^2 - \operatorname{tr}\left(\mathbf{A}^2\right) \right] \mathbf{I} - \mathbf{A} \operatorname{tr} \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 \right). \quad \text{Cayley-Hamilton dec-n}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \left(\frac{1}{6} \left[(\operatorname{tr} \mathbf{A})^3 - 3 \operatorname{tr} \mathbf{A} \operatorname{tr}\left(\mathbf{A}^2\right) + 2 \operatorname{tr}\left(\mathbf{A}^3\right) \right] \mathbf{I} - \frac{1}{2} \mathbf{A} \left[(\operatorname{tr} \mathbf{A})^2 - \operatorname{tr}\left(\mathbf{A}^2\right) \right] + \mathbf{A}^2 \operatorname{tr} \mathbf{A} - \mathbf{A}^3 \right).$$

Определение, существует ли обратная матрица

(тут обзор их в последовательности, которую я и использую чуть что.)
Идея перейти к ЖНФ, как в матем олимпиаде сделал Олег.
(??? хз, что-то большой метод такой)

Критерий обратимости: Матрица A обратима тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$. Более того, обратная матрица может быть вычислена по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^t$$

где A_{ij} - алгебраическое дополнение.

Gaussian elimination

To compute a matrix inverse using this method, an augmented matrix is first created with the left side being the matrix to invert and the right side being the identity matrix. Then, Gaussian elimination is used to convert the left side into the identity matrix, which causes the right side to become the inverse of the input matrix.

For example, take the following matrix: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. The first step to compute its inverse is to create the augmented matrix $\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$. Call the first row of this matrix R_1 and the second row R_2. Then, add row 1 to row 2 $(R_1 + R_2 \to R_2)$. This yields $\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{array}\right)$. Next, subtract row 2, multiplied by 3, from row 1 $(R_1 - 3R_2 \to R_1)$, which yields $\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{array}\right)$. Finally, multiply row 1 by -1 $(-R_1 \to R_1)$ and row 2 by 2 $(2R_2 \to R_2)$. This yields the identity matrix on the left side and the inverse matrix on the right: $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$.

Thus, $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. The reason it works is that the process of Gaussian elimination can be viewed as a sequence of applying left matrix multiplication using elementary row operations using elementary matrices $(\mathbf{E}_n)$, such as $\mathbf{E}_n\mathbf{E}_{n-1}\cdots\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Applying right-multiplication using $\mathbf{A}^{-1}$, we get $\mathbf{E}_n\mathbf{E}_{n-1}\cdots\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{I} = \mathbf{I}\mathbf{A}^{-1}$. And the right side $\mathbf{I}\mathbf{A}A^{-1} = \mathbf{A}^{-1}$, which is the inverse we want. To obtain $\mathbf{E}_n\mathbf{E}_{n-1}\cdots\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\mathbf{I}$, we create the augumented matrix by combining $\mathbf{A}$ with $\mathbf{I}$ and applying Gaussian elimination. The two portions will be transformed using the same sequence of elementary row operations. When the left portion becomes $\mathbf{I}$, the right portion applied the same elementary row operation sequence will become $\mathbf{A}^{-1}$.

Определители: Типичные методы поиска

Элементарными преобразованиями привести к верхнетреугольной матрицы, после чего легко находится определитель

При элементарных преобразованиях определитель изменится следующим образом.

1. При перестановке местами любых двух строк матрицы определитель меняет знак на противоположный.

2. Если все элементы некоторой строки матрицы умножить на число k, то ее определитель умножится на k.

3. Определитель матрицы не изменится если к одной ее строчке прибавить другую ее строчку, умноженную на любое число.

Определения минора и алгебраического дополнения к матрице

Определитель матрицы, получающейся из A вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца, обозначается M_{ij} и называется минором матрицы A, соответствующим элементу a_{ij}.

Величина $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ называется алгебрачческим дополнением элемента a_{ij}.

Пусть A - матрица размера n на n. Формула разложения по i-той строке

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

Формула разложения по j-тому столбцу

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

Adjugate Matrix

$$\mathbf{A}\,\mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})\mathbf{I}$$

The adjugate of $\mathbf{A}$ is the transpose of the cofactor matrix $\mathbf{C}$ of $\mathbf{A}$,

$$\mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \mathbf{C}^\top.$$

In more detail, suppose R is a unital commutative ring and $\mathbf{A}$ is an $n \times n$ matrix with entries from R. The (i,j)-minor of $\mathbf{A}$, denoted $\mathbf{M}_{ij}$, is the determinant of the $(n-1)\times(n-1)$ matrix that results from deleting row i and column j of $\mathbf{A}$. The cofactor matrix of $\mathbf{A}$ is the $n \times n$ matrix $\mathbf{C}$ whose (i,j) entry is the (i,j) cofactor of $\mathbf{A}$, which is the (i,j)-minor times a sign factor:

$$\mathbf{C} = \left((-\mathbf{1})^{i+j}\mathbf{M}_{ij}\right)_{1\le i,j\le n}.$$

The adjugate of $\mathbf{A}$ is the transpose of $\mathbf{C}$, that is, the $n \times n$ matrix whose (i,j) entry is the (j,i) cofactor of $\mathbf{A}$,

$$\mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \mathbf{C}^\top = \left((-1)^{i+j}\mathbf{M}_{ji}\right)_{1\le i,j\le n}.$$

The adjugate is defined so that the product of $\mathbf{A}$ with its adjugate yields a diagonal matrix whose diagonal entries are the determinant det(A). That is,

$$\mathbf{A}\,\mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \mathrm{adj}(\mathbf{A})\mathbf{A} = \det(\mathbf{A})\mathbf{I},$$

where $\mathbf{I}$ is the $n \times n$ identity matrix. This is a consequence of the Laplace expansion of the determinant. The above formula implies one of the fundamental results in matrix algebra, that $\mathbf{A}$ is invertible if and only if $\det(\mathbf{A})$ is an invertible element of R. When this holds, the equation above yields

$$\begin{aligned}\mathrm{adj}(\mathbf{A}) &= \det(\mathbf{A})\mathbf{A}^{-1}\\ \mathbf{A}^{-1} &= \det(\mathbf{A})^{-1}\,\mathrm{adj}(\mathbf{A}).\end{aligned}$$

The adjugate also appears in Jacobi's formula for the derivative of the determinant. If $\mathbf{A}(t)$ is continuously differentiable, then

$$\frac{d(\det \mathbf{A})}{dt}(t) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{adj}(\mathbf{A}(t))\mathbf{A}'(t)\right)$$

It follows that the total derivative of the determinant is the transpose of the adjugate:

$$d(\det \mathbf{A})_{\mathbf{A}_0} = \operatorname{adj}\left(\mathbf{A}_0\right)^{\top}.$$

$$\frac{d}{dt}\det A(t) = \operatorname{tr}\left(\operatorname{adj}(A(t))\frac{dA(t)}{dt}\right) = (\det A(t))\cdot\operatorname{tr}\left(A(t)^{-1}\cdot\frac{dA(t)}{dt}\right) \qquad \text{Jacobi}$$

where $\operatorname{tr}(X)$ is the trace of the matrix X. (The latter equality only holds if $A(t)$ is invertible.) As a special case,

$$\frac{\partial\det(A)}{\partial A_{ij}} = \operatorname{adj}(A)_{ji}.$$

Equivalently, if dA stands for the differential of A, the general formula is

$$d\det(A) = \operatorname{tr}(\operatorname{adj}(A)dA).$$

Эрмтовы матрицы

(?? что особенного?)

Определители нескольких матриц

Унитарные матрицы

Матричная экспонента

$$e^X = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}X^k$$

$$e^X = \lim_{k\to\infty}\left(I+\frac{X}{k}\right)^k$$

Это не обычная функция от матрицы, которая все элементы возводит в степень, а специальная конструкция.

$$\det\left(e^A\right) = e^{\operatorname{tr}(A)}$$

Even if X and Y do not commute, the exponential e^{X+Y} can be computed by the Lie product formula [4]

$$e^{X+Y} = \lim_{k\to\infty}\left(e^{\frac{1}{k}X}e^{\frac{1}{k}Y}\right)^k.$$

Using a large finite k to approximate the above is basis of the Suzuki-Trotter expansion, often used in numerical time evolution.

In the other direction, if X and Y are sufficiently small (but not necessarily commuting) matrices, we have

$$e^Xe^Y = e^Z$$

$$Z := X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+\frac{1}{12}[X,[X,Y]]-\frac{1}{12}[Y,[X,Y]]+\cdots, \qquad \text{(BCH)}$$

where the remaining terms are all iterated commutators involving X and Y. If X and Y commute, then all the commutators are zero and we have simply $Z = X+Y$.

(из квантмеха Киселева еще добавлю разные свойства)

Computing the matrix exponential

```
MatrixExp[m]
```

$$A \equiv UDU^{-1} \qquad D \text{ - diagonal}$$
$$e^A = Ue^DU^{-1}$$

6.2 Rank

Предложение

6.26. Ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк.

Теорема о ранге матрицы

Строчный и столбцовый ранги матрицы равны.

Теорема

6.29. Ранг произведения матриц (когда оно определено) не превосходит ранга каждого из сомножителей.

Теорема

6.33. Ранг суммы матриц, не превосходит суммы их рангов.

Теорема

6.35. Ранг матрицы равен наибольшему порядку ее миноров, отличных от нуля.

Извлечение корня из матрицы (????)

В простых случаях считаем диагонализацией: пусть A симметричная с действительными значениями матрица, тогда возможна запись: $A = P^{-1}DP$, где D-диагональная матрица, тогда

$$A^{1/2} = P^{-1}D^{1/2}P$$

Корень диагональной матрицы найти просто.

Не для всех матриц квадратный корень существует. Например, не имеет корня матрица $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a \neq 0$. Эта матрица также является делителем нуля и квадратным корнем из нуля. Таким образом, в кольце матриц нуль имеет бесконечно много квадратных корней.

В тех случаях, когда корень существует, он не всегда определён однозначно, поэтому не нужно особо доверять программам, которые его вычисляют! Например, матрица

$\left(\begin{array}{cc} 33 & 24 \\ 48 & 57 \end{array}\right)$ имеет четыре корня: $\pm\left(\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 8 & 5 \end{array}\right)$ и $\pm\left(\begin{array}{cc} 5 & 2 \\ 4 & 7 \end{array}\right)$. Единичная матрица $\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$ имеет следующие 6 корней среди матриц, состоящих из $0, -1n+1$:

$$\left(\begin{array}{cc} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc} \pm 1 & 0 \\ 0 & \mp 1 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{array}\right)$$

а также бесконечно много симметричных рациональных квадратных корней вида:

$$\frac{1}{t}\left(\begin{array}{cc} s & r \\ r & -s \end{array}\right), \quad \frac{1}{t}\left(\begin{array}{cc} s & -r \\ -r & -s \end{array}\right), \quad \frac{1}{t}\left(\begin{array}{cc} -s & r \\ r & s \end{array}\right), \quad \frac{1}{t}\left(\begin{array}{cc} -s & -r \\ -r & s \end{array}\right),$$

где (r, s, t) - произвольная пифагорова тройка, то есть тройка натуральных чисел, для которых $r^2 + s^2 = t^2$. Сложность извлечения корня из матрицы обусловлена тем, что кольцо матриц некоммутативно и имеет делители нуля, то есть не является областью целостности. В области целостности, например в кольце многочленов над полем, всякий элемент имеет не более двух квадратных корней.

Diagonalization (???)

(тоже есть на это задачи.)

1. Compute the eigenvalues of A.

2. Check that no eigenvalue is defective. If any eigenvalue is defective, then the matrix cannot be diagonalized. Otherwise, you can go to the next step.

3. For each eigenvalue, find as many linearly independent eigenvectors as you can (their number is equal to the geometric multiplicity of the eigenvalue).

4. Adjoin all the eigenvectors so as to form a full-rank matrix P.

5. Build a diagonal matrix D whose diagonal elements are the eigenvalues of A.

6. The diagonalization is done: $D = P^{-1}AP$.

Для диагонализаци матриц не обязательно нормировать

2.1.2 Matrices: Less Often Needed Formulas

О блочных матрицах (????)

(пока только пишу то, что встретилось, потом когда-то буду доучивать)

For a block matrix $\Gamma = \left[\begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array}\right]$, where A and D are square matrices. If A is invertible, then

$$\det(\Gamma) = \det(A)\det\left(D - CA^{-1}B\right)$$

If a matrix is partitioned into four blocks, it can be inverted blockwise as follows:

$$P = \left[\begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array}\right]^{-1} = \left[\begin{array}{cc} A^{-1} + A^{-1}B\left(D - CA^{-1}B\right)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B\left(D - CA^{-1}B\right)^{-1} \\ -\left(D - CA^{-1}B\right)^{-1}CA^{-1} & \left(D - CA^{-1}B\right)^{-1} \end{array}\right],$$

where $\mathbf{A}$ and $\mathbf{D}$ are square blocks of arbitrary size, and $\mathbf{B}$ and $\mathbf{C}$ are conformable with them for partitioning. Furthermore, $\mathbf{A}$ and the Schur complement of $\mathbf{A}$ in $\mathbf{P}$: $\mathbf{P}/\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ must be invertible. [15]

Equivalently, by permuting the blocks:

$$P = \left[\begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array}\right]^{-1} = \left[\begin{array}{cc} \left(A - BD^{-1}C\right)^{-1} & -\left(A - BD^{-1}C\right)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C\left(A - BD^{-1}C\right)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C\left(A - BD^{-1}C\right)^{-1}BD^{-1} \end{array}\right]$$

Here, $\mathbf{D}$ and the Schur complement of $\mathbf{D}$ in $\mathbf{P}$: $\mathbf{P}/\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}$ must be invertible. If $\mathbf{A}$ and $\mathbf{D}$ are both invertible, then:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & 0 \\ 0 & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -BD^{-1} \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix}$$

By the Weinstein-Aronszajn identity, one of the two matrices in the block-diagonal matrix is invertible exactly when the other is.

If the blocks are square matrices of the same size further formulas hold.
If C and D commute ($CD = DC$), then

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(AD - BC)$$

This formula has been generalized to matrices composed of more than 2×2 blocks, again under appropriate commutativity conditions among the individual blocks.

For $A = D$ and $B = C$, the following formula holds (even if A and B do not commute)

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} = \det(A - B) \det(A + B) \cdot$$ [16]

Matrix determinants: extra properties

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln |\mathbf{A}| = \operatorname{Tr} \left(\mathbf{A}^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right)$$

(????)

Matrix determinant lemma: Suppose $\mathbf{A}$ is an invertible square matrix and $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ are column vectors. Then the matrix determinant lemma states that

$$\det \left(\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^\top \right) = \left(1 + \mathbf{v}^\top \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \right) \det(\mathbf{A}).$$

Here, $\mathbf{u}\mathbf{v}^\top$ is the outer product of two vectors $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$. The theorem can also be stated in terms of the adjugate matrix of $\mathbf{A}$:

$$\det \left(\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^\top \right) = \det(\mathbf{A}) + \mathbf{v}^\top \operatorname{adj}(\mathbf{A}) \mathbf{u},$$

in which case it applies whether or not the square matrix $\mathbf{A}$ is invertible.

$$\det(I + tA) = \begin{cases} 1 + t \operatorname{Tr} A + t^2 \det(A) & n = 2 \\ 1 + t \operatorname{Tr} A + \frac{t^2}{2!} \left((\operatorname{Tr} A)^2 - \operatorname{Tr} A^2 \right) + t^3 \det(A) & n = 3 \\ 1 + t \operatorname{Tr} A + \frac{t^2}{2!} \left((\operatorname{Tr} A)^2 - \operatorname{Tr} A^2 \right) & \\ \quad + \frac{t^3}{3!} \left((\operatorname{Tr} A)^3 - 3 (\operatorname{Tr} A) (\operatorname{Tr} A^2) + 2 \operatorname{Tr} A^3 \right) + t^4 \det(A) & n = 4 \end{cases}$$

Proof:

$$\begin{aligned} & \det(I + tA) \\ = & \exp(\operatorname{Tr} \log(I + tA)) \\ = & \exp \left(t \operatorname{Tr} A - \frac{t^2}{2} \operatorname{Tr} A^2 + \frac{t^3}{3} \operatorname{Tr} A^3 + \cdots \right) \\ = & 1 + t \operatorname{Tr} A + \frac{t^2}{2!} \left((\operatorname{Tr} A)^2 - \operatorname{Tr} A^2 \right) + \frac{t^3}{3!} \left((\operatorname{Tr} A)^3 - 3 (\operatorname{Tr} A) \left(\operatorname{Tr} A^2 \right) + 2 \operatorname{Tr} A^3 \right) + \cdots \end{aligned}$$

When A is a $n \times n$ matrix, the above expansion terminate at the t^n term with coefficient equal to $\det A$.

Об определителях n-го порядка (!?!?!??!)

(тут крутые задачи есть!!)

Об ортогонализации матрицы (???)

Inverse matrices: Extra method of evaluation (???)

Lemma. If A and $A+B$ are invertible, and B has rank 1, then let $g = \operatorname{trace}(BA^{-1})$. Then $g \neq -1$ and

$$(A+B)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1+g} A^{-1} B A^{-1}.$$

From this lemma, we can take a general $A+B$ that is invertible and write it as $A+B = A + B_1 + B_2 + \cdots + B_r$, where B_i each have rank 1 and such that each $A + B_1 + \cdots + B_k$ is invertible (such a decomposition always exists if $A+B$ is invertible and $\operatorname{rank}(B) = r$). Then you get:

Theorem. Let A and $A+B$ be nonsingular matrices, and let B have rank $r > 0$. Let $B = B_1 + \cdots + B_r$, where each B_i has rank 1, and each $C_{k+1} = A + B_1 + \cdots + B_k$ is nonsingular. Setting $C_1 = A$, then

$$C_{k+1}^{-1} = C_k^{-1} - g_k C_k^{-1} B_k C_k^{-1}$$

where $g_k = \frac{1}{1+\operatorname{trace}\left(C_k^{-1} B_k\right)}$. In particular,

$$(A+B)^{-1} = C_r^{-1} - g_r C_r^{-1} B_r C_r^{-1}.$$

(If the rank of B is 0, then $B = 0$, so $(A+B)^{-1} = A^{-1}$).

Метод Жордана-Гаусса получения обратной матрицы через единичную матрицу (!!)

Справа, через вертикальную черту, от данной матрици A припишем единичную матрицу такого же размера. Действуя всей матрицей целиком, элементарными преобразованиями строк получим на месте матрицы A единичную матрицу. Тогда приписанная справа единичная матрица преобразуется в матрицу A^{-1}.

$$(A|E) \longrightarrow \left(E|A^{-1}\right)$$

Методы получения обратной матрицы через алгебраические дополнения

Можно там считать кучу их, потом подставлять, я даже писать про этот метод не хочу, он огромнейший, так никогда на практике не буду делать.

LU- или LUP-разложения для получения обратной матрицы

(пойму - пропишу суть)

Итерационные методы для получения обратной матрицы

(пойму - пропишу суть)

Матрицу A^{-1} можно вычислить с произвольной точностью в результате выполнения следующего итерационного процесса, называющегося методом Шульца и являющегося обобщением классического метода Ньютона:

$$X_{k+1} = 2X_k - X_k A X_k$$

Последовательность матриц X_k сходится к A^{-1} при $k \to \infty$. Существует также так называемый обобщённый метод Шульца, который описывается следующими рекуррентными соотношениями:

$$\begin{cases} \Psi_k = E - AX_k \\ X_{k+1} = X_k \sum\limits_{i=0}^{n} \Psi_k^i \end{cases}$$

2.1.3 The Jordanian Form

(допишу когда будет нужно)

Obtaining JNF

(пока не очень разобрался, но задачи такие точно есть.)

Формулировка теоремы о ЖНФ матрицы и её следствия (критерий диагонализируемости)

Теорема о ЖНФ нильпотентной матрицы

Теорема о разложении пространства в прямую сумму корневых подпространств

Единственность ЖНФ матрицы

Applications of JNF

Применение ЖНФ к линейным дифференциальным уравнениям

Предложениеобъясняет роль квазимногочленов (то есть функций вида $P(x)e^{\lambda x}$, где $P(x)$ - многочлен) в теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Предложение9.22. Многочлен $f(t)$ является характеристическим и минимальным многочленом оператора $\frac{d}{dx}$ на пространстве L всех решений уравнения (81). В частности, $\dim L = n\lambda_i$ - его корни кратностей $r_i, \sum\limits_i r_i = n$.

Применение ЖНФ к рекуррентным последовательностям

Пространство с оператором как модуль над кольцом многочленов

2.1.4 σ-matrices Pauli, Dirac γ-matrices

Свойства матриц Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_\mu = (-\mathbb{1}, \sigma_i), \quad \bar{\sigma}_\mu = \sigma^\mu = (\mathbb{1}, \sigma_i),$$

$$\sigma_j \sigma_k = \delta_{jk} I + i\varepsilon_{jk\ell}\sigma_\ell$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\sigma_j) &= 0 \\
\operatorname{tr}(\sigma_j\sigma_k) &= 2\delta_{jk} \\
\operatorname{tr}(\sigma_j\sigma_k\sigma_\ell) &= 2i\varepsilon_{jk\ell} \\
\operatorname{tr}(\sigma_j\sigma_k\sigma_\ell\sigma_m) &= 2\left(\delta_{jk}\delta_{\ell m} - \delta_{j\ell}\delta_{km} + \delta_{jm}\delta_{k\ell}\right)
\end{aligned}$$

For $\{\sigma_0 = I, \sigma_i\}$

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\sigma_\alpha) &= 2\delta_{0\alpha} \\
\operatorname{tr}(\sigma_\alpha\sigma_\beta) &= 2\delta_{\alpha\beta} \\
\operatorname{tr}(\sigma_\alpha\sigma_\beta\sigma_\gamma) &= 2\sum_{(\alpha\beta\gamma)}\delta_{\alpha\beta}\delta_{0\gamma} - 4\delta_{0\alpha}\delta_{0\beta}\delta_{0\gamma} + 2i\varepsilon_{0\alpha\beta\gamma} \\
\operatorname{tr}(\sigma_\alpha\sigma_\beta\sigma_\gamma\sigma_\mu) &= 2\left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\mu} - \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\mu} + \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\gamma}\right) + 4\left(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{0\beta}\delta_{0\mu} + \delta_{\beta\mu}\delta_{0\alpha}\delta_{0\gamma}\right) - 8\delta_{0\alpha}\delta_{0\beta}\delta_{0\gamma}\delta_{0\mu} + \\
&\quad + 2i\sum_{(\alpha\beta\gamma\mu)}\varepsilon_{0\alpha\beta\gamma}\delta_{0\mu}
\end{aligned}$$

```
PauliMatrix[k]
```

$$\sqrt{Z} = \sqrt{+1}|0\rangle\langle 0| + \sqrt{-1}|1\rangle\langle 1| = (+1)|0\rangle\langle 0| + (i)|1\rangle\langle 1| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = (+1)|+\rangle\langle +| + (-1)|-\rangle\langle -|$$

where $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ and $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$,

$$\sqrt{X} = (+1)|+\rangle\langle +| + (i)|-\rangle\langle -| = \begin{bmatrix} 0.5+0.5i & 0.5-0.5i \\ 0.5-0.5i & 0.5+0.5i \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = (+1)|i\rangle\langle i| + (-1)|-i\rangle\langle -i|$$

where $|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$ and $|-i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i|1\rangle)$ So:

$$\sqrt{Y} = (+1)|i\rangle\langle i| + (i)|-i\rangle\langle -i| = \begin{bmatrix} 0.5+0.5i & -0.5-0.5i \\ 0.5+0.5i & 0.5+0.5i \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{c\sigma_0 - \vec{V}\cdot\vec{\sigma}} = \frac{c\sigma_0 + \vec{V}\cdot\vec{\sigma}}{c^2 - |\vec{v}|^2} \qquad \rightarrow \qquad (\vec{V}\cdot\vec{\sigma})^{-1} = \frac{1}{|v|^2}\vec{V}\cdot\vec{\sigma}$$

Proof:

$$\frac{1}{c-\vec{v}\cdot\vec{\sigma}} = \frac{1}{c}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{c^n}(\vec{v}\cdot\vec{\sigma})^n = \frac{1}{c}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|v|^{2n}}{c^{2n}} + \frac{1}{c}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|v|^{2n+1}}{c^{2n+1}}(\vec{v}\cdot\vec{\sigma}) = \frac{1}{c}\frac{1}{1-\frac{|v|^2}{c^2}} + \frac{1}{c^2}\frac{1}{1-\frac{|v|^2}{c^2}}\vec{v}\cdot\vec{\sigma} = \frac{c+\vec{v}\cdot\vec{\sigma}}{c^2-|\vec{v}|^2}$$

$$\sigma_x\cos\varphi + \sigma_y\sin\varphi = e^{-i\varphi\sigma_z/2}\sigma_x e^{i\varphi\sigma_z/2}$$
$$-\sigma_y\cos\varphi + \sigma_x\sin\varphi = -e^{-i\varphi\sigma_z/2}\sigma_y e^{i\varphi\sigma_z/2}$$

(?? потому что мы вращаем пространство)

Свойства матриц Дирака

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}_4 \qquad \eta = (+,-,-,-)$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix}\mathbb{1} & 0\\ 0 & -\mathbb{1}\end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix}0 & \sigma^k\\ -\sigma^k & 0\end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix}0 & \mathbb{1}\\ \mathbb{1} & 0\end{pmatrix}$$ Dirac basis m-pl metric

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix}\mathbb{O} & \boldsymbol{\sigma}\\ \boldsymbol{\sigma} & \mathbb{O}\end{pmatrix} \equiv \sigma_1\otimes\boldsymbol{\sigma} \qquad \hat{\beta} = \begin{pmatrix}\mathbb{1} & \mathbb{O}\\ \mathbb{O} & -\mathbb{1}\end{pmatrix} \equiv \sigma_3\otimes\mathbb{1}$$ Dirac basis m-pl metric

(?!! добавлю альфа матрицы через гамма матрицы!) В многой литературы γ_0 имеет вид матрицы γ_5, я не могу что-то большее сказать, видимо, есть два определения.

$$\gamma_0 = \gamma^0 \qquad \gamma_1 = -\gamma^1. \qquad \gamma_2 = -\gamma^2. \qquad \gamma_3 = -\gamma^3.$$

$$\gamma_4 \equiv \gamma_0 = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}; \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}; \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix}0&0&0&i\\0&0&-i&0\\0&-i&0&0\\i&0&0&0\end{pmatrix}; \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}.$$

$$\gamma_5 := i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\-1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix}; \qquad \gamma^5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix};$$

(???? есть еще определение γ_5 со знаком минус. Почему именно такое как выше определение????)

For Wolvram Mathematics v>11.3:

```
ResourceFunction["DiracMatrix"]

Table[ResourceFunction["DiracMatrix"][1, "Dimension" -> 6] // MatrixForm, {k,0, 3}]
```

2.2 SLAE

SLAE - systems of linear algebraic equations.
Соберем, как решать СЛАУ.
(!?!??! тут ходовые методы!!)

General properties of SLAE

Теорема

6.39. (Теорема Кронекера-Капелли). Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу матрицы коэффициентов.

Теорема

6.41. Совместная система линейных уравнений является определенной тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы коэффициентов равен числу неизвестных.

Теорема

6.42. 1) Множество решений СЛОУ $Ax = 0$ от n неизвестных является линейным подпространством в пространстве столбцов $\mathbb{K}^n$.
2) Зафиксируем некоторое решение x_0 совместной СЛУ $Ax = b$. Тогда всякое ее решение представляется в виде $x_0 + y$, где y - некоторое решение $Ax = 0$. И обратно, любая такая сумма - решение $Ax = b$.

Теорема

6.43. Размерность пространства решений СЛОУ $Ax = 0$ от n неизвестных равна $n - \operatorname{rk} A$.

Предложение

6.47. Матрица Ф размера $n \times (n - r)$ является фундаментальной матрицей СЛОУ Ax $= 0$ тогда и только тогда, когда выполнены следуюшие два условия:

1. $A\Phi = 0$;
2. $\operatorname{rk} \Phi = n - r$.

Теорема

6.50. Пусть Ф - фундаментальная матрица СЛОУ $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Тогда система $\Phi^T \mathbf{y} = \mathbf{0}$ задает линейную оболочку столбцов матрицы A^T (то есть, по существу, строк матрицы A).

Теорема

6.51. (Теорема Фредгольма). Система $Ax = b$ разрешима тогда и только тогда, когда для любого решения y_0 сопряжснной однородной системы $A^T y = 0$ выполнено равенство $y_0^T b = 0$.

О методе Гаусса

Суть метода

О случаях применения (!?!??)

(четко напишу потом)

О методе Крамерса

Суть метода

О случаях применения (!?!??)

(четко напишу потом)

О методе подстановок

(прокатывает в самых тривиальнейших случаях)

Суть метода

О случаях применения (!?!??)

(четко напишу потом)

О методе обратной матрицы (??)

(??? насколько таким проще решать????)

Суть метода

О случаях применения (!?!??)

(четко напишу потом)

О методе Гаусса

Суть метода

О случаях применения (!?!??)

(четко напишу потом)

2.3 Bilinear and Quadratic Forms

Приведение квадратичной функции к каноническому виду

Определение10.25. Векторы $u, v \in V$ называются ортогональными относительно α, если $\alpha(u, v) = 0$. Условие ортогональности векторов записывается $u \perp v$.
Заметим, что так как α по предположению симметрична или кососимметрична, то отношение ортогональности симметрично (то есть $u \perp v \Leftrightarrow v \perp u$).

Определение10.26. Ортогональным дополнением подпространству $U \subset V$ относительно α называется подпространство

$$U^{\perp} := \{v \in V | \alpha(u, v) = 0 \forall u \in U\} \subset V$$

Очевидно, что

$$V^{\perp} = \operatorname{Ker} \alpha$$

Предложение10.27. Если функиия α невырождена, то

$$\dim U^{\perp} = \dim V - \dim U \quad u \left(U^{\perp}\right)^{\perp} = U$$

Определение10.29. Подпространство $U \subset V$ называется невырожденным относителъно α, если ограничение $\alpha|_U$ невырождено.

Предложение10.31. Подпространство $U \subset V$ невырождено относительно α тогда и только тогда, когда $V = U \oplus U^{\perp}$.

Определение10.32. Базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V называется ортогональным относительно α, если его векторы попарно ортогональны, то есть $\alpha(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$.

10.3 Билинейные симметричные (квадратичные) функции над полями C и R

Определение10.35. Нормальным видом квадратичной функции над полем $\mathbb{C}$ (соответственно над $\mathbb{R}$) называется вид (94) (соответственно (95)).

Предложение10.36. Для произвольной квадратичной функиии q на векторном пространстве V над полем $\mathbb{C}$ (соответственно $\mathbb{R}$) существует базис в V, в котором она записывается в нормальном виде (94) (соответственно (95)).

Определение10.38. Вещественная квадратичная функция $q : V \to \mathbb{R}$ называется положительно определенной, если $q(v) > 0$ для любого $v \in V, v \neq 0$. Вещественная билинейная симметричная функция α называется положительно определенной, если соответствующая ей квадратичная функция q_α положительно определена. Аналогично определяются отрицательно определенные вещественные квадратичные и симметричные билинейные функции.

10.4 Алгоритмы приведения к нормальному виду

10.5 Критерий Сильвестра

Определение 1. Квадратичная функция $k(x)$ на линейном пространстве L (здесь пространство задаётся над полем вещественных чисел: $K = \mathbb{R}$) называется положительно определённой, если $\forall x \in L : x \neq 0 \hookrightarrow k(x) > 0$;

отрицательно определённой, если $\forall x \in L : x \neq 0 \hookrightarrow k(x) << 0$;

неотрицательно определённой (положительно полуопределённой), если $\forall x \in L \hookrightarrow k(x) \geqslant 0$;

неположительно определённой (отрицательно полуопределённой), если $\forall x \in L \hookrightarrow k(x) \leqslant 0$;

знаконеопределённой, если $\exists x_1, x_2 \in L$ и $k(x_1) > 0, k(x_2) < 0$.

Лемма 1. Квадратичная форма тогда и только тогда является положительно определенной, когда она приводится к диагональному виду $\sum_{i=1}^n \alpha_i z_i^2, \alpha_i > 0, i = \overline{1, n}$ или, что равносильно, каноническому виду $\sum_{i=1}^n y_i^2$.

Теорема 1 (Критерий Сильвестра). Для положительной определенности квадратичной формы $k(x)$ в $\mathbb{R}^n$ необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры её матрицы B, имеющие вид

$$\Delta_m = \det \left\| \begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{array} \right\| (b_{ij} = b_{ji} \forall i, j), m = \overline{1, n},$$

были положительными

(add comments about the proof, why is it so?)

Следствие 1 (Критерий Сильвестра для отрицательной определенности). Для отрицательной определенности квадратичной формы $k(x)$ в $\mathbb{R}^n$ необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее матрицы B имели чередующиеся знаки, начиная с минуса, т.е. $(-1)^m \Delta_m > 0, m == \overline{1, n}$.

Канонический вид кососимметричной билинейной формы

10.6 Алгоритм Грама-Шмидта и метод Якоби

10.7 Кососимметрические билинейные функции

Соответствие между квадриками и квадратичными функциями

Типы квадрик

Малый и большой ранг квадрики. Свойства конусов и цилиндров

2.4 Typical Abstract Linear Algebra

2.4.1 Linear Spaces, Linear Mappings: Basic Properties

О ядрах и образе (???)

(?? add some theorems)

7.1 Subspaces and Direct Sums

Определение

7.1. Базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ в V называется согласованным с подпространством U, если $U = \langle e_{i_1}, \dots, e_{i_k}\rangle$ (то есть U является линейной оболочкой некоторого подмножества векторов данного базиса).

Определение

7.2. Суммой подпространств $U, W \subset V$ называется подпространство $U + W$ в V.
Заметим, что объединение двух подпространств $U, W \subset V$ как правило не является подпространством в V (только подмножеством).

Определение

7.5. Пересечением подпространств $U, W \subset V$ называется подпространство, множество элементов которого является их обычным теоретико-множественным пересечением $U \cap W$ как подмножеств в V.

Теорема

7.7. Для любой пары подпространств $U, W \subset V$ существует базис в V, согласованный с U и W.

Предложение

7.11. Сумма двух подпространств $U+W$ прямая тогда и только тогда, когда $U \cap W = 0$.

Предложение

7.12. $V = U \oplus W \Leftrightarrow U \cap W = 0 u \dim V = \dim U + \dim W$.

Определение

7.13. Пусть $U \subset V$ - некоторое подпространство. Подпространство $W \subset V$ называется прямым дополнением к U в V, если $V = U \oplus W$.

Определение

7.16. Если $V = U \oplus W$, то для любого $v \in V$ существуют единственные векторы $u \in U, w \in W$ такие, что $v = u + w$. В этой ситуации u называется проекцией вектора v на подпространство U параллельно подпространству W (обозначение $\mathrm{Pr}_U^{\|W} v$), а w - проекцией вектора v на подпространство W параллельно подпространству U (обозначение $\mathrm{Pr}_W^{\|U} v\Big)$.

Предложение

7.25. Следующие свойства системы подпространств $U_1, \ldots, U_k \subset V$ равносильны:

1. подпространства $U_1, \ldots, U_k$ линейно независимв;
2. обдединение базисов подпространств $U_1, \ldots, U_k$ линейно независимо;
3. $\dim (U_1 + \ldots + U_k) = \dim U_1 + \ldots + \dim U_k$.

7.2 Linear Mappings and Transformations

Определение

7.29. Отображение $\varphi : V \to U$ между линейными пространствами (над фиксированным полем $\mathbb{K}$) называется линейным, если

1. $\varphi (v_1 + v_2) = \varphi (v_1) + \varphi (v_2)$ для любых $v_1, v_2 \in V$ ("аддитивность");
2. $\varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v)$ для любых $v \in V$ и $\lambda \in \mathbb{K}$ ("однородность").

Предложение

7.48. (Критерий инъективности и сюръективности). Линейное отображение $\varphi : V \to U$ инбективно (соответственно сюрбективно) тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} \varphi = 0$ (соответственно $\operatorname{Im} \varphi = U$).

Следствие

7.49. Линейное отображение $\varphi : V \to U$ биективно тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} \varphi = 0 u \operatorname{Im} \varphi = U$.

7.3 Setting Linear Maps on Bases. Isomorphisms

Lemma

7.52. Если $\{e_1, \ldots, e_n\}$ - базис в V, то для любого векторного пространства U над тем же полем и любой системы векторов $\{u_1, \ldots, u_n\}$ в U существует и единственно такое линейное отображение $\varphi : V \to U$, что $\varphi (e_i) = u_i, \quad i = 1, \ldots, n$.

Предложение

7.53. Пусть V - линейное пространство, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ - базис в V. Пусть U - еще одно пространство над тем же полем, $\{u_1, \ldots, u_n\}$ - система векторов в U. Тогда линейное отображение $\varphi : V \to U$ такое, что $\varphi(e_i) = u_i, \quad i = 1, \ldots, n$ является инъективным тогда и только тогда, когда система $\{u_1, \ldots, u_n\}$ линейно независима.

Предложение

7.64. Отношение изоморфности на множестве всех линейных пространств над данным полем - отношение эквивалентности.

Теорема

7.65. Два конечномерных пространства U, V над полем $\mathbb{K}$ изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.

7.4 Linear Mapping Matrix

Определение

7.67. Матрица A размера $m \times n$ называется матрицей линейного отображения φ относительно выбранных базисов, если

$$(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n)) = (f_1, f_2, \ldots, f_m) A$$

Пусть $\mathcal{L}(V, U)$ обозначает множество всех линейных отображений $V \to U$. Заметим, что матрица A однозначно определена отображением φ и выбранными базисами. Тем самым сопоставление линейному отображению его матрицы в выбранной паре базисов задает некоторое отображение $\mu = \mu_{e,f} : \mathcal{L}(V, U) \to \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

Предложение

7.68. Отображение μ является биекцией (зависящей от выбранных базисов в V и U).

Предложение

7.71. Если $\xi := (v_1, \ldots, v_n)^T$ - координатный столбец, вектора $v \in V$ в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$, то $A\xi$ - координатный столбец, вектора $\varphi(v) \in U$ в базисе $\{f_1, \ldots, f_m\}$.

Предложение

7.72. Пусть $\varphi : V \to U$ - линейное отображение, A - его матрица относительно старых базисов $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и $\{f_1, \ldots, f_m\}$ в V и U соответственно, C матриц, перехода от $\{e_1, \ldots, e_n\}$ к новому базису в V $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$, а D - матрица перехода от $\{f_1, \ldots, f_m\}$ к новому базису $\{f'_1, \ldots, f'_m\}$ в U. Пусть A' - матрица отображения φ относительно новых базисов. Тогда

$$A' = D^{-1} A C \tag{54}$$

В частности, если φ - линейное преобразование (то есть $U = V$), то

$$A' = C^{-1} A C \tag{55}$$

Предложение

7.75. Если A - матрица линейного отображения $\varphi : V \to U$ (относительно произвольной пары базисов), то $\operatorname{rk} A = \dim \operatorname{Im} \varphi$.

7.5 Linear Mapping Operations

Предложение

7.82.
В введенных выше обозначениях матрица D композиции $\psi \circ \varphi$ относительно пары базисов $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и $\{g_1, \ldots, g_k\}$ есть BA.

7.6 Linear Functions and Conjugate Space

Определение

7.89. Линейной функцией на V называется такая функция $f : V \to \mathbb{K}$, что

1. $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \forall v_1, v_2 \in V$;
2. $f(\lambda v) = \lambda f(v) \forall v \in V, \lambda \in \mathbb{K}$.

Определение

7.98. Линейное пространство всех линейных функций на V называется сопряженным пространством к V и обозначается V^*.
Таким образом,

$$V^* = \{f : V \to \mathbb{K} | f \text{ линейна } \}.$$

Предложение

7.99. Система координатных функций $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ является базисом в V^*.

Теорема

7.104. Если пространство V конечномерно, то оно канонически изоморфно своему дважды сопряженному пространству V^{**}.

Предложение

7.109. $\dim U^0 = n - \dim U$.

Предложение

7.115. Операция $\star : \mathcal{L}(U, V) \to \mathcal{L}(V^*, U^*)$ обладает следующими свойствами:

1. $(\varphi_1 + \varphi_2)^\star = \varphi_1^\star + \varphi_2^\star, (\lambda\varphi)^\star = \lambda\varphi^\star$ (линейностъ);
2. $\mathrm{Id}_V^\star = \mathrm{Id}_{V^*}$;
3. для всех линейных отображений $\varphi : U \to V$ диаграммы

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\vartheta^V"] & V^{**} \\ U \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\vartheta^U"] & U^{**} \arrow[u, "\varphi^{\star\star}"'] \end{tikzcd}$$

коммутативны (то есть при канонических изоморфизмах $\vartheta^U : U \cong U^{**}$, $\quad \vartheta^V : V \cong V^{**}$ отображение $\varphi^{\star\star}$ отождествляется с φ).
4) Если $\psi : V \to W$ - еще одно линейное отображение, $(\psi \circ \varphi)^\star = \varphi^\star \circ \psi^\star$,

Factor-space

(add theorems about it!)

2.4.2 Linear Operators (!?)

8.1 Definition and Simplest Properties

Определение

8.1. Линейным оператором на линейном пространстве V называется линейное отображение $\varphi : V \to V$

8.2 Invariant Subspaces

Пусть $\varphi : V \to V$ - линейный оператор на V.

Определение

8.12. Подпространство $U \subset V$ называется φ-инвариантным, если $\forall u \in U \varphi(u) \in U$ (коротко: $\varphi(U) \subset U$).

Предложение

8.14. Если операторы φ и коммутируют, то $\operatorname{Ker} \varphi$ инвариантно относительно ψ, и наоборот. То же верно и для образов.

Определение

8.15. Если $U \subset V - \varphi$-инвариантное подпространство, то определен линейный оператор

$$\varphi|_U : U \to U, \quad \varphi|_U (u) = \varphi(u) \in U$$

на U, называемый ограничением [38] оператора φ на (инвариантное) подпространство U.

Определение

8.21. Оператор, для которого существует базис, в котором он имеет диагональную матрицу, называется диагонализируемым.

Предложение

8.25. Пусть $\varphi : V \to V$ - линейный оператор. Тогда подпространство $U \subset V \varphi$ инвариантно тогда и только тогда, когда его аннулятор $U^0 \subset V^* \varphi^\star$-инвариантен.

8.3 Eigenvectors and Subspaces

Определение

8.27. Пусть V - векторное пространство над полем $\mathbb{K}$. Ненулевой вектор $v \in V$ называется собственным вектором оператора $\varphi : V \to V$, отвечающим собственному значению $\lambda \in \mathbb{K}$, если $\varphi(v) = \lambda v$.

Определение

8.34. Ненулевое подпространство V_λ, определенное равенством (64), называется собственным подпространством оператора φ, отвечающим собственному значению λ (или, более коротко, с собственным значением λ).

Теорема

8.45. Элемент $\lambda \in \mathbb{K}$ является собственным значением оператора φ тогда и только тогда, когда он является корнем его характеристического многочлена $\chi_\varphi(t)$, лежашим в поле $\mathbb{K}$.

Следствие

8.47. Всякий оператор в пространстве положительной размерности над полем $\mathbb{C}$ имеет собственный вектор.

8.4 Diagonalizability

Теорема

8.50. Собственные подпространства оператора φ, отвечающие разным собственным значениям, линейно независимы.

Следствие

8.52. Если характеристический многочлен $\chi_\varphi(t)$ имеет $n = \dim V$ различных корней, принадлежащих полю $\mathbb{K}$, то оператор φ диагонализируем.

Определение

8.54. Назовем алгебраической кратностью собственного значения λ оператора φ кратность λ как корня характеристического многочлена $\chi_\varphi(t)$. Обозначим ее $m(\lambda)$.

Определение

8.55. Назовем геометрической кратностью собственного значения λ оператора φ размерность соответствующего ему собственного подпространства $V_\lambda \subset V$. Обозначим ее $g(\lambda)$.

Следствие

8.56. Для любого собственного значения λ оператора φ его геометрическая кратность не превосходит алгебрачческую, $g(\lambda) \leq m(\lambda)$.

Теорема

8.58. Для существования в V базиса из собственных векторов оператора $\varphi : V \to V$ необходимо и достаточно одновременного выполнения следующих двух условий:

1. все корни характеристического многочлена $\chi_\varphi(t)$ лежат в поле $\mathbb{K}$ (и, значит, являются собственными значениями φ);
2. для каждого собственного значения λ оператора φ его геометрическая кратность равна алгебраической, $g(\lambda) = m(\lambda)$.

8.5 Hamilton-Cayley Theorem

Предложение

8.69. Для оператора φ в конечномерном пространстве V над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ существует такой базис в V, в котором матрица φ является верхнетреугольной.

Теорема

8.74. (Гамильтон-Кэли) Характеристический многочлен $\chi_\varphi(t)$ аннулирует *оператор* φ.

8.6 Factor Space and Factor Operator

Предложение

8.84. Пусть W - произвольное прямое дополнение *к* подпространству U в V. Тогда ограничение $\pi|_W : W \to V/U$ - изоморфизм линейных пространств.

Предложение

8.89. следующие условия эквивалентны:

1. система $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ $(v_i \in V)$ является базисом в V над U;
2. система $\{v_1 + U, v_2 + U, \ldots, v_m + U\} -$ в V/U;
3. система $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ линейно независима (в обычном смысле) *и* $\langle v_1, v_2, \ldots, v_m\rangle$ - прямое дополнение *к*U в V, то есть

$$V = \langle v_1, v_2, \ldots, v_m\rangle \oplus U$$

Предложение

8.97. Диаграмма

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\varphi|_W"] \arrow[d, "\pi|_W"', "\cong"] & W \arrow[d, "\cong"] \\ V/U|_W \arrow[r, "\bar{\varphi}_{V/U}"] & V/U \end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть $\bar{\varphi}_{V/U} \circ \pi|_W = \pi|_W \circ \varphi|_W$.

Сопряженные, самосопряженные, унитарные преобразования

пусть V - унитарное пространство, а $\varphi : V \to V$ - линейный оператор на нем.

Определение 13.22. Преобразование $\varphi^* : V \to V$ называется сопряженным к φ, если оно удовлетворяет тождеству

$$(\varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \varphi^*(\mathbf{v})) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$$

Определение 13.24. Оператор $\varphi : V \to V$ на унитарном пространстве V называется самосопряженным или эрмитовым, если он равен своему сопряженному, $\varphi = \varphi^*$.

Предложение 13.27. Все собственные значения самосопряжсенного оператора φ на унитарном пространстве V вещественны.

Теорема 13.29. (Теорема о каноническом виде эрмитового оператора). Линейный оператор φ в унитарном пространстве V самосопряжен $\Leftrightarrow$ он диагонализируется в некотором ортонормированном базисе и имеет вещественный спектр [62].

Следствие 13.30. Для любой эрмитовой матрицы A существует унитарная матрица U такая, что матрица $A' = \bar{U}^T A U$ диагональна с вещественными элементами на диагонали.

Пусть V - унитарное пространство с эрмитовым скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$.

Определение 13.31. Линейный оператор $\varphi : V \to V$ называется унитарным, если для любых $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$

$$(\varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v})) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \tag{121}$$

Получим теперь канонический вид унитарного преобразования $\varphi : V \to V$.
Предложение 13.32. (ср. Предложение 12.38) Если $U \subset V$ является φ-инвариантным, то и $U^{\perp} \subset V$ является φ-инвариантным.

Предложение 13.33. Если λ - собственное значение унитарного оператора φ, то $|\lambda| = 1$ (заметим, что λ, вообще говоря, комплексное число).

Об ортогональных преобразованиях (????)

Определение 12.34. Преобразование φ называется ортогоналвным, если оно сохраняет скалярное произведение, то есть

$$\forall u, v \in V \quad (\varphi(u), \varphi(v)) = (u, v) \tag{108}$$

Теорема Гамильтона—Кэли и её следствия

(Ершов 8.5)

8.6 Факторпространство и фактороператор

2.4.3 Group Theory: Basic Concepts

4.1 Group Homomorphisms and Isomorphisms

Определение

4.1. Пусть $(G, \cdot)$ и $(H, *)$ - две группы. Биективное отображение

$$\varphi : G \to H$$

называется изоморфизмом между $(G, \cdot)$ и $(H, *)$, если для любых $g_1, g_2 \in G$

Определение

4.10. Пусть $(G, \cdot)$ и $(H, *)$ - две группы. Отображение

$$\varphi : G \to H$$

называется гомоморфизмом между $(G, \cdot)$ и $(H, *)$, если для любых $g_1, g_2 \in G$

$$\varphi\left(g_1 \cdot g_2\right) = \varphi\left(g_1\right) * \varphi\left(g_2\right) \tag{25}$$

4.2 Cyclic Groups

n - наименьшее натуральное число такое, что $g^n = e$. Такое n называется порядком элемента $g \in G$ и обозначается $\operatorname{ord}(g)$.

Следствие

4.30. При изоморфизме групп элемент порядка n переходит в элемент порядка n.

Proof.

$$n = \operatorname{ord}\left(\varphi^{-1}(\varphi(g))\right) \mid \operatorname{ord}(\varphi(g)) \mid \operatorname{ord}(g) = n$$

□

Предложение

4.34. Если $\operatorname{ord}(g) = n$, то

$$\operatorname{ord}\left(g^k\right) = \frac{n}{(n, k)}$$

Определение

4.35. Группа G называется циклической, если существует такой элемент $g \in G$, что $G = \langle g \rangle$. Всякий такой элемент называется порождающим элементом группы G.

Предложение

4.39. Элемент g^k циклической группы $G = \langle g \rangle$ порядка n является порождающим тогда и только тогда, когда $(n, k) = 1$.

Определение

4.40. Число натуральных чисел среди $1, 2, \ldots, n$, взаимно простых с n, называется функцией Эйлера и обозначается $\phi(n)$.

Теорема

4.42. Всякая бесконечная циклическая группа изоморфна группе $\mathbb{Z}$. Всякая конечная циклическая группа порядка n изоморфна группе $\mathbb{Z}_n$.

Теорема

4.46. 1) Всякая подгруппа циклической группы сама является циклической.
2) В циклической группе порядка n порядок любой подгруппы делит n и для любого делителя d числа n существует, и притом только одна подгруппа порядка d.

4.3 Symmetric Groups

Предложение

4.51. Отображение

$$\operatorname{sgn} : S_n \to C_2 = \{\pm 1\}, \quad \sigma \mapsto \operatorname{sgn}(\sigma)$$

является гомоморфизмом групп.

Предложение

4.55. $\operatorname{sgn}(i_1 i_2 \ldots i_k) = (-1)^{k-1}$. Словами: цикл четной длины - нечетная подстановка и наоборот.

Предложение

4.58. Две подстановки $\sigma, \sigma' \in S_n$ принадлежат одному классу сопряженных элементов в $S_n \Leftrightarrow$ они имеют одинаковый цикловой тип.

Lemma

4.59. Если образ гомоморфизма групп $\varphi : G \to S_n$ содержит все транспозиции в S_n, то $\operatorname{Im} \varphi = S_n$, то есть φ сюръективен.
(write that this topic can be used actually!!!)

4.4 Generating Sets

Предложение

4.67. Группа S_n порождается смежными транспозициями (12), (23), $\ldots, (n-1n)$, причем минимальное число смежных транспозиций, в произведение которых может быть разложена подстановка $\sigma \in S_n$, равно числу инверсий в нижней строке ее стандартной записи

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

4.5 Adjacent Classes

Классы этой эквивалентности называются левыми смежными классами группы G по подгруппе H. Ясно, что смежный класс, содержащий элемент g, имеет вид

$$gH := \{gh | h \in H\} \subset G$$

(эта запись аналогична записи $k + n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ смежного класса $[k]$ по модулю n). Одним из смежных классов является подмножество $H \subset G$.

Поскольку умножение в группе G не предполагается коммутативным, мы получим, вообще говоря, другое отношение эквивалентности $\sim'_H$, взяв вместо условия (29) аналогичное ему условие

$$g_2 g_1^{-1} \in H \tag{30}$$

Классы эквивалентности $\sim'_H$ называются правыми смежными классами группы G по подгруппе H. Они имеют вид

$$Hg := \{hg | h \in H\}$$

Теорема 4.79. (теорема Лагранжа)

Пусть G - конечная группа и H - любая ее подгруппа, тогда

$$|G| = [G : H]|H| \tag{31}$$

Следствие

4.82. Порядок любого элемента конечной группы делит порядок группы.
Ибо порядок элемента равен порядку порождаемой им циклической подгруппы.

Следствие

4.83. Всякая конечная группа простого порядка является циклической.

Следствие

4.85. Если $|G| = n$, то $g^n = e$ для любого $g \in G$.

Следствие 4.86. (теорема Эйлера)

Для любого $a \in \mathbb{Z}$, взаимно простого с натуральным $n \in \mathbb{N}$, имеет место сравнение

$$a^{\phi(n)} \equiv 1(\mathrm{mod} n)$$

4.6 Factor Group and Homomorphism Theorem

Определение

4.88. Подгруппа $K \subset G$ называется нормалъной (обозначение: $K \triangleleft G$), если $\forall g \in G gK = Kg$. Последнее эквивалентно также условию $\forall g \in G K = gKg^{-1}$.
Тем самым мы доказали такое

Предложение

4.89. Ядро гомоморфизма групп $\varphi : G \to H$ - нормальная подгруппа в G.

Предложение

4.90. В введенных выше обозначениях пусть $h \in \operatorname{Im} \varphi$. Тодда $\varphi^{-1}(h) = g$ для произвольного $g \in G$ такого, что $\varphi(g) = h$.

Предложение

4.91. Разбиение группы на левые смежные классы по подгруппе K согласовано с операцией в G (см. Определение 1.40) тогда и только тогда, когда $K \triangleleft G$.

Следствие

4.92. Если $K \triangleleft G$, то

$$g_1 K \cdot g_2 K = (g_1 g_2)\, K$$

задает корректно определенную операцию на множестве смежных классов G по K.

Теорема 4.93. (Основная теорема о гомоморфизмах групп)

Пусть $\varphi : G \to H$ - сюрбективный гомоморфизм групп с ядром K. Тогда $H \cong G/K$. Более точно, отображение $f : G/K \to H$ заданное формулой $f(gK) = h$, где $h = \varphi(g)$, задаёт изоморфизм групп $G/K \to H$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & H \\ & G/K \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Предложение

4.100. Если $N \triangleleft G$, то N либо целиком содержит класс сопряженных элементов в G, либо не пересекается с ним. (Иными словами, N является объединением некоторого множества классов сопряженных элементов в G). Наоборот, если объединение некоторых классов сопряженных элементов является подгруппой, то эта подгруппа нормальна.

Предложение

4.101. Пусть G - произвольная группа. Любое отношение эквивалентности, согласованное с операцией в G является отношением сравнимости по модулю некоторой нормальной подгруппы $K \triangleleft G$.

4.7 Direct Products (direct Sums) of Groups

Определение

4.102. Пусть $(G, \cdot)$ и $(H, *)$ - две группы. Их прямым произведением называется множество $G \times H$ с покомпонентной операцией

$$(g_1, h_1) \circ (g_2, h_2) = (g_1 \cdot g_2, h_1 * h_2)$$

Предложение

4.103. Если элементы $g \in Guh \in H$ имеют конечные порядки, mo $\mathrm{ord}(g, h) =$ НОК$(\mathrm{ord}(g), \mathrm{ord}(h))$

Предложение

4.111. Группа $\mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}_l$ является циклической тогда и только тогда, когда $(k, l) = 1$.

Предложение

4.112. Пусть $n = n_1 n_2 \dots n_s$, где натуральные числа $n_1, n_2, \dots, n_s$ попарно взаимно просты. Тогда отображение

$$\varphi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{n_s}, \quad [a]_n \mapsto ([a]_{n_1}, [a]_{n_2}, \dots, [a]_{n_s})$$

является изоморфизмом групп.

Следствие

4.113. Если $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}$ - разложение натурального n на различные простые множители, то

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{k_2}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_s^{k_s}}$$

Например,

$$\mathbb{Z}_{60} \cong \mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_{15} \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{20} \cong \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$$

В то же время, например, $\mathbb{Z}_{60} \ncong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{30}$.

Примарной циклической группой называется циклическая группа, порядок которой является степенью простого числа.

Теорема

4.115. Любая конечная абелева группа раскладывается в прямую сумму примарных циклических подгрупп, причем набор порядков этих подгрупп определен однозначно.

Например, с точностью до изоморфизма, существует ровно 3 абелевы группы порядка 24, это:

$$\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_3, \quad \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3, \quad \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$$

первая из них является циклической.

4.8 A few Words About Topological Groups

Определение

4.116. Топологической группой называется группа G, одновременно являющаяся топологическим пространством, такая что операции умножения и взятия обратного (33) являются непрерывными.

Определение

4.121. Вещественным (комплексным) линейным представлением группы G называется пара (ρ, V), где V - линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ (соотв. $\mathbb{C}$), а $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(V)$ - гомоморфизм групп (в случае топологической группы G непрерывный).

2.4.4 Euclidean, Unitary Spaces: General Properties

(тоже мб займусь потом.)

О матрице Грама

Определение 11.12. Матрицей Грама $G(v_1, \ldots, v_k)$ системы векторов $\{v_1, \ldots, v_k\}$ евклидова пространства V называется матрица $G = (g_{ij}), g_{ij} = (v_i, v_j)$, составленная из их попарных скалярных произведений.

Теорема 11.15. Для любых двух векторов u, v евклидова пространства V имеет место неравенство $|(u,v)| \leq |u||v|$, причем оно превращается в равенство тогда и только тогда, когда векторы u и v линейно зависимы.

Определим функцию $\rho : V \times V \to \mathbb{R}$ на евклидовом пространстве V равенством $\rho(u,v) := |u - v|$. Тогда она обладает следующими свойствами:
(i) $\rho(u,v) = \rho(v,u)$;
(ii) $\rho(u,u) = 0; \rho(u,v) > 0$ при $u \neq v$;
(iii) $\rho(u,w) \leq \rho(u,v) + \rho(v,w)$.

Например, если A и B - произвольные подмножества в V, то определим расстояние между ними как

$$\rho(A,B) := \inf\{\rho(a,b) | a \in A, b \in B\}$$

Получим формулу для расстояния от вектора $v \in V$ до подпространства $U \subset V$. Напомним, что $V = U \oplus U^\perp$ и $v = pr_U(v) + \mathrm{ort}_U(v)$.

Предложение 11.18. $\rho(v,U) = |ort_U(v)|$.

Об ортогональном дополнении

Об ортогонализации

(типичные задачи про это есть, соберу потом)

Вращение пространства

Rodrigues' rotation formula

If $\mathbf{v}$ is a vector in $\mathbb{R}^3$ and $\mathbf{k}$ is a unit vector describing an axis of rotation about which $\mathbf{v}$ rotates by angle θ according to the right hand rule, the Rodrigues formula for the rotated vector $\mathbf{v}_{\text{rot}}$ is

$$\mathbf{v}_{\text{rot}} = \mathbf{v}\cos\theta + (\mathbf{k} \times \mathbf{v})\sin\theta + \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})(1 - \cos\theta).$$

(?????)

11.3 Описание линейных функций на евклидовом пространстве 251

11.4 Матрица Грама и неравенство Коши-Буняковского 252

11.5 Расстояния в евклидовом пространстве 254

11.6 Замечание о топологии метрических пространств 255

11.7 Алгоритм Грама-Шмидта 256

11.8 Описание ортонормированных базисов 259

11.9 Изоморфизмы евклидовых пространств 260

2.4.5 Euclidean, Unitary Spaces: Operators

11.10 QR-разложение 261

12.1 Сопряженное отображение и двойственные пространства 263

В бесконечномерном гильбертовом пространстве аналогичная есть -

Теорема представлений Риса (также теорема Риса — Фреше) — каждый линейный ограниченный функционал в гильбертовом пространстве может быть представлен через скалярное произведение с помощью некоторого элемента.

12.2 Теорема Фредгольма 266

Пусть $\varphi : U \to V$ - линейное отображение между евклидовыми пространствами.
Теорема 12.8. $\operatorname{Im} \varphi = (\operatorname{Ker} \varphi^*)^{\perp}$ (равенство подпространств в V).

Следствие 12.9. Система (102) при данном столбце правых частей $\vec{b}$ разрешима $\Leftrightarrow$ $\vec{b}$ ортогонален любому решению $\vec{y}$ сопряженной однородной системы (здесь ортогональность понимается в смысле "стандартного скалярного произведения", $\sum\limits_{i=1}^{m} y_i b_i = 0$).

12.3 Самосопряженные преобразования 267

12.4 Связь между линейными операторами и билинейными функциями на евклидовом пространстве 268

12.5 Существование ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного оператора

2.4.6 Tensor Algebra: Fundamentals (!?)

Понятие о тензорах. Тензоры валентности

Координаты тензора. Понятие о свёртке

Об индексах (!!!!)

(напишу четко, это же в теории поля короче написано. путаница с ними точно будет, если четко это не понять!)

Кососимметричные тензоры. Свойства операции альтернирования

Внешнее умножение и внешняя алгебра

Базис внешней алгебры

Внешнее умножение и определители

О тензорном произведении

(напишу суть, вроде понимаю уже.)

Типичные преобразования символов Кронекера и Леви-Чивиты (!)

$$e_{ikl}e_{lmn} = \delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km}$$
$$e_{ikl}e_{klm} = 2\delta_{im}$$

16.2 Тензорное произведение тензоров

Определение 16.7. Тензорным произведением тензоров $\varphi \in \mathbf{T}_q^p(V)$ и $\psi \in \mathbf{T}_s^r(V)$ называется тензор $\varphi \otimes \psi \in \mathbf{T}_{q+s}^{p+r}(V)$, определяемый формулой

$$(\varphi \otimes \psi)(v_1, \ldots, v_{q+s}; f_1, \ldots, f_{p+r}) = \varphi(v_1, \ldots, v_q; f_1, \ldots, f_p)\,\psi(v_{q+1}, \ldots, v_{q+s}; f_{p+1}, \ldots, f_{p+r})$$

где $v_i \in V, f_j \in V^*$.
тензорное произведение определяет билинейное отображение

$$\mathbf{T}_q^p(V) \times \mathbf{T}_s^r(V) \to \mathbf{T}_{q+s}^{p+r}(V)$$

то есть $(\varphi_1 + \varphi_2) \otimes \psi = \varphi_1 \otimes \psi + \varphi_2 \otimes \psi, (\lambda\varphi) \otimes \psi = \lambda(\varphi \otimes \psi)$ и т.д.

16.3 Координаты тензора

Определение 16.7. Тензорным произведением тензоров $\varphi \in \mathbf{T}_q^p(V)$ и $\psi \in \mathbf{T}_s^r(V)$ называется тензор $\varphi \otimes \psi \in \mathbf{T}_{q+s}^{p+r}(V)$, определяемый формулой

$$(\varphi \otimes \psi)(v_1, \ldots, v_{q+s}; f_1, \ldots, f_{p+r}) = \varphi(v_1, \ldots, v_q; f_1, \ldots, f_p)\,\psi(v_{q+1}, \ldots, v_{q+s}; f_{p+1}, \ldots, f_{p+r})$$

где $v_i \in V, f_j \in V^*$. Тот факт, что тензорное произведение действительно представляет собой тензор указанного типа (полилинейное отображение), очевиден. Также просто проверяется, что тензорное произведение определяет билинейное отображение

$$\mathbf{T}_q^p(V) \times \mathbf{T}_s^r(V) \to \mathbf{T}_{q+s}^{p+r}(V)$$

то есть $(\varphi_1 + \varphi_2) \otimes \psi = \varphi_1 \otimes \psi + \varphi_2 \otimes \psi, (\lambda\varphi) \otimes \psi = \lambda(\varphi \otimes \psi)$ и т.д.

Следствие 16.12. Если $\dim V = n, mo \dim \mathbf{T}_q^p(V) = n^{p+q}$.

16.4 Изменение координат тензора при замене базиса

Напомним, что замена базиса задается матрицей перехода. Итак, пусть даны два базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ в V и C - матрица перехода от первого ко второму, то есть

$$(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)\,C$$

Последнее равенство в наших новых обозначениях перепишется в виде $e'_i = \sum\limits_j e_j c_i^j$ (напомним, что верхний индекс - номер строки, а нижний - столбца). Пусть

$$e'^i = \sum_j d_j^i e^j$$

где $D = \left(d_j^i\right)$ - некоторая матрица порядка n. Имеем

$$\delta_j^i = e'^i\left(e'_j\right) = e'^i\left(\sum_k e_k c_j^k\right) = \sum_l d_l^i e^l\left(\sum_k e_k c_j^k\right) = \sum_{k,l} d_l^i \delta_k^l c_j^k = \sum_k d_k^i c_j^k$$

(произведение i-й строки матрицы D на j-й столбец матрицы C), откуда $D = C^{-1}$. В матричном виде:

$$\begin{pmatrix} e'^1 \\ \vdots \\ e'^n \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} e^1 \\ \vdots \\ e^n \end{pmatrix}$$

Пусть $\varphi \in \mathbf{T}_q^p(V)$ - некоторый тензор,

$$\varphi'^{k_1\ldots k_p}_{l_1\ldots l_q} = \varphi\left(e'_{l_1},\ldots,e'_{l_q};e'^{k_1},\ldots,e'^{k_p}\right) = \varphi\left(\sum_{j_1} e_{j_1}c_{l_1}^{j_1},\ldots,\sum_{j_q} e_{j_q}c_{l_q}^{j_q};\sum_{i_1} d_{i_1}^{k_1}e^{i_1},\ldots,\sum_{i_p} d_{i_p}^{k_p}e^{i_p}\right) =$$
$$= \sum c_{l_1}^{j_1}\ldots c_{l_q}^{j_q} d_{i_1}^{k_1}\ldots d_{i_p}^{k_p}\varphi\left(e_{j_1},\ldots,e_{j_q};e^{i_1},\ldots,e^{i_p}\right) = \sum c_{l_1}^{j_1}\ldots c_{l_q}^{j_q} d_{i_1}^{k_1}\ldots d_{i_p}^{k_p}\varphi^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$$

Таким образом, получаем искомую формулу преобразования координат тензора:

$$\varphi'^{k_1\ldots k_p}_{l_1\ldots l_q} = \sum c_{l_1}^{j_1}\ldots c_{l_q}^{j_q} d_{i_1}^{k_1}\ldots d_{i_p}^{k_p}\varphi^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$$

16.5 Свертка

Свертка тензора типа (p,q), где $p,q \geq 1$, по фиксированной паре индексов (один из которых верхний, а другой - нижний) - некоторое специальное линейное отображение $\mathbf{T}_q^p(V) \to \mathbf{T}_{q-1}^{p-1}(V)$.

Определим сначала частный случай свертки - для тензоров типа $(1,1)$. В этом случае свертка единственна (так как имеется только один верхний и один нижний индекс) и представляет собой линейное отображение $\mathbf{T}_1^1(V) \to \mathbb{K}$ (то есть линейный функционал на пространстве $\mathbf{T}_1^1(V)$), определяемый следующим образом. Выберем произвольный базис $\{e_1,\ldots,e_n\}$ в V и для $\varphi : V \times V^* \to \mathbb{K}, \varphi \in \mathbf{T}_1^1(V)$ рассмотрим отображение $\varphi \mapsto \widetilde{\varphi}$, где $\widetilde{\varphi} := \sum\limits_i \varphi\left(e_i,e^i\right) = \sum\limits_i \varphi_i^i$.

2.4.7 Tensor Algebra: Connection to Differential Geometry (!?)

16.6 Симметричные и кососимметричные тензоры

16.7 Симметрическая алгебра

16.8 Внешняя алгебра

16.9 Тензоры в евклидовом пространстве

16.10 Оператор Ходжа

16.11 Тензорное произведение линейных пространств

Типичное программирование и проверка вычислений

2.4.8 Euclidean, Affine Spaces

Эрмитовы формы и пространства. Существование ортонормированного базиса

Эрмитовы и унитарные линейные операторы. Группы U(n) и SU(n)

Аффинные пространства: изоморфизм; системы координат

Аффинно-линейные функции и системы линейных уравнений. Задание подпространств

Теорема о расстоянии от точки до плоскости в евклидовом пространстве

Метод наименьших квадратов. Понятие об аппроксимации функций. Переопределённые линейные системы

Теорема о расстоянии между плоскостями евклидова пространства

Определитель Грама и объём параллелепипеда. Понятие ориентации вещественного пространства

2.5 Basic Geometry

2.5.1 Straight Lines, Planes, Distances, Volumes (!?)

(в ангеме это же, но в разы подробнее)

Прямые (???)

Приведем основные формулы и свойства прямых.
Общее уравнение прямой линии на плоскости в декартовых координатах:

$$Ax + By + C = 0,$$

где A, B и C - произвольные постоянные, причём постоянные A и B не равны нулю одновременно.

Вектор с координатами (A, B) называется нормальным вектором, он перпендикулярен прямой.

Также уравнение можно переписать в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Уравнение прямой, проходящей через две заданные несовпадающие точки

Если заданы две несовпадающие точки с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2), то прямая, проходящая через них, задаётся уравнением

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

или в общем виде

$$(y_1 - y_2)\,x + (x_2 - x_1)\,y + (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0.$$

Векторное параметрическое уравнение прямой в пространстве

Векторное параметрическое уравнение прямой задается вектором $\vec{r}_0$, конец которого лежит на прямой, и направляющим вектором прямой $\vec{u}$. Параметр t пробегает все действительные значения.

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + t\vec{u}.$$

Векторное параметрическое уравнение прямой в пространстве:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}, \quad t \in (-\infty, +\infty),$$

вектор произвольной точки прямой. Параметрические уравнения прямой в пространстве:

$$x = x_0 + t\alpha, y = y_0 + t\beta, z = z_0 + t\gamma, \quad t \in (-\infty, +\infty),$$

где (x_0, y_0, z_0) - координаты некоторой фиксированной точки M_0, лежащей на прямой; (α, β, γ) - координаты вектора, коллинеарного этой прямой.

Каноническое уравнение прямой в пространстве:

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma},$$

где (x_0, y_0, z_0) - координаты некоторой фиксированной точки M_0, лежащей на прямой; (α, β, γ) - координаты вектора, коллинеарного этой прямой.

Общее векторное уравнение прямой в пространстве:

Поскольку прямая является пересечением двух различных плоскостей, заданных соответственно общими уравнениями:

$$\left(\vec{r}, \vec{N}_1\right) + D_1 = 0 \text{ и } \left(\vec{r}, \vec{N}_2\right) + D_2 = 0,$$

то уравнение прямой можно задать системой этих уравнений:

$$\begin{cases} \left(\vec{r}, \vec{N}_1\right) + D_1 = 0, \\ \left(\vec{r}, \vec{N}_2\right) + D_2 = 0. \end{cases}$$

Векторное уравнение прямой в пространстве [6]:196–199: $[\vec{r}, \vec{a}] = \vec{M}$ где фиксированный вектор $\vec{M}$, ортогональный вектору $\vec{a}$, можно найти, подставляя в это уравнение радиус-вектор какой-нибудь одной известной точки прямой.

Расстояния

Тут просто пользуемся готовыми формулами.

(потом мб подумаю про их вывод, пока не до этого вообще)

между прямой и точкой

:

между прямой и плоскостью

Касательная

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Нормаль

(??? и как ее найти???)

2.5.2 Second-order Lines

Обзор

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a \geq b > 0$ эллипс;
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1, a \geq b > 0$ мнимый эллипс;
3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0, a \geq b > 0, \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$ две мнимые пересекающиеся прямые;
4. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a > 0, b > 0$ гипербола;
5. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, a > 0, b > 0, \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$ две пересекающиеся прямые;
6. $y^2 = 2px, p > 0$ парабола;
7. $y^2 = b^2, b \neq 0$ две параллельные прямые;
8. $y^2 = -b^2, b \neq 0$ две мнимые параллельные прямые;
9. $y^2 = 0$ две совпадающие прямые.

2.5.3 Geometrical Transformations

(see note on geometry for now about it)

Orthogonal transformations

Affine maps

2.6 Basic Theoretical Exam Questions

(разделю по разделам выше их потом!!! пока удобнее тут их отвечать и всё)
(мб потом укажу ответы на них и оставлю интересные, пока так)

Теорема о базисе конечномерного векторного пространства над полем

Закон изменения координат вектора при переходе к новому базису

Изоморфизм пространств одинаковой конечной размерности

Теорема о размерности суммы подпространств

равна всему простарнству
(??)

Когда сумма подпространств является прямой?

(уже написано где-то)

Критерий биективности линейного отображения в терминах ядра (в терминах образа)

Алгебра линейных операторов. Минимальный многочлен. Критерий невырожденности оператора

Теорема о связи между матрицами линейного оператора в различных базисах

там слева и справа домножается на матрицу перехода.

Инвариантные подпространства: общие факты; теорема об операторе проектирования

(??)

Собственные векторы и собственные значения. Характеристический многочлен

Теорема о геометрической и алгебраической кратности. Свойства следа оператора

Теорема о диагонализируемости линейного оператора с простым спектром

Инвариантные подпространства комплексных и вещественных ли- нейных операторов

Теорема о приведении комплексного линейного оператора к треугольному виду

О составлении канонического уравнения кривой (!???)

(допишу, не до этого пока)

Матрицы билинейной формы в различных базисах

Симметричные и кососимметричные билинейные формы. Квадратичные формы

Теорема о приведении квадратичной формы к каноническому виду

Однозначная определённость сигнатуры вещественной квадратичной формы (закон инерции)

Метод Якоби приведения невырожденной симметричной билинейной формы

Евклидовы векторные пространства. Неравенство Коши—Буняковского и его следствия

(типичная тема)

Теорема о существовании ортонормированного базиса. Процесс Грама—Шмидта

Теорема об ортогональном разложении пространства

Естественный изоморфизм евклидова векторного пространства и двойственного пространства

(типичная тема)

Ортонормированные базисы и ортогональные матрицы. Группы O(n) и SO(n)

Связь между линейными операторами и билинейными формами на евклидовом векторном пространстве. Свойство самосопряжённости

Теорема о диагонализируемости самосопряжённого оператора

Приведение квадратичной формы к главным осям. Матричная формулировка

Теорема о приведении пары квадратичных форм

(типичная тема)

Теорема о каноническом виде матрицы ортогонального оператора

Теорема о представлении невырожденного оператора в виде композиции самосопряжённого и ортогонального операторов

2.7 Selected Useful Methods for Applications

(????????? I don't know them now, I'll write later)

2.7.1 Tensor Algebra: Useful Properties (!?)

(write what is used in computations, so on. some tensor decompositions)

Part II
Fundamentals of Linear Algebra

Обсудим подробно основную теорию линейных пространств.
(пока плаваю в структуре, нужно тренировать связи между темами)

3 Basic General Concepts

3.1 1 Initial Information from Algebra

Данная глава носит вспомогательный характер: в ней для удобства читателя приведены определения некоторых понятий, которые используются в дальнейшем. Можно начинать чтение со следующей главы, обращаясь к данной по мере необходимости.

3.1.1 1.1 Some Set-theoretic Definitions

Если X и Y - два множества, то для произвольных $x \in X$ и $y \in Y$ через (x, y) обозначим соответствующую упорядоченную пару. Две упорядоченные пары (x, y) и (x', y') равны тогда и только тогда, когда $x = x'$ и $y = y'$.

Определение

1.1. Декартовым произведением $X \times Y$ множеств X и Y называется множество всех упорядоченных пар

$$\{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$$

Через $|X|$ мы будем обозначать мощность множества X.

Задача

1.2. Пусть $|X| = n, |Y| = m$. Докажите, что $|X \times Y| = nm$.
В частности, определен декартов квадрат $X \times X$ множества X. Например, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ - множество упорядоченных пар действительных чисел. Любой выбор декартовой системы координат в плоскости определяет биекцию между множеством точек плоскости и $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Аналогично для множества точек трехмерного пространства и множества $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Множество $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ (декартово произведение множества $\mathbb{R}$ на себя n раз) часто обозначается $\mathbb{R}^n$, его элементами являются строки (или столбцы) длины (высоты) n из действительных чисел.

Для множеств X и Y определим множество X^Y всех отображений $Y \to X$.

Задача

1.3. Пусть $|X| = n, |Y| = m$. Докажите, что $\left|X^Y\right| = n^m$.
В частности, $\left|X^X\right| = n^n$.
Пусть теперь

$$S(X) := \{f : X \to X | f \text{ биективно } \}.$$

Задача

1.4. Пусть $|X| = n$. Докажите, что $|S(X)| = n\,!$.

В частности, вероятность того, что случайно выбранное отображение $X \to X$ является биекцией, стремится к нулю при $n \to \infty$ (поскольку $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$).

Отметим, что для конечных множеств X и Y одинаковой мощности условия того, что отображение $f : X \to Y$ 1) инъективно; 2) сюръективно и 3) биективно, эквивалентны.

В дальнейшем будет полезно следующее элементарное предложение.

Предложение

1.5. Пусть S и T - произвольные множества, а $f : S \to T, g : T \to S$ - такие отображения, что $gf = \mathrm{id}_S, fg = \mathrm{id}_T$. Тогда fug - взаимно обратные биекици. Верно и обратное.

Proof. □

Из $gf = \mathrm{id}_S$ следует, что f инъективно а g сюръективно. В самом деле, если f не инъективно, то $\exists s_1 \neq s_2 \in S$ такие, что $f(s_1) = f(s_2)$. Тогда $g(f(s_1)) = g(f(s_2))$, что противоречит тому, что $g(f(s_1)) = s_1 \neq g(f(s_2)) = s_2$. С другой стороны, для любого элемента $s \in S$ имеем $s = g(f(s))$, что доказывает сюръективность g.

Аналогично, из $fg = \mathrm{id}_T$ следует инъективность g и сюръективность f. Значит f и g биективны и $f(s) = t$ тогда и только тогда, когда $g(t) = s$, откуда $g = f^{-1}$ и $f = g^{-1}$. Обратное утверждение очевидно.

Задача

1.6. Пусть $|Y| =$. Постройте биекцию между множествами X^Y u $X \times X \times \ldots \times X$ (m сомножителей).

Задача

1.7. Постройте биекцию между множествами $X^{Y\times Z}$ и $\left(X^Y\right)^Z$.
Подсказка. Пусть, например, задано отображение $f : Y \times Z \to X$. Тогда для фиксированного $z \in Z$ функция $f(\cdot, z)$ от первого аргумента представляет собой функцию $Y \to X$. Рассматривая теперь $f(\cdot, z)$ как функцию от z, получаем отображение $Z \to X^Y$. Тем самым мы определили некоторое отображение $X^{Y\times Z} \to \left(X^Y\right)^Z$.

Для данного множества X обозначим множество всех его подмножеств (включая пустое и само множество X) через 2^X. Последнее также называется булеаном множества X. Подчеркнем, что элементами множества 2^X являются подмножества множества X.

Предложение

1.8. Существует биекция между множеством 2^X и множеством $\{0,1\}^X$ всех отображений $X \to \{0,1\}$. В частности, если $|X| = n$, то $\left|2^X\right| = 2^n$.

Proof. □

Пусть $A \subset X$ - подмножество (эквивалентно, $A \in 2^X$); сопоставим ему функцию (=отображение) $\chi_A : X \to \{0,1\}$, определенную следующим правилом:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin A \\ 1, & \text{если } x \in A \end{cases}$$

Обратно, функции $f : X \to \{0,1\}$ сопоставим подмножество $S_f \subset X$ задаваемое как $S_f := \{x \in X | f(x) = 1\}$. Теперь легко проверить, что определенные нами сопоставления $A \mapsto$
$\chi_A, f \mapsto S_f$ удовлетворяют тождествам $S_{\chi_A} = A, \chi_{S_f} = f$. Значит, согласно Предложению 1.5, они задают взаимно обратные биекции между множествами 2^X и $\{0,1\}^X$.

Определим биномиальный коэффициент $\binom{n}{k}$ как количество k-элементных подмножеств в n-элементном множестве.

Следствие. 1.9.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Задача

1.10. Докажите, что $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(Указание: постройте биекцию между множеством k-элементных и множеством $n-k$-элементных подмножеств n-элементного множества. Или для функции $f : X \to \{0,1\}$ как в доказательстве предыдущего Предложения, рассмотрите функцию $1 - f$.)

Задача

1.11. Докажите тождество

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

Решение. Пусть $X := \{1, 2, \dots, n\} - n$-элементное множество. Тождество означает, что количество подмножеств в X, состоящих из четного числа элементов равно количеству подмножеств, состоящих из нечетного числа. Покажем, что это действительно так.

Пусть $S \subset X$ - некоторое подмножество. Сопоставим ему новое подмножество $\widehat{S} \subset X$ по следующему правилу:

$$\widehat{S} = \begin{cases} S \cup 1, & \text{если } 1 \notin S \\ S \backslash 1, & \text{если } 1 \in S \end{cases}$$

Легко видеть, что сопоставление $S \mapsto \widehat{S}$ определяет взаимно-обратные биекции между множествами подмножеств в X из четного и нечетного количества элементов.

Задача

1.12. Докажите формулу

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

3.1.2 1.2 Equivalence Relations

Определение

1.13. (Бинарным) отношением на множестве X называется произвольное подмножество $R \subset X \times X$.

Пример 1.14. Диагональ $\Delta_X := \{(x, x)|x \in X\} \subset X \times X$ задает отношение равенства на X.

Изучение какой-либо части окружающего мира обычно связано с классификацией ее объектов. Классификация элементов некоторого множества X - разбиение этого множества на классы. Например, в курсе аналитической геометрии рассматриваются две классификации плоских кривых второго порядка - аффинная и метрическая (с точностью до движений плоскости). Любое такое разбиение происходит из (и, в свою очередь, определяет) некоторого отношения эквивалентности на X.

Определение

1.15. Отношение R на множестве X называется отношением эквивалентности на X, если оно обладает свойствами:

1. рефлексивности: $(x, x) \in R$ для любого $x \in X$;
2. симметричности: $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$
3. транзитивности: $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$.

Например, отношение равенства является отношением эквивалентности.
Рассмотрим еще примеры отношений. На множестве людей X отношение

$$R_1 = \{(x, y)|y \text{ знает } x\}$$

не является отношением эквивалентности (например, отсутствует симметричность); отношение

$$R_2 = \{(x, y)|y \text{ знаком с } x\}$$

также не является отношением эквивалентности (оно симметрично, но не транзитивно), а отношения "быть родственником" [1] или "жить в одном доме" - отношения эквивалентности.

Пусть R - отношение эквивалентности на множестве X. В этом случае вместо $(x, y) \in R$ пишут $x \sim_R y$ или просто $x \sim y$, если ясно, какое отношение эквивалентности имеется в виду.

Пусть X - множество, на котором задано отношение эквивалентности $\sim$. Классом эквивалентности элемента $x \in X$ назовем подмножество $[x] \subset X$, состоящее из всех элементов, эквивалентных x, то есть $[x] := \{y \in X|y \sim x\}$. Произвольный элемент $y \in [x]$ называется представителем класса эквивалентности $[x]$.

Например, для отношения эквивалентности "жить в одном доме" классы эквивалентности - жители одного дома. Произвольный житель дома является представителем такого класса.

Предложение

1.16. $[x] = [x'] \Leftrightarrow x \sim x'$.

Proof. □

Пусть $[x] = [x']$. Так как $x \sim x$, то $x \in [x] = [x']$, а значит, $x \sim x'$.
Наоборот, предположим, что $x \sim x'$. Пусть $y \in [x] \Rightarrow y \sim x \Rightarrow y \sim x' \Rightarrow y \in [x']$. Таким образом, $[x] \subset [x']$. Тогда в силу симметричности отношения эквивалентности $[x] = [x']$.

Определение

1.17. Разбиением множества X называется представление его в виде объединения непересекающихся [2] непустых подмножеств, то есть в виде $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha, \varnothing \neq X_\alpha \subset X$, причем $X_\alpha \bigcap X_\beta = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$.

[01] хотя, возможно, транзитивность этого отношения не очевидна.

Предложение

1.18. Классы эквивалентности отношения эквивалентности $\sim$ на X образуют разбиение множества X.

Proof. □

Так как $x \in [x]$, то каждый элемент множества X принадлежит некоторому классу эквивалентности. Покажем, что если классы $[x], [x']$ имеют непустое пересечение, то они совпадают. Пусть $y \in [x] \cap [x']$. Тогда $y \sim x \Rightarrow x \sim y$, а также $y \sim x' \Rightarrow x \sim x' \Rightarrow [x] = [x']$ по Предложению 1.16.

Заметим, что верно и обратное: по любому разбиению $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ множества X определяется единственное отношение эквивалентности на X, для которого $X_\alpha, \alpha \in A$, являются классами эквивалентности. То есть существует естественное взаимно однозначное соответствие между отношениями эквивалентности на множестве X и разбиениями X.

Задача

1.19. Докажите, что на множестве из 4-х элементов существует ровно 15 различных отношений эквивалентности.

Теперь заметим, что классы эквивалентности отношения эквивалентности $\sim$ на X сами можно рассматривать как элементы некоторого множества, которое называется $\oint$ тормножеством множества X по отношению эквивалентности. Фактормножество множества X по отношению эквивалентности $\sim$ обозначается $X/\sim$. Оно задано вместе с сюръективным отображением $\pi : X \rightarrow X/\sim, \pi(x) = [x]$, называемым факторотображением.

Рассмотрим примеры. Фактормножество множества людей по отношению эквивалентности "жить в одном доме" - множество домов (мы считаем, что каждый человек живет в доме, причем единственном).

Пример 1.20. Пусть - евклидова (точечная) плоскость, $O \in \Pi$ - ее фиксированная точка. Рассмотрим на множестве Π следующее отношение эквивалентности: $P \sim Q \Leftrightarrow |OP| = |OQ|$. Классы этой эквивалентности образуют семейство концентрических окружностей плоскости Π с центром в точке O (включая окружность нулевого радиуса); сопоставляя такой окружности ее радиус мы получаем биекцию между фактормножеством и множеством неотрицательных действительных чисел $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Задача

1.21. Пусть $F_1, F_2 \in \Pi$ - две различные точки на плоскости. Определите отношение эквивалентности на множестве точек плоскости, классами эквивалентности которого являются эллипсы с фокусами в F_1 и F_2 а такэне отрезок, соединяющий точку $F_1 c F_2$.

Пример 1.22. (Свободные векторы на плоскости.) Направленным отрезком AB на плоскости называется упорядоченная пара (A, B) точек на плоскости. Два направленных отрезка AB и $A'B'$ называются эквивалентными, если середины AB' и $A'B$ совпадают. Читателю предлагается убедиться, что это - действительно отношение эквивалентости и что его классы эквивалентности - в точности свободные векторы на плоскости.

Пусть $f : X \rightarrow Y$ - произвольное отображение множеств. Тогда полные прообразы

$$f^{-1}(y) := \{x \in X | f(x) = y\} \subset X$$

точек y из образа f образуют разбиение множества X. Оно соответствует следующему отношению эквивалентности на X:

$$x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \tag{1}$$

Пусть теперь $f : X \rightarrow Y$ - произвольное сюръективное отображение множеств. Пусть $\sim$ - отношение эквивалентности (1) на X. Тогда существует вполне определенная биекция

[02] То есть имеющих пустое пересечение.

$$\varphi : X/\sim \to Y, \varphi([x]) = f(x)$$

(проверку корректности определения φ и его биективности оставляем читателю в качестве упражнения). Отображение f можно отождествить с факторотображением, поскольку они входят в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & X/\sim \arrow[d, "\varphi"] \\ & Y. \end{tikzcd}$$

Пример 1.23. На множестве действительных чисел $\mathbb{R}$ рассмотрим следующее отношение: $a \sim b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{Z}$. Читателю предлагается убедиться, что это - действительно отношение эквивалентости и что его классы эквивалентности - подмножества в $\mathbb{R}$, состоящие из действительных чисел, имеющих одинаковые дробные части. Такие классы можно записать следующим образом:

$$[a] = \{a + n | n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$$

Функция $t \mapsto \exp(2\pi i t)$ обладает следующим свойством:

$$\exp(2\pi i a) = \exp(2\pi i b) \Leftrightarrow a \sim b.$$

Ее образом является единичная окружность $S^1 := \{z \in \mathbb{C} || z |= 1\}$ в комплексной плоскости. Заметим, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\exp(2\pi i \cdot)"'] & \mathbb{R}/\sim \arrow[d] \\ & S^1 \end{tikzcd}$$

коммутативна, где вертикальная стрелка - биекция, тем самым мы отождествили $\exp(2\pi i \cdot) : \mathbb{R} \to S^1$ с факторотображением π (а S^1 - с фактормножеством $\mathbb{R}/\sim$).

Задача

1.24. Постройте биекцию между 1-периодическими функциями на прямой $\mathbb{R}u$ функциями на окружности S^1.

Пример 1.25. Для данного натурального числа n рассмотрим следующее отношение на множестве целых чисел $\mathbb{Z} : a \sim b \Leftrightarrow n \mid (b - a)(n|m$ обозначает " n делит m "). Читателю предлагается убедиться, что это - действительно отношение эквивалентости и что его классы эквивалентности - подмножества в $\mathbb{Z}$, состоящие из целых чисел, имеющих одинаковые остатки при делении на n. Класс, содержащий $a \in \mathbb{Z}$, можно записать следующим образом:

$$[a] = \{a + kn | k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}$$

(в данной записи a и n фиксированы, а k пробегает все целые числа). То есть в данном случае мы имеем в точности n классов эквивалентности. Класс эквивалентности, содержащий целое число a, называется классом вычетов а по модулю n. Таким образом, элементами фактормножества являются классы вычетов. Например, при $n = 2$ один из классов состоит из четных, а другой - из нечетных целых чисел. Читатель легко убедится, что для натурального $n\{[0], [1], \ldots, [n-1]\}$ - все классы вычетов по модулю n, то есть их в точности n штук. При этом например $[2] = [n+2] = [2-3n] = \ldots$. Множество классов вычетов по модулю n обозначается $\mathbb{Z}_n$.

Пример 1.26. (Рациональные числа.) Рассмотрим множество упорядоченных пар целых чисел $(m,n), m,n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$. Определим на данном множестве отношение

$$(m,n) \sim (m',n') \Leftrightarrow mn' = m'n \tag{2}$$

Рефлексивность и симметричность такого отношения очевидны. Проверим транзитивность. Пусть $(m',n') \sim (m'',n'')$, то есть $m'n'' = m''n'$. Умножая обе части равенства в (2) на n'', а обе части предыдущего равенства - на n, получаем $mn'n'' = m'nn''; m'n''n = m''n'n$, откуда, сокращая на n' (и используя $n' \neq 0$), получаем $mn'' = m''n$. Класс эквивалентности этого отношения называется рациональным числом. Множество рациональных чисел обозначается $\mathbb{Q}$.

3.1.3 1.3 Euclid's Algorithm

Пусть a и b - натуральные числа. Их наибольшим общим делителем (обозначение: (a,b)) называется такой их натуральный общий делитель, который делится на все их общие делители. То есть $(a,b)|a, (a,b)|b$ и если $d \in \mathbb{N}$ и $d|a, d|b$, то $d \mid (a,b)$. Ясно, что если (натуральный) наибольший делитель существует, то он единственен. Вскоре мы докажем, что наибольший общий делитель существует для любой пары натуральных чисел.

В школе было доказано следующее утверждение: если $a,b \in \mathbb{Z}$, причем $b > 0$, то существует и единственна такая пара чисел $q,r \in \mathbb{Z}$, что $0 \leq r < b$ и $a = qb + r$. Число q при этом называется неполным частным, а r - остатком от деления a на b.

Если натуральные числа a и b разложить на простые множители:

$$a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}, \quad b = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \dots p_s^{l_s}$$

где $p_1, p_2, \dots, p_s$ - различные простые числа, а $k_i, l_i \geq 0$, то

$$(a,b) = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_s^{m_s}$$

где $m_i = \min(k_i, l_i)$.

Однако разложение числа на простые множители является вычислительно сложной задачей. Между тем, существует классический алгоритм Евклида (Начала, примерно 300 год до н.э.), позволяющий найти наибольший общий делитель двух натуральных чисел без нахождения их разложения на простые множители. А именно, рассмотрим цепочку равенств

$$a = q_1 b + r_1, \quad b = q_2 r_1 + r_2, \quad r_1 = q_3 r_2 + r_3, \dots$$

Строго убывающая цепочка натуральных чисел

$$b > r_1 > r_2 > r_3 > \dots$$

обязательно оборвется на конечном шаге и мы придем к равенствам

$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n, \quad r_{n-1} = q_{n+1} r_n$$

Оказывается, последний ненулевой остаток в этой цепочке и является наибольшим общим делителем.

Предложение

1.27. $(a,b) = r_n$, причем существуют такие $u,v \in \mathbb{Z}$, что $r_n = au + bv$.

Proof. □

Двигаясь по описанной цепочке снизу вверх, имеем:

$$r_n \left| r_{n-1}, r_n \right| r_{n-2}, \dots, r_n \left| r_3, r_n \right| r_2, r_n \left| r_1, r_n \right| b, r_n | a$$

Таким образом, r_n - общий делитель чисел a и b.

Наоборот, двигаясь сверху вниз, имеем

$$r_1 = a - q_1 b = au_1 + bv_1, r_2 = b - q_2 r_1 = -q_2 a + (1 + q_1 q_2)\, b = au_2 + bv_2$$
$$r_3 = au_3 + bv_3, \ldots, r_n = au_n + bv_n$$

(доказательство существования таких представлений производится по индукции). Таким образом, r_n можно представить в виде $au + bv$. Отсюда следует, что если $d|a, d|b$, то $d|r_n$. Значит, $r_n = (a, b)$.

Представление наибольшего общего делителя (a, b) в виде $(a, b) = au + bv$ называется тождеством Безу.

Натуральные a и b называются взаимно простыми, если $(a, b) = 1$.

Следствие

1.28. Если $(a, b) = 1$, то существуют такие $u, v \in \mathbb{Z}$, что $au + bv = 1$.

Следствие

1.29. Если $n \mid (ab) u(n, a) = 1$, то $n|b$.

Proof. □

По тождеству Безу найдутся такие $u, v \in \mathbb{Z}$, что $nu + av = 1$. Умножая обе части последнего равенства на b, получим $nub + abv = b$, причем левая часть последнего равенства делится на n, а значит и правая делится на n.

3.1.4 1.4 Abeleian (commutative) Groups

Исторически понятие числа расширялось, начиная с натуральных чисел, затем положительных рациональных, целых, рациональных, действительных и комплексных. Математически имеем включения числовых множеств:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

(мы используем стандартные обозначения натуральных, целых, рациональных, действительных и комплексных чисел). Причем все расширения, кроме $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, можно описать чисто алгебраически из потребности расширить класс разрешимых алгебраических уравнений. Множества рациональных, действительных и комплексных чисел объединяет то, что с алгебраической точки зрения они являются полямиз [3].

Ниже мы объясним, что такое поле. Для этого нам придется начать с более элементарного понятия группы.

Говоря кратко, группа - это множество, на котором задана бинарная операиия, обладающая некоторыми свойствами.

Определение

1.30. Говорят, что на множестве X задана бинарная операция $*$, если любой упорядоченной паре (x_1, x_2) элементов из X поставлен в соответствие некоторый элемент $x_1 * x_2 \in X$.

Другими словами, бинарная операция $*$ на X - то же, что отображение (= функция)

$$X \times X \to X, \quad X \times X \ni (x_1, x_2) \mapsto x_1 * x_2 \in X$$

[03] термин поле в математике многозначен, например существуют векторные поля. В данном тексте мы будем использовать поле только для обозначения указанного алгебраической понятия.

Задача

1.31. Найдите количество различных бинарных операций на множестве из n элементов.

Примерами бинарных операций являются операции сложения и умножения на указанных числовых множествах или, например, векторное произведение векторов трехмерного ориентированного евклидова пространства. Вычитание тоже определяет бинарную операцию на всех указанных числовых множествах кроме $\mathbb{N}$ (почему?). С делением сложнее: во-первых, нельзя делить на нуль, во-вторых, даже если выбросить нуль из $\mathbb{Z}$, результат деления может оказаться нецелым числом. В то же время если $\mathbb{K}$ - любое из приведенных выше числовых полей ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), то на множестве $\mathbb{K}^* := \mathbb{K}\backslash\{0\}$ его ненулевых элементов деление является бинарной операцией. Скалярное и смешанное произведения не являются бинарными операциями на множестве векторов евклидова пространства (почему?).

Рассмотрим множество целых чисел $\mathbb{Z}$ с операцией сложения. Какими абстрактными свойствами обладает эта операция? Во-первых, она ассоииативна: для любых целых чисел k, l, m имеет место тождество $(k+l)+m = k+(l+m)$. Во-вторых, существует нейтральный элемент 0, обладающий свойством $k + 0 = k = 0 + k$ для любого целого числа k. В третьих, для любого целого числа k существует противоположное число $(-k)$, такое что $k + (-k) = 0 = (-k) + k$. Наконец, в четвертых, она коммутативна: для любых целых чисел k, l верно тождество $k + l = l + k$.

Рассмотрим также множество ненулевых рациональных чисел $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ с операцией умножения. Какими абстрактными свойствами обладает эта операция? Во-первых, она ассоциативна: для любых ненулевых рациональных чисел $(pq)r = p(qr)$. Во-вторых, для нее существует нейтральный элемент 1, обладающий свойством $p1 = p = 1p$ для любого $p \in \mathbb{Q}^*$. В третьих, для любого $p \in \mathbb{Q}^*$ существует обратное число p^{-1}, такое что $pp^{-1} = 1 = p^{-1}p$. Наконец, операция умножения коммутативна: $pq = qp$ для любых $p, q \in \mathbb{Q}^*$.

Если в двух приведенных примерах абстрагироваться от того, что множества целых и ненулевых рациональных чисел различны, а сосредоточиться только на указанных абстрактных свойствах (ассоциативности, существование нейтрального и противоположного = обратного элементов, коммутативности) операций на указанных множествах, то очевидно, что этими свойствами обладает и операция сложения целых чисел, и операция умножения ненулевых рациональных чисел.

В то же время операция вычитания на множестве $\mathbb{Z}$ (или операция деления на множестве $\mathbb{Q}^*$) указанными свойствами не обладает, например, читатель легко убедится, что она неассоциативна.

Следующее

Определение

выделяет общие свойства целых чисел с операцией сложения
и ненулевых рациональных чисел с операцией умножения. В нем в качестве обозначения операции мы выбрали $+$, что привычно во многих примерах, но не принципиально.

Определение

1.32. Пара $(A, +)$, состоящая из множества A и заданной на нем бинарной операции

$$A \times A \xrightarrow{+} A, \quad (a, b) \mapsto a + b$$

(называемой "сложением") называется коммутативной, или абелевой группой, если выполнены следующие условия ("аксиомы абелевой группы"):

1. сложение коммутативно, то есть $a + b = b + a$ для любых $a, b \in A$;
2. сложение ассоциативно, то есть $\forall a, b, c \in A (a + b) + c = a + (b + c)$;
3. в A существует нуль (называемый также нейтральным элементом), обозначаемый 0 и характеризующийся свойством $a + 0 = a \forall a \in A$;

4. для каждого $a \in A$ существует противоположный элемент, обозначаемый $(-a)$ и характеризующийся свойством $a + (-a) = 0$.

Таким образом, $(\mathbb{Z}, +)$ и $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ являются абелевыми группами.

Задача

1.33. Из аксиом абелевой группы выведите следующие следствия:

- единственность нуля;
- единственность противоположного элемента - а для каждого $a \in A$;
- однозначную разрешимость в $(A, +)$ уравнения вида $x + a = b$, где $a, b \in A$. (Ясно, что решение этого уравнения есть элемент $b + (-a) \in A$, он называется разностью элементов b и а и обозначается $b - a$).

Кроме того, из ассоциативности сложения следует, что сумма произвольного конечного числа (а не только трех) элементов абелевой группы не зависит от расстановки скобок.

Задача

1.34. Какие из следующих множеств с операциями являются абелевыми группами, а какие - нет и почему? $(\mathbb{N}, +), (\mathbb{Z}, \cdot), (\mathbb{Z}, -), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{Q}, \cdot), (\mathbb{Q}, \div), (\mathbb{R}^*, \cdot)$.

Задача

1.35. Постройте биекцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ между множеством всех действительных $\mathbb{R}$ и положстельных действительных $\mathbb{R}_{>0}$ чисел, удовлетворяющую условию $f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$ для произвольных $a, b \in \mathbb{R}$.

Note.

1.36. Заметим, биекция между $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}_{>0}$, которая строится в предыдущей задаче, переводит "таблицу умножения" в группе $(\mathbb{R}, +)$ в "таблицу умножения" в группе $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$:

$$\begin{array}{c|c} + & a \\ \hline b & a+b \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} \cdot & f(a) \\ \hline f(b) & f(a)f(b) \end{array},$$

что свидетельствует о том, что группы $(\mathbb{R}, +)$ и $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ "устроены одинаково" как множества с бинарной операцией. Такие группы называются изоморфными.

Ниже вместо $(A, +)$ мы часто будем писать A, явно указывая только множество элементов группы, если из контекста ясно, какая операция подразумевается.

Определение

1.37. Пусть $B \subset A$ - подмножество множества элементов абелевой группы $(A, +)$, причем

1. B содержит ноль, то есть $0 \in B$;
2. B замкнуто относительно операции $+$, то есть $b_1, b_2 \in B \Rightarrow b_1 + b_2 \in B$;
3. B замкнуто относительно операции взятия противоположного элемента, то есть $\forall b \in B \Rightarrow (-b) \in B$.

Тогда пара $(B,+)^4$ называется подгруппой группы $(A,+)$.
Заметим, что вместо условия 1) в предыдущем определении можно было бы потребовать непустоты множества B. Очевидно, что подгруппа абелевой группы сама является абелевой группой (относительно той же операции).

Рассмотрим примеры абелевых групп и их подгрупп.
Самая "маленькая" (по включению) подгруппа группы $(A,+)$ - подгруппа, состоящая только из нуля, самая "большая" - совпадает со всей группой. Также имеем вложения подгрупп $(\mathbb{Z},+)\subset(\mathbb{Q},+)\subset(\mathbb{R},+)\subset(\mathbb{C},+)$ и $(\mathbb{Q}^*,\cdot)\subset(\mathbb{R}^*,\cdot)\subset(\mathbb{C}^*,\cdot)$. Еще пример: $(\{\pm1\},\cdot)$ является подгруппой в $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$, состоящей из двух элементов. Ещё пример: подгруппу в $(\mathbb{Z},+)$ образуют все целые числа, кратные фиксированному натуральному n.

Задача

1.38. Докажите, что единичная окружность

$$\{z\in\mathbb{C}||z|=1\}\subset\mathbb{C}$$

в комплексной плоскости является подгруппой группы $(\mathbb{C}^*,\cdot)$.
Пример 1.39. В этом примере мы найдем все подгруппы в $\mathbb{Z}$. Во-первых, есть подгруппа, состоящая из одного нуля (нейтрального элемента), она так и называется нулевой. Пусть $B\subset\mathbb{Z}$ - произвольная ненулевая подгруппа. Заметим, что $b\in B\Leftrightarrow -b\in B$. Пусть n - наименьшее натуральное число, содержащееся в B и $m\in B$ - произвольное. Мы хотим доказать, что $n|m$. В самом деле, поделим m на n с остатком: $m=qn+r$, где $0\le r<n$. Пусть $r\ne0$. Но $r=m-qn$ и, поскольку m и n лежат в B, то и $r\in B$. Тем самым, предположив $r\ne0$, мы получили противоречие с минимальностью n. Таким образом, все подгрупшы в $\mathbb{Z}$ имеют вид $n\mathbb{Z}$, где $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Заметим, что все они состоят из счетного множества элементов, за исключением нулевой подгруппы.

К настоящему моменту мы познакомились с двумя видами структур на множествах отношениями эквивалентности и бинарными операциями. Допустим теперь, что на одном и том же множестве X одновременно задано отношение эквивалентности $\sim$ и бинарная операция $*$. Интересным и очень важным для абстрактной алгебры является вопрос о том, когда эти структуры согласованы.

Определение

1.40. Отношение эквивалентности $\sim$ называется согласованным с бинарной операцией $*$, если из $x\sim x'$ и $y\sim y'$ следует $x*y\sim x'*y'$.
Читатель легко убедится, что условие согласованности из предыдущего Определения - в точности то, что нужно потребовать для того, чтобы формула

$$[x]\circ[y]:=[x*y]\quad\forall x,y\in X$$

корректно определяла бинарную операцию на фактормножестве $X/\sim$. Более того, если $(X,*)$ - абелева группа, то и $(X/\sim,\text{o})$ абелева группа.

Пример 1.41. Проверим, что отношение сравнимости по модулю n, введенное в Примере 1.25, согласовано с операциями сложения и умножения в $\mathbb{Z}$. Если $k\sim k',l\sim l'$, то $(k+l)\sim(k'+l')$, поскольку если $n\,|(k'-k)\,,n|\,(l'-l)$, то $n\mid(k'+l'-(k+l))$.
Для операции умножения аналогично: если $k\sim k',l\sim l'$, то $kl\sim k'l'$, поскольку если $n\,|(k'-k)\,,n|\,(l'-l)$, то $n\mid(k'l'-kl)=(k'-k)\,l'+k\,(l'-l)$.

Тем самым на множестве классов вычетов $\mathbb{Z}_n$ формулы $[k]+[l]:=[k+l],[k]\cdot[l]:=[kl]$ корректно определяют бинарные операции $+$ и $\cdot$. Читателю предлагается убедиться, что $(\mathbb{Z}_n,+)$ - абелева группа. (Заметим на будущее, что $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ - коммутативное кольцо).

[04] чтобы не усложнять обозначения, операция $+$ на A и ее ограничение на подмножество $B\subset A$ обозначаются одним и тем же символом.

Задача

1.42. Убедитесь, что отношение эквивалентности из Примера 1.22 согласовано с операцией сложения векторов по правилу треугольника. Тем самым мы получаем бинарную операцию сложения свободных векторов.

Задача

1.43. Подумайте, как задать операции на множестве упорядоченных пар челых чисел, согласованные с отношением эквивалентности из Примера 1.26, которые приведут к операциям сложения и умножения рациональных чисел.

3.1.5 1.5 Non-commutative Groups

Помимо коммутативных групп в дальнейшем нам встретятся и некоммутативные группы, дадим поэтому общее определение группы.

Определение

1.44. Группой называется пара $(G, \cdot)$, состоящая из множества G и заданной на нем бинарной операции $\cdot$, обладающая следующими свойствами:
(i) операция $\cdot$ ассоциативна: для любых g_1, g_2, g_3 из G имеет место тождество $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$
(ii) существует элемент $e \in G$, такой что $g \cdot e = g = e \cdot g$ для любого $g \in G$; такой элемент называется нейтральным;
(iii) для любого $g \in G$ существует обратный элемент, то есть такой $h \in G$, что $g \cdot h = e = h \cdot g$. Обратный для g обычно [5] обозначается g^{-1}.

Заметим, что если вдобавок к перечисленным условиям выполнено также условие коммутативности:
(iv) для любых $g_1, g_2 \in G$ имеет место равенство $g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1$, то мы снова возвращаемся к определению коммутативной группы (с тем единственным отличием от Определения 1.32, что для обозначения операции на этот раз вместо $+$ использован знак $\cdot$).

Задача

1.45. Докажите, что

1. нейтральный элемент в группе $(G, \cdot)$ единственен, то есть если $e' \in G$ - еще один элемент такой, что $g \cdot e' = g = e' \cdot g \forall g \in G$, то $e = e'$;
2. для каждого $g \in G$ обратный элемент g^{-1} единственен;
3. $\forall g, h \in G$ уравнения $x \cdot g = h, g \cdot y = h$ имеют единственные решения (именно, $x = h \cdot g^{-1}$ и $y = g^{-1} \cdot h$ соответственно).

Кроме того, из ассоциативности операции в группе следует, что произведение произвольного конечного числа элементов группы не зависит от расстановки скобок. Читатель может попытаться доказать это, используя индукцию по числу элементов в произведении.

Определение

1.46. Непустое подмножество $H \subset G$ называется подгруппой группы $(G, \cdot)$, если $\forall h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_1 \cdot h_2 \in H; \quad \forall h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H$.

Заметим, что тогда пара $(H, \cdot)$[6] сама является группой. Нейтральный элемент группы G при этом будет нейтральным элементом в подгруппе $H \subset G$.

Ниже мы будем для группы $(G, \cdot)$ использовать упрощенное обозначение G если ясно, какая операция подразумевается.

Группы часто возникают как группы обратимых преобразований какого-либо множества, сохраняющих некоторую структуру на нем, с операцией - композицией преобразований. Читатель, вероятно, знает группу аффинных преобразований плоскости, которая

дает пример некоммутативной группы. Она содержит группу движений плоскости в качестве подгруппы (это такие преобразования плоскости, которые сохраняют расстояния между точками). Еще пример некоммутативной группы дает группа поворотов трехмерного пространства относительно фиксированной точки. Примерами некоммутативных групп из конечного числа элементов являются группы симметрий правильных многоугольников или многогранников. Например, группа всех симметрий правильного n-угольника некоммутативная группа из $2n$ элементов.

В дальнейшем в курсе мы определим важные примеры некоммутативных групп группу $\mathrm{GL}(V)$ невырожденных линейных преобразований n-мерного векторного пространства V над полем $\mathbb{K}$ (относительно операции композиции), а также группу $\mathrm{O}(V)$ ортогональных преобразований n-мерного евклидова пространства V. Выбор базиса в V определяет изоморфизм (см.

Определение

4.1) группы $\mathrm{GL}(V)$ с группой $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ (относительно операции умножения) невырожденных матриц порядка n над полем $\mathbb{K}$ (соответственно в случае евклидова пространства выбор ортонормированного базиса определяет изоморфизм группы $\mathrm{O}(V)$ с группой $\mathrm{O}(n)$ ортогональных матриц порядка n^7).

3.1.6 1.6 Rings & Margins

В математике большую роль играют множества, на которых заданы сразу две бинарные операции, которые в определенном смысле друг с другом согласованы. Вот определение важнейшего класса таких структур.

Определение

1.47. Кольцом называется множество R, на котором заданы две бинарные операции $+$ и $\cdot$, называемые соответственно сложением и умножением, причем

1. $(R, +)$ является абелевой группой;
2. сложение и умножение связаны законом дистрибутивности:

$$a(b+c) = ab + ac, \quad (b+c)a = ba + ca \quad \forall a, b, c \in R$$

Следующие условия являются дополнительными и в произвольном кольце могут не выполняться:

- ассоциативность (мультипликативная) $(ab)c = a(bc)$;
- наличие мультипликативной единицы 1, то есть такого элемента, что $a1 = 1a = a$;
- коммутативность $ab = ba$.

Эти условия выделяют специальные классы колец: ассоциативные кольца, кольца с единицей и коммутативные кольца соответственно.

---

[05] при условии, если операция обозначается как умножение, что имеет место в нашем случае; если операцию записывать как сложение, то обратный к g естественно обозначить $(-g)$.

[6] чтобы не усложнять обозначения, операцию - на G и ее ограничение на подмножество $H \subset G$ мы обозначаем одним и тем же символом.

[07] при этом упомянутая выше группа поворотов трехмерного пространства отождествляется с подгруппой ортогональных матриц порядка 3 и определителем, равным 1.

Задача

1.48. Докажите, что в произвольном кольче
a) $a0 = 0a = 0 \quad \forall a \in R$;
b) $a(-b) = (-a)b = -ab \forall a, b \in R$;
c) $a(b - c) = ab - acu(a - b)c = ac - bc \quad \forall a, b, c \in R$.

Задача

1.49. Докажите, что если в кольце существует мультипликативная единица, то она единственна.

Note.

1.50. Если $1 = 0$, то для любого элемента $a \in R$ имеем

$$a = a1 = a0 = 0,$$

т.е. кольцо состоит из одного нуля. Таким образом, если кольцо содержит более одного элемента, то $1 \neq 0$.

Целые числа дают важнейший пример ассоциативного коммутативного кольца с единицей. Еще одним примером такого кольца является кольцо многочленов над полем $\mathbb{K}$, обозначаемое $\mathbb{K}[x]$ (см. пункт 5.2).

Вот еще важный для дальнейшего пример.
Пример 1.51. В Примере 1.41 мы убедились, что $(\mathbb{Z}_n, +)$ - абелева группа и умножение классов вычетов $[k] \cdot [l] = [kl]$ по модулю n корректно определено. Дистрибутивность сложения относительно умножения следует из аналогичного свойства для кольца $\mathbb{Z}$:

$$[k] \cdot ([l] + [m]) = [k] \cdot [l + m] = [k(l + m)] = [kl + km] = [kl] + [km] = [k] \cdot [l] + [k] \cdot [m]$$

Таким образом, $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ - кольцо. Очевидно, оно ассоциативно, коммутативно и обладает единицей [1]. Кольцо $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ (или, кратко, $\mathbb{Z}_n$) называется кольцом классов ввчетов по модулю n.

Элемент a^{-1} кольца с единицей называется обратным к элементу a, если

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1$$

(В коммутативном кольце достаточно требовать, чтобы $aa^{-1} = 1$). Элемент, для которого существует обратный, называеется обратимым.

Задача

1.52. Докажите, что в ассоииативном кольие с единицей для любого элемента существует не более одного обратного.

Задача

1.53. Докажите, что в кольце $\mathbb{Z}_n$ элемент $[k]$ обратим тогда и только тогда, когда $(k, n) = 1$.

Определение

1.54. Подмножество L кольца R называется подкольцом, если

1. $(L, +)$ является подгруппой $(R, +)$;

2. L замкнуто относительно умножения.

Очевидно, что всякое подкольцо само является кольцом относительно тех же операций. При этом оно наследует такие свойства, как коммутативность и ассоциативность.
Пример 1.55. Для любого $n \in \mathbb{N}$ подмножество $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ является подкольцом (без единицы при $n \neq 1$).

Теперь мы готовы дать определение поля.

Определение

1.56. Полем называется ассоциативное коммутативное кольцо $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ с единицей 1, в котором $0 \neq 1$ и все ненулевые элементы обратимы.

Например, $(\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{C}, +, \cdot)$ являются полями, а $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ и $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ - нет (почему?).

В дальнейшем для упрощения обозначений вместо $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ мы будем писать $\mathbb{K}$, считая операции сложения и умножения известными. Кроме того, мы, как правило, будем опускать точку при записи умножения.

Задача

1.57. Докажите, что в любом поле $\mathbb{K}$ выполнено соотношение

$$(-1)a = -a \quad \forall a \in \mathbb{K}$$

Определение

1.58. Подмножество $\mathbb{L}$ поля $\mathbb{K}$ называется подполем, если

1. $\mathbb{L}$ является подкольцом кольца $\mathbb{K}$;
2. $a \in \mathbb{L}, a \neq 0 \Rightarrow a^{-1} \in \mathbb{L}$;
3. $1 \in \mathbb{L}$.

Очевидно, всякое подполе является полем относительно тех же операций.
Например, $\mathbb{Q}$ является подполем в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, а $\mathbb{R}$ - в $\mathbb{C}$. В то же время $\mathbb{Z}$ не является подполем в $\mathbb{Q}$.

Подполе поля комплексных чисел $\mathbb{C}$ иногда называется числовым полем. Существует множество числовых полей помимо перечисленных выше (например, поле чисел вида $a + b\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Q}$), есть также нечисловые поля. Часто наши конструкции работают над произвольным полем.

Есть поля с довольно экзотическими свойствами, например в некоторых выполняется тождество $1 + 1 = 0$. Примером такого поля является поле из двух элементов (это наименьшее возможное поле, поскольку в любом поле $0 \neq 1$). Читателю в качестве упражнения предлагается его построить.

Задача

1.59. Докажите, что поле $\mathbb{Q}$ не имеет нетривиальных (то есть отличных от него самого) подполей.

Задача

1.60. Докажите, что кольцо классов вычетов $\mathbb{Z}_n$ является полем $\Leftrightarrow$ n является простым числом.

3.1.7 1.7 Vector Spaces

В следующем определении нам понадобится понятие внешней бинарной операции, а именно произвольного отображения

$$\varphi : K \times L \to L$$

где $K \neq L$.

Определение

1.61. Векторным (или линейным) пространством над полем $\mathbb{R}$ называется тройка $(V, +, \cdot)$, состоящая из множества V, на котором заданы две бинарные операции:

внутренняя, называемая сложением: $V \times V \xrightarrow{+} V, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \mathbf{u} + \mathbf{v}$, и внешняя, называемая умножением на числа ("скаляры") $\lambda \in \mathbb{R} : \mathbb{R} \times V \to\longrightarrow V, \quad (\lambda, \mathbf{v}) \mapsto \lambda \cdot \mathbf{v}$,
удовлетворяющие следующим условиям ("аксиомам векторного пространства"):

1. $(V, +)$ - абелева группа (называемая аддитивной группой векторного пространства V);
2. умножение на скаляры обладает свойствами: a) $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}(1 \in \mathbb{R})\forall \mathbf{v} \in V$, b) $(\lambda\mu) \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{v})\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v} \in V$
3. сложение и умножение связаны законами дистрибутивности: a) $(\lambda + \mu) \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v} + \mu \cdot \mathbf{v} \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{v} \in V$, b) $\lambda \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{u} + \lambda \cdot \mathbf{v} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

Элементы произвольного векторного пространства называются векторами. Заметим, что в определении векторного пространства вместо поля $\mathbb{R}$ можно взять произвольное поле $\mathbb{K}$, получив определение векторного пространства над полем $\mathbb{K}$. Линейные пространства над полем $\mathbb{R}$ называются вещественными, а над полем $\mathbb{C}$ - комплексными.
В дальнейшем мы будем опускать обозначение $\cdot$ умножения числа на вектор, записывая $\lambda \cdot \mathbf{v}$ просто как $\lambda\mathbf{v}$. Кроме того, вместо тройки ($V, +, \cdot$) мы будем писать просто V, подразумевая, что операции в векторном пространстве ясны из контекста.
Укажем некоторые следствия аксиом векторного пространства, не являющиеся следствиями аксиом абелевой группы. Читателю предлагается доказать их в качестве задачи.

Задача

1.62. Докажите, что в произвольном векторном пространстве $(V, +, \cdot)$ имеют место тождества:

1. $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
2. $\lambda(-\mathbf{v}) = -\lambda\mathbf{v} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{v} \in V$;
3. $0\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{v} \in V$
4. $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in V$.

Заметим, что приведенный в Определении 1.61 список аксиом векторного пространства 1)-3) не является независимым. Например, как показывает следующая задача, коммутативность аддитивной группы векторного пространства - следствие остальных аксиом.

Задача

1.63. Докажите, что коммутативность сложения векторов является следствием остальных аксиом векторного пространства.

Решение. Применяя оба варианта аксиомы дистрибутивности к выражению $(1+1)(u+v)$, получим $u+\ u+v+v=u+v+u+v$. Далее, прибавляя к обеим частям полученного тождества слева $(-u)$ и справа $(-v)$ и используя то, что $(V,+)$ - группа, получим $u+v=v+u$, то есть что эта группа коммутативна.

Интересный вопрос: всякая ли коммутативная группа изоморфна аддитивной группе некоторого векторного пространства (над каким-то полем)? Ответ на этот вопрос отрицательный. Читатель, знакомый с понятием характеристики поля, может попробовать доказать, что группа $\mathbb{Z}$ не изоморфна аддитивной группе никакого векторного пространства.

Рассмотрим примеры векторных пространств.

Пример 1.64. Множество $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ матриц данного размера $m\times n$ с операциями сложения и умножения на числа (в частности, множество столбцов высоты n, часто вместо $\mathrm{Mat}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ обозначаемое $\mathbb{R}^n$) является векторным пространством над $\mathbb{R}$.

Пример 1.65. Множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ можно рассматривать как двумерное векторное пространство над $\mathbb{R}$ с базисом $\{1,i\}$. Действительно, относительно сложения комплексные числа образуют абелеву группу; кроме того, операция умножения на действительные числа обладает требуемыми свойствами пункта 2) Определения 1.61 и, наконец, выполнены законы дистрибутивности из пункта 3) того же Определения. Кроме того, всякое комплексное число $z\in\mathbb{C}$ однозначно записывается в виде $\lambda\cdot 1+\mu\cdot i$, где $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, следовательно, $\{1,i\}$ - базис в векторном пространстве $\mathbb{C}$ над полем $\mathbb{R}$. Это дает возможность изображать комплексные числа векторами на плоскости [8]. Про связь геометрии евклидовой плоскости с комплексными числами можно почитать, например, в [3].

Пример 1.66. Из курса аналитической геометрии (см. например [11]) читателю должны быть известны "геометрические" примеры вещественных векторных пространств - пространства свободных векторов на плоскости и в пространстве относительно обычных операций сложения векторов и умножения их на числа (см. Пример 1.22 и Задачу 1.42).

Определение

1.67. Пусть $U\subset V$ - подмножество множества векторов векторного пространства $(V,+,\cdot)$ такое, что

1. $(U,+)$ - подгруппа аддитивной группы $(V,+)$;
2. $\mathbf{u}\in U\Rightarrow\lambda\mathbf{u}\in U\forall\lambda\in\mathbb{R}$.

Тогда $(U,+,\cdot)$ называется векторным (= линейным) подпространством пространства $(V,+,\cdot)$.

Заметим, что подпространство само является векторным пространством относительно операций, ограниченных с объемлющего пространства.

Приведем некоторые примеры векторных подпространств.

Самое "маленькое" подпространство в $(V,+,\cdot)$ состоит только из нулевого вектора, самое "большое" - совпадает со всем пространством $(V,+,\cdot)$.

Если зафиксировать какую-нибудь прямую на плоскости или в трехмерном пространстве, то множество всех свободных векторов, параллельных ей, образуют подпространство в пространстве свободных векторов соответственно на плоскости или в пространстве. То же для фиксированной плоскости в пространстве. Подпространство образует также подмножество всех симметричных (или кососимметричных) матриц в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ является (вещественным) подпространством пространства $\mathbb{C}$ из Примера 1.65.

Важным результатом о системах линейных уравнений является то, что множество всех решений однородной системы является линейным пространством (подпространством

[0]8заметим, что вместо $\{1,i\}$ в качестве базиса в $\mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$ можно взять любую упорядоченную пару неколлинеарных векторов на плоскости $\mathbb{C}$.

в пространстве столбцов высоты, равной числу неизвестных). Более того, любое подпространство в $\mathbb{R}^n$ можно задать как пространство решений некоторой системы линейных однородных уравнений от n неизвестных.

3.1.8 1.8 Basics

Пусть V - векторное пространство.

Определение

1.68. Системой $n (n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ векторов пространства V называется произвольное отображение $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to V$.

Заметим, что при $n = 0$ получаем пустую систему, состоящую из пустого множества векторов.

Систему n векторов мы будем записывать в виде $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, где $f(k) = \mathbf{v}_k, \quad k = 1, \ldots, n$. Заметим, что система векторов отличается от подмножества двумя свойствами: во-первых, векторы системы имеют естественный порядок (занумерованы числами $1, 2, \ldots, n$), и, во-вторых, в систему элемент может входить более одного раза (то есть возможны повторения).

Линейной комбинацией системы векторов $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ пространства V называется выражение вида

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n$$

После проведения всех вычислений (умножений на скаляры и сложений) такое выражение будет некоторым конкретным вектором $\mathbf{v} \in V$. В этом случае говорят, что вектор $\mathbf{v}$ представляется в виде линейной комбинации системы $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ или раскладывается по данной системе. По определению, линейная комбинация пустой системы векторов равна нулевому вектору.

Вообще говоря, данный вектор может раскладываться по данной системе векторов многими способами. Оказывается, единственность (или неединственность) разложения векторов по данной системе - свойство системы, а не конкретного вектора, который мы по ней раскладываем. Другими словами, если какой-то один вектор раскладывается по системе неединственным образом, то это верно и для любого другого вектора, который по ней раскладывается. Такие системы называются линейно зависимыми.

Напомним формальное определение. Система $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ называется линейно независимой, если нулевой вектор по ней раскладывается единственным образом - с нулевыми коэффициентами, то есть если из $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ следует, что $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. В противном случае система линейно зависима.

То есть система $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ линейно зависима, если найдется набор $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ элементов из $\mathbb{R}$, среди которых не все нулевые, такой, что $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$.

Из курса аналитической геометрии читателю должны быть известны характеризации линейно зависимых и независимых систем в пространствах размерности 1, 2 и 3 (вроде "три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны"). Это, в частности, наглядно демонстрирует то, что за исключением тривиальных случаев, в данном пространстве много разных базисов.

Определение

1.69. Базисом в векторном пространстве V называется такая система векторов $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ пространства V, что произвольный вектор $\mathbf{v} \in V$ однозначно представляется в виде линейной комбинации

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + v_n \mathbf{e}_n \tag{3}$$

векторов данной системы. Упорядоченный набор чисел $(v_1, \ldots, v_n)$ называется координатами вектора $\mathbf{v}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$[9].

Однозначность разложения (3) (при условии существования) равносильна линейной независимости системы $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, в то время как существование разложения произвольного вектора связано с максимальностью такой системы среди всех линейно независимых систем.

Не во всяком векторном пространстве есть базис в смысле данного выше определения. Ниже мы докажем теорему о том, что если в пространстве существует базис из n векторов, то любой другой базис этого пространства также содержит n векторов. Число элементов произвольного базиса (при условии существования) в V называется размерностью пространства V и обозначается $\dim V$. В пространстве, состоящем только из нулевого вектора, базисом по определению является пустая система (и, таким образом, его размерность равна нулю). Если базиса в линейном пространстве (в смысле данного выше определения) не существует, то можно считать что $\dim V = \infty$.

В данном курсе мы в основном будем заниматься пространствами, в которых есть базис в указанном смысле; такие пространства называются конечномерными.

3.1.9 1.9 Algebras over the Field

Многие интересные кольца являются одновременно векторными пространствами, причем эти алгебраические структуры в определенном смысле согласованы. Это сильно облегчает изучение таких колец, поэтому дадим соответствующее определение.

Определение

1.70. Алгеброй над полем $\mathbb{K}$ называется множество A, снабженное тремя операциями (двумя внутренними и одной внешней):

$$A \times A \to A, \quad (a_1, a_2) \mapsto a_1 + a_2, \quad A \times A \to A, \quad (a_1, a_2) \mapsto a_1 a_2$$
$$\mathbb{K} \times A \to A, \quad (\lambda, a) \mapsto \lambda a$$

называемыми соответственно сложением, умножением и умножением на скаляры (=элементы поля $\mathbb{K}$), обладающими следующими свойствами:

1. относительно операций сложения и умножения A является кольцом;
2. относительно сложения и умножения на скаляры A является векторным пространством;
3. $(\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda(ab) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, a, b \in A$.

Коротко можно сказать, что алгебра состоит из векторного пространства V с заданным на нем билинейным отображением $V \times V \to V$. (В самом деле, последнее задает умножение в алгебре, и его билинейность равносильна дистрибутивности и условию 3) из Определения выше).

Алгебра называется ассоциативной (коммутативной, с единицей), если соответствующее кольцо ассоциативно (коммутативно, с единицей).

Основным для нас примером ассоциативной алгебры над полем $\mathbb{K}$ будет алгебра линейных операторов на векторном пространстве V над полем $\mathbb{K}$, обозначаемая $\mathcal{L}(V)$. В ней операции сложения, умножения и умножения на скаляры задаются соответственно сложением линейных операторов, их композицией и умножением операторов на скаляры. Выбор базиса в V определяет некоторый изоморфизм $\mathcal{L}(V)$ с алгеброй матриц $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$, где $n = \dim V$ (изоморфизм - биекция, сохраняющая все операции). Алгебра $\mathcal{L}(V)$ обладает единицей (тождественным оператором) и некоммутативна при $n > 1$.

Пример коммутативной ассоциативной алгебры с единицей над полем $\mathbb{K}$ дает алгебра многочленов $\mathbb{K}[x]$. Поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ является алгеброй над полем $\mathbb{R}$. Более того, если $\mathbb{F}$ - подполе поля $\mathbb{K}$, то $\mathbb{K}$ является $\mathbb{F}$-алгеброй. В частности, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ являются алгебрами над полем $\mathbb{Q}$. Интересным примером алгебры над полем $\mathbb{R}$ является алгебра кватернионов $\mathbb{H}$, см. параграф 14.3 ниже [10], которая является ассоциативной некоммутативной алгеброй с единицей, в которой всякий ненулевой элемент обратим.

[09] Координаты вектора обычно записываются в столбец.

Таким образом, $\mathbb{H}$ является некоммутативным аналогом поля; такие алгебраические структуры называются телами. Можно распространить понятие векторного пространства на случай, когда вместо основного поля рассматривается тело, только в случае тел нужно различать понятия левого и правого векторного пространства [11].

Примером неассоциативной алгебры является 3 -мерное евклидово ориентированное пространство с векторным произведением в качестве умножения. Это пример алгебры из важнейшего класса неассоциативных алгебр - алгебр Ли.

Заметим, что иногда бывает полезно забыть часть алгебраической структуры. Например, забывая структуру векторного пространства на алгебре $\mathbb{K}[x]$, мы получаем кольцо $\mathbb{K}[x]$ (обозначаемое обычно тем же символом, что редко приводит к путанице).

3.2 Elementary Properties of Matrices

Данный раздел посвящен изучению операций с матрицами, которые представляют собой основной вычислительный аппарат линейной алгебры.

3.2.1 2.1 Definition and Types of Matrices

Определение

2.1. Матрицей размера $m \times n$ с элементами из поля $\mathbb{K}$ называется прямоугольная таблица

$$\left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{array}\right) \tag{4}$$

с $a_{ij} \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, в которой m строк и n столбцов.

Читатель заметил, что в нашей записи элемент a_{ij} матрицы стоит на пересечении i-й строки и j-го столбца. То есть первый индекс обозначает номер строки, второй - столбца. Матрицы мы будем обозначать заглавными латинскими буквами $A, B, C, \ldots$ Краткая запись матрицы (4)

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

или просто $A = (a_{ij})$, если размеры уже указаны.
Если число столбцов $n = 1$, то матрица называется столбцом, если число строк $m = 1$, то матрица называется строкой. Если число строк равно числу столбцов, то есть $m = n$, то матрица называется κ ратной. Квадратную матрицу размера $n \times n$ также называют матрицей порядка n. Главная диагональ матрицы A порядка n образована элементами $a_{ii}, 1 \leq i \leq n$. Квадратная матрица называется диагональной, если все ее элементы вне главной диагонали равны нулю: $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Другими словами, все ее ненулевые элементы (если они есть) стоят на главной диагонали. Диагональную матрицу порядка n с элементами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ на главной диагонали мы в дальнейшем иногда будем обозначать $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Матрица порядка n называется единичной, если она диагональна и на главной диагонали стоят единицы:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right)$$

Единичная матрица порядка n обозначается E_n или просто E.
Пусть $\operatorname{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$ (соответственно $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{K})$) обозначает множество всех $m \times n$-матриц

[010] Также о кватернионах написано в книгах [3], [12], [6].

[11] Можно пойти еще дальше, введя объекты, аналогичные векторным пространствам, для которых роль поля играет ассоциативное кольцо с единицей R. Такие объекты существуют и играют очень важную роль в алгебре. Они называются модуля.ми. Мы немного расскажем о них в параграфе 9.6.

(соответственно матриц порядка n) над полем $\mathbb{K}$. Заметим, что две матрицы A и B над одним и тем же полем равны, если они имеют одинаковые размеры и соответствующие элементы матриц равны, $a_{ij} = b_{ij}$.

3.2.2 2.2 Operations with Matrices

Для любых двух матриц $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ одинакового размера определена их сумма $A+B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$, которая является матрицей того же размера. Матрицы складываются покомпонентно: если $C := A + B, C = (c_{ij})$, то

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$$

Из определения суммы матриц и свойств операции сложения элементов поля сразу следуют свойства операции сложения матриц:

1. $\forall A, B, C \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})(A+B)+C = A+(B+C)$ (ассоииативность сложения матриц);
2. $\exists O \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ (а именно, нулевая матрица, состоящая из одних нулей) такая, что $\forall A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}) A + O = A = O + A$ (существование нейтрального, в данном случае нулевого, элемента);
3. $\forall A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}) \exists(-A) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ (противоположная к A матрица, у которой на (i, j)-м месте стоит $-a_{ij}$) такая, что $A + (-A) = O = (-A) + A$ (существование обратного, в данном случае противоположного элемента);
4. $\forall A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}) \quad A + B = B + A$ (коммутативность сложения матриц).

Выполнение условий 1)-3) означает, что множество $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ с операцией сложения является группой, а дополнительное условие 4) означает, что эта группа коммутативна, или абелева.

Кроме того, для любой матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ и элемента поля (= скаляра) $\lambda \in \mathbb{K}$ определена матрица $A' := \lambda A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ с элементами $a'_{ij} = \lambda a_{ij}, \quad 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$ (то есть λA получается из A умножением всех ее элементов на λ).

Из определения легко выводятся свойства операции умножения матриц на скаляры:
5) $\forall A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad (\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$;
6) $\forall A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}) \quad 1A = A$ (здесь 1 обозначает единицу поля $\mathbb{K}$).

Кроме того, непосредственно проверяется, что операции сложения матриц и умножения матриц на скаляры связаны законами дистрибутивности:
7) $\forall A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;
8) $\forall A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

Выполнение свойств 1)-8) означает, что имеет место следующая Теорема.

Теорема

2.2. Для любой пары натуральных чисел m, n множсество $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ матриц размера $m\times n$ с операиями сложения и умножения на скаляры является векторным пространством (см.

Определение

1.61) над полем $\mathbb{K}$.

Определим mn матриц

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & & \vdots & \\ \dots & 0 & \dots & 1 & \dots \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots \\ & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}) \quad 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$$

в которых единственный ненулевой элемент - единица, стоящая на пересечении i-й строки и j-го столбца. Эти матрицы называются матричными единицами (не путать с единичной матрицей). Они образуют базис в пространстве $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Действительно, произвольная матрица $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ единственным образом раскладывается по нему следующим образом:

$$A = \sum_{1\le i\le m, 1\le j\le n} a_{ij}E_{ij}$$

то есть координатами являются ее матричные элементы.
Перейдем теперь к наиболее интересной и наименее тривиальной операции над матрицами - их произведению. Конечно, можно было бы определить произведение двух матриц $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ одинаковых размеров $m\times n$ как такую матрицу $C = (c_{ij})$, что $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$, но это "произведение" [12] не представляет для нас интереса, хотя и обладает рядом "хороших" свойств. "Настоящее" произведение матриц определяется иначе.

Произведение AB матрицы A размера $m \times n$ на матрицу B размера $k \times p$ существует тогда и только тогда, когда $n = k$, то есть когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй (значит, произведение BA существует тогда и только тогда, когда $p = m$), и в последнем случае имеет размер $m \times p$(соотв. $k \times n$). Все это будет следовать из определения произведения матриц, которое мы сейчас дадим.

Итак, пусть $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}), B = (b_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{n\times p}(\mathbb{K})$. Тогда у матрицы $C = AB = (c_{ij})$ элемент c_{ij} вычисляется по формуле

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \quad 1 \le i \le m, 1 \le j \le p \tag{5}$$

то есть является суммой произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B (кратко это правило может быть сформулировано так: матрицы перемножаются по правилу "строка на столбец"). Чтобы такое произведение было определено, нужно, чтобы длина строк матрицы A была равна высоте столбцов матрицы B. Кроме того, индекс i пробегает номера строк матрицы A, а j - номера столбцов матрицы B, отсюда получаем, что произведение AB является матрицей размера $m \times p$, как и утверждалось.

Note.

2.3. Так как правило умножения матриц на первый взгляд выглядит искусственно, приведем две его интерпретации - одну практическую, другую - физическую.

Предположим, что имеется m предприятий, выпускающих n видов изделий. Через a_{ij} обозначим количество изделий j-го вида, выпускаемых i-м предприятием за один год (мы предполагаем, что эта величина постоянна год от года). Пусть A - матрица размера $m \times n$ с элементами a_{ij}. Пусть b_{jk} обозначает стоимость изделия j-го вида в k-м году, где $1 \le k \le s$. Из чисел b_{jk} составим матрицу B размера $n \times s$. Тогда легко видеть, что (i, k)-й элемент матрицы AB - стоимость продукции, выпущенной i-м предприятием за k-й год.

Приведем теперь физическую интерпретацию умножения матриц [13] (для простоты рассмотрим случай квадратных матриц). Пусть у нас есть физическая система с n состояниями $\{1, 2, \dots, n\}$ (например, с n уровнями энергии). Матрица A порядка n описывает применение к указанной системе некоторого физического воздействия. Более точно, ее i, j-й элемент a_{ij} является "амплитудой перехода" из состояния i в состояние j[14]. Например, если амплитуда перехода из состояния i в состояние j равна амплитуде обратного перехода, то матрица A будет симметричной (определение симметричной матрицы см. ниже). Пусть помимо физического воздействия на систему, отвечающего матрице A, есть также физическое воздействие, описываемое матрицей B. Какой матрице C отвечает применение сначала воздействия A, а затем воздействия B? Сделаем физическое предположение: если процесс является композицией процессов, то его амплитуда есть произведение амплитуд, а если процесс может произойти несколькими альтернативными путями, то его амплитуда является суммой амплитуд всех таких путей.

[012] оно называется произведением Адамара.

Тогда амплитуда c_{ij} перехода из состояния i в состояние j в результате указанной композиции воздействий в точности дается выражением (5). Действительно, указанное выражение говорит нам, что система из состояния i в состояние j может перейти через любое промежуточное состояние $1, 2, \ldots, n$ и произведение $a_{ik}b_{kj}$ есть амплитуда перехода из i в j через промежуточное состояние k[15].

Разберем несколько частных случаев умножения матриц. Например, определено произведение строки длины n на столбец высоты n, которое является матрицей размера 1×1[16]. В обратном порядке их произведение также определено и является уже матрицей размера $n \times n$.

Задача

2.4. Проверьте, что матричные единицы E_{ij} перемножаются по следующему правилу:

$$E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il} \tag{6}$$

Задача

2.5. Покажите, что умножсние произвольной матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ на матричную единииу E_{ij} порядка m слева дает матрицу $E_{ij}A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$, у которой в i-й строке стоит j-я строка матрицы A, а в осталъных местах нули. Аналогично, умножение матричы A на матричную единичу E_{ij} порядка п справа дает матричу, у которой в j-м столбце стоит i-й столбец матрицы A, а в осталъных местах - нули.

Задача

2.6. Любую ли матричу размера $m \times n$ можно представить в виде произведения столбц высоты m на строку длины n при $m, n > 1$?

Также определено произведение $A\mathbf{b}$ матрицы A размера $m \times n$ на столбец $\mathbf{b}$ высоты n, которое является столбцом высоты m. Посчитаем это произведение:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \ldots + a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \ldots + a_{2n}b_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \ldots + a_{mn}b_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} b_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} b_2 + \ldots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{7}$$

Таким образом, столбец $A\mathbf{b}$ является линейной комбинацией столбцов матрицы A с коэффициентами из столбца $\mathbf{b}$.

Пусть $\mathbf{b}_i, i = 1, \ldots, p$ - столбцы матрицы B, то есть $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_p)$. Тогда из определения умножения матриц следует, что $AB = (A\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_2, \ldots, A\mathbf{b}_p)$, то есть i-й столбец матрицы AB есть произведение A на $\mathbf{b}_i$. Таким образом, нами доказано следующее Предложение.

[013] Физический смысл с точки зрения квантовой механики она имеет для комплексных матриц.

[14] Для комплексных матриц квадрат модуля амплитуды равен вероятности.

[15] Интересно заметить, что в случае комплексных амплитуд при вычислении квадрата модуля c_{ij} возникают характерные для квантовой механики интерференционные эффекты между разными путями, которыми данный переход $i \mapsto j$ может произойти.

[16] Заметим, что считать матрицу порядка 1 "просто числом" неправильно: число (скаляр) можно умножать на любую матрицу, в то время как матрицу порядка 1 можно умножать слева только на строку, а справа - только на столбец.

Предложение

2.7. i-й столбец, матрицы $AB(i = 1, \dots, p)$ является линейной комбинацией столбцов матрицы A с коэффициентами из i-го столбца матрицы B. Аналогично, i-я строка матрицы AB является линейной комбинацией строк матричы B с коэффициентами из i-й строки матрицы A.

Пример 2.8. Заметив, что столбцы $\{c_1, c_2, c_3\}$ матрицы

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

связаны соотношением $2c_2 = c_1 + c_3$, представим ее в виде произведения матриц A и B размеров соответственно 3×2 и 2×3. В качестве A возьмем, например, матрицу, состоящую из первых двух столбцов C, тогда в качестве B необходимо взять матрицу, в i-м столбце которой стоят коэффициенты разложения i-го столбца матрицы A по выбранной системе столбцов (в нашем случае это c_1 и c_2), то есть $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Заметим, что не любую матрицу порядка 3 можно представить в виде произведения матриц размеров 3×2 и 2×3 а только такую, столбцы которой линейно зависимы.

Следующее

Предложение

проверяется прямым вычислением (или, даже проще, выводится из ассоциативности произведения базисных элементов - матричных единиц (ср. формулу (6)).

Предложение

2.9. Умножение матриц ассоциативно всякий раз когда оно определено. То есть если одно из произведений $(AB)C$ или $A(BC)$ существует, то существует и другое, и они равны: $(AB)C = A(BC)$ (в частности, это всегда верно для квадратных матриц, одного порядка). Кроме того, если $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$, то $E_m A = A = A E_n$, где E_m и E_n - единичные матрицы порядков m и n соответственно.

В дальнейшем, при изучении связи матриц с линейными отображениями, мы получим более концептуальную интерпретацию свойств операций с матрицами.

Note.

2.10. Как уже отмечалось выше, произведение строки длины n на столбец высоты n - матрица порядка 1, а не число. Действительно, в противном случае нарушилась бы ассоциативность: произведение матриц $((1 \times n)(n \times 1))(m \times k)$ было бы определено, а $(1 \times n)((n \times 1)(m \times k))$ при $m \neq 1$ - нет.

Кроме того, сложение и умножение матриц связаны законами дистрибутивности:

$$A(B + C) = AB + AC, \quad (A + B)C = AC + BC$$

и для любого $\lambda \in \mathbb{K}$ выполнены равенства $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$ (всюду размеры матриц предполагаются согласованными, чтобы операции имели смысл).

Из сформулированных свойств сложения и умножения матриц а также их умножения на скаляры следует, что множество $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ матриц фиксированного порядка n относительно указанных операций является ассоциативной алгеброй с единицей над полем $\mathbb{K}$.

Задача

2.11. Покажите, что при умножении произвольной матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ на матричу $P_{ij}(\lambda) := E+\lambda E_{ij}$ (см. (10)) порядка m слева дает матрицу $P_{ij}(\lambda)A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$, которая получается из A прибавлением i-й строке ее j-й строки, умноженной на λ. Аналогично, умножение матрицы A на на матрицу $P_{ij}(\lambda) := E+\lambda E_{ij}$ порядка п справа дает матричу, которая получается из A прибавлением j-му столбцу ее i-го столбца. (Указание: используйте задачу 2.5).

Перечисленные до сих пор свойства умножения в случае квадратных матриц фиксированного порядка (ассоциативность, существование нейтрального элемента, дистрибутивность относительно сложения) аналогичны свойствам умножения чисел. Однако есть и принципиальные отличия. Во-первых, умножение (даже квадратных) матриц, вообще говоря, некоммутативно. Читатель легко убедится в этом, перемножив, например, матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Две матрицы A, B называются перестановочнымии, если $AB = BA$ (в частности, они обязательно квадратные одного порядка). Матрицы вида λE (где E, как обычно, обозначает единичную матрицу) называются скалярными.

Задача

2.12. Докажите, что матрица данного порядка п перестановочна со всеми матрицами порядка п тогда и толъко тогда, когда она скалярна.

Во-вторых, пример с матрицами (8) показывает, что произведение ненулевых матриц может равняться нулевой матрице. Есть даже ненулевые матрицы, некоторая степень которых равна нулевой матрице (например, квадрат второй из матриц (8)). С этим связано третье отличие: не всякая ненулевая матрица имеет обратную.

Определение

2.13. Матрица B называется обратной для матрицы A, если

$$AB = E = BA$$

Матрица, для которой существует обратная, называется обратимой. Обратная матрица обычно обозначается A^{-1}.

Note.

2.14. Легко видеть, что предыдущее определение имеет смысл только для квадратных матриц. Мотивировка его следующая: число b называется обратным для числа a, если $ab = 1$; аналогом числа 1 (нейтрального элемента по умножению) в случае квадратных матриц является единичная матрица; из-за некоммутативности умножения матриц помимо равенства $AB = E$ требуется также выполнение равенства $BA = E$.

Задача

2.15. Докажите, что если обратная матрица для данной матрицы существует, то она единственна.

Задача

2.16. Докажите, что произведение обратимых матриц одинакового порядка обратимо.

Задача

2.17. Пусть для матрицы $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ существует такая ненулевая матрица $C \in \mathrm{Mat}_{n\times p}(\mathbb{K})$, что $AC = O$. Тогда дляя A не может существовать обратной.

Задача

2.18. Докажите, что для матриц из $AB = AC$, вообще говоря, не следует $B = C$. Кажов критерий того, что на A можно сокращать слева (справа)?

Из-за некоммутативности умножения матриц матричные уравнения $AX = B$ и $YA = B$, даже если матрица A обратима, имеют, вообще говоря, разные решения $X = A^{-1}B \neq BA^{-1} = Y$. То есть для матриц есть левое и правое деления.

Не следует думать, что перечисленные "отрицательные" свойства являются "недостатками" операций с матрицами. Например, матрицы можно использовать для описания поворотов трехмерного пространства, причем композиция последних отвечает произведению матриц. Легко проверить, что композиция поворотов, вообще говоря, некоммутативна. Поэтому возможность данного применения матриц связана с некоммутативностью их произведения. Кроме того, матрицы используются в математическом аппарате квантовой механики и некоммутативность их умножения связана с соотношением неопределенностей Гейзенберга.

Есть еще одна важная операция с матрицами - транспонирование. Пусть A - матрица размера $m \times n$. Тогда ее транспонированная матрица A^T имеет размер $n \times m$ и характеризуется тем, что ее i-й столбец равен i-й строке матрицы A при $i = 1, \ldots, m$. Если $A^T = \left(a^T_{ij}\right)$, то $a^T_{ij} = a_{ji}$.

Предложение

2.19. Операция транспонирования матриц, $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{R}), \quad A \mapsto A^T$ обладает следующими свойствами:

1. $\forall A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R}) (A + B)^T = A^T + B^T$;
2. $\forall A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R} (\lambda A)^T = \lambda A^T$
3. $\forall A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R}) \left(A^T\right)^T = A$ (в частности, любая матрица является транспонированной к некоторой, а именно A^T);
4. $\forall A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R}), \quad B \in \mathrm{Mat}_{n\times k}(\mathbb{R}) (AB)^T = B^T A^T$;
5. При условии что $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$, обратима, $\left(A^T\right)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Proof. □

Проверка первых трех свойств тривиальна. Докажем последние два.
4) Обозначим $C := AB$. Имеем

$$c^T_{ki} = c_{ik} = \sum_j a_{ij} b_{jk} = \sum_j b_{jk} a_{ij} = \sum_j b^T_{kj} a^T_{ji}$$

откуда и следует требуемое $C^T = B^T A^T$.
5) Проверим, что обратной к $(A^{-1})^T$ является A^T. В самом деле,

$$A^T \left(A^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}A\right)^T = E, \quad \left(A^{-1}\right)^T A^T = \left(AA^{-1}\right)^T = E$$

Тогда в силу единственности обратной матрицы $(A^{-1})^T = \left(A^T\right)^{-1}$.
Матрица A называется симметричной (соответственно кососимметричной), если $A^T = A$ (соответственно $A^T = -A$). Легко видеть, что матрица A симметрична (соответственно

кососимметрична) тогда и только тогда, когда все ее матричные элементы удовлетворяют тождеству $a_{ij} = a_{ji}$ (соответственно тождеству $a_{ij} = -a_{ji}$). То есть в симметричной матрице (которая обязательно является квадратной) на симметричных относительно главной диагонали местах стоят равные элементы, а у кососимметричной такие элементы отличаются знаком (в частности, на главной диагонали кососимметричной матрицы стоят нули).

Множество всех симметричных (соответственно кососимметричных) матриц порядка n обозначим $\mathrm{Mat}_n^+(\mathbb{R})$ (соответственно $\mathrm{Mat}_n^-(\mathbb{R})$).

Задача

2.20. Используя свойства 1) и 2) из предыдущего Предложения докажите, что множества $\mathrm{Mat}_n^+(\mathbb{R})$ и $\mathrm{Mat}_n^-(\mathbb{R})$ являются линейными подпространствами (см.

Определение

1.67) в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Каковы их размерности?

Следующая задача показывает, что можно построить такую биекцию между комплексными числами и некоторым двумерным пространством вещественных матриц порядка 2, что сложение и умножение комплексных чисел перейдут соответственно в сложение и умножение матриц.

В самом деле, рассмотрим подпространство матриц

$$A := \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & -b \\ b & a \end{array} \right) \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$$

Из представления $\left(\begin{array}{cc} a & -b \\ b & a \end{array} \right) = aE + bJ$, где $J := \left(\begin{array}{cc} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{array} \right)$ легко видеть, что A - двумерное векторное пространство над $\mathbb{R}$ с базисом $\{E, J\}$. Также легко проверить, что $J^2 = -E$ (матричный аналог соотношения $i^2 = -1$)

Оказывается, A - не просто подпространство в $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, а кольцо, и даже поле, изоморфное полю $\mathbb{C}$ (относительно обычных операций сложения и умножения матриц).

Задача

2.21. Докажите, что отображение

$$\varphi : \mathbb{C} \to A, \quad \varphi(a + bi) = \left(\begin{array}{cc} a & -b \\ b & a \end{array} \right)$$

определяет изоморфизм поля $\mathbb{C}$ с полем матриц, указанного вида. Более подробно, проверьте, что φ биективно и сохраняет операции, то есть $\varphi((a + bi) + (c + di)) = \varphi(a + bi) + \varphi(c + di)$ и $\varphi((a + bi)(c + di)) = \varphi(a + bi)\varphi(c + di)$.

Также докажите, что ограничение φ на $\{z \in \mathbb{C} || z \mid = 1\} \subset \mathbb{C}$ определяет изоморфизм группы из Задачи 1.38 с группой матриц поворотов (с операцией умножения). Как это связано с формулой Эйлера $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha$?

В частности, из предыдущей задачи следует, что все ненулевые матрицы вида $\left(\begin{array}{cc} a & -b \\ b & a \end{array} \right)$ обратимы. Читателю предлагается получить явное выражение для обратной матрицы.

3.2.3 2.3 Elementary Transformations

В этом разделе мы введем и начнем изучать элементарные преобразования строк и столбцов матриц, которые будут играть важную роль в дальнейшем.

Пусть A - произвольная матрица размера $m \times n$. Определим элементарные преобразования ее строк.

Определение

2.22. Элементарным преобразованием типа I строк матрицы A называется прибавление к некоторой ее строке (скажем, с номером $i, 1 \leq i \leq m$) некоторой другой ее строки (скажем, с номером $j, 1 \leq j \leq m, j \neq i$), умноженной на некоторое число λ (при этом остальные строки кроме i-й не меняются).

Элементарным преобразованием типа II строк матрицы A называется перестановка местами двух ее строк (скажем i-й и j-й, $1 \leq i \neq j \leq m$).

Элементарным преобразованием типа III строк матрицы A называется умножение некоторой ее строки (скажем, с номером $i, 1 \leq i \leq m$) на ненулевое число c.

Аналогично определяются три типа элементарных преобразований столбцов.

Заметим, что элементарные преобразования обратимы, то есть для каждого элементарного преобразования строк матриц с m строками существует (причем единственное) элементарное преобразование строк такое, что их композиция (последовательное выполнение) есть тождественное преобразование на множестве матриц с m строками (которое само является элементарным преобразованием типа I (при $\lambda = 0$) или типа III (при $c = 1$)). Например, для введенного в предыдущем Определении элементарного преобразования типа I обратным будет прибавление к i-й строке j-й, умноженной на $-\lambda$; элементарное преобразование типа II обратно самому себе; обратное к элементарному преобразованию типа III есть умножение i-й строки на c^{-1} (которое существует, поскольку $c \neq 0$).

Элементарные преобразования строк можно выполнять последовательно, получая из исходной матрицы A новые матрицы. Назовем две матрицы A и A' размера $m \times n$ строчно эквивалентными, если существует конечная последовательность элементарных преобразований строк, переводящая первую матрицу во вторую. Читателю предлагается провести несложную проверку того, что это - действительно отношение эквивалентности на $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Оно встретится нам также при изучении систем линейных уравнений.

Естественно спросить, как можно описать множество классов строчной эквивалентности матриц данного размера? Какие свойства матриц сохраняются при элементарных преобразованиях? Каков критерий того, что две матрицы данного размера строчно эквивалентны? В общем случае ответы на эти вопросы выходят за рамки нашего курса, но вскоре мы, например, сможем многое сказать о классе эквивалентности единичной матрицы.

Определение

2.23. Квадратная матрица называется невырожденной, если ее строки линейно независимы. В противном случае матрица называется вырожденной.

Например, легко проверить, что единичная матрица невырождена, а нулевая квадратная матрица или матрица порядка $n \geq 2$ с одинаковыми строками - вырождены.

Еще пример: матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ вырождена, поскольку между ее строками $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ есть линейная зависимость $\mathbf{a}_1 - \mathbf{2a_2} + \mathbf{a_3} = \mathbf{0}$.

Задача

2.24. Докажите, что квадратная матрица A вырождена тогда и только тогда, когда существует такая строка $\boldsymbol{c} \neq \mathbf{0}$, что $\boldsymbol{c}A = \boldsymbol{O}$ (ноль справа обозначает нулевую строку). (Указание: воспользуйтесь Предложением 2.7).

Предложение

2.25. Если две матрицы строчно эквивалентны, то либо обе они вырождены, либо обе невырождены.

Proof. □

Для каждого типа элементарных преобразований проверим, что если две матрицы связаны одним элементарным преобразованием, то либо обе они вырождены,
либо обе невырождены. Для элементарных преобразований типа II это очевидно (условие линейной независимости системы векторов не зависит от порядка векторов в системе).

Рассмотрим элементарное преобразование типа III строк матрицы A, заключающееся в умножении i-й строки на $\alpha \neq 0$. То есть если $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ - строки матрицы A, то строки преобразованной матрицы A' удовлетворяют условиям $\mathbf{a}'_i = \alpha \mathbf{a}_i, \mathbf{a}'_k = \mathbf{a}_k$ при $k \neq i$. Пусть $\mathbf{c}$ - произвольная строка длины m, тогда имеем цепочку эквивалентностей:

$$\mathbf{c}A' = \mathbf{0} \Leftrightarrow c_1\mathbf{a}_1 + \ldots + c_i\alpha\mathbf{a}_i + \ldots + c_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{c}'A = \mathbf{0}$$

где строка $\mathbf{c}'$ получена из с умножением i-го элемента на α. Заметим, что $\mathbf{c} \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{c}' \neq \mathbf{0}$ (так как $\alpha \neq 0$). В силу предыдущей задачи это доказывает, что элементарные преобразования типа III сохраняют условие вырожденности (невырожденности) матрицы.

Наконец, рассмотрим случай преобразований типа I. Пусть $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ - строки матрицы A, и матрица A' получена из A прибавлением к i-й строке умноженной на λj-й строки, то есть $\mathbf{a}'_k = \mathbf{a}_k$ при $k \neq i$ и $\mathbf{a}'_i = \mathbf{a}_i + \lambda\mathbf{a}_j$. Тогда мы имеем цепочку эквивалентностей [17] :

$$\mathbf{c}A' = \mathbf{0} \Leftrightarrow c_1\mathbf{a}_1 + \ldots + c_i\mathbf{a}'_i + \ldots + c_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow c_1\mathbf{a}_1 + \ldots + c_i\mathbf{a}_i + \ldots + (c_j + \lambda c_i)\,\mathbf{a}_j + \ldots + c_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{c}'A = \mathbf{0}$$

где $\mathbf{c}'$ получена из с прибавлением к j-му элементу умноженного на λi-го элемента [18]. Причем заметим, что $\mathbf{c} \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{c}' \neq \mathbf{0}$. Таким образом, в силу предыдущей задачи элементарные преобразования типа I также сохраняют условие вырожденности (невырожденности) матриц.

В итоге мы убедились, что каждый из трех типов элементарных преобразований по отдельности обладает требуемым свойством, а значит оно выполнено и для их произвольной конечной композиции.

Вскоре мы докажем, что все невырожденные матрицы данного порядка образуют один класс строчной эквивалентности.

Определение

2.26. Ведущим элементом некоторой ненулевой строки матрицы A называется первый слева среди ее ненулевых элементов. То есть a_{ij} - ведущий элемент i-й строки матрицы A, если $a_{i1} = a_{i2} = \ldots = a_{ij-1} = 0$, но $a_{ij} \neq 0$.

Определение

2.27. Говорят, что матрица A размера $m \times n$ является ступенчатой (или что она "имеет ступенчатый ви"), если в каждой следующей ее строке сверху вниз как минимум на один нуль слева больше, чем в предыдущей. Иначе говоря, если $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \ldots, a_{rj_r} (r \leq m)$ - последовательность из ведущих элементов ее ненулевых строк, то последовательность $j_1, j_2, \ldots, j_r$ номеров их столбцов строго возрастает.

Ступенчатая квадратная матрица называется строго верхнетреугольной, если на главной диагонали стоят ненулевые элементы. Другими словами, если $m = n$ и $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm}$ - ее ведущие элементы.

Нетрудно видеть, что (квадратная) ступенчатая матрица невырождена тогда и только тогда, когда она строго верхнетреугольная.

Предложение

2.28. Любой класс строчной эквивалентности матриц содержит ступенчатую матрицу.

Proof. □

[017] ниже мы предполагаем $j > i$, аналогично рассматривается второй случай.

[18] Заметим, что это некоторое элементарное преобразование столбцов. Общий случай станет ясен после прочтения раздела 2.5.

Нам нужно доказать, что для любой матрицы A существует последовательность элементарных преобразований ее строк, приводящая ее к ступенчатому виду. Мы предъявим алгоритм построения такой последовательности.

Если матрица A нулевая, то она уже имеет ступенчатый вид. Пусть это не так, и пусть j_1 - номер ее первого слева ненулевого столбца. Если $a_{1j_1} \neq 0$, то, вычитая из строк, начиная со второй, нужную кратность первой строки, мы обнуляем все элементы j_1-го столбца, кроме первого. Если $a_{j_1} = 0$, но $a_{ij_1} \neq 0$ (ненулевой элемент в j_1-м столбце существует по условию), мы меняем местами 1 -ю и i-ю строки и приходим к описанной ситуации. Тем самым мы получаем матрицу, у которой ненулевые элементы второй и последующих строк стоят в столбцах с номерами, большими j_1.

Далее мы применяем описанную процедуру к подматрице, образованной строками, начиная со второй, и т.д. В итоге получаем ступенчатую матрицу.

В частности, любая невырожденная матрица строчно эквивалентна строго верхнетреугольной.

Алгоритм приведения матрицы к ступенчатому виду, описанный в предыдущем Предложении, называется методом Гаусса.

Чтобы описать дальнейшую процедуру "упрощения" матрицы, введем еще одно понятие.

Определение

2.29. Главным столбцом ступенчатой матрицы A называется любой столбец, в котором стоит ведущий элемент некоторой строки A.

Определение

2.30. Ступенчатая матрица называется упрощенной, если после отбрасывания ее нулевых строк (которые, если они есть, стоят на последних местах) главные столбцы составляют единичную подматрицу некоторого порядка $r \leq m$.

Предложение

2.31. Любая матрица строчно эквивалентна упрощенной.

Proof. □

К полученной на предыдущем шаге ступенчатой матрице применим процедуру, называемую обратным ходом метода Гаусса. Пусть $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$ - номера всех ее главных столбцов (тогда строки с номерами, большими r, равны нулю). Тогда $a_{rj_r} \neq 0$, и вычитая нужную кратность r-й строки из предыдущих, можно обнулить все
элементы j_r-го столбца кроме a_{rj_r}. Это не испортит ступенчатого вида матрицы, поскольку $a_{ij_r} = 0$ при $i < r$. Далее повторяем указанную процедуру с главным столбцом с номером j_{r-1} и т.д. В конце концов мы получим матрицу, у которой (после отбрасывания нулевых строк) главные столбцы образуют диагональную подматрицу с ненулевыми элементами на главной диагонали. Деление строк на эти элементы (т. е. применение элементарных преобразований типа III) завершает доказательство.

Note.

2.32. Можно доказать, что каждый класс строчной эквивалентности матриц содержит единственную упрощенную матрицу.

Пример 2.33. Приведем, например, к упрощенному виду матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(первая стрелка отвечает композиции двух элементарных преобразований типа I: вычитанию из второй строки первой, умноженной на 4 и вычитанию из третьей строки первой, умноженной на 7 ; вторая стрелка отвечает умножению второй строки на $-1/3$, третьей на $-1/6$ и последующему вычитанию из третьей строки второй; третья стрелка - вычитанию из первой строки второй, умноженной на 2).

Пример 2.34. Рассмотрим еще один пример приведения матрицы к упрощенному виду. Пусть дана матрица

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

приведем ее сначала к ступенчатому виду по нашему алгоритму. Для этого из 2 -й, 3 -й и 4 -й строк вычитаем 1-ю строку, умноженную на 1,2 и 2 соответственно. В результате получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & -4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Далее, прибавляя к 3-й и 4 -й строкам 2-ю строку, умноженную на 3 и 4 соответственно, получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Наконец, переставляя 3 -ю и 4 -ю строки, получаем ступенчатую матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Приведем ее теперь к упрощенному виду, используя обратный ход метода Гаусса. Вычитая из 2 -й строки 3 -ю, получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Наконец, вычитая из 1-й строки удвоенную 2 -ю и умножая 3 -ю строку на -1, получим упрощенную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

У нее главные столбцы имеют номера 1,2 и 4.

Выше уже было замечено, что ступенчатая матрица невырождена тогда и только тогда, когда она является строго верхнетреугольной. У строго верхнетреугольной матрицы все столбцы являются главными. Поэтому применение к ней обратного хода метода Гаусса дает единичную матрицу. Тогда с учетом предыдущего Предложения получаем половину следующего важного утверждения.

Предложение

2.35. Матрица невырождена $\Leftrightarrow$ она строчно эквивалентна единичной.

Proof. □

Как уже говорилось, импликация " $\Rightarrow$ " следует из Предложения 2.31.
Обратная импликация вытекает из того, что единичная матрица, очевидно, невырождена.

3.2.4 Indexes

Matrix Operations in Index Form

Matrix multiplication:

$$C_{jl} = \sum_{k} A_{jk} B_{kl}, \quad D_{jl} = \sum_{kk'} A_{jk} B_{kk'} C_{k'l}$$

This is obvious.

Unitarity condition

$$\delta_{jl} = \sum_{k} U^*_{jk} U_{kl} = \sum_{k} U_{kj} U^*_{lk}$$

(??? why do we have exactly such positions of indices??? but okay, it can work)

Position of Indexes

(write from field theory)

3.2.5 Diagonalization of a Matrix

(nontypical - last section with applications)

Метод диагонализации (????)

To diagonalize matrix (if it is diagonalizable), we need to find eigenvectors and then put them into the columns of an orthogonal matrix, which will be used for multiplication of the original matrix and will produce the diagonal one.

Diagonalizing a matrix is the same process as finding its eigenvalues and eigenvectors, in the case that the eigenvectors form a basis. For example, consider the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

The roots of the characteristic polynomial $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ are the eigenvalues $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$. Solving the linear system $(1I - A)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ gives the eigenvectors $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0)$ and $\mathbf{v}_2 = (0, 2, 1)$, while $(2I - A)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ gives $\mathbf{v}_3 = (1, 0, -1)$; that is, $A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ for $i = 1, 2, 3$. These vectors form a basis of $V = \mathbb{R}^3$, so we can assemble them as the column vectors of a change-of-basis matrix P to get:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = D.$$

We may see this equation in terms of transformations: P takes the standard basis to the eigenbasis, $P\mathbf{e}_i = \mathbf{v}_i$, so we have:

$$P^{-1}AP\mathbf{e}_i = P^{-1}A\mathbf{v}_i = P^{-1}(\lambda_i \mathbf{v}_i) = \lambda_i \mathbf{e}_i$$

so that $P^{-1}AP$ has the standard basis as its eigenvectors, which is the defining property of D. Note that there is no preferred order of the eigenvectors in P; changing the order of the eigenvectors in P just changes the order of the eigenvalues in the diagonalized form of $A \cdot$ [2]

Williamson Theorem (???)

F. Nicacio Williamson theorem in classical, quantum, and statistical physics

More precisely, given a strictly positive-definite $2n \times 2n$ Hermitian real matrix $M \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, the theorem ensures the existence of a real symplectic matrix $S \in \mathbf{Sp}(2n, \mathbb{R})$, and a diagonal positive real matrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$, such that

$$SMS^T = I_2 \otimes D \equiv D \oplus D$$

where I_2 denotes the 2×2 identity matrix.

Proof. The derivation of the result hinges on a few basic observations:

1. The real matrix $M^{-1/2}(J \otimes I_n) M^{-1/2}$, with $J \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, is well-defined and skew-symmetric.

2. For any invertible skew-symmetric real matrix $A \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$, there is $O \in \mathbf{O}(2n)$ such that $OAO^T = J \otimes \Lambda$, where Λ a real positive-definite diagonal matrix containing the singular values of A.

3. For any orthogonal $O \in \mathbf{O}(2n)$, the matrix $S = \left(I_2 \otimes \sqrt{D}\right) OM^{-1/2}$ is such that $SMS^T = J \otimes D$.

4. If $O \in \mathbf{O}(2n)$ diagonalizes $M^{-1/2}(J \otimes I_n) M^{-1/2}$, meaning it satisfies

$$OM^{-1/2}(J \otimes I_n) M^{-1/2} O^T = J \otimes \Lambda$$

then $S = \left(I_2 \otimes \sqrt{D}\right) OM^{-1/2}$ is such that

$$S(J \otimes I_n) S^T = J \otimes (D\Lambda)$$

Therefore, taking $D = \Lambda^{-1}$, the matrix S is also a symplectic matrix, satisfying $S(J \otimes I_n) S^T = J \otimes I_n$.

□

Overview of Other Methods for Diagonalization

(???)

Application of Diagonalization

Computing higher degrees of a matrix by using diagonalization: Instructions

Diagonalization can be used to efficiently compute the powers of a matrix $A = PDP^{-1}$:

$$\begin{aligned} A^k &= \left(PDP^{-1}\right)^k = \left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right)\cdots\left(PDP^{-1}\right) \\ &= PD\left(P^{-1}P\right)D\left(P^{-1}P\right)\cdots\left(P^{-1}P\right)DP^{-1} = PD^kP^{-1} \end{aligned}$$

and the latter is easy to calculate since it only involves the powers of a diagonal matrix. For example, for the matrix A with eigenvalues $\lambda = 1, 1, 2$ in the example above we compute:

$$\begin{aligned} A^k = PD^kP^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1-1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^k & 0 & 0 \\ 0 & 1^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2-2^k & -1+2^k & 2-2^{k+1} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1+2^k & 1-2^k & -1+2^{k+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

This approach can be generalized to matrix exponential and other matrix functions that can be defined as power series. For example, defining $\exp(A) = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots$, we have:

$$\begin{aligned} \exp(A) = P\exp(D)P^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^1 & 0 & 0 \\ 0 & e^1 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2e-e^2 & -e+e^2 & 2e-2e^2 \\ 0 & e & 0 \\ -e+e^2 & e-e^2 & -e+2e^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

This is particularly useful in finding closed form expressions for terms of linear recursive sequences, such as the Fibonacci numbers.

Computing higher degrees of a matrix by using diagonalization: Example

For example, consider the following matrix:

$$M = \begin{bmatrix} a & b-a \\ 0 & b \end{bmatrix}.$$

Calculating the various powers of M reveals a surprising pattern:

$$M^2 = \begin{bmatrix} a^2 & b^2-a^2 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix}, \quad M^3 = \begin{bmatrix} a^3 & b^3-a^3 \\ 0 & b^3 \end{bmatrix}, \quad M^4 = \begin{bmatrix} a^4 & b^4-a^4 \\ 0 & b^4 \end{bmatrix}, \quad \ldots$$

The above phenomenon can be explained by diagonalizing M. To accomplish this, we need a basis of $\mathbb{R}^2$ consisting of eigenvectors of M. One such eigenvector basis is given by

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$$

where $\mathbf{e}_i$ denotes the standard basis of $\mathbf{R}^n$. The reverse change of basis is given by

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{v} - \mathbf{u}.$$

Straightforward calculations show that

$$M\mathbf{u} = a\mathbf{u}, \quad M\mathbf{v} = b\mathbf{v}.$$

Thus, a and b are the eigenvalues corresponding to $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$, respectively. By linearity of matrix multiplication, we have that

$$M^n\mathbf{u} = a^n\mathbf{u}, \quad M^n\mathbf{v} = b^n\mathbf{v}.$$

Switching back to the standard basis, we have

$$\begin{aligned} M^n\mathbf{e}_1 &= M^n\mathbf{u} = a^n\mathbf{e}_1 \\ M^n\mathbf{e}_2 &= M^n(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = b^n\mathbf{v} - a^n\mathbf{u} = (b^n - a^n)\,\mathbf{e}_1 + b^n\mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

The preceding relations, expressed in matrix form, are

$$M^n = \left[\begin{array}{cc} a^n & b^n - a^n \\ 0 & b^n \end{array} \right],$$

thereby explaining the above phenomenon.

3.2.6 Diagonalization of a Matrix: Examples

Diagonalization of a Matrix in Superconductivity

(write shortly this Denis's solution!!!! more detailed version - in the problem-solution section)

3.2.7 2.4 Systems of Linear Equations.

В данном параграфе мы начнем знакомство с системами линейных уравнений; более серьезная их теория будет изложена в следующих параграфах.

Линейным уравнением от n неизвестных $x_1, \dots, x_n$ называется уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

где $a_1, \dots, a_n, b$ - заданные элементы поля $\mathbb{K}$. Линейное уравнение называется однородными, если $b = 0$.

Системой m линейных уравнений от n неизвестных $x_1, \dots, x_n$ (коротко СЛУ) называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{9}$$

Система линейных уравнений (9) называется однородной (коротко СЛОУ), если $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$.

Решением СЛУ (9) называется любой упорядоченный набор $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$, такой что при подстановке α_i вместо $x_i, i = 1, \dots, n$ каждое уравнение системы превращается в верное равенство.

Решить систему - значит найти множество всех ее решений. Это - некоторое подмножество $\mathbb{K}^n$.

Системы делятся на совместные (множества решений которых непусты) и несовместные. Однородная система всегда совместна, поскольку всегда имеет тривиалвное решение $(0, 0, \dots, 0)$.

Две СЛУ называются эквивалентными, если их множества решений совпадают, то есть каждое решение первой системы является решением второй, и наоборот. В частности, если две системы эквивалентны, то число неизвестных у них одинаковое, в то же время количество уравнений в них может быть разным.

Матрицей коэффициентов системы (9) называется матрица

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

а расширенной матрицей системы (9) - матрица

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Столбец $\mathbf{b} := (b_1, \dots, b_m)^T$ называется столбцом правых частей системы (9). С использованием матричного умножения систему (9) можно записать в виде $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, где $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_n)^T$ - столбец неизвестных (ср. (2.2)).

Заметим, что и наоборот, по расширенной матрице однозначно восстанавливается СЛУ.

Элементарные преобразования строк расширенной матрицы отвечают соответствующим преобразованиям СЛУ: прибавлению к некоторому уравнению системы некоторого другого ее уравнения, умноженного на число, перестановке двух уравнений местами или умножению некоторого уравнения системы (его правой и левой частей) на ненулевое число.

Предложение

2.36. Элементарные преобразования строк расширенной матрицы не меняют класса эквивалентности СЛУ.

Proof. □

Ясно, что каждое решение исходной системы будет решением и системы, полученной после элементарного преобразования. Так как элементарные преобразования обратимы, то верно и обратное.

Note.

2.37. Внимательный читатель мог заметить, что на множестве систем из m уравнений от n неизвестных фактически определены два отношения эквивалентности: во-первых, системы эквивалентны, если имеют одинаковые множества решений, и во-вторых, системы эквивалентны, если могут быть получены одна из другой последовательностью элементарных преобразований. Можно показать, что на множестве совместных систем эти два отношения эквивалентности совпадают, то есть для двух совместных систем с одним и тем же множеством решений существует последовательность элементарных преобразований, преобразующая первую систему во вторую. Случай однородных систем будет рассмотрен в Задаче 6.46.

Теперь заметим, что произвольное решение $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ системы (9) - то же самое, что представление столбца правых частей $\mathbf{b}$ в виде линейной комбинации столбцов матрицы A с коэффициентами $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. В частности, решение однородной системы с матрицей коэффициентов A - то же, что некоторая конкретная линейная зависимость между столбцами матрицы A. Поэтому предыдущее

Предложение

может быть переформулировано в виде такого важного Следствия.

Следствие

2.38. Строчно эквивалентные матрицы имеют одинаковые линейные зависимости между столбцами.

Proof. □

Интерпретируем нашу матрицу A как матрицу коэффициентов СЛОУ. Линейная зависимость $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ между столбцами A - то же, что решение этой СЛОУ. При элементарном преобразовании СЛОУ перейдет в систему с тем же множеством решений, то есть данное решение $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ будет также решением преобразованной СЛОУ и определит линейную зависимость между столбцами преобразованной матрицы, которая является ее матрицей коэффициентов. То, что при этом не возникает новых линейных зависимостей, следует из обратимости элементарных преобразований.
Например, столбцы исходной и полученной упрощенной матриц из примера 2.33 связаны линейной зависимостью $\mathbf{a_1} - \mathbf{2a_2} + \mathbf{a}_3 = 0$.

Следствие

2.39. Квадратная матрица невырождена тогда и только тогда, когда ее столбцы линейно независимы.

Proof. □

$\Rightarrow$: невырожденная матрица эквивалентна единичной, а у последней столбцы, очевидно, линейно независимы.
$\Leftarrow$: пусть столбцы A л.н.з., то есть строки A^T л.н.з., это означает, что A^T невырождена; по уже доказанному тогда столбцы A^T л.н.з., то есть строки A л.н.з., то есть A невырождена.

Следствие

2.40. Матрица A невырождена $\Leftrightarrow$ A^T невырождена.

3.2.8 2.5 Elementary Matrices

Элементарные преобразования строк из Определения 2.22 естественно рассматривать одновременно для всех матриц с m строками (и произвольным конечным числом столбцов). Размер таких матриц мы будем обозначать $m \times *$. Матрицу, полученную из матрицы A применением некоторого элементарного преобразования строк ς, мы будем обозначать $\varsigma(A)$.
Следующее предложение показывает, что действие элементарного преобразования строк сводится к умножению слева на некоторую квадратную матрицу.

Предложение

2.41. Для произвольного элементарного преобразования матриц с m строками существует единственная $m\times$-матрица S такая, что $\varsigma(A) = SA \forall A \in \mathrm{Mat}_{m\times *}(\mathbb{K})$ (в частности, S не зависит от A, а зависит только от ς).

Proof. □

Докажем вначале единственность. Так как в качестве A можно взять произвольную матрицу с m строками, то возьмем в качестве A единичную матрицу E порядка m. Тогда $\varsigma(E) = SE = S$. То есть условию доказываемого Предложения может удовлетворять только матрица, полученная применением данного элементарного преобразования к строкам единичной матрицы E порядка m. Для элементарных преобразований из Определения 2.22 это дает матрицы

$$P_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & & \vdots & \\ \dots & 1 & \dots & \lambda & \dots \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \dots & 0 & \dots & 1 & \dots \\ & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = E + \lambda E_{ij}, \quad Q_{ij} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & & \vdots & \\ \dots & 0 & \dots & 1 & \dots \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \dots & 1 & \dots & 0 & \dots \\ & \vdots & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{10}$$

И

$$R_i(c) = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \\ \dots & c & \dots \\ & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

(у первых двух матриц выделены i-я и j-я строки, у третьей - i-я строка; при этом подразумевается, что в местах главной диагонали, отмеченных многоточием, стоят единицы).

Теперь проверим, что умножение произвольной матрицы A слева на $P_{ij}(\lambda), Q_{ij}$ или $R_i(c)$ эквивалентно применению к строкам матрицы A соответствующего элементарного преобразования. Сделаем это для случая матриц $P_{ij}(\lambda)$, для двух других типов элементарных матриц доказательство аналогично. Итак, рассмотрим $P_{ij}(\lambda)A$. Согласно Предложению 2.7, k-я строка матрицы $P_{ij}(\lambda)A$ - линейная комбинация строк матрицы A с коэффициентами из k-й строки матрицы $P_{ij}(\lambda)$. При $k \neq ik$-я строка матрицы $P_{ij}(\lambda)$ содержит единственный ненулевой элемент - единицу на k-м месте, поэтому k-я строка матрицы $P_{ij}(\lambda)A$ совпадает с k-й строкой A. При $k = i$-я строка $P_{ij}(\lambda)$ помимо единицы на i-м месте содержит также λ на j-м, поэтому i-я строка матрицы $P_{ij}(\lambda)A$ совпадает с суммой i-й и умноженной на λj-й строк матрицы A.

Note.

2.42. Более концептуальное доказательство второй части предыдущего Предложения можно получить, заметив, что для любого элементарного преобразования строк ς

$$\varsigma(AB) = \varsigma(A)B \tag{11}$$

для любой матрицы B, для которой произведение имеет смысл. Тогда из (11) получаем, что $\varsigma(B) = \varsigma(EB) = \varsigma(E)B$ для любой матрицы B с m строками, где E - единичная матрица порядка m.

Для доказательства (11) можно воспользоваться Предложением 2.7, согласно которому i-я строка матрицы AB - линейная комбинация строк матрицы B с коэффициентами из i-й строки $(a_{i1}a_{i2}\dots a_{im})$ матрицы A. Пусть, например, ς - прибавление к i-й строке j-й строки, умноженной на λ. Согласно упомянутому Предложению, i-я строка $\varsigma(A)B$ есть линейная комбинация строк матрицы B с коэффициентами из i-й строки матрицы $\varsigma(A)$, то есть из $(a_{i1} + \lambda a_{j1}, a_{i2} + \lambda a_{j2}, \dots, a_{im} + \lambda a_{jm})$. В то же время i-я строка матрицы $\varsigma(AB)$ есть сумма i-й строки матрицы AB плюс λ умножить на j-ю строку той же матрицы, что, как легко видеть, совпадает с i-й строкой матрицы $\varsigma(A)B$. При этом остальные строки матриц $\varsigma(A)B$ и $\varsigma(AB)$ такие же как у матрицы AB. Для элементарных преобразований двух других типов равенство (11) проверяется аналогично.

Матрицы, отвечающие элементарным преобразованиям, также называются элементарными. Поскольку они получаются из единичной матрицы применением элементарного преобразования строк, они невырождены.

Читателю предлагается показать, что элементарные преобразования столбцов аналогично связаны с умножением на элементарные матрицы справа.

Следующее предложение практически очевидно.

Предложение

2.43. Композиции элементарных преобразований ς_1, ς_2 отвечает произведение элементарных матриц S_1, S_2, то есть $\varsigma_2\left(\varsigma_1(A)\right) = S_2\left(S_1 A\right) = \left(S_2 S_1\right) A \quad \forall A \in \mathrm{Mat}_{m\times *}(\mathbb{K})$.

Заметим, что композиция элементарных преобразований (произведение элементарных матриц), вообще говоря, не является элементарным преобразованием (соответственно, элементарной матрицей).

Следствие

2.44. Матрицы $P_{ij}(-\lambda), Q_{ij}, R_i\left(c^{-1}\right)$ обратны соответственно матрицам $P_{ij}(\lambda), Q_{ij}$ и $R_i(c)$. В частности, матрица, обратная элементарной, сама элементарна.

Proof. □

Заметим, что указанные пары матриц отвечают взаимно обратным элементарным преобразованиям. То есть таким $\varsigma_1\varsigma_2$, что $\varsigma_2\left(\varsigma_1(A)\right) = A, \varsigma_1\left(\varsigma_2(A)\right) = A \forall A \in \mathrm{Mat}_{m\times *}(\mathbb{K})$. В частности, $\varsigma_2\left(\varsigma_1(E)\right) = S_2 S_1 = E, \varsigma_1\left(\varsigma_2(E)\right) = S_1 S_2 = E$.

Следствие

2.45. Матрича невырождена $\Leftrightarrow$ она является произведением элементарных.

Proof. □

Из Предложения 2.35 мы знаем, что если матрица A невырождена, то она строчно эквивалентна единичной матрице. Другими словами, существует конечная последовательность элементарных преобразований строк, преобразующая единичную матрицу в A. То есть существует конечная последовательность элементарных матриц $S_1, \ldots, S_p$ такая, что $A = S_p \ldots S_1 E = S_p \ldots S_1$.

Обратно, произведение элементарных матриц получается из единичной матрицы композицией элементарных преобразований строк и поэтому строчно эквивалентно единичной матрице, которая невырождена.

Конечно, представление невырожденной матрицы в виде произведения элементарных неоднозначно.

Задача

2.46. Разложите матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ в произведение элементарных.

Ответ: например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Следующее

Предложение

непостредственно вытекает из предыдущего Следствия.

Предложение

2.47. Произведение невырожденных матриц невырождено.

Задача

2.48. Пусть S_n - множество всех n ! перестановок [19] на n элементах. Каждой перестановке $\sigma \in S_n$ сопоставим матричу A_σ порядка п, полученную из единичной матрицы перестановкой строк σ. Покажите что A_σ является произведением элементарных матриц, Q_{ij} типа 2, а также что $A_\tau A_\sigma = A_{\tau\sigma}, A_\sigma^{-1} = A_{\sigma^{-1}}$, где $\tau \circ \sigma$ - композиция перестановок, а σ^{-1} - обратная $\kappa\sigma$ перестановка.

3.2.9 2.6 Relationship of Non-degeneracy to Reversibility

Теорема

2.49. Матрица обратима ⇔ она невырождена.

Proof. □

Если матрица A невырождена, то существует последовательность элементарных преобразований строк $\tau_1, \ldots, \tau_p$, преобразующая ее в единичную матрицу.

Пусть $T_1, \ldots, T_p$ - соответствующая последовательность элементарных матриц. Тогда $E = T_p \ldots T_1 A$. Положим $B := T_p \ldots T_1$. Тогда $E = BA$.

Матрица B, будучи произведением элементарных матриц, невырождена, поэтому к ней применимы те же соображения, то есть существует матрица C, являющаяся произведением некоторых элементарных матриц, такая, что $E = CB$. Имеем $A = (CB)A = C(BA) = C$, то есть B является обратной для A. (По-другому, в этом месте можно рассуждать так: для невырожденной матрицы A существует последовательность элементарных преобразований столбцов, преобразующая ее в единичную матрицу, что дает матрицу D такую, что $AD = E$. Дальше снова используем ассоциативность произведения BAD чтобы доказать равенство $B = D$).

Обратно, пусть квадратная матрица A вырождена. Тогда ее столбцы линейно зависимы, то есть существует ненулевой столбец с такой, что $A\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Предположим, что обратная матрица A^{-1} существует, тогда, умножая обе части последнего равенства на нее, получаем $\mathbf{c} = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$ - противоречие.

Note.

2.50. Удобный критерий обратимости (=невырожденности) матрицы мы получим ниже в терминах определителя.

Задача

2.51. Пусть A и B - две матрицы порядка т такие, что $AB = E$. Докажите, что тогда и $BA = E$ (то есть обе матрицы A и B обратимы и $B = A^{-1}$ (а значит и $A = B^{-1}$)).

Решение. Если A - вырождена, то существует ненулевая строка с такая, что $\mathbf{c}A = \mathbf{0}$. Следовательно, $\mathbf{0} = (\mathbf{c}A)B = \mathbf{c}(AB) = \mathbf{c}E = \mathbf{c}$ - противоречие, значит, A невырождена. Тогда существует последовательность элементарных матриц $S_1, \ldots, S_k$ такая, что $S_k \ldots S_1 A = E$. Пусть $C := S_k \ldots S_1$, тогда $CA = E$. Откуда $B = EB = (CA)B = C(AB) = CE = C$, поэтому в самом деле $BA = E$.

[019] см. Определение3.7 и далее.

Note.

2.52. На множестве $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ рассмотрим следующее отношение эквивалентности: $B \sim C \Leftrightarrow \exists$ невырожденная $m \times m$-матрица A такая, что $C = AB$. Легко видеть, что это отношение эквивалентности совпадает с отношением строчной эквивалентности на $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Отношение, связанное с умножением на невырожденные матрицы справа, совпадает с отношением столбцовой эквивалентности, которое определяется с помощью элементарных преобразований столбцов.

Пусть матрица A невырождена и $\tau_1, \ldots, \tau_p$ - последовательность элементарных преобразований строк, преобразующая ее в единичную матрицу; пусть $T_1, \ldots, T_p$ - соответствующий набор элементарных матриц. Тогда $E = T_p \ldots T_1 A$ и $T_p \ldots T_1 = A^{-1}$. Отсюда $T_p \ldots T_1(A|E) = (E|A^{-1})$. То есть если к строкам матрицы $(A|E)$ применить последовательность элементарных преобразований, преобразующую A в единичную матрицу, то справа будет стоять обратная к A матрица (поскольку применение той же последовательности элементарных преобразований к строкам единичной матрицы E дает матрицу, обратную к A). Это дает удобный на практике способ нахождения обратной матрицы.

Теорема

2.53. Невырожденные матрицы данного порядка m образуют группу по умножению.

Proof. □

Действительно, умножение - бинарная ассоциативная операция на множестве $\mathrm{Mat}_m(\mathbb{K})$, причем произведение невырожденных матриц невырождено, единичная матрица невырождена и для любой невырожденной матрицы существует обратная, которая тоже невырождена.

Эта группа обозначается $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ и называется полной линейной группой порядка m. При $m = 1$ она совпадает с мультипликативной группой поля $\mathbb{K}$ (то есть с группой его ненулевых элементов относительно операции умножения); при $m \geq 2$ она некоммутативна.

3.2.10 2.7 Systems of Linear Equations.

Теперь мы собираемся применить результаты раздела 2.3 к теории систем линейных уравнений. Мы получим условия, при которых система несовместна, совместна и имеет единственное решение, и имеет более одного решения.

Определение

2.54. Совместная система уравнений называется определенной (соотв. неопределенной), если она имеет единственное решение (соотв. более одного решения).

Определение

2.55. Система линейных уравнений называется ступенчатой, если ее расширенная матрица $\tilde{A}$ ступенчатая. Система линейных уравнений называется треугольной (соотв. строго треугольной), если ее матрица коэффициентов является треугольной (соотв. строго треугольной).

Заметим, что у треугольной системы число уравнений равно числу неизвестных.
Так как элементарные преобразования системы заменяют ее на эквивалентную, из Предложения 2.28 следует, что достаточно исследовать (и научиться решать) ступенчатые системы.

Итак, рассмотрим произвольную ступенчатую СЛУ; пусть A (соотв. $\tilde{A}$) - ее матрица коэффициентов (соотв. расширенная матрица). Через r (соотв. $\tilde{r}$) обозначим число ненулевых строк матрицы A (соотв. $\tilde{A}$).

Ясно, что возможно два случая: (I) $\tilde{r} = r$ или (II) $\tilde{r} = r + 1$.
В случае (II) система содержит уравнение вида $0x_1 + \ldots + 0x_n = b, b \neq 0$ и поэтому является несовместной.

Рассмотрим теперь случай (I). Из того, что матрица A по предположению является ступенчатой следует, что число ее ступенек r не превосходит числа ее столбцов n, то есть числа неизвестных $x_1, \ldots, x_n$ системы. Выделим в качестве подслучая (I) случай (Ia), когда $\tilde{r} = r = n$, то есть система является строго треугольной. Легко понять, что в этом случае система имеет единственное решение. Действительно, из последнего уравнения находим единственное x_n, тогда из предпоследнего - единственное x_{n-1} и т.д.

Осталось рассмотреть случай (Ib), когда $\tilde{r} = r < n$. При анализе этого случая нам пригодится дополнительная терминология.

Определение

2.56. Неизвестные $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r} 1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_r \leq n$, отвечающие главным столбцам матрицы A, называются главными, а остальные - свободными.

Другими словами, главные неизвестные - в точности те, которые отвечают ведущим элементам какой-либо строки. Их в точности r штук (соответственно свободных $n - r$).

Перенося все члены со свободными неизвестными в правую часть, мы получаем строго треугольную систему относительно главных неизвестных. Если мы присвоим всем свободным неизвестным какие-то значения, то значения главных неизвестных определяются из этой системы однозначно. Так как свободные неизвестные могут пробегать произвольные наборы из $\mathbb{K}^{n-r}$, то в случае бесконечного поля $\mathbb{K}$ система при $n > r$ имеет бесконечно много решений.

Еще очевидней становится анализ случая (I), если воспользоваться Предложением 2.31 о том, что любая матрица строчно эквивалентна упрощенной. Тогда, предполагая что матрица коэффициентов системы упрощенная и перенося все члены со свободными неизвестными в правую часть, мы получаем систему, разрешенную относительно главных неизвестных (это рассуждение включает в себя также случай (Ia), когда все переменные являются главными а свободные неизвестные отсутствуют). Например, если номера главных неизвестных образуют последовательность $1, 2, \ldots, r$ (общий случай сводится к этому перенумерацией неизвестных), то система имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + c_{11}x_{r+1} + c_{12}x_{r+2} + \ldots + c_{1n-r}x_n = d_1 \\ x_2 + c_{21}x_{r+1} + c_{22}x_{r+2} + \ldots + c_{2n-r}x_n = d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r + c_{r1}x_{r+1} + c_{r2}x_{r+2} + \ldots + c_{rn-r}x_n = d_r \end{cases} \tag{12}$$

Результат проведенного исследования сформулируем в виде теоремы.

Теорема

2.57. СЛУ несовместна тогда и только тогда, когда для любой ступенчатой матрицы, полученной из ее расширенной матрицы с помошью элементарных преобразований строк, $\tilde{r} > r$. СЛУ определенна тогда и только тогда, когда $\tilde{r} = r = n$, где n - число неизвестных. СЛУ неопределенна тогда и только тогда, когда $\tilde{r} = r < n$.

Напомним, что СЛОУ всегда совместна.

Следствие

2.58. Всякая однородная система, у которой число уравнений менъше числа неизвестных, имеет нетривиальное (то есть ненулевое) решение.

Proof. □

Рассмотрим однородную систему из m уравнений от n неизвестных. Приведем ее к ступенчатому виду. Число r ненулевых строк полученной ступенчатой системы не превосходит m, причем $m < n$ по условию. То есть $r < n$, что и влечет, в силу предыдущего обсуждения, неопределенность системы.

Предыдущее

Следствие

можно переформулировать так: любая система из n столбцов высоты m линейно зависима при $n > m$. Мы этим воспользуемся ниже (см.

Предложение

6.4).

Заодно мы получили следующий простой и общий алгоритм решения СЛУ. Запишем расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований строк приведем ее к ступенчатому виду. Если при этом получим $\tilde{r} > r$, то делаем вывод, что система несовместна. Если же $\tilde{r} = r$, то с помощью обратного хода метода Гаусса приводим ее ступенчатую расширенную матрицу к упрощенному виду и выписываем общее решение в виде выражения главных неизвестных через свободные.

В качестве примера решим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = -2 \\ 2x_1 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

над полем $\mathbb{R}$. Выписываем расширенную матрицу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

и приводим ее к ступенчатому виду по нашему алгоритму. Для этого из 2 -й, 3 -й и 4 -й строк вычитаем 1-ю строку, умноженную на 1,2 и 2 соответственно. В результате получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & -4 & -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Далее, прибавляя к 3 -й и 4 -й строкам 2-ю строку, умноженную на 3 и 4 соответственно, получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Наконец, переставляя 3-ю и 4-ю строки, получаем ступенчатую матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Для нее $\tilde{r} = r = 3 < n = 4$, то есть система неопределенна. Главные переменные x_1, x_2 и x_4, а x_3 - свободная переменная. Приведем теперь матрицу к упрощенному виду, используя обратный ход метода Гаусса. Отбросив нулевую строку и вычтя из 2 -й строки 3 -ю, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Вычтя из 1-й строки удвоенную 2 -ю и умножив 3 -ю строку на -1, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

имеющую упрощенный вид (главные столбцы составляют единичную матрицу). Таким образом, исходная система уравнений эквивалентна системе

$$\begin{cases} x_1 \quad - x_3 = 8 \\ x_2 + x_3 = -3 \\ x_4 = -5. \end{cases}$$

Перенося члены со свободной неизвестной x_3 в правую часть, получаем общее решение

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 8 \\ x_2 = -x_3 - 3 \\ x_4 = -5 \end{cases}$$

Чтобы подчеркнуть, что свободная переменная x_3 играет роль параметра, ее можно обозначить через t и переписать полученное решение в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+8 \\ -t-3 \\ t \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Это - парфункц прямой в четырехмерном пространстве $\mathbb{K}^4$ с направляющим вектором $(1, -1, 1, 0)^T$ и проходящей через точку $(8, -3, 0, -5)$.

Заметим, что на некоторые естественные вопросы о системах уравнений (и о матрицах) мы пока не дали ответы. Например, зависит ли количество свободных неизвестных СЛУ от выбора последовательности элементарных преобразований, с помощью которых мы приводили матрицу системы к ступенчатому виду? Этот вопрос, очевидно, эквивалентен вопросу о том, могут ли две ступенчатые матрицы с разным числом r ненулевых строк принадлежать одному классу строчной эквивалентности матриц? На эти вопросы мы ответим немного позже, после изучения понятий размерности векторного пространства и ранга матрицы.

3.2.11 Matrix Norm

обсудим подробно норму матриц.

Суть

(ЛЕКЦИЯ 2 аристова, там еще есть пара доказательств, которые я пропустил напрочь. потом доделаю разные понимания малые про нормы матрицы)

норма это функция со свойствами:

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\|+\|\mathbf{B}\| \\ &\|\lambda \mathbf{A}\| = |\lambda|\|\mathbf{A}\| \\ &\|\mathbf{A}\mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\| \end{aligned} \tag{3.1}$$

Самые основные нормы такие:

$$\begin{aligned} &\text{первая норма:} \quad \|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \\ &\text{вторая норма матрицы} \quad \|\mathbf{A}\|_2 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \\ &\text{третья норма матрицы} \quad \|\mathbf{A}\|_3 = \sqrt{\max_{1\le i\le n} \lambda^i} \left(\mathbf{A}^* \cdot \mathbf{A}\right) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Заметим, что все полностью аналогично нормам векторов.
есть всякие мутные нормы, про то, что с ними нет ничего нового есть *теорема об эквивалентности* $\forall x \in \mathbb{R}^N, \forall p, q \exists C_1 > 0, C_2 > 0 : C_1\|x\|_p \leqslant \|x\|_q \leqslant C_2\|x\|_p$
Есть также обобщение

$$\|A\|_p = \left(\sum_{i,j}^{N} |x_{ij}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.3}$$

при p=2 получим норму Фробениуса
также, задав норму вектора как-то, мы можем с ней же считать норму матрицы

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \tag{3.4}$$

норма матриц согласованная A, B, если $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$
(место для каких-то дополнений про это все и задач про нормы)

3.2.12 Orthogonality, Eigenvectors, and Eigenvalues

3.2.13 Orthogonality, Eigenvectors, and Eigenvalues

(что-то про это важное напишу)

3.2.14 Orthogonal Matrices

перечень свойств ортогональных матриц

У ортогональных матриц определитель может быть равен +1 или -1
существует обратная
ассоциативность

доказательства свойства ортогональных матриц

У ортогональных матриц определитель может быть равен +1 или -1

Proof. ....

□

Произведение двух ортогональных матриц - ортогональная матрица

Proof.

$$(A \cdot B) \cdot (A \cdot B)^T = A \cdot BB^\top \cdot A^\top = E$$

□

собственные векторы находятся легко из взятия определителя из уравнения на собственное значение.

$$\lambda_{2,3} = \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{er + 1 - 1}{2}\right)^2 - 1}; \quad \lambda_1 = 1$$

свойства как группа $So(3)$

фактически она задает конфигурационное многообразие, которое задает ориентацию твердого тела.

3.2.15 3.1 N-dimensional Oriented Volume and Determinants

Все пространства в данном параграфе рассматриваются над полем $\mathbb{R}$.

Читатель, вероятно, в курсе аналитической геометрии встречался с понятиями ориентированной длины на ориентированной прямой, ориентированной площади на ориентированной плоскости и ориентированного объема в ориентированном трехмерном пространстве. У этих понятий есть естественное обобщение на случай n-мерного ориентированного пространства, называемое n-мерным ориентированным оббемом. В этом параграфе мы опишем, как можно к нему прийти, но вначале напомним определения ориентированных площадей и объемов. Данный параграф также можно рассматривать как неформальное "геометрическое" введение в теорию определителей.

Напомним, что в вещественном векторном пространстве базисы делятся на два класса: между базисами из одного класса матрицы перехода имеют положительный определитель, а между базисами из разных классов - отрицательный определитель. Ориентированной плоскостью (пространством) называется плоскость (пространство), в котором выбран один из двух классов базисов, базисы из него называются "положительными". В качестве положительных базисов обычно выбираются правые базисы (определяемые в курсе аналитической геометрии), что мы также сделаем.

Определение

3.1. Ориентированной площадъю на ориентированной плоскости V называется функция $f : V \times V \to \mathbb{R}$, обладающая следующими свойствами:

1. функция f линейна по каждому из своих двух аргументов (то есть билинейна);
2. функция f меняет знак при перестановке аргументов (то есть кососимметрична);
3. если $\{e_1, e_2\}$ - правый ортонормированный базис, то $f(e_1, e_2) = 1$.

Значение $f(u, v)$ на упорядоченной паре $\{u, v\}$ векторов плоскости V - ориентированная площадь параллелограмма, построенного на данной паре векторов (иногда называемая псевдоскалярным произведением векторов u и v). Заметим, что из кососимметричности f сразу следует, что $f(u, u) = 0$ для произвольного $u \in V$. Более общо, из билинейности и кососимметричности f следует, что $f(u, v) = 0$, если u и v коллинеарны (нетрудно проверить, что верно и обратное).

Теорема

3.2. Существует единственная функция f, удовлетворяющая Определению 3.1.

Proof. □

Если функция f обладает свойствами 1), 2) из предыдущего определения и $\{e_1, e_2\}$ - некоторый базис на плоскости V, то для произвольной пары векторов $u, v \in V$ имеем

$$f(u, v) = f(u_1e_1 + u_2e_2, v_1e_1 + v_2e_2) = u_1v_2f(e_1, e_2) + u_2v_1f(e_2, e_1) = (u_1v_2 - u_2v_1) f(e_1, e_2) \tag{13}$$

Таким образом, f однозначно в данном базисе определяется одним числом $f(e_1, e_2)$. Обратно, легко проверить, что функция f, заданная формулой (13), полилинейна и кососимметрична. В самом деле (обозначая для простоты $c := f(e_1, e_2)$), линейность, например, по первому аргументу u вытекает из следующей выкладки: если $u = u' + u''$, то

$$f(u,v)=(u_1v_2-u_2v_1)\,c=((u_1'+u_1'')\,v_2-(u_2'+u_2'')\,v_1)\,c=$$
$$=(u_1'v_2-u_2'v_1)\,c+(u_1''v_2-u_2''v_1)\,c=f\,(u',v)+f\,(u'',v)$$

и аналогично для умножения на скаляр. (Фактически, все следует из того, что в каждое слагаемое выражения $(u_1v_2-u_2v_1)$ координаты u входят в первой степени). Кососимметричность также очевидна: если поменять местами u и v, то выражение $(u_1v_2-u_2v_1)\,c$ изменит знак.

Коэффициент $u_1v_2-u_2v_1$ перед $f\,(e_1,e_2)$ в формуле (13) называется определителем матрицы $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$. Свойства 1) и 2) предыдущего определения означают, что он линеен и кососимметричен по строкам. Кроме того, на единичной матрице порядка 2 он принимает значение 1 и свойство 3) означает, что ориентированная площадь параллелограмма, построенного на паре векторов u,v равна определителю матрицы, составленной из координатных строк этих векторов в правом ортонормированном базисе.

Определение

3.3. Ориентированным оббемом в ориентированном трехмерном пространстве V называется функция $f:V\times V\times V\to\mathbb{R}$, обладающая следующими свойствами:

1. функция f линейна по каждому из своих трех аргументов (то есть трилинейна);
2. функция f меняет знак при перестановке любых двух аргументов (то есть кососимметрична);
3. если $\{e_1,e_2,e_3\}$ - правый ортонормированный базис, то $f\,(e_1,e_2,e_3)=1$.

Значение $f(u,v,w)$ на упорядоченной тройке $\{u,v,w\}$ векторов пространства V - ориентированный объем параллелепипеда, построенного на данной тройке векторов (то есть
смешанное произведение (u,v,w) векторов u,v,w). Заметим, что из полилинейности и кососимметричности f сразу следует, что $f(u,v,w)=0$, если векторы u,v и w компланарны (верно и обратное).

Теорема

3.4. Существует единственная функция f, удовлетворяющая Определению 3.3.

Proof. □

Если функция f линейна по каждому аргументу и $\{e_1,e_2,e_3\}$ - некоторый базис в пространстве V, то для произвольной тройки векторов $\{u,v,w\}$ из V имеем

$$f(u,v,w)=f\,(u_1e_1+u_2e_2+u_3e_3,v_1e_1+v_2e_2+v_3e_3,w_1e_1+w_2e_2+w_3e_3)=$$
$$=\sum_{i,j,k=1}^{3}u_iv_jw_kf\,(e_i,e_j,e_k)$$

(правая часть содержит $3^3=27$ слагаемых). Если f к тому же кососимметрична, то $f\,(e_i,e_j,e_k)=0$ всякий раз, когда среди индексов i,j,k есть совпадающие. Если же индексы i,j,k образуют перестановку чисел $1,2,3$, то

$$f\,(e_i,e_j,e_k)=\pm f\,(e_1,e_2,e_3)$$

причем знак " $+$ " нужно взять в том случае, когда (i,j,k) получается из $(1,2,3)$ четным числом транспозиций (перестановок двух каких-то аргументов), а "-" - если нечетным. Соответствующий множитель ±1 называется знаком перестановки (i,j,k) и обозначается $\mathrm{sgn}(i,j,k)$. Читателю предлагается выписать 6 перестановок (i,j,k) и указать их знаки (должно получиться по 3 положительных и отрицательных перестановки).

Таким образом,

$$f(u,v,w)=\sum u_iv_jw_k\operatorname{sgn}(i,j,k)f\left(e_1,e_2,e_3\right) \tag{14}$$

причем суммирование справа происходит по перестановкам множества $1,2,3$ (то есть правая часть содержит 6 слагаемых). Окончательная формула выглядит так (читателю предлагается в этом убедиться):

$$f(u,v,w)=\left(u_1v_2w_3+u_2v_3w_1+u_3v_1w_2-u_1v_3w_2-u_2v_1w_3-u_3v_2w_1\right)f\left(e_1,e_2,e_3\right) \tag{15}$$

В частности, f однозначно в данном базисе определяется одним числом $f\left(e_1,e_2,e_3\right)$. Обратно, легко проверить, что функция f, заданная формулой (14), полилинейна и кососимметрична. В самом деле, линейность следует из того, что в каждое слагаемое в правой части координаты каждого из векторов u,v и w входят в первой степени. Точнее, выражение

$$u_1\left(v_2w_3-v_3w_2\right)+u_2\left(v_3w_1-v_1w_3\right)+u_3\left(v_1w_2-v_2w_1\right)$$

являющееся коэффициентом перед $f\left(e_1,e_2,e_3\right)$ в (14), линейно по строке $\left(u_1,u_2,u_3\right)$, то же верно для двух других строк.

Проверим кососимметричность. Переставим, например, векторы u и v в выражении $f(u,v,w)$ (чтобы упростить формулы, мы полагаем в (14) $c:=f\left(e_1,e_2,e_3\right)$):

$$f(v,u,w)=\sum\operatorname{sgn}(i,j,k)v_iu_jw_kc=$$
$$=\sum\operatorname{sgn}(i,j,k)u_jv_iw_kc=-\sum\operatorname{sgn}(j,i,k)u_jv_iw_kc=-f(u,v,w)$$

поскольку, очевидно, $\operatorname{sgn}(i,j,k)=-\operatorname{sgn}(j,i,k)$.
Коэффициент

$$u_1v_2w_3+u_2v_3w_1+u_3v_1w_2-u_1v_3w_2-u_2v_1w_3-u_3v_2w_1$$

перед $f\left(e_1,e_2,e_3\right)$ в формуле (15) называется определителем матрицы $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}$.
Свойства 1) и 2) Определения 3.3 означают, что он линеен и кососимметричен по строкам, а свойство 3) означает, что ориентированный объем параллелепипеда, построенного на упорядоченной тройке векторов u,v,w равен определителю матрицы, составленной из координатных строк этих векторов в правом ортонормированном базисе. [20]

Задача

3.5. Докажите, что для любых векторов u,v,w,x,y,z трехмерного ориентированного евклидова пространства V выполнено тождество

$$f(u,v,w)f(x,y,z)=\begin{vmatrix}(u,x) & (u,y) & (u,z)\\ (v,x) & (v,y) & (v,z)\\ (w,x) & (w,y) & (w,z)\end{vmatrix} \tag{16}$$

Решение. Заметим, что слева и справа стоят полилинейные функции $V^{\times 6}\to\mathbb{R}$, кососимметричные по 1,2,3 и 4,5 и 6 аргументам. Из полилинейности следует, что это тождество достаточно проверить на наборах векторов, когда u,v,w,x,y,z пробегают элементы некоторого ортонормированного базиса $\{e_1,e_2,e_3\}$ в V, а из кососимметричности - что его достаточно проверить на наборе $u=x=e_1,v=y=e_2,w=z=e_3$, после чего в его справедливости легко убедиться.

Полагая $\{u,v,w\}=\{x,y,z\}$ в доказанном тождестве, получаем интересный результат: квадрат объема параллелепипеда, построенного на базисе, равен определителю его матрицы Грама.

Рассмотренные случаи $n=2$ и $n=3$ подсказывают, как n-мерный ориентированный объем определяется для произвольного конечного n. Во-первых, в вещественном n-мерном пространстве нужно задать ориентацию - то есть выбрать один из двух классов базисов, объявив базисы из него "положительными". Мы будем пользоваться существованием двух классов базисов без доказательства. [21]

Определение

3.6. Ориентированным оббемом в ориентированном n-мерном пространстве V называется функция $f : V \times V \times \ldots \times V \to \mathbb{R}$ (слева произведение n экземпляров пространства V), обладающая следующими свойствами:

1. функция f линейна по каждому из своих n аргументов (то есть полилинейна);
2. функция f меняет знак при перестановке любых двух аргументов (то есть кососимметрична);
3. если $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ - правый ортонормированный базис, то $f(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$. (В предыдущем определении мы предполагаем, что ортонормированные базисы в n мерном пространстве существуют. Это действительно так и будет доказано в этом курсе).

Значение $f(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ на упорядоченном наборе (системе) $v_1, v_2, \ldots, v_n$ векторов пространства V - ориентированный n-мерный объем параллелепипеда, построенного на данном наборе векторов. Заметим, что из полилинейности и кососимметричности f сразу следует, что $f(v_1, v_2, \ldots, v_n) = 0$ если система $v_1, v_2, \ldots, v_n$ линейно зависима (верно и обратное).

Для того, чтобы получить формулу для n-мерного ориентированного объема, нам понадобятся понятие и свойства перестановок.

Определение

3.7.

Перестановкой из n элементов называется последовательность $(k_1, \ldots, k_n)$ чисел $1, 2, \ldots, n$, расположенных в некотором фиксированном порядке.

Так как k_1 может принимать n различных значений, k_2 при фиксированном $k_1 - (n-1)$ значение, k_3 при фиксированных k_1 и $k_2 - (n-2)$ значений и т.д., то всего имеется

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

перестановок из n элементов. Перестановка $(1, 2, \ldots, n)$ называется тривиальной.

Множество всех n ! перестановок из n элементов обозначается S_n. (В действительности, это множество очевидным образом отождествляется с множеством всех биекций множества $1, 2, \ldots, n$ на себя; при этом, в частности, тождественная биекция соответствует тривиальной перестановке. Последнее множество, очевидно, является группой относительно операции композиции. Мы не будем останавливаться на этом более подробно).

Перемена местами двух (не обязательно соседних) элементов в перестановке называется транспозицией этих элементов.

Определение

3.8. Знак перестановки - это такая функция

$$\operatorname{sgn} : S_n \to \{\pm 1\}$$

что $\operatorname{sgn}(1, 2, \ldots, n) = 1$ и которая меняет знак при любой транспозиции (то есть если перестановки $(k_1, \ldots, k_n)$ и $(j_1, \ldots, j_n)$ отличаются друг от друга одной транспозицией (не обязательно соседних элементов), то $\operatorname{sgn}(k_1, \ldots, k_n) = -\operatorname{sgn}(j_1, \ldots, j_n)$).

[020] Конечно, этот результат известен читателю из курса аналитической геометрии.

[21] Заметим, что и в общем n-мерном случае матрицы перехода между базисами из одного класса имеют положительный, а между разными классами - отрицательный определитель.

Задача

3.9. Покажите, что если $f : V \times \ldots \times V \to \mathbb{K}$ - кососимметрическая функция, mo

$$f\left(v_{k_1}, \ldots, v_{k_n}\right) = \operatorname{sgn}\left(k_1, \ldots, k_n\right) f\left(v_1, \ldots, v_n\right)$$

Теорема

3.10. Для любого n функция sgn: $S_n \to \{\pm 1\}$ существует и единственна.

Proof. □

То, что существует не более одной такой функции, следует из того, что любую перестановку из n элементов можно получить из тривиальной $(1, 2, \ldots, n)$ последовательностью транспозиций.

Однако при таком подходе существование функции sgn не очевидно: одну и ту же перестановку можно получить из тривиальной разными последовательностями транспозиций; идея в том, что чётность числа транспозиций не зависит от выбора такой последовательности. На время отложим доказательство существования sgn и введем понятие инверсии.

Определение

3.11. Говорят, что пара (не обязательно соседних) чисел в перестановке $(k_1, \ldots, k_n)$ образуют инверсию, если большее из них стоит левее меньшего.

Например, тривиальная перестановка содержит 0 инверсий, а в перестановке $(n, n - 1, n-2, \ldots, 2, 1)$ любая пара чисел образует инверсию, то есть число инверсий в ней равно биномиальному коэффициенту $\binom{n}{2}$ (числу 2 -элементных подмножеств в множестве из n элементов).

Предложение

3.12. При любой транспозиции четность числа инверсий в перестановке $(k_1, \ldots, k_n)$ меняется.

Proof. □

При транспозиции соседних элементов меняется взаимное расположение только этих элементов, так что число инверсий меняется (увеличивается или уменьшается) на 1, следовательно, четность числа инверсий меняется. При транспозиции двух элементов i и j, разделенных s промежуточными элементами, можно сначала переставить i со всеми промежуточными элементами и с j, сделав $s + 1$ соседних транспозиций, а затем j со всеми промежуточными элементами, произведя еще s соседних транспозиций. В итоге мы проделаем нечетное число $2s + 1$ соседних транспозиций, каждая из которых меняет четность числа инверсий в перестановке.

Вернемся теперь к существованию sgn. Пусть $i(\sigma)$ обозначает число инверсий в перестановке $\sigma := (k_1, k_2, \ldots, k_n)$. Покажем, что функция

$$s(\sigma) := (-1)^{i(\sigma)} \forall \sigma \in S_n$$

обладает всеми свойствами sgn из предыдущего определения.
Действительно, если $\sigma = (1, 2, \ldots, n)$, то $i(\sigma) = 0$ и $s(\sigma) = (-1)^{i(\sigma)} = 1$. С другой стороны, из Предложения 3.12 следует, что при любой транспозиции элементов σ четность $i(\sigma)$ меняется, и значит $s(\sigma) = (-1)^{i(\sigma)}$ меняет знак.

Note.

3.13. Другое доказательство существования функции sgn можно получить, предъявив произвольную ненулевую кососимметрическую функцию от n аргументов, например $\Delta_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leq j < i \leq n}(x_i - x_j)$ (определитель Вандермонда). Тогда $\Delta_n(x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}) = \operatorname{sgn}(k_1, k_2, \ldots, k_n)\,\Delta_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (ср. Задачу 3.9).

Определение

3.14. Перестановки $\sigma \in S_n$ такие, что $\operatorname{sgn}\sigma = 1$, называются четными, а остальные - нечетными (для них $\operatorname{sgn}\sigma = -1$).

Таким образом, перестановка является четной, если число инверсий в ней четно и нечетной в противном случае. Например,

$$\operatorname{sgn}(n, n-1, n-2, \ldots, 2, 1) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \tag{17}$$

таким образом, данная перестановка четная при $n \equiv 0, 1(\bmod 4)$ и нечетная при $n \equiv 2, 3(\bmod 4)$

Следствие

3.15. При $n > 1$ количество четных перестановок из n элементов равно количеству нечетных.

Дожазательство. Выпишем в первый столбец все четные, а во второй - все нечетные перестановки из n элементов. Тогда, согласно Предложению 3.12, при транспозиции первого и второго элемента первый столбец биективно отображается на второй, и наоборот.

Задача

3.16. Докажите, что четность числа транспозиций, в виде произведения (композиции) которых можно представить данную перестановку, зависит только от самой перестановки.

Теорема

3.17. Существует единственная функция f, удовлетворяющая Определению 3.6 ориентированного n-мерного объема.

Набросок доказательства. Если функция f линейна по каждому из своих n аргументов и $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ - некоторый базис в пространстве V, то для произвольной системы из n векторов $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ в V имеем [22]

$$f(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{n} v_{1i_1} v_{2i_2} \ldots v_{ni_n} f(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n})$$

(сумма справа содержит n^n слагаемых). Если f к тому же кососимметрична, то $f(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n}) = 0$ всякий раз, когда среди индексов $i_1, i_2, \ldots, i_n$ есть совпадающие. Если же индексы $i_1, i_2, \ldots, i_n$ образуют перестановку чисел $1, 2, \ldots, n$, то

$$f(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n}) = \operatorname{sgn}(i_1, i_2, \ldots, i_n) f(e_1, e_2, \ldots, e_n)$$

(см. Задачу 3.9).

Таким образом,

[022] Ниже мы обозначаем набор координат вектора $v_k \in V$ в базисе $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ через $(v_{k1}, v_{k2}, \ldots, v_{kn})$, то есть первый индекс - номер вектора, второй - номер координаты.

$$f(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_n) \in S_n} v_{1i_1} v_{2i_2} \ldots v_{ni_n} \operatorname{sgn}(i_1, i_2, \ldots, i_n) f(e_1, e_2, \ldots, e_n) \tag{18}$$

(правая часть содержит $n\,!$ слагаемых).
В частности, полилинейная кососимметричная f однозначно в данном базисе определяется одним числом $f(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

С другой стороны, функция f, заданная формулой (18), полилинейна и кососимметрична. В самом деле, полилинейность следует из того, что каждое слагаемое в правой части (18) содержит ровно по одной координате каждого вектора $v_k, 1 \leq k \leq n$ (в первой степени).

Проверим кососимметричность правой части (18) по векторам $v_1, \ldots, v_n$. Переставим, например, местами v_1 и v_2 (чтобы упростить вид формул, мы полагаем $f(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$):

$$f(v_2, v_1, \ldots, v_n) = \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_n) \in S_n} \operatorname{sgn}(i_1, i_2, \ldots, i_n) v_{2i_1} v_{1i_2} \ldots v_{ni_n} =$$
$$= \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_n) \in S_n} \operatorname{sgn}(i_1, i_2, \ldots, i_n) v_{1i_2} v_{2i_1} \ldots v_{ni_n} =$$
$$= -\sum_{(i_2, i_1, \ldots, i_n) \in S_n} \operatorname{sgn}(i_2, i_1, \ldots, i_n) v_{1i_2} v_{2i_1} \ldots v_{ni_n} = -f(v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

поскольку при любой транспозиции знак перестановки меняется.
Коэффициент

$$\sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_n) \in S_n} \operatorname{sgn}(i_1, i_2, \ldots, i_n) v_{1i_1} v_{2i_2} \ldots v_{ni_n}$$

перед $f(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ в формуле (18) называется определителем матрицы

$$\begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & \ldots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \ldots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \ldots & v_{nn} \end{vmatrix}$$

Свойства 1) и 2) предыдущего определения означают, что он линеен и кососимметричен по строкам. Матрица, составленная из координатных строк базисных векторов, является единичной, откуда видно, что свойство 3) означает, что на единичной матрице порядка n определитель принимает значение 1.

3.2.16 3.2 Basic Theorems About Determinants

В предыдущем параграфе мы показали, что если зафиксировать правый ортонормированный базис в пространстве (на плоскости), то ориентированный объем параллелепипеда (ориентированная площадь параллелограмма), построенного на упорядоченной тройке (упорядоченной паре) векторов равна определителю матрицы, составленной из координатных строк этих векторов, записанных в данном порядке.

Поэтому свойства определителей (по крайней мере порядков 2 и 3) вполне аналогичны свойствам ориентированных площадей или объемов. А именно, смешанное произведение линейно по каждому аргументу, меняет знак при перестановке любых двух аргументов и смешанное произведение базисных векторов правого ортонормированного базиса равно 1. Это дает соответственно свойства линейности определителя матрицы по строкам, кососимметричности определителя по строкам (при перестановке любых двух строк определитель меняет знак) и условие нормировки: определитель единичной матрицы равен единице. Те же свойства определитель имеет и по столбцам.

С точки зрения алгебры значение определителей, в частности, в том, что они дают удобный критерий невырожденности матрицы, с помощью них можно получить явные формулы для обратной матрицы и т.д.

Хотя понятие определителя n-го порядка можно определить над любым полем, мы в этом параграфе будем считать, что $\mathbb{K}$ - произвольное поле характеристики $\neq 2$ (в частности, подходит любое поле $\mathbb{K}$, содержащее поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$ - например $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).

Пусть V - векторное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Определение

3.18. Функция $f : V \to \mathbb{K}$ называется линейной, если

$$\forall u, v \in V \quad f(u+v) = f(u) + f(v)$$

и

$$\forall v \in V, \lambda \in \mathbb{K} \quad f(\lambda v) = \lambda f(v)$$

Если f линейна, то для любой конечной линейной комбинации $\sum\limits_i \lambda_i v_i$ векторов пространства V имеем

$$f\left(\sum_i \lambda_i v_i\right) = \sum_i \lambda_i f(v_i)$$

Пусть теперь $f : V \times V \times \ldots \times V \to \mathbb{K}$($m$ сомножителей слева) $-$ $\mathbb{K}$-значная функция от m аргументов (упорядоченных наборов из m векторов пространства V).

Определение

3.19. Функция $f : V \times V \times \ldots \times V \to \mathbb{K}$ называется полилинейной (точнее, m линейной), если она линейна по каждому из m аргументов при фиксированных остальных.

Например, линейность по первому аргументу означает, что

$$f(v_1' + v_1'', v_2, \ldots, v_m) = f(v_1', v_2, \ldots, v_m) + f(v_1'', v_2, \ldots, v_m) \forall v_1', v_1'', v_2, \ldots, v_m \in V$$

И

$$f(\lambda v_1, v_2, \ldots, v_m) = \lambda f(v_1, v_2, \ldots, v_m) \forall v_1, v_2, \ldots, v_m \in V \text{ и } \lambda \in \mathbb{K}$$

Предложение

3.20. Следующие условия на полилинейную функцию $f : V \times V \times \ldots \times V \to \mathbb{K}$ эквивалентны:

1. при перестановке любых двух аргументов значение f меняет знак;
2. если для некоторой пары $i \neq j v_i = v_j$, то $f(v_1, \ldots, v_m) = 0$.

Proof. □

1) $\Rightarrow$ 2): при перестановке двух совпадающих аргументов значение функции одновременно меняет знак и не меняется, значит, это такой элемент $a \in \mathbb{K}$, что $a = -a \Leftrightarrow 2a = 0 \Leftrightarrow a = 0$ (напомним, что мы предположили, что $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$).
2) $\Rightarrow$ 1) : $\quad 0 = f(v_1, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_i + v_j, \ldots, v_m) =$

$$f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_m) + f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots, v_m)$$

(напомним, что f по предположению полилинейна).

Определение

3.21. Полилинейная функция называется кососимметрической, если она удовлетворяет любому из эквивалентных условий из предыдущего Предложения.

В качестве векторного пространства V возьмем пространство $\mathbb{K}^n$ строк длины n с элементами из $\mathbb{K}$. Заметим, что множество матриц $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ можно отождествить с множеством $V \times \ldots \times V$ наборов из n строк длины n (при этом отождествлении матрице сопоставляется набор ее строк).

Определение

3.22. Определителем порядка n называется полилинейная кососимметричная функция $f : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ строк матриц, принимающая на единичной матрице $E \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ значение 1.

Определитель матрицы $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ обозначается $\det(A)$ или просто $|A|$.
Следующая теорема играет ключевую роль в нашем подходе к теории определителей.

Теорема

3.23. Определитель n-го порядка существует и единственен. Более того, для любой полилинейной кососимметричной функции строк матриц $f : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ верно равенство $f(A) = \det(A) f(E) \forall A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$.

Последнее равенство означает, что любая полилинейная кососимметричная функция строк матриц порядка n пропорциональна определителю с коэффициентом, равным ее значению на единичной матрице.

Читателю рекомендуется связать приведенное ниже доказательство с доказательствами Теорем 3.2, 3.4 и 3.10 (поскольку первые две из них - частные случаи, а третья по-существу, эквивалентна доказываемой теореме).

Proof. □

Докажем сначала единственность определителя. Итак, пусть f - полилинейная кососимметричная функция строк матриц порядка n. Для матрицы $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ пусть $a_1, \ldots, a_n$ обозначают ее строки. То есть $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}), i = 1, \ldots, n$. Введем единичные строки $e_i := (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (1 стоит на i-м месте) длины $n, i = 1, \ldots, n$. Они образуют базис в пространстве строк длины n. В частности, i-я строка матрицы A по ним раскладывается (единственным образом) как

$$a_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} e_k$$

В силу полилинейности f имеем

$$f(A) = f(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n} a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots a_{nk_n} f(e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_n})$$

(справа стоит сумма n^n слагаемых, так как k_j независимо пробегают натуральные числа от 1 до n). В частности, полилинейная функция однозначно задается своими значениями на наборах векторов из некоторого базиса.

Теперь воспользуемся кососимметричностью f. Очевидно, что

$$f(e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_n}) = 0 \quad \text{если } k_i = k_j \text{ для некоторой пары } i \neq j,$$

иначе

$$f(e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_n}) = \mathrm{sgn}(k_1, \ldots, k_n) f(e_1, \ldots, e_n)$$

Для доказательства последнего равенства во-первых заметим, что при любой транспозиции левая и правая части меняют знак; во-вторых, любая перестановка приводится к тривиальной с помощью последовательности транспозиций, и в-третьих, оно верно для тривиальной перестановки.

В итоге, для произвольной полилинейной кососимметрической функции строк матрицы мы получаем формулу

$$f(A) = f\left(a_1, \ldots, a_n\right) =$$
$$= \sum_{(k_1, k_2, \ldots, k_n) \in S_n} \operatorname{sgn}\left(k_1, k_2, \ldots, k_n\right) a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots a_{nk_n} f\left(e_1, e_2, \ldots, e_n\right)$$

(в правой части последней формулы $n\,!$ слагаемых). Поскольку $f(E) = f\left(e_1, \ldots, e_n\right)$, определитель матрицы A, если он существует, через ее матричные элементы выражается следующим образом:

$$\det(A) = \sum_{(k_1, k_2, \ldots, k_n) \in S_n} \operatorname{sgn}\left(k_1, k_2, \ldots, k_n\right) a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots a_{nk_n} \tag{19}$$

(ср. (18)).
Таким образом, нам осталось доказать, что формула (19) определяет полилинейную кососимметричную функцию (поскольку любая функция, пропорциональная полилинейной кососимметрической, также является таковой).

Для этого посмотрим внимательно на правую часть (19). Она содержит $n\,!$ слагаемых, каждое из которых является произведением, в которое входит по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы A (последнее потому что $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ перестановка чисел $1, 2, \ldots n$). Таким образом, если мы выбираем i-ю строку, то (19) можно записать в виде

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j$$

где u_j (позднее мы отождествим их с алгебраическими дополнениями, ср. Теорему 3.40) не зависят от элементов i-й строки матрицы A. Например, для $i = 1$ имеем:

$$\det(A) = \sum_{(k_1, k_2, \ldots, k_n) \in S_n} \operatorname{sgn}\left(k_1, k_2, \ldots, k_n\right) a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots a_{nk_n} =$$
$$= a_{11} \sum_{(1, k_2, \ldots, k_n) \in S_n} \operatorname{sgn}\left(1, k_2, \ldots, k_n\right) a_{2k_2} \ldots a_{nk_n} + a_{12} \sum_{(2, k_2, \ldots, k_n) \in S_n} \operatorname{sgn}\left(2, k_2, \ldots, k_n\right) a_{2k_2} \ldots a_{nk_n} + \ldots$$
$$+ a_{1n} \sum_{(n, k_2, \ldots, k_n) \in S_n} \operatorname{sgn}\left(n, k_2, \ldots, k_n\right) a_{2k_2} \ldots a_{nk_n}$$

(каждая из n сумм в правой части содержит $(n-1)\,!$ слагаемых, то есть всего слагаемых $n!$).

Осталось доказать, что функция, определяемая формулой (19) - кососимметричная функция строк матрицы A. В силу Предложения 3.20 достаточно убедиться в том, что она принимает нулевое значение на матрице, у которой две строки, скажем, i-я и j-я, совпадают.

Разобьем множество всех перестановок на пары, получаемые друг из друга транспозицией k_i и k_j. Согласно Предложению 3.12, равные в силу $a_{ik} = a_{jk}$ произведения $a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots a_{nk_n}$, соответствующие перестановкам из одной такой пары, входят в выражение (19) с противоположными знаками. Значит, вся сумма равна нулю.

В доказательстве Теоремы нами получена важная формула (19), называемая формулой полного разложения определителя n-го порядка.

Задача

3.24. Убедитесь, что при $n = 2, 3$ формула (19) дает известные выражения для определителей второго и третьего порядков.

Задача

3.25. 1) Имеются ли в формуле полного разложения определителя матрицы $A = (a_{ij})$ пятого порядка слагаемые $a_{15}a_{12}a_{34}a_{21}a_{43}, a_{55}a_{12}a_{34}a_{21}a_{43}$? 2) С какими знаками входят в формулу полного разложения определителя матрицы пятого порядка слагаемые $a_{12}a_{21}a_{34}a_{45}a_{53}, a_{15}a_{23}a_{34}a_{41}a_{52}$?

Задача

3.26. Докажите, что если в определителе порядка n на пересечении некоторых k строк и l столбчов стоят элементы, равные нулю, причем $k+l > n$, то определитель равен нулю.

Пример 3.27. Из (17) легко получить, что

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\dots\lambda_n$$

Задача

3.28. Докажсте, что для любой квадратной вещественной матрицы A верно равенство $\det(E+hA) = 1 + h\operatorname{tr}A + O\left(h^2\right)^{23}$ при $h \to 0$. Какой геометрический смысл (с точки зрения ориентированных оббемов) имеет эта формула?

Предложение

3.29. При элементарных преобразованиях строк, введенных в Определении 2.20, определитель меняется следующим образом. При элементарных преобразованиях типа I от не меняется, при преобразованиях типа II - умножается на -1, при преобразованиях типа III - умножается на c.

Proof. □

В случае элементарного преобразования типа I i-я строка преобразованной матрицы A' равна $a_i + \lambda a_j$ (при этом остальные строки такие же как у исходной матрицы A). Используя линейность определителя по i-й строке, получаем, что $\det A'$ равен сумме $\det A$ и λ, умноженной на определитель матрицы, у которой две одинаковые строки (а именно i-я и j-я, равные a_j). В силу кососимметричности определителя по строкам последний определитель равен нулю.

Поведение определителя при элементарных преобразованиях типа II и III следует непосредственно из его кососимметричности и линейности по строкам.

Задача

3.30. Покажите, что $\det A_\sigma = \operatorname{sgn}\sigma$, где A_σ - матрица из Задачи 2.48.

Следствие

3.31. Для любой матрицы $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ и элементарной матрицы S имеем

$$\det(SA) = \det(S)\det(A)$$

В частности, определитель невырожденной матрицы равен произведению определителей элементарных матриц, в произведение которых она раскладывается.

Proof. □

Напомним, что если элементарная матрица S отвечает элементарному преобразованию строк ς, то $\forall A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ имеем $\varsigma A = SA$. Отсюда $\det(\varsigma A) = \det(SA)$. В частности, полагая $A = E$, из Предложения 3.29 получаем, что $\det S$ равно $1, -1$ и c, если ς - элементарное преобразование из Определения 2.22 типа I, II и III соответственно. Осталось еще раз применить Предложение 3.29.

Предложение3.29 дает эффективный метод вычисления определителей. А именно, мы знаем, что любую квадратную матрицу с помощью элементарных преобразований строк можно привести к верхней треугольной матрице, причем при каждом элементарном преобразовании

Предложение3.29 позволяет контролировать изменение определителя. То есть достаточно научиться считать определители верхних треугольных матриц.

Предложение

3.32. Определитель верхней треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

Proof. □

Согласно формуле (19) каждое слагаемое в разложении определителя является произведением, в которое входит по одному элементу из каждой строки и каждого столбца. В первом столбце единственный элемент, который может быть ненулевым у верхней треугольной матрицы это a_{11}; если мы его выбираем, то из второго столбца мы должны взять элемент не из первой строки; единственный такой элемент, который может быть отличен от нуля, это a_{22} и т.д.

Задача

3.33. Вычислите определитель из Примера 3.27 с помошью перестановок строк.
Следующая теорема дает обещанный ранее критерий невырожденности матрицы.

Теорема

3.34. Матрица A невырождена тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$.

Proof. □

Если для какой-то матрицы определитель отличен от нуля (равен нулю), то поскольку максимум что с ним может произойти при элементарных преобразованиях строк - умножение на ненулевое число, он также отличен от нуля (соотв. равен нулю) на всем классе строчно эквивалентных ей матриц.

Из предыдущего мы знаем, что матрица невырождена тогда и только тогда, когда ее класс строчной эквивалентности содержит строгую верхнетреугольную матрицу (т.е. такую верхнетреугольную матрицу, у которой на главной диагонали стоят ненулевые элементы), определитель которой согласно предыдущему Предложению отличен от нуля.

Если же исходная матрица вырождена, то она строчно эквивалентна такой верхнетреугольной матрице, у которой на главной диагонали обязательно есть нули, и значит ее определитель опять же в силу предыдущего Предложения равен нулю.

Следующая наша цель - доказательство того, что свойства определителя (полилинейность, кососимметричность) относительно столбцов такие же как относительно строк.

Мы знаем, что в выражение (19) входят все произведения матричных элементов по одному из каждой строки и из каждого столбца. Как определить знак, с которым произведение $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\dots a_{i_nj_n}$ входит в (19), не упорядочивая его по возрастанию номеров строк?

---

[023] здесь $\operatorname{tr} A$ обозначает след квадратой матрицы A, который просто равен сумме ее диагональных элементов.

Lemma

3.35. Пусть $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ и $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ - две произвольные перестановки. Тогда произведение $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \ldots a_{i_n j_n}$ входит в выражение (19) со знаком, равным произведению их знаков $\operatorname{sgn}(i_1, i_2, \ldots, i_n) \operatorname{sgn}(j_1, j_2, \ldots, j_n)$.

Proof. □

Для того, чтобы выяснить, с каким знаком входит в (19) рассматриваемое произведение, нужно расположить его сомножители в порядке возрастания номеров строк. Этого можно добиться, последовательно меняя местами два сомножителя. При каждой такой перемене в перестановках, образуемых номерами строк и столбцов, происходят транспозиции, так что произведение их знаков не меняется. Таким образом, если полученное в результате произведение будет иметь вид $a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots a_{nk_n}$, то

$$\operatorname{sgn}(k_1, k_2, \ldots, k_n) = \operatorname{sgn}(1, 2, \ldots, n) \operatorname{sgn}(k_1, k_2, \ldots, k_n) =$$
$$\operatorname{sgn}(i_1, i_2, \ldots, i_n) \operatorname{sgn}(j_1, j_2, \ldots, j_n)$$

а это и означает, что рассматриваемое произведение входит в (19) с указанным знаком.

Теорема

3.36. $\det A^T = \det A$.

Proof. □

Определитель матрицы A^T, как и определитель матрицы A, есть алгебраическая сумма всевозможных произведений n элементов матрицы A, взятых по одному из каждой строки и из каждого столбца. Единственное, за чем надо проследить - это то, что одинаковые произведения входят в $\det A$ и $\det A^T$ с одинаковыми знаками.

В силу предыдущей Леммы для перестановок $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ и $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ произведение $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \ldots a_{i_n j_n}$ входит в разложение определителя матрицы A со знаком $\operatorname{sgn}(i_1, i_2, \ldots, i_n) \operatorname{sgn}(j_1, j_2, \ldots, j_n)$. В разложение определителя $\det A^T$ это же произведение $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \ldots a_{i_n j_n} = a^T_{j_1 i_1} a^T_{j_2 i_2} \ldots a^T_{j_n i_n}$ в силу предыдущей Леммы входит с тем же знаком.

Заметим, что из доказанной Теоремы снова легко вывести

Следствие

2.40.

Следствие

3.37. Определитель есть полилинейная кососимметрическая функция столбцов матрицы. Любая такая функция пропорциональна определителю с коэффиентом, равным ее значению на единичной матрице.

Теорема

3.38. (об определителе матрицы с углом нулей). Пусть матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

где B и C - квадратные матрицы порядков $kun - k$ соответственно. Тогда $\det A = \det B \cdot \det C$.

Proof. □

Для фиксированных матриц $C \in \mathrm{Mat}_{n-k}(\mathbb{K})$ и $D \in \mathrm{Mat}_{k\times(n-k)}(\mathbb{K})$ определим функцию $f_{D,C} : \mathrm{Mat}_k(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ формулой

$$f_{D,C}(B) := \det \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad \forall B \in \mathrm{Mat}_k(\mathbb{K})$$

Функция $f_{D,C}$ является полилинейной и кососимметричной функцией столбцов матрицы B, поэтому по Теореме $3.23 f_{D,C}(B) = \det(B) f_{D,C}(E)$. Аналогично, для фиксированной матрицы $D \in \mathrm{Mat}_{k\times(n-k)}(\mathbb{K})$ определим функцию $g_D : \mathrm{Mat}_{n-k}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ формулой

$$g_D(C) := \det \begin{pmatrix} E & D \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad \forall C \in \mathrm{Mat}_{n-k}(\mathbb{K})$$

Функция g_D является полилинейной и кососимметричной функцией строк матрицы C, поэтому $g_D(C) = \det(C) g_D(E)$. Собирая все вместе, с учетом того, что $f_{D,C}(E) = g_D(C)$ и $g_D(E) = 1$, получаем требуемое.

Пусть A - произвольная (не обязательно квадратная) матрица. Всякая матрица, составленная из элементов матрицы A, находящихся на пересечении каких-то выбранных строк и каких-то выбранных столбцов, называется подматрицей матрицы A. Подчеркнем, что выбираемые строки и столбцы не обязаны идти подряд.

Определитель квадратной подматрицы порядка k называется минором порядка k матрицы A. Иногда, допуская вольность речи, саму квадратную подматрицу также называют минором. В частности, если A - квадратная матрица порядка n, то минор порядка $n-1$, получаемый вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, называется дополнительным минором элемента a_{ij} и обозначается через M_{ij}. Число

$$A_{ij} := (-1)^{i+j} M_{ij}$$

называется алгебраическим дополнением элемента a_{ij}. Смысл алгебраического дополнения ясен из следующей леммы.

Lemma

3.39.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{ij} A_{ij}$$

(В левой части стоит определитель матрицы, полученной из матрицы $A = (a_{ij})$ заменой нулями всех элементов i-й строки, кроме a_{ij}.)

Доказателъство. Поменяем местами i-ю строку со всеми предыдущими строками и j-й столбец со всеми предыдущими столбцами. При этом мы будем $i-1$ раз менять местами строки и $j-1$ раз столбцы, так что определитель умножится на $(-1)^{i-1+j-1} = (-1)^{i+j}$. В результате получится определитель вида

$$\begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \dots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots\dots & \dots & \dots & . \\ a_{nj} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

где в правом нижнем углу стоит дополнительный минор элемента a_{ij}. По теореме об определителе матрицы с углом нулей этот определитель равен $a_{ij} M_{ij}$. С учетом предыдущего знака отсюда и получается доказываемое равенство.

Теорема

3.40. Для любой квадратной матрицы A

$$\det A = \sum_j a_{ij} A_{ij} = \sum_i a_{ij} A_{ij}$$

Первая из этих формул называется формулой разложения определителя по i-й стоке, вторая - формулой разложения определителя по j-му столбцу.

Proof. □

Представим i-ю строку $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ матрицы A в виде суммы строк

$$(a_{i1}, 0, 0, \ldots, 0, 0) + (0, a_{i2}, 0, \ldots, 0, 0) + \ldots + (0, 0, 0, \ldots, 0, a_{in})$$

и воспользуемся линейностью определителя по строкам и предыдущей Леммой. Аналогично для столбца.

Теорема

3.41. Для любых квадратных матриц, A и B одного порядка $\det(AB) = \det A.\ \det B$.

Proof. □

При фиксированной матрице $B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ определим функцию

$$f_B : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \quad f_B(A) := \det(AB)$$

Мы утверждаем, что она полилинейна и кососимметрична как функция строк матрицы $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$. Для этого заметим, что строки $c_1, \ldots, c_n$ матрицы $C := AB$ получаются из строк $a_1, \ldots, a_n$ матрицы A умножением на B:

$$c_i = a_i B \quad (i = 1, \ldots, n)$$

Пусть например $a_1 = a_1' + a_1''$, где a_1', a_1'' - какие-то строки; тогда, рассматривая матрицу A как совокупность ее строк, имеем

$$\begin{gathered}\det(AB) = f_B(A) = f_B\left(a_1' + a_1'', a_2, \ldots, a_n\right) = \det\left(\left(a_1' + a_1''\right) B, a_2 B, \ldots, a_n B\right) = \\ = \det\left(a_1' B + a_1'' B, a_2 B, \ldots, a_n B\right) = \det\left(a_1' B, a_2 B, \ldots, a_n B\right) + \det\left(a_1'' B, a_2 B, \ldots, a_n B\right) = \\ = f_B\left(a_1', a_2, \ldots, a_n\right) + f_B\left(a_1'', a_2, \ldots, a_n\right)\end{gathered}$$

Остальные свойства проверяются аналогично. Тогда согласно Теореме 3.23$f_B(A) = \det A.\ f_B(E)$, что равносильно требуемому.

Note.

3.42. Наметим также другое доказательство предыдущей Теоремы, использующее свойства элементарных матриц. Во-первых, предположим что матрица A вырождена. Последнее равносильно существованию ненулевой строки такой, что $cA = 0$. Тогда и $0 = (cA)B = c(AB)$, значит, произведение AB тоже вырождено. Так как определитель вырожденной матрицы равен нулю, то

Теорема

в этом случае верна.

Пусть теперь A невырождена. Тогда она представляется в виде произведения элементарных матриц. Теперь требуемое легко вывести из Следствия 3.31.

Задача

3.43. Докажите, что следующие условия равносильны:

1. $\det A = 1$;
2. матричу A можно привести к единичной матриче исползъзуя только преобразования типа I;
3. матрица A является произведением элементарных матриц типа I.

3.2.17 3.3 Some Applications of Determinants

Рассмотрим квадратную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{cases}$$

Обозначим через A ее матрицу коэффициентов и через $A_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$ матрицу, полученную из A заменой ее i-го столбца столбцом свободных членов.

Теорема

3.44. Если $\det A \neq 0$, то система (20) имеет единственное решение $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, которое может быть найдено по формулам

$$\alpha_i = \frac{\det A_i}{\det A} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{21}$$

Эти формулы называются формулами Крамера.

Proof. □

Будем производить элементарные преобразования строк расширенной матрицы системы (20) с целью привести ее матрицу коэффициентов к единичной матрице (это возможно, поскольку по условию A невырождена). При этом система будет заменяться эквивалентной. Кроме того, правая часть (21) также не меняется при элементарных преобразованиях (при элементарных преобразованиях типа I числитель и знаменатель не меняются, при преобразованиях типа II числитель и знаменатель меняют знак, при преобразованиях типа III умножаются на одно и то же ненулевое число).

Таким образом, формулы Крамера достаточно проверить для системы с единичной матрицей коэффициентов, то есть вида

$$\begin{cases} x_1 & & = & b_1 \\ & x_2 & = & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \quad x_n & = & b_n. \end{cases}$$

Она, очевидно, имеет единственное решение $\alpha_i = b_i (i = 1, \ldots, n)$. С другой стороны,

$$\det A = \det E = 1, \quad \det A_i = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & b_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & b_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b_n & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = b_i$$

так что формулы Крамера в этом случае действительно верны.
Из только что доказанной теоремы следует, что если определитель квадратной матрицы порядка n отличен от нуля, то ее столбцы образуют базис в линейном пространстве $\mathbb{K}^n$ столбцов высоты n, поскольку любой столбец $(b_1, \dots, b_n)$ по ним однозначно раскладывается.

Заметим, что если система (20) имеет единственное решение, то столбцы матрицы A линейно независимы (ср. Лемму 6.3 ниже), что согласно Следствию 2.39 равносильно тому, что матрица невырождена, что, в свою очередь по Теореме 3.34 равносильно условию $\det A \neq 0$.

Применим теперь формулы Крамера для явного нахождения обратной матрицы.

Теорема

3.45. Пусть $A = (a_{ij})$ - невырожденная матрица. Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

(напомним, что A_{ij} обозначает алгебрачческое дополнение элемента a_{ij}).

Proof. □

Матрица A^{-1} является решением матричного уравнения $AX = E$. Это уравнение распадается на n уравнений относительно столбцов $X_1, X_2, \dots, X_n$ матрицы X:

$$AX_j = E_j \tag{22}$$

где E_j – j-й столбец матрицы E.
В координатной записи уравнение (22) представляет собой систему n линейных уравнений относительно элементов $x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj}$ столбца X_j. Матрицей коэффициентов этой системы служит матрица A, а столбцом свободных членов - столбец E_j. По формулам Крамера i-я компонента решения равна

$$x_{ij} = \frac{\det A_i}{\det A} = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & \dots & 1 & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{A_{ji}}{\det A}$$

(в определителе 1 стоит в i-м столбце), что и требовалось доказать

Задача

3.46. Решите Задачу 3.5, используя свойства определителей. Предложите ее обобщение на пмерный случай. (Указание: выберем ортонормированный базис и запишем координаты векторов $\{u, v, w\}$ $u\{x, y, z\}$ в нем в строжи матриц A и B соответственно. Тодда произведение AB^T будет равно правой части формуль (16)).

3.2.18 3.4 Attached Matrix

Пусть A - матрица порядка n. Ее присоединенной матрицей $\widehat{A}$ называется транспонированная к матрице, составленной из алгебраических дополнений матрицы A. Иными словами, если $\widehat{A} = (\widehat{a}_{ij})$, то $\widehat{a}_{ij} = A_{ji}$, где A_{ij} - алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A. Из Теоремы 3.45 немедленно следует, что для обратимой матрицы A верно равенство

$$A\widehat{A} = \widehat{A}A = (\det A)E \tag{23}$$

где E - единичная матрица порядка n.

Предложение

3.47. Формула (23) верна для произвольной квадратной матрицы A.

Proof. $\square$

Докажем, например, $A\widehat{A} = (\det A)E$. Произведение i-й строки A на i-й столбец $\widehat{A}$ совпадает с разложением определителя A по i-й строке, то есть равно $\det A$. То есть все диагональные элементы матрицы $A\widehat{A}$ равны $\det A$.

Произведение i-й строки A на j-й столбец $\widehat{A}$ при $i \neq j$ равно, как легко убедится читатель, разложению по j-й строке определителя матрицы, которая получается из A заменой j-й строки на i-ю строку (все остальные строки кроме j-й у нее такие же как у A). Так как у такой матрицы две одинаковые строки, то в силу кососимметричности по строкам, ее определитель равен нулю. Это показывает, что в матрице $A\widehat{A}$ все элементы вне главной диагонали равны нулю.

Заметим, что из доказанного Предложения снова вытекает

Теорема

3.45.

3.3 4 Groups

В этом разделе мы продолжаем изучение групп, начатое в параграфах 1.4 и 1.5.

3.3.1 4.1 Group Homomorphisms and Isomorphisms

Сравним таблицы умножения групп $(\mathbb{Z}_3, +)$ и $(\mu_3, \cdot)$, где $\mu_n \subset \mathbb{C}^*$ - группа комплексных корней n-й степени из 1. Обозначим $\varepsilon := \exp(2\pi i/3)$, тогда

$+$	$[0]$	$[1]$	$[2]$				
$[0]$	$[0]$	$[1]$	$[2]$	$\cdot$	1	ε	ε^2
$[1]$	$[1]$	$[2]$	$[0]$	1	ε	ε^2	
$[2]$	$[2]$	$[0]$	$[1]$	ε^2	ε^2	1	ε

Мы видим, что таблицы умножения двух указанных групп с точностью до переобозначения элементов совпадают. Поскольку таблица умножения содержит всю информацию о бинарной операции, эти две группы устроены одинаково как множества с операцией. В этом случае говорят, что рассматриваемые группы изоморфны.

Дадим формальное определение.

Определение

4.1. Пусть $(G, \cdot)$ и $(H, *)$ - две группы. Биективное отображение

$$\varphi : G \to H$$

называется изоморфизмом между $(G, \cdot)$ и $(H, *)$, если для любых $g_1, g_2 \in G$

$$\varphi(g_1 \cdot g_2) = \varphi(g_1) * \varphi(g_2) \tag{24}$$

Группы $(G, \cdot)$ и $(H, *)$ называются изоморфными (что обозначается как $(G, \cdot) \cong (H, *)$ или просто $G \cong H$), если из $(G, \cdot)$ в $(H, *)$ существует хотя бы один изоморфизм.

Предложение

4.2. 1) Композиция изоморфизмов изоморфизм.
2) Отображение, обратное изоморфизму [24], изоморфизм.
3) Тождественное отображение является изоморфизмом.

Proof. □

1) Пусть $\varphi : (G, \cdot) \to (H, *)$ и $\psi : (H, *) \to (K, \circ)$ - изоморфизмы. Тогда $\psi\varphi : (G, \cdot) \to (K$, о) - биекция и мы имеем

$$(\psi\varphi)(g_1 \cdot g_2) = \psi(\varphi(g_1 \cdot g_2)) = \psi(\varphi(g_1) * \varphi(g_2)) =$$
$$= \psi(\varphi(g_1)) \circ \psi(\varphi(g_2)) = (\psi\varphi)(g_1) \circ (\psi\varphi)(g_2)$$

2. Пусть $\varphi : (G, \cdot) \to (H, *)$ - изоморфизм и $\varphi^{-1} : H \to G$ - теоретико-множественно обратное к φ. Нужно проверить, что $\forall h_1, h_2 \in H \varphi^{-1}(h_1 * h_2) = \varphi^{-1}(h_1) \cdot \varphi^{-1}(h_2)$.

Пусть $h_i = \varphi(g_i), i = 1, 2$ (такие g_1 и g_2 существуют и единственны в силу биективности φ). Тогда $h_1 * h_2 = \varphi(g_1 \circ g_2)$ в силу (24), а значит

$$\varphi^{-1}(h_1 * h_2) = g_1 \circ g_2 = \varphi^{-1}(h_1) \cdot \varphi^{-1}(h_2)$$

Пункт 3) очевиден.

Следствие

4.3. На "множестве" групп отношение "быть изоморфными" является отношением эквивалентности.

Задача

4.4. Найдите изоморфизм $(\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$. Проверьте, что обратное отображение к найденному такжне является изоморфизмом.

Задача

4.5. Для поля $\mathbb{K}$ постройте изоморфизм между группой $(\mathbb{K}, +)$ и группой матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$$

с операцией умножения.

Задача

4.6. Пусть $\mathrm{U}(1) \subset \mathbb{C}^*$ - группа комплексных чисел, равных по модулю единице, с операцией умножения. Постройте изоморфизм между $\mathrm{U}(1)$ и группой вещественных матрич вида

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

с единичным определителем, с операцией умножения.
Таким образом, возникает естественная задача классификации всех групп с точностью до изоморфизма, то есть описание классов изоморфизма групп. В такой общности эта задача безнадёжна, хотя некоторые типы групп могут быть полностью классифицированы

(ниже мы это сделаем для циклических групп, также это несложная задача для конечнопорождённых абелевых групп).

Для решения задачи классификации объектов некоторого типа в математике используют инварианты, которые одинаковы для всех объектов из одного класса. Очевидным инвариантом класса изоморфизма групп является мощность множества её элементов: если две группы $(G, \cdot)$ и $(H, *)$ изоморфны, то мощности множеств их элементов совпадают. Если мощность множества элементов группы $(G, \cdot)$ конечна, то ее называют порядком группы G и обозначают $|G|$.

Назовём структурой группъ на данном множестве X задание бинарной операции, которая удовлетворяет аксиомам группы.

Даже на конечном множестве, как правило, существуют операции, удовлетворяющие аксиомам группы, которые задают неизоморфные группы (например, с точностью до изоморфизма, существует 5 различных групп порядка 12, одна порядка 15[25] и 51 порядка 32). На пустом множестве нельзя задать структуру группы (поскольку по определению группы в ней есть хотя бы один элемент - нейтральный), на множестве из одного элемента или на множествах, мощность которых равна простому числу любые групповые операции задают изоморфные структуры группы (см.

Следствие

4.83 и Теорему 4.42).

Задача

4.7. Классифицируйте с точностью до изоморфизма группъ порядка 4.
Ещё одним инвариантом изоморфизма является такое свойство операции как коммутативность (или некоммутативность).

Задача

4.8. Докажите, что если группа $(G, \cdot)$ коммутативна (некоммутативна), то и любая изоморфная ей группа коммутативна (некоммутативна).

Классификация с точностью до изоморфизма абелевых групп данного конечного порядка n - несложная задача (при условии, что известно разложение n на простые множители), которая решается в более полных курсах алгебры.

В следующем параграфе мы познакомимся с определением циклической группы. Группа, изоморфная циклической, сама является циклической. Также мы определим порядки элементов группы и докажем, что при изоморфизме элемент порядка n отображается в элемент порядка n. Из этого следует, что если две группы изоморфны, то для любого n мощности множеств элементов порядка n в них равны. В несложных ситуациях этих соображений бывает достаточно, чтобы доказать неизоморфность конкретных групп.

Вообще, "абстрактная" теория групп интересуется только теми свойствами групп, которые сохраняются при изоморфизмах. Пример "свойства", которое не сохраняется при изоморфизме - выбор конкретной реализации циклической группы порядка 3 в виде группы классов вычетов по модулю 3 либо как группы комплексных корней 3 -й степени из 1 (см. пример в начале этого параграфа).

Задача

4.9. Для данной группы $(G, \cdot)$ обозначим через $(G^{op}, *)$ то же самое множество элементов, но с (вообще говоря, другой) операцией *, задаваемой условием

$$g_1 * g_2 := g_2 \cdot g_1 \forall g_1, g_2 \in G$$

Докажите, что

[024] Оно существует, поскольку изоморфизм по определению биективен.

1. $(G, *)$ является группои;
2. отображение $\varphi(g)=g^{-1}$ является изоморфизмом $(G, \cdot) \rightarrow(G, *)$.

Если в Определении 4.1 отказаться от условия биективности φ, мы придём к определению гомоморфизма групп.

Определение

4.10. Пусть $(G, \cdot)$ и $(H, *)$ - две группы. Отображение

$$\varphi: G \rightarrow H$$

называется гомоморфизмом между $(G, \cdot)$ и $(H, *)$, если для любых $g_1, g_2 \in G$

$$\varphi\left(g_1 \cdot g_2\right)=\varphi\left(g_1\right) * \varphi\left(g_2\right) \tag{25}$$

Задача

4.11. Если $\varphi: G \rightarrow H$ - гомоморфизм групп, то

1. $\varphi\left(e_G\right)=e_H$
2. $\varphi\left(g^{-1}\right)=\varphi(g)^{-1} \forall g \in G$.

Задача

4.12. 1) Композиция гомоморфизмов групп - гомоморфизм групп.
2) Тождественное отображение - гомоморфизм групп.
3) Изоморфизмы групп - в точности обратимые гомоморфизмы. Другими словами, гомоморфизм $\varphi: G \rightarrow H$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда существует гомоморфизм $\psi: H \rightarrow G$ такой, что $\psi \varphi=\mathrm{id}_G, \varphi \psi=\mathrm{id}_H$.

Заметим, что между любыми двумя группами G и H существует гомоморфизм, а именно тривиальный гомоморфизм, который все элементы группы G переводит в нейтральный элемент в H.

Приведем теперь примеры гомоморфизмов.

Пример 4.13. Отображение $\varphi:(\mathbb{Z},+) \rightarrow\left(\mathbb{Z}_n,+\right)$, заданное формулой $\varphi(k)=[k]$, является гомоморфизмом групп.

Пример 4.14. Пусть $\mathrm{U}(1) \subset \mathbb{C}^*$ - группа комплексных чисел, равных по модулю единице, с операцией умножения. Отображение $\varphi:(\mathbb{R},+) \rightarrow \mathrm{U}(1)$, заданное формулой $\varphi(x)=\exp (2 \pi i x)$, является гомоморфизмом групп.

Пример 4.15. Отображение $\det: \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^*$, ставящее в соответствие обратимой матрице A ее определитель, является гомоморфизмом групп.

Пример 4.16. Пусть $m, n \in \mathbb{N}, m \mid n$. Отображение $\varphi:\left(\mathbb{Z}_n,+\right) \rightarrow\left(\mathbb{Z}_m,+\right)$, заданное формулой $\varphi\left([k]_n\right)=[k]_m$, является гомоморфизмом групп. Читателю, в частности, необходимо убедиться в корректности определения отображения φ.

Пример 4.17. Пусть D_3 - группа симметрий правильного треугольника. Рассмотрим отображение $\varphi: D_3 \rightarrow\{\pm 1\}$, заданное условием, что $\varphi(g)=-1$ если $g \in D_3$ меняет ориентацию плоскости и $\varphi(g)=1$ если сохраняет. Тогда φ - гомоморфизм групп.

Пример 4.18. Зафиксируем натуральное n. Пусть отображение $\varphi_n: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ задано формулой $\varphi_n(z)=z^n$. Тогда φ_n - гомоморфизм групп.

Пример 4.19. Пусть $z \in \mathbb{C}^*$ - произвольное ненулевое комплексное число. Тогда отображение $\varphi:(\mathbb{Z},+) \rightarrow \mathbb{C}^*$, заданное формулой $\varphi(n)=z^n$, является гомоморфизмом групп.

С каждым гомоморфизмом $\varphi: G \rightarrow H$ связаны две подгруппы - одна в G, называемая ядром φ, другая в H, называемая образом φ.

---

[025] Существует единственная с точностью до изоморфизма группа порядка n тогда и только тогда, когда $(n, \phi(n))=1$, где ϕ - функция Эйлера, см. Определение4.40.

Определение

4.20. Пусть $\varphi : G \to H$ - гомоморфизм групп. Тогда его ядром (обозначение: $\ker\varphi$) называется подгруппа

$$\{g \in G | \varphi(g) = e\} \subset G$$

состоящая из элементов группы G, которые φ отображает в нейтральный элемент в H.

Определение

4.21. Пусть $\varphi : G \to H$ - гомоморфизм групп. Тогда его образом (обозначение: $\operatorname{Im}\varphi$) называется подгруппа

$$\{h \in H | \exists g \in G \quad \text{такой, что} \quad \varphi(g) = h\} \subset H$$

состоящая из элементов группы H, в которые отображаются элементы группы G.

Задача

4.22. Убедитесь, что $\ker\varphi \subset G u \operatorname{Im}\varphi \subset H$ в самом деле являются подгруппами.

Предложение

4.23. Гомоморфизм групп $\varphi : G \to H$ является

1. инвективным $\Leftrightarrow \ker\varphi = \{e\}$;
2. сюрвективным $\Leftrightarrow \operatorname{Im}\varphi = H$.

Proof. □

1) В одну сторону утверждение тривиально: если $\ker\varphi \neq \{e\}$, то в нейтральный элемент группы H помимо нейтрального элемента группы G переходит еще какой-то элемент, и поэтому φ не инъективен.

Обратно, пусть φ не инъективен, тогда $\exists g_1 \neq g_2 \in G$ такие, что $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$. Но тогда и $e \neq g_1 g_2^{-1} \in \ker\varphi$, поскольку

$$\varphi\left(g_1 g_2^{-1}\right) = \varphi(g_1)\,\varphi\left(g_2^{-1}\right) = \varphi(g_1)\,\varphi(g_2)^{-1} = e$$

Пункт 2) тривиален.

Пункт 1) из предыдущего Предложения весьма полезен: он утверждает, что для проверки инъективности гомоморфизма достаточно убедиться что прообраз нейтрального элемента состоит только из одного (нейтрального) элемента, тогда и прообразы всех элементов из образа одноэлементны. Ниже мы получим обобщение этого результата: в общем случае полные прообразы всех элементов из образа равномощны ядру.

Следствие

4.24. Гомоморфизм групп $\varphi : G \to H$ является изоморфизмом $\Leftrightarrow \ker\varphi = \{e\} u \operatorname{Im}\varphi = H$.

Задача

4.25. Найдите ядра и образы гомоморфизмов из приведённых выше примеров. Выясните, являются ли гомоморфизмы инбективными, сюрбективными, изоморфизмами.

3.3.2 4.2 Cyclic Groups

Пусть G - произвольная группа, а $g \in G$ - некоторый ее элемент. Определим целые степени элемента g следующими формулами:

$$g^k = \begin{cases} \underbrace{gg\dots g}, & \text{если } k > 0, \\ e \text{ сомножителей} & \text{если } k = 0, \\ \underbrace{g^{-1}g^{-1}\dots g^{-1}}_{k \text{ сомножителей}}, & \text{если } k < 0. \end{cases} \tag{26}$$

Задача

4.26. Докажите, что $g^k g^l = g^{k+l}$ для любых челых k, l. (Указание: рассмотрите отдельно несколько случаев).

Из (26) следует, что $\left(g^k\right)^{-1} = g^{-k}$. Кроме того, $e = g^0$ по определению. Таким образом, степени элемента g образуют подгруппу в группе G. Она называется циклической подгруппой, порожденной элементом g, и обозначается $\langle g \rangle$.

Итак,

$$\langle g \rangle := \left\{ g^k | k \in \mathbb{Z} \right\} \subset G$$

и результат Задачи 4.26 означает, что сопоставление $k \mapsto g^k$ задает гомоморфизм групп

$$\varphi_g : \mathbb{Z} \to G$$

образом которого является подгруппа $\langle g \rangle \subset G$.

Для гомоморфизма φ_g возможны два варианта: либо он инъективен, либо нет. В первом случае все степени g различны и, в частности, группа $\langle g \rangle$ бесконечна. В этом случае говорят, что элемент $g \in G$ имеет бесконечный порядок.

Поскольку во втором случае по предположению гомоморфизм φ_g не инъективен, его ядро ненулевое. Из описания подгрупп группы $\mathbb{Z}$ (см. Пример 1.39) следует, что тогда $\ker \varphi_g = n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$, где $n \in \mathbb{N}$. Легко видеть, что n - наименьшее натуральное число такое, что $g^n = e$. Такое n называется порядком элемента $g \in G$ и обозначается $\mathrm{ord}(g)$.

Предложение

4.27. Если $\mathrm{ord}\,(g) = n$, то

1. $g^m = e \Leftrightarrow n | m$;
2. $g^k = g^l \Leftrightarrow n \mid (l - k)$.

Proof. □

1) Разделим m на n с остатком:

$$m = qn + r, \quad 0 \le r < n$$

Тогда в силу определения порядка элемента $g^m = (g^n)^q \cdot g^r = g^r = e \Leftrightarrow r = 0$.
2) В силу предыдущего

$$g^k = g^l \Leftrightarrow g^{l-k} = e \Leftrightarrow n \mid (l-k)$$

Мы видим, что если $\operatorname{ord}(g) = n$, то можно корректно определить $g^{[k]}$, где $[k] \in \mathbb{Z}_n$ - класс вычетов по модулю n.

Следствие

4.28. Если $\operatorname{ord}(g) = n$, то подгруппа $\langle g \rangle$ содержит n элементов.

Proof. □

Действительно, $\langle g \rangle = \{e, g, g^2, \ldots, g^{n-1}\}$, причем все перечисленные элементы различны и исчерпывают $\langle g \rangle$.

Предложение

4.29. Пусть $\varphi : G \to H$ - гомоморфизм групп и $g \in G$ - элемент конечного порядка. Тогда $\operatorname{ord}(\varphi(g)) | \operatorname{ord}(g)$

Proof. Пусть ord $g = n$. Тогда $\varphi(g)^n = \varphi(g^n) = \varphi(e) = e$ и по пункту 1) Предложения 4.27 $\operatorname{ord}(\varphi(g)) | n$.

□

Следствие

4.30. При изоморфизме групп элемент порядка n переходит в элемент порядка n.

Proof.

$$n = \operatorname{ord}\left(\varphi^{-1}(\varphi(g))\right) | \operatorname{ord}(\varphi(g)) | \operatorname{ord}(g) = n$$

□

Задача

4.31. Докажите, что $\forall g \in G$ ord $(g) = \operatorname{ord}(g^{-1})$. (Указание: воспользуйтесь тем, что для любой абелевой группы H сопоставление $h \mapsto h^{-1}$ задает изоморфизм группы H на себя и тем, что группа $\langle g \rangle$, очевидно, абелева).

Задача

4.32. Докажите, что группы $\mathbb{R}^* u \mathbb{C}^*$ не изоморфны.

Задача

4.33. Докажите, что для любой группъ G любых ее элементов $g, h \in G \operatorname{ord} g = \operatorname{ord}(hgh^{-1})$.

Чему равен порядок элемента g^k, если $\operatorname{ord}(g) = n$? Для пары натуральных чисел k, n их наибольший общий делитель обозначим (k, n).

Предложение

4.34. Если $\operatorname{ord}(g) = n$, то

$$\operatorname{ord}\left(g^k\right) = \frac{n}{(n,k)}$$

Proof. □

Пусть

$$(n,k) = d, n = n_1 d, k = k_1 d$$

так что $(n_1, k_1) = 1$. Имеем

$$\left(g^k\right)^m = e \Leftrightarrow n \,|km \Leftrightarrow n_1|\, k_1 m \Leftrightarrow n_1|m$$

(последняя эквивалентность вытекает из Следствия 1.29). Следовательно, ord $\left(g^k\right) = n_1$.

Определение

4.35. Группа G называется циклической, если существует такой элемент $g \in G$, что $G = \langle g \rangle$. Всякий такой элемент называется порождающим элементом группы G.

Пример 4.36. Группа $\mathbb{Z}$ циклическая, так как порождается элементом 1. С тем же успехом она порождается элементом -1. (С точки зрения группы $\mathbb{Z}$ свойства элементов 1 и -1 аналогичны; только когда мы рассматриваем $\mathbb{Z}$ как кольцо, появляется разница между ними). Других порождающих в $\mathbb{Z}$ кроме ± 1 нет. Пример 4.37. Группа $(\mathbb{Z}_n, +)$ (см. Пример 1.41) классов вычетов по модулю n циклическая, поскольку порождается своим элементом [1]. Описать другие порождающие помогает

Предложение

4.34 (см. ниже). Пример 4.38. Группа комплексных корней n-й степени из 1

$$\mu_n := \{z \in \mathbb{C} | z^n = 1\} \subset \mathbb{C}^*$$

является циклической, поскольку порождается корнем $\varepsilon := \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$.
Напомним, что число элементов конечной группы G называется ее порядком и обозначается через $|G|$. Порядок конечной циклической группы равен порядку ее порождающего элемента. Поэтому из Предложения 4.34 следует

Предложение

4.39. Элемент g^k циклической группы $G = \langle g \rangle$ порядка n является порождающим тогда и только тогда, когда $(n,k) = 1$.

Определение

4.40. Число натуральных чисел среди $1, 2, \ldots, n$, взаимно простых с n, называется функцией Эйлера и обозначается $\phi(n)$.

Задача

4.41. Докажите, что $\phi(p) = p - 1$ для произвольного простого p. Более общо, $\phi\left(p^k\right) = p^k - p^{k-1}$.
Циклические группы представляют собой простейший класс групп и легко классифицируются с точностью до изоморфизма. (Также нетрудно классифицировать более широкий класс конечно порожденных абелевых групп, но это выходит за рамки данного курса).

Теорема

4.42. Всякая бесконечная циклическая группа изоморфна группе $\mathbb{Z}$. Всякая конечная циклическая группа порядка n изоморфна группе $\mathbb{Z}_n$.

Proof. □

Если $G = \langle g\rangle$ - бесконечная циклическая группа, то в силу формулы (26) отображение $\varphi : \mathbb{Z} \to G, k \mapsto g^k$, является гомоморфизмом, который сюръективен, поскольку элемент g является порождающим для G. Если бы φ не был инъективным, то элемент g имел бы конечный порядок, что противоречило бы бесконечности группы G.

Пусть теперь $G = \langle g\rangle$ - конечная циклическая группа порядка n. Рассмотрим отображение

$$\varphi : \mathbb{Z}_n \to G, \quad [k] \mapsto g^k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Так как

$$[k] = [l] \Leftrightarrow n \mid (l - k) \Leftrightarrow g^k = g^l$$

отображение φ корректно определено и биективно. Свойство

$$\varphi([k] + [l]) = \varphi([k])\varphi([l])$$

следует из формулы (26). Таким образом, φ - изоморфизм.
Таким образом, все циклические группы порядка n изоморфны, и, в частности, группа классов вычетов $\mathbb{Z}_n$ изоморфна группе корней из единицы μ_n. В каждой из них ровно $\phi(n)$ порождающих элементов.

Задача

4.43. Докажите, что всякая конечная подгруппа мультипликативной группы $\mathbb{C}^*$ поля комплексных чисел является чиклической. (Указание: восполъзуйтесъ тем, что количество корней ненулевого многочлена в поле не превосходит его степени).

Задача

4.44. Пусть μ_∞ - множество всех комплексных корней (всевозможных степеней) из 1. Докажите, что μ_∞ является подгруппой группъ $\mathbb{C}^*$. Будет ли группа μ_∞ циклической?

Задача

4.45. Опишите все бесконечные циклические подгруппы в $\mathbb{C}^*$.
Опишем теперь подгруппы циклических групп. (В случае бесконечной циклической группы мы это уже сделали в Примере 1.39).

Теорема

4.46. 1) Всякая подгруппа циклической группы сама является циклической.
2) В циклической группе порядка n порядок любой подгруппы делит n и для любого делителя d числа п существует, и притом только одна подгруппа порядка d.

Proof. □

1) Пусть $G = \langle g \rangle$ - циклическая группа и H - ее подгруппа, отличная от $\{e\}$. (Единичная подгруппа, очевидно, является циклической). Заметим, что если $g^{-m} \in H$ для какого-либо $m \in \mathbb{N}$, то и $g^m \in H$. Пусть m - наименьшее из натуральных чисел, для которых $g^m \in H$. Докажем, что $H = \langle g^m \rangle$. Пусть $g^k \in H$. Разделим k на m с остатком:

$$k = qm + r, \quad 0 \leq r < m$$

Имеем

$$g^r = g^k \left(g^m\right)^{-q} \in H$$

откуда в силу определения числа m следует, что $r = 0$ и, значит, $g^k = (g^m)^q$.
2) Пусть H - подгруппа циклической группы $G = \langle g \rangle, |G| = n$. Из пункта 1) следует, что $H = \langle g^m \rangle$ для некоторого натурального m. Поскольку порядок элемента g^m делит ord $(g) = n$, то то же верно и для $|H|$. Пусть $d|n$; тогда

$$\left\langle g^{n/d} \right\rangle = \left\{e, g^{n/d}, g^{2n/d}, \ldots, g^{(d-1)n/d}\right\} \tag{27}$$

является подгруппой порядка d в G.
То есть порядок любой подгруппы конечной циклической группы G делит $|G|$, и для любого делителя $d||G\ |$ в G существует подгруппа порядка d. Осталось доказать ее единственность.

Пусть в группе G есть произвольная подгруппа H' порядка d. Поскольку H' является циклической, она порождается некоторым элементом $g^k \in G$. Докажем, что $\left\langle g^k \right\rangle = \left\langle g^{(k,n)} \right\rangle$. В самом деле, поскольку $(k,n)|k$, то $g^k \in \left\langle g^{(k,n)} \right\rangle$ и, значит, $\left\langle g^k \right\rangle \subseteq \left\langle g^{(k,n)} \right\rangle$. С другой стороны, из Предложения 4.34 следует, что ord $\left(g^k\right) =$ ord $\left(g^{(k,n)}\right)$, откуда и следует $\left\langle g^k \right\rangle = \left\langle g^{(k,n)} \right\rangle$.

Таким образом, $H' = \left\langle g^{(k,n)} \right\rangle$. Но $(k,n)|n$ и $d =$ ord $\left(g^{(k,n)}\right) = \frac{n}{(k,n)}$ согласно все тому же Предложению 4.34. Значит, $(k,n) = n/d$ и H' совпадает с подгруппой (27).

Следствие

4.47. В циклической группе простого порядка любая неединичная подгруппа совпадает со всей группой.

Циклическую группу порядка n будем обозначать C_n.
Порядок любого элемента циклической группы C_n делит порядок группы n. Пусть $\Phi(d) \subset C_n$ - множество элементов порядка $d|n$. (Например, $\Phi(1)$ состоит из единственного элемента e, а $\Phi(n)$ - из порождающих элементов для C_n, которых, как мы знаем, $\phi(n)$ штук). Тогда

$$C_n = \coprod_{d|n} \Phi(d)$$

Каждый элемент порядка $d|n$ порождает единственную подгруппу $C_d \subset C_n$ порядка d. Как мы знаем, в C_d ровно $\phi(d)$ порождающих элементов, поэтому $|\Phi(d)| = \phi(d)$.

Таким образом, мы доказали такое

Следствие.4.48.

$$n = \sum_{d|n} \phi(d)$$

Задача

4.49. Докажите, что максимальный порядок образа гомоморфизма $\varphi : C_n \to C_m$ равен (m, n). В частности, если $(m, n) = 1$, то существует только один гомоморфизм $\varphi : C_n \to C_m$ (он все элементы C_n переводит в нейтральный элемент группы C_m).

Задача

4.50. Пусть G - произвольная группа. 1) Постройте биекцию между множеством гомоморфизмов $\mathbb{Z} \to G$ и множеством элементов группы G. 2) Постройте биекцию между множеством гомоморфизмов $C_n \to G$ и множеством таких элементов группы G, порядок которых делит n.

3.3.3 4.3 Symmetric Groups

Совокупность $S(X)$ всех биективных преобразований множества X является группой относительно операции композиции. В самом деле, композиция преобразований ассоциативна; композиция биекций - биекция, обратное преобразование к биекции - биекция, тождественное преобразование (нейтральный элемент относительно композиции) - биекция.

Если множество X конечно (что мы будем предполагать в дальнейшем), то можно считать, что $X = \{1, 2, \ldots, n\}$; в этом случае группа $S(X)$ называется группой подстановок или симметрической группой степени n и обозначается S_n. Подстановка $\sigma \in S_n$ может быть записана в виде таблицы

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

в первой строке которой выписаны в каком-то порядке числа $1, 2, \ldots, n$, а во второй строке - их образы, т.е. $j_k = \sigma(i_k)$. Фиксируя расположение чисел в первой строке (например, располагая их в порядке возрастания), мы видим, что число подстановок равно числу перестановок, т.е. $n\,!$. При этом каждая подстановка может быть записана $n\,!$ способами.

Произведение подстановок - сложная функция $(\tau\sigma)(i) = \tau(\sigma(i)), 1 \leq i \leq n$. Приведем пример на умножение подстановок в табличной форме записи:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

(Здесь мы сначала для удобства переписали первую подстановку таким образом, чтобы первая строка в ее записи совпала со второй строкой в записи второй подстановки).

Симметрические группы $S_n, n \in \mathbb{N}$ образуют интересный класс конечных групп, неабелевых при $n > 2$. Достаточно сказать, что любая конечная группа изоморфна подгруппе группы S_n для некоторого
натурального n (теорема Кэли). Мы, однако, познакомимся только с самыми простейшими свойствами симметрических групп.

Назовем знаком подстановки $\sigma \in S_n$ и обозначим через $\operatorname{sgn}\sigma$ произведение знаков верхней и нижней перестановки в ее записи

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix} = \operatorname{sgn}(i_1, i_2, \ldots, i_n) \cdot \operatorname{sgn}(j_1, j_2, \ldots, j_n)$$

(см.

Определение

3.8). Это произведение не зависит от способа записи подстановки σ, поскольку от любого способа записи можно перейти к любому другому последовательными транспозициями столбцков, а при каждой такой транспозиции одновременно меняются знаки верхней и нижней перестановок, так что их произведение сохраняется. Основное свойство знака описывает следующее

Предложение

4.51. Отображение

$$\operatorname{sgn} : S_n \to C_2 = \{\pm 1\}, \quad \sigma \mapsto \operatorname{sgn}(\sigma)$$

является гомоморфизмом групп.

Proof. □

Перемножая подстановки σ и τ, мы можем считать, что верхняя перестановка в записи σ совпадает с нижней перестановкой в записи τ:

$$\sigma = \left(\begin{array}{cccc} j_1 & j_2 & \dots & j_n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{array} \right), \quad \tau = \left(\begin{array}{cccc} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{array} \right)$$

Тогда

$$\sigma\tau = \left(\begin{array}{cccc} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{array} \right)$$

так что

$$\begin{gathered} \operatorname{sgn} \sigma\tau = \operatorname{sgn}(i_1, i_2, \dots, i_n) \cdot \operatorname{sgn}(k_1, k_2, \dots, k_n) = \\ = [\operatorname{sgn}(i_1, i_2, \dots, i_n) \operatorname{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_n)] \times [\operatorname{sgn}(j_1, j_2, \dots, j_n) \operatorname{sgn}(k_1, k_2, \dots, k_n)] = \\ = \operatorname{sgn} \tau \cdot \operatorname{sgn} \sigma = \operatorname{sgn} \sigma \cdot \operatorname{sgn} \tau \end{gathered}$$

Ядро гомоморфизма sgn называется знакопеременной группой и обозначается A_n. Подстановки σ, для которых $\operatorname{sgn} \sigma = 1$ (соответственно $\operatorname{sgn} \sigma = -1$) называются четными (соответственно нечетными). Таким образом, A_n - это подгруппа четных перестановок в S_n.

Задача

4.52. Докажсте, что в любой подгруппе $G \subseteq S_n$, содержащей нечетную перестановку, количество четных перестановок равно количеству нечетных (в частности, ее порядок четен). (Указание: если $\sigma \in G$ - нечетная перестановка, то умножение на нее задает взаимно-обратные биекции между подмножествами четных и нечетных перестановок в G).

Задача

4.53. Докажите, что порядок нечетной перестановки $\sigma \in G$ является четным числом. Покажем теперь, как вычисляются порядки элементов группы S_n.
Подстановка $\tau \in S_n$ называется циклом длины k и обозначается $(i_1 i_2 \dots i_k)$ (не следует путать это обозначение с похожим обозначением перестановок), если она циклически переставляет $i_1, i_2, \dots, i_k$, то есть $\tau(i_1) = i_2, \tau(i_2) = i_3, \dots, \tau(i_k) = i_1$, а все остальные числа оставляет на месте. Очевидно, что порядок цикла длины k равен k.

Заметим, что запись $(i_1 i_2 \dots i_k)$ цикла неоднозначна: с тем же успехом этот же цикл можно было бы записать в виде $(i_2 i_3 \dots i_k i_1)$.

Циклы τ_1 и τ_2 называются независимыми, если среди фактически переставляемых ими чисел нет общих; в этом случае $\tau_1\tau_2 = \tau_2\tau_1$.

Всякая подстановка σ однозначно (с точностью до порядка сомножителей) разлагается в произведение независимых циклов. В самом деле, рассмотрим последовательность $1, \sigma(1), \sigma^2(1), \ldots$ Поскольку порядок σ конечен, то существует такое натуральное k, что $\sigma^k(1) = 1$. Выберем такое k наименьшим. Тогда среди чисел $1, \sigma(1), \sigma^2(1), \ldots, \sigma^{k-1}(1)$ нет совпадающих (если $\sigma^i(1) = \sigma^j(1)$, где $j > i$, то $\sigma^{j-i}(1) = 1$), и мы получили цикл длины k (записав эти числа по порядку в вершины правильного k-угольника, заметим, что применение σ поворачивает его на угол $\frac{2\pi}{k}$). Далее выберем $i \notin \left\{1, \sigma(1), \sigma^2(1), \ldots, \sigma^{k-1}(1)\right\}$ и рассмотрим цикл, получаемый применением к нему степеней σ. Легко проверить, что он будет независим от первого цикла (если $\sigma^r(i) = \sigma^s(1)$, то $i = \sigma^{s-r}(1)$ в противоречии с предположением). Продолжая в том же духе, получим разложение σ в произведение независимых циклов. Проверку единственности такого разложения оставим читателю. Например,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 4 & 8 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (2637)(158)(4)$$

(последнюю неподвижную четверку можно не писать, поскольку (4) - тождественная подстановка).
Если подстановка σ раскладывается в произведение независимых циклов длин $k_1, k_2, \ldots, k_s$, то

$$\operatorname{ord} \sigma = \text{НОК}\left\{k_1, k_2, \ldots, k_s\right\}$$

Например, порядок приведенной выше подстановки σ равен 12.

Note.

4.54. Заметим, что разложение подстановки $\sigma \in S_n$ на независимые циклы приводит к разбиению множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, отвечающему следующему отношению эквивалентности:

$$i \sim j \Leftrightarrow \exists r \text{ такое, что } j = \sigma^r(i)$$

Также разложение на независимые циклы дает быстрый способ вычислять знак подстановки.

Предложение

4.55. $\operatorname{sgn}(i_1 i_2 \ldots i_k) = (-1)^{k-1}$. Словами: цикл четной длины - нечетная подстановка и наоборот.

Proof. □

Легко проверить, что цикл длины k раскладывается в произведение $k-1$-й транспозиций (= циклов длины 2) следующим образом:

$$(i_1 i_2 \ldots i_k) = (i_1 i_k) \ldots (i_1 i_4)\,(i_1 i_3)\,(i_1 i_2)$$

Поскольку транспозиция, очевидно, нечетная подстановка, то требуемое следует из Предложения 4.51.

Следствие

4.56. Подстановка четная тогда и только тогда, когда ее разложение на независимые цикль содерэит четное количество чиклов четной длины.

Читателю предлагается используя полученный результат предложить новое решение Задачи 4.53.

Задача

4.57. Чему равен максимальный порядок элемента в S_{10}? Будут ли элементы максимального порядка в S_{10} лежать в подгруппе A_{10}?

Применим теперь разложение подстановки на независимые циклы к описанию классов сопряженных элементов в группе S_n.

Пусть G - произвольная группа. Рассмотрим на множестве элементов G следующее отношение эквивалентности:

$$g \sim g' \Leftrightarrow \exists h \in G : g' = hgh^{-1}$$

Классы эквивалентности для этого отношения называются классами сопряжженных элементов группы G (а про элементы, принадлежащие одному классу говорят, что они сопряжснны).

Например, один из классов сопряженных элементов состоит из нейтрального элемента. Если бы мы изучали действия групп на множествах, то смогли бы легко доказать, что для конечной группы мощность любого класса сопряженных элементов делит порядок группы (впрочем, читатель все равно может попытаться это сделать после изучения параграфа про смежные классы).

Назовем цикловым типом подстановки $\sigma \in S_n$ неупорядоченный набор длин независимых циклов, на которые она раскладывается.

Предложение

4.58. Две подстановки $\sigma, \sigma' \in S_n$ принадлежат одному классу сопряженных элементов в $S_n \Leftrightarrow$ они имеют одинаковый цикловой тип.

Proof. □

Легко проверить, что

$$\sigma(i) = j \quad \Leftrightarrow \quad \left(\tau\sigma\tau^{-1}\right)(\tau(i)) = \tau(j) \tag{28}$$

Поэтому в разложение подстановки σ в произведение независимых циклов входит цикл $(i_1 i_2 \ldots i_k)$ тогда и только тогда, когда в аналогичное разложение для $\tau\sigma\tau^{-1}$ входит цикл $(\tau(i_1)\,\tau(i_2)\ldots\tau(i_k))$. Отсюда следует, что если подстановки сопряжены, то они имеют одинаковый цикловой тип.

Обратное следует из той же формулы (28). Точнее, она позволяет находить по двум подстановкам $\sigma, \sigma' \in S_n$, имеющим одинаковый цикловой тип, соответствующие τ. В частности, она показывает, что такие τ в этом случае существуют.

Симметрические и знакопеременные группы малых порядков часто встречаются как группы симметрий известных геометрических объектов.

Для решения некоторых приведенных ниже задач будет полезна следующая

Lemma

4.59. Если образ гомоморфизма групп $\varphi : G \to S_n$ содержит все транспозиции в S_n, то $\operatorname{Im}\varphi = S_n$, то есть φ сюръективен.

Proof. □

Заметим, что любую подстановку $\sigma \in S_n$ можно представить в виде произведения (зависимых) транспозиций. В самом деле, σ можно разложить в произведение независимых циклов, а каждый цикл можно разложить в произведение транспозиций как в доказательстве Предложения 4.55. Поскольку $\operatorname{Im}\varphi$ является подгруппой в S_n, то вместе с любым конечным набором элементов он содержит и их произведение (в любом порядке).

Задача

4.60. Пусть D_3 - группа симметрий правильного треугольника. Постройте изоморфизм $D_3 \to S_3$. Каким симметриям отвечает подгруппа $A_3 \subset S_3$?

Задача

4.61. Постройте изоморфизм $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2) \to S_3$. (Невырожденной матрице сопоставъте перестановку на множестве ненулевых столбцов, предварительно их занумеровав).

Задача

4.62. Пусть G - группа симметрий правильного многогранника, содержащая хотя бы одно преобразование, меняющее ориентачию пространства. Тогда G содержит подгруппу G^+индекса 2, состоящую из поворотов.

Задача

4.63. Пусть T - группа симметрий тетралдра. Постройте изоморфизм $T \to S_4$. Какой подгруппе в T соответствует nодгруnnа $A_4 \subset S_4$?

Задача

4.64. Пусть Q - группа поворотов трехмерного пространства, переводящих куб в себл. Постройте изоморфизм $Q \to S_4$. (Указание: сопоставъте вращению куба перестановку на множестве из четырех диагоналей, соединяюших диаметрально противоположные вериины).

Задача

4.65. Пусть D_4 - группа симметрий квадрата (ее порядок равен 8). Используя изоморфизм предыдущей задачи, найдите в $S_4$3 подгруппы, изоморфные D_4.

Задача

4.66. Постройте сюрбективный гомоморфизм $S_4 \to S_3$ и найдите его ядро. (Указание: сопоставъте вращению куба из задачи 4.64 перестановку на множестве прямых, соединяющих середины противоположсных граней).

Ясно, что двойственные правильные многогранники имеют одинаковые группы симметрий, в частности, у октаэдра она такая же как у куба. Для пары икосаэдр-додекаэдр группа поворотов пространства, переводящих их в себя, изоморфна группе A_5.

3.3.4 Symmetric Groups: Applications in Physics

(???? figure out why and how this can be used? maybe, there is an answer?)

3.3.5 4.4 Generating Sets

Пусть G - группа и $\{g_1, \ldots, g_k\}$ - система ее элементов. Легко проверить, что пересечение произвольного семейства подгрупп данной группы является подгруппой. Рассмотрим пересечение всех подгрупп группы G, содержащих систему $\{g_1, \ldots, g_k\}$; эта подгруппа является наименьшей с этим свойством и называется подгруппой, порожденной $\{g_1, \ldots, g_k\}$ и обозначается $\langle g_1, \ldots, g_k\rangle$. Если $\langle g_1, \ldots, g_k\rangle = G$, то говорят, что группа G порождается системой $\{g_1, \ldots, g_k\}$.

Более конструктивно можно сказать, что любой элемент подгруппы $\langle g_1, \ldots, g_k\rangle$ представляется в виде конечного произведения $g_{i_1}^{\varepsilon_1} g_{i_2}^{\varepsilon_2} \ldots g_{i_s}^{\varepsilon_s}$, где $g_{i_r} \in \{g_1, \ldots, g_k\}$, а $\varepsilon_r = \pm 1$. В самом деле, все такие произведения образуют группу по умножению, и любая подгруппа, содержащая $g_1, \ldots, g_k$, обязана их содержать.

Например, любая конечная группа порождается системой из всех своих элементов, но интерес представляют меньшие порождающие системы. Например, циклические группы определяются как группы, для которых существует одноэлементная порождающая система. Группа S_n при $n > 2$ не является циклической, и можно задаться вопросом о том, какие в ней есть порождающие системы.

Предложение

4.67. Группа S_n порождается смежными транспозициями (12), (23), $\ldots, (n-1n)$, причем минимальное число смежных транспозиций, в произведение которых может быть разложена подстановка $\sigma \in S_n$, равно числу инверсий в нижней строке ее стандартной записи

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Proof. □

Нужно доказать, что любую подстановку можно представить как произведение соседних транспозиций. Тождественная подстановка представляется в виде произведения пустого множества соседних транспозиций. Если $\sigma \neq e$, то в нижней строке ее стандартной записи есть хотя бы одна пара соседних элементов $\sigma(i)\sigma(i+1)$, которые образуют инверсию. Тогда умножая σ на смежную транспозицию $(\sigma(i)\sigma(i+1))$ слева, мы получим подстановку σ', у которой инверсий на одну меньше. Продолжая в том же духе, мы в конце концов получим стандартную подстановку id, то есть существуют такие смежные транспозиции $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_s$, что $\tau_s \ldots \tau_2\tau_1\sigma = \mathrm{id}$, откуда $\sigma = \tau_1\tau_2 \ldots \tau_s$. Это доказывает первое утверждение.

Второе утверждение следует из того, что умножение на смежную транспозицию может уменьшить число инверсий в подстановке максимум на 1.

Будет ли система порождающих группы S_n, построенная в предыдущем Предложении, минимальной в смысле числа элементов? Оказывается, при $n > 3$ ответ отрицательный:

Задача

4.68. Докажите, что группу S_n при любом натуральном $n \geq 3$ можно породить двумя элементами (найдите такую пару элементов).

Подсказку для решения предыдущей задачи дает следующий пример.

Пример 4.69. (Задание D_3 порождающими и соотношениями). Напомним, что D_3 обозначает группу симметрий правильного треугольника. Занумеруем вершины треугольника цифрами $1, 2, 3$ против часовой стрелки. Тогда подстановка $\sigma := (123)$ отвечает повороту вокруг центра треугольника на угол $2\pi/3$ против часовой стрелки, а $\tau := (12)$ - симметрии относительно высоты, опущенной из вершины 3. Легко видеть, что $\sigma^3 = e = \tau^2$; также нетрудно убедиться в справедливости соотношения $\tau\sigma = \sigma^2\tau$.

Пусть $H := \langle \sigma, \tau\rangle \subseteq D_3$. Используя последнее соотношение, любое слово в алфавите σ, τ можно переписать в виде $\sigma^k\tau^l$, причем (с учетом двух других соотношений) с $0 \leq k \leq 2, 0 \leq l \leq 1$. Значит, $|H| \leq 6$. С другой стороны, H содержит все повороты e, σ, σ^2 и все симметрии $\tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau$, откуда $H = D_3$.

Пример 4.70.

Следствие

2.45 означает, что над конечным полем $\mathbb{K}$ группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ порождается элементарными матрицами (если бы мы допускали бесконечные множества порождающих, то этот результат был бы верен для любого поля). Аналогично, согласно Задаче 3.43 группа $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ порождается элементарными матрицами типа I.

Пример 4.71. Группа $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, состоящая из целочисленных матриц порядка 2 с определителем, равным 1, порождается матрицами $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

В самом деле,

$$S \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad T^n \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+nc & b+nd \\ c & d \end{pmatrix}$$

и нам нужно доказать, что указанными преобразованиями строк любую матрицу $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ можно привести к единичной. Оставим доказательство существования соответствующего алгоритма читателю (подсказка: использовать алгоритм Евклида), проиллюстрировав его работу примером:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 33 & 20 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -33 & -20 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \to$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = S$$

3.3.6 4.5 Adjacent Classes

Мы видели, как рассмотрение эквивалентности относительно подгруппы $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ приводит к определению классов вычетов. Аналогичная конструкция есть для произвольной группы и ее подгруппы $H \subset G$, только в случае неабелевой группы G она приводит, вообще говоря, к двум видам "классов вычетов", которые называются левыми и правыми смежными классами по подгруппе.

Перейдем к точным определениям. Как обычно в случае общих конструкций теории групп будем использовать мультипликативную запись групповой операции.

Итак, пусть G - группа и H - ее подгруппа. Определим отношение эквивалентности $\sim_H$ на множестве элементов G следующим образом:

$$g_1 \sim_H g_2 \Leftrightarrow g_1^{-1} g_2 \in H \tag{29}$$

то есть $g_2 = g_1 h$, где $h \in H$. Легко видеть, что это определение обобщает определение сравнимости по модулю n, которое получается в случае $G = \mathbb{Z}, H = n\mathbb{Z}$.

Задача

4.72. Убедитесь, что $\sim$ в самом деле является отношением эквивалентности.

Классы этой эквивалентности называются левыми смежными классами группы G по подгруппе H. Ясно, что смежный класс, содержащий элемент g, имеет вид

$$gH := \{gh | h \in H\} \subset G$$

(эта запись аналогична записи $k + n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ смежного класса $[k]$ по модулю n). Одним из смежных классов является подмножество $H \subset G$.

Поскольку умножение в группе G не предполагается коммутативным, мы получим, вообще говоря, другое отношение эквивалентности $\sim'_H$, взяв вместо условия (29) аналогичное ему условие

$$g_2g_1^{-1} \in H \tag{30}$$

Классы эквивалентности $\sim'_H$ называются правыми смежными классами группы G по подгруппе H. Они имеют вид

$$Hg := \{hg|h \in H\}$$

Заметим, что инверсия $g \mapsto g^{-1}$ задает биективное отображение $G \to G$, причем $g_1 \sim_H g_2 \Leftrightarrow g^{-1} \sim'_H g_2^{-1}$. При инверсии разбиение G на левые смежные классы переходит в разбиение G на правые смежные классы, и наоборот. Таким образом, инверсия устанавливает биекцию между множествами левых и правых смежных классов.

Пример 4.73. Пусть $G = \mathbb{R}, H = \mathbb{Z}$. Тогда для $a, b \in \mathbb{R}$

$$a \sim b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{Z}$$

и смежные классы - подмножества в $\mathbb{R}$ вида $a + \mathbb{Z} = \{a + n|n \in \mathbb{Z}\}$.

Пример 4.74. Пусть $G = \mathbb{C}, H = \mathbb{R}$. Тогда для $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$z_1 \sim z_2 \Leftrightarrow z_2 - z_1 \in \mathbb{R}$$

и смежные классы - подмножества в $\mathbb{C}$ вида $z + \mathbb{R}$, то есть прямые, параллельные вещественной оси.

Пример 4.75. Пусть $G = \mathbb{C}^*, H = \mathbb{R}^*_{>0}$. Для $z \in \mathbb{C}^*$ смежный класс есть подмножество $z\mathbb{R}^*_{>0} = \{zr|r \in \mathbb{R}^*_{>0}\}$ в $\mathbb{C}^*$, то есть луч, исходящий из нуля.

Пример 4.76. Смежные классы группы $\mathbb{C}^*$ по подгруппе $\mathrm{U}(1) := \{z \in \mathbb{C}^*||z| = 1\}$ - это концентрические окружности с центром в нуле.

Пример 4.77. Пусть $G = \mathrm{GL_n}(\mathbb{K}), H = \mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$. Тогда условие (29), равно как и (30), означает, что $\det g_1 = \det g_2$. Поэтому левые смежные классы совпадают в данном случае с правыми смежными классами, хотя группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ не абелева; каждый из них представляет собой совокупность всех матриц с определителем, равным некоторому ненулевому элементу из $\mathbb{K}$.

Пример 4.78. В группе $G = S_n$ рассмотрим подгруппу H, состоящую из подстановок, оставляющих на месте число n. Подстановки $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ принадлежат одному левому смежному классу по H, если $\sigma_1^{-1}\sigma_2(n) = n$, то есть если

$$\sigma_1(n) = \sigma_2(n)$$

Следовательно, имеется n левых смежных классов $P_1, P_2, \ldots, P_n$, где

$$P_k = \{\sigma \in S_n|\sigma(n) = k\} \subset S_n$$

В то же время подстановки $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ принадлежат одному правому смежному классу, если $\sigma_2\sigma_1^{-1}(n) = n$, то есть если

$$\sigma_1^{-1}(n) = \sigma_2^{-1}(n)$$

Следовательно, имеется n правых смежных классов $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, где

$$Q_k = \{\sigma \in S_n|\sigma(k) = n\} \subset S_n$$

Мы видим, что при $n > 2$ правые смежные классы отличны от левых, за исключением класса $Q_n = P_n = H$.

Множество левых смежных классов группы G по подгруппе H обозначается через G/H. Число смежных классов группы G по H, если оно конечно, называется индексом подгруппы H в G и обозначается через $[G : H]$.

Теорема 4.79. (теорема Лагранжа)

Пусть G - конечная группа и H - любая ее подгруппа, тогда

$$|G| = [G : H]|H| \tag{31}$$

Proof. □

Все смежные классы gH содержат одно и то же число элементов, равное $|H|$. Поскольку они образуют разбиение группы G (как классы эквивалентности), порядок группы G равен произведению их числа на $|H|$.
Пример 4.80. В примере 4.78 мы видели, что $[S_n : H] = n$, где H - подгруппа в S_n, состоящая из подстановок, которые оставляют n на месте. Ясно, что $H \cong S_{n-1}$. Поэтому формула (31) позволяет вычислить порядок группы S_n индуктивно.

Следствие

4.81. Порядок любой подгруппы конечной группы делит порядок группы.
Мы уже видели это в случае циклических групп (Теорема4.46).

Следствие

4.82. Порядок любого элемента конечной группы делит порядок группы.

Proof. □

Порядок элемента равен порядку порождаемой им циклической подгруппы.

Следствие

4.83. Всякая конечная группа простого порядка является циклической.

Proof. □

Возьмем произвольный элемент $g \neq e$ группы $G, |G| = p$. Тогда по Следствию 4.82 ord g делит p и $\neq 1$; значит, такой элемент имеет порядок p и является порождающим для G.

Задача

4.84. Пусть p - простое число. Найдите в симметрической группе S_p количество подгрупп порядка .

Следствие

4.85. Если $|G| = n$, то $g^n = e$ для любого $g \in G$.

Proof. □

Пусть ord $g = m$. Тогда по Следствию 4.82$m|n$, следовательно, $g^n = e$.

Следствие 4.86. (теорема Эйлера)

Для любого $a \in \mathbb{Z}$, взаимно простого с натуральным $n \in \mathbb{N}$, имеет место сравнение

$$a^{\phi(n)} \equiv 1(\mathrm{mod} n)$$

Proof. □

Рассмотрим кольцо $\mathbb{Z}_n$ классов вычетов по модулю n. Порядок его мультипликативной группы $\mathbb{Z}_n^*$ равен количеству чисел в ряде $1, 2, \ldots, n$, взаимно простых с n, то есть $\phi(n)$ (см. Предложение 5.41 и Следствие из него). По условию $[a] \in \mathbb{Z}_n^*$ и тогда по предыдущему Следствию $[a]^{\phi(n)} = [1]$ в кольце $\mathbb{Z}_n$. Последнее равенство равносильно $\left[a^{\phi(n)} - 1\right] = [0]$, что, в свою очередь равносильно доказываемому сравнению.

Частным случаем предыдущего Следствия является малая теорема Ферма, которая утверждает, что если $a \in \mathbb{Z}$ не делится на простое p, то

$$a^{p-1} \equiv 1(\mathrm{mod} p)$$

Задача

4.87. Пусть $H := S_k \times S_{n-k} \subset S_n =: G$ - подгруппа группъ подстановок (она состоит в точности из тех подстановок, которые подмножество $\{1, 2, \ldots, k\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ переводят в себя). Постройте биекцию между множествами левых смежных классов G по H и k-элементных подмножеств в $\{1, 2, \ldots, n\}$.

3.3.7 4.6 Factor Group and Homomorphism Theorem

Пусть $\varphi : G \to H$ - гомоморфизм групп и $K := \ker \varphi$ - его ядро. Любая ли подгруппа в G может быть ядром гомоморфизма? Оказывается, что если G - неабелева группа, то, вообще говоря, нет. Попробуем разобраться в этом вопросе.

Пусть $g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow \varphi(g_1) = \varphi(g_2)$ - отношение эквивалентности, связанное с отображением φ (см. абзац после Примера 1.22). Имеем:

$$\varphi(g_1) = \varphi(g_2) \Leftrightarrow \varphi\left(g_2 g_1^{-1}\right) = e \Leftrightarrow g_2 g_1^{-1} \in K \Leftrightarrow g_2 \in K g_1$$

С другой стороны,

$$\varphi(g_1) = \varphi(g_2) \Leftrightarrow \varphi\left(g_1^{-1} g_2\right) = e \Leftrightarrow g_1^{-1} g_2 \in K \Leftrightarrow g_2 \in g_1 K$$

Это означает, что если $K \subset G$ - ядро гомоморфизма $\varphi : G \to H$, то разбиения G на левые и правые смежные классы по K совпадают: $\forall g \in G gK = Kg$.

Определение

4.88. Подгруппа $K \subset G$ называется нормалъной (обозначение: $K \triangleleft G$), если $\forall g \in G gK = Kg$. Последнее эквивалентно также условию $\forall g \in G K = gKg^{-1}$.

Тем самым мы доказали такое

Предложение

4.89. Ядро гомоморфизма групп $\varphi : G \to H$ - нормальная подгруппа в G.

В абелевой группе любая подгруппа является нормальной. Пример не нормальной подгруппы в S_n был приведен в Примере 4.78.

Предложение

4.90. В введенных выше обозначениях пусть $h \in \operatorname{Im} \varphi$. Тогда $\varphi^{-1}(h) = g$ для произвольного $g \in G$ такого, что $\varphi(g) = h$.

Доказательство.

$$g' \in \varphi^{-1}(h) \Leftrightarrow \varphi(g') = h = \varphi(g) \Leftrightarrow g' \in gK$$

То есть полные прообразы элементов из образа при гомоморфизме групп являются смежными классами по ядру. В частности, каждый такой прообраз равномощен множеству элементов K. Среди таких прообразов подгруппой в G является только прообраз единичного элемента - это K.

Покажем, что наоборот, любая нормальная подгруппа в G является ядром некоторого гомоморфизма $G \to H$.

Предложение

4.91. Разбиение группы на левые смежные классы по подгруппе K согласовано с операцией в G (см. Определение 1.40) тогда и только тогда, когда $K \triangleleft G$.

Proof. □

Поскольку в нашем случае $g \sim g' \Leftrightarrow g' = gk$ для $k \in K$, нужно доказать, что

$$\{g_1 g_2 \sim g_1 k_1 g_2 k_2 \forall g_1, g_2 \in G, \forall k_1, k_2 \in K\} \Leftrightarrow K \triangleleft G$$

Имеем

$$g_1 g_2 \sim g_1 k_1 g_2 k_2 \Leftrightarrow (g_1 g_2)^{-1} g_1 k_1 g_2 k_2 \in K \Leftrightarrow g_2^{-1} k_1 g_2 k_2 \in K \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow g_2^{-1} k_1 g_2 \in K \Leftrightarrow K = gKg^{-1} \forall g \in G \Leftrightarrow K \triangleleft G.$$

Следствие

4.92. Если $K \triangleleft G$, то

$$g_1 K \cdot g_2 K = (g_1 g_2) K$$

задает корректно определенную операцию на множестве смежных классов G по K.

Proof. □

См. абзац после Определения 1.40.
Легко видеть, что операция на множестве левых смежных классов, определённая в предыдущем Следствии, задает на этом множестве структуру группы (обратным к gK является $g^{-1}K$, нейтральным элементом eK; ассоциативность следует из ассоциативности операции в G). Эта группа называется факторгруппой группы G по подгруппе K и обозначается G/K (как и множество левых смежных классов, но это обычно не приводит к путанице). Данная конструкция обобщает конструкцию группы классов вычетов $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$ на случай произвольной группы G и её нормальной подгруппы K.

Из определения операции в факторгруппе непосредственно следует, что факторотображение

$$\pi : G \to G/K, \quad g \mapsto gK$$

является гомоморфизмом групп. Он называется каноническим гомоморфизмом на факторгруппу.
Следующая теорема показывает, что, по-существу, других сюръективных гомоморфизмов групп кроме канонических, нет.

Теорема 4.93. (Основная теорема о гомоморфизмах групп)

Пусть $\varphi : G \to H$ - сюрбективный гомоморфизм групп с ядром K. Тогда $H \cong G/K$. Более точно, отображение $f : G/K \to H$ заданное формулой $f(gK) = h$, где $h = \varphi(g)$, задаёт изоморфизм групп $G/K \to H$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & H \\ & G/K \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Proof. □

1. Проверим, что отображение f корректно определено. В самом деле, $g'K = gK \Leftrightarrow \varphi(g) = \varphi(g')$.
2. Проверим, что f является гомоморфизмом групп. В самом деле, поскольку если $\varphi(g_i) = h_i, i = 1, 2$, то $\varphi(g_1 g_2) = h_1 h_2$, и мы имеем

$$f(g_1 K \cdot g_2 K) = f((g_1 g_2) K) = h_1 h_2 = f(g_1 K) f(g_2 K)$$

3. Из определения f очевидно, что f сюръективен. Проверим, что f инъективен: если $f(gK) = e$, то $\varphi(g) = e$, то есть $g \in \ker\varphi = K$, откуда $gK = eK$. Значит, f - изоморфизм.

4. Наконец, проверим коммутативность диаграммы. Имеем

$$f(\pi(g)) = f(gK) = \varphi(g)$$

Практическое значение доказанной теоремы заключается, в частности, в том, что она позволяет находить, какой группе изоморфна факторгруппа. Всё что для этого нужно - найти сюръективный гомоморфизм с подходящим ядром (см. примеры ниже).

Заметим, что если G - конечная группа, то в предыдущих обозначениях $|G| = |H||K|$. Заметим также, что для произвольного гомоморфизма $\varphi : G \to H$ его ограничение $\varphi' : G \to \operatorname{Im}\varphi$ на образ сюръективно, поэтому если в предыдущей теореме заменить H на $\operatorname{Im}\varphi$, то она будет верна для произвольного (не обязательно сюръективного) гомоморфизма φ.

Пример 4.94. Поскольку существует сюръективный гомоморфизм $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n, k \mapsto [k]$ с ядром $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$, то $\mathbb{Z}/(n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_n$.

Пример 4.95. Аналогично, сюръективный гомоморфизм $\mathbb{R} \to \mathrm{U}(1)$ с ядром $\mathbb{Z}$ из Примера 4.14 показывает, что $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong \mathrm{U}(1)$.

Пример 4.96. $S_n/A_n \cong \{\pm 1\}$ (см. Предложение 4.51).

Пример 4.97. Пусть $T_n(\mathbb{K}), UT_n(\mathbb{K}), D_n(\mathbb{K})$ - группы невырожденных верхних треугольных матриц, невырожденных верхних унитреугольных матриц (т.е. верхних треугольных с единицами на главной диагонали) и невырожденных диагональных матриц соответственно над полем $\mathbb{K}$. Тогда читатель легко проверит, что сопоставление верхней треугольной матрице диагональной матрицы, диагональные элементы которой совпадают с соответствующими элементами треугольной матрицы, задает гомоморфизм групп $T_n(\mathbb{K}) \to D_n(\mathbb{K})$. Его ядром является подгруппа $UT_n(\mathbb{K})$. Значит, она нормальна в $T_n(\mathbb{K})$ и $T_n(\mathbb{K})/UT_n(\mathbb{K}) \cong D_n(\mathbb{K})$

Вопрос читателю: будет ли подгруппа $D_n(\mathbb{K})$ нормальна в $T_n(\mathbb{K})$?

Пример 4.98. Пусть $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*$ - гомоморфизм, определенный в Примере 4.15. Его ядром является подгруппа в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, состоящая из матриц с определителем

1. Она называется специальной линейной группой и обозначается $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$. Имеем $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^*$.
Пример 4.99. Читатель, решивший Задачу 4.66, построил сюръективный гомоморфизм $S_4 \to S_3$. Его ядро состоит из перестановок $\{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ и имеет классическое обозначение V_4. Таким образом, $S_4/V_4 \cong S_3$.

Вообще, нормальные подгруппы в S_n можно искать с помощью описания классов сопряженных элементов в S_n, данном в Предложении 4.58.

Предложение

4.100. Если $N \triangleleft G$, то N либо целиком содержит класс сопряженных элементов в G, либо не пересекается с ним. (Иными словами, N является объединением некоторого множества классов сопряженных элементов в G). Наоборот, если объединение некоторых классов сопряженных элементов является подгруппой, то эта подгруппа нормальна.

Proof. □

Если $N \triangleleft G$, и $n \in N$, то $gng^{-1} \in N \forall g \in G$ или, эквивалентно, $[n] \subseteq N$, где $[n] := \{gng^{-1} | g \in G\}$ есть класс сопряженности n. Отсюда

$$N = \bigcup_{n \in N} [n] \tag{32}$$

Обратно, если N - подгруппа в G, удовлетворяющая (32), то для любых $n \in N$ и $g \in G gng^{-1} \in N$, и значит $N \triangleleft G$.

Найдем теперь все нормальные подгруппы в S_4. Пусть $N \triangleleft S_4$; тогда по предыдущему N является объединением каких-то классов сопряженных элементов в S_4. Перечислим эти классы, указывая по представителю:

$$1)\ e, 2)(12), 3)(12)(34), 4)(123), 5)(1234)$$

Мощности этих классов соответственно $1, 6, 3, 8, 6$. Таким образом, $|N| = 1 + 6\alpha + 3\beta + 8\gamma + 6\delta$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{0, 1\}$. Кроме того, по теореме Лагранжа, $|N|||S_4\ \ |= 24$. Легко проверить, что этому условию удовлетворяют наборы $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \{(0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$, причем первый и последний отвечают тривиальной подгруппе и всей группе. Третий набор приводит к знакопеременной группе, поскольку входящие в него классы состоят в точности из четных перестановок. Второй набор соответствует V_4 из предыдущей задачи: легко проверяется, что $\{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ - подгруппа в S_4, а значит она нормальна.

Впрочем, набор нормальных подгрупп в группах S_n весьма беден: согласно классическому результату Э. Галуа, при $n \geq 5$ в S_n помимо тривиальных подгрупп (равных $\{e\}$ или самой группе) нормальной является только подгруппа A_n.

Заметим, что есть нетривиальные ($\neq \{e\}$) группы, называемые простыми, у которых нет нетривиальных нормальных подгрупп. Любой гомоморфизм из такой группы является либо тривиальным (все
переводит в e), либо вложением (т.е. инъективным). Среди конечных абелевых групп это в точности группы простого порядка (см.

Следствие

4.81), они вообще не содержат нетривиальных подгрупп. Существует также бесконечно много неабелевых простых групп (например, группы A_n при $n \geq 5$ простые, что тесно связано с неразрешимостью в радикалах алгебраических уравнений степени ≥ 5). Многие специалисты в теории конечных групп считают, что к настоящему моменту получена полная классификация простых конечных групп.

Для полноты картины вернемся к вопросу об описании отношений эквивалентности на множестве элементов группы, согласованных с групповой операцией. Выше мы видели, что отношение сравнимости по модулю нормальной подгруппы согласовано с операцией в группе.

Предложение

4.101. Пусть G - произвольная группа. Любое отношение эквивалентности, согласованное с операцией в G является отношением сравнимости по модулю некоторой нормальной подгруппы $K \triangleleft G$.

Proof. □

Пусть $\sim$ - отношение эквивалентности на множестве G, согласованное с групповой операцией. Пусть $K \subset G$ - класс эквивалентности нейтрального элемента $e \in G$. Покажем, что K - нормальная подгруппа в G и $\sim$ совпадает с отношением сравнимости по модулю K.

1. Докажем, что K - подгруппа в G. Из согласованности отношения эквивалентности с групповой операцией

$$g_1 \sim e, g_2 \sim e \Rightarrow g_1 g_2 \sim ee = e$$

поэтому K замкнуто относительно операции. Если $g \sim e, e = g^{-1}g \sim g^{-1}e = g^{-1}$, а значит из $g \in K$ следует $g^{-1} \in K$. Кроме того, $e \in K$. Значит, K - подгруппа в G.
2. Для любого $k \in K$ и $g \in G$ имеем $gkg^{-1} \sim geg^{-1} = e$, откуда $gKg^{-1} = K \forall g \in G$, поэтому $K \triangleleft G$.
3. Наконец, то, что $\sim$ совпадает с отношением сравнимости по модулю K, следует из цепочки эквивалентностей

$$g' \sim g \Leftrightarrow g^{-1}g' \sim e \Leftrightarrow g^{-1}g' \in K \Leftrightarrow g' \in gK$$

3.3.8 4.7 Direct Products (direct Sums) of Groups

Познакомимся вкратце с простейшим способом конструирования новых групп из уже имеющихся, называемым прямым произведением групп.

Определение

4.102. Пусть $(G, \cdot)$ и $(H, *)$ - две группы. Их прямым произведением называется множество $G \times H$ с покомпонентной операцией

$$(g_1, h_1) \circ (g_2, h_2) = (g_1 \cdot g_2, h_1 * h_2)$$

Как обычно, в дальнейшем мы будем опускать явные обозначения операций. Ясно, что $G \times H$ является группой: нейтральным элементом является $e_{G \times H} = (e_G, e_H)$; обратным $(g, h)^{-1} = (g^{-1}, h^{-1})$.

Предложение

4.103. Если элементы $g \in Guh \in H$ имеют конечные порядки, то $\mathrm{ord}(g, h) = \text{НОК}(\mathrm{ord}(g), \mathrm{ord}(h))$

Proof. □

Упражнение.
Зададимся теперь вопросом: как понять, что данная группа P изоморфна прямому произведению двух каких-то групп $G, H \neq \{e\}$? Ведь если это так, то изучение P может быть сведено к изучению "более элементарных" групп G и H.

Заметим, что существуют инъективные гомоморфизмы

$$i_G : G \to G \times H, \quad i_G(g) = (g, e_H)$$

$$i_H : H \to G \times H, \quad i_H(h) = (e_G, h)$$

Пусть $G' := \operatorname{Im} i_G, H' := \operatorname{Im} i_H$. Тогда G' и H' - подгруппы группы $P := G \times H$, изоморфные G и H соответственно и обладающие следующими легко проверяемыми свойствами:

1. $\forall p \in P \exists g' \in G', h' \in H'$ такие, что $p = g'h'$;
2. $G' \cap H' = e_P$
3. $g'h' = h'g' \forall g' \in G', h' \in H'$.

Заметим, что из свойств 1) и 2) следует, что для любого $p \in P$ представление в виде произведения $g'h'$, где $g' \in G', h' \in H'$, единственно. (В самом деле, если $g'h' = gh$, то $g^{-1}g' = hh'^{-1} \in G' \cap H' = e$)

Пусть теперь нам дана группа P, в которой есть подгруппы G, H, удовлетворяющие приведённым выше условиям 1), 2), 3). Покажем, что тогда $P \cong G \times H$.

Зададим отображение $\varphi : G \times H \to P$ формулой $\varphi(g, h) = gh$ (где справа стоит произведение элементов g, h в группе P). Проверим, что φ - гомоморфизм:

$$\varphi\left(\left(g_1, h_1\right)\left(g_2, h_2\right)\right) = \varphi\left(g_1 g_2, h_1 h_2\right) = g_1 g_2 h_1 h_2 = g_1 h_1 g_2 h_2 = \varphi\left(g_1, h_1\right) \varphi\left(g_2, h_2\right)$$

(где мы воспользовались условием 3)). Инъективность φ теперь следует из условия 2), в то время как сюръективность - из условия 1).

Тем самым мы доказали следующее

Предложение

4.104. Группа P изоморфна прямому произведению своих подгрупп G' и H' тогда и только тогда, когда выполнены условия 1) - 3).

Пример 4.105. Из существования и единственности показательной записи ненулевого комплексного числа следует, что группа $\mathbb{C}^*$ является прямым произведением групп $\mathrm{U}(1)$ и $\mathbb{R}^*_{>0}$.[26]

Пример 4.106. В группе S_3 есть подгруппы $\langle(12)\rangle$ и $\langle(123)\rangle$ порядков 2 и 3 соответственно. Их пересечение, очевидно, тривиально, но S_3 не представляется в виде их прямого произведения, поскольку иначе она была бы абелева. Какое из условий предыдущего Предложения при этом нарушается?

Пример 4.107. Группа $T_n(\mathbb{K})$ не является прямым произведением своих подгрупп $UT_n(\mathbb{K})$ и $D_n(\mathbb{K})$ (см. Пример 4.97).

Если A, B - аддитивные абелевы группы, то их прямое произведение называется также прямой суммой и обозначается $A \oplus B$.

Задача

4.108. Докажите, что группа $\mathbb{Z}$ не может быть разложена в прямую сумму двух ненулевых подгрупп.

Задача

4.109. Докажсте, что группа $\mathbb{Z}$ не изоморфна $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Не следует думать, что все подгруппы в $G \times H$ имеют вид $K \times L$, где $K \subset G, L \subset H$.

Задача

4.110. Сколько подгрупп в группе $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$, где p - простое число?

Представляются ли какие-либо циклические группы нетривиальным образом в виде прямой суммы? Для бесконечной циклической группы $\mathbb{Z}$ выше мы получили отрицательный ответ.

Предложение

4.111. Группа $\mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}_l$ является циклической тогда и только тогда, когда $(k,l) = 1$.

Proof. □

Пусть $(k,l) = 1$. Тогда по Предложению 4.103 элемент $([1]_k, [1]_l) \in \mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}_l$ имеет порядок kl, равный порядку прямой суммы, а значит прямая сумма - циклическая группа.

Другой способ доказательства: обозначим для упрощения обозначений $n := kl$ и рассмотрим отображение

$$\varphi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}_l, \quad \varphi([a]_n) = ([a]_k, [a]_l)$$

Во-первых, φ корректно определено, поскольку если $n \mid (a' - a)$, то $k \mid (a' - a)$ и $l \mid (a' - a)$. Во-вторых, φ является гомоморфизмом:

$$\varphi([a]_n + [b]_n) = \varphi([a+b]_n) = ([a+b]_k, [a+b]_l) = ([a]_k + [b]_k, [a]_l + [b]_l) = \\ = ([a]_k, [a]_l) + ([b]_k, [b]_l) = \varphi([a]_n) + \varphi([b]_n)$$

В-третьих, гомоморфизм φ инъективен: если $[a]_n \in \ker\varphi$, то $k|a$ и $l|a$, а поскольку $(k,l) = 1$, то $kl = n|a$. Тогда, поскольку порядки групп $\mathbb{Z}_n$ и $\mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}_l$ равны, то φ является изоморфизмом, а значит $\mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}_l$ - циклическая группа.

Пусть теперь $(k,l) = d > 1$. Тогда НОК$(k,l) = \frac{kl}{d}$. Мы знаем, что порядок d_1 элемента из $\mathbb{Z}_k$ является делителем k, а порядок d_2 элемента из $\mathbb{Z}_l$ является делителем l, поэтому порядок элемента из $\mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}_l$, равный НОК$(d_1, d_2)$, является делителем $\frac{kl}{d} < kl$. То есть в группе $\mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}_l$ нет элементов порядка kl, а значит она не является циклической.

Понятия прямого произведения и прямой суммы можно распространить на любое конечное число слагаемых. Сделаем это для прямой суммы.

Пусть A - аддитивная абелева группа. Она раскладывается в прямую сумму своих подгрупп $A_1, A_2, \dots, A_s$, если любой ее элемент $a \in A$ однозначно представляется в виде $a_1 + a_2 + \ldots + a_s$, где $a_i \in A_i, i = 1, \dots, s$. При этом пишут $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_s$. Такая группа изоморфна группе, элементами которой являются последовательности $(a_1, a_2, \dots, a_s), a_i \in A_i$, с покомпонентной операцией сложения. Если группы $A_1, A_2, \dots, A_s$ конечны, то $|A| = |A_1|\,|A_2| \ldots |A_s|$.

Предложение

4.112.

Пусть $n = n_1 n_2 \ldots n_s$, где натуральные числа $n_1, n_2, \dots, n_s$ попарно взаимно просты. Тогда отображение

$$\varphi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{n_s}, \quad [a]_n \mapsto ([a]_{n_1}, [a]_{n_2}, \dots, [a]_{n_s})$$

является изоморфизмом групп.

Proof. Упражнение. □

Следствие

4.113. Если $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_s^{k_s}$ - разложение натурального n на различные простые множители, то

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{k_2}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_s^{k_s}}$$

Например,

$$\mathbb{Z}_{60} \cong \mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_5 \cong \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_{15} \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{20} \cong \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5$$

[026] Любопытно отметить, что группы $\mathbb{C}^*$ и U(1) изоморфны.

В то же время, например, $\mathbb{Z}_{60} \not\subseteq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{30}$.

Примарной циклической группой называется циклическая группа, порядок которой является степенью простого числа.

Задача

4.114. Докажите, что примарная циклическая группа не может быть разложена в прямую сумму двух ненулевых подгрупп.

В заключении параграфа сформулируем чрезвычайно важную и полезную для приложений теорему, описывающую все конечные абелевы группы.

Теорема

4.115. Любая конечная абелева группа раскладывается в прямую сумму примарных циклических подгрупп, причем набор порядков этих подгрупп определен однозначно.

Например, с точностью до изоморфизма, существует ровно 3 абелевы группы порядка 24, это:

$$\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_3, \quad \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3, \quad \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$$

первая из них является циклической.

Существуют и другие помимо прямой суммы способы построения новых групп из уже имеющихся, например, конструкция полупрямого произведения, с которой мы встретимся при изучении группы аффинных преобразований. (Другие примеры полупрямых произведений дают примеры 4.106 и 4.107).

3.3.9 4.8 A few Words About Topological Groups

В различных приложениях часто требуются группы с дополнительной структурой, такие как топологические группы или группы Ли. Попробуем коротко объяснить что это такое, отсылая читателя за подробностями к дополнительной литературе. Для этого вернемся к исходным определениям.

Напомним, что группа - множество с заданной на нем бинарной операцией, удовлетворяющей определенным аксиомам. На множествах помимо алгебраических операций могут быть заданы структуры других типов - например, мы встречались с отношениями эквивалентности. Если на одном и том же множестве заданы две такие структуры - скажем, бинарная операция и отношение эквивалентности, то возникает вопрос, что означает условие их согласования. Для бинарной операции и отношения эквивалентности мы знаем ответ.

Допустим, что на множестве G заданы структуры группы и топологического пространства. Что означает, что эти две структуры согласованы? Поскольку задание структуры группы эквивалентно заданию двух отображений

$$G \times G \to G, \quad (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2 \quad \text{и} \quad G \to G, \quad g \mapsto g^{-1} \tag{33}$$

с требуемыми свойствами, а отображения, согласованные с топологией - в точности непрерывные отображения, то естественным требованием согласования двух этих структур является условие непрерывности данных отображений (при этом, естественно, на множестве $G \times G$ рассматривается топология произведения). Это и есть определение топологической группы.

Определение

4.116. Топологической группой называется группа G, одновременно являющаяся топологическим пространством, такая что операции умножения и взятия обратного (33) являются непрерывными.

Соответствующим образом модифицируется и понятие гомоморфизма между топологическими группами, а именно рассматриваются только такие гомоморфизмы $\varphi : G \to H$, которые одновременно являются непрерывными отображениями.

Пример 4.117. Любая группа является топологической, если задать на ней дискретную топологию.

Пример 4.118. Пусть на $\mathbb{R}$ рассматривается стандартная топология. Тогда $(\mathbb{R}, +)$ - топологическая группа. То же, конечно, верно для $(\mathbb{C}, +)$.

Пример 4.119. Группу $\mathrm{U}(1) = \{z \in \mathbb{C} || z |= 1\}$ рассмотрим с топологией, индуцированной вложением $\mathrm{U}(1) \subset \mathbb{C}$ (на $\mathbb{C}$ топология стандартная). Тогда $\mathrm{U}(1)$ - топологическая группа. Более того, ранее рассмотренный гомоморфизм $\varphi : \mathbb{R} \to \mathrm{U}(1), \varphi(x) = e^{2\pi i x}$, является гомоморфизмом топологических групп.

Пример 4.120. Группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (или $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$) является топологической группой относительно топологии, индуцированной вложением $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$. Это следует из того, что матричные элементы произведения матриц $C = AB$ (соответственно обратной матрицы A^{-1}) непрерывно зависят от матричных элементов сомножителей A и B (соответственно от матричных элементов матрицы A). По тем же причинам топологическими группами будут также $\mathrm{O}(n), \mathrm{SO}(n)$ (соотв. $\mathrm{U}(n), \mathrm{SU}(n)$).

При этом, например, отображение $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^* (= \mathrm{GL}_1(\mathbb{R}))$ является гомоморфизмом топологических групп.

Две топологические группы могут быть изоморфны как абстрактные группы, но не как топологические группы. В качестве примера можно привести $\mathbb{C}^*$ и $U(1)$, рассматриваемые как топологические группы с топологией, индуцированной вложением в $\mathbb{C}$. Они не могут быть изморфны как топологические группы, поскольку вторая из них компактна как топологическое пространство, а первая - нет.

Наоборот, например, на топологическом пространстве $\mathbb{R}^3$ сразу видно две неизоморфные структуры топологической группы: одна - аддитивная группа трехмерного вещественного векторного пространства, другая - группа матриц

$$UT_3(\mathbb{R}) := \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \middle| \, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Любопытно, что структуру топологической группы можно ввести не на любом топологическом пространстве. Например, этого нельзя сделать на двумерной (более общо, четномерной) сфере S^2. Это связано с тем, что S^2 - линейно связное компактное многообразие, эйлерова характеристика которого отлична от нуля. В то же время на одномерной сфере (как показывает пример группы $U(1)$) и на трехмерной сфере (группа $\mathrm{SU}(2)$) структуру топологической группы (и даже группы Ли) ввести можно.

Пример $\mathrm{SO}(3)$ как топологической группы мы рассмотрим подробнее ниже в главе 14.

Определение группы Ли похоже на определение топологической группы, только вместо структуры топологического пространства на G рассматривается структура гладкого многообразия, и условие ее согласования со структурой группы заключается в том, что отображения, задающие умножение в группе и взятие обратного, должны быть гладкими. Группы Ли допускают в некотором смысле линеаризацию, называемую алгебрами Ли, что сильно облегчает их изучение по сравнению с топологическими группами. Например, известный нам пример алгебры Ли - трехмерное ориентированное евклидово пространство с операцией векторного произведения - является алгеброй Ли групп $\mathrm{SO}(3)$ и $\mathrm{SU}(2)$[27]. Группы из приведенных выше примеров имеют структуру групп Ли. Например, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, будучи открытым подмножеством в пространстве $\mathbb{R}^{n^2}$, является гладким многообразием. Важный для физики пример группы Ли - группа Лоренца.

Как правило, в приложениях группы (в частности, группы Ли) реализуются обратимыми линейными преобразованиями, которые действуют на каком-то линейном пространстве (скажем, на пространстве состояний квантовой системы).

Определение

4.121. Вещественным (комплексным) линейным представлением группы G называется пара (ρ, V), где V - линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ (соотв. $\mathbb{C}$), а $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(V)$ -

гомоморфизм групп (в случае топологической группы G непрерывный).

Читатель может построить вещественное линейное представление группы симметрий треугольника D_3 в двумерном евклидовом пространстве, записав симметрии треугольника матрицами относительно фиксированного базиса.
С началами теории представлений можно познакомиться по книге [6] или более полно по [12] и [22].

3.4 5 Rings, Fields

3.4.1 5.1 Reversible Elements and Zero Dividers

В этом параграфе R - ассоциативное кольцо с единицей.
Элемент $a \in R$ называется обратимым, если существует $a^{-1} \in R$ такой, что $aa^{-1} = 1 = a^{-1}a$.

Предложение

5.1. Пусть R - ассоциативное кольцо с единицей. Тогда множество обратимых (по умножению) элементов R^* в R образует группу по умножению.

Proof. □

Упражнение.
Пример 5.2. Если $R = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$, то группа R^* обратимых матриц обозначается $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
Пример 5.3. $\mathbb{K}[x]^* = \mathbb{K}^*$ (этот факт читатель может сейчас доказать в качестве упражнения; мы докажем его в следующем параграфе).
Пример 5.4. $\mathbb{Z}^* = \{\pm 1\}$.
Пример 5.5. Элемент $[a] \in \mathbb{Z}_n$ обратим тогда и только тогда, когда $(a, n) = 1$ (см. Предложение 5.41). Поэтому группа $\mathbb{Z}_n^*$ имеет порядок $\phi(n)$. Группа $\mathbb{Z}_n^*$ может быть как циклической (например, при $n = p^k, p \neq 2$), так и не циклической (например, при $n = 2^k, k \geq 3$).
Элемент $a \in R, a \neq 0$ называется левым делителем нуля, если существует $b \in R, b \neq 0$ такой, что $ab = 0$. Аналогично определяются правые делители нуля. Ясно, что в коммутативном кольце нет разницы между левыми и правыми делителями нуля.
Например, кольцо $C[0,1]$ непрерывных функций на отрезке $[0,1]$ имеет делители нуля. Пусть ненулевая функция $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ равна нулю на $[1/3, 1] \subset [0,1]$, другая ненулевая функция $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ равна нулю на $[0, 2/3]$; тогда, очевидно, $fg = 0$.
Если $a \in R$ не является левым делителем нуля, то из $ab = ac$ следует $b = c$. (В самом деле, перенося все в левую часть получаем $a(b - c) = 0$). Аналогично на элементы, не являющиеся правыми делителями нуля, можно сокращать справа.

Предложение

5.6. Обратимый элемент не может быть делителем нуля.

Proof. □

Пусть a обратим, тогда если $ab = 0 \Rightarrow a^{-1}ab = b = 0$.
Обратное неверно: например, в кольце $\mathbb{Z}$ нет делителей нуля, а обратимы только ± 1.
Поскольку в поле по определению любой ненулевой элемент обратим, в поле нет делителей нуля.
Среди делителей нуля встречаются нильпотенты - это такие элементы $a \in R, a \neq 0$, для которых существует натуральное n такое, что $a^n = 0$. Например, в кольце матриц порядка

[027] Хотя эти группы не изоморфны, они "локально изоморфны" и поэтому имеют изоморфные линеаризации.

n нильпотентными являются верхние нильтреугольные матрицы - верхнетреугольные матрицы, у которых на главной диагонали стоят нули.

Задача

5.7. Найдите обратимые элементы, делители нуля и нильпотентные элементы в кольиах: a) $\mathbb{Z}_{p^k}$; b) $\mathbb{Z}_n$; c) в кольце $\mathrm{T}_n(\mathbb{K})$ верхних треугольных матриц порядка n над полем $\mathbb{K}$.

3.4.2 5.2 Ring of Polynomials Above the Field

Пусть $\mathbb{K}$ - произвольное поле. Рассмотрим счетномерное векторное пространство V над $\mathbb{K}$, базисом в котором являются символы $\{e_0, e_1, e_2, \dots\} = \{e_i | i \in \mathbb{N} \cup 0\}$. Таким образом, элементами V являются выражения $\sum\limits_i a_i e_i, a_i \in \mathbb{K}$, в которых $a_i \neq 0$ только для конечного множества индексов i.

Зададим правило умножения базисных элементов $e_k e_l = e_{k+l}$ и продолжим его по билинейности на конечные линейные комбинации:

$$\sum_i a_i e_i \sum_j b_j e_j = \sum_{i,j} a_i b_j e_{i+j} = \sum_k \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) e_k = \sum_k c_k e_k \tag{34}$$

Тем самым мы определили некоторую алгебру над полем $\mathbb{K}$. Она ассоциативна, коммутативна и имеет единицу e_0. Первые два свойства следуют из ассоциативности $(e_k e_l)\, e_m = e_k\, (e_l e_m)\, (= e_{k+l+m})$ и коммутативности $e_k e_l = e_{k+l} = e_l e_k$ произведения базисных векторов.

Заметим, что $e_k = (e_1)^k$ при $k \in \mathbb{N} \cup 0$. Обозначим $x := e_1, 1 := e_0$; тогда базис в V есть $\{1, x, x^2, \dots\}$ и конечные линейные комбинации имеют вид обычных многочленов $\sum\limits_i a_i x^i$ с привычным законом умножения многочленов.

Построенная нами алгебра $(V, +, \cdot)$ называется алгеброй многочленов над полем $\mathbb{K}$. Обычно она обозначается $\mathbb{K}[x]$ (где x - обозначение "переменной").

Заметим, что $\mathbb{K}$ можно рассматривать как подалгебру в $\mathbb{K}[x]$, состоящей из многочленов, для которых $a_1 = a_2 = \ldots = 0$ (т.е. "констант").

Note.

5.8. Кстати, похожую конструкцию можно применить к группе. Пусть G, скажем, конечная группа. Рассмотрим линейное пространство V над $\mathbb{K}$, базис которого занумерован элементами группы, $\{e_g | g \in G\}$. Базисные элементы будем перемножать в соответствии с групповым законом: $e_g e_h = e_{gh}$. Продолжим по билинейности умножение базисных элементов на линейные комбинации:

$$\left(\sum_{g \in G} a_g e_g \right) \left(\sum_{h \in G} b_h e_h \right) = \sum_{g,h \in G} (a_g b_h e_{gh}) =$$
$$= \sum_{t \in G} \left(\sum_{(g,h): gh=t} a_g b_h \right) e_t = \sum_{t \in G} \left(\sum_{g \in G} a_g b_{g^{-1}t} \right) e_t \tag{35}$$

(здесь мы положили $t = gh$, тогда $h = g^{-1}t$, и воспользовались тем, что когда g пробегает элементы G, пары $(g, g^{-1}t)$ пробегают пары (g, h) такие, что $gh = t$). Тогда мы получим пример ассоциативной (коммутативной если группа коммутативна) алгебры с единицей e_e, которая называется групповой алгеброй и обозначается $\mathbb{K}[G]$. Алгебра многочленов получается аналогичной конструкцией, если вместо группы взять полугруппу неотрицательных целых чисел по сложению.

Можно немного изменить обозначения и вместо выражений $\sum\limits_g a_g e_g$ рассматривать соответствующие функции $a : G \to \mathbb{K}, a(g) = a_g$. Тогда групповая алгебра $\mathbb{K}[G]$ состоит из всех функций $a : G \to \mathbb{K}$ с операцией умножения $a * b = c$, где $c(t) = \sum\limits_{g \in g} a(g) b\left(g^{-1} t\right)$ (ср. (5.8)), называемой свёрткой.

Аналогично, многочленом можно называть финитную функцию $a : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{K}$, причем произведением многочленов a и b является свертка $a * b = c$, где $c(n) = \sum\limits_{i+j=n} a(i) b(j), n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (ср. формулу (34)).

Вернемся к многочленам. В многочлене $f(x) = \sum\limits_i a_i x^i$ числа $a_0, a_1, a_2 \ldots$ называются коэффициентами многочлена. Если $f \neq 0$, то $\max\{k | a_k \neq 0\}$ называется степенью многочлена f и обозначается $\deg f$, а сам ненулевой коэффициент a_k с максимальным k называется старшим коэффициентом многочлена f. Положим степень нулевого многочлена равной $-\infty$ (что логично, поскольку $-\infty$ - точная верхняя грань пустого подмножества в $\mathbb{R}$).

Легко видеть, что

$$\deg(f+g) \leq \max\{\deg f, \deg g\}$$
$$\deg fg = \deg f + \deg g$$

Например, второе равенство следует из того, что старший коэффициент произведения многочленов является произведением старших коэффициентов сомножителей, а в поле нет делителей нуля.

В качестве следствия получаем, что в алгебре многочленов над полем нет делителей нуля, а также что обратимыми элементами в $\mathbb{K}[x]$ являются только многочлены нулевой степени, то есть ненулевые элементы поля $\mathbb{K}$.

Аналогично алгебре многочленов от одной переменной $\mathbb{K}[x]$ можно определить алгебру многочленов от n переменных $\mathbb{K}\left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right]$. Для этого рассмотрим векторное пространство V над $\mathbb{K}$ с базисом $e_{k_1 k_2 \ldots k_n}, k_i \geq 0$. Зададим правило умножения базисных векторов

$$e_{k_1 k_2 \ldots k_n} e_{l_1 l_2 \ldots l_n} = e_{k_1+l_1 k_2+l_2 \ldots k_n+l_n}$$

и продолжим его по билинейности на их конечные линейные комбинации. Ясно, что определенное таким образом умножение ассоциативно, коммутативно и $e_{00\ldots0}$ играет роль единицы. Обозначая $x_1 := e_{10\ldots0}, x_1 := e_{010\ldots0}, \ldots, x_n := e_{00,\ldots01}$, получаем $e_{k_1 k_2 \ldots k_n} = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$ и приходим к обычной записи многочлена от n переменных

$$f = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n \geq 0} a_{k_1 k_2 \ldots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$$

в которой только конечное число коэффициентов $a_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ отлично от нуля.

Заметим, что многочлен от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ однозначно записывается как многочлен от x_n с коэффициентами из $\mathbb{K}\left[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\right]$, откуда получается изоморфизм колец

$$\mathbb{K}\left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right] \cong \mathbb{K}\left[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\right]\left[x_n\right] \tag{36}$$

Note.

5.9. Рассуждение, с помощью которого мы доказали отсутствие делителей нуля в $\mathbb{K}[x]$ обобщается на случай, когда вместо поля $\mathbb{K}$ рассматривается произвольное коммутативное кольцо с единицей и без делителей нуля R: в этом случае кольцо $R[x]$ также не имеет делителей нуля. Используя это наблюдение вместе с изоморфизмом (36) и индукцией по числу переменных n, можно доказать, что кольцо $\mathbb{K}\left[x_1, x_2, \ldots, x_n\right]$ не имеет делителей нуля.

Каждый многочлен

$$f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \in \mathbb{K}[x]$$

определяет функцию на $\mathbb{K}$ со значениями в $\mathbb{K}$, значение которой в точке $c \in \mathbb{K}$ по определению равно

$$f(c) = a_0 + a_1c + a_2c^2 + \ldots + a_nc^n$$

Легко видеть, что сопоставление $f \mapsto f(c)$ определяет гомоморфизм алгебр (в частности, колец) $\alpha_c : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}$, то есть

$$(f+g)(c) = f(c) + g(c), \quad (fg)(c) = f(c)g(c), \quad (\lambda f)(c) = \lambda f(c)$$

В частности, для каждого $c \in \mathbb{K}$ мы получаем свой гомоморфизм α_c.
Если поле $\mathbb{K}$ бесконечно, то, как свидетельствует следующая Теорема, отождествление многочленов с определяемыми ими функциями на $\mathbb{K}$ не приводит к потере информации. Например, $\mathbb{R}[x]$ можно рассматривать как подалгебру в алгебре $C(\mathbb{R})$ вещественнозначных непрерывных функций на вещественной прямой. Но в случае конечного поля $\mathbb{K}$ разные многочлены могут задавать одну и ту же функцию, например, многочлены x и x^2 над полем $\mathbb{Z}_2$. Именно по этой причине мы в начале этого параграфа дали "алгебраическую" конструкцию алгебры многочленов $\mathbb{K}[x]$ без упоминания функций.

Теорема

5.10. Если поле $\mathbb{K}$ бесконечно, то разные многочлены над $\mathbb{K}$ определяют разные функции.

Proof. □

Приведем доказательство, основанное на идеях линейной алгебры; другое доказательство мы получим как следствие Теоремы 5.14.

Итак, пусть многочлены $f, g \in \mathbb{K}[x]$ определяют одну и ту же функцию. Тогда их разность $h := f - g$ определяет нулевую функцию, то есть $h(c) = 0 \forall c \in \mathbb{K}$. Предположим, что $h \neq 0$ и пусть

$$h = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} \quad (a_{n-1} \neq 0)$$

Возьмем различные $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ (здесь используется бесконечность поля $\mathbb{K}$). Совокупность верных равенств

$$\begin{cases} a_0 + a_1c_1 + a_2c_1^2 + \ldots + a_{n-1}c_1^{n-1} = 0 \\ a_0 + a_1c_2 + a_2c_2^2 + \ldots + a_{n-1}c_2^{n-1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 + a_1c_n + a_2c_n^2 + \ldots + a_{n-1}c_n^{n-1} = 0 \end{cases} \tag{37}$$

будем рассматривать как квадратную систему линейных однородных уравнений относительно $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Определитель матрицы коэффициентов этой системы есть определитель Вандермонда и потому отличен от нуля. Следовательно, система имеет только нулевое решение, что противоречит нашему предположению.

Note.

5.11. Даже если поле $\mathbb{K}$ конечно, множество всех многочленов над $\mathbb{K}$ бесконечно (но счетно). Однако множество всех функций на $\mathbb{K}$ со значениями в $\mathbb{K}$ в этом случае конечно, и поэтому обязательно должны существовать разные многочлены, определяющие одну и ту же функцию. Тем не менее предыдущая Теорема и ее доказательство остаются в силе для многочленов, степень которых меньше числа элементов поля $\mathbb{K}$.

Перейдем к делению многочлена на ненулевой многочлен с остатком.

Теорема

5.12. Пусть $f, g \in \mathbb{K}[x]$, причем $g \neq 0$. Тогда существуют такие многочлены q и r, что $f = qg + r$ и либо $r = 0$, либо $\deg r < \deg g$. Многочлены q и r определены этими условиями однозначно.

Proof. □

1) Докажем возможность деления с остатком. Если $\deg f < \deg g$, то можно взять $q = 0, r = f$. Если $\deg f \geq \deg g$, то q и r находятся обычной процедурой "деления уголком". А именно, пусть

$$f = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_0$$
$$g = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} x + b_m$$

где $a_0, b_0 \neq 0$. Рассмотрим многочлен

$$f_1 = f - \frac{a_0}{b_0} x^{n-m} g$$

Его степень меньше, чем степень многочлена f. Если $\deg f_1 < \deg g$, то можно взять

$$q = \frac{a_0}{b_0} x^{n-m}, \quad r = f_1$$

В противном случае поступаем с многочленом f_1 так же, как с f. В конце концов мы получим такой многочлен

$$q = c_0 x^{n-m} + c_1 x^{n-m-1} + \ldots + c_{n-m}$$

что $\deg(f - qg) < \deg g$. Это и будет неполное частное от деления f на g, а многочлен $r = f - qg$ будет остатком.
2) Докажем, что многочлены q и r определены условиями теоремы однозначно. Пусть

$$f = q_1 g + r_1 = q_2 g + r_2$$

где $\deg r_1 < \deg g$ и $\deg r_2 < \deg g$. Тогда

$$r_1 - r_2 = (q_2 - q_1)\, g$$

и, если $q_1 \neq q_2$, то

$$\deg (r_1 - r_2) = \deg (q_2 - q_1) + \deg g \geq \deg g$$

что, очевидно, неверно. Следовательно, $q_1 = q_2$ и $r_1 = r_2$.
Особое значение имеет деление на линейный двучлен $x - c$. В этом случае остаток имеет степень < 1, т.е. является элементом поля $\mathbb{K}$. Таким образом, результат деления с остатком многочлена f на $x - c$ имеет вид

$$f(x) = (x - c) q(x) + r \quad (r \in \mathbb{K})$$

Отсюда следует, что $f(c) = r$, т.е. остаток равен значению многочлена f в точке c. Это утверждение называется теоремой Безу.

3.4.3 5.3 General Properties of Polynomial Roots

Элемент c поля $\mathbb{K}$ называется корнем многочлена $f \in \mathbb{K}[x]$ (или соответствующего алгебраического уравнения $f(x) = 0$), если $f(c) = 0$. Из Теоремы Безу (см. предыдущий параграф) следует

Теорема

5.13. Элемент c поля $\mathbb{K}$ является корнем многочлена $f \in \mathbb{K}[x]$ тогда и только тогда, когда f делится на $x - c$.

Этим можно воспользоваться для доказательства следующей теоремы.

Теорема

5.14. Число корней ненулевого многочлена не превосходит его степени.

Proof. □

Пусть c_1 - корень многочлена f. Тогда

$$f = (x - c_1)\, f_1 \quad (f_1 \in \mathbb{K}[x])$$

Пусть c_2 - корень многочлена f_1. Тогда

$$f_1 = (x - c_2)\, f_2 \quad (f_2 \in \mathbb{K}[x])$$

и, значит,

$$f = (x - c_1)\,(x - c_2)\, f_2$$

Продолжая так дальше, мы в конце концов представим многочлен f в виде

$$f = (x - c_1)\,(x - c_2) \dots (x - c_m)\, g \tag{38}$$

где многочлен $g \in \mathbb{K}[x]$ не имеет корней. Числа $c_1, c_2, \dots, c_m$ - это все корни многочлена f. В самом деле, для любого $c \in \mathbb{K}$ имеем

$$f(c) = (c - c_1)\,(c - c_2) \dots (c - c_m)\, g(c)$$

и, так как $g(c) \neq 0$, то $f(c) = 0$ только если $c - c_i$ для некоторого i. Таким образом, число корней многочлена f не превосходит m (оно может быть меньше m, поскольку не исключено, что среди чисел $c_1, c_2, \dots, c_m$ есть одинаковые); но

$$m = \deg f - \deg g \leq \deg f$$

Заметим, что из только что доказанной Теоремы можно получить новое доказательство Теоремы 5.10. А именно, если два многочлена f и g совпадают как функции на $\mathbb{K}$, то любой элемент поля $\mathbb{K}$ является корнем их разности $h = f - g$, а ненулевой многочлен в силу доказанной Теоремы имеет конечное число корней (не превосходящее его степени).

Доказательство предыдущей теоремы наводит на мысль, что корни правильнее считать с кратностями. Кратностью корня c называется наибольшее из таких k, что f делится на $(x - c)^k$. Простым корнем называется корень кратности 1. Иногда удобно считать, что число, не являющееся корнем, - это корень кратности 0.

Lemma

5.15. c является корнем кратности k многочлена f тогда и только тогда, когда

$$f = (x - c)^k g \tag{39}$$

где $g(c) \neq 0$.

Proof. □

В самом деле, если имеет место представление (39), то c - корень кратности не меньше k. Если c является корнем кратности $> k$, то $f = (x-c)^{k+1}h$, и тогда, сокращая на $(x-c)^k$ равенство $(x-c)^k g = (x-c)^{k+1}h$ (и используя то, что в $\mathbb{K}[x]$ нет делителей нуля), получаем $g = (x-c)h$, что противоречит предположению $g(c) \neq 0$.

Обратно, если k - кратность корня c многочлена f, то $f = (x-c)^k h$ приведенной для некоторого $h \in \mathbb{K}[x]$. Если $h(c) = 0$, то по следствию из Теоремы Безу $h = (x-c)p$, где $p \in \mathbb{K}[x]$, и тогда $(x-c)^{k+1} | f$, что противоречит нашему предположению.

Теперь мы докажем уточнение Теоремы 5.14.

Теорема

5.16. Число корней ненулевого многочлена с учётом их кратностей не превосходит степени многочлена, причём равенство имеет место тогда и только тогда, когда этот многочлен раскладывается на линейные множители.

Proof. □

Перепишем равенство (38), объединив одинаковые множители:

$$f = (x-c_1)^{k_1} (x-c_2)^{k_2} \ldots (x-c_s)^{k_s}\, g \tag{40}$$

($c_1, c_2, \ldots, c_s$ различны). Ясно, что $c_1, c_2, \ldots, c_s$ - это все корни многочлена f. Далее, выделяя в (40) множитель $(x-c_i)^{k_i}$, мы можем написать

$$f = (x-c_i)^{k_i}\, h, \qquad \text{где} \qquad h_i\,(c_i) \neq 0.$$

Следовательно, c_i - корень кратности k_i.
Таким образом, число корней многочлена f с учётом кратностей равно

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_s = \deg f - \deg g$$

откуда и вытекают все утверждения Теоремы.
Если многочлен

$$f = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

раскладывается на линейные множители, то это разложение может быть записано в виде

$$f = a_0\,(x-c_1)\,(x-c_2)\ldots(x-c_n)$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ - корни многочлена f, причём каждый из них повторен столько раз, какова его кратность. Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях x в этих двух представлениях многочлена f, мы получаем следующие формулы Виета:

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_n = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$c_1c_2 + c_1c_3 + \ldots + c_{n-1}c_n = \frac{a_2}{a_0}$$

....

$$\sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} c_{i_1} c_{i_2} \ldots c_{i_k} = (-1)^k \frac{a_k}{a_0}$$

$$c_1 c_2 \ldots c_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

В левой части k-й формулы Виета стоит сумма всевозможных произведений k корней многочлена f. С точностью до множителя $(-1)^k$ это коэффициент при x^{n-k} в произведении $(x-c_1)\,(x-c_2)\ldots(x-c_n)$.

В случае $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ существует еще одна интерпретация кратности корня многочлена из $\mathbb{K}[x]$ с использованием производной.

Сделав в многочлене $f \in \mathbb{K}[x]$ замену $x = c + y$, где $c \in \mathbb{K}$, мы можем представить его в виде многочлена (той же степени) от $y = x - c$ или, как говорят, разложить по степеням $x - c$:

$$f = b_0 + b_1(x-c) + b_2(x-c)^2 + \ldots + b_n(x-c)^n \tag{41}$$

Очевидно, что если c-корень многочлена f, то его кратность равна номеру первого отличного от нуля коэффициента этого разложения.

Предложение

5.17. Если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то коэффициенты разложения $f \in \mathbb{K}[x]$ по степеням $x - c$ могут быть найдены по формулам

$$b_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}$$

Proof. □

Продифференцируем равенство (41) k раз и подставим $x = c$.
Таким образом,

$$f = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

Эта формула называется формулой Тейлора для многочленов.
Из формулы Тейлора и сделанного выше замечания следует

Теорема

5.18. Если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то кратность корня с многочлена $f \in \mathbb{K}[x]$ равна наименьшему порядку производной многочлена f, не обращающейся в нуль в точке .

Следствие

5.19. При том эе условии всякий k-кратный корень многочлена f является $(k-1)$ кратным корнем его производной.

3.4.4 5.4 Polynomials over the Fields $\mathbb{C}$ and $\mathbb{R}$

Над полем $\mathbb{R}$ существуют многочлены положительной степени, не имеющие ни одного вещественного корня, например $x^2 + 1$. Такие многочлены могут иметь сколь угодно большую степень, например, $\frac{x^p-1}{x-1}$, где p - простое число. Чудом кажется тот факт, что "присоединяя" к полю $\mathbb{R}$ один из корней такого многочлена, мы получаем поле $\mathbb{C}$, которое является алгебраически замкнутым: все многочлены над $\mathbb{C}$ (т.е. не только с вещественными, но и с комплексными коэффициентами) положительной степени имеют корень, лежащий в $\mathbb{C}$, а значит раскладываются на линейные множители над $\mathbb{C}$.

Теорема

5.20. Всякий многочлен положительной степени над полем $\mathbb{C}$ имеет корень.
Поле, над которым всякий многочлен положительной степени имеет хотя бы один корень, называется алгебраически замкнутым. Таким образом, предыдущая теорема означает, что поле $\mathbb{C}$ является алгебраически замкнутым.

Существуют различные доказательства этой теоремы. Любое из них включает элементы анализа (или топологии), в частности, одно из них обычно приводится в курсе комплексного анализа. Существует и более алгебраическое доказательство, основанное на теории Галуа. Мы в этом курсе их не приводим.

Следствие

5.21. В кольце $\mathbb{C}[x]$ всякий ненулевой многочлен раскладывается на линейные множители.

В самом деле, в силу предыдущей Теоремы многочлен g в разложении (38) должен иметь нулевую степень, т.е. быть просто числом.

В силу Теоремы 5.16 отсюда получаем

Следствие

5.22. Всякий многочлен степени n над $\mathbb{C}$ имеет n корней с учетом кратностей.

Займемся теперь многочленами с вещественными коэффициентами, т.е. элементами $\mathbb{R}[x]$. Такой многочлен степени n может иметь $< n$ (в частности, вообще не иметь) вещественных корней, но, как и всякий многочлен с комплексными коэффициентами, он всегда имеет ровно n комплексных корней (с учетом кратностей).

Теорема

5.23. Пусть $f \in \mathbb{R}[x]$ и $\in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ - корень f, то и комплексно сопряженное $\bar{c}$ также является корнем f, причем той же кратности что и с.

Proof. □

Используя вещественность коэффициентов многочлена f и свойства операции комплексного сопряжения, имеем

$$f(c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{f(c)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(\bar{c}) = 0$$

То есть $\bar{c}$ - также корень многочлена f. Аналогично доказывается, что

$$f^{(k)}(c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f^{(k)}(\bar{c}) = 0$$

Следовательно, кратности корней и $\bar{c}$ одинаковые (см. Теорему 5.18).

Следствие

5.24. В кольие $\mathbb{R}[x]$ всякий ненулевой многочлен раскладывается на линейные и квадратичные множители с отрицательным дискриминантом.

Proof. □

Заметим, что если $c \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, то квадратный трехчлен

$$(x - c)(x - \bar{c}) = x^2 - (c + \bar{c})x + c\bar{c}$$

имеет вещественные коэффициенты; его дискриминант отрицателен.
Пусть теперь

$$c_1, \dots, c_s, c_{s+1}, \dots, c_{s+t}, \bar{c}_{s+1}, \dots, \bar{c}_{s+t}$$

- все (различные) комплексные корни многочлена $f \in \mathbb{R}[x]$, причем

$$c_1, \ldots, c_s \in \mathbb{R}, \quad c_{s+1}, \ldots, c_{s+t} \notin \mathbb{R}$$

Если кратность корня c_i равна k_i, то

$$f = a_0 (x - c_1)^{k_1} \ldots (x - c_s)^{k_s} \left[(x - c_{s+1})(x - \bar{c}_{s+1})\right]^{k_{s+1}} \ldots \left[(x - c_{s+t})(x - \bar{c}_{s+t})\right]^{k_{s+t}}$$

(где a_0 - старший коэффициент многочлена f). Перемножая линейные множители в квадратных скобках, получаем искомое разложение.

Следствие

5.25. Многочлен нечетной степени над $\mathbb{R}$ имеет вещественный корень.
Пример 5.26.

$$x^5 - 1 = (x-1)\left[\left(x - e^{\frac{2\pi i}{5}}\right)\left(x - e^{\frac{8\pi i}{5}}\right)\right]\left[\left(x - e^{\frac{4\pi i}{5}}\right)\left(x - e^{\frac{6\pi i}{5}}\right)\right] =$$
$$(x-1)\left(x^2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}x + 1\right)\left(x^2 + \frac{\sqrt{5}+1}{2}x + 1\right)$$

3.4.5 5.5 Euclidean Rings

Разложение многочленов над $\mathbb{C}$ на линейные множители и многочленов над $\mathbb{R}$ на линейные и квадратичные множители аналогично разложению целых чисел на простые множители. Для многочленов над произвольным полем также имеется подобное разложение, но его множители могут иметь произвольную степень. В этом параграфе мы докажем существование и единственность (в некотором точном смысле) такого разложения, а также существование и единственность разложения целого числа на простые множители (результат, называемый "Основной теоремой арифметики").

Для того, чтобы охватить единым рассуждением оба случая, введем некоторые общие понятия.

Определение

5.27. Коммутативное ассоциативное кольцо с единицей и без делителей нуля называется целостным кольцом (или областью целостности).

Так, кольцо $\mathbb{Z}$ и кольцо многочленов $\mathbb{K}[x]$ над любым полем $\mathbb{K}$ являются целостными кольцами. Более того, кольцо многочленов над любым целостным кольцом является целостным (см. Замечание 5.9). Например, целостным является кольцо многочленов $\mathbb{Z}[x]$ (что, впрочем, понятно и так, так как оно является подкольцом с единицей в $\mathbb{R}[x]$). Заметим, что кольцо, состоящее из одного нуля, не считается целостным.

Пусть A - целостное кольцо. Говорят, что элемент $b \in A$ делит элемент $a \in A$ (обозначение: $b|a$), если существует элемент $q \in A$ такой, что $a = qb$. Элементы a и b называются ассоциированными (обозначение: $a \sim b$), если выполняется любое из следующих эквивалентных условий:

1. $b|a$ и $a|b$;

2. $a = cb$, где $c \in A$ - обратимый элемент.

В следующем определении аксиоматизируется то общее, что есть у кольца многочленов над полем и кольца целых чисел $\mathbb{Z}$ - возможность деления с остатком.

Определение

5.28. Целостное кольцо A, не являющееся полем, называется евклидовым, если существует функция

$$N : A \backslash \{0\} \to \mathbb{Z}_{>0}$$

(называемая (евклидовой) нормой), удовлетворяющая следующим условиям:

1. $N(ab) \geq N(a)$, причем равенство имеет место только тогда, когда элемент b обратим;
2. для любых $a, b \in A$, где $b \neq 0$, существуют такие $q, r \in A$, что $a = qb + r$ и либо $r = 0$, либо $N(r) < N(b)$.

Основными для нас примерами евклидовых колец являются $\mathbb{Z}$ с функцией модуля в качестве нормы, и кольцо $\mathbb{K}[x]$ многочленов над полем $\mathbb{K}$, где роль евклидовой нормы играет степень многочлена. Существуют и другие примеры евклидовых колец.

Условие 2) из Определения выше означает возможность "деления с остатком". Его единственности (то есть однозначной определенности пары q, r) не требуется. Например, $5 = 1 \cdot 3 + 2$, но также и $5 = 2 \cdot 3 + (-1)$.

Note.

5.29. Заметим, что вторая часть условия 1) может быть выведена из остальных условий. В самом деле, пусть элемент b необратим. Тогда a не делится на ab (в самом деле, если $a = qab$, то $1 = qb$ и, вопреки предположению, b обратим). Разделим a на ab с остатком:

$$a = q(ab) + r, \quad r \neq 0$$

Так как $r = a(1 - qb)$, то

$$N(a) \leq N(r) < N(ab)$$

что и требовалось.

Приведем пример евклидова кольца, отличный от упоминавшихся ранее.

Пример 5.30. Комплексные числа вида $c = a + bi$, где $a, b \in \mathbb{Z}$, называются иелыми гауссовыми числами. Они образуют подкольцо с единицей в $\mathbb{C}$, обозначаемое $\mathbb{Z}[i]$.

Кольцо $\mathbb{Z}[i]$ является евклидовым относительно нормы

$$N(c) = |c|^2 = a^2 + b^2$$

В самом деле, очевидно, что $N(cd) = N(c)N(d)$ и, поскольку $N(1) = 1$, обратимые элементы кольца $\mathbb{Z}[i]$ - это элементы с нормой 1, то есть ± 1 и $\pm i$. Отсюда следует, что выполнено условие 1) в определении евклидова кольца.

Докажем возможность деления с остатком. Пусть $c, d \in \mathbb{Z}[i], d \neq 0$. Рассмотрим целое гауссово число q, ближайшее к $\frac{c}{d} \in \mathbb{C}$. Поскольку целые гауссовы числа расположены в вершинах решетки со стороной 1 в комплексной плоскости, то расстояние от $\frac{c}{d}$ до q не превосходит $1/\sqrt{2}$, то есть $\left|\frac{c}{d} - q\right| \leq 1/\sqrt{2}$. Положим $r := c - qd \in \mathbb{Z}[i]$. Тогда $c = qd + r$ и

$$N(r) = |c - qd|^2 = \left|\frac{c}{d} - q\right|^2 |d|^2 \leq \frac{1}{2} N(d) < N(d)$$

Определение

5.31. Наибольшим общим делителем элементов a и b целостного кольца называется их общий делитель, делящийся на все их общие делители. Он обозначается (a, b).

Наибольший общий делитель, если он существует, определен однозначно с точностью до ассоциированности. Однако его может не существовать. Например, элементы x^5 и x^6 в кольце $\mathbb{K}\left[x^2, x^3\right] \subset \mathbb{K}[x]$ многочленов без линейного члена не имеют наибольшего общего делителя.

Теорема

5.32. В евклидовом кольце для любых двух элементов a, b существует наибольший общий делитель d, и он может быть представлен в виде $d = au + bv$, где u, v - какие-то элементы кольца.

Proof. □

Если $b = 0$, то $d = a = a \cdot 1 + b \cdot 0$. Если a делится на b, то $d = b = a \cdot 0 + b \cdot 1$. В общем случае доказательство дословно повторяет доказательство Предложения 1.27.

Процедура нахождения наибольшео общего делителя, использованная в этом доказательстве, называется алгоритмом Евклида. Элементы $a, b \in A$ называются взаимно простыми, если $(a, b) = 1$. В этом случае, согласно доказанной Теореме, существуют такие $u, v \in A$, что

$$au + bv = 1$$

Пример 5.33. Покажем, что кольцо $\mathbb{Z}[x]$ многочленов с целыми коэффициентами не является евклидовым. Рассмотрим пару элементов $a = 2$ и $b = x$ этого кольца. Ясно, что их наибольший общий делитель есть 1. В то же время 1 нельзя представить в виде $2g + xh$, где $g, h \in \mathbb{Z}[x]$, поскольку $2g + xh$ является многочленом, свободный член которого четен.

Перейдем теперь к вопросу о разложении на простые множители в евклидовом кольце.

Определение

5.34. Необратимый ненулевой элемент p целостного кольца называется простым, если его нельзя представить в виде $p = ab$, где a и b - необратимые элементы.

Иначе говоря, элемент p простой, если всякий его делитель ассоциирован либо с 1 либо с p. Простые элементы кольца $\mathbb{Z}$ в этом смысле - это числа вида $\pm p$, где p - простое число.

Простые элементы кольца $\mathbb{K}[x]$, где $\mathbb{K}$ - поле, по традиции называются неприводимыми многочленами. Таким образом, неприводимый многочлен - это такой многочлен положительной степени, который не может быть разложен в произведение двух многочленов положительной степени (в $\mathbb{K}[x]$).

Очевидно, что всякий многочлен первой степени неприводим. Из Следствия 5.21 мы знаем, что неприводимые многочлены над $\mathbb{C}$ - это только многочлены первой степени, а из Следствия 5.24 - что неприводимые многочлены над $\mathbb{R}$ - это многочлены первой степени и многочлены второй степени с отрицательным дискриминантом. Можно показать, что неприводимые многочлены над полем $\mathbb{Q}$ могут иметь любую степень.

Пример 5.35. Опишем простые элементы в кольце $\mathbb{Z}[i]$. Это, с точностью до ассоциированности, простые натуральные числа вида $4k + 3$, числа вида $a + bi (a, b \in \mathbb{N})$, где $a^2 + b^2$ есть простое натуральное число вида $4k + 1$ и число $1 + i$.

Пусть A - произвольное евклидово кольцо.

Lemma

5.36. Если простой элемент p кольца A делит произведение $a_1 a_2 \dots a_n$, то он делит хотя бы один из сомножителей $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Proof. □

Докажем это утверждение индукцией по n. При $n = 2$ предположим, что p не делит a_1. Тогда $(p, a_1) = 1$ и, значит, существуют такие $u, v \in A$, что $pu + a_1 v = 1$. Умножая это равенство на a_2 получаем

$$pua_2 + a_1 a_2 v = a_2$$

откуда следует что p делит a_2

При $n > 2$ представим произведение $a_1 a_2 \dots a_n$ в виде $a_1 (a_2 \dots a_n)$. По доказанному $p | a_1$ или $p \mid a_2 \dots a_n$. Во втором случае по предположению индукции $p | a_i$ где i - один из индексов $2, \dots, n$.

Теорема

5.37. В евклидовом кольце всякий необратимый ненулевой элемент может быть разложен на простые множители, причем это разложение единственно с точностью до перестановки множителей и умножения их на обратимые элементы. (Говоря о разложении на простые множители мы не исключаем разложения, состоящего только из одного множителя).

Proof. □

Назовем необратимый ненулевой элемент $a \in A$ хорошим, если он может быть разложен на простые множители. Предположим, что существуют плохие элементы. Выберем из них элемент с наименьшей нормой. Пусть это будет элемент a. Он не может быть простым. Следовательно, $a = bc$, где b и c - необратимые элементы. Имеем $N(b) < N(a)$ и $N(c) < N(a)$ и, значит, b и c - хорошие элементы; но тогда, очевидно, и a - хороший элемент, что противоречит нашему предположению. Таким образом, всякий необратимый ненулевой элемент кольца A может быть разложен на простые множители.

Докажем теперь индукцией по n, что если

$$a = p_1 p_2 \dots p_n = q_1 q_2 \dots q_m \tag{42}$$

где p_i, q_j - простые элементы, то $m = n$ и, после подходящей перенумерации множителей, $p_i \sim q_i$ при $i = 1, 2, \dots, n$.

При $n = 1$ это утверждене очевидно. При $n > 1$ имеем $p_1 | q_1 q_2 \dots q_m$ и по лемме 5.36 существует такой номер i, что $p_1 | q_i$. Тогда $p_1 \sim q_i$. Можно считать, что $i = 1$ и $p_1 = q_1$. Сокращая равенство (42) на p_1, получаем

$$p_2 \dots p_n = q_2 \dots q_m$$

По предположению индукции отсюда следует, что $m = n$ и, после подходящей перенумерации, $p_i \sim q_i$ при $i = 2, \dots, n$. Тем самым утверждение доказано.

Задача

5.38. Докажите, что в евклидовом кольце

1. $b|a, c|au(b, c) = 1 \Rightarrow bc|a$;
2. $c|abu(b, c) = 1 \Rightarrow c|a$.

Известно, что простых чисел бесконечно много. Напомним рассуждение, которое это доказывает (оно похоже на то, которое приведено в Началах Евклида). Предположим что $p_1, p_2, \dots, p_n$ - это все простые числа. Тогда число $p_1 p_2 \dots p_n + 1$ не делится ни на одно из них, что, очевидно, невозможно.

Интересен вопрос о том, как простые числа распределены среди натуральных. Вот простейший результат в этом направлении.

Предложение

5.39. Существуют сколь угодно длинные отрезки натурального ряда, не содержащие простых чисел.

Proof. □

Рассмотрим n последовательных натуральных чисел

$$(n + 1)! + 2, (n + 1)! + 3, \dots, (n + 1)! + n + 1$$

Первое из них делится на 2, второе - на 3 и т.д., последнее делится на $n + 1$, т.е. все они являются составными.

Note.

5.40. Обозначим через $\pi(n)$ количество простых чисел среди первых n натуральных чисел $1, 2, \ldots, n$. Еще Гаусс заметил, что

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n} \quad \text{при } n \to \infty$$

Рассуждение, аналогичное приведенному выше, показывает, что количество нормированных (т.е. со старшим коэффициентом 1) неприводимых многочленов над любым полем $\mathbb{K}$ бесконечно. Если само поле $\mathbb{K}$ бесконечно, этот результат не представляет интереса, так как в этом случае имеется бесконечно много нормированных многочленов первой степени. Однако если поле $\mathbb{K}$ конечно, то этот результат означает, что имеются неприводимые многочлены сколь угодно высокой степени. Из этого сразу следует, что любое алгебраически замкнутое поле бесконечно.

3.4.6 5.6 Deduction Class Rings

Напомним, что определение кольца классов вычетов $\mathbb{Z}_n$ по модулю n дано в Примере 1.51. Это - ассоциативное коммутативное кольцо с единицей.

Предложение

5.41. Элемент $[k] \in \mathbb{Z}_n$ обратим $\Leftrightarrow (k, n) = 1$.

Proof. □

Если $(k, n) = 1$, то по тождеству Безу $\exists u, v \in \mathbb{Z}$ такие, что $ku+pv = 1$. Тогда $[ku+pv] = [k] \cdot [u] = [1]$, и значит $[k]^{-1} = [u]$.
Обратно, если $(k, n) = d > 1$, то пусть $n_1 := \frac{n}{d}$. Тогда $[n_1] \neq [0]$, но $[k]\,[n_1] = [0]$, поскольку $n|kn_1$. Значит, $[k]$ - делитель нуля в $\mathbb{Z}_n$ и, следовательно, необратим.
Напомним, что $\mathbb{Z}_n^*$ - группа обратимых элементов кольца $\mathbb{Z}_n$.

Следствие 5.42.

$|\mathbb{Z}_n^*| = \phi(n)$, где ϕ - функция Эйлера.

Proof. □

По определению $\phi(n)$ - количество чисел среди $1, 2, \ldots, n$ взаимно простых с n, в то время как $\mathbb{Z}_n = \{[1], [2], \ldots, [n]\}$.
Из доказательства предыдущего Предложения легко вывести

Следствие 5.43.

Кольцо $\mathbb{Z}_n$ не имеет делителей нуля $\Leftrightarrow n$ - простое число.

Следствие 5.44.

Кольцо $\mathbb{Z}_n$ является полем $\Leftrightarrow n$ - простое число.
Для натуральных k, l определим прямую сумму $\mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}_l$ колец как множество упорядоченных пар $\mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_l$ с покомпонентными операциями. В частности, аддитивной группой кольца $\mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}_l$ является прямая сумма аддитивных групп $\mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}_l$ (для упрощения обозначений мы в данном случае используем одинаковые обозначения для групп и колец).

Определение

5.45. Отображение f кольца A в кольцо B называется гомоморфизмом, если оно сохраняет операции, т.е. если

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad f(xy) = f(x)f(y)$$

для любых $x, y \in A$. Изоморфизмом называется биективный гомоморфизм.
Очевидным образом определяются ядро и образ гомоморфизма колец $f : A \to B$, являющиеся подкольцами соответственно в A и в B. Про ядро гомоморфизма колец можно сказать больше: оно является т.н. идеалом (двусторонним) в A. Что это такое, а также про теорему о гомоморфизмах колец можно почитать в более подробных учебниках, например, в [12].
Пример 5.46. Отображение $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n, \quad k \mapsto [k]_n$ является гомоморфизмом колец с ядром $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$.

Задача

5.47. Опишите все гомоморфизмъ

1. групп $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$;
2. колеи, $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$.

Задача

5.48. Опишите ядра гомоморфизмов колеи,

1. $\mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}, f \mapsto f(c), c \in \mathbb{K}$;
2. $\mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}, f \mapsto f(c), c \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$.

Предложение

5.49. Пусть $(k, l) = 1, n := kl$. Тогда отображение

$$\varphi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}_l, \quad [a]_n \mapsto ([a]_k, [a]_l)$$

является изоморфизмом колец.

Proof. □

То, что данное отображение корректно определено и является изоморфизмом групп, мы уже проверили в доказательстве Предложения 4.111. Осталось проверить, что φ согласовано с умножением:

$$\varphi\left([ab]_n\right) = \left([ab]_k, [ab]_l\right) = \left([a]_k[b]_k, [a]_l[b]_l\right) = \left([a]_k, [a]_l\right)\left([b]_k, [b]_l\right) = \varphi\left([a]_n\right)\varphi\left([b]_n\right)$$

Следствие 5.50.

Если $(k, l) = 1$, то $\phi(kl) = \phi(k)\phi(l)$.

Proof. □

Изоморфизм, доказанный в предыдущем Предложении, устанавливает изоморфизм групп обратимых элементов $\mathbb{Z}_{kl}^*$ и $(\mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}_l)^*$. Так как операции в кольце $\mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}_l$ определены покомпонентно, то элемент $([a]_k, [b]_l) \in \mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}_l$ обратим $\Leftrightarrow$ $[a]_k$ обратим в $\mathbb{Z}_k$ и $[b]_l$ обратим в $\mathbb{Z}_l$. Значит, $(\mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}_l)^* \cong \mathbb{Z}_k^* \times \mathbb{Z}_l^*$

Следствие позволяет эффективно вычислять функцию Эйлера: если $n = p_1^{k_1} \ldots p_s^{k_s}$, где $p_i \neq p_j$, то $\phi(n) = \phi\left(p_1^{k_1}\right) \ldots \phi\left(p_s^{k_s}\right)$; кроме того, как мы знаем (см. Задачу 4.41), $\phi\left(p^k\right) = p^k - p^{k-1}$.

3.4.7 5.7 Fields

Выше мы видели примеры полей, которые не содержат нетривиальных (отличных от них самих) подполей. Эти примеры - поля классов вычетов $\mathbb{Z}_p$ (где p - произвольное простое) и поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Оказывается, любое поле содержит одно (и только одно) из указанных полей. Обсудим этот вопрос более подробно.

Пусть $\mathbb{K}$ - произвольное поле. Рассмотрим в $\mathbb{K}, +)$ циклическую подгруппу, порожденную единицей $1 \in \mathbb{K}$.

Пусть эта подгруппа конечна порядка n, то есть n - такое наименьшее натуральное число, что выполнено соотношение $1 + 1 + \ldots + 1 = 0$ (n слагаемых) в $\mathbb{K}$. Если n не простое, то $n = kl$ и произведение суммы k единиц на сумму l единиц равно нулю, хотя оба слагаемых отличны от нуля. Так как в поле не может быть делителей нуля, такое невозможно и значит n обязательно простое число, $n = p$. В этом случае говорят, что поле $\mathbb{K}$ имеет характеристику p, $\operatorname{char} \mathbb{K} = p$. Заметим, что в поле $\mathbb{K}$ характеристики p для любого $a \in \mathbb{K}$ сумма

$$a + a + \ldots + a = (1 + 1 + \ldots + 1)a$$

(p слагаемых) равна нулю.
Если 1 порождает бесконечную циклическую подгруппу в $(\mathbb{K}, +)$, то поле $\mathbb{K}$ по определению имеет нулевую характеристику, $\operatorname{char} \mathbb{K} = 0$.

Предложение

5.51. Любое поле характеристики p содержит подполе, изоморфное $\mathbb{Z}_p$. Любое поле характеристики 0 содержит подполе, изоморфное $\mathbb{Q}$.

Proof. □

Отображение

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{K}, \quad f(k) = k \cdot 1$$

является гомоморфизмом колец. В самом деле, $f(k + l) = (k + l)1 = k1 + l1 = f(k) + f(l), f(kl) = (kl)1 = (k1)(l1) = f(k)f(l)$.

В случае характеристики p образ f является подполем поля $\mathbb{K}$, изоморфным $\mathbb{Z}_p$.
В случае характеристики 0 гомоморфизм f инъективен и образ f - подкольцо в $\mathbb{K}$, изоморфное $\mathbb{Z}$. В поле содержатся также обратные ко всем ненулевым элементам, то есть в $\mathbb{K}$ имеют смысл дроби $k \cdot 1/l \cdot 1, l \neq 0$, причем две такие дроби $k \cdot 1/l \cdot 1$ и $m \cdot 1/n \cdot 1$ задают один и тот же элемент в $\mathbb{K}$ тогда и только тогда, когда $kn = lm$. (В самом деле,

$$k \cdot 1/l \cdot 1 = m \cdot 1/n \cdot 1 \quad \Leftrightarrow \quad (k \cdot 1)(n \cdot 1) = (l \cdot 1)(m \cdot 1) \quad \Leftrightarrow \quad kn = lm)$$

Сложение и умножение таких дробей в поле $\mathbb{K}$ подчиняются обычным правилам действия с дробями. (Например, чтобы сложить $k \cdot 1/l \cdot 1 + m \cdot 1/n \cdot 1$, умножим это выражение на $(ln) \cdot 1$, получим $(kn + lm) \cdot 1$, откуда указанная сумма представляется дробью $(kn + lm) \cdot 1/(ln) \cdot 1)$. Поэтому классы эквивалентности указанных дробей составляют подполе в $\mathbb{K}$, изоморфное $\mathbb{Q}$.

Задача

5.52. Докажите, что группа $\mathbb{Z}$ не изоморфна аддитивной группе никакого векторного пространства.

Некоторые формулы в полях положительной характеристики имеют особенности, являющиеся следствием соотношения $1+1+\ldots+1=0$. Рассмотрим, например, формулу

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Она справедлива в любом поле, однако в поле характеристики 2 она принимает более простой вид

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2$$

Более общо, в поле характеристики p справедливо тождество

$$(a+b)^p = a^p + b^p$$

поскольку биномиальные коэффициенты $\binom{p}{k}$ при $k \neq 0, p$ делятся на p. Это, в частности, приводит к тому, что для поля $\mathbb{K}$ характеристики p отображение

$$\varphi_p : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad \varphi_p(x) = x^p$$

является эндоморфизмом (гомоморфизмом на себя) этого поля. φ_p называется эндоморфизмом Фробени*у* и играет важную роль в теории полей положительной характеристики.

Пусть $\mathbb{F}$ - подполе поля $\mathbb{K}$. Сопоставляя определения, легко видеть, что тогда $\mathbb{K}$ является линейным пространством над полем $\mathbb{F}$ (нужно просто "забыть" про умножение элементов поля $\mathbb{K}$ друг на друга, и оставить только умножение их на элементы подполя $\mathbb{F}$). Например, $\mathbb{C}$ - двумерное линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ (в качестве базиса в нем обычно выбирают $\{1, i\}$), а $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ - бесконечномерные (точнее, континуальномерные) пространства над полем $\mathbb{Q}$.[28]

Пусть $\mathbb{K}$ - конечное поле. Тогда его характеристика p конечна и оно содержит (поле, изоморфное) $\mathbb{Z}_p$ в качестве подполя. Так как $\mathbb{K}$ конечно, то размерность $\mathbb{K}$ как линейного пространства над $\mathbb{Z}_p$ конечна; пусть она равна n. Тогда можно установить биекцию между элементами $\mathbb{K}$ и столбцами высоты n с элементами из $\mathbb{Z}_p$, откуда $|\mathbb{K}| = p^n$. Тем самым мы доказали

Предложение

5.53.

Мощность конечного поля является степенью простого числа (его характеристики).

На самом деле, для любого простого p и натурального n существует поле из p^n элементов и оно единственно с точностью до изоморфизма. Мы не будем доказывать этот общий результат, ограничившись ниже построением поля из p^2 элементов.

Задача

5.54. Поля из скольких элементов 3, 5, 9, 27 содержатся или могут содержаться в поле из 81 элемента?

Заметим, что аддитивная группа поля из p^n элементов изоморфна $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_p$ (прямая сумма n слагаемых).

Выше мы видели, что конечные подгруппы в $\mathbb{C}^*$ циклические. На самом деле, это общий результат:

Теорема

5.55. Конечная подгруппа мультипликативной группы $\mathbb{K}^*$ любого поля $\mathbb{K}$ (в частности, мулвтипликативная группа любого конечного поля) является циклической.

Proof. □

Доказательству теоремы предпошлём следующую

Lemma

5.56. Пусть H - такая конечная группа порядка n, что для любого $d|n$

$$\natural\left\{x \in H | x^d = 1\right\} \leq d$$

(здесь $\natural S$ обозначает мощность множества S). Тогда H - циклическая группа.

Доказательство леммы. Если в H есть элемент x порядка d, то d различных элементов $\left\{1, x, x^2, \ldots, x^{d-1}\right\}$ циклической группы $\langle x\rangle$, порожденной x, являются решениями $x^d = 1$, и поэтому в группе H других элементов, удовлетворяющих этому уравнению, нет. Таким образом, в этом случае в

H содержится ровно $\phi(d)$ элементов порядка d (сколько образующих в соответствующей циклической группе).

Таким образом, для каждого делителя d порядка группы $n = |H|$ в группе H содержится либо $\phi(d)$ либо 0 элементов порядка d, причем, как мы знаем, порядок любого элемента конечной группы делит порядок группы. Теперь используя

Следствие

4.48 получаем, что при сформулированном на группу условии для каждого $d|n$ в H существует ровно $\phi(d)$ элементов порядка d, в частности, это верно и для $d = n$.

Вернемся к доказательству Теоремы. Пусть $H \subset \mathbb{K}^*$ - конечная подгруппа порядка n. Мы знаем, что число корней многочлена $x^d = 1$ в поле не превосходит d, и тем самым мы попадаем под условие Леммы.

Таким образом, $\mathbb{Z}_p^* \cong \mathbb{Z}_{p-1}$ и $\mathbb{Z}_p^* = \{1, a, a^2, \ldots, a^{p-2}\}$, где $a \in \mathbb{Z}_p^*$ - образующая. Пусть p - нечетное простое число. Тогда, возводя перечисленные выше элементы a^i в квадрат мы видим, что (ненулевые) квадраты образуют подгруппу индекса 2 в группе $\mathbb{Z}_p^*$. Обозначим ее $\left(\mathbb{Z}_p^*\right)^2$.

Например, -1 является квадратом по модулю p (эквивалентно, уравнение $x^2 = -1$ разрешимо в $\mathbb{Z}_p$) тогда и только тогда, когда $p \equiv 1 \bmod 4$.В самом деле, поскольку -1 - единственный элемент порядка 2 в группе $\mathbb{Z}_p^*$, то он является квадратом тогда и только тогда, когда в $\mathbb{Z}_p^*$ есть элемент порядка 4, а в циклической группе порядка $p-1$ есть элемент порядка 4 тогда и только тогда, когда $4 \mid (p-1)$.

Предложение

5.57. (ср. Задачу 2.21) Пусть элемент $\alpha \in \mathbb{K}^*$ не является квадратом. Тогда множество матриц,

$$\left\{\left(\begin{array}{cc} a & \alpha b \\ b & a \end{array}\right) \middle| \, a, b \in \mathbb{K}\right\} \subset \mathrm{Mat}_2(\mathbb{K}) \tag{43}$$

является полем, содержащим $\mathbb{K}$ в качестве подполя и являющимся 2 -мерным векторным пространством над $\mathbb{K}$.

[028] Задачу построить базис в $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$ мы читателю не предлагаем:)

Proof. □

Легко проверяется, что указанное подмножество матриц образует коммутативное подкольцо с 1 (при этом удобно использовать представление

$$\left(\begin{array}{cc} a & \alpha b \\ b & a \end{array}\right) = aE + bF, \quad \text{где} \quad F := \left(\begin{array}{cc} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{array}\right) \quad \text{и соотношение} \quad F^2 = \alpha E \Big)$$

Оно содержит $\mathbb{K}$ в качестве подполя, если последнее отождествить со скалярными матрицами aE.
Проверим, что любая ненулевая матрица указанного вида обратима:

$$\det\left(\begin{array}{cc} a & \alpha b \\ b & a \end{array}\right) = a^2 - \alpha b^2$$

и если $a^2 - \alpha b^2 = 0$, то либо $b = 0$ (и тогда $a = 0$), либо $b \neq 0$ и $(a/b)^2 = \alpha$, но по условию α не является квадратом в $\mathbb{K}$ и значит для $a, b \in \mathbb{K}$ указанное равенство невозможно.

Конструкцию из доказанного Предложения можно понимать так: хотя уравнение $x^2 = \alpha$ не разрешимо в $\mathbb{K}$, оно оказывается разрешимым в матрицах указанного вида, поскольку $F^2 = \alpha E$.

Если в предыдущем Предложении положить $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ и $\alpha = -1$, то мы получим известное представление поля $\mathbb{C}$ вещественными матрицами порядка 2. (С полем $\mathbb{C}$ в качестве $\mathbb{K}$ такой фокус не проходит, поскольку все элементы поля $\mathbb{C}$ являются квадратами в силу алгебраической замкнутости).

Если для нечетного простого p в предыдущем Предложении положить $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_p$ и взять $\alpha \in \mathbb{Z}_p^* \backslash \left(\mathbb{Z}_p^*\right)^2$ (например, $\alpha = -1$ при $p \equiv 3 \bmod 4$), то мы получим поле из p^2 элементов.

Note.

5.58. Если $\alpha \in \mathbb{K}^*$ является квадратом в $\mathbb{K}$, то матрицы вида (43) также будут образовывать подкольцо в $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{K})$, но на этот раз содержащее делители нуля (например,

$$\left(\begin{array}{cc} \beta & \alpha \\ 1 & \beta \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} -\beta & \alpha \\ 1 & -\beta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} -\beta^2 + \alpha & 0 \\ 0 & \alpha - \beta^2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)$$

где $\beta \in \mathbb{K}, \beta^2 = \alpha$). На самом деле, это - двумерная алгебра над $\mathbb{K}$, изоморфная прямой сумме полей $\mathbb{K} \oplus \mathbb{K}$ (с покомпонентными операциями). Читатель может проверить, что указанный изоморфизм задается сопоставлением

$$\left(\begin{array}{cc} a & \alpha b \\ b & a \end{array}\right) \mapsto (a + \beta b, a - \beta b)$$

где $\beta \in \mathbb{K}, \beta^2 = \alpha$.

Задача

5.59. Убедитесь, что матрицы вида

$$\left\{\left(\begin{array}{cc} a & b \\ b & a+b \end{array}\right) \middle| \, a, b \in \mathbb{Z}_2\right\} \subset \mathrm{Mat}_2\left(\mathbb{Z}_2\right)$$

образуют поле из 4 -х элементов.
Тем самым для любого простого p мы предъявили поле из p^2 элементов.

3.5 6 Elements of Linear Algebra

В данной главе определяется понятие размерности линейного пространства (в конечномерном случае), которая является единственным инвариантом изоморфизма линейного пространства. Далее на основе понятия размерности линейного пространства вводится и изучается важное понятие ранга матрицы, а также описывается структура множества решений системы линейных уравнений.

3.5.1 6.1 Basis and Dimension of Finite-dimensional Linear Spaces

Lemma

6.1.
Система векторов $\{v_1, \ldots, v_m\}$ линейного пространства V (см. Определение1.61) линейно зависима тогда и только тогда, когда (хотя бы) один из ее векторов представляется в виде линейной комбинации остальных.

Proof. □

Пусть система линейно зависима и $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$ - равная нулю ее нетривиальная линейная комбинация [29]. Пусть $\lambda_k \neq 0$, тогда

$$v_k = -\lambda_k^{-1} (\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{k-1} v_{k-1} + \lambda_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \lambda_m v_m)$$

Обратно, если $v_k = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{k-1} v_{k-1} + \lambda_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \lambda_m v_m$, то собирая все в одной части, получаем равную нулю нетривиальную линейную комбинацию векторов $\{v_1, \ldots, v_m\}$
Заметим, что в предыдущей лемме не утверждается, что из линейной зависимости системы следует, что любой ее вектор представляется как линейная комбинация остальных (читателю предлагается привести контрпример к этому утверждению).

Lemma

6.2. Пусть система векторов $\{v_1, \ldots, v_m\}$ линейного пространства V линейно независима. Тогда для $u \in V$ существует представление $u = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$ тогда и только тогда, когда система $\{v_1, \ldots, v_m, u\}$ линейно зависима.

Proof. □

Доказательство в одну сторону следует из предыдущей леммы.
Обратно, предположим что $\{v_1, \ldots, v_m, u\}$ линейно зависима и $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + \mu u = 0$ - нетривиальная линейная зависимость. Тогда $\mu \neq 0$, иначе мы получили бы нетривиальную линейную зависимость между векторами системы $\{v_1, \ldots, v_m\}$, что противоречит условию. Таким образом, $u = -\mu^{-1} (\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m)$.

Lemma

6.3. Пусть $u = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$; тогда такое разложение единственно тогда и только тогда, когда система $\{v_1, \ldots, v_m\}$ линейно независима.

Proof. □

[029] Напомним, что линейная комбинация $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m$ называется нетривиальной, если хотя бы один из коэффициентов λ_i отличен от нуля. В этой терминологии система векторов $\{v_1, \ldots, v_m\}$ линейно зависима тогда и только тогда, когда существует ее нетривиальная линейная комбинация, равная нулю.

Если система $\{v_1, \ldots, v_m\}$ линейно зависима и $0 = \sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i v_i$ - нетривиальное разложение по ней нулевого вектора, то прибавляя его к данному разложению вектора u, получаем новое разложение вектора u.

Обратно, если существует два разных разложения вектора u по системе $\{v_1, \ldots, v_m\}$, то, вычитая одно из другого, получаем нетривиальное разложение нулевого вектора по указанной системе, то есть нетривиальную линейную зависимость.

Предложение

6.4. (Основная лемма о линейной зависимости). Если векторы $u_1, \ldots, u_n$ линейного пространства V линейно выражаются через векторы $v_1, \ldots, v_m$ того же пространства, причем $n > m$, то (какова бы ни была система $\{v_1, \ldots, v_m\}$) система векторов $\{u_1, \ldots, u_n\}$ линейно зависима.

Proof. □

По условию имеем

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \ldots + a_{m1}v_m \\ u_2 &= a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \ldots + a_{m2}v_m \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n &= a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \ldots + a_{mn}v_m \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в условие линейной зависимости

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n = 0 \tag{44}$$

получим

$$\lambda_1 (a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \ldots + a_{m1}v_m) + \lambda_2 (a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \ldots + a_{m2}v_m) + \ldots$$
$$+\lambda_n (a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \ldots + a_{mn}v_m) = 0$$

то есть

$$(a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \ldots + a_{1n}\lambda_n) v_1 + (a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \ldots + a_{2n}\lambda_n) v_2 + \ldots$$

$$+ (a_{m1}\lambda_1 + a_{m2}\lambda_2 + \ldots + a_{mn}\lambda_n) v_m = 0$$

Данное соотношение удовлетворяется при любом решении $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ системы линейных однородных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \ldots + a_{1n}\lambda_n &=& 0 \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \ldots + a_{2n}\lambda_n &=& 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\lambda_1 + a_{m2}\lambda_2 + \ldots + a_{mn}\lambda_n &=& 0. \end{array} \right.$$

Согласно Следствию 2.58, последняя система имеет нетривиальное решение, которое дает нетривиальную линейную зависимость (44).

Note.

6.5. Вместо ссылки на Следствие 2.58 в конце предыдущего доказательства можно было бы заметить, что утверждение о том, что однородная система, число неизвестных у которой больше числа уравнений, имеет нетривиальное решение, легко следует из результатов раздела 2.3. Действительно, любой столбец упрощенной матрицы является линейной комбинацией ее главных столбцов, но в упрощенном виде матрицы A размера $m \times n$, где $m < n$, есть неглавные столбцы, поэтому по Лемме 6.2 между столбцами такой матрицы A есть нетривиальная линейная зависимость (ср. Лемму 6.1).

Приведем доказательство Предложения 6.4, не использующее результаты теории систем линейных уравнений.

Воспользуемся индукцией по m. При $m = 0$ Предложение верно: через пустую систему векторов линейно выражается только нулевой вектор. Пусть утверждение верно для $m - 1 \geq 0$, докажем что тогда оно справедливо и для m. Пусть $\{u_1, \ldots, u_n\}$ линейно выражаются через $\{v_1, \ldots, v_m\}, n > m$. Без ограничения общности можно считать, что вектор v_m входит в разложение u_n с ненулевым коэффициентом. (В самом деле, если v_m не входит в разложение ни одного из векторов $u_1, \ldots, u_n$, то работает предположение индукции; если входит в разложение какого-то вектора u_i но не u_n, то перенумеруем векторы в системе $\{u_1, \ldots, u_n\}$). Тогда существует набор скаляров $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\}$ таких, что в разложения векторов $\bar{u}_i := u_i - \alpha_i u_n 1 \leq i \leq n-1$ вектор v_m входит с нулевым коэффициентом. Другими словами, система $\{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{n-1}\}$ линейно выражается через $\{v_1, \ldots, v_{m-1}\}$. Так как по условию $n > m \geq 1$, то $n - 1 > m - 1 \geq 0$, и значит по предположению индукции существует нетривиальная линейная зависимость $\lambda_1 \bar{u}_1 + \ldots + \lambda_{n-1} \bar{u}_{n-1} = 0$, то есть $\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_{n-1} u_{n-1} - (\lambda_1 \alpha_1 + \ldots + \lambda_{n-1} \alpha_{n-1}) u_n = 0$.

Пусть V - векторное пространство, а $S \subset V$ - его произвольное подмножество (не обязательно конечное).

Определение

6.6. Линейной оболочкой подмножества $S \subset V$ называется множество всех векторов из V, представимых в виде (конечных!) линейных комбинаций элементов из S. Линейная оболочка обозначается $\langle S \rangle$.

Таким образом, $\langle S \rangle$ состоит из всех векторов из V, представимых в виде $\sum\limits_s \lambda_s s, s \in S, \lambda_s \in \mathbb{K}$, где $\lambda_s \neq 0$ только для конечного числа $s \in S$. По определению линейная комбинация пустого множества векторов равна нулевому вектору.

Легко видеть, что для произвольного подмножества $S \subset V$ его линейная оболочка не просто подмножество в V, а линейное подпространство. Действительно, во-первых, это множество непусто (например, $\langle \varnothing \rangle = 0$ и, поскольку любое множество S содержит пустое подмножество, любая линейная оболочка содержит нулевой вектор). Во-вторых сумма двух конечных линейных комбинаций векторов из S снова является конечной линейной комбинацией векторов из S; то же для умножения на скаляр.

Заметим, что для $S \subset V \langle S \rangle = V$ тогда и только тогда, когда S содержит некоторый базис V; в частности, $\langle V \rangle = V$.

Задача

6.7. Покажите, что $\langle S \rangle$ - наименьшее по включению линейное подпространство в V, содержащее S (то есть любое подпространство $U \subset V$, содержащее S, содержит также и $\langle S \rangle$).

Говорят, что пространство V порождается своим подмножеством $S \subset V$, если $V = \langle S \rangle$.

Определение

6.8. Пространство V называется конечномерным, если оно порождается некоторым своим конечным подмножеством.

В дальнейшем мы сосредоточимся почти исключительно на изучении конечномерных векторных пространств.

Заметим, что определение базиса можно переформулировать следующим образом: базис в V - линейно независимая система, порождающая V. Напомним, что, в частности, базис нулевого векторного пространства - пустое множество векторов (которое по определению линейно независимо).

Теорема

6.9. Из всякого конечного порождающего множества S пространства V можно выбрать базис пространства V.

Proof. □

Если S линейно независимо, то S (после произвольного упорядочивания) - базис в V. Если S линейно зависимо, то по Лемме 6.1 в S найдется вектор, линейно выражающийся через остальные. Выкидывая его из S получим порождающее множество из меньшего числа элементов. Так как число элементов в произвольном конечном множестве неотрицательно, этот процесс должен оборваться.

Следствие

6.10. Всякое конечномерное векторное пространство обладает базисом.
Заметим, что если в векторном пространстве V есть базис из n элементов, то любые $m > n$ векторов из V линейно зависимы по Предложению 6.4.

Теорема

6.11. Все базисы конечномерного линейного пространства V содержат одно и то же число векторов.

Доказательство следует из Предложения 6.4.
Таким образом, нами доказана корректность следующего определения.

Определение

6.12. Размерностью конечномерного векторного пространства V называется число элементов его произвольного базиса.

Размерность конечномерного векторного пространства - натуральное число (включая 0). Размерность пространства V обозначается $\dim V$.

Пример 6.13. Размерность пространства $\mathbb{K}^n$ столбцов высоты n (или строк длины n) равна n. Стандартный базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ образуют в нем столбцы $e_i := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots 0)^T$ (единица на i-м месте) $i = 1, \dots, n$.

Задача

6.14. Докажсте, что любая линейно независимая система из n векторов $\{v_1, \dots, v_n\}$ в n-мерном пространстве V является базисом в V.

Решение. Предположим, что какой-то вектор $v \in V$ не раскладывается по системе $\{v_1, \dots, v_n\}$, тогда система $\{v_1, \dots, v_n, v\}$ линейно независима, что противоречит Предложению 6.4.

Задача

6.15. Докажите, что любая система из n векторов $\{v_1, \dots, v_n\}$ в n-мерном пространстве V, по которой раскладывается любой вектор $v \in V$, является базисом в V.

Решение. Предположим, что система $\{v_1, \dots, v_n\}$ линейно зависима, тогда один из ее векторов является линейной комбинацией остальных, и значит его можно выбросить из системы, сохранив условие разложимости по ней любого вектора. Если полученная система снова линейно зависима, выбрасываем из нее следующий лишний вектор и т.д. В конце концов приходим к линейно независимой системе, порождающей V, которая таким образом является базисом в V, но содержащей менее n векторов. Получили противоречие с Предложением 6.4.

Предложение

6.16. Пусть $S \subset V$ - произвольное (конечное или бесконечное) подмножество в $V, \dim V = n < \infty$. Тогда любое линейно независимое подмножество T в S можно дополнить до максимального линейно независимого подмножества в S.

Proof. □

Действительно, если T не максимально среди линейно независимых подмножеств в S, к нему можно добавить новый элемент из S с сохранением условия линейной независимости, причем этот процесс оборвется на конечном шаге, поскольку любые $m > n$ векторов в V линейно зависимы (по Предложению 6.4).

Применяя приведенное в доказательстве предыдущего Предложения рассуждение к $\varnothing \subset S$ получаем, что в любом подмножестве $S \subset V$ содержится максимальное линейно независимое подмножество.

Предложение

6.17. Любое максимальное линейно независимое подмножество $\{e_1, \ldots, e_k\}$ в S является базисом в линейной оболочке $\langle S \rangle$.

Proof. □

Так как по условию $\{e_1, \ldots, e_k\}$ - линейно независимая система векторов из $\langle S \rangle$, достаточно показать, что она порождает указанную линейную оболочку. По определению линейной оболочки, любой вектор из $\langle S \rangle$ является линейной комбинацией векторов из S, поэтому достаточно проверить, что любой вектор из S является линейной комбинацией векторов из $\{e_1, \ldots, e_k\}$, а это следует (с учетом максимальности) из Леммы 6.2.

В частности, все максимальные линейно независимые подмножества в S состоят из одинакового количества элементов.

Мы видим, что произвольный базис в линейном пространстве может быть охарактеризован либо как максимальная (по включению) линейно независимая система, либо как минимальная (тоже по включению) порождающая система. То есть максимальная линейно независимая система автоматически является порождающей, а минимальная порождающая - линейно независимой.

Теорема

6.18. Всякую линейно независимую систему векторов конечномерного векторного пространства V можно дополнить до базиса в V.

Proof. □

Возьмем $S = V$ и, применив к нему

Предложение

6.16, дополним данную в условии систему до максимальной линейно независимой системы. Согласно Предложению 6.17, она будет базисом в $\langle V \rangle = V$.

Менее формально: всякую линейно независимую систему векторов конечномерного пространства V можно дополнить до максимальной линейно независимой системы, которая, очевидно (см. Лемму 6.2), будет базисом V.

Теорема

6.19. (Свойство монотонности размерности). Если U - линейное подпространство в V, то $\dim U \leq \dim V$, причем если $\dim U = \dim V$, то $U = V$.

Proof. □

Пусть $\{e_1, \ldots, e_k\}$ - максимальное линейно независимое подмножество в U. По Предложению 6.17 это - базис в U. Данная система линейно независима и как система векторов из V[30], поэтому по Теореме 6.18 $\dim V \geq k = \dim U$.

Если при этом $U \neq V$, то существует $v \in V$, который не раскладывается по линейно независимой системе $\{e_1, \ldots, e_k\}$, а значит по Лемме 6.2 система векторов $\{e_1, \ldots, e_k, v\}$ пространства V линейно независима, откуда с учетом Теоремы 6.18 получаем, что $\dim V > k = \dim U$.

Дадим еще одно доказательство Теоремы 6.11, не опирающееся на факты из теории СЛУ. В его основе лежит следующая Лемма Штайница, представляющая независимый интерес.

Lemma 6.20. (Лемма Штайница)

Пусть система векторов $\{u_1, \ldots, u_n\}$ порождает пространство V, а система $\{v_1, \ldots, v_m\}$ векторов из V линейно независима. Тогда $n \geq m$.

Proof. □

Так как $v_1 \in V = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle$, то $v_1 = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$ для некоторых $\alpha_i \in \mathbb{K}$, причем среди α_i обязательно есть коэффициент не равный нулю. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha_1 \neq 0$ (в противном случае переупорядочим систему $\{u_1, \ldots, u_n\}$). Тогда $u_1 = \frac{1}{\alpha_1}(v_1 - \alpha_2 u_2 - \ldots - \alpha_n u_n)$ и значит $V = \langle v_1, u_2, \ldots, u_n \rangle$.

Далее, $v_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_n u_n$ для некоторых $\beta_i \in \mathbb{K}$, причем среди $\beta_2, \ldots, \beta_n$ есть ненулевой коэффициент (в противном случае векторы v_1, v_2 оказались бы линейно зависимыми). Без ограничения общности можно считать, что $\beta_2 \neq 0$ (в противном случае переупорядочим систему $\{u_2, \ldots, u_n\}$). Тогда u_2 лежит в линейной оболочке $\langle v_1, v_2, u_3, \ldots, u_n \rangle$, которая тем самым совпадает с V.

Шаг индукции: пусть система $\{v_1, \ldots, v_k, u_{k+1}, \ldots, u_n\}$ порождает V. Тогда $v_{k+1} = \gamma_1 v_1 + \ldots + \gamma_k v_k + \gamma_{k+1} u_{k+1} + \ldots + \gamma_n u_n$ для некоторых $\gamma_i \in \mathbb{K}$. Среди $\gamma_{k+1}, \ldots, \gamma_n$ обязательно есть ненулевой коэффициент: в противном случае система $\{v_1, \ldots, v_m\}$ оказалась бы линейно зависимой вопреки предположению. В случае необходимости меняя порядок у $u_{k+1}, \ldots, u_n$, можно считать, что $\gamma_{k+1} \neq 0$. Тогда u_{k+1} лежит в $\langle v_1, \ldots, v_{k+1}, u_{k+2}, \ldots u_n \rangle$, и тогда $\langle v_1, \ldots, v_k, u_{k+1}, \ldots, u_n \rangle \subseteq \langle v_1, \ldots, v_{k+1}, u_{k+2}, \ldots u_n \rangle$, а значит последняя линейная оболочка совпадает с V и шаг индукции доказан.

В конце концов приходим к следующей альтернативе: если в противоречии с условием $n < m$, то $V = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, что противоречит линейной независимости системы $\{v_1, \ldots, v_m\}$ (поскольку в этом случае векторы $v_{n+1}, \ldots, v_m$ являются линейными комбинациями векторов $v_1, \ldots, v_n$). Таким образом, $n \geq m$ (и $V = \left\langle v_1, \ldots, v_m, u'_{m+1}, \ldots, u'_n \right\rangle$, где $u'_{m+1}, \ldots, u'_n$ - некоторые из векторов системы $\{u_1, \ldots, u_n\}$).

Теорема 6.11 является непосредственным следствием Леммы Штайница, так как каждый базис является одновременно и порождающей, и линейно независимой системой.

3.5.2 6.2 Rank

Определение

6.21. Рангом системы векторов $\{a_1, \ldots, a_k\}$ векторного пространства V называется размерность ее линейной оболочки $\langle a_1, \ldots, a_k \rangle$. Рангом матрицы называется ранг системы

[030] так как операции сложения и умножения на скаляр в подпространстве $U \subset V$ получаются ограничением соответствующих операций в пространстве V.

ее строк (рассматриваемых как векторы пространства строк соответствующей длины). Ранг матрицы A обозначается $\mathrm{rk}A$.

Поясним вторую часть предыдущего определения. Пусть A - матрица размера $m\times n$. Тогда ее строки являются векторами арифметического линейного пространства $\mathbb{K}^n$ и порождают в нем подпространство некоторой размерности $r \leq \min\{m,n\}$. Это число и называется рангом матрицы A.

Заметим, что согласно Предложению 6.17 любая максимальная линейно независимая система строк матрицы A является базисом в линейной оболочке ее строк, поэтому называется также базисной системой строк. В частности, любая строка матрицы A является линейной комбинацией строк базисной системы и все такие системы состоят из одинакового числа строк. Кроме того, из Предложения 6.16 следует, что любую линейно независимую систему строк матрицы можно дополнить до базисной системы строк.

Из определения размерности следует, что ранг матрицы равен мощности ее базисной системы строк.

Note.

6.22. В обозначениях предыдущего параграфа множество S строк матрицы A является конечным порождающим множеством своей линейной оболочки $\langle S\rangle \subset \mathbb{K}^n$. Используя результаты предыдущего параграфа легко видеть, что (некоторую) базисную систему строк матрицы A (и значит ее ранг) теоретически можно искать следующими двумя алгоритмами.

1. Если матрица A нулевая, ее система базисных строк пуста, а ранг равен нулю. Пусть $A \neq 0$, значит у нее есть ненулевая строка a_i. Если все остальные строки ей пропорциональны, то ранг A равен 1 и система, состоящая из a_i - базисная. В противном случае есть (хотя бы одна) непропорциональная ей строка, добавляя любую такую строку a_j к a_i, получаем линейно независимую систему из двух строк $\{a_1, a_2\}$, и таким образом $\mathrm{rk}A \geq 2$. Если все строки линейно выражаются через выбранные две, то $\{a_1, a_2\}$ - уже базисная система строк, в противном случае добавляем к ним произвольную линейно независимую от выбранных двух третью строку a_k и т.д. В конце концов мы придем к максимальной линейно независимой системе строк. То есть в этом случае мы добавляем к данной линейно независимой системе строк новые строки с сохранением условия линейной независимости, пока это возможно. На последнем шаге мы получаем максимальную линейно независимую систему, которая также будет порождающей (для линейной оболочки строк).

2. Можно также рассуждать в противоположном направлении - не добавляя новые строки к уже имеющимся линейно независимым, а наоборот, выбрасывая линейно зависимые. Более подробно: если система из всех m строк матрицы A линейно независима, то $\mathrm{rk}A = m$. В противном случае какая-то из строк линейно выражается через остальные, выбросим ее из системы. Получим систему из $m-1$ строки; если она линейно независима, то $\mathrm{rk}\, A = m-1$; в противном случае выбросим какую-то из строк, которая выражается через остальные $m-2$, получим систему из $m-2$ строк и т.д. Продолжая этот процесс, мы придем к линейно независимой системе строк (возможно, пустой, если матрица A нулевая), которая будет базисной системой строк. То есть в данном случае мы выбрасываем из данной порождающей системы строк лишние с сохранением условия порождаемости, пока это возможно. На последнем шаге мы получаем минимальную порождающую систему, которая будет также линейно независимой.

Задача

6.23. Докажите, что произвольную матричу ранга 1 можно представить в виде произведения столбца на строку.

Задача

6.24. Докажите, что произвольную матричу ранга r можно представить в виде суммы r матрич ранга 1, но нельзя в виде суммы меньшего их числа.

Задача

6.25. Что может произойти с рангом матрицы при добавлении ней дополнительной строки?

Две системы $\{a_1, \ldots, a_n\}$ и $\{b_1, \ldots, b_m\}$ векторов одного векторного пространства V назовем эквивалентными, если каждый вектор второй системы b_j линейно выражается через векторы первой системы a_i, и наоборот. Очевидно, что

$$\{a_1, \ldots, a_n\} \sim \{b_1, \ldots, b_m\} \quad \Leftrightarrow \quad \langle a_1, \ldots, a_n \rangle = \langle b_1, \ldots, b_m \rangle$$

Отсюда, в частности, следует, что ранги эквивалентных систем равны.
При элементарном преобразовании (любого из трех типов) строк матрицы система ее строк заменяется на эквивалентную. Поэтому ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях ее строк. (Другими словами, ранг - функция, постоянная на классах строчно эквивалентных матриц). С другой стороны, любую матрицу с помощью элементарных преобразований строк можно привести к ступенчатому виду. Поэтому для вычисления рангов матриц достаточно научиться считать ранги ступенчатых матриц.

Предложение

6.26. Ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк.

Proof. □

Для нулевой матрицы утверждение очевидно. Покажем, что ненулевые строки ненулевой ступенчатой матрицы линейно независимы. Пусть некоторая их линейная комбинация равна нулю (= нулевой строке). Рассматривая ведущий элемент $a_{1_1} \neq 0$ первой строки получаем, что первая ненулевая строка входит в линейную комбинацию с нулевым коэффициентом (иначе в линейной комбинации элемент на j_1-м месте был бы отличен от нуля). Рассуждая дальше по индукции, получаем требуемое. Утверждение Предложения теперь следует из того, что добавление нулевых векторов к системе не меняет ее ранга.

В частности, число ненулевых строк одинаково для всех ступенчатых матриц, которые можно получить из данной матрицы с помощью элементарных преобразований строк.

Помимо приведенного выше определения ранга матрицы как размерности линейной оболочки ее строк, можно определить столбцовый ранг матрицы как размерность линейной оболочки ее столбцов. Аналогично определяется понятие базисной системы столбцов.

Предложение

6.27. Столбцовый ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях ее строк. Более того, при элементарных преобразованиях строк базисная система столбцов переходит в базисную систему столбцов (с теми же номерами).

Proof. □

Очевидно, что первое утверждение из формулировки следует из второго, которое мы и докажем. Пусть A' - матрица, полученная из A элементарными преобразованиями строк. Согласно Следствию 2.38, элементарные преобразования строк матрицы не изменяют линейные зависимости между ее столбцами. Значит, столбцы с номерами $j_1, \ldots, j_r$ образуют максимальную линейно независимую систему столбцов матрицы A тогда и только тогда, когда то же верно для матрицы A'.

Более подробно, пусть столбцы с номерами $j_1, \dots, j_r$ образуют максимальную линейно независимую систему столбцов матрицы A. Если бы столбцы с номерами $j_1, \dots, j_r$ матрицы A' оказались линейно зависимы, то, так как (в силу обратимости элементарных преобразований) матрица A получается из A' элементарными преобразованиями строк, столбцы матрицы A с теми же номерами оказались бы связаны той же нетривиальной линейной зависимостью, а это не так по условию. Если бы система столбцов матрицы A' с номерами $j_1, \dots, j_r$ оказалась бы немаксимальной среди линейно независимых систем, то при добавлении некоторого столбца (скажем, с номером j_{r+1}) матрицы A', не входящего в указанную систему, мы снова получили бы линейно независимую систему. С другой стороны, по условию система столбцов матрицы A с номерами $j_1, \dots, j_r, j_{r+1}$ линейно зависима, и нетривиальная линейная зависимость между ними должна перейти в аналогичную нетривиальную линейную зависимость между соответствующими столбцами матрицы A' - противоречие с немаксимальностью системы столбцов матрицы A' с номерами $j_1, \dots, j_r$.

Теорема о ранге матрицы

Строчный и столбцовый ранги матрицы равны.

Дожазательство. Временно обозначим $\widetilde{\mathrm{rk}} A$ столбцовый ранг матрицы A. Итак, пусть A - произвольная матрица. Пусть $r = \mathrm{rk}\, A$. Приведем ее к упрощенному виду с помощью элементарных преобразований строк. При этом строчный и столбцовый ранги не меняются. У полученной матрицы r ненулевых строк и r главных столбцов. Поскольку главные столбцы являются столбцами единичной матрицы порядка r с (возможно) дописанными внизу нулями, они линейно независимы. Отсюда следует, что для произвольной матрицы столбцовый ранг не меньше чем строчный, то есть $\widetilde{\mathrm{rk}} A \geq \mathrm{rk}\, A$. Другими словами, при транспонировании матрицы (строчный) ранг не уменьшается. Если он увеличился, то транспонируя матрицу еще раз, получаем противоречие.

Таким образом, для любой матрицы A верно равенство $\mathrm{rk}\, A = \mathrm{rk}\, A^T$.

Из доказательства предыдущей Теоремы следует, что главные столбцы ступенчатой матрицы образуют максимальную линейно независимую систему ее столбцов. Этот факт вместе со Следствием 2.38 служит обоснованием следующего алгоритма нахождения базисной системы столбцов произвольной матрицы A. А именно, приведем матрицу A к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк, пусть главные столбцы полученной ступенчатой матрицы имеют номера $j_1, \dots, j_r$, тогда столбцы матрицы A с теми же номерами образуют максимальную линейно независимую систему ее столбцов.

Теорема

6.29. Ранг произведения матриц (когда оно определено) не превосходит ранга каждого из сомножителей.

Proof. □

Пусть $C := AB$. Согласно Предложению 2.7i-й столбец матрицы C является линейной комбинацией столбцов матрицы A с коэффициентами из i-го столбца матрицы B, поэтому линейная оболочка столбцов матрицы C содержится в линейной оболочке столбцов матрицы A, а значит $\mathrm{rk} C \leq \mathrm{rk}\, A$ (см. Теорему 6.19). Далее, то же Предложение показывает, что линейная оболочка строк матрицы C содержится в линейной оболочке строк матрицы B, откуда $\mathrm{rk}\, C \leq \mathrm{rk}\, B$.

Обобщим теперь Задачу 6.23.

Задача

6.30. Докажите, что произвольную матрицу C размера $m \times n$ и ранга r можно представить в виде произведения AB, где A - матрица размера $m \times r$, а B - размера

$r \times n$. Существует ли аналогичное представление в виде произведения матриц размеров $m \times s s \times n$, где $s < r$?

Решение. Составим матрицу A из (некоторой системы) базисных столбцов матрицы C. Напомним, что i-й столбец матрицы AB есть линейная комбинация столбцов матрицы A с коэффициентами из i-го столбца матрицы B. Таким образом, i-й столбец B нужно составить из коэффициентов разложения i-го столбца C по выбранной системе базисных столбцов.

Другой способ: существуют последовательности элементарных преобразований строк и столбцов, приводящие матрицу C к блочному виду $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где E_r - единичная матрица порядка r. То есть существуют невырожденные матрицы S, T порядков m и n такие, что $C = S \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T$. С другой стороны, $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \binom{E_r}{0} \begin{pmatrix} E_r & 0 \end{pmatrix}$, откуда все следует.

Ответ на вопрос отрицательный, так как существование такого представления противоречило бы Теореме 6.29.

Задача

6.31. Пусть A - невырожденная матрица порядка п. Тогда для любой матрицы B, для которой существует произведение AB, верно равенство $\operatorname{rk}(AB) = \operatorname{rk} B$. Аналогично для невырожденной матрицы B.

Решение. Так как матрица A невырождена, то она строчно эквивалентна единичной E. То есть существует конечный набор элементарных матриц $S_1, \ldots, S_p$ такой, что $S_p \ldots S_1 A = E$ (тогда, как мы знаем, $S_p \ldots S_1 = A^{-1}$). Равенство $S_p \ldots S_1 AB = B$ показывает, что та же последовательность элементарных преобразований строк, которая матрицу A приводит к единичной E, приводит матрицу AB к B. При элементарных преобразованиях строк ранг матрицы не меняется, поэтому $\operatorname{rk}(AB) = \operatorname{rk} B$.

Задача

6.32. Пусть A - матрица с линейно независимыми столбцами. Тогда для любой матрицы B, для которой существует произведение AB, верно равенство $\operatorname{rk}(AB) = \operatorname{rk} B$. Аналогично для матрицы B с линейно независимыми строками.

Решение. 1-й способ является обобщением решения предыдущей задачи. Пусть матрица A имеет размер $m \times n$, из условия следует, что $m \geq n$. Если $m = n$ то матрица A невырождена и мы возвращаемся к условию предыдущей задачи. Если $m > n$, то матрица A элементарными преобразованиями строк приводится к виду $A' := \binom{E}{0}$, где E - единичная матрица порядка n, а 0 - нулевая матрица размера $(m-n) \times n$. Поэтому $\operatorname{rk}(AB) = \operatorname{rk}(A'B)$. С другой стороны,

$$\begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$$

а ранг последней матрицы, очевидно, равен $\operatorname{rk} B$.

2 -й способ. Пусть $C := AB$. Используя идею из доказательства Теоремы 6.29 мы видим, что столбцы матрицы B - координатные столбцы столбцов матрицы C в базисе (соответствующей линейной оболочки), образованном столбцами матрицы A. Теперь требуемое следует из того, что ранг произвольной системы векторов равен рангу системы из их координатных столбцов в произвольном базисе.

Теорема

6.33. Ранг суммы матриц, не превосходит суммы их рангов.

Proof. □

Приведем два доказательства. Первое следует из цепочки более-менее очевидных (не)равенств:

$$\operatorname{rk}(A+B) \leq \operatorname{rk}\begin{pmatrix} A+B \\ B \end{pmatrix} = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \leq \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$$

(читателю предлагается детально обдумать каждый шаг). Второе - геометрическое доказательство изложим более подробно. Пусть $\{u_1, \ldots, u_m\}$ и $\{v_1, \ldots, v_m\}$ - две системы векторов некоторого линейного пространства (в нашем случае в качестве указанных векторов выступают строки матриц A и B). Ясно, что имеет место включение линейных оболочек

$$\langle u_1 + v_1, \ldots, u_m + v_m \rangle \subseteq \langle u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m \rangle$$

По Теореме 6.19 $\dim \langle u_1 + v_1, \ldots, u_m + v_m \rangle \leq \dim \langle u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m \rangle$. Кроме того, верно неравенство

$$\dim \langle u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m \rangle \leq \dim \langle u_1, \ldots, u_m \rangle + \dim \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$$

Действительно, объединение максимальных линейно независимых подмножеств (то есть базисов) линейных оболочек $\langle u_1, \ldots, u_m \rangle$ и $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ порождает линейную оболочку $\langle u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m \rangle$. По Теореме 6.9 это множество содержит некоторый базис последней линейной оболочки, откуда следует требуемое.

Легко привести пример, когда в предыдущей теореме имеет место равенство.
Очевидно, что матрица A порядка n невырождена $\Leftrightarrow \operatorname{rk} A = n$.
Пусть A - невырожденная матрица порядка n. Это означает, что ее столбцы образуют базис в пространстве $\mathbb{K}^n$ столбцов высоты n. Значит, для любого столбца $\mathbf{c} \in \mathbb{K}^n$ существует единственный столбец $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^n$ такой, что $A\mathbf{b} = \mathbf{c}$ (ср. Предложение2.7). То есть квадратная СЛУ $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ с невырожденной матрицей A разрешима для любого столбца $\mathbf{c}$ и для любого с имеет единственное решение (нам это уже известно, см. Теорему 3.44). Беря в качестве $\mathbf{c}$ столбцы единичной матрицы $e_1, \ldots, e_n$ получим систему столбцов $\mathbf{b}_1, \ldots \mathbf{b}_n$ такую, что $A(\mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{b}_n) = E$, то есть $AB = E, B := (\mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{b}_n)$. Из Теоремы 6.29 следует, что матрица B также невырождена. Применяя к ней аналогичные соображения, найдем для нее матрицу C такую, что $BC = E$. Теперь имеем $A = A(BC) = (AB)C = C$, то есть
B является обратной для A. Таким образом, мы еще раз доказали, что невырожденная матрица имеет обратную. Необходимость следует из Теоремы 6.29, поскольку единичная матрица, очевидно, невырождена.

Заметим, что нами фактически доказано следующее утверждение: для квадратной матрицы A любая матрица B, удовлетворяющая одному из уравнений $AB = E$ или $BA = E$, является обратной (то есть автоматически удовлетворяет и второму из уравнений).

Таким образом, для матриц порядка n условия $\operatorname{rk} A = n \det A \neq 0$ и существования обратной равносильны, поскольку все они эквивалентны невырожденности.

Задача

6.34. Правой обратной для (вообще говоря, прямоугольной) матрицы A с m строками называется такая матрица B, что $AB = E$ (где E - единичная матрица порядка т). Найдите критерий
a) существования;
b) существования и единственности правой обратной матрицы.

Те же вопросы для левой обратной матрицы.
Какая связь между понятиями ранга и определителя в общем случае?
Напомним, что минором матрицы называется определитель ее квадратной подматрицы, а его порядком - порядок соответствующей подматрицы.

Теорема

6.35. Ранг матрицы равен наибольшему порядку ее миноров, отличных от нуля.

Proof. □

Пусть A - матрица размера $m \times n$ и ранга $r, r \leq \min\{m, n\}$. Покажем, что для любого $s > r, s \leq \min\{m, n\}$ все миноры порядка s матрицы A равны нулю. Действительно, любые s строк матрицы A линейно зависимы, тем более линейно зависимы их пересечения с произвольными s столбцами. Следовательно, любая подматрица порядка s матрицы A вырождена, значит, ее определитель равен нулю.

С другой стороны, в матрице A ранга r найдется ненулевой минор порядка r. Действительно, поскольку $\operatorname{rk} A = r$, в матрице A есть система из r линейно независимых строк. Последние образуют подматрицу ранга r, и значит среди ее столбцов тоже найдется r линейно независимых. Квадратная подматрица в A порядка r, образованная выбранными строками и столбцами матрицы A, невырождена, и значит ее определитель - соответствующий минор матрицы A - отличен от нуля.

Пусть A - матрица ранга r. Любая ее невырожденная подматрица порядка r называется базисной подматрицей матрицы A, а определитель базисной подматрицы - базисным минором матрицы A. Согласно доказанной Теореме, r - максимальный порядок невырожденных подматриц (ненулевых миноров) матрицы A. Название "базисный" оправдывает следующее утверждение.

Следствие

6.36. ("о базисном миноре"). Строки матрицы A, в которых содержится ее произвольная базисная подматрица, образуют базисную систему строк матрицы A. То же верно и для столбцов.

Proof. □

Так как базисная подматрица невырождена, ее строки линейно независимы. Тем более независимы строки матрицы A, которые их содержат. Таким образом, данные строки образуют систему из r (где $r = \mathrm{rk}A$) линейно независимых строк матрицы A. Теперь требуемое утверждение следует из того, что любые r линейно независимых векторов в r-мерном пространстве образуют базис (см. Задачу 6.14).

Следующая задача усиливает предыдущую Теорему.

Задача

6.37. Если в матрице A есть ненулевой минор порядка r, а все миноры порядка $r+1$, получаемые приписыванием к нему одной строки и одного столбца (так называемые окаймляюшие миноры), равны нуля, то $\mathrm{rk}A = r$.

Решение. Пусть, напротив, $\operatorname{rk} A \geq r + 1$. Мы знаем, что всякую линейно независимую систему строк матрицы A можно дополнить до максимальной линейно независимой системы, которая является базисом в линейной оболочке строк матрицы A. Используя это, дополним систему r линейно независимых строк матрицы A, на пересечении которых стоит ненулевой минор порядка r, до линейно независимой системы из $r + 1$ строки. Последние образуют подматрицу в A ранга $r + 1$ и ее столбцы, отвечающие ненулевому минору порядка r, линейно независимы. Снова используя сформулированный результат (для столбцов), получим, что набор из данных r линейно независимых столбцов можно продолжить до аналогичного набора из $r + 1$ столбца. Подводя итог, мы видим, что если $\mathrm{rk}A \geq r + 1$, то для данного ненулевого минора порядка r найдется ненулевой окаймляющий минор порядка $r + 1$.

Задача

6.38. В матриче A ранга r любой минор порядка r, образуемый пересечением r линейно независимых строк с r линейно независимыми столбцами, отличен от нуля.

Решение. r линейно независимых строк в матрице A ранга r являются базисными, то есть каждая из остальных строк - их линейная комбинация. Вычитая из небазисных строк линейные комбинации базисных, которые им равны, получаем матрицу A', в которой все базисные строки остались без изменения, а небазисные заменились нулевыми. Поскольку при этом используются только элементарные преобразования строк (типа I), то $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A'$. Кроме того, линейные зависимости между столбцами при этом также не изменились, и значит r столбцов матрицы A' с теми же номерами, что r линейно независимых столбцов из формулировки Теоремы, останутся линейно независимыми. По теореме 6.35 в подматрице матрицы A', образованной этими r линейно независимыми столбцами, должен быть ненулевой минор порядка r, которым может быть только минор, образованный пересечением данной системы столбцов с исходной системой из r линейно независимых строк, который совпадает с соответствующим минором матрицы A.

Заметим, что в предыдущей задаче условие равенства числа строк и столбцов рангу существенно. Например, в единичной матрице порядка 2 на пересечении 1-й строки и 2-го столбца стоит нулевая подматрица.

3.5.3 6.3 Systems of Linear Equations.

С использованием понятия ранга матрицы мы можем дать общепринятые формулировки результатов о системах линейных уравнений, доказанных в разделе 2.7. Кроме того, мы ответим на вопросы, сформулированные в конце указанного раздела.

Теорема

6.39. (Теорема Кронекера-Капелли). Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу матрицы коэффициентов.

Proof. □

Действительно, в обозначениях раздела 2.7 это условие $\tilde{r} = r$.
Заметим, что доказанная теорема очевидна и без приведения к ступенчатому виду. Действительно, условие, что ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы коэффициентов в точности означает, что столбец правых частей принадлежит линейной оболочке столбцов матрицы коэффициентов, то есть является линейной комбинацией указанных столбцов, а как мы знаем, коэффициенты такой линейной комбинации образуют решение.

Задача

6.40. Найдите необходимые и достаточные условия на $m \times n$-матричу A при которых система $Ax = b$

1. совместна для любого столбца $b \in \mathbb{K}^m$;
2. для данного $b \in \mathbb{K}^m$ имеет, причем единственное решение.

Теорема

6.41. Совместная система линейных уравнений является определенной тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы коэффициентов равен числу неизвестных.

Proof. □

Действительно, в обозначениях раздела 2.7 это условие $r = n$ (в предположении $\tilde{r} = r$).

Опять же, доказанная теорема очевидна без приведения к ступенчатому виду. Действительно, ранг матрицы коэффициентов системы равен числу неизвестных в точности тогда, когда столбцы матрицы коэффициентов линейно независимы, далее можно воспользоваться Леммой 6.3.

Следующая простая и фундаментальная теорема показывает, какие подмножества в пространстве столбцов $\mathbb{K}^n$ могут быть множествами решений СЛУ и, в частности, СЛОУ, и играет исключительно важную роль в теории систем линейных уравнений (причем не только алгебраических, но и дифференциальных). Читателю предлагается продумать ее геометрический смысл, используя результаты аналитической геометрии.

Теорема

6.42. 1) Множество решений СЛОУ $Ax = 0$ от n неизвестных является линейным подпространством в пространстве столбцов $\mathbb{K}^n$.
2) Зафиксируем некоторое решение x_0 совместной СЛУ $Ax = b$. Тогда всякое ее решение представляется в виде $x_0 + y$, где y - некоторое решение $Ax = 0$. И обратно, любая такая сумма - решение $Ax = b$.

Утверждение второй части теоремы кратко формулируют так: "общее решение совместной неоднородной системы является суммой ее частного решения и общего решения соответствующей однородной системы".

Proof. □

1) Нулевой столбец (нулевой вектор в $\mathbb{K}^n$) является решением СЛОУ. Далее непосредственно проверяется, что для двух решений СЛОУ их сумма также будет ее решением, а также что вместе с каждым решением его произведение на скаляр тоже будет решением. Ясно, что все эти утверждения достаточно проверить для одного однородного уравнения $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$.
2) Пусть x_1 - еще одно решение неоднородной системы. Тогда разность $x_1 - x_0$ является решением однородной системы. В самом деле, $A(x_1 - x_0) = Ax_1 - Ax_0 = b - b = 0$. Обозначая его y, получаем $x_1 = x_0 + y$. Наоборот, $A(x_0 + y) = Ax_0 + Ay = b + 0 = b$, то есть всякая такая сумма является решением неоднородной системы.

Раз пространство $U = U_A$ решений СЛОУ $Ax = 0$ от n неизвестных является линейным подпространством в $\mathbb{K}^n$, то $0 \leq \dim U \leq n$. Легко привести примеры систем для каждого возможного значения размерности. От каких характеристик СЛОУ (ее матрицы коэффициентов) зависит размерность пространства решений? Интуиция подсказывает, что каждое независимое уравнение системы уменьшает размерность пространства решений на единицу. То есть пространство решений пустой системы от n неизвестных есть все $\mathbb{K}^n$, системы, состоящей из одного ненулевого уравнения является $n - 1$-мерным подпространством в $\mathbb{K}^n$, из двух независимых уравнений $-n - 2$-мерным подпространством и т.д. Очевидно, что формализацией понятия "система из независимых уравнений" является условие, что строки матрицы коэффициентов системы линейно независимы, то есть ранг указанной матрицы равен числу ее строк (=числу уравнений системы).

Теорема

6.43. Размерность пространства решений СЛОУ $Ax = 0$ от n неизвестных равна $n - \operatorname{rk} A$.

Proof. □

Элементарными преобразованиями строк приведем матрицу A к упрощенному виду; если в нем есть нулевые строки, отбросим их, и обозначим полученную матрицу A'. При этом класс эквивалентности системы не изменился (то есть системы $A'x = 0$ и $Ax = 0$ задают одно и то же подпространство в $\mathbb{K}^n$). Главные столбцы матрицы A', которые являются столбцами коэффициентов перед главными неизвестными, образуют единичную матрицу. Например, если главные неизвестные идут подряд (это наиболее частый случай; общий случай сводится к этому переименованием переменных), то $A' = (E_rC)$, где $C = (c_{ij})$ - некоторая матрица размера $r \times (n - r)$. Перенося слагаемые со свободными неизвестными в правую часть, мы получаем выражение главных
неизвестных через свободные

$$\begin{cases} x_1 = -c_{11}x_{r+1} - c_{12}x_{r+2} - \ldots - c_{1n-r}x_n \\ x_2 = -c_{21}x_{r+1} - c_{22}x_{r+2} - \ldots - c_{2n-r}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = -c_{r1}x_{r+1} - c_{r2}x_{r+2} - \ldots - c_{rn-r}x_n \end{cases} \tag{45}$$

Последовательно присваивая одной из свободных неизвестных $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ значение 1, а остальным - 0, получаем следующий набор решений

$$u_1 := (-c_{11}, -c_{21}, \ldots, -c_{r1}, 1, 0, \ldots, 0)^T$$
$$u_2 := (-c_{12}, -c_{22}, \ldots, -c_{r2}, 0, 1, \ldots, 0)^T$$
. . . .
$$u_{n-r} := (-c_{1n-r}, -c_{2n-r}, \ldots, -c_{rn-r}, 0, 0, \ldots, 1)^T$$

Полезно заметить, что указанные столбцы являются столбцами матрицы $\binom{-C}{E_{n-r}}$, где E_{n-r} - единичная матрица порядка $n-r$.

Покажем, что полученные решения образуют базис в пространстве решений, отсюда и будет следовать теорема. Действительно, выписанные столбцы линейно независимы, так как составленная из них матрица имеет единичную подматрицу порядка $n-r$ и, значит, ее ранг не меньше $n-r$. С другой стороны, каждое решение системы $A'x = 0$ однозначно определяется (по формулам (45)) значениями свободных неизвестных, а для любых $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r} \in \mathbb{K}$ линейная комбинация $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_{n-r} u_{n-r}$ является решением системы $A'x = 0$, для которого свободные неизвестные равны $x_{r+1} = \lambda_1, x_{r+2} = \lambda_2, \ldots, x_n = \lambda_{n-r}$ (то есть произвольному набору); таким образом, любое решение указанной системы является линейной комбинацией $u_1, u_2, \ldots, u_{n-r}$.

Note.

6.44. Приведем идею альтернативного доказательства предыдущей теоремы. Её утверждение, очевидно, равносильно тому, что для матрицы A размера $m \times n$ и ранга r максимальный ранг матрицы B, такой что $AB = O$, равен $n-r$. План доказательства этого утверждения разобьем на пункты.

1. Существуют невырожденные матрицы C и D порядков соответственно m и n такие, что

$$CAD = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Равносильное утверждение: любую матрицу A как в условии с помощью элементарных преобразований строк и столбцов можно привести к указанному виду.

2) Для матрицы $A' := \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ матрицы B' такие, что $A'B' = O$, имеют вид $\binom{0}{F}$, где верхний блок из нулей состоит из r строк, а нижний блок F - из $n-r$ строк. То есть для матрицы A' максимальный ранг матрицы B' такой, что $A'B' = O$, равен $n-r$ (например, в качестве F можно взять единичную матрицу порядка $n-r$).

3) В предыдущих обозначениях имеем $O = A'B' = CADB'$, а поскольку C невырождена, $ADB' = O$, и снова в силу невырожденности матрицы $D, \operatorname{rk}(DB') = \operatorname{rk} B'$. Таким образом, для данной матрицы A мы нашли матрицу $B := DB'$ ранга $n-r$ такую, что $AB = O$.

4) Наоборот, пусть $A\widetilde{B} = O$. Тогда $CADD^{-1}\widetilde{B} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} D^{-1}\widetilde{B} = O$, откуда, как мы знаем из пункта 2), следует $\operatorname{rk}\left(D^{-1}\widetilde{B}\right) \leq n-r$, но в силу невырожденности $D, \operatorname{rk}\left(D^{-1}\widetilde{B}\right) = \operatorname{rk}\widetilde{B}$.

Заметим, что любая матрица B размера $n \times (n-r)$ и ранга $n-r$ такая, что $AB = O$, является фундаментальной матрицей СЛОУ $Ax = 0$. В самом деле, линейная оболочка столбцов B содержится в пространстве решений U_A этой системы. Если бы включение было строгим, то нашлось бы решение нашей системы, не принадлежащее линейной оболочке столбцов B, и добавив его к столбцам матрицы B мы получили бы матрицу B' ранга $n-r+1$ такую, что $AB' = O$, в противоречии с доказанным ранее.

Задача

6.45. Допустим, что добавление к некоторой СЛОУ еще одного уравнения (от того же множества неизвестных) не меняет множества решений. Докажите, что добавленное уравнение является линейной комбинацией уравнений исходной системы.

Решение. Пусть $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ и $A' \in \mathrm{Mat}_{(m+1)\times n}(\mathbb{K})$ - матрицы коэффициентов исходной системы и системы с добавленным уравнением. Пусть U_A и $U_{A'}$ - их пространства решений. Поскольку добавление к системе нового уравнения не увеличивает множество решений, то $U_{A'} \subseteq U_A$, но по условию $U_{A'} = U_A$, а значит размерности этих пространств $n - \operatorname{rk} A$ и $n - \operatorname{rk} A'$ равны, откуда $\operatorname{rk} A' = \operatorname{rk} A$, что и означает, что добавленная строка является линейной комбинацией строк матрицы A.

Задача

6.46. Докажите, что две СЛОУ от одинакового числа неизвестных эквивалентны тогда и только тогда, когда уравнения каждой из них являются линейными комбинаиими уравнений другой системы.

Решение. Пусть A и B - матрицы данных систем. Если две системы эквивалентны, то каждая из них эквивалентна системе с матрицей $\binom{A}{B}$, а значит ранги этих трех матриц равны, откуда легко выводится, что строки A являются линейными комбинациями строк B и наоборот.

Обратно, ясно, что если линейная оболочка строк A содержится в линейной оболочке строк B, то $U_B \subseteq U_A$, откуда все следует.

Заметим, что выбор базиса в пространстве решений не единственен (за исключением тривиальных случаев), но так как число базисных векторов пространства не зависит от выбора базиса, количество базисных решений для данной системы ни от каких выборов не зависит (а зависит, как показывает предыдущая теорема, только от числа неизвестных и ранга матрицы коэффициентов).

Базис в пространстве решений СЛОУ называется фундаментальной системой решений (кратко ФСР), а матрица, полученная выписыванием фундаментальных решений в столбцы - фундаментальной матрицей системы.

Из предыдущего обсуждения следует, что число столбцов (а значит размер) фундаментальных матриц для данной СЛОУ один и тот же. Сформулируем и докажем критерий того, что данная матрица является фундаментальной матрицей данной СЛОУ.

Пусть A - матрица с n столбцами и рангом r.

Предложение

6.47. Матрица Φ размера $n \times (n-r)$ является фундаментальной матрицей СЛОУ Ax = 0 тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:

1. $A\Phi = 0$;
2. $\operatorname{rk} \Phi = n - r$.

Например, матрица $\Phi := \binom{-C}{E_{n-r}}$ - фундаментальная матрица для системы однородных уравнений с упрощенной матрицей $A := (E_r C)$ (у которой главные неизвестные идут подряд). В том, что $A\Phi = 0$ (нулевой матрице) проще всего убедиться, записав $\binom{-C}{E_{n-r}} = \binom{-C}{0} + \binom{0}{E_{n-r}}$ и воспользовавшись дистрибутивностью умножения матриц относительно сложения.

Proof. □

Если Φ - фундаментальная матрица системы $Ax = 0$, то ее столбцы являются решениями указанной системы, откуда следует соотношение $A\Phi = 0$. Кроме того, столбцы фундаментальной матрицы образуют базис в пространстве решений, откуда следует, что они линейно независимы и их $n - r$ штук (см. Теорему 6.43), то есть $\operatorname{rk} \Phi = n - r$.

Обратно, если Φ - матрица размера $n \times (n-r)$ такая, что $A\Phi = 0$, то ее столбцы являются решениями системы $Ax = 0$, а если при этом ее ранг равен числу ее столбцов $n-r$, то они линейно независимы и, значит, образуют базис в пространстве решений системы $Ax = 0$, поскольку, согласно Теореме 6.43, размерность указанного пространства равна $n-r$.

Задача

6.48. Найдите ФСР однородной системы с матрицей коэффициентов (CE_r).

Задача

6.49. Пусть A - матрица ранга r, состоящая из n столбцов. Известно, что для матрицы B определено произведение $AB = 0$. Оцените сверху $\mathrm{rk}B$.

Решение. Столбцы матрицы B являются решениями СЛОУ $Ax = 0$, поэтому среди них не более $n-r$ линейно независимых. Если $B - \Phi$ указанной системы, то $AB = 0$ и $\mathrm{rk}\ B = n - r$, то есть оценка является точной.

Теорема

6.50. Пусть Φ - фундаментальная матрица СЛОУ $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Тогда система $\Phi^T\mathbf{y} = \mathbf{0}$ задает линейную оболочку столбцов матрицы A^T (то есть, по существу, строк матрицы A).

Proof. □

Равенство $A\Phi = 0$ равносильно равенству $\Phi^T A^T = 0$. Последнее означает, что столбцы матрицы A^T являются решениями системы $\Phi^T y = 0$. Другими словами, линейная оболочка столбцов A^T содержится в пространстве решений указанной системы, осталось лишь проверить, что ее размерность совпадает с размерностью пространства решений.

Если матрица A состоит из n столбцов и имеет ранг r, то Φ имеет размер $n \times (n-r)$ и ранг $n-r$, а значит Φ^T размера $(n-r)\times n$ и ранга $n-r$, откуда получаем, что размерность пространства решений системы $\Phi^T y = 0$ равна $n-(n-r)$, что совпадает с $r = \mathrm{rk}\, A = \mathrm{rk}\ A^T$.

Используя предыдущую Теорему, получим алгоритм, как по подпространству пространства $\mathbb{K}^n$, заданному как линейная оболочка некоторой конечной системы столбцов, построить СЛОУ, для которой данное подпространство является пространством решений. (Из существования такого алгоритма следует, что любое подпространство в $\mathbb{K}^n$ является пространством решений некоторой СЛОУ).

Пусть $\langle c_1, c_2, \dots, c_k\rangle \subseteq \mathbb{K}^n$ - линейная оболочка столбцов, которую мы хотим задать системой однородных уравнений. Можно предположить, что эти столбцы линейно независимые (в противном случае выберем среди них максимальную линейно независимую подсистему). Пусть $\Phi := (c_1 c_2 \dots c_k)$ - матрица, составленная из этих столбцов. Пусть Ψ - фундаментальная матрица системы $\Phi^T y = 0$. Тогда $\Phi^T\Psi = 0$, следовательно $\Psi^T\Phi = 0$, и значит $\langle c_1, c_2, \dots, c_k\rangle$ содержится в пространстве решений системы $\Psi^T x = 0$. Теперь вычисления с рангами, аналогичные приведенным выше, показывают, что эти пространства имеют одинаковую размерность, а значит система $\Psi^T x = 0$ задает данную линейную оболочку.

Наряду с теоремой Кронекера-Капелли есть еще удобный критерий разрешимости системы линейных уравнений, причем легко обобщающийся на бесконечномерный случай теорема Фредгольма.

Для СЛУ $Ax = b$ СЛОУ $A^T y = 0$ называется сопряженной однородной системой. Заметим, что последняя может быть переписана в виде $y^T A = 0$.

Теорема

6.51. (Теорема Фредгольма). Система $Ax = b$ разрешима тогда и только тогда, когда для любого решения y_0 сопряжснной однородной системы $A^T y = 0$ выполнено равенство $y_0^T b = 0$.

Заметим, что условие $y_0^T b = 0$ над полем $\mathbb{R}$ можно интерпретировать как условие ортогональности (относительно "стандартного" скалярного произведения столбцов, а именно такого, для которого столбцы e_i образуют ортонормированный базис) столбца b произвольному столбцу, являющемуся решением сопряженной однородной системы.

Proof. □

Пусть система $Ax = b$ разрешима и x_0 - ее решение. Тогда для произвольного решения y_0 сопряженной однородной системы

$$y_0^T A x_0 = \left(y_0^T A\right) x_0 = 0 x_0 = 0$$

с другой стороны,

$$y_0^T A x_0 = y_0^T \left(A x_0\right) = y_0^T b$$

откуда $y_0^T b = 0$.

Предположим теперь, что система $Ax = b$ несовместна. Это равносильно тому, что в упрощенном виде ее расширенной матрицы $(A|b)$ есть строка $(0 \ldots 0|1)$ (последняя ненулевая строка сверху). Так как упрощенный вид получается из исходной матрицы элементарными преобразованиями строк, строка $(0 \ldots 0|1)$ является линейной комбинацией строк матрицы $(A|b)$. То есть существует такой столбец y_0, что $y_0^T (A|b) = (0 \ldots 0|1)$. Последнее равенство равносильно системе $y_0^T A = 0, y_0^T b = 1$. То есть предположив несовместность системы $Ax = b$, мы нашли такое решение y_0 сопряженной однородной системы, что $y_0^T b \neq 0$.

3.5.4 6.4 Coordinates of the Vector in the Basis

Пусть в n-мерном пространстве V над полем $\mathbb{K}$ зафиксирован базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Тогда любой вектор $v \in V$ единственным образом по нему раскладывается:

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \ldots + v_n e_n \tag{46}$$

Согласно Лемме 6.3 из линейной независимости базисных векторов следует, что набор скаляров $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{K}^n$ определен однозначно, и v_i называется i-й координатой вектора v в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Согласно стандартному соглашению, набор $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ записывается в виде столбца и называется столбцом координат вектора v в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Равенство (46) часто записывают в "матричной форме"

$$v = (e_1, e_2, \ldots, e_n) (v_1, v_2, \ldots, v_n)^T \tag{47}$$

(произведение строки из базисных векторов на столбец координат).

Предложение

6.52. Сопоставление каждому вектору n-мерного линейного пространства V его координатного столбца в фиксированном базисе $e := \{e_1, \ldots, e_n\}$ задает биекцию

$$\varphi_e : V \to \mathbb{K}^n, \quad \varphi_e(v) = (v_1, \ldots, v_n)^T$$

пространства V с пространством столбцов $\mathbb{K}^n$ высоты n. Кроме того, данная биекция сохраняет операции: $\varphi_e(u + v) = \varphi_e(u) + \varphi_e(v)$ (координатный столбец суммы векторов равен сумме координатных столбцов слагаемых) и $\varphi_e(\lambda v) = \lambda \varphi_e(v)$ (координатный столбец произведения вектора на скаляр равен произведению координатного столбца вектора на тот же скаляр).

Proof. ☐

Как уже отмечалось, тот факт, что φ_e корректно определено, следует из существования и единственности разложения вектора по базису. Если двум векторам отвечает один и тот же столбец, то они совпадают, поскольку имеют одинаковые разложения по выбранному базису. Значит, φ_e инъективно. Произвольный столбец $(v_1,\ldots,v_n)^T$ является координатным столбцом вектора $v=v_1e_1+\ldots+v_ne_n$, который существует в силу аксиом векторного пространства.

Вторая часть предложения следует из свойств операций над векторами, вытекающих из аксиом линейного пространства: если $u=\sum u_ie_i,\quad v=\sum v_ie_i$, то $u+v=\sum(u_i+v_i)\,e_i,\quad \lambda v=\sum(\lambda v_i)\,e_i$.

Следствие

6.53. При любом выборе базиса в пространстве V линейные зависимости между векторами V - то же, что линейные зависимости между их координатными столбцами.

Proof. ☐

Заметим, что при биекции φ_e нулевой вектор пространства V соответствует нулевому столбцу в $\mathbb{K}^n$. Пусть $\sum\limits_i\lambda_iv_i=0$ - линейная зависимость. Тогда

$$(0,\ldots,0)^T=\varphi_e(0)=\varphi_e\left(\sum_i\lambda_iv_i\right)=\sum_i\lambda_i\varphi_e\left(v_i\right)$$

то есть линейная зависимость между векторами при биекции φ_e переходит в линейную зависимость между их координатными столбцами.

Обратно, если $\sum\limits_i\lambda_i\varphi_e\left(v_i\right)=(0,\ldots0)^T$ - линейная зависимость между столбцами, то

$$(0,\ldots0)^T=\sum_i\lambda_i\varphi_e\left(v_i\right)=\varphi_e\left(\sum_i\lambda_iv_i\right)$$

а значит в силу сказанного в начале доказательства $\sum\limits_i\lambda_iv_i=0$.

В частности, ранг системы векторов равен рангу их координатных столбцов в произвольном базисе, координатные столбцы максимальной линейно независимой подсистемы системы векторов образуют максимальную линейно независимую подсистему их системы столбцов и т.д.

Зафиксировав базис и заменяя векторы их координатными столбцами мы сводим геометрию линейного пространства к алгебре столбцов, что полезно для конкретных вычислений. Может показаться, что про геометрию после этого можно забыть, но это далеко не так. Как правило, смысл теорем и их доказательства намного прозрачнее, если их излагать на геометрическом языке.

Заметим, что построенная выше биекция зависит от базиса - каждому базису e в V отвечает своя биекция $\varphi_e: V\to\mathbb{K}^n$. (Вообще, до тех пор, пока мы не выбрали какой-то базис, все базисы в пространстве V равноправны). Пространство $\mathbb{K}^n$ с этой точки зрения не просто n-мерное пространство над полем $\mathbb{K}$, а n-мерное пространство с выбранным "стандартным" базисом из столбцов $e_i=(0,\ldots,1,\ldots0)^T$ (1 на i-м месте), в который переходит при биекции выбранный базис в V.

Вообще говоря, в линейном пространстве много базисов, все что мы пока знаем что они содержат одинаковое число векторов. Сейчас мы построим биекцию между множеством базисов в n-мерном пространстве над полем $\mathbb{K}$ и множеством невырожденных матриц порядка n с элементами из $\mathbb{K}$.

Пусть в n-мерном пространстве V выбран базис $\{e_1,\ldots,e_n\}$ и система векторов $\{e'_1,\ldots,e'_n\}$. Запишем разложения векторов системы по базису:

$$\begin{aligned}
e'_1&=c_{11}e_1+c_{21}e_2+\ldots+c_{n1}e_n\\
e'_2&=c_{12}e_1+c_{22}e_2+\ldots+c_{n2}e_n\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
e'_n&=c_{1n}e_1+c_{2n}e_2+\ldots+c_{nn}e_n
\end{aligned}$$

и составим матрицу $C = (c_{ij})$. Подчеркнем, что матрица C получается выписыванием координат векторов системы относительно базиса в столбцы. Приведенное определение равносильно тому, что C удовлетворяет равенству

$$(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)\, C \tag{48}$$

(единственность матрицы C, удовлетворяющей приведенному равенству, следует из линейной независимости системы $\{e_1, \ldots, e_n\}$).

Предложение

6.54. Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ - базис в V. Система векторов $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$, задаваемая (48), линейно независима (является базисом в V) тогда и только тогда, когда матрица C невырождена.

Доказательство сразу вытекает из Следствия 6.53.

Вот другое рассуждение. Если матрица C вырождена, то существует такой столбец $x_0 \neq 0$ высоты n, что $Cx_0 = 0$. Тогда, умножая обе части (48) справа на x_0, получаем нетривиальную линейную зависимость между векторами $e'_1, \ldots, e'_n$.

Наоборот, если система $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ линейно зависима, то существует ненулевой столбец x_0 высоты n такой, что $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)\, x_0 = 0$. Тогда из (48) и линейной независимости системы $\{e_1, \ldots, e_n\}$ получаем, что $Cx_0 = 0$, то есть столбцы матрицы C линейно зависимы, а значит эта матрица вырождена.

Определение

6.55. Матрицей перехода от базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ к базису $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ называется матрица C, определенная равенством (48).

$$(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)\, C \tag{48}$$

Зафиксируем некоторый базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ пространства V. Из предыдущего Предложения следует, что сопоставляя базису $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ матрицу перехода к нему от фиксированного базиса мы получаем биекцию между множеством базисов в n-мерном пространстве V и множеством невырожденных матриц порядка n над данным полем (над которым определено векторное пространство V). В частности, самому фиксированному базису $\{e_1, \ldots, e_n\}$ при этом соответствует единичная матрица E (разумеется, определенная биекция зависит от того, какой базис зафиксирован).

Задача

6.56. Пусть V – n-мерное векторное пространство над полем $\mathbb{F}$, состоящим из q элементов. Hamu:

a) число векторов в пространстве V;

b) число решений уравнения $AX = 0$, где A - прямоугольная матрица ранга r, X - столбец, неизвестных высоты n;

c) число базисов пространства V;

d) число невырожденных матриц порядка п над полем $\mathbb{F}$;

e) число k-мерных подпространств пространства V.

Задача

6.57. Опишите множество всех фундаментальных матриц, СЛОУ $Ax = 0$, если Φ - какая-то ее фундаментальная матрица.

Решение. Пусть для определенности матрица A имеет размер $m \times n$ и ранг r. Если $\Phi = (\phi_1 \ldots \phi_{n-r})$ - фундаментальная матрица системы $Ax = 0$, то ее столбцы $\{\phi_1, \ldots, \phi_{n-r}\}$ образуют базис в пространстве решений $U_A \subset \mathbb{K}^n$ этой системы. Если Φ' - еще одна фундаментальная матрица той же системы $Ax = 0$, то система ее столбцов $\left\{\phi'_1, \ldots, \phi'_{n-r}\right\}$

образует еще один базис в том же пространстве U_A. Так как ϕ_i' являются линейными комбинациями ϕ_j, то существует такая матрица C порядка $n-r$, что $\Phi' = \Phi C$ (в i-м столбце C стоят коэффициенты разложения ϕ_i' по $\{\phi_1, \ldots, \phi_{n-r}\}$). Так как, наоборот, ϕ_i выражаются через ϕ_j', то матрица C должна быть обратимой. То есть матрица C является матрицей перехода между базисами $\{\phi_1, \ldots, \phi_{n-r}\}$ и $\left\{\phi_1', \ldots, \phi_{n-r}'\right\}$.

Предложение

6.58. Если C - матрица перехода от базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ к базису $\{e_1', \ldots, e_n'\}$, а D - матрица перехода от $\{e_1', \ldots, e_n'\}$ к базису $\{e_1'', \ldots, e_n''\}$, то CD матриц, перехода от $\{e_1, \ldots, e_n\}$ к $\{e_1'', \ldots, e_n''\}$.

Proof. □

Имеем

$$(e_1'', e_2'', \ldots, e_n'') = ((e_1, e_2, \ldots, e_n)\, C)\, D$$

Тогда если мы докажем следующую "ассоциативность"

$$((e_1, e_2, \ldots, e_n)\, C)\, D = (e_1, e_2, \ldots, e_n)\, (CD)$$

то требуемое утверждение будет следовать из единственности матрицы перехода (см. фразу после равенства (48)).

Подставляя $e_j' = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i c_{ij}$ в $e_k'' = \sum\limits_{j=1}^{n} e_j' d_{jk}$, имеем

$$e_k'' = \sum_{j=1}^{n} e_j' d_{jk} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} e_i c_{ij} \right) d_{jk} = \sum_{j=1}^{n} (e_1 c_{1j} + e_2 c_{2j} + \ldots + e_n c_{nj})\, d_{jk} =$$

$$= e_1 \sum_{j=1}^{n} c_{1j} d_{jk} + e_2 \sum_{j=1}^{n} c_{2j} d_{jk} + \ldots + e_n \sum_{j=1}^{n} c_{nj} d_{jk} = \sum_{i=1}^{n} e_i \left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij} d_{jk} \right)$$

Кстати, из доказанного Предложения и невырожденности матрицы перехода между базисами можно еще раз вывести, что произведение невырожденных матриц невырождено. В то же время следующая задача, в частности, означает, что невырожденная матрица обратима (впрочем, мы это уже знаем и так).

Задача

6.59. Если C - матрица перехода от базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ к базису $\{e_1', \ldots, e_n'\}$, то матрицей перехода "в обратном направлении" - от $\{e_1', \ldots, e_n'\}$ к $\{e_1, \ldots, e_n\}$ - будет C^{-1}

Координаты ненулевого вектора $v \in V$ в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$ пространства V зависят от базиса. Например, любой такой вектор можно включить в базис в качестве первого вектора (см. Теорему 6.18), и тогда его координаты в таком базисе будут составлять столбец $(1, 0, \ldots, 0)^T$.

Решим следующую задачу: пусть вектор v имеет координатный столбец $(v_1, v_2, \ldots, v_n)^T$ в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и пусть задан новый базис $\{e_1', \ldots, e_n'\}$, связанный с первым матрицей перехода C. Какие координаты вектор v будет иметь в новом базисе?

Используя запись (47) и равенство (48), имеем

$$v = (e_1, \ldots, e_n)\, (v_1, \ldots, v_n)^T = (e_1', \ldots, e_n')\, (v_1', \ldots, v_n')^T = ((e_1, \ldots, e_n)\, C)\, (v_1', \ldots, v_n')^T$$

Сравнивая второе выражение с последним и используя ассоциативность умножения матриц и единственность разложения вектора по базису, получаем

$$(v_1, \ldots, v_n)^T = C\, (v_1', \ldots, v_n')^T \qquad \text{или} \qquad (v_1', \ldots, v_n')^T = C^{-1}\, (v_1, \ldots, v_n)^T \tag{49}$$

Обратим внимание читателя на особенность полученной формулы: чтобы получить столбец координат вектора в новом базисе, нужно умножить столбец его координат в старом базисе на матрицу, обратную к матрице перехода от старого базиса к новому. Заметим, что оба равенства в (49) эквивалентны в силу Задачи 6.59.

Полученный результат можно выразить следующим образом. Пусть $\varphi_e, \varphi_{e'} : V \to \mathbb{K}^n$ - линейные биекции, построенные по базисам e и e'. Тогда коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
& V \arrow[dl, "\varphi_e"'] \arrow[dr, "\varphi_{e'}"] & \\
\mathbb{K}^n \arrow[rr, "C^{-1}\cdot"] & & \mathbb{K}^n,
\end{tikzcd}$$

где горизонтальная стрелка отвечает умножению столбцов слева на C^{-1} (коммутативность диаграммы в данном случае означает, что два пути из вершины в правый нижний угол совпадают, то есть $\varphi_{e'} = C^{-1} \circ \varphi_e$).

Note.

6.60. Столбцы матрицы можно считать координатными столбцами некоторой системы векторов в некотором базисе. Тогда элементарные преобразования столбцов отвечают элементарным преобразованиям этой системы векторов, а элементарные преобразования строк - элементарным преобразованиям системы базисных векторов. Это дает еще одну интерпретацию известного нам результата о том, что элементарные преобразования строк не меняют не только строчный, но и столбцовый ранг.

3.6 7 Linear Spaces and Mappings

Данная глава начинается с изучения важного для дальнейшего понятия прямой суммы подпространств. Далее изучаются линейные отображения между линейными пространствами. Вводятся важные понятия ядра и образа линейного отображения. Показывается, как относительно выбранных базисов линейные отображения записываются матрицами. Это дает новую интерпретацию результатов предыдущей главы о системах линейных уравнений и рангах матриц. Далее доказывается, что известные операции с матрицами (сложение, умножение) отвечают соответствующим операциям над линейными отображениями. Именно использование аппарата матриц делает линейную алгебру столь эффективной в вычислительном отношении.

3.6.1 7.1 Subspaces and Direct Sums

Пусть $U \subset V$ - подпространство линейного пространства V.

Определение

7.1. Базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ в V называется согласованным с подпространством U, если $U = \langle e_{i_1}, \dots, e_{i_k} \rangle$ (то есть U является линейной оболочкой некоторого подмножества векторов данного базиса).

Например, базис $\{e_1, e_2\}$ в двумерном пространстве V согласован с нулевым подпространством, одномерными подпространствами $\langle e_1 \rangle, \langle e_2 \rangle$ и самим пространством V, а, например, с одномерным подпространством $\langle e_1 + e_2 \rangle$ не согласован.

Очевидно, что для всякого подпространства $U \subset V$ существует согласованный с ним базис в V. Действительно, выберем произвольный базис в U и продолжим его до базиса в V.

Пусть теперь в V выбраны два подпространства $U \subset V, W \subset V$. Существует ли базис в V, согласованный одновременно с подпространствами U и W? Чтобы изучить этот вопрос, введем две важные операции над подпространствами фиксированного пространства (пока для случая двух подпространств).

Для двух подпространств $U, W \subset V$ определим подмножество

$$U + W := \{u + w | u \in U, w \in W\} \subset V$$

(векторы из разных подпространств одного и того же пространства V можно складывать как элементы из V). Мгновенно проверяется, что $U + W$ - не просто подмножество в V, а подпространство в V.

Определение

7.2. Суммой подпространств $U, W \subset V$ называется подпространство $U+ W$ в V.

Заметим, что объединение двух подпространств $U, W \subset V$ как правило не является подпространством в V (только подмножеством).

Задача

7.3. Докажите, что теоретико-множественное оббединение $U \cup W$ двух подпространств $U, W \subset V$ является подпространством в V тогда и только тогда, когда одно из них содержится в другом: $U \subset W$ или $W \subset U$.

Решение. Пусть $U \cup W$ подпространство, но U не содержится в W; выберем $u \in U, u \notin W$. Тогда $\forall w \in W u + w \in U$ (иначе $u + w = w' \in W$ и значит $u = w' - w \in W$ в противоречии с выбором u). Откуда $W \subset U$. Если же одно из подпространств содержится в другом, то их объединение совпадает с этим подпространством.

Задача

7.4. Докажите, что сумма $U + W$ является наименьшим из подпространств в V, содержащим и U и W. Эквивалентно, $U + W$ есть линейная оболочка оббединения этих подпространств, то есть $U + W = \langle U \cup W \rangle$.

В отличие от объединения, пересечение любого (конечного или бесконечного) семейства подпространств данного пространства всегда является подпространством (докажите!).

Определение

7.5. Пересечением подпространств $U, W \subset V$ называется подпространство, множество элементов которого является их обычным теоретико-множественным пересечением $U \cap W$ как подмножеств в V.

Задача

7.6. Докажите, что

$$\max(\dim U, \dim V) \leq \dim(U + V) \leq \dim U + \dim V$$

Вскоре мы серьезно улучшим результат предыдущей задачи.

Теорема

7.7. Для любой пары подпространств $U, W \subset V$ существует базис в V, согласованный с U и W.

Proof. □

Выберем базис $\{e_1, \ldots, e_p\}$ в $U \cap W$. Это - линейно независимая система векторов и в U и в W. Пусть $\{e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_k\}$ и $\{e_1, \ldots, e_p, e_{k+1}, \ldots, e_{k+l-p}\}$ - ее дополнения до базисов в U и W соответственно (наши обозначения предполагают, что $\dim(U \cap W) = p, \dim U = k, \dim W = l$).

Мы утверждаем, что система векторов

$$\{e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_{k+l-p}\} \tag{51}$$

линейно независима (и значит является базисом в $U + W$, поскольку она, очевидно, порождает $U + W$). Действительно, пусть

$$\sum_{i=1}^{k+l-p} \lambda_i e_i = 0$$

- линейная зависимость. Тогда

$$x := \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i = -\sum_{i=k+1}^{k+l-p} \lambda_i e_i \tag{52}$$

Заметим, что в (52) первая линейная комбинация лежит в U, вторая - в W, поэтому вектор x лежит в пересечении $U \cap W$. Значит $\exists \mu_i, i = 1, \ldots, p$ такие, что $x = \sum\limits_{i=1}^{p} \mu_i e_i$. Из линейной независимости системы $\{e_1, \ldots, e_p, e_{k+1}, \ldots, e_{k+l-p}\}$ (как базиса в W) следует, что правая часть в (52) равна нулю, а значит $x = 0$, откуда все λ_i равны нулю. Таким образом, система (51) линейно независима, как и утверждалось. Теперь осталось дополнить ее до базиса в V, при этом, очевидно, получится требуемый базис, согласованный с подпространствами U и W.

В качестве иллюстрации к доказанной теореме читателю предлагается представить два двумерных подпространства U и W в трехмерном пространстве, пересекающихся по одномерному $U \cap W$. Тогда $\{e_1\}$ - базис в $U \cap W, \{e_1, e_2\}$ - в $U, \{e_1, e_3\}$ - в W, а $\{e_1, e_2, e_3\}$ - в $U + W$.

Следствие

7.8. $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.

Задача

7.9. Дайте простое доказательство Теоремы 6.33 с использованием понятия суммы подпространств.

Определение

7.10. Сумма $U + W$ подпространств $U, W \subset V$ называется прямой (обозначение $U \oplus W$), если для любого вектора $v \in U + W$ его представление $v = u + w$ в виде суммы $u \in U$ и $w \in W$ единственно. Другими словами, если $u + w = u' + w'$, то $u = u', w = w'$.

Предложение

7.11. Сумма двух подпространств $U + W$ прямая тогда и только тогда, когда $U \cap W = 0$.

Proof. □

Если $0 \neq z \in U \cap W$, то $0 = 0 + 0 = z + (-z)$ - два разных представления нулевого вектора в виде суммы вектора из U и из W, значит сумма $U + W$ не прямая. Обратно, из $u + w = u' + w'$ следует $U \ni u - u' = w' - w \in W$, откуда $u - u' \in U \cap W$ и значит если $u \neq u'$ (и тогда $w \neq w'$), то $U \cap W \neq 0$.

Рассмотрим подробнее случай, когда все пространство V представляется в виде прямой суммы своих подпространств U и W. Из предыдущего следует, что $V = U \oplus W \Leftrightarrow V = U + W$ и $U \cap W = 0$.

Предложение

7.12. $V = U \oplus W \Leftrightarrow U \cap W = 0 u \dim V = \dim U + \dim W$.

Proof. □

Если $V = U \oplus W$, то как показано выше, $U \cap W = 0$. Кроме того, $\dim V = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W$.

Обратно, $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W = \dim V$, а так как $U + W \subset V$, то $U + W = V$ (см. Теорему 6.19) и сумма прямая так как $U \cap W = 0$.

Определение

7.13. Пусть $U \subset V$ - некоторое подпространство. Подпространство $W \subset V$ называется прямым дополнением к U в V, если $V = U \oplus W$.

Задача

7.14. Для любого подпространства в конечномерном линейном пространстве V существует прямое дополнение. (Указание: воспользуйтесъ Теоремой 6.18).

Прямое дополнение, за исключением тривиальных случаев ($U = 0$ или $U = V$) не единственно. Например, в двумерном пространстве над $\mathbb{R}$ прямым дополнением к одномерному подпространству является любое из континуального множества не совпадающих с ним одномерных подпространств.

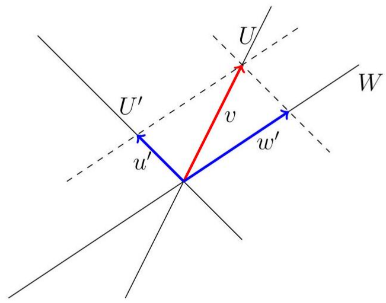
Задача

7.15. Найдите количество прямых дополнений k-мерному подпространству в n-мерном линейном пространстве над конечным полем из q элементов (ср. Задачу 6.56).

Определение

7.16. Если $V = U \oplus W$, то для любого $v \in V$ существуют единственные векторы $u \in U, w \in W$ такие, что $v = u + w$. В этой ситуации u называется проекцией вектора v на подпространство U параллельно подпространству W (обозначение $\mathrm{Pr}_U^{\|W} v$), а w - проекцией вектора v на подпространство W параллельно подпространству U (обозначение $\mathrm{Pr}_W^{\|U} v\Big)$.

Сложные обозначения для проекций в Определении 7.16 связаны с тем, что проекция вектора на подпространство зависит не только от этого подпространства, но и от выбранного прямого дополнения к нему. Пусть, например, $V = U \oplus W$ - представление двумерного пространства в виде прямой суммы одномерных подпространств. Тогда если $0 \neq v \in U$, то $\mathrm{Pr}_W^{\|U} v = 0$, однако заменяя U другим прямым дополнением U' к W, получим $\mathrm{Pr}_W^{\|U'} v \neq 0$, поскольку теперь $v \notin U'$:



Задача

7.17. Докажите, что $\mathbb{R}^n = U \oplus W$, где

$$U = \left\langle (1,1,\ldots,1)^T \right\rangle, \quad W = \left\{ (w_1,\ldots,w_n)^T \mid \sum_i w_i = 0 \right\}$$

Найдите проекции векторов стандартного базиса.

Решение. 1-й способ. Докажем, что любой столбец $(v_1,\ldots,v_n)^T \in \mathbb{R}$ можно представить, причем единственным образом, в виде суммы столбцов $\lambda(1,\ldots,1)^T \in U$ и $(w_1,\ldots,w_n)^T \in W$. Если $(v_1,\ldots,v_n)^T = \lambda(1,\ldots,1)^T + (w_1,\ldots,w_n)^T$, то приравнивая суммы координат слева и справа, получаем $\sum\limits_i v_i = n\lambda$, откуда λ однозначно определяется: $\lambda = \frac{1}{n}\sum\limits_i v_i$. Теперь вычитая из столбца $(v_1,\ldots,v_n)^T$ столбец $\lambda(1,\ldots,1)^T$, получаем столбец $(w_1,\ldots,w_n)$ такой, что $\sum\limits_i w_i = 0$. Таким образом, $\mathbb{R}^n = U \oplus W$.

2 -й способ. Легко видеть, что $U \cap W = 0$, а также что $\dim U = 1$ и $\dim W = n-1$ (W - пространство решений СЛОУ от n неизвестных с матрицей коэффициентов $(1\ldots1)$ ранга 1). Теперь работает

Предложение

7.12.

Проекции читателю предлагается найти самостоятельно.

Следующая задача обобщает предыдущую, если положить $A = (1,1,\ldots,1)^T$.

Задача

7.18. Дана вещественная матрица из n строк. Докажите, что пространство $\mathbb{R}^n$ является прямой суммой линейной оболочки столбцов матрицы A и пространства решений системы $A^T x = 0$.

Решение. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ - линейная оболочка столбцов A, а $W \subset \mathbb{R}^n$ - пространство решений системы $A^T x = 0$. Заметим, что $\dim U = \operatorname{rk} A$, а $\dim W = n - \operatorname{rk} A$, поэтому достаточно доказать, что $U \cap W = 0$. Заметим, что столбец b принадлежит U тогда и только тогда, когда система $Ax = b$ разрешима, а по теореме Фредгольма 6.51 последнее равносильно тому, что для любого $y \in W y^T b = 0$. Таким образом, $b \in U \cap W$ влечет $b^T b = 0$, откуда $b = 0$.

Пример 7.19. Докажем, что (бесконечномерное!) пространство $F(\mathbb{R})$ вещественнозначных функций на действительной прямой является прямой суммой подпространства $F(\mathbb{R})^+$четных функций и подпространства $F(\mathbb{R})^-$нечетных функций. Для этого докажем, что любая функция $f \in F(\mathbb{R})$ единственным образом представляется в виде суммы четной и нечетной функции. Действительно, легко проверить, что $f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ - такое представление. Если $f(x) = f^+(x) + f^-(x)$ - произвольное такое представление, то $f(-x) = f^+(x) - f^-(x)$, откуда $f^+(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$, $f^-(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$.

Например, для функции $\exp(x)$ данное представление имеет вид $\exp(x) = \mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)$. Заметим, что в этом примере соображения, связанные с размерностью пространств не работают - все пространства бесконечномерные!

Задача

7.20. Докажите, что пространство $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ матриц порядка n является прямой суммой подпространств симметрических $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})^+$и кососимметрических $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})^-$матриц. Найдите проекции произвольной матрицы $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ на $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})^+$ параллельно $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})^-$и на $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})^-$параллельно $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})^+$. (Указание: попробуйте найти формулы для проекиий по аналогии с предыдущим примером).

Задача

7.21. Докажите, что пространство $T_n(\mathbb{R})$ верхнетреугольных матриц, порядка n является еще одним (помимо симметрических матриц) прямым дополнением подпространству кососимметрических матриц $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})^-$в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ и найдите соответствуюшие проекции произвольной матрицы $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$.

Перейдем теперь к определению и изучению сумм и прямых сумм произвольного конечного числа подпространств данного пространства.

Определение

7.22. Подпространства $U_1, \ldots, U_k$ линейного пространства V называются линейно независимыми, если из $u_1 + \ldots + u_k = 0\,(u_i \in U_i, i = 1, \ldots, k)$ следует $u_i = 0 \forall i, 1 \le i \le k$.

Определение

7.23. Суммой $U_1 + \ldots + U_k$ подпространств $U_i \subset V$ называется подпространство в V, состоящее из всех сумм вида $u_1 + \ldots + u_k \in V\,(u_i \in U_i)$. Это - наименьшее линейное подпространство в V, содержащее все $U_i, i = 1, \ldots, k$.

Заметим, что подпространства $U_1, \ldots, U_k$ линейно независимы тогда и только тогда, когда для любого вектора $v \in U_1 + \ldots + U_k$ его представление вида $v = u_1 + \ldots + u_k\,(u_i \in U_i)$ единственно (ср.

Определение

7.10).

Определение

7.24. Сумма линейно независимой системы подпространств $U_1, \ldots, U_k$ линейного пространства V называется прямой суммой и обозначается $U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$.

Предложение

7.25. Следующие свойства системы подпространств $U_1, \ldots, U_k \subset V$ равносильны:

1. подпространства $U_1, \ldots, U_k$ линейно независимв;
2. обдединение базисов подпространств $U_1, \ldots, U_k$ линейно независимо;
3. $\dim(U_1 + \ldots + U_k) = \dim U_1 + \ldots + \dim U_k$.

Proof. □

1) ⇒ 2): Пусть $\dim U_i = n_i$ и $\{e_{i1}, \ldots, e_{in_i}\}$ - базис в $U_i, i = 1, \ldots, k$. Пусть

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{ij} e_{ij} = 0$$

1. нетривиальная линейная зависимость. Обозначим $u_i := \sum\limits_{j=1}^{n_i} \lambda_{ij} e_{ij} \in U_i$. Тогда $\sum\limits_{i} u_i = 0$, но не все u_i равны нулю. Поэтому подпространства $U_1, \ldots, U_k$ линейно зависимы.

2. ⇒ 1): Если подпространства $U_1, \ldots, U_k$ линейно зависимы, то существует система векторов $u_1, \ldots, u_k \, (u_i \in U_i)$, среди которых не все равны нулю, такая, что $\sum\limits_{i} u_i = 0$. Раскладывая эти векторы по базисам в U_i, получаем нетривиальную линейную зависимость между объединением базисов подпространств $U_1, \ldots, U_k$.

3. ⇒ 3): Если объединение базисов подпространств $U_1, \ldots, U_k$ линейно независимо, то оно является базисом в их сумме $U_1 + \ldots + U_k$, поскольку оно порождает ее.

4. ⇒ 2): Предположим, что объединение базисов подпространств $U_1, \ldots, U_k$ линейно зависимо. Поскольку оно порождает сумму $U_1 + \ldots + U_k$, оно содержит некоторый ее базис, а значит ее размерность меньше чем сумма размерностей подпространств U_i.

Определение

7.26. Линейное пространство V раскладывается в прямую сумму своих подпространств $U_1, \ldots, U_k$, то есть $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$, если выполнены следующие два условия:

1. $V = U_1 + \ldots + U_k$

2. подпространства $U_1, \ldots, U_k$ линейно независимы.

Заметим, что предыдущее Предложение позволяет заменить условие 2) из Определения, например, условием $\dim V = \dim U_1 + \ldots + \dim U_k$.

Кстати, для трех и большего числа подпространств аналог Теоремы 7.7 неверен. Например, выбирая базисы в трех попарно различных одномерных подпространствах в двумерном пространстве мы получаем линейно зависимую систему.

Задача

7.27. Пусть U, V, W - подпространства конечномерного линейного пространства.
a) Верна ли формула

$$\dim(U + V + W) = \dim U + \dim V + \dim W - \dim(U \cap V) - \\ - \dim(V \cap W) - \dim(W \cap U) + \dim(U \cap V \cap W)?$$

b) Следует ли из условий $U \cap V = V \cap W = W \cap U = 0$ что сумма $U + V + W$ прямал? Если нет, то как нужно изменить приведенные условия, чтобы это было верно?

Если $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_k$, то для любого $v \in V$ существует и единствен такой набор векторов $u_1, \ldots, u_k \, (u_i \in U_i)$, что $v = u_1 + \ldots + u_k$. Следующий пример показывает, что проекции u_i зависят не только от U_i, но и от остальных слагаемых прямого разложения [31]. Пример 7.28. Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ - базис векторного пространства V. Тогда

$$V = \langle e_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle e_n \rangle$$

Проекция вектора $v \in V$ на $\langle e_i \rangle$ равна $v_i e_i$, где $v_i - i$-я координата вектора v в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

3.6.2 7.2 Linear Mappings and Transformations

В современной математике (особенно в алгебре) при определении математических объектов какого-то типа определяется также тип отображений между ними. Если объекты представляют собой множества с некоторой операцией (или набором операций), то естественное требование на такие отображения - согласованность с этой операцией (операциями). Например, для групп (колец и т.п.) рассматривают гомоморфизмы групп (колец и т.п.), а в случае линейных пространств - линейные отображения, к определению и изучению которых мы переходим.

Определение

7.29. Отображение $\varphi : V \to U$ между линейными пространствами (над фиксированным полем $\mathbb{K}$) называется линейным, если

1. $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$ для любых $v_1, v_2 \in V$ ("аддитивность");
2. $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$ для любых $v \in V$ и $\lambda \in \mathbb{K}$ ("однородность").

В качестве следствия получаем, что линейное отображение φ переводит конечную линейную комбинацию $\sum \lambda_i v_i$ векторов $v_i \in V$ в линейную комбинацию $\sum \lambda_i \varphi(v_i)$ векторов $\varphi(v_i) \in U$ с теми же коэффициентами.

Задача

7.30. Для линейного $\varphi : V \to U$ докажите, что $\varphi(0) = 0, \quad \varphi(-v) = -\varphi(v), \varphi(v_1 - v_2) = \varphi(v_1) - \varphi(v_2)$.

Note.

7.31. В связи с предыдущим Определением можно задаться вопросом: следует ли однородность из аддитивности? Оказывается, ответ зависит от поля $\mathbb{K}$: при $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ следует (читателю предлагается это доказать), а уже при $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ - нет. Пример аддитивного, но не линейного отображения $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (здесь $\mathbb{R}$ обозначает одномерное линейное пространство над полем $\mathbb{R}$) можно построить так. Рассмотрим $\mathbb{R}$ как линейное пространство над полем $\mathbb{Q}$. Оно бесконечномерно (более точно, континуальномерно), и его элементы $1, \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. По лемме Цорна систему $\{1, \sqrt{2}\}$ можно продолжить до некоторого базиса E в $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$. Рассмотрим линейную над полем $\mathbb{Q}$ функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, задаваемую условиями $f(1) = 1, f(e) = 0$ при $e \in E \backslash \{1\}$. Из $\mathbb{Q}$-линейности f следует ее аддитивность, в то же время она не линейна над полем $\mathbb{R} : 0 = f(\sqrt{2}) \neq \sqrt{2} f(1) = \sqrt{2}$.

Кстати, для поля $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ есть более простой пример аддитивного, но не линейного отображения $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(a + bi) = b + ai$. Его аддитивность легко проверяется, в то же время $1 = f(i) \neq i f(1) = -1$.

Важнейшим частным случаем линейного отображения является линейное преобразование.

Определение

7.32. Линейным преобразованием линейного пространства V или, что то же, линейным оператором на V, называется линейное отображение V в себя.

Приведем некоторые примеры линейных отображений и преобразований. Читателю предлагается проверить их линейность там, где это не сделано.

Пример 7.33. Нулевое отображение $\varphi : V \to U, \varphi(v) = 0 \forall v \in V$.

Пример 7.34. Нулевое преобразование $\varphi : V \to V, \varphi(v) = 0 \forall v \in V$.

Пример 7.35. Тождественное преобразование $\varphi : V \to V, \varphi(v) = v \forall v \in V$. Тождественное

[031] точнее, u_i зависит не от остальных слагаемых по отдельности, а от их прямой суммы $\oplus_{j \neq i} U_j$.

преобразование пространства V обозначается Id_V.

Пример 7.36. Зафиксируем некоторый скаляр $\lambda \in \mathbb{K}$. Определим линейное преобразование ("гомотетию") $\varphi = \lambda \,\mathrm{Id}_V : V \to V, \varphi(v) = \lambda v \forall v \in V$. При $\lambda = 0$ получаем нулевое преобразование, при $\lambda = 1$ - тождественное.

Пример 7.37. Пусть $V = U \oplus W$. Определим линейное отображение $\varphi = \mathrm{Pr}_U^{\|W} : V \to U$ - проектор на U параллельно W следующим образом. По определению прямой суммы для любого $v \in V$ однозначно определены $u \in U$ и $w \in W$ такие, что $v = u + w$. Тогда $\varphi(v) := u \in U$. Проверим, что так определенное отображение φ линейно. Пусть $v_i = u_i + w_i, i = 1, 2$. Тогда $v_1 + v_2 = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2)$, откуда $\varphi(v_1 + v_2) = u_1 + u_2 = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$. Аналогично, если $v = u + w$, то $\lambda v = \lambda u + \lambda w$, и тогда $\varphi(\lambda v) = \lambda u = \lambda\varphi(v)$.

Пример 7.38. Пусть снова $V = U \oplus W$. Определим линейное преобразование $\varphi = \mathrm{Pr}_U^{\|W} : V \to V$, которое как и отображение из предыдущего примера называется проектором на U параллельно W, следующим образом. Для любого $v \in V$ однозначно определены $u \in U$ и $w \in W$ такие, что $v = u + w$. Тогда $\varphi(v) := u$, но в данном случае u рассматривается как элемент самого пространства V (так как $U \subset V$), поэтому φ на этот раз действует из V в V и является линейным преобразованием.

Пример 7.39. Обозначим через $\mathbb{R}[x]_n$ линейное пространство многочленов с вещественными коэффициентами степени не выше n. Пусть $k \geq 0$ - некоторое натуральное число. Обозначим $V := \mathbb{R}[x]_n, U := \mathbb{R}[x]_{n-k}$. Определим отображение $\varphi : V \to U, \varphi(p) = p^{(k)} \forall p \in V$ (k-кратное дифференцирование). Читателю предлагается проверить его линейность.

Пример 7.40. Любой многочлен степени не выше $n - k$ (при $k \geq 0$) можно рассматривать и как многочлен степени не выше n, поэтому k-кратное дифференцирование определяет линейное преобразование $\mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_n$.

Пример 7.41. Поворот евклидовой плоскости на данный угол вокруг фиксированной точки определяет линейное преобразование свободных векторов плоскости. Чтобы убедиться в его линейности, читателю предлагается нарисовать соответствующую картинку.

Пример 7.42. Пусть V – n-мерное линейное пространство. Тогда выбор базиса в V определяет линейное отображение $V \to \mathbb{K}^n$ (при этом вектору сопоставляется его координатный столбец в выбранном базисе), см. раздел 6.4.

С каждым линейным отображением $\varphi : V \to U$ связаны два линейных подпространства - его ядро и его образ (первое является подпространством в V, второе - в U).

Рассмотрим множество K векторов из V, которые φ отображает в $0.K$ не пусто: действительно, ему принадлежит нулевой вектор. Кроме того, из $v_1, v_2 \in K$ следует $v_1 + v_2 \in K$ $(\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = 0 + 0 = 0)$, а из $v \in K$ следует $\lambda v \in K$. Таким образом, K является линейным подпространством в V.

Определение

7.43. Ядром линейного отображения $\varphi : V \to U$ называется линейное подпространство в V, состоящее из векторов, которые φ отображает в нулевой вектор. Ядро линейного отображения φ обозначается $\mathrm{Ker}\,\varphi$.

Таким образом,

$$\mathrm{Ker}\,\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = 0\} \subset V$$

Рассмотрим теперь множество I векторов из U, которые являются образами векторов пространства V относительно линейного отображения φ (то есть такие $u \in U$, для которых существует (хотя бы один) $v \in V$ такой, что $\varphi(v) = u$). Читателю предлагается проверить, что I - не просто подмножество, а подпространство в U.

Определение

7.44. Образом линейного отображения $\varphi : V \to U$ называется линейное подпространство в U, состоящее из векторов, которые является образами векторов пространства V относительно φ. Образ линейного отображения φ обозначается $\mathrm{Im}\,\varphi$.

Таким образом,

$$\mathrm{Im}\,\varphi = \{u \in U | \exists v \in V : \varphi(v) = u\} \subset U$$

Заметим, что если $\varphi : V \to V$ - линейное преобразование, то $\operatorname{Ker}\varphi$ и $\operatorname{Im}\varphi$ являются подпространствами одного пространства V.

Приведем некоторые примеры (читателю рекомендуется найти ядра и образы для остальных приведенных выше примеров линейных отображений самостоятельно).

Пример 7.45. Ядро преобразования из Примера 7.38 совпадает с подпространством $W \subset V$, а образ - с $U \subset V$.

Пример 7.46. Ядро преобразования из Примера 7.40 совпадает с подпространством $\mathbb{R}[x]_{k-1} \subset \mathbb{R}[x]_n$, а образ - с подпространством $\mathbb{R}[x]_{n-k} \subset \mathbb{R}[x]_n$. Данный пример показывает, что ядро и образ линейного преобразования могут иметь нетривиальное (то есть ненулевое) пересечение!

Пример 7.47. Ядро преобразования из Примера 7.42 нулевое (в этом случае говорят "тривиальное"), а образ совпадает со всем пространством $\mathbb{K}^n$.

Следующее предложение показывает, что для инъективности линейного отображения достаточно, чтобы прообраз нулевого вектора (то есть ядро) состоял бы только из нуля.

Предложение

7.48. (Критерий инъективности и сюръективности). Линейное отображение $\varphi : V \to U$ инбективно (соответственно сюрбективно) тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker}\varphi = 0$ (соответственно $\operatorname{Im}\varphi = U$).

Proof. □

Докажем ту часть, которая касается ядра (часть про образ непосредственно следует из определений). Если $\operatorname{Ker}\varphi \neq 0$, то существует $0 \neq v \in \operatorname{Ker}\varphi$, значит $\varphi(v) = \varphi(0) = 0$ и поэтому φ не инъективно.

Наоборот (это самое интересное), пусть φ не инъективно. Тогда существуют $v_1, v_2 \in V, v_1 \neq v_2$ такие, что $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$. Тогда $\varphi(v_1 - v_2) = \varphi(v_1) - \varphi(v_2) = 0$, а значит $0 \neq v_1 - v_2 \in \operatorname{Ker}\varphi$, поэтому $\operatorname{Ker}\varphi \neq 0$.

То есть для инъективности линейного отображения достаточно, чтобы прообраз нулевого вектора был одноэлементным (состоящим из нулевого вектора), тогда автоматически прообразы всех элементов из образа будут одноэлементными (ср. Задачу 7.51 ниже).

Следствие

7.49. Линейное отображение $\varphi : V \to U$ биективно тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker}\varphi = 0 u \operatorname{Im}\varphi = U$.

Биективные линейные отображения образуют важный класс линейных отображений и называются изоморфизмами. Мы вернемся к ним немного позже.

Задача

7.50. Пусть $\varphi : V \to U$ - биективное линейное отображение. Тогда для него существует теоретико-множественное обратное отображение φ^{-1}. Докажите, что φ^{-1} линейно.

Пусть $\varphi : V \to U$ - произвольное линейное отображение. Определим полный прообраз вектора $u \in U$ как множество

$$\varphi^{-1}(u) := \{v \in V | \varphi(v) = u\} \subset V$$

(заметим, что обозначение $\varphi^{-1}(u)$ здесь не предполагает что φ обратимо, то есть биективно). Нетрудно проверить, что $\varphi^{-1}(u)$ является линейным подпространством в V тогда и только тогда, когда $u = 0$.

Посмотрим, как устроены полные прообразы векторов из U. Очевидно, что $\varphi^{-1}(u) \neq \varnothing \Leftrightarrow u \in \operatorname{Im}\varphi$.

Задача

7.51. Предположим, что $u \in \operatorname{Im} \varphi u v \in V$ такой, что $\varphi(v)=u$. Тогда

$$\varphi^{-1}(u)=v+\operatorname{Ker} \varphi:=\left\{v+v^{\prime} \mid v^{\prime} \in \operatorname{Ker} \varphi\right\}$$

Решение. Пусть $v^{\prime} \in \varphi^{-1}(u)$, тогда $v^{\prime}-v \in \operatorname{Ker} \varphi$, и поэтому $v^{\prime} \in v+\operatorname{Ker} \varphi$. Обратно, пусть $v^{\prime} \in v+\operatorname{Ker} \varphi$, то есть $v^{\prime}=v+w, w \in \operatorname{Ker} \varphi$. Тогда $\varphi\left(v^{\prime}\right)=\varphi(v)=u$, поэтому $v^{\prime} \in \varphi^{-1}(u)$.

Решив предыдущую задачу читатель, наверное, почувствовал аналогию между структурой множества $\varphi^{-1}(u)$ и общего решения совместной СЛУ. Такая аналогия действительно есть, мы объясним ее после того, как определим понятие матрицы линейного отображения. Мы увидим, что (при данных φ и u и "неизвестном" v) $\varphi(v)=u$ - "бескоординатная" запись СЛУ с соответствующей СЛОУ $\varphi(v)=0$.

3.6.3 7.3 Setting Linear Maps on Bases. Isomorphisms

Докажем Лемму, которая показывает, что линейные отображения удобно задавать их значениями на базисах.

Lemma

7.52. Если $\left\{e_1, \ldots, e_n\right\}$ - базис в V, то для любого векторного пространства U над тем же полем и любой системы векторов $\left\{u_1, \ldots, u_n\right\}$ в U существует и единственно такое линейное отображение $\varphi: V \rightarrow U$, что $\varphi\left(e_i\right)=u_i, \quad i=1, \ldots, n$.

Proof. □

Так как $\left\{e_1, \ldots, e_n\right\}$ является базисом в V, то произвольный вектор из V однозначно раскладывается по нему: $v=\lambda_1 e_1+\ldots+\lambda_n e_n$. Если линейное отображение $\varphi: V \rightarrow U$, удовлетворяющее условию леммы, существует, то $\varphi(v)=\lambda_1 u_1+\ldots+\lambda_n u_n$. Таким образом, существует не более одного такого отображения. Теоретико-множественно φ указанной формулой корректно определено. Осталось доказать его линейность. Проверим аддитивность. Пусть $w=\mu_1 e_1+\ldots+\mu_n e_n \in V$. Тогда имеем

$$\varphi(v+w)=\left(\lambda_1+\mu_1\right) u_1+\ldots+\left(\lambda_n+\mu_n\right) u_n=\varphi(v)+\varphi(w)$$

Аналогично проверяется однородность.
Из доказанной Леммы можно сделать вывод, что для определения линейного отображения $\varphi: V \rightarrow U$ достаточно задать его значения на произвольном базисе V, причем с базиса линейное отображение по линейности продолжается на все пространство V однозначно.

Следующие Предложения отвечают на вопрос, когда заданное на базисе линейное отображение является инъективным или сюръективным.

Предложение

7.53. Пусть V - линейное пространство, $\left\{e_1, \ldots, e_n\right\}$ - базис в V. Пусть U - еще одно пространство над тем же полем, $\left\{u_1, \ldots, u_n\right\}$ - система векторов в U. Тогда линейное отображение $\varphi: V \rightarrow U$ такое, что $\varphi\left(e_i\right)=u_i, \quad i=1, \ldots, n$ является инъективным тогда и только тогда, когда система $\left\{u_1, \ldots, u_n\right\}$ линейно независима.

Proof. □

1) Предположим, что система $\left\{u_1, \ldots, u_n\right\}$ линейно зависима и $\lambda_1 u_1+\ldots+\lambda_n u_n=0$ - нетривиальная линейная зависимость. Тогда ядро φ содержит ненулевой вектор $v=\lambda_1 e_1+\ldots+\lambda_n e_n$, следовательно, φ не инъективно.

Обратно, пусть φ не инъективно; тогда найдется $v \in V, \quad v \neq 0$ такой, что $\varphi(v)=0$. Пусть $v=\lambda_1 e_1+\ldots+\lambda_n e_n$ - его разложение по выбранному базису в V. Тогда $0=\varphi(v)=\lambda_1 u_1+\ldots+\lambda_n u_n$ - нетривиальная линейная зависимость между векторами системы $\left\{u_1, \ldots, u_n\right\}$.

Предложение

7.54. Пусть $\varphi : V \to U u \{e_1, \ldots, e_n\}$ - базис в $V.$ Toz $\operatorname{Im} \varphi = \langle \varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n) \rangle$.

Proof. □

$u \in \operatorname{Im} \varphi \Leftrightarrow \exists v \in V$ такой, что $\varphi(v) = u \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ такие, что $u = \sum_i \lambda_i \varphi(e_i) \Leftrightarrow u \in \langle \varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n) \rangle$.

Таким образом, отображение $\varphi : V \to U$, заданное (с использованием предыдущих обозначений) на базисе условиями $\varphi(e_i) = u_i, i = 1, \ldots, n$ сюръективно тогда и только тогда, когда $U = \langle u_1, u_2, \ldots, u_n \rangle$.

Следствие

7.55. Линейное отображение $\varphi : V \to U$ биективно тогда и только тогда, когда для некоторого (а значит и для любого) базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V система $\{\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\}$ является базисом в U.

Задача

7.56. Пусть V - конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Докажите, что система векторов $\{e_1, \ldots, e_n\}$ является базисом в V тогда и только тогда, когда для любого векторного пространства U над тем же полем и любой системъ векторов $\{u_1, \ldots, u_n\}$ в U существует и единственно такое линейное отображение $\varphi : V \to U$, что $\varphi(e_i) = u_i, \quad i = 1, \ldots, n$.

Теперь докажем следующую важную Теорему.

Теорема

7.57. Пусть $\varphi : V \to U$ - линейное отображение, причем V конечномерно. Тогда $\dim \operatorname{Im} \varphi + \dim \operatorname{Ker} \varphi = \dim V$.

Proof. □

Пусть для определенности $\dim V = n$. Тогда $\operatorname{Ker} \varphi$ - подпространство в V размерности $k \leq n$. Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ - такой базис в V, что последние k его векторов $e_{n-k+1}, \ldots, e_n$ образуют базис в $\operatorname{Ker} \varphi$ (такой базис можно получить, выбирая базис в ядре и дополняя его до базиса во всем V).

Мы утверждаем, что система векторов $\{\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_{n-k})\}$ линейно независима и значит составляет базис в $\operatorname{Im} \varphi$ (поскольку из Предложения 7.54 следует, что они порождают $\operatorname{Im} \varphi$). Действительно, пусть $\lambda_1 \varphi(e_1) + \ldots + \lambda_{n-k} \varphi(e_{n-k}) = 0$ - произвольная линейная зависимость. Тогда $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{n-k} e_{n-k} \in \operatorname{Ker} \varphi$. Значит существуют $\mu_1, \ldots, \mu_k$ такие, что $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{n-k} e_{n-k} = \mu_1 e_{n-k+1} + \ldots + \mu_k e_n$. Из линейной независимости $\{e_1, \ldots, e_n\}$ теперь следует, что все λ_i равны нулю.

Note.

7.58. Может показаться, что если $\varphi : V \to V$ - линейное преобразование, то предыдущую Теорему можно усилить так: $V = \operatorname{Ker} \varphi \oplus \operatorname{Im} \varphi$. В общем случае это неверно: контрпример см. в Примере 7.46. См. также Задачу 7.60.

Задача

7.59. Виведите

Следствие

7.8 из доказанной Теоремы.

Задача

7.60. Для каких конечномерных пространств V существует преобразование $\varphi : V \to V$, для которого $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Im}\varphi$(как подпространства в V)?

Решение. Если V - такое пространство и φ - преобразование как в условии, то $\dim\operatorname{Ker}\varphi +$ $\dim\operatorname{Im}\varphi = \dim V$ и $\dim\operatorname{Ker}\varphi = \dim\operatorname{Im}\varphi$, откуда следует, что $\dim V$ четна.

Обратно, пусть $\dim V = 2k$. Пусть $U \subset V$ - произвольное k-мерное подпространство. Выберем базис $\{e_1, \ldots, e_k\}$ в U и продолжим его векторами $\{e_{k+1}, \ldots, e_{2k}\}$ до базиса в V. Определим линейное преобразование $\varphi : V \to V$, полагая $\varphi(e_i) = 0, \varphi(e_{k+i}) = e_i$ при $1 \leq i \leq k$. Тогда легко проверить, что оно обладает требуемыми свойствами. В частности, $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Im}\varphi = U$.

Если хочется предъявить более "естественный" пример такого преобразования, то можно рассмотреть оператор $\varphi = \frac{d^k}{dx^k} : \mathbb{K}[x]_{2k-1} \to \mathbb{K}[x]_{2k-1}$, где $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Следствие

7.61. Для конечномерных пространств V и U одинаковой размерности любое из условий 1) $\operatorname{Ker}\varphi = 0$, 2) $\operatorname{Im}\varphi = U$ влечет оставшееся.

Рассмотрим более подробно биективные линейные отображения.
Пусть U и V - линейные пространства над полем $\mathbb{K}$.

Определение

7.62. Линейное отображение $\varphi : U \to V$ называется изоморфизмом, если оно биективно.

Из Следствия 7.61 вытекает, что для конечномерных пространств V и U одинаковой размерности выполнение любого из условий 1) $\operatorname{Ker}\varphi = 0$, 2) $\operatorname{Im}\varphi = U$ достаточно для того, чтобы линейное отображение $\varphi : V \to U$ было изоморфизмом.

Определение

7.63. Мы скажем, что пространство U изоморфно V, если существует изоморфизм $\varphi : U \to V$.

Линейные пространства, между которыми существует (хотя бы один) изоморфизм, называются изоморфными.

Заметим, что линейные пространства могут быть равномощными как множества, но не изоморфными (примеры таких пространств мы скоро получим). Это связано с тем, что не всякая биекция между линейными пространствами является линейной.

Предложение

7.64. Отношение изоморфности на множестве всех линейных пространств над данным полем - отношение эквивалентности.

Proof. □

Действительно, оно рефлексивно, так как тождественное отображение - изоморфизм.

Далее, оно симметрично. Это следует из того, что обратное отображение к изоморфизму - изоморфизм. Покажем это. Пусть $\varphi : U \to V$ - изоморфизм и $\varphi^{-1} : V \to U$ - обратное отображение для φ. Оно существует в силу биективности φ и определяется так: $\varphi^{-1}(v) = u$, если $v = \varphi(u)$. Докажем, что $\varphi^{-1}(v_1 + v_2) = \varphi^{-1}(v_1) + \varphi^{-1}(v_2) \forall v_1, v_2 \in V$.

Пусть $v_i = \varphi(u_i), i = 1, 2$. Тогда в силу линейности φ имеем $\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) = v_1 + v_2$, откуда по определению обратного $\varphi^{-1}(v_1 + v_2) = u_1 + u_2 = \varphi^{-1}(v_1) + \varphi^{-1}(v_2)$. Аналогично доказывается равенство $\varphi^{-1}(\lambda v) = \lambda\varphi^{-1}(v)$.

Наконец, оно транзитивно. Это следует из того, что композиция изоморфизмов - изоморфизм. Покажем это. Пусть $\varphi : U \to V, \quad \psi : V \to W$ - отображения, тогда определена их композиция $\psi \circ \varphi : U \to W, \quad (\psi \circ \varphi)(u) = \psi(\varphi(u)) \forall u \in U$. Если φ и ψ линейны, то их композиция $\psi \circ \varphi$ тоже линейна. Действительно,

$$(\psi \circ \varphi)(u_1 + u_2) = \psi(\varphi(u_1 + u_2)) = \psi(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)) =$$
$$\psi(\varphi(u_1)) + \psi(\varphi(u_2)) = (\psi \circ \varphi)(u_1) + (\psi \circ \varphi)(u_2).$$

Аналогично проверяется равенство $(\psi \circ \varphi)(\lambda u) = \lambda(\psi \circ \varphi)(u)$. Поскольку композиция биекций является биекцией, отсюда следует, что композиция изоморфизмов - изоморфизм.

Тот факт, что два пространства U и V изоморфны, обозначают $U \cong V$.
Таким образом, возникает задача классифицировать линейные пространства над данным полем с точностью до изоморфизма (описать классы указанной эквивалентности). Следующая теорема решает ее для конечномерных пространств - единственным инвариантом изоморфизма линейного пространства является его размерность.

Теорема

7.65. Два конечномерных пространства U, V над полем $\mathbb{K}$ изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.

Proof. □

Из Следствия 7.55 вытекает, что если между U и V есть изоморфизм, то $\dim V = \dim U$[32]

Наоборот, предположим что $\dim V = \dim U$ и $\{e_1, \ldots, e_n\}, \{f_1, \ldots, f_n\}$ - базисы в пространствах V и U соответственно. Определим линейное отображение $\varphi : U \to V$, задав его значения на базисных векторах $\varphi(e_i) = f_i, i = 1, \ldots, n$, как в Лемме 7.52. Снова применяя

Следствие

7.55 получаем, что такое φ биективно, то есть изоморфизм.

Заметим, что Предложение 6.52 означает, что выбор базиса в n-мерном пространстве V определяет его изоморфизм с $\mathbb{K}^n$. Таким образом, в каждом классе изоморфизма конечномерных векторных пространств есть конкретный представитель - пространство $\mathbb{K}^n$.

Как уже отмечалось выше, существуют векторные пространства, которые равномощны, но не изоморфны. Читатель, возможно, знает, что каждое множество вида $\mathbb{R}^n, n > 0$, имеет мощность континуума, но как следует из доказанной теоремы, при разных n они не изоморфны как линейные пространства - любая биекция между ними не является линейной.

Note.

7.66. (ср. Замечание 7.31) Заметим, что с использованием аксиомы выбора можно доказать, что аддитивные группы всех пространств $\mathbb{R}^n, n > 0$ изоморфны. В самом деле, эти пространства изоморфны как линейные пространства над полем $\mathbb{Q}$, поскольку все они имеют одинаковую размерность (континуум). Это еще раз (см. Замечание 7.31) показывает, что условие однородности в определении линейного отображения над произвольным полем (в частности, над $\mathbb{R}$) не следует из условия аддитивности.

3.6.4 7.4 Linear Mapping Matrix

Пусть $\varphi : V \to U$ - линейное отображение между конечномерными линейными пространствами, $\{e_1, \ldots, e_n\}, \{f_1, \ldots, f_m\}$ - базисы в V и U соответственно.

Определение

7.67. Матрица A размера $m \times n$ называется матрицей линейного отображения φ относительно выбранных базисов, если

$$(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n)) = (f_1, f_2, \ldots, f_m) A$$

То есть рецепт получения матрицы A такой: действуем отображением на векторы выбранного в V базиса и получившиеся векторы из U раскладываем по выбранному базису в U, результат записываем в столбцы A (i-й столбец матрицы A - координатный столбец вектора $\varphi(e_i)$ в базисе $\{f_1, \ldots, f_m\}$).

Пусть $\mathcal{L}(V, U)$ обозначает множество всех линейных отображений $V \to U$. Заметим, что матрица A однозначно определена отображением φ и выбранными базисами. Тем самым сопоставление линейному отображению его матрицы в выбранной паре базисов задает некоторое отображение $\mu = \mu_{e,f} : \mathcal{L}(V, U) \to \mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbb{K})$.

Предложение

7.68. Отображение μ является биекцией (зависящей от выбранных базисов в V и U).

Proof. □

Действительно, если два линейных отображения имеют одинаковые матрицы в данной паре базисов, то их значения на базисных векторах равны, а по Лемме 7.52 эти значения линейное отображение однозначно определяют.

С другой стороны, так как согласно все той же Лемме набор значений линейного отображения на базисных векторах может быть произвольным, то любая матрица размера $m \times n$ с элементами из поля $\mathbb{K}$ является матрицей некоторого линейного отображения в выбранной паре базисов.

Далее мы покажем, что построенная биекция согласована с операциями над матрицами (сложения, умножения на скаляры и композиции). Ситуация является аналогичной биекции между множеством векторов n-мерного линейного пространства V над полем $\mathbb{K}$ и множеством столбцов $\mathbb{K}^n$, зависящей от базиса и задаваемой сопоставлением вектору его координатного столбца.

Частным случаем линейного отображения является линейное преобразование - это линейное отображение из пространства в себя. Так как при определении матрицы линейного отображения мы в каждом пространстве выбираем по одному базису, то матрица линейного преобразования определяется с помощью выбора одного базиса в V. Так как этот частный случай особенно важен, то приведем специализацию предыдущего определения на случай линейных преобразований.

Пусть $\varphi : V \to V$ - линейное преобразование конечномерного линейного пространства $V, \{e_1, \ldots, e_n\}$ - выбранный базис в V.

Определение

7.69. Матрица A порядка n называется матрицей линейного преобразования φ в выбранном базисе, если

$$(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n)) = (e_1, e_2, \ldots, e_n) A$$

То, что в определении матрицы линейного преобразования участвует только один базис отражает большую "жесткость" линейных преобразований по сравнению с отображениями и приводит к более богатой и тонкой теории для одного линейного преобразования, как мы убедимся в дальнейшем.

[032] Также для доказательства можно использовать Теорему 7.57 вместе с условиями инъективности и сюръективности в терминах ядра и образа.

Задача

7.70. Напишите матрицы следующих линейных преобразований:

1. тождественного преобразования n-мерного пространства V в произвольном базисе в V;
2. проектора на подпространство U параллельно подпространству W (см. Пример (7.38)), заданного разложением $V = U \oplus W$ пространства V в прямую сумму ненулевых подпространств, в базисе V, полученном оббединением базисов U и W;
3. оператора дифберениирования $\frac{d}{dx}$ на пространстве $\mathbb{R}[x]_n$ в базисе $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$;
4. оператора из предыдущего пункта в базисе $\left\{1, \frac{x}{1!}, \frac{x^2}{2!}, \ldots, \frac{x^n}{n!}\right\}$;
5. оператора дифферениирования на линейной оболочке $\langle \sin x, \cos x\rangle$ в базисе $\{\sin x, \cos x\}$
6. оператора поворота на угол α против часовой стрелки в правом ортонормированном базисе $\{e_1, e_2\}$ на евклидовой плоскости.

Lemma

7.52 говорит о том, что зная матрицу A линейного отображения φ и относительно каких базисов она записана, можно восстановить само отображение φ.

Предложение

7.71. Если $\xi := (v_1, \ldots, v_n)^T$ - координатный столбец, вектора $v \in V$ в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$, то $A\xi$ - координатный столбец, вектора $\varphi(v) \in U$ в базисе $\{f_1, \ldots, f_m\}$.

Proof. □

Воспользуемся матричной записью $v = (e_1, \ldots, e_n)(v_1, \ldots, v_n)^T$ разложения вектора по базису. Из линейности φ следует $\varphi(v) = (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))(v_1, \ldots, v_n)^T = (f_1, \ldots, f_m) A (v_1, \ldots, v_n)^T = (f_1, \ldots, f_m)(u_1, \ldots, u_m)^T$, где $\eta := (u_1, \ldots, u_m)^T$ - координатный столбец вектора $\varphi(v)$ в базисе $\{f_1, \ldots, f_m\}$. Из линейной независимости последнего следует $\eta = A(v_1, \ldots, v_n)^T$.

Предыдущее Предложение показывает, зачем нужны матрицы линейных отображений: действие линейного отображения в базисах сводится просто к умножению координатных столбцов векторов на его матрицу.

Доказанный в Предложении результат можно наглядно изобразить как условие коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi_e"'] & U \arrow[d, "\varphi_f"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "A\cdot"] & \mathbb{K}^m, \end{tikzcd}$$

в которой вертикальные стрелки обозначают определяемые выбранными базисами линейные биекции, сопоставляющие вектору его координатный столбец (см. Предложение 6.52). Доказанное Предложениеравносильно тому, что два пути по стрелкам из V в $\mathbb{K}^m$ совпадают.

Матрица линейного отображения зависит от выбора базисов. Выведем формулу, выражающую матрицу отображения в новых базисах через матрицу того же отображения в старых базисах и матрицы перехода от старых базисов к новым.

Предложение

7.72. Пусть $\varphi : V \to U$ - линейное отображение, A - его матрица относительно старых базисов $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и $\{f_1, \ldots, f_m\}$ в V и U соответственно, C матриц, перехода от $\{e_1, \ldots, e_n\}$ к новому базису в V $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$, а D - матрица перехода от $\{f_1, \ldots, f_m\}$ к новому базису $\{f'_1, \ldots, f'_m\}$ в U. Пусть A' - матрица отображения φ относительно новых базисов. Тогда

$$A' = D^{-1}AC \tag{54}$$

В частности, если φ - линейное преобразование (то есть $U = V$), то

$$A' = C^{-1}AC \tag{55}$$

Proof. □

Из линейности φ непосредственно следует, что

$$\left(e'_1, \ldots, e'_n\right) = \left(e_1, \ldots, e_n\right) C \quad \text{влечет} \quad \left(\varphi\left(e'_1\right), \ldots, \varphi\left(e'_n\right)\right) = \left(\varphi\left(e_1\right), \ldots, \varphi\left(e_n\right)\right) C$$

Поэтому (с учетом ассоциативности произведения матриц) имеем

$$\left(\varphi\left(e'_1\right), \ldots, \varphi\left(e'_n\right)\right) = \left(\varphi\left(e_1\right), \ldots, \varphi\left(e_n\right)\right) C = \left(f_1, \ldots, f_m\right) AC = \left(f'_1, \ldots, f'_m\right) D^{-1}AC$$

откуда $A' = D^{-1}AC$ - матрица φ относительно новых базисов.
Заметим связь между формулами изменения координат вектора (49) и матрицы линейного отображения (54) при замене базисов: если $x \in \mathbb{K}^n$ и $y \in \mathbb{K}^m$ - координатные столбцы векторов $v \in V$ и $u \in U$ в базисах e и f соответственно и $u = \varphi(v)$, то для матрицы A линейного отображения φ в базисах e, f имеем равенство $y = Ax$. Теперь для координатного столбца $x' = C^{-1}x$ вектора v в базисе e' имеем

$$A'x' = D^{-1}ACC^{-1}x = D^{-1}Ax = D^{-1}y = y',$$

что равно координатному столбцу y' вектора $u = \varphi(v)$ в базисе f' (чего, конечно, и следовало ожидать).

Note.

7.73. Еще один вывод формулы (54) можно извлечь из коммутативности диграммы

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[r, "A'\cdot"] \arrow[dd, bend right, "C\cdot"'] & \mathbb{K}^m \\
V \arrow[u, "\varphi_{e'}"] \arrow[d, "\varphi_e"] \arrow[r, "\varphi"] & V \arrow[u, "\varphi_{f'}"'] \arrow[d, "\varphi_f"'] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "A\cdot"] & \mathbb{K}^m, \arrow[uu, bend right, "D^{-1}\cdot"']
\end{tikzcd}$$

построенной из коммутативных диаграмм (53) и (50).

Задача

7.74. Матрицы каких линейных отображений не зависят от выбора базисов? Матрицы каких линейных преобразований не зависят от выбора базиса?

Мы видим, что за исключением очень специальных случаев, матрицы линейных преобразований и отображений зависят от базисов. Какие свойства матриц одного и того же отображения (преобразования) от базиса не зависят? Нет ли простого критерия того, что две данные матрицы одинакового размера являются матрицами одного и того же отображения (преобразования) относительно разных базисов?

Вообще, формализовать эту задачу для отображений можно так. Назовем две прямоугольные матрицы одинакового размера эквивалентными, если они являются матрицами одного того же линейного отображения в разных базисах. Равносильно, две матрицы A и A' назовем эквивалентными, если существуют две невырожденные матрицы C, D подходящих порядков такие, что $A' = D^{-1}AC$ (читателю предлагается проверить, что это действительно отношение эквивалентности). Теперь задача свелась к описанию классов введенной эквивалентности.

Аналогично, для преобразований назовем две матрицы одинаковых порядков A и A' эквивалентными, если найдется такая невырожденная матрица C, что $A' = C^{-1}AC$ (это условие равносильно тому, что две данные матрицы A и A' являются матрицами одного и того же линейного преобразования в разных базисах).

Второе отношение эквивалентности (для преобразований) намного более "жесткое" в том смысле, что классов эквивалентности больше (для полей $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ за исключением случая преобразований нульмерного пространства их будет континуум) и их описание намного более сложная задача, которую мы в этом курсе полностью решим лишь для случая алгебраически замкнутого поля $\mathbb{C}$ (в разделе про жорданову нормальную форму). Пока же мы займемся изучением первого из определенных выше отношений эквивалентности (для отображений).

Во-первых, докажем следующее Предложение.

Предложение

7.75. Если A - матрица линейного отображения $\varphi : V \to U$ (относительно произвольной пары базисов), то $\operatorname{rk} A = \dim \operatorname{Im} \varphi$.

Proof. □

Согласно Предложению 7.54, для любого базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$ $\operatorname{Im} \varphi = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle$. По определению матрицы отображения A, ее столбцы - координатные столбцы образов базисных векторов $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$ (относительно выбранного базиса в U). Из этих двух фактов следует, что при отождествлении U с координатным пространством $\mathbb{K}^m$ (задаваемым выбранным базисом в U) подпространство $\operatorname{Im} \varphi \subset U$ отождествляется с линейной оболочкой столбцов матрицы A в $\mathbb{K}^m$, размерность которой равна рангу матрицы A (ср.

Следствие

6.53).

Приведем модификацию предыдущего доказательства. Координатные столбцы векторов из $\operatorname{Im} \varphi$ - в точности те столбцы b, для которых система $Ax = b$ разрешима, то есть выбор базиса в U отождествляет $\operatorname{Im} \varphi$ с линейной оболочкой столбцов матрицы A, размерность которой, как мы знаем, равна $\operatorname{rk} A$.

Note.

7.76. Заметим, кстати, что так как при элементарных преобразованиях столбцов матрицы A их линейная оболочка не меняется, то из формулы (54) следует, что она не зависит от базиса в V, как и должно быть, поскольку $\operatorname{Im} \varphi$ - подпространство в U, зависящее только от φ. Та же формула показывает, что линейная оболочка столбцов зависит от базиса в U, поскольку его выбор задает способ отождествления U с $\mathbb{K}^m$.

Следствие

7.77. Ранг матрицы линейного отображения не зависит от выбора базисов, в которых она записана.

Proof. □

Действительно, ранг равен размерности образа линейного отображения, а она ни от каких базисов не зависит.

Note.

7.78. Другое доказательство предыдущего Следствия можно получить, используя Задачу 6.31.

Таким образом, если две матрицы данного размера являются матрицами одного и того же линейного отображения, то их ранги равны [33]. Оказывается, верно и обратное, то есть ранг является единственным инвариантом для матриц линейных отображений. Это вытекает из следующего Предложения.

Предложение

7.79. Если для линейного отображения $\varphi : V \to U r := \dim \operatorname{Im} \varphi$, то существует пара базисов, относительно которых матрица φ имеет блочно-диагональный вид

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proof. □

1-й способ. Построим базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V такой, что его последние $n-r$ векторов образуют базис в $\operatorname{Ker} \varphi \subset V$. Аналогичный базис (при $r = n - k$) уже строился в доказательстве Теоремы 7.57, где было доказано, что система векторов $\{\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_r)\}$ из U линейно независима. Положим $f_1 := \varphi(e_1), \ldots, f_r := \varphi(e_r)$ и продолжим данную систему до базиса $\{f_1, \ldots, f_m\}$ в U. Теперь легко проверяется, что в паре базисов $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V и $\{f_1, \ldots, f_m\}$ в U матрица линейного отображения φ имеет требуемый вид.
2 -й способ. Напомним, что любая невырожденная матрица является произведением элементарных, и обратно, произведение конечного числа элементарных матриц невырождено. Формула $A' = D^{-1}AC$ показывает, что замена базиса в V отвечает композиции элементарных преобразований столбцов матрицы A, в то время как замена базиса в U отвечает композиции элементарных преобразований строк матрицы A. С помощью элементарных преобразований строк и столбцов любую прямоугольную матрицу ранга r можно привести к виду из условия Предложения.

Таким образом, для матриц размера $m \times n$ получается $\min(m, n) + 1$ классов указанной эквивалентности, что отвечает возможным значениям ранга таких матриц.

Задача

7.80. Докажите, что

1. ранг матрицы сюрвективного линейного отображения равен числу ее строк;
2. ранг матрицы инбективного линейного отображения равен числу ее столбцов.

[033] это позволяет определить понятие ранга линейного отображения как ранга любой его матрицы. В силу доказанного выше это - просто другое название для размерности его образа.

Решение. Пусть A - матрица $\varphi : V \to U, \dim V = n, \dim U = m$. Тогда размер A равен $m \times n$. Сюръективность φ равносильна тому, что $\operatorname{Im}\varphi = U$, откуда $\dim \operatorname{Im}\varphi = m$, а по Предложению 7.75 $\dim \operatorname{Im}\varphi = \operatorname{rk} A$, откуда следует пункт 1).

Инъективность φ равносильна тому, что $\operatorname{Ker}\varphi = 0$, что в свою очередь равносильно тому, что СЛОУ $Ax = 0$ имеет только тривиальное решение, что равносильно тому, что столбцы матрицы A линейно независимы, то есть $\operatorname{rk} A$ равен их числу, то есть n.

В оставшейся части этого параграфа применим полученные результаты о линейных отображениях к системам линейных уравнений.

Пусть $\varphi : V \to U$ - линейное отображение. Выбирая базисы $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V и $\{f_1, \ldots, f_m\}$ в U мы отождествляем V и U с пространствами столбцов $\mathbb{K}^n$ и $\mathbb{K}^m$ соответственно, при этом применение линейного отображения φ к вектору $v \in V$ сводится к умножению координатного столбца ξ этого вектора (в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$) на матрицу A отображения φ относительно указанных базисов (см. Предложение 7.71 и диаграмму (53)). Теперь легко видеть, что ядро отображения φ - то есть подпространство векторов $v \in V$ таких, что $\varphi(v) = 0$ - при указанном отождествлении совпадает с подпространством столбцов $x \in \mathbb{K}^n$ таких, что $Ax = 0$, то есть с пространством решений СЛОУ с матрицей коэффициентов A. В то же время образ φ отождествляется с подпространством таких столбцов $b \in \mathbb{K}^m$, для которых система $Ax = b$ разрешима, то есть с линейной оболочкой столбцов матрицы A.

Наглядно вышесказанное выражает следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker}\varphi \arrow[d] & \subset & V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\varphi_e"'] & U \arrow[d, "\varphi_f"] & \supset & \operatorname{Im}\varphi \arrow[d] \\
\{x \mid Ax = 0\} & \subset & \mathbb{K}^n \arrow[r, "A\cdot"] & \mathbb{K}^m & \supset & \langle a_1, \ldots, a_n \rangle,
\end{tikzcd}$$

в которой $a_1, \ldots, a_n$ - столбцы матрицы A.
Заметим, что Теорема 7.57 теперь дает еще одно, независимое доказательство Теоремы 6.43 о размерности пространства решений СЛОУ. Действительно, число неизвестных $n = \dim V, r = \operatorname{rk} A = \dim \operatorname{Im}\varphi$, а размерность пространства решений $\dim \operatorname{Ker}\varphi$ по Теореме 7.57 равна $n - r$.

Также легко видеть, что пункт 2) Теоремы 6.42 следует из Задачи 7.51 (в то время как пункт 1) следует из того, что ядро линейного отображения - подпространство).

Задача

7.81. Докажите, используя линейные отображения и их матрицы, следующее утверждение. Для данной матрицы A системы линейных уравнений $Ax = b$ совместны при любом столбце b тогда и только тогда, когда ранг матрицы A равен числу ее строк (ср. Задачу 6.40).

Решение. Любая матрица A размера $m \times n$ является матрицей некоторого линейного отображения $\varphi : V \to U$, где $\dim V = n, \dim U = m$, относительно выбранных базисов. Напомним, что $\operatorname{rk} A = \dim \operatorname{Im}\varphi$. Условие совместности систем $Ax = b$ при любом столбце b равносильно сюръективности φ, что, в свою очередь, равносильно $\operatorname{Im}\varphi = U$, то есть $\operatorname{rk}\varphi = \dim U = m$.

3.6.5 7.5 Operations with Linear Mapping

Как мы увидим, операции на линейных отображениях аналогичны операциям с матрицами, но так как операции на отображениях с точки зрения математики более фундаментальны, мы их определим независимо.

Пусть $\varphi, \psi : V \to U$ - пара линейных отображений между одними и теми же пространствами. Тогда можно определить их сумму как такое отображение $\varphi + \psi : V \to U$, что $(\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v) \forall v \in V$. Читателю предлагается провести несложную проверку линейности $\varphi + \psi$, а также следующего утверждения: если A и B - матрицы φ и ψ соответственно относительно базисов $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V и $\{f_1, \ldots, f_m\}$ в U, то матрица $\varphi + \psi$ относительно той же пары базисов равна $A + B$.

Кроме того, линейные отображения можно умножать на скаляры: $(\lambda\varphi)(v) = \lambda\varphi(v) \forall v \in V$, эта операция отвечает умножению матрицы на тот же скаляр.

Далее непосредственно проверяется, что множество $\mathcal{L}(V, U)$ (см. абзац перед Предложением 7.68) всех линейных отображений $\varphi : V \to U$ относительно определенных операций сложения и умножения на скаляры является векторным пространством. Более того, установленная в Предложении 7.68 биекция $\mu : \mathcal{L}(V,U) \to \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ является линейным отображением, то есть изоморфизмом линейных пространств.

Пусть у нас есть два линейных отображения $\varphi : V \to U$ и $\psi : U \to W$. Тогда определена их композиция $\psi \circ \varphi : V \to W$, которая (как было проверено в доказательстве Предложения 7.64) также является линейным отображением. Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}, \{f_1, \ldots, f_m\}, \{g_1, \ldots, g_k\}$ - выбранные базисы соответственно в пространствах V, U и W, а A и B - матрицы φ и ψ в них.

Предложение

7.82.

В введенных выше обозначениях матрица D композиции $\psi \circ \varphi$ относительно пары базисов $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и $\{g_1, \ldots, g_k\}$ есть BA.

Proof. □

Имеем

$$(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = (f_1, \ldots, f_m) A$$

то есть $\varphi(e_k) = a_{1k}f_1 + \ldots + a_{mk}f_m$ при $1 \le k \le n$. Из линейности ψ следует, что $\psi(\varphi(e_k)) = a_{1k}\psi(f_1) + \ldots + a_{mk}\psi(f_m)$ при $1 \le k \le n$, то есть

$$(\psi(\varphi(e_1)), \ldots, \psi(\varphi(e_n))) = (\psi(f_1), \ldots, \psi(f_m)) A$$

откуда, используя равенство

$$(\psi(f_1), \ldots, \psi(f_m)) = (g_1, \ldots, g_k) B$$

получаем

$$(\psi(\varphi(e_1)), \ldots, \psi(\varphi(e_n))) = ((g_1, \ldots, g_k) B) A$$

Проверим прямым вычислением (ср. доказательство Предложения 6.58), что $((g_1, \ldots, g_k) B) A = (g_1, \ldots, g_k)(BA)$, откуда будет следовать, что $D = BA$. В самом деле, для любого $1 \le l \le n$

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{k} g_i b_{ij}\right) a_{jl} = \sum_{1\le i\le k, 1\le j\le m} g_i b_{ij} a_{jl} = \sum_{i=1}^{k} g_i \left(\sum_{j=1}^{m} b_{ij} a_{jl}\right)$$

то есть $\psi(\varphi(e_l)) = \sum\limits_{i=1}^{k} g_i d_{il}$, где $d_{il} = \sum\limits_{j=1}^{m} b_{ij} a_{jl}$.

Доказанный результат о том, что матрица композиции линейных отображений φ и ψ есть произведение их матриц (в соответствующих базисах) служит основной мотивацией определения произведения матриц, данного в начале этого курса.

Заметим, что эта формула верна и для матрицы композиции линейных преобразований пространства V (в этом случае все матрицы записываются в фиксированном базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$ пространства V).

Задача

7.83. Из того, что композиция поворотов евклидовой плоскости на углы α и β есть поворот на угол $\alpha + \beta$, получите "формулы сложения" для тригонометрических функций. (Указание: перемножьте матрицы поворотов на указанные углы, записанные в ортонормированном базисе).

Задача

7.84. Пусть $V = U \oplus W u \varphi : V \to V$ - проектор на подпространство U параллельно его прямому дополнению W (см. Пример 7.38). Докажите, что φ удовлетворяет тождеству $\varphi^2 = \varphi$.

Верно и обратное: любой оператор, удовлетворяющий указанному тождеству, является проектором на $U := \operatorname{Im} \varphi$ параллельно $W := \operatorname{Ker} \varphi$, в частности, последние два пространства образуют прямую сумму. Это мы докажем далее в Примере 8.5.

Заметим, что из предыдущей Задачи следует, что матрица проектора A в произвольном базисе удовлетворяет равенству $A^2 = A$.

Роль единичных матриц играют тождественные операторы: для любого $\varphi : V \to U$ выполнены соотношения $\mathrm{Id}_U \circ \varphi = \varphi = \varphi \circ \mathrm{Id}_V$.

Рассмотрим теперь аналог для линейных отображений операции взятия обратной матрицы.

Пусть линейное отображение $\varphi : V \to U$ биективно, то есть изоморфизм. Тогда его матрица A (относительно произвольной пары базисов) невырождена. Действительно, так как тогда $\dim V = \dim U$, то A квадратная и, например, из инъективности φ следует, что столбцы A линейно независимы (см. Задачу 7.80). Легко также непосредственно доказать, что A обратима.

Задача

7.85. Пусть A - матрица изоморфизма $\varphi : V \to U$ относительно базисов $\{e_1, \dots, e_n\}$ в V и $\{f_1, \dots, f_n\}$ в U. Тогда матрицей обратного отображения $\varphi^{-1} : U \to V$ (которое, как мы знаем из доказательства Предложения 7.64, тоже линейно) относительно базисов $\{f_1, \dots, f_n\} \, u \, \{e_1, \dots, e_n\}$ будет A^{-1}.

Решение. Пусть B - матрица φ^{-1} относительно базисов $\{f_1, \dots, f_n\}$ и $\{e_1, \dots, e_n\}$. Тогда из тождеств

$$\varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{Id}_V, \varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{Id}_U$$

получаем $BA = E, \quad AB = E$, а это и значит что $B = A^{-1}$.

Установленная связь умножения матриц с композицией линейных отображений позволяет дать концептуальное доказательство ассоциативности умножения матриц. А именно, если $\chi : W \to Z$ - еще одно линейное отображение с матрицей C относительно пары базисов $\{g_1, \dots, g_k\}$ в W и $\{h_1, \dots, h_l\}$ в Z соответственно, то матрицей композиции $(\chi \circ \psi) \circ \varphi$ относительно базисов $\{e_1, \dots, e_n\}$ и $\{h_1, \dots, h_l\}$ будет $(CB)A$, а композиции $\chi \circ (\psi \circ \varphi)$ – $C(BA)$. Но мы знаем, что композиция отображений ассоциативна, поэтому $(\chi \circ \psi) \circ \varphi = \chi \circ (\psi \circ \varphi)$, откуда, используя биекцию между отображениями и матрицами, получаем $(CB)A = C(BA)$.

Композиция линейных отображений связана с линейными операциями тождествами

$$\chi \circ (\varphi + \psi) = \chi \circ \varphi + \chi \circ \psi, \quad (\chi + \psi) \circ \varphi = \chi \circ \varphi + \psi \circ \varphi$$
$$(\lambda \psi) \circ \varphi = \psi \circ (\lambda \varphi) = \lambda (\psi \circ \varphi) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

Читатель легко убедится в их справедливости. Они отвечают аналогичным операциям над матрицами.

Заметим, что на пространстве $\mathcal{L}(V, V) =: \mathcal{L}(V)$ операция композиции линейных преобразований определяет умножение; в этом случае алгебра (см. Определение 1.70) $\mathcal{L}(V)$ изоморфна алгебре матриц $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ порядка n.

Обратимые линейные операторы на V образуют группу относительно операции композиции. Она обозначается $\mathrm{GL}(V)$. Выбор базиса в V определяет ее изоморфизм с группой невырожденных матриц $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ порядка $n = \dim V$ относительно умножения.

Задача

7.86. Пусть $U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W$ - композиция линейных отображсний. Оцените сверху $\dim(\operatorname{Im}(\psi\varphi))$ через $\dim(\operatorname{Im}\varphi) u \dim(\operatorname{Im}\psi)$. Выведите из полученного результата теорему о ранге произведения матриц.

Решение. С одной стороны, $\operatorname{Im}(\psi\varphi) \subset \operatorname{Im}\psi$, поэтому $\dim\operatorname{Im}(\psi\varphi) \leq \dim\operatorname{Im}\psi$. С другой стороны,

$$\operatorname{Im}(\psi\varphi) = \{w \in W | \exists u \in U : w = \psi(\varphi(u))\} = \{w \in W | \exists v \in \operatorname{Im}\varphi : w = \psi(v)\} = \operatorname{Im}\left(\psi|_{\operatorname{Im}\varphi}\right)$$

поэтому $\dim\operatorname{Im}(\psi\varphi) \leq \dim\operatorname{Im}\varphi$. Из этого очевидно, что ранг произведения матриц не превосходит рангов сомножителей.

Задача

7.87. Пусть $U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W$ - композиция линейных отображений, причем $\dim V = n \dim(\operatorname{Im}\psi) = r$. Известно, что $\psi\varphi = 0$. Оиените сверху $\dim(\operatorname{Im}\varphi)$. Как это связано с Задачей 6.49?

Решение. Заметим, что $\psi\varphi = 0$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im}\varphi \subseteq \operatorname{Ker}\psi$. Кроме того, $\dim\operatorname{Ker}\psi = n - r$. Из этого следует, что $\dim(\operatorname{Im}\varphi) \leq n - r$. Положив $U = \operatorname{Ker}\psi$ и взяв в качестве φ вложение $\operatorname{Ker}\psi \subset V$, мы видим, что оценка точная.

Следующая задача обобщает предыдущую.

Задача

7.88. 1) Пусть $U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} W$ - композиция линейных отображений, причем $\dim V = n, \dim(\operatorname{Im}\psi) = r_2, \dim(\operatorname{Im}\varphi) = r_1$. Докажнте, что $\dim(\operatorname{Im}(\psi\varphi)) \geq r_1 + r_2 - n$.
2) Пусть

$$V \xrightarrow{\varphi_1} V \xrightarrow{\varphi_2} \ldots \xrightarrow{\varphi_k} V$$

- последовательность линейных преобразований пространства V, тодда

$$\dim\operatorname{Ker}(\varphi_k \circ \ldots \circ \varphi_1) \leq \dim\operatorname{Ker}(\varphi_1) + \ldots + \dim\operatorname{Ker}(\varphi_k)$$

Решение. 1) Пусть $L \subset \varphi(U)$ - произвольное прямое дополнение к подпространству $\varphi(U) \cap \operatorname{Ker}\psi$ в $\varphi(U)$. Легко проверить, что ограничение ψ на L индуцирует изоморфизм $L \cong \operatorname{Im}(\psi\varphi)$. Тогда

$$r_1 = \dim\varphi(U) = \dim(\varphi(U) \cap \operatorname{Ker}\psi) + \dim L$$

откуда

$$r_1 - \dim L = \dim(\varphi(U) \cap \operatorname{Ker}\psi) \leq \dim(\operatorname{Ker}\psi) = n - r_2$$

2. Пусть $\dim V = n, \dim\operatorname{Im}\varphi_i =: r_i$, тогда $\dim\operatorname{Ker}\varphi_i = n - r_i$. Используя предположение индукции и предыдущий пункт, имеем:

$$\begin{gathered} n - \dim\operatorname{Ker}(\varphi_k \circ \ldots \circ \varphi_1) = \dim(\operatorname{Im}(\varphi_k \circ \ldots \circ \varphi_1)) \geq \\ \geq \dim(\operatorname{Im}(\varphi_{k-1} \circ \ldots \circ \varphi_1)) + r_k - n \geq r_1 + \ldots + r_k - (k-1)n = \\ = n - (n - r_1) - \ldots - (n - r_k) = n - \dim\operatorname{Ker}\varphi_1 - \ldots - \dim\operatorname{Ker}\varphi_k . \end{gathered}$$

3.6.6 7.6 Linear Functions and Conjugate Space

Пусть V - векторное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Определение

7.89. Линейной функцией на V называется такая функция $f : V \to \mathbb{K}$, что

1. $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \forall v_1, v_2 \in V$;
2. $f(\lambda v) = \lambda f(v) \forall v \in V, \lambda \in \mathbb{K}$.

Из определения следует, что для любой конечной линейной комбинации $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$ векторов из $V f\left(\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i v_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i f(v_i)$.

Легко видеть, что линейная функция - то же самое, что линейное отображение из V в одномерное линейное пространство $\mathbb{K}$ столбцов высоты 1 над полем $\mathbb{K}$. В частности для линейной функции определено понятие ядра, причем если $\dim V = n$ и $f : V \to \mathbb{K}, f \neq 0$, то $\dim \operatorname{Ker} f = n - 1$.

В $\mathbb{K}$ есть фиксированный базис $\{\mathbf{1}\}$ (здесь $1 \in \mathbb{K}$ рассматривается как вектор, точнее, столбец высоты 1). Тогда любой элемент из пространства $\mathbb{K}$ однозначно запишется в виде $\lambda\mathbf{1}$, где λ принадлежит полю $\mathbb{K}$.

Приведем несколько примеров линейных функций. Проверка линейности в каждом случае тривиальна (читателю все же рекомендуется ее проделать).

Пример 7.90. Пусть V - евклидова плоскость или пространство, фиксируем $a \in V$ и определим $f = f_a : V \to \mathbb{R}$ формулой $\forall v \in V f(v) = (a, v)$ (где скобки обозначают скалярное произведение). Тогда f - линейная функция на V. (Полезно заметить, что любая линейная функция на V имеет такой вид для некоторого $a \in V$).

Пример 7.91. Пусть $V = C[a, b]$ - бесконечномерное пространство непрерывных функций на отрезке $[a, b]$. Определим отображение $\varphi : V \to \mathbb{R}$ формулой $\varphi(f) = \int\limits_a^b f(x)dx \forall f \in V$. Тогда φ - линейная функция.

Пример 7.92. Пусть $V = \mathbb{K}^n, a := (a_1, \ldots, a_n)$ - заданная строка элементов из $\mathbb{K}$. Тогда $f = f_a : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}, f(v) = av \forall v \in V$ (произведение строки на столбец) задает линейную функцию. Мы вскоре увидим, что так выглядит любая линейная функция на пространстве столбцов $\mathbb{K}^n$.

Пример 7.93. Пусть $V = \mathbb{K}[x]_n$ - пространство многочленов степени не выше $n, x_0 \in \mathbb{K}$ - фиксированный элемемент. Тогда $f = f_{x_0} : V \to \mathbb{K}, f(p) = p(x_0) \forall p \in \mathbb{K}[x]_n$ (вычисление значения многочлена p в фиксированной точке x_0) определяет линейную функцию на V.

Пример 7.94. Пусть $V = \mathbb{R}[x]_n$, зафиксируем $k \in \mathbb{N}$. Тогда $f : V \to \mathbb{R}, f(p) := p^{(k)}(0)$ (вычисление k-й производной многочлена в нуле) - линейная функция.

Пример 7.95. Пусть $V = \operatorname{Mat}_n(\mathbb{K})$, определим функцию $\operatorname{tr}(A) = \sum\limits_i a_{ii}$ (сумма диагональных элементов матрицы A). Тогда $\operatorname{tr} : \operatorname{Mat}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ - линейная функция, называемая следом.

Задача

7.96. Пусть линейная функция f на пространстве $V = \operatorname{Mat}_n(\mathbb{K})$ удовлетворяет условию $f(AB) = f(BA) \forall A, B \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{K})$. Докажнте, что тогда $f = \alpha \operatorname{tr}$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{K}$.

Пусть пространство V конечномерно и $\{e_1, \ldots, e_n\}$ - некоторый базис в V. Линейная функция f однозначно задается своими значениями на базисных векторах: если $v = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i e_i$, то

$$f(v) = v_1 f(e_1) + \ldots + v_n f(e_n)$$

причем эти значения могут быть произвольными элементами поля $\mathbb{K}$. Матрица f как линейного отображения $V \rightarrow \mathbb{K}$ имеет размер $1 \times n$, то есть является строкой. Более точно, матрица f относительно базисов $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V и $\{\mathbf{1}\}$ в $\mathbb{K}$ есть строка $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$, которая называется координатной строкой линейной функции в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Более подробно,

$$(\mathbf{f}(e_1), \ldots, \mathbf{f}(e_n)) = \mathbf{1}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$$

где слева стоит строка элементов пространства $\mathbb{K}$, мы их выделили жирным шрифтом, чтобы отличить от строки чисел справа. При замене базиса в V координатная строка A преобразуется по формуле $A' = AC$ (см. (54)).

Задача

7.97. Докажите, что система линейных функций $\{f_1, \ldots, f_n\}$ на n-мерном пространстве V линейно зависима тогда и только тогда, когда найдется такой вектор $0 \neq v \in V$, что $f_1(v) = \ldots = f_n(v) = 0$.

Решение. Если линейные функции $\{f_1, \ldots, f_n\}$ линейно зависимы, то их координатные строки тоже зависимы, то есть линейно зависимы строки матрицы $A = (a_{ij})$, где $a_{ij} = f_i(e_j)$. Тогда линейно зависимы и ее координатные столбцы, то есть

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} f_1(e_1) \\ \vdots \\ f_n(e_1) \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_n \begin{pmatrix} f_1(e_n) \\ \vdots \\ f_n(e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

где не все λ_i равны нулю. Отсюда получаем, что $f_i(v) = 0, i = 1, \ldots, n$, где $v = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i e_i \neq 0$. Легко видеть, что приведенное рассуждение обратимо.

Мы знаем, что множество всех линейных отображений $\varphi : V \rightarrow U$ является линейным пространством $\mathcal{L}(V; U)$, размерность которого (в случае конечномерных пространств V и U) равна $\dim V \dim U$ (поскольку оно изоморфно пространству матриц соответствующего размера). То же верно в частном случае линейных функций: множество всех линейных функций $f : V \rightarrow \mathbb{K}$ образует линейное пространство той же размерности, что и V (в случае конечномерного V).

Определение

7.98. Линейное пространство всех линейных функций на V называется сопряженным пространством к V и обозначается V^*.

Таким образом,

$$V^* = \{f : V \rightarrow \mathbb{K} | f \text{ линейна } \}.$$

Заметим, что операцию перехода с сопряженному пространству можно итерировать: возникает второе сопряженное $V^{**} := (V^*)^*$ и т.д.

Несмотря на то, что ряд результатов для сопряженного пространства следует из общей теории линейных отображений, оно обладает рядом специальных свойств, связанных с "двойственностью" между векторами и линейными функциями [35], поэтому мы остановимся

подробнее на его свойствах (и частично передокажем уже известные результаты). Пусть V – n-мерное линейное пространство над полем $\mathbb{K}, \{e_1, \ldots, e_n\}$ - некоторый базис в V. Тогда мы имеем набор из n линейных функций $\varepsilon_i : V \rightarrow \mathbb{K}, \varepsilon_i(v) = v_i$($i$-я координата вектора v в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$), $i = 1, \ldots, n$. Очевидно, координатные

[035] Причина указанной двойственности связана с существованием канонического (не зависящего ни от каких выборов) отображения

$$V^* \times V \rightarrow \mathbb{K}, \quad (f, v) \mapsto f(v)$$

линейного по каждому из аргументов.

функции однозначно (как линейные функции) задаются равенствами

$$\varepsilon_i\left(e_j\right)=\delta_{ij}:=\begin{cases}1, & \text{если } i=j\\ 0, & \text{если } i\neq j\end{cases}$$

(δ_{ij} называется δ-символом Кронекера).

Предложение

7.99. Система координатных функций $\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\}$ является базисом в V^*.

Proof. □

Пусть $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\varepsilon_i=0$ как линейная функция, это значит, ее значение на любом векторе из V равно нулю. Последовательно подставляя элементы базиса $\{e_1,\ldots,e_n\}$ в качестве ее аргументов, получаем $\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0$.

Пусть теперь $f\in V^*$ - произвольная линейная функция; покажем, что она является линейной комбинацией $\varepsilon_i, i=1,\ldots,n$. Для этого заметим, что линейная функция

$$g:=f-\sum_{i=1}^{n}f\left(e_i\right)\varepsilon_i$$

тождественно равна нулю, так как принимает нулевые значения на всех базисных векторах.

Определение

7.100. Базис в V^*, состоящий из координатных функций $\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\}$, называется сопряженным (или биортогоналъным) к базису $\{e_1,\ldots,e_n\}$ в V.

Заметим, что из определения биортогонального базиса следует, что для любого вектора $v\in V$

$$v=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(v)e_i \tag{57}$$

а для любой линейной функции $f\in V^*$

$$f=\sum_{i=1}^{n}f\left(e_i\right)\varepsilon_i \tag{58}$$

Задача

7.101. Пусть C - матрица перехода между базисами $\{e_1,\ldots,e_n\}\,u\,\{e'_1,\ldots,e'_n\}$ в V. Найдите матрицу перехода между соответствуюшими биортогональными базисами $\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\}$ и $\{\varepsilon'_1,\ldots,\varepsilon'_n\}$ в V^*.

Решение. Ясно, что элементы биортогонального базиса должны преобразовываться так же как координаты, то есть $\left(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\right)^T=C\left(\varepsilon'_1,\ldots,\varepsilon'_n\right)^T$ (см. формулу (49)). Поэтому $\left(\varepsilon'_1,\ldots,\varepsilon'_n\right)=\left(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\right)C^{-T}$.

Задача

7.102. Покажите, что любая ненулевая линейная функция $f : V \to \mathbb{K}$ является первой координатной функцией ε_1 относительно нежоторого базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V.

Решение. Пусть $U := \operatorname{Ker} f \subset V$, тогда $\dim U = n - 1$. Выберем базис $\{e_2, \ldots, e_n\}$ в U и дополним его до базиса в V вектором e_1 таким, что $f(e_1) = 1$ (так как $f \neq 0$, то такой вектор $e_1 \in V$ существует). Тогда для любого вектора $v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i \in V$ имеем

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{n} v_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} v_i f(e_i) = v_1$$

На самом деле предыдущий результат можно усилить: любой базис в V^* является биортогональным к некоторому (единственному) базису в V. Вот набросок одного из доказательств этого результата (детали оставим читателю в качестве упражнения). Пусть $\{f_1, \ldots, f_n\}$ - линейно независимые элементы в V^*. Тогда их координатные строки в произвольном базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$ пространства V линейно независимы. Составим из них матрицу порядка n. Она невырождена, поэтому приводится к единичной с помощью последовательности элементарных преобразований столбцов. Эта последовательность, примененная к столбцам единичной матрицы, даст матрицу перехода от $\{e_1, \ldots, e_n\}$ к тому базису в V, к которому базис $\{f_1, \ldots, f_n\}$ в V^* является биортогональным. Ниже мы передокажем этот результат в качестве следствия из некоторой теории.

Из предыдущего следует, что если пространство V конечномерно, то оно изоморфно своему двойственному V^*. Например, можно выбрать базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V и биортогональный к нему $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ в V^* и определить изоморфизм $\varphi : V \to V^*$ условием $\varphi(e_i) = \varepsilon_i, i = 1, \ldots, n$. Можно показать, что выбирая разные базисы в V мы будем получать разные изоморфизмы, и нет никакого "канонического" выбора такого изоморфизма.

Note.

7.103. Поясним сказанное выше. Определенный выше изоморфизм $\varphi : V \to V^*$ в паре базисов $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V и $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ в V^* имеет единичную матрицу. Тогда, используя результат Задачи 7.101, можно показать, что φ в другой паре сопряженных базисов $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ и $\{\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_n\}$ будет иметь матрицу $C^T C$, где C - матрица перехода от $\{e_1, \ldots, e_n\}$ к $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$, в то время как изоморфизм φ', определенный штрихованной парой сопряженных базисов, будет иметь относительно нее единичную матрицу, то есть φ и φ', вообще говоря, разные изоморфизмы (если $C^T C \neq E$). Можно показать (см. Задачу 16.4), что задание изоморфизма $V \to V^*$ равносильно заданию невырожденной билинейной функции $V \times V \to \mathbb{K}$.

Однако существует канонический изоморфизм между пространством V и его дважды двойственным V^{**} (в случае, когда V конечномерно). Это имеет ряд важных следствий, в частности, для тензорной алгебры, поэтому мы обсудим эту тему более подробно.

Хотя на первый взгляд представить ненулевую линейную функцию на V^* непросто, все такие линейные функции (в случае конечномерных пространств) имеют простое описание. А именно, для произвольного $v \in V$ определим $\vartheta_v : V^* \to \mathbb{K}$ равенством $\vartheta_v(f) := f(v) \forall f \in V^*$

Во-первых проверим, что ϑ_v линейна, то есть $\vartheta_v \in V^{**}$. В самом деле,

$$\vartheta_v(f_1 + f_2) = (f_1 + f_2)(v) = f_1(v) + f_2(v) = \vartheta_v(f_1) + \vartheta_v(f_2) \forall f_1, f_2 \in V^*$$

Кроме того,

$$\vartheta_v(\lambda f) = (\lambda f)(v) = \lambda f(v) = \lambda \vartheta_v(f) \forall f \in V^*$$

Теперь покажем, что (в случае конечномерного V) никаких линейных функций на V^* кроме тех, которые имеют вид ϑ_v для некоторого $v \in V$, не существует. Для этого определим линейное отображение $\vartheta : V \to V^{**}$, полагая $\vartheta(v) = \vartheta_v$.

Во-первых, покажем, что ϑ действительно линейно. Нам нужно проверить, что $\vartheta_{v_1+v_2} = \vartheta_{v_1} + \vartheta_{v_2} \forall v_1, v_2 \in V$ и что $\vartheta_{\lambda v} = \lambda \vartheta_v \forall \lambda \in \mathbb{K}$ и $v \in V$. Действительно,

$$\vartheta_{v_1+v_2}(f) = f(v_1+v_2) = f(v_1) + f(v_2) = \vartheta_{v_1}(f) + \vartheta_{v_2}(f) = (\vartheta_{v_1} + \vartheta_{v_2})(f) \forall f \in V^*$$

и

$$\vartheta_{\lambda v}(f) = f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda \vartheta_v(f)$$

(мы использовали линейность f).
Докажем теперь, что ϑ инъективно. Действительно, если $\vartheta_v = 0$, то для любого $f \in V^*$ $\vartheta_v(f) = f(v) = 0$, но если $v \neq 0$ то найдется такая $f \in V^*$ что $f(v) \neq 0$ (например, в произвольном базисе какая-то из координат вектора v отлична от нуля). Значит, $\operatorname{Ker} \vartheta = 0$. Используя теперь

Следствие

7.61 получаем, что ϑ - изоморфизм между V и V^{**}. Заметим, что в определении ϑ не было никакого произвола, поэтому этот изоморфизм называется каноническим.

Подведем итог.

Теорема

7.104. Если пространство V конечномерно, то оно канонически изоморфно своему дважды сопряженному пространству V^{**}.

В предыдущих рассуждениях мы использовали существование канонического билинейного отображения $V^* \times V \to \mathbb{K}, (f, v) \mapsto f(v)$. Если в записи (f, v) зафиксировать $f \in V^*$ и заставить v пробегать пространство V, мы получим линейную функцию на V, а если зафиксировать $v \in V$ и заставить f пробегать все пространство V^*, получим линейную функцию на V^*. Именно этот факт мы и использовали выше в записи $(f, v) = \vartheta_v(f)$ для фиксированного $v \in V$.

Преимущества канонических изоморфизмов перед "случайными" состоит в том, что отождествление пространств с помощью них обычно безобидно. То есть пространства V и V^{**} можно считать, по-существу, одним и тем же пространством, при этом вектор $v \in V$ отождествляется с $\vartheta_v \in V^{**}$, а значит базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V - с базисом $\{\vartheta_{e_1}, \ldots, \vartheta_{e_n}\}$ в V^{**}

Note.

7.105. (ср. Замечание 7.103). Определим изоморфизм $\theta : V \to V^{**}$ условием, что он переводит базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в базис $\{\vartheta_{e_1}, \ldots, \vartheta_{e_n}\}$. В этой паре базисов θ по определению имеет единичную матрицу. Покажем, что θ будет иметь единичную матрицу в любой другой аналогичной паре базисов. Действительно, пусть $\{e_1', \ldots, e_n'\}$ - другой базис в V такой, что матрица перехода от $\{e_1, \ldots, e_n\}$ к нему есть C. Тогда согласно Задаче 7.101 матрица перехода от $\{\vartheta_{e_1}, \ldots, \vartheta_{e_n}\}$ к $\{\vartheta_{e_1'}, \ldots, \vartheta_{e_n'}\}$ есть $\left(C^{-T}\right)^{-T} = C$. Поэтому матрица линейного отображения θ относительно новой пары базисов будет $C^{-1}EC = E$. Ясно, что θ совпадает с определенным выше изоморфизмом ϑ. Это еще раз показывает смысл "каноничности" изоморфизма ϑ - его определение не зависит от выбора базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V, а определяется самой линейной структурой пространства V.

Задача

7.106. Покажите, что любой базис $\{f_1, \ldots, f_n\}$ в V^* является биортогональным некоторому (единственному) базису $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V.

Решение. Пусть $\{g_1, \ldots, g_n\}$ - базис в V^{**}, биортогональный к $\{f_1, \ldots, f_n\}$, то есть $g_i(f_j) = \delta_{ij}$. Мы знаем, что каждый g_i имеет вид ϑ_{e_i} для некоторого $e_i \in V$, причем

$$g_i(f_j) = \vartheta_{e_i}(f_j) = f_j(e_i) = \delta_{ij}.$$

Поэтому базис $\{f_1, \ldots, f_n\}$ биортогонален базису $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Задача

7.107. Пусть V - пространство многочленов $\mathbb{K}[x]_n$ степени $\leq n$. Покажите, что линейные функции $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, определяемые равенствами

$$\varepsilon_i(p) = p\left(x_i\right)$$

где $x_0, x_1, \ldots, x_n$ - попарно различные элементы поля $\mathbb{K}$, составляют базис пространства V^*, и найдите базис в пространстве V, которому он биортогонален. Покажите, что формула (57) в этом случае превращается в интерполяционную формулу Лагранжна.

Задача

7.108. Пусть V такое же как в предыдущей задаче, причем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Покажите, что линейные функции $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, определяемые равенствами

$$\varepsilon_i(p) = p^{(i)}\left(x_0\right)$$

где $x_0 \in \mathbb{K}$, составляют базис пространства V^*, и найдите базис пространства V, которому он биортогонален. Выясните смысл формулы (57) в этом случае.

Решение. Если $\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ - искомый базис в V, то он состоит из многочленов, удовлетворяющих условиям $p_i^{(j)}\left(x_0\right) = \delta_{ij}$. Такие многочлены легко найти: $p_i(x) = \frac{(x-x_0)^i}{i!}, i = 0, \ldots, n$. Пусть

$$\lambda_0 \varepsilon_0 + \lambda_1 \varepsilon_1 + \ldots + \lambda_n \varepsilon_n = 0$$

- некоторая линейная зависимость, применяя ее последовательно к системе $\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$, находим, что $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$

Формула (57) в этом случае превращается в формулу Тейлора:

$$p(x) = p\left(x_0\right) + p'\left(x_0\right)\frac{\left(x-x_0\right)}{1!} + p''\left(x_0\right)\frac{\left(x-x_0\right)^2}{2!} + \ldots + p^{(n)}\left(x_0\right)\frac{\left(x-x_0\right)^n}{n!}$$

Пусть $\dim V = n$. Для любого $k, 0 \leq k \leq n$ построим явное взаимно однозначное соответствие между множествами k-мерных подпространств в V и $n-k$-мерных подпространств в V^*.

А именно, каждому k-мерному подпространству $U \subset V$ сопоставим некоторое подпространство $U^0 \subset V^*$ следующим образом:

$$U^0 := \{f \in V^* | f(u) = 0 \quad \forall u \in U\} \tag{59}$$

То есть U^0 состоит из тех и только тех линейных функций на V, которые обращаются в ноль на всех векторах из U. Подпространство $U^0 \subset V^*$ называется аннулятором подпространства $U \subset V$.

Предложение

7.109. $\dim U^0 = n - \dim U$.

Proof. □

Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ - такой базис в V, что его подсистема $\{e_1, \ldots, e_k\}$ является базисом в U. Тогда легко видеть, что $U^0 = \langle \varepsilon_{k+1}, \ldots, \varepsilon_n \rangle$.

Поскольку выше мы отождествили пространства V и V^{**} с помощью канонического изоморфизма ϑ, $\left(U^0\right)^0$ можно рассматривать как подпространство в V. При этом, как легко проверит читатель, $\left(U^0\right)^0 = \{v \in V | f(v) = 0 \forall f \in U^0\} \subset V$.

Предложение

7.110. Для любого подпространства $U \subset V$ имеет место равенство $(U^0)^0 = U$ подпространств в V. Более того, сопоставление подпространству его аннулятора определяет обращающую включение [36] биекцию между множествами подпространств в V и в V^*.

Proof. $\square$

Легко видеть, что $U \subset (U^0)^0$. С другой стороны, согласно предыдущему Предложению, $\dim (U^0)^0 = n - \dim U^0 = n - (n - \dim U) = \dim U$, откуда $U = (U^0)^0$. Это показывает, что сопоставление подпространству в V его аннулятора (как подпространства в V^*) и сопоставление подпространству в V^* его аннулятора (как подпространства в V) - взаимно обратные биекции между подпространствами в V и в V^*.

Если U и W - подпространства в V, то из $U \subset W$ следует $U^0 \supset W^0$ (включение подпространств в V^*). Обратная импликация следует из предыдущего абзаца.

Задача

7.111. Не вычисляя количества подпространств явно, докажите, что в n-мерном линейном пространстве над конечным полем числа k-мерных и $n-k$-мерных подпространств равны. (Иначе в этом можно убедиться используя результат Задачи 6.56).

Задача

7.112. Докажите, что для подпространств U и W в V верны равенства $(U \cap W)^0 = U^0 + W^0$, $\quad (U+W)^0 = U^0 \cap W^0$.

Решение. В силу предыдущего Предложения, из $U \supset U \cap W \subset W$ следует $U^0 \subset (U \cap W)^0 \supset W^0$, откуда (в силу того, что сумма подпространств $L + M$ - наименьшее по включению подпространство, содержащее L и M)$U^0 + W^0 \subset (U \cap W)^0$.

Аналогично, из $U^0 \subset U^0 + W^0 \supset W^0$ следует $U \supset (U^0 + W^0)^0 \subset W$, откуда (в силу того, что пересечение $L \cap M$ - наибольшее подпространство, содержащееся и в L и в M) $(U^0 + W^0)^0 \subset U \cap W$, что равносильно $(U \cap W)^0 \subset U^0 + W^0$. Значит, $(U \cap W)^0 = U^0 + W^0$. Второе равенство можно доказать аналогично, а можно вывести из первого с использованием предыдущего Предложения. А именно, обозначив $L = U^0, M = W^0$, перепишем доказанное равенство в виде $(L^0 \cap M^0)^0 = L + M$, откуда, переходя к аннуляторам, получаем $(L+M)^0 = L^0 \cap M^0$

Понятие аннулятора позволяет дать бескоординатное описание связи между подпространствами в $\mathbb{K}^n$ и системами линейных уравнений, которые их определяют (выбор базиса в V отождествляет аннулятор U^0 с пространством всех линейных уравнений, которым удовлетворяют все векторы из U). В частности, так как любое подпространство $U \subset V$ является аннулятором некоторого подпространства в V^* (а именно U^0), то любое подпространство после выбора базиса является пространством решений некоторой СЛОУ.

Note.

7.113. Дадим другое решение Задачи 7.97. Пусть для линейных функций $\{f_1, \ldots, f_n\}$ на n мерном пространстве V существует $v \in V, v \neq 0$ такой, что $f_1(v) = \ldots = f_n(v) = 0$; покажем, что данная система функций линейно зависима. В самом деле, положим $W := \langle f_1, \ldots, f_n \rangle \subseteq V^*$. Тогда из условия $0 \neq v \in W^0$, поэтому $\dim W < n = \dim V^*$ и значит система $\{f_1, \ldots, f_n\}$ линейно зависима.

---

[036] Что логично: чем меньше подпространство, тем больше линейных функций, которые на нем обращаются в нуль.

Обратно, пусть система $\{f_1, \ldots, f_n\}$ линейно зависима. Тогда размерность $W = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle$ меньше $n = \dim V^*$ и значит $W^0 \neq 0$, поэтому найдется вектор $0 \neq v \in V$ такой, что $f_1(v) = \ldots = f_n(v) = 0$.

Пусть $\varphi : V \to U$ - линейное отображение. Тогда оно индуцирует линейное отображение сопряженных пространств, направленное в обратную сторону:

$$\varphi^\star : U^* \to V^*, \varphi^\star(f) = f \circ \varphi$$

то есть для $f \in U^*$ линейная функция $\varphi^\star(f) \in V^*$ принимает значение $f(\varphi(v))$ на произвольном векторе $v \in V$. Отображение $\varphi^\star$ называется линейно сопряженным к φ.

Note.

7.114. Равенство $\varphi^\star(f)(v) = f(\varphi(v))$ иногда переписывают в виде $(f, \varphi(v))_U = (\varphi^\star f, v)_V$, где левые и правые скобки обозначают канонические билинейные отображения $U^* \times U \to \mathbb{K}$ и $V^* \times V \to \mathbb{K}$ соответственно. Эти обозначения подчеркивают связь (подробности см. в Замечании 12.3) между линейно сопряженными отображениями, введенными выше и сопряженными отображениями евклидовых пространств, которые будут изучаться далее.

Проверка линейности $\varphi^\star$:

$$\varphi^\star(f_1 + f_2) = (f_1 + f_2) \circ \varphi = f_1 \circ \varphi + f_2 \circ \varphi = \varphi^\star(f_1) + \varphi^\star(f_2)$$

аналогично для умножения на константу.

Предложение

7.115. Операция $\star : \mathcal{L}(U, V) \to \mathcal{L}(V^*, U^*)$ обладает следующими свойствами:

1. $(\varphi_1 + \varphi_2)^\star = \varphi_1^\star + \varphi_2^\star, (\lambda\varphi)^\star = \lambda\varphi^\star$ (линейностъ);
2. $\mathrm{Id}_V^\star = \mathrm{Id}_{V^*}$;
3. для всех линейных отображений $\varphi : U \to V$ диаграммы

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\vartheta^V"] & V^{**} \\ U \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\vartheta^U"] & U^{**} \arrow[u, "\varphi^{\star\star}"'] \end{tikzcd}$$

коммутативны (то есть при канонических изоморфизмах $\vartheta^U : U \cong U^{**}, \quad \vartheta^V : V \cong V^{**}$ отображение $\varphi^{\star\star}$ отождествляется с φ).

4) Если $\psi : V \to W$ - еще одно линейное отображение, $(\psi \circ \varphi)^\star = \varphi^\star \circ \psi^\star$,

Proof. □

Докажем пункт 3). $\varphi^{\star\star}\left(\vartheta_u^U\right)$ - это функция, на произвольном $f \in V^*$ принимающая значение

$$\varphi^{\star\star}\left(\vartheta_u^U\right)(f) = \vartheta_u^U(\varphi^\star f) = (\varphi^\star f)(u) = f(\varphi(u))$$

$\vartheta_{\varphi(u)}^U$ - это функция, на произвольном $f \in V^*$ принимающая значение

$$\vartheta_{\varphi(u)}^U(f) = f(\varphi(u))$$

Отсюда $\varphi^{\star\star}\left(\vartheta_u^U\right)=\vartheta_{\varphi(u)}^U$.
Доказательство пункта 4) дается следующей выкладкой, где $f \in W^*, u \in U$:

$$(\psi\varphi)^{\star}(f)(u)=f(\psi(\varphi(u)))=\left(\psi^{\star} f\right)(\varphi(u))=\varphi^{\star}\left(\psi^{\star}(f)\right)(u)=\left(\varphi^{\star} \psi^{\star}\right)(f)(u)$$

Доказательство пунктов 1) и 2) оставим читателю в качестве упражнения.
По поводу применения введенных понятий и результатов к нахождению инвариантных подпространств оператора см. Предложение 8.25 и следующий за ним абзац.

Note.

7.116. В случае бесконечномерного пространства V сопряженное пространство V^* всегда имеет большую размерность (в смысле мощности базиса). Например, если V - пространство финитных последовательностей, которое счетномерно, то V^* состоит из всех последовательностей, и является несчетномерным.

3.7 Linear Spaces and Linear Maps from Kostrikin Manin

3.7.1 Linear Spaces

(по Кострикину Манину)

Векторы с началом в выбранной точке пространства можно умножать на числа и складывать по правилу параллелограмма. Это-классическая модель законов сложения перемещений, скоростей, сил в механике. В общем определении векторного, или линейного, пространства вещественные числа заменяются произвольным полем, а простейшие свойства сложения и умножения векторов постулируются в качестве аксиом. Никаких следов «трехмерности» физнческого пространства в определении не остается. Понятие размерности вводится и изучается отдельно.

Из курса аналитической геометрии на плоскости и в трехмерном пространстве известно много примеров геометрической интерпретации алгебраических соотношений между двумя или тремя переменными. Но, по выражению Н. Бурбаки, «..ограничение геометрическим языком, отвечающим пространству только трех измерений, было бы ярмом для современного математика, столь же неудобным, как то, которое мешало грекам распространить понятие числа на отношения несоизмеримых величин...».

Определение.

ЛИнейным (или векторным) пространством L над полем $\mathscr{K}$ называется множество, снабженное бинарной операцией $L \times L \rightarrow L$, обычно обозначаемой как сложение: $(l_1, l_2) \longrightarrow$ $\mapsto l_1+l_2, u$ внешней бинарной операцией $\mathscr{K} \times L \rightarrow L$, обычно обозначаемой как умножение: $(a, l) \longmapsto a l$, которье удовлетворяют следующим аксиомам:

а) Сложение элементов L, или векторов, превращает L в ком. мутативную (абелеву) группу. Ее нулевой элемент обычно обозна. чается 0 ; элемент, обратный κl, обьчно обозначаетсл -l.

б) Умножение векторов на элементы поля $\mathscr{K}$, или скаляры, унитарно, т. е. $1 l=l$ для всех l, и ассоциативно, т. е. $a(b l)=(a b) l$ для всех $a, b \in \mathscr{K} ; l \in L$.

в) Сложение и умножение связаны законами дистрибутивности, Т. e.

$$a\left(l_1+l_2\right)=a l_1+a l_2, \quad\left(a_1+a_2\right) l=a_1 l+a_2 l$$

для всех $a, a_1, a_2 \in \mathscr{K} ; l, l_1, l_2 \in L$.

Вот некоторые простейшие следствия определения.

а) $0l = a0 = 0$ для всех $a \in \mathscr{K}, l \in L$. Действительно, $0l + 0l = (0+0)l = 0l$, откуда $0l = 0$ по свойству сокращения в абелевой группе. Аналогично, $a0 + a0 = a(0+0) = a0$, т. е. $a0 = 0$. б) $(-1)l = -l$. Действительно, $l + (-1)l = 1l + (-1)l = (1+ +(-1))l = 0l = 0$, так что вектор $(-1)l$ обратен к l.

в) Если $al = 0$, то либо $a = 0$, либо $l = 0$. В самом деле, ссли $a \neq 0$, то $0 = a^{-1}(al) = (a^{-1}a)\, l = 1l = l$.

г) Для любых $a_1, \ldots, a_n \in \mathscr{K}; l_1, \ldots, l_n \in L$ однозначно определено выражение $a_1 l_1 + \ldots + a_n l_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i l_i$: благодаря ассоциативности сложения в абелевой группе можно не расставлять скобки, указывающие порядок вычисления попарных сумм. Аналогично, однозначно определено выражение $a_1 a_2 \ldots a_n l$.

Выражение вида $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i l_i$ называется линейной комбинацией векторов $l_1, \ldots, l_n$; скаляры a_i - коэффициенты этой линейной комбинации.

Следующие примеры линейных пространств будут постоянно встречаться в дальнейшем.

Нульмерное пространство. Это-абелева группа $L = \{0\}$, состоящая из одного нуля. Единственно возможный закон умножения на скаляры: $a0 = 0$ для всех $a \in \mathscr{K}$ (убедитесь в справедливости аксиом!).

Предостережение: нульмерные пространства над разными полями - это разные пространства: задание поля $\mathscr{K}$ входит в определение линейного пространства.

Основное поле $\mathscr{K}$ как одномерное координатное пространство. Здесь $L = \mathscr{K}$, сложение-это сложение в $\mathscr{K}$, умножение на скаляры - это умножение в $\mathscr{K}$. Справедливость аксиом линейного пространства следует из аксиом поля.

Более общо, если имеется поле K и его подполе $\mathscr{K}$, то K можно рассматривать как линейное пространство над $\mathscr{K}$. Например, поле комплексных чисел $\mathbf{C}$ является линейным пространством над полем вещественных чисел $\mathbf{R}$, которое в свою очередь является линейным пространством над полем рациональных чисел $\mathbf{Q}$.

n-мерное координатное пространство. Положим $L = \mathscr{K}^n = \mathscr{H} \times \ldots \times \mathscr{K}$ (декартово произведение $n \geqslant 1$ множителей). Элементы L можно записывать в виде строк $(a_1, \ldots, a_n), a_i \in \mathscr{K}$, или столбцов высоты n. Определим сложение и умножение на скаляр формулами:

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n),$$
$$a(a_1, \ldots, a_n) = (aa_1, \ldots, aa_n).$$

При $n = 1$ получается предыдущий пример. Одномерные пространства над $\mathscr{K}$ называют прямыми, или $\mathscr{K}$-прямыми; двумерные $\mathscr{K}$-плоскостями.

Пространства функций. Пусть S - произвольное множество, $F(S)$ - множество функций на S со значениями в $\mathscr{K}$, или отображений S в $\mathscr{K}$. ак обычно, если $f: S \to \mathscr{K}$ - такая функция, то через $f(s)$ обозначается значение f на элементе $s \in S$. Сложение и умножение функций на скаляр определяется поточечно:

$$(f+g)(s) = f(s) + g(s) \text{ для всех } s \in S,$$
$$(af)(s) = a(f(s)) \text{ для всех } a \in \mathscr{K}; s \in S.$$

Если $S = \{1, \ldots, n\}$, то $F(S)$ можно отождествить с $\mathscr{K}^n$: функции f ставится в соответствие «вектор» всех ее значений $(f(1), \ldots, f(n))$. Правила сложения и умножения согласованы относительно такого отождествления.

Каждому элементу $s \in S$ можно поставить в соответствие важную «дельта-функцию δ_s, сосредоточенную на $\{s\}$, которая определяется так: $\delta_s(s) = 1, \delta_s(t) = 0$, если $t \neq s$. Если $S = \{1, \ldots, n\}$, вместо $\delta_i(k)$ обычно пишут δ_{ik} - это символ Кронекера.

Если множество S конечно, то всякую функцио из $F(S)$ можно однозначно представить в виде линейной комбннации дельта-функций: $f = \sum\limits_{s \in S} f(s)\delta_s$. В самом деле, это равенство следует из совпадения значений левой и правой части в каждой точке $s \in S$. Наоборот, если $f = \sum\limits_{s \in S} a_s\delta_s$, то, беря значение в точке s, получаем $f(s) = a_s$.

Если мнокество S бесконечно, то этот результат неверен, точнее говоря, не может быть сфромулирован в рамках наших определений: суммы бесконечного числа векторов в общем линейном пространстве не определены! Некоторые бесконечные суммы можно определить в линейных пространствах, снабженных понятием предельного перехода, или топологией (см. §10). Такие пространства составляют основной предмет изучения в функциональном анализе.

В случае $S = \{1, \ldots, n\}$ функция δ_i представлена вектором $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (единица на i-м месте, нули на остальных), а равенство $f = \sum\limits_{s \in S} f(s)\delta_s$ превращается в равенство

$$(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i.$$

Линейные условия и линейные подпространства. В анализе прежде всего рассматрнваются вещественнозначные функцин, определенные на всем $\mathbf{R}$ нлн интервалах $(a, b) \subset \mathbf{R}$. Для большинства приложений, однако, пространство всех таких функций слишком велико: полезно рассматривать непрерывные или дифференцируемые функции. После введения соответствующих определений обычно доказывается, что сумма непрерывных функций непрерывна и произведение непрерывной функции на скаляр непрерывно; то же для дифференцируемости.

Это означает, что только непрерывные или только дифференцируемые функци сами по себе образуют линейное пространство.

Более общо, пусть L - линейное пространство над полем $\mathscr{K}$, а $M \subset L$ - его подмножество, которое является подгруппой и которое переходит в себя при умножении на скаляры. Тогда M вместе с операциями, индуцированными операцнями в L (другими словами, ограничениями на M операций, определенных в L), называется линейным подпространством в L, а условия, определяющие принадлежность к M общего вектора из L, называются линейными условиями.

Вот пример линейных условий в координатном пространстве $\mathscr{K}^n$: фиксируем скаляры $a_1, \ldots, a_n \in \mathscr{K}$ и определим $M \subset L$:

$$(x_1, \ldots, x_n) \in M \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0.$$

Объединение любого числа линейных условий также является линейным условием. Иными словами, пересечение любого числа линейных подпространств также является линейным подпространством (проверьте это!). Позже мы докажем, что в $\mathscr{K}^n$ любое подпространство описывается конечным числом условий вида (1).

Важный пример линейного условия дает следующая конструкция.

Двойственное линейное пространство. Пусть L - линейное пространство над $\mathscr{K}$. Рассмотрим сначала линейное пространство $F(L)$ всех функций на L со значениями в $\mathscr{K}$. Назовем теперь функцию $f \in F(L)$ линейной (иногда говорят «линейньй функционал»), если она удовлетворяет условиям

$$f\left(l_1+l_2\right)=f\left(l_1\right)+f\left(l_2\right), f(al)=af(l)$$

для всех $l, l_1, l_2 \in L, a \in \mathscr{K}$. Индукцией по числу слагаемых отсюда получаем, что

$$f\left(\sum_{i=1}^n a_i l_t\right)=\sum_{i=1}^n a_i f\left(l_t\right).$$

Мы утверждаем, что линейные функции образуют линейное подпространство в $F(L)$, или «условие линейности является линейньм условием». В самом деле, если f, f_1 и f_2 линейны, то $\left(f_1+f_2\right)\left(l_1+l_2\right)=f_1\left(l_1+l_2\right)+f_2\left(l_1+l_2\right)=$

$$=f_1\left(l_1\right)+f_1\left(l_2\right)+f_2\left(l_1\right)+f_2\left(l_2\right)=\left(f_1+f_2\right)\left(l_1\right)+\left(f_1+f_2\right)\left(l_2\right).$$

(Здесь последовательно используются: правило сложения функций, линейность f_1 и f_2, коммутативность и ассоциативность сложения в поле и опять правнло сложения функций.) Аналогично,

$$(\mathrm{af}) \begin{aligned} & \left(l_1+l_2\right)=a\left[f\left(l_1+l_2\right)\right]=a\left[f\left(l_1\right)+f\left(l_2\right)\right]= \\ & =a\left[f\left(l_1\right)\right]+a\left[f\left(l_2\right)\right]=(af)\left(l_1\right)+(af)\left(l_2\right).\end{aligned}$$

Таким образом, f_1+f_2 и af также линейны.

Пространство линейных функций на линейном пространстве L называется двойственнын, или сопряженным L пространством, и обозначается L^*.

В дальнейшем мы встретимся со многими другими конструкциями линейных пространств. 10. Замечания относительно обозначений. Обозначать нуль и сложение в $\mathscr{K}$ и L одинаковыми значками не вполне последовательно, но очень удобно. Все формулы обычной школьной алгебры, которые осмысленны в этой ситуации, оказываются верными (см. образцы в іл. 3).

Вот два примера, когда предпочтительнее другие обозначения.

а) Положим $L=\{x \in \mathbf{R} \mid x>0\}$. Рассмотрим L как абелеву группу по умножению и введем на L умножение на скаляры из $\mathbf{R}$ по формуле $(a, x) \longmapsto x^a$. Легко проверить, что все условия определения п. 2 выполнены, хотя принимают в обычной записи другой вид: нулевой вектор в L есть 1, вместо $1l=l$ мы имеем $x^1=x$; вместо $a(bl)=(ab)l$ - тождество $\left(x^b\right)^a=x^{ba}$; вместо $(a+b)l=al+bl$ - тождество $x^{a+b}=x^a x^b$ и т. д.

б) Пусть L - векторное пространство над полем комплексных чисел C. Определим новое векторное пространство L с той же ад дитивной группой L, но другим законом умножения на скаляры:

$$(a, l) \mapsto \bar{a} l,$$

где $\bar{a}$ - комплексно сопряженное число к a. Из формул $\overline{a+b}=\bar{a}+\bar{b}$ и $\overline{ab}=\bar{a}\bar{b}$ без труда следует, что $\bar{L}$ - векторное пространство. Если в какой-то ситуации нам приходится рассматривать одновременно L и $\bar{L}$, то может оказаться удобно писать вместо $\bar{a}l$, скажем, $a * l$ или $a \circ l$.

Замечания о чертежах и наглядных образах. Очень многие общие понятия и теоремы линейной алгебры удобно иллюстрировать схематическими чертежами и картинками. Мы хотим сразу же предупредить читателя о некоторых опасностях таких изображений.

а) Малая размерность. Мы живем в трехмерном пространстве, и наши чертежи изображают обычно двух- или трехмерные образы. В линейной алгебре работают с пространствами любой конечной размерности, а в функциональном анализе - с бесконечномерными. Наша «маломерная» интуиция поддается очень серьезному развитию, но развивать ее нужно сознательно.

Простой пример: как представить себе общее расположение двух плоскостей в четырехмерном пространстве? Вообразите две пересекающиеся по прямой плоскости в $\mathbf{R}^3$, которые отрываются вдоль этой прямой всюду, кроме начала координат, расходясь в четвертое измерение.

б) Вещественное поле. Физическое пространство $\mathbf{R}^3$ линейно над вещественным полем. Непривычность геометрин линейного пространства над $\mathscr{K}$ может быть связана со свойствами поля $\mathscr{K}$.

Например, пусть $\mathscr{K}=\mathbf{C}$ (важнейший для квантовой механики случай). Прямая над $\mathbf{C}$ - это одномерное координатное пространство $\mathbf{C}^1$. Мы привыкли, что умножение точек прямой $\mathbf{R}^1$ на вещественное число a есть растяжение в a раз (при $a>1$), сжатие в a^{-1} раз (при $0<a<1$) или их комбинация с «переворачиванием» прямой (прн $a<0$). Но умножение на комплексное число a, действующее на $\mathbf{C}^1$, естественно представлять себе при геометрическом изображении $\mathbf{C}^1$ в виде $\mathbf{R}^2$ («плоскость Аргана» или «комплексная плоскость»- Не путать с $\mathbf{C}^2$!). При этом изображении числу $z=x+iy\in\mathbf{C}^1$ отвечает точка $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, а умножение на $a\neq 0$ соответствует растяжению в $|a|$ раз и повороту на угол $\arg a$ против часовой стрелки. Мы видим, в частности, что при $a=-1$ вещественное «переворачивание» прямой $\mathbf{R}^1$ есть ограничение на $\mathbf{R}^1$ поворота $\mathbf{C}^1$ на 180°.

Вообще, n-мерное комплексное пространство $\mathbf{C}^n$ можно, и часто полезно, представлять себе как 2n-мерное вещественное пространство $\mathbf{R}^{2n}$ (ср. пар. 12 о комплексификации и овеществлении).

Другим примером являются конечные поля $\mathscr{K}$, в частности поле из двух элементов $F_2=\{0,1\}$, важное в теории кодирования. Здесь конечномерные координатные пространства конечны, и иногда удобно связывать с линейной геометрией над $\mathscr{K}$ дискретные образы. Например, F_2^n часто отождествляют с вершинами n-мерного единичного куба в $\mathbf{R}^n$ - множеством точек $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$, где $\varepsilon_i=0$ или 1. Покоординатное сложение в F_2^n - это операции Буля: $1+0=0+1=1; 0+0=1+1=0$. Подпространство, состоящее из точек с $\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_n=0$, определяет простейший код с обнаружением ошибок. Условившись, что точки $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ кодируют сообщения только при $\sum\limits_{i=1}^{n}\varepsilon_i=0$, и приняв сигнал $(\varepsilon_1',\ldots,\varepsilon_n')$ с $\sum\limits_{i=1}^{n}\varepsilon_i'\neq 0$, мы можем быть уверены, что помехи при передаче привели к ошибочному приему.

в) Физическое пространство евклидово. Это значит, что в нем определены не только сложение векторов и умножение на скаляр, но также длпины векторов, углы между ними, площади и объемы некоторых фигур и т. п. Наши чертежи несут принудительную информацию об этих «метрических» свойствах, и мы их машинально воспринимаем, хотя в общей аксиоматике линейных пространств они никак не отражены. Нельзя представлять себе, что один вектор короче другого, или что пара векторов образует прямой угол, до тех пор, пока пространство не наделено специальной дополнительной структурой, скажем, абстрактным скалярным произведением. Таким структурам посвящена вторая часть книги.

УПРАЖНЕ Ния

Образуют ли линейное пространство над $\mathbf{Q}$ следующие множества веще. ственных чисел:

а) положительные вещественные числа;

б) неотрицательные вещественные числа;

в) целые числа;

г) рациональные числа со знаменателем $\leqslant N$;

д) числа вида $a+b\pi$, где a,b - любые рациональные числа?

Пусть S - некоторое множество, $F(S)$ - пространство функций со значениями в поле $\mathscr{K}$. Какие из следующих условий являются линейными:

а) f обращается в нуль в данной точке S; 6) f обращается в единицу в данной точке S;

в) f обращается в нуль во всех точках подмножества $S_0 \subset S$;

г) f обращается в нуль хотя бы в одной точке подмножества $S_0 \subset \mathbf{S}$:

д) $f(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$;

е) $f(x) \rightarrow 1$ при $|x| \rightarrow \infty$;

ж) f имеет не более конечного числа точек разрыва (в д) - ж) предполагаем $S = \mathbf{R}$ и $\mathscr{K} = \mathbf{R}$)?

Пусть L - линейное пространство непрерывных вещественных функций на отрезке $[-1, 1]$. Какие из следующих функционалов на L являются линейными:

а) $f \mapsto \int\limits_{-1}^{1} f(x) dx$;

б) $f \mapsto \int\limits_{-1}^{1} f^2(x) dx$

в) $f \longmapsto f(0)$ (это - «дельта-функшионал Дирака»);

г) $f \mapsto \int\limits_{-1}^{1} f(x) g(x) dx$, где g - фиксированная непрерывная функция на $[-1, 1]$?

Пусть $L = \mathscr{K}^p$. Какие из следующих условий на $(x_1, \ldots, x_n) \in L$ являются пинейными:

а) $\sum\limits_{i=1}^{n} a_l x_l = 1; a_1, \ldots, a_n \in \mathscr{K}$:

б) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 0$ (разберите отдельно случаи: $\mathscr{K} = \mathrm{R}, \mathscr{K} = \mathrm{C}, \mathscr{K}$ - поле из двух элементов, или, более общо, поле характеристики два);

В) $x_3 = 2x_4$?

Пусть $\mathscr{K}$-конечное поле из q элементов. Сколько элементов имеется в линейном пространстве $\mathscr{K}^n$? Сколько решений есть у уравнения $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$?

Пусть $\mathscr{K}^\infty$–пространство бесконечных последовательностей $(a_1, a_2, a_3 \ldots)$, $a_i \in \mathscr{K}$, с покоординатным сложением и умножением. Какие из следующих условий на векторы из $\mathscr{H}^\infty$ являются линейными:

а) только конечное число координат на a_i отлично от нуля;

б) только конечное число координат a_i равно нулю;

в) среди координат a_i никакая не равна 1 ;

г) условие оши: для каждого & > 0 существует такое $N > 0$, что $|a_m - a_n| < \varepsilon$ при $m, n > N$;

д) условие Гильберта: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ сходится:

е) (a_i) образуют ограниченную последовательность, т. е. существует такая константа c, зависящая от (a_i), что $|a_i| < 0$ для всех i (в г) - е) предполагаем $\mathscr{K} = \mathrm{R}$ или $\mathbf{C}$)?

Пусть S - конетное множество. Докажите, что каждый линейный функционал на $F(S)$ однозначно определяется семейством элементов $\{a_s | s \in S\}$ поля $\mathscr{K}$: функции f ставится в соответствие скаляр $\sum_{s \in S} a_s f(s)$.

Если n - число элементов в S и $a_s = 1/n$ для всех s, мы получаем функционал $f \mapsto \frac{1}{n} \sum_{s \in S} f(s)$ - среднее арифметическое значений функцин. Если $\mathscr{K} = \mathbf{R}$ и. $a_s \geqslant 0$, $\sum_{s \in S} a_s = 1$, функционал $\sum_{s \in S} a_s f(s)$ называстся взвешенным средним функции f (с весами a_s).

3.7.2 Basis and Dimension

(по Кострикину Манину)

Определение.

Семейство векторов $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в линейном пространстве L называется (конечным) базисом L, если каждый вектор из L однозначно представляется в виде линейной комбинации $l = \sum_{i=1}^{n} a_i e_l, a_i \in \mathscr{K}$. Коэффичиенты а a_i называются координатами вектора l относительно базиса $\{e_i\}$.

'Примеры. а) Векторы $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0), 1 \leqslant i \leqslant n$, образуют базис $\mathscr{K}^n$. б) Если множество S конечно, функции $\delta_s \in F(S)$ образуют базис $F(S)$. Оба эти утверждения были проверены в пар. 1.

Если в L выбран базис из n векторов и каждый вектор задается своими координатами в этом базисе, то сложение и умножение на скаляр выполняются покоординатно: $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i + \sum_{i=1}^{n} b_i e_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) e_i, a \sum_{i=1}^{n} a_i e_i = \sum_{i=1}^{n} a a_i e_i$. Поэтому выбор базиса равносилен отождествлению L с координатным векторным пространством. Вместо равенства $l = \sum_{i=1}^{n} a_i e_\xi$ иногда пишут $l = \vec{a}$, подразумевая под $\vec{a}$ вектор-столбец

$$[a_1, \ldots, a_n] = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

или вектор-строку $(a_1, \ldots, a_n) = [a_1, \ldots, a_n]^t$ координат $a_1, \ldots \ \ldots, a_n$; в этих обозначениях явное указание базиса опущено.

Определение.

Пространство L называется конечномерным, если оно либо нульмерно (см. пар. 1, II. 4), либо имеет конечный базис. Остальные пространства назыьваются бесконеиномерными.

Удобно считать, что базис нульмерного пространства образует пустое множество векторов. Поскольку для нульмерных пространств все наши утверждения тривиализируются, мы обычно будем ограничиваться рассмотрением непустых базисов.

Теорема. В конечномерном пространстве число элементов базиса не зависит от базиса.

Это число называется размерностью пространства L и обозначается $\dim L$ или $\dim_{\mathscr{K}} L$. Если $\dim L \doteq n$, пространство L называется n-мерным. В бесконечномерном случае мы пишем $\dim L = \infty$.

Доказательство. Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ - некоторый базис L. Мы докажем, что никакое семейство векторов $\{e'_1, \ldots, e'_m\}$ с $m > n$ не может служить базисом L по следующей причине: существует представление нулевого вектора $0 = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i e'_i$, в котором не все x_i равны нулю. Поэтому 0 не однозначно представляется в виде линейной комбинации векторов $\{e'_t\}$: всегда существует тривиальное представление $0 = \sum\limits_{i=1}^{m} 0\boldsymbol{e}'_i$.

Отсюда уже следует полное утверждение теоремы, поскольку этим мы проверим, что никакой базис не может содержать больше элементов, чем другой базис.

Положим $e'_k = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ik} e_i, k = 1, \ldots, m$. Для любых $x_k \in \mathscr{K}$ имеем

$$\sum_{k=1}^{m} x_k e'_k = \sum_{k=1}^{m} x_k \sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} x_k \right) e_i$$

Поскольку $\{e_i\}$ образуют базис в L, нулевой вектор имеет единственное представление $\sum\limits_{k=1}^{n} 0 e_k$ в виде линейной комбинации $\{e_k\}$. Поэтому условие $\sum\limits_{k=1}^{m} x_k e'_k = 0$ равносильно системе однородных линейных уравнений относительно x_k:

$$\sum_{k=1}^{m} a_{ik} x_k = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Поскольку число неизвестных m больше числа уравнений n, эта система имеет ненулевое решение.

Теорема

доказана.

Замечания. а) Можно было бы рассматривать произвольные семейства векторов и называть такое семейство базисом, если любой вектор пространства однозначно представляется в виде конечной линейной комбинации элементов семейства. В этом смысле любое линейное пространство имеет базис, и у бесконечномерного пространства базис всегда бесконечен. Однако это понятие не слишком полезно. ак правило, бесконечномерные пространства снабжаются топологией, и определение базиса видоизменяется с учетом этой топологии и возможности определять некоторые бесконечные линейные комбинации.

б) В общих линейных пространствах базисные векторы по традиции нумеруются щелыми числами от 1 до n (иногда от 0 до n), но это совершенно не обязательно. Базис $\{\delta_s\}$ в $F(S)$ естественно нумеруется элементами множества $s \in S$. Можно также считать базис L просто подмножеством в L, элементы которого не снабжены никакими индексами (ср. п. 20). Нумерация, или, скорее, порядок элементов базиса, существенны при использовании матричного формализма (см. §4). В других вопросах может оказаться важной другая структура на множестве индексов базнса. Напрнмер, если S-конечная группа, то важно, как индексы s бази- са $\{\delta_s\}$ перемножаются внутри S, а случайная нумерация S целыми числами может только загромоздить обозначения.

Примеры. а) $\mathscr{K}^n$ имеет размерность n. б) $F(S)$ имеет размерность n, равную числу элементов S, если S конечно.

Позже мы научимся вычислять размерности линейных пространств, не строя их базисов. Это очень важно, потому что многие числовые инварианты в математике определяются как размерности («числа Бетти» в топологии, индексы операторов в теории дифференциальных уравнений); базисы же соответствующих пространств могут оказаться трудно вычислимыми или не имеющими особого смысла. Но пока мы еще должны поработать с базисами.

Проверка того, что данное семейство векторов $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в L образует базис, в соответствии с определением состоит из двух частей. Их отдельное рассмотрение приводит к следующим понятиям.

Определение.

Линейной оболочкой семейства векторов назьвается множество их всевозможных линейных комбинаций в L.

Легко проверить, что линейная оболочка является линейным подпространством в L (см. пар. 1, п. 8). Линейную оболочку $\mathscr{K} e_1 + \ +\mathscr{K} e_2 + \ldots$ также называют подпространством, натянутьм на векторы $\{e_i\}$ или порожденным векторами семейства $\{e_i\}$. Ее можно определить еще как пересечение всех линейных подпространств в L, содержацих все e_i (докажите!). Рангом семейства векторов называется размерность его линейной оболочки.

Первое характеристическое свойство базиса: его линейная оболочка совпадает со всем L.

Определение.

Семейство векторов $\{e_i\}$ называется линейно независимьм, если никакая нетривиальная линейная комбинация $\{e_i\}$ не равна нулю, т. е. если из $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i e_i = 0$ следует, что все $a_i = 0$. В противном случае оно назьвается линейно зависимьм.

Линейная независимость семейства $\{e_i\}$ означает, что нулевой вектор однозначно представляется в виде линейной комбинации лементов семейства. Тогда любой другой вектор имеет либо единственное представление, либо ни одного. Действительно, сравнивая два представления

$$l = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i = \sum_{i=1}^{n} a_i' e_i, \text{ находим } 0 = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i - a_i'\right) e_i, \text{ откуда } a_i = a_i'.$$

Отсода следует второе характернстическое свойство базиса: его лементы линейно независимы.

Объединение этих двух свойств равносильно первоначальному определению базиса:

Заметим еще, что семейство векторов линейно независимо тогда и только тогда, когда оно образует базис своей линейной оболочки.

Семейство $\{e_1, \ldots, e_n\}$ заведомо линейно зависимо, если среди векторов e_i есть иулевой или два одинаковых (почему?). Более общо:

Лемма. а) Семейство векторов $\{e_1, \ldots, e_n\}$ линейно зависимо огда и только тогда, когда хотя бы один из векторов ел является линейной комбинацией остальных.

б) Если семейство $\{e_1, \ldots, e_n\}$ линейно независимо, а семейство $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}\}$ линейно зависимо, то e_{n+1} является линейной комбинацией $e_1, \ldots, e_n$.

Proof. □

а) Если $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i e_i = 0$ и $a_i \neq 0$, то $e_i = \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \left(-a_j^{-1} a_i\right) e_i$. Наоборот, если $e_j = \sum\limits_{i\neq j} b_i e_i$, то $e_l - \sum\limits_{i\neq 1} b_i e_i = 0$.

б) Если $\sum_{i=1}^{n+1} a_i e_i = 0$ и не все a_i равны нулю, то обязательно $a_{n+1} \neq 0$, нначе мы получили бы нетривиальную линейную завнсимость между $e_1, \ldots, e_n$. Поэтому $e_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \left(-a_{n+1}^{-1} a_i\right) e_i$. Лемма доказана.

Пусть $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ - некоторое конечное семейство векторов в $L, F = \{e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}\}$ - его линейно независимое подсемейство. Назовем F максимальныл, если каждый элемент из E линейно выражается через элементы из F.

Предложение. Каждое линейно независимое подсемейство $E' \subset E$ содержится в некотором максимальном линейно независимом подсемействе $F \subset E$. Линейные оболочки F и E совпадают.

Док аз ательство. Если в $E \backslash E'$ есть вектор, не представимый в виде линейной комбинации элементов E', добавим его к E'. В силу утверждения б) леммы п. 9 полученное семейство E'' будет линейно независимым. Применим то же рассуждение к E'' и т. д. Поскольку E конечно, этот процесс оборвется на максимальном семействе F. Любой элемент линейной оболочки E, очевидно, линейно выражается через векторы семейства F.

В случае $E' = \varnothing$ в качестве E'' нужно выбрать ненулевой вектор из E, если он есть; иначе F пусто.

Замечание

Этот результат верен и для бесконечных семейств E. Для его доказательства следует применить трансфинитную индукцию или лемму Цорна: см. пп. 18-20.

Максимальное подсемейство не обязательно единственно: рассмотрим $E = \{(1,0),(0,1),(1,1)\}, E' = \{(1,0)\}$ в $\mathscr{K}^2$. Тогда E' содержится в двух максимальных независимых подсемействах $\{(1,0),(0,1)\}$ и $\{(1,0),(1,1)\}$. Однако число элементов максимального подсемейства определено однозначно; оно совпадает с размерностью линейной оболочки E и называется рангом семейства E.

Часто бывает полезна следующая теорема.

Теорема

о продолжении базиса. Пусть $E' = \{e_1, \ldots, e_m\}$ - минейно независимое семейство векторов в конечномерном пространстве L. Тогда существует базис L, содержащий E': Доказ ательство. Выберем какой-нибудь базис $\{e_{m+1}, \ldots \ \ldots, e_n\}$ в L и положим $E = \{e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n\}$. Обозначим через F максимальное линейно независимое подсемейство E, содержащее E'. Оно является искомым базисом.

В самом деле, нужно только проверить, что линейная оболочка F совпадает с L. Но она равна линейной оболочке E по предложению п. 10, а последняя равна L, потому что в E содержится базис пространства L.

Следствие

(монотонность размерности). Пусть M - линейное подпространство в $L.T$ Тогда $\dim M \leqslant \dim L$, и если L конечномерно, то из $\dim M = \dim L$ следует, ито $M = L$.

Proof. □

Если M бесконечномерно, то L также бесконечномерно. Действительно, покажем сначала, что в M можно найти сколь угодно большие независимые семейства векторов. Если семейство из n линейно независимых векторов $\{e_1, \ldots, e_n\}$ уже найдено, то его линейная оболочка $M' \subset M$ не может совпадать с M-иначе M было бы n-мерно. Поэтому в M есть вектор e_{n+1}, линейно не выражающийся через $\{e_1, \ldots, e_n\}$, и утверждение б) леммы п. 9 показывает, что семейство $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}\}$ линейно независимо. Теперь предположим, что M бесконечномерно, а Ln-мерно. Тогда любые $n+1$ линейных комбинаций элементов базиса L линейно зависимы по рассуждению в доказательстве теоремы п. 4, что противоречит бесконечномерности M.

Остается разобрать случай, когда M и L конечномерны. Но тогда любой базис M по теореме п. 12 можно продолжить до базиса L, откуда и следует, что $\dim M \leqslant \dim L$.

Наконец, если $\dim M = \dim L$, то любой базис M должен быть базисом L-иначе его продолжение до базиса состояло бы из $> \dim L$ элементов, что невозможно.

Базисы и флаги. Один из стандартных способов изучения множеств S с алгебраическими структурами состоит в выделении в них последовательности подмножеств $S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset \ldots$ или $S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset \ldots$ так, что переход от одного подмножества к следующему устроен в каком-то смысле просто. Общее пазвание таких последовательностей-фильтрации (возрастающщай и убывающая соответственно). В теории линейных пространств строго возрастающая последовательность подпространств $L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_n$ пространства L называется флагом. (Мотивировка названия: флаг $\{$ точка $0\} \subset \{$ прямая $\} \subset \{$ плоскость $\}$ - это «гвоздь», «древко» и «полотнице».)

Число n назовем длиной флага $L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_n$

Флаг $L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_n \subset \ldots$ назовем максимальным, если $L_0 = \{0\}, \bigcup L_i = L$ и между L_i, L_{i+1} (для всех i) нельзя вставить подпространство: если $L_i \subset M \subset L_{i+1}$, то либо $L_i = M$, лнбо $M = L_{i+1}$.

По всякому базису $\{e_1, \ldots, e_n\}$ пространства L можно построить флаг длины n, положив $L_0 = \{0\}, L_i$-линейная оболочка $\{e_1, \ldots, e_i\}$ (при $i \geqslant 1$). Из доказагельства следующей теоремы будет видно, что этот флаг максимален и что наша конструкция дает все максимальные флаги.

Теорема. Размерность пространства L равна длине любого его максимального флага.

Доказ а тельство. Пусть $L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \ldots$ - максималь. ный флаг в L. Для каждого $i \geqslant 1$ выберем вектор $e_i \in L_i \backslash L_{i-1}$ и покажем, что $\{e_1, \ldots, e_i\}$ образуют базис пространства L_i.

Прежде всего, линейная оболочка семейства $\{e_1, \ldots, e_{i-1}\}$ содержится в L_{i-1}, а e_i не лежит в L_{i-1}, откуда индукцией по i (с - учетом $e_1 \neq 0$) следует, что $\{e_1, \ldots, e_i\}$ линейно независимы для всех i.

Теперь индукцией по i покажем, что $\{e_1, \ldots, e_i\}$ порождают L_i. Пусть это верно для $i-1$, и пусть M-линейная оболочка семейства $\{e_1, \ldots, e_i\}$. Тогда $L_{i-1} \subset M$ по индуктивному предположению и $L_{i-1} \neq M$ из-за того, что $e_i \not L_{i-1}$. По определению максимальности флага отсюда следует, что $M = L_i$.

Теперь нетрудно завершить доказательство теоремы. Если $L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_n = L$ - конечный максимальный флаг в L, то векторы $\{e_1, \ldots, e_n\}, e_i \in L_i \backslash L_{i-1}$, по доказанному образуют базис в L, так что $n = \dim L$. Если в L есть бесконечный максимальный флаг, то эта конструкция дает сколь угодно большие линейно независимые семейства векторов в L, так что L бесконечномерно.

Дополнение. В конечномерном пространстве L любой флаг можно дополнить до максимального, и поэтому его длина всегда $\leqslant \dim L$. Действительно, будем вставлять в-исходный флаг промежуточные подпространства, пока это возможно. Этот процесс не может продолжаться до бесконечности, ибо конструкция систем векторов $\{e_1, \ldots, e_i\}, e_i \in L_i \backslash L_{i-1}$, по любому флагу дает линейно независимые системы (см. начало доказательства теоремы п. 15), и потому длина флага не может превзойти $\dim L$.

Основной принцип работы с бесконечномерными пространствами: лемма Цорна, или трансфинитная индукция. Большинство теорем конечномерной линейной алгебры нетрудно доказать, опираясь на существование конечных базисов и теорему п. 12 о продолжении базисов: много примеров тому читатель увидит в дальнейшем. Но привычка к базисам затрудняет переход к функциональному анализу. Мы опишем сейчас теоретико-множественный принцип, который в очень многих случаях заменяет апелляцию к базисам.

Напомним (см. «Введение в алгебру», гл. $1, \S 6$), что частично упорядоченньм множеством называется множество X вместе с бинарным отношением порядка $\leqslant$ на X, которое рефлексивно ($x \leqslant x$), транзитивно (если $x \leqslant y, y \leqslant z$, то $x \leqslant z$) и антисимметрично (если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x = y$). Вполне может оказаться, что пара элементов $x, y \in X$ не находится ни в отношении $x \leqslant y$, ни в отношении $y \leqslant x$. Если же для любой пары либо $x \leqslant y$, либо $y \leqslant x$, то множество называется линейно упорядоченным, или ценнью. Верхняя грань подмножества Y в частично упорядоченном множестве X - это любой элемент $x \in X$ такой, что $y \leqslant x$ для всех $y \in Y$. Верхняя грань подмножества может и не существовать: если $X = \mathbf{R}$ с обычным отношением $\leqslant$, а $Y = \mathbf{Z}$ (целые числа), то верхней грани у Y нет.

Наибольшим элементом частично упорядоченного множества X называется элемент $n \in X$ такой, что $x \leqslant n$ для всех $x \in X$, а максимальным - элемент $m \in X$, для которого из $m \leqslant x \in X$ следует $x = m$. Наибольший элемент всегда максимален, но не наоборот.

Пример. Типичный пример упорядоченного множества X - это множество всех подмножеств $\mathscr{P}(S)$ множества S или некоторая его часть, упорядоченное отношением $\subseteq$. Если S имеет больше двух элементов, то $\mathscr{P}(S)$ частично упорядочено, но не линейно упорядочено (почему?). Элемент $S \in \mathscr{P}(S)$ максимальный, и даже наибольший в $\mathscr{P}(S)$.

Лемма Цорна. Пусть X - непустое частично упорядоченное множество, любая чепь в котором обладает верхней гранью в . Тогда любая цепь обладает такой верхней гранью, которая являетсл в то же времл максимальным элементом в X.

Лемму Цорна можно выводить из других, более приемлемых интуитивно аксиом теории множеств, но логически она эквивалентна так называемой «аксиоме выбора», ссли остальные аксиомы приняты. Поэтому удобно причислять ее к числу основных аксиом, что часто и делается.

Пример применения леммы Цорна: существование базиса в бесконечномерных линейных пространствах. Пусть L - линейное пространство над полем $\mathscr{K}$. Обозначим через $X \subset \mathscr{P}(L)$ множество линейно независимых подмножеств векторов в L, упорядоченное отношением.

Иными словами, $Y \in X$, если любая конечная линейная комбинация векторов из Y, равная нулю, имеет нулевые коэффициенты. Проверим условие леммы Цорна: если S - некоторая цепь в X, то унее есть верхняя граньв X. Действительно, положим $Z = \bigcup_{Y \in} Y$. Ясно, что $Y \subseteq Z$ для всякого $Y \subseteq S$; кроме того, Z образует линейно независимое множество векторов, потому что любое конечное множество векторов $\{y_1, \ldots, y_n\}$ из Z содержится в некотором элементе $Y \in S$. В самом деле, пусть $y_i \in Y_i \in S$; так как S - цепь, из каждых двух элементов $Y_i, Y_j \in S$ один является подмножеством другого; выкидывая по очереди меньшие множества из таких пар, мы получим, что среди Y_i есть наибольшее множество; в нем и содержатся все $y_1, \ldots, y_n$, которые, таким образом, линейно независимы.

Применим теперь заключение леммы Цорна. Здесь достаточна только часть его: существование в X максимального элемента. Согласно определению; это такое линейно независимое множество векторов $Y \in X$, что если добавить к нему любой вектор $l \in L$, то множество $Y \cup \{l\}$ уже не будет линейно независимым. Точно такое же рассуждение, как при доказательстве утверждения б) леммы п. 9, показывает тогда, что l есть (конечная) лннейная комбинация элементов Y, т. е. Y образует базис в L.

УПРАЖНЕНИЯ

Пусть L - пространство многочленов от x степени $\leqslant n-1$ с коэффициентами в поле $\mathscr{K}$. Проверить следующие утверждения:

а) $1, x, \ldots, x^{n-1}$ образуют базис в L. Координаты многочлена f в этом базисе - это его коэффициенты.

б) $1, x-a,(x-a)^{2}, \ldots,(x-a)^{n-1}$ образуют базис в L. Если char $\mathscr{H}=p \geqslant n$, то координаты многочлена f в этом базисе: $\left\{f(a), f^{\prime}(a), \frac{f^{\prime \prime}(a)}{2!}, \ldots \ldots, \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\right\}$.

в) Пусть $a_{i}, \ldots, a_{n} \in \mathscr{H}$-попарно различные элементы. Положим $g_{i}(x)=\prod_{j \neq i}\left(x-a_{j}\right)\left(a_{i}-a_{j}\right)^{-1}$. Многочлены $g_{1}(x), \ldots, g_{n}(x)$ образуют базис L («интерполяционный базис»). Координаты многочлена f в этом базисе: $\left\{f\left(a_{1}\right), \ldots, f\left(a_{n}\right)\right\}$.

Пусть $L-n$-мерное пространство, $f: L \rightarrow \mathscr{H}$ - ненулевой линейный функционал. Доказать, что $M=\{l \in L \mid f(l)=0\}$ является $(n-1)$-мерным подпространством в L. Доказать, что все $(n-1)$-мерные подпространства получаются таким способом.

Пусть $L-n$-мерное пространство, $M \subset L-m$-мерное подпространство. Доказать, что существуют линейные функционалы $f_{1}, \ldots, f_{n-m} \in L^{*}$ такне, то $A=\left\{l \mid f_{1}(l)-\ldots=f_{n-m}(l)=0\right\}$.

Вычнслить размерности следующих пространств:

а) пространства многочленов степени $\leqslant p$ от n переменных;

б) пространства однородных многочленов (форм) степени p от n переменных;

в) пространства функций из $F(S),|S|<\infty$, обрашающихся в нуль во всех толках нз подмножества $S_{0} \subset S$.

Пусть $\mathscr{H}$-конечное поле характеристики p. Доказать, что число его элементов равно p^{n} для некоторого $n \geqslant 1$. (Указание. Рассмотреть $\mathscr{K}$ как линейное пространство над простым подполем, состоящим из всех «сумм единиц» в $\mathscr{K}: 0,1,1+1, \ldots$)

Заменой понятия флага в бесконечномерном случае служит понятие цепи подпространств (упорядоченных по включению). Пользуясь леммой Lорна, докзать, что всякая цепь содержится в максимальной.

3.7.3 Linear Mappings

(по Кострикину Манину)

Определение.

Пусть L, M - линейные пространства над полем $\mathscr{K}$. Отображение $f: L \rightarrow M$ назыьвается линейным, если для всех $l, l_{1}, l_{2} \in L, a \in \mathscr{H}$ имеем

$$
f(a l)=a f(l), f\left(l_{1}+l_{2}\right)=f\left(l_{1}\right)+f\left(l_{2}\right) .
$$

Линейное отображение является гомоморфизмом аддитивных групп. В самом деле, $f(0)=0f(0)=0$ и $f(-l)=f((-1)l)=-f(l)$. Индукция по n показывает, что для любых $a_i \in \mathscr{K}$, $l_i \in L$ имеем $f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i l_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i f\left(l_i\right)$.

Линейные отображения $f: L \rightarrow L$ называются также линейными операторами на L. 2. Примеры. а) Нулевое линейное отображение $f: L \rightarrow M$, $f(l)=0$ для всех $l \in L$. Тождественное линейное отображение: $f: L \rightarrow L, f(l)=l$ для всех $l \in L$. Оно обозначается id i_L или id (от английского слова «identity»). Ужножение на скаляр $a \in \mathscr{K}$, или гомотетия $f: L \rightarrow L, f(l)=al$ для всех $l \in L$. При $a=0$ получается нулевой оператор, при $a=1$ - тождественный.

б) Линейные отображения $f: L \rightarrow \mathscr{K}$-это линейные функции, или функционалы, на L (см. пар. 1, п. 9). Пусть L - пространство с базисом $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Для любого $1 \leqslant i \leqslant n$ отображение $e^i: L \rightarrow \mathscr{K}$, где $e^i(l)-i$-я координата l в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$, является линейным функционалом.

в) Пусть $L=\{x \in \mathbf{R} \mid x>0\}$ наделено структурой линейного пространства над $\mathbf{R}$, описанной в пар. 1, пример а) п. $10, M=\mathbf{R}^1$. Отображение $\log: L \rightarrow M, x \mapsto \log x$, R-линейно.

г) Пусть $S \subset T$-два множества. Отображение $F(T) \rightarrow F(S)$, которое всякой функции на T ставит в соответствие ее ограничение на S, линейно. В частности, если $S=\{s\}, s \in T, f \in F(T)$, то отображение: $f \mapsto$ (значение f в точке s) линейно.

Конструкция линейных отображений с нужными свойствами часто основывается на следующем результате.

Предложение. Пусть L, M-линейные пространства над полем $\mathscr{K}; \{l_1, \ldots, l_n\} \subset L$ u $\{m_1, \ldots, m_n\} \subset M-\partial$ семейства векторов с одинаковым числом лементов. Тогда:

а) если линейная оболочка $\{l_1, \ldots, l_n\}$ совпадает с L, то существует не больще одного линейного отображения $f: L \rightarrow M$, для которого $f\left(l_i\right)=m_i$ при всех i;

б) если $\{l_1, \ldots, l_n\} \kappa$ тому же линейно независимы, т. е. образуют базис L, то такое отображение существует.

Proof. □

Пусть f, f' - пара отображений с $f\left(l_i\right)=f'\left(l_i\right)=m_i$ для всех i. Рассмотрим отображение $g=f-f'$, где $\left(f-f'\right)(l)=f(l)-f'(l)$. Легко проверить, что оно линейно. Кроме того, оно переводит в нуль все l_i и потому любую линейную комбинацию векторов l_i. Значит, f и f' совпадают на каждом векторе из L, откуда $f'=f$.

Пусть теперь $\{l_1, \ldots, l_n\}$ образует базис L. Так как каждый элемент L однозначно представляется в виде $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i l_i$, мы можем определить теоретико-множественное отображение $f: L \rightarrow M$ формулой

$$
f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i l_i\right)=\sum_{i=1}^{n} a_i m_i
$$

Его линейность проверяется непосредственно.

В этом доказательстве использовалась разность двух линейных отображений $L \rightarrow M$. Это частный случай следующей более общей конструкции.

Обозначим через $\mathscr{L}(L, M)$ множество линейных отображений из L в M. Для $f, g \in \mathscr{L}(L, M)$ и $a \in \mathscr{K}$ определим af и $f+g$ формулами

$$
(af)(l)=a(f(l)),(f+g)(l)=f(l)+g(l)
$$

для всех $l \in L$. Точно так же, как в 1, п. 9, проверяется, что af и $f+g$ линейны, так что $\mathscr{L}(L, M)$ - линейное пространство.

Пусть $f \in \mathscr{L}(L, M)$ и $g \in \mathscr{L}(M, N)$. Теоретико-множественная композиция $g \circ f = gf : L \rightarrow N$ является линейным отображением. Действительно,
$(gf)(l_1 + l_2) = g[f(l_1 + l_2)] = g[f(l_1) + f(l_2)] = g[f(l_1)] + g[f(l_2)] =$
$= gf(l_1) + gf(l_2)$
и, аналогично, $(gf)(al) = a(gf(l))$.

Очевидно, $\mathrm{id}_M \circ f = f \circ \mathrm{id}_L = f$. Кроме того, $h(gf) = (hg)f$, когда обе части определены, так что скобки можно опустить; это общее свойство ассоциативности теоретико-множественных отображений. Наконец, композиция gf линейна по каждому из аргументов при фиксированном втором: например, $g \circ (af_1 + bf_2) = a(g \circ f_1) + +b(g \circ f_2)$.

Пусть $f \in \mathscr{L}(L, M)$ - биективное отображение. Тогда у него есть теоретико-множественное обратное огображение $f^{-1} : M \rightarrow L$. Мы утверждаем, что f^{-1} автоматически линейно. Для этого следует проверить, что

$$f^{-1}(m_1 + m_2) = f^{-1}(m_1) + f^{-1}(m_2), \quad f^{-1}(am_1) = af^{-1}(m_1)$$

для всех $m_1, m_2 \in M; a \in \mathscr{K}$. Поскольку f биективно, существуют и однозначно определены такие векторы $l_1, l_2 \in L$, что $m_i = f(l_i)$. Написав формулы

$$f(l_1) + f(l_2) = f(l_1 + l_2), \quad \text{af } (l_1) = f(al_1),$$

применив к их обеим частям f^{-1} и заменив в результате l_i на $f^{-1}(m_t)$, получим требуемое.

Бнективные линейные отображения $f : L \rightarrow M$ называются изоморфизмами. Пространства L и M называются изоморфными, если между ними существует изоморфизм.

Следующая теорема показывает, что размерность пространства полностью определяет его с точностью до изоморфизма.

Теорема. Два конечномерных пространства L и M над полем $\mathscr{K}$ изоморфны тогда и только тогда, когда у них одинаковые размерности.

Доказ ат ельство. Изоморфизм $l : L \rightarrow M$ сохраняет все свойства, формулируемые в терминах линейных комбинаций. В частности, он переводит любой базис L в некоторый базис M, так что размерности L и M совпадают. (Из этого рассуждения следует также, что конечномерное пространство не может быть изоморфно бесконечномерному.)

Наоборот, пусть размерности L и M равны n. Выберем базисн $\{l_1, \ldots, l_n\}$ и $\{m_1, \ldots, m_n\}$ в L и M соответственно. Формула

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i l_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i m_i$$

определяет линейное отображение L в M по предложению п. 3. Оно является биекцией, ибо формула

$$f^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i m_l\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i l_i$$

определяет обратное линейное отображение f^{-1}.

Предупреждение. Если даже изоморфизм между двумя линейными пространствами L, M и существует, он определен однозначно только в двух случаях:

а) $L = M = \{0\}$,

б) L и M одномерны, а $\mathscr{K}$ - поле из двух элементов (попробуйте доказать это!).

Во всех остальных случаях имеется много (если $\mathscr{K}$ бесконечно, то бесконечно много) изоморфизмов. В частности, имеется много изоморфизмов пространства L с самим собой. В силу результатов пп. 5 и 6 они образуют группу относительно теоретикомножественной композиции. Эта группа называется полной линейной грynnо пространства L. Позже мы сможем описать ее в более явном виде как группу невырожденных квадратных матриц.

Иногда бывает, что между двумя линейными пространствами определен некоторый изоморфизм, не зависящий ни от каких произвольных выборов (как выборы базисов в пространствах L и M в доказательстве теоремы п. 7). Такие изоморфизмы мы будем называть каноническими или естественными (точное определение этих терминов можно дать только на категорном языке, о котором см. §13). Следует тщательно отличать естественные изоморфизмы от «случайных». Мы приведем два характерных примера, очень важных для понимания этого различия.

«Случайный» изоморфизм между пространством и двойственным к нему. Пусть L - конечномерное пространство с базисом $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Обозначим через $e^l \in L^*$ линейный функционал

$l \longmapsto e^i(l)$, где $e^i(l) - i$-я координата вектора l в базисе $\{e_i\}$

(не путать с i-й степенью; в линейном пространстве она не определена). Мы утверждаем, что функицоналы $\{e^1, \ldots, e^n\}$ образуют базис в L^*, так называемый двойственный к $\{e_1, \ldots, e_n\}$ базис. Равносильное описание $\{e^i\}$ такое: $e^i\left(e_k\right) = \delta_{ik}$ (символ Кронекера: 1 при $i = k, 0$ при $i \neq k$).

В самом деле, всякий линейный функционал $f : L \rightarrow \mathscr{K}$ можно представить в виде линейной комбинации $\{e^i\}$:

$$f = \sum_{i=1}^{n} f\left(e_i\right) e^l$$

Действительно, значения левой и правой части совпадают на любой линейной комбинации $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k e_k$, потому что $e^i\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k e_k\right) = a_i$ по определению e^i, Кроме того, $\{e_i\}$ линейно независимы: если $\sum\limits_{i=1}^{n} e_i e^t = 0$, то для всех $k, 1 \leqslant k \leqslant n$, имеем $a_k = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i e^i\right)\left(e_k\right) = 0$.

Поэтому L и L^* имеют одинаковую размерность n и даже определен изоморфизм $f : L \rightarrow L^*$, который переводит e_i в e^i.

Однако этот изоморфизм не каноничен: замена базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$, вообще говоря, меняет его. Так, если L одномерно, то для любого ненулевого вектора $e_1 \in L$ семейство $\{e_1\}$ является базисом L. Пусть $\{e^1\}$ - двойственный базис к $\{e_1\}, e^1\left(e_1\right) = 1$. Тогда к базису $\{a e_1\}, a \in \mathscr{K} \backslash \{0\}$, двойствен базис $\{a^{-1} e^1\}$. Но линейные отображения $f_1 : e_1 \longmapsto e^1$ и $f_2 : a e_1 \longmapsto a^{-1} e^1$ различны, если только $a^2 \neq 1$.

Канонический изоморфизм между пространством и дважды двойственным к нему. Пусть L - линейное пространство, L^* - пространство линейных функций на нем, $L^{**} = \left(L^*\right)^*$ - пространство линейных функций на L^* - «дважды двойственное к L пространство».

Опишем каноническое отображение $\varepsilon_L : L \rightarrow L^{**}$, не зависящее ни от каких произвольных выборов. Оно ставит в соответствие каждому вектору $l \in L$ функцию на L^*, значение которой на функционале $f \in L^*$ равно $f(l)$; в краткой записи:

$$\varepsilon_L: \quad l \mapsto [f \mapsto f(l)].$$

Проверим следующие свойства $\boldsymbol{\varepsilon}_L$:

а) Для каждого $l \in L$ отображение $\varepsilon_L(l): L^* \to \mathscr{K}$ линейно. Действительно, это означает, что выражение $f(l) как$ функция от f при фиксированном l линейно по f. Но это следует из правил сложения функционалов и умножения их на скаляр $(1, \mathrm{n}.7)$.

Следовательно, ε_L действительно определяет отображение L в L^{**}, как и утверждалось.

б) Отображение $\varepsilon_L: L \to L^{**}$ линейно. Действительно, это означает, что выражение $f(l) \kappa$ как функция от l при фиксированном f линейно, - это так, нбо $f \in L^*$.

в) Если L конечномерно, то отображение $\varepsilon_L: L \to L^{**}$ является изоморфизмом. В самом деле, пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$-базис L, $\{e^1, \ldots, e^n\}$ - двойственный базис $L^*, \{e_1', \ldots, e_n'\}$ - базис в L^{**}, двойственный к $\{e^1, \ldots, e^n\}$.

Покажем, что $\varepsilon_L(e_i) = e_i$, откуда и будет следовать, что ε_L - изоморфизм (в этой проверке использование базиса L безобидно, ибо в определении ε_L он не участвовал!).

В самом деле, $\varepsilon_L(e_i)$ согласно определению есть функционал на L^*, значение которого на e^k равно $e^k(e_i) = \delta_{ik}$ («символ Кронекера»). Но e_i'-точно такой же функционал на L^* по определению двойственного базиса.

Заметим, что если L бесконечномерно, то $\varepsilon_L: L \to L^{**}$ остается инъективным, но перестает быть сюръективным (см. упражнение 2). В функциональном анализе вместо полного L^* обычно рассмат- ривают только подпространство линейных функционалов L', прерывных в подходящей топологии на L и $\mathscr{K}$, и тогда отображение $L \to L''$ может быть определено и иногда оказывается изоморфизмом. Такие (топологические) пространства называют рефлексивными. Мы доказали, что конечномерные пространства (без учета топологии) рефлексивнь.

Рассмотрим теперь связь между линейными отображениями и линейными подпространствами.

Определение.

Пусть $f: L \to M$ - линейное отображение. Множество $\operatorname{Ker} f = \{l \in L | f(l) = 0\} \subset L$ называется ядром f, а множество $\operatorname{Im} f = \{m \in M | \exists l \in L, f(l) = m\} \subset M$ называется образом f.

Нетрудно убедиться, что ядро f является линейным подпространством в L, а образ f-линейным подпространством в M. Проверим, например, второе утверждение. Пусть $m_1, m_2 \in \operatorname{Im} f, a \in \mathscr{K}$. Тогда существуют такие векторы $l_1, l_2 \in L$, что $f(l_1) = m_1, f(l_2) = m_2$. Значит, $m_1 + m_2 = f(l_1 + l_2)$, am $= f(al_1)$. Следовательно, $m_1 + m_2 \in \operatorname{Im} f$ и $am_1 \in \operatorname{Im} f$.

Отображение f инъективно тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. В самом деле, если $f(l_1) = f(l_2), l_1 \neq l_2$, то $0 \neq l_1 \ldots - l_2 \in \operatorname{Ker} f$. Наоборот, если $0 \neq l \in \operatorname{Ker} f$, то $f(l) = 0 = f(0)$.

Теорема. Пусть L-конечномерное линейное пространство,
$f: L \to M$ - линейное отображение. Тогда $\operatorname{Ker} f u \operatorname{Im} f$ конечномерны и

$$\operatorname{dim} \operatorname{Ker} f + \operatorname{dim} \operatorname{Im} f = \operatorname{dim} L.$$

Proof. □

Яцро f конечномерно по следствию п. $13, \S 2$. Выберем базис $\{e_1, \ldots, e_m\}$ в $\operatorname{Ker} f$ и продолжим его до базиса $\{e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_{m+n}\}$ пространства L по теореме п. $12, \S 2$. Покажем, что векторы $f(e_{m+1}), \ldots, f(e_{m+n})$ образуют базис в $\operatorname{Im} f$. Отсюда, очевидно, будет следовать теорема.

Любой вектор из $\operatorname{Im} f$ имеет вид

$$f\left(\sum_{i=1}^{m+n} a_i e_i\right) = \sum_{i=m+1}^{m+n} a_i f(e_i).$$

Следовательно, $f\left(e_{m+1}\right), \ldots, f\left(e_{m+n}\right)$ порождают $\operatorname{Im} f$.

Предположим, что $\sum_{i=m+1}^{m+n} a_i f\left(e_i\right) = 0$. Тогда $f\left(\sum_{i=m+}^{m+n} a_l e_l\right) = 0$. Это значит, что $\sum_{i=m+1}^{m+n} a_i e_i \in \operatorname{Ker} f$, т. е. $\sum_{i=m+1}^{m+n} a_i e_i = \sum_{j=1}^{m} a_j e_j$. то возможно, только если все коэффициенты равны нулю, ибо $\{e_1, \ldots \ \ldots, e_{m+n}\}$ - базис L. Следовательно, векторы $f\left(e_{m+1}\right), \ldots, f\left(e_{m+n}\right)$ линейно независимы.

Теорема

доказана.

Следствие. Следующие свойства f равносильны (в случае конечномерного L):
а) f инъективно.
б) $\dim L = \dim \operatorname{Im} f$.

Proof. □

Согласно теореме, $\dim L = \dim \operatorname{lm} f$ тогда и только тогда, когда $\dim \operatorname{Ker} f = 0$, т. е. $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. 1. Пусть $f : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ - отображение, заданное дифференцируемыми функциями, вообще говоря, нелинейными и переводящими нуль в нуль:

$$f\left(x_1, \ldots, x_m\right) = \left(\ldots, f_i\left(x_1, \ldots, x_m\right), \ldots\right), i = 1, \ldots, n,$$
$$f_i(0, \ldots, 0) = 0.$$

Поставим ему в соответствие линейное отображение $df_0 : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$, называемое дифференциалом f в точке 0, по формуле

$$\left(df_0\right)\left(e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_l}{\partial x_j}(0) e_i' = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(0), \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(0)\right),$$

где $\{e_j\}, \{e_i'\}$ - стандартные базисы $\mathbf{R}^m$ и $\mathbf{R}^n$. Показать, что если произвести замену базисов в пространствах $\mathbf{R}^m$ и $\mathbf{R}^n$ и вычислить df_0 по тем же формулам в других базисах, то новое линейное отображение df_0 совладает со старым.

Докажите, что пространство многочленов $\mathbf{Q}[x]$ не изоморфно своему двойственному. (Указание. Сравните мощности.)

3.7.4 of Matrix

(по Кострикину Манину)

Цель этого параграфа-ввести язык матриц и установить основные связи его с языком линейных пространств и отображений. За дальнейшими подробностями и примерами мы отсылаем читателя к главам 2 и 3 «Введения в алгебру»; в частности, мы будем пользоваться развитой там теорией определителей, не повторяя ее. Читателю следует самостоятельно убедиться в том, что изложение в этих главах без изменений переносится с поля вещественных чисел на любое поле скаляров; исключения составляют лишь те случаи, где используются такие специфические свойства вещественных чисел, как порядок и непрерывность.

Термины. Матрицей A размера $m \times n$ с элементами из мно. жества S называется семейство (a_{ik}) элементов из S, пронумерованное упорядоченными парами чисел (i, k), где $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Часто пишут $A = (a_{ik})\,, 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant k \leqslant n$; указание размера может быть опущено.

При фиксированном i семейство $(a_{i1}, \ldots, a_{in})$ называется i-й строкой матрицы A. При фиксированном k семейство $(a_{1k}, \ldots, a_{mk})$ называется $k-\mu$ столбцом матрицы A. Матрица размера $1 \times n$ называется просто строкой, а матрица размера $m \times 1$ - столбцом.

Если $m = n$, матрица A называется квадратной (иногда говорят «порядка n вместо «размера $n \times n$ »).

Если A - квадратная матрица порядка $n, S = \mathscr{K}$ (поле) и $a_{ik} = 0$ при $i \neq k$, матрица A называется диагональной; иногда ее записывают $\operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$. Вообще, элементы (a_{ii}) называются элементами главной диагонали. Элементы $a_{1,k+1}; a_{2,k+2}; \ldots$, где $k > 0$, образуют диагональ, стояшую выше главной, а элементы $a_{k+1,1}; a_{k+2,2}; \ldots$, где $k > 0$, - диагональ, стояшую ниже главной. Если $S = \mathscr{K}$ и $a_{ik} = 0$ при $k < i$, матрица называется верхней треугольной, а если $a_{ik} = 0$ при $k > i$, то нижней треугольной. Диагональная квадратная матрица над $\mathscr{K}$, у которой все элементы на главной диагонали одинаковы, называется скалярной. Если эти элементы равны единице, матрица называется единичной. Единичная матрица порядка n обозначается E_n или просто E, если порядок ясен из контекста.

Все эти термины обязаны своим происхождением стандартной записи матрицы в виде таблицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ .. & . & \ldots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Транспонированная к A матрица A^t имеет размеры $n \times m$, и ее элемент в i-й строке и k-м столбце равен a_{ki}. (Иногда используемое обозначение $A^t = (a_{ki})$ двусмысленноl)

Замечания. Большая часть матриц, встречающихся в теории линейных пространств над полем $\mathscr{K}$, имеет своими элементами элементы самого этого поля. Однако бывают и исключения. Например, мы будем иногда рассматривать упорядоченный базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ пространства L, как матрицу размера $1 \times n$ с элементами из этого пространства. Другой пример-блочные матрицы, элементами которых в свою очередь являются матрицы - блоки исходной. Именно разбнение номеров строк $[1, \ldots, m] = I_1 U \cup I_2 \cup \ldots \cup I_\mu$ и номеров столбцов $[1, \ldots, n] = J_1 \cup \ldots \cup J_v$ на идущие подряд попарно непересекающиеся отрезки определяет разбиение матрицы A на блоки

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1v} \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hline A_{\mu 1} & A_{\mu 2} & \cdots & A_{\mu \nu} \end{array}\right)$$

где $A_{\alpha\beta}$ имеет своими элементами $a_{ik}, i \in I_\alpha, k \in J_\beta$. Если $\mu = v$, можно очевидным способом определить понятия блочно диагональной, блочной верхией треугольной, блочной нижней треугольной матриц. Этот же пример показывает, что не всегда удобно нумеровать столбцы и строки матрицы числами от 1 до m (или n): часто существен лишь порядок строк и столбцов.

Матрица линейного отображения. Пусть N и M-конечномерные линейные пространства над $\mathscr{K}$ с отмеченными базисами $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и $\{e'_1, \ldots, e'_m\}$ соответственно. Рассмотрим произвольное линейное отображение $f : N \to M$ и поставим ему в соответствие матрицу A_f размера $m \times n$ с элементами из поля $\mathscr{K}$ следующим образом (заметьте, что размеры A_f суть размерности N, M в обратном порядке). Представим векторы $f(e_k)$ в виде линейных комбинаций: $f(e_k) = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ik} e'_i$. Тогда по определению $A_f = (a_{ik})$. Иными словами, коэффициенты этих линейных комбинаций суть последовательные столбцы матрицы A_t. Матрица A_f называется матрицей линейного отображения f относительно базисов (или в базисах) $\{e_k\}, \{e'_i\}$.

В силу предложения п. $3, \S 3$, линейное отображение f однозначно определяется образами $f(e_k)$, и в качестве последних можно взять любое семейство из n векторов пространства M. Поэтому описанное соответствие устанавливает биекцию между множеством $\mathscr{L}(N, M)$ и множеством матриц размера $m \times n$ с элсментами из $\mathscr{K}$ (нли над $\mathscr{K}$). Эта биекция, однако, зависит от выбора базисов (см. п. 8 ниже).

Матрица A_f позволяет также описывать линейное отображене f в терминах его действия на координаты. Если вектор l представлен столбцом $\vec{x} = [x_1, \ldots, x_n]$ своих координат в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$, т. е. $l = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_l, \quad$ то $f(l)$ представлен вектором-столбцом $\vec{y} = [y_1, \ldots, y_m]$, где

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k, i = 1, \ldots, m.$$

Иными словами, $\vec{y} = A_f \cdot \vec{x}$-обычное произведение матрицы A_f на столбец $\vec{x}$.

Когда речь идет о матрице линейного оператора $A = (a_{ik})$, всегда подразумевается, что в «двух экземплярах» пространства N выбирается один и тот жее базис. Матрица линейного оператора квадратна. Матрица тождественного оператора единична.

Согласно п. $4, \S 3$, множество $\mathscr{L}(N, M)$ является в свою очередь линейным пространством над $\mathscr{K}$. При отождествлении элементов $\mathscr{L}(N, M)$ с матрицами эта структура описывается следующим образом.

Сложение матриц и умножение на скаляр. Пусть $A = (a_{ik})$, $B = (b_{ik})$ - две матрицы одинакового размера над полем $\mathscr{K}$, $a \in \mathscr{K}$. Положим

$$\begin{gathered} A + B = (c_{tk}), \quad \text{где } c_{ik} = a_{lk} + b_{lk}, \\ aA = (aa_{ik}). \end{gathered}$$

Эти операции определяют на матрицах данного размера структуру линейного пространства. Легко проверить, что если $A = A_f, B = A_g$ (в одинаковых базисах), то

$$A_f + A_g = A_{f+g}, \quad A_{af} = aA_f,$$

так что указанное соответствие (а оно биективно) является изоморфизмом. В частности, $\dim \mathscr{L}(N, M) = \dim M \dim N$, потому что пространство матриц изоморфно $\mathscr{K}^{mn}$ (размер $m \times n$).

Композиция линейных отображений описывается в терминах умножения матриц.

Умножение матриц. Произведение матрицы A размера $m\times \times n'$ над полем $\mathscr{K}$ на матришу B размера $n'' \times p$ над полем.$_{\mathscr{K}}$ определено тогда и только тогда, когда $n' = n'' = n$; размер AB в этом случае равен $m \times p$, и по определению

$$AB = (c_{ik}), \quad \text{где} \quad c_{ik} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_{jk}.$$

Нетрудно проверить, что $(AB)^t = B^t A^t$.

Может случиться, что AB определена, но BA не определена (если $m \neq p$) или обе матрицы AB и BA определены, но нмеют разные размеры (если $m \neq n$), или даже определены и имеют одинаковые размеры ($m = n = p$), но не совпадают. Иными словами, умнонение матриц не коммутативно. Однако оно ассоциативно: если матрицы AB и

BC определены, то $(AB)C$ u $A(BC)$ onpedeлены u совпадают. В самом деле, положим $A = (a_{ij})\,, B = (b_{jk}),\ C = (c_{kl})$. Corласованность размеров A с BC и AB с C предлагается проверить читателю. Если она уже проверена, то мы можем вычислять (il)-й элемент $(AB)C$ по формуле

$$\sum_k \left(\sum_i a_{ij} b_{lk}\right) c_{kl} = \sum_{l,k} (a_{ij} b_{jk})\, c_{kl},$$

а (il) -й элемент $A(BC)$ по формуле

$$\sum_i a_{li} \left(\sum_k b_{jk} c_{kl}\right) = \sum_{j,k} a_{ij}\,(b_{jk} c_{kl})\,.$$

Так как умножение в $\mathscr{K}$ ассоциативно, эти элементы совпадают. Зная уже, что умножение матриц над $\mathscr{K}$ ассоциативно, мы можем убедиться, что «поблочное умножение» блочных матриц также ассоциативно (см. также упражнение 1).

Кроме того, пронзведение матриц линейно по каждому аргументу:

$$(aA + bB)C = aAC + bBC; \quad A(bB + cC) = bAB + cAC.$$

Важнейшее свойство умножения матриц состоит в том, что оно отвечает композиции линейных отображений. Однако целый ряд других ситуаций в линейной алгебре также удобно описывается умножением матриц: это главная прнчина унифнцирующей роли матричного языка и некоторой самостоятельности матричной алгебры внутри линейной алгебры. Перечислим некоторые из этих ситуаций.

Матрица композиции линейных отображений. Пусть $P, N,\ M$ - три конечномерных линейных пространства, $P \xrightarrow{g} N \xrightarrow{f} M$ - два линейных отображения. Выберем базисы $\{e_i''\}\,, \{e_k'\}$ и $\{e_m\}$ в $P,\ N, M$ соответственно и обозначим через A_g, A_f, A_{fg} матрицы g, f, fg в этих базисах. Мы утверждаем, что $A_{fg} = A_f A_g$. В самом деле, пусть $A_f = (a_{jl})\,, A_{\mathrm{g}} = (b_{ik})$. Имеем

$$g\,(e_k'') = \sum_i b_{ik} e_i',$$

$$fg\,(e_k'') = \sum_i b_{ik} f\,(e_i') = \sum_i b_{ik} \sum_j a_{li} e_l = \sum_i \left(\sum_i a_{ji} b_{ik}\right) e_k.$$

Следовательно, (j,k)-й элемент матришы A_{fg} равен $\sum\limits_i a_{ij} b_{lk}$, т. е. $A_{fg} = A_f A_g$.

Согласно результатам пп. 4-6 множество линейных операторов $\mathscr{L}(L, L)$ после выбора базиса в L можно отождествить с множеством квадратных матриц $M_n(\mathscr{K})$ порядка $n = \dim L$ над полем $\mathscr{K}$. Имеющиеся в обоих множествах структуры линейных пространств и колец при этом отождествлении согласованы. Биекциям, т. е. линейным автоморфизмам $f : L \to L$, отвечают обратимые матрицы: если $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_L$, то $A_f A_{f^{-1}} = E_n$, так что $A_{f^{-1}} = A_f^{-1}$. Напомним, что матрица A обратима, или невырождена тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$.

а) Действие линейного отображения в координатах. В обозначениях п. 4 мы можем представлять векторы пространств $N,\ M$ в координатах столбцами

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

и тогда действие оператора f записывается на языке матричного умножения формулой

$$\left(\begin{array}{c} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdots & \ldots & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right),$$

или $\vec{y} = A_f \vec{x}$ (ср. п. 4). Иногда удобно писать аналогичную формулу в терминах базисов $\{e_t\}$, $\{e'_k\}$, где она принимает вид

$$f(e_1, \ldots, e_n) = (f(e_1), \ldots, f(e_n)) = (e'_1, \ldots, e'_m) A_f.$$

При этом формализм матричного умножения требует, чтобы в выражении справа векторы M умножались на скаляры справа, а не слева; это безобидно, мы просто будем считать, что $e'a = ae'$ для любых $e' \in M, a \in \mathscr{K}$.

Пользуясь такого рода записями, мы будем иногда нуждаться в проверке ассоциативности или линейности по аргументам «смешанных» произведений матриц, часть которых имеет элементы нз $\mathscr{K}$, а другая часть из L, например

$$((e_1, \ldots, e_n) A) B = (e_1, \ldots, e_n)(AB)$$

Нли

$$(e + e'_1, \ldots, e_n + e'_n) A = (e_1, \ldots, e_n) A + (e'_1, \ldots, e'_n) A$$

и т. п. Формализм пп. 4, 5 автоматически переносится на эти слу чаи. То же замечание относится к блочным матрицам.

б) Координаты вектора в измененном базисе. Пусть в про странстве L выбраны два базиса $\{e_i\}$ и $\{e'_i\}$. Любой вектор $l \in l$ можно представить его координатами в этих базисах: $l = \sum_{i=!}^{n} \gamma e = \sum_{k=1}^{n} x'_k e'_k$. Покажем, что существует квадратная матрица A порядка n, не зависящая от l, такая, что $\vec{x} = \overrightarrow{Ax'}$.

Действительно, если $e'_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i$, то $A = (a_{ik})$:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = l = \sum_{k=1}^{n} x'_k e'_k = \sum_{k=1}^{n} x'_k \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x'_k\right) e_i$$

Матрица A называется матрицей перехода (от нештрихованного базиса к штрихованному), или от штрихованных координат к нештрихованным. Заметим, что она обратима: обратная матрица есть матрица перехода от штрихованного базиса к нештрихованному.

Заметим, что формулу $\vec{x} = A\overrightarrow{x'}$ можно было прочесть также как формулу, выражающую координаты старого вектора-столбца $\vec{x}$ через координаты вектора $f(\vec{x}')$, где f - линейное отображение $L \to L$, описанное матрицей A в базисе $\{e_k\}$.

В физике эти две точки зрения называются соответственно «пассивной» и «активной». В первом случае мы описываем одно u то же состояние системы (вектор l) с точки зрения разных наблюдений (со своими системами координат). Во втором случае наблюдатель один, а состояние системы подвергается преобразованиям, состоящим, например, из симметрий пространства состояний этой системы.

в) Матрица линейного отображения в измененных базисах. В ситуации п. 4 выясним, как изменнтся матрица A_f линейного отображения, если перейти от базисов $\{e_k\}, \{e'_i\}$ к новым базисам $\{\bar{e}_k\}, \{\bar{e}'_i\}$ пространств N, M. Пусть B-матрица перехода от $\{e_k\}$-координат к $\{\bar{e}_k\}$-координатам, а C-матрица перехода от $\{e'_i\}$-координат к $\{\bar{e}'_i\}$-координатам. Мы утверждаем, что матрица $\bar{A}_f$ отображения f в базисах $\{\bar{e}_k\}, \{\bar{e}'_i\}$ равна

$$\bar{A}_f = C^{-1} A_f B.$$

В самом деле, вычисляя в базисах, имеем

$$(\bar{e}_k) \bar{A}_f = f((\bar{e}_k)) = f((e_k) B) = (f(e_k)) B = (e'_l) A_f B = (\bar{e}'_i) C^{-1} A_f B.$$

Рекомендуем проделать аналогичные вычисления в координатах. Особенно важен частный случай $N = M, \{e_i\} = \{e_i'\}, \{\bar{e}_i\} = \{\bar{e}_i'\}$, $B = C$. Матрица линейного оператора f в новом базисе равна

$$\bar{A}_f = B^{-1} A_f B.$$

Отображение $M_n(\mathscr{K}) \to M_n(\mathscr{K}) : A \mapsto B^{-1}AB$ называется сопряжением (посредством невырожденной матрицы B). Сопряжение является автоморфизмом матричной алгебры $M_n(\mathscr{K})$:

$$B^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i A_i\right) B = \sum_{i=1}^{n} a_i B^{-1} A_i B, \quad a_i \in \mathscr{K};$$
$$B^{-1}\left(A_i \ldots A_m\right) B = \left(B^{-1} A_1 B\right) \ldots \left(B^{-1} A_m B\right)$$

(в произведении справа внутренние сомножители B и B^{-1} попарно сокрашаются, нбо стоят рядом).

Особую роль играют те функции от элементов $M_n(\mathscr{K})$, которые не меняются при замене матрицы на сопряженную, потому что с помощью этих функций можно стронть инварианты линейных операторов: если φ - такая функция, то, полагая $\varphi(f) = \varphi(A_f)$, получим результат, зависящий лишь от f, но не от базиса, в котором пишется A_f. Вот два важных примера.

Определитель и след линейного оператора. Положим

$$\operatorname{Tr} f = \operatorname{Tr} A_f = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}, \text{ где } A_f = (a_{ik})$$

(след-«trace»-матрицы A есть сумма элементов ее главной диагонали);

$$\det f = \det A_{\mathrm{f.}} \; .$$

Инвариантность определителя относительно сопряжения очевидна:

$$\det\left(B^{-1}AB\right) = (\det B)^{-1} \cdot \det A \cdot \det B = \det A.$$

Чтобы установить инвариантность следа, докажем более общий факт: если A, B-такие матрицы, что AB и BA определены, то $\operatorname{Tr} AB = \operatorname{Tr} BA$.

Действительно,

$$\operatorname{Tr} AB = \sum_i \sum_i a_{li} b_{ji}, \quad \operatorname{Tr} AB = \sum_i \sum_i b_{li} a_{lj}.$$

Если теперь B невырождена, то, применяя доказанный факт к матрицам $B^{-1}A$ и B, получим

$$\operatorname{Tr}\left(B^{-1}AB\right) = \operatorname{Tr}\left(BB^{-1}A\right) = \operatorname{Tr} A.$$

В §8 мы введем собственные значения матриц и операторов, симметрические функции от которых дадут другие инвариантные функцин.

В заключение этого параграфа мы приведем определения, названия и стандартные обозначения для нескольких классов матрип над вещественными и комплсксными числами, исключительно важных в теорин групп и алгебр Ли и ее многочисленных приложениях, в частности в физике. Первый класс образуют так называемые классинеские группы: они действительно являются группами относительюо матричного умножения. Второй класс образуют алгебры Ли: они составляют линейные пространства и устойчивы относительно операции взятия коммутатора: $[A, B] = AB - BA$. Параллелизм обозначений для этих классов получит некоторое объяснение в пар. 11 и в упражнении 8.

Классические группы.

а) Полная линейная группа $\mathrm{GL}(n,\mathscr{K})$. Она состоит из невырожденных квадратных матриц размера $n\times n$ над полем $\mathscr{K}$.

б) Специальная линейная грцппа $\mathrm{SL}(n,\mathscr{K})$. Она состоит из квадратных матриц размера $n\times n$ над полем $\mathscr{K}$ с определителем единица.

В этих двух случаях $\mathscr{K}$ может быть любым полем. Дальше мы ограничимся полями $\mathscr{K}=\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, хотя существуют обобщения этих определений на другие поля.

в) Ортогональная группа $\mathrm{O}(n,\mathscr{K})$. Она состоит из матриц размера $n\times n$ с условием $AA^t=E_n$. Такие матрицы действительно обрязуют группу, ибо

$$E_nE_n^t=E_n, A^{-1}\left(A^{-1}\right)^t=A^{-1}\left(A^t\right)^{-1}=\left(A^tA\right)^{-1}=\left(E_n^t\right)^{-1}=E_n,$$

наконец,

$$(AB)(AB)^t=ABB^tA^t=AA^t=E_n.$$

При $\mathscr{K}=\mathbf{R},\mathbf{C}$ эта группа называется вещественной или комплексной соответственно. Элементы группы $\mathrm{O}(n,\mathscr{K})$ называются ортогональными матрицами. Вместо $\mathrm{O}(n,\mathbf{R})$ обычно пишут $\mathrm{O}(n)$.

г) Специальная ортогональная группа $\mathrm{SO}(n,\mathscr{K})$. Она состоит из ортогональных матриц с определителем единица:

$$\mathrm{SO}(n,\mathscr{K})=\mathrm{O}(n,\mathscr{K})\cap\mathrm{SL}(n,\mathscr{K}).$$

Вместо $\mathrm{SO}(n,\mathbf{R})$ обычно пишут $\mathrm{SO}(n)$.

д) Унитарная грynnа $\mathrm{U}(n)$. Она состоит из комплексных матриц размера $n\times n$, удовлетворяющих условию $A\overline{A^t}=E_n$, где $\bar{A}$ - матрица, элементы которой комплексно сопряжены с соответствующими элементами матрицы A: если $A=(a_{ik})$, то $\bar{A}=(\bar{a}_{ik})$. Пользуясь равенством $\overline{AB}=\overline{AB}$, нетрудно проверить, как и в случае в), что $\mathrm{U}(n)$ является группой, как в предыдущем пункте. Элементы $\mathrm{U}(n)$ называют унитарными матрицами.

Матрицу A^t часто называют рмитово сопряженной с матрицей A; математики обычно обозначают ее A^*, а физики A^+. Заметим, что операция эрмитова сопряжения определена для комплексных матриц любых размеров.

е) Специальная унитарная группа $\mathrm{SU}(n)$. Она состоит из унитарных матриц с определителем единица:

$$\mathrm{SU}(n)=\mathrm{U}(n)\cap\mathrm{SL}(n,\mathbf{C}).$$

Из определений ясно, что вещественные унитарные матрицы это ортогональные матрицы: $\mathrm{O}(n)=\mathrm{U}(n)\cap\mathrm{GL}(n,\mathbf{R})$, $\quad\mathrm{SO}(n)=\mathrm{U}(n)\cap\mathrm{SL}(n,\mathrm{R})$. 11. Классические алгебры Ли. (Матричной) алгеброй Ли называется любая аддитивная подгрушпа квадратных матриц $M_n(\mathscr{K})$, замкнутая относительно операции коммутирования $[A,B]=AB-BA$. (Общее определение см. в упражнении 14.) Следующие множества матриц составляют классические алгебры Ли; обычно они даже образуют линейные пространства над $\mathscr{K}$ (нногда над $\mathbf{R}$, хотя $\mathscr{K}=\mathbf{C}$). Они не являются группами по умножению!

а) Алгебра $\mathrm{gl}(n,\mathscr{K})$. Она состоит из всех матриц $M_n(\mathscr{K})$

б) Алгебра sl $(n,\mathscr{K})$. Она состоит из всех матриц $M_n(\mathscr{K})$ со следом нуль (иногда говорят «бесследных»). Замкнутость относительно коммутатора следует из формулы $\mathrm{Tr}[A,B]=0$, доказанной в п. 9. Заметим, что Tr является линейной функцией на пространствах квадратных матриц и линейных операторов, так что $\mathrm{sl}(n,\mathscr{K})$ является линейным пространством над $\mathscr{K}$.

в) Алгебра о $(n,\mathscr{K})$. Она состоит из всех матриц в $M_n\left(\mathscr{K}^p\right)$, удовлетворяющих условию $A+A^t=0$. Равносильное условие: $A=(a_{ik})$, где $a_{ii}=0$ (если характеристика $\mathscr{H}$ отлична от двух), $a_{ik}=-a_{ki}$. Такие матрицы называются антисимметричными, или кососимметричными. Заметим, что $\mathrm{Tr}\,A=0$ для всех $A\in\mathrm{o}(n,\mathscr{K})$.

Если $A^t=-A,B^t=-B$, то $[A,B]^t=[B^t,A^t]=[-B,-A]=-[A,B]$, так что $[A,B]$ кососимметрична. Такие матрицы образуют линейное пространство над $\mathscr{K}$.

Попутно заметим, что матрица A называется симметричной, если $A^t=A$. Множество таких матриц не замкнуто относительно коммутирования, но замкнуто относительно антикоммутирования $AB+BA$ или операции Нордана $\frac{1}{2}(AB+BA)$.

г) Алгебра и (n). Она состонт из комплексных матриц размера $n\times n$, удовлетворяющих условию $A+\bar{A}^t=0$, или $a_{ik}=-\bar{a}_{ki}$. В частности, на диагонали у них стоят чисто мнимые элементы. Такие матрицы называются эрмитово антисимметричными, или антиэрмитовыми, или косоэрмитовыми. Они образуют линейное пространство над $\mathbf{R}$, но не над $\mathbf{C}$.

Если $A^t=-\bar{A}, B^t=-\bar{B}$, то

$$[A,B]^t=\left[B^t,A^t\right]=[-\bar{B},-\bar{A}]=-\overline{[A,B]},$$

так что $u(n)$ является алгеброй Ли.

Попутно заметим, что матрица A называется эрмитово симметричной, или просто эрмитовой, если $A=\bar{A}^t$, т. е. $a_{ki}=\bar{a}_{ik}$. Очевидно, вещественные эрмитовы матрицы симметричны, а антиэрмитовы - антисимметричны. В частности,

$$\mathrm{o}(n,\mathbf{R})=\mathbf{u}(n)\cap\mathrm{sl}(n,\mathbf{R}).$$

Матрица A эрмитова, если матрица $i\bar{A}$ антиэрмитова, и наоборот.

д) Алгебра su(n). Это есть u $(n)\cap\mathrm{sl}(n,\mathrm{C})$ - алгебра бесследных антиэрмитовых матриц. Они образуют R-линейное пространство. Во второй части книги, изучая линейные пространства, снабженные евклидовыми или эрмитовыми метриками, мы выясним геометрический смысл операторов, воторые представлены матрицами из описанных классов, а также пополним наши списки.

УПРАЖНЕНИЯ

Сформулировать точно и доказать утверждение о том, что матрицы над полем, разбитые на блоки, можно умножать поблочно, если размеры и количество блоков согласованы:

$$(A_{ij})\,(B_{jk})=\left(\sum_i A_{ij}B_{jk}\right)$$

когда число столбцов в блоке A_{ij} равно числу строк в блоке B_{fk} и число блочных столбцов матрицы A равно числу блочных строк матрицы B.

Ввести понятие бесконечной матрицы (с бесконечным числом строк и/или столбцов). Найти условия, когда можно перемножать две такие матрицы над полем (примеры: финитные матрицы, т. е. матрицы только с конечным числом пенулевых элементов; матрицы, у которых в каждом столбце и/или каждой строке конечно число ненулевых элементсв). Найти условия существования тройных пронзведений.

Доказать, что уравнение $XY-YX=E$ неразрешимо в конечных квадратных матрицах X,Y над полем нулевой характеристики. (Указание. Рассмотреть след обеих частей.) Найти решение этого уравнения в бесконечных матрицах. (Указание. Рассмотреть линейные операторы d/dx и умножения на x на пространстве всех многочленов от x и воспользоваться тем, что $\frac{d}{dx}(xf)-x\frac{d}{dx}f=f$.

Описать явно классические группы и классические алгебры Ли в случаях $n=1$ и $n=2$. Построить изоморфизм групп $\mathrm{U}(1)$ и $\mathrm{SO}(2,\mathrm{R})$.

Следующие матрицы над C называются матрицами Паули:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(Их ввел известный физик В. Паули, один из создателей квантовой механики, в своей теории спина электрона.) Проверить их свойства:

а) $[\sigma_a, \sigma_b] = 2i\varepsilon_{abc}\sigma_c$, где $\{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}$ и ε_{abc} - знак перестановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \end{pmatrix}$

б) $\sigma_a\sigma_b + \sigma_b\sigma_a = 2\delta_{ab}\sigma_0$ ($\delta_{ab}-$ символ Кронекера).

в) Матрицы $i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3$ над $\mathbf{R}$ образуют базис su(2); над $\mathbf{C}$ - базис sl(2); матрицы $\sigma_0, i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3$ над R образуют базис u(2), над C - базис gl(2).

Следующие матрицы над C порядка 4 называются матрнцами Дирака (здесь σ_a - матрицы Паули):

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}$$

(их ввел известный физик П. А. М. Дирак, один из создателей квантовой механики, в своей теории релятивистского электрона со спином). Пользуясь результатами упражнений 5 и 1, проверить их свойства:

а) $\gamma_a\gamma_b + \gamma_b\gamma_a = 2g_{ab}E_4$, где $g_{ab} = 0$ при $a \neq b$, $g_{00} = 1$, $g_{11} = g_{22} =, = g_{33} = -1$.

б) По определению, $\gamma_5 = i\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_0$. Проверить, что $\gamma_5 = -\begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix}$.

в) $\gamma_a\gamma_\Sigma = -\gamma_5\gamma_a$ для $a = 0, 1, 2, 3$; $\gamma_5^2 = E_4$. 7. Проверить следующую таблицу размерностей классических алгебр Ли (как линейных пространств над соответствующими полями):

gl $(n, \mathscr{K})$	sl $(n, \mathscr{K})$	o $(n, \mathscr{K})$	u (n)	su (n)
n^2	n^2-1	$\frac{n(n-1)}{2}$	n^2	n^2-1

Пусть A - квадратная матрица порядка n, ε-вещественная переменная, $e \to 0$. Показать, что матрнца $U = E + \varepsilon A$ «унитарна с точностью до ε^2 тогда и только тогда, когда A антиэрмитова:

$$U\bar{U}^t = E + O\left(\varepsilon^2\right) \Leftrightarrow A + \bar{A}^t = 0.$$

Сформулировать и доказать аналогичные утверждения для других пар класскческих групп и алгебр Ли.

Пусть $U = E + \varepsilon A, V = E + \varepsilon B$, где $\varepsilon \to 0$. Проверить, что

$$UVU^{-1}V^{-1} = E + \varepsilon^2[A, B] + O\left(\mathrm{e}^3\right)$$

(выражение слева называется групповым коммутатором элементов U, V).

Ранг rk A матрицы над полем - это максимальное число ее линейно независнмых столбцов. Доказать, что rk $A_f = \dim \operatorname{Iml} f$.

Доказать, что квадратная матрнца ранга 1 представляется в виде произведения столбца на строку.

Пусть A, B - матрнцы над полем размеров $m \times n, m_1 \times n_1$ и пусть зафиксированы нумерацни всех mn элементов A и всех $m_1 n_1$ элементов B (например, последовательно по строкам). Тензорное произведение, или произведение Кронекера, $A \otimes B$ - это матрица размера $mn \times m_l n_1$ с элементом $a_{lk} b_{lm}$ на месте $\alpha\beta$, где α - номер a_{ik}, β - номер b_{lm}. Проверить следующие утверждения:

а) $A \otimes B$ линейно по каждому из аргументов, когда другой фиксирован.

б) Если $m = n, m_1 = n_1$, то $\det(A \otimes B) = (\det A)^{m_1} (\det B)^m$.

Сколько нужно операций, чтобы перемножить две большие матрицы? В следующей серни утверждений нзлагается метод Штрассена, позволяющий значительно сократить их число, если матрицы действительно большие.

а) Умножение двух матриц порядка N обычным методом требует N^3 умножений н $N^2(N-1)$ сложений.

б) Имеет место следующая формула умножения при $N = 2$, обходящаяся 7 умножениями (вместо 8) за счет 18 сложений (вместо 4), коммутативность элементов не предполагается:

$$
\begin{gathered}
\left(\begin{array}{cc}
a & b \\
-c & -d
\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc}
A & B \\
-C & -D
\end{array}\right)= \\
=\left(\begin{array}{c}
(a+d)(A+D)-(b+d)(C+D)-d(A-C)-(a-b)D,(a-b)D-a(D-B) \\
(d-c)A-d(A-C),(a+d)(A+D)-(a+c)(A+B)-a(D-B)-(d-c)A
\end{array}\right).
\end{gathered}
$$

в) Примсияя этот метод k матрицам порядка 2^n, разбитым на qетыре $2^{n-1} \times 2^{n-1}$-блока, показать, что их можно перемножить, применив 7^n умножений и $6\left(7^n - 4^n\right)$ сложений.

г) Дополнив матрицы порядка N до ближайшего порядка 2^n нулямн, показать, что для их умножения достаточно $O\left(N^{\log_2 7}\right) = O\left(N^{2,81}\right)$ операций.

Не удастся ли вам прндумать что-нибудь лучшее?

Пусть $L = M_n(\mathscr{K})$ - пространство квадратных матриц порядка n. Доказать, что для любого функционала $f \in L^*$ существует единственная матрица $A \Subset M_n(\mathscr{H})$ со свойством

$$
f(X) = \operatorname{Tr}(AX)
$$

для всех $X \in M_n(\mathscr{K})$. Вывести отсюда существование канонического изоморфизма

$$
\mathscr{Z}(L, L) \to [\mathscr{L}(L, L)]^*
$$

для любого цонечиомерного пространства L. 14. $\mathscr{K}$-алгеброй Ли называется линейное пространство L над $\mathscr{K}$ вместе с бинарной операцией (коммутатор): $L \times L \to L$, обозначаемой $[,]$ и удовлетворяюшей условиям:

а) коммутатор $[l, m]$ линеен по каждому из аргументов $l, m \in L$ при фиксированном другом аргументе;

$[l, m] \doteq -[m, l]$ прн всех l, m;
в) $[l_1, [l_2, l_3]] + [l_3, [l_1, l_2]] + [l_2, [l_3 l_1]] = 0$ (тождество $l_1, l_2, l_3 \in L$.

Проверить, что описанныя в п. 11 классические алгебры Ли являются алгебрами Ли в смысле этого определения.

Более общо, проверить, что коммутатор $[X, Y] = XY - YX$ в любом ассоциативном кольце удовлетворяет тождеству Якоби.

3.7.5 Subspaces and Direct Sums

(по Кострикину Манину)

В этом параграфе мы изучим некоторые геометрические свойства взаимного расположения подпространств конечномерного пространства L. Поясним первую задачу на простейшем примере. Пусть $L_1, L_1' \subset L$ - два подпространства. Естественно считать, что они одинаково расположены внутри L, если существует такой линейный автоморфизм $f : L \to L$, который переводит L_1 в L_1'. Для этого, конечно, необходимо, чтобы $\dim L_1 = \dim L_1'$, потому что f сохраняет все линейные соотношения и, значит, переводит оазис L_1 в базис L_1'. Но этого и достаточно. В самом деле, выберем базисы $\{e_1, \ldots, e_m\}$ в L_1 и $\{e_1', \ldots, e_m'\}$ в L_1'. По теореме П. 12 §2 их можно дополнить до базисов $\{e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n\}$ и $\left\{e_1', \ldots, e_m', e_{m+1}', \ldots, e_n'\right\}$ пространства L. По предложению п. 3 §3 сушествует линейное отображение $f : L \to L$, переводящее e_i в e_i' для всех i. Это отображение обратимо и переводит L_1 в L_1'.

Таким образом, все линейные подпространства одинаковой размерности одинаково расположены внутри L.

Дальше естественно рассмотреть возможные расположения (упорядоченных) пар подпространств $L_1, L_2 \subset L$. Как выше, будем говорить, что пары (L_1, L_2) и (L_1', L_2') одинаково расположены, если существует такой линейный автоморфизм $f : L \to L$, что $f(L_1) = L_1'$ $f(L_2) = L_2'$. Снова равенства $\dim L_1 = \dim L_1'$ и $\dim L_2 = \dim L_2'$ являются необходимыми для одинаковой расположенности. Однако, вообще говоря, этих условий уже недостаточно. Действительно, если (L_1, L_2) и (L_1', L_2') одинаково расположены, то f переводит подпространство $L_1 \cap L_2$ в $L_1' \cap L_2'$, и потому необходимо также условие $\dim(L_1 \cap L_2) = \dim(L_1' \cap L_2')$. Если $\dim L_1$ и $\dim L_2$ фиксированы, но L_1 и L_2 в остальном произвольны, то $\dim(L_1 \cap L_2)$ может принимать, вообще говоря, целый ряд значений.

Чтобы выяснить, какими они могут быть, введем понятие суммы линейных подпространств.

Определение.

Пусть $L_1, \ldots, L_n \subset L$ - линейные подпространства в L. Нх суммой называется множество

$$\sum_{i=1}^{n} L_i = L_1 + \ldots + L_n = \left\{\sum_{i=1}^{n} l_i | l_i \equiv L_i\right\}.$$

Легко убедиться, что сумма также является линейным подпространством и что эта операция сложения ассоциативна и коммутативна, так же как и операция пересечения линейных подпространств. Другое описание суммы $L_1 + \ldots + L_n$ состоит в том, что это наименьщее подпространство в L, содержащее все L_i.

Следующая теорема связывает размерности суммы двух подпространств и их пересечения:

Теорема. Если $L_1, L_2 \subset L$ конечномерны, то $L_1 \cap L_2$ u $L_1 + L_2$ конечномерны и

$$\dim(L_1 \cap L_2) + \dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2.$$

Д ок аз а тельство. $L_1 + L_2$ является линейной оболочкой объединения базисов L_1 и L_2 и потому конечномерно; $L_1 \cap L_2$ содержится в конечномерных пространствах L_1 и L_2.

Положим $m = \dim L_1 \cap L_2, n = \dim L_1, p = \dim L_2$. Выберем базис $\{e_1, \ldots, e_m\}$ пространства $L_1 \cap L_2$. По теореме п. 12§2 его можно дополнить до базисов пространств L_1 и L_2: пусть это будет $\left\{e_1, \ldots, e_m, e'_{m+1}, \ldots, e'_n\right\}$ и $\left\{e_1, \ldots, e_m, e''_{m+1}, \ldots, e''_p\right\}$. Назовем такую пару базисов в L_1 и L_2 согласованной.

Мы докажем сейчас, что семейство $\left\{e_1, \ldots, e_m, e'_{m+1}, \ldots, e'_n,\ e''_{m+1}, \ldots, e''_p\right\}$ составляет базис пространства $L_1 + L_2$. Отсюда будет следовать утверждение теоремы:

$$\dim(L_1 + L_2) = p + n - m = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim L_1 \cap L_2.$$

Поскольку каждый вектор из $L_1 + L_2$ есть сумма векторов из L_1 и L_2, т. е. сумма линейных комбинаций $\left\{e_1, \ldots, e_m, e'_{m+1}, \ldots \ \ldots, e'_n\right\}$ и $\left\{e_1, \ldots, e_m, e''_{m+1}, \ldots, e''_p\right\}$, объединение этих семейств порождает $L_1 + L_2$. Поэтому остается лишь проверить его линейную независимость.

Предположим, что существует нетривиальная линейная зависимость

$$\sum_{i=1}^{m} x_i e_i + \sum_{i=m+1}^{n} y_j e'_i + \sum_{k=m+1}^{D} z_k e''_k = 0.$$

Тогда обязательно должны существовать индексы j и k, для которых $y_j \neq 0$ и $z_k \neq 0$: иначе мы получили бы нетривиальную линейную зависимость между элементами базиса L_1 или L_2.

Следовательно, ненулевой вектор $\sum\limits_{k=m+1}^{p} z_k e''_k \in L_2$ должен лежать также в L_1, либо он равен $-\left(\sum\limits_{i=1}^{m} x_i e_i + \sum\limits_{i=m+1}^{n} y_i e'_i\right)$. Значит, он лежит в $L_1 \cap L_2$ и потому представим в виде линейной комбинации векторов $\{e_1, \ldots, e_m\}$, составляющих базис $L_1 \cap L_2$. Но это представление дает нетривиальную линейную зависимость между векторами $\left\{e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e^n_p\right\}$, что противоречит их определению.

Теорема

доказана. 4. Следствие. Пусть $n_1 \leqslant n_2 \leqslant n$ - размерности пространств L_1, L_2 u L соответственно. Тогда числа $i = \dim L_1 \cap L_2 u$ s $= \dim(L_1 + L_2)$ могут принимать юобые значения, подчиненные условиям $0 \leqslant i \leqslant n_1, n_2 \leqslant s \leqslant nui + s = n_1 + n_2$.

Доказ ательство. Необходимость условий следует из включений $L_1 \cap L_2 \subset L_1, L_2 \subset L_1 + L_2 \subset L$ и из теоремы п. 3. Для доказательства достаточности выберем $s = n_1 + n_2 - i$ линейно независимых векторов в L : $\left\{e_1, \ldots, e_i; e'_{t+1}, \ldots, e'_{n_1}; e''_{i+1}, \ldots, e''_{n_2}\right\}$ и обозначим через L_1, L_2 линейные оболочки $\left\{e_1, \ldots, e_i; e'_{i+1}, \ldots, e'_{n_1}\right\}$ и $\left\{e_1, \ldots, e_i; e''_{i+1}, \ldots, e''_{n_2}\right\}$ соответственно. ак в теореме, нетрудно проверить, что $L_1 \cap L_2$ есть линейная оболочка $\{e_1, \ldots, e_i\}$. 5. Теперь мы можем установить, что инварианты $n_1 = \dim L_1$, $n_2 = \dim L_2$ и $i = \dim L_1 \cap L_2$ полностью характеризуют расположение пары подпространств (L_1, L_2) в L. Для доказательства возьмем другую пару (L'_1, L'_2) с теми же инвариантами, построим согласованные пары базисов для L_1, L_2 и L'_1, L'_2, затем их объеднннения - базисы $L_1 + L_2$ и $L'_1 + L'_2$, как в доказательстве теоремы п. 3, наконец, продолжим эти объединения до двух базисов L. Линейный автоморфизм, переводящий первый базис во второй, устанавливает одинаковость расположения $L_1, L_2 \cdot$ и L'_1, L'_2.

Общее положенне. В обозначениях предыдущего пункта будем говорить, что подпространства $L_1, L_2 \subset L$ находятся в общем положении, если их пересечение имеет наименьшую, а сумма наибольшую размерность, допускаемую неравенствами из следствия п. 4.

Например, две плоскости в трехмерном пространстве находятся в общем положении, если они пересекаются по прямой, а в четырехмерном пространстве, - если они пересекаются по точке.

Другой термин для того же понятия: L_1 и L_2 пересекаются трансверсально.

Название «общее положение» обусловлено тем, что в некотором смысле большинство пар подпространств (L_1, L_2) находится в общем положении, а другие расположения являются вырожденными. У точнить это утверждение можно разными способами. Один из них состоит в том, чтобы описать множество пар подпространств некоторыми параметрами и проверить, что пара не находится в общем положении, только если эти параметры удовлетворяют дополнительным соотношениям, которым общие параметры ie удовлетворяют.

Другой способ, который годится для $\mathscr{K} = \mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$, состоит в следующем: выбрать в L некоторый базис, определить L_1 и L_2 двумя системами линейных уравнений и показать, что можно как угодно мало изменить коэффицненты этих уравнений («пошевелить L_1 и L_2 $\gg$) так, чтобы новая пара оказалась в общем положении.

Можно было бы пытаться далее рассматривать инварианты, характеризующие взаимное расположение троек, четверок и большего числа подпространсть в L. Комбинаторные трудности заесь быстро растут, и для решения этой задачи нужна другая техника; кроме того, начиная с четверок, расположение перестает характеризоваться только дискретными инвариантами типа размерностей разных сумм и пересечений.

Заметим еще, что, как показывает наша «физическая» интуиция, расположение, скажем, прямой относительно плоскости характеризуется углом между ними. Но, как мы отмечали в пар. 1, понятие угла требует введения дополнительной структуры. В чисто линейной ситуации есть только различие между «нулевым» и «ненулевым» углом.

Теперь мы изучим один частный, но очень важный класс взаимных расположений n-ок подпространств.

Определение.

Пространство L является прямой суммой своих подпространств $L_1, \ldots, L_n$, если каждый вектор $l \in L$ однозначно представляется в виде $\sum\limits_{i=1}^{n} l_l$, где $l_i \in L_i$.

Когда условия определения выполнены, мы пишем $L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_n$, или $L = \bigoplus_{i=1}^n L_i$. Например, если $\{e_1, \ldots, e_n\}$ - базис L, а $L_i = \mathscr{K} e_i$ - линейная оболочка вектора e_i, то $L = \bigoplus_{i=1}^n L_i$. Очевидно, если $L = \bigoplus_{i=1}^n L_i$, то $L = \sum\limits_{i=1}^{n} L_i$; последнее условие является более слабым.

Теорема. Пусть $L_1, \ldots, L_n \subset L$ - подпространства L. $L = \bigoplus_{i=1}^n L_l$ тогда и тол дующих двух условий:

а) $\sum\limits_{i=1}^{n} L_i = L$ u $L_j \cap \left(\sum\limits_{i \neq 1} L_i \right) = \{0\}$ для всех $1 \leqslant j \leqslant n$;

б) $\sum\limits_{i=1}^{n} L_i = L u \sum\limits_{i=1}^{n} \dim L_i = \dim L$ (здесь предполагается, ито L конечномерно).

Доказ ате льство. а) Однозначность представления любого вектора $l \in L$ в виде $\sum\limits_{i=1}^{n} l_l, l_i \in L$, равносильна однозначности такого представления для нулевого вектора. В самом деле, если $\sum\limits_{i=1}^{n} l_l = \sum\limits_{i=1}^{n} l_i'$, то $0 = \sum\limits_{i=1}^{n} (l_i - l_i')$, и наоборот. Если имеется нетривиальное представление $0 = \sum\limits_{i=1}^{n} l_l$, в котором, скажем, $l_j \neq 0$, то $l_i = -\sum\limits_{i\neq j} l_i \Leftarrow L_j \cap \left(\sum\limits_{i\neq j} L_i\right)$, так что условие а) нарушено. Обращая это рассуждение, получаем, что из нарушения условия а) следует неоднозначность представления нуля, б) Если $\bigoplus_{i=1}^{n} L_i = L$, то во всяком случае

$$\sum_{i=1}^{n} L_i = L \text{ и } \sum_{i=1}^{n} \dim L_i \geqslant \dim L,$$

потому что объединение базисов L_i порождает L и, значит, содержит базис L. По теореме п. 3, примененной к L_j и $\sum\limits_{i\neq j} L_i$, имеем

$$\dim L_j \cap \left(\sum_{i\neq 1} L_t\right) + \dim L = \dim L_j + \dim \left(\sum_{i\neq 1} L_i\right).$$

Но размерность пересечения слева нулевая по предыдушему утверждению. Кроме того, если сумма всех L_i прямая, то и сумма всех L_i, кроме L_f, прямая, и мы можем по индукции считать, что

$$\dim \left(\sum_{i\neq j} L_i\right) = \sum_{i\neq j} \dim L_i. \text{ Поэтому } \sum_{i} \dim L_i = \dim L.$$

Наоборот, если $\sum\limits_{i} \dim L_i = \dim L$, то объединение базисов всех L_i состоит из $\dim L$ элементов и порождает все L, а потому является базисом в L. В самом деле, нетривиальное представление нуля $0 = \sum\limits_{i=1}^{n} l_i, l_i \in L_i$, дало бы нетривиальную линейную комбинацию элементов этого базиса, равную нулю, что невозможно.

Рассмотрим теперь связь между разложениями в прямую сумму и специальными линейными операторами - проекторами.

Определение.

Линейный оператор $p : L \to L$ называется проектором, если $p^2 = p \circ p = p$.

Прямому разложению $L = \bigoplus_{l=1}^{n} L_i$ естественно сопоставляются n проекторов, которые определяются так: для любых $l_l \in L_i$

$$p_i \left(\sum_{j=1}^{n} l_l\right) = l_i$$

Поскольку любой элемент $l \in L$ однозначно представляется в виде $\sum\limits_{j=1}^{n} l^j, l_j \in L_j$, отображения p_i определены корректно. Их линейность и свойство $p_i^2 = p_i$ проверяются прямо из определения. Очевидно, $L_i = \mathrm{Imi}\, p_i$.

Сверх того, если $i \neq j$, то $p_i p_i = 0$: вектору l_i отвечает представление $l_i = \sum\limits_{j=1}^{n} l_i'$, где $l_j' = 0$ пгри $i \neq j, l_i' = l_i$.

Наконец, $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = \mathrm{id}$, ибо $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} p_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} l_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} l_f$, если $l_j \in L_j$. Наоборот, по такой системе проекторов можно определить отвечающее ей прямое разложение. 10. Теорема. Пусть $p_1, \ldots, \rho_n : L \to L$ - коненное множество проекторов, удовлетворяющих условиям

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \mathrm{id}, p_i p_j = 0 \text{ npu } i \neq j.$$

Положим $L_i = \mathrm{Im}\, p_i$. Тогда $L = \bigoplus_{i=1}^{n} L_i$

Доказ ательство. Применяя оператор $\mathrm{id}=\sum\limits_{i=1}^{n} p_i$ к любому вектору $l \in L$, получим $l=\sum\limits_{i=1}^{n} p_i(l)$, где $p_i(l) \in L_i$. Поэтому $L=\sum\limits_{i=1}^{n} L_i$. Для доказательства того, что эта сумма прямая, прнменим критерий а) из теоремы п. 8. Пусть $l \in L_j \cap \left(\sum\limits_{i \neq 1} L_i\right)$. В силу определения пространств $L_i=\operatorname{Im} p_i$ существуют такие векторы $l_1, \ldots, l_n$, что

$$l=p_l\left(l_l\right)=\sum_{l \neq l} p_l\left(l_l\right)$$

Применим к этому равенству оператор p_j и воспользуемся тем, что $p_i^2=p_j, p_i p_t=0$ при $i \neq j$. Получим

$$p_j\left(l_j\right)=\sum_{i \neq l} p_j p_i\left(l_i\right)=0.$$

Следовательно, $l=0$, что завершает доказательство.

Прямые дополнения. Если L - конечномерное пространство, то для любого подпространства $L_1 \subset L$ можно выбрать такое подпространство $L_2 \subset L$, что $L=L_1 \oplus L_2$; кроме тривиальных случаев $L_1=\{0\}$ или $L_1=L$ этот выбор неоднозначен. В самом деле, выбрав базис $\left\{e_1, \ldots, e_m\right\}$ в L_1 и продолжив его до базиса $\left\{e_1, \ldots \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n\right\}$ в L, мы можем взять в качестве L_2 линейную оболочку векторов $\left\{e_{m+1}, \ldots, e_n\right\}$.

Внешние прямые суммы. До сих пор мы исходили из семейства подпространств $L_1, \ldots, L_n$ одного и того же пространства L. Пусть теперь $L_1, \ldots, L_n$ - пространства, не вложенные заранее в общее пространство. Определим их внешнюю прямую сумму L следующим образом:

а) L как множество есть $L_1 \times \ldots \times L_n$, т. е. элементы L суть семейства $\left(l_1, \ldots, l_n\right)$, где $l_i \in L_i$.

б) Сложение и умноженне на скаляр производятся покоординатно:

$$\begin{gathered}\left(l_1, \ldots, l_n\right)+\left(l_1^{\prime}, \ldots, l_n^{\prime}\right)=\left(l_1+l_1^{\prime}, \ldots, l_n+l_n^{\prime}\right), \\ a\left(l_1, \ldots, l_n\right)=\left(a l_1, \ldots, a l_n\right).\end{gathered}$$

Нетрудно проверить, что L удовлетворяет аксиомам линейного пространства. Отображение $f_i: L_i \rightarrow L, f_i(l)=(0, \ldots, 0, l, 0, \ldots, 0)$ (! на i-м месте) является линейным вложением L_i в L, и из определений немедленно следует, что $L=\bigoplus_{i=1}^n f_i\left(L_i\right)$. Отождествив L_i с $f_i\left(L_i\right)$, получим линейное пространство, в котором L_i содержатся и которое разлагается в прямую сумму L_i. Это оправдывает название внешней прямой суммы. Часто удобно обозначать внешнюю прямую сумму также $\bigoplus_{i=1}^n L_i$.

Прямые суммы линейных отображений. Пусть $L=\bigoplus_{i=1}^n L_i$, $M=\bigoplus_{i=1}^n M_i, f: L \rightarrow M$ - такое линейное отображение, что $f\left(L_i\right) \subset \subset M_i$. Обозначим через f_i индуцированное линейное отображение $L_i \rightarrow M_i$. В таком случае приняго писать $f=\bigoplus_{i=1}^n f_i$. Аналогично определяется внешняя прямая сумма линейных отображений. Выбрав в L и M базисы, являющиеся объединением базисов L_i и M_i соответственно, мы получаем, что матрица f является объединением стоящих по диагонали блоков, которые представляют собой матрицы отображений f_i; на остальных местах стоят нули.

Ориентация вещественных линейных пространств. Пусть L - конечномерное линейное пространство над полем вещественных чисел. Два упорядоченных базиса $\{e_t\}$ и $\{e_t'\}$ в нем всегда одинаково расположены в том смысле, что имеется единственный линейный изоморфизм $f : L \to L$, переводящий e_i в e_i'. Поставим, однако, более тонкий вопрос: когда можно перевести базис $\{e_i\}$ в базис $\{e_i'\}$ непрерывным движением, или деформацией, т. е. найти такое семейство $f_t : L \to L$ линейных изоморфизмов, непрерывно зависящее от параметра $t \in [0, 1]$, что $f_0 = \mathrm{id}, f_1(e_i) = e_i'$ для всех i? (Непрерывно зависеть от t должны просто элементы матрицы f в каком-нибудь из базисов.) Для этого имеется очевидное необходимое условие: поскольку при изменении t определитель f_t меняется непрерывно и не проходит через нуль, знак $\det f$: должен совпадать со знаком $\det f_0 = 1$, т. е. $\det f_t > 0$.

Верно и обратное утверждение: если определитель матрицы перехода от базиса $\{e_i\}$ κ базису $\{e_i'\}$ положителен, то $\{e_i\}$ можно перевести в $\{e_i'\}$ непреръвным движением.

Это утверждение, очевидно, можно сформулировать иначе: любую вещественную матрицу с положительньм определителем можно соединить с единичной матрицей непрерывной кривой, состоящцей из невырожденных матриц (множество вещественных невырожденных матриц с положительным определителем связно). Чтобы перейти от языка базисов к языку матриц, достаточно работать не с парой базисов $\{e_i\}, \{f_i(e_i)\}$, а с матрицей перехода от первого ко второму.

Мы докажем это утверждение, разбив его на серию шагов. а) Пусть $A = B_1 \ldots B_n$, где A, B_i - матриць c положительными определителями. Если все B_j можно соединить i E непрерывной кривой, то это верно и для А.

Действительно, пусть $B_i(t)$ - такие пепрерывные кривые в пространстве невырожденых матриц, что $B_j(0) = B_j, B_j(1) = E$. Тогда кривая $A(t) = B_1(t) \ldots B_n(t)$ соединяет A с E.

б) Если A можно соединить непрерывной кривой с $B, aBcE$, то можно соединить А c Е.

Действительно, если $A(t)$ такова, что $A(0) = A, A(1) = B$, и $B(t)$ такова, что $B(0) = B, B(1) = E$, то кривая

$$t \mapsto \begin{cases} A(2t) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ B(2t-1) & \text{при } 1/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

соединяет A с E. Трюк с изменением масштаба и начала огсчета t использован лишь потому, что мы условились параметризовать кривые матриц числами $t \in [0, 1]$. Очевидно, мокно пользоваться любыми промежуточными интервалами параметризации, проводить поспедовательно все нужные деформации и менять масштаб лишь в конце. Поэтому дальше мы не будем заботиться об ннтервалах параметризации.

в) Любую квадратную невырожденную матрицу А можно представить в виде произведения конечного числа элементарных матриц следующих типов: $F_{s,t}, F_{s,t}(\lambda), F_s(\lambda), \lambda \in \mathbf{R}$. Обозначим через E_{st} матрицу с ерлинцей на песте (s, t) и нулями на остальных ме. стах. Тогда по определению

$$F_{s,t} = E - E_{ss} - E_{tt} + E_{st} + E_{ts};$$
$$F_{s,t}(\lambda) = E + \lambda E_{st}; \quad F_s(\lambda) = E + (\lambda - 1)E_{ss}.$$

Этот результат доказан в книге «Введение в алгебру», гл. 2, §4, следствие из теоремы п. 5.

г) Пусть теперь матрица A представлена в виде произведения элементарных матриц. Предполагая ее определитель положительным, покажем, как соединить ее с E с помощью нескольких последовательных деформаций, пользуясь результатами шагов а) и б).

Прежде всего, $\det F_{s_1}(\lambda) = 1$ при всех λ и $F_{s,t}(0) = E$. Меняя в исходных сомножителях λ от начального значения до нуля, мы можем деформировать все такие множители в E, так что можно счнтать, что нх нет с самого начала.

Матрицы $F_s(\lambda)$ диагональны: на месте (s, s) стоит λ, на остальных - единицы. Изменим λ от начального значения до $+1$ или -1 в соответствии со знаком начального значения. Результатом деформации будет либо единичная матрица, либо матрица линейного отображения, меняющего один из базисных векторов на противоположный и оставляющнй остальные на месте.

Результатом деформации A на этом этапе будет матрица композиции двух преобразований: одно сводится к перестановке векторов базиса ($F_{s,t}$ меняет местами s-й и t-й вектор), другое меняет знаки части векторов (композиция $F_s(+1)$ и $F_t(- - 1)$).

юбую перестановку можно разложить в произведение попарных перестановок. Матрицу перестановки векторов базиса в плоскости $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ можно соединить с $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ кривой $\begin{pmatrix} -\cos t \sin t \\ \sin t \cos t \end{pmatrix}$, $\pi/2 \geqslant t \geqslant 0$. Очевидно, разнеся элементы последней матрицы по местам $(s,s),(s,t),(t,s),(t,t)$, получим соответствующую деформацию в любой размерности, уничтожающую множители F_s, t.

К этому моменту A превратилась в диагональную матрицу с элементами $\pm$ 1 на диагонали, причем число минус единиц четно, ибо определитель A положителен. Матрицу $\begin{pmatrix} -1 \\ 0-1 \end{pmatrix}$ можно соединить с $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ кривой $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$, $\pi \geqslant t \geqslant 0$. Собрав все -1 попарно и проведя такие деформации всех пар, мы завершим доказательство.

Вернемся теперь к ориентации.

Будем говорить, что базисы $\{e_i\}, \{e'_i\}$ одинаково ориентированы, если определитель матрицы перехода от одного из них к другому положителен. Ясно, что множество упорядоченных базисов L разбивается в точности на два класса, состоящих из одинаково ориентированных базисов, тогда как базисы из разных классов ориентированы по-разному (или противоположно).

Выбор одного из этих классов называется ориентацией пространства L.

Ориентация одномерного пространства соответствует указанию «положительного направления в нем» или полупрямой $\mathbf{R}_+ e = \{ae | a > 0\}$, где e - любой вектор, определяющий ориентацию.

В двумерном пространстве задание ориентации с помощью базиса $\{e_1, e_2\}$ можно представлять себе как указание «положительного направления вращения» плоскости от e_1 к e_2. Это интуитивно согласуется с тем, что базис $\{e_2, e_1\}$ задает противоположную ориентацию (определитель матрицы перехода $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ равен -1) и противоположное направление вращения.

В общем случае переход от базиса $\{e_i\}$ к базису $\{e'_l\}$, состоя. щему из тех же векторов, но в другом порядке, сохраняет ориентацию, если перестановка четная, и меняет ее, если перестановка нечетная. Замена знака у одного из векторов e_i меняет орнентацию на противоположную.

В трехмерном физическом пространстве выбор конкретной ориентации может быть связан с физиологическими особенностями человека - асимметрией правой и левой стороны. Левая сторона это та, где у подавляющего большинства людей находится сердце. Большой, указательный и средний пальцы левой руки, согнутые по направлению к ладони, в линейно независимом положении образуют упорядоченный базнс, фиксирующий ориентащию («правило левой руки»). Вопрос о том, существуют ли чисто физические процессы, позволяющие выбрать ориентацию пространства, т. е. «неинвариантные относительно зеркального отражения», был решен около двадцати лет назад положительно, ко всеобщему изумлению, экспериментом, установившим несохранение четности в слабых взаимодействиях.

УПРАЖНЕНИЯ

Пусть (L_1, L_2, L_3) - упорядоченная тройка плоскостей в $\mathscr{K}^3$, попарно различных. Доказать, что имеются два возможных типа взаимного расположения таких троек, характеризующихся тем, что $\dim L_1 \cap L_2 \cap L_3 = 0$ или 1. акой нз этих типов следует считать обшим?

Доказать, что тройки попарно разных прямых в $\mathscr{K}^3$ все одинаково расположены, а для четверок это уже неверно.

3. Пусть $L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_n -$ флаг в конечномерном пространстве L, $m_l = \dim L_i$. Доказать, что если $L'_1 \subset \ldots \subset L'_n$ - другой флаг, $m'_i = \dim L'_i$, то автоморфизм L,

переводяший первый флаг во второй, существует тогда и только тогда, когда $m_i = m'_i$ для любого i.

То же для прямых разложений.

Доказать утверждения пятого абзаца п. 6.

Пусть $p : L \to L$ - проектор. Доказать, что $L = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im}$ р. Вывести отсюда, что в подходящем базнсе L любой проектор p представлен матрицей вида

$$\left(\frac{E_r|0}{0/0}\right)$$

где $r = \dim \operatorname{Im} p$.

Пусть $L - n$-мерное пространство над конечным полем из q элементов

а) Вычислить количество k-мерных подпространств в $L, 1 \leqslant k \leqslant n$.

б) Вычнслить количесгво пар подипространств $L_1, L_2 \subset L$ с данными размерностями L_1, L_2 н $L_1 \cap L_2$. Убедиться, что при $q \to \infty$ доля этих пар, находящихся в общем положенин, среди всех пар с данными $\dim L_l, \dim L_2$ стремится к 1.

3.7.6 Factor-space

(по Кострикину Манину)

Пусть L - линейное пространство, $M \subset L$ - его линейное подпространство, а $l \in L$ - вектор. Различные вопросы приводят к рассмотрению множеств вида

$$l + M = \{l + m | m \in M\},$$

«сдвигов» линейного пространства M на вектор l. Вскоре мы убедимся, что такие сдвиги не обязаны быть линейными подпространствами в L; их называют линейными подлногообразиями. Начнем с доказательства следующей леммы.

Лемма. $l_1 + M_1 = l_2 + M_2$ тогда и только тогда, когда $M_1 = M_2 = Mul_1 - l_2 \in M$. Таким образом, всякое линейое подмногообразие однозначно определяет линейное подпространство M, сдвигон которого оно является. Вектор же сдвига определяется лищь с точностью до элемента из этого подпространства.

Proof. □

Прежде всего, пусть $l_1 - l_2 \in M$. Положим $l_1 - l_2 = m_0$. Имеем

$$l_1 + M = \{l_1 + m | m \in M\}, \quad l_2 + M = \{l_1 + m - m_0 | m \in M\}.$$

Но когда m пробегает все векторы из $M, m - m_0$ тоже пробегает все векторь из M. Поэтому $l_1 + M = l_2 + M$. Наоборот, пусть $l_1 + M_1 = l_2 + M_2$. Положим $m_0 = l_1 - l_2$. Из определения ясно, что тогда $m_0 + M_1 = M_2$. Так как $0 \in M_2$, мы должны иметь $m_0 \in M_1$. Значит, $m_0 + M_1 = M_1$ по рассуждению в предыдушем абзаце, так что $M_1 = M_2 = M$. Это завершает доказательство.

Определение.

фактор-пространством L/M линейного пространства L по M называется множество всех линейнысх подмногообразий в L, являющихся сдвигами подпространства M, со следующими операциими:

а) $(l_1 + M) + (l_2 + M) = (l_1 + l_2) + M$,

б) $a\,(l_1 + M) = al_1 + M\partial$ любых $l_1, l_2 \in L, a \in \mathscr{K}$.

Эти операции определены корректно и превращают L/M в линейное пространство над полем $\mathscr{K}$.

Проверка корректности определения. Она состоит из следующих шагов:

а) $Ec \wedge ul_1 + M = l_1' + M$ u $l_2 + M = l_2' + M$, ro $l_1 + l_2 + M = l_1' + l_2' + M$.

В самом деле, из леммы п. 2 следует, что $l_1 - l_1' = m_1 \Subset M$ и l_L - $-l_2' = m_2 \in M$. Поэтому снова поо лемме п. 2

$$(l_1 + l_2) + M = (l_1' + l_2') + (m_1 + m_2) + M = (l_1' + l_2') + M,$$

ибо $m_1 + m_2 \in M$.

б) E сли $l_1 + M = l_1' + M$, mo $al_1 + M = al_1' + M$.

В самом деле, снова полагая $l_1 - l_1' = m \in M$, имеем $al_1 - al_1' = am \in M$, и'применение леммы п. 2 дает требуемое.

Таким образом, сложение и умножение на скаляр действительно однозначно определены в L/M. Остается проверить аксиомы линейного пространства. Но они сразу же следуют из соотвстствующих формул в L. Например, одна из формул дистрибутивности проверяется так:

$$\begin{aligned} a\,[(l_1 + M) + (l_2 + M)] = a\,((l_1 + l_2) + M) = a\,(l_1 + l_2) + M = \\ = al_1 + al_2 + M = (al_1 + M) + (al_2 + M) = a\,(l_1 + M) + a\,(l_2 + M)\,. \end{aligned}$$

Здесь последовательно используются: определение сложения в L/M, определение умножения на скаляр в L/M, дистрибутивность в L и снова определение сложения и умножения на скаляр в L/M.

Замечания. а) Из определения видно, что аддитивная группа L/M совпадает с факторгруппой аддитивной группы L по аддитивной группе M. В частности, подмногообразие $M \subset L$ является нулем в L/M.

б) Имеется каноническое отображение $f : L \to L/M : f(l) = l + M$. Оно сюръективно, а его слон - прообразы элементов - суть как раз подмногообразия, отвечающие этим элементам. Действительно, по лемме п. 2

$$f^{-1}\,(l_0 + M) = \{l \in L | l + M = l_0 + M\} = \{l \in L | l - l_0 \in M\} = l_0 + M.$$

Заметим, что в этой цепочке равенств $l_0 + M$ первый раз рассматривается как лемент множества L/M, а остальные - как подмножества в L.

Из п. 4 ясно, что f-линейное отображение, а лемма п. 2 показывает, что $\operatorname{Ker} f = M$, ибо $l_0 + M = M$ тогда и только тогда, когда $l_0 \in M$.

Следствие. Если L конечномерно, то $\dim L/M = \dim L$ - $- \dim M$.

Proof. □

Применить теорему п. $12, \S 3$ к построенному отображению $L \to L/M$.

Многие важкные задачи в математике приводят к ситуации, когда пространства $M \subset L$ бесконечномерны, а фактор-пространство L/M конечномерно. В этом случае пользоваться следствием п. 6 нельзя, и вычисление $\dim L/M$ обычно становится нетривиальной задачей. Число $\dim L/M$ вообще называется коразмерностью подпространства M в L и обозначается $\operatorname{codim} M$ или $\operatorname{codim}_L M$.

Поставим следующую задаqу: даны два отображения $f : L \to M$ II $g : L \to N$; когда существует такое отображение $h : M \to N$, что $g = hf$? На языке диаграмм: когда можно вложить диаграмму

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

в коммутативный треугольник

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ M \arrow[rr, "h"] & & N \end{tikzcd}$$

(ср. 13 о коммутативных диаграммах). Ответ для линейных отображений дается следующим результатом.

Предложение. Для существования h необходимо и достаточно, итобы $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g$; если это условие выполнено $\operatorname{Im} f = M$, то h единствен.

Proof. □

Если h существует, из $g = hf$ следует, что $g(l) = hf(l) = 0$, коль скоро $f(l) = 0$. Поэтому $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g$.

Наоборот, пусть $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g$. Построим сначала h на подпространстве $\operatorname{Im} f \subset M$. Единственная возможность состоит в том, чтобы положить $h(m) = g(l)$, если $m = f(l)$. Нужно проверить, что h определено однозначно и линейно на $\operatorname{Im} f$. Первое следует из того, что если $m = f(l_1) = f(l_2)$, то $l_1 - l_2 \in \operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g$, откуда $g(l_1) = g(l_2)$. Второе следует автоматически из линейности f и g.

Теперь достаточно продолжить отображение h с подпространства $\operatorname{Im} f \subset M$ на все пространство M, например, выбрав базис $\operatorname{Im} f$, дополнив его до базиса M и положив h равным нулю на дополняющих векторах, 9. Пусть $g : L \to M$-линейное отображение. Мы уже определили ядро и образ g; дополним это определение, положив

$$\text{кообраз } g: \ \operatorname{Coim} g = L/\operatorname{Ker} g,$$
$$\text{коядро } g: \ \operatorname{Coker} g = M/\operatorname{Im} g.$$

Имеется цепочка линейных отображений, «разбираюшая g на части»,

$$\operatorname{Ker} g \xrightarrow{\ell} L \xrightarrow{c} \operatorname{Coim} g \xrightarrow{h} \operatorname{Im} g \xrightarrow{j} M \xrightarrow{f} \operatorname{Coker} g$$

где все отображения, кроме h, - канонические вложения и факторизация, а h-единственное отображение, делающее коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "c"'] \arrow[dr, "g"] & \\ \operatorname{Coim} g \arrow[rr, "h"] & & \operatorname{Im} g \end{tikzcd}$$

Оно определено однозначно, потому что $\operatorname{Ker} c = \operatorname{Ker} g$, и является изоморфизмом, потому что обратное отображение тоже существует и определено однозначно.

Смысл объединения этих пространств в пары (с приставкой «ко» и без нее) объясняется в теорни двойственности (см. следующий параграф и упражнение 1 к нему).

Конечномерная альтернатива Фредгольма. Пусть $g : L \to \to M$ - линейное отображение. Число

$$\text{ind } g = \dim \ \text{Coker } g - \dim \ \text{Ker } g$$

называется индексом оператора g. Из предыдущего пункта следует, что если L и M конечномерны, то индекс g зависит только от LuM:

$$\text{ind } g = (\dim M - \dim \operatorname{Im} g) - (\dim L - \dim \operatorname{Im} g) = \dim M - \dim L.$$

В частности, если $\dim M = \dim L$, например, если g-линейный оператор на L, то ind $g = 0$ для любого g. Отсюда вытекает так называемая альтернатива Фредгольма:

либо уравнение $g(x) = y$ разрешимо для всех y, и тогда уравнение $g(x) = 0$ имеет лишь нулевые решения;

либо это уравнение разрешимо не для всех y, и тогда однородное уравнение $g(x) = 0$ имеет ненулевые решения.

Точнее, если ind $g = 0$, то размерность пространства решении однородного уравнения равна коразмерности пространства правых частей, при которых разрешимо неоднородное уравнение. 1. Пусть $M, N \subset L$. Доказать, что следующее отображение является пинейным изоморфизмом:

$$(M + N)/N \to M/M \cap N : m + n + N \mapsto m + M \cap N.$$

Пусть $L = M \oplus N$. Тогда каноническое отображение

$$M \to L/N : m \longmapsto m + N$$

является изоморфизмом.

3.7.7 Twinship

(по Кострикину Манину)

В §1 мы поставили в соответствие каждому линейному пространству L двойственное к нему пространство $L^* = \mathscr{L}(L, \mathscr{K})$, а в §3 показали, что если $\dim L < \infty$, то $\dim L^* = \dim L$, и построили канонический изоморфизм $\varepsilon_L : L \to L^{**}$. Здесь мы продолжим описанне двойственности, включив в рассмотрение линейные отображения, подпространства и фактор-пространства.

Теория двойственности получила свое название благодаря тому, что она выявляет ряд свойств «двусторонней симметрии» линейных пространств, довольно трудных для наглядного воображения, но совершенно фундаментальных. Достаточно сказать, что дуализм «волна - частица»в квантовой механике адекватно выражается именно на языке линейной двойственности бесконечномерных линейных пространств (точнее, соединения линейной и групповой двойственности в технике анализа Фурье).

Удобно следить за этой симметрией, несколько изменив обозначения, принятые в пар. 1 и 3.

Симметрия между L и L^*. Пусть $l \in L, f \in L^*$. Вместо $f(l)$ мы будем писать (f, l) (в знак аналогии со скалярным произведением - но векторов из разных пространств!). Таким образом, мы определили отображение $L^* X L \to \mathscr{K}$. Оно линейно по каждому из двух аргументов f, l при фиксированном втором:

$$(f_1 + f_2, l) = (f_1, l) + (f_2, l), (af_1, l) = a(f_1, l),$$
$$(f, l_1 + l_2) = (f, l_1) + (f, l_2), (f, al_1) = a(f, l_1).$$

Вообще, отображения $L \times M \to \mathscr{K}$ с таким свойством называются билинейными, а также спариваниями между пространствами L и M. Введенное выше спаривание между L и L^* называется каноническим (ср. обсуждение этого слова в пар. 3, п. 8).

Отображение $\varepsilon_L : L \to L^{**}$ из §3, п. 10, как видно из его определения, можно задать условием:

$$(\varepsilon_L(l), f) = (f, l),$$

где слева стонт символ спарнвания между L^{**} и L^*, а справамежду L и и L. Если $\dim L < \infty$, так что ε_L является изоморфизмом, и мы условимся отождествлять $L**$ и L посредством ε_L, эта формула приобретает симметричный вид $(l, f) = (f, l)$. Иными словами, мы можем также рассматривать L как пространство, двойственное кL^*. 3. Симметрия между двойственными базисами. Пуусть $\{e_1, \ldots \ldots, c_n\}$ - базис в $L, \{e^{\mathrm{t}}, \ldots, e^n\}$ - двойственный базис в L^*. Сопласно п. 9§3 он определяется формуламн

$$(e^i, e_k) = \delta_{tk} = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq k, \\ 1 \text{ при } i = k. \end{cases}$$

Симметрия $(e^i, e_k) = (e_k, e^i)$ в соглашениях предыдушего пункта означает, что базис (e_k) двойствен к базису (e^i), если L рассматривать как пространство линейных функционалов на L^*. Таким образом, (e^i) и (e_k) образуют двойственную пару базисов, и это отношение симметрично.

Представим вектор $l^* \in L^*$ в виде линейной комбинации $\sum_{i=1}^{n} b_i e^l$, а вектор $l \in L$ в виде $\sum_{i=1}^{n} a_j e_j$. Тогда

$$(l^*, l) = \sum_{i,j=1}^{n} a_j b_l (e^i, e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = (a_1, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} =$$
$$= \left(\vec{a}^t\right) \vec{b} = \left(\vec{b}^t\right)_{\vec{a}} = (b_1, \ldots, b_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (l, l^*),$$

где $\vec{a}, \vec{b}$-вектор-столбцы соответствующих коэффициентов. Эта формула совершенно аналогична формуле для скалярного произведения векторов в евклидовом пространстве, однако связывает в этой ситуации векторы из разных пространств.

Двойственное, или сопряженное отображение. Пусть $f : L \to \to M$ - линейное отображение линейных пространств. Мы покажем сейчас, что существует единственное линейное отображение $f^* : M^* \to L^*$, которое удовлетворяет условию

$$(f^*(m^*), l) = (m^*, f(l))$$

для любых векторов $m^* \in M^*, l \in L$.

а) Единственность f^*. Пусть f_1^*, f_2^* - два таких отображения. Тогда $(f_1^*(m^*), l) = (m^*, f(l)) = (f_2^*(m^*), l)$ для всех $m^* \in M^*, l \in L$, откуда следует, что $((f_1^* - f_2^*)(m^*), l) = 0$. Фиксируем m^* и будем менять l. Тогда элемент $(f_1^* - f_2^*)(m^*) \in L^*$ как линейный функционал на L принимает только нулевые значения и, значит, равен нулю. Поэтому $f_1^* = f_2^*$.

б) Существование f*. Фиксируем $m^* \in M$ и рассмотрим выражение $(m^*, f(l))$ как функцию на L. В силу линейности f и билинейности (,) эта функция линейна. Значит, она принадлежит L^*. Обозначим ее через $f^*(m^*)$. Равенства

$$f^*(m_1^* + m_2^*) = f^*(m_1^*) + f^*(m_2^*), \quad f^*(am^*) = af^*(m^*)$$

следуют из линейности $(m^*, f(l))$ по m^*. Значит. f^* - линейное отображение.

Пусть в L, M выбраны некоторые базисы, а в L^*, M^* - двойственные базисы. Пусть f в этих базисах представлено матрицей A Мы утверждаем, что f^* в двойственных базисах представлено транспонированной матрицей A^t. В самом деле, пусть B-матрица f^*. Согласно определениям и п. 3 имеем, обозначив вектор-столбць координат m^*, l через $\vec{a}, \vec{b}$,

$$(m^*, f(l)) = \vec{a}^t(\overrightarrow{Ab}),$$
$$(f^*(m^*), l) = (\overrightarrow{Ba})^t\vec{b} = \left(\vec{a}^t B^t\right)\vec{b}.$$

Из ассоциативности умножения матриц и единственности f^* следует, что $A = B^t$, т. е. $B = A^t$.

Основные свойства сопряженных отображений собраны в следующей теореме:

Теорема. а) $(f+g)^* = f^* + g^*$;

б) $(af)^* = af^*$; здесь f, $g : L \to M ua \in \mathscr{K}$;

в) $(fg)^* = g^*f^*$; здесь $L \xrightarrow{g} M \xrightarrow{f} N$;

г) $\mathrm{id}^* = \mathrm{id}, 0^* = 0$;

д) если канонически отождествить L^{**} с L u M^{**} с M, то $f^{**} : L^{**} \to M^{**}$ отождествляется с $f : L \to M$.

Proof. □

Если считать, что L и M конечномерны, то проще всего проверить все эти утверждения, представив f, g матрицами в двойственных базисах и воспользовавшись простыми свойствами операции транспонирования:

$$(aA + bB)^t = aA^t + bB^t, (AB)^t = B^tA^t, E^t = E, 0^t = 0, \left(A^t\right)^t = 0.$$

Инвариантную проверку мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Двойственность между подпространствами в L и в L^*. Пусть $M \subset L$ - некоторое линейное подпространство. Обозначим через $M^\perp \subset L^*$ и будем называть ортогональным дополнением κM множество функционалов, обращающихся в нуль на M. Ииыми словами,

$$m^* \in M^\perp \Leftrightarrow (m^*, m) = 0 \text{ для всех } n \in M.$$

Легко видеть, что $M\ \perp$ является линейным пространством. В следующих утверждениях собраны основные свойства этой конструкции (L предполагается конечномерным).

а) Имеется канонический изоморфизм $L^*/M^\perp \to M^*$. Строится он так: многообразию $l^* + M^\perp$ ставится в соответствие ограничение функционала l^* на M. От выбора l^* оно не зависит, ибо ограничения функционалов из $M^\perp$ на M нулевые. Линейность этого отображения очевидна. Оно сюръективно, ибо всякий линейный функционал на M продолжается до некоторого функционала на L.

В самом деле, пусть $\{e_1, \ldots, e_m\}$-базис в M, $\{e_1, \ldots, e_m,\ e_{m+1}, \ldots, e_n\}$-его продолжение до базиса L. Функционал { на M, заданный значениями $f(e_1), \ldots, f(e_n)$, продолжается на L, например, если положить $f(e_{n+1}) = \ldots = f(e_n) = 0$.

Наконец, построенное отображение $L^*/M^\perp \to M^*$ инъективно. В самом деле, у него нулевое ядро: если ограничение l^* на M равно нулю, то $l^* \in M^\perp$ и $l^*+M^\perp = M^\perp$ - нулевой элемент из $L^*/M^\perp$.

б) $\dim M + \dim M^\perp = \dim L$. Действительно, это следует из предыдущего утверждения, следствия п. 6§6 и того, что $\dim L^* = \dim L, \dim M^* = \dim M$.

в) При каноническом отождествлении L^{**} с L пространство $\left(M^\perp\right)^\perp$ совпадает с M.

Действительно, так как $(m^*, m) = 0$ для всех m^* и данного $m \in M$, ясно, что $M \subset \left(M^\perp\right)^\perp$. Но, кроме того, по предыдущему свойству, примененному дважды,

$$\dim \left(M^\perp\right)^\perp = \dim L - \dim M^\perp = \dim M.$$

Значит, $M = \left(M^\perp\right)^\perp$.

г) $(M_1+M_2)^\perp = M_1^\perp \cap M_2^\perp; \quad (M_1 \cap M_2)^\perp = M_1^\perp + M_{\frac{1}{2}}$.

Доказательство предоставляется читателю в качестве упражнений.

УПРАЖНЕНИЯ

Пусть с линейным отображением $g : L \to M$ конечномерных пространств связана цепочка отображений, построенных в п. 86. Построить канонические изоморфизмы

Ker $g^* \to$ Coker g, Coim $g^* \to \operatorname{Im} g, \operatorname{Im} g^* \to$ Coim g, Coker $g^* \to$ Ker g.

Вывести отсюда «третью теорему Фредгольма»: для того чтобы уравнение $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = y$ было разрешимо (по $\boldsymbol{x}$ при данном y), необходимо и достаточно, чтобы y был ортогонален к ядру сопряженного отображепия $g^* : M^* \to L^*$.

Последовательность линейных пространств и отображений $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ называется точной в члене M, если $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$. Проверить следующие утверждения:

а) Последовательность $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M$ точна в члене L тогда и только тогда, когда f - инъекция.

б) Последовательность $M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ точна в члене N тогда и только тогда, когда g - сюръекция.

в) Последовательность конечномерных пространств

$$0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g}$$

$\xrightarrow{8} N \longrightarrow 0$

точна (во всех членах) тогда и только тогда, когда точна двой ственная последовательность $0 \longrightarrow N^* \xrightarrow{g^*} M^* \xrightarrow{f^*} L^* \longrightarrow 0$.

Мы знаем, что если отображение $f : L \to M$ в некоторых базисах представлено матрицей A, то отображение f^* в двойсгвенных базисах представлено матрнцей A^t. Вывесги отсіода, что ранг матрицы совпадает с рангом транспонированной матрицы, т.е. что максимальные числа линейно независимых строк и столбцов матрицы совпадают.

3.7.8 Linear Mapping Structure

(по Кострикину Манину)

В этом параграфе мы начнем изучать следующую задачу: возможно яснее геометрически представить себе устройство линейного отображения $f : L \to M$. Ответ совсем прост, когда L и M никак не связаны друг с другом: он дается теоремой из п. 2 этого параграфа. Гораздо интереснее и многообразнее получается картина, когда $M = L$ (этот и следующий параграфы) и $M = L^*$ (следующая часть). На матричном языке речь идет о приведении матрицы f к возможно более простой форме с помощью подходящего, специально приспособленного к структуре f, базиса. В первом случае базисы в L и M можно выбирать независимо, во втором речь идет об одном базисе в L или о базисе в L и двойственном к нему базисе L^*: меньшая свобода выбора приводит к большему разнообразию ответов.

На языке пар. 5 нашу задачу можно переформулировать следующим образом. Построим внешнюю прямую сумму пространств $L \oplus M$ и поставим в соответствне отображению f его график Γ_f: множество всех векторов вида $(l, f(l)) \Leftarrow L \oplus M$. Легко убедиться, что Γ_f есть линейное подпространство в $L \oplus M$. Нас интересуют инварианты расположения Γ_f в $L \oplus M$. Для случая, когда базисы в L и M можно выбирать независимо, ответ дается следующей теоремой.

Теорема. Пусть $f : L \to M$ - линейное отображение комечномерных пространств. Справедливы следующие утверждения:

а) Существуют такие прямые разложения $L = L_0 \oplus L_1, \quad M = M_1 \oplus M_2$, ито $\operatorname{Ker} f = L_0$ uf индуцирует изоморфизм L_1 с M_1.

б) Существуют такие базисы в L и M, что матрица f в этих базисах имеет вид (a_{ij}), где $a_{ii} = 1$ для $1 \leqslant i \leqslant r u a_{ij} = 0$ для остальных i, j.

в) Пусть А-некоторая матрица размера $m \times n$. Тогда существуют такие невырожденные квадратные матрицы B и C размеров $m \times m u n \times n$ и такое число $r \leqslant \min(m, n)$, что матрица ВАС имеет вид, описанный в предыдущем пункте. Число г определено однозначно и равно рангу A.

Доказ ательство. а) Положим $L_0 = \operatorname{Ker} f$, а в качестве L_1 выберем прямое дополнение к L_0: это возможно в силу п. 105. Затем положим $M_1 = \operatorname{Im} f$, а в качестве M_2 выберем прямое дополнение к M_1. Нужно лишь проверить, что f определяет изоморфизм L_1 с M_1. Отображение $f : L_1 \to M_1$ инъективно, потому что ядро f, т. е. L_0, пересекается с L_1 лишь по нулю. Оно сюръективно, потому что если $l = l_0 + l_1 \in L, l_0 \in L_0, l_1 \in L_1$, то $f(l) = f(l_1)$.

б) Положим $r = \dim L_1 = \dim M_1$ и выберем в L базис $\{e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n\}$, где первые r векторов образуют базис L_1, а следующие - базис L_0. Далее, векторы $e_i' = f(e_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant r$, образуют базис в $M_1 = \operatorname{Im} f$. Дополним его до базиса M векторами $\left\{e_{r+1}', \ldots, e_m'\right\}$. Очевидно,

$$f(e_1, \ldots, e_r; e_{r+1}, \ldots, e_n) = (e_1', \ldots, e_r'; 0, \ldots, 0) =$$
$$= \left(e_1', \ldots, e_r'; e_{r+1}', \ldots, e_m'\right)\left(\frac{E_r}{0} | \frac{0}{0}\right).$$

так что матрица f в этих базисах имеет требуемый вид. в) Построим по матрице A линейное отображение f координатных пространств $\mathscr{K}^n \to \mathscr{K}^m$ с этой матрицей, затем применим к нему утверждение б) В новых базисах матрица f будет иметь требуемый вид и выражаться через A в виде BAC, где B, C-матрнцы перехода: см. п. 8§4. Наконец, rk $A = \operatorname{rk} BAC = \operatorname{rk} f = \dim \operatorname{Im} f$. Это завершает доказательство.

Теперь перейдем к изучению линейных операторов. Начнем с введения простейшего класса: диагонализируемьх операторов.

Назовем в общем случае подпространство $L_0 \subseteq L$ инвариантным относительно оператора $\{$, если $f(L_0) \subset L_0$.

Определение.

Линейный оператор $f : L \to L$ называется диагонализируемым, если выполнено любое из двух равносильных условий:

а) L разлагается в прямую сумму одномерных инвариантных подпространств;

б) существует базис L, в котором матрица оператора f диагональна.

Равносильность этих условий проверяется без труда. Если в базисе (e_i) матрица оператора { диагональна, то $f(e_i) = \lambda_i e_i$, так что одномерные подпространства, натянутые на e_i, инвариантны и L разлагается в их прямую сумму. Наоборот, если $L = \bigoplus L_i$ - такое разложение и e_i - любой ненулевой вектор из L_i, то $\{e_i\}$ образуют базис в L.

Диагонализируемые операторы образуют простейший и во многих отношениях самый важный класс. Например, над полем комплексных чисел, как мы убедимся, любой оператор можно делать диагональным, как угодно мало изменив его матрицу, так что оператор «в общем положении» диагонализируем.

Чтобы понять, что может помешать

оператору быть диагонализируемым, введем два определения и докажем одну теорему.

Определение.

1) Одномерное подпространство $L_1 \subset L$ называется собственным для оператора f, если оно инвариантно, т. . $f(L_1) \subset L_1$. Если L_1 - такое подпространство, то f действует на нем как умножение на скаляр $\lambda \in \mathscr{K}$. Этот скаляр называется собственным значением оператора f (

б) Вектор $l \in L$ называется собственным для |, если линейная оболочка $\mathscr{K}$ является собственным подпространством. Нными словами, $l \neq 0$ u $f(l) = \lambda l$ для подходлщего $\lambda \in \mathscr{K}$.

Согласно определению п. 3, диагонализируемые операторы f допускают разложение L в прямую сумму свонх собственных подпространств. Выясним, когда у f имеется хотя бы одно собственное подпространство.

5. Определение. Пусть L - конечномерное линейное пространство, $f : L \to L$ - линейный оператор, A—-его матрища в каком-нибудь базисе. Обозначим через $P(t)$ и назовем характеристическим многочленом оператора $\updownarrow$, а такюе матрицы A, многочлен $\det(tE - A)$ с коэффициентами в поле $\mathscr{K}$(det-определитель). 6. Теорема. а) Характеристический многочлен линейного опсратора | не зависит от выбора базиса, в которол представлена его матрища.

б) Любое собственное значение оператора являетсл корнем $P(t)$ и любой кореав $P(t)$, лежащий в $\mathscr{K}$, является собственным значением для f, отвечающим некоторому (не обязательно единственному) собственному подпространству в L.

Proof. □

а) Согласно п. 8 § матрица оператора f в другом базисе имеет вид $B^{-1}AB$. Поэтсму, пользуясь мультнпликативностью определителя, находим

$$\begin{gathered}
\det\left(tE - B^{-1}AB\right) = \det\left(B^{-1}(tE - A)B\right) = \\
= (\det B)^{-1}\det(tE - A)\det B = \det(tE - A).
\end{gathered}$$

Заметим, что $P(t) = i^n - \operatorname{Tr} f \cdot t^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det f$ (обозначения из п. 94).

б) Пусть $\lambda \in \mathscr{K}$ - копень $P(t)$. Тогда отображение $\lambda \cdot \mathrm{id} - f$ представлено вырожденнсй матрицй и, значит, имеет нетривиальное ядро. Пусть $l \neq 0$ - элемент из ядра; тогда $f(l) = \lambda l$, так что λ есть собственное значение для f, а l-соответствующй собственный вектор. Наоборот, если $f(l) = \lambda l$, то l лежит в ядре $\lambda \cdot \mathrm{id} - f$, так что $\det(\lambda \cdot \mathrm{id} - f) = P(\lambda) = 0$.

Теперь мы видим, что оператор f воосще не имеет собственных значений и тем более не диагонализируем, если его характеристический многочлен $P(t)$ не имеет корней в поле $\mathscr{K}$. Это вполне может случиться над алгебраически не замкнутыми полями такими, как $\mathbf{R}$ и конечные поля. Например, пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$-матрица с вещественными элсментамп. Тогда

$$\det(tE - A) = t^2 - (a+d)t + (ad - bc),$$

и если $(a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a-d)^2 + 4bc < 0$, то A недиагонализируема.

Таким образом, мы впервые столкнулись здесь со случаем, когда свойства линейных отображений существенно зависят от свойств поля.

Чтобы не принимать последние во внимание как можно дольше, в следующем параграфе до п. 9 мы будем предполагать, что поле $\mathscr{K}$ является алгебраически замкнутым. Читатель, не знакомый с другими алгебраически замкнутыми полями, кроме **C**, можег всюду считать, что $\mathscr{K}$ = C. Алгебраическая замкнутость $\mathscr{K}$ равносильна любому из двух условий: а) любой многочлен от одной переменной $P(t)$ с коэффициентами в $\mathscr{K}$ имеет корень $\lambda \in \mathscr{K}; \sigma)$ любой такой многочлен $P(t)$ может быть предотавлен в виде $a\prod_{i=1}^{n}(t\text{ - }-\lambda_i)^r$, где $a, \lambda_i \in \mathscr{K}; \lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$; это представление однозначно, если $P(t) \not\equiv 0$. В этом случае число r_i называется кратностью корня λ_i многочлена $P(t)$. Множество всех корней характе- ристического многочлена называется спектром оператора f. Если все кратности равны I, говорят, что f имеет простой спектр.

Если поле $\mathscr{K}$ алгебраически замкнуто, то согласно теореме п. 6 любой линейный оператор $f : L \to L$ имеет собственное подпространство. Однако он все равно может оказаться недиагонализируемым, ибо сумма всех собственных подпространств может оказаться меньше L, тогда как у диагонализируемого оператора она всегда равна L. Прежде чем переходить к обшему случаю, разберемся с комплексными 2 X2-матрицами.

Пример. Пусть L - двумерное комплексное пространство с базисом, оператор $f : L \to L$ представлен в этом базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Характеристический многочлен для f равен $t^2 - (a+d)t + +(ad-bc)$, его корни суть $\lambda_{1,2} = -\frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a-d)^2}{4} + bc}$. Рассмотрим отдельно следующие случаи:

а) $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Пусть e_1 - собственный вектор для λ_1, e_2 - для λ_2. Они линейно независимы, потому что если $ae_1 + be_2 = 0$, то

$$f(ae_1 + be_2) = a\lambda_1 e_1 + b\lambda_2 e_2 = 0,$$

откуда $\lambda_1(ae_1 + be_2) - (a\lambda_1 e_1 + b\lambda_2 e_2) = b(\lambda_1 - \lambda_2)e_2 = 0$, т. е. $b = 0$ и аналогично $a = 0$. Следовательно, в базисе $\{e_1, e_2\}$ матрица f диагональна.

б) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Здесь оператор f диагонализируем, только если он умножает на λ все векторы из L: это значит, что $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, т. е. $a = d = \lambda, b = c = 0$. Если же эти условия не выполнены, а выполнено только более слабое условие $(a-d)^2 + 4bc = 0$, гарантирующее, что $\lambda_1 = \lambda_2$, то у оператора f может быть, с точностью до пропорциональности, только один собственный вектор и f заведомо не диагонализируем.

Пример такой матрицы: $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Эта матрица называется жордановой клеткой размера 2×2 (или ранга 2).

В §9 мы покажем, что именно такие матрицы образуют «строительные блоки» для нормальной формы общего линейного оператора над алгебраически замкнутым полем. Дадим общее определение:

Определение.

а) Жардановой клеткой $J_r(\lambda)$ размера $r \times r$ с собственным значением λ называетсл матрица вида

$$J_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix}.$$

б) Жордановой матрицей называется матрица, состоящая из диагональных блоков $J_{r_l}(\lambda_l)$ и нулей вне этих блоков:

$$J=\left(\begin{array}{c|c|c}\frac{J_{r_1}(\lambda_1)}{0} & j_{r_2}(\lambda_2) & \frac{0}{\ldots}\\ \hline \ldots & \ldots & \ldots\end{array}\right).$$

в) Жордановым базисом для оператора f: $L \rightarrow L$ называется такой базис пространства L, в котором матрища оператора f является жордановой, или, как говорят, имеет жорданову нормальную форму.

г) Приведением квадратной матрищь A жжордановой нормальной форме называется рещение уравнения в матрицах вида $X^{-1}AX=J$, где $X-($ неизвестнал) невырожденнал матрица, а J - (неизвестная) жорданова матрища.

Пример. Пусть $L_n(\lambda)$ - линейное пространство комплексных функций вида $e^{\lambda x}f(x)$, где $\lambda \in C, f(x)$ пробегает многочлены степени $\leqslant n-1$. Поскольку $\frac{d}{dx}\left(e^{\lambda x f}(x)\right)=e^{\lambda x}\left(\lambda f(x)+f^{\prime}(x)\right)$, дифференцирование $\frac{d}{dx}$ является линейным оператором на этом пространстве. Положим $e_{i+1}=\frac{x^3}{i!}e^{\lambda x}$ (напомним, что $0!=1), i=0, \ldots \ldots, n-1$. Очевидно,

$$\frac{d}{dx}\left(e_{i+1}\right)=\frac{x^{l-1}}{(i-1)!}e^{\lambda x}+\lambda \frac{x^i}{i!}e^{\lambda x}=e_i+\lambda e_{l+1}$$

(первое слагаемое отсутствует прн $i=0$). Следовательно,

$$\frac{d}{dx}\left(e_1, \ldots, e_n\right)=\left(e_1, \ldots, e_n\right)\left(\begin{array}{ccccc}\lambda & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0\\ . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & \lambda\end{array}\right).$$

Таким образом, функции $\left(\frac{x^i}{i!}e^{\lambda x}\right)$ образуют жорданов базис для оператора $\frac{d}{dx}$ в нашем пространстве.

Этот пример показывает особую роль жордановых матриц в теории линейных дифференциальных уравнений (см. упражнения $1-3$ к пар. 9).

Кроме уже рассмотренных геометрических соображений для нужд следующего параграфа нам понадобятся алгебраические сведения о полиномиальных функциях от оператора. Пусть $f: L \rightarrow L$ - фиксированный оператор.

а) Для любого многочлена $\sum\limits_{i=0}^n a_t t^t=Q(t)$ с коэффициентами из поля $\mathscr{K}$ выражение $\sum\limits_{i=0}^n a_i f^l$ имеет смысл в кольце $\mathscr{L}(L, L)$ эндоморфизмов пространства L; мы будем обозначать его $Q(f)$.

б) Будем говорить, что многочлен $Q(t)$ аннулирует оператор f, если $Q(f)=0$. Ненулевые многочлены, аннулирующие f, существуют всегда, если L конечномерно. 3 самом деле, если $\operatorname{dim} L=n$, то $\operatorname{dim}\mathscr{L}(L, L)=n^2$ и операторы id, $f, \ldots, f^{n^2}$ линейно зависимы над $\mathscr{K}$. Это рассуждение показывает, что имеется аннулирующий f многочлен степени $\leqslant n^2$. На самом деле теорема Гамильтона Кэли, которую мы докажем ниже, устанавливает существование аннулирующего многочлена степени n. в) Рассмотрим многочлен $M(t)$ со старшим коэффициентом единица, аннулирующий $\{$ и имеющий наименьшую возможную степень. Он называется минимальным многочленом оператора f. Очевидно, он определен однозначно: если $M_1(t), M_2(t)$ - два таких многочлена, то $M_1(t)-M_2(t)$ аннулирует f и имеет строго меньшую степень, так что $M_1(t)-M_2(t)=0$.

г) Покажем, что любой многочлен, аннулирующий f, делится на минимальный многочлен f. Действительно, пусть $Q(f)=0$. Разделим Q с остатком на $M: Q(t)=X(t)M(t)+R(t), \operatorname{deg} R(t)<<\operatorname{deg} M(t)$. Тогда $R(f)=Q(f)-X(f)M(f)=0$, так что $R=0$.

Теорема

Гамильтона - Кэли. Характеристический многоилен $P(t)$ оператора f аннулирует этот оператор.

Proof. □

Мы будем пользоваться этой теоремой и докажем ее только для случая алгебраически замкнутого поля $\mathscr{K}$, хотя она верна и без этого ограничения.

Проведем индукцию по $\dim L$. Если L одномерно, то f есть умножение на скаляр $\lambda, P(t)=t-\lambda$ и $P(f)=0$.

Пусть $\dim L=n \geqslant 2$ и теорема доказана для просяранств размерности $n-1$. Выберем собственное значение λ оператора f и одномерное собственное подпространство $L_1 \subset L$, отвечающее λ. Пусть $\{e_1\}$-базис L_1; дополним его до базиса $\{e_1,\ldots,e_n\}$ пространства L. Матрица оператора f в этом базисе имеет вид

$$\left(\frac{\lambda * \ldots *}{\overline{0}} | \frac{\ldots}{A}\right)$$

Поэтому $P(t)=(t-\lambda)\det(tE-A)$. Оператор f определяет линейное отображение $\bar{f}: L/L_1 \rightarrow L/L_1, \bar{f}(l+L_1)=f(l)+L_1$. Векторы $\vec{e_i}=e_i+L_1 \in L/L_1, i \geqslant 2$, образуют базис L/L_1, и матрица оператора $\bar{f}$ в этом базисе равна A. Поэтому $\bar{P}(t)=\det(tE-A)$ есть характеристический многочлен оператора $\bar{f}$, и по индуктивному предположению $\bar{P}(\bar{f})=0$. Значит, $\bar{P}(f)l \in L_1$ для любого вектора $l \in L$. Следовательно,

$$P(f)l=(f-\lambda)\bar{P}(f)l=0,$$

ибо $f-\lambda$ переводит в нуль любой вектор из L_1. Это завершает доказательство.

Примеры. а) Пусть $f=\mathrm{id}_L, \dim L=n$. Тогда характеристический многочлен f равен $(t-1)^n$, а минимальный многочлен равен $t-1$, так что они не совпадают при $n>1$.

б) Пусть f представлен жордановой клеткой $J_r(\lambda)$. Характеристический многочлен оператора f равен $(t-\lambda)^r$. Чтобы вычислить минимальный многочлен, заметим, что $J_r(\lambda)=\lambda E_r+J_r(0)$.

Далее,

$$J_k(0)^k=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

где единицы стоят на κ-й диагонали выше главной; $J_r(0)^k=0$ при $\kappa \geqslant r$. С другой стороны,

$$(J_r(\lambda)-\lambda E_r)^k=J_r(0)^k$$

при $0 \leqslant k \leqslant r-1$, а поскольку минимальный многочлен - делитель характеристического, это доказывает, что они совпадают.

УПРАЖН Ения

Пусть $f: L \rightarrow L$ - диагонализируемый оператор с простым спектром.

а) Доказать, что любой оператор $g: L \rightarrow L$ такой, что $gf=fg$, может быть представлен в виде многочлена от f.

б) Доказать, что размерность пространства таких операторов g равна $\dim L$.

Верны ли эти утверждения, если спектр оператора f не прост?

Пусть $f, g : L \to L$ - линейные операторы в пространстве размерности n над полем нулевой характеристики. Предположим, что $f^n = 0, \dim \operatorname{Ker} f = 1, gf - fg = f$. Доказать, что собственные значения g имеют вид $a, a-1, a-2, \ldots \ldots, a-(n-1)$ для некоторого $a \in \mathscr{K}^\circ$.

3.7.9 Jordanian Normal Form

(по Кострикину Манину)

Основная цель этого параграфа-доказательство следующей теоремы о существовании и единственности жордановой нормальной формы для матриц и линейных операторов.

Теорема. Пусть $\mathscr{H}$ - алгебраичвски замкнутое поле, $L - \kappa o$ - нечномерное линейное пространство над $\mathscr{K}$, $f : L \to L$ - минеймый оператор. Тогда:

а) Для оператора f существует жорданов базис, т. е. его матрица A в некотором базисе может быть приведена заменой базиса $X \kappa$ жордановой форие: $X^{-1} A X = J$.

б) Матрица J определена однозначно с точностью до перестановки входящих в нее жордановых клеток.

Доказательство теоремы разбивается на ряд промежуточных шагов. Мы начнем с конструкции прямого разложения $L = \bigoplus_{i=1}^n L_i$, где L_i - инвариантные подпрострасства для f, которые впоследствии будут отвечать набору жордановых клеток для f с одним u тем же числом λ на диагонали. Чтобы инвариантно охарактеризовать эти подпространства, вспомним, что $(J_r(\lambda) - \lambda E_r)^n = 0$. Оператор, некоторая степень которого равна нулю, принято называть нильпотентнып. Итак, на подпространстве, отвечающем клетке $J_r(\lambda)$, оператор $f - \lambda$ нильпотентен; то же верно для его ограничения на сумму подпространств с фиксированным λ. Это мотивирует следующее определение.

Определение.

Вектор $l \in L$ называется корневым вектором оператора f, отвечающим $\lambda \in \mathscr{K}$, если существует такое r, что $(f - \lambda)^r l = 0$ (здесь $f - \lambda$ обозначает оператор $f - \lambda \mathrm{id}$).

Очевидно, все собственные векторы корневые.

Предложение. Обозначим через $L(\lambda)$ множество корневых векторов оператора f в L, отвечаючих λ. Тогда $L(\lambda)$-линейное подпространство в L u $L(\lambda) \neq \{0\}$ тогда и только тогда, когда λ - собственное значение для f. Доказ ательство. Допустим, $(f-\lambda)^r l_1 = (f-\lambda)^r l_2 = 0$. Полагая $\dot{r} = \max(r_1, r_2)$, находим $(f-\lambda)^r (l_1 + l_2) = 0$ и $(f-\lambda)^{r_1} (a l_1) = 0$. Следовательно, $L(\lambda)$ является линейным подпространством.

Если λ-собственное значение для f, то имеется собственный вектор, отвечающий λ, так что $L(\lambda) \neq \{0\}$. Наоборот, пусть $l \in L(\lambda), l \neq 0$. Выберем наименьшее значение r, для которого $(f-\lambda)^r l = 0$. Очевидно, $r \geqslant 1$. Вектор $l' = (f-\lambda)^{r-1} l$ является собственным для f с собственным значением $\lambda : l' \neq 0$ по выбору r и $(f-\lambda) l' = 0$, откуда $f(l') = \lambda l'$.

Предложение. $L = \bigoplus \cdot L(\lambda_i)$, где λ_i пробегает все собственные значения оператора f, т. е. различные корни характеристического многочлена f.

Дока зательство. Пусть $P(t) \doteq \prod_{i=1}^s (t - \lambda_t)^{r_t}$-характеристический многочлен $f, \lambda_i \neq \lambda_J$ при $i \neq j$. Положим $F_i(t) = P(t) (t - \lambda_i)^{-r_l}$, $f_i = F_i(f)$, $L_i = \operatorname{Im} f_i$. Проверим следующую серню утверждений.

а) $(f-\lambda_i)^{r_i} L_l = \{0\}$, т. е. $L_i \subset L(\lambda_i)$. Действительно, $(f-\lambda_l)^{r_i} f_i = (f-\lambda_i)^{r_i} F_i(f) = P(f) = 0$ по теореме Гамильтона - Кэли.

б) $L = L_1 + \ldots + L_s$. Действительно, так как многочлены $F_i(t)$ в совокупности взаимно простые, существуют такие многочлены $X_i(t)$, что $\sum\limits_{i=1}^{s} F_l(t) X_i(t) = 1$. Поэтому, гоодставляя вместо t оператор f, имеем

$$\sum_{i=1}^{s} F_i(f) X_i(f) = \mathrm{id}$$

Применяя это тождество к любому вектору $l \in L$, находим

$$l = \sum_{i=1}^{s} f_l\left(X_i(f) l\right) \in \sum_{i=1}^{s} L_i.$$

в) $L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_s$. Действительно, выберем $1 \leqslant i \leqslant s$ и проверим, что $L_l \cap \left(\sum\limits_{i \neq i} L_i\right) = \{0\}$. Пусть l - вектор из этого пересечения. Тогда

$$(f-\lambda_l)^r l = 0, \text{ ибо } l \in L_i;$$
$$F_l(f) l = \prod_{i \neq i} (f-\lambda_l)^r ll = 0, \text{ ибо } l \in \sum_{j \neq i} L_j.$$

Так как $(t-\lambda_i)^{r_i}$ и $F_i(t)$ - взаимно простые многочлены, существуют такие многочлены $X(t)$ и $Y(t)$, что $X(t)(t-\lambda_i)^{r_i} + Y(t) \times XF_i(t) = 1$. Подставляя сюда f вместо t и применяя полученное операторное тождество к l, находим $X(f)(0) + Y(j)(0) = l = 0$.

г) $L_i = L(\lambda_i)$. В самом деле, мы уже проверили, что $L_i \subset L(\lambda_i)$. Для доказательства обратного включения выберем вектор $l \in \in L(\lambda_i)$ и прелставим его в виде $l = l' + l'', l' \in L_i, \quad l'' \in \bigoplus_{j \neq i} L_i$. Существует такое число r', что $(j-\lambda_i)' l'' = 0$, поскольку $l'' = l$ - $-l' \in L(\lambda_i)$. Кроме того, $F_i(f) l'' = 0$. Написав тождество $X(t)(t-\lambda_i)^{r'} + Y(t) F_i(t) = 1$, подставив в него f вместо t и применив к l'', получим $l'' = 0$, так что $l = l' \in L_i$.

Следствие. Если оператор f имеет простой спектр, то он диагонализируем.

Proof. □

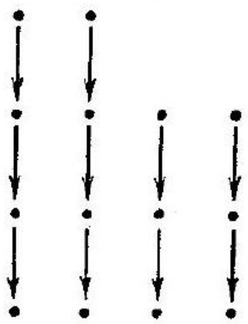
В самом деле, число разных собственных значений f тогда равно $n = \deg P(t) = \dim L$. Поэтому в разложении $L = \bigoplus_{i=1}^{n} L(\lambda_i)$ все пространства $L(\lambda_i)$ одномерны, а так как каждое из них содержит собственный векттор, в базисе из этих векторов матрица оператора f становится диагональной.

Теперь мы фиксируем одно собственное значение λ и докажем, что ограничение f на $L(\lambda)$ обладает жордановым базисом, отвечающим этому λ. Чтобы не вводить новых обозначений, мы будем до конца п. 7 сиитать, ито f имеет единственное собственное значение $\lambda u L = L(\lambda)$. Более того, мы можем считать даже, что $\lambda = 0$, потому что любой жорданов базис для оператора f является одновременно жордановым базисом для оператора $f + \mu$, где μ-любая константа. Тогда оператор f нильпотентен по теореме Гамильтона - Кэли: $P(t) = t^n, f^n = 0$, и мы докажем следующий факт:

Предложение. Нильпотентный оператор f на конечномерном пространстве L имеет жорданов базис; матрица оператора f в этом базисе является объединением клеток вида $J_r(0)$.

Proof. □

Если у нас уже есть жорданов базис в пространстве L, удобно поставить ему в соответствие диаграмму



D, подобную изображенной здесь. В этой диаграмме точки изображают элементы базиса, а стрелки описывают действие f (в общем случае действие $f-\lambda$). Элементы нижней строки оператор f перводит в нуль, т. е. в ней стоят собственные векторы оператора f, входящие в базис. Каждый столбец, таким образом, изображает базис инвариантного подпространства, отвечающего одной жордановой клетке, размер которой равен высоте этого столбца (числу точек в нем): если

$$f\left(e_h\right)=e_{h-1}, f\left(e_{h-1}\right)=e_{h-2}, \ldots, f\left(e_1\right)=0,$$

$$f\left(e_1, \ldots, e_h\right)=\left(e_1, \ldots, e_h\right)\left(\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right).$$

Наоборот, если мы найдем в L базис, элементы которого f переводит в другие его элементы или в нуль так, что элементы этого базиса вместе с действием f можно изобразить подобной диаграммой, то он будет жордановым базисом для L.

Проведем доказательство существования индукцией по размерности L. Если $\dim L=1$, то нильпотентный оператор f является нулевым, и любой ненулевой вектор в I. образует его жорданов базис. Пусть теперь $\dim L=n>1$, и пусть для размерностей, меньших n, существование жорданова бысса уже доказапо. Обозначим через $L_0 \subset L$ подпространство собственных векторов для f, т. е. Ker f. Так как $\dim L_0>0$, имеем $\operatorname{din} L/L_0<n$, а оператор $f: L \rightarrow L$ индуцирует оператор $\bar{f}: L/L_0 \rightarrow L/L_0: \bar{f}\left(l+L_0\right)=f(l)+L_0$. (Корректность определения оператора $\bar{f}$ и его линейность проверяются немедленно.)

По индуктивному предположенню $\bar{f}$ имеет жорданов базнс. Мы можем считать его непустым: иначе $L=L_0$, и любой базлс L_0 будет жордановым для $\bar{f}$. Постронм диаграмму $\bar{D}$ для лементов жорданова базиса оператора 7, в каждом ее столбце возьмем самый верхнй вектор $\bar{e}_i, i=1, \ldots, m$, и положим $\bar{\mathfrak{e}}_i=e_i+L_0$, $\boldsymbol{e}_i \in L$. Теперь постронм диаграмму D из векторов пространства L следующим образом. Для $i=1, \ldots, m$ столбец с номером i диаграммы D будет состоять (сверху вниз) из векторов $e_i, f\left(e_i\right), \ldots \ldots, f^{h_i-1}\left(e_i\right), f^{h_i}\left(e_t\right)$, где $\cdot h_i$ - высота i-го столбца в диаграмме $\bar{D}$. Так как $\tilde{f}^{h_i}\left(\bar{e}_i\right)=0$, то $f^{h_i}\left(e_i\right) \in L_0$ и $f^{h_i+1}\left(e_i\right)=0$. Выберем базис линейной оболочки векторов $f^{h_1}\left(e_1\right), \ldots, f^{h_m}\left(e_m\right)$ в L_0, дополним его до базиса L_0 и поставим дополняющие векторы в качестве дополнительных столбцов (высоты единица) в нижней строке диаграммы D; f переводит их в нуль.

Таким образом, диаграмма D из векторов пространства L вместе с действием оператора f на ее элементы имеет в точности такой вид, как требуется для жорданова базнса. Нужно только проверить, что элементы D действительно образуют базис L.

Сначала покажем, что линейная оболочка векторов из D равна L. Пусть $l \in L, l=$ $l+L_0$. По предположению $\bar{l}=\sum\limits_{i=1} \sum\limits_{j=0}^{l} a_{ij} \bar{f}'\left(\bar{e}_i\right)$. Так как $L_0 f$-инвариантно, отсюда следует, что

$$l-\sum_{i=1}^m \sum_{i=0}^{h_t-1} \bar{a}_{ij} f^l\left(e_i\right) \in L_0$$

Но все векторы $f'(e_i), j \leqslant h_i - 1$, лежат в строках диаграммы D, начиная со второй снизу, а подпространство L_0 порождено элемен- тами первой строки D по построению. Поэтому l можно представить в виде линейной комбинации элементов D.

Остается проверить линейную независимость элементов D. Прежде всего, элементы нижней строки D линейно независимы. Действительно, если некоторая их нетривиальная линейная комбинация равна нулю, то она должна иметь вид $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i f^{h_i}(e_i) = 0$, ибо остальные элементы нижней строки дополняют базис линейной оболочки $\left\{f^{h_1}(e_1), \ldots, f^{h_m}(e_m)\right\}$ до базиса L_0. Но все $h_i \geqslant 1$, поэтому

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} a_i f^{h_i-1}(e_i)\right) = 0,$$

так что

$$\sum_{i=1}^{m} a_i f^{h_i-1}(e_i) \in L_0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{m} a_i \tilde{f}^{h_l-1}(\bar{e}_i) = 0.$$

Из последнего же соотношения следует, что все $a_i = 0$, потому что векторы $\bar{f}^{h_t-1}(\bar{e}_i)$ составляют нижнюю строку диаграммы $\bar{D}$ и являются частью базиса L/L_0.

Наконец, покажем, что если имеется любая нетривиальная линейная комjбинация векторов D, равная нулю, то из нее можно получить нетривиальную линейную зависимость между векторами нижней строки D. В самом деле, отметим самую верхнюю строку $\dot{D}$, в которой имеются ненулевые коэффициенты этой воображаемой линейной комбинации. Пусть номер этой строки (считая снизу) равен h. Применим к этой комбинации оператор f^{h-1}. Очевидно, ее часть, отвечающая h-й строке, перейдет в нетривиальную линейную комбинацию элементов нижней строки, а остальные слагаемые обратятся в нуль. Это завершает доказательство предложения.

Теперь нам осталось проверить часть теоремы из п. 1, относящуюся к единственности.

Пусть фиксирован произвольный жорданов базис оператора f. Любой.диагональный элемент матрицы оператора f в этом базисе, очевидно, является одним из собственных значений λ этого оператора. Рассмотрим часть базиса, отвечающего всем блокам матрицы с этим значением λ, и обозначим через L_λ его линейную оболочку. Поскольку $(J_r(\lambda) - \lambda)^r = 0$, имеем $L_\lambda \subset L(\lambda)$, где $L(\lambda)$ - корневое подпространство L. Кроме того, $L = \bigoplus L_{\lambda_i}$ по определению жорданова базиса и $L = \bigoplus L(\lambda_i)$ по предложению п. 5, где в обоих случаях λ_i пробегает все собственные значения оператора f по одному разу. Следовательно, $\dim L_{\lambda_i} = \dim L(\lambda_i)$ и $L_{\lambda_i} = L(\lambda_i)$. Значит, сумма размеров жордановых клеток, отвечающих каждому λ_i, не зависит от выбора жорданова базиса, и, более того, от выбора базиса не зависят линейные оболочкн L_{λ_i}. ГІоэтому достаточно проверить теорему единственности для случая $L = L(\lambda)$. или даже для $L = L(0)$. Построим диаграмму D, отвечающую данному жорданову базису $L = L(0)$. Размеры жордановых клеток - это высоты ее столбцов; если, как на чертеже, расположить столбцы в порядке убывания, то эти высоты однозначно определятся, если известны длины строк в диаграмме, начиная с нижней, в порядке убывания. Покажем, что длина нижней строки равна размерности $L_0 = \operatorname{Ker} f$. Действительно, возьмем. любой собственный вектор l для f и представим его в виде линейной комбинации элементов D. В эту линейную комбинацию все векторы, находящиеся выше нижней строки, войдут с нулевыми коэффициентами. Действительно, если бы самые высокие векторы с ненулевыми коэффициентами лежали в строке с номером $h \geqslant 2$, то вектор $f^{h-1}(l) = 0$ был бы нетривиальной линейной комбинацией элементов нижней строки D (ср. конец доказательства предложения П. 7), а это противоречит линейной независимости элементов D. Значит, нижняя строка D образует базис L_0, так что ее длина равна $\dim L_0$, и потому эта длина одинакова для всех жордановых базисов. Точно так же длина второй строки не зависит от выбора базиса, так как она равна размерности $\operatorname{Ker} \vec{f}$ в L/L_0 в обозначениях предыдушего пункта. Это завершает доказательство единственности и теоремы п. 1.

Замечания. а) Пусть оператор f представлен матрицей A в некотором базисе, тогда задача приведения A к жордановой форме может быть решена с помощью следующих действий.

Вычислить характеристический многочлен A и его корни.

Вычислить размеры жордановых клеток, отвечающих корням λ. Для этого достаточно вычислить длины строк соответствующих диаграмм, т. е. $\dim \operatorname{Ker}(A-\lambda), \dim \operatorname{Ker}(A-\lambda)^2-\dim \operatorname{Ker}(A-\lambda), \dim \operatorname{Ker}(A-\lambda)^3-\dim \operatorname{Ker}(A-\lambda)^2, \ldots$

Построить жорданову форму J матрицы A и решить матричное уравнение $AX-XJ=0$. Пространство решений этой линейной системы уравнений будет, вообше говоря, многомерно, и среди решений будут и вырожденные матрицы. Но по теореме существования обязательно есть невырожденные решения; можно взять любое из них.

б) Одно из важных приложений жордановой формы-вычисление функций от матриц (пока мы знакомы лишь с полиномиальными функциями). Пусть, скажем, нам нужно знать большую степень A^N матрицы A. Так как степень жордановой матрицы вычислить легко (см. §8, п. 13), экономный способ может состоять в использовании формулы $A^N=XJ^NX^{-1}$, где $A=XJX^{-1}$: дело в том, что матрица X вычисляется раз навсегда и не зависит от N. Эту же формулу можно использовать для оценки роста элементов матрицы A^N.

в) В терминах жордановой формы легко вычислить минимальный многочлен матрицы A. В самом деле, ограничимся для простоты случаем поля нулевой характеристики. Тогда минимальный многочлен $J_r(\lambda)$ равен $(t-\lambda)^r$ (см. п. 13§8), минимальный многочлен блочной матрицы $(J_{r_l}(\lambda))$ равен $(t-\lambda)^{\max(r_i)}$, наконец, ми- нимальный многочлен общей жордановой матрицы с диагональными элементами $\lambda_1, \ldots, \lambda_s\,(\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j)$ равен $\prod_{i=1}^s (t-\lambda_j)^r$, где r_j-наибольший размер жордановой клетки, отвечающей λ_f.

Другие нормальные формы. В этом пункте мы вкратце опишем другие нормальные формы матриц, пригодные, в частности, для алгебраически незамкнутых полей.

а) Циклические пространства и циклические клетки. Пространство L называется чиклическим относительно оператора f, если в L существует такой вектор l, также называемый циклическим, что векторы $l, f(l), \ldots, f^{n-1}(l)$ образуют базие L. Полагая $e_i=f^{n-i}(l), i=1, \ldots, n=\dim L$, имеем

$$f\left(e_1, \ldots, e_n\right)=\left(e_1, \ldots, e_n\right)\left(\begin{array}{ccccc}
a_{n-1} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\
a_{n-2} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\
\ddots & . & . & . & 0 \\
a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0
\end{array}\right),$$

где $a_i \in \mathscr{K}$ однозначно определяются из соотношения $f^n(l)=\sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i f^i(l)$. Матрица оператора f

в таком базисе называется циклической клеткой. Наоборот, если матрица оператора f в базисе $\left(e_1, \ldots, e_n\right)$ является циклической клеткой, то вектор $l=e_n$ цикличен, и $e_i=f^{n-i}\left(e_n\right)$ (индукция вниз по i).

Покажем, что вид циклической клетки, отвечающей f, не зависит от выбора исходного циклического вектора. Для этого проверим, что первый столбец клетки состоит из коэффициентов минимального многочлена оператора $f: M(t)=t^n-\sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i t^i$.

В самом деле, $M(f)=0$, потому что $M(f)\left[f^i(l)\right]=f^i[M(f) l]=0$, а векторы $f^i(l)$ порождают L. С другой стороны, если $N(t)$ - многочлен степени $< n$, то $N(f) \neq 0$, потому что иначе, применив оператор $N(f)=0$ к циклическому вектору l, мы получим нетривиальное линейное соотношение между векторами базиса $l, f(l), \ldots \ldots, f^{n-1}(l)$.

б) Критерий чикличности пространства. Согласно предыдушим рассмотрениям, если пространство L циклично относительно f, то его размерность n равна степени минимального многочлена оператора f и, стало быть, минимальный многочлен совпадает с характеристическим. Обратное тоже верно: если операторы id, $f, \ldots, f^{n-1}$ линейно независимы, то существует такой вектор l, что векторы $l, f(l), \ldots, f^{n-1}(l)$ линейно независимы, так что L циклично. Мы не будем доказывать это утверждение.

в) Матрица любого оператора в подходящем базисе может быть приведена к прямой сумме циклических клеток. Доказательство можно провести аналогично доказательству теоремы о жордановой форме. Вместо множителей $(t-\lambda_i)^{r_i}$ характеристического многочлена следует рассматривать множители $p_i(t)^r i$, где $p_i(t)$ - неприводимые над полем $\mathscr{K}$ делители характеристического много- члена.

Теорема

единственности также имеет место, если ограничиться случаем, когда минимальные многочлены всех циклических клеток неприводимы. Без этого ограничения она неверна: циклическое пространство может быть прямой суммой двух циклических подпространств, минимальные многочлены которых взаимно просты

УПРАЖНЕНИЯ

Пусть L - конечномерное пространство дифференцируемых функций комплексной переменной x, обладающее тем свойством, что если $f \in L$, то $\frac{df}{dx} \in L$. Доказать, что существуют такие комплексные чнсла $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ и целые числа $r_1, \ldots, r_s \geqslant 1$, что $L = \oplus L_i$, где L_i - пространство функций вида $e^{\lambda_i x} P_i(x)$ $P_i(x)$ - произвольный многочлен степени $\leqslant r_i - 1$. (Указание. Рассмотреть жорданов базис для оператора $\frac{d}{dx}$ на L и последовательно вычислить вид входя. щих в него функций, начиная с нижней строки его диаграммы.)

2. Пусть $y(x)$ - функция комплексной переменной x, удовлетворяющая дифференциальному уравнению вида

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \sum_{i=0}^{n-1} a_l \frac{d^i y}{dx^i} = 0, a_i \in \mathbf{C}.$$

Обозначим через L линейное пространство функций, натянутое на $d^i y/dx^i$ для всех $i \geqslant 0$. Доказать, что оно конечномерно и оператор d/dx переводит его в себя.

Пользуясь результатами упражнений 1 и 2, вывести, что $y(x)$ иредставляется в виде $\sum e^{\lambda_i x} P_i(x), P_i$ - многочлены. Как связаны числа λ_l с видом дифференциального уравнения?

Пусть $J_r(\lambda)$ - жорданова клетка над C. Доказать, что, как угодно мало изменив ее элементы, можно добиться того, что полученная матрица будет диагонализируемой. (Указание. Изменить элементь на диагонали, сделав их попарно разными.)

Перенести результат этого упражнения на произвольные матрицы над C, воспользовавшись тем, что коэффицненты характеристического многочлена непрерывно зависят от элементов матрицы, а условие отсутствия кратных корней многочлена равносильно тому, тто его дискриминант не обращается в нуль.

Придать точный смысл следующим утверждениям и доказать их:
а) общая 2×2-матрица над $\mathbf{C}$ днагонализируема.
б) общая 2×2-матрица с одинаковыми собственными значениямі неднагонализируема.

3.7.10 Normalized Linear Spaces

(по Кострикину Манину)
В этом параграфе изучаются специальные свойства линейных пространств над вещественными и комплексными числами, связанные с возможностью определить в них понятие предельного перехода и построить начала анализа. Особую роль эти свойства играют в бесконечномерном случае, так что по существу излагаемый материал является элементарным введением в функциональный анализ.

Определение.

Пара (E, d), где E - множество, а d: $E \times E \to \to$ R - вещественнозначная функция, назовается метрическим про- странством, если выполнены следующие условия для всех $x, y,\, z \in E$:
а) $d(x, y) = d(y, x)$ (симлетрия)
б) $d(x, x) = 0; d(x, y) > 0$, если $x \neq y$ (положительность);
в) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (неравенство треугольника). Функция d с такими свойствами называется метрикой, $ad(x, y)$ - расстоянием между точками x, y.

Примеры. а) $E = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}, d(x, y) = |x - y|$.

б) $E = \mathbf{R}^n$ или $\mathbf{C}^n, d(\vec{x}, \vec{y}) = \left(\sum\limits_{i=1}^n |x_i - y_i|^2\right)^{1/2}$ $\cdot$ Это так называемая естественная метрика. Во второй части мы рассмотрим ее систематически и изучим ее обобщения на произвольные основные поля в теории квадратичных форм. Другие метрики:

$$d_1(\vec{x}, \vec{y}) = \max\left(|x_i - y_i|\right), d_2(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

в) $E = C(a, b)$ - непрерывные функции на отрезке $[a, b]$. Вот три наиболее важные метрики:

$$d_1(f, g) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t) - g(t)|$$

$$d_2(f, g) = \int\limits_a^b |f(t) - g(t)| dt$$

$$d_3(f, g) = \left(\int\limits_a^b f(t) - g(t)|^2\, d^t\right)^{1/2}.$$

(Проверьте аксиомы. Для d_2 в примере б) и d_3 в примере в) неравенство треугольника будет доказано в следующей части.)
г) E - любое множество, $d(x, y) = 1$ при $x \neq y$. Это-одна из дискретных метрик на E.
(С каждой метрикой связана некоторая топология на E, и последняя описанная метрика индуцирует дискретную топологию.)

Шары, ограниченность и полнота. В метрическом пространстве E с метрикой d множества

$$\begin{gathered} B\left(x_0, r\right)=\left\{x \in E \mid d\left(x_0, x\right)<r\right\}, \\ \bar{B}\left(x_0, r\right)=\left\{x \in E \mid d\left(x_0, x\right) \leqslant r\right\} \\ S\left(x_0, r\right)=\left\{x \in E \mid d\left(x_0, x\right)=r\right\} \end{gathered}$$

называются соответственно открытым шаром, замкнутым шаром и сферой с центром в точке x_0 и радиуса r. Не следует связывать с ними интуитивные представления, слишком близкие к трехмерным пространственным. Например, в примере г) п. 2 все сферы радиуса $r \neq 1$ пусты. Подмножество $F \subset E$ называется ограниченным, если оно содержится в некотором шаре (конечного радиуса).

Последовательность точек $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ в E сходится точке $a \in E$, если $\lim d\left(x_n, a\right)=0$. Последовательность называется фун$n \rightarrow \infty$
даментальной (или последовательностью Коши), если для всякого $\varepsilon>0$ существует $N=N(\varepsilon)$, такое, что $d\left(x_m, x_n\right)<\varepsilon$ при $m, n>>N(\varepsilon)$.

Метрическое пространство E называется полным, если любая последовательность Коши в нем сходится. Из полноты $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$, доказываемой в анализе, следует, что пространства $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{C}^n$ с любой из метрик d, d_1, d_2 примера б) п. 2 полны.

Нормированные линейные пространства. Пусть теперь L - линейное пространство над $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$. Особо важную роль играют метрики на L, которые удовлетворяют двум условиям:

а) $d\left(l_1, l_2\right)=d\left(l_1+l, l_2+l\right)$ для любых $l, l_1, l_2 \in L$ (инвариантность относительно сдвига);

б) $d\left(a l_1, a l_2\right)=|a| d\left(l_1, l_2\right)$ (умножение на скаляр увеличивает расстояния в $|a|$ раз).

Пусть d-такая метрика. Назовем нормой вектора l (относительно d) и будем обозначать через $\|l\|$ число $d(l, 0)$. Из аксиом метрики (п. 2) и условий а), б) вытекают следующие свойства нормы:

$$\begin{gathered} \|0\|=0,\|l\|>0, \text { если } l \neq 0 \\ \|a l\|=|a|\|l\| \text { для всех } a \in \mathscr{K}, \quad l \in L \\ \left\|l_1+l_2\right\| \leqslant\left\|l_1\right\|+\left\|l_2\right\| \text { для всех } l_1, l_2 \in L . \end{gathered}$$

Первые два свойства очевидны, третье проверяется так: $\left\|l_1+l_2\right\|=d\left(l_1+l_2, 0\right)= d\left(l_1,-l_2\right) \leqslant d\left(l_1, 0\right)+d\left(0,-l_2\right)=\left\|l_1\right\|+\left\|l_2\right\|$.

Линейное пространство L, снабженное функцией нормы $||$: $L \rightarrow \mathbf{R}$, удовлетворяющей перечисленным трем условиям, называется нормированным.

Наоборот, по норме восстанавливается метрика: положив $d\left(l_1, l_2\right)=\left\|l_1-l_2\right\|$, легко проверить аксиомы метрики. Для нее $d(l, 0)=\|l\|$.

Полное нормированное линейное пространство называется банаховым пространством. Пространства $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{C}^n$ с любыми нормами, отвечающими метрикам из п. 2, банаховы.

Общее понятие сходимости последовательности в метрическом пространстве, данное в п. 3, специализируется на случай нормированных линейных пространств и называется сходимостью по норме. Линейная структура позволяет определить понятие сходимости ряда, более сильное, чем сходимость по норме его частичных сумм. Именно, ряд $\sum_{i=1}^{\infty} l_i$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\left\|l_i\right\|$. 5. Норма и выпуклость. Нетрудно описать все нормы на одномерном пространстве L: любые две из них отличаютсл друг от друга умножением на положительную константу. В самом деле, пусть $l \in L$ - ненулевой вектор, $||_1, \|\|_2$ - две нормы. Если $\|l\|_1=c\|l\|_2$, то $\|a l\|_1=|a|\|l\|_1=c|a|\|l\|_2=c\|a l\|_2$ для всех $a \in \mathscr{K}$.

Будем называть кругами (соответственно окружностями) в одномерном пространстве L шары (соответственно сферы) ненулевого радиуса с центром в нуле относительно любой из норм. Как следует из предыдущего рассуждения, множества всех кругов и окружностей в L не зависят от выбора исходной нормы. Вместо задания любой нормы можно указать ее единичный круг B шли единичную окружность $S : S$ восстанавливается по B как граница B, а B восстанавливается по S как множество точек вида $\{al | l \in S, |a| \leqslant 1\}$. Заметим, что при $\mathscr{K} = \mathbf{R}$ круги суть отрезки с центром в нуле, а окружности - пары точек, симметричные относительно нуля.

Чтобы перенести это описание на пространства любой размерности, нам понадобится понятие выпуклости. Подмножество $E \subset L$ называется выпуклым, если для любых двух векторов $l_1, l_2 \in E$ н для любого числа $0 \leqslant a \leqslant 1$ вектор $al_1 + (1-a)l_2$ лежит в E. Это согласуется с обычным определением выпуклости в $\mathbf{R}^2$ и $\mathbf{R}^3$: вместе с любыми двумя точками («концами векторов l_1 и l_2) множество E должно содержать весь соединяющий их отрезок («концы векторов $al_1 + (1-a)l_2 \gg$).

Пусть $||$ - некоторая норма на L. Положим $B = \{l \in L \mid \|l\| \leqslant \leqslant 1\}, S = \{l \in L\}\|l\| = 1\}$. Ограничение $||$ на любое линейное подпространство $L_0 \subset L$ индуцирует норму на L_0. Отсюда следует, что для любого одномерного подпространства $L_0 \subset L$ множество $L_0 \cap B$ является кругом в L_0, а множество $L_0 \cap S$ - окружностью в смысле данного выше определения. Кроме того, из неравенства треугольника следует, что если $l_1, l_2 \in B, 0 \leqslant a \leqslant 1$, то

$$\|al_1 + (1-a)l_2\| \leqslant a\,\|l_1\| + (1-a)\,\|l_2\| \leqslant 1,$$

т. е. $al_1 + (1-a)l_2 \in B$, так что B - выпуклое множество.

Справедлива и обратная теорема:

6. Теорема. Пусть $S \subset L$-множество, удовлетворяющеее двум условиям:

а) Пересечение $S \cap L_0$ с любым одномерным подпространством L_0 является окружностью.

б) Множество $B = \{al | |a| \leqslant 1, l \in S\}$ выпукло.

Тогда на L существует единственная норма $|\ \||$, для которой B является единичным шаром, а S - единичной сферой.

Proof. □

Обозначим через $||: L \to \mathbf{R}$ функцию, которая на каждом одномерном подпространстве L_0 является нормой с единичной сферой $S \cap L_0$. Ясно, что такая функция существует и единственна, и нуждается в проверке лишь неравенство треугольника для нее. Пусть $l_1, l_2 \in L, \|l_1\| = N_1, \|l_2\| = N_2, N_i \neq 0$. Применим условие выпуклости B к векторам $N_1^{-1} l_1$ и $N_2^{-1} l_2 \in S$. Получим

откуда

$$\left\| \frac{N_1}{N_1+N_2} N_1^{-1} l_1 + \frac{N_2}{N_1+N_2} N_2^{-1} l_2 \right\| \leqslant 1,$$

$$\|l_1 + l_2\| \leqslant N_1 + N_2 = \|l_1\| + \|l_2\|.$$

Теорема. Любые две нормы $||_1 u||\|_2$ ма конечномерном пространстве L эквивалентны в том смысле, что существуют положительные константы $0 < c \leqslant c'$ с условием

$$c\|l\|_2 \leqslant \|l\|_1 \leqslant c'\|l\|_2$$

для всех $l \in L.B$ частности, топологии, т. е. понятия сходимости, отвечающие любым двум нормам, совпадают, и все конечномерные нормированные пространства банаховы.

Дока зате льство. Выберем базис в L и рассмотрим естественную норму $\|\vec{x}\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$ относительно координат в этом базисе. Достаточно проверить, что любая норма $||_1$ эквивалентна этой. Ее ограничение на единичную сферу нормы $||$ является непрерывной функцией координат $\vec{x}$, принимающей лишь положительные значения (непрерывность следует из неравенства треугольника). Следовательно, эта функция отграничена от нуля константой $c > 0$ и ограничена константой $c' > 0$ по теореме БольцаноВейерштрасса (единичная сфера S для $|\ |$ замкнута и ограничена). Из неравенства $c \leqslant \|l\|_1 \leqslant c'$ для всех $l \in S$ следует неравенство $c\|l\| \leqslant \|l\|_1 \leqslant c'\|l\|$ для всех $l \in L$. Поскольку L полно в топологин, отвечающей норме $\|\|$, и понятия сходимости для эквивалентных норм совпадают, L полно в любой норме.

Норма линейного оператора. Пусть L, M - нормированиые линейные пространства над одним и тем же полем $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$.

Рассмотрим линейное отображение $f : L \rightarrow M$. Оно называется ограниненным, если существует такое вещсственное число $N \geqslant 0$, что для всех $l \in L$ выполнено неравенство $\|f(l)\| \leqslant N\|l\|$ (левая норма - в M, правая - в L). Обозначим через $\mathscr{L}^1(L, M)$ множество ограниченных линейных операторов. Для каждого $f \in \in \mathscr{L}^1(L, M)$ обозначим через $\|f\|$ нижнюю грань всех N, для которых выполняются неравенства $\|f(l)\| \leqslant N\|l\|, l \in L$.

Теорема. а) $\mathscr{L}^1(L, M)$ является нормированным линейным пространством относительно функции |f|, которая называется индущированной нориой.

б) Если L конетнолерно, то $\mathscr{L}^1(L, M) = \mathscr{L}(L, M)$, т. е. любое линейное отображение ограничено.

Док а з а те льст в о. а) Пусть $f, g \in \mathscr{L}^1(L, M)$. Если $\|f(l)\| \leqslant \leqslant N_1\|l\|$ и $\|g(l)\| \leqslant N_2\|l\|$ для всех l, то

$$\|(f+g)(l)\| \leqslant (N_1 + N_2)\|l\|, \|af(l)\| \leqslant |a| N_1 \|l\|.$$

Поэтому $f+g$ и af ограничены и, более того, переходя к нижним граням, имеем

$$\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|, \|af\| = |a|\|f\|.$$

Если $\|f\| = 0$, то для любого $\varepsilon > 0 \|f(l)\| \leqslant \varepsilon\|l\|$. Значит, $\|f(l)\| = 0$, так что $f = 0$.

в) На единичной сфере в L отображение $l \longmapsto \|f(l)\|$ является непрерывной функцией. Так как эта сфера ограничена и замкнута, эта функция ограничена и, более того, верхняя грань ее значений достигается. Поэтому на сфере $\|f(l)\| \leqslant N$, так что $\|f(l)\| \leqslant N\|l\|$ для всех $l \in L$.

Попутно мы обнаружили, что $\|f\| = \max\{\|f(l)\|, l \in$ единичная сфера в $L\}$.

Примеры: а) В конечномерном пространстве L последовательность векторов $l_1, \ldots, l_n, \ldots$ сходится к вектору l тогда и только тогда, когда в некотором (и потому в любом) базисе последовательность i-х координат векторов l_j сходится ki-й координате вектора l, т. е. если $f(l_1), \ldots, f(l_n), \ldots$ сходится для любого линейного функционала $f \in L^*$. Последнее условие можно перенести на бесконечномерные пространства, потребовав сходимость $f(l_i)$ лишь для ограниченных функционалов f. Это приводит, вообще говоря, к новой топологии на L, называемой слабой топологией.

б) Пусть L-пространство вещественных дифференцируемых функций на $[0,1]$ с нормой $\|f\| = \left(\int\limits_0^1 f(t)^2 dt\right)^{1/2}$. Тогда оператор умножения на t ограничен, нбо $\int\limits_0^1 t^2 f(t)^2 dt \leqslant \int\limits_0^1 f(t)^2 dt$, а оператор $\frac{d}{dt}$ неограничен. В самом деле, для любого целого $n \geqslant 0$ функция $\sqrt{2n+1} t^n$ лежит на единичной сфере, а норма ее производной равна $n\sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}} \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема. Пусть $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$—-ораниченные линейные отображения нормированных пространств. Тогда их композиция ограничена и

$$\|g \circ f\| \leqslant \|g\|\|f\|.$$

Proof. □

Если $\|f(l)\| \leqslant N_1\|l\|$ и $\|g(m)\| \leqslant N_2\|m\|$ дія всех $l \in L, m \in M$, то

$$\|g \circ f(l)\| \leqslant N_2\|f(l)\| \leqslant N_2 N_1\|l\|$$

откуда, переходя к ннжним граням, получаем гребуемое утвержденне. 1. Вычислить нормы на $\mathbf{R}^2$, для которых единичными шарами являются множества:
а) $x^2+y^2 \leqslant 1$
б) $x^2+y^2 \leqslant r^2$
в) квадрат с вершинами $(\pm 1, \pm 1)$;
г) квадрат с вершинами $(0, \pm 1), (\pm 1, 0)$.

Пусть $f(x) \geqslant 0$ - дважды дифференцируемая вещественная функция на $[a, b] \subset \mathbf{R}$ и $f''(x) \leqslant 0$. Доказать, что множество $\{(x, y) | a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\} \subset \subset \mathbf{R}^2$ выпуклое.

Пользуясь результатом упражнения 2, доказать, что множество $|x|^p+|y|^p \leqslant 1$ для $p>1$ в $\mathbf{R}^2$ является единичным шаром для некоторой нормы. Вычислив эту норму, доказать неравенство Минковского:

$$\left(|x_1+y_1|^p+|x_2+y_2|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(|x_1|^p+|x_2|^p\right)^{1/p}+\left(|y_1|^p+|y_2|^p\right)^{1/p}.$$

Обобщить результаты упражнения 3 на случай $\mathbf{R}^n$.

Пусть B - единичный шар некоторой нормы в L, B^* - единичный шар индуцированной нормы в $L^*=\mathscr{L}\left(L, \mathscr{K}^*\right), \mathscr{K}=\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$. Дать явное описание B^* и вычислить B^* для норм из упражнений 1 и 3.

3.7.11 Functions of Linear Operators

(по Кострикину Манину)

В §8 и 9 мы определили операторы $Q(f)$, где $f: L \rightarrow L$ - линейный оператор, а Q-любой многочлен с коэффициентами из основного поля $\mathscr{K}$. Если $\mathscr{K}=\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, пространство L нормировано, а оператор f ограничен, то $Q(f)$ можно определить для более общего класса функций Q с помощью предельного перехода.

Мы ограничимся рассмотрением голоморфных функций Q, задаваемых степенными рядами с ненулевым радиусом сходимости: $Q(t)=\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i t^i$. Положим $Q(f)=\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i f^i$, если этот ряд из операторов абсолютно сходится, т. е. если сходится ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i\left\|f^i\right\|$. (В случае $\operatorname{dim} L<\infty$, которым мы в основном будем заниматься здесь, $\mathscr{L}^1(L, L)=\mathscr{L}(L, L)$, и пространство всех операторов конечномерно и банахово; см. §10, утверждение б) теоремы п. 9.)

Примеры. а) Пусть f - нильпотентный оператор. Тогда $\|f^i\| = 0$ для достаточно больших i, и ряд $Q(f)$ всегда абсолютно сходится. На самом деле он совпадает с одной из своих частичных сумм.

б) Пусть $\|f\| < 1$. Ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} f^l$ абсолютно сходится и

$$(\mathrm{id} - f) \sum_{i=0}^{\infty} f^l = \left(\sum_{l=0}^{\infty} f^l \right) (\mathrm{id} - f) = \mathrm{id}.$$

Действительно,

$$(\mathrm{id} - \cdots f) \sum_{i=0}^{N} f^i = \mathrm{id} - f^{N+1} = \left(\sum_{i=0}^{N} f^i \right) (\mathrm{id} - f)$$

и переход к пределу при $N \to \infty$ дает требуемое. В частности, если $\|f\| < 1$, то оператор id - f обратим.

в) Назовем экспонентой ограниченного оператора f оператор

$$e^f = \exp(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^n$$

Так как $\|f^n\| \leqslant \|f\|^n$ (см. теорему п. 11§10) и числовой ряд для экспоненты равномерно сходится на любом ограниченном множестве, функция $\exp(f)$ определена для любого ограниченного оператора f и непрерывна по f.

Например, ряд Тейлора $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{(\Delta t)^i}{i!} \varphi^{(i)}(t)$ для значения $\varphi(t + \Delta t)$ можно формально записать в виде $\exp\left(\Delta t \frac{d}{dt}\right) \varphi$. Чтобы эта запись приобрела точный смысл, нужно, конечно, выбрать пространство бесконечно дифференцируемых функций φ с нормой и проверить сходимость в индуцированной норме.

Частный случай: $\exp(a\ \mathrm{id}\ ) = e^a\ \mathrm{id}$ ($a-$ скаляр); $\exp(\mathrm{diag}\,(a_1, \ldots \ \ldots, a_n)) = \mathrm{diag}\,(\exp a_1, \ldots, \exp a_n)$.

Основное свойство числовой экспоненты: $e^a e^b = e^{a+b}$, вообще говоря, нарущается для экспоненты операторов. Однако есть важный частный случай, когда оно выполнено:

Теорема. Если операторы $f, g : L \to L$ коммутируют, т. . $fg = gf$, то $(\exp f)(\exp g) = \exp(f + g)$.

Док азате льство. Применяя формулу бинома Ньютона и пользуясь возможностью переставлять члены абсолютно сходящегося ряда, получаем

$$(\exp f)(\exp g) = \left(\sum_{i \geqslant 0} \frac{1}{i!} f^i \right) \left(\sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{k!} g^k \right) = \sum_{i,k \geqslant 0} \frac{1}{i!k!} f^i g^k =$$

$$= \sum_{m \geqslant 0} \sum_{i=0}^{m} \frac{1}{i!(m-i)!} f^i g^{m-l} = \sum_{m \geqslant 0} \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^{m} \frac{m!}{i!(m-i)!} f^i g^{m-i} =$$

$$= \sum_{m \geqslant 0} \frac{1}{m!} (f+g)^m = \exp(f+g)$$

оммутативность f и g используется в том месте, где $(f+g)^m$ разлагается по биному.

Следствие. Пусть $f : L \to L$-ограниченный оператор. Тогда отображение $\mathrm{R} \to \mathscr{L}^1(L, L) : t \longmapsto \exp(tf)$ является гомоморфизмом группь $\mathbf{R}$ в подеруппу обратимых операторов $\mathscr{L}^1(L, L)$ по умноженито.

Множество операторов $\{\exp tf | t \in R\}$ называется однопараметрической подеруппой операторов.

Спектр. Пусть f-некоторый оператор в конечномерном пространстве, $Q(t)$ - такой степенной ряд, что $Q(f)$ абсолютно схо- дится. Нетрудно видеть, что если $Q(t)$ - многочлен, то в жордановом базисе f матрица $Q(f)$ является верхней треугольной, и на ее диагонали стоят числа $Q\left(\lambda_i\right)$, где λ_i - собственные значения f. Применив это соображение к частичным суммам Q и перейдя к пределу, получим, что это же верно для любого ряда $Q(t)$. В частности, если $S(f)$ - спектр f, то $S(Q(f)) = Q(S(f)) = \{Q(\lambda) | \lambda \in \in S(f)\}$. Более того, если учитывать характеристические корни λ_i с их кратностью, то $Q(S(f))$ будет спектром $Q(f)$ с правильными кратностями. В частности,

$$\det(\exp f) = \prod_{i=1}^{n} \exp \lambda_i = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) = \exp \operatorname{Tr} f$$

Переходя на язык матриц, мы отметим еще два простых свойства, которые доказываются таким же образом:

а) $Q\left(A^t\right) = Q(A)^t$

б) $Q(\bar{A}) = \overline{Q(A)}$, где черта означает комплексное сопряжение; здесь предполагается, что ряд Q имеет вещественные коэффициенты.

Пользуясь этими свойствами и обозначениями §4, докажем следующую теорему, относящуюся к теории классических групп Ли (здесь $\mathscr{K} = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$).

Теорема. Отображение exp переводит $\mathrm{gl}(n, \mathscr{K}), \mathrm{sl}(n, \mathscr{K}),\ \mathrm{o}(n, \mathscr{K}), \mathrm{u}(n),\ \mathrm{su}(n)$ в $\mathrm{GL}(n, \mathscr{K}),\ \mathrm{SL}(n, \mathscr{K}),\ \mathrm{SO}(n, \mathscr{K}), \mathrm{U}(n),\ \mathrm{SU}(n)$ соответственно.

Доказате льство. Пространство $\mathrm{gl}(n, \mathscr{K})$ переходит в $\mathrm{GL}(n, \mathscr{K})$, ибо согласно следствию п. 4 матрицы $\exp A$ обратимы. Если $\operatorname{Tr} A = 0$, то $\det \exp A = 1$, как было доказано в предыдушем пункте. Из условия $A + A^t = 0$ следует, что $(\exp A)(\exp A)^t = 1$, а из условия $A + \bar{A}^t = 0$ следует, что $\exp A\overline{(\exp A)}^t = 1$. Это завершает доказательство.

Замечание

Во всех случаях образ exp покрывает некоторую окрестность единицы соответствующей группы. Для доказательства можно определить логарифм операторов f с условием $\|f - \mathrm{jd}\| < 1$ обычной формулой $\log f = \sum\limits_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{(f - \mathrm{id})^n}{n}$ и показать, что $f = \exp(\log f)$.

Однако в целом отображения exp, вообще говоря, не сюръективны. Например, не существует матрицы $A \in \mathrm{sl}(2, \mathbf{C})$, для которой $\exp A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathrm{C})$. В самом деле, A не может быть диагонализируемой, иначе $\exp A$ была бы диагонализируемой. Значит, собственные значения A совпадают, а так как след A равен нулю, эти собственные значения должны быть нулевыми. Но тогда собственные значения $\exp A$ равны 1, тогда как собственные значения $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ равны -1. 1.

3.7.12 Complexification and Reification

В пар. 8 и 9 мы убедились, что работа над алгебраически замкнутым полем проясняет геометрическую структуру линейных операторов и цает удобную каноническую форму матриц. Поэтому, даже работая с вещественным полем, удобно иногда пользоваться комплексными числами. В этом параграфе будут изучены две основные операции: увеличения и уменьшения поля скаляров в применении к линейным пространствам и линейным отображениям. Мы уделим больше всего внимания переходу от $\mathbf{R}$ к $\mathbf{C}$ (комплексификация) и от $\mathbf{C}$ к $\mathbf{R}$ (овеществление) и кратко коснемся более общего случая.

Овеществление. Пусть L - линейное проетранство над C. Забудем про возможность умножать векторы из L на все комплексные числа и огавим лишь умножение на R. Очевидно, мы получим линейное пространство нал $\mathbf{R}$, которое будем обозначать L_{R} и называть овсијествлением L.

Пусть L, M - два линейных пространства над $\mathbf{C}, f: L \rightarrow M$ - линейное отображение. Очевидно, рассмотренное как отображение $L_{\mathrm{R}} \rightarrow M_{\mathrm{R}}$, оно остается линейным. Мы будем обозначать его f_{R} и называть овеществлением f. Ясно, что $\mathrm{id}_{\mathrm{R}}=\mathrm{id},(fg)_{\mathrm{R}}=f_{\mathrm{R}} g_{\mathrm{R}};(af+$ $+bg\rangle_{\mathrm{R}}=af_{\mathrm{R}}+bg_{\mathrm{R}}$, если $a, b \in \mathbf{R}$.

3. Теорема. а) Пусть $\{e_1, \ldots, e_m\}$ - базис пространства L над C. Тогда $\{e_1, \ldots, e_m, ie_1, \ldots, ie_m\}$ является базисом пространства L_{R} над R. В частности, $\dim_{\mathrm{R}} L_{\mathrm{R}}=$ $2 \dim_{\mathrm{C}} L$.

б) Пусть $A=B+iC$ - матрица линейного отображения f: $L \rightarrow M$ в базисах $\{e_1, \ldots, e_m\} \| \{e_1^{\prime}, \ldots, e_n^{\prime}\}$ над C, где $B, C-e$ - щественные матрицы. Тогда матрицей линейного отображения $f_{\mathrm{R}}: L_{\mathrm{R}} \rightarrow M_{\mathrm{R}}$ в базисах $\{e_1, \ldots, e_m, ie_1, \ldots, ie_m\}, \quad\{e_1^{\prime}, \ldots, e_n^{\prime}$, $ie_1^{\prime}, \ldots, ie_n^{\prime}\}\, \sigma y \partial e r$

$$\left(\begin{array}{cc}B-C & \\ C & B\end{array}\right).$$

Proof. □

а) Для любого элемента $l \in L$ имеем

$$l=\sum_{k=1}^m a_k e_k=\sum_{k=1}^m\left(b_k+ic_k\right) e_k=\sum_{k=1}^m b_k e_k+\sum_{k=1}^m c_k\left(ie_k\right),$$

где b_k, c_k - вещественная и мнимая части a_k. Поэтому $\{e_k, ie_k\}$ порождают L_{R}. Если $\sum_{k=1}^m b_k e_k+\sum_{k=1}^m c_k\left(ie_k\right)=0$, где $b_k, c_k \in$ R, то $b_k+ic_k=0$ в силу линейной независимости $\{e_1, \ldots, e_k\}$ над $\mathbf{C}$, откуда следует, что $b_k=c_k=0$ для всех k.

б) Согласно определению A, имеем

$$f\left(e_1, \ldots, e_{n_i}\right)=\left(e_1^{\prime}, \ldots, e_n^{\prime}\right)(B+iC),$$

откуда, в силу линейности f над C,

$$f\left(ie_1, \ldots, ie_m\right)=\left(e_1^{\prime}, \ldots, e_n^{\prime}\right)(-C+iB).$$

Поэтому
$\left(f\left(e_1\right), \ldots, f\left(e_m\right), f\left(ie_1\right), \ldots, f\left(ie_m\right)\right)=$

$$=\left(e_1^{\prime}, \ldots, e_n^{\prime}, ie_1^{\prime}, \ldots, ie_m^{\prime}\right)\left(\begin{array}{cc}B & -C \\ C & B\end{array}\right).$$

что завершает доказательство.

Следствие. Писть $f: L \rightarrow L-$ линейный оператор на конечномерном комплексном пространстве L. Тогда $\det f_{\mathrm{R}}=|\det f|^2$.

Proof. □

Пусть f представлен матрицей $B+iC$ (B, C вещественны) в базисе $\{e_1, \ldots, e_m\}$. Тогда, применяя элементарные преобразования (прямо в блочной структуре) сначала к строкам, потом к столбцам, находим:

$$\det \hat{f}_{\mathrm{R}} = \det \begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} B+iC & -C+iB \\ C & B \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} B+iC & 0 \\ C & B-iC \end{pmatrix} = \det(B+iC)\det(B-iC) =$$

$$= \det f \overline{\det f} = |\det f P^2.$$

Спуск поля скаляров: общая ситуация. Довольно очевидно, как обобщаются определения п. 2. Пусть K-некоторое поле, $\mathscr{K}$-его подполе, L-линейное пространство над K. Забыв про умножение векторов на все элементы поля K и оставив лищь умножение на элементы $\mathscr{K}$, мы получим линейное пространство $L\mathscr{K}$ над $\mathscr{K}$. Аналогично, линейное отображение $f : L \to M$ над K превращается в линейное отображение $f : L \to M_{\mathscr{K}}$. Одно из названий этих операций - спуск поля скаляров (от K до $\mathscr{K}$). Ясно, что $\mathrm{id}_{\mathscr{K}} = \mathrm{id}, (fg)_{\mathscr{K}} = f_{\mathscr{K}} g_{\mathscr{K}}, (af + bg)_{\mathscr{K}} = af_{\mathscr{K}} + bg_{\mathscr{K}},$ если $a, b \in \mathscr{K}$. Само поле K можно также рассматривать как линейное пространство над $\mathscr{K}$. Если оно конечномерно, то размерности $\dim_K L$ и $\dim_{\mathscr{K}} L_{\mathscr{K}}$ связаны формулой

$$\dim_{\mathscr{K}} L\mathscr{K} = \dim_{\mathscr{K}} K \dim_K L.$$

Для доказательства достаточно проверить, что если $\{e_1, \ldots, e_n\}$ - базис L над K, а $\{b_1, \ldots, b_m\}$-базис K над $\mathscr{K}$, то $\{b_1e_1, \ldots \; \ldots, b_1e_n; \ldots; b_me_1, \ldots, b_me_n\}$ образуют базис $L_{\mathscr{K}}$ над $\mathscr{K}$.

Комплексная структура на вещественном линейном пространстве. Пусть L - комплексное линейное пространство, L_R - его овеществление. Чтобы полностью восстановить умножение на комплексные числа в L_{R}, достаточно знать оператор $J : L_{\mathrm{R}} \to L_{\mathrm{R}}$ умножения на $i : J(l) = il$. Очевидно, этот оператор линеен над $\mathbf{R}$ и удовлетворяет условию $J^2 = -\mathrm{id}$; если мы знаем его, то для любого комплексного числа $a + bi, a, b \in \mathbf{R}$, имеем

$$(a + bi)l = al + bI(l).$$

Это соображение приводит к следующему важному понятию:

Определение.

Пусть L - вещественное пространство. Комплексной структурой на L называется задание линейного оператора $J : L \to L$, удовлетворяющего условию $J^2 = -\mathrm{id}$. Описанная выше комплексная структура на L_{R} называется *ка* нонической. Это определение оправдывается следующей теоремой:

Теорема. Пусть (L, J) - вещественное линейное пространство с комплексной структурой. Введем на L операцию умножения на комплексные числа из $\mathbf{C}$ по формуле

$$(a + bi)l = al + bJ(l).$$

Тогда L превратится в комплексное линейное пространство $\tilde{L}$, для которого $\widetilde{L_{\mathrm{R}}} = L$.

Proof. □

Обе аксиомы дистрибутивности легко проверяются, исходя из линейности J и формул сложения комплексных чисел. Проверим аксиому ассоциативности умножения:

$$\begin{gathered}(a+bi)[(c+di)l]=(a+bi)[cl+dJ(l)]=a[cl+dJ(l)]+\\ +bJ[cl+dJ(l)]=acl+adJ(l)+bcJ(l)-bdl=\\ =(ac-bd)l+(ad+bc)J(l)=[ac-bd+(ad+bc)i]l=\\ =[(a+bi)(c+di)]l.\end{gathered}$$

Все остальные аксиомы выполнены по той причине, что L и $\tilde{L}$ совпадают как аддитивные группы.

Следствие. Если $(L;J)$-конечномерное вещественное пространство с комплексной структурой, то $\mathrm{di}_{\mathrm{R}}\,L=2n$ четна, и матрица J в подходящем базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Д ок а зательство. Действительно, $\dim_{\mathrm{R}} L=2\dim_{\mathrm{c}}\widetilde{L}$ в силу теоремы п. 7 и утверждения а) теоремы п. 3 (конечномерность $\widetilde{L}$ следует из того, что любой базис L над $\mathbf{R}$ порождает $\widetilde{L}$ над $\mathbf{C}$). Далее, выберем базис $\{e_1,\ldots,e_n\}$ пространства $\tilde{L}$ над C. Матрица умножения на i в этом базисе равна iE_n. Поэтому матрица оператора J в базисе $\{e_1,\ldots,e_n;ie_1,\ldots,ie_n\}$ пространства L имеет требуемый вид в силу утверждения б) теоремы п. 3.

Замечания. а) Пусть L-комплексное пространство, $g:L_{\mathrm{R}}\to L_{\mathrm{R}}$ - вещественно линейное отображение. Поставим вопрос, когда существует таое комплексно линейное отображение $f:L\to L$, что $g=f_{\mathrm{R}}$. Очевидно, для этого необходимо, чтобы g коммутировал с оператором J естественной комплексной структуры на L_{R}, ибо $g(il)=g(Jl)=ig(l)=Jg(l)$ для всех $l\in L$. Это условие является также достаточным, потому что из него автоматически следует линейность g над $\mathbf{C}$:

$$\begin{gathered}g((a+bi)l)=ag(l)+bg(il)=ag(l)+bgJ(l)=\\ =ag(l)+bJg(l)=(a+bJ)g(l)=(a+bi)g(l).\end{gathered}$$

б) Пусть теперь L– четномерное вещественное пространство, $f:L\to L$ - вещественно линейный оператор. Поставим вопрос, когда на L суцествует такая комплексная структура J, что f являет овеществлением комплексно линейного отображения $g:\tau\to L$, где I - комплексное пространство, построенное с помощью J. Вот частичный ответ, относящийся к случаю $\dim_{\mathbb{R}} L=2$: такая структура существует, если f не имеет собственных векторов в L.

В самом деле, тогда f имеет два комплексно сопряженных собственных значения $\lambda\pm i\mu,\lambda,\mu\in R,\mu\neq 0$. Положим $J=\mu^{-1}(\hat{f}$ - - $\lambda\mathrm{id})$. По теореме Гамильтона - Кэли, $f^2-2\lambda f+(\lambda^2+\mu^2)\,\mathrm{id}=0$, откуда

$$J^2=\mu^{-2}\left(f^2-2\lambda f+\lambda^2\mathrm{id}\right)=-\mathrm{id}.$$

Кроме того, J коммутирует с f. Это завершает доказательство.

Комплексификация. Теперь мы фиксируем вещественное линейное пространство L и введем комплексную структуру J на внешней прямой сумме $L\oplus L$, определив ее формулой

$$J\left(l_1,l_2\right)=\left(-l_2,l_1\right).$$

Ясно, что $J^2 = -1$. Назовем комплексификацией пространства L комплексное пространство $\widetilde{L \oplus L}$, связанное с этой структурой. M будем обозначать его $L^{\mathbf{C}}$. Другие стандартные обозначения: $\mathbf{C} \underset{\mathbf{R}}{\otimes} L$ или $\mathbf{C} \oplus L$; их происхождение стгнет ясно после ознакомления с тензорными произведениями линейных пространств. Отождествив L с подмножеством векторов вида $(l, 0)$ в $L \oplus L$ и пользуясь тем, что $i(l, 0) = J(l, 0) = (0, l)$, мы можем записать любой вектор из L^{c} в виде

$$(l_1, l_2) = (l_1, 0) + (0, l_2) = (l_1, 0) + i\,(l_2, 0) = l_1 + il_2.$$

Иными словами, $L^{\mathrm{C}} = L \oplus iL$, последняя сумма является прямой над $\mathbf{R}$, но не над $\mathbf{C}$!

Любой базис L над $\mathbf{R}$ будет базисом L^{C} над $\mathbf{C}$, так что $\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathrm{C}} L^{\mathrm{C}}$.

Пусть теперь $f : L \to M$ - линейное отображение линейных пространств над R. Тогда отображение $f^{c}($ или $f \otimes \mathbf{C}) : L^{\mathrm{C}} \to M^{\mathrm{C}}$, определенное формулой

$$f\left(l_1, l_{\mathrm{g}}\right) = \left(f\left(l_1\right), f\left(l_2\right)\right),$$

линейно над $\mathbf{R}$ и перстановочно cJ, ибо

$$fJ\left(l_1, l_2\right) = f\left(-l_2, l_1\right) = \left(-f\left(l_2\right), f\left(l_1\right)\right) = Jf\left(l_1, l_2\right).$$

Следовательно, оно комплексно линейно. Оно называется комплек сификацией отображения f. Очевидно, $\mathrm{id}^{c} = \mathrm{id}, (af + bg)^{c} = af^{\mathbf{C}} + bg^{c}; a, b \doteq \mathbf{R}$; и $(\mathfrak{f}g)^{\mathrm{C}} = f^{\mathrm{C}} g^{\mathrm{C}}$. Рассматривая пару базисов L и M как базисы L^{C} и M^{C} соответственно, убеждаемся, что матрица отображения f в исходной паре базисов совпадает с матрицей отображения fc в этой «новой» паре. В частности, (комплексные) собственные значения отображений f и f с и их жордановы формы совпадают.

Проследим теперь, что происходит при композиции операций овеществлення и комплексифнкации в двух возможных порядках 11. Сначала комплексификация, затем овеществление. Пусть L - вещественное пространство. Мы утверждаем, что существует естественный изоморфизм

$$\left(L^{\mathrm{C}}\right)_{\mathbf{R}} \to L \oplus L$$

Действительно, по конструкции L^{c} совпадает с $L \oplus L$ как вещественное пространство. Аналогично, $\left(f^{\mathrm{C}}\right)_{\mathrm{R}} \to f \oplus f$ (в смысле этого отождествления) для любого вещественного линейного отображения $f : L \to M$.

Композиция в обратном порядке приводит к несколько менее очевидному ответу. Введем следующее определение.

Определение.

Пусть L-комплексное пространство. Сопряженным комплексным пространством $\bar{L}$ называется множество L с той же структурой аддитивной группы, но с новым умножением. на скаляры из C, которое мы временно обозначим $a * l$:

$$a * l = \bar{a} l \text{ для любых } a \in \mathbf{C}, l \in L.$$

Аксиомы проверяются без труда, если воспользоваться тем, что $\overline{ab} = \bar{a}\bar{b}$ и $\overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b}$.

Аналогично, если (L, J) - вещественное пространство с комплексной структурой, оператор -J также определяет комплексную структуру, которая называется сопряженной с исходной. В обозначениях теоремы п. 7, если $\widetilde{L}$ - комплексное пространство, отвечающее (L, J), то $\overline{\widetilde{L}}$ - комплексное пространство, отвечающее $(L, -J)$.

Сначала овеществление, потом комплексификация. Теперь мы можем для всякого комплексного линейного пространства L построить канонический комплексно линейный изоморфизм

$$f : (L_{\mathrm{R}})^{\mathrm{C}} \to L \oplus \bar{L}$$

С этой целью замстим, что на $(L_R)^C$ имеются два веществennс линейных оператора: оператор канонической комплексной структуры $J(l_1, l_2) = (-l_2, l_1)$ и оператор умножения на i, отвечающий исходной комплексной структуре $L : i(l_1, l_2) = (il_1, il_2)$. Так как J коммутирует с i, он комплексно линеен в этой структуре. Поскольку $J^2 = -\mathrm{id}$, его собственные значения равны $\pm i$. Введем стандартные обозначения для двух подпространств, отвечающих этим собственным значениям:

$$L^{1,0} = \left\{ (l_1, l_2) \in (L_{\mathrm{R}})^{\mathrm{C}} \,|\, J(l_1, l_2) = i(l_1, l_2) \right\},$$
$$L^{0,1} = \left\{ (l_1, l_2) \in (L_{\mathrm{R}})^{\mathrm{C}} \,|\, J(l_1, l_2) = -i(l_1, l_2) \right\}.$$

Оба множества $L^{1,0}$ и $L^{0,1}$ являются комплексными подпространствами в $(L_R)^{\mathbf{c}}$: ясно, что они замкнуты относительно сложения и умножения на вещественные числа, а замкнутость относительно умножения на J следует из того, что J и i коммутируют. Покажем, что $I = L^{1,0} \oplus L^{0,1}$, а также, что $L^{\mathrm{i},0}$ естественно изоморфно L, тогда каК $L^{0,1}$ естественно изоморфно L. Из определений сразу же следует, что $L^{1,0}$ состоит из векторов вида $(l, -il)$, а $L^{0,1}$ - из векторов вида (m, im). Для данных $l_1, l_2 \in L$ уравнение $(l_1, l_2) = (l, -il) + (m, im)$ на l, m имеет единственное решение $l = \frac{l_1 + il_2}{2}, m = \frac{l_1 - il_2}{2}$. Следовательно, $L = L^{1,0} \oplus L^{0,1}$. Отображения $L \to L^{1,0} : l \mapsto (l, -il)$ и $L \to L^{1,1}$: $l \longmapsto (l, il)$ являются вещественно линейными изоморфизмами. Кроме того, они перестановочны с действием i на $L, \bar{L}$ и действием J на $L^{1,0}, L^{0,1}$ в силу определений. Это завершает нашу конструкцию.

Полулинейные отображения комплексных пространств. Пусть L, M-комплексные линейные пространства. Полулинейным (или антилинейным) отображением $f : L \to M$ называется линейное отображение $f : L \to \bar{M}$. Иными словами, f-гомоморфизм аддитивных групп, и

$$f(al) = \bar{a} f(l)$$

для всех $a \in \mathbf{C}, l \in L$. Особая роль полулинейных отображений станет ясна во второй части, при изучении эрмитовых комплексных пространств.

Подъем поля скаляров: общая ситуация. Пусть, как в п. 4, K - некоторое поле, $\mathscr{K}$ - его подполе. Тогда для любого линейного пространства L над $\mathscr{K}$ можно определить линейное пространство $K \underset{\mathscr{K}}{\otimes} L$, или L^K, над K, сохранив размерность. До введения языка тензорных произведений дать общее определение L^K затруднительно, но для практических щелей достаточно следующего полуфабриката: если $\{e_1, \ldots, e_n\}$ - базис L над $\mathscr{K}$, то L^K состоит из всех формальных линейных комбинаций $\left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i e_i | a_i \in K \right\}$, т. е. имеет тот же базис над K. В частности, $(\mathscr{K}^n)^K = K^n$. По $\mathscr{K}'$-линейному отображению $f : L \to M$ определяется K-линейное отображение $f^K : L^K \to M^K$: если f задано матрицей в некоторых базисах L и M, то f^K задается той же матрицей.

В заключение укажем одно приложение комплексификации:

Предложение. Пусть $f : L \to L$ - линейный оператор в вещественном пространстве размерности $\geqslant 1$. Тогда f имеет инвариантное подпространство размерности 1 или 2.

Proof. □

Если f имеет вещественное собственное значение, то подпространство, натянутое на соответствующий собственный вектор, инвариантно. В противном случае все собственные значения комплексны. Выберем одно из них $\lambda + i\mu$. Оно будет также собственным значением f^{C} в L^{C}. Возьмем соответствующий собственный вектор $l_1 + il_2$ в $L^c, l_1, l_2 \in L$. Согласно определениям $f^c(l_1 + il_2) = f(l_1) + if(l_2) = (\lambda + i\mu)(l_1 + il_2) = (\lambda l_1 - \mu l_2) + i(\mu l_1 + \lambda l_2)$.

Следовательно, $f(l_1) = \lambda l_1 - \mu l_2, f(l_2) = \mu l_1 + \lambda l_2$, и линейная обопочка $\{l_1, l_2\}$ в L f-инвариантна,

3.8 8 Linear Operators

Данная глава посвящена изучению линейных операторов - основных объектов линейной алгебры. Вводятся фундаментальные понятия собственного вектора и собственного подпространства, изучаются вопросы диагонализируемости (существование базиса, в котором матрица оператора диагональна). Также изучаются инварианты линейных операторов (при этом их полная теория над полем $\mathbb{C}$ будет построена в следующем разделе). В конце главы доказывается важная теорема Гамильтона-Кэли.

3.8.1 8.1 Definition and Simplest Properties

Для удобства напомним определение линейного оператора (=линейного преобразования) и его матрицы, а также перечислим те их свойства, которые были доказаны ранее.

Определение

8.1. Линейным оператором на линейном пространстве V называется линейное отображение $\varphi : V \to V$

Аналогично общему случаю линейных отображений, определяются ядро $\operatorname{Ker} \varphi$ и образ $\operatorname{Im} \varphi$ линейного оператора $\varphi : V \to V$. Они являются подпространствами V, причем если V конечномерно, то

$$\dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi = \dim V \tag{60}$$

Оператор $\varphi : V \to V$ биективен (то есть изоморфизм) тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} \varphi = 0$ и $\operatorname{Im} \varphi = V$, причем если V конечномерно, то два последних условия эквивалентны (ввиду формулы (60)).

Если $\{e_1, \ldots, e_n\}$ - базис в V, то матрицей φ в нем называется такая единственная матрица A порядка n, что

$$(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = (e_1, \ldots, e_n) A$$

Если $\vec{v}$ - координатный столбец вектора $v \in V$ в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$, а A - матрица оператора φ в том же базисе, то координатный столбец вектора $\varphi(v)$ в том же базисе равен $A\vec{v}$.

Если $\{e_1', \ldots, e_n'\}$ - новый базис в V, причем C - матрица перехода к нему от старого базиса, то $A' = C^{-1}AC$, где A' - матрица φ в новом базисе (см. (55)).

Note.

8.2. Сразу отметим важную особенность матрицы линейного оператора: ее определитель зависит только от самого оператора, но не от базиса, в котором она написана. Действительно,

$$\det A' = \det\left(C^{-1}AC\right) = (\det C)^{-1}(\det A)(\det C) = \det A$$

Это говорит о том, что у линейных операторов больше инвариантов, чем у общих линейных отображений, что приводит к их более сложной теории.

Заметим, что матрица (в данном базисе) композиции операторов равна произведению их матриц, матрица тождественного оператора является единичной матрицей (в любом базисе). Оператор φ - изоморфизм тогда и только тогда, когда его матрица A (в произвольном базисе) невырождена, при этом матрицей φ^{-1} в том же базисе является A^{-1}.

Note.

8.3. Выбор базиса в пространстве V задает изоморфизм алгебр $\mathcal{L}(V) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$. Вообще, можно заметить, что изоморфизм линейных пространств $\alpha : V \to U$ задает изоморфизм алгебр линейных операторов $\mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(U), \quad \varphi \mapsto \alpha\varphi\alpha^{-1}$, а для $U = \mathbb{K}^n$ любой линейный оператор является умножением столбцов на матрицу из $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$.

Из доказанного ранее также следует, что если A - матрица φ, то $\mathrm{rk}\, A = \dim \mathrm{Im}\, \varphi$ (и, таким образом, $\mathrm{rk}\, A$ не зависит от базиса, в котором написана A).

Рассмотрим несколько примеров линейных операторов.

Пример 8.4. Нулевой оператор, тождественный оператор Id_V, "гомотетия" $\lambda\, \mathrm{Id}_V$.

Пример 8.5. Пусть $V = U \oplus W$ и $\varphi : V \to V$ - проектор на U параллельно W, определенный в Примере 7.38. Ранее мы проверили его линейность. В Задаче 7.84 было доказано, что он удовлетворяет тождеству $\varphi^2 = \varphi$.

Докажем обратное, что любой линейный оператор $\varphi : V \to V$, удовлетворяющий тождеству $\varphi^2 = \varphi$, является проектором на $U := \mathrm{Im}\, \varphi \subset V$ параллельно $W := \mathrm{Ker}\, \varphi \subset V$. Действительно, любой вектор $v \in V$ представляется в виде

$$v = \varphi(v) + (v - \varphi(v)) \tag{61}$$

где первое слагаемое лежит в U, второе - в W, откуда $V = U + W$. Для доказательства того, что эта сумма прямая, можно либо воспользоваться формулой (60), либо доказать что $U \cap W = 0$ следующим образом. Пусть напротив, $0 \neq z \in U \cap W$, тогда $z = \varphi(v)$ для некоторого $v \in V$ и $\varphi(z) = 0$, откуда $0 = \varphi^2(v) = \varphi(v) = z$ - противоречие с $z \neq 0$. Теперь равенство (61) показывает, что действие нашего оператора на произвольный вектор $v \in V$ сводится к взятию его проекции на U параллельно прямому дополнению W.

Задача

8.6. Найдите количество матриц, порядка 4 и ранга 2 над полем $\mathbb{F}_q$ из q элементов, удовлетворяющих тождеству $A^2 = A$.

Пример 8.7. Рассмотрим оператор $\varphi : V \to V$, удовлетворяющий тождеству $\varphi^2 = \mathrm{Id}_V$.[37] Положим

$$V^+ := \{v \in V | \varphi(v) = v\}, \quad V^- := \{v \in V | \varphi(v) = -v\}$$

(заметим, что $V^+ = \mathrm{Ker}\,(\varphi - \mathrm{Id}_V)\,, V^- = \mathrm{Ker}\,(\varphi + \mathrm{Id}_V)$). Покажем что тогда $V = V^+ \oplus V^-$. В самом деле, для всякого $v \in V$ имеем

$$v = \frac{v + \varphi(v)}{2} + \frac{v - \varphi(v)}{2}$$

где первое слагаемое лежит в V^+, а второе - в V^-, откуда $V = V^+ + V^-$. Пересечение V^+ и V^-состоит из векторов, удовлетворяющих равенству $v = -v$, откуда $V^+ \cap V^- = 0$.

Легко видеть, что если $v = u + w$ - разложение произвольного вектора $v \in V$ в соответствии с прямой суммой $V = V^+ \oplus V^-$, то действие φ на v задается формулой $\varphi(v) = u - w$. Такой оператор φ естественно назвать "отражением относительно V^+параллельно V^-" (читателю предлагается нарисовать картинку). Легко видеть, что наоборот, любое такое отражение (связанное с разложением V в прямую сумму $V^+ \oplus V^-$подпространств) удовлетворяет тождеству $\varphi^2 = \mathrm{Id}_V$. Примером такого линейного оператора является оператор транспонирования на пространстве квадратных матриц $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ (какие в этом случае подпространства V^+и V^-?). Кстати, заодно мы дали "геометрическое" описание множества решений матричного уравнения $X^2 = E$ (в квадратных матрицах данного порядка n) они находятся в биективном соответствии с разложениями пространства $\mathbb{K}^n$ в прямую сумму своих подпространств.

Задача

8.8. Найдите количество решений уравнения $X^2 = E$ в матрицах порядка 3 над конечным полем $\mathbb{F}_q$ характеристики $\neq 2$.

Пример 8.9. Оператор поворота на плоскости (в трехмерном пространстве) на данный угол (вокруг данной оси на данный угол).

Пример 8.10. Оператор дифференцирования $\varphi = \frac{d}{dx}$ на пространстве $V = \mathbb{R}[x]_n$ многочленов степени не выше n. У этого оператора одномерное ядро (состоящее из констант) и $n-1$-мерный образ $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}[x]_{n-1} \subset \mathbb{R}[x]_n$. Заметим, что в этом случае $\operatorname{Ker}\varphi$ содержится в $\operatorname{Im}\varphi$.

Пример 8.11. Свойства оператора дифференцирования сильно зависят от того, на каком пространстве функций мы его рассматриваем. Рассмотрим, например, оператор $\varphi = \frac{d}{dx}$ на линейной оболочке функций

$$V := \langle \sin x, \cos x \rangle = \{\alpha \sin x + \beta \cos x | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

над $\mathbb{R}$ (указанную линейную оболочку мы рассматриваем как подпространство пространства дифференцируемых функций на действительной прямой). Легко видеть, что функции $\sin x, \cos x$ линейно независимы, поэтому $\dim V = 2$. Тогда φ является изоморфизмом пространства V на себя. Любопытно отметить, что матрица φ в базисе $\{\sin x, \cos x\}$ совпадает с матрицей поворота плоскости на угол $\pi/2$ в ортонормированнном базисе.

3.8.2 8.2 Invariant Subspaces

Пусть $\varphi : V \to V$ - линейный оператор на V.

Определение

8.12. Подпространство $U \subset V$ называется φ-инвариантным, если $\forall u \in U \varphi(u) \in U$ (коротко: $\varphi(U) \subset U$).

Ясно, что нулевое подпространство и все $V \varphi$-инвариантны (для любого оператора φ). Далее, легко показать, что любое подпространство, содержащееся в $\operatorname{Ker}\varphi$, а также любое подпространство, содержащее $\operatorname{Im}\varphi, \varphi$-инвариантны. Кроме того, сумма и пересечение инвариантных подпространств являются инвариантными подпространствами. Несложную проверку всех этих утверждений мы оставляем читателю.

Задача

8.13. Постарайтесь найти все инвариантные подпространства операторов из предыдущего параграфа.

Говорят, что два оператора φ и ψ на V коммутируют, если $\psi\varphi = \varphi\psi$. Очевидно, это равносильно тому, что их матрицы (в произвольном базисе) коммутируют: $AB = BA$.

Предложение

8.14. Если операторы φ и коммутируют, то $\operatorname{Ker}\varphi$ инвариантно относительно ψ, и наоборот. То же верно и для образов.

Proof. □

Докажем Предложение для ядер. Пусть $U := \operatorname{Ker}\varphi$. Тогда для любого $u \in U$ имеем

$$\varphi(\psi(u)) = \psi(\varphi(u)) = \psi(0) = 0$$

[037] В этом примере мы полагаем, что $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$.

откуда $\psi(u) \in U$.
Вот важный для дальнейшего пример такой пары операторов: φ и $\psi := \varphi - \lambda \operatorname{Id}_V$.

Определение

8.15. Если $U \subset V - \varphi$-инвариантное подпространство, то определен линейный оператор

$$\varphi|_U : U \to U, \quad \varphi|_U (u) = \varphi(u) \in U$$

на U, называемый ограничением [38] оператора φ на (инвариантное) подпространство U.

Наличие инвариантного подпространства позволяет предъявить базис, в котором матрица φ имеет специальный вид.

А именно, выберем базис $\{e_1, \ldots, e_k\}$ в подпространстве U и продолжим его до базиса $\{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ во всем пространстве V. Тогда матрица A оператора φ в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$ будет иметь вид

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \tag{62}$$

с квадратными матрицами B и D порядков k и $n - k$. Легко видеть, что матрица B является матрицей ограничения $\varphi|_U$ в базисе $\{e_1, \ldots, e_k\}$.

Обратно, если матрица имеет указанный выше вид, то линейная оболочка первых k базисных векторов является φ-инвариантным подпространством.

Note.

8.16. Матрица D тоже является матрицей некоторого оператора, который строится по φ и инвариантному подпространству U, а именно фактороператора, но его определение выходит за рамки базового курса. Подробности см. в параграфе 8.6.

Еще лучше, если удастся найти такой базис в V, в котором A будет иметь блочнодиагональный вид

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \tag{63}$$

А именно, рассмотрим оператор $\varphi : V \to V$, для которого V является прямой суммой φ-инвариантных подпространств U и $W, V = U \oplus W$. Тогда матрица φ в базисе в V, полученном объединением базисов в U и W, будет иметь требуемый вид, причем B и D будут матрицами $\varphi|_U$ и $\varphi|_W$ в соответствующих базисах подпространств.

Обратно, если матрица A оператора φ в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V имеет блочнодиагональный вид (63) с блоками порядков k и $n - k$ соответственно, то линейные оболочки $U := \langle e_1, \ldots, e_k \rangle$ и $W := \langle e_{k+1}, \ldots, e_n \rangle$ будут инвариантными подпространствами V такими, что $V = U \oplus W$.

Пример 8.17. Пусть $\{e_1, e_2, e_3\}$ - ортонормированный базис в трехмерном евклидовом пространстве. В нем матрица оператора поворота φ на угол α вокруг оси e_3 имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \mp\sin\alpha & 0 \\ \pm\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

поэтому линейные оболочки $\langle e_1, e_2 \rangle$ и $\langle e_3 \rangle$ φ-инвариантны.

Пример 8.18. Матрица A проектора (см. Примеры 7.38 и 8.5) на U параллельно W в объединении базисов U и W имеет вид

$$\begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[038] иногда также сужением оператора на подпространство U.

где $k = \dim U$.

Пример 8.19. Матрица A отражения (см. Пример 8.7) относительно U параллельно W в объединении базисов U и W имеет вид

$$\begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & -E_{n-k} \end{pmatrix}$$

где $k = \dim U, n-k = \dim W$.

Более общо, если $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ - разложение в прямую сумму φ-инвариантных подпространств, то матрица φ в объединении базисов подпространств V_i будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_k \end{pmatrix}$$

где блоки A_i - матрицы ограничений $\varphi|_{V_i}$ в соответствующих базисах.

Задача

8.20. Покажите, что для оператора $\varphi : V \to V, \dim V = n$ существует базис, в котором его матрица диагональная тогда и только тогда, когда V является прямой суммой $\oplus_{i=1}^n V_i$ одномерных φ-инвариантных подпространств $V_i \subset V$.

Определение

8.21. Оператор, для которого существует базис, в котором он имеет диагональную матрицу, называется диагонализируемым.

Вскоре мы увидим, что не все операторы диагонализируемы (при $\dim V > 1$), и опишем препятствия к диагонализируемости.

Задача

8.22. Покажите, что для оператора $\varphi : V \to V, \dim V = n$ существует базис, в котором его матрица верхняя треугольная тогда и только тогда, когда в V существует цепочка вложенных φ-инвариантных подпространств $0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n = V$, таких, что $\dim V_k = k, 0 \leq k \leq n$.

Далее мы докажем, что при $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ для любого оператора существует базис, в котором его матрица верхняя треугольная.

При каком условии, имея вид (62) для данного φ-инвариантного $U \subset V$, можно получить вид (63), выбирая последние $n-k$ базисных векторов? Очевидно, что это можно сделать тогда и только тогда, когда для $U \subset V$ существует φ-инвариантное прямое дополнение в V. Конечно, у любого подпространства есть прямое дополнение, но в общем случае неверно, что для φ-инвариантного подпространства существует φ-инвариантное прямое дополнение. Приведем соответствующий пример.

Пример 8.23. Рассмотрим оператор $\varphi := \frac{d}{dx}$ на пространстве $V := \mathbb{R}[x]_n$. Покажите, что все его инвариантные подпространства суть подпространства $\mathbb{R}[x]_k \subset V, 0 \leq k \leq n$ (указание: для произвольного инвариантного подпространства $U \subset V$ пусть $p \in U$ - содержащийся в нем многочлен максимальной степени, тогда покажите, что $U = \mathbb{R}[x]_k$, где $k = \deg p$). Таким образом, все инвариантные подпространства вложены в друг друга наподобие матрешки, поэтому ни у какого из них (за исключением нулевого и всего пространства) нет инвариантного прямого дополнения, а значит ни в каком базисе матрица φ не является блочно-диагональной. Тот факт, что матрица φ в базисе $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ является верхней треугольной, связан с тем, что данный базис согласован со "структурой матрешки" в том смысле, что линейная оболочка $\{1, x, x^2, \ldots, x^k\}$ для любого $0 \leq k \leq n$ совпадает с $\mathbb{R}[x]_k$ и, таким образом, φ-инвариантна.

Заметим, что матрица оператора дифференцирования из предыдущего примера в базисе $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ не просто верхнетреугольная, а удовлетворяет более сильному условию: она является верхнетреугольной с нулями на главной диагонали. Такие матрицы называются (верхними) нильтреугольными.

Задача

8.24. Как нужно усилить условие существования чепочки вложенных φ инвариантных подпространств $0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_n = V$ из Задачи 8.22, чтобы получить критерий существования у оператора нильтреугольной матрицы?

В следующем Предложении мы используем понятия и обозначения из параграфа 7.6.

Предложение

8.25. Пусть $\varphi : V \to V$ - линейный оператор. Тогда подпространство $U \subset V\varphi$ инвариантно тогда и только тогда, когда его аннулятор $U^0 \subset V^*\varphi^\star$-инвариантен.

Proof. □

Пусть $\varphi(U) \subseteq U$. Тогда для произвольных $f \in U^0$ и $u \in U$ имеем $\varphi^\star(f)(u) = f(\varphi(u)) = 0$, откуда $\varphi^\star(f) \in U^0$. То есть $\varphi^\star\left(U^0\right) \subseteq U^0$. Для доказательства обратной импликации применим к $\varphi^\star\left(U^0\right) \subseteq U^0$ уже доказанное утверждение, получим $\varphi^{\star\star}\left(U^{00}\right) \subseteq U^{00}$, что при каноническом изоморфизме $\vartheta^V : V \to V^{**}$ отождествляется с $\varphi(U) \subseteq U$ (чтобы в этом убедиться, нужно воспользоваться Предложением 7.110 и пунктом 3) Предложения 7.115).

Доказанное Предложение показывает, что n - 1 -одномерные инвариантные подпространства оператора φ, заданного на n-мерном пространстве V, являются ядрами линейных функций, являющихся собственными векторами (см. следующий параграф) линейно-сопряженного преобразования $\varphi^\star$.

Задача

8.26. Докажите, что если операторы φ, ψ на конечномерном комплексном линейном пространстве V коммутируют, то в V существует базис, в котором их матрицы одновременно являются верхними треугольными. [39]

Решение. Требуемый результат будем доказывать индукцией по $n = \dim V$. Случай $n = 1$ тривиален. Пусть $n \geq 2$ и предположим, что результат верен для пространств размерности $\leq n-1$.

Если операторы φ, ψ коммутируют, то и $\varphi^\star, \psi^\star$ тоже коммутируют. Тогда у последних есть общий собственный вектор $f \in V^*$. (В самом деле, рассмотрим какое-то собственное подпространство оператора $\varphi^\star$; оно $\psi^\star$-инвариантно и значит в нем есть собственный вектор оператора $\psi^\star$). Тогда $f = 0$ задает общее для φ и ψ инвариантное подпространство $U \subset V$ размерности $n-1$. По предположению индукции, в U для $\varphi|_U$ и $\psi|_U$ есть требуемый базис; дополняя его произвольным вектором из $V \backslash U$, получаем требуемый базис во всем V для φ и ψ.

3.8.3 8.3 Eigenvectors and Subspaces

Пусть вектор $v \in V$ порождает одномерное φ-инвариантное подпространство $\langle v \rangle \subset V$. Тогда $v \neq 0$ и $\varphi(v) = \lambda v$ для некоторого скаляра $\lambda \in \mathbb{K}$. Такие векторы играют очень важную роль в изучении операторов и имеют специальное название.

[039] Заметим, что результат верен для произвольного множества таких операторов.

Определение

8.27. Пусть V - векторное пространство над полем $\mathbb{K}$. Ненулевой вектор $v \in V$ называется собственным вектором оператора $\varphi : V \to V$, отвечающим собственному значению $\lambda \in \mathbb{K}$, если $\varphi(v) = \lambda v$.

Легко видеть (ср. Задачу 8.20), что оператор $\varphi : V \to V$ диагонализируем тогда и только тогда, когда существует базис в V, состоящий из его собственных векторов.

Например, любой ненулевой вектор из ядра (если такой есть) - собственный вектор с собственным значением 0. Для $\varphi = \mathrm{Id}_V$ любой ненулевой вектор $v \in V$ является собственным с собственным значением 1.

Вот менее тривиальные примеры.

Пример 8.28. Пусть $V = U \oplus W$ и $\varphi : V \to V$ - проектор на U параллельно W (см. Пример 7.38). Какие у него могут быть собственные значения? Из Задачи 7.84 мы знаем, что проектор удовлетворяет тождеству $\varphi^2 = \varphi$. Поэтому если $v \in V$ - собственный вектор φ, отвечающий собственному значению λ, то

$$\lambda v = \varphi(v) = \varphi^2(v) = \varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v) = \lambda^2 v$$

откуда $\lambda(\lambda - 1)v = 0$, но так как $v \neq 0$, то либо $\lambda = 0$ либо $\lambda = 1$. Соответствующие собственные векторы легко предъявить. А именно, любой ненулевой вектор из U - собственный вектор φ с собственным значением 1, а любой ненулевой вектор из W - собственный вектор φ с собственным значением 0.

Пример 8.29. Аналогично предыдущему примеру можно показать (сделайте это!), что для оператора отражения $\varphi^2 = \mathrm{Id}_V$ собственными значениями могут быть только $\lambda = \pm 1$. Если использовать обозначения Примера 8.7, то любой ненулевой вектор из V^+-собственный вектор с собственным значением 1, а любой ненулевой вектор из V^-- собственный вектор с собственным значением -1. В частности, у оператора транспонирования на пространстве $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ имеются два собственных значения: 1 и - 1, собственные векторы для $1-$
ненулевые симметричные матрицы, собственные векторы для -1 - ненулевые кососимметрические матрицы.

Пример 8.30. Оператор поворота на евклидовой плоскости на угол $\alpha \neq \pi k$ не имеет собственных векторов.

Пример 8.31. Единственным собственным значением оператора поворота трехмерного евклидова пространства V на угол $\alpha \neq \pi k$ вокруг оси $\langle a \rangle (0 \neq a \in V)$ является 1, а соответствующими собственными векторами является ненулевые векторы из $\langle a \rangle \subset V$.

Пример 8.32. Рассмотрим линейную оболочку $V := \left\langle e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x} \right\rangle$ функций над $\mathbb{R}$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ - попарно различные вещественные числа. Легко показать, что указанные функции линейно независимы (над $\mathbb{R}$), то есть $\dim V = n$. Проще всего это сделать, записав линейную зависимость между ними, продифференцировать ее $n-1$ раз, а затем воспользоваться невырожденностью определителя Вандермонда. Рассмотрим $\varphi := \frac{d}{dx}$ на V. Легко видеть, что функции $e^{\lambda_k x}$ - собственные векторы оператора φ с собственными значениями λ_k и в базисе $\left\{e^{\lambda_1 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}\right\}$ пространства V оператор φ имеет диагональную матрицу $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$.

Пример 8.33. Пусть $V = \mathbb{R}[x]_n, \varphi = \frac{d}{dx}$. В данном случае собственные векторы с собственным значением λ - такие многочлены $p \neq 0$, что $p' = \lambda p$. Так как производная любого ненулевого многочлена имеет строго меньшую степень, чем сам многочлен, то единственно возможное собственное значение $-\lambda = 0$.[40] Действительно, существуют собственные векторы с собственным значением 0: это ненулевые константы. Заметим, что при $n > 0$ в V не существует базиса из собственных векторов оператора φ, то есть он не диагонализируем.

Во всех рассмотренных примерах операторы имели конечное число собственных значений. Это верно для любого оператора в конечномерном пространстве (мы вскоре это докажем). Как искать собственные значения данного оператора φ?

Во-первых, заметим, что скаляр $\lambda \in \mathbb{K}$ является собственным значением оператора $\varphi : V \to V$ тогда и только тогда, когда подпространство

$$V_\lambda := \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \, \mathrm{Id}_V) \subset V \tag{64}$$

ненулевое, $V_\lambda \neq 0$. Действительно, любой собственный вектор оператора φ с собственным значением λ лежит в V_λ, и наоборот, любой ненулевой вектор из V_λ является собственным с собственным значением λ.

Определение

8.34. Ненулевое подпространство V_λ, определенное равенством (64), называется собственным подпространством оператора φ, отвечающим собственному значению λ (или, более коротко, с собственным значением λ).

Таким образом, собственное подпространство V_λ состоит из всех собственных векторов оператора φ с собственным значением λ, и нулевого вектора.

Пример 8.35. Из Примера 8.28 следует, что для проектора $\varphi : V \to V$ на U параллельно W подпространство U является собственным подпространством с собственным значением 1 (при $\varphi \neq 0$), а W - собственным подпространством с собственным значением 0 (при $\varphi \neq \mathrm{Id}_V$). (Заметим, что вообще, если у оператора ненулевое ядро, то оно является собственным подпространством с собственным значением 0).

Пример 8.36. Аналогично, из Примера 8.29 следует, что для оператора отражения $\varphi : V \to V$ подпространство V^+является собственным подпространством с собственным значением 1 (при $\varphi \neq -\mathrm{Id}_V$), а V^-- собственным подпространством с собственным значением -1 (при $\varphi \neq \mathrm{Id}_V$). В частности, у оператора транспонирования на пространстве $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ имеются два собственных подпространства: подпространство симметрических матриц (собственное подпространство, отвчающее собственному значению 1), и подпространство кососимметрических матриц (отвечающее собственному значению -1).

Читателю предлагается описать собственные подпространства для остальных примеров линейных операторов, рассмотренных выше.

Задача

8.37. Докажите, что любое собственное подпространство V_λ оператора $\varphi\varphi$ инвариантно. (Указание: воспользуйтесь Предложением 8.14).

Задача

8.38. 1) Покажите, что оператор $\varphi : V \to V$, для которого любой вектор $0 \neq v \in V$ является собственным, имеет вид $\lambda \,\mathrm{Id}_V$.
2) Выведите из предыдущего пункта следующий результат: оператор, коммутирующий со всеми операторами на V, имеет вид $\lambda \,\mathrm{Id}_V$ (ср. с Задачей 2.12)

Решение. Пусть дан оператор φ, для которого любой ненулевой вектор является собственным; докажем, что у него единственное собственное значение. Действительно, если u, v - собственные векторы φ, отвечающие собственным значениям $\lambda \neq \mu$, то, во-первых, они неколлинеарны, а во-вторых, $\varphi(u+v) = \lambda u + \mu v$, но одновременно $u+v$ - собственный вектор φ с некоторым собственным значением ν, то есть $\varphi(u+v) = \nu(u+v)$, откуда $(\lambda-\nu)u + (\mu-\nu)v = 0$, поэтому из линейной независимости u и v получаем $\lambda = \nu = \mu$.

Для доказательства пункта 2) воспользуемся следующим соображением. Если φ коммутирует с оператором ψ, то, согласно Предложению 8.14, подпространство $\operatorname{Ker}\psi \subset V$ является φ-инвариантным. Так как любое подпространство в V является ядром какого-то оператора на V, то любое подпространство в V является φ-инвариантным. Причем из пункта 1) следует, что достаточно рассмотреть одномерные подпространства: если любое одномерное подпространство в V является φ-инвариантным, то $\varphi = \lambda \,\mathrm{Id}_V$.

Более конкретно, для любого $0 \neq v \in V$ существует такой оператор $\psi : V \to V$, для которого $\operatorname{Ker}\psi = \langle v \rangle$. Тогда если φ коммутирует со всеми операторами на V, в частности, с ψ, то, согласно Предложению 8.14, подпространство $\langle v \rangle \subset V$ является φ-инвариантным, то есть v - собственный вектор φ. Поскольку это верно для любого ненулевого вектора v, то по пункту 1) оператор φ имеет требуемый вид.

Равенство (64) подсказывает метод нахождения собственных подпространств. А именно, пусть в V выбран базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и A - матрица оператора φ в этом базисе.

---

[040] Для доказательства этого можно было бы также воспользоваться соотношением $\varphi^{n+1} = 0$.

Тогда оператор $\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V$ в этом базисе имеет матрицу $A - \lambda E$. Его вырожденность (то есть условие $V_\lambda \neq 0$) равносильно вырожденности матрицы $A - \lambda E$, что, как мы знаем из теории определителей, равносильно равенству $\det(A - \lambda E) = 0$.

Таким образом, $\lambda \in \mathbb{K}$ - собственное значение φ тогда и только тогда, когда $\det(A$ - $\lambda E) = 0$, где A - матрица φ (в произвольном базисе).

Для произвольной матрицы $A \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{K})$ порядка n рассмотрим выражение $\chi_A(t) := \det(tE - A) = (-1)^n \det(A - tE)$ от переменной t. То есть $\chi_A(t)$ - определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} - t & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - t & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - t \end{pmatrix} \tag{65}$$

взятый со знаком $(-1)^n$. Так как определитель матрицы равен сумме со знаками произведений, в которые входит по одному элементу из каждой строки и из каждого столбца (см. формулу полного разложения определителя (19)), то $\chi_A(t)$ является многочленом от t степени n с коэффициентами из поля $\mathbb{K}$, то есть $\chi_A(t) \in \mathbb{K}[t]$. Более точно,

$$\chi_A(t) = t^n - (\operatorname{tr} A)t^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det A \tag{66}$$

Чтобы убедиться в том, что коэффициент перед t^{n-1} действительно равен $-\operatorname{tr} A$, заметим, что если в формулу полного разложения определителя матрицы (65) входит произведение ее элементов, содержащее недиагональный элемент a_{ij}, то в это произведение не входят диагональные элементы $a_{ii} - t$ и $a_{jj} - t$, а значит оно является многочленом от t степени, не превосходящей $n - 2$. Таким образом, коэффициенты перед t^{n-1} в $\chi_A(t)$ и в $(a_{11} - t)(a_{22} - t) \ldots (a_{nn} - t)$ равны, а последний, как легко видеть, равен $-\operatorname{tr} A$. Для нахождения свободного члена достаточно положить $t = 0$ в определении $\chi_A(t)$.

Из доказанного выше следует, что $\lambda \in \mathbb{K}$ является собственным значением оператора φ тогда и только тогда, когда λ - корень многочлена $\chi_A(t)$ (для матрицы A оператора φ в произвольном базисе).

Выше мы уже видели, что некоторые характеристики матриц линейных операторов не зависят от выбора базиса, в котором записывается матрица, и, таким образом, являются инвариантами самого оператора. Таковы например $\operatorname{rk} A$ (являющийся инвариантом даже для линейных отображений) и $\det A$. Поэтому можно говорить про ранг линейного отображения $\operatorname{rk} \varphi$ (в частности, линейного оператора) и определитель линейного оператора, $\det \varphi$.

Оказывается, для всех матриц A одного оператора φ многочлены $\chi_A(t)$ совпадают. Действительно, если A' - матрица того же оператора в новом базисе, связанном с исходным матрицей перехода C, то $A' = C^{-1}AC$ и мы имеем

$$\begin{aligned} \chi_{A'}(t) = \det(tE - A') = \det\left(C^{-1}(tE)C - C^{-1}AC\right) = \det\left(C^{-1}(tE - A)C\right) = \\ = (\det C)^{-1}(\det(tE - A)) \det C = \det(tE - A) = \chi_A(t) \end{aligned} \tag{67}$$

Равенство $\chi_{A'}(t) = \chi_A(t)$ является равенством двух многочленов, в частности, выполнено при любом $t \in \mathbb{K}$ (напомним, мы рассматриваем случай $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). Так как степени переменной t линейно независимы как функции, то отсюда следует, что все коэффициенты указанных многочленов равны. Поэтому многочлен $\chi_A(t)$ (и все его коэффициенты, в частности, след $\operatorname{tr} A$ и определитель $\det A$) являются инвариантами линейного оператора. Многочлен $\chi_A(t)$ называется характеристическим многочленом оператора φ и обозначается $\chi_\varphi(t)$. То, что этот многочлен является инвариантом оператора φ (то есть не зависит от базиса, в котором рассматривается его матрица), называется инвариантностъю характеристического многочлена.

Note.

8.39. Инвариантность характеристических многочленов имеет место для операторов над произвольным полем $\mathbb{K}$ (а не только $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$). Причем доказательство дается той же выкладкой (67), только ее результат нужно проинтерпретировать как равенство определителей матриц с элементами в коммутативном кольце $\mathbb{K}[t]$. Теория определителей таких матриц вполне аналогична теории определителей матриц с элементами из поля, и заинтересованный читатель легко убедится, что основные результаты об определителях непосредственно переносятся на этот случай.

Более подробно, $tE - A, tE - A' \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}[t])$, и тогда $\det(tE - A)$, $\det(tE - A') \in \mathbb{K}[t]$ и выкладка (67) показывает, что $\chi_A(t)$ и $\chi_{A'}(t)$ равны как формальные многочлены (а не только как функции).

Задача

8.40. Найдите характеристические многочлены для рассмотренных выше примеров линейных операторов.

Задача

8.41. Верно ли, что если характеристические многочлены матрич A и B совпадают, то указанные матрицы являются матрицами одного оператора в разных базисах?

Задача

8.42. Пусть φ - оператор поворота в трехмерном евклидовом пространстве на угол α. Пусть A - матрица этого оператора в некотором (не облзательно ортонормированном) базисе. Выразите угол поворота α через элементы матрицы A. (Указание: восполъзуйтесь инвариантностью следа).

Задача

8.43. Пусть φ - проектор, то есть $\varphi^2 = \varphi$. Докажите, что $\mathrm{rk}\,\varphi = \mathrm{tr}\,\varphi$.

Задача

8.44. Докажнте, что любой многочлен $f(t) \in \mathbb{K}[t]$ степени п со старшим коэффициентом 1 является характеристическим многочленом некоторой матрицы $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$. (Указание: постарайтесь построить такую матричу явно для произвольного такого многочлена).

Выше мы фактически доказали следующую Теорему.

Теорема

8.45. Элемент $\lambda \in \mathbb{K}$ является собственным значением оператора φ тогда и только тогда, когда он является корнем его характеристического многочлена $\chi_\varphi(t)$, лежашим в поле $\mathbb{K}$.

Напомним, что у многочлена $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ степени n не более n корней в $\mathbb{K}$ с учетом кратности (в частности, не более n различных корней), причем если поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто [41], то их в точности n с учетом кратности. Таким образом, у оператора в n-мерном пространстве не более n различных собственных значений, но может быть и меньше: корни характеристического многочлена могут быть кратными, а могут не принадлежать полю $\mathbb{K}$, если последнее не алгебраически замкнуто.

Причину последней оговорки (про поле) в формулировке предыдущей Теоремы проясняет следующий пример.

Пример 8.46. Пусть φ - оператор поворота на угол $\pi/2$ на евклидовой плоскости (это векторное пространство над полем $\mathbb{R}$). Мы знаем, что у него нет собственных векторов, а значит нет и собственных значений. В то же время в ортонормированном базисе он имеет матрицу $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и его характеристической многочлен равен $\chi_\varphi(t) = t^2 + 1$. Этот многочлен не имеет вещественных корней, в то же время имеет два комплексных корня $\pm i$.

Чтобы отличить собственные значения оператора от общих корней его характеристического многочлена (которые не обязаны лежать в поле $\mathbb{K}$), последние мы будем называть характеристическими числами оператора. Таким образом, собственные значения - в точности характеристические числа, которые лежат в поле $\mathbb{K}$ (напомним, что это поле, над которым определено наше векторное пространство).

Следствие

8.47. Всякий оператор в пространстве положительной размерности над полем $\mathbb{C}$ имеет собственный вектор.

Proof. □

Пусть $\varphi : V \to V$ - такой оператор и $\chi_\varphi(t) \in \mathbb{C}[t]$ - его характеристический многочлен. Из алгебраической замкнутости поля $\mathbb{C}$[42] следует, что $\chi_\varphi(t)$ имеет комплексный корень $\lambda \in \mathbb{C}$. Согласно предыдущей Теореме, он будет собственным значением оператора φ.

Задача

8.48. Пусть V - нечетномерное векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, тогда любой линейный оператор $\varphi : V \to V$ имеет собственный вектор.

Результат предыдущей задачи имеет топологическое объяснение. Приведем его для случая $\dim V = 3$. Во-первых, если оператор $\varphi : V \to V$ вырожден, то у него есть собственный вектор с собственным значением 0. Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда φ невырожден и у него нет собственных векторов. Зададим на V скалярное произведение и пусть $S(V) \subset V$ - единичная сфера, состоящая из всех векторов единичной длины. Из нашего предположения следует, что для любого $u \in S(V)$ компонента вектора $\varphi(u)$, ортогональная u, отлична от нуля; обозначим ее $\psi(u)$. Ясно, что $\psi(u)$ непрерывно зависит от u. То есть по оператору φ без собственных векторов мы построили непрерывную функцию $\psi : S(V) \to V$ такую, что $\forall u \in S(V) \psi(u) \neq 0$ и $\psi(u) \perp u$. Откладывая вектор $\psi(u)$ от конца вектора $u \in S(V)$, мы получим непрерывное векторное поле на двумерной сфере $S(V) = S^2$, нигде не обращающееся в нуль.

Согласно известной теореме о еже (по-английски называемой "hairy ball theorem"), доказываемой в топологии, такого векторного поля не существует, что связано с тем фактом, что топологическая Эйлерова характеристика четномерной сферы равна 2. Это рассуждение обобщается на случай произвольного четномерного вещественного пространства.

Note.

8.49. Мы знаем, что в четномерном вещественном векторном пространстве не любой оператор имеет одномерное инвариантное подпространство (которое обязательно порождается собственным вектором). Однако любой линейный оператор на конечномерном вещественном пространстве положительной размерности имеет одно- или двумерное инвариантное подпространство. Доказательство этого факта дано ниже (см. Следствие 12.64), интересующийся читатель может прочитать его прямо сейчас (или доказать этот факт самостоятельно). Отметим, что этот результат - следствие того, что любой неприводимый многочлен над $\mathbb{R}$ имеет степень 1 или 2.

Теперь мы знаем как искать собственные значения оператора φ, осталось выяснить как искать соответствующие собственные подпространства V_λ. Так как $V_\lambda = \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{Id}_V)$, то в базисе, в котором φ имеет матрицу A, нахождение $V_\lambda \subset V$ сводится к решению

[041] Алгебраическая замкнутость поля $\mathbb{K}$ означает, что любой многочлен $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ положительной степени имеет корень в $\mathbb{K}$, отсюда по теореме Безу следует формулируемый далее результат.

[42] В этом курсе мы этот факт принимаем без доказательства.

СЛОУ с матрицей коэффициентов $A - \lambda E$. То есть ФСР указанной системы даст базис в V_λ. Заметим, что так как λ - корень характеристического многочлена, то $\det(A-\lambda E) = 0$, поэтому указанная система имеет нетривиальное решение, причем $\dim V_\lambda = \dim V - \mathrm{rk}(\varphi$ - $\lambda \, \mathrm{Id}_V)$ (см. формулу (60))

Таким образом, алгоритм решения задачи на нахождение собственных векторов оператора φ в конечномерном пространстве V над полем $\mathbb{K}$ следующий. Выбираем в V какой-то базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$, находим матрицу A оператора φ в этом базисе. Находим его характеристический многочлен $\chi_\varphi(t) = \det(tE - A)$. Находим корни $\chi_\varphi(t)$, лежащие в поле $\mathbb{K}$, они - в точности все собственные значения φ. Пусть $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ - все собственные значения φ. Для каждого λ_i решаем СЛОУ с матрицей $A - \lambda_i E$, тем самым находим собственное подпространство V_{λ_i}. (Точнее, выбрав базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$, мы отождествили V с пространством столбцов $\mathbb{K}^n$, при этом изоморфизме V_{λ_i} отождествляется с пространством решений указанной системы).

3.8.4 8.4 Diagonalizability

Из Задачи 8.20 (или непосредственно из определений диагонализируемости и собственного вектора) легко следует, что оператор $\varphi : V \to V$ диагонализируем тогда и только тогда, когда в V существует базис, состоящий из его собственных векторов. В таком базисе (если он существует) матрица φ будет диагональной с собственными значениями на главной диагонали. Главная цель данного параграфа - получить удобный критерий существования для оператора φ базиса из собственных векторов.

Вот первый важный результат в этом направлении.

Теорема

8.50. Собственные подпространства оператора φ, отвечающие разным собственным значениям, линейно независимы.

Proof. □

Очевидно, что одно собственное подпространство линейно независимо. Пусть $V_1, \ldots, V_k$ - набор из k собственных подпространств оператора φ, отвечающих попарно различным собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Предположим по индукции, что набор из $k-1$ собственного подпространства $V_1, \ldots, V_{k-1}$ линейно независим; докажем, что тогда и $V_1, \ldots, V_k$ линейно независимы.

Нам нужно доказать, что если

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_k = 0 \tag{68}$$

причем $v_i \in V_i$, то все $v_i = 0$. Применяя к обеим частям равенства (68) оператор φ, получаем

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{k-1} v_{k-1} + \lambda_k v_k = 0 \tag{69}$$

Вычитая теперь из (69) умноженное на λ_k (68), получаем

$$(\lambda_1 - \lambda_k)\, v_1 + \ldots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k)\, v_{k-1} = 0$$

откуда с учетом индуктивного предположения имеем $(\lambda_i - \lambda_k)\, v_i = 0$ при $i = 1, \ldots, k-1$, но так как $\lambda_i - \lambda_k \neq 0$, то $v_1 = \ldots = v_{k-1} = 0$, откуда с учетом (68) также и $v_k = 0$, что и требовалось доказать.

Обобщение доказанной Теоремы см. в Задаче 8.64.
Таким образом, $V_1 \oplus \ldots \oplus V_k \subset V$, и в V существует базис, состоящий из собственных векторов оператора φ тогда и только тогда, когда

$$V_1 \oplus \ldots \oplus V_k = V \tag{70}$$

Мы знаем, что равенство (70) равносильно тому, что $\sum\limits_{i=1}^{k} \dim V_i = \dim V$ (см. Предложение7.25).

Рассмотренные ранее Примеры 8.35 и 8.36 показывают, что примерами диагонализируемых операторов являются проекторы (поскольку если $\varphi : V \to V$ - проектор, связанный с разложением $V = U \oplus W$, то подпространства U и W - его собственные подпространства с собственными значениями 1 и 0 соответственно) и отражения (поскольку если $\varphi : V \to V$ - отражение, то $V = V^+ \oplus V^-$, где V^+и V^-- собственные подпространства с собственными значениями 1 и -1 соответственно).

Note.

8.51. Пусть оператор $\varphi : V \to V$ диагонализируем и $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ - соответствующее разложение V в прямую сумму его собственных подпространств, $V_i := V_{\lambda_i}$. Пусть $P_i : V \to V$ - проектор на подпространство $V_i \subset V$ параллельно прямой сумме оставшихся подпространств, $i = 1, \ldots, k$. Тогда $P_i^2 = P_i, P_iP_j = 0$ при $i \neq j$ и $P_1 + \ldots + P_k = \mathrm{Id}_V$.

Кроме того, оператор φ равен $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i P_i$, так как φ и указанная линейная комбинация проекторов одинаково действуют на произвольный вектор. Последнее выражение называется спекралъным разложением оператора φ.

Из предыдущей Теоремы следует следующее достаточное условие диагонализируемости.

Следствие

8.52. Если характеристический многочлен $\chi_\varphi(t)$ имеет $n = \dim V$ различных корней, принадлежащих полю $\mathbb{K}$, то оператор φ диагонализируем.

Proof. □

Каждый корень $\chi_\varphi(t)$, принадлежащий полю $\mathbb{K}$, является собственным значением φ, то есть φ имеет $n = \dim V$ различных собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, и каждому из них отвечает собственное подпространство $V_i \neq 0$, причем собственные подпространства образуют прямую сумму. Значит, $\dim(V_1 \oplus \ldots \oplus V_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dim V_i \geq n$ и значит $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$.

Пример тождественного оператора (или проектора) показывает, что предыдущее достаточное условие диагнализируемости не является необходимым.

Пусть $\varphi : V \to V$-линейный оператор, $U \subset V$ — φ-инвариантное подпространство, $\varphi|_U : U \to U$ - ограничение φ на U.

Предложение

8.53. Характеристический многочлен ограничения оператора на инвариантное подпространство делит характеристический многочлен самого оператора, $\chi_{\varphi|_U}(t) | \chi_\varphi(t)$.

Proof. □

Выберем базис $\{e_1, \ldots, e_k\}$ в U и продолжим его до базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V, тогда матрица A оператора φ в нем будет иметь блочнотреугольный вид

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

где B - матрица $\varphi|_U$ в базисе $\{e_1, \ldots, e_k\}$ (см. (62)). Имеем

$$\chi_\varphi(t) = \det(tE - A) = \det \begin{pmatrix} tE - B & -C \\ 0 & tE - D \end{pmatrix} =$$
$$= \det(tE - B)\det(tE - D) = \chi_{\varphi|U}(t)\det(tE - D)$$

где мы воспользовались Теоремой 3.38.
Напомним, что называется корнем кратности m многочлена $p(t)$, если $p(t) = (t$ - c) $^{m}q(t)$, где $q(c) \neq 0$.

Определение

8.54. Назовем алгебраической кратностью собственного значения λ оператора φ кратность λ как корня характеристического многочлена $\chi_\varphi(t)$. Обозначим ее $m(\lambda)$.

Определение

8.55. Назовем геометрической кратностью собственного значения λ оператора φ размерность соответствующего ему собственного подпространства $V_\lambda \subset V$. Обозначим ее $g(\lambda)$.

Следствие

8.56. Для любого собственного значения λ оператора φ его геометрическая кратность не превосходит алгебрачческую, $g(\lambda) \leq m(\lambda)$.

Proof. □

Напомним (см. Задачу 8.37), что для любого собственного значения λ оператора φ соответствующее собственное подпространство $V_\lambda \varphi$-инвариантно. Заметим, что ограничение $\varphi|_{V_\lambda}$ оператора φ на собственное подпространство V_λ является оператором умножения на λ, то есть $\varphi|_{V_\lambda} = \lambda \operatorname{Id}_{V_\lambda}$. Поэтому $\chi_{\varphi|_{V_\lambda}}(t) = (t - \lambda)^{g(\lambda)}$. Согласно предыдущему Предложению $(t-\lambda)^{g(\lambda)} | \chi_\varphi(t)$.

Легко привести примеры операторов, у которых геометрические кратности собственных значений равны алгебраическим (тождественный, проекторы). Следующий пример показывает, что неравенство в предыдущем Следствии может быть строгим.
Пример 8.57. Рассмотрим оператор $\varphi := \frac{d}{dx}$ на пространстве $V := \mathbb{R}[x]_n$. Легко посчитать, что $\chi_\varphi(t) = t^{n+1}$. В то же время единственному собственному значению $\lambda = 0$ отвечает одномерное собственное подпространство (состоящее из констант). Значит, $1 = g(\lambda) < m(\lambda) = n+1$ при $n > 0$.

Напомним, что для многочлена $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ степени n число его корней в поле $\mathbb{K}$ с учетом кратности не превосходит n, причем в точности равно n тогда и только тогда, когда все корни $p(t)$ принадлежат $\mathbb{K}$ (равносильно, когда $p(t)$ раскладывается на линейные множители над полем $\mathbb{K}$), см. Теорему 5.16.

Теперь мы в состоянии доказать обещанный ранее критерий диагонализируемости.

Теорема

8.58. Для существования в V базиса из собственных векторов оператора $\varphi : V \to V$ необходимо и достаточно одновременного выполнения следующих двух условий:

1. все корни характеристического многочлена $\chi_\varphi(t)$ лежат в поле $\mathbb{K}$ (и, значит, являются собственными значениями φ);

2. для каждого собственного значения λ оператора φ его геометрическая кратность равна алгебраической, $g(\lambda) = m(\lambda)$.

Proof. □

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ - все различные собственные значения оператора φ, $g_1, \ldots, g_k$ - их геометрические, а $m_1, \ldots, m_k$ - алгебраические кратности. Базис из собственных векторов φ существует тогда и только тогда, когда $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$, что равносильно

$$n := \dim V = \sum_{i=1}^{k} g_i \tag{71}$$

(ср. текст после Теоремы 8.50).
С другой стороны,

$$n = \deg \chi_\varphi(t) \geq \sum_{i=1}^{k} m_i \tag{72}$$

причем в силу замечания перед этой Теоремой, равенство имеет место тогда и только тогда, когда выполнено условие 1).

Если не выполнено условие 1), то $n > \sum\limits_{i=1}^{k} m_i$, а так как $g_i \leq m_i$ при $i = 1, \ldots, k$, то тем более $n > \sum\limits_{i=1}^{k} g_i$ и значит φ не диагонализируем.

Если не выполнено условие 2), то для какого-то $ig_i < m_i$, откуда $\sum\limits_{i=1}^{k} g_i < \sum\limits_{i=1}^{k} m_i \leq n$, и значит φ опять не диагонализируем.

Таким образом, если φ диагонализируем, то выполнены оба условия 1) и 2) [43].
С другой стороны, если выполнены и 1) и 2), то $n = \sum\limits_{i=1}^{k} m_i$ и $g_i = m_i$ при $i = 1, \ldots, k$, а значит выполнено (71), что, как мы видели, равносильно диагонализируемости.

Мы видим, что препятствия к диагонализируемости бывают двух типов. Первый тип связан с тем, что поле $\mathbb{K}$ не замкнуто алгебраически и поэтому не все корни характеристического многочлена в нем лежат. Этот случай "лечится" расширением поля (например, поля $\mathbb{R}$ до поля $\mathbb{C}$). Рассмотрим пример такого рода.

Пример 8.59. Рассмотрим оператор $\varphi := \frac{d}{dx}$ на линейной оболочке

$$V := \langle \sin x, \cos x \rangle_{\mathbb{R}} = \{\alpha \sin x + \beta \cos x | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

над полем $\mathbb{R}$. Он имеет матрицу $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ в базисе $\{\sin x, \cos x\}$ и его характеристический многочлен $\chi_\varphi(t) = t^2 + 1$ не имеет вещественных корней (соответственно у φ нет собственных векторов).

Рассмотрим теперь

$$V^{\mathbb{C}} := \langle \sin x, \cos x \rangle_{\mathbb{C}} = \{\alpha \sin x + \beta \cos x | \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$$

- линейную оболочку тех же функций над полем $\mathbb{C}$ с базисом $\{\sin x, \cos x\}$. Таким образом, она является двумерным векторным пространством над полем $\mathbb{C}$, и на ней также действует ($\mathbb{C}$-линейный) оператор $\varphi^{\mathbb{C}} = \frac{d}{dx}$, имеющий ту же матрицу в базисе $\{\sin x, \cos x\}$. Однако у $\varphi^{\mathbb{C}}$ уже есть собственные значения i и $-i$, являющиеся комплексными корнями многочлена $t^2 + 1$. Это приводит к тому, что у $\varphi^{\mathbb{C}}$ есть собственные векторы e^{ix} (с собственным значением i) и e^{-ix} (с собственным значением $-i$), поскольку $\frac{d}{dx} e^{\alpha x} = \alpha e^{\alpha x}$ для $\alpha \in \mathbb{C}$. Указанные экспоненты действительно лежат в $V^{\mathbb{C}}$, так как $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ и $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ по формуле Эйлера. В базисе $\{e^{ix}, e^{-ix}\}$ в $V^{\mathbb{C}}$ оператор $\varphi^{\mathbb{C}}$ имеет диагональную матрицу $\operatorname{diag}(i, -i)$. Другими словами, существует матрица $C \in \operatorname{Mat}_2(\mathbb{C})$

---

[043] Здесь логически мы пользуемся одним из законов Де Моргана $\neg(x \wedge y) = (\neg x) \vee (\neg y)$.

(а именно, матрица перехода от базиса $\{\cos x, \sin x\}$ к базису $\{e^{ix}, e^{-ix}\}$ в $V^{\mathbb{C}}$) такая, что матрица

$$C^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} C$$

диагональна, но не существует такой вещественной матрицы $C \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$.
Другой, более "злостный" тип препятствий к диагонализируемости связан с тем, что геометрическая кратность какого-то собственного значения меньше алгебраической, в этом случае расширение поля не поможет. Пример такой ситуации дает оператор дифференцирования на пространстве многочленов. Конечно, указанные типы препятствий могут встречаться вместе.

Пусть оператор $\varphi : V \to V$ имеет матрицу A в некотором базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V. Из предыдущего вытекает следующий алгоритм исследования φ на диагонализируемость. Находим характеристический многочлен $\chi_\varphi(t) = \det(tE - A)$ и выясняем, все ли его корни принадлежат полю $\mathbb{K}$. Если ответ "нет", то оператор не диагонализируем, если "да", то для каждого корня λ_i (являющегося собственным значением φ) проверяем, верно ли равенство $g(\lambda_i) = m(\lambda_i)$. Так как

$$g(\lambda_i) := \dim V_{\lambda_i} = n - \mathrm{rk}(A - \lambda_i E)$$

то равенство $g(\lambda_i) = m(\lambda_i)$ равносильно $m(\lambda_i) = n - \mathrm{rk}(A - \lambda_i E)$. Если для каждого корня λ_i данное равенство справедливо, то φ диагонализируем, в противном случае - нет.

Пусть $\left\{v_1^i, \ldots, v_{g(i)}^i\right\}$ - базисы во всех собственных подпространствах $V_i := V_{\lambda_i}, i = 1, \ldots, k$ оператора φ. Если φ диагонализируем, то $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$, и объединение указанных базисов есть базис в V, состоящий из собственных векторов оператора φ. В нем матрица оператора φ диагональна, точнее $A' = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, где кратность вхождения λ_i равна $g(i)$. Причем $A' = C^{-1}AC$, где C - матрица перехода от исходного базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ к полученному базису из собственных векторов.

Задача

8.60. Пусть $\varphi : V \to V$ - линейный оператор. Докажите, что если $\mathrm{Ker}\,\varphi \subsetneq \mathrm{Ker}(\varphi^2)$, то φ не диагонализируем.

Решение. Пусть $u \in \mathrm{Ker}\,\varphi^2 \setminus \mathrm{Ker}\,\varphi$. Очевидно, что подпространство $U := \langle \mathrm{Ker}\,\varphi, u\rangle \subset V$ является φ-инвариантным. Пусть $\{e_1, \ldots, e_k\}$ - базис в пространстве $\mathrm{Ker}\,\varphi$, тогда, выписывая матрицу $\varphi|_U$ в базисе $\{e_1, \ldots, e_k, u\}$ пространства U мы получаем, что $\chi_{\varphi|_U}(t) = t^{k+1}$, где $k = \dim(\mathrm{Ker}\,\varphi)$, причем, согласно Предложению 8.53, $\chi_{\varphi|U}(t)|\chi_\varphi(t)$. Таким образом, в этом случае алгебраическая кратность собственного значения 0 оператора φ строго больше геометрической (равной k).

Приведем также другое доказательство. Если оператор диагонализируем, то в некотором базисе его матрица диагональна. Легко видеть, что при возведении диагональной матрицы в квадрат ее диагональные элементы возводятся в квадрат, поэтому ее ранг не меняется, следовательно $\dim \mathrm{Im}\,\varphi = \dim \mathrm{Im}(\varphi^2)$, а значит и $\dim \mathrm{Ker}\,\varphi = \dim \mathrm{Ker}(\varphi^2)$.

Задача

8.61. Пусть $\varphi : V \to V$ - линейный оператор. Докажите, что $V = \mathrm{Ker}\,\varphi \oplus \mathrm{Im}\,\varphi$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Ker}(\varphi^2)$.

То есть оператор, у которого ядро и образ имеют нетривиальное пересечение, недиагонализируем.

Задача

8.62. Напишите матрицу какого-нибудь линейного оператора φ на трехмерном пространстве, если известно, что вектор с координатами $(1, 2, 3)^T$ лежит и в ядре в образе φ. Будет ли такой оператор диагонализируемым?

Задача

8.63. Пусть $\dim V \geq 2$. Докажите, что оператор $\varphi : V \to V$ ранга 1 диагонализируем тогда и только тогда, когда $\operatorname{tr} \varphi \neq 0$.

Решение. Обозначим $n := \dim V$. Пусть $U := \operatorname{Ker} \varphi$, тогда из $\operatorname{rk} \varphi = 1$ следует $\dim U = n-1$ и U является собственным подпространством φ, отвечающим собственному значению 0. Значит по Следствию 8.56$\chi_\varphi(t) = t^{n-1}(t - \lambda)$, причем $\lambda = \operatorname{tr} \varphi \in \mathbb{K}$ (см. формулу (66)). Если $\lambda = 0$, то алгебраическая кратность собственного значения 0 (равная n) строго больше геометрической (равной $n-1$), поэтому такой оператор не диагонализируем. Если $\lambda \neq 0$, то у φ есть еще одно собственное значение λ, значит помимо $V_0 = U$ есть еще одно собственное подпространство V_λ, следовательно $V = V_0 \oplus V_\lambda$, и тогда φ диагонализируем.

Задача

8.64. Пусть φ - линейный оператор на $V, \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ - набор его различных собственных значений, принадлежащих основному полю, $V_{\lambda_j} \subset V$ - соответствующие собственные подпространства. Пусть $U \subset V - \varphi$-инвариантное подпространство. Докажите, что если для $\mathbf{u} \in U$ существует представление

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_k \tag{73}$$

где $\mathbf{v}_j \in V_{\lambda_j}$, то $\mathbf{v}_j \in U \forall j, 1 \leq j \leq k$.

Решение. Воспользуемся индукцией по числу l ненулевых слагаемых в разложении (73). Для $l = 1$ утверждение очевидно. Допустим, что требуемое утверждение верно для разложений вида (73) с числом ненулевых компонент $\mathbf{v}_j$, не превосходящим $l - 1$, докажем, что тогда утверждение верно для разложений с l ненулевыми компонентами. Без ограничения общности можно считать, что ненулевыми могут быть первые l компонент в (73). Пусть

$$U \ni \mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_l \tag{74}$$

тогда $\varphi(\mathbf{u}) = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_l \mathbf{v}_l$. Вычитая из последнего тождества равенство, полученное умножением обеих частей (74) на λ_l, имеем

$$\varphi(\mathbf{u}) - \lambda_l \mathbf{u} = (\lambda_1 - \lambda_l)\, \mathbf{v}_1 + \ldots + (\lambda_{l-1} - \lambda_l)\, \mathbf{v}_{l-1}$$

Мы получили разложение вида (73), содержащее не более $l - 1$ ненулевых компонент, следовательно, по предположению индукции, $(\lambda_j - \lambda_l)\, \mathbf{v}_j \in U, 1 \leq j \leq l - 1$, а поскольку $(\lambda_j - \lambda_l) \neq 0$, то и $\mathbf{v}_j \in U \cap V_{\lambda_j}$. Но тогда из (74) и $\mathbf{v}_l \in U$, что и требовалось доказать.

Положив в условии предыдущей задачи $U = \{\mathbf{0}\}$, снова приходим к Теореме 8.50.

Задача

8.65. a) Докажите, что два диагонализируемых оператора коммутируют тогда и только тогда, когда они имеют общий базис из собственных векторов.
b) Распространите этот результат на произвольное множество коммутирующих диагонализируемых операторов.

Задача

8.66. Докажите, что если оператор $\varphi : V \to V$ диагонализируем, то и его ограничение $\varphi|_U$ на любое инвариантное подпространство $U \subset V$ диагонализируемо.

Решение. Очевидно, что оператор φ диагонализируем $\Leftrightarrow V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}$. В предыдущей задаче доказано, что если подпространство $U \subset V \varphi$-инвариантно, то для представления произвольного вектора $\mathbf{u} \in U$ вида

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_k$$

где $\mathbf{v}_j \in V_{\lambda_j}$, следует $\mathbf{v}_j \in U \forall j$. Другими словами, $U = (U \cap V_{\lambda_1}) \oplus \ldots \oplus (U \cap V_{\lambda_k})$. Отсюда следует диагонализируемость оператора $\varphi|_U$, так как $U \cap V_{\lambda_j}$ - его собственные подпространства.

Другое решение приведено в Задаче 8.77.

Задача

8.67. Пусть оператор $\varphi : V \to V$ диагонализируем. Тогда любое его φ-инвариантное подпространство $U \subset V$ имеет φ-инвариантное прямое дополнение $W \subset V$, то есть такое φ-инвариантное подпространство $W \subset V$, что $V = U \oplus W$.

Решение. В предыдущих обозначениях пусть

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}, \quad U = (U \cap V_{\lambda_1}) \oplus \ldots \oplus (U \cap V_{\lambda_k})$$

Для каждого подпространства $U \cap V_{\lambda_i} \subset V_{\lambda_i}$ выберем произвольное прямое дополнение $W_i \subset V_{\lambda_i}$. Тогда подпространство $W = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k \subset V$ является φ-инвариантным и $V = U \oplus W$.

Ясно, что утверждение предыдущей задачи можно обратить при условии, что характеристический многочлен оператора φ раскладывается на линейные множители над полем $\mathbb{K}$.

Задача

8.68. Приведите пример, показывающий, что в линейном пространстве сколь угодно большой размерности над полем $\mathbb{Q}$ у оператора может не быть нетривиальных инвариантных подпространств.

Решение. Воспользуемся неприводимостью над $\mathbb{Q}$ многочленов "деления круга на p частей" $f_p(t) := \frac{t^p - 1}{t - 1}$, где p - простое (см. [12], 6 гл. 3). Заметим, что задав произвольный многочлен $g(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_{n-1} t + a_n \in \mathbb{Q}[t]$ можно построить линейный оператор φ, для которого $g(t)$ является характеристическим многочленом. А именно, достаточно задать действие φ на базисных векторах следующим образом:

$$\varphi(e_1) = e_2, \varphi(e_2) = e_3, \ldots, \varphi(e_{n-1}) = e_n, \varphi(e_n) = -a_n e_1 - a_{n-1} e_2 - \ldots - a_1 e_n$$

Таким образом, оператор на $p-1$-мерном пространстве V над полем $\mathbb{Q}$, действующий на базисе

$$\varphi(e_1) = e_2, \varphi(e_2) = e_3, \ldots, \varphi(e_{p-2}) = e_{p-1}, \varphi(e_{p-1}) = -e_1 - e_2 - \ldots - e_{p-1}$$

имеет характеристический многочлен $f_p(t)$. Если бы у φ было инвариантное подпространство $U \neq 0, V$, то характеристический многочлен его ограничения $\varphi|_U$ делил бы $f_p(t)$ в кольце $\mathbb{Q}[t]$, что противоречило бы неприводимости $f_p(t)$

3.8.5 8.5 Hamilton-Cayley Theorem

В предыдущем параграфе мы видели, что не любой оператор диагонализируем даже в случае алгебраически замкнутого поля $\mathbb{K}$ (такого как поле комплексных чисел $\mathbb{C}$). Однако в последнем случае всегда можно найти базис, в котором матрица оператора имеет так называемую жорданову нормальную форму, которую мы рассмотрим в следующей главе. Здесь же мы докажем ослабленную версию теоремы о жордановой нормальной форме, а именно существование у оператора матрицы треугольного вида.

Предложение

8.69. Для оператора φ в конечномерном пространстве V над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ существует такой базис в V, в котором матрица φ является верхнетреугольной.

Proof. $\square$

Докажем Предложение индукцией по $n := \dim V$. Если $n = 1$, то Предложение очевидно. Пусть $n > 1$. Так как поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто, у φ существует собственное значение $\lambda \in \mathbb{K}$, то есть $V_\lambda := \mathrm{Ker}\,(\varphi - \lambda\,\mathrm{Id}_V) \neq 0$. Тогда $\mathrm{Im}\,(\varphi - \lambda\,\mathrm{Id}_V) \neq V$ и, значит, $\dim(\mathrm{Im}\,(\varphi - \lambda\,\mathrm{Id}_V)) \leq n - 1$. Пусть $U \subset V$ - какое-либо $n-1$-мерное подпространство в V, содержащее $\mathrm{Im}\,(\varphi - \lambda\,\mathrm{Id}_V)$. Покажем, что оно φ-инвариантно. Действительно, $\forall u \in U$

$$\varphi(u) = \varphi(u) - \lambda u + \lambda u = (\varphi - \lambda\,\mathrm{Id}_V)\,(u) + \lambda u \in U$$

поскольку $(\varphi - \lambda\,\mathrm{Id}_V)\,(u) \in U$ и $\lambda u \in U$.
Так как $\dim U = n-1 < n$, то по предположению индукции существует базис $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ в U, в котором матрица B оператора $\varphi|_U$ верхнетреугольная. Дополним его произвольным образом до базиса $\{e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n\}$ в V. В нем матрица A оператора φ будет иметь вид $\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & d \end{pmatrix}$, где C - столбец высоты $n-1$, а d - матрица порядка 1, и A, очевидно, является верхнетреугольной.

Note.

8.70. Заметим, что геометрический смысл доказанного Предложения состоит в существовании у оператора φ цепочки вложенных φ-инвариантных подпространств [44]

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

таких, что $\dim V_k = k, 0 \leq k \leq n$ (см. Задачу 8.22). С этой точки зрения шаг индукции состоит в доказательстве того, что у оператора φ на n-мерном пространстве V существует $n-1$-мерное инвариантное подпространство V_{n-1}, после этого индуктивное предположение можно применить к оператору $\varphi|_{V_{n-1}}$ на V_{n-1}.

Как обстоят дела с существованием треугольной матрицы у преобразования вещественного векторного пространства? Нетрудно заметить, что необходимым условием этого является вещественность всех характеристических чисел (корней характеристического многочлена) такого преобразования. Действительно, у треугольной матрицы на главной диагонали стоят характеристические числа. Оказывается, это условие является и достаточным.

Задача

8.71. Докажите, что если у преобразования φ вещественного пространства V все характеристические числа вещественны, то в V существует базис, в котором φ имеет верхнетреугольную матрицу. (Указание: для доказательства шага индукции восполвзуйтесь Предложением 8.53).

Оператор $\varphi : V \to V$ называется нильпотентным, если для некоторого натурального $N \varphi^N = 0$. Например, нулевой оператор нильпотентен так же как и оператор дифференцирования на пространстве $\mathbb{R}[x]_n$.

Задача

8.72. Докажите, что если $\varphi : V \to V$ - нильпотентный оператор на конечномерном пространстве $V, \dim V = n$, то в V существует базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$, в котором φ имеет

[044] Такая цепочка называется флагом.

верхненильтреугольную матрицу (то есть верхнетреугольную матрицу с нулями на главной диагонали).

Решение (см. также доказательство Леммы 9.4). Доказывать будем индукцией по $n = \dim V$. Если $n = 1$, то нильпотентный оператор на V нулевой и доказываемое утверждение, очевидно, верно. Пусть $n > 1$, положим $V_1 := \varphi(V)$. Из нильпотентности φ следует, что $V_1 \subsetneq V$. Выберем произвольное подпространство $U \subset V$ размерности $n-1$, содержащее V_1. Тогда $U\varphi$-инвариантно и ограничение $\varphi|_U$ нильпотентно. По предположению индукции в U найдется базис $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$, в котором $\varphi|_U$ имеет верхненильтреугольную матрицу. Пусть $\{e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n\}$ - произвольное дополнение до базиса в V. Поскольку $\varphi(e_n) \in U$, то матрица φ в нем также нильтреугольна и шаг индукции доказан.

В доказательстве следующей Теоремы нам пригодится следующая

Задача

.
Пусть φ - оператор на $V, U \subset V$ - его инвариантное подпространство, а $p(t)$ - некоторый многочлен. Тогда можно вычислить многочлен $p(\varphi)$ от оператора φ, это снова будет оператор на V, причем легко убедиться, что U будет его инвариантным подпространством. Затем можно оператор $p(\varphi)$ ограничить на U и получить оператор $p(\varphi)|_U : U \to U$. А можно выбрать другой порядок действий: сначала ограничить φ на U, а потом вычислить многочлен $p(\varphi|_U)$, снова получив некоторый оператор на U.

Задача

8.73. Пусть $\varphi : V \to V$ - линейный оператор, $U \subset V - \varphi$-инвариантное подпространство. Пусть $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ м многочлен. Тогда $p(\varphi)|_U = p(\varphi|_U)$ как линейные операторъ на U.

Доказательство следует непосредственно из определений.
Оказывается, что если подставить матрицу оператора в его характеристический многочлен, получится нулевая матрица. Говорят, что многочлен $p(t)$ аннулирует (квадратную!) матрицу A, если $p(A) = 0$ (справа стоит нулевая матрица того же порядка, что и A). Заметим, что если $p(t)$ аннулирует матрицу A оператора φ в каком-то базисе, то он аннулирует его матрицу и в любом другом базисе, так как $p(C^{-1}AC) = C^{-1}p(A)C$ для любой невырожденной матрицы C. Поэтому корректно говорить об аннулирующем многочлене самого оператора.

Теорема

8.74. (Гамильтон-Кэли) Характеристический многочлен $\chi_\varphi(t)$ аннулирует *оператор* φ.

Proof. □

Теорему докажем сначала для алгебраически замкнутого поля $\mathbb{K}$.
Снова будем пользоваться индукцией по $n := \dim V$. При $n = 1$ Теорема очевидна: $t - \lambda$ аннулирует $\varphi = \lambda \operatorname{Id}_V$. Пусть $n > 1$. Выберем базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V, в котором φ имеет верхнетреугольную матрицу $\begin{pmatrix} \mu_1 & * & * & \ldots & * \\ 0 & \mu_2 & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & \mu_3 & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \mu_n \end{pmatrix}$. Заметим, что $\mu_1, \ldots, \mu_n$ - все собственные значения φ, только не обязательно попарно различные. Характеристический многочлен $\chi_\varphi(t)$ равен $(t - \mu_1) \ldots (t - \mu_n)$.

Пусть $U := \langle e_1, \ldots, e_{n-1} \rangle \subset V$. Из вида матрицы (конкретно из того, что в последней строчке все элементы кроме μ_n равны нулю) следует, что подпространство $U \subset V\varphi$ инвариантно. Легко также видеть, что $\operatorname{Im}(\varphi - \mu_n \operatorname{Id}_V) \subset U$. Так как оператору $\varphi|_U$ отвечает левый верхний блок порядка $n - 1$ приведенной выше треугольной матрицы, то $\chi_\varphi(t) = \chi_{\varphi|_U}(t)(t - \mu_n)$, и $\chi_\varphi(\varphi)$ является композицией двух операторов, $\varphi - \mu_n \operatorname{Id}_V$ и $\chi_{\varphi|_U}(\varphi)$, причем образ первого содержится в U, а ограничение второго на U есть

$\chi_{\varphi|_U}(\varphi)\big|_U = \chi_{\varphi|_U}(\varphi|_U)$ (см. Задачу 8.73), что равно нулю по предположению индукции. Значит $\operatorname{Im}(\varphi - \mu_n \operatorname{Id}_V) \subset \operatorname{Ker}\left(\chi_{\varphi|U}(\varphi)\right)$, поэтому $\chi_\varphi(\varphi) = \chi_{\varphi|_U}(\varphi) \circ (\varphi - \mu_n \operatorname{Id}_V) = 0$, и шаг индукции тем самым доказан.

Если поле $\mathbb{K}$ не является алгебраически замкнутым (например $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), то воспользуемся тем, что его всегда можно вложить в алгебраически замкнутое поле $\mathbb{L}$. Например, вещественную матрицу A можно рассматривать также как комплексную, и для нее Теорема верна (то есть $\chi_A(A) = 0$). Но характеристический многочлен $\chi_A(t)$ не зависит от того, рассматриваем мы A как вещественную или как комплексную матрицу, а значит Теорема верна и для исходного поля $\mathbb{K}$.

В предыдущем доказательстве мы сослались на теорему о существовании алгебраического замыкания для любого поля, которая не доказывается в этом курсе. Однако есть несложное доказательство теоремы Гамильтона-Кэли, принадлежащее И.И. Богданову, которое подходит для любого поля. Приведем его здесь.

Итак, пусть $\varphi : V \to V$ - линейный оператор на конечномерном пространстве V над произвольным полем $\mathbb{K}$. Нам нужно доказать, что $\chi_\varphi(\varphi)$ - нулевой оператор на V, то есть для любого $v \in V \chi_\varphi(\varphi)(v) = 0$.

Выберем произвольный $v \in V$ и рассмотрим линейно независимую систему векторов $\left\{v, \varphi(v), \ldots, \varphi^{k-1}(v)\right\}$ с максимальным k (например, для нулевого вектора $vk = 0$ (то есть система пустая), а для собственного вектора $vk = 1$). Пусть $U := \left\langle v, \varphi(v), \ldots, \varphi^{k-1}(v)\right\rangle \subseteq V$. Ясно, что $U\varphi$-инвариантно, поскольку из максимальности k следует $\varphi^k(v) \in U$.

Пусть

$$\varphi^k(v) + a_{k-1}\varphi^{k-1}(v) + \ldots + a_1\varphi(v) + a_0 v = 0 \tag{75}$$

Тогда легко видеть, что оператор $\varphi|_U$ в базисе $\left\{v, \varphi(v), \ldots, \varphi^{k-1}(v)\right\}$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_{k-2} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{k-1} \end{pmatrix}$$

Таким образом, характеристический многочлен $\varphi|_U$ равен $|tE - A| = t^k + a_{k-1}t^{k-1} + \ldots + a_1 t + a_0$. Он аннулирует вектор v (см. (75)). С другой стороны, $\chi_{\varphi|_U}(t)$ делит $\chi_\varphi(t)$ (см.

Предложение

8.53), а значит и $\chi_\varphi(t)$ аннулирует вектор v. Поскольку $v \in V$ - произвольный, это завершает доказательство.

Задача

8.75. Докажите, что если оператор φ невырожден, то его обратный φ^{-1} является многочленом от φ.

Ненулевой многочлен минимальной степени со старшим коэффициентом 1, аннулирующий данный оператор φ, называется минимальным многочленом оператора φ и обозначается $\mu_\varphi(t)$.

Используя алгоритм Евклида (деления с остатком) легко показать, что $\mu_\varphi(t)|\chi_\varphi(t)$ (более точно, минимальный многочлен делит любой аннулирующий).

Заметим, что минимальный многочлен может как совпадать с характеристическим, так и отличаться от него. Например, для тождественного оператора Id_V на n-мерном пространстве V характеристический многочлен равен $(t-1)^n$, в то время как минимальный равен $t-1$. Еще пример: характеристические многочлены нулевого оператора и оператора дифференцирования на пространстве $\mathbb{R}[x]_n$ равны t^{n+1}, в то время как минимальный в первом случае t, а во втором - совпадает с характеристическим.

Последний пример подсказывает, что наличие кратных корней у минимального многочлена - препятствие к диагонализируемости. Это действительно так.

Предложение

8.76. Оператор φ над алгебраччески замкнутым полем $\mathbb{K}$ диагонализируем тогда и только тогда, когда его минимальный многочлен $\mu_\varphi(t)$ не имеет кратных корней.

Proof. □

Пусть $\mu_\varphi(t) = (t-\lambda)^m g(t)$, где $m > 1$. Тогда существует $v \in V$ такой, что $(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)^2(v) = 0$, но $(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)(v) \neq 0$. Согласно Задаче 8.60 оператор $\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V$ тогда не диагонализируем, а значит и φ не диагонализируем.

Обратно, пусть $\mu_\varphi(t) = (t-\lambda_1)\dots(t-\lambda_k)$, где λ_i попарно различны. Имеем

$$V = \operatorname{Ker}\left((\varphi - \lambda_1 \operatorname{Id}_V)\dots(\varphi - \lambda_k \operatorname{Id}_V)\right)$$

Пусть

$$g_i := \dim \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda_i \operatorname{Id}_V) = \dim V_i$$

- размерности собственных подпространств.

Полагая $\varphi_i := \varphi - \lambda_i \operatorname{Id}_V$ в обозначениях п. 2) Задачи 7.88, имеем

$$n = \dim V = \dim \operatorname{Ker}(\varphi_k \circ \dots \circ \varphi_1) \leq \dim \operatorname{Ker}(\varphi_1) + \dots + \dim \operatorname{Ker}(\varphi_k) = g_1 + \dots + g_k$$

откуда (поскольку $V_1 \oplus \dots \oplus V_k \subseteq V$) $n = g_1 + \dots + g_k$ и значит $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$. Заметим, что если потребовать, чтобы корни $\mu_\varphi(t)$ лежали в $\mathbb{K}$, то результат предыдущей Задачи верен без предположения об алгебраической замкнутости $\mathbb{K}$.

Например, мы знаем, что проекторы - в точности операторы, удовлетворяющие тождеству $\varphi^2 = \varphi$. Если исключить тривиальные случаи $\varphi = 0$ или Id, то легко видеть, что аннулирующий многочлен $t^2 - t = t(t-1)$ является также минимальным. Отсюда с учетом доказанного выше Предложения следует, что проектор диагонализируем (что, впрочем, мы ранее доказали другим способом). То же относится и к операторам отражения, удовлетворяющим тождеству $\varphi^2 = \operatorname{Id}_V$.

Задача

8.77. Используя предыдущее Предложение докажите, что ограничение диагонализируемого оператора на инвариантное подпространство диагонализируемо.

Решение. Нам уже известен этот результат из Задачи 8.66. Докажем его другим способом. Так как φ по условию диагонализируем, его минимальный многочлен $\mu_\varphi(t)$ раскладывается на линейные множители над $\mathbb{K}$ и не имеет кратных корней. Пусть $U \subset V$ - произвольное φ-инвариантное подпространство. В силу того, что для любого многочлена $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ линейные операторы $p(\varphi)|_U = p(\varphi|U) : U \to U$ равны (см. Задачу 8.73), многочлен $\mu_\varphi(t)$ является аннулирующим для $\varphi|_U$ и поэтому $\mu_{\varphi|_U}(t)|\mu_\varphi(t)$, а значит тоже не имеет кратных корней.

Задача

8.78. Пусть $\varphi : V \to V$ - линейный оператор на конечномерном векторном пространстве V над полем $\mathbb{C}$ такой, что $\varphi^k = \operatorname{Id}_V$ для некоторого натурального k. Докажите, что φ диагонализируем.

Задача

8.79. Рассмотрим 4 точки, являющиеся вершинами квадрата; пусть V - пространство вещественнозначных функций на множестве этих точек. Действие группы D_4 симметрий квадрата на множестве его вершин задает ее действие на V.
a) Разложите пространство V в прямую сумму минимальных инвариантных подпространств группъ D_4.

Оператор $\varphi : V \to V$ ставит в соответствие функции $f \in V$ функцию $\varphi(f) \in V$, значение которой в произвольной вершине квадрата равно полусумме значений функци f в двух соседних вершинах.
b) Проверьте, что найденные в пункте а) подпространства совпадают с собственными подпространствами оператора φ.
c) Оббясните, почему собственные подпространства φ инвариантны относительно преобразований V, индуцированных симметриями квадрата.

Решение. а) Пусть вершины квадрата - это A, B, C, D (в циклическом порядке). Пусть J - центральная симметрия, она переводит A в B, C в D и т.д. Ясно, что $J^2 = \mathrm{Id}$.

$$V = \{f : \{A, B, C, D\} \to \mathbb{R}\}$$

Один из возможных базисов в V - базис из дельта-функций $\{\delta_A, \delta_B, \delta_C, \delta_D\}$ (где, например, $\delta_A(A) = 1$, а в остальных точках δ_A равна нулю).

Назовем функцию $f \in V$ четной, если $f \circ J = f$ и нечетной, если $f \circ J = -f$. Ясно, что функция четная, если она принимает одинаковые значения в симметричных относительно центра квадрата точках, и нечетная, если она в симметричных точках принимает значения противоположных знаков.

Пусть V^+(соответственно V^-) - подпространства четных (соответственно нечетных) функций. Легко проверить, что $V = V^+ \oplus V^-$. В самом деле, для любой $f \in V$ имеет место представление

$$f = \frac{f + f \circ J}{2} + \frac{f - f \circ J}{2}$$

причем из $J^2 = \mathrm{Id}$ легко следует, что $f + f \circ J \in V^+$и $f - f \circ J \in V^-$. Также легко проверить, что $V^+ \cap V^- = 0$[45].

Функцию $f \in V$ можно разложить по базису из дельта-функций $\{\delta_A, \delta_B, \delta_C, \delta_D\}$; при этом ее координатами будет набор значений $f(A), f(B), f(C), f(D)$. В этих обозначениях

$$V^+ = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V^- = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Легко видеть, что подпространства V^+и V^-инвариантны относительно всех преобразований из группы D_4. Однако V^+не является минимальным среди таких подпространств: $V^+ = V^c \oplus V^0$, где V^c - подпространство, состоящее из постоянных функций, а V^0 состоит из таких четных функций, сумма значений которых равна нулю. Легко видеть, что

$$V^c = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V^0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

В то же время V^-не содержит нетривиальных инвариантных подпространств относительно преобразований из D_4. Для того, чтобы в этом убедиться, достаточно проверить, что никакой вектор из V^-не является одновременным собственным вектором симметрии квадрата относительно диагонали и симметрии относительно прямой, соединяющей середины противоположных сторон.

[045] Этот абзац можно было бы записать короче, если заметить, что линейный оператор $\widehat{J} : V \to V, \widehat{J}(f) = f \circ J$ удовлетворяет условию $\widehat{J}^2 = \mathrm{Id}_V$ и воспользоваться затем Примером 8.36.

Таким образом, искомое разложение $-V = V^c \oplus V^0 \oplus V^-$.
b) Легко выписать матрицу преобразования φ в базисе из дельта-фукций в V:

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Эта матрица имеет ранг 2, поэтому ее ядро - двумерное собственное подпространство с собственным значением 0. Решая систему, находим

$$V_0 = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Легко видеть, что $V_0 = V^-$. Также легко видеть, что (ненулевые) постоянные функции - собственные векторы φ с собственным значением 1, а ненулевые четные функции с суммой значений 0 - собственные векторы с собственным значением -1. Таким образом, $V_1 = V^c, V_{-1} = V^0$.

Пункт c) оставим читателю для самостоятельного обдумывания.
Для читателей, немного знакомых с теорией представлений конечных групп, наметим более концептуальный подход к предыдущей задаче. Любое линейное представление конечной группы над полем характеристики 0 является прямой суммой неприводимых. V является прямой суммой инвариантных относительно D_4 подпространств, состоящих из постоянных функций, четных функций (относительно центральной симметрии) с суммой значений, равной нулю и нечетных функций. Им отвечают неприводимые представления группы D_4 размерностей соответственно $1, 1, 2$, которые, очевидно, попарно неэквивалентны. Так как оператор φ коммутирует со всеми групповыми операторами (поскольку симметрии квадрата сохраняют соседство вершин), то он определяет эндоморфизм представления V, а поскольку V является прямой суммой попарно неэквивалентных неприводимых представлений, то все прямые слагаемые
φ-инвариантны. Далее, чтобы показать, что ограничение φ на каждое неприводимое представление является скалярным оператором, хотелось бы воспользоваться леммой Шура, но ее стандартная формулировка верна над алгебраически замкнутым полем. В данном случае проще всего непосредственно проверить, что ограничение φ на каждое неприводимое представление является скалярным оператором, то есть каждое неприводимое представлене целиком содержится в некотором собственном подпространстве оператора φ, и только что проведенное вычисление показывает, что перечисленные ранее неприводимые представления отвечают соответственно собственным значениям $1, -1, 0$ оператора φ.Таким образом, в данном случае неприводимые компоненты представления D_4 в V совпадают с собственными подпространствами φ. Подробности см. например в [6].

В заключении параграфа рассмотрим следующий вопрос (ниже мы используем язык матриц, хотя можно было бы то же самое изложить на языке операторов). Напомним, что алгебра $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ матриц порядка n как линейное пространство имеет размерность n^2, и для данной матрицы $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ рассмотрим подмножество $L(A) := \{f(A) | f(t) \in \mathbb{K}[t]\} \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$, состоящее из всех матриц, представимых как многочлены от A. Легко видеть, что $L(A)$ - подпространство в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ и даже (коммутативная) подалгебра. Например, для $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$L(A) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{C}$$

Какова размерность $L(A)$ в общем случае?

Задача

8.80. Докажите, что размерность $L(A)$ равна степени минимального многочлена матрицы A. (Указание: используйте наличие алгоритма деления с остатком в $\mathbb{K}[t]$).
Предыдущая задача показывает, что для любой матрицы A порядка $n \dim L(A) \leq n$.

Задача

8.81. Покажите, что для $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, где $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, алгебра $L(A)$ совпадает с алгеброй всех диагональных матриц, порядка n.

Задача

8.82. Чему равна размерность $L(J_n(\lambda))$, где $J_n(\lambda)$ - жорданова клетка порядка n? Опишите алгебру $L(J_n(\lambda))$ как алгебру матриц, явно.

Задача

8.83. Изоморфны ли алгебры $L(A)$ из двух последних задач?

3.8.6 8.6 Factor Space and Factor Operator

Пусть V - линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, а $U \subset V$ - его подпространство. Рассмотрим на V следующее отношение: $v \sim v' \Leftrightarrow v' - v \in U$. Очевидно, что это - отношение эквивалентности. Класс эквивалентности вектора $v \in V$ обозначим $v + U$. Из определения следует, что $v + U = v' + U \Leftrightarrow v' - v \in U$. Множество классов эквивалентности обозначим V/U.

На множестве V/U определим операции сложения и умножения на элементы поля $\mathbb{K}$ по формулам $(v_1 + U) + (v_2 + U) = (v_1 + v_2) + U, \lambda(v + U) = \lambda v + U$ (где $\lambda \in \mathbb{K}$). Непосредственно проверяется, что $(V/U, +, \cdot)$ является линейным пространством над полем $\mathbb{K}$. Оно называется фактор-пространством пространства V по подпространству U и обозначается V/U.

Наглядно элементы V/U можно представлять себе как сдвиги подпространства U на всевозможные векторы из V. Читателю предлагается нарисовать картинку и дать наглядную интерпретацию введенных операций. Например, роль нулевого вектора фактор-пространства играет само подпространство $U = 0 + U$.

фактор-пространство задано вместе с линейным отображением $\pi : V \to V/U, \pi(v) = v + U$, называемым канонической проекиией. Ясно, что π сюръективно и $\operatorname{Ker} \pi = U$. Применяя известную теорему о сумме размерностей ядра и образа линейного отображения, получаем, что для конечномерного V $\dim(V/U) = \dim V - \dim U$. Кардинал $\dim(V/U)$ называется коразмерностью подпространства U в V (обозначение: $\operatorname{codim}_V U$). В математике и ее приложениях важную роль играют случаи подпространств конечной коразмерности в бесконечномерных пространствах (см. Задачи 8.90, 8.92 и Пример 8.91).

Предложение

8.84. Пусть W - произвольное прямое дополнение к подпространству U в V. Тогда ограничение $\pi|_W : W \to V/U$ - изоморфизм линейных пространств.

Proof. □

В самом деле, по определению прямого дополнения $\forall v \in V \exists\, !\ u \in U$ и $w \in W$ такие, что $v = u + w$. То есть $\forall v \in V \exists! w \in W$ такой, что $v + U = w + U$, что влечет биективность $\pi|_W$.
Из доказанного Предложения можно легко вывести такое следствие.

Следствие

8.85. Система $\{e_{k+1}+U,\ldots,e_n+U\}$ является базисом в V/U тогда и только тогда, когда векторь $\{e_{k+1},\ldots,e_n\}$ образуют базис в некотором прямом дополнении $W\kappa U$ в V.

Доказательство: при изоморфизме базис переходит в базис.
Наметим немного другой подход к определению базиса в фактор-пространстве, не опирающийся на линейные отображения. Итак, пусть $U\subset V$ - подпространство.

Определение

8.86. Система векторов $\{v_1,v_2,\ldots,v_m\}\,(v_i\in V)$ называется линейно независимой над U, если из

$$\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\ldots+\lambda_mv_m\in U$$

следует $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_m=0$.

Определение

8.87. Система векторов $\{v_1,v_2,\ldots,v_m\}\,(v_i\in V)$ порождает V над U, если

$$V=\langle v_1,v_2,\ldots,v_m\rangle+U$$

Определение

8.88. Система векторов $\{v_1,v_2,\ldots,v_m\}\,(v_i\in V)$ является базисом пространства V над U, если она линейно независима над U и порождает V над U.

Данные определения превращаются в обычные если взять $U=0$.
Легко проверяется, что, как и в "абсолютном" случае, базис - максимальная линейно независимая система над U или, равносильно, минимальная порождающая система над U.

Предложение

8.89. следующие условия эквивалентны:

1. система $\{v_1,v_2,\ldots,v_m\}\,(v_i\in V)$ является базисом в V над U;
2. система $\{v_1+U,v_2+U,\ldots,v_m+U\}-$ в V/U;
3. система $\{v_1,v_2,\ldots,v_m\}$ линейно независима (в обычном смысле) $u\,\langle v_1,v_2,\ldots,v_m\rangle$ - прямое дополнение κU в V, то есть

$$V=\langle v_1,v_2,\ldots,v_m\rangle\oplus U$$

Доказательство.

$$\lambda_1(v_1+U)+\lambda_2(v_2+U)+\ldots+\lambda_m(v_m+U)=(\lambda_1v_1+\ldots+\lambda_mv_m)+U=0+U\quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad\lambda_1v_1+\ldots+\lambda_mv_m\in U$$

Поэтому система $\{v_1,v_2,\ldots,v_m\}$ линейно независима над U тогда и только тогда, когда система $\{v_1+U,v_2+U,\ldots,v_m+U\}$ линейно независима в V/U.

Система $\{v_1+U,v_2+U,\ldots,v_m+U\}$ порождает $V/U\ \Leftrightarrow\ \forall v\in V\exists\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ такие, что $v+U=\lambda_1(v_1+U)+\ldots+\lambda_m(v_m+U)$, что равносильно $v-(\lambda_1v_1+\ldots+\lambda_mv_m)\in U$, что, в свою очередь, равносильно $v=(\lambda_1v_1+\ldots+\lambda_mv_m)+u,u\in U$. Поэтому система $\{v_1,v_2,\ldots,v_m\}$ порождает V над U тогда и только тогда, когда система

$\{v_1+U, v_2+U, \ldots, v_m+U\}$ порождает V/U. Тем самым мы проверили, что условия 1) и 2) равносильны.

По определению, система $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ порождает V над $U \Leftrightarrow V = \langle v_1, v_2, \ldots, v_m\rangle + U$. В то же время условие линейной независимости системы $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ над U означает, что никакая нетривиальная линейная комбинация этих векторов не лежит в U (в частности, не равна нулевому вектору), что равносильно ее линейной независимости в обычном смысле и $\langle v_1, \ldots, v_m\rangle \cap U = 0$.

Из доказанного Предложения снова получаем, что для конечномерного пространства V $\dim(V/U) = \dim V - \dim U$

Задача

8.90. Пусть f - ненулевая линейная функцяя на векторном пространстве V (не обязательно конечномерном) над полем $\mathbb{K}, U := \ker f$. Докажите, что

1. $V = U \oplus \langle v\rangle$ для любого $v \notin U$;
2. U - максимальное подпространство в V, т.е. оно не содержится ни в каком другом подпространстве в V отличном от V;
3. $\dim(V/U) = 1$.

Решение. 1) Пусть $v \in V$ - произвольный вектор такой, что $f(v) \neq 0$; пусть $w \in V$ - еще какой-то вектор. Тогда $f\left(w - \frac{f(w)}{f(v)}v\right) = 0$, то есть $w - \frac{f(w)}{f(v)}v \in U$. Иными словами, для произвольного $w \in V$ существует $\lambda \in \mathbb{K}$ такое, что $w = u + \lambda v$, где $u \in U$. Поэтому $V = U + \langle v\rangle$. Легко видеть, что последняя сумма прямая.
2) Если $W \subset V$ - такое подпространство, что $U \subsetneq W \subset V$, то из пункта 1) следует, что $W = V$.
3) теперь следует из Предложения 8.84.

Пример 8.91. [46] Пусть $C^\infty(S^1)$ - линейное пространство вещественнозначных бесконечно дифференцируемых функций на единичной окружности S^1. В качестве параметра на окружности будем рассматривать угловую координату $\vartheta \in \mathbb{R}$, причем ϑ_1 и ϑ_2 отвечают одной и той же точке окружности $\Leftrightarrow \vartheta_2 - \vartheta_1 \in 2\pi\mathbb{Z}$. Функция f на окружности - то же, что 2π-периодическая функция от ϑ, то есть $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$. Примером такой функции является ограничение функции x (абсциссы точки плоскости) на окружность, это дает функцию $\cos\vartheta$ на окружности.

Дифференцируемость функции f на окружности - то же, что дифференцируемость функции f по переменной ϑ. Заметим, что сама ϑ не является функцией на окружности: ее значение в точке окружности определено только с точностью до целочисленного кратного 2π. Однако дифференциал $d\vartheta$ корректно определен (причина этого состоит в том, что дифференциал от локально постоянной функции равен нулю). Например, переходя к декартовым координатам (x, y), получим $d\vartheta = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$ (это выражение определено во всех точках плоскости с выброшенным началом координат).

Мы будем рассматривать выражения вида $f(\vartheta)d\vartheta$, где $f \in C^\infty(S^1)$. Такие выражения называются "дифференциальными 1-формами". Самое важное их свойство состоит в том, что эти выражения можно интегрировать по окружности. Например, $\int\limits_{S^1} d\vartheta = 2\pi$. Дифференциальные 1-формы образуют бесконечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{R}$

$$\Omega^1\left(S^1\right) := \left\{f(\vartheta)d\vartheta | f \in C^\infty\left(S^1\right)\right\}$$

(точнее, свободный модуль ранга 1 над кольцом $C^\infty(S^1)$). В пространстве $\Omega^1(S^1)$ содержится подпространство дифференциалов функций на окружности $dF(\vartheta) = F'(\vartheta)d\vartheta, F \in C^\infty(S^1)$. Дифференциальные формы, являющиеся дифференциалами

[046] Этот пример заметно сложнее остальных, но мы его включили из-за его важности для ряда математических и физических теорий.

функций, называются "точными 1-формами". Ясно, например, что $d\vartheta$ не является дифференциалом функции (окружность - компакт, поэтому для любой дифференцируемой функции на окружности найдется точка, в которой ее дифференциал равен нулю, в то время как $d\vartheta$ не равна нулю во всех точках окружности). Как понять, является ли дифференциальная 1-форма $f(\vartheta)d\vartheta$ дифференциалом функции или нет?

Рассмотрим линейную функцию

$$\int_{S^1} : \Omega^1\left(S^1\right) \to \mathbb{R}, \quad f(\vartheta)d\vartheta \mapsto \int_{S^1} f(\vartheta)d\vartheta$$

Из формулы Ньютона-Лейбница следует, что если $f(\vartheta)d\vartheta = F'(\vartheta)d\vartheta$, то интеграл от нее по окружности равен нулю. Обратно, если $\int\limits_{S^1} f(\vartheta)d\vartheta = 0$, рассмотрим выражение $F(\vartheta) := \int\limits_0^\vartheta f(t)dt$ как функцию от ϑ. Из предположения следует, что она является 2π-периодической, то есть является функцией на окружности, и $dF(\vartheta) = f(\vartheta)d\vartheta$. Как мы уже видели, $\int\limits_{S^1} d\vartheta = 2\pi$, что еще раз свидетельствует о том, что 1-форма $d\vartheta$ не является точной (т.е. дифференциалом функции). Таким образом, точные формы образуют ядро линейной функции $\int\limits_{S^1}$. Мы получаем, что для окружности фактор-пространство дифференциальных 1-форм по подпространству точных 1-форм является одномерным. В качестве базиса в нем можно выбрать класс формы $d\vartheta$ (или любой другой формы с ненулевым интегралом). В частности, для любой 1-формы $f(\vartheta)d\vartheta$ существует единственное $\lambda \in \mathbb{R}$ (а именно $\lambda = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S^1} f(\vartheta)d\vartheta$) такое, что $f(\vartheta)d\vartheta - \lambda d\vartheta = dF(\vartheta)$, где $F \in C^\infty(S^1)$. Это фактор-пространство называется группой одномерных когомологий Де Рама окружности. То, что оно ненулевое, отражает тот факт, что окружность имеет нетривиальную топологию - не стягиваема по себе в точку (в отличие, например, от интервала прямой).

Задача

8.92. Пусть $V := \mathbb{R}[t]$ - линейное пространство многочленов над полем $\mathbb{R}$.
a) Зададим подпространство

$$U := \left\{p(t) \in \mathbb{R}[t] | p(0) = p'(0) = p''(0) = \ldots = p^{(k-1)}(0) = 0\right\} \subset V$$

Найдите размерность фактор-пространства V/U и какой-нибудь базис в нем.

b) Тот же вопрос, что и в предыдущем пункте, для подпространства

$$W = \{p(t) \in \mathbb{R}[t] | p(\alpha_1) = p(\alpha_2) = \ldots = p(\alpha_n) = 0\} \subset V$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ - набор попарно различных точек из $\mathbb{R}$.

Задача

8.93. Последовательность

$$K: \quad 0 \xrightarrow{d_0} V_1 \xrightarrow{d_1} V_2 \xrightarrow{d_2} \ldots \xrightarrow{d_{n-1}} V_n \xrightarrow{d_n} 0$$

конечномерных линейных пространств и линейных отображений называется комплексом, если композиция любых двух соседних отображений в нем равна нулю, $d_{i+1} \circ d_i = 0$. фактор-пространство $H^i(K) := \operatorname{Ker} d_i / \operatorname{Im} d_{i-1}$ называется $i-$ пространством когомологий этого комплекса. Число

$$\chi(K) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \dim V_i$$

называется эйлеровой характеристикой этого комплекса. Докажите, что

$$\chi(K)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}\dim H^{i}(K)$$

Задача

8.94. Докажите следующий аналог формуль Грассмана:

$$\operatorname{codim}_V(U+W)+\operatorname{codim}_V(U\cap W)=\operatorname{codim}_V U+\operatorname{codim}_V W$$

где U и W - подпространства конечной коразмерности не обязательно конечномерного линейного пространства V.

Решение задачи разобьем на три шага.

1. Рассмотрим отображение $\varphi: V\to(V/U)\oplus(V/W)$, заданное формулой $\varphi(v)=(v+U,v+W)$. Ясно, что оно линейно. Покажем, что $\operatorname{Ker}\varphi=U\cap W$. В самом деле, $(v+U,v+W)=(0+U,0+W)\Leftrightarrow v\in U\cap W$. Значит, корректно определено линейное отображение

$$i: V/(U\cap W)\to(V/U)\oplus(V/W),\quad i(v+(U\cap W))=(v+U,v+W)$$

которое к тому же инъективно.

2) Рассмотрим сюръективное линейное отображение

$$\pi:(V/U)\oplus(V/W)\to V/(U+W),\quad \pi\left(v_1+U,v_2+W\right)=v_1-v_2+(U+W)$$

Нетрудно поверить, что $\operatorname{Ker}\pi=\operatorname{Im}i$.

3) Теперь требуемое равенство $\dim((V/U)\oplus(V/W))=\dim V/(U+W)+\dim V/(U\cap W)$ следует из такого легко проверяемого утверждения: пусть дана последовательность $L\xrightarrow{\varphi}M\xrightarrow{\psi}N$ конечномерных линейных пространств и линейных отображений такая, что φ инъективно, ψ сюръективно и $\operatorname{Im}\varphi=\operatorname{Ker}\psi$, то $\dim M=\dim L+\dim N$.

Перейдем теперь к определению фактороператора.

Пусть $\varphi: V\to V$ - линейный оператор, $U\subset V-\varphi$-инвариантное подпространство. Фактороператором $\bar{\varphi}=\bar{\varphi}_{V/U}: V/U\to V/U$ называется линейный оператор, определенный формулой $\bar{\varphi}(v+U)=\varphi(v)+U\forall v\in V$

Проверим корректность определения: если $v+U=v'+U$, то

$$\bar{\varphi}(v+U)=\varphi(v)+U=\varphi\left(v'\right)+U=\bar{\varphi}\left(v'+U\right)$$

поскольку $\varphi\left(v'\right)-\varphi(v)=\varphi\left(v'-v\right)\in U$ в силу φ-инвариантности U.

Проверка линейности:

$$\begin{gathered}\bar{\varphi}\left(\left(v_1+U\right)+\left(v_2+U\right)\right)=\bar{\varphi}\left(\left(v_1+v_2\right)+U\right)=\varphi\left(v_1+v_2\right)+U=\\ \left(\varphi\left(v_1\right)+\varphi\left(v_2\right)\right)+U=\left(\varphi\left(v_1\right)+U\right)+\left(\varphi\left(v_2\right)+U\right)=\bar{\varphi}\left(v_1+U\right)+\bar{\varphi}\left(v_2+U\right)\end{gathered}$$

аналогично проверяется $\bar{\varphi}(\lambda(v+U))=\lambda\bar{\varphi}(v+U)$.

Задача

8.95. $\overline{\mathrm{Id}_V}=\mathrm{Id}_{V/U}$. Если $\psi: V\to V$ - еще один оператор, для которого подпространство $U\subset V$ ψ-инвариантно, то $\overline{\psi\varphi}=\bar{\psi}\bar{\varphi}$.

Мы знаем, что если $\{e_1,\ldots,e_n\}$ - базис в V, первые k элементов $\{e_1,\ldots,e_k\}$ которого образуют базис в φ-инвариантном подпространстве U, то φ имеет в нем матрицу вида

$$A=\left(\begin{array}{cc}B&C\\0&D\end{array}\right)$$

в которой блок B является матрицей ограничения $\left.\varphi\right|_U$ в базисе $\{e_1,\ldots,e_k\}$.

Задача

8.96. Докажите, что блок D является матричей фажтороператора $\bar{\varphi} : V/U \to V/U$ в базисе $\{e_{k+1} + U, \ldots, e_n + U\}$ фактор-пространства V/U.

Используя предыдущую задачу, легко построить пример линейного оператора, имеющего инвариантное подпространство такое, что ограничение на него и факторопeратор нулевые, а сам оператор - нет.

Из предыдущей задачи также следует, что

$$\chi_\varphi(t) = \chi_{\varphi|_U}(t)\chi_{\bar{\varphi}_{V/U}}(t) \tag{76}$$

Предположим теперь, что к φ-инвариантному подпространству U мы в V смогли найти φ инвариантное прямое дополнение W (мы знаем, что такое прямое дополнение не всегда существует). Тогда имеет место следующее утверждение.

Предложение

8.97. Диаграмма

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\varphi|_W"] \arrow[d, "\pi|_W"', "\cong"] & W \arrow[d, "\cong"] \\ V/U \arrow[r, "\bar{\varphi}_{V/U}"] & V/U \end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть $\bar{\varphi}_{V/U} \circ \pi\big|_W = \pi|_W \circ \varphi|_W$.

Proof. □

Имеем

$$\left(\bar{\varphi}_{V/U} \circ \pi\big|_W\right)(w) = \bar{\varphi}_{V/U}(w + U) = \varphi(w) + U$$
$$\left(\pi|_W \circ \varphi|_W\right)(w) = \pi|_W\left(\varphi(w)\right) = \varphi(w) + U$$

Доказанное предложение показывает, что при отождествлении фактор-пространства V/U с W посредством изоморфизма $\pi|_W$ действие оператора $\bar{\varphi}_{V/U}$ на V/U отождествляется с действием ограничения $\varphi|_W$ на W.

В качестве примера использования понятия факторопeратора докажем с помощью него теорему Гамильтона-Кэли.

Lemma

8.98. Пусть $\varphi, \psi : V \to V$ - линейные операторы, для которых подпространство $U \subset V$ инвариантно. Тогда

1. $\overline{\varphi + \psi} = \bar{\varphi} + \bar{\psi}$
2. $\overline{\lambda\varphi} = \lambda\bar{\varphi}$
3. $\bar{\varphi}^m = \overline{\varphi^m}$ для $m \in \mathbb{N}$.

Proof. □

1)

$$(\overline{\varphi + \psi})(v + U) = (\varphi + \psi)(v) + U = (\varphi(v) + \psi(v)) + U =$$
$$= (\varphi(v) + U) + (\psi(v) + U) = \bar{\varphi}(v + U) + \bar{\psi}(v + U) = (\bar{\varphi} + \bar{\psi})(v + U)$$

2.

$$\overline{\lambda\varphi}(v + U) = (\lambda\varphi)(v) + U = \lambda\varphi(v) + U = \lambda(\varphi(v) + U) = \lambda\bar{\varphi}(v + U)$$

3. Индукция по m. Случай $m = 1$ очевиден, пусть $m > 2$ и пусть результат верен для $m-1$. Имеем

$$\overline{\varphi^m}(v+U) = \varphi^m(v) + U = \varphi\left(\varphi^{m-1}(v)\right) + U = \bar{\varphi}\left(\varphi^{m-1}(v) + U\right) =$$
$$\bar{\varphi}\left(\overline{\varphi^{m-1}}(v+U)\right) = \left(\bar{\varphi}\overline{\varphi^{m-1}}\right)(v+U) = \left(\bar{\varphi}\bar{\varphi}^{m-1}\right)(v+U) = \left(\bar{\varphi}^m\right)(v+U)$$

Пусть $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ - произвольный многочлен. Тогда если подпространство U является φ инвариантным, то оно и $p(\varphi)$-инвариантно, и значит на V/U определены операторы $p(\bar{\varphi})$ и $\overline{p(\varphi)}$.

Lemma

8.99. $p(\bar{\varphi}) = \overline{p(\varphi)}$.

Proof. □

Пусть $p(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$. Тогда используя предыдущую лемму, имеем

$$\overline{p(\varphi)} = \overline{a_n\varphi^n + a_{n-1}\varphi^{n-1} + \ldots + a_1\varphi + a_0 \operatorname{Id}_V} = \overline{a_n\varphi^n} + \overline{a_{n-1}\varphi^{n-1}} + \ldots + \overline{a_1\varphi} + \overline{a_0 \operatorname{Id}_V} =$$
$$= a_n\overline{\varphi^n} + a_{n-1}\overline{\varphi^{n-1}} + \ldots + a_1\bar{\varphi} + a_0\overline{\operatorname{Id}_V} = a_n\bar{\varphi}^n + a_{n-1}\bar{\varphi}^{n-1} + \ldots + a_1\bar{\varphi} + a_0 \operatorname{Id}_{V/U} = p(\bar{\varphi})$$

Теорема

8.100. (Гамильтон-Кэли) (см. Теорему 8.74) Пусть V - конечномерное пространство над алгебраччески замкнутым полем $\mathbb{K}, \varphi : V \to V$ - линейный оператор. Тогда его характеристический многочлен $\chi_\varphi(t)$ аннулирует φ, то есть $\chi_\varphi(\varphi)$ - нулевой оператор.

Proof. □

Проведем доказательство индукцией по $n = \dim V$. Если $n = 1$, то $\varphi = \lambda \operatorname{Id}_V$ для некоторого скаляра $\lambda \in \mathbb{K}, \chi_\varphi(t) = t - \lambda$ и $\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V = 0$. Пусть $n > 1$. Так как поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто, то у φ есть собственный вектор e с некоторым собственным значением λ. Положим $U := \langle e \rangle \subset V$. Тогда U - одномерное φ-инвариантное подпространство, $\chi_{\varphi|_U}(t) = t - \lambda$. Пусть $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_{V/U}$ - соответствующий фактороператор. Тогда $\chi_\varphi(t) = \chi_{\varphi|_U}(t)\chi_{\bar{\varphi}_{V/U}}(t)$ (см. (76)).

Так как $\dim V/U = n - 1$, работает предположение индукции, и мы имеем $\chi_{\bar{\varphi}_{V/U}}\left(\bar{\varphi}_{V/U}\right) = 0$ как оператор на V/U. По предыдущей лемме $\chi_{\bar{\varphi}_{V/U}}\left(\bar{\varphi}_{V/U}\right) = \overline{\chi_{\bar{\varphi}_{V/U}}(\varphi)}_{V/U}$ и значит

$$0 + U = \chi_{\bar{\varphi}_{V/U}}\left(\bar{\varphi}_{V/U}\right)(v+U) =$$
$$= \overline{\chi_{\bar{\varphi}_{V/U}}(\varphi)}(v+U) = \chi_{\bar{\varphi}_{V/U}}(\varphi)(v) + U$$

откуда $\chi_{\bar{\varphi}_{V/U}}(\varphi)(v) \in U \quad \forall v \in V$. Так как $\chi_{\varphi|_U}(\varphi) = \varphi - \lambda \operatorname{Id}_V$ - нулевой оператор на U, то композиция $\chi_{\varphi|_U}(\varphi) \circ \chi_{\bar{\varphi}_{V/U}}(\varphi)$ - нулевой оператор на всем V (поскольку образ $\chi_{\bar{\varphi}_{V/U}}(\varphi)$ содержится в ядре $\chi_{\varphi|_U}(\varphi)$), а это согласно (76) есть $\chi_\varphi(\varphi)$. Тем самым шаг индукции доказан.

Задача

8.101. Докажите, что фактороператор $\bar{\varphi} : V/U \to V/U$ диагонализируемого оператора φ диагонализируем.

Решение. Согласно Задаче 8.67, для φ-инвариантного подпространства $U \subset V$ в V есть φ-инвариантное прямое дополнение W. Согласно Задаче 8.66, ограничение $\varphi|_W$ диагонализируемо, а тогда из Предложения 8.97 легко выводится, что диагонализируем и $\bar{\varphi}$.

Другое решение можно получить, используя Предложение 8.76 (ср. Задачу 8.77). Если φ диагонализируем, то его минимальный многочлен $\mu_\varphi(t)$ раскладывается на линейные множители над $\mathbb{K}$ и не имеет кратных корней. Так как по Лемме 8.99$\mu_\varphi(\bar{\varphi}) = \overline{\mu_\varphi(\varphi)} = 0$ (как операторы $V/U \to V/U$), то $\mu_{\bar{\varphi}}(t)$ делит $\mu_\varphi(t)$, а значит тоже не имеет кратных корней.

Задача

8.102. Пусть $\varphi : V \to V$ - изоморфизм, $U \subset V - \varphi$-инвариантное подпространство. Докажите, что тогда $\varphi|_U : U \to U$ будет изоморфизмом, если выполнено любое из условий

1. $\dim U < \infty$;
2. $\dim V/U < \infty$.

Приведите пример, когда $\varphi|_U$ не является изоморфизмом, если U - бесконечномерное подпространство бесконечной коразмерности в V.

Решение. Заметим, что в любом случае $\varphi|_U$ инъективно, то есть $\ker(\varphi|_U) = 0$. То есть в случаях 1) и 2) достаточно доказать сюръективность $\varphi|_U$.

1. Имеем
$$\dim\ker(\varphi|_U) + \dim\operatorname{Im}(\varphi|_U) = \dim U \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Im}(\varphi|_U) = U \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \varphi|_U \text{ сюръективно } \Rightarrow \varphi|_U \quad \text{изоморфизм.}$$
2. Заметим, что так как φ - изоморфизм, то фактороператор $\bar{\varphi} : V/U \to V/U, \bar{\varphi}(v + U) = \varphi(v) + U$ сюръективен, а следовательно является изоморфизмом так как V/U конечномерно. Значит если $\bar{\varphi}(v + U) = \varphi(v) + U = 0 + U$, то $v + U = 0 + U$, что равносильно $v \in U$. То есть $\varphi(v) \in U$ влечет $v \in U$, откуда следует, что $\varphi|_U$ сюръективно.

В качестве примера, отвечающего на последний вопрос, положим $V = \mathbb{K}[x, x^{-1}]$ - пространство полиномов Лорана, $U = \mathbb{K}[x] \subset V$, а в качестве φ возьмем оператор умножения на x.

Задача

8.103. Пусть $\varphi : V \to V$ - линейный оператор, $U \subset V - \varphi$-инвариантное подпространство. Докажите, что если $\varphi|_U : U \to U$ и $\bar{\varphi} : V/U \to V/U$ оба являются изоморфизмами, то и φ - изоморфизм.

Решение. Покажем, что φ инъективен. Если $\varphi(v) = 0$, то $\bar{\varphi}(v + U) = \varphi(v) + U = 0 + U$ и тогда в силу инъективности $\bar{\varphi}v \in U$, но $\ker(\varphi|_U) = 0$, откуда $v = 0$ и φ инъективно.

Покажем, что φ сюръективен. Для любого $v + U \in V/U$ существует $v' \in V$ такой, что $\varphi(v') + U = v + U$, то есть $\varphi(v') - v \in U$. В силу сюръективности $\varphi|_U\, \varphi(v') - v = \varphi(u')$ для некоторого $u' \in U$, откуда $v = \varphi(u' + v')$.

Задача

8.104. Докажите, что если два оператора на конечномерном пространстве над полем $\mathbb{C}$ коммутируют, то для них существует общий базис, в котором их матрицы верхние треугольные.

3.9 9 Jordanian Normal Form

Ни один курс линейной алгебры не может считаться сколько-нибудь полным без классификации всех линейных операторов на конечномерных пространствах хотя бы в простейшем случае алгебраически замкнутого поля.

Мы видели, что препятствия к диагонализируемости операторов над полем $\mathbb{K}$ бывают двух видов: вопервых, корни характеристического многочлена могут не принадлежать полю $\mathbb{K}$, во-вторых, даже если корень лежит в $\mathbb{K}$, его геометрическая кратность может оказаться строго меньше алгебраической. В первом случае проблема недиагонализируемости решается переходом к расширению поля $\mathbb{K}$, содержащему все корни характеристического многочлена, в случае же препятствий второго типа оператор останется недиагонализируемым даже после расширения поля.

Так как не все линейные операторы диагонализируемы, нужно определить "простейший вид" матриц линейных операторов более общий чем диагональный. Диагональный вид возникает тогда, когда все пространство представляется в виде прямой суммы инвариантных одномерных (порожденных собственными векторами) подпространств. В общем случае одномерные инвариантные подпространства нужно заменить более общими, отвечающими так называемым жордановым цепочкам, причем жорданова цепочка длины 1 состоит из одного собственного вектора.

Более подробно, рассмотрим оператор $\varphi : V \to V$ на конечномерном пространстве V, и пусть λ - его собственное значение. Рассмотрим оператор $\psi := \varphi - \lambda \operatorname{Id}_V$ и пусть $0 \neq e \in V$ - такой вектор, что для некоторого $m \geq 1 \psi^m(e) = 0$, но $\psi^{m-1}(e) \neq 0$ (например, собственный вектор φ с собственным значением λ удовлетворяет этому условию при $m = 1$). Тогда легко проверяется, что система векторов
$\{\psi^{m-1}(e), \ldots, \psi(e), e\}$ линейно независима (см. доказательство Леммы 9.6 ниже) и ее линейная оболочка $\langle \psi^{m-1}(e), \ldots, \psi(e), e\rangle$-инвариантна. Система векторов $\{\psi^{m-1}(e), \ldots, \psi(e), e\}$ и называется жордановой цепочкой для оператора φ, отвечающей собственному значению λ, так как применение оператора $\psi = \varphi - \lambda \mathrm{Id}_V$ сдвигает векторы цепочки на одну позицию влево, при этом переводя $\psi^{m-1}(e)$ в 0[47]. Матрица ограничения φ на $\langle \psi^{m-1}(e), \ldots, \psi(e), e\rangle$ в базисе $\{\psi^{m-1}(e), \ldots, \psi(e), e\}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

и называется жордановой клеткой порядка m с собственным значением λ.
Далее мы докажем, что если характеристический многочлен оператора φ раскладывается на линейные множители над полем $\mathbb{K}$, то в V существует базис, состоящий из жордановых цепочек оператора φ (отвечающих разным его собственным значениям). Такой базис называется жордановым базисом для оператора φ. В этом базисе матрица φ имеет блочно-диагональный вид, с жордановыми клетками в качестве блоков. Такая матрица и называется жордановой нормальной формой (кратко ЖНФ) оператора φ. Заметим, что диагональный вид является частным случаем , а именно когда все жордановы клетки имеют порядок 1 (соответственно все жордановы цепочки имеют длину 1 и, значит, состоят из собственных векторов). Более того, ЖНФ данного оператора определена однозначно с точностью до перестановки клеток в блочно-диагональном виде. То есть число клеток данного порядка с собственным значением λ в ЖНФ φ не зависит от выбора жорданова базиса.

Подобно тому, как собственные векторы, отвечающие одному собственному значению λ, порождают соответствующее собственное подпространство, жордановы цепочки, отвечающие конкретному собственному значению λ, порождают так называемое корневое подпространство. Причем все пространство, на котором действует оператор, при условии, что его характеристический многочлен раскладывается над полем $\mathbb{K}$ на линейные множители, всегда является суммой корневых подпространств (хотя, как мы знаем, не всегда является суммой собственных).

Заметим, что в данном тексте мы не планируем излагать алгоритм практического нахождения жорданова базиса, который подробно изложен в решебнике [14].

3.9.1 9.1 Root Subspaces

Пусть V - векторное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Определение

9.1. Вектор называется корневым вектором оператора φ, отвечающим скаляру $\lambda \in \mathbb{K}$, если существует такое натуральное N, что $(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)^N e = 0$. Наименьшее из таких N называется высотой корневого вектора e и обозначается $\operatorname{ht} e$.

Очевидно, что корневые векторы высоты 1 - в точности собственные векторы. Удобно считать нулевой вектор корневым вектором высоты 0 (отвечающим любому $\lambda \in \mathbb{K}$).

Пример 9.2. Для оператора дифференцирования на пространстве $V = C^\infty(\mathbb{R})$ бесконечно дифференцируемых функций собственные векторы с собственным значением λ - это ненулевые функции, пропорциональные $e^{\lambda x}$, а корневые векторы - это функции вида $p(x)e^{\lambda x}$, где $p(x)$ - многочлен. При этом высота

такого корневого вектора равна $\deg p + 1$. В частности, корневые векторы, отвечающие $\lambda = 0$ - суть в точности многочлены.

Легко проверить, что множество всех корневых векторов, отвечающих данному λ, образуют подпространство $V^\lambda \subset V$, называемое корневъм подпространством оператора φ, отвечающим λ.

Note.

9.3. Заметим, что

$$V^\lambda = \bigcup_{k=0}^{\infty} \ker (\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)^k$$

- объединение цепочки вложенных подпространств пространства V; легко проверить, что такое объединение является подпространством V. Кроме того, в случае конечномерного V последовательность ядер стабилизируется на некотором конечном шаге, поэтому $V^\lambda = \ker (\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)^N$ для достаточно большого N.

Если e - корневой вектор высоты $m > 0$, отвечающий λ, то $(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V) e$ - корневой вектор высоты m - 1, отвечающий тому же λ. Отсюда следует, что корневое подпространство V^λ инвариантно относительно $(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)$, а значит, и относительно φ. (Последнее можно доказать даже проще: если $(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)^N e = 0$, то, так как $\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V$ и φ коммутируют, то и $(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)^N (\varphi(e)) = 0\Big)$.

Заметим, что если e - корневой вектор оператора φ высоты $\operatorname{ht} e = m > 0$, отвечающий λ, то $(\varphi$ - $\lambda \operatorname{Id}_V)^{m-1} e$ - собственный вектор φ с собственным значением λ. Таким образом, ненулевые корневые подпространства отвечают тем скалярам, которые являются собственными значениями, и в этом случае $V_\lambda \subseteq V^\lambda$.

Напомним, что оператор $\varphi : V \to V$ называется нильпотентным, если существует натуральное N такое, что $\varphi^N = 0$. Наименьшее среди таких N называется высотой оператора φ и обозначается $\operatorname{ht}\varphi$. Например, для оператора $\varphi = \frac{d}{dx} : \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}[x]_n$ его высота $\operatorname{ht}\left(\frac{d}{dx}\right) = \dim \mathbb{R}[x]_n = n + 1$.

Далее мы по умолчанию считаем пространство V конечномерным.

[047] таким образом, система $\left\{\psi^{m-1}(e), \ldots, \psi(e), e\right\}$ также будет жордановой цепочкой для оператора ψ, отвечающей собственному значению 0.

Lemma

9.4. Пусть $\varphi : V \to V$ - нильпотентный оператор, $\dim V = n$. Тогда $\chi_\varphi(t) = t^n$. Доказательство легко следует из Задачи 8.72. Приведем также немного другое рассуждение. Пусть $\operatorname{ht} \varphi = m$. Тогда имеем цепочку вложенных подпространств

$$0 \subsetneq \operatorname{Ker} \varphi \subsetneq \operatorname{Ker} \varphi^2 \subsetneq \ldots \subsetneq \operatorname{Ker} \varphi^{m-1} \subsetneq \operatorname{Ker} \varphi^m = V \tag{77}$$

(В самом деле, если для некоторого $0 \leq k \leq m-1$ имеет место равенство $\operatorname{Ker} \varphi^k = \operatorname{Ker} \varphi^{k+1}$, то $\operatorname{Ker} \varphi^{k+1} = \operatorname{Ker} \varphi^{k+2} = \ldots$, что при $\operatorname{Ker} \varphi^k \neq V$ противоречит нильпотентности φ, а при $\operatorname{Ker} \varphi^k = V$ - определению высоты нильпотентного оператора). Выберем согласованный с этой цепочкой базис в V. Другими словами, выберем базис в $\operatorname{Ker} \varphi$, затем дополним его до базиса в $\operatorname{Ker} \varphi^2$ и т.д. В таком базисе матрица φ будет верхнетреугольной с нулями на главной диагонали. Отсюда следует требуемое.

Поскольку длина цепочки подпространств (77) не превосходит $\dim V + 1$, для нильпотентного оператора φ его высота $ht\varphi \leq \dim V$ (причем все значения высоты от 1 до $\dim V$ возможны - читателю предлагается привести примеры соответствующих нильпотентных матриц).

Пусть $V^\lambda \neq 0$ - корневое подпространство оператора φ, отвечающее его собственному значению λ.

Lemma

9.5. Оператор $(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)|_{V^\lambda}$ нильпотентен.

Proof. □

По определению корневого подпространства все векторы из V^λ имеют конечную высоту. Поскольку V^λ конечномерно (будучи подпространством конечномерного пространства), высота оператора $(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)|_{V^\lambda}$ равна максимуму высот векторов произвольного базиса в V^λ.

Для нильпотентного оператора $(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)|_{V^\lambda}$ существует базис в V^λ, в котором он имеет верхнюю треугольную матрицу с нулями на главной диагонали, а значит $\varphi|_{V\lambda}$ в том же базисе имеет верхнюю треугольную матрицу с λ на главной диагонали. Поэтому если $d := \dim V^\lambda$, то $\chi_\varphi|_{V\lambda}(t) = (t-\lambda)^d$; в частности, согласно Предложению 8.53, $d \leq m$, где m - кратность корня λ характеристического многочлена φ (вскоре мы покажем, что на самом деле $d = m$). Если $\mu \neq \lambda$, то оператор $(\varphi - \mu \operatorname{Id}_V)|_{V^\lambda}$ невырожден, так как в некотором базисе он имеет верхнюю треугольную матрицу с $\lambda - \mu \neq 0$ на главной диагонали.

Lemma

9.6. Пусть m - кратность корня λ многочлена $\chi_\varphi(t)$. Тогда $V^\lambda = \operatorname{Ker}\left((\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)^m\right)$ [48]

Proof. □

Из определения V^λ следует, что $\operatorname{Ker}\left((\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)^m\right) \subset V^\lambda$. Обратное включение следует из того, что, как было отмечено выше, высота нильпотентного оператора $(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)|_{V^\lambda} : V^\lambda \to V^\lambda$ не превосходит $d = \dim V^\lambda$, причем как мы уже знаем $d \leq m$.

Второе доказательство. Покажем, что высота любого вектора $e \in V^\lambda$ не превосходит m, откуда, очевидно, следует требуемое. Предположим противное: пусть существует $e \in V^\lambda$ такой, что $\operatorname{ht} e = N > m$. Пусть для краткости ψ обозначает оператор $(\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V)$. Тогда векторы $\left\{e, \psi(e), \ldots, \psi^{N-1}(e)\right\}$ линейно независимы. Действительно, если

$$\lambda_0 e + \lambda_1 \psi(e) + \ldots + \lambda_{N-1} \psi^{N-1}(e) = 0$$

- произвольная линейная зависимость, то, применяя к ней ψ^{N-1} и используя $\psi^N(e) = 0$, получим $\lambda_0 = 0$; с учетом этого, применяя к исходной зависимости ψ^{N-2}, получим $\lambda_1 = 0$ и т.д.

Очевидно, что $\langle e, \psi(e), \ldots, \psi^{N-1}(e) \rangle \subset V^\lambda$, откуда $\dim V^\lambda \geq N > m$, что противоречит тому, что m - максимальная степень множителя $(t-\lambda)$, на которую делится $\chi_\varphi(t)$.

Пусть $\chi_\varphi(t) = (t-\lambda_1)^{m_1} \ldots (t-\lambda_s)^{m_s}$, где λ_i попарно различны, причем все $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Обозначим для краткости $\psi_i := (\varphi - \lambda_i \operatorname{Id}_V)^{m_i}$. Операторы $\psi_i, i = 1, \ldots, s$ попарно коммутируют, и по Теореме ГамильтонаКэли $V = \operatorname{Ker}(\psi_1 \ldots \psi_s)$. Кроме того, по предыдущей Лемме $V^{\lambda_i} = \operatorname{Ker} \psi_i$. Отсюда, в частности, следует, что подпространство $V^{\lambda_i} \subset V$ инвариантно для всех ψ_j (см.

Предложение

8.14). Мы также знаем (см. предшествующий Лемме 9.6 абзац), что $\psi_j|_{V^{\lambda_i}}$ - изоморфизм при $j \neq i$.

Предложение

9.7. Корневые подпространства, отвечающие разным собственным значениям, линейно независимъ.

Proof. □

Пусть $V^{\lambda_1}, \ldots, V^{\lambda_k}$ - набор корневых подпространств оператора φ, отвечающих разным собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Воспользуемся индукцией по k. При $k=1$ требуемое утверждение очевидно; предположим что $k > 1$. Пусть $v_1 + \ldots + v_{k-1} + v_k = 0$, где $v_i \in V^{\lambda_i}$. Применяя к линейной зависимости ψ_k, получим $\psi_k(v_1) + \ldots + \psi_k(v_{k-1}) = 0$, причем $\psi_k(v_i) \in V^{\lambda_i}$. По предположению индукции $\psi_k(v_i) = 0, i = 1, \ldots, k-1$. Но так как $\psi_k|_{V^{\lambda_i}}$ - изоморфизм при $i \neq k$, то и сами $v_i = 0$ при $i = 1, \ldots, k-1$, а значит и $v_k = 0$.

Предложение

9.8. Предположсм, что характеристический многочлен оператора φ раскладывается на линейные множители над полем $\mathbb{K}$. Тогда V является прямой суммой корневых подпространств.

Proof. □

Будем использовать введенные выше обозначения. Пусть $v \in V = \operatorname{Ker}(\psi_s \ldots \psi_1)$ - произвольный вектор. Тогда $(\psi_{s-1} \ldots \psi_1)(v) \in \operatorname{Ker} \psi_s = V^{\lambda_s}$, причем $(\psi_{s-1} \ldots \psi_1)|_{V^{\lambda_s}}$ - композиция изоморфизмов и значит тоже изоморфизм. Поэтому существует (единственный!) $v_s \in V^{\lambda_s}$ такой, что $(\psi_{s-1} \ldots \psi_1)(v) = (\psi_{s-1} \ldots \psi_1)(v_s)$. Тогда $(\psi_{s-1} \ldots \psi_1)(v - v_s) = 0$, откуда $(\psi_{s-2} \ldots \psi_1)(v - v_s) \in \operatorname{Ker} \psi_{s-1}$.

Так как $(\psi_{s-2} \ldots \psi_1)|_{V^{\lambda_{s-1}}}$ - изоморфизм, то найдется (снова единственный) $v_{s-1} \in V^{\lambda_{s-1}}$ такой, что $(\psi_{s-2} \ldots \psi_1)(v - v_s) = (\psi_{s-2} \ldots \psi_1)(v_{s-1})$. Тогда $(\psi_{s-3} \ldots \psi_1)(v - v_s - v_{s-1}) \in V^{\lambda_{s-2}}$. Продолжая в том же духе, в конце концов мы придем к $\psi_1(v - v_s - \ldots - v_3 - v_2) = 0$, где $v_i \in V^{\lambda_i}$, откуда $v = v_1 + \ldots + v_s$ для некоторого $v_1 \in V^{\lambda_1}$. Значит, $V = V^{\lambda_1} + \ldots + V^{\lambda_s}$, а из предыдущего Предложения мы знаем, что сумма справа - прямая. [49]

По-другому доказать

Предложение

можно с помощью Задачи 7.88 (ср. также

[048] На всякий случай отметим, что кратность корня m - не обязательно наименьшее среди натуральных чисел, удовлетворяющих условию Леммы.

Предложение

8.76).

Следствие

9.9. $\dim V^{\lambda_i} = m_i$, где m_i - кратность корня λ_i многочлена $\chi_\varphi(t)$.

Proof. □

Для $i = 1, \ldots, s$ имеем $\dim V^{\lambda_i} \leq m_i$, но $\sum\limits_{i=1}^{s} \dim V^{\lambda_i} = n = \sum\limits_{i=1}^{s} m_i$.

Таким образом, в случае, когда характеристический многочлен оператора φ раскладывается на линейные множители над полем $\mathbb{K}$ (что, в частности, всегда верно для $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), все пространство представляется в виде прямой суммы корневых подпространств, $V = V^{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V^{\lambda_s}$, которые φ-инвариантны. Заметим, что корневое подпространство V^λ совпадает с собственным V_λ тогда и только тогда, когда геометрическая кратность собственного значения λ равна его алгебраической кратности, в случае же строгого неравенства имеет место строгое включение $V_\lambda \subsetneq V^\lambda$ (рекомендуем читателю еще раз вернуться к Теореме 8.58; теперь должно быть ясно, что условие 1) в ней обеспечивает разложимость пространства в сумму корневых, а условие 2) - что корневые совпадают с собственными). Заметим еще, что в последнем случае ограничение φ на V^λ не диагонализируемо (а значит, согласно Задаче 8.66, и сам оператор φ не диагонализируем).

Из инвариантности корневых подпространств следует, что в базисе пространства V, полученном объединением базисов всех корневых подпространств, матрица оператора φ будет иметь блочнодиагональный вид, блоки которого являются матрицами ограничения φ на корневые подпространства V^{λ_i}. Поэтому для исследования оператора достаточно изучить его ограничение на одно корневое подпространство.

Итак, пусть $\varphi : V \to V$ - линейный оператор, для которого $V = V^\lambda$ - корневое (под)пространство, отвечающее некоторому скаляру $\lambda \in \mathbb{K}$. Тогда $\psi := \varphi - \lambda \mathrm{Id}_V : V \to V$ - нильпотентный оператор. Если A - матрица ψ в некотором базисе пространства V, то матрицей φ в том же базисе будет $A + \lambda E$. Поэтому задача свелась к изучению нильпотентного оператора.

3.9.2 9.2 Nilpotent Operator Case

Пусть V — n-мерное векторное пространство. Примером нильпотентного оператора φ на V является оператор, который в некотором базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$ действует, сдвигая его векторы влево и переводя e_1 в 0, то есть $\varphi(e_i) = e_{i-1}$ при $i \geq 2$ и $\varphi(e_1) = 0$. Например, так задается действие оператора $\frac{d}{dx}$ на пространстве $V = \mathbb{R}[x]_{n-1}$ в базисе $\left\{1, \frac{x}{1!}, \frac{x^2}{2!}, \ldots, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right\}$. Напомним, что такая система векторов называется жордановой цепочкой. Читателю предлагается написать соответствующую матрицу; она называется нильпотентной жордановой клеткой (или жордановой клеткой с собственным значением 0) порядка n.

Задача

9.10. Найдите минимальный и характеристический многочлены нильпотентной жордановой клетки порядка n.

Заметим, что не для любого нильпотентного оператора существует базис, состоящий из одной жордановой цепочки (эквивалентно, не для всякого нильпотентного оператора существует вектор $e \in V$, $\operatorname{ht} e = \dim V$): сразу видно необходимое (как следует из дальнейшего, также являющееся достаточным) условие для этого: $\operatorname{rk}\varphi = \dim V - 1$.

Однако для любого нильпотентного оператора φ верен следующий результат: пространство V является прямой суммой φ-инвариантных подпространств, в каждом из которых базис - жорданова цепочка. Рассмотрим пример.

Пример 9.11. Пусть $\varphi := \frac{d^3}{dx^3} : \mathbb{R}[x]_{12} \to \mathbb{R}[x]_{12}$. Обозначим $e_k := \frac{x^k}{k!}, k = 0, \ldots, 12$. Тогда действие φ на базисных векторах записывается в виде жордановых цепочек

$$\begin{array}{lllllllllll} e_{12} & \mapsto e_9 & \mapsto & e_6 & \mapsto & e_3 & \mapsto & e_0 & \mapsto & 0 \\ e_{10} & \mapsto & & e_7 & \mapsto & e_4 & \mapsto & e_1 & \mapsto & 0 \\ e_{11} & \mapsto & & e_8 & \mapsto & e_5 & \mapsto & e_2 & \mapsto & 0 \end{array}$$

Заметим, что k-й столбец этой таблицы, если считать справа, состоит из корневых векторов высоты $k-1$. Ясно, что линейная оболочка векторов из каждой жордановой цепочки φ-инвариантна, и φ в базисе $\{e_0, e_3, e_6, e_9, e_{12}, e_2, e_5, e_8, e_{11}, e_1, e_4, e_7, e_{10}\}$ имеет блочно-диагональную матрицу, блоки которой являются нильпотентными жордановыми клетками порядков $5, 4, 4$.

Напомним, что базис, в котором матрица оператора имеет блочно-диагональный вид с жордановыми клетками в качестве блоков, называется жордановым базисом.

Очевидно, что максимальная длина жордановой цепочки для нильпотентного оператора φ равна высоте этого оператора. Поэтому возникает следующая идея доказательства существования жорданова базиса: найти для φ вектор v максимальной высоты (равной $\operatorname{ht}\varphi$) и попытаться доказать, что для линейной оболочки порожденной им жордановой цепочки существует φ-инвариантное прямое дополнение. Далее можно было бы применить индуктивное предположение о существовании жорданова базиса к этому прямому дополнению и ограничению φ на него. Эта идея действительно может быть реализована, см. [12], Гл. 6, §4,

Предложение

4. Мы, однако, приведем несколько другое рассуждение.

Предложение

9.12. У нильпотентного оператора φ на конечномерном пространстве V существует жорданов базис.

Proof. □

Нам нужно доказать следующее. Если $\varphi : V \to V$ - линейный оператор на конечномерном векторном пространстве V такой, что $\varphi^m = 0$ для некоторого $m \geq 1$, то в V существует такой набор векторов $v_1, \ldots, v_r$ и отвечающий им набор натуральных чисел $k_1, \ldots, k_r$, что система векторов

$$\varphi^{k_1-1}(v_1), \varphi^{k_1-2}(v_1), \ldots, \varphi(v_1), v_1, \ldots, \varphi^{k_r-1}(v_r), \varphi^{k_r-2}(v_r), \ldots, \varphi(v_r), v_r \tag{78}$$

где $\varphi^{k_i}(v_i) = 0$ для всех $1 \leq i \leq r$, является базисом в V[50]. Легко видеть, что это - жорданов базис для φ, и обратно, любой жорданов базис имеет такой вид.

Для доказательства Предложения воспользуемся индукцией по $\dim V$. Если $\dim V = 1$, то $\varphi = 0$ и требуемый результат, очевидно, верен. Для доказательства шага индукции предположим, что $\dim V \geq 2$. Ясно, что $\varphi(V) := \operatorname{Im}\varphi \subset V$, но при этом $\varphi(V) \neq V$, ибо тогда $\varphi^m(V) = \varphi^{m-1}(V) = \ldots = \varphi(V) = V$, что противоречит равенству $\varphi^m = 0$. Кроме того, в случае $\varphi = 0$ требуемый результат тривиален. Таким образом, мы можем предположить, что

$$0 \subsetneq \varphi(V) \subsetneq V$$

[049] На самом деле анализ приведенного доказательства показывает, что в нем мы еще раз доказали, что указанная сумма прямая, поскольку выбор $v_s, v_{s-1}, \ldots, v_1$ на каждом шаге единственен.

По предположению индукции (примененному к пространству $U := \varphi(V)$ и ограничению на него оператора φ) в U существует набор векторов $u_1, \ldots, u_s$ такой, что

$$u_1, \varphi(u_1), \ldots, \varphi^{l_1-1}(u_1), \ldots, u_s, \varphi(u_s), \ldots, \varphi^{l_s-1}(u_s) \tag{79}$$

• базис в U и $\varphi^{l_i}(u_i) = 0$ для $1 \leq i \leq s$.

Для $1 \leq i \leq s$ выберем такие векторы $v_i \in V$, что $\varphi(v_i) = u_i$ (такие v_i существуют, поскольку $u_i \in \varphi(V)$). Подпространство $\operatorname{Ker}\varphi \subset V$ содержит линейно независимые векторы $\varphi^{l_1-1}(u_1), \ldots, \varphi^{l_s-1}(u_s)$. Дополним эти векторы до базиса в $\operatorname{Ker}\varphi$ векторами $w_1, \ldots, w_p$ (этим векторам будут отвечать жордановы цепочки длины 1 в (78)). Мы докажем, что

$$v_1, \varphi(v_1), \ldots, \varphi^{l_1}(v_1), \ldots, v_s, \varphi(v_s), \ldots, \varphi^{l_s}(v_s), w_1, \ldots, w_p \tag{80}$$

• требуемый (с точностью до перестановки векторов) базис в V.

Для доказательства линейной независимости системы (80) применим φ к произвольной линейной комбинации указанных векторов, равной нулю. Тогда в силу линейной независимости системы (79) получим, что коэффициенты перед векторами

$$v_1, \ldots, \varphi^{l_1-1}(v_1), \ldots, v_s, \ldots, \varphi^{l_s-1}(v_s)$$

равны нулю. Теперь линейная независимость (80) следует из того, что

$$\varphi^{l_1}(v_1), \ldots, \varphi^{l_s}(v_s), w_1, \ldots, w_p$$

• базис в $\operatorname{Ker}\varphi$.

Проверим теперь, что число векторов в (80) равно $\dim V$. Действительно, из (79) $\dim \operatorname{Im}\varphi = l_1 + \ldots + l_s$; кроме того, $\dim \operatorname{Ker}\varphi = s + p$. Тогда

$$\dim V = \dim \operatorname{Im}\varphi + \dim \operatorname{Ker}\varphi = (l_1 + 1) + \ldots + (l_s + 1) + p$$

а это - в точности число элементов в системе (80).

Как найти ЖНФ нильпотентного оператора φ? Легко видеть, что число жордановых клеток (включая клетки порядка 1) равно размерности ядра φ (то есть собственного подпространства, отвечающего собственному значению 0). Максимальный размер жордановой клетки равен высоте оператора. Далее полезны следующие соображения. Рассмотрим нильпотентную клетку J_k порядка k. Ранги $J_k^0 = E, J_k, J_k^2, \ldots, J_k^{k-1}, J_k^k = 0$ образуют строго убывающую последовательность $k, k-1, k-2, \ldots, 1, 0$. Так как ранг матрицы оператора не зависит от базиса, то для нахождения ЖНФ достаточно знать ранги степеней матрицы A, где A - матрица φ в произвольном базисе.

Поясним сказанное на примере оператора из Примера 9.11. Размерность его ядра равна 3 (оно равно $\mathbb{R}[x]_2 \subset \mathbb{R}[x]_{12}$), значит в Φ имеются 3 жордановы клетки. Размерность ядра $\varphi^2 = \frac{d^6}{dx^6}$ равна 6, значит все жордановы клетки имеют порядок больше 1 (если бы были клетки порядка 1, то так как они уже нулевые, то при возведении в квадрат их ранг не меняется, и в этом случае падение ранга всего оператора было бы меньше чем на 3). Размерность ядра $\varphi^3 = \frac{d^9}{dx^9}$ равна 9, значит все жордановы клетки имеют порядок больше 2. Размерность ядра $\varphi^4 = \frac{d^{12}}{dx^{12}}$ равна 12, значит все жордановы клетки имеют порядок больше 3. Размерность ядра $\varphi^5 = 0$ равна 13, значит только одна жорданова клетка имеет порядок больше 4, равный 5. Значит, размеры клеток в Φ 5, 4, 4 и $5 + 4 + 4 = 13 = \dim V$.

Задача

9.13. Характеристический и минимальный многочлены оператора φ равны соответственно t^5 ut^2. Опишите возможные ЖНФ оператора φ.

Как искать жорданов базис нильпотентного оператора?

Напомним (см.

[050] Заметим, что высота φ тогда равна $\max_{1 \leq i \leq r}(k_i)$.

Определение

8.86), что система векторов $e_1, \ldots, e_k \in V$ называется линейно независимой над подпространством $U \subset V$, если из $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_k e_k \in U$ следует $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$.

Ранее было доказано (см.

Предложение

8.89), что система $e_1, \ldots, e_k \in V$ линейно независима над U тогда и только тогда, когда система $e_1 + U, \ldots, e_k + U$ векторов из V/U линейно независима (в обычном смысле). Более того, $e_1, \ldots, e_k \in V$ - максимальная линейно независимая система над U тогда и только тогда, когда $e_1 + U, \ldots, e_k + U$ является базисом в фактор-пространстве V/U.

Изложим теперь сам алгоритм. Пусть дан нильпотентный оператор $\varphi : V \to V, \mathrm{ht}\varphi = m$. Вопервых, найдем максимальную систему векторов $e_1, \ldots, e_k$ из $V = \operatorname{Ker}\varphi^m$, линейно независимую над $\operatorname{Ker}\varphi^{m-1} \subset V$. Такие векторы зададут жордановы цепочки максимальной длины m. Тогда система векторов $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k) \in \operatorname{Ker}\varphi^{m-1}$ линейно независима над $\operatorname{Ker}\varphi^{m-2}$. В самом деле, если $\lambda_1\varphi(e_1) + \ldots + \lambda_k\varphi(e_k) \in \operatorname{Ker}\varphi^{m-2}$ - линейная зависимость, то $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_k e_k \in \operatorname{Ker}\varphi^{m-1}$, что противоречит предположению. Дополним систему $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k) \in \operatorname{Ker}\varphi^{m-1}$ до максимальной линейно независимой над $\operatorname{Ker}\varphi^{m-2}$ системы $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k), e_{k+1}, \ldots, e_{k+l}$ в $\operatorname{Ker}\varphi^{m-1}$. Последние l векторов в ней будут порождать жордановы цепочки длины $m-1$. В свою очередь, система $\varphi^2(e_1), \ldots, \varphi^2(e_k), \varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_{k+l})$ векторов из $\operatorname{Ker}\varphi^{m-2}$ линейно независима над $\operatorname{Ker}\varphi^{m-3}$. Дополним ее до максимальной линейно независимой системы $\varphi^2(e_1), \ldots, \varphi^2(e_k), \varphi(e_{k+1}), \ldots, \varphi(e_{k+l}), e_{k+l+1}, \ldots, e_{k+l+p}$ из $\operatorname{Ker}\varphi^{m-2}$ над $\operatorname{Ker}\varphi^{m-3}$, и т.д.

Почему в результате мы получим линейно независимую систему? Пусть дана нетривиальная линейная зависимость между построенными в результате описанного выше процесса векторами. Применяя к ней φ^{m-1}, получим некоторую зависимость $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_k e_k \in \operatorname{Ker}\varphi^{m-1}$, а значит $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$. Таким образом, коэффициенты перед $e_1, \ldots, e_k$ в данной линейной зависимости равны 0. Теперь применяя к ней φ^{m-2}, получаем, что $\mu_1\varphi(e_1) + \ldots + \mu_k\varphi(e_k) + \mu_{k+1}e_{k+1} + \ldots + \mu_{k+l}e_{k+l} \in \operatorname{Ker}\varphi^{m-2}$, а значит в ней также равны нулю коэффициенты перед $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_k), e_{k+1}, \ldots, e_{k+l}$, и т.д.

Почему полученная система будет базисом в V? Для доказательства достаточно сравнить размерности: в самом деле,

$$\sum_{i=1}^{m} \dim\left(\operatorname{Ker}\varphi^i / \operatorname{Ker}\varphi^{i-1}\right) = \dim V$$

3.9.3 9.3 Fundamental Theorem

Теорема

9.14. Пусть $\varphi : V \to V$ - линейный оператор на конечномерном пространстве V над полем $\mathbb{K}$. Предположим, что его характеристический многочлен раскладывается на линейные множители над $\mathbb{K}$. Тогда в V существует базис, состоящий из жордановых цепочек оператора φ, отвечающих его собственным значениям (то есть жорданов базис для φ). Для каждого собственного значения λ набор длин соответствующих ему базисных жордановых цепочек не зависит от выбора жорданова базиса.

Приведем переформулировку Теоремы в терминах матриц.

Теорема

9.15. В условиях предыдущей Теоремы для оператора существует базис, в котором он имеет жорданову матричу (то есть блочно-диагоналъную матричу, блоками которой являются жордановы клетки). Набор порядков жордановых клеток, отвечающих собственному значению λ, не зависит от выбора такого базиса.

Proof. □

Доказательство существования жорданова базиса следует из предыдущего. Напомним его основные моменты. В условии Теоремы все пространство V представляется в виде прямой суммы корневых подпространств оператора φ, которые к тому же φ-инвариантны. Значит, достаточно доказать существование базиса из жордановых цепочек для отдельного корневого подпространства V^{λ}, поскольку тогда базис в V можно получить как объединение базисов в корневых подпространствах. Оператор $\psi = (\varphi - \lambda \mathrm{Id}_V)$ на V^{λ} нильпотентен, и для него существование базиса из жордановых цепочек доказано в Предложении 9.12. При этом жордановы цепочки ψ, отвечающие его собственному значению 0 - в точности жордановы цепочки оператора φ, отвечающие собственному значению λ.

Доказательство единственности проведем для матричной формулировки. Заметим, что число и порядок жордановых клеток с собственным значением λ однозначно определяются набором рангов степеней оператора $\varphi - \lambda \,\mathrm{Id}_V$. А именно, число таких клеток равно $\dim V - \mathrm{rk}\,(\varphi - \lambda\,\mathrm{Id}_V)$. Число клеток порядка больше 1 равно $\mathrm{rk}\,(\varphi - \lambda\,\mathrm{Id}_V) - \mathrm{rk}\,(\varphi - \lambda\,\mathrm{Id}_V)^2$, число клеток порядка больше 2 равно $\mathrm{rk}\,(\varphi - \lambda \mathrm{Id}_V)^2 - \mathrm{rk}\,(\varphi - \lambda \mathrm{Id}_V)^3$ и т.д. Если $\mathrm{ht}\,((\varphi - \lambda \mathrm{Id}_V)|_{V^{\lambda}}) = m$, то число клеток максимального порядка m равно $\mathrm{rk}\,(\varphi - \lambda\,\mathrm{Id}_V)^{m-1} - \mathrm{rk}\,(\varphi - \lambda\,\mathrm{Id}_V)^m$, далее $\mathrm{rk}\,(\varphi - \lambda\,\mathrm{Id}_V)^m = \mathrm{rk}\,(\varphi - \lambda\,\mathrm{Id}_V)^{m+1} = \ldots = \dim V - \dim V^{\lambda}$.

В частности, для $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ условие о разложимости на линейные множители выполнено для любого многочлена, значит любой оператор в комплексном линейном пространстве в некотором базисе задается жордановой матрицей.

Заметим, что размерность собственного подпространства оператора φ, отвечающего собственному значению λ, равна числу жордановых цепочек с данным собственным значением в жордановом базисе (числу жордановых клеток с собственным значением λ в ЖНФ), а размерность соответствующего корневого подпространства равна сумме длин жордановых цепочек с собственным значением λ в жордановом базисе (сумме порядков жордановых клеток с собственным значением λ в ЖНФ). Максимальный размер жордановой клетки с собственным значением λ равен максимальной длине жордановой цепочки в V^{λ} и равен высоте оператора $(\varphi - \lambda\,\mathrm{Id}_V)|_{V^{\lambda}}$.

На множестве всех матриц из $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ рассмотрим следующее отношение эквивалентности. Две матрицы $A, A' \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ назовем эквивалентными, если существует такая невырожденная матрица $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, что $A' = C^{-1}AC$. То есть две матрицы эквивалентны тогда и только тогда, когда они являются матрицами одного и того же оператора в n-мерном пространстве над полем $\mathbb{C}$ в разных базисах. Из доказанной Теоремы следует, что в каждом классе эквивалентности есть жорданова матрица, причем две жордановы матрицы эквивалентны тогда и только тогда, когда одна из другой получается перестановкой жордановых клеток. (Вопрос для самоконтроля: опишите классы эквивалентности нильпотентных матриц порядка 5 над произвольным полем $\mathbb{K}$, а также классы эквивалентности комплексных матриц порядка 5 с двумя разными собственными значениями λ, μ).

Следующая задача уточняет

Предложение

8.76.

Задача

9.16. Пусть $\mu_{\varphi}(t)$ - минимальный многочлен оператора φ. Докажите, что кратность его корня λ равна максимальному порядку жордановой клетки оператора φ с собственным значением λ.

Задача

9.17. Пусть для оператора φ известны его характеристический $\chi_\varphi(t) = t^4(t-1)^3$ и минимальный $\mu_\varphi(t) = t^2(t-1)^2$ многочлены. Что по этой информации можно сказать про ЖНФ оператора φ, а такэне про размерности его собственных и корневых подпространств?

Задача

9.18. Оператор φ удовлетворяет тождеству $\varphi^5 = \varphi^3$. Что можно сказать про его ЖНФ?

Задача

9.19. Найдите жорданову форму оператора $D = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$ на пространстве $\mathbb{R}[x,y]_4$ многочленов степени не выше 4 от переменных x, y.

Note.

9.20. В заключении данного раздела упомянем об одном недостатке жордановой нормальной формы. Допустим, у нас есть семейство комплексных матриц данного порядка, непрерывно зависящее от каких-то параметров. Каждую индивидуальную матрицу семейства можно привести к жордановой форме некоторой заменой базиса, но, вообще говоря, для матриц всего семейства нельзя добиться того, чтобы жорданова форма и приводящая к ней замена базиса непрерывно зависели от параметров.

Вот простейший пример описанной ситуации. Рассмотрим семейство матриц $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$, непрерывно зависящих от параметра ε. При $\varepsilon = 0$ ЖНФ матрицы семейства есть $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, в то время как при $\varepsilon \neq 0$ – $\begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\varepsilon} \end{pmatrix}$

3.9.4 9.4 Application of Lnf to Linear Differential Equations

Предложение

9.21. Пусть L - конечномерное пространство комплекснозначных диффереииируемых функций вещественной переменной x, обладающее тем свойством, что если $f \in L$, то $\frac{df}{dx} \in L$. Тогда существуют такие попарно различные комплексные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ и целые числа $r_1, \dots, r_s \geq 1$, что $L = \oplus L_i$, где L_i - пространство функций вида $e^{\lambda_i x} P(x)$, где $P(x)$ - произвольный многочлен степени $\leq r_i - 1$

Proof. □

Так как пространство L инвариантно относительно $\frac{d}{dx}$, то этот оператор можно ограничить на L (причем поскольку $\frac{d}{dx}$ к функциям из L можно применять неограниченное число раз, все функции из L бесконечно дифференцируемы). Идея заключается в том, чтобы рассмотреть жорданов базис для оператора $\frac{d}{dx}$ на L и последовательно вычислить вид входящих в него функций, начиная с собственных векторов, затем корневых векторов высоты 2 и т.д.

А именно, предположим что линейный оператор $\frac{d}{dx}$ на комплексном пространстве L имеет жорданову форму с клетками, отвечающими собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ размеров $r_1, \dots, r_s$ и рассмотрим соответствующие жордановы цепочки

$$
\begin{array}{l}
v^1_{r_1-1} \xrightarrow{\frac{d}{dx}-\lambda_1 \operatorname{Id}} v^1_{r_1-2} \to \ldots \to v^1_0 \xrightarrow{\frac{d}{dx}-\lambda_1 \operatorname{Id}} 0 \\
v^2_{r_2-1} \xrightarrow{\frac{d}{dx}-\lambda_2 \operatorname{Id}} v^2_{r_2-2} \to \ldots \to v^2_0 \xrightarrow{\frac{d}{dx}-\lambda_2 \operatorname{Id}} 0 \\
v^s_{r_s-1} \xrightarrow{\frac{d}{dx}-\lambda_s \operatorname{Id}} v^s_{r_s-2} \quad \to \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Тогда можно положить $v^i_0 = e^{\lambda_i x}$. Действительно, это - ненулевое (поскольку собственный вектор) решение дифференциального уравнения $\frac{df}{dx} = \lambda_i f$, которое определено однозначно с точностью до умножения на ненулевое число. (В самом деле, если f - решение указанного уравнения, то дифференцирование выражения $fe^{-\lambda_i x}$ дает 0, то есть это - некоторая константа). В частности, мы видим, что $\lambda_i, 1 \le i \le s$, попарно различны, то есть каждому собственному значению отвечает ровно одна жорданова клетка. В следующей строчке стоят решения уравнений $\frac{df}{dx} - \lambda_i f = e^{\lambda_i x}$ (для тех i, для которых $r_i > 1$). Произвольное решение линейного неоднородного уравнения является суммой его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения. Легко видеть, что в качестве частного решения подходит $\frac{x}{1!}e^{\lambda_i x}$. Поэтому положим $v^i_1 = \frac{x}{1!}e^{\lambda_i x}$ для i таких, что $r_i > 1$.

Далее положим по индукции $v^i_{k-1} = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}e^{\lambda_i x}$ при $0 \le k-1 < r_i - 1$. Тогда $\frac{x^k}{k!}e^{\lambda_i x}$ является решением уравнения $\frac{df}{dx} - \lambda_i f = v^i_{k-1}$, что доказывает индуктивное предположение. Очевидно, что линейная оболочка векторов $v^i_0, \ldots, v^i_{r_i-1}$ совпадает с пространством, состоящим из всех функций $P(x)e^{\lambda_i x}$, где $\deg P(x) \le r_i - 1$.

Доказанное

Предложение

объясняет роль квазимногочленов (то есть функций вида $P(x)e^{\lambda x}$, где $P(x)$ - многочлен) в теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Действительно, если $y(x)$ - функция вещественной переменной x, являющаяся решением однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{d^i y}{dx^i} = 0, \quad a_i \in \mathbb{C} \tag{81}$$

то $y(x)$ по крайней мере n раз дифференцируема и индукция, использующая выражение (81) n-й производной через производные меньшего порядка показывает, что на самом деле она бесконечно дифференцируема, а также что линейная оболочка функций $\frac{d^i y}{dx^2}, i \ge 0$, конечномерна и оператор $\frac{d}{dx}$ переводит

ее в себя. Как показывает предыдущее Предложение, из этого вытекает, что $y(x)$ представляется в виде $\sum P_i(x)e^{\lambda_i x}$, где $P_i(x)$ - многочлены.

По уравнению (81) определим многочлен $f(t) := t^n + \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i t^i$. Очевидно, что $f(t)$ - аннулирующий многочлен оператора $\frac{d}{dx}$ на линейном пространстве L всех решений уравнения (81).

Предложение

9.22. Многочлен $f(t)$ является характеристическим и минимальным многочленом оператора $\frac{d}{dx}$ на пространстве L всех решений уравнения (81). В частности, $\dim L = n\lambda_i$ - его корни кратностей $r_i, \sum\limits_i r_i = n$.

Proof. □

Если L бесконечномерно, то тем не менее произвольный его элемент (в силу соотношения (81)) принадлежит конечномерному $\frac{d}{dx}$-инвариантному подпространству. Любое такое подпространство представляется в виде прямой суммы корневых подпространств оператора $\frac{d}{dx}$, в которых (как мы видели в предыдущем Предложении) квазиодночлены $\left\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, \frac{x^k}{k!}e^{\lambda x}\right\}$ (для некоторого k) образуют базис. Подставляя $e^{\lambda x}$ в (81) получаем, что λ - корень $f(t)$.

Пусть $f(t) = \prod_{i=1}^{s}(t-\lambda_i)^{r_i}$, причем $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Поскольку оператор $\frac{d}{dx} - \lambda_i \operatorname{Id}_L$ понижает степень $\frac{x^k}{k!}e^{\lambda_i x}, k \geq 1$ на 1 и определяет изоморфизм при ограничении на пространство квазимногочленов с $\lambda \neq \lambda_i$ мы видим, что для каждого корня λ_i многочлена $f(t)$ в L имеется r_i-мерное корневое подпространство оператора $\frac{d}{dx}$ и все L является их прямой суммой. В частности, многочлен $f(t)$ является минимальным многочленом оператора $\frac{d}{dx}$, а поскольку для каждого собственного значения λ_i имеется единственная жорданова клетка, то и характеристическим.

Таким образом, в обозначениях из предыдущего доказательства пространство решений уравнения (81) является линейной оболочкой квазимногочленов

$$P_i(x)e^{\lambda_i x}, \quad \deg P_i(x) \leq r_i - 1, \quad 1 \leq i \leq s$$

Задача

9.23. Найдите все решения дифференциального уравнения

$$y''' + 2y'' - 4y' - 8y = 0$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$t^3 + 2t^2 - 4t - 8 = (t+2)\left(t^2 - 4\right) = 0$$

Его корни $\lambda_1 = 2$ кратности 1 и $\lambda_2 = -2$ кратности 2. Таким образом, функции $e^{2x}, e^{-2x}, xe^{-2x}$ образуют базис в пространстве решений (называемый также фундаментальной системой решений) рассматриваемого уравнения.

3.9.5 9.5 Application of gNF to Recurrent Sequences

У изложенной выше теории линейных дифференциальных уравнений есть красивый дискретный аналог - теория рекуррентных последовательностей. Чтобы подчеркнуть указанную аналогию (в основе которой лежит общая математическая основа - теория операторов в конечномерных линейных пространствах, в частности,), изложение в этом параграфе совершенно параллельно предыдущему.

Пусть V - бесконечномерное комплексное линейное пространство, состоящее из всех последовательностей комплексных чисел $V = \{(x_0, x_1, \ldots,)\,|x_i \in \mathbb{C}\}$ с покомпонентным сложением и умножением на скаляры. На нем действует линейный оператор левого сдвига

$$d : V \to V, \quad d(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

Он является аналогом оператора дифференцирования на пространстве бесконечно дифференцируемых функций.

Напомним, что последовательность - функция на множестве натуральных чисел (в нашем случае включая ноль). Для удобства дальнейших ссылок для фиксированного $\lambda \in \mathbb{C}$ сразу определим набор последовательностей $v_0, v_1, v_2, \ldots$ следующим образом:

$$v_0(n) = \lambda^n, \quad n \geq 0; \quad v_1(n) = n\lambda^{n-1} \text{ при } n \geq 1, \quad v_1(0) = 0$$
$$v_2(n) = \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \text{ при } n \geq 2, \quad v_2(n) = 0 \text{ при } n = 0, 1 \tag{82}$$
$$v_k(n) = \binom{n}{k}\lambda^{n-k} \text{ при } n \geq k, v_k(n) = 0 \text{ при } 0 \leq n \leq k-1$$

Задача

9.24. Докажите, что при $\lambda \neq 0$

$$\langle v_0, \ldots, v_k \rangle_{\mathbb{C}} = \{p(n)\lambda^n | p(t) \in \mathbb{C}[t], \deg p(t) \leq k\}$$

Если $\lambda = 0$, то $\langle v_0, \ldots, v_k \rangle_{\mathbb{C}}$ состоит из всех последовательностей, обращающихся в нуль начиная с $k+1$-го члена (напомним, что нумерация у нас начинается с нуля).
(Указание: используйте, что при фиксированном $k, k \leq n$, $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$ является многочленом степени k от n).

Через V_k^λ обозначим пространство последовательностей $\langle v_0, \ldots, v_k \rangle_{\mathbb{C}}$ из предыдущей задачи, отвечающее данному λ. Ясно, что $\dim V_k^\lambda = k+1$.

Следующее

Предложение

является аналогом Предложения 9.21.

Предложение

9.25. Для конечномерного d-инвариантного подпространства $L \subset V$ существуют тажие попарно различные комплексные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ и челые числа $r_1, \ldots, r_s \geq 1$, что $L = \oplus L_i$, где $L_i = V_{r_i-1}^{\lambda_i}$.

Proof. □

Приведенное ниже доказательство совершенно аналогично доказательству Предложения 9.21.

Так как пространство L инвариантно относительно оператора сдвига d, то этот оператор можно ограничить на L; положим $\delta := d|_L$. Идея заключается в том, чтобы рассмотреть жорданов базис для оператора δ на L и последовательно вычислить вид входящих в него последовательностей, начиная с собственных векторов, затем корневых векторов высоты 2 и т.д.

А именно предположим, что линейный оператор δ на комплексном пространстве L имеет жорданову форму с клетками, отвечающими собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ размеров $r_1, \ldots, r_s$ и рассмотрим соответствующие жордановы цепочки

$$v_{r_1-1}(\lambda_1) \xrightarrow{\delta-\lambda_1 \text{ Id}} v_{r_1-2}(\lambda_1) \to \ldots \to v_0(\lambda_1) \xrightarrow{\delta-\lambda_1 \text{ Id}} 0$$
$$v_{r_2-1}(\lambda_2) \xrightarrow{\delta-\lambda_2 \text{ Id}} v_{r_2-2}(\lambda_2) \to \ldots \to v_0(\lambda_2) \xrightarrow{\delta-\lambda_2 \text{ Id}} 0$$
$$v_{r_s-1}(\lambda_s) \xrightarrow{\delta-\lambda_s \text{ Id}} v_{r_s-2}(\lambda_s) \to \ldots \to v_0(\lambda_s) \xrightarrow{\delta-\lambda_S \text{ Id}} 0.$$

Далее читатель легко убедится самостоятельно, что как и подсказывают обозначения, для $\lambda = \lambda_i$ роль жордановых цепочек играют последовательности (82). Например, геометрическая прогрессия $v_0(\lambda) = (1, \lambda, \lambda^2, \ldots)$ играет роль собственного вектора оператора δ с собственным значением λ, причем пространство собственных векторов, отвечающих данному собственному значению, одномерно, а это показывает, что каждому собственному значению отвечает ровно одна жорданова клетка. В следующей строчке стоят решения неоднородного уравнения $\delta y - \lambda y = v_0(\lambda)$; легко проверяется, что в качестве его частного решения подходит последовательность $y = v_1(\lambda)$ и т.д. Доказательство завершается с помощью индукции с использованием тождества Паскаля $\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k} = \binom{n}{k-1}$ для биномиальных коэффициентов.

Теперь из Задачи 9.24 получаем, что соответствующее корневое подпрострнанство L действительно совпадает с V^{λ}_{r-1}.

Пусть $L \subset V$ - пространство решений однородного рекуррентного соотношения

$$x_{k+n} + a_{n-1}x_{k+n-1} + \ldots + a_1 x_{k+1} + a_0 x_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{83}$$

Тогда пространство Ld-инвариантно и имеет размерность n (поскольку очевидно, что рекуррента определяется однозначно первыми n членами). Более того, соотношения (83) означают, что $L = \operatorname{Ker} f(\delta)$, где $f(t) := t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$. Далее так же, как в Предложении 9.22 доказывается, что аннулирующий многочлен $f(t)$ оператора δ - характеристический и минимальный.

Таким образом, в обозначениях Задачи 9.24, корневое подпространство $V^{\lambda}_{r-1} \subset Lr$-кратного корня $\lambda \neq 0$ многочлена $f(t)$ состоит из всех последовательностей вида $\big(p(0), p(1)\lambda, p(2)\lambda^2, \ldots, p(k)\lambda^k, \ldots\big)$, где $p(t) \in \mathbb{C}[t], \quad \deg p(t) \leq r-1$.

Задача

9.26. Найдите все решения однородного рекуррентного соотношения

$$x_{k+3} - 8x_{k+2} + 21x_{k+1} - 18x_k = 0$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$t^3 - 8t^2 + 21t - 18 = (t-3)^2(t-2) = 0$$

Его корни $\lambda_1 = 3$ кратности 2 и $\lambda_2 = 2$ кратности 1. Таким образом, последовательности

$$\left(1, 3, 3^2, 3^3, 3^4, \ldots\right), \quad \left(0, 1, 2\cdot 3, 3\cdot 3^2, 4\cdot 3^3, \ldots\right), \left(1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots\right)$$

образуют базис в пространстве решений рассматриваемой рекурренты. Задавая конкретные значения $x_0 = a, x_1 = b, x_2 = c$ можно получить соответствующее частное решение.

3.9.6 9.6 Operator Space as a Module over a Polynomial Ring

В этом разделе мы наметим более концептуальный подход к изучению линейных операторов, подробности см., например, в [12], Гл. 9.

В вводной главе отмечалось, что существуют обобщения линейных пространств над произвольным ассоциативным кольцом R с единицей вместо поля $\mathbb{K}$, они называются R-модулями. Более точно, (левым) R-модулем M называется абелева группа $(M, +)$, на которой задана операция $R \times M \to M, \quad (r, m) \mapsto rm$ умножения (слева) на элементы кольца R, удовлетворяющая следующим условиям:

- $1m = m$ для любого $m \in M (1 \in R$ - единица кольца);
- $s(rm) = (sr)m$ для любых $r, s \in R$ и $m \in M$;
- $(r+s)m = rm + sm, \quad r\,(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$ для любых $r, s \in R$ и $m, m_1, m_2 \in M$.

Рассмотрим несколько примеров модулей над разными кольцами R.

Пример 9.27. Из определений сразу следует, что если $\mathbb{K}$ - поле, то $\mathbb{K}$-модуль - это векторное пространство над $\mathbb{K}$.

Пример 9.28. $\mathbb{Z}$-модуль A по-существу то же, что абелева группа. Действительно, любую абелеву группу A можно рассматривать как $\mathbb{Z}$-модуль, если положить

$$na = \begin{cases} a + \ldots + a, & \text{если } n \in \mathbb{N}; \\ 0, & \text{если } n = 0; \\ (-a) + \ldots + (-a), & \text{если } n - \text{ целое отрицательное число.} \end{cases}$$

Обратно, из определения модуля легко вывести (сделайте это!), что в произвольном $\mathbb{Z}$-модуле умножение на целые числа связано с операцией сложения в абелевой группе описанным выше образом.

Пример 9.29. Любое линейное пространство V над полем $\mathbb{K}$ можно рассматривать не только как $\mathbb{K}$-модуль, но и как модуль над кольцом $\mathcal{L}(V)$ всех линейных операторов на V. Свойства V как $\mathcal{L}(V)$-модуля совсем не похожи на свойства V как $\mathbb{K}$-векторного пространства: например, любой ненулевой элемент $v \in V$ порождает все V как $\mathcal{L}(V)$-модуль (но только одномерное подпространство $\langle v \rangle$ в V как в $\mathbb{K}$-векторном пространстве).
Пример 9.30. Модуль над кольцом многочленов $\mathbb{K}[t]$ - то же, что пара (V, φ), состоящая из $\mathbb{K}$-линейного пространства V и линейного оператора $\varphi : V \to V$, такого, что $tv = \varphi(v), \forall v \in V$.

В самом деле, поскольку поле $\mathbb{K}$ содержится в $\mathbb{K}[t]$ в качестве подкольца многочленов степени не выше 0, произвольный $\mathbb{K}[t]$-модуль является $\mathbb{K}$-модулем (то есть векторным пространством над полем $\mathbb{K}$) с некоторой дополнительной структурой. Из аксиом модуля следует, что умножение на t должно действовать как линейный оператор на V, который мы обозначим φ. Тогда произведение вектора $v \in V$ на произвольный многочлен $f(t) \in \mathbb{K}[t]$ должно быть равно $f(\varphi)(v)$ (результату применения линейного оператора $f(\varphi)$ к вектору v).

Обратно, имея пару (V, φ), читатель легко определит соответствующий $\mathbb{K}[t]$-модуль. Ясно, что свойства линейного оператора отражаются на свойствах соответствующего модуля и поэтому неудивительно, что изучение $\mathbb{K}[t]$-модулей дает еще один способ изучения линейных операторов.

Пример 9.31. Для того, чтобы на вещественном векторном пространстве V задать структуру $\mathbb{C}$-модуля (то есть комплексного векторного пространства) нужно на V задать $\mathbb{R}$-линейный оператор $I : V \to V$ такой, что $I^2 = -\mathrm{Id}_V$. (Докажите, что такой оператор I существует только при условии что $\dim_{\mathbb{R}} V$ четна). Действительно, в этом случае мы можем определить умножение элементов V на комплексные числа по формуле $(a+bi)v := av + bI(v)$. Читателю предлагается проверить, что тем самым мы действительно получаем линейное пространство над $\mathbb{C}$.

И обратно, комплексное векторное пространство можно (оставив умножение только на $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$) рассматривать как вещественное векторное пространство, на котором вдобавок задан $\mathbb{R}$-линейный оператор I умножения на $i \in \mathbb{C}$, который в силу $i^2 = -1$ должен удовлетворять соотношению $I^2 = -\mathrm{Id}_V$.
Пример 9.32. Для заинтересованного читателя упомянем еще один важный пример модулей. Для любой конечной группы G и поля $\mathbb{K}$ можно построить т.н. групповую алгебру $\mathbb{K}[G]$ (см. Замечание 5.8). В учебниках алгебры доказывается, что $\mathbb{K}[G]$-модули - в точности линейные представления группы G над полем $\mathbb{K}$.

Задача

9.33. Определите понятие подмодуля R-модуля M. Покажите, что подмодуль $\mathbb{K}[t]$-модуля (V, φ) - пара $(U, \varphi|_U)$, состоящая из φ-инвариантного подпространства $U \subset V$ и ограничения оператора φ на него.

В частности, результат о том, что у произвольного оператора φ на линейном пространстве V конечной положительной размерности над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ обязательно есть собственный вектор в терминах модулей можно сформулировать как существование в соответствующем $\mathbb{K}[t]$-модуле (V, φ) подмодуля, одномерного как линейное пространство.

Важную роль в этой теории играют ненулевые модули, у которых нет собственных (отличных от нулевого и самого модуля) подмодулей. Они называются простыми. Например, если поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто, то нет простых $\mathbb{K}[t]$-модулей кроме одномерных (как линейные пространства над $\mathbb{K}$). Над кольцом $\mathbb{R}[t]$ есть 1 и 2 -мерные простые модули (например, модуль, отвечающий повороту евклидовой плоскости на угол $\neq \pi k$, прост). Пространство V является простым модулем над кольцом всех линейных операторов $\mathcal{L}(V)$.

Очевидным образом определяется прямая сумма модулей над данным кольцом R. Существование для данного подмодуля $(U, \varphi|_U)$ $\mathbb{K}[t]$-модуля (V, φ) подмодуля $(W, \varphi|_W)$ такого, что $V \cong U \oplus W$ (прямая сумма подмодулей) равносильно существованию для φ-инвариантного подпространства $U\varphi$-инвариантного прямого дополнения W.

Если для кольца R выполняется условие, что всякий подмодуль произвольного R-модуля является прямым слагаемым, то любой R-модуль является прямой суммой простых. Так обстоит дело в случае $R = \mathbb{K}$ (произвольное поле) или $R = \mathbb{K}[G]$, где $\mathbb{K}$ - поле характеристики 0, а G - конечная группа (теорема Машке). Простейший пример оператора на двумерном пространстве с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ показывает, что данное условие не выполняется для $R = \mathbb{K}[t]$. (В самом деле, одномерный подмодуль, отвечающий левому верхнему углу матрицы, не имеет прямого дополнения). Это делает теорию $\mathbb{K}[t]$-модулей более сложной (в частности, приводит к тому, что даже над алгебраически замкнутым полем не любой оператор диагонализируем). Похожим образом дело обстоит и для кольца $R = \mathbb{Z}$.

Роль отображений между модулями, аналогичных линейным, играют гомоморфизмъ модулей. Более подробно, пусть M, N - два R-модуля. По определению, гомоморфизм между ними - такой гомоморфизм абелевых групп $\alpha : (M, +) \to (N, +)$, для которого $\alpha(r * m) = r \circ \alpha(m)$ для любых $m \in M$ и $r \in R$ (здесь мы специально умножение на элементы кольца R в модулях M и N обозначили разными символами соответственно $*$ и $\circ$).

Задача

9.34. Проверьте, что гомоморфизм между двумя $\mathbb{K}[t]$-модулями $(V, \varphi)u(U, \psi)$ - это такое линейное отображение $\alpha : V \to U\mathbb{K}$-линейных пространств V и U, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"'] & V \arrow[d, "\alpha"] \\ U \arrow[r, "\psi"'] & U \end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть $\forall v \in V \quad \psi(\alpha(v)) = \alpha(\varphi(v))$.

Задача

9.35. Пусть V - вещественное векторное пространство, а $\varphi : V \to V$ – $\mathbb{R}$-линейный оператор. Покажите, что φ определяет $\mathbb{C}$-линейный оператор $(V, I) \to (V, I)$ (см. Пример 9.31) тогда и только тогда, когда $\varphi \circ I = I \circ \varphi$.

Как и в случае линейных отображений, биективный гомоморфизм модулей называется изоморфизмом, а модули, между которыми существует изоморфизм - изоморфными. Заметим, что изоморфизмы - в точности обратимые гомоморфизмы.

Задача

9.36. Покажите, что два $\mathbb{K}[t]$-модуля вида (V, φ) и (V, ψ) (то есть φ и ψ - два (вообще говоря) разных линейных оператора на одном пространстве V) изоморфны тогда и толъко тогда, когда операторы φ и с сопряжжены (то есть существует такой линейный изоморфизм $\alpha : V \to V$, что $\psi = \alpha \circ \varphi \circ \alpha^{-1}$).

Из предыдущей задачи и изложенной выше теории жордановой нормальной формы следует, что в случае $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ два оператора φ и ψ определяют на V изоморфные структуры $\mathbb{C}[t]$-модуля тогда и только тогда, когда эти операторы имеют одинаковую ЖНФ. Можно двигаться в обратном направлении: сначала классифицировать $\mathbb{C}[t]$-модули с точностью до изоморфизма, а затем применить полученную классификацию для нахождения нормальной формы операторов.

Задача

классификации модулей над произвольным кольцом R выходит за пределы возможностей человеческой математики, однако для некоторых интересных классов колец такая классификация существует. В частности, существует теорема, описывающая классификацию конечнопорожденных модулей
над евклидовыми кольцами, к которым в частности относятся кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ и кольца многочленов $\mathbb{K}[t]$. Заинтересованный читатель может найти и соответствующую теорему, и вывод из нее жордановой нормальной формы в учебнике [12], Гл. 9, 3.

3.10 10 Bilinear and Quadratic Functions

Билинейные функции - важный класс объектов, определенных на линейных пространствах. Задание такой функции на данном линейном пространстве (как правило симметричной или кососимметричной) часто приводит к интересной геометрии. Так, например, для билинейной симметричной положительно определенной функции на вещественном пространстве мы получаем евклидову геометрию (которой будет посвящена отдельная глава). С точки зрения специальной теории относительности интерес представляют также знаконеопределенные функции. В различных теориях (в гамильтоновой механике например) важную роль также играют пространства, снабженные невырожденной кососимметрической функцией. В данном разделе мы рассмотрим классификацию симметричных и кососимметричных билинейных функций (главным образом над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$), в частности, познакомимся с их инвариантами, а также с важным критерием положительной определенности вещественной симметричной билинейной функции.

3.10.1 10.1 Key Definitions

Пусть V - векторное пространство над полем $\mathbb{K}$[51].

Определение

10.1. Билинейной функцией (или билинейной формой) на векторном пространстве V называется отображение $\alpha : V \times V \to \mathbb{K}$, линейное по каждому из двух своих аргументов.

Пример 10.2. Скалярное произведение геометрических векторов на евклидовой плоскости или в евклидовом трехмерном пространстве.

Пример 10.3. Из свойств интеграла Римана, доказывемых в курсе анализа, следует, что функция $\alpha(f,g) = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ является билинейной функцией на (бесконечномерном!) пространстве $C[a,b]$.

Пример 10.4. Функция $\alpha(A,B) = \mathrm{tr}(AB)$ является билинейной функцией на пространстве матриц $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$.

Пример 10.5. Как следует из свойств умножения матриц, для любой матрицы $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ функция $\alpha(x,y) = x^T Ay$ является билинейной на пространстве $\mathbb{K}^n$ столбцов высоты n.

Пример 10.6. Ориентированная площадь параллелограмма, построенного на упорядоченной паре векторов $\{u, v\}$ (псевдоскалярное произведение) на ориентированной евклидовой плоскости является билинейной функцией от u и v.

[051] при этом мы считаем, что в поле $2 \neq 0$, такие поля имеют характеристику $\neq 2$.

Пример 10.7. Пусть $C^1[a,b]$ - бесконечномерное линейное пространство непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a,b]$, а $C_0^1[a,b] \subset C^1[a,b]$ - линейное подпространство в нем, состоящее из функций, принимающих нулевые значения в концах отрезка. Для $f,g \in C_0^1[a,b]$ выражение $\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx$ задает билинейную функцию на $C_0^1[a,b]$.

Легко проверяется, что сумма билинейных функций на V снова является билинейной функцией на V, произведение билинейной функции на скаляр снова билинейная функция и более того, билинейные функции на V образуют линейное пространство, которое мы обозначим $\mathcal{B}(V)$.

Сейчас мы покажем, что при отождествлении n-мерного пространства V с пространством столбцов $\mathbb{K}^n$ с помощью выбора базиса билинейная функция на V отождествляется с билинейной функцией из Примера 10.5 (для своей матрицы A).

Lemma

10.8. Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ - фиксированный базис в V. Тогда для любого набора n^2 скаляров $a_{ij}, 1 \leq i,j \leq n$ существует единственная билинейная функция $\alpha \in \mathcal{B}(V)$ такая, что $\alpha(e_i, e_j) = a_{ij}, 1 \leq i,j \leq n$.

Proof. □

Сначала предположим, что такая билинейная функция α существует. Тогда по билинейности для произвольных $u, v \in V$ получаем:

$$\alpha(u,v) = \alpha\left(\sum_i u_i e_i, \sum_j v_j e_j\right) = \sum_{i,j} u_i v_j \alpha(e_i, e_j) = \sum_{i,j} a_{ij} u_i v_j$$

то есть ее значение на любой паре векторов однозначно определено. Значит, существует не более одной билинейной функции, удовлетворяющей условию.

Теперь осталось лишь заметить, что функция $\alpha : V \times V \to \mathbb{K}$, для произвольных векторов $u, v \in V$ определенная равенством

$$\alpha(u,v) = \sum_{i,j} a_{ij} u_i v_j \tag{84}$$

в самом деле билинейна, и для нее $\alpha(e_i, e_j) = a_{ij}$.

Матрица $A = (a_{ij}) \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{K})$ называется матрицей билинейной функции α в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Заметим, что формула (84) означает, что значение билинейной функции α с матрицей $A = (a_{ij})$ в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$ на векторах u и v с координатными столбцами x и y в том же базисе вычисляется как

$$\alpha(u,v) = x^T A y \tag{85}$$

Note.

10.9. Попробуем пояснить формулу (85). Мы знаем, что выбор базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V определяет изоморфизм $\varphi_e : V \to \mathbb{K}^n$, сопоставляющий вектору $v \in V$ его координатный столбец $\varphi_e(v) \in \mathbb{K}^n$. Пусть A - матрица билинейной функции $\alpha : V \times V \to \mathbb{K}$ в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Зададим билинейную функцию $\widetilde{\alpha} : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ на пространстве столбцов $\mathbb{K}^n$ формулой $\widetilde{\alpha}(x,y) = x^T A y$ для произвольных $x, y \in \mathbb{K}^n$.

Тогда равенство (85) равносильно $\alpha(u,v) = \widetilde{\alpha}(\varphi_e(u), \varphi_e(v))$ для любых $u, v \in V$. Иначе говоря, диаграмма

$$\begin{tikzcd} V \times V \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi_e \times \varphi_e"'] & \mathbb{K} \\ \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \arrow[ur, "\widetilde{\alpha}"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна. То есть, как и утверждалось выше, при отождествлении n-мерного пространства V с пространством столбцов $\mathbb{K}^n$ с помощью выбора базиса билинейная функция на V отождествляется с билинейной функцией из Примера 10.5 (для соответствующей матрицы A).

Вообще, можно заметить, что изоморфизм линейных пространств $\varphi : V \rightarrow U$ определяет изоморфизм линейных пространств $\mathcal{B}(U) \rightarrow \mathcal{B}(V), \alpha \mapsto \alpha(\varphi(\ldots), \varphi(\ldots))$ (наглядно это видно из диаграммы

$$\begin{tikzcd} V \times V \arrow[r, "\varphi \times \varphi"] \arrow[rr, bend left, "\alpha \circ (\varphi \times \varphi)"] & U \times U \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

- билинейная функция α определяет билинейную функцию $\alpha \circ (\varphi \times \varphi)$).

Рассматривая $\mathbb{K}^n$ в качестве U и используя данное в Примере 10.5 описание всех билинейных функций на $\mathbb{K}^n$ как задаваемых матрицами $A \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{K})$, мы снова приходим к приведенному выше результату.

Таким образом, мы определили отображение

$$\psi = \psi_e : \mathcal{B}(V) \rightarrow \operatorname{Mat}_n(\mathbb{K}), \quad \psi(\alpha) = (a_{ij}), \quad \text{где } a_{ij} = \alpha(e_i, e_j) \tag{87}$$

Предложение

10.10. Отображение (87) является биекиией.

Proof. □

Следует непосредственно из доказанной выше Леммы.
В действительности ψ - не просто биекция, а изоморфизм линейных пространств. В самом деле, если $\alpha, \beta \in \mathcal{B}(V)$ - билинейные функции с матрицами A и B в выбранном базисе и $C = (c_{ij})$ обозначает матрицу билинейной функции $\alpha + \beta$ в том же базисе, то

$$c_{ij} = (\alpha + \beta)(e_i, e_j) = \alpha(e_i, e_j) + \beta(e_i, e_j) = a_{ij} + b_{ij}$$

Аналогично проверяется та часть определения линейности, которая связана с умножением на скаляр.

Таким образом, мы действительно построили некоторый линейный изоморфизм (87) (зависящий от базиса e). В частности, $\dim \mathcal{B}(V) = (\dim V)^2$.

Выясним теперь, как матрица билинейной функции зависит от базиса [52]. Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и $\{e_1', \ldots, e_n'\}$ - два базиса в V и C - матрица перехода от первого базиса ко второму. Тогда координатные столбцы x, x' вектора $u \in V$ в этих базисах связаны соотношением $x = Cx'$. Имеем (см. (85))

$$\alpha(u, v) = x^T A y = (Cx')^T A (Cy') = x'^T \left(C^T A C\right) y'$$

С другой стороны, если A' - матрица α в базисе $\{e_1', \ldots, e_n'\}$, то $\alpha(u, v) = x'^T A' y'$. То есть билинейные функции с матрицами $C^T A C$ и A' в базисе $\{e_1', \ldots, e_n'\}$ совпадают (обе равны α), а тогда в силу доказанного выше эти матрицы равны, то есть матрица α во втором базисе есть

$$A' = C^T A C \tag{88}$$

[052] То есть как от базиса зависит построенный изоморфизм ψ_e.

Note.

10.11. Формулу (88) иллюстрирует коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \arrow[dd, bend right=60, "C\cdot\times C\cdot"'] \arrow[dr, "\widetilde{\alpha}'"] & \\
V \times V \arrow[u, "\varphi_{e'}\times\varphi_{e'}"'] \arrow[d, "\varphi_e\times\varphi_e"'] \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{K} \\
\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n, \arrow[ur, "\widetilde{\alpha}"'] &
\end{tikzcd}$$

составленная из диаграмм (86) и (50) (ср. (56)). В самом деле, из ее коммутативности следует, что $\widetilde{\alpha}'(x', y') = \widetilde{\alpha}(Cx', Cy')$, то есть $x'^T A' y' = (Cx')^T ACy' = x'^T C^T ACy'$.

Полезно сопоставить формулу (88) с аналогичной формулой (55) для матрицы линейного оператора. Мы видим, что хотя и линейный оператор и билинейная функция в базисе задаются матрицей, эти матрицы по-разному преобразуются при замене базиса (одинаково только когда матрица перехода ортогональна). Это имеет важные следствия. Например, мы видели, что определитель и след матрицы линейного оператора не зависят от базиса; для матриц билинейных функций это уже не так (читателю предлагается в этом убедиться).

В частности, если оператор в каком-либо базисе имеет единичную матрицу, то он тождественный и в любом другом базисе он также имеет единичную матрицу. А если билинейная функция имеет в некотором базисе единичную матрицу, то в базисе, полученном из исходного с помощью матрицы перехода C она будет иметь матрицу $C^T C$, которая является единичной тогда и только тогда, когда C ортогональна.

Еще одной особенностью закона преобразования матриц билинейных функций является то, что сохраняется условие симметричности (кососимметричности) матрицы. То есть если в некотором базисе матрица билинейной функции симметрична (кососимметрична), то это верно и для любого другого базиса (убедитесь в этом).

Определение

10.12. Ядром билинейной функции $\alpha : V \times V \to \mathbb{K}$ называется подпространство

$$\operatorname{Ker}\alpha := \{v \in V | \alpha(u, v) = 0 \forall u \in V\} \subset V$$

Функция α называется невырожденной, если $\operatorname{Ker}\alpha = 0$.
Например, скалярное произведение из Примера 10.2 является невырожденной билинейной функцией, поскольку для любого ненулевого вектора его скалярный квадрат положителен. По этой же причине невырождена билинейная функция из Примера 10.3. Невырожденность билинейной функции из Примера 10.5 равносильна невырожденности матрицы A.

Задача

10.13. Докажите невырожденность функций из Примеров 10.4 и 10.6.

Предложение

10.14. Пусть A - матрица α в некотором базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$ пространства V. Тогда

$$\dim \operatorname{Ker}\alpha = n - \operatorname{rk} A$$

Proof. □

Легко видеть, что

$$\operatorname{Ker}\alpha = \{v \in V | \alpha(e_i, v) = 0, i = 1, \ldots, n\}$$

то есть при отождествлении V с пространством столбцов $\mathbb{K}^n$ при помощи выбранного базиса подпространство $\operatorname{Ker}\alpha$ отождествляется с пространством решений СЛОУ с матрицей коэффициентов A.

В частности, $\operatorname{Ker}\alpha = 0$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{rk} A = n$, то есть когда матрица A невырождена.

Следствие

10.15. Ранг матрицы билинейной функции не зависит от базиса.

Proof. □

Действительно, подпространство $\operatorname{Ker}\alpha$ ни от каких базисов не зависит (а зависит только от самой α).

Заметим, что предыдущее следствие можно вывести и непосредственно из формулы (88), поскольку последняя показывает, что матрица A' получается из A некоторой конечной последовательностью элементарных преобразований строк и столбцов.

Доказанное следствие влечет корректность следующего определения.

Определение

10.16. Рангом билинейной функции α называется ранг ее матрицы в произвольном базисе. Он обозначается $\operatorname{rk}\alpha$.

Пример 10.17. Пусть $f_1, f_2 : V \to \mathbb{K}$ - ненулевые линейные функции на пространстве V. Тогда билинейная функция $f_1 \otimes f_2$, заданная равенством $(f_1 \otimes f_2)(u, v) := f_1(u) f_2(v) \forall u, v \in V$, имеет ранг 1. (В самом деле, ее матрица в данном базисе является произведением столбца, транспонированного к координатной строке функции f_1, на координатную строку функции f_2). Операция $\otimes$ называется тензорным произведением линейных функций.

Задача

10.18. Докажите что наоборот, любая билинейная функция ранга 1 является тензорным произведением ненулевых линейных функций.

Решение. Ядро, которое определено в Определении 10.12, естественно назвать правым ядром. Аналогично можно определить левое ядро

$$\operatorname{Ker}'\alpha := \{u \in V | \alpha(u, v) = 0 \forall v \in V\} \subset V.$$

Обозначим $U := \operatorname{Ker}\alpha, W := \operatorname{Ker}'\alpha$. Ясно, что $\dim U = \dim W$, причем если $\operatorname{rk}\alpha = 1$, то размерности обоих ядер равны $n - 1$. Могут представиться две ситуации: 1) $U = W$ или 2) $U \neq W$ в этом случае $U + W = V$.

В случае 1) выберем вектор $v \notin U (= W)$ и линейную функцию $f : V \to \mathbb{K}$, такую что $\operatorname{Ker} f = U, f(v) = 1$. Тогда, используя представление любого вектора из V в виде $\lambda v + z$, где $z \in U = W$, легко проверить, что $\alpha = \alpha(v, v) f \otimes f$ (в частности, $\alpha(v, v) \neq 0$).

В случае 2) выберем векторы $u \in U \backslash W$ и $w \in W \backslash U$ (они вместе с $U \cap W$ порождают V), а также линейные функции $f_1, f_2, : V \to \mathbb{K}$, такие что $\operatorname{Ker} f_1 = W, f_1(u) = 1, \operatorname{Ker} f_2 = U, f_2(w) = 1$. Теперь с использованием того, что любой вектор из V представляется в виде $\beta u + \gamma w + z$, где $z \in U \cap W$ (в самом деле, для любого $v \in V v - f_1(v) u - f_2(v) w \in U \cap W$), легко проверяется, что $\alpha = \alpha(u, w) f_1 \otimes f_2$.

Из предыдущей Задачи следует, что любая билинейная функция ранга r является суммой r попарных тензорных произведений некоторых линейных функций.

Note.

10.19. Остановимся немного подробнее на операции тензорного произведения линейных функций, определенной в Примере 10.17 (ее обобщение будет рассмотрено в 16.2). Заметим, что тензорное произведение линейных функций определяет билинейное отображение

$$V^* \times V^* \to \mathcal{B}(V), \quad (f,g) \mapsto f \otimes g$$

В частности, $(f_1+f_2)\otimes g = f_1 \otimes g + f_2 \otimes g$ и т.д.. Если $\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\}$ - биортогональный базис к выбранному базису $\{e_1,\ldots,e_n\}$ в V (см.

Определение

7.100), то функции $\varepsilon_i \otimes \varepsilon_j, 1 \leq i,j \leq n$ образуют некоторый базис в $\mathcal{B}(V)$. В самом деле, матрицы этих билинейных функций в базисе $\{e_1,\ldots,e_n\}$ - матричные единицы, а последние образуют базис в пространстве матриц.

С использованием базисных билинейных функций $\varepsilon_i \otimes \varepsilon_j$ произвольную билинейную функцию (84) можно также записать в виде $\alpha = \sum\limits_{i,j} \alpha(e_i,e_j)\, \varepsilon_i \otimes \varepsilon_j$, ср. аналогичное выражение (58) для линейных функций. Однако в дальнейшем мы в основном (за исключением 10.7) будем придерживаться более традиционного обозначения (84), принятого в учебниках по линейной алгебре.

В дальнейшем мы будем интересоваться не всеми билинейными функциями, а только теми, которые либо симметричны, либо кососимметричны.

Заметим, что для билинейной функции $\alpha : V \times V \to \mathbb{K}$ можно определить транспонированную билинейную функцию $\alpha^T : V \times V \to \mathbb{K}$ по формуле $\alpha^T(u,v) = \alpha(v,u) \forall u,v \in V$. Ясно, что матрицы функций α и α^T в фиксированном базисе являются транспонированными друг другу.

Определение

10.20. Билинейная функция $\alpha : V \times V \to \mathbb{K}$ называется симметричной (соответственно кососимметричной), если $\alpha^T = \alpha$ (соответственно $\alpha^T = -\alpha$).

Очевидно, билинейная функция симметрична (кососимметрична) тогда и только тогда, когда ее матрица в некотором (а значит в любом) базисе симметрична (кососимметрична).

Задача

10.21. Пусть $\alpha(x,y)$ - такая билинейная форма, что

$$\alpha(x,y) = 0 \iff \alpha(y,x) = 0$$

Докажите, что форма $\alpha(x,y)$ либо симметрична, либо кососимметрична.

Решение. Билинейная функция $\alpha : V \times V \to \mathbb{K}$ задает линейное отображение $\varphi_\alpha : V \to V^*$ по формуле $\varphi_\alpha(v) = \alpha(\cdot, v)$. Из условия задачи следует, что для любого $v \in V$ линейные функции $\varphi_\alpha(v)$ и $\varphi_{\alpha^T}(v)$ имеют одинаковые ядра, что, как мы знаем, равносильно тому, что $\langle \varphi_\alpha(v) \rangle = \langle \varphi_{\alpha^T}(v) \rangle$ как подпространства в V^*.

Пусть $\{e_1,\ldots,e_n\}$ - произвольный (пока) базис в V, а $\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\}$ - биортогональный ему базис в V^*. Тогда матрица линейного отображения φ_α относительно них равна матрице билинейной функции α в базисе $\{e_1,\ldots,e_n\}$. В самом деле, вычисляя значения левой и правой части на базисных векторах, убеждаемся, что $\varphi_\alpha(e_j) = \sum\limits_{i=1} \varepsilon_i a_{ij}$, где $a_{ij} = \alpha(e_i,e_j)$.

Заметим, что

$$\ker \alpha = \{v \in V | \alpha(u,v) = 0 \forall u \in V\} = \{v \in V | \varphi_\alpha(v) = 0\} = \ker \varphi_\alpha$$

Заметим также, что из условия следует, что $\ker\alpha = \ker\left(\alpha^T\right)$, а значит и $\ker\alpha = \ker\varphi_{\alpha^T}$. Выберем базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V такой, что $\{e_1, \ldots, e_k\}$ - базис в некотором прямом дополнении к $\ker\alpha$, а $\{e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ - базис в $\ker\alpha$. Тогда $\alpha(e_r, e_s) = 0$ если r или s больше k. В то же время $\varphi_\alpha(e_1), \ldots, \varphi_\alpha(e_k)$ - линейно независимые линейные функции на V (образующие базис в $\operatorname{Im}\varphi_\alpha$); то же верно и для $\varphi_{\alpha^T}(e_1), \ldots, \varphi_{\alpha^T}(e_k)$. Кроме того, для любого набора скаляров $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$

$$\langle\lambda_1\varphi_\alpha(e_1) + \ldots + \lambda_k\varphi_\alpha(e_k)\rangle = \langle\lambda_1\varphi_{\alpha^T}(e_1) + \ldots + \lambda_k\varphi_{\alpha^T}(e_k)\rangle$$

Отсюда легко получить, что существует такой скаляр $\mu \in \mathbb{K}$, что $\varphi_{\alpha^T}(e_s) = \mu\varphi_\alpha(e_s)$ для любого $1 \leq s \leq n$. То есть если A - матрица α, то $A^T = \mu A$. Так как $\left(A^T\right)^T = A$, то при $A \neq 0 \mu = \pm 1$.

Например, билинейные функции из Примеров 10.2, 10.3, 10.4 симметричны, из Примеров 10.6 и 10.7 кососимметричны (для доказательства кососимметричности последней нужно воспользоваться формулой интегрирования по частям), а из Примера 10.5 симметрична (кососимметрична) тогда и только тогда, когда матрица A симметрична (кососимметрична).

Также очевидно, что симметричные (кососимметричные) функции образуют подпространство в $\mathcal{B}(V)$. Подпространство симметричных (соотв. кососимметричных) функций мы обозначим $\mathcal{B}^+(V)$ (соотв. $\mathcal{B}^-(V)$). При изоморфизме (87) они отождествляются с подпространствами симметричных (соотв. кососимметричных) матриц.

Равенство

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\alpha + \alpha^T\right) + \frac{1}{2}\left(\alpha - \alpha^T\right) \tag{89}$$

показывает, что любая билинейная функция единственным образом представляется в виде суммы симметричной α^+и кососимметричной α^-(это также следует из существования разложения пространства матриц порядка n в прямую сумму подпространств симметричных и кососимметричных). То есть $\mathcal{B}(V) = \mathcal{B}^+(V) \oplus \mathcal{B}^-(V)$.

Пример 10.22. Если $\alpha = f_1 \otimes f_2$ - билинейная функция ранга 1 (см. Пример 10.17), то

$$\alpha^+ := \frac{1}{2}\left(f_1 \otimes f_2 + f_2 \otimes f_1\right) \tag{90}$$

(то есть $\alpha^+(u, v) = \frac{1}{2}\left(f_1(u)f_2(v) + f_2(u)f_1(v)\right)$) будет симметричной, а

$$\alpha^- := \frac{1}{2}\left(f_1 \otimes f_2 - f_2 \otimes f_1\right) \tag{91}$$

(то есть $\alpha^-(u, v) = \frac{1}{2}\left(f_1(u)f_2(v) - f_2(u)f_1(v)\right)$) - кососимметричной билинейными функциями. Из того, что любая билинейная функция является суммой функций ранга 1 следует, что любая симметричная (соответственно кососимметричная) билинейная функция является суммой функций вида (90) (соответственно вида (91)).

Чтобы мотивировать следующее определение, обратимся к конкретному примеру билинейной функции - скалярному произведению в евклидовом пространстве. Вместо того, чтобы рассматривать скалярное произведение как функцию двух аргументов, можно рассмотреть функцию "скалярный квадрат вектора" $v \mapsto (v, v) = |v|^2$ от одного аргумента. Заметим, что если нам известны скалярные квадраты всех векторов, мы можем восстановить и их попарные скалярные произведения, используя теорему косинусов. Как мы вскоре увидим, это - общее свойство симметричных билинейных функций и отвечающих им "скалярных квадратов". По-научному, скалярные квадраты называются квадратичными функциями.

Определение

10.23. Квадратичной функцией на векторном пространстве V называется функция $q : V \to \mathbb{K}$, для которой существует билинейная функция $\alpha : V \times V \to \mathbb{K}$ такая, что $q(v) = \alpha(v, v) \forall v \in V$.

То есть любая билинейная функция α задает квадратичную функцию q_α, которая получается из α ограничением области определения с $V \times V$ на диагональ $\Delta_V := \{(v,v) | v \in V\} \subset V \times V$. Из определения непосредственно следует, что для любой квадратичной функции q на пространстве V и любого скаляра $\lambda \in \mathbb{K}$ верно равенство $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v) \forall v \in V$. В базисе квадратичная функция является выражением вида $q(v) = \sum\limits_{i,j} a_{ij} v_i v_j$, то есть однородным многочленом степени 2 от координат вектора.

Заметим, что если α кососимметрична, то ей отвечает нулевая квадратичная функция. Более общо, если две билинейные функции отличаются на кососимметричную функцию, то они определяют одну и ту же квадратичную функцию. Сейчас мы докажем, что по квадратичной функции q_α однозначно восстанавливается симметричная компонента билинейной функции α (см. формулу (89)).

Действительно, если α - билинейная функция, то для соответствующей квадратичной функции q_α и для любой пары векторов $u, v \in V$ имеем

$$q_\alpha(u+v) = \alpha(u+v, u+v) = \alpha(u,u) + \alpha(u,v) + \alpha(v,u) + \alpha(v,v) = \\ = q_\alpha(u) + \alpha(u,v) + \alpha(v,u) + q_\alpha(v)$$

откуда

$$\alpha(u,v) + \alpha(v,u) = q_\alpha(u+v) - q_\alpha(u) - q_\alpha(v)$$

В частности, если α симметрична, то

$$\alpha(u,v) = \frac{1}{2}\left(q_\alpha(u+v) - q_\alpha(u) - q_\alpha(v)\right) \tag{92}$$

Положим по определению $\alpha_q(u,v) = \frac{1}{2}(q(u+v) - q(u) - q(v))$. Очевидно, что так определенная билинейная функция α_q симметрична.

Предложение

10.24. Сопоставления

$$\alpha \mapsto q_\alpha, \quad q \mapsto \alpha_q$$

определяют взаимно обратные биекции между множествами симметричных билинейных $\mathcal{B}^+(V)$ и квадратичных функций $Q(V)$.

Proof. □

Во-первых, проверим, что композиция

$$\mathcal{B}^+(V) \to Q(V) \to \mathcal{B}^+(V), \quad \alpha \mapsto q_\alpha \mapsto \alpha_{q_\alpha}$$

тождественна. Действительно, $q_\alpha(v) = \alpha(v,v)$ и

$$\alpha_{q_\alpha}(u,v) = \frac{1}{2}\left(q_\alpha(u+v) - q_\alpha(u) - q_\alpha(v)\right) = \frac{1}{2}(\alpha(u+v,u+v) - \alpha(u,u) - \alpha(v,v)) = \\ = \frac{1}{2}(\alpha(u,u) + \alpha(u,v) + \alpha(v,u) + \alpha(v,v) - \alpha(u,u) - \alpha(v,v)) = \alpha(u,v) \quad \forall u, v \in V$$

Во-вторых, проверим, что композиция

$$Q(V) \to \mathcal{B}^+(V) \to Q(V), \quad q \mapsto \alpha_q \mapsto q_{\alpha_q}$$

тождественна. Действительно,

$$q_{\alpha_q}(v) = \alpha_q(v,v) = \frac{1}{2}(q(2v) - 2q(v)) = \frac{1}{2}(4q(v) - 2q(v)) = q(v), \quad \forall v \in V$$

Заметим теперь, что для произвольных множеств X, Y отображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$ такие, что $g \circ f = \mathrm{Id}_X, f \circ g = \mathrm{Id}_Y$ являются взаимно-обратными биекциями, то есть f и g биективны и $g = f^{-1}, f = g^{-1}$ (см.

Предложение

1.5).

Заметим, что $Q(V)$ является линейным пространством, и построенные в предыдущем Предложении биекции являются линейными, тем самым $Q(V)$ изоморфно $\mathcal{B}^{+}(V)$.

Из доказанного Предложения следует, что все понятия, относящиеся к симметричным билинейным функциям (матрица, ранг, невырожденность и т.д.) переносятся на квадратичные функции. В дальнейшем изложении из соображений удобства мы будем иногда говорить о симметричных билинейных, иногда - о квадратичных функциях.

Заметим, что так как матрицей квадратичной функции по определению является матрица соответствующей ей симметричной билинейной функции, то

$$q(v)=\sum_{i,j} a_{ij} v_i v_j=\sum_i a_{ii} v_i^2+2 \sum_{i<j} a_{ij} v_i v_j$$

3.10.2 10.2 Reducing Bilinear Symmetric (quadratic) Functions to a Diagonal View

Начиная с этого момента все рассматриваемые билинейные функцци, если не оговорено противное, предполагаются симметричными или кососимметричными.

Для изучения билинейных функций полезно привлечь геометрическую интуицию, связанную с конкретным примером билинейной функции - скалярным произведением в евклидовом пространстве. Например, условие ортогональности двух векторов в евклидовом пространстве равносильно тому, что их скалярное произведение равно нулю. Это мотивирует следующее определение.

Определение

10.25. Векторы $u, v \in V$ называются ортогональными относительно α, если $\alpha(u, v)=0$. Условие ортогональности векторов записывается $u \perp v$.

Заметим, что так как α по предположению симметрична или кососимметрична, то отношение ортогональности симметрично (то есть $u \perp v \Leftrightarrow v \perp u$).

Определение

10.26. Ортогональным дополнением подпространству $U \subset V$ относительно α называется подпространство

$$U^{\perp}:=\{v \in V | \alpha(u, v)=0 \forall u \in U\} \subset V$$

Очевидно, что

$$V^{\perp}=\operatorname{Ker} \alpha$$

Предложение

10.27. Если функция α невырождена, то

$$\operatorname{dim} U^{\perp}=\operatorname{dim} V-\operatorname{dim} U \quad \text{и} \left(U^{\perp}\right)^{\perp}=U$$

Proof. □

Если $\{e_1, \ldots, e_k\}$ - базис в U, то

$$U^{\perp}=\{v \in V | \alpha\left(e_i, v\right)=0, i=1, \ldots, k\} \tag{93}$$

Продолжим $\{e_1, \ldots, e_k\}$ до базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ во всем пространстве V, пусть A - матрица α в этом базисе. Равенство (93) теперь означает, что в выбранном базисе в V

условие $v \in U^{\perp}$ равносильно тому, что координаты v удовлетворяют СЛОУ, матрица которой образована первыми k строками матрицы A. Так как α невырождена, то и матрица A невырождена, в частности, ее строки линейно независимы. Отсюда $\dim U^{\perp} = n-k$, где $n = \dim V, k = \dim U$, тем самым доказано первое из соотношений.

Дважды применяя доказанное соотношение, имеем

$$\dim \left(U^{\perp}\right)^{\perp} = n - \dim U^{\perp} = n-(n-k) = k = \dim U$$

С другой стороны, очевидно, что $U \subset \left(U^{\perp}\right)^{\perp}$ (действительно, любой вектор из U ортогонален любому вектору из ортогонального дополнения к U), поэтому $U = \left(U^{\perp}\right)^{\perp}$ (ср. Теорему 6.19).

Задача

10.28. Докажите, что если функция α невырождена, то для подпространств U, W в V

$$U \subset W \Leftrightarrow U^{\perp} \supset W^{\perp}$$

Если α - билинейная функция на V и $U \subset V$ - произвольное подпространство, то очевидным образом определяется ограничение $\left.\alpha\right|_U$, являющееся билинейной функцией на U.

Определение

10.29. Подпространство $U \subset V$ называется невырожденным относителъно α, если ограничение $\left.\alpha\right|_U$ невырождено.

Очевидно, что $\operatorname{Ker}\left.\alpha\right|_U = U \cap U^{\perp}$, поэтому подпространство U невырождено тогда и только тогда, когда $U \cap U^{\perp} = 0$.

Очень важно понимать, что из невырожденности α на всем пространстве не следует невырожденность ее ограничения на любое подпространство. Причина в том, что для ограничения $\left.\alpha\right|_U$ мы рассматриваем "скалярные произведения" векторов $u \in U$ только на векторы из U, но может так оказаться, что несмотря на то, что $\left.\alpha\right|_U(u, u') = \alpha(u, u') = 0 \forall u' \in U$, во всем пространстве V найдется такой вектор $v \in V$, что $\alpha(u, v) \neq 0$. Вот конкретный пример.

Пример 10.30. Рассмотрим билинейную симметричную функцию α на двумерном пространстве V с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ в базисе $\{e_1, e_2\}$. В координатах она записывается как $\alpha(u, v) = u_1 v_1 - u_2 v_2$. Очевидно, что α невырождена, но тем не менее скалярный квадрат $\alpha(e_1+e_2, e_1+e_2)$ вектора e_1+e_2 равен нулю. Поэтому ограничение $\left.\alpha\right|_{\langle e_1+e_2\rangle}$ на одномерное подпространство $\langle e_1+e_2\rangle \subset V$ нулевое. На самом деле $\langle e_1+e_2\rangle^{\perp} = \langle e_1+e_2\rangle$. То же верно и для вектора $e_1 - e_2$.

Выбирая новый базис $\{e_1', e_2'\}$ в $V, e_1' = e_1+e_2, e_2' = e_1 - e_2$, получаем для α матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, из которой видно, что ограничения α на одномерные подпространства $\langle e_1'\rangle$ и $\langle e_2'\rangle$ нулевые (причем $V = \langle e_1'\rangle \oplus \langle e_2'\rangle$!), в то же время сама α невырождена.

Как показывает следующее Предложение, если бы ограничение невырожденной α на любое подпространство было бы невырожденным, это сильно облегчило бы жизнь. Но, как мы только что убедились, в общем случае это неверно. Важным частным случаем когда это все же верно, является случай положительно определенных билинейных функций, который будет подробнее изучен далее.

Предложение

10.31. Подпространство $U \subset V$ невырождено относительно α тогда и только тогда, когда $V = U \oplus U^{\perp}$.

Proof. □

Как следует из доказательства Предложения 10.27, в любом случае $\dim U^{\perp} \geq \dim V - \dim U$

Если подпространство U невырождено, то $U \cap U^{\perp} = \operatorname{Ker} \alpha|_U = 0$, значит сумма $U + U^{\perp}$ прямая и, согласно предыдущему абзацу, $\dim \left(U \oplus U^{\perp}\right) \geq \dim V$, поэтому $V = U \oplus U^{\perp}$.

Обратно, если $V = U \oplus U^{\perp}$, то, в частности, $U \cap U^{\perp} = 0$, а так как $U \cap U^{\perp} = \operatorname{Ker} \alpha|_U$, то ограничение $\alpha|_U$ невырождено.

Например, как мы видели в Примере 10.30 для $U = \langle e_1 + e_2 \rangle$ имеет место соотношение $U^{\perp} = U$ и, значит, сумма U и $U^{\perp}$ не может быть прямой.

Любопытно отметить, что (в обозначениях предыдущего Предложения) из $V = U \oplus U^{\perp}$ не следует, что подпространство $U^{\perp}$ невырождено (читателю предлагается привести пример).

Начиная с этого момента все рассматриваемые билинейные функцци, если не оговорено противное, предполагаются симметричными.

Определение

10.32. Базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V называется ортогональным относительно α, если его векторы попарно ортогональны, то есть $\alpha\left(e_i, e_j\right) = 0$ при $i \neq j$.

Очевидно, что базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ортогонален тогда и только тогда, когда матрица α в нем диагональна, то есть $A = \operatorname{diag}\left(a_1, \ldots, a_n\right)$. При этом билинейная и квадратичная функции имеют вид

$$\alpha(u, v) = a_1 u_1 v_1 + \ldots + a_n u_n v_n, \quad q(v) = a_1 v_1^2 + \ldots + a_n v_n^2$$

соответственно.

Теорема

10.33. Для всякой симметричной билинейной функции существует ортогональный базис.

Proof. □

Доказывать теорему будем индукцией по $n = \dim V$. При $n = 1$ теорема очевидна. Пусть $n > 1$, тогда если $\alpha \equiv 0$, то теорема очевидна. Пусть $\alpha \not\equiv 0$, тогда (в силу формулы (92)) $q_\alpha \not\equiv 0$ и значит существует вектор $e_1 \in V$ такой, что $\alpha\left(e_1, e_1\right) = q_\alpha\left(e_1\right) \neq 0$. Значит, одномерное подпространство $U := \langle e_1 \rangle$ невырождено относительно α и, согласно Предложению 10.31, $V = U \oplus U^{\perp}$. Поскольку $\dim U^{\perp} = n - 1$, к этому подпространству применимо предположение индукции: в нем существует базис $\{e_2, \ldots, e_n\}$, ортогональный относительно $\alpha|_{U^{\perp}}$. Поскольку вектор e_1 ортогонален подпространству $U^{\perp}$, а значит каждому из векторов $e_2, \ldots, e_n$, то $\{e_1, \ldots, e_n\}$ - ортогональный базис в V относительно α, и шаг индукции доказан.

Задача

10.34. Докажите, что если билинейная функция α не симметрична, то она не приводится к диагональному виду ни в каком базисе.

3.10.3 10.3 Bilinear Symmetric (quadratic) Functions over and ℝ

Заметим, что до сих пор никаких условий (кроме $2 \neq 0$) мы на поле $\mathbb{K}$ не накладывали, то есть предыдущие результаты верны для любого поля характеристики, не равной 2.

Дальнейшее более тонкое исследование проведем для случаев $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$. Общий случай сложен: для поля $\mathbb{Q}$, например, классификация квадратичных функций связана с тонкими вопросами теории чисел.

Итак, к настоящему моменту мы нашли базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V, в котором квадратичная функция имеет вид

$$q(v) = a_1 v_1^2 + \ldots + a_n v_n^2$$

где $a_i = q(e_i)$. Путем перестановки базисных векторов можно добиться того, чтобы нулевые коэффициенты a_i (если они есть) стояли бы в конце.

Если $a_i \neq 0$, то замена $e_i \mapsto e_i' = \lambda e_i, \lambda \neq 0$ приводит к замене $a_i' = \lambda^2 a_i$, то есть a_i и a_i' отличаются умножением на квадрат ненулевого числа. Для $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ все ненулевые числа являются такими квадратами, поэтому, умножая базисные векторы на подходящие ненулевые скаляры, можно добиться, чтобы в новом базисе

$$q(v) = v_1'^2 + \ldots + v_r'^2 \tag{94}$$

где $r = \operatorname{rk} \alpha$ (количество ненулевых a_i).
Для $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ квадраты ненулевых чисел - в точности положительные числа, поэтому умножением базисного вектора на подходящее ненулевое число мы можем модуль $|a_i|, a_i \neq 0$ сделать равным 1, но при этом знак a_i изменить не можем. Поэтому для $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ мы можем добиться, чтобы

$$q(v) = \sum_{i=1}^{k} v_i'^2 - \sum_{j=k+1}^{k+l} v_j'^2 \tag{95}$$

где $k + l = r = \operatorname{rk} \alpha$.

Определение

10.35. Нормальным видом квадратичной функции над полем $\mathbb{C}$ (соответственно над $\mathbb{R}$) называется вид (94) (соответственно (95)).

Предложение

10.36. Для произвольной квадратичной функции q на векторном пространстве V над полем $\mathbb{C}$ (соответственно $\mathbb{R}$) существует базис в V, в котором она записывается в нормальном виде (94) (соответственно (95)).

Переформулируем полученный результат в терминах матриц.

Следствие

10.37. Для произвольной симметричной матрицы A с элементами из поля $\mathbb{C}$ (соответственно $\mathbb{R}$) существует невырожденная матрица C с элементами из соответствующего поля такая, что $C^T A C = A' = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$, где $a_i = 1$ или 0 в случае поля $\mathbb{C}$ и ± 1 или 0 в случае поля $\mathbb{R}$.

Доказательство следует непосредственно из предыдущего Предложения и формулы (88).

За исключением тривиальных случаев, имеется много базисов, в котором данная квадратичная функция имеет нормальный вид. Возникает вопрос: однозначно ли он определен для данной квадратичной функции? Ясно, что путем перестановки базисных векторов можно менять порядок расположения диагональных элементов в матрице квадратичной функции, поэтому инвариантный смысл может иметь только общее количество тех или иных элементов в диагональном виде (единиц и нулей для $\mathbb{C}$, единиц, минус единиц и нулей для $\mathbb{R}$).

Ясно, что количество единиц в нормальном виде квадратичной функции над $\mathbb{C}$ равно ее рангу и поэтому не зависит от выбора базиса (см.

Следствие

10.15). То же относится к сумме $k+l$ количества плюс и минус единиц (см. (95)) для нормального вида квадратичной функции над $\mathbb{R}$. Мы собираемся доказать более тонкий результат: числа k и l в нормальном виде (95) и по отдельности не зависят от базиса.

Итак, пусть $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Определение

10.38. Вещественная квадратичная функция $q : V \to \mathbb{R}$ называется положительно определенной, если $q(v) > 0$ для любого $v \in V, v \neq 0$. Вещественная билинейная симметричная функция α называется положительно определенной, если соответствующая ей квадратичная функция q_α положительно определена. Аналогично определяются отрицательно определенные вещественные квадратичные и симметричные билинейные функции.

Вещественная квадратичная функция $q : V \to \mathbb{R}$ (и соответствующая ей билинейная симметричная функция) называется положительно полуопределенной, если $q(v) \geq 0$ для любого $v \in V$. Аналогично определяются отрицательно полуопределенные функции.

Заметим, что из положительной определенности α на V следует ее невырожденность; более того, поскольку ограничение $\alpha|_U$ положительно определенной функции α на произвольное подпространство $U \subset V$ положительно определено, то любое подпространство $U \subset V$ невырождено относительно α.

Помимо положительно и отрицательно (полу)определенных квадратичных функций, есть неопределенные функции, которые могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Такая функция используется, например, в математической модели специальной теории относительности (метрика Лоренца).

Заметим, что если $\dim V = n$, то положительно определенная квадратичная функция на V имеет нормальный вид $q(v) = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i^2$ и ее матрица в соответствующем (ортонормированном) базисе есть $A = E$. Тогда в любом другом базисе $A' = C^T A C = C^T C$, в частности, $\det A' = (\det C)^2 > 0$. Отсюда следует важный вывод: определитель матрицы положительно определенной функции в произвольном базисе положителен. Более общо, знак определителя невырожденной вещественной квадратичной функции не зависит от базиса.

Теорема

10.39. Число k в нормальном виде (95) произвольной вещественной квадратичной функции q есть максимальная размерность подпространства, на котором q положительно определена.

Proof. □

Ясно, что q положительно определена на линейной оболочке $\langle e_1, \ldots, e_k \rangle$ первых k векторов того базиса, в котором она имеет вид (95). Пусть U - произвольное подпространство в V на котором q положительно определена и $W := \langle e_{k+1}, \ldots, e_n \rangle$. Так как $q(w) \leq 0$ для произвольного $w \in W$, а $q(u) > 0$ для $u \in U, u \neq 0$, то $U \cap W = 0$, откуда $\dim U \leq k$ (в самом деле, поскольку сумма $U + W$ - подпространство в V, то $\dim(U + W) = \dim U + n - k \leq \dim V = n$).

Аналогично доказывается, что число l в нормальном виде (95) равно максимальной размерности подпространства, на котором q отрицательно определена. (Для доказательства последнего факта можно воспользоваться также следующим очевидным соображением: q положительно определена тогда и только тогда, когда $-q$ отрицательно определена).

Следствие

10.40. ("Закон инерици"). Числа k и l в нормальном виде (95) вещественной квадратичной функции q не зависят от выбора базиса, в котором функция q имеет нормальный вид.

Числа $r_+ := k$ и $r_- := l$ называются соответственно положительным и отрицательным индексами инерции вещественной квадратичной функции q. Они связаны соотношением $r_+ + r_- = r = \operatorname{rk} q$. Набор (r_+, r_-)называют еще сигнатурой вещественной квадратичной функции q (или соответствующей билинейной симметричной функции α_q).

Ранг в случае комплексной, а также положительный и отрицательный индексы инерции в случае вещественной квадратичной функции на n-мерном пространстве V являются полными наборами инвариантов в следующем смысле: если даны две такие функции с одинаковыми наборами инвариантов, то существует замена базиса, переводящая первую функцию во вторую.

Пример 10.41. Найдем положительный и отрицательный индексы инерции для вещественной квадратичной функции $q(v) = v_1 v_2$ на двумерном пространстве. Производя замену базиса $e_1' = e_1 + e_2, e_2' = e_1 - e_2$ (или соответствующую ей замену координат $v_1 = v_1' + v_2', v_2 = v_1' - v_2'$) приводим ее к нормальному виду $q(v) = v_1'^2 - v_2'^2$. Таким образом, $r_+ = 1 = r_-$.

Задача

10.42. Пусть $A(t)$ - семейство вещественных симметричных матрич, непрерывно зависящих от параметра $t \in \mathbb{R}$. Известно, что при $t > t_0$ матрицы положительно определены. Докажите, что матрица $A(t_0)$ положительно полуопределена.

Решение. Из условия следует, что при $t > t_0 x^T A(t) x > 0$ для любого $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$. В силу того, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ функция

$$f_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_x(t) := x^T A(t) x$$

непрерывна, получаем, что $\lim_{t \to t_0+} f_x(t) = f_x(t_0) \geq 0$.

Задача

10.43. Найдите положительный и отричательный индексы инерции квадратичной функции $q(x) = \sum\limits_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$ на n-мерном пространстве.

Решение. Заметим, что

$$2q(x) = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2$$

Легко видеть, что ограничение q на одномерное подпространство, заданное системой $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, положительно определено, поэтому положительный индекс инерции не меньше 1, а ограничение q на n - 1 -мерное подпространство, заданное уравнением $x_1 + \ldots + x_n = 0$, отрицательно определено. Значит, положительный индекс инерции равен 1, а отрицательный $-n - 1$.

Не следует думать, что если вещественная квадратичная функция положительно определена на двух подпространствах, то она обязательно положительно определена и на их сумме. В частности,

Теорема

10.39 не утверждает, что среди всех подпространств, на которых квадратичная функция положительно определена, существует максимальное в том смысле, что оно содержит все такие подпространства.

Задача

10.44. Предположим, что вещественное векторное пространство V, на котором задана квадратичная форма $q : V \to \mathbb{R}$, разложено в прямую сумму $V = U \oplus W$ своих подпространств, причем ограничения $q|_U$ и $q|_W$ положительно определены. Следует ли отсюда, что сама q положительно определена?

Решение. Ответ отрицательный, причем для построения контрпримера достаточно рассмотреть случай, когда двумерное пространство V разложено в прямую сумму одномерных подпространств. Рассуждать при построении контрпримера можно следующим образом. Выберем базис $\{e_1, e_2\}$ в V такой, что $U = \langle e_1 \rangle, W = \langle e_2 \rangle$. То, что ограничения q на указанные подпространства положительно определены означает, что на главной диагонали в матрице q в базисе $\{e_1, e_2\}$ стоят положительные числа, скажем, равные 1. Требуется выбрать элементы вне главной диагонали так, чтобы полученная симметричная матрица не была положительно определенной, чего, конечно, легко добиться, положив эти элементы равными произвольному числу больше либо равному 1.

Другой вариант рассуждения использует аргумент "по непрерывности". А именно, пусть ограничение q на $\langle e_1 \rangle$ положительно определено. Рассмотрим вектор $e_2' := e_1 + \varepsilon e_2$, где положительное число ε достаточно мало. Ясно, что линейная оболочка $\langle e_1, e_2' \rangle$ совпадает с $V = \langle e_1, e_2 \rangle$, в то же время из непрерывности q и $q(e_1) > 0$ следует, что и $q(e_2') > 0$ при достаточно малых ε. Это показывает, для любой квадратичной функции, у которой положительный индекс инерции больше нуля, существует базис, на всех векторах которого она принимает только положительные значения.

Задача

10.45. Известно, что квадратичная функция q на n-мерном вещественном пространстве на всех базисных векторах некоторого базиса принимает положительные значения. Что можно сказать про ее положительный индекс инериия?

Решение. Очевидно, что положительный индекс инерции не меньше 1, оказывается, он может быть в точности равен 1. Приведем соответствующий пример. Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ - ортогональный базис для q такой, что $q(e_1) = 1, q(e_i) = -1$ при $i = 2, \ldots, n$. Перейдем к новому базису $\{e_1, \varepsilon e_2 + e_1, \ldots, \varepsilon e_n + e_1\}$. При этом $q(\varepsilon e_i + e_1) = 1 - \varepsilon^2 > 0$, если модуль ε достаточно мал. Отсюда легко получить, что r_+может принимать значения от 1 до n.

Задача

10.46. Известно, что квадратичная функция q на n-мерном вещественном пространстве V имеет матричу, все диагональные элементы которой равны нулю. Определите наибольшую возможную размерность подпространства $U \subset V$ такого, что на нем данная квадратичная функция положительно определена.

Решение. Размерность U - положительный индекс инерции q. Ясно, что $\dim U \leq n-1$. Покажем, что существует q с положительным индексом инерции, равным $n-1$, и при этом имеющая в некотором базисе матрицу с нулевыми элементами на главной диагонали. Пусть $q(v) := -v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2$ в некотором базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Для доказательства достаточно заметить, что "изотропный конус"

$$\{v \in V | q(v) = 0\} \subset V$$

содержит некоторый базис пространства V, поскольку в таком базисе матрица q имеет требуемый вид. Действительно, векторы e_1+e_2 и e_1-e_2 принадлежат изотропному конусу и через них выражается e_1. Далее, поскольку векторы $e_1 + e_k, 2 \leq k \leq n$ принадлежат изотропному конусу, то через них и через e_1 выражаются оставшиеся векторы $e_k, 2 \leq k \leq n$.

Задача

10.47. Пусть α - невырожденная симметричная билинейная функция на пространстве V, имеющая отрицательный индекс инерици, равный $1, u\alpha(v, v) < 0$ для некоторого $v \in V$.

Докажите, что ограничение α на любое подпространство, содержащее v, невырождено.

Решение. Так как подпространство $\langle v\rangle \subset V$ невырождено относительно α, то $V = \langle v\rangle \oplus \langle v\rangle^{\perp}$. Из условия следует, что ограничение α на $\langle v\rangle^{\perp} \subset V$ положительно определено.

Пусть $v \in U \subset V$ - подпространство. Тогда ортогональное дополнение к $\langle v\rangle \subset U$ есть $\langle v\rangle_U^{\perp} = \langle v\rangle^{\perp} \cap U$. Так как ограничение положительно определенной функции на подпространство положительно определено, то таково и ограничение $\alpha|_{\langle v\rangle^{\perp}}$ на $\langle v\rangle_U^{\perp}$. Кроме того, так как ограничение α на $\langle v\rangle$ невырождено, то $U = \langle v\rangle \oplus \langle v\rangle_U^{\frac{1}{U}}$. Из этого легко следует, что сумма положительного и отрицательного индексов инерции ограничения α на U равно $\dim U$, то есть подпространство U невырождено.

3.10.4 10.4 Normalization Algorithms

Приведем классические алгоритмы отыскания ортогональных базисов.

Во-первых, опишем метод Лагранжа - приведение квадратичной функции к сумме квадратов. Пусть

$$q\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji}$$

- квадратичная функция над полем $\mathbb{K}$ характеристики $\neq 2$. Следующая процедура дает удобный практический способ отыскания линейной невырожденной замены переменных x_i (а значит и замены базиса), приводящей q к сумме квадратов (с коэффициентами).

Случай 1. Существует ненулевой диагональный коэффициент. Перенумеровав переменные, мы можем считать, что $a_{11} \neq 0$. Тогда

$$q\left(x_1, \ldots x_n\right) = a_{11} x_1^2 + x_1\left(2a_{12}x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_n\right) + q'\left(x_2, \ldots, x_n\right)$$

где q' - квадратичная функция от $\leq n-1$ переменных. Выделяя полный квадрат, находим

$$q\left(x_1, \ldots, x_n\right) = a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 + q''\left(x_2, \ldots, x_n\right)$$

где q'' - новая квадратичная функция от $\leq n-1$ переменных. Полагая

$$y_1 = x_1 + a_{11}^{-1}\left(a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n\right), \quad y_2 = x_2, \ldots, y_n = x_n$$

мы получаем в новых переменных функцию

$$a_{11} y_1^2 + q''\left(y_2, \ldots, y_n\right)$$

и следующий шаг алгоритма состоит в применении его к q''.

Случай 2. Все диагональные коэффициенты равны нулю. Если вообще $q = 0$, то делать ничего не нужно: $q = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot x_i^2$. Иначе, перенумеровав переменные, можно считать, что $a_{12} \neq 0$. Тогда

$$q\left(x_1, \ldots, x_n\right) = 2a_{12}x_1x_2 + x_1 l_1\left(x_3, \ldots, x_n\right) + x_2 l_2\left(x_3, \ldots, x_n\right) + q'\left(x_3, \ldots, x_n\right)$$

где l_1, l_2 - линейные функции, а q' - квадратичная. Положим

$$x_1 = y_1 + y_2, \quad x_2 = y_1 - y_2, \quad x_i = y_i, \quad i \geq 3$$

В новых переменных функция q приобретает вид

$$2a_{12}\left(y_1^2 - y_2^2\right) + q''\left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right)$$

где q'' не содержит членов с y_1^2, y_2^2. Поэтому к q в новых переменных можно применить способ выделения полного квадрата (случай 1 выше) и снова свести задачу к меньшему числу переменных. Последовательное применение этих шагов приведет функцию к виду $\sum_{i=1}^{n} a_i z_i^2$. Окончательная линейная замена переменных будет невырожденной, так как таковы все промежуточные замены.

Последняя замена переменных $u_i = \sqrt{|a_i|} z_i$ при $a_i \neq 0$ в случае $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ и $u_i = \sqrt{a_i} z_i$ при $a_i \neq 0$ в случае $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ приведет функцию к сумме квадратов с коэффициентами $0, \pm 1$ или 0,1.

Во-вторых, опишем метод элементарных преобразований. Пусть нам дана симметричная матрица A; нужно найти такую невырожденную матрицу C, что матрица $A' = C^T AC$ (см. формулу (88)) диагональна.

Как мы знаем, любую невырожденную матрицу можно представить в виде произведения элементарных. Посмотрим, что из себя представляет преобразование $A \mapsto S^T AS$, где S - элементарная матрица. Например, рассмотрим случай элементарных матриц $P_{ij}(\lambda) = E + \lambda E_{ij}$ (см. (10)), отвечающих преобразованиям типа I - прибавлению к i й строке j-й строки, умноженной на λ. Легко видеть, что матрица $P_{ij}(\lambda)$ получается из единичной также прибавлением к j-му столбцу i-го столбца, умноженного на λ, поэтому умножение матрицы A на $P_{ij}(\lambda)$ справа отвечает соответствующему преобразованию столбцов матрицы A.

Заметим, что $P_{ij}(\lambda)^T = P_{ji}(\lambda)$. Таким образом, для $S = P_{ij}(\lambda)$ преобразование $A \mapsto S^T AS$ отвечает прибавлению к j-й строке i-й строки, умноженной на λ с последующим прибавлением к j-му столбцу i-го, умноженного на λ.

Аналогичное утверждение верно и для произвольной элементарной матрицы S : $A \mapsto S^T AS$ отвечает некоторому элементарному преобразованию строк матрицы A с последующим аналогичным преобразованием столбцов полученной матрицы [53]. Заметим, что при таких "сдвоенных" элементарных преобразованиях сохраняется симметричность матрицы A.

Опишем теперь шаг алгоритма. Пусть дана симметричная матрица A порядка n.

1. Основной случай. Если $a_{11} \neq 0$, то вычитая из строк, начиная со второй, нужную кратность первой строки и проделывая аналогичные преобразования со столбцами, получаем блочно-диагональную матрицу $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$, где A' - симметричная матрица порядка $n-1$.

2. Особый случай. Если $a_{11} = 0$, но $a_{1k} \neq 0$ для некоторого $2 \leq k \leq n$, то при условии $a_{kk} \neq 0$ поменяем местами 1 -ю и k-ю строки и 1 -й и k-й столбцы (это соответствует перестановке 1-го и k-го базисных векторов), тогда придем к ситуации основного случая. Если же $a_{kk} = 0$, то к 1-й строке прибавим k-ю и к 1 -му столбцу прибавим k-й, тогда получим $a'_{11} = 2a_{1k} \neq 0$ и снова окажемся в ситуации основного случая.

В результате мы получим диагональную матрицу $A' = \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n)$. Далее при $b_i \neq 0$ нужно i-е строку и столбец поделить на $\sqrt{|b_i|}$ в вещественном или на $\sqrt{b_i}$ в комплексном случае.

Пример 10.48. Найти нормальный вид билинейной функции с матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решим задачу с помощью метода элементарных преобразований. Имеет место особый случай, поэтому прибавим к первой строке вторую строку и к первому столбцу второй столбец, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[053] Данный результат также можно получить, используя равенство $(AS)^T = S^T A^T$.

далее вычитая из второй строки и второго столбца половину первой строки и первого столбца соответственно, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

далее деля первую строку и столбец на $\sqrt{2}$, а вторую строку и столбец - умножая на $\sqrt{2}$, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

что дает нормальный вид для поля $\mathbb{R}$. В случае поля $\mathbb{C}$ нужно вторую строку и столбец умножить на i, при этом получится единичная матрица.

Чтобы получить матрицу перехода, нужно все преобразования столбцов применить к единичной матрице.

Третий алгоритм нахождения ортогональных базисов - алгоритм Грама-Шмидта - мы опишем в одном из следующих параграфов.

3.10.5 10.5 Sylvester Test

Цель этого параграфа - доказательство критерия положительной определенности вещественной квадратичной (симметричной билинейной) функции.

Пусть V – n-мерное вещественное векторное пространство, α - билинейная симметричная функция, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ - базис в V и A - матрица α в этом базисе. Очевидно, что если α положительно определена, то ее ограничение $\alpha|_U$ на любое подпространство $U \subset V$ также положительно определено. Значит, для любого набора $i_1, \ldots, i_k$, $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$ определитель подматрицы матрицы A, образованной пересечениями строк и столбцов с этими номерами, положителен, поскольку сама подматрица является матрицей ограничения $\alpha|_{\langle e_{i_1}, \ldots, e_{i_k} \rangle}$ в базисе $\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\}$ (см. абзац перед Теоремой 10.39).

Таким образом, все миноры матрицы положительно определенной квадратичной функции описанного выше вида положительны. Будет ли это условие достаточным для того,
чтобы квадратичная функция с матрицей A была бы положительно определена? Оказывается, для положительной определенности A уже достаточно положительности ее так называемых угловых миноров - определителей подматриц порядков от 1 до n, стоящих в левом верхнем углу матрицы A (отвечающих ограничениям α на линейные оболочки $\langle e_1, \ldots, e_k \rangle, 1 \leq k \leq n$).

Теорема

10.49. (Критерий Сильвестра). Вещественная симметричная билинейная функция $\alpha : V \times V \to \mathbb{R}$, имеющая матричу A в некотором базисе, положительно определена тогда и только тогда, когда все угловые миноры матрицы A положительны.

Proof. □

Необходимость условия положительности главных миноров уже доказана выше.

Достаточность этого условия докажем индукцией по $n = \dim V$. Случай $n = 1$ очевиден. Пусть результат верен для билинейных функций на пространствах размерности, не превосходящей $n-1$, докажем что он верен и для пространств размерности n. Пусть A - вещественная симметричная матрица порядка n, у которой все n штук угловых миноров положительны. Покажем, что соответствующая билинейная функция α положительно определена.

Применяя предположение индукции получаем, что ограничение $\alpha|_{\langle e_1, \ldots, e_{n-1} \rangle}$ положительно определено. Значит, по Теореме 10.39 положительный индекс инерции $r_+ = r_+(\alpha)$ не меньше $n-1$. Так как из условия следует, что α невырождена, то $r_+ + r_- = \mathrm{rk}\alpha = n$, и для отрицательного индекса инерции возможны варианты $r_- = 0$ (в этом случае α положительно определена) или $r_- = 1$. В последнем случае нормальный вид α есть $\sum\limits_{i=1}^{n-1} u_i v_i - u_n v_n$, и определитель матрицы A отрицателен (поскольку знак определителя матрицы билинейной функции не зависит от базиса), что противоречит условию. Значит, единственная возможность $r_+ = n, r_- = 0$, то есть α положительно определена и шаг индукции доказан.

Задача

10.50. Докажите, что вещественная симметричная матрица A отрицательно определена тогда и толъко тогда, когда знаки ее угловых миноров $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ чередуются, начиная со знака "-". (Указание: воспользуйтесь тем, что q отрицательно определена $\Leftrightarrow -q$ положительно определена).

Задача

10.51. Верно ли, что у матрицы положительно полуопределенной квадратичной функции все уаловые миноры неотрицательны? А в обратную сторону?

Решение. Приведем решение части задачи. Рассмотрим пример квадратичной функции с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$a < 1$. У нее следующий набор угловых миноров $\delta_1 = 1, \delta_2 = 0, \delta_3 = 0$. Соответствующая ей квадратичная функция имеет вид

$$q(x) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (a-1)x_3^2$$

Легко видеть, что она не является знакоопределенной (например, она отрицательно полуопределена на подпространстве $U := \{x | x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

Задача

10.52. Предположим, что для матрицы A вещественной квадратичной функции q на трехмерном пространстве угловые миноры $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ имеоют следующий набор знаков: $+, 0$, - соответственно. Чему равны положительный $r_+ u$ отрицательный r_- индексы инерции q?

Решение. Заметим, что так как $\delta_3 \neq 0$, то $r := \operatorname{rk} q = 3$. Мы также знаем, что $r_+ + r_- = r$. Кроме того, знак определителя матрицы квадратичной функции не меняется при замене базиса, поэтому из $\delta_3 < 0$ следует, что отрицательный индекс инерции нечетен (количество минус единиц в нормальном виде нечетно). Если $r_- = 3$, то функция была бы отрицательно определенной, что противоречит критерию Сильвестра (Задаче 10.50). Значит, единственная возможность $r_- = 1, r_+ = 2$. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

показывает, что данный набор значений главных миноров действительно реализуется.

Note.

10.53. Пусть A - матрица квадратичной формы q в некотором базисе n мерного вещественного пространства V. Мы знаем, что при произвольной замене базиса в V ранг A, а также знак $\delta_n = \det A$ (при условии, что он не равен нулю), не меняются. В то же время, если q не является положительно или отрицательно определенной, то знаки угловых миноров $\delta_1, \ldots, \delta_{n-1}$ (и условие их равенства или неравенства нулю) могут измениться. Например,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- матрицы одной и той же квадратичной функции в разных базисах. Мы можем гарантировать сохранение знаков всех δ_i только при треугольных заменах координат (как в алгоритме Грама-Шмидта из следующего параграфа).

Задача

10.54. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Существует ли такая вещественная матрица C, что $B = C^T AC$?

Решение. Найдем индексы инерции данных матриц (интерпретируя их как матрицы вещественных квадратичных функций относительно некоторых базисов). Это можно сделать, используя сдвоенные элементарные преобразования строк и столбцов, но проще рассуждать следующим образом. Набор главных миноров матрицы A имеет знаки„++- , поэтому ее положительный индекс инерции $r_+(A)$ не меньше двух (левый верхний угол порядка 2 - положительно определенная матрица), а ранг A равен 3, откуда $r_+(A) + r_-(A) = 3$, но A не является положительно определенной, значит, единственная возможность $r_+(A) = 2, r_-(A) = 1$.

Аналогично, набор главных миноров матрицы B имеет знаки„$+-$, но переставляя второй и третий базисный векторы, получим матрицу $B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ той же функции в другом базисе с тем же набором знаков, что и A, поэтому положительный и отрицательный индексы инерции у B такие же как у A, и обе они приводятся заменами базисов к нормальному виду $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, откуда следует, что матрица C из условия существует.

Кстати, не все варианты наборов знаков главных миноров реализуются. Например, для матрицы квадратичной формы на двумерном пространстве запрещен набор $\delta_1 = 0, \delta_2 > 0$. Вот несколько более сложный пример.

Задача

10.55. Может ли матрица A вещественной квадратичной функции q на трехмерном пространстве V иметь угловые миноры $\delta_1 > 0, \delta_2 = 0, \delta_3 > 0$?

Решение. Из условия легко следует, что $r_+ + r_- = 3$, функция q не является знакоопределенной и r_- четно, что оставляет только возможность $r_+ = 1, r_- = 2$. Попробуем доказать, что последний вариант также невозможен.

Пусть матрица A дана в базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$; рассмотрим ограничение q на линейную оболочку $U := \langle e_1, e_2 \rangle$. В базисе $\{e_1, e_2\}$ матрица $q|_U$ имеет главные миноры δ_1, δ_2, откуда легко видеть, что индексы инерции $q|_U$ суть $r'_+ = 1, r'_- = 0$. Таким образом, при переходе от двумерного подпространства U к пространству V отрицательный индекс инерции увеличивается сразу на 2, что, очевидно, невозможно.

Задача

10.56. При каком значении параметра $a \in \mathbb{R}$ матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 - a - a^2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -a - 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

являются матрицами одной и той же билинейной функции $b : V \times V \to \mathbb{R}$ в разных базисах?

Задача

10.57. (Р.Н. Карасев) Докажсте, что если сеть из резисторов подключена в некоторых точках к источникам напряжения, то токи в этой сети будут определены однозначно.

Подсказка. Выпишите квадратичную форму рассеиваемой сетью мощности

$$P = \sum_{i \neq j} (u_i - u_j)^2 / R_{ij}$$

(при бесконечном сопротивлении R_{ij} слагаемое пропускается) и перепишите условия Кирхгофа на токи (сумма входящих в узел i токов равна сумме исходящих) как $\frac{\partial P}{\partial u_i} = 0$. Проверьте, что если сеть связная и хотя бы одно значение u_i зафиксированно (подключено к источнику напряжения), то квадратичная часть многочлена P является положительно определённой квадратичной формой, и заметьте, что поэтому P имеет единственный минимум и вообще единственную точку, где обращаются в нуль частные производные по нефиксированным переменным. Несвязную сеть разбейте на не связанные между собой связные сети. Не подключенные к источникам напряжения сети проанализируйте аналогично.

3.10.6 10.6 Gram-schmidt Algorithm and Jacobi Method

В данном параграфе мы изложим очень полезный алгоритм ортогонализации Грама-Шмидта и применим его для доказательства теоремы Якоби, обобщающей критерий Сильвестра и Задачу 10.50.

Для изложения алгоритма нам потребуются понятия ортогональной проекции и ортогональной составляющей. Определим, что это такое.

Напомним (см.

Предложение

10.31), что если подпространство $U \subset V$ невырождено относительно α, то $V = U \oplus U^{\perp}$. Значит, любой вектор $v \in V$ единственным образом представляется в виде суммы $u + w$, где $u \in U, w \in U^{\perp}$. Вектор u называется ортогональной проекцией v на U и обозначается $pr_U(v)$, а вектор w - ортогоналъной составллющей вектора v относительно подпространства U и обозначается ort ${}_U(v)$.

То есть, в нашей прежней терминологии, $\mathrm{pr}_U(v)$ - проекция v на подпространство U параллельно его ортогональному дополнению $U^{\perp}$, а ort ${}_U(v)$ - проекция v на $U^{\perp}$ параллельно U.

Пусть в конечномерном пространстве V фиксирован базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Тогда мы имеем цепочку вложенных подпространств

$$0 = V_0 \subsetneqq V_1 \subsetneqq V_2 \subsetneqq \ldots \subsetneqq V_{n-1} \subsetneqq V_n = V$$

где $V_k := \langle e_1, \ldots, e_k \rangle$.

Теорема

10.58. Пусть на V задана билинейная симметричная функция α, причем каждое из подпространств V_k предполагается невырожденным относительно α. Тогда в V существует единственный базис $\{f_1, \ldots, f_n\}$ такой, что

1. $\{f_1, \ldots, f_n\}$ ортогонален относительно αu

2. матрица перехода C от $\{e_1, \ldots, e_n\}$ к $\{f_1, \ldots, f_n\}$ верхняя треугольная с единицами на главной диагонали (в частности, $\langle f_1, \ldots, f_k \rangle = V_k, \quad 1 \leq k \leq n$).

Такой базис $\{f_1, \ldots, f_n\}$ называется ортогонализацией базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Proof. □

Ортогонализацию $\{f_1, \ldots, f_n\}$ будем строить пошагово - сначала построим ортогонализацию $\{f_1\}$ базиса $\{e_1\}$ в V_1, затем дополним ее вектором f_2 до ортогонализации $\{f_1, f_2\}$ базиса $\{e_1, e_2\}$ в V_2 и т.д. При этом для каждого $k, 1 \leq k \leq n$ матрица перехода C_k от базиса $\{e_1, \ldots, e_k\}$ к базису $\{f_1, \ldots, f_k\}$ в V_k будет верхняя треугольная с единицами на главной диагонали. Очевидно, что каждая из матриц C_k тогда будет левым верхним углом в C_{k+1} (и в $C = C_n$). Читателю рекомендуется разобраться в геометрическом смысле проводимых построений (при необходимости рисовать картинки).

Пусть $k = 1$. Так как матрица перехода $C_1 = (1)$, то $f_1 = e_1$.

Пусть $k = 2$. Подпространство $V_1 \subset V$ по условию невырождено, поэтому $V = V_1 \oplus V_1^{\perp}$. Пусть $e_2 = v_1 + f_2$ - соответствующее представление вектора e_2, где $v_1 = pr_{V_1} e_2 \in V_1, \quad f_2 = \text{ort}_{V_1} e_2$.

Мы утверждаем, что вектор f_2 - искомый. Действительно, поскольку $f_2 \in V_1^{\perp}$, то $f_2 \perp f_1$, кроме того, поскольку $f_2 = e_2 - v_1$, где v_1 лежит в $V_1 = \langle e_1 \rangle$, то матрица перехода C_2 от $\{e_1, e_2\}$ к $\{f_1, f_2\}$ имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то есть является верхней треугольной с единицами на главной диагонали.

Легко видеть, что вектор f_2 с указанными свойствами единственный. В самом деле, пусть f_2' - еще один вектор с требуемыми свойствами. Тогда $f_2' = e_2 - v_1'$, где $v_1' \in V_1$. Имеем $f_2 - f_2' = v_1' - v_1 \in V_1 \cap V_1^{\perp}$, что равно нулю, поскольку подпространство V_1 по условию невырождено.

Заметим, что $\langle f_1, f_2 \rangle = V_2$.

Предположим, что уже построены векторы $f_1, \ldots, f_k$, составляющие ортогональный базис в V_k, причем матрица перехода C_k от $\{e_1 \ldots, e_k\}$ к $\{f_1, \ldots, f_k\}$ верхняя треугольная с единицами на главной диагонали. Подпространство $V_k \subset V$ невырождено, поэтому $V = V_k \oplus V_k^{\perp}$. Пусть $e_{k+1} = v_k + f_{k+1}$ - соответствующее представление вектора e_{k+1}, где $v_k = pr_{V_k} e_{k+1} \in V_k, \quad f_{k+1} = ort_{V_k} e_{k+1} \in V_k^{\perp}$.

Мы утверждаем, что вектор f_{k+1} - искомый. Действительно, так как $f_{k+1} \in V_k^{\perp}$, то f_{k+1} ортогонален векторам $f_1, \ldots, f_k$ и, кроме того, $f_{k+1} = e_{k+1} - v_k$, где v_k лежит в $V_k = \langle e_1, \ldots, e_k \rangle$, поэтому в $k+1$-м столбце матрицы C_{k+1} внизу стоит 1, то есть матрица перехода C_{k+1} от базиса $\{e_1 \ldots, e_{k+1}\}$ к $\{f_1, \ldots, f_{k+1}\}$ снова верхняя треугольная с единицами на главной диагонали.

Легко видеть, что вектор f_{k+1} с требуемыми свойствами единственный. Действительно, пусть f_{k+1}' - еще один вектор с нужными свойствами. Тогда $f_{k+1}' = e_{k+1} - v_k'$, где $v_k' \in V_k$, откуда $f_{k+1} - f_{k+1}' = v_k' - v_k \in V_k \cap V_k^{\perp}$, что равно нулю в силу невырожденности подпространства V_k.

Заметим, что $\langle f_1, \ldots, f_{k+1} \rangle = V_{k+1}$.

Продолжая указанный алгоритм, получаем ортогональный базис $\{f_1, \ldots, f_n\}$ в пространстве V с нужными свойствами.

Из доказанной Теоремы мы сейчас выведем важное следствие. Пусть при тех же условиях, что и в Теореме, A - матрица α в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Пусть $A_k, 1 \leq k \leq n$ - подматрица матрицы A порядка k, стоящая в левом верхнем углу. Очевидно, что A_k - матрица ограничения $\alpha|_{V_k}$ в базисе $\{e_1, \ldots, e_k\}$ пространства V_k. Пусть $\delta_k := \det A_k$ - угловые миноры матрицы A. По условию все они отличны от нуля. Введем еще $\delta_0 := 1$

Следствие

10.59. В введенных выше обозначениях

$$q_\alpha(f_k) := \alpha(f_k, f_k) = \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}}, 1 \leq k \leq n$$

Proof. □

Для $1 \leq k \leq n$ имеем

$$\operatorname{diag}\left(q_\alpha\left(f_1\right), \ldots, q_\alpha\left(f_k\right)\right) = C_k^T A_k C_k$$

откуда, переходя к определителям и используя то, что матрицы C_k верхние треугольные с единицами на главной диагонали, получаем требуемое.

Пусть теперь A - матрица вещественной симметричной функции α в некотором базисе.

Следствие

10.60. (Метод Якоби). При условии, что все главные миноры $\delta_1, \ldots, \delta_n$ матрицы A отличны от нуля, отрицательный индекс инерции a равен числу перемен знака в последовательности $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n$

Proof. □

Из предыдущего Следствия вытекает, что число перемен знака равно числу отрицательных коэффициентов в диагональном виде α.

Из доказанного Следствия легко выводится критерий Сильвестра а также его обобщение на случай отрицательно определенных функций (см. Задачу 10.50).

А что будет, если в последовательности главных миноров есть нули? Оказывается, результат теоремы Якоби сохраняется, если нули изолированные (то есть нет двух идущих подряд нулей). Например, рассмотрим ситуацию $\delta_k > 0, \delta_{k+1} = 0, \delta_{k+2} < 0$. Пусть $\left(r_+^k, r_-^k\right)$ - сигнатура для ограничения на k-мерное координатное подпространство, причем так как $\delta_k \neq 0$, то $r_+^k + r_-^k = k$. При переходе к $k+1$-мерному

координатному пространству индексы инерции уменьшиться не могут, в то же время $r_+^{k+1} + r_-^{k+1} < k+1$, так как $\delta_{k+1} = 0$, поэтому $r_+^{k+1} = r_+^k, r_-^{k+1} = r_-^k$. При переходе к $k+2$-мерному пространству и положительный, и отрицательный индексы инерции могут увеличиться максимум на 1 ; с другой стороны, так как $\delta_{k+2} \neq 0$, то $r_+^{k+2} + r_-^{k+2} = k+2$, поэтому $r_+^{k+2} = r_+^{k+1} + 1, r_-^{k+2} = r_-^{k+1} + 1$, то есть отрицательный индекс инерции увеличился на 1. (Возможна ли ситуация $\delta_k > 0, \delta_{k+1} = 0, \delta_{k+2} > 0$?)

3.10.7 10.7 Slant-symmetric Bilinear Functions

Пусть $f_1, f_2 : V \to \mathbb{K}$ - линейные функции, $f_i \in V^*$. Легко проверить, что функция

$$\alpha = f_1 \otimes f_2, \quad \left(f_1 \otimes f_2\right)(u, v) := f_1(u) f_2(v) \forall u, v \in V$$

билинейна и имеет ранг 1, и любая билинейная функция ранга 1 имеет такой вид (см. Пример 10.17 и Задачу 10.18). Пусть $\beta = \alpha^-$−проекция α на подпространство кососимметрических функций (см. формулу (89)(why??)), тогда

$$\beta(u, v) = \frac{1}{2}(\alpha(u, v) - \alpha(v, u)) = \frac{1}{2}\left(f_1(u) f_2(v) - f_1(v) f_2(u)\right) = \frac{1}{2}\left|\begin{array}{ll} f_1(u) & f_1(v) \\ f_2(u) & f_2(v) \end{array}\right|$$

Для произвольной пары линейных функций $f_1, f_2 \in V^*$ определим билинейную кососимметрическую функцию $f_1 \wedge f_2$ формулой $\left(f_1 \wedge f_2\right)(u, v) := \left|\begin{array}{ll} f_1(u) & f_1(v) \\ f_2(u) & f_2(v) \end{array}\right| \forall u, v \in V$. В тензорных обозначениях $f_1 \wedge f_2 = f_1 \otimes f_2 - f_2 \otimes f_1$.

Напомним, что пространство всех билинейных функций (for example, what is it?) на линейном пространстве V мы обозначили $\mathcal{B}(V)$, а подпространство в $\mathcal{B}(V)$, состоящее из кососимметрических билинейных функций $-\mathcal{B}^-(V)$. Если $\dim V = n$, то $\dim \mathcal{B}(V) = n^2$ и $\dim \mathcal{B}^-(V) = \frac{n(n-1)}{2}$. (I forgot, why??)

Предложение

10.61. Если $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ образуют базис в V^*, mo $\{\varepsilon_i \wedge \varepsilon_j | 1 \leq i < j \leq n\}$ - базис в $\mathcal{B}^-(V)$.

Proof. □

Мы знаем (см. Задачу 7.106), что произвольный базис в V^* биортогонален некоторому базису в V. Пусть $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ биортогонален базису $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V. Тогда для $1 \leq i < j \leq n$ имеем

$$(\varepsilon_i \wedge \varepsilon_j)(e_k, e_l) = \begin{vmatrix} \varepsilon_i(e_k) & \varepsilon_i(e_l) \\ \varepsilon_j(e_k) & \varepsilon_j(e_l) \end{vmatrix} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = i, l = j \\ -1, & \text{если } k = j, l = i \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Пусть теперь

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{ij} \varepsilon_i \wedge \varepsilon_j = 0$$

- произвольная линейная зависимость. Вычисляя значение стоящей слева билинейной функции на всевозможных парах $(e_k, e_l), 1 \leq k < l \leq n$, получаем, что $\lambda_{ij} = 0$ для всех i, j. Поэтому указанные в условии билинейные кососимметрические функции действительно линейно независимы. Чтобы завершить доказательство, достаточно заметить, что $\dim \mathcal{B}^-(V) = \frac{n(n-1)}{2}$, хотя можно и явно записать разложение

$$\beta = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \beta(e_i, e_j) \varepsilon_i \wedge \varepsilon_j$$

произвольной билинейной кососимметрической функции β по указанной в условии системе (ср. равенство (84)).

К какому каноническому виду можно привести кососимметрическую функцию? Оказывается, ответ для кососимметрических функций не зависит от поля $\mathbb{K}$.

Пусть $\beta : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ - билинейная кососимметрическая функция на n-мерном пространстве V. Базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ пространства V называется симплектическим (относительно β), если

$$\beta(e_{2k-1}, e_{2k}) = -\beta(e_{2k}, e_{2k-1}) = 1 \quad \text{при } k = 1, \ldots, m$$
$$\beta(e_i, e_j) = 0 \quad \text{во всех остальных случаях.}$$

Иначе говоря, матрица функции β имеет в этом базисе блочно-диагональный вид с m ненулевыми блоками вида $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Очевидно, что при этом $\mathrm{rk}\beta = 2m$. Эквивалентно,

$$\beta = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \wedge \varepsilon_4 + \ldots + \varepsilon_{2m-1} \wedge \varepsilon_{2m}$$

где $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ - биортогональный базис к $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Теорема

10.62. Для любой кососимметричной билинейной функци существует симплектический базис.

Proof. □

Докажем это утверждение индукцией по n. При $n = 1$ доказываеть нечего (любая кососимметрическая функция на одномерном пространстве нулевая). При $n = 2$ если $\beta = 0$, то снова доказывать нечего. Если $\beta \neq 0$, то существуют такие векторы e_1 и e_2, что $\beta(e_1, e_2) \neq 0$ (такие e_1, e_2, очевидно, линейно независимы). Умножив один из этих векторов на подходящий скаляр, можно добиться того, чтобы

$$\beta(e_1, e_2) = -\beta(e_2, e_1) = 1$$

Матрица функции β на $\langle e_1, e_2 \rangle$ в базисе $\{e_1, e_2\}$ имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Пусть $n > 2$. Если $\beta = 0$, то доказывать опять-таки нечего. Если $\beta \neq 0$, то как выше для случая $n = 2$ находим такие линейно независимые векторы e_1 и e_2, что $\beta(e_1, e_2) = -\beta(e_2, e_1) = 1$. Матрица ограничения функции β на $\langle e_1, e_2 \rangle$ в базисе $\{e_1, e_2\}$ имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и, в частности, невырождена. Согласно Предложению 10.31,

$$V = \langle e_1, e_2 \rangle \oplus \langle e_1, e_2 \rangle^{\perp}$$

По предположению индукции в $n-2$-мерном пространстве $\langle e_1, e_2 \rangle^{\perp}$ для $\beta|_{\langle e_1, e_2 \rangle^{\perp}}$ существует симплектический базис $\{e_3, \ldots, e_n\}$. Добавляя к нему векторы e_1 и e_2, получаем симплектический базис $\{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$ всего пространства V.

Следствие

10.63. Ранг кососимметрической билинейной функции всегда является четным числом.

Задача

10.64. Докажсте, что определитель целочисленной кососимметричной матрицы A является квадратом целого числа.

Решение. Пусть кососимметрическая матрица $A \in \mathrm{Mat}_{2n}(\mathbb{Z})$ невырождена. Тогда ее можно рассматривать как матрицу с коэффициентами из поля $\mathbb{Q}$. В силу предыдущей теоремы существует невырожденная матрица $C \in \mathrm{Mat}_{2n}(\mathbb{Q})$ такая, что $A = C^T I C$, где I - блочно-диагональная матрица из блоков вида $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $\det A = (\det C)^2$, и целое число $\det A$ является квадратом рационального числа. Тогда $\det A$ является квадратом целого числа.

На самом деле верен более сильный результат: определитель кососимметрической матрицы как многочлен от ее элементов является полным квадратом многочлена с целыми коэффициентами, называемого пфаффианом. Например, для кососимметрических матриц порядка 4 пфаффиан равен $x_{12}x_{34} + x_{23}x_{14} + x_{31}x_{24}$. Точные определения и доказательства читатель может найти, например, в [19, 12].

Группа, сохраняющая невырожденную симплектическую функцию, называется симплектической группой и обозначается $\mathrm{Sp}(2m, \mathbb{K})$ (здес $2m$ - размерность соответствующего линейного пространства).

Задача

10.65. Найдите порядок группы $\mathrm{Sp}(2m, \mathbb{F}_q)$, где $\mathbb{F}_q$ - конечное поле из q элементов.

3.11 Reducing the Quadratic Form to the sum of Squares

(см Ильин)
полезные методы.

3.11.1 Lagrange Method

такой есть

Теория

Пример

3.11.2 Jacobi Method

хз

Теория

Пример

3.12 11 Euclidean Spaces

Евклидовы пространства размерности 1,2 и 3 - это те векторные [54] пространства, с которыми мы имели дело в курсе аналитической геометрии. В таких пространствах имеют смысл понятия длины вектора, угла между векторами, расстояния между подмножествами, объема параллелепипеда, построенного на системе векторов и т.д. Для определения этих понятий на вещественном векторном пространстве необходимо скалярное произведение - фиксированная билинейная симметричная положительно определенная функция.

Отметим отличие нашего подхода от принятого в курсе аналитической геометрии: там для скалярного произведения постулировалась формула $(u, v) = |u||v| \cos \alpha$, мы же придем к ней как к следствию из определения угла между векторами (см. конец параграфа 11.4).

3.12.1 11.1 Definition and Examples

Определение

11.1. Евклидовым пространством называется пара (V, α), состоящая из вещественного векторного пространства V и билинейной симметричной положительно определенной функции α на нем. Такая функция называется скалярным произведением.

Если не оговорено противное, все рассматриваемые евклидовы пространства предполагаются конечномерными.

В дальнейшем скалярное произведение $\alpha(u, v)$ векторов u, v мы будем для простоты обозначать просто скобками (u, v). При этом соответствующая квадратичная функция принимает неотрицательные значения, и мы определяем модуль вектора v как $|v| := \sqrt{(v, v)}$. Заметим, что для любого $v \neq 0$ его модуль $|v| > 0$.

За исключением нульмерного случая, скалярных произведений (то есть билинейных симметричных положительно определенных функциий) на V бесконечно много, в определении евклидова пространства предполагается, что фиксировано одно из них. Часто евклидовым пространством мы будем называть само вещественное векторное пространство V, предполагая фиксированным некоторое скалярное произведение на нем.

Из положительной определенности скалярного произведения следует, что оно - невырожденная билинейная функция. Кроме того, его ограничение на любое подпространство также положительно определено, и значит также невырождено.

Из общих результатов о квадратичных функциях мы можем вывести ряд следствий для евклидовых пространств.

[054] В курсе аналитической геометрии также рассматривались пространства, состоящие из точек, а не векторов (первые, в отличие от вторых, нельзя складывать), такие пространства называются аффинными пространствами и изучаются в более полных курсах линейной алгебры.

Предложение

11.2. В любом (конечномерном) евклидовом пространстве есть ортонормированный базис.

Proof. (sounds like obvious, why it is not obvious?)

□

Это следует либо непосредственно из Предложения 10.36, либо может быть выведено из Теоремы 10.58: для этого нужно взять произвольный базис в V (из Следствия 6.10 мы знаем, что он всегда существует), ортогонализировать его по ГрамуШмидту и затем нормировать.

Приведем примеры евклидовых пространств.

Пример 11.3. Пусть $V = \mathbb{R}^n$, и для произвольных столбцов $x, y \in V$ зададим их скалярное произведение как $(x, y) = x^T y$. (Читателю предлагается убедиться в выполненции условий из определения евклидова пространства самостоятельно). Поскольку в любом конечномерном евклидовом пространстве (V, α) есть ортонормированный базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$, то, отождествляя V с пространством $\mathbb{R}^n$ координатных столбцов в этом базисе мы одновременно отождествим скалярное произведение $\alpha(u, v)$ произвольных векторов $u, v \in V$ с произведением $\vec{u}^T \vec{v}$ их координатных столбцов. То есть любое евклидово n-мерное пространство изоморфно данному (причем определенный таким образом изоморфизм линейных пространств сохраняет также скалярные произведения, то есть является изометрией, см. определение 11.29). В обозначениях Предложения 6.52 полученный результат можно переписать так: выбор ортонормированного базиса e в V задает такой линейный изоморфизм $\varphi_e : V \to \mathbb{R}^n$ (заметим, что $\varphi_e(v)$ - то же что и $\vec{v}$ выше), что $\alpha(u, v) = \varphi_e(u)^T \varphi_e(v)$.

Еще раз отметим, что, выбирая ортонормированный базис в n-мерном евклидовом пространстве (V, α), мы отождествляем его с евклидовым пространством из Примера 11.3. Пример 11.4. Пусть $V = \mathbb{R}^n$, и для произвольных столбцов $x, y \in V$ зададим их скалярное произведение как $(x, y) = x^T G y$, где G - произвольная симметричная положительно определенная матрица [55] порядка n. Тогда данная пара является евклидовым пространством.

На первый взгляд, это - более общий пример n-мерного евклидова пространства, чем предыдущий. Однако это не так. А именно, в $\mathbb{R}^n$ можно найти такой базис (то есть такой набор базисных столбцов), что относительно него заданное выше скалярное произведение будет задаваться формулой из Примера 11.3. Это просто следствие того факта, что в любом евклидовом пространстве существует ортонормированный базис. В нашем случае это означает, что можно найти такой набор столбцов $\{c_1, \ldots, c_n\}$, что $c_i^T G c_j = \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$.

Пусть C - матрица, составленная из этих столбцов, то есть матрица перехода от стандартного базиса к базису $\{c_1, \ldots, c_n\}$. Тогда $C^T G C = E$, откуда $G = \left(C^{-1}\right)^T E C^{-1}$. Мы видим, что матрица G является матрицей скалярного произведения в базисе, который получается из ортонормированного с помощью матрицы перехода C^{-1}. Поскольку любая невырожденная матрица порядка n является матрицей перехода от данного базиса в n мерном пространстве, мы видим, что любая симметричная положительно определенная матрица порядка п является матрицей скалярного произведения евклидова n-мерного пространства в некотором базисе.

Пример 11.5. Пусть $V = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, для матриц $X, Y \in V$ определим их скалярное произведение (X, Y) как $\operatorname{tr}\left(X^T Y\right)$. Читателю предлагается проверить, что это - действительно скалярное произведение. Заметим, что $\operatorname{tr}\left(X^T Y\right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij} y_{ij}$, это показывает, что базис в V, состоящий из матричных единиц (произвольным образом упорядоченных), является ортонормированным.

---

[055] то есть матрица положительно определенной билинейной симметричной функции. Как мы помним, условие положительной определенности в силу критерия Сильвестра равносильно положительности всех угловых миноров.

Наконец, приведем пример бесконечномерного евклидова пространства.
Пример 11.6. Пусть $V = C[0,1]$ - пространство непрерывных вещественнозначных функций на отрезке $[0,1]$. Определим скалярное произведение функций формулой $(f,g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)dx$. Читатель легко убедится, что так определенная функция $V \times V \to \mathbb{R}$ является билинейной, симметричной и положительно определенной. Таким образом, данная пара - евклидово пространство. Легко видеть, что ограничение положительно определенной билинейной симметричной функции на любое подпространство также обладает данными свойствами, поэтому, скажем, подпространство многочленов $\mathbb{R}[x]_n \subset V$ с указанным скалярным произведением также является (на этот раз конечномерным) евклидовым пространством.

3.12.2 11.2 Orthogonal Addition to Subspace

Продолжим выводить следствия из общих результатов о билинейных функциях.
Пусть $U \subset V$ - произвольное подпространство евклидова пространства V. Так как ввиду положительной определенности скалярное произведение невырождено, из Предложения 10.27 получаем, что $\dim U^{\perp} = \dim V - \dim U$ и $\left(U^{\perp}\right)^{\perp} = U$, а так как ограничение скалярного произведения на подпространство $U \subset V$ невырождено, из Предложения 10.31 - что $V = U \oplus U^{\perp}$. Значит, любой вектор $v \in V$ единственным образом представляется в виде суммы $u+w$, где $u \in U, w \in U^{\perp}$. Вектор u называется ортогональной проекцией v на U и обозначается $pr_U(v)$, а вектор w - ортогональной составляющей вектора v относительно подпространства U и обозначается $\operatorname{ort}_U(v)$. То есть, в нашей прежней терминологии, $p_U(v)$ - проекция v на подпространство U параллельно его ортогональному дополнению $U^{\perp}$, а $\operatorname{ort}_U(v)$ - проекция v на $U^{\perp}$ параллельно U.

В частности, линейный оператор $pr_U : V \to V$, сопоставляющий произвольному вектору $v \in V$ его ортогональную проекцию $pr_U(v)$ на подпространство $U \subset V$, называется ортогональным проектором на U. Это - частный случай проектора, когда проектирование происходит параллельно ортогональному дополнению.

Задача

11.7. Пусть V - евклидово пространство из Примера 11.5. Докажите, что ортогональное дополнение к подпространству $\operatorname{Mat}_n^+(\mathbb{R}) \subset V$ симметрических матрич совпадает с подпространством $\operatorname{Mat}_n^-(\mathbb{R}) \subset V$ кососимметрических матриц, и наоборот, ортогональное дополнение к подпространству $\operatorname{Mat}_n^-(\mathbb{R}) \subset V$ кососимметрических матриц совпадает с подпространством $\operatorname{Mat}_n^+(\mathbb{R}) \subset V$ симметрических матрич.

Решение. Покажем, что кососимметрическая матрица Y ортогональна любой симметрической матрице X. В самом деле,

$$(X,Y) = \operatorname{tr}\left(X^T Y\right) = \operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(YX) = -\operatorname{tr}\left(Y^T X\right) = -(Y,X)$$

откуда $(X,Y) = 0$. Значит, $\operatorname{Mat}_n^-(\mathbb{R}) \subset \left(\operatorname{Mat}_n^+(\mathbb{R})\right)^{\perp}$. С другой стороны, эти два подпространства имеют одинаковые размерности. Поэтому они совпадают. Второе утверждение проще всего вывести из доказанного с использованием $\left(U^{\perp}\right)^{\perp} = U$.

Пусть V - евклидово n-мерное пространство, $U \subset V$ - его подпространство, которое является линейной оболочкой $\langle u_1, \ldots, u_k \rangle$ некоторой системы векторов $u_i, i = 1, \ldots, k$ из V. Тогда ортогональное дополнение $U^{\perp}$ задается системой уравнений

$$U^{\perp} = \{w \in V \mid (u_i, w) = 0, i = 1, \ldots, k\}$$

Если $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$ - координатные столбцы векторов $u_1, \ldots, u_k$ относительно некоторого ортонормированного базиса пространства V, то $U^{\perp}$ в этом базисе задается СЛОУ $A^T x = 0$. Если Φ - фундаментальная матрица этой СЛОУ, то ее столбцы образуют некоторый базис в $U^{\perp}$. Поэтому СЛОУ $\Phi^T y = 0$ задает подпространство $\left(U^{\perp}\right)^{\perp} = U$, то есть линейную оболочку столбцов матрицы A. Таким образом, мы получаем новое доказательство (и интерпретацию) Теоремы 6.50 (в случае поля $\mathbb{R}$). Отметим, что при этом связь между rk A и размерностью пространства решений системы $Ax = 0$ превращается в результат о связи между размерностями U и $U^{\perp}$.

Задача

11.8. Докажите, что имеет место одна из двух возможностей: либо система линейных уравнений совместна при любом столбце свободных членов, либо ее сопряэженная однородная система имеет ненулевое решение.

Пусть в подпространстве $U \subset V$ евклидова пространства V задан ортонормированный базис $\{e_1, \ldots, e_k\}$. Тогда для любого $v \in V$ его ортогональная проекция $pr_U(v)$ задается формулой

$$pr_U(v) = \sum_{i=1}^{k} (v, e_i)\, e_i$$

Действительно, $\sum\limits_{i=1}^{k} (v, e_i)\, e_i$ - такой вектор из U, что $v - \sum\limits_{i=1}^{k} (v, e_i)\, e_i \in U^{\perp}$ (а значит эта разность есть $\mathrm{ort}_U(v)$). В самом деле,

$$\left(v - \sum_{i=1}^{k} (v, e_i)\, e_i, e_j\right) = (v, e_j) - (v, e_j) = 0 \text{ при } j = 1, \ldots, k$$

В случае, когда дан только ортогональный базис $\{f_1, \ldots, f_k\}$ в U, ортогональная проекция $pr_U(v)$ находится по формуле

$$\mathrm{pr}_U(v) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(v, f_i)}{|f_i|^2} f_i \qquad (96)$$

в чем читатель легко убедится самостоятельно.

Задача

11.9. Докажите, что если любые два из k векторов евклидова пространства V образуют тупой угол, что $k \leq \dim V + 1$.

Решение. Воспользуемся индукцией по $n = \dim V$. При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть $n > 1$ и рассмотрим k векторов $v_1, v_2, \ldots, v_k$ как в условии. Без ограничения общности можно считать, что все они имеют единичную длину. Из условия следует, что векторы $v_2, v_3, \ldots, v_k$ лежат в открытом полупространстве $\{v \in V \mid (v, v_1) < 0\}$. Пусть $v_2', v_3', \ldots, v_k'$ - ортогональные проекции векторов $v_2, v_3, \ldots, v_k$ на n - 1-мерное подпространство $\langle v_1 \rangle^{\perp}$, то есть $v_i' = v_i - (v_i, v_1)\, v_1, 2 \leq i \leq k$. Заметим, что

$$\left(v_i', v_j'\right) = (v_i, v_j) - (v_i, v_1)\,(v_j, v_1) < 0$$

Таким образом, все углы между лежащими в $\langle v_1 \rangle^{\perp}$ векторами $v_2', v_3', \ldots, v_k'$ тупые. Из предположения индукции $k - 1 \leq (n-1) + 1 = n$, а значит $k \leq n + 1$.

С другой стороны, рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ со стандартным скалярным произведением n-мерное подпространство $x_0 + \ldots + x_n$, а в нем - систему из $n+1$ вектора

$$e_j - \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} e_i, \quad 0 \leq j \leq n$$

(их концы образуют вершины стандартного n-мерного симплекса). Легко проверить, что их попарные скалярные произведения равны $-\frac{2}{n+1} < 0$.

3.12.3 11.3 Description of Linear Functions on Euclidean Space

Скалярное произведение является билинейной функцией, поэтому если зафиксировать один из его аргументов, получится линейная функция. Оказывается, так можно получить любую линейную функцию на конечномерном евклидовом пространстве.

Предложение

11.10. Для любой линейной функции f на евклидовом пространстве V существует такой единственный вектор $w \in V$, что $f(v) = (v, w) \quad \forall v \in V$.

Proof. □

Скалярное произведение (v, w) как функция от вектора $v \in V$ при фиксированном $w \in V$ является линейной функцией на V. Рассмотрим отображение

$$\alpha = \alpha_V : V \to V^*, \quad \alpha(w) = (\cdot, w)$$

Его линейность следует из линейности скалярного произведения по второму аргументу. Таким образом, α - линейное отображение между пространствами одинаковой размерности. Чтобы доказать, что α - изоморфизм, достаточно убедиться в его инъективности. Если $\alpha(w) = 0$ как линейная функция, то $\forall v \in V (v, w) = 0$, тогда, полагая $v = w$, получаем $|w| = 0$, то есть $w = 0$. В частности, α биективно, что равносильно утверждению доказываемого Предложения.

Таким образом, в отличие от общих линейных пространств, для (конечномерного) евклидова пространства V существует канонический (не зависящий от базиса, а только от скалярного произведения) изоморфизм $\alpha_V : V \to V^*$.

Задача

11.11. Докажите, что построенный изоморфизм $\alpha_V : V \to V^*$ имеет единичную матрицу в паре базисов, состоящей из ортонормированного базиса в V и биортогонального нему базиса в V^*.

Заметим, что для евклидовых пространств есть также канонический изоморфизм между пространствами линейных операторов и билинейных функций, который мы опишем в разделе 12.4.

3.12.4 11.4 Gram Matrix and Cauchy-bunyakovsky Inequality

Определение

11.12. Матрицей Грама $G(v_1, \dots, v_k)$ системы векторов $\{v_1, \dots, v_k\}$ евклидова пространства V называется матрица $G = (g_{ij}), g_{ij} = (v_i, v_j)$, составленная из их попарных скалярных произведений.

В частности, матрица скалярного произведения (как билинейной функции) в базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$ называется матрицей Грама этого базиса.

Предложение

11.13. Для любой системы векторов $\{v_1, \dots, v_k\}$ евклидова пространства V выполнено неравенство $\det G(v_1, \dots, v_k) \geq 0$, причем равенство нулю имеет место тогда и только тогда, когда система $\{v_1, \dots, v_k\}$ линейно зависима.

Proof. □

Если система $\{v_1, \dots, v_k\}$ линейно независима, то она является базисом в своей линейной оболочке $U := \langle v_1, \dots, v_k \rangle$. Ограничение скалярного произведения на любое подпространство $U \subset V$ положительно определено, откуда (например, по критерию Сильвестра) $\det G(v_1, \dots, v_k) > 0$.

Если система $\{v_1, \ldots, v_k\}$ линейно зависима, то пусть $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = 0$ - нетривиальная линейная зависимость. Скалярно умножая левую и правую части этого равенства на векторы $v_j, 1 \leq j \leq k$, получаем $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i (v_i, v_j) = 0, 1 \leq j \leq k$, что дает линейную зависимость между строками матрицы $G(v_1, \ldots, v_k)$ с теми же коэффициентами.

Задача

11.14. Может ли матрица Грама произвольной системы из трех векторов евклидова пространства равняться матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & c \\ 2 & c & 5 \end{pmatrix}$$

где а) $c = 0$, б) $c = 2$, в) $c = 1$?
Ключом к геометрии евклидова пространства является неравенство Коши-Буняковского.

Теорема

11.15. Для любых двух векторов u, v евклидова пространства V имеет место неравенство $|(u, v)| \leq |u||v|$, причем оно превращается в равенство тогда и только тогда, когда векторы и и v линейно зависимы.

Proof. □

1-й способ. Согласно предыдущему Предложению,

$$\det \begin{pmatrix} (u, u) & (u, v) \\ (v, u) & (v, v) \end{pmatrix} = |u|^2 |v|^2 - (u, v)^2 \geq 0$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда u и v линейно зависимы.
2 -й способ. Если $u = 0$, то, с одной стороны, для любого v векторы u и v линейно зависимы, с другой стороны, неравенство Коши-Буняковского, очевидно, превращается в равенство. Если $u \neq 0$, рассмотрим квадратный трехчлен

$$(tu + v, tu + v) = |u|^2 t^2 + 2(u, v)t + |v|^2$$

который принимает неотрицательные значения для любого $t \in \mathbb{R}$. Значит, его дискриминант неположителен, то есть $(u, v)^2 - |u|^2 |v|^2 \leq 0$, причем u и v линейно зависимы тогда и только тогда, когда трехчлен имеет вещественный корень, что эквивалентно тому, что дискриминант равен нулю.

Задача

11.16. Докажите, что для любых непропорциональных функций $f, g \in C[0, 1]$ верно неравенство

$$\left(\int_0^1 f(x) g(x) dx \right)^2 < \int_0^1 f^2(x) dx \int_0^1 g^2(x) dx$$

В частности, для непрерывной функции $f \neq \text{const}$

$$\left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 < \int_0^1 f(x)^2 dx$$

Следствие

11.17. (Неравенство треугольника). Для любых двух векторов u и v евклидова пространства

$$|u+v| \leq |u|+|v|$$

Доказательство.

$$(u+v, u+v) = |u|^2 + 2(u,v) + |v|^2 \leq |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2 = (|u|+|v|)^2$$

Из неравенства треугольника следует, что для любых трех векторов u, v, w евклидова пространства V имеет место неравенство

$$|u-w| \leq |u-v| + |v-w| \tag{97}$$

Наличие скалярного произведения позволяет измерять углы и расстояния в евклидовом пространстве.

Пусть $u, v \neq 0$ - векторы евклидова пространства V. Тогда из неравенства Коши-Буняковского

$$-1 \leq \frac{(u,v)}{|u||v|} \leq 1$$

поэтому существует единственный угол $\alpha, 0 \leq \alpha \leq \pi$ такой, что $\cos\alpha = \frac{(u,v)}{|u||v|}$. По определению, он называется углом между ненулевыми векторами u и v. То есть мы возвращаемся к известной из аналитической геометрии формуле $(u,v) = |u||v|\cos\alpha$ (только теперь это не определение скалярного произведения, а следствие из определения угла).

3.12.5 11.5 Distances in Euclidean Space

Определим функцию $\rho : V \times V \to \mathbb{R}$ на евклидовом пространстве V равенством $\rho(u,v) := |u-v|$. Тогда она обладает следующими свойствами:
(i) $\rho(u,v) = \rho(v,u)$;
(ii) $\rho(u,u) = 0; \rho(u,v) > 0$ при $u \neq v$;
(iii) $\rho(u,w) \leq \rho(u,v) + \rho(v,w)$.

Заметим, что (iii) - просто неравенство треугольника (97) в других обозначениях. Таким образом, ρ является метрикой на V. Значит, в евклидовом пространстве определены все понятия, которые могут быть заданы с помощью метрики (расстояние между подмножествами, понятия открытого шара и открытого множества и т.п.).

Например, если A и B - произвольные подмножества в V, то определим расстояние между ними как

$$\rho(A,B) := \inf\{\rho(a,b) | a \in A, b \in B\}$$

Получим формулу для расстояния от вектора $v \in V$ до подпространства $U \subset V$. Напомним, что $V = U \oplus U^\perp$ и $v = pr_U(v) + ort_U(v)$.

Предложение

11.18. $\rho(v,U) = |\mathrm{ort}_U(v)|$.

Proof. □

$\forall u \in U$ имеем

$$|v-u|^2 = |pr_U(v) - u + \mathrm{ort}_U(v)|^2 = |u - pr_U(v)|^2 + |\mathrm{ort}_U(v)|^2$$

откуда $|v-u|^2 \geq |\mathrm{ort}_U(v)|^2$, причем $u = pr_U(v)$ - единственный вектор из U, для которого равенство достигается, то есть $pr_U(v)$ - единственный ближайший к v вектор из U.

3.12.6 11.6 Note on the Topology of Metric Spaces

Далее нам потребуются некоторые простейшие факты о топологии метрических пространств, поэтому напомним здесь соответствующие общие определения.

Пусть (X, ρ_X) - метрическое пространство. Открытым шаром с центром в точке $x \in X$ радиуса $\varepsilon > 0$ называется его подмножество $B_\varepsilon(x) := \{x' \in X | \rho(x, x') < \varepsilon\}$. Подмножество $U \subset X$ метрического пространства (X, ρ_X) называется открытым, если $\forall x \in U$ найдется такое $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$, что $B_\varepsilon(x) \subset U$. Множество всех открытых подмножеств в X (включающее также пустое множество $\varnothing$, всякая точка которого удовлетворяет приведенному условию) называется топологией метрического пространства (X, ρ_X) (оно в самом деле удовлетворяет аксиомам топологии и превращает множество X в топологическое пространство). Например, стандартная топология на $\mathbb{R}^n$, рассматриваемая в анализе - это топология метрического пространства $(\mathbb{R}^n, \rho)$, где

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

- евклидова метрика.

Чтобы определить понятие непрерывного отображения между метрическими пространствами, достаточно рассматривать только открытые шары. Отображение $\varphi : (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ между метрическими пространствами называется непрерывным в точке $x \in X$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $\varphi(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(\varphi(x))$. Отображение φ непрерывно, если оно непрерывно в каждой точке $x \in X$. Читатель легко убедится, что это определение в случае метрических пространств $(\mathbb{R}^n, \rho)$ (где ρ - евклидова метрика) и $(\mathbb{R}, \rho)$, где $\rho(a, b) = |a - b|$ (на самом деле это частный случай метрического пространства $(\mathbb{R}^n, \rho)$ при $n = 1$) приводит к обычному понятию непрерывной функции n переменных, используемому в анализе.

Отображение $\varphi : (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ между метрическими пространствами называется изометрией, если оно биективно и $\forall x, x' \in X \rho_Y(\varphi(x), \varphi(x')) = \rho_X(x, x')$. Легко видеть, что обратное к изометрии отображение также является изометрией, и что для любого $\varepsilon > 0$ изометрия определяет биекцию между множествами открытых шаров радиуса ε в метрических пространствах (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y). Из этого очевидно, что изометрия является непрерывным отображением (и даже гомеоморфизмом - напомним, что так называется изоморфизм топологических пространств). Более того, она устанавливает биекцию между множествами непрерывных функций (скажем, вещественнозначных) на X и на Y. Точнее, функция $f : Y \to \mathbb{R}$ непрерывна тогда и только тогда, когда $f \circ \varphi : X \to \mathbb{R}$ непрерывна.

Если $V - n$-мерное евклидово пространство с определенной выше метрикой $\rho_V(u, v) = |u - v|$, то выбор ортонормированного базиса e в V определяет линейный изоморфизм $\varphi_e : V \to \mathbb{R}^n$, который является изометрией $(V, \rho_V) \to (\mathbb{R}^n, \rho)$.

Любое подмножество $Z \subset X$ метрического пространства (X, ρ_X) само является метрическим пространством относительно метрики $\rho_Z = \rho_X|_{Z \times Z}$, являющейся ограничением метрики ρ_X на Z. Легко проверяется, что ограничение $f|_Z$ любой непрерывной функции $f : X \to \mathbb{R}$ на Z будет непрерывно как отображение $(Z, \rho_Z) \to \mathbb{R}$.

В параграфе 12.5 нам потребуется следующее утверждение: произвольная квадратичная функция $q : V \to \mathbb{R}$ на евклидовом пространстве V является непрерывной. Для доказательства этого факта можно рассуждать следующим образом. Выберем произвольный ортонормированный базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V, в соответствующих координатах квадратичная функция запишется как однородный многочлен 2 -й степени $p_q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$. Из курса анализа мы знаем, что он - непрерывная функция на $(\mathbb{R}^n, \rho)$, где ρ - евклидова метрика. А так как выбор базиса задает изометрию, а значит, в силу сказанного выше, непрерывное отображение [56] $\varphi_e : V \to \mathbb{R}^n$, то $q = p_q \circ \varphi_e$ непрерывна на V (поскольку является композицией непрерывных отображений).

3.12.7 11.7 Gram-schmidt Algorithm

Теорема

11.19. Пусть $\{e_1,\ldots,e_n\}$ - произвольный базис в евклидовом пространстве V. Тогда существует единственный ортогональный базис $\{f_1,\ldots,f_n\}$ в V, матрица перехода к которому от исходного базиса верхняя треугольная с единицами на главной диагонали.

Базис $\{f_1,\ldots,f_n\}$ называется ортогонализачией базиса $\{e_1,\ldots,e_n\}$. Заметим, что из условия следует, что линейные оболочки $\langle e_1,\ldots,e_k\rangle$ и $\langle f_1,\ldots,f_k\rangle$ совпадают при $k=1,\ldots,n$.

Заметим еще, что вместо базиса в V можно ортогонализовать произвольную линейно независимую систему векторов в V (тогда она будет базисом в своей линейной оболочке, и рассуждение можно применить к последней).

Proof. □

Из вида матрицы перехода следует, что для f_1 единственная возможность - положить $f_1=e_1$. Пусть система с требуемыми свойствами $\{f_1,\ldots,f_{k-1}\}$ уже построена. Из вида матрицы перехода следует, что мы должны искать f_k в виде $f_k=e_k+\sum\limits_{i=1}^{k-1}\mu_i e_i$, но так как $V_{k-1}:=\langle e_1,\ldots,e_{k-1}\rangle=\langle f_1,\ldots,f_{k-1}\rangle$ (это снова следует из вида матрицы перехода и предположения индукции), то, эквивалентно, f_k можно также искать в виде $f_k=e_k+\sum\limits_{i=1}^{k-1}\lambda_i f_i$. Условия $f_k\perp f_1,\ldots,f_{k-1}$ (что равносильно $f_k\in V_{k-1}^{\perp}$)

записываются в виде системы $(f_k,f_j)=0, j=1,\ldots,k-1$, более подробно

$$\left(e_k+\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i f_i, f_j\right)=(e_k,f_j)+\lambda_j\left|f_j\right|^2=0 \tag{98}$$

откуда $\lambda_j=-\frac{(e_k,f_j)}{|f_j|^2}, j=1,\ldots,k-1$. Теперь формула (96) показывает, что $f_k=\operatorname{ort}_{V_{k-1}}e_k$. Так как $\{e_1,\ldots,e_n\}$ - базис, то $e_k\notin V_{k-1}$ и поэтому $f_k\neq 0$. Тем самым шаг построения ортогонального базиса завершен.

Пример 11.20. Рассмотрим подпространство $\mathbb{R}[x]_2$ в бесконечномерном евклидовом пространстве $C[0,1]$ из Примера 11.6. Найдем ортогонализацию $\{f_1,f_2,f_3\}$ "стандартного" базиса $\{1,x,x^2\}$ в нем. Имеем

$$f_1=1,\quad f_2=x-\frac{(x,1)}{|1|^2}1=x-\frac{1}{2},\quad f_3=x^2-\frac{(x^2,1)}{|1|^2}1-\frac{\left(x^2,x-\frac{1}{2}\right)}{\left|x-\frac{1}{2}\right|^2}\left(x-\frac{1}{2}\right)=x^2-x+\frac{1}{6}$$

Геометрический смысл описанного в Теореме алгоритма можно представить следующим образом. Натянем на исходный неортогональный базис $\{e_1,\ldots,e_n\}$ n-мерный параллелепипед $\Pi\left[e_1,\ldots,e_n\right]$. Тогда изложенный выше алгоритм сводится к следующему: вектор $f_1=e_1$ мы оставляем тем же, а вектор e_2 заменяем на высоту f_2 параллелепипеда $\Pi\left[e_1,e_2\right]$ относительно основания $\Pi\left[e_1\right]$, далее вектор e_3 - на высоту f_3 параллелепипеда $\Pi\left[e_1,e_2,e_3\right]$ относительно основания $\Pi\left[e_1,e_2\right]$ и т.д. Ясно, что при этом получается прямоугольный параллелепипед $\Pi\left[f_1,\ldots,f_n\right]$ того же n-мерного объема (если правильно определить это понятие). [57]. Кроме того, каждый из k-мерных параллелепипедов $\Pi\left[e_1,\ldots,e_k\right]$ при этом заменяется прямоугольным k-мерным параллелепипедом $\Pi\left[f_1,\ldots f_k\right]$ того же k-мерного объема.

Используя приведенные соображения, можно обосновать, что квадрат n-мерного объема $\operatorname{Vol}\left(e_1,\ldots,e_n\right)$ параллелепипеда $\Pi\left[e_1,\ldots,e_n\right]$, построенного на базисе $\{e_1,\ldots,e_n\}$, равен $\det G$, где G - матрица Грама скалярного произведения в этом базисе. Действительно, по предшествующей Теореме у базиса $\{e_1,\ldots,e_n\}$ есть ортогонализация

[056] еще точнее, гомеоморфизм.

$\{f_1, \ldots, f_n\}$, то есть существует верхняя треугольная матрица C с единицами на главной диагонали такая, что $\operatorname{diag}\left(|f_1|^2, \ldots, |f_n|^2\right) = C^T G C$. В частности, $\det G = |f_1|^2 \ldots |f_n|^2$, причем правая часть совпадает с квадратом $\operatorname{Vol}(f_1, \ldots, f_n)^2$ объема прямоугольного параллелепипеда, построенного на ортогональном базисе $\{f_1, \ldots, f_n\}$ (поскольку есть произведение квадратов длин его сторон), а выше мы "обосновали", что объем параллелепипеда, построенного на базисе, не меняется при ортогонализации этого базиса.

Из доказанной Теоремы мы сейчас выведем важное следствие. Пусть G - матрица Грама базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Пусть $G_k, 1 \leq k \leq n$ - подматрица матрицы G порядка k, стоящая в левом верхнем углу. Очевидно, что G_k - матрица ограничения $(\cdot, \cdot)|_{V_k}$ скалярного произведения на подпространство V_k в базисе $\{e_1, \ldots, e_k\}$ этого пространства. Пусть $\delta_k := \det G_k$ - угловые миноры матрицы G. Из положительной определенности скалярного произведения следует, что все они больше нуля. Введем еще $\delta_0 := 1$.

Следствие

11.21. В введенных выше обозначениях

$$|f_k|^2 = (f_k, f_k) = \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}}, 1 \leq k \leq n$$

Proof. □

Для $1 \leq k \leq n$ имеем

$$\operatorname{diag}\left(|f_1|^2, \ldots, |f_k|^2\right) = C_k^T G_k C_k$$

откуда, переходя к определителям и используя то, что матрицы C_k верхние треугольные с единицами на главной диагонали, получаем требуемое.

Доказанное в Следствии тождество имеет следующий геометрический смысл: квадрат длины высоты k-мерного параллелепипеда равен отношению квадрата его k-мерного оббема к квадрату k - 1 -мерного облема соответствующего основания. Действительно, выше мы "обосновали", что $\det G$ равен квадрату n-мерного объема параллелепипеда, построенного на базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$. По тем же причинам δ_k есть квадрат k-мерного объема $\operatorname{Vol}(e_1, \ldots, e_k)$. Тогда равенство $|f_k|^2 = \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}}$ означает в точности то, что написано выше.

Полученный результат позволяет получить явную формулу для расстояния от вектора до подпространства. Пусть $U \subset V$ - подпространство евклидова пространства V и $v \in V$ - произвольный вектор. Пусть $\{e_1, \ldots, e_k\}$ - произвольный базис в U. Тогда (ср.

Предложение

11.18)

$$\rho(v, U)^2 = \frac{\det G(e_1, \ldots, e_k, v)}{\det G(e_1, \ldots, e_k)}$$

Пусть $\varphi : V \to V$ - линейный оператор на евклидовом пространстве $V, \{e_1, \ldots, e_n\}$ - произвольный ортонормированный базис в V.

Предложение

11.22. Во введенных въше обозначениях $\operatorname{Vol}(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = |\det \varphi|$.

Proof. □

---

[057] Строго определять что это такое в данном курсе мы не будем. Для n-мерного параллелепипеда при $n = 1, 2, 3 n$-мерный объем - это соответственно длина, (неориентированная) площадь и "обычный" (неориентированный) трехмерный объем.

Пусть A - матрица оператора φ в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$; тогда

$$(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = (e_1, \ldots, e_n) A$$

откуда $G(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = A^T E A = A^T A$, и, значит, $\det G(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) = (\det A)^2$.
Доказанное равенство можно понимать как "геометрический смысл" числа $|\det \varphi|$ - оно показывает, во сколько раз меняется объем параллелепипеда при применении к нему оператора φ. Что касается знака числа $\det \varphi$ (который имеет смысл только при $\det \varphi \neq 0$), то он может быть истолкован как ориентация базиса $\{\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\}$ относительно базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Следующая задача обобщает очевидное неравенство $|G(u, v)| \leq |u|^2 |v|^2$.

Задача

11.23. Дл любой системы векторов $\{u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_l\}$ в евклидовом пространстве имеет место неравенство

$$|G(u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_l)| \leq |G(u_1, \ldots, u_k)| \, |G(v_1, \ldots, v_l)|$$

Решение. Ясно, что достаточно рассмотреть случай линейно независимой системы $\{u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_l\}$. Пусть $\{u_1', \ldots, u_k', v_1', \ldots, v_l'\}$ - ее ортогонализация. Тогда

$$|G(u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_l) =| u_1'|^2 \ldots |u_k'|^2 \, |v_1'|^2 \ldots |v_l'|^2$$

Ясно, что $\{u_1', \ldots, u_k'\}$ - ортогонализация системы $\{u_1, \ldots, u_k\}$. Пусть $\{v_1'', \ldots, v_l''\}$ - ортогонализация системы $\{v_1, \ldots, v_l\}$. Тогда

$$|G(u_1, \ldots, u_k)| = |u_1'|^2 \ldots |u_k'|^2, \quad |G(v_1, \ldots, v_l)| = |v_1''|^2 \ldots |v_l''|^2$$

Заметим, что

$$v_m' = \mathrm{ort}_{\langle u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_{m-1} \rangle} v_m$$

в то время как

$$v_m'' = \mathrm{ort}_{\langle v_1, \ldots, v_{m-1} \rangle} v_m$$

Ясно, что если $U \subset W \subset V$, то для любого $v \in V \rho(v, W) \leq \rho(v, U)$, то есть по Предложению 11.18 $|\mathrm{ort}_W v| \leq |\mathrm{ort}_U v|$, откуда следует требуемое.

Вопрос читателю: какой геометрический смысл доказанного в Задаче неравенства?

3.12.8 11.8 Description of Orthonormal Bases

Пусть V - евклидово n-мерное пространство, $e := \{e_1, \ldots, e_n\}$ - некоторый ортонормированный базис в нем (мы знаем, что он существует), $e' := \{e_1', \ldots, e_n'\}$ - еще какой-то базис в V и C матрица перехода от e к e'. Тогда матрица Грама базиса e' равна $G_{e'} = C^T C$. Таким образом, базис e' тоже ортонормированный тогда и только тогда, когда $C^T C = E$, или, что равносильно, $C^T = C^{-1}$.

Определение

11.24. Квадратная вещественная матрица C называется ортогональной, если $C^T C = E$.

Если рассмотреть матрицу C как совокупность столбцов $(c_1, \ldots, c_n)$, то условие ортогональности равносильно тому, что эти столбцы образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$ относительно стандартного скалярного произведения: $c_i^T c_j = \delta_{ij}$. Очевидно, что условие ортогональности матрицы C можно также переписать в виде $CC^T = E$, что дает аналогичное условие для строк.

Заметим, что определитель любой ортогональной матрицы равен ± 1. Конечно, это условие не является достаточным условием ортогональности матрицы.

Задача

11.25. Покажите, что ортогональные матрицъ порядка 2 распадаются на два непересекающихся класса: $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ *и* $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Матрицъ первого типа являются матрицами перехода между одинаково ориентированными, а второго - противоположсно ориентированнъми ортонормированными базисами.

Предложение

11.26. Зафиксируем ортонормированный базис $e := \{e_1, \ldots, e_n\}$ в евклидовом пространстве V. Тогда сопоставление $e' \mapsto C_{e'}$ базису e' матрицы перехода $C_{e'}$ к нему от фиксированного базиса е определяет биекцию между ортонормированными базисами в V и ортогональными матрицами порядка n.

Proof. □

Так как матрица перехода однозначно задается указанием упорядоченной пары базисов, описанное в условии Предложения отображение корректно определено. Оно инъективно, так как базис e' однозначно определяется указанием базиса e и матрицы перехода $C_{e'}$. Оно сюръективно, так как произвольная ортогональная матрица является матрицей перехода от фиксированного ортонормированного базиса e к некоторому ортонормированному.

Задача

11.27. Докажите, что любые два из следующих условий влекут третве:

1. базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ортонормирован;
2. базис $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ ортонормирован;
3. матрица перехода от $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *к* $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ ортогональна.

Задача

11.28. Покажите, что ортогональные матрицы данного порядка п образуют группу (она стандартно обозначается $\mathrm{O}(n)$). Каж этот результат связан с интерпретачией ортогональных матриц как матриц, перехода между ортонормированными базисами?

3.12.9 11.9 Isomorphisms of Euclidean Spaces

Пусть V и U - евклидовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_V$ и $(\cdot,\cdot)_U$.

Определение

11.29. Линейное отображение $\varphi : V \to U$ называется изометрией, если $(\varphi(v_1), \varphi(v_2))_U = (v_1, v_2)_V \, \forall v_1, v_2, \in V$.
То есть изометрия сохраняет скалярные произведения, в частности, длины векторов и углы между ними. Также ясно, что она ортонормированный базис в V переводит в ортонормированную систему векторов в U. Уже отсюда понятно, что любая изометрия инъективна. Покажем это по-другому: пусть $v \in \operatorname{Ker}\varphi$. Тогда $0 = (\varphi(v), \varphi(v))_U = (v, v)_V = |v|^2$, откуда $v = 0$.
Геометрически более-менее понятно, что преобразование, сохраняющее длины (и углы) между всеми векторами, сохраняет и линейные соотношения между ними, поскольку

отображает евклидово пространство "как твердое тело" (вспомните доказательство линейности поворота плоскости). Поэтому требование линейности в определении изометрии лишнее.

Задача

11.30. Отображение между евклидовыми пространствами $\varphi : V \to U$ такое, что $\left(\varphi\left(v_1\right), \varphi\left(v_2\right)\right)_U = \left(v_1, v_2\right)_V \forall v_1, v_2 \in V$, является линейным.
Решение. Положим $w := v_1 + v_2$.

$$0 = |w - v_1 - v_2|^2 = |w|^2 + |v_1|^2 + |v_2|^2 + 2\left(v_1, v_2\right) - 2\left(v_1, w\right) - 2\left(v_2, w\right) =$$
$$= |\varphi(w)|^2 + |\varphi\left(v_1\right)|^2 + |\varphi\left(v_2\right)|^2 + 2\left(\varphi\left(v_1\right), \varphi\left(v_2\right)\right) - 2\left(\varphi\left(v_1\right), \varphi(w)\right) - 2\left(\varphi\left(v_2\right), \varphi(w)\right) =$$
$$= |\varphi(w) - \varphi\left(v_1\right) - \varphi\left(v_2\right)|^2,$$

откуда $\varphi\left(v_1 + v_2\right) = \varphi\left(v_1\right) + \varphi\left(v_2\right)$. Аналогично проверяется, что $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$.

Определение

11.31. Биективная изометрия между евклидовыми пространствами называется изоморфизмом евклидовых пространств.
Два евклидовых пространства называются изоморфными, если между ними есть изоморфизм. Заметим, что любой изоморфизм евклидовых пространств является линейным изоморфизмом, который вдобавок является изометрией. В частности, если два евклидовых пространства изоморфны, то у них обязательно одинаковые размерности.

Предложение

11.32. Два евклидовых пространства изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.

Proof. □

В силу сделанного выше замечания достаточно доказать, что евклидовы пространства V и U одинаковой размерности изоморфны. Построим изометрию между ними следующим образом: выберем ортонормированный базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V и такой же базис $\{f_1, \ldots, f_n\}$ в U и определим линейное отображение $\varphi : V \to U$ условием $\varphi\left(e_i\right) = f_i, i = 1, \ldots, n$. Это - линейный изоморфизм, который, как легко убедится читатель, используя билинейность скалярного произведения, является также изометрией.
Доказанное

Предложение

свидетельствует о том, что геометрические свойства евклидовых пространств одинаковой размерности одни и те же, поэтому в качестве "модельного" n-мерного евклидова пространства можно взять пространство столбцов $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением.
Изоморфизмы евклидова пространства на себя называются ортогональными преобразованиями, их мы изучим позже.

3.12.10 11.10 QR Decomposition

Предложение

11.33. Для любой невырожденной вещественной матрицы А существуют единственные ортогональная матрица Q и верхняя треугольная матрица R с положительными элементами на главной диагонали такие, что $A = QR$.

Proof. □

Пусть $\mathbb{R}^n$ - пространство столбцов со стандартным скалярным произведением. Рассмотрим A как совокупность столбцов $(a_1 \dots a_n), a_i \in \mathbb{R}^n$. Пусть $E = (e_1 \dots e_n)$ - единичная матрица (ее столбцы образуют стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$). Тогда A является матрицей перехода от $\{e_1, \dots, e_n\}$ к $\{a_1, \dots, a_n\}$, то есть

$$(a_1 \dots a_n) = (e_1 \dots e_n) A$$

Пусть $\{q_1, \dots, q_n\}$ - ортонормированный базис из столбцов, полученный из $\{a_1, \dots, a_n\}$ ортогонализацией по Граму-Шмидту с последующим нормированием. Тогда матрица перехода T от $\{a_1, \dots, a_n\}$ к $\{q_1, \dots, q_n\}$ является верхней треугольной с положительными элементами на главной диагонали. Обратная R к такой матрице тоже является верхней треугольной с положительными элементами на главной диагонали (чтобы это доказать, примените последовательность элементарных преобразований строк к $(T|E)$). Итак,

$$(a_1 \dots a_n) = (q_1 \dots q_n) R$$

где R - верхняя треугольная матрица с положительными элементами на главной диагонали. Так как базис $\{q_1, \dots, q_n\}$ ортонормирован, то матрица Q перехода к нему от $\{e_1, \dots, e_n\}$ ортогональна (это есть матрица из столбцов $(q_1 \dots q_n)$). Таким образом, получаем

$$(a_1 \dots a_n) = (e_1 \dots e_n) QR$$

или в матричном виде $A = QR$.
Докажем теперь единственность. Пусть $A = QR = Q'R'$, тогда $Q'^{-1}Q = R'R^{-1}$. Нетрудно видеть, что справа стоит верхняя треугольная матрица с положительными элементами на главной диагонали, а слева - ортогональная матрица. Очевидно, что пересечение указанных множеств матриц состоит только из E.

Заметим, что помимо QR-разложения для произвольной невырожденной матрицы A есть также аналогичное RQ-разложение. Чтобы это доказать, достаточно найти QR-разложение для A^{-1}.

Интересный вопрос: как описать множество всех скалярных произведений на вещественном векторном пространстве V? С одной стороны, поскольку скалярное произведение в фиксированном базисе однозначно определяется своей матрицей Грама, а такой матрицей может быть произвольная симметричная положительно определенная матрица (порядка, равного размерности V), то множество всех скалярных произведений на V биективно множеству таких матриц (причем биекция, конечно, зависит от базиса). Значит, это непустое (поскольку, например, оно содержит единичную матрицу), открытое (поскольку по критерию Сильвестра условие положительной определенности равносильно выполнению конечной системы строгих неравенств) подмножество в $\frac{n(n+1)}{2}$-мерном пространстве симметричных матриц порядка n, где $n = \dim V$.

Иначе можно рассуждать так. Задать скалярное произведение α можно, выбрав произвольный базис e в V и объявив его ортонормированным относительно α. Еще один базис e' в V задает то же самое скалярное произведение α тогда и только тогда, когда матрица перехода C от e к e' ортогональна. Действительно, это равносильно тому, что из $G_e = E$ следует $G_{e'} = C^T C = E$.

Более общо, зафиксируем некоторый базис e. Пусть C и D - матрицы перехода от e к базисам e' и e'' соответственно. При каком условии скалярные произведения, определенные базисами e' и e'' совпадают? Очевидно, тогда и только тогда, когда матрица перехода от e' к e'' ортогональна. То есть тогда и только тогда, когда $D = CQ$, где $Q \in \mathrm{O}(n)$, эквивалентно, тогда и только тогда, когда в RQ-разложениях матриц D и C верхние треугольные матрицы совпадают. Таким образом, мы получаем также конкретную биекцию между множеством скалярных произведений в вещественном векторном пространстве V размерности n и множеством верхних треугольных матриц порядка n с положительными элементами на главной диагонали.

3.13 12 Operators and Bilinear Functions in Euclidean Spaces

На евклидовом пространстве можно выделить интересные классы линейных операторов. Во-первых те операторы, которые диагонализируются в ортонормированном базисе - они называются самосопряженными. Во-вторых, операторы, которые являются изометриями евклидова пространства - ортогональные операторы. Кроме того, на евклидовом пространстве линейные операторы можно превращать в билинейные формы и наоборот, что делает соответствующую теорию еще более богатой (например, возникает понятие положительных операторов, которые отвечают положительно определенным симметричным билинейным формам). Данный раздел и посвящен изучению этих тем.

3.13.1 12.1 Conjugate Display

Пусть U и V - евклидовы пространства со скалярными произведениями $(,)_U$ и $(,)_V$ соответственно, $\varphi : U \to V$ - линейное отображение.

Определение

12.1. Отображение $\varphi^* : V \to U$ называется сопряженным к φ, если

$$(\varphi(u), v)_V = (u, \varphi^*(v))_U \quad \forall u \in U, v \in V \tag{99}$$

В частном случае $U = V$ мы приходим к понятию сопряженного преобразования.

Предложение

12.2. Для любого линейного отображения $\varphi : U \to V$ между евклидовыми пространствами существует единственное сопряженное отображение φ^*. Кроме того, сопряженное отображение линейно.

Proof. □

Рассмотрим выражение $f_{\varphi,v}(u) := (\varphi(u), v)_V$ как функцию от $u \in U$ при фиксированных $v \in V$ и φ. Из линейности φ и скалярного произведения по первому аргументу следует, что $f_{\varphi,v}$ линейна, то есть $f_{\varphi,v} \in U^*$.

Согласно Предложению 11.10, для данных $v \in V$ и φ существует единственный $w \in U$ такой, что

$$f_{\varphi,v}(u) = (u, w)_U \quad \forall u \in U$$

Этот вектор w мы обозначим $\varphi^*(v)$ (что, в частности, подчеркивает его зависимость от $v \in V$ и φ). То есть для фиксированного φ и данного $v \in V$ существует единственный $\varphi^*(v) \in U$ такой, что

$$(\varphi(u), v)_V = (u, \varphi^*(v))_U \quad \forall u \in U$$

Это означает, что сопряженное к φ отображение φ^* существует и единственно.
Проверим теперь линейность сопряженного отображения. Имеем

$$\begin{aligned}(u, \varphi^*(v_1 + v_2))_U &= (\varphi(u), v_1 + v_2)_V = (\varphi(u), v_1)_V + (\varphi(u), v_2)_V = \\ &= (u, \varphi^*(v_1))_U + (u, \varphi^*(v_2))_U = (u, \varphi^*(v_1) + \varphi^*(v_2))_U \quad \forall u \in U\end{aligned}$$

откуда получаем $\varphi^*(v_1 + v_2) = \varphi^*(v_1) + \varphi^*(v_2)$.
Аналогично,

$$\begin{aligned}(u, \varphi^*(\lambda v))_U &= (\varphi(u), \lambda v)_V = \lambda(\varphi(u), v)_V = \\ &= \lambda (u, \varphi^*(v))_U = (u, \lambda\varphi^*(v))_U\end{aligned}$$

откуда $\varphi^*(\lambda v) = \lambda\varphi^*(v)$.

Note.

12.3. Опишем связь введенной операции сопряжения линейных отображений между евклидовыми пространствами с операцией "линейного сопряжения" $\varphi \mapsto \varphi^{\star}$, введенной в конце параграфа 7.6. Для произвольного линейного отображения $\varphi : U \to V$ рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
V^* \arrow[r, "\varphi^{\star}"] & U^* \\
V \arrow[u, "\alpha_V"] \arrow[r, "\varphi^*"'] & U, \arrow[u, "\alpha_U"']
\end{tikzcd}$$

где α_U, α_V - изоморфизмы, определенные в параграфе 11.3. Проверим, что она коммутативна. В самом деле, путь из левого нижнего угла вверх и вправо отвечает композиции

$$v \mapsto (\cdot, v)_V \mapsto (\varphi(\cdot), v)_V$$

(где мы использовали определение $\varphi^{\star}$), в то время как путь вправо и вверх - композиции

$$v \mapsto \varphi^*(v) \mapsto (\cdot, \varphi^*(v))_U$$

Условие равенства линейных функций $(\varphi(\cdot), v)_V$ и $(\cdot, \varphi^*(v))_U$ на U эквивалентно определению сопряженного отображения. Таким образом, $\varphi^* = \alpha_U^{-1} \circ \varphi^{\star} \circ \alpha_V$.

Пусть $\mathcal{L}(U, V)$ обозначает линейное пространство всех линейных отображений $\varphi : U \to V$.

Предложение

12.4. Операция

$$* : \mathcal{L}(U, V) \to \mathcal{L}(V, U) \tag{100}$$

обладает следующими свойствами:

1. $(\varphi_1 + \varphi_2)^* = \varphi_1^* + \varphi_2^*, (\lambda\varphi)^* = \lambda\varphi^*$ (то есть отображение (100) линейно);
2. $\varphi^{**} = \varphi \left(\text{molecmb} *^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{L}(U,V)}\right)$;
3. $\mathrm{Id}_U^* = \mathrm{Id}_U$, где $\mathrm{Id}_U : U \to U$ - тожндественное преобразование;
4. если $\psi : V \to W$ - еще одно линейное отображение между евклидовыми пространствами, $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$;
5. если φ - изоморфизм, $\text{mo}\, (\varphi^{-1})^* = (\varphi^*)^{-1}$.

Proof. 1.

$$\begin{gathered}
(u, (\varphi_1 + \varphi_2)^* (v))_U = ((\varphi_1 + \varphi_2)(u), v)_V = (\varphi_1(u) + \varphi_2(u), v)_V = \\
= (\varphi_1(u), v)_V + (\varphi_2(u), v)_V = (u, \varphi_1^*(v))_U + (u, \varphi_2^*(v))_U = (u, (\varphi_1^* + \varphi_2^*)(v))_U \\
(u, (\lambda\varphi)^*(v))_U = ((\lambda\varphi)(u), v)_V = \lambda(\varphi(u), v)_V = \lambda\, (u, \varphi^*(v))_U = (u, \lambda\varphi^*(v))_U
\end{gathered}$$

2.

$$(\varphi(u), v)_V = (u, \varphi^*(v))_U = (\varphi^*(v), u)_U = (v, \varphi^{**}(u))_V = (\varphi^{**}(u), v)_V$$

Заметим, что доказанное свойство в частности означает, что всякое отображение φ является сопряженным к некоторому (а именно к φ^*).
3)

$$\left(\mathrm{Id}_U\left(u_1\right), u_2\right)=\left(u_1, u_2\right)=\left(u_1, \mathrm{Id}_U^*\left(u_2\right)\right)$$

4. Чтобы лучше понять направления, в которых действуют отображения, полезно посмотреть на диаграммы

$$U \overset{\varphi}{V} V \quad U \gtrless_W^{\varphi^*} V$$

$$\begin{gathered}(u,(\psi \circ \varphi)^*(w))_U=((\psi \circ \varphi)(u), w)_W=\left(\varphi(u), \psi^*(w)\right)_V= \\ =\left(u, \varphi^*\left(\psi^*(w)\right)\right)_U=\left(u,\left(\varphi^* \circ \psi^*\right)(w)\right)_U .\end{gathered}$$

5.

$$\begin{aligned} & \mathrm{Id}_U=\mathrm{Id}_U^*=\left(\varphi^{-1} \circ \varphi\right)^*=\varphi^* \circ\left(\varphi^{-1}\right)^* \\ & \mathrm{Id}_V=\mathrm{Id}_V^*=\left(\varphi \circ \varphi^{-1}\right)^*=\left(\varphi^{-1}\right)^* \circ \varphi^*\end{aligned}$$

откуда $\left(\varphi^{-1}\right)^*=\left(\varphi^*\right)^{-1}$.

□

Свойства операции "звездочка", доказанные в предыдущем Предложении, напоминают свойства операции транспонирования матриц (см. Предложение 2.19). Это неслучайно. Чтобы это увидеть, посмотрим, как связаны матрицы отображения и его сопряженного относительно выбранных базисов в U и V.

Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ - некоторый базис в $U, \{f_1, \ldots, f_m\}$ - базис в $V, \vec{u}, \vec{v}$ - координатные столбцы векторов u и v, G_U, G_V - матрицы Грама выбранных базисов в U и $V, A=A_{\varphi}$ - матрица линейного отображения $\varphi: U \rightarrow V$, а B - матрица сопряженного отображения $\varphi^*: V \rightarrow U$. Тогда в базисах соотношение (99) переписывается в следующем виде:

$$(A \vec{u})^T G_V \vec{v}=\vec{u}^T G_U B \vec{v}, \quad \text{то есть } \vec{u}^T A^T G_V \vec{v}=\vec{u}^T G_U B \vec{v}$$

поскольку это должно быть выполнено для любых столбцов $\vec{u}$ и $\vec{v}$, то отсюда следует, что

$$A^T G_V=G_U B \tag{101}$$

То есть матрица B сопряженного отображения φ^* равна $G_U^{-1} A^T G_V$. В частности, если выбранные базисы являются ортонормированными (что, напомним, равносильно $G_U= E, G_V=E$), то $B=A^T$. Легко видеть, что выполнено и обратное: если относительно некоторых базисов евклидовых пространств U и V матрицы A и B отображений $\varphi: U \rightarrow V$ и $\psi: V \rightarrow U$ связаны соотношением (101), то эти отображения сопряжены, $\psi=\varphi^*$ (или, что равносильно, $\varphi=\psi^*$).

Задача

12.5. Докажите, что преобразование $\varphi: V \rightarrow V$ и его сопряженное φ^* имеют одинаковые характеристический и минимальный многочлены.

Задача

12.6. Докажите, что преобразование $\varphi: V \rightarrow V$ евклидова пространства V диагонализируемо тогда и только тогда, когда φ^* диагонализируемо. (Указание: как связаны минимальные многочленыи φ $u \varphi^*$?).

Для любого базиса $e:=\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ в евклидовом пространстве V существует единственный взаимный базис $e^*:=\{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*\}$ такой, что $\left(e_i, e_j^*\right)=\delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$. В самом деле, если A - матрица, составленная из координатных столбцов векторов базиса e в некотором ортонормированном базисе пространства V, то для аналогичной матрицы B для e^* в том же базисе имеем $A^T B=E$, откуда $B=A^{-T}$.

Задача

12.7. Пусть $\varphi : V \to V$ - диагонализируемое преобразование евклидова пространства V и $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ - базис из его собственных векторов. Докажите, что взаимный базис $\{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*\}$ состоит из собственных векторов сопряженного оператора φ^*.

3.13.2 12.2 Fredholm's Theorem

Пусть $\varphi : U \to V$ - линейное отображение между евклидовыми пространствами.

Теорема

12.8. $\operatorname{Im}\varphi = (\operatorname{Ker}\varphi^*)^{\perp}$ (равенство подпространств в V).

Proof. □

Заметим, что равенство подпространств из условия задачи равносильно равенству $(\operatorname{Im}\varphi)^{\perp} = \operatorname{Ker}\varphi^*$ их ортогональных дополнений в V, которое мы и будем доказывать.
Пусть $v \in \operatorname{Ker}\varphi^*$, тогда для любого $u \in U$

$$0 = (u, \varphi^*(v))_U = (\varphi(u), v)_V \Rightarrow v \in (\operatorname{Im}\varphi)^{\perp}$$

то есть $\operatorname{Ker}\varphi^* \subset (\operatorname{Im}\varphi)^{\perp}$.
Пусть $v \in (\operatorname{Im}\varphi)^{\perp}$, тогда для любого $u \in U$

$$0 = (\varphi(u), v)_V = (u, \varphi^*(v))_U \Rightarrow v \in \operatorname{Ker}\varphi^*$$

то есть $(\operatorname{Im}\varphi)^{\perp} \subset \operatorname{Ker}\varphi^*$
Дадим теперь геометрическое доказательство теоремы Фредгольма 6.51 (для случая поля $\mathbb{R}$).
А именно, рассмотрим теперь систему линейных уравнений над полем $\mathbb{R}$

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{102}$$

где A - матрица размера $m \times n, \vec{x}$ - столбец высоты $n, \vec{b}$ - столбец высоты m. Для нее можно определить сопряженную однородную систему $A^T\vec{y} = \overrightarrow{0}$, матрицей коэффициентов которой является A^T.

Следствие

12.9. Система (102) при данном столбце правых частей $\vec{b}$ разрешима $\Leftrightarrow$ $\vec{b}$ ортогонален любому решению $\vec{y}$ сопряженной однородной системы (здесь ортогональность понимается в смысле "стандартного скалярного произведения", $\sum\limits_{i=1}^{m} y_i b_i = 0$).

Proof. □

Рассмотрим A как матрицу линейного отображения φ между евклидовыми пространствами относительно выбранных ортонормированных базисов, тогда матрицей сопряженного отображения φ^* (относительно тех же базисов) будет A^T. В базисах
$\operatorname{Im}\varphi$ описывается как подпространство таких столбцов в $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, для которых система (102) разрешима, а $\operatorname{Ker}\varphi^*$ - как подпространство таких столбцов $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$, что $A^T\vec{y} = \overrightarrow{0}$. Тогда имеем серию эквивалентностей:
система (102) разрешима $\Leftrightarrow \vec{b} \in \operatorname{Im}\varphi \Leftrightarrow \vec{b} \in (\operatorname{Ker}\varphi^*)^{\perp} \Leftrightarrow \vec{b}$ ортогонально любому $\vec{y}$ такому, что $A^T\vec{y} = \overrightarrow{0}$.

3.13.3 12.3 Self-adjoint Transformations

Пусть V - евклидово пространство, а $\varphi : V \to V$ - его линейное преобразование.

Определение

12.10. Преобразование φ называется самосопряженным, если оно совпадает со своим сопряженным, $\varphi = \varphi^*$.

То есть преобразование φ самосопряжено, если для любых $u, v \in V$ имеет место тождество

$$(\varphi(u), v) = (u, \varphi(v))$$

Из пункта 1) Предложения 12.4 легко следует, что самосопряженные преобразования образуют линейное подпространство в пространстве $\mathcal{L}(V)$ всех линейных преобразований пространства V. Тождественное преобразование самосопряжено, также самосопряжены преобразования вида $\lambda \operatorname{Id}_V, \lambda \in \mathbb{R}$ (при любом выборе скалярного произведения в V).

Самосопряженность φ равносильна тому, что в произвольном базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$ пространства V с матрицей Грама G его матрица A удовлетворяет тождеству $A^T G = GA$. В частности, если базис ортонормирован, то самосопряженность преобразования φ равносильна симметричности его матрицы. Таким образом, оператор самосопряжен тогда u только тогда, когда в некотором (а значит любом) ортонормированном базисе он имеет симметричную матричу.

Заметим, что если для преобразования евклидова пространства существует ортонормированный базис из собственных векторов, то это преобразование - самосопряженное. Действительно, в этом базисе матрица данного преобразования является диагональной, в частности, симметричной.

Оказывается, верно и обратное утверждение: если оператор самосопряжен, то для него существует ортонормированный базис из его собственных векторов. Доказательство этого утверждения потребует некоторой подготовки.

Предложение

12.11. Пусть $\varphi : V \to V$ - линейное преобразование евклидова пространства V. Тогда $U \subset V \varphi$-инвариантно $\Leftrightarrow U^\perp \subset V \varphi^*$-инвариантно.

Proof. □

Пусть $U \subset V \varphi$-инвариантно. Тогда

$$\forall u \in U, v \in U^\perp \quad 0 = (\varphi(u), v) = (u, \varphi^*(v)) \quad \Rightarrow \quad \varphi^*(v) \in U^\perp$$

Тем самым мы доказали импликацию $\varphi(U) \subseteq U \quad \Rightarrow \quad \varphi^*\left(U^\perp\right) \subseteq \left(U^\perp\right)$. Применяя ее к последнему включению, получаем $\varphi^{**}\left(\left(U^\perp\right)^\perp\right) \subseteq \left(U^\perp\right)^\perp$, то есть (поскольку $\left(U^\perp\right)^\perp = U, \varphi^{**} = \varphi)\, \varphi(U) \subseteq U$.

Note.

12.12. В действительности это Предложение- следствие Предложения 8.25 с учетом Замечания 12.3 и того очевидного факта, что при изоморфизмах $\alpha_V : V \to V^*$ (см. параграф 11.3) ортогональное дополнение $U^\perp$ подпространства $U \subset V$ отождествляется с его аннулятором U^0.

Следствие

12.13. Пусть $\varphi : V \to V$ - самосопряженное преобразование и $U \subset V$ является φ-инвариантым. Тогда $U^{\perp} \subset V$ также φ-инвариантно.

Другими словами, ортогональное дополнение к инвариантому подпространству самосопряженного преобразования также является инвариантным подпространством.

Напомним, что преобразование $\varphi : V \to V$ называется нильпотентным, если $\varphi^k = 0$ для некоторого натурального k.

При решении следующей задачи нам понадобится также следующий тривиальный результат: если $\varphi : V \to V$ - самосопряженное преобразование евклидова пространства V и $U \subset V$ – φ-инвариантное подпространство, то ограничение $\varphi|_U : U \to U$ является самосопряженным преобразованием пространства U.

Задача

12.14. Докажите, что нильпотентное самосопряженное преобразование евклидова пространства нулевое.

Решение. Пусть $\varphi : V \to V$ - такое преобразование. Воспользуемся индукцией по $n = \dim V$. Если $n = 1$, то $\varphi = 0$. Пусть $n > 1$, и по предположению индукции результат верен для пространств размерности меньше n. Предположим, что $\varphi \neq 0$, тогда $0 \neq \operatorname{Ker}\varphi \subsetneq V$. Согласно предыдущему следствию, подпространство $(\operatorname{Ker}\varphi)^{\perp} \subset V$ является φ-инвариантным. По предположению индукции ограничение φ на него нулевое. Тогда $V = \operatorname{Ker}\varphi \oplus (\operatorname{Ker}\varphi)^{\perp}$ - прямая сумма инвариантных подпространств, ограничения на которые оператора φ равны нулю, откуда следует, что $\varphi = 0$.

Приведем еще одно доказательство. Пусть k - наименьшее натуральное, такое что $\varphi^k = 0$. Если $k \geq 2$, то $\forall v \in V \ \big(\varphi^{k-1}(v), \varphi^{k-1}(v)\big) = \big(\varphi^{k-2}(v), \varphi^{k}(v)\big) = 0$, откуда и $\varphi^{k-1} = 0$.

3.13.4 12.4 Relationship between Linear Operators and Bilinear Functions on Euclidean Space

Пусть V - евклидово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot), \varphi : V \to V$ - линейный оператор. Определим по нему билинейную функцию $h = h_{\varphi} : V \times V \to \mathbb{R}$ по формуле

$$h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := (\mathbf{u}, \varphi(\mathbf{v})) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \tag{103}$$

Заметим, что и множество линейных операторов $V \to V$, и множество билинейных функций $V \times V \to \mathbb{R}$ являются линейными пространствами над $\mathbb{R}$ одной и той же размерности n^2, где $n = \dim V$ (например, в базисе оператор и билинейная функция однозначно задаются своими матрицами, причем любая матрица может быть как матрицей линейного оператора, так и матрицей билинейной функции). Пространство билинейных функций на V обозначим $\mathcal{B}(V)$, пространство линейных операторов на $V - \mathcal{L}(V)$.

Предложение

12.15. 1) Сопоставление $\varphi \mapsto h_{\varphi}$ (см. (103)) определяет изоморфизм линейных пространств $\alpha : \mathcal{L}(V) \to \mathcal{B}(V)$.
2) При изоморфизме α симметричные билинейные функции отвечают самосопряжженным операторам.

Proof. □

1) Линейность отображения α очевидна. Так как пространства операторов и билинейных функций на V, как указывалось, имеют одинаковые размерности, то для доказательства того, что α - изоморфизм линейных пространств, достаточно доказать его инъективность.

Пусть $\varphi \neq 0$, тогда существует такой вектор $\mathbf{v} \in V$, что $\varphi(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$. Кроме того, в силу невырожденности скалярного произведения существует вектор $\mathbf{u} \in V$ такой, что

$$(\mathbf{u}, \varphi(\mathbf{v})) = h_\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq 0 \Rightarrow \alpha(\varphi) = h_\varphi \neq 0$$

Таким образом, линейное отображение α - изоморфизм.
2) Проверим теперь второе утверждение. Действительно, для всех $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$

$$h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = h(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \Leftrightarrow (\mathbf{u}, \varphi(\mathbf{v})) = (\mathbf{v}, \varphi(\mathbf{u})) = (\varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v})$$

что равносильно самосопряженности оператора φ.
Пусть $\mathcal{L}^{\mathrm{sa}}(V)$ обозначает подпространство самосопряженных операторов в $\mathcal{L}(V)$. Тогда результат предыдущего Предложения можно представить как существование коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}(V) \arrow[r, "\alpha"] & \mathcal{B}(V) \\
\mathcal{L}^{sa}(V) \arrow[u, "\cup"] \arrow[r, "\alpha|_{\mathcal{L}^{sa}(V)}"] & \mathcal{B}^+(V), \arrow[u, "\cup"']
\end{tikzcd}$$

в которой горизонтальные стрелки - определенные выше изоморфизмы, а вертикальные - включения подпространств.

Отметим, что построенный изоморфизм между пространствами $\mathcal{L}(V)$ и $\mathcal{B}(V)$ является каноническим (он не зависит ни от каких базисов, а только от скалярного произведения).

Таким образом, для любой билинейной симметричной функции h на евклидовом пространстве V существует единственный самосопряженный оператор $\varphi = \varphi_h$ на V, для которого выполнено (103). Такой оператор назовем присоединенным к соответствующей билинейной функции.

Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ - некоторый базис в V, в котором евклидово скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ имеет матрицу Грама G, билинейная форма h - матрицу H, а оператор φ_h - матрицу $A = A_\varphi$. Кроме того, пусть $\vec{u}, \vec{v}$ - координатные столбцы векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v}$. Тогда (103) переписывается в виде

$$\vec{u}^T H \vec{v} = \vec{u}^T G A \vec{v} \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \Leftrightarrow H = GA \Leftrightarrow A = G^{-1} H \tag{104}$$

В частности, если базис ортонормированный, то $G = E$, а значит, $A = H$.

3.13.5 12.5 The Existence of an Orthonormal Basis from the Eigenvectors of a Self-adjoint Operator

Данный раздел посвящен доказательству основной теоремы о самосопряженных операторах - существованию для них ортонормированного базиса из собственных векторов. Ключевым моментом доказательства является следующее Предложение.

Предложение

12.16. Пусть $\varphi : V \to V$ - самосопряженное преобразование евклидова пространства $V, \dim V > 0$. Тодда у φ существует собственный вектор.

В этом разделе мы приведем доказательство этого результата с использованием теоремы анализа о том, что непрерывная функция на компакте достигает нижней грани своих значений (то есть имеет минимум). Читатель, предпочитающий алгебраической доказательство (с помощью существования одномерного или двумерного инвариантных подпространств) может найти его в Добавлении в конце главы, а затем перейти к Теореме 12.18. Третье доказательство основной теоремы будет приведено в главе про унитарные пространства.

Для доказательства нам понадобится следующая лемма.

Lemma

12.17. Пусть $\psi : V \to V$ - самосопряженное преобразование такое, что $(v, \psi(v)) \geq 0 \forall v \in V$. Тогда любой $e \in V$ такой, что $(e, \psi(e)) = 0$, лежит в ядре ψ.

Доказательство Леммы. Рассмотрим векторы вида $v = e + tu$, где $t \in \mathbb{R}$, а u - произвольный вектор из V. Имеем

$$(e + tu, \psi(e + tu)) = (e, \psi(e)) + t((u, \psi(e)) + (e, \psi(u))) + t^2(u, \psi(u)) =$$
$$= (u, \psi(u))t^2 + 2(u, \psi(e))t \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

(выше мы воспользовались билинейностью и симметричностью скалярного произведения, условием $(e, \psi(e)) = 0$ и самосопряженностью оператора ψ). То есть мы получили выражение вида

$$at^2 + bt, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

которое при любом $t \in \mathbb{R}$ неотрицательно. Если при этом $b \neq 0$, то выражение $at^2 + bt = (at + b)t$ меняет знак при $t = 0$, противоречие. Следовательно, $(u, \psi(e)) = 0 \quad \forall u \in V$, откуда из невырожденности скалярного произведения $\psi(e) = 0$.

Доказательство Предложения. Ассоциируем с самосопряженным оператором $\varphi : V \to V$ билинейную функцию $h = h_\varphi$ на V по формуле (103)

$$h(u, v) = (u, \varphi(v)) \quad \forall u, v \in V$$

Согласно Предложению 12.15, из самосопряженности φ следует, что h симметрична. Пусть $q : V \to \mathbb{R}$ - соответствующая h квадратичная форма, $q(v) = h(v, v) = (v, \varphi(v)) \quad \forall v \in V$. Легко видеть, что q - непрерывная функция на V относительно стандартной топологии на V (то есть топологии V как метрического пространства, см. раздел 11.6). Например, при выбранном базисе в V форма q - однородный многочлен второй степени от соответствующих координат.

Пусть

$$S(V) := \{v \in V || v |= 1\}$$

- единичная сфера пространства V. Это - замкнутое (как множество нулей непрерывной функции $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - 1$ где $x_i, i = 1, \ldots, n$ - координаты относительно ортонормированного базиса) и ограниченное, а значит компактное подмножество в $\mathbb{R}^n \cong V$. Согласно известной теореме из анализа, ограничение функции q на $S(V)$ достигает нижней грани своих значений. Пусть

$$\lambda_0 := \min_{v \in S(V)} q(v) \quad \text{и } q(e) = \lambda_0, \quad e \in S(V).$$

Тогда для любого $v \in S(V)$ верно неравенство $q(v) \geq \lambda_0(v, v)$, а значит последнее неравенство выполнено и для любого $v \in V$. (Действительно, для $v = 0$ оно очевидно, а для $v \neq 0 \exists$ единственный $u \in S(V)$ такой, что $v = tu, \ \ t > 0$ и $q(v) = t^2 q(u), \quad (v, v) = t^2(u, u)$).

Имеем

$$q(v) - \lambda_0(v, v) = (v, \varphi(v)) - (v, \lambda_0 v) = (v, \varphi(v) - \lambda_0 v) =$$
$$= (v, (\varphi - \lambda_0 \operatorname{Id}_V)(v)) \geq 0 \quad \forall v \in V$$

Пусть $\psi := \varphi - \lambda_0 \operatorname{Id}_V$, тогда последнее неравенство перепишется в виде $(v, \psi(v)) \geq 0 \forall v \in V$. Кроме того, легко видеть, что для $e \in S(V)$ равенство $q(e) = \lambda_0$ равносильно $(e, \psi(e)) = 0$. Применяя теперь Лемму к самосопряженному преобразованию ψ и вектору e, получаем $\psi(e) = 0$, то есть $\varphi(e) = \lambda_0 e$, значит e - собственный вектор преобразования φ с собственным значением λ_0 (он ненулевой, поскольку принадлежит единичной сфере).

Теперь мы в состоянии доказать основную теорему о самосопряженных преобразованиях.

Теорема

12.18. Для любого самосопряжненного преобразования $\varphi : V \to V$ существует ортонормированный базис в V, состоящий из его собственных векторов.

Proof. □

Индукция по $n = \dim V$. Случай $n = 1$ очевиден. Пусть $n > 1$. Согласно предыдущему предложению, у φ в V есть собственный вектор v; без ограничения общности можно считать, что $|v| = 1$. Подпространство $U := \langle v \rangle \subset V$ является φ-инвариантным, по Следствию 12.13$n - 1$-мерное подпространство $U^{\perp} \subset V$ также φ-инвариантно. Легко проверить, что ограничение $\varphi|_{U^{\perp}}$ является самосопряженным преобразованием $U^{\perp}$. По предположению индукции для $\varphi|_{U\perp}$ в $U^{\perp}$ существует ортонормированный базис из собственных векторов; добавляя к нему вектор v, получаем ортонормированнный базис в V, состоящий из собственных векторов оператора φ.

Таким образом, самосопряженные преобразования евклидова пространства суть в точности такие преобразования, которые диагонализируются в некотором ортонормированном базисе.

Доказанная теорема вместе с доказательством Предложения дают алгоритм поиска собственных векторов и собственных значений самосопряженного оператора. А именно, ассоциируем с таким оператором квадратичную форму, как было сделано в доказательстве Предложения. Тогда наименьшее собственное значение равно минимуму этой квадратичной формы на единичной сфере, и точка сферы, в которой этот минимум достигается, является соответствующим собственным вектором. Далее берем ортогональное дополнение к одномерному подпространству, порожденному данным вектором и ищем минимум квадратичной формы на нем и т.д.

Пример 12.19. Рассмотрим квадратичную форму $q(\vec{x}) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$, заданную в ортонормированном базисе двумерного евклидова пространства. Ее минимум (соотв. максимум) на единичной сфере $x_1^2 + x_2^2 = 1$ достигается в точке, в которой x_1x_2 принимает минимальное (соотв. максимальное) значение при условии $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Легко видеть, что эта точка имеет координаты $\pm(1/\sqrt{2}, -1\sqrt{2})^T$ и минимальное значение q равно $1/2$ (соотв. $\pm(1/\sqrt{2}, 1\sqrt{2})^T$ и максимальное значение q равно $3/2$). Тот же результат мы получим, решая задачу на собственные значения и собственные векторы для оператора, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ (матрицы квадратичной формы и присоединенного к ней самосопряженного оператора совпадают, поскольку базис ортонормированный).

Заметим также, что если для положительно определенной квадратичной формы q ее минимум на единичной сфере равен λ_0 и достигается на векторе $v_0 \in S(V)$, то v_0 - направляющий вектор большой полуоси эллипсоида $q(v) = 1$, которая равна $1/\sqrt{\lambda_0}$. То же для максимума и малой полуоси. Таким образом, в нашем примере большая полуось эллипса $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 1$ равна $\sqrt{2}$ и направлена по вектору $(1, -1)^T$, а малая равна $\sqrt{\frac{2}{3}}$ и ее направление задается вектором $(1, 1)^T$.

Ниже мы еще вернемся к применению самосопряженных операторов к теории квадратичных форм в евклидовом пространстве.

Следствие

12.20. Для любой симметричной матрицы $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ существует ортогональная матрица $C \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ такая, что $C^TAC = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. В частности, все корни характеристического многочлена вещественной симметричной матрицы вещественны.

Proof. □

Рассмотрим n-мерное евклидово пространство V, фиксируем в нем ортонормированный базис и определим линейное преобразование $\varphi : V \to V$ как такое преобразование, которое имеет матрицу A в выбранном базисе. Из симметричности A следует, что φ самосопряжено. По доказанной теореме для φ

существует ортонормированный базис из собственных векторов, в этом базисе матрица φ диагональна (на главной диагонали стоят его собственные значения). Если C - матрица перехода от исходного ортонормированного базиса к базису из собственных векторов, то она ортогональна и $C^{-1}AC = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Для завершения доказательства осталось лишь вспомнить определение ортогональной матрицы $C^{-1} = C^T$.

Предложение

12.21. Собственные подпространства V_λ, V_μ самосопряжженного преобразования $\varphi : V \to V$, отвечающие разным собственным значениям $\lambda \neq \mu$, ортогональны: $V_\lambda \perp V_\mu$.

Proof. □

Пусть $u \in V_\lambda, v \in V_\mu$. Тогда

$$\lambda(u, v) = (\varphi(u), v) = (u, \varphi(v)) = \mu(u, v)$$

то есть $(\lambda - \mu)(u, v) = 0$. Поскольку $\lambda - \mu \neq 0$, то $(u, v) = 0$.
Таким образом, для самосопряженного преобразования $\varphi : V \to V$ существует разложение $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_s}$ пространства V в ортогональную прямую сумму собственных подпространств (единственное при условии $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_s$), причем ограничение φ на V_{λ_i} действует как скалярный оператор умножения на λ_i: для $v = v_1 + v_2 + \ldots + v_s$ с $v_i \in V_{\lambda_i}$

$$\varphi(v) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_s v_s$$

Задача

12.22. a) Выясните, может ли матрица являться матрицей самосопряженного оператора в евклидовом пространстве в некотором, не обязательно ортонормированном, базисе, если

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad 2)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad 3)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) В случае положительного ответа предбявите (хотя бы одно) скалярное произведение, относительно которого оператор самосопряжен.

Решение. a) Если бы в условии речь шла про ортонормированный базис, то никакая из указанных матриц не могла бы быть матрицей самосопряженного оператора, поскольку в этом случае она должна быть симметричной. Однако в условии речь идет про произвольный базис. Согласно доказанной выше теореме, оператор $f : V \to V$ на евклидовом пространстве V самосопряжен $\Leftrightarrow$ он диагонализируется в ортонормированном базисе (состоящем из собственных векторов) и имеет вещественный спектр. То есть если оператор самосопряжен, то его матрица имеет вещественный спектр и диагонализируема (существует базис пространства из ее собственных векторов).

В случае 1) характеристический многочлен

$$\chi_A(t) = t^2 - (\operatorname{tr} A)t + \det A = t^2 - 2t + 2$$

имеет отрицательный дискриминант, поэтому собственные значения оператора с этой матрицей не являются вещественными.

В случае 2) характеристический многочлен

$$\chi_A(t) = t^2 - (\operatorname{tr} A)t + \det A = t^2 - 6t + 9 = (t - 3)^2$$

имеет кратный корень; поэтому не выполнено достаточное условие диагонализируемости (что спектр оператора прост), и простое вычисление показывает, что размерность собственного подпространства равна 1, значит, не существует базиса двумерного пространства V, состоящего из собственных векторов, следовательно оператор не диагонализируем.

В случае 3) характеристический многочлен

$$\chi_A(t) = t^2 - (\operatorname{tr} A)t + \det A = t^2 - t - 2 = (t+1)(t-2)$$

имеет два различных вещественных корня, следовательно, он диагонализируем и имеет вещественный спектр. Таким образом, матрица п. 3) может быть матрицей самосопряженного оператора.
b) Чтобы найти скалярное произведение, относительно которого матрица A из п. 3) является матрицей самосопряженного оператора, найдем некоторый базис из собственных векторов и объявим его ортонормированным (ясно, что этим скалярное произведение будет однозначно определено). Например, в качестве такого базиса можно взять $\{\mathbf{v}\} := \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, где $\mathbf{v}_1 = (1,-1)^T, \mathbf{v}_2 = (1,2)^T$.

Для лучшего понимания полезно провести независимую проверку ответа пункта b). По определению, матрица Грама полученного скалярного произведения в базисе $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ есть единичная матрица E. Матрица перехода $C := C_{\{\mathrm{e}\}\to\{\mathrm{v}\}}$ от стандартного базиса $\{\mathbf{e}\} := \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}, \mathbf{e}_1 = (1,0)^T, \mathbf{e}_2 = (0,1)^T$ (относительно которого задана исходная матрица A) к базису $\{\mathbf{v}\}$ есть $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Таким образом, матрица Грама G относительно стандартного базиса $\{\mathbf{e}\}$ есть

$$G = \left(C^{-1}\right)^T C^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Простое вычисление теперь показывает, что матричное равенство $A^T G = GA$ действительно выполняется, а оно как раз и говорит о том, что матрица A является матрицей самосопряженного оператора относительно скалярного произведения с матрицей Грама G.

Напомним (см. Пример 8.5), что проекторами называются операторы φ, удовлетворяющие тождеству $\varphi^2 = \varphi$.

Задача

12.23. Опишите проекторы на евклидовом пространстве, которые являются самосопряэженными преобразованиями.

Решение. В Примере 8.5 было показано, что всякий проектор, то есть оператор $\varphi : V \to V$, удовлетворяющий соотношению $\varphi^2 = \varphi$, является оператором проектирования на подпространство $U := \operatorname{Im}\varphi$ параллельно подпространству $W := \operatorname{Ker}\varphi$. Одновременно подпространства U и W (в случае, если они ненулевые) являются собственными подпространствами оператора φ с собственными значениями соответственно 1 и 0. Так как собственные подпространства самосопряженного оператора, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны, то необходимым условием самосопряженности проектора является ортогональность U и W, откуда (ввиду $V = U \oplus W$) $W = U^{\perp}$. В этом случае проектор есть оператор ортогонального проектирования на подпространство $U \subset V$. Это условие является также достаточным: действительно, если $v, v' \in V$ и φ - ортогональный проектор, то $(\varphi(v), v') = (\varphi(v), \varphi(v')) = (v, \varphi(v'))$.

Задача

12.24. Матрица

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & ? \\ -2 & 2 & ? \\ -1 & -2 & ? \end{pmatrix}$$

с неизвестным третьим столбцом является матрицей ортогонального проектора на двумерное подпространство в ортонормированном базисе. Восстановите неизвестный столбец.

Пусть $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_s$ - разложение евклидова пространства V в ортогональную прямую сумму своих подпространств. По нему строится система ортогональных (=самосопряженных в силу Задачи 12.23) проекторов $P_1, \ldots, P_s : V \to V, \operatorname{Im} P_i = V_i, 1 \leq$

$i \leq s$. Читатель легко убедится, что такая система проекторов обладает следующими свойствами:

$$P_i^2 = P_i, P_i^* = P_i, P_i P_j = 0 \text{ при } i \neq j \text{ и } \sum_{i=1}^{s} P_i = \mathrm{Id}_V . \tag{105}$$

Обратно, если дана система проекторов $P_1, \ldots, P_s$ на пространстве V, обладающая свойствами (105), то по ней строится разложение пространства V в ортогональную прямую сумму подпространств $V_i := \operatorname{Im} P_i$. В самом деле, применяя последнее из условий (105) к произвольному вектору из V, получаем $V = V_1 + \ldots + V_s$. Проверим, что последняя сумма прямая. Последовательно применяя к $P_1(v_1) + \ldots + P_s(v_s) = 0$ операторы $P_j, 1 \leq j \leq s$ и используя первое и третье равенство из (105), получаем $P_j(v_j) = 0, 1 \leq j \leq s$,
то есть подпространства $V_1, \ldots, V_s$ линейно независимы. Наконец, с учетом ортогональности проекторов третье условие из (105) обеспечивает взаимную ортогональность подпространств $V_1, \ldots, V_s$.

Систему $P_1, \ldots, P_s$ проекторов на V, обладающую свойствами (105), назовем полной системой ортогоналъных проекторов на V.

Пусть теперь $\varphi : V \to V$ - самосопряженный оператор, $V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_s}$ - разложение пространства V в ортогональную прямую сумму его собственных подпространств и $P_1, \ldots, P_s$ - отвечающая этому разложению полная система проекторов на V. Как легко проверит читатель, имеет место равенство операторов

$$\varphi = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i P_i \tag{106}$$

называемое спектральным разложением самосопряженного оператора (ср. Замечание 8.51).

Предложение

12.25. Для самосопряэженного оператора φ спектральное разложение единственно.

Proof. □

Пусть $\psi := \sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i P_i \, (\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j)$ - оператор, отвечающий некоторой полной системе ортогональных проекторов $P_1, \ldots, P_s$ на V. Он самосопряженный, так как является линейной комбинацией самосопряженных проекторов (а самосопряженные операторы, как мы знаем, образуют вещественное линейное подпространство в пространстве всех операторов). Тогда для $1 \leq j \leq s \operatorname{Im} P_j \subseteq V_{\lambda_j}$, где V_{λ_j} - собственное подпространство оператора ψ, отвечающее собственному значению λ_j. В самом деле, $\forall v \in V \left(\sum\limits_{i=1}^{s} \lambda_i P_i\right)(P_j(v)) = \lambda_j P_j^2(v) = \lambda_j P_j(v)$. С другой стороны, так как $P_1, \ldots, P_s$ - полная система проекторов, то $V = \operatorname{Im} P_1 \oplus \ldots \oplus \operatorname{Im} P_s$. Значит на самом деле $\operatorname{Im} P_i = V_{\lambda_i}, 1 \leq i \leq s$. То есть любое спектральное разложение самосопряженного оператора является линейной комбинацией ортогональных проекторов на его собственные подпространства с коэффициентами, равными соответствующим собственным значениям, и значит однозначно строится по самосопряженному оператору.

Заметим, что, более общо, спектральное разложение единственно для произвольного диагонализируемого оператора (читатель может доказать это самостоятельно).

Задача

12.26. Пусть V - евклидово пространство из Примера 11.5. Пусть $\tau : V \to V, \tau(X) = X^T$ - линейный оператор на V, сопоставляющий произвольной матрице ее транспонированную. Покажите, что τ самосопряжен. Выведите из этого результат Задачи 11.7.

Решение. Самосопряженность τ следует из выкладки:

$$(\tau(X), Y) = \operatorname{tr}\left(\tau(X)^T Y\right) = \operatorname{tr}(XY) = \operatorname{tr}(YX) = \operatorname{tr}\left(X^T Y^T\right) = (X, \tau(Y))$$

Заметим (см. Пример 8.29), что подпространства симметричных (кососимметричных) матриц - в точности собственные подпространства оператора τ, отвечающие собственному значению 1 (соответственно -1). Теперь требуемый результат вытекает из предыдущего Предложения.

Задача

12.27. Докажите, что два самосопряэненных преобразования $\varphi, \psi : V \to V$ коммутируют (то есть $\varphi\psi = \psi\varphi$) тогда и только тогда, когда в V естъ ортонормированный базис, состоящий из их общих собственных векторов (ср. Задачу 8.65).

Решение. Пусть $V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_s}$ - разложение пространства V в ортогональную прямую сумму собственных подпространств оператора φ. Из условия следует, что операторы ψ и $\varphi - \lambda_i \operatorname{Id}_V$ коммутируют, поэтому подпространства $V_{\lambda_i} = \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda_i \operatorname{Id}_V)$ являются ψ инвариантными. Для каждого $i, i = 1, \ldots, s$ ограничение $\psi|_{\lambda_i} : V_{\lambda_i} \to V_{\lambda_i}$ является самосопряженным оператором на V_{λ_i}, поэтому для него в V_{λ_i} существует ортонормированный базис из собственных векторов. Заметим, что эти базисные векторы также будут собственными векторами (с собственным значением λ_i) оператора φ. Поскольку подпространства V_{λ_i} при разных i попарно ортогональны, объединение таких базисов даст ортонормированный базис пространства V, состоящий из одновременных собственных векторов операторов φ и ψ.

В другую сторону утверждение очевидно, поскольку в общем базисе из собственных векторов операторы записываются диагональными матрицами, которые коммутируют.

Note.

12.28. Пусть V - евклидово пространство. Выше мы определили линейный оператор $* : \mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V), \varphi \mapsto \varphi^*$ "взятия сопряженного". Из $** = \operatorname{Id}_{\mathcal{L}(V)}$ следует, что его собственными значениями могут быть только ± 1. Его собственными векторами с собственным значением 1 являются ненулевые самосопряженные операторы $\varphi^* = \varphi$, а собственными векторами с собственным значением -1 - ненулевые кососимметрические операторы $\varphi^* = -\varphi$. Их название оправдывается тем, что это - в точности те операторы, которые имеют кососимметрические матрицы в ортонормированных базисах [58]. Примером такого оператора в ориентированном трехмерном евклидовом пространстве V является оператор взятия векторного произведения с фиксированным вектором: $\varphi_w : V \to V, \varphi_w(v) = [w, v]$. В самом деле, для любых $u, v \in V$ имеем $(\varphi_w(u), v) + (u, \varphi_w(v)) = 0$. Заметим, что любой оператор на евклидовом пространстве V единственным образом представляется в виде суммы самосопряженного и кососимметрического:

$$\varphi = \frac{\varphi + \varphi^*}{2} + \frac{\varphi - \varphi^*}{2}$$

(это аналог представления любой квадратной матрицы в виде суммы симметричной и кососимметричной). Свойства кососимметрических операторов описаны в Задаче 12.72.

3.13.6 12.6 Bilinear and Quadratic Forms in Euclidean Space

Выведем теперь ряд результатов о квадратичных (симметричных билинейных) функциях на евклидовом пространстве, используя их связь с самосопряженными операторами, описанную в Предложении 12.15.

Предложение

12.29. Для любой симметричной билинейной (или квадратичной) формы на евклидовом пространстве существует ортонормированный базис, в котором ее матрица диагональна (для квадратичной формь последнее означает, что в соответствующих координатах она имеет вид $q(\vec{x}) = \sum_k \lambda_k x_k^2\Big)$.

Proof. □

Пусть h - симметричная билинейная форма. Пусть φ_h - ее присоединенный самосопряженный оператор. Так как для φ_h существует ортонормированный базис

из собственных векторов, а в таком базисе, как мы знаем, его матрица A диагональна, то и матрица H билинейной формы h в этом базисе тоже диагональна (точнее, она просто равна A, поскольку базис ортонормированный).

Полезно сопоставить доказанное

Предложение

с Предложением 10.36. Новое

Предложение

сильнее старого в том отношении, что в нем утверждается существование не произвольного, а ортонормированного базиса, в котором квадратичная функция имеет диагональный вид, в то же время слабее старого в том отношении, что ненулевые λ_i не обязательно равны ± 1. Смысл нового Предложения состоит в том, что в евклидовых пространствах существует более тонкое отношение эквивалентности на квадратичных формах, которое сохраняет не только аффинную, но и метрическую информацию (такую как длины полуосей эллипсоида $\{v \in V | q(v) = 1\}$ в случае положительно определенной квадратичной функции q), которую как раз и несут числа λ_i.

Доказанный результат можно использовать для приведения уравнения кривой 2-го порядка к каноническому виду. А именно, пусть

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a_0 = 0 \tag{107}$$

- уравнение кривой второго порядка, заданное в прямоугольной системе координат Ox_1x_2 на плоскости. Напомним, что первый шаг алгоритма приведения к каноническому виду заключается в нахождении новой прямоугольной системы координат $Ox_1'x_2'$, в которой коэффициент перед $x_1'x_2'$ равен 0. Для этого рассмотрим квадратичную форму q, определенную равенством

$$q(\vec{x}) := a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

в ортонормированном базисе евклидовой плоскости. Согласно доказанному выше, для q существует ортонормированный базис, в котором она имеет диагональный вид $q(\vec{x}') = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2$. Эквивалентно, если C является матрицей перехода к такому базису, то она ортогональна и для $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ справедливо равенство $C^TAC = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. Матрица C определяет в плоскости замену системы координат $\vec{x} = C\vec{x}'$ такую, что в новой системе уравнение (107) принимает вид

$$\lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + 2a_1'x_1' + 2a_2'x_2' + a_0' = 0$$

Далее, выделяя полные квадраты, находим параллельный перенос, приводящий уравнение кривой к (почти) каноническому виду. Этот же алгоритм работает и в случае уравнений поверхностей 2-го порядка.

[0]58Заметим, что самосопряженные операторы часто также называются симметрическими.

Предложение

12.30. Пусть V - векторное пространство над $\mathbb{R}, g, h$ - две билинейные симметричные формы на V, причем g положительно определена. Тогда в V существует базис, в котором матриц, Грама первой формы $G = E$, а матриц, H второй формы h диагональна.

Proof. □

Так как g положительно определена, то (V, g) - евклидово пространство. Пусть φ_h - самосопряженный оператор в этом евклидовом пространстве, присоединенный к h (обратим внимание читателя, что сопоставление $h \mapsto \varphi_h$ зависит и от g). Тогда для построенного нами самосопряженного оператора φ_h существует ортонормированный базис из собственных векторов. В этом базисе мы имеем $G = E, A = H$ и A диагональна (с собственными значениями φ_h на главной диагонали).

Заметим, что случай, когда в условии предыдущего Предложения g отрицательно определена, сводится к рассмотренному заменой $g' = -g$.

Переформулируем полученный результат в матричном виде.

Следствие

12.31. Для любых двух вещественных симметричных матриц G и H одинакового порядка n, где G положстельно определена, существует невырожденная матрица C того же порядка такая, что $C^T G C = E, C^T H C = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Изложим теперь алгоритм приведения пары форм к диагональному виду. Пусть в некотором базисе пространства V форма g имеет матрицу G, а форма h - матрицу H, тогда матрица оператора $\varphi = \varphi_h$ есть $A = A_\varphi = G^{-1} H$. Имеем

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda E) &= \det\left(G^{-1}H - \lambda E\right) = \det\left(G^{-1}H - \lambda G^{-1}G\right) = \\ &= \det\left(G^{-1}(H - \lambda G)\right) = \det\left(G^{-1}\right)\det(H - \lambda G)\end{aligned}$$

Таким образом, собственные значения φ совпадают с корнями "обобщенного характеристического уравнения" $\det(H - \lambda G) = 0$ (так как A - матрица самосопряженного оператора, то все они вещественны). Пусть λ_k - некоторый корень. Тогда соответствующие собственные векторы находятся как (ненулевые) решения системы линейных однородных уравнений $(A - \lambda_k E)\vec{v} = \overrightarrow{0}$ (здесь $\vec{v}$ - неизвестный столбец координат собственного вектора $\mathbf{v}$). Данная система эквивалентна системе $(H - \lambda_k G)\vec{v} = \overrightarrow{0}$. Заметим, что собственные векторы, отвечающие разным собственным значениям, автоматически будут ортогональны относительно g. В случае кратного собственного значения λ_k (например, для положительно определенной формы этот случай отвечает эллипсоиду вращения) базисные векторы из соответствующего собственного подпространства нужно ортогонализовать отдельно (например, с помощью алгоритма Грама-Шмидта) относительно матрицы Грама G. Далее полученный ортогональный базис, опять же используя матрицу G, нужно нормировать. В полученном ортонормированном относительно формы g базисе матрица Грама формы g будет единичной E, а матрица h - диагональной $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Note.

12.32. Приведем пример пары квадратичных форм, которые не приводятся одновременно к диагональному виду. Ясно, что такой пример нужно искать среди форм, ни одна из которых не является знакоопределенной.

Рассмотрим квадратичные формы в двумерном пространстве, имеющие в некотором базисе матрицы

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Пусть $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ - матрица перехода к новому базису. Тогда в нем квадратичные формы будут иметь матрицы

$$S^T K S = \begin{pmatrix} a^2 - c^2 & ab - cd \\ ab - cd & b^2 - d^2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad S^T H S = \begin{pmatrix} 2ac & ad + bc \\ ad + bc & 2bd \end{pmatrix}$$

Если они обе диагональны, то элементы матрицы перехода удовлетворяют системе

$$\begin{cases} ab - cd = 0 \\ ad + bc = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Тогда $b(1) + d(2) = a\,(b^2 + d^2) = 0$, а также $d(1) - b(2) = c\,(b^2 + d^2) = 0$. В то же время из обратимости S следует, что $b^2 + d^2 \neq 0$, значит, $a = c = 0$ - противоречие.

Note.

12.33. Отметим два применения результатов данного параграфа: во-первых, к теории малых колебаний [4, 5]; во-вторых, при изучении дифференциальной геометрии поверхностей в $\mathbb{R}^3$ (определение главных кривизн и главных направлений), см. например [20].

3.13.7 12.7 Orthogonal Transformations

Пусть V - евклидово пространство, а $\varphi : V \to V$ - его линейное преобразование.

Определение

12.34. Преобразование φ называется ортогональным, если оно сохраняет скалярное произведение, то есть

$$\forall u, v \in V \quad (\varphi(u), \varphi(v)) = (u, v) \tag{108}$$

Вспоминая определение изометрии евклидовых пространств мы видим, что ортогональное преобразование - то же что изометрия евклидова пространства с самим собой.

Так как длины векторов и углы между векторами выражаются через скалярные произведения, то ортогональные преобразования их тоже сохраняют.

Note.

12.35. Так как изометрия автоматически линейна (см. Задачу 11.30), условие линейности в определении ортогонального преобразования можно опустить.

Перепишем соотношение (108) в матричном виде. Выберем произвольный базис в V, пусть G - его матрица Грама, и пусть φ имеет в нем матрицу A. Тогда легко видеть, что (108) равносильно матричному соотношению

$$A^T G A = G \tag{109}$$

В частности, если базис ортонормированный, то ортогональность преобразования равносильна соотношению $A^T A = E$, то есть ортогональности его матрицы. Таким образом, оператор ортогональный тогда и только тогда, когда в некотором (а значит любом) ортонормированном базисе он имеет ортогональную матрицу. В частности, любой такой оператор обратим и его определитель равен ± 1.

Из (108) легко следует, что ортогональность φ равносильна соотношению $\varphi^*\varphi = \mathrm{Id}_V$, то есть $\varphi^* = \varphi^{-1}$. Это еще раз показывает, что любое ортогональное преобразование обратимо.

Предложение

12.36. Ортогональные преобразования евклидова пространства V образуют группу относительно операции композиции.

Эта группа обозначается $\mathrm{O}(V)$ и называется ортогональной группой пространства V. Она является подгруппой группы $\mathrm{GL}(V)$ всех обратимых (= невырожденных) преобразований пространства V.

Proof. □

Достаточно проверить непустоту множества ортогональных преобразований и его замкнутость относительно композиции и взятия обратного. Легко видеть, что тождественное преобразование Id_V ортогонально. Если $\varphi, \psi \in \mathrm{O}(V)$, то

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^* = \varphi^{-1} \circ \psi^{-1} = (\psi \circ \varphi)^{-1}$$

то есть $\psi \circ \varphi \in \mathrm{O}(V)$.
Пусть теперь $\varphi \in \mathrm{O}(V)$, проверим что и $\varphi^{-1} \in \mathrm{O}(V)$. Для этого докажем что для любого обратимого преобразования φ справедливо $\left(\varphi^{-1}\right)^* = (\varphi^*)^{-1}$. Действительно,

$$\mathrm{Id}_V = (\mathrm{Id}_V)^* = \left(\varphi\varphi^{-1}\right)^* = \left(\varphi^{-1}\right)^* \varphi^*$$

откуда и следует требуемое. Тогда если φ ортогонален, то для $\psi := \varphi^{-1}$ имеем

$$\psi^* = \left(\varphi^{-1}\right)^* = (\varphi^*)^{-1} = \left(\varphi^{-1}\right)^{-1} = \psi^{-1}$$

Ортогональные преобразования пространства V с определителем 1 образуют подгруппу группы $\mathrm{O}(V)$, обозначаемую $\mathrm{SO}(V)$ и называемую специальной ортогональной группой пространства V. Она состоит из поворотов.

Выбор ортонормированного базиса в V определяет изоморфизм группы $\mathrm{O}(V)$ с группой $\mathrm{O}(n)$ ортогональных матриц порядка n (соответственно группы $\mathrm{SO}(V)$ с группой $\mathrm{SO}(n)$ ортогональных матриц порядка n с определителем 1).

В отличие от самосопряженных преобразований, ортогональные не обязательно диагонализируемы. Это связано с тем, что корни их характеристического многочлена не обязательно вещественны (посмотрите, например, на поворот на угол $\pi/2$ в евклидовой плоскости). Однако если они вещественны, то равны ± 1.

Предложение

12.37. Собственные значения ортогонального преобразования равны ± 1.

Proof. □

Пусть ортогональное преобразование φ имеет собственное значение $\lambda \in \mathbb{R}$ и $v \in V$ - соответствующий собственный вектор. Имеем

$$\lambda^2(v, v) = (\varphi(v), \varphi(v)) = (v, v)$$

Так как $(v, v) \neq 0$, то $\lambda^2 = 1$.
Например, направляющий вектор оси поворота φ в трехмерном пространстве - собственный вектор φ с собственным значением 1.

Можно доказать (см. параграф 12.9 ниже) что корни характеристического многочлена ортогонального преобразования лежат на единичной окружности в комплексной плоскости (причем из вещественности коэффициентов характеристического многочлена следует что вместе с каждым комплексным корнем λ комплексно сопряженное к нему число $\bar{\lambda}$ также будет корнем). Поэтому если они вещественны, то обязаны быть равными ± 1.

Предложение

12.38. Если $U \subset V$ - инвариантное подпространство для ортогоналъного преобразования $\varphi : V \to V$, то его ортогональное дополнение $U^{\perp} \subset V$ такжже φ инвариантно.

Proof. □

Заметим, что из ортогональности φ следует ортогональность ограничения $\varphi|_U$, которое поэтому биективно (как преобразование U). То есть для любого $u \in U$ существует единственный $u' \in U$ такой что $\varphi(u') = u$.

Возьмем теперь произвольный $v \in U^{\perp}$, тогда

$$\forall u \in U \quad (u, \varphi(v)) = (\varphi(u'), \varphi(v)) = (u', v) = 0$$

откуда $\varphi(v) \in U^{\perp}$.

Например, для поворота вокруг некоторой оси в трехмерном пространстве ортогональное дополнение к этой оси инвариантно.

Теорема

12.39. Пусть V - евклидово пространство, $\dim V = 3$. Пусть $\varphi : V \to V$ - ортогональное преобразование. Тогда в V найдется такой ортонормированный базис, в котором матрица φ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \tag{110}$$

причем элемент, стоящий в правом нижнем углу матрицы A, равен $\det \varphi$.

Proof. □

Во-первых докажем, что у φ есть собственный вектор w с собственным значением $\det \varphi$. Это равносильно тому, что $\det \varphi$ является корнем характеристического многочлена φ. Данный многочлен $\chi_{\varphi}(t) \in \mathbb{R}[t]$ имеет степень 3, и поэтому у него есть вещественный корень, причем равный ± 1 (поскольку это - собственное значение ортогонального оператора). Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ - все (в том числе комплексные) корни многочлена $\chi_{\varphi}(t)$, причем $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. Тогда $\det \varphi = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$. Возможно два варианта. 1) Не все корни $\chi_{\varphi}(t)$ вещественны, и тогда $\lambda_3 = \bar{\lambda}_2$, поэтому $\det \varphi = \lambda_1 |\lambda_2|^2$, а так как $|\lambda_2|^2 > 0$, то, сравнивая модули левой и правой частей в предыдущем равенстве, получаем $|\lambda_2|^2 = 1$, и тогда $\det \varphi = \lambda_1$.2) Все корни $\chi_{\varphi}(t)$ вещественны, и значит являются собственными значениями φ, которые как мы знаем равны ± 1. Из этого легко следует требуемое.

Таким образом, пусть w - нормированный собственный вектор φ с собственным значением $\det \varphi$. Тогда согласно предыдущему Предложению 2 -мерное подпространство $U := \langle w \rangle^{\perp} \subset V$ является φ-инвариантным, и ограничение $\varphi|_U$ на него является ортогональным преобразованием U с определителем 1. Мы знаем, что такое преобразование является поворотом в U на некоторый угол α и в произвольном ортонормированном базисе $\{u, v\}$ в U имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Таким образом, в ортонормированном базисе $\{u, v, w\}$ пространства V оператор φ имеет матрицу требуемого вида.

Следствие

12.40. Всякое сохраняющее ориентачию ортогональное преобразование трехмерного евклидова пространства является поворотом вокруг некоторой оси.

Приведем алгоритм решения задачи о нахождении канонического вида (110) и базиса ортогональной матрицы A порядка 3. Читатель должен обосновать каждый его шаг с использованием изложенной теории. Мы считаем, что матрица A является матрицей ортогонального оператора φ в некотором ортонормированном базисе трехмерного евклидова пространства V.

Во-первых, посчитаем $\varepsilon := \det A$. Это дает нам элемент в правом нижнем углу в (110). Из инвариантности следа матрицы оператора получаем $\operatorname{tr} A = \varepsilon + 2\cos\alpha$, откуда $\cos\alpha = \frac{1}{2}(\operatorname{tr} A - \varepsilon)$. В качестве $\sin\alpha$ можно выбрать любое значение, удовлетворяющее основному тригонометрическому тождеству $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. Далее находим собственное подпространство V_ε с собственным значением ε.

Заметим, что если $\dim V_\varepsilon > 1$, то наш оператор диагонализируем в ортонормированном базисе, поэтому соответствующий оператор φ не только ортогонален, но и самосопряжен (и значит исходная матрица A не только ортогональна, но и симметрична). Это отвечает случаю, когда $\alpha = 0$ или π.

Пусть w - нормированный собственный вектор с собственным значением ε. Тогда ортогональное дополнение $\langle w\rangle^\perp$ двумерно и φ-инвариантно, причем ограничение φ на него является собственным (сохраняющим ориентацию) ортогональным оператором, значит имеет в ортонормированном базисе в $\langle w\rangle^\perp$ матрицу поворота на угол α или $-\alpha$, в зависимости
от выбранного порядка базисных векторов. Пусть $\{u, v\}$ - некоторый ортонормированный базис в $\langle w\rangle^\perp$, тогда $\{u, v, w\}$ - ортонормированный базис в V, в котором φ имеет матрицу вида (110), но, возможно, с противоположными знаками у синусов (ведь когда мы выбирали одно из двух (в общем случае) значений $\sin\alpha$, отвечающих $\cos\alpha$, у нас был произвол в выборе знака), и теперь выбор знака у $\sin\alpha$ нужно согласовать с выбором ориентации базиса в плоскости $\langle w\rangle^\perp$($\{u, v\}$ или $\{v, u\}$). Для этого нужно проверить, будет ли Au (здесь и далее векторы u, v, w отождествляются с соответствующими столбцами) равно $\cos\alpha u + \sin\alpha v$, или же $\cos\alpha u - \sin\alpha v$, во втором случае нужно вместо $\{u, v, w\}$ взять базис $\{v, u, w\}$ (или изменить знак у синуса).

Задача

12.41. Опишите преобразования евклидова пространства, которые являются одновременно самосопряженными и ортогональными.

Решение. Пусть $\varphi : V \to V$ - такое преобразование. Так как φ является самосопряженным, то V является ортогональной прямой суммой его собственных подпространств. Так как φ является ортогональным, то возможны только собственные значения ± 1. Таким образом, (за исключением тривиальных случаев $\varphi = \pm \mathrm{Id}_V$) $V = V_1 \oplus V_{-1}$, причем $V_{-1} = (V_1)^\perp$. Если $v = v^+ + v^-$—соответствующее разложение вектора $v \in V$, то $\varphi(v) = v^+ - v^-$, откуда следует, что φ является ортогональным отражением относительно подпространства V_1.

Другой способ решения данной задачи можно получить с помощью Примеров 8.7 и 8.29. Во-первых, заметим, что любые два из условий 1) $\varphi^* = \varphi$, 2) $\varphi^*\varphi = \mathrm{Id}_V$, 3) $\varphi^2 = \mathrm{Id}_V$ влекут третье. Таким образом, оператор, являющийся одновременно самосопряженным и ортогональным, удовлетворяет тождеству $\varphi^2 = \mathrm{Id}_V$, а значит, согласно Примеру 8.7, является отражением относительно подпространства V^+параллельно V^-. Но так как φ самосопряжен, то $V^+ = (V^-)^\perp$, то есть φ - ортогональное отражение.

Пример такого оператора был приведен, например, в Задаче 12.26.

Задача

12.42. Докажите, что любое ортогональное преобразование n-мерного евклидова пространства V представляется в виде композиции не более чем n симметрий относительно гиперплоскостей (напомним, что гиперплоскостью называется n - 1 -мерное подпространство). (Указание: попробуйте рассуждать по аналогии с доказательством Предложения 4.67, заменяя транспозиции на симметрии относительно гиперплоскостей).

Решение. Во-первых, заметим, что для любых двух векторов $u, v \in V$ таких, что $u \neq v, |u| = |v|$, существует единственная гиперплоскость H в V такая, что $u = \sigma_H(v)$, где $\sigma_H : V \to V$ - симметрия относительно гиперплоскости H.

Теперь используем индукцию по размерности V. Для $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть $n \geq 2$ и $\varphi : V \to V$ - произвольное ортогональное преобразование. Тождественное преобразование является композицией пустого множества симметрий, поэтому можно считать, что $\varphi \neq \mathrm{Id}_V$. Пусть $\varphi(u) = v$, где $u \neq v$. Используя сказанное в предыдущем абзаце,
найдем симметрию σ_H такую, что $\sigma_H(v) = u$, то есть $\sigma_H\varphi(u) = u$. Тогда ортогональное преобразование $\sigma_H\varphi$ тождественно на подпространстве $\langle u \rangle$ и имеет $n-1$-мерное инвариантное подпространство $\langle u \rangle^\perp \subset V$. По предположению индукции $\sigma_H\varphi|_{\langle u \rangle}{}^\perp$ представляется в виде композиции $\sigma_{H'_k} \dots \sigma_{H'_1}$ симметрий относительно гиперплоскостей $H'_1, \dots, H'_k$ в $\langle u \rangle^\perp$, где $0 \leq k \leq n-1$. Тогда φ представляется в виде композиции $\sigma_H\sigma_{H_k} \dots \sigma_{H_1}$ не более чем n симметрий относительно гиперплоскостей $H_1, \dots, H_k, H$, где $H_i = \langle H'_i, u \rangle, 1 \leq i \leq k$.

В качестве следствия из предыдущей задачи получаем такое утверждение: ортогоналъная группа порождается симметриями относительно гиперплоскостей.

Задача

12.43. Пусть V - евклидова плоскость, и оператор $\varphi : V \to V$ имеет матричу $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$ в некотором ортонормированном базисе V. Без въчислений на бумаге укажите его диагональный вид и геометрчческий смысл.

Задача

12.44. [59] Выше мы видели определения самосопряжненных $\varphi^* = \varphi$ и кососимметричных $\varphi^* = -\varphi$ операторов, а также ортогональных операторов $\varphi^* = \varphi^{-1}$. Естественно спросить, что можно сказать про "кософртогональные" операторы, задаваемые равенством $\varphi^* = -\varphi^{-1}$?

Note.

12.45. В современной физике большую роль играют так называемые псевдоевклидовы пространства, которые состоят из (конечномерного) вещественного векторного пространства и заданной на нем невырожденной квадратичной формы (которая, в отличие от евклидового случая, не предполагается, вообще говоря, положительно определенной). Примером такого пространства является пространство Минковского, которое является четырехмерным вещественным пространством с квадратичной формой сигнатуры $(3, 1)$. Для такой формы существует базис, в котором она имеет вид $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$. Группа, сохраняющая данную форму, называется группой Лоренца. В ортонормированном базисе она состоит из матриц A, удовлетворяющих соотношению (109), где $G = \mathrm{diag}(1, 1, 1, -1)$.

3.13.8 12.8 Polar and Singular Decompositions

Связь между самосопряженными операторами и билинейными симметрическими (квадратичными) функциями, описанная в Предложении 12.15, позволяет перенести на самосопряженные операторы такие понятия, как положительная (полу)определенность и т.д.

Определение

12.46. Самосопряженный оператор $\varphi : V \to V$ на евклидовом пространстве V называется положительным (соответственно неотрицательным), если соответствующая ему квадратичная функция q_φ положительно (соответственно неотрицательно) определена.

Предложение

12.47. Пусть $\varphi : V \to V$ - произвольный (не обязательно самосопряженный) линейный оператор на евклидовом пространстве V. Тогда оператор $\varphi^*\varphi$ неотрицателен, причем он положителен тогда и толъко тогда, когда φ невырожден.

Proof. □

Во-первых проверим, что $\varphi^*\varphi$ самосопряжен. Действительно, $(\varphi^*\varphi)^* = \varphi^*\varphi^{**} = \varphi^*\varphi$. Далее, для любого $v \in V$

$$q_\varphi(v) = (v, \varphi^*\varphi(v)) = (\varphi(v), \varphi(v)) = |\varphi(v)|^2 \geq 0$$

что по определению означает, что $\varphi^*\varphi$ неотрицателен. Заметим, что невырожденность φ равносильна условию $|\varphi(v)|^2 > 0 \forall v \neq 0$, что в свою очередь равносильно положительности $\varphi^*\varphi$.

Предложение

12.48. Самосопряженный оператор $\varphi : V \to V$ неотрииателен (соответственно положителен) тогда и только тогда, когда все его собственные значения неотрицательны (положительныи).

Proof. □

Для самосопряженного φ существует ортонормированный базис, в котором его матрица $A_\varphi = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Тогда матрица H соответствующей квадратичной функции q_φ равна A_φ, а сама квадратичная функция в соответствующих координатах имеет вид $q_\varphi(v) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i v_i^2$. Ясно, что она положительно (неотрицательно) определена тогда и только тогда, когда все $\lambda_i > 0$ (соответственно $\lambda_i \geq 0$).

Задача

12.49. Докажите, что самосопряженный оператор φ на евклидовом пространстве положителен тогда и только тогда, когда его матрица A в некотором (а значит и любом) ортонормированном базисе положительно определена.

Определение

12.50. Пусть φ - линейный оператор на евклидовом пространстве V. Его полярным разложением называется представление вида $\varphi = \psi \circ \vartheta$, где ψ - неотрицательный самосопряженный, а ϑ - ортогональный операторы на V.

Полярное разложение можно рассматривать как обобщение представления комплексного числа z в показательной форме $re^{i\alpha}$, где $r, \alpha \in \mathbb{R}$ и $r \geq 0$ (особенно эта аналогия очевидна в случае операторов в унитарных пространствах).

Заметим, что имея левое полярное разложение $\varphi = \psi \circ \vartheta$, можно получить правое полярное разложение вида $\varphi = \vartheta \circ \psi'$, где $\psi' = \vartheta^{-1}\psi\vartheta$. В самом деле, последний оператор самосопряжен, поскольку

[059] Сообщена автору И.И. Богдановым.

$$\left(\vartheta^{-1}\psi\vartheta\right)^* = \vartheta^*\psi^*\left(\vartheta^{-1}\right)^* = \vartheta^{-1}\psi\vartheta$$

где мы, в частности, использовали свойство 5) операции $*$ из Предложения 12.4. Оператор ψ' также является неотрицательным, что доказывает следующая выкладка:

$$\left(v, \vartheta^{-1}\psi\vartheta(v)\right) = \left[\text{ полагаем } v =: \vartheta^{-1}\left(v'\right)\right] = \left(\vartheta^{-1}\left(v'\right), \vartheta^{-1}\psi\vartheta\vartheta^{-1}\left(v'\right)\right) =$$

$$= \left(\vartheta^{-1}\left(v'\right), \vartheta^{-1}\psi\left(v'\right)\right) = \left(v', \psi\left(v'\right)\right) \geq 0$$

Из курса аналитической геометрии читатель, возможно, помнит теорему о том, что для любого аффинного преобразования плоскости существуют главные направления такая пара взаимно перпендикулярных направлений, которые при аффинном преобразовании снова переходят во взаимно перпендикулярные направления (хотя общее аффинное преобразование не сохраняет углы между произвольными векторами).

Lemma

12.51. Для любого линейного оператора $\varphi : V \to V$ на евклидовом пространстве V существует такой ортонормированный базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$, который под действием φ переходит в ортогональную систему векторов $\{\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\}$ (то есть такую, что $(\varphi(e_i), \varphi(e_j)) = 0$ при $i \neq j$).

Proof. □

В самом деле, возьмем в качестве $\{e_1, \ldots, e_n\}$ произвольный ортонормированный базис из собственных векторов самосопряженного оператора $\varphi^*\varphi$. Если $\lambda_i, 1 \leq i \leq n$ - соответствующие собственные значения, то $(\varphi(e_i), \varphi(e_j)) = (e_i, \varphi^*\varphi(e_j)) = \lambda_j(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$.

Направления векторов базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ называются главными направлениями оператора φ.

Теорема

12.52. Для любого линейного оператора φ на евклидовом пространстве V существует полярное разложение.

Proof. □

Докажем существование левого полярного разложения. Из доказательства Леммы следует, что $|\varphi(e_i)|^2 = \lambda_i$ при $1 \leq i \leq n$. Переупорядочивая элементы базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ можно добиться того, чтобы $\lambda_i > 0$ при $1 \leq i \leq r$ и $\lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n = 0$ (конечно, если φ невырожден, то $r = n$). Произвольным образом дополним ортонормированную систему векторов $f_1 = \frac{\varphi(e_1)}{\sqrt{\lambda_1}}, \ldots, f_r = \frac{\varphi(e_r)}{\sqrt{\lambda_r}}$ до ортонормированного базиса $\{f_1, \ldots, f_n\}$ в V. Пусть $\vartheta : V \to V$ - линейный оператор, переводящий базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в базис $\{f_1, \ldots, f_n\}$. Поскольку оба базиса ортонормированы, оператор ϑ является ортогональным. Теперь рассмотрим оператор $\psi : V \to V$, переводящий базис $\{f_1, \ldots, f_n\}$ в систему векторов $\left\{\sqrt{\lambda_1}f_1, \ldots, \sqrt{\lambda_r}f_r, 0, \ldots, 0\right\}$. Поскольку ψ имеет в ортонормированном базисе диагональную матрицу с неотрицательными элементами на диагонали, он неотрицательный самосопряженный. Посмотрим теперь на композицию $\psi \circ \vartheta$. Это - линейный оператор, действующий на векторы базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ следующим образом:

$$e_i \mapsto \frac{\varphi(e_i)}{\sqrt{\lambda_i}} = f_i \mapsto \sqrt{\lambda_i}f_i = \varphi(e_i) \quad \text{ при } 1 \leq i \leq r,$$

$$e_i \mapsto f_i \mapsto \sqrt{\lambda_i}f_i = 0 = \varphi(e_i) \quad \text{ при } r+1 \leq i \leq n$$

Поскольку операторы φ и $\psi \circ \vartheta$ действуют одинаково на элементы некоторого базиса, они равны.

Кстати, из доказательства Теоремы сразу видно, что в случае вырожденного φ ортогональный оператор ϑ определен неоднозначно. В то же время можно доказать (см. мелкий шрифт ниже), что неотрицательный самосопряженный оператор однозначно определяется по φ (но, вообще говоря, свой для левого и правого полярных разложений), а в случае невырожденного φ ортогональный ϑ тоже определен однозначно (и поэтому совпадает для обоих полярных разложений).

Неотрицательные операторы похожи на неотрицательные действительные числа, в частности, из любого такого оператора можно извлечь единственный арифметический (то есть неотрицательный) квадратный корень.

Предложение

12.53. Для любого неотрицательного оператора $\varphi : V \to V$ существует единственный неотрицательный оператор $\psi : V \to V$ такой, что $\psi^2 = \varphi$.

Proof. □

Пусть $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_s}$ - разложение пространства V в ортогональную прямую сумму собственных подпространств самосопряженного оператора φ. Будем считать, что $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_s$, в этом случае указанная запись единственна. На каждом собственном подпространстве $V_{\lambda_i} \subset V$ оператор φ действует как скалярный оператор умножения на соответствующее собственное значение λ_i. Мы имеем спектральное разложение

$$\varphi = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i P_i \tag{111}$$

где P_i - ортогональный проектор на V_{λ_i} (см. формулу (106)). Так как все $\lambda_i \geq 0$, для каждого собственного значения λ_i существует единственный арифметический квадратный корень $\sqrt{\lambda_i}$ и оператор $\psi := \sum\limits_{i=1}^{s} \sqrt{\lambda_i} P_i$ является неотрицательным самосопряженным, причем $\psi^2 = \varphi$, поскольку $P_i P_j = 0$ при $i \neq j$ и $P_i^2 = P_i$.

Пусть ψ' - еще один неотрицательный самосопряженный оператор такой, что $\psi'^2 = \varphi$, и пусть $\psi' = \sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i P_i'$ - его спектральное разложение. Можно считать, что $0 \leq \mu_1 < \ldots < \mu_r$. Тогда $\psi'^2 = \sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i^2 P_i'$ - еще одно спектральное разложение для φ, причем $0 \leq \mu_1^2 < \ldots < \mu_r^2$. Согласно Предложению 12.25 спектральное разложение данного оператора единственно, поэтому $\sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i^2 P_i'$ совпадает с (111), откуда $P_i = P_i'$ (и следовательно $V_{\mu_i} = V_{\lambda_i}$) , $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ и $r = s$, и значит $\psi' = \psi$.

Следствие

12.54. Неотрицательный самосопряжненный оператор ψ в полярном разложении $\varphi = \psi \circ \vartheta$ определен однозначно.

Proof. □

Имеем

$$\varphi\varphi^* = \psi\vartheta\vartheta^*\psi^* = \psi^2$$

поэтому ψ является арифметическим квадратным корнем из неотрицательного самосопряженного оператора $\varphi\varphi^*$.

Корень из самосопряженного оператора без условия неотрицательности не единственен. Рассмотрим, например, в качестве положительного самосопряженного φ тождественный оператор на евклидовой плоскости V. Мы знаем, что помимо $\pm\,\mathrm{Id}_V$ самосопряженными операторами ψ, удовлетворяющими условию $\psi^2 = \mathrm{Id}_V$, являются всевозможные ортогональные отражения относительно одномерных подпространств. То есть уравнение $X^2 = \mathrm{Id}_V$ имеет континуальное множество решений в пространстве самосопряженных операторов, но только одно из них (а именно сам тождественный оператор) является положительным. То есть неединственность корня в общем случае связана с неединственностью квадратного корня из положительного действительного числа а также с тем, что собственное подпространство размерности больше 1 с положительным собственным собственным значением λ можно расщепить в ортогональную прямую сумму собственных подпространств корня с собственными значениями $\pm\sqrt{\lambda}$.

Задача

12.55. Пусть φ и ω - самосопряжженные операторы, причем φ положительный. Докажите, что оператор $\varphi\omega$ диагонализируем.

Решение. Пусть ψ - положительный квадратный корень из φ. Очевидно, что операторы $\varphi\omega$ и $\psi^{-1}\varphi\omega\psi$ диагонализируемы или не диагонализируемы одновременно. В то же время $\psi^{-1}\varphi\omega\psi = \psi\omega\psi$, а последний оператор, очевидно, самосопряжен.

В случае невырожденного оператора φ ортогональный оператор ϑ в его полярном разложении также определен однозначно. Докажем это, например, для правого полярного разложения.

Предложение

12.56. Для любого невырожденного оператора $\varphi : V \to V$ на евклидовом пространстве V существуют и единственны такие положительный ψ и ортогональный ϑ операторы на V, что $\varphi = \vartheta \circ \psi$.

Proof. □

Из Предложения 12.47 мы знаем, что для невырожденного оператора φ оператор $\varphi^*\varphi$ положительный самосопряженный. Пусть ψ - положительный корень из $\varphi^*\varphi$, который согласно Предложению 12.53 существует и единственен.

Проверим, что оператор $\varphi\psi^{-1}$ ортогонален. Действительно,

$$\left(\varphi\psi^{-1}\right)^* \varphi\psi^{-1} = \left(\psi^*\right)^{-1} \varphi^*\varphi\psi^{-1} = \psi^{-1}\psi^2\psi^{-1} = \mathrm{Id}_V$$

Поэтому мы полагаем $\vartheta := \varphi\psi^{-1}$ и получаем требуемое разложение $\varphi = \vartheta\psi$. Проверим единственность. Если $\varphi = \vartheta\psi$, то $\varphi^*\varphi = \psi\vartheta^*\vartheta\psi = \psi^2$, откуда однозначно восстанавливается положительный самосопряженный ψ. А тогда ортогональный ϑ однозначно задается равенством $\vartheta = \varphi\psi^{-1}$.

Следствие

12.57. Любую невырожденную вещественную матричу A можно единственным образом представить в виде проивведения UB, где B - положстельно определенная симметричная, а U - ортогональная матрицы.

Приведем алгоритм нахождения матриц B и U, входящих в правое полярное разложение $A = UB$ данной невырожденной вещественной матрицы A. Матрицу A можно рассматривать как матрицу невырожденного оператора φ в некотором ортонормированном базисе.

Если уже получено требуемое разложение $A = UB$, то $A^TA = B^TU^TUB = B^2$. Заметим, что матрица A^TA симметричная положительная (это матрица положительного самосопряженного оператора $\varphi^*\varphi$ в ортонормированном базисе), поэтому существует такая ортогональная матрица C, что $\Lambda = C^TA^TAC$ - диагональная матрица $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, причем все $\lambda_i > 0$ (как собственные значения положительного самосопряженного оператора $\varphi^*\varphi$). Поэтому $A^TA = C\Lambda C^T$ и оператор с матрицей $B = C\sqrt{\Lambda}C^T$, где $\sqrt{\Lambda} := \operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right)$, является положительным самосопряженным (поскольку данная матрица симметрична и все ее собственные значения положительны).

Кроме того, $B^2 = A^TA$, поскольку $B^2 = C\sqrt{\Lambda}C^TC\sqrt{\Lambda}C^T = C\Lambda C^T = A^TA$. Значит, оператор с матрицей B является искомым арифметическим квадратным корнем из A^TA. Теперь ортогональная матрица U однозначно находится из соотношения $U = AB^{-1}$.

Заметим, что для левого полярного разложения $A = B'U'$ симметричная матрица B' ищется как арифметический квадратный корень из AA^T.

Посмотрим, какую геометрическую картину дает полярное разложение $\varphi = \vartheta\psi$ для невырожденного линейного оператора φ на евклидовом пространстве. Пусть $\{e_1, \dots, e_n\}$ - ортонормированный базис из собственных векторов положительного самосопряженного оператора ψ, и $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ - соответствующие собственные значения. Пусть $S(V) = \{v \in V || v |= 1\}$ - единичная сфера пространства V. Тогда в координатах относительно базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$ она задается уравнением $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i^2 = 1$. Посмотрим, куда она переходит под действием ψ. Для $v = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i e_i \in S(V)$ получаем $w := \psi(v) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i v_i e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} w_i e_i$, откуда $v_i = \frac{w_i}{\mu_i}$, поэтому $1 = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{w_i^2}{\mu_i^2}$ - уравнение n-мерного эллипсоида с полуосями μ_i. То есть ψ единичную сферу отображает в указанный эллипсоид. Дальнейшее применение ϑ к указанному эллипсоиду как-то его поворачивает и (возможно) отражает, но не меняет его геометрию (длины полуосей).

Вернемся снова к матричной форме полярного разложения $A = UB$. Через D обозначим введенную выше матрицу $\sqrt{\Lambda}$, тогда $B = CDC^T$, где C - ортогональная матрица. Подставляя это выражение в полярное разложение получим, что для невырожденной вещественной матрицы A существуют такие ортогональные матрицы U_1, U_2, что $A = U_1DU_2$ где D - диагональная матрица, на диагонали которой стоят арифметические квадратные корни из собственных значений матрицы A^TA. Это так называемое сингулярное разложение матрицы A.

Задача

12.58. Выясните, насколько однозначно сингулярное разложение? (Ответ: матрица D определена однозначно с точностью до перестановки диагональных элементов. При заданной матрице D матрицы U_1 и U_2 определены с точностью до преобразования $U_1 \mapsto U_1U, U_2 \mapsto U^{-1}U_2$, где U - ортогональная матрица, коммутируюшая с D).

3.13.9 12.9 Invariant Subspaces of Small Dimensions over ⟍

В данном разделе мы докажем важное утверждение о том, что у любого линейного оператора на векторном пространстве конечной положительной размерности над полем $\mathbb{R}$ существует одномерное или двумерное инвариантное подпространство. Затем, используя этот результат, мы дадим еще одно доказательство существования собственного вектора у самосопряженного оператора, а также доказательство существования канонического вида ортогонального оператора.

Мы знаем, что любой оператор на пространстве положительной размерности над полем $\mathbb{C}$ имеет собственный вектор. Это выводится из алгебраической замкнутости $\mathbb{C}$: любой многочлен $f(t) \in \mathbb{C}[t]$ положительной степени n имеет корень в $\mathbb{C}$ (а значит раскладывается на линейные множители $f(t) = a_0(t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_n)$).

Для многочленов с вещественными коэффициентами нам известно, что всякий такой многочлен нечетной степени имеет вещественный корень, что приводит к существованию собственного вектора у любого оператора на вещественном пространстве нечетной размерности. Однако многочлен четной степени над $\mathbb{R}$ может не иметь вещественных корней, и у оператора на четномерном вещественном пространстве не обязательно есть собственный вектор. Во всяком случае мы знаем, что вещественный многочлен положительной степени раскладывается на линейные и квадратичные вещественные множители. Это связано с тем, что неприводимые многочлены над $\mathbb{R}$ - не только многочлены первой степени, но также второй степени с отрицательным дискриминантом.

Пусть $f(t) \in \mathbb{R}[t]$ - многочлен второй степени с отрицательным дискриминантом, пусть его старший коэффициент равен 1. Тогда над полем $\mathbb{C}$ он раскладывается на линейные множители: $f(t) = (t-\lambda)(t-\bar{\lambda}) = t^2 - (\lambda+\bar{\lambda})t + |\lambda|^2$. Здесь мы использовали тот факт, что если многочлен $f(t) \in \mathbb{R}[t]$ имеет корень $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, то также его корнем будет и $\bar{\lambda}$ (это легко выводится из свойств комплексного сопряжения).

Когда мы изучали инвариантные подпространства линейных операторов, мы доказали такой результат: характеристический многочлен ограничения оператора на инвариантное подпространство делит характеристический многочлен самого оператора. Нельзя ли это утверждение обратить в том смысле, что делителю характеристического многочлена отвечает инвариантное подпространство? Если бы это можно было сделать, то, поскольку вещественный многочлен положительной степени, не имеющий вещественных корней, обязан делиться над $\mathbb{R}$ на многочлен второй степени, то мы бы доказали существование двумерного инвариантного подпространства. По-существу, мы именно это сейчас и сделаем.

Итак, пусть $\varphi : V \to V$ - линейный оператор, где V - векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, причем $\dim V \geq 2$. Пусть $\chi_\varphi(t) \in \mathbb{R}[t]$ - характеристический многочлен оператора φ и $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ - его невещественный корень, $\chi_\varphi(\lambda) = 0$. Тогда $f(t) = (t-\lambda)(t-\bar{\lambda}) = t^2 + pt + q \in \mathbb{R}[t]$ делит $\chi_\varphi(t)$ в кольце $\mathbb{R}[t]$ (то есть $\chi_\varphi(t) = f(t)g(t)$, где $g(t) \in \mathbb{R}[t]$).

Напомним, что для любого многочлена $p(t) \in \mathbb{R}[t]$ и оператора φ как выше мы имеем линейный оператор $p(\varphi) : V \to V$.

Докажем теперь серию небольших лемм.

Lemma

12.59. Пусть $U := \operatorname{Ker} f(\varphi) \subset V$. Тогда U является φ-инвариантным.

Proof. □

Если два оператора $\varphi, \psi : V \to V$ коммутируют, то ядро одного из них инваринатно относительно другого. Легко проверяется, что для любого многочлена p операторы φ и $p(\varphi)$ коммутируют.

Lemma

12.60. Определенное в предыдущей лемме подпространство U ненулевое.

Proof. □

Пусть $A \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$ - матрица оператора φ в некотором базисе пространства V. Тогда матрицей оператора $f(\varphi)$ в том же базисе будет $f(A)$. Заметим, что $f(A)$ является произведением двух комплексных матриц $A - \lambda E$ и $A - \bar{\lambda}E$. В самом деле,

$$(A-\lambda E)(A-\bar{\lambda}E) = A^2 - (\lambda+\bar{\lambda})A + \lambda\bar{\lambda}E = f(A)$$

Поэтому $\det f(A) = (\det(A-\lambda E))(\det(A-\bar{\lambda}E))$. Но так как $\lambda -$ (комплексный) корень $\chi_\varphi(t)$, то матрица $(A-\lambda E)$ вырождена (то же, конечно, верно и для $(A-\bar{\lambda}E)$). Значит, и матрица $f(A)$ тоже вырождена, поэтому у оператора $f(\varphi)$ ядро U ненулевое.

Lemma

12.61. Подпространство U не содержит собственных векторов оператора φ.

Proof. □

Пусть, напротив, $u \in U$ - собственный вектор φ. Тогда $u \neq 0$ и $\varphi(u) = \mu u$ для некоторого $\mu \in \mathbb{R}$. Тогда

$$0 = f(\varphi)(u) = \left(\varphi^2 + p\varphi + q\,\mathrm{Id}_V\right)u = \left(\mu^2 + p\mu + q\right)u$$

и μ - вещественный корень многочлена $f(t)$ в противоречии с нашим выбором многочлена f.

Lemma

12.62. Пусть $0 \neq u \in U$. Тогда $W := \langle u, \varphi(u)\rangle \subseteq U$ - двумерное φ-инвариантное подпространство.

Proof. □

Заметим, что W содержится в U, так как $\varphi(u) \in U$ в силу φ инвариантности U (см. лемму 12.59). Если $\varphi(u)$ пропорционально (с вещественным коэффициентом) u, то u - собственный вектор φ, чего в силу предыдущей леммы быть не может. Поэтому $\dim W = 2$. Осталось показать, что само $W \varphi$-инвариантно. Для этого, очевидно, достаточно показать, что его базис $\{u, \varphi(u)\}$ при применении φ остается в W. Для u это очевидно, для $\varphi(u)$ это следует из равенства $\varphi^2(u) = -p\varphi(u) - qu$, которое выполнено для любого $u \in U$ в силу определения U.

Заметим, что матрицей $\varphi|_W$ в базисе $\{u, \varphi(u)\}$ пространства W будет $B = \begin{pmatrix} 0 & -q \\ 1 & -p \end{pmatrix}$. Интересно заметить, что $\chi_B(t) = f(t)$. Как это связано с теоремой Гамильтона-Кэли?

Соберем вместе доказанные в леммах результаты.

Предложение

12.63. Пусть V - конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, $\varphi : V \to V$ - линейный оператор, λ - комплексный (невещественный) коренъ $\chi_\varphi(t)$. Пусть $f(t) = (t-\lambda)(t-\bar{\lambda}) \in \mathbb{R}[t]$ и $U = \operatorname{Ker} f(\varphi)$. Тогда U - ненулевое φ-инвариантное подпространство в V, и произвольный ненулевой вектор $u \in U$ содержится в единственном двумерном φ-инвариантном подпространстве $W \subseteq U$.

Следствие

12.64. Пусть V - конечномерное линейное пространство положительной размерности над полем $\mathbb{R}, \varphi : V \to V$ - линейный оператор. Тогда в V существует одноили двумерное φ-инвариантное подпространство.

Заметим, что над полем $\mathbb{Q}$ оператор, действующий в пространстве сколь угодно большой размерности, может не иметь нетривиальных инвариантных подпространств (см. Задачу 8.68.

Задача

12.65. Пусть $\varphi : V \to V$ - линейный оператор на вещественном векторном пространстве V, не имеющий собственных векторов (как мы знаем, тогда V четномерно). Докажите, что тодда любое φ-инвариантное подпространство в V имеет четную размерность.

Дадим теперь новое доказательство Предложения 12.16, утверждающего существование собственного вектора самосопряженного преобразования.

Итак, пусть $\varphi : V \to V$ - самосопряженное преобразование евклидова пространства $V, \dim V \geq 1$. Если у φ есть одномерное инвариантное подпространство, то его порождает собственный вектор. Если одномерного инвариантного подпространства нет, то обязательно найдется двумерное φ-инвариантное подпространство $U \subset V$. Ограничение $\psi := \varphi|_U$ является самосопряженным преобразованием двумерного евклидова пространства U. Пусть $\{e_1, e_2\}$ - ортонормированный базис в U и $B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ - матрица ψ в нем. Легко посчитать, что дискриминант характеристического многочлена $\chi_B(t)$ равен $(a-c)^2 + 4b^2$, поэтому он всегда неотрицателен, и значит корни $\chi_B(t)$ вещественные, поэтому ψ имеет собственный вектор, а значит и φ имеет собственный вектор, лежащий в подпространстве U. Это противоречит предположению о том, что у φ нет одномерного инвариантного подпространства и завершает доказательство.

Выведем теперь из Следствия 12.64 существование канонического вида ортогонального оператора.

Предложение

12.66. Пусть $\varphi : V \to V$ - ортогональное преобразование конечномерного евклидова пространства V. Тогда в V существует ортонормированный базис, в котором матрица имеет блочнодиагональный вид с диагоналъными блоками порядков 1 и 2. Блоки порядка 1 равны ± 1, блоки порядка 2 являются матрицами поворота на углы $\alpha \neq \pi k$ (вообще говоря, углы разные для разных блоков).

Proof. □

Требуемый базис можно строить так. Напомним, что собственными значениями ортогонального оператора могут быть только ± 1. Если у φ есть собственные подпространства V_1 и V_{-1}, то легко проверяется, что они ортогональны. Выберем ортонормированный базис в каждом из них и объединим их, так мы получим часть искомого базиса, которая отвечает диагональным блокам порядка 1. Если $V_1 \oplus V_{-1} \neq V$, заметим, что так как $V_1 \oplus V_{-1}\varphi$-инвариантно, то в силу Предложения 12.38 и $(V_1 \oplus V_{-1})^\perp$ φ-инвариантно. Подпространство $(V_1 \oplus V_{-1})^\perp$ уже не содержит собственных векторов φ, но согласно Следствию 12.64, в нем найдется 2 -мерное φ-инвариантное подпространство U. Ограничение $\varphi|_U$ будет ортогональным преобразованием плоскости, не имеющим собственных векторов, и значит поворотом на угол $\alpha \neq \pi k$, и его матрицей в соответствующем ортонормированном базисе будет $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Далее переходим к $(V_1 \oplus V_{-1} \oplus U)^\perp$ и т.д., так как V по условию конечномерно, так мы придем к искомому базису за конечное число шагов.

Следствие

12.67. Комплексное число является корнем характеристического многочлена некоторого ортогонального преобразования тогда и только тогда, когда оно по модулю равно единице.

Proof. □

Легко следует из предыдущего Предложения с учетом того, что характеристические числа матрицы поворота плоскости на угол α равны $e^{i\alpha}$ и $e^{-i\alpha}$.

Задача

12.68. Выясните, может ли какая-нибудь из приведенных ниже матриц являться матрицей ортогонального оператора в евклидовом пространстве в некотором, не обязательно ортонормированном, базисе, если

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Решение. Заметим, что у всех трех матриц определитель равен 1, поэтому нужны более тонкие необходимые условия того, что матрица может быть матрицей ортогонального оператора.

$\chi_A(t) = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$, поэтому данная матрица не диагонализируема (даже над $\mathbb{C}$), а значит не может быть матрицей ортогонального оператора ни в каком базисе.
$\chi_C(t) = t^2 - 3/2t - 1 = (t-2)(t+1/2)$; в этом случае собственные значения отличны от ± 1, а значит оператор с такой матрицей не может быть ортогональным.
$\chi_B(t) = t^2 + t + 1$; в данном случае собственные значения равны $e^{\frac{2\pi i}{3}}$ и $e^{-\frac{2\pi i}{3}}$ и можно предположить, что оператор в подходящем ортонормированном базисе имеет матрицу $\begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. В любом случае эта матрица сопряжена с матрицей B над полем $\mathbb{C}$, поскольку обе они приводятся к диагональной форме $\mathrm{diag}\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right)$. То есть для того, чтобы доказать, что матрица B в самом деле является матрицей ортогонального оператора в некотором базисе, достаточно доказать следующую Лемму.

Lemma

12.69. Если две вещественные матрицы подобны над полем $\mathbb{C}$, то они подобны и над $\mathbb{R}$.

Proof. □

Две матрицы $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ подобны над полем $\mathbb{R}$, если система линейных однородных уравнений $XA = BX$ имеет решение, являющееся невырожденной матрицей из $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Пусть $\{C_1, \ldots, C_m\}$ - фундаментальная система решений указанной системы ($C_1, \ldots, C_m \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$). Если матрицы A и B не подобны над $\mathbb{R}$, то $\det(\lambda_1 C_1 + \ldots + \lambda_m C_m) = 0$ при любых $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ и следовательно $\det(t_1 C_1 + \ldots + t_m C_m)$ - нулевой многочлен от $t_1, \ldots, t_m$. Но тогда $\det(\lambda_1 C_1 + \ldots + \lambda_m C_m) = 0$ и при любых $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$, а значит A и B не подобны и над полем $\mathbb{C}$.

Задача

12.70. Найдите канонический вид и канонический базис ортогонального оператора φ, имеющего в ортонормированном базисе матричу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. Характеристический многочлен этого оператора равен $t^4 + 1$. Далее, $t^4 + 1 = \left(t^2 + \sqrt{2}t + 1\right)(t^2 - \sqrt{2}t + 1)$ - его разложение на неприводимые над полем $\mathbb{R}$ множители. В частности, у оператора φ нет собственных векторов. Значит, его канонический вид будет состоять из двух блоков вида $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, где $\alpha \neq \pi$. Характеристический многочлен блочно-диагональной матрицы равен произведению характеристических многочленов диагональных блоков. Из единственности разложения многочлена на неприводимые множители следует, что характеристический многочлен одного из блоков $-t^2 - \sqrt{2}t + 1$, другого $t^2 + \sqrt{2}t + 1$. Используя след получаем, что первый из многочленов отвечает блоку $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, второй - блоку $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

По теореме Гамильтона-Кэли двумерное инвариантное подпространство, соответствующее первому блоку, содержится в ядре оператора $\varphi^2 - \sqrt{2}\varphi + \mathrm{id}_V$, а второму - в ядре оператора $\varphi^2 + \sqrt{2}\varphi + \mathrm{id}_V$. Соответствующие многочлены $t^2 - \sqrt{2}t + 1$ и $t^2 + \sqrt{2}t + 1$, очевидно, взаимно просты. Из приведенной
ниже Леммы следует, что пересечение ядер указанных операторов тривиально, откуда следует их совпадение с двумерными инвариантными подпространствами, которые

соответствуют блокам. Таким образом, для нахождения канонического базиса достаточно найти ортонормированные базисы в указанных ядрах, ориентация которых согласована с выбором знаков в каноническом виде $\left(\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\right.$.

Lemma

12.71. Пусть $\varphi : V \to V$ - линейный оператор на векторном пространстве над полем $\mathbb{K}$. Пусть даны многочлены $f, g \in \mathbb{K}[t]$ такие, что $(f, g) = 1$. Тогда $\ker f(\varphi) \cap \ker g(\varphi) = 0$.

Proof. □

По тождеству Безу существуют такие многочлены $u(t), v(t) \in \mathbb{K}[t]$, что $u(t)f(t)+ v(t)g(t) = 1$. Подставляя в это тождество оператор φ, получаем операторное тождество

$$u(\varphi)f(\varphi) + v(\varphi)g(\varphi) = \mathrm{id}_V$$

из которого следует требуемое.

Задача

12.72. Оператор φ на евклидовом пространстве V называется кососимметрическим, если $\varphi^* = -\varphi$.
a) Докажите, что если подпространство $U \subset V \varphi$-инвариантно, то и $U^\perp \varphi$-инвариантно.
b) Найдите канонический вид матрицы кососимметрического оператора (в некотором ортонормированном базисе).
c) Что можно сказать про корни (в $\mathbb{C}$) характеристического многочлена кососимметрического оператора?

Задача

12.73. [60] Пусть $\varphi : V \to V$ - линейный оператор на евклидовом пространстве V такой, что $\varphi(v) \perp v \forall v \in V$. Докажите, что $\operatorname{rk}\varphi$ - четное число.

3.14 13 Unitary (hermitian) Spaces

Вещественными векторными пространствами с наиболее богатой геометрией являются евклидовы пространства. В них, в частности, можно измерять длины векторов и углы между векторами. Все это возможно благодаря наличию билинейной симметричной положительно определенной формы - евклидовой структуры.

Если рассмотреть комплексное векторное пространство с билинейной симметричной формой на нем, то сразу выясняется, что понятие положительной определенности для нее теряет смысл - любое комплексное число является квадратом комплексного числа. Получить положительное действительное число из ненулевого комплексного числа z можно, взяв вместо квадрата z^2 произведение $z\bar{z}$ на комплексно сопряженное. Возникает мысль рассмотреть аналог билинейных форм, для которых квадратичной формой является сумма квадратов модулей координат (в некотором базисе). Простейшие такие формы в координатах имеют вид

$$x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \ldots + x_n\bar{y}_n$$

Так мы приходим к понятию полуторалинейной формы.

Такие полуторалинейные формы приводят к комплексным аналогам евклидовых пространств со столь же богатой геометрией, называемым унитарными пространствами. Унитарное пространство - это пара, состоящая из (конечномерного, если не

[060] Сообщена автору И.И. Богдановым.

оговорено противное) векторного пространства над $\mathbb{C}$ и полуторалинейной эрмитово симметричной положительно определенной формы на нем, которая определяет соответствующее скалярное произведение. Практически все понятия, имеющие смысл для евклидова пространства, имеют его и для унитарного (длина вектора, угол между векторами, ортонормированный базис, ортогональное дополнение к подпространству, самосопряженные преобразования и т.д.). Причем для них верны аналоги теорем для евклидова пространства (неравенства Коши-Буняковского и треугольника, теоремы об ортогональном дополнении, ортогонализация Грама-Шмидта, свойства самосопряженных преобразований и т.п.).

Для удобства читателя мы приведем таблицу, связывающую аналогичные понятия в вещественном (евклидовом) и комплексном (унитарном) случаях.

в вещественном случае	в комплексном случае
билинейная форма	полуторалинейная форма
симметричная билинейная форма	эрмитово симметричная полуторалинейная форма
квадратичная форма	эрмитова квадратичная форма
евклидово пространство	унитарное (=эрмитово) пространство
сопряженное преобразование	эрмитово сопряженное преобразование
самосопряженное (=симметричное) преобразование	эрмитово (симметричное) преобразование
ортогональное преобразование	унитарное преобразование

3.14.1 13.1 One-and-a-half Linear Shapes

Пусть V - векторное пространство над полем $\mathbb{C}$.

Определение

13.1. Функция $f : V \to \mathbb{C}$ называется полулинейной формой (или полулинейной функцией) на V, если выполнены следующие два условия:

- $f(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$
- $f(\lambda\mathbf{v}) = \bar{\lambda} f(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V, \lambda \in \mathbb{C}$, где черта в $\bar{\lambda}$ обозначает комплексное сопряжение.

Определение

13.2. Функция $\alpha : V \times V \to \mathbb{C}$ называется полуторалинейной формой на V, если она линейна по второму аргументу и полулинейна по первому.

Другими словами, полуторалинейная форма α удовлетворяет условиям:

- $\alpha(\lambda\mathbf{u}_1 + \mu\mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = \bar{\lambda}\alpha(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + \bar{\mu}\alpha(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{C};$
- $\alpha(\mathbf{u}, \lambda\mathbf{v}_1 + \mu\mathbf{v}_2) = \lambda\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}_1) + \mu\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}_2) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$

Note.

13.3. В некоторых книгах полуторалинейными формами называют функции, которые наоборот, линейны по первому аргументу и полулинейны по второму.

При перестановке аргументов полуторалинейной формы ее полулинейный и линейный аргументы меняются местами. Поэтому "наивный" способ определить понятие симметричной билинейной формы не проходит. Заметим, что операция комплексного сопряжения также меняет местами линейный и полулинейный аргументы.

Определение

13.4. Полуторалинейная форма $\alpha : V \times V \to \mathbb{C}$ называется эрмитово симметричной (кратко, эрмитовой), если для любых векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ выполнено тождество

$$\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \overline{\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{u})} \tag{112}$$

Эрмитово кососимметричные формы, удовлетворяющие тождеству $\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\overline{\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{u})}$, обычно отдельно не рассматриваются, поскольку отображение $\alpha \mapsto i\alpha$ устанавливает биекцию между ними и эрмитово симметричными формами.

Определение

13.5. Эрмитово квадратичной формой называется функция $q : V \to \mathbb{C}$, для которой существует эрмитова форма α такая, что $q(\mathbf{v}) := \alpha(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \forall \mathbf{v} \in V$.

Заметим, что из предыдущего определения мгновенно следует, что эрмитово квадратичная форма принимает вещественные значения, то есть фактически является функцией $q : V \to \mathbb{R}$.

Заметим, что соотношения

$$\left\{ \begin{array}{r} q(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = q(\mathbf{u}) + \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \alpha(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + q(\mathbf{v}) \\ q(\mathbf{u}+i\mathbf{v}) = q(\mathbf{u}) + i\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - i\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + q(\mathbf{v}) \end{array} \right. \tag{113}$$

позволяют восстановить α по q. А именно,

$$\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \operatorname{Re}(\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v})) + i \operatorname{Im}(\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v})) =$$
$$= \frac{1}{2}(q(\mathbf{u}+\mathbf{v}) - q(\mathbf{u}) - q(\mathbf{v})) + \frac{1}{2}(q(\mathbf{u}+i\mathbf{v}) - q(\mathbf{u}) - q(\mathbf{v}))$$

Тем самым устанавливается биекция между эрмитовыми формами и эрмитово квадратичными формами. В частности, если $q \equiv 0$, то и $\alpha \equiv 0$.

Рассмотрим пару примеров.

Пример 13.6. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ - некоторый базис в $V, \mathbf{v} = \sum v_i \mathbf{e}_i$ - разложение произвольного вектора по нему. Пусть $k, l \in \mathbb{N}, k + l \leq n$. Тогда

$$\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{k} \bar{u}_i v_i - \sum_{j=1}^{l} \bar{u}_i v_i, \quad q_\alpha(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{k} |v_i|^2 - \sum_{j=1}^{l} |v_i|^2$$

- эрмитова и соответствующая ей эрмитова квадратичная формы. Как и для вещественной симметричной формы, для эрмитовой всегда существует базис, в котором она имеет такой вид (называемый нормальнымм).
  Пример 13.7. Приведем пример эрмитовой формы на бесконечномерном пространстве. Пусть

$$V := \{f : [0, 1] \to \mathbb{C} | f \text{ непрерывна } \}$$

- пространство непрерывных комплекснозначных функций на отрезке. Определим функцию $\alpha : V \times V \to \mathbb{C}$ формулой

$$\alpha(f, g) := \int\limits_0^1 \overline{f(t)} g(t) dt \quad \forall f, g \in V$$

Тогда легко проверить, что α - эрмитова форма на V.

Пусть $\alpha : V \times V \to \mathbb{C}$ - полуторалинейная форма на V, а $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ - некоторый базис в V. Тогда из определений легко следует, что

$$\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha\left(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\right) \bar{u}_i v_j \tag{114}$$

Если через v обозначить координатный столбец вектора $\mathbf{v} \in V$ в выбранном базисе, то равенство (114) можно переписать в виде

$$\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \bar{u}^T G v$$

где $G = G_\alpha := \left(\alpha\left(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\right)\right) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ - матрица, у которой на (i, j)-м месте стоит число $\alpha\left(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\right) \in \mathbb{C}$ - называемая матрицей полуторалинейной формы (в выбранном базисе).

Если $\{\mathbf{e}_1', \ldots, \mathbf{e}_n'\}$ - еще один базис в V, причем $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ - матрица перехода к нему от первого базиса, то

$$G' = \bar{C}^T G C \tag{115}$$

- матрица полуторалинейной формы α в новом базисе.

Условие эрмитовой симметрии (112) переписывается при этом в виде

$$\alpha\left(e_i, e_j\right) = \overline{\alpha\left(e_j, e_i\right)}$$

то есть $G = \bar{G}^T$. Матрицы $G \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, удовлетворяющие последнему тождеству, называются эрмитовыми. Таким образом, матрица эрмитовой формы в произвольном базисе эрмитова.

Задача

13.8. Докажите, что если матрица G эрмитова, $m \det G \in \mathbb{R}$.
Здесь можно было бы развить общую теорию эрмитовых форм, которая, по-существу, параллельна теории вещественных симметричных форм; в частности, для них верен аналог теоремы инерции. Мы, однако, делать этого не будем, и ограничимся случаем положительно определенных эрмитовых форм.

Определение

13.9. Эрмитова форма $\alpha : V \times V \to \mathbb{C}$ называется положительно определенной, если $q_\alpha(\mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

Например, эрмитовы формы из примеров 13.6 при $k = n$ и 13.7 положительно определены.
Заметим, что из формулы (115) следует, что знак определителя матрицы эрмитовой формы не зависит от базиса. Далее мы докажем (см. Теорему 13.14), что для положительно определенной эрмитовой формы существует ортонормированный базис, в котором ее матрица равна E, поэтому определитель матрицы такой формы положителен. Имеет место аналог критерия Сильвестра: эрмитова форма положительно определена $\Leftrightarrow$ все главные миноры ее матрицы положительны.

Например, общая эрмитова матрица порядка 2 имеет вид

$$\begin{pmatrix} a & b + ci \\ b - ci & d \end{pmatrix}$$

$(a, b, c, d \in \mathbb{R})$, ее определитель равен $ad - (b^2 + c^2)$, она положительно определена тогда и только тогда когда $a > 0$ и $ad - (b^2 + c^2) > 0$. Очевидно, что вещественная часть эрмитовой матрицы симметрична, а мнимая - кососимметрична.

Note.

13.10. Вообще, эрмитовы матрицы порядка n образуют вещественное векторное пространство размерности n^2. С другой стороны, их можно рассматривать как комплексный аналог симметричных матриц. Для вещественных матриц мы имеем разложение $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})^+ \oplus \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})^-$пространства квадратных матриц в прямую сумму подпространств симметричных и кососимметричных матриц. Посмотрим, есть ли аналогичная конструкция в комплексном случае.

Для этого рассмотрим полулинейный оператор $\sigma : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}), \quad \sigma(A) = \bar{A}^T$. Полулинейность σ означает, что $\sigma(A+B) = \sigma(A) + \sigma(B), \sigma(\lambda A) = \bar{\lambda}\sigma(A) \quad \forall A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}), \lambda \in \mathbb{C}$. Кроме того, $\sigma^2 = \mathrm{Id}_{\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})}$. Такие полулинейные операторы на комплексном векторном пространстве называются полулинейными инволюииями.

Положим

$$V^+ := \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) | \sigma(A) = A\}, \quad V^- := \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) | \sigma(A) = -A\}$$

Заметим, что V^+и V^-−вещественные линейные подпространства в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ такие, что $V^+ \cap V^- = 0$. Более того, для любой матрицы $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ имеет место представление $A = A^+ + A^-$, где $A^+ \in V^+, A^- \in V^-$. Точнее,

$$A^+ = \frac{1}{2}(A + \sigma(A)), \quad A^- = \frac{1}{2}(A - \sigma(A))$$

Таким образом, $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) = V^+ \oplus V^-$−разложение в прямую сумму вещественных линейных пространств.
Кроме того, $\iota : V^+ \to V^-, \iota(A) := iA$ - изоморфизм векторных пространств, значит, вещественная размерность пространств V^+и V^-равна комплексной размерности пространства $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, то есть n^2. Кроме того, $V^- = iV^+$. Значит,

$$\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) = V^+ \oplus iV^+ \tag{116}$$

Легко видеть, что V^+состоит из эрмитовых матриц. Матрицы из V^-называются косоэрмитовыми.
Заметим, что помимо разложения (116) есть также разложение $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \oplus i\,\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$.К нему можно прийти, рассматривая вместо σ другую полулинейную инволюцию $\tau : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}), \tau(A) = \bar{A}$. По довольно прозрачным причинам полулинейные инволюции на комплексном пространстве называют вещественными структурами. Соответствующее вещественное подпространство состоит из неподвижных относительно инволюции элементов (ср. характеризацию вещественных чисел в $\mathbb{C}$ как таких, которые остаются на месте при комплексном сопряжении). Таким образом, мы определили две вещественные структуры на $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$: стандартную, [61] для которой роль вещественного подпространства играет $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ и нестандартную, для которой вещественное подпространство образовано эрмитовыми матрицами V^+. Детали см. в [16].

Кстати, заметим, что $V^+ \cap \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ (соотв. $V^- \cap \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$) - подпространство симметрических (соотв. кососимметрических) матриц в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$.

3.14.2 13.2 Unitary Spaces

Как уже говорилось выше, комплексными аналогами евклидовых пространств являются унитарные пространства.

Определение

13.11. Унитарным пространством называется пара (V, α), состоящая из векторного пространства V над $\mathbb{C}$ и положительно определенной эрмитовой формы α на нем.

Из положительной определенности α (как и в вещественном симметричном случае) сразу следует ее невырожденность. Заметим, что для любого (комплексного) подпространства $U \subset V$ пара $(U, \alpha|_U)$ - унитарное пространство, где $\alpha|_U$ - ограничение эрмитовой формы α на подпространство $U \subset V$, которое также положительно определено и, значит, невырождено.

Пусть $U \subset V$ - произвольное подпространство унитарного пространства (V, α). Его ортогональным дополнением называется подпространство $U^{\perp} \subset V$, определяемое следующим образом:

$$U^{\perp} := \{\mathbf{v} \in V | \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \forall \mathbf{u} \in U\}$$

Заметим, что, несмотря на то, что эрмитова форма α по определению полулинейна по первому аргументу и линейна по второму, определение ортогонального дополнения симметрично по аргументам.

Следующие теоремы яляются аналогами соответствующих теорем для евклидова пространства. Доказательства их также аналогичны.

Предложение

13.12. Пусть U - подпространство унитарного пространства (V, α). Тогда $\dim U^{\perp} = \dim V - \dim U, \left(U^{\perp}\right)^{\perp} = U$.

Proof. □

Как и в Предложении 10.27 здесь все следует из невырожденности α. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ - базис в U. Тогда $U^{\perp}$ задается системой k линейных однородных уравнений

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha\left(\mathbf{e}_1, \mathbf{v}\right) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \alpha\left(\mathbf{e}_k, \mathbf{v}\right) = 0 \end{array}\right. \tag{117}$$

(относительно координат неизвестного вектора v). Уравнения системы (117) линейно независимы, так как из

$$\sum_{i=1}^{k} \bar{\lambda}_i \alpha\left(\mathbf{e}_i, \mathbf{v}\right) = 0$$

для некоторого набора $\lambda_i \in \mathbb{C}$ и $\forall \mathbf{v} \in V$ следует, что

$$\alpha\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{e}_i, \mathbf{v}\right) = 0$$

откуда, в силу положительной определенности формы α имеем $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{e}_i = \mathbf{0}$, а значит все $\lambda_i = 0$.

Поэтому ранг системы (117) равен k, и если $n := \dim V$, то размерность пространства решений равна $n - k$, то есть $\dim U^{\perp} = n - k$.

Вторая часть доказательства является дословным повторением соответствующего куска доказательства Предложения 10.27.

Теорема

13.13. Если $U \subset V$ - произвольное подпространство унитарного пространства (V, α), то $V = U \oplus U^{\perp}$.

Proof. □

[061] подчеркнем, что в произвольном комплексном линейном пространстве нет выделенной вещественной структуры.

Теорема

следует из того, что ограничение α на любое подпространство в V невырождено (ср.

Предложение

10.31).

Более подробно, пусть $\mathbf{v} \in U \cap U^{\perp}$ $(= \operatorname{Ker} \alpha|_U)$. Тогда $\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = q_\alpha(\mathbf{v}) = 0$. Так как по условию α положительно определена, то $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Значит, сумма подпространств U и $U^{\perp}$ в V прямая, $\dim \left(U + U^{\perp}\right) = \dim U + \dim U^{\perp} = k + n - k = n = \dim V$, и значит $V = U \oplus U^{\perp}$.

Теорема

13.14. В любом унитарном пространстве (V, α) есть ортонормированный базис.

Proof. □

Будем доказывать теорему индукцией по $n := \dim V$. Если $n = 1$, то теорема очевидна. Действительно, если $\mathbf{v} \in V$ - произвольный ненулевой вектор, то $q_\alpha(\mathbf{v}) =: a > 0$. Тогда $\{\mathbf{u}\}$ - ортонормированный базис, где $\mathbf{u} := \frac{1}{\sqrt{a}}\mathbf{v}$.

Пусть теорема верна для пространств размерности, не превосходящей $n-1$. Выберем произвольный вектор $\mathbf{u} \in V, \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ и положим $U := \langle \mathbf{u} \rangle$. Тогда $V = U \oplus U^{\perp}$ и $\dim U^{\perp} = n - 1$; по предположению индукции в $U^{\perp}$ есть ортонормированный базис. Объединяя его с ортонормированным базисом в U, получаем ортонормированный базис в V.

То есть любое n-мерное унитарное пространство изометрически изоморфно арифметическому пространству $\mathbb{C}^n$ с эрмитовой формой $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i$.

Заметим, что как и в евклидовом случае, предыдущую Теорему можно было бы доказать, используя модификацию алгоритма Грама-Шмидта для унитарных пространств. Отметим еще, что в унитарном случае формула (98) дает равенство для коэффициентов

$$\lambda_j = -\frac{(f_j, e_k)}{|f_j|^2}$$

причем порядок векторов в числителе важен из-за полуторалинейности эрмитова скалярного произведения.

Следствие

13.15. Для любой положстельно определенной эрмитовой матрицы $G \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{C})$ существует невырожденная матрица $C \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{C})$ такая, что

$$\bar{C}^T G C = E \tag{118}$$

Proof. □

В произвольном базисе n-мерного комплексного пространства V формула

$$\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \bar{u} G v$$

задает положительно определенную эрмитову форму. Рассмотрим пару (V, α) как унитарное пространство. Согласно предыдущей теореме, в нем существует ортонормированный базис. Пусть C - матрица перехода от исходного базиса к ортонормированному. Теперь все следует из (115) и того, что в ортонормированном базисе матрица положительно определенной эрмитовой формы единичная.

Кстати, из формулы (118) следует, что определитель матрицы положительно определенной эрмитовой формы положителен (выше уже отмечалось, что для эрмитовых форм имеет место аналог критерия Сильвестра).

Заметим, что базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ унитарного пространства (V, α) ортонормирован тогда и только тогда, когда матрица формы α в этом базисе единичная. Из (115) следует, что матрица C перехода между двумя ортонормированными базисами в (V, α) удовлетворяет тождеству $\bar{C}^T C = E$. Такие матрицы называются унитарными (они аналогичны ортогональным матрицам в вещественном случае). Очевидно, что определитель унитарной матрицы - (вообще говоря) комплексное число, равное 1 по модулю. Сопоставление базису матрицы перехода к нему от фиксированного базиса устанавливает биекцию между ортонормированными базисами в n-мерном унитарном пространстве и унитарными матрицами порядка n.

Начиная с этого момента упростим наши обозначения: эрмитову форму α из определения унитарного пространства (V, α) (напомним, что она линейна по второму аргументу и полулинейна по первому) будем обозначать круглыми скобками и называть (эрмитовым) скалярным произведением, и вместо $q_\alpha(\mathbf{v})(= \alpha(\mathbf{v}, \mathbf{v}))$ будем писать $|\mathbf{v}|^2$.

Как уже отмечалось выше, в унитарных пространствах имеют место аналоги неравенств Коши-Буняковского и треугольника. Приведем их доказательства (ср. раздел 11.4).

Определение

13.16. Матрицей Грама $G\left(v_1, \ldots, v_k\right)$ системы векторов $\{v_1, \ldots, v_k\}$ унитарного пространства V называется матрица $G = \left(g_{ij}\right), g_{ij} = \left(v_i, v_j\right)$, составленная из их попарных скалярных произведений.

Предложение

13.17. Для любой системы векторов $\{v_1, \ldots, v_k\}$ унитарного пространства V выполнено неравенство $\det G\left(v_1, \ldots, v_k\right) \geq 0$, причем равенство нулю имеет место тогда и только тогда, когда система $\{v_1, \ldots, v_k\}$ линейно зависима.

Доказателъство. Если система $\{v_1, \ldots, v_k\}$ линейно независима, то она является базисом в своей линейной оболочке $U := \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$. Ограничение скалярного произведения на любое подпространство $U \subset V$ положительно определено, откуда (например, по формуле (118)) $\det G\left(v_1, \ldots, v_k\right) > 0$.

Если система $\{v_1, \ldots, v_k\}$ линейно зависима, то пусть $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = 0$ - нетривиальная линейная зависимость. Скалярно умножая левую и правую части этого равенства на векторы $v_j, 1 \leq j \leq k$, получаем $\sum\limits_{i=1}^{k} \bar{\lambda}_i \left(v_i, v_j\right) = 0, 1 \leq j \leq k$, что дает линейную зависимость между строками матрицы $G\left(v_1, \ldots, v_k\right)$ с теми же коэффициентами.

Теорема

13.18. (Неравенство Коши-Буняжовского) Для любых векторов $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ унитарного пространства V имеет место неравенство

$$|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})|^2 \leq |\boldsymbol{u}|^2 |\boldsymbol{v}|^2 \tag{119}$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы и и $\boldsymbol{v}$ линейно зависимъ.

Proof. □

1-й способ. Согласно предыдущему Предложению,

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{|\mathbf{u}|^2}{(\mathbf{u},\mathbf{v})} & (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ |\mathbf{v}|^2 & \end{array} \right) = |u|^2 |v|^2 - |(u, v)|^2 \geq 0$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда u и v линейно зависимы.
2 -й способ. Для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ имеет место неравенство

$$(\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v},\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}) = |\mathbf{u}|^2+\bar{\lambda}(\mathbf{v},\mathbf{u})+\lambda(\mathbf{u},\mathbf{v})+|\lambda|^2|\mathbf{v}|^2 \geq 0 \qquad (120)$$

Если $(\mathbf{u},\mathbf{v})=0$, то (119) очевидно. В противном случае положим $\lambda = \frac{(\mathbf{v},\mathbf{u})}{|(\mathbf{u},\mathbf{v})|}t$, где $t \in \mathbb{R}$. Тогда (120) превратится в неравенство

$$|\mathbf{u}|^2+2|(\mathbf{u},\mathbf{v})|t+|\mathbf{v}|^2t^2 \geq 0$$

верное для любого $t \in \mathbb{R}$. Значит, дискриминант квадратного трехчлена неотрицателен, что равносильно (119).

Доказательство второй части теоремы, касающейся равносильности условий достижения равенства и линейной зависимости векторов, оставим читателю.

Следствие

13.19. Для любых двух непрерывных функций $f,g:[0,1]\to\mathbb{C}$ имеет место неравенство

$$\left|\int_0^1 \overline{f(t)}g(t)dt\right|^2 \leq \int_0^1 |f(t)|^2dt\int_0^1|g(t)|^2dt$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда f и g пропорциональны.

Proof. □

Запишите неравенство Коши-Буняковского (119) для примера 13.7.

Следствие

13.20. (Неравенство треугольника) Для любых векторов $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ унитарного пространства V имеет место неравенство $|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}| \leq |\boldsymbol{u}|+|\boldsymbol{v}|$.

Доказательство следует из цепочки неравенств:

$$(|\mathbf{u}|+|\mathbf{v}|)^2 = |\mathbf{u}|^2+2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|+|\mathbf{v}|^2 \geq |\mathbf{u}|^2+2|(\mathbf{u},\mathbf{v})|+|\mathbf{v}|^2 \geq |\mathbf{u}|^2+2\operatorname{Re}(\mathbf{u},\mathbf{v})+|\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2$$

Note.

13.21. Если $\mathbf{u},\mathbf{v}$ - ненулевые векторы унитарного пространства V, то из неравенства Коши-Буняковского следует, что

$$0 \leq \frac{|(\mathbf{u},\mathbf{v})|}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} \leq 1$$

Таким образом, существует единственный угол $\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ такой, что

$$\cos\varphi = \frac{|(\mathbf{u},\mathbf{v})|}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$

Он называется углом между векторами u и v. В математической модели квантовой механики $\cos^2\varphi$ имеет смысл вероятности (см. [19]).

3.14.3 13.3 Linear Transformations of Unitary Spaces

Мы уже знаем, что в евклидовом пространстве V благодаря присутствию скалярного произведения каждому линейному оператору $\varphi : V \to V$ можно сопоставить его сопряженный $\varphi^* : V \to V$, и, соответственно, возникают понятия симметричного, или, что то же, самосопряженного ($\varphi^* = \varphi$), кососимметричного ($\varphi^* = -\varphi$) и ортогонального ($\varphi^{-1} = \varphi^*$) операторов. То же верно и для унитарного пространства, только несколько меняется терминология: самосопряженные называются еще эрмитовыми, аналоги кососимметричных - косоэрмитовыми, ортогональных - унитарными операторами.

Сопряженное преобразование.

Итак, пусть V - унитарное пространство, а $\varphi : V \to V$ - линейный оператор на нем.

Определение

13.22. Преобразование $\varphi^* : V \to V$ называется сопряженным к φ, если оно удовлетворяет тождеству

$$(\varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \varphi^*(\mathbf{v})) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$$

(напомним, что $(\cdot, \cdot)$ обозначает эрмитово скалярное произведение в V).
Во-первых, заметим, что если сопряженное преобразование существует, то оно единственно. В самом деле, пусть φ_1, φ_2 - два сопряженных к φ. Тогда $(\mathbf{u}, (\varphi_1 - \varphi_2)(\mathbf{v})) = 0 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Фиксируя $\mathbf{v}$, из невырожденности эрмитова скалярного произведения получаем $(\varphi_1 - \varphi_2)(\mathbf{v}) = 0$; поскольку это выполнено для любого $\mathbf{v}$, то $\varphi_1 = \varphi_2$.
Во-вторых, заметим, что сопряженное преобразование линейно. В самом деле,

$$(\mathbf{u}, \varphi^*(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)) = (\varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = (\varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v}_1) + (\varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v}_2) = \\ (\mathbf{u}, \varphi^*(\mathbf{v}_1)) + (\mathbf{u}, \varphi^*(\mathbf{v}_2)) = (\mathbf{u}, \varphi^*(\mathbf{v}_1) + \varphi^*(\mathbf{v}_2))$$

поскольку это выполнено для любого $\mathbf{u} \in V$, то $\varphi^*(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \varphi^*(\mathbf{v}_1) + \varphi^*(\mathbf{v}_2)$. Далее,

$$(\mathbf{u}, \varphi^*(\lambda\mathbf{v})) = (\varphi(\mathbf{u}), \lambda\mathbf{v}) = \lambda(\varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u}, \varphi^*(\mathbf{v})) = (\mathbf{u}, \lambda\varphi^*(\mathbf{v}))$$

и снова, поскольку это выполнено для любого $\mathbf{u} \in V$, то $\varphi^*(\lambda\mathbf{v}) = \lambda\varphi^*(\mathbf{v})$.
Существование сопряженного преобразования можно доказать по той же схеме что и в евклидовом случае. Например, приведем доказательство, использующее существование ортонормированных базисов в унитарном пространстве V. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ - такой базис. Пусть оператор φ имеет в нем матрицу A. Рассмотрим оператор $\psi : V \to V$, который в этом базисе имеет матрицу $B := \bar{A}^T$. Тогда $(\varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \psi(\mathbf{v})) \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Действительно, последнее равенство в базисе имеет вид:

$$(\overline{Au})^T v = \bar{u}^T B v$$

и в силу определения B верно для любых столбцов u, v. Таким образом, в качестве φ^* нужно взять линейный оператор, который имеет матрицу $\bar{A}^T$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.
Читателю предлагается проверить самостоятельно, что для базиса с матрицей Грама G матрица B сопряженного преобразования φ^* выражается через матрицу A преобразования φ по формуле $B = G^{-1}\bar{A}^T G$.
Далее так же как в случае евклидова пространства доказываются тождества (см.

Предложение

12.4)

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*, \quad (\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*, \mathrm{Id}_V^* = \mathrm{Id}_V, \quad \varphi^{**} = \varphi$$

с единственным отличием $(\lambda\varphi)^* = \bar{\lambda}\varphi^*$, для произвольного $\lambda \in \mathbb{C}$. В самом деле,

$$(\mathbf{u}, (\lambda\varphi)^*(\mathbf{v})) = (\lambda\varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v}) = \bar{\lambda}(\varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v}) = \bar{\lambda}\,(\mathbf{u}, \varphi^*(\mathbf{v})) = \big(\mathbf{u}, \bar{\lambda}\varphi^*(\mathbf{v})\big)$$

Следующее

Предложение

- полный аналог Предложения 12.11 в евклидовом случае.

Предложение

13.23. Пусть V - унитарное пространство, $\varphi : V \to V$ - линейный оператор на нем, $U \subset V$ - инвариантное относительно φ подпространство. Тогда подпространство $U^\perp \subset V$ инвариантно относительно φ^*.

Proof. □

Для произвольных $\mathbf{u} \in U, \mathbf{v} \in U^\perp$

$$0 = (\varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \varphi^*(\mathbf{v})) \quad \Rightarrow \quad \varphi^*(\mathbf{v}) \in U^\perp$$

Самосопряженные преобразования.

Определение

13.24. Оператор $\varphi : V \to V$ на унитарном пространстве V называется самосопряженным или эрмитовым, если он равен своему сопряженному, $\varphi = \varphi^*$.

Из предыдущего следует такой результат:

Предложение

13.25. Оператор на унитарном пространстве самосопряжен тогда и только тогда, когда его матрица в произвольном ортонормированном базисе эрмитова.

Из Предложения 13.23 вытекает такое

Следствие

(ср.

Предложение

12.13):

Следствие

13.26. Ортогональное дополнение к инвариантному подпространству самосопряженного оператора инвариантно.

Доказательство следующего результата в унитарном случае существенно проще, чем в евклидовом.

Предложение

13.27. Все собственные значения самосопряжсенного оператора φ на унитарном пространстве V вещественны.

Proof. □

Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$ - собственное значение оператора φ. Тогда существует $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ такой, что $\varphi(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$. Тогда

$$\bar{\lambda}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (\lambda\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (\varphi(\mathbf{v}), \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \varphi(\mathbf{v})) = (\mathbf{v}, \lambda\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{v}, \mathbf{v})$$

Так как $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \neq 0$, то $\lambda = \bar{\lambda}$

Следствие

13.28. Все корни характеристического многочлена $\chi_A(t) = \det(tE - A)$ эрмитовой матрицы A вещественны.

Заметим, что симметричные вещественные матрицы - то же, что эрмитовы матрицы с вещественными элементами. Поэтому частным случаем предыдущего следствия является вещественность характеристических чисел вещественных симметричных матриц. Напомним, что вещественные симметричные матрицы - матрицы самосопряженных операторов в евклидовых пространствах в ортонормированных базисах. Тем самым мы получили третье (см.

Предложение

12.16 и второе доказательство после Следствия 12.64) доказательство того, что у самосопряженного оператора в евклидовом пространстве положительной размерности есть собственный вектор. Напомним, что этот результат был сложной частью доказательства теоремы о том, что всякий самосопряженный оператор в евклидовом пространстве диагонализируется в некотором ортонормированном базисе. Следующая теорема является аналогом этой теоремы для унитарного случая.

Теорема

13.29. (

Теорема

о каноническом виде эрмитового оператора). Линейный оператор φ в унитарном пространстве V самосопряжен $\Leftrightarrow$ он диагонализируется в некотором ортонормированном базисе и имеет вещественный спектр [62].

Proof. □

Если оператор диагонализируется в ортонормированном базисе и имеет вещественный спектр, то его матрица в этом базисе диагональная с вещественными элементами на диагонали, значит она эрмитова. Мы уже знаем, что если оператор имеет эрмитову матрицу в некотором ортонормированном базисе, то он самосопряжен.

Обратно, пусть φ самосопряжен. Тогда, как мы уже выяснили, он имеет вещественный спектр. Существование ортонормированного базиса в V из его собственных векторов будем доказывать индукцией по $\dim V$. Если $\dim V = 1$, то существование ортонормированного базиса очевидно. Пусть теорема верна для пространств размерности, не превосходящей $\dim V - 1$. Пусть $\mathbf{v}$ - произвольный собственный вектор оператора

[062] Спектром линейного оператора на конечномерном пространстве называется множество его собственных значений

φ в V (любое линейное преобразование в комплексном пространстве имеет собственый вектор). Без ограничения общности можно предположить, что его длина равна 1. Подпространство $\langle \mathbf{v} \rangle \subset V$ инвариантно относительно φ. Значит, его ортогональное дополнение $\langle \mathbf{v} \rangle^{\perp} \subset V$ тоже инвариантно. Заметим, что $\dim \langle \mathbf{v} \rangle^{\perp} = n-1$ и $V = \langle \mathbf{v} \rangle \oplus \langle \mathbf{v} \rangle^{\perp}$ - разложение в ортогональную прямую сумму. Кроме того, $\langle \mathbf{v} \rangle^{\perp}$ - унитарное пространство, а ограничение $\varphi|_{\langle \mathbf{v} \rangle}{}^{\perp}$ оператора φ на него - самосопряженный оператор на $\langle \mathbf{v} \rangle^{\perp}$. По предположению индукции в $\langle \mathbf{v} \rangle^{\perp}$ существует ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\varphi|_{\langle \mathbf{v} \rangle^{\perp}}$. Добавляя к нему нормированный вектор $\mathbf{v}$, получаем искомый ортонормированный базис в V из собственных векторов оператора φ.

Заметим, что если λ - некоторое собственное значение оператора φ, то соответствующее собственное подпространство V_{λ} является линейной оболочкой собственных векторов из построенного в предыдущей теореме ортонормированного базиса, которые отвечают собственному значению λ. Таким образом, если $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ - все попарно различные собственные значения φ, то V раскладывается в ортогональную прямую сумму собственных подпространств, $V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}$. Ортогональность собственных векторов самосопряженного оператора, отвечающих разным собственным значениям, легко проверить непосредственно: пусть $\varphi(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}, \quad \varphi(\mathbf{v}) = \mu \mathbf{v}, \quad \lambda \neq \mu$; тогда

$$\lambda(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \varphi(\mathbf{v})) = \mu(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

так как $\lambda \neq \mu$, то $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$.
Из предыдущей теоремы получаем следующее следствие.

Следствие

13.30. Для любой эрмитовой матрицы A существует унитарная матрица U такая, что матрица $A' = \bar{U}^T A U$ диагональна с вещественными элементами на диагонали.

Далее аналогично евклидовому случаю в унитарном пространстве устанавливается биекция между эрмитовыми формами и эрмитовыми операторами. Используя доказанные теоремы об эрмитовых операторах, доказывается существование ортонормированного базиса, в котором данная эрмитова форма имеет диагональный вид с вещественными числами на главной диагонали. Далее аналогично евклидовому случаю рассматривается задача о паре эрмитовых форм, одна из которых знакоопределена. Мы не будем делать это подробно, поскольку читатель, знакомый с евклидовым случаем, легко восстановит детали.

Унитарные преобразования.

Пусть V - унитарное пространство с эрмитовым скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$.

Определение

13.31. Линейный оператор $\varphi : V \to V$ называется унитарным, если для любых $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$

$$(\varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v})) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \tag{121}$$

Таким образом, унитарные операторы - аналоги ортогональных и этим определяются их свойства. Унитарность оператора φ равносильна тождеству $\varphi^* = \varphi^{-1}$, в частности, любое унитарное преобразование обратимо. Для матрицы оператора в ортонормированном базисе оно превращается в условие $\bar{U}^T = U^{-1}$.

Отсюда следует, что оператор унитарный тогда и только тогда, когда в некотором (а значит в любом) ортонормированном базисе он имеет унитарную матричу.

Так же как в евклидовом случае доказывается (см.

Предложение

12.36), что унитарные преобразования унитарного пространства образуют группу относительно операции композиции. Группа унитарных преобразований унитарного пространства V обозначается $\mathrm{U}(V)$. Она является подгруппой в $\mathrm{GL}(V)$ группе всех обратимых линейных операторов на пространстве V относительно операции композиции - и состоит в точности из тех преобразований, которые сохраняют фиксированное эрмитово скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$. Выбор ортонормированного базиса определяет ее изоморфизм с группой $\mathrm{U}(n)$ унитарных матриц соответствующего размера. Определяется также подгруппа $\mathrm{SU}(V)$ группы $\mathrm{U}(V)$, состоящая из унитарных преобразований с определителем 1[63], изоморфная соответствующей подгруппе $\mathrm{SU}(n)$ группы $\mathrm{U}(n)$.

Получим теперь канонический вид унитарного преобразования $\varphi : V \to V$.

Предложение

13.32. (ср.

Предложение

12.38) Если $U \subset V$ является φ-инвариантным, то и $U^{\perp} \subset V$ является φ-инвариантным.

Proof. □

Заметим, что $\varphi|_U : U \to U$ - унитарный (в частности, биективный) оператор на U. Значит, для любого $\mathbf{u} \in U \exists \mathbf{u}' \in U$ такой, что $\varphi(\mathbf{u}') = \mathbf{u}$. Выберем произвольный $\mathbf{v} \in U^{\perp}$. Тогда

$$(\mathbf{u}, \varphi(\mathbf{v})) = (\varphi(\mathbf{u}'), \varphi(\mathbf{v})) = (\mathbf{u}', \mathbf{v}) = 0$$

Предложение

13.33. Если λ - собственное значение унитарного оператора φ, то $|\lambda| = 1$ (заметим, что λ, вообще говоря, комплексное число).

Proof. □

Пусть $\mathbf{v} \in V$ - собственный вектор φ с собственным значением λ. Тогда

$$(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (\varphi(\mathbf{v}), \varphi(\mathbf{v})) = |\lambda|^2 (\mathbf{v}, \mathbf{v})$$

Так как $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \neq 0$, то $|\lambda|^2 = 1$.

Теорема

13.34. Оператор $\varphi : V \to V$ является унитарным тогда и только тогда, когда он диагонализируется в ортонормированном базисе и имеет спектр, лежащий на единичной окружности в $\mathbb{C}$.

Proof. □

Во-первых, заметим, что диагональная матрица с комплексными числами на главной диагонали, равными по модулю единице, унитарна.

Обратное утверждение (существование ортонормированного базиса из собственных векторов) будем доказывать индукцией по $\dim V$. Если $\dim V = 1$, то утверждение очевидно. Пусть $\dim V > 1$. Пусть $\mathbf{v}$ - собственный вектор унитарного преобразования φ (любое линейное преобразование в комплексном пространстве имеет собственый вектор). Без ограничения общности можно считать, что вектор $\mathbf{v}$ нормирован. Подпространство

$\langle \mathbf{v} \rangle \subset V$ инвариантно, а значит инвариантно и его ортогональное дополнение $\langle \mathbf{v} \rangle^{\perp}$. По предположению индукции в $\langle \mathbf{v} \rangle^{\perp}$ существует требуемый базис для унитарного оператора $\varphi|_{\langle \mathbf{v} \rangle} \Big\rangle^{\perp}$. Добавляя к нему нормированный вектор $\mathbf{v}$, получаем требуемый базис в V для φ.

Заметим, что легко доказать непосредственно, что собственные подпространства унитарного преобразования, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны. В самом деле, пусть $\varphi(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}, \varphi(\mathbf{v}) = \mu \mathbf{v}, \quad \lambda \neq \mu$. Тогда

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v})) = \bar{\lambda}\mu(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

Так как $\bar{\lambda}\mu \neq 1$ (здесь наряду с условием $\lambda \neq \mu$ мы используем $|\lambda| = 1 = |\mu|$), то $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$.
Заметим, что ортогональные матрицы порядка n - в точности унитарные матрицы того же порядка с вещественными элементами. Поэтому из предыдущей теоремы следует, что характеристические числа ортогональной матрицы лежат на единичной окружности в $\mathbb{C}$. Ранее этот результат был доказан несколько иначе (см. Следствие 12.67).

В заключении этого пункта сделаем несколько замечаний.

Note.

13.35. На понятии унитарного пространства, а также эрмитовых и унитарных операторов на нем основана математическая модель квантовой механики. Точнее, ненулевые векторы унитарного пространства (с точностью до умножения на ненулевое комплексное число) отвечают состояниям квантовой системы, в то время как эрмитовы операторы описывают наблюдаемые (такие как импульс, энергия или спин), а унитарные операторы - симметрии квантовой системы и ее эволюцию во времени. Подробности см. например в [19].

Note.

13.36. Есть важная связь между эрмитовыми, косоэрмитовыми и унитарными операторами и матрицами. Как уже отмечалось, унитарные матрицы образуют группу по умножению. Эрмитовы и косоэрмитовы матрицы группы по умножению не образуют, они являются векторными пространствами над $\mathbb{R}$, переходящими друг в друга при умножении на i. Однако пространство косоэрмитовых матриц замкнуто относительно другой операции - взятия коммутатора. Получающаяся при этом структура называется алгеброй Ли. Она тесно связана с группой унитарных матриц, в частности, экспонента косоэрмитовой матрицы является унитарной матрицей. Аналогичная связь имеется между кососимметричными и ортогональными матрицами. Подробнее об этом можно прочитать например в [12], Гл. 12.

Note.

13.37. Наконец, заметим, что для операторов в унитарном пространстве V имеет место полярное разложение. А именно, любой оператор φ можно представить в виде произведения неотрицательного (положительного для невырожденного φ) эрмитова и унитарного. Оно аналогично представлению комплексных чисел в показательной форме $z = re^{i\alpha}$, где $r, \alpha \in \mathbb{R}, r \geq 0$. При этом первому множителю отвечают неотрицательные эрмитовы операторы, а второму - унитарные. Доказательство аналогично евклидовому случаю.

[063] Заметим, что определитель унитарной матрицы (унитарного оператора) - комплексное число, модуль которого равен 1.

Нормальные преобразования.

Читатель, вероятно, заметил общее свойство самосопряженных (эрмитовых) и унитарных преобразований: и те, и другие диагонализируются в некотором ортонормированном базисе. Они являются частными случаями так называемых нормальных преобразований унитарного пространства.

Предложение

13.38. Следующие условия на линейный оператор φ на унитарном пространстве V эквивалентны:
a) φ диагонализируется в ортонормированном базисе;
b) φ коммутирует со своим сопряэженным φ^*.

Proof. □

Во-первых, из a) следует b). В самом деле, если $\varphi : V \to V$ имеет диагональную матрицу $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ в ортонормированном базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$ пространства V, то φ^* имеет в том же базисе диагональную матрицу $\operatorname{diag}\left(\bar{\lambda}_1, \ldots, \bar{\lambda}_n\right)$, а диагональные матрицы коммутируют.

Обратную импликацию b) $\Rightarrow$ a) докажем индукцией по размерности $n = \dim V$. Случай $n = 1$ очевиден. Пусть $n > 1$ и доказываемое утверждение верно для пространств размерности меньше n. Для доказательства шага индукции рассмотрим собственное подпространство V_λ оператора φ. Из b) легко следует, что V_λ является φ^*-инвариантным (поскольку $\forall v \in V_\lambda \varphi\left(\varphi^*(v)\right) = \varphi^*(\varphi(v)) = \varphi^*(\lambda v) = \lambda\varphi^*(v)$), откуда в свою очередь непосредственно выводится (ср.

Предложение

13.23), что подпространство $V_\lambda^\perp \subset V$ является одновременно φ и φ^*-инвариантным, причем ясно, что ограничения φ и φ^* на $V_\lambda^\perp$ коммутируют. По предположению индукции ограничение φ на $V_\lambda^\perp$ диагонализируемо в ортонормированном базисе, а так как то же верно и для ограничения φ на V_λ, то шаг индукции доказан.

Определение

13.39. Линейный оператор на унитарном пространстве, удовлетворяющий любому из эквивалентных условий a) или b) из формулировки предыдущего Предложения, называется нормальным.

Заметим, что, поскольку и для самосопряженного и для унитарного оператора выполнено условие b) предыдущего Предложения, мы еще раз доказали, что оба эти типа операторов диагонализируемы в ортонормированном базисе.

Задача

13.40. Пусть V - конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{C}$. Верно ли, что для любого оператора $\varphi : V \to V$ найдутся многочлен $p(t) \in \mathbb{C}[t]$ и некоторый базис в V, в котором матрица A оператора φ удовлетворяет условию $\bar{A}^T = p(A)$?

Решение. Допустим, для оператора φ такой базис существует; тогда для эрмитова скалярного произведения в V, для которого данный базис является ортонормированным, оператор φ^* коммутирует с φ, а значит является диагонализируемым, что в общем случае неверно.

3.14.4 14 Topological Structure of the Group so(3)

В данном разделе мы постараемся объяснить, что группа SO(3) как топологическое пространство гомеоморфна вещественному проективному пространству $\mathbb{R}P^3$ - фактор-пространству трехмерной сферы S^3 по отношению эквивалентности, склеивающему ее диаметрально противоположные точки. Мы также докажем, что соответствующее фактороотображение $S^3 \to \mathbb{R}P^3$ реализуется как групповой гомоморфизм $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$. В качестве вспомогательной конструкции мы покажем, как вращения пространства задаются кватернионами.

Понятие топологической группы мы кратко обсудили в разделе 4.8. Для полного понимания данной главы необходимы некоторые знания из общей топологии (понимание того, что такое индуцированная топология, фактортопология, фундаментальная группа, накрытия, ...). Все эти сведения можно почерпнуть, например, в книге [13]. Необходимо предупредить читателя, что некоторые доказательства в этой главе неполны в топологической части: мы нигде не проверяем непрерывность. Читатели, знакомые с топологией, легко заполнят детали, а остальным в любом случае лучше сначала освоить ее основы.

3.14.5 14.1 Homeomorphism $\mathrm{so}(3) \cong \mathbb{R}P^3$

Ранее мы видели, что топологическая группа SO(2) с топологической точки зрения представляет собой окружность (так же как и изоморфная ей группа $U(1)$). Нельзя ли попытаться представить, что за многомерную "поверхность" (по-научному, многообразие) представляет собой топологическая группа SO(3)?

Вот первый общий результат. (Заметим, что когда мы говорим про какое-то топологическое свойство топологической группы, например, про компактность, мы имеем в виду соответствующее свойство ее топологического пространства).

Предложение

14.1. Для любого натурального n группа $\mathrm{SO}(n)$ компактна.

Proof. □

Напомним, что $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ является евклидовым пространством относительно скалярного произведения $(X, Y) = \operatorname{tr}\left(X^T Y\right)$. Для ортогональной матрицы $U^T U = E$, поэтому квадрат ее евклидовой длины есть $|U|^2 = \operatorname{tr}\left(U^T U\right) = n$, то есть множество ортогональных матриц лежит в сфере радиуса $\sqrt{n}$ в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$, следовательно оно ограничено.

Переписывая матричное уравнение $U^T U = E$ в терминах матричных элементов a_{ij} матрицы U, получаем систему из $n(n+1)/2$ полиномиальных уравнений

$$\sum_{m=1}^{n} a_{mj} a_{mk} = \delta_{jk}, \quad 1 \leq j \leq k \leq n$$

(эти уравнения означают, что столбцы матрицы U, рассматриваемые как векторы из $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением, образуют там ортонормированный базис). Полиномы - непрерывные функции, значит, множество их нулей замкнуто. Замкнутое и ограниченное подмножество в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ компактно.

Кроме того, поворот в трехмерном пространстве зависит от трех параметров [64], например, от направляющего вектора оси (два параметра) и угла поворота вокруг этой оси.

Предложение

14.2. Группа SO(3) гомеоморфна фактор-пространству трехмерного шара по отношению эквивалентности, отождествляющему диаметрально противоположные точки его границы (двумерной сферы).

Proof. □

Ось поворота будем задавать указанием единичного направляющего вектора v. При этом (при ненулевом угле поворота) для направляющего вектора существует два варианта выбора $-v$ и $-v$. Каждый поворот можно задать парой (v, θ), где угол $0 \leq \theta \leq \pi$ измеряется в положительном направлении (против часовой стрелки) если смотреть с конца вектора v. Паре (v, θ) сопоставим вектор θv длины θ; такие векторы заполняют шар радиуса π. Заметим, что поворот на угол π вокруг оси v - то же, что поворот на такой же угол вокруг оси $-v$. Поэтому чтобы получить биекцию с поворотами, мы должны рассмотреть классы эквивалентности отношения эквивалентности

$$\text{если } x \neq \pi v, \text{ то } x \sim y \Leftrightarrow x = y$$
$$\text{если } x = \pi v, \text{ то } x \sim y \Leftrightarrow x = \pm y$$

на точках шара.
фактор-пространство трехмерного шара по выписанному выше отношению эквивалентности является вещественным трехмерным проективным пространством и обозначается $\mathbb{R}P^3$.

3.14.6 14.2 Real Projective Spaces

Определение

14.3. n-мерным вещественным проективным пространством $\mathbb{R}P^n$ называется множество всех одномерных подпространств в $n+1$-мерном вещественном векторном пространстве V, снабженное топологией описанным ниже образом.

А именно зададим в V некоторое скалярное произведение и рассмотрим единичную сферу S^n в V. Тогда каждое одномерное подпространство (прямая, проходящая через начало координат) пересечет сферу в двух диаметрально противоположных точках. Таким образом, $\mathbb{R}P^n$ представляет собой фактор-пространство S^n по отношению эквивалентности $x \sim -x$. Иначе говоря, факторотображение $S^n \to \mathbb{R}P^n$ переводит диаметрально противоположные точки сферы в одну точку проективного пространства, и на $\mathbb{R}P^n$ рассматривается сильнейшая топология, относительно которой данное отображение непрерывно (такая топология называется фактортопологией).

Экватор делит сферу на верхнюю и нижнюю полусферы. Заметим, что каждый класс эквивалентности имеет представителя в верхней замкнутой полусфере, причем единственного, если он состоит из точек, не

лежащих на экваторе. Экватор представляет собой n - 1-мерную сферу; диаметрально противоположные ее точки эквивалентны и потому их нужно склеить. Так как замкнутая полусфера гомеоморфна n-мерному шару, для $n = 3$ мы приходим к тому описанию, которое дали для SO(3) в Предложении 14.2.

Более наглядно можно представить вещественную проективную плоскость $\mathbb{R}P^2$. Она получается из круга склеиванием диаметрально противоположных точек границы. Выделим в круге часть, ограниченную двумя равными параллельными хордами. При склеивании диаметрально противоположных точек дуг, ограничивающих эту часть круга, получается лист Мёбиуса. Из оставшейся части круга при склеивании диаметрально противоположных точек окружности получается фигура, гомеоморфная кругу. Таким образом, можно получить проективную плоскость, склеивая между собой лист Мёбиуса и круг по окружности (и лист Мёбиуса, и круг ограничены топологической окружностью). Топологи эту конструкцию обычно описывают как приклеивание к 2-мерной сфере "пленки Мёбиуса": сначала из сферы вырезают диск, а затем по границе приклеивают лист Мёбиуса. Читателю, возможно, захочется доказать, что результат приклеивания к сфере двух пленок Мёбиуса гомеоморфен бутылке Клейна.

[064] В общем случае группа SO(n) как многообразие имеет размерность $n(n-1)/2$.

Из приведённого описания следует, что если из проективной плоскости удалить одну точку, то полученная открытая поверхность будет гомеоморфна открытому листу Мёбиуса. С другой стороны, проективная плоскость без точки гомеоморфна пространству всех прямых (не обязательно проходящих через начало координат) в плоскости. Последнее можно увидеть так. В пространстве $\mathbb{R}^3$ рассмотрим плоскость Π, не проходящую через начало координат. Тогда любое двумерное подпространство в $\mathbb{R}^3$ пересечет Π по некоторой прямой, за исключением подпространства, параллельного Π. То есть пространство всех прямых в плоскости гомеоморфно пространству всех кроме одного двумерных подпространств в $\mathbb{R}^3$. С другой стороны, ясно, что $\mathbb{R}P^3$ может быть также определено как пространство всех двумерных подпространств в $\mathbb{R}^3$, поскольку скалярное произведение устанавливает биекцию между одномерными подпространствами и их ортогональными дополнениями - двумерными подпространствами.

То, что пространство всех прямых на плоскости гомеоморфно открытому листу Мёбиуса, можно увидеть и непосредственно.

Задача

14.4. Докажите сформулированное утверждение.
Решение. Введем подходящую параметризацию прямых на плоскости Π. Для этого, во-первых, зафиксируем точку $P \in \Pi$ и направление (луч), выходящий из P. Прямую можно задать, указав ее единичный вектор нормали n, образующий угол $\theta, 0 \leq \theta \leq \pi$ с лучом и действительное число λ, такое, что конец вектора λn, отложенного от P, лежит на данной прямой. Причем прямые, соответствующие парам $(0, \lambda)$ и $(\pi, -\lambda)$, совпадают. То есть множество всех прямых на плоскости биективно фактормножеству множества

$$[0, \pi] \times \mathbb{R} = \{(\theta, \lambda) | 0 \leq \theta \leq \pi, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

по отношению эквивалентности $(0, \lambda) \sim (\pi, -\lambda)$, а это и есть открытая лента Мёбиуса. Нужно отметить, что топологические свойства вещественных проективных пространств $\mathbb{R}P^n$ зависят от четности n: например, нечетномерные проективные пространства ориентируемы как гладкие многообразия, а четномерные - нет.

Вот еще одно интересное описание топологического строения группы SO(3).
Рассмотрим единичную сферу S^2 в ориентированном евклидовом пространстве V. Касательная плоскость $T_x S^2$ к точке $x \in S^2$ состоит из всех векторов $v \in V$ таких, что $(x, v) = 0$. Касательным расслоением TS^2 назовем дизъюнктное объединение касательных плоскостей по всем точкам $x \in S^2$, топология на котором индуцирована вложением $TS^2 \to S^2 \times V$. В каждой касательной плоскости рассмотрим окружность, состоящую из единичных векторов, получим так называемое "единичное касательное расслоение" $S\left(TS^2\right)$.

Задача

14.5. Докажите, что $S\left(TS^2\right)$ гомеоморфно SO(3). (Подсказка: точка в $S\left(TS^2\right)$ - упорядоченная пара единичных ортогональных векторов в V).

3.14.7 14.3 Quaternions

В данном разделе мы определим алгебру кватернионов $\mathbb{H}$, причем воспользуемся ее "бескоординатным" определением, преимущества которого станут ясными из дальнейшего.

Пусть V - трехмерное ориентированное евклидово пространство. Обозначим через $\mathbb{H}$ множество упорядоченных пар (a, v), где $a \in \mathbb{R}, v \in V$. Определим покомпонентное сложение таких пар и умножение их на действительные числа $\lambda(a, v) = (\lambda a, \lambda v)$. Тем самым $\mathbb{H}$ получает структуру четырехмерного векторного пространства над полем $\mathbb{R}, \mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus V$.

Далее, превратим $\mathbb{H}$ в ассоциативную алгебру с единицей над полем $\mathbb{R}$, задав умножение формулой

$$(a, v)(b, w) = (ab - v \cdot w, aw + bv + [v, w]) \tag{122}$$

В этой формуле $\cdot$ и $[,]$ обозначают, соответственно, скалярное и векторное произведение в V.

Предложение

14.6. $\mathbb{H}$ является ассоииативной некоммутативной алгеброй с единицей над полем $\mathbb{R}$.

Proof. □

Билинейность введенного умножения над $\mathbb{R}$ следует из свойств операций скалярного и векторного умножения. Ее единицей является $(1, 0)$. Ассоциативность можно проверить прямым вычислением, используя тождества $([u, v], w) = (u, [v, w])$ и "бац-цаб".

Алгебра $\mathbb{H}$ называется алгеброй кватернионов, а ее элементы - кватернионами. Центр алгебры $\mathbb{H}$ (подалгебра, состоящая из тех элементов, которые коммутируют со всеми элементами $\mathbb{H}$) есть подалгебра

$$\{(\lambda, 0)|\lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{H}$$

изоморфная $\mathbb{R}$. Ниже мы будем отождествлять действительные числа с соответствующими элементами этой подалгебры.

Задача

14.7. Найдите все решения уравнения $x^2 = -1$ в алгебре $\mathbb{H}$. Опишите все гомоморфизмы $\mathbb{R}$ алгебр $\mathbb{C} \to \mathbb{H}$.

Выберем в V произвольный правый онб, который обозначим $\{i, j, k\}$.

Задача

14.8. Напишите табличу умножения "базисных кватернионов" $\{i, j, k\}$.
Обычно предполагается, что в V выбран такой базис, и тогда кватернион q однозначно записывается в виде $a1 + bi + cj + dk$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. (В предыдущих обозначениях эта запись отвечает кватерниону $(a, bi+cj+dk)$). Умножение произвольных кватернионов получается из правила умножения базисных кватернионов по билинейности. Действительное число a называется действительной частью кватерниона q, а $bi+cj+dk \in V$ - его мнимой частью. Чисто мнимые кватернионы (у которых действительная часть равна 0) образуют подпространство $V \subset \mathbb{H}$.

Сопряженным к кватерниону q называется кватернион $\bar{q} = a1 - bi - cj - dk$. Заметим, что кватернион q чисто мнимый $\Leftrightarrow \bar{q} = -q$.

Модулем кватерниона q называется неотрицательное действительное число $|q| := \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$, причем $|q| = 0 \Leftrightarrow q = 0$.

Любой ненулевой кватернион q имеет обратный (по умножению): читатель легко проверит, что $q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$[65]. Таким образом, алгебра $\mathbb{H}$ является телом - некоммутативным аналогом поля.

Читатель легко проверит (для этого удобнее воспользоваться формулой (122)), что $\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2}\,\overline{q_1}$. Тогда, поскольку кватернионы коммутируют с действительными числами, имеем

$$|q_1 q_2|^2 = q_1 q_2 \overline{q_1 q_2} = q_1 q_2 \overline{q_2}\,\overline{q_1} = q_1 |q_2|^2 \overline{q_1} = q_1 \overline{q_1} |q_2|^2 = |q_1|^2 |q_2|^2$$

Это вычисление показывает, что модуль задает гомоморфизм мультипликативных групп $\mathbb{H}^* \to \mathbb{R}^*_{>0}, q \mapsto |q|$. (Заметим, что $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \backslash \{0\}$, поскольку каждый ненулевой элемент алгебры $\mathbb{H}$ обратим). Ядро этого гомоморфизма, состоящее из единичных (то есть длины 1) кватернионов, обозначается $\mathrm{Sp}(1)$. Геометрически группа $\mathrm{Sp}(1)$ является

[065] Обратим внимание читателя, что ввиду некоммутативности $\mathbb{H}$ существует два разных варианта деления на ненулевой кватернион: левое и правое деление. Так как $|q|^2$ лежит в центре $\mathbb{H}$, то в данном случае эти два варианта совпадают.

трехмерной сферой в 4 -мерном вещественном пространстве $\mathbb{H}$ - "высшим" аналогом группы $U(1)$, геометрически являющейся окружностью (=одномерной сферой) в 2 -мерном вещественном пространстве $\mathbb{C}$.

Заметим, что произвольный единичный кватернион можно записать в виде $q = \cos\varphi + v\sin\varphi$, где $v \in V, |v| = 1$.

3.14.8 14.4 Surjective Homomorphism $\mathrm{sp}(1) \to \mathrm{SO}(3)$

Читателю должно быть знакомо применение комплексных чисел к описанию поворотов плоскости (no, how exactly?). В этом разделе мы опишем применение кватернионов к описанию вращений трехмерного евклидова пространства.

Единичному кватерниону q сопоставим преобразование α_q евклидова пространства V по формуле

$$\alpha_q(u) = qu\bar{q}$$

(what is u?)

(Заметим, что для единичного кватерниона q имеет место равенство $\bar{q} = q^{-1}$).

Предложение

14.9. Для любого $q \in \mathrm{Sp}(1)$ преобразование α_q является поворотом пространства V.

Proof. □

Легко видеть, что α_q линейно. Кроме того, $|\alpha_q(u)| = |qu\bar{q}| = |q|^2|u| = |u|$, то есть α_q сохраняет модули векторов. Читатель легко убедится, что если линейное преобразование сохраняет квадратичную форму, то оно сохраняет и соответствующую ей билинейную симметричную форму. Поэтому α_q сохраняет скалярные произведения, то есть является ортогональным преобразованием пространства V.

Как мы знаем, повороты - это в точности те ортогональные преобразования, которые сохраняют ориентацию пространства, то есть те, у которых определитель 1 (а не -1). Ясно, что преобразование α_q непрерывно зависит от q, а значит $\det\alpha_q$ непрерывно зависит от $q \in \mathrm{Sp}(1)$. Так как 3 -мерная сфера связна, то функция $q \mapsto \det\alpha_q$ постоянна на $\mathrm{Sp}(1) \cong S^3$ и при $q = 1$ она, очевидно, равна 1.

Предложение

14.10. Для единичного кватерниона $q = \cos\varphi/2 + v\sin\varphi/2, |v| = 1$ преобразование α_q является поворотом пространства V на угол φ вокруг оси с направляющим вектором v. (Поворот происходит против часовой стрелки, если на плоскость поворота смотреть с кониа вектора v).

Proof. □

Так как все единичные векторы в V равноправны, достаточно рассмотреть случай $v = i$. Несложные вычисления показывают, что

$$(\cos\varphi/2 + i\sin\varphi/2)i(\cos\varphi/2 - i\sin\varphi/2) = i$$
$$(\cos\varphi/2 + i\sin\varphi/2)j(\cos\varphi/2 - i\sin\varphi/2) = j\cos\varphi + k\sin\varphi$$
$$(\cos\varphi/2 + i\sin\varphi/2)k(\cos\varphi/2 - i\sin\varphi/2) = -j\sin\varphi + k\cos\varphi$$

Теорема

14.11. Сопоставление $q \mapsto \alpha_q$ задает сюрбективный гомоморфизм групп $\mathrm{Sp}(1) \to \mathrm{SO}(3)$ с ядром ± 1.

Proof. □

Гомоморфность α следует из выкладки

$$\alpha_{q_1 q_2}(u) = q_1 q_2 u \overline{q_1 q_2} = q_1 \left(q_2 u \overline{q_2}\right) \overline{q_1} = \alpha_{q_1} \alpha_{q_2}(u)$$

Сюръективность α следует из предыдущего Предложения и того, что любой элемент $\mathrm{SO}(3)$ является поворотом на некоторый угол вокруг некоторой оси.

Утверждение о ядре тоже легко следует из предыдущего Предложения.
Заметим, что два кватерниона $q_1, q_2 \in \mathrm{Sp}(1)$ задают один и тот же поворот $\Leftrightarrow q_2 = \pm q_1$. Заметим также, что мы снова пришли к тому, что топологически группа $\mathrm{SO}(3)$ получается из трехмерной сферы отождествлением диаметрально противоположных точек, то есть гомеоморфна пространству $\mathbb{R}P^3$.

Задача

14.12. Определите ось и угол для композиции поворотов сначала на угол $\frac{\pi}{2}$ вокруг оси i, а затем на тот же угол вокруг оси j. (Ответ: поворот на угол $\frac{2\pi}{3}$ вокруг оси с направляющим вектором $i + j - k$)

Note.

14.13. С помощью кватернионов можно также дать описание вращений 4 -мерного евклидова пространства. А именно, рассмотрим $\mathbb{H}$ как евклидово пространство со скалярным произведением, определенным квадратичной формой $|q|^2$. Для пары $p, q \in \mathrm{Sp}(1)$ зададим отображение $\alpha_{p,q} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ формулой $\alpha_{p,q}(x) = px\bar{q}$. Тогда можно доказать, что $\alpha_{p,q}$ является ортогональным преобразованием евклидова пространства $\mathbb{H}$ с положительным определителем и что отображение

$$\mathrm{Sp}(1) \times \mathrm{Sp}(1) \to \mathrm{SO}(4), \quad (p, q) \mapsto \alpha_{p,q}$$

является сюръективным гомоморфизмом групп с ядром $\pm(1,1)$. Отсюда следует, что группа $\mathrm{SO}(4)$ является фактор-пространством произведения сфер $S^3 \times S^3$ по отношению эквивалентности $(x, y) \sim (-x, -y)$.

3.14.9 14.5 Group Isomorphism $\mathrm{sp}(1) \to \mathrm{SU}(2)$

В приложениях (например, в квантовой механике) группа $\mathrm{Sp}(1)$ обычно возникает не как группа единичных кватернионов, а как группа комплексных матриц, поэтому опишем здесь указанный в заголовке изоморфизм.

Вообще, кватернион $a + bi + cj + dk$ можно записать в виде $z + wj$, где $z = a + bi, w = c + di \in \mathbb{C}$. При использовании этой записи нужно только помнить, что $wj = j\bar{w}$.

Кватерниону $z + wj$ сопоставим комплексную матрицу $\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$. Читатель легко проверит, что это определяет инъективный гомоморфизм колец $\mathbb{H} \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$. Он аналогичен вложению $\mathbb{C} \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, с которым мы встречались ранее. При этом квадрат модуля кватерниона равен определителю отвечающей ему матрицы. Это означает, что при указанном гомоморфизме группа $\mathrm{Sp}(1)$ изоморфно отображается на группу $\mathrm{SU}(2)$ (которая топологически тоже является трехмерной сферой).

3.14.10 14.6 Ribbon Experiment

Имеет ли изложенная выше теория о топологическом строении группы SO(3) какие-либо проверяемые физические следствия? Оказывается, да, как показывает описываемый ниже эксперимент с лентой (ремнем).

Возьмем достаточно широкий ремень и закрепим один из его концов. Пусть в первоначальном положении ремень не перекручен. Повернем свободный конец вокруг "оси" ремня на угол 2π, в результате ремень перекрутится. Проверим, что никаким движением свободного конца ремня в пространстве (не поворачивая его вокруг "оси" ремня) эту перекрутку снять нельзя. Далее повернем свободный конец ремня еще на угол 2π в том же направлении, в результате мы удвоим его перекрутку. Теперь убедимся, что движением свободного конца ремня в пространстве полученную двойную перекрутку можно снять.

Дадим теперь математическое объяснение полученному результату. Группу SO(3) можно рассматривать как множество реперов (правых ортонормированных базисов) в 3 -мерном евклидовом пространстве: если зафиксировать один такой репер ("эталон"), то любой получается из него ортогональной матрицей перехода с определителем 1. Рассмотрим координату x вдоль длины ремня. Будем считать, что длина ремня равна 1, то есть x - координата точки на отрезке $[0,1]$. С каждым x свяжем репер в трехмерном пространстве, в котором первый вектор направлен вдоль длины ремня, второй - вдоль ширины, а третий - их векторное произведение. Возьмем за эталон репер в точке $x=0$; тогда положение ремня в $\mathbb{R}^3$ задаст путь в SO(3), начинающийся в точке E. Если конечной точке $x=1$ отвечает тот же эталонный репер, то такое положение ремня задает петлю в SO(3) с началом и концом в E.

Итак, рассмотрим петли в топологическом пространстве X с началом и концом в фиксированной точке $x_0 \in X$, то есть такие непрерывные отображения $\gamma : [0,1] \to X$, что $\gamma(0) = x_0 = \gamma(1)$. Например, если $X = S^2$, то геометрически очевидно, что любая петля γ стягивается (деформируется) в классе петель с началом и концом в x_0 в отмеченную точку $x_0 \in S^2$. Более формально, для γ существует такое непрерывное отображение $H : I \times I \to S^2$, что $H|_{I\times\{0\}} = \gamma$, $H|_{I\times\{1\}} = H|_{\{0\}\times I} = H|_{\{1\}\times I} = c_{x_0}$, где c_{x_0} - постоянная петля, отбражающая весь отрезок в отмеченную точку. Заметим, что петля $H|_{I\times\{t\}} : I \to X$ отвечает промежуточному этапу деформации петли γ в постоянную петлю c_{x_0}, отвечающему значению $t \in [0,1]$ параметра деформации.

Аналогичное утверждение верно и для сферы S^3 (и вообще для $S^n, n > 1$): любая петля в ней стягивается в точку. Однако это уже не так для пространств $\mathbb{R}P^n$. Пусть для наглядности $n = 2$. Рассмотрим половину большой окружности на S^2; ее концы - диаметрально противоположные точки на S^2 и поэтому они отвечают одной и той же точке $x_0 \in \mathbb{R}P^2$. Другими словами, при канонической проекции $S^2 \to \mathbb{R}P^2$ указанный путь на S^2 переходит в петлю с началом и концом в точке x_0. Используя несложное рассуждение из теории накрытий можно доказать, что этот путь не стягивается в отмеченную точку (в противном случае он происходил бы из петли в S^2). Аналогичная нестягиваемая петля γ существует и в $\mathbb{R}P^3 \cong \mathrm{SO}(3)$; ей отвечает перекрутка ремня на угол 2π.

Заметим, что в дважды пройденную петлю γ отображается большая окружность на сфере S^3 (обе половины окружности отображаются в γ). Но как уже отмечалось выше, любая петля в S^3 стягиваема; поэтому как легко понять и ее образ при проекции $S^3 \to \mathbb{R}P^3$ тоже стягиваем. Значит, петля, получающаяся двойным обходом по γ[66], стягиваема. Этот факт и был проверен нами экспериментально: перекрутку ремня на угол 4π можно снять движением его свободного конца (без поворота), что соответствует деформации соответствующей петли в SO(3) в постоянную петлю в точке E.

О связях изложенного материала с различными вопросами математики и физики читатель может узнать, например, из брошюры [3].

---

[066] более формально: для двух петель $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to X$, $\gamma_i(j) = x_0$ при $i = 1,2, j = 0,1$ определим их композицию $\gamma_2 \circ \gamma_1$ как петлю

$$\gamma_2 \circ \gamma_1(s) = \begin{cases} \gamma_1(2s), & \text{если } 0 \le s \le 1/2 \\ \gamma_2(2s-1), & \text{если } 1/2 \le s \le 1 \end{cases}$$

где $s \in [0,1]$. То есть за первую половину времени с удвоенной скоростью пробегаем γ_1, а затем за вторую половину с удвоенной скоростью пробегаем γ_2. При этом существенно, что при деформации

3.15 15 Affine Spaces and Mappings

В курсе аналитической геометрии обычно рассматриваются пространства (точнее, плоскость и (трехмерное) пространство), элементами которых являются точки, а не векторы. (Свободные) векторы там появляются как классы эквивалентности упорядоченных пар точек. Точнее, с каждым "точечным" пространством ассоциируется линейное пространство свободных векторов. Например, декартова система координат в точечном пространстве состоит из фиксированной точки и базиса в ассоциированном пространстве свободных векторов. В этом разделе мы формализуем понятие точечного пространства из курса аналитической геометрии (по-научному называемого аффинным пространством) и связанного с этим понятием класса преобразований (которые называются аффинными преобразованиями).

Еще одну мотивировку рассмотрения аффинных пространств дает теория систем линейных уравнений. Мы знаем, что множество решений однородной системы линейных уравнений является линейным пространством (относительно операций сложения решений и умножения их на скаляры). Множество решений (даже совместной) неоднородной системы линейных уравнений линейным пространством уже не является; в то же время оно обладает некоторой структурой, поскольку ее общее решение есть сумма произвольного частного решения и общего решения соответствующей однородной системы. Геометрическую интерпретацию множества решений совместной неоднородной системы дают аффинные пространства.

3.15.1 15.1 Definition and Examples of Affine Spaces

Определение

15.1. Аффинным пространством над полем $\mathbb{K}$ называется тройка $(S, V, +)$, где S - непустое множество (элементы которого мы будем называть "точками"), V - векторное пространство над полем $\mathbb{K}$ и

$$+ : S \times V \to S, \quad (p, \mathbf{v}) \mapsto p + \mathbf{v} \in S \quad p \in S, \mathbf{v} \in V$$

- операция сложения точки и вектора, обладающая свойствами:

1. $p + \mathbf{0} = p \forall p \in S$;
2. $p + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (p + \mathbf{v}) + \mathbf{w} \forall p \in S, \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$;
3. для любой упорядоченной пары (p, q) точек из S существует, причем единственный, вектор $\mathbf{v} \in V$ такой, что $q = p + \mathbf{v}$.

Если $p + \mathbf{v} = q$, положим $\overrightarrow{pq} := \mathbf{v}$. Если при этом $\mathbf{w} = \overrightarrow{qr}$, то свойство 2) тогда дает $p + (\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}) = (p + \overrightarrow{pq}) + \overrightarrow{qr} = q + \overrightarrow{qr} = r$ и из свойства 3) тогда следует, что $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$.

Кроме того, $\overrightarrow{qp} = -\overrightarrow{pq}$. Действительно, используя свойства 1) -3) операции сложения точки и вектора, имеем:

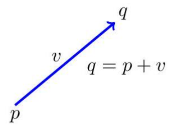
$$q = p + \overrightarrow{pq} = (q + \overrightarrow{qp}) + \overrightarrow{pq} = q + (\overrightarrow{qp} + \overrightarrow{pq}) = q + \mathbf{0} \Rightarrow \overrightarrow{qp} + \overrightarrow{pq} = \mathbf{0} \Rightarrow \overrightarrow{qp} = -\overrightarrow{pq}$$

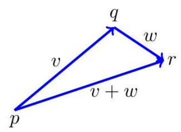
Размерностью аффинного пространства $(S, V, +)$ называется размерность соответствующего векторного пространства V. Аффинные пространства размерности один и два называются соответственно $a\phi$ финной прямой и аффинной плоскостью (также часто под аффинным пространством подразумевают трехмерное аффинное пространство).

Пример 15.2. Наиболее знакомый из курса аналитической геометрии пример - аффинная плоскость (для геометрической наглядности мы полагаем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). В этом случае S - множество точек плоскости, V - векторное пространство свободных векторов

композиции петель должны оставаться на месте только начальная и конечная точки этой композиции, но не конец первой петли и начало второй, которые отвечают значению параметра $1/2$ петли $\gamma_2 \circ \gamma_1$.

на плоскости,$+$ - операция откладывания представителя свободного вектора от точки





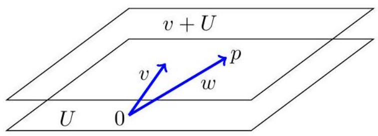
при этом сумма точки и вектора - точка, являющаяся концом отложенного вектора. Все свойства из Определения 15.1 легко проверяются.

Сейчас мы собираемся постоить модель n-мерного аффинного пространства с помощью линейной алгебры.

Пусть V $-$ $n+1$-мерное линейное пространство, $U \subset V$ - его подпространство коразмерности 1. Пусть $v \in V$ - произвольный вектор, не лежащий в U; рассмотрим подмножество

$$v + U = \{v + u | u \in U\} \subset V$$

("сдвиг" подпространства U на вектор v). Заметим, что при условии $v \notin U$ подмножество $v+U \subset V$ не является линейным подпространством в V. Наглядно точки " n-мерной плоскости" $S := v+U$ можно представлять как концы векторов из подмножества $v + U \subset V$ (если эти векторы "откладывать от нулевого вектора" в V):



Покажем, что $(S, U, +)$ является аффинным пространством (здесь "$+$" обозначает операцию прибавления к вектору-точке из $S = v + U$ вектора из U в смысле линейной структуры в V). В самом деле, ясно, что прибавление любого вектора из U к точке из $v+U$ не выводит нас за пределы $v+U$; свойства 1) 3) из Определения выше легко проверяются (точнее, следуют из аксиом линейного пространства).

Заметим, что подпространство U однозначно восстанавливается по подмножеству $S = v + U \subset V$: оно состоит из всех векторов вида $\overrightarrow{pq}$, где $p, q \in S$. Такое подпространство $U \subset V$ называется направляющим подпространством для $(S, U, +)$.

Определение

15.3. Тройка $(T, W, +)$ является аффинным подпространством аффинного пространства $(S, V, +)$, если $T \subset S$ - подмножество, $W \subset V$ - линейное подпространство, операция $T \times W \xrightarrow{+} T$ является ограничением операции $S \times V \xrightarrow{+} S$ и для $(T, W, +)$ выполнены аксиомы из Определения 15.1.

Аффинные подпространства в $(S, V, +)$ можно строить следующим образом. Пусть $W \subset V$ - произвольное линейное подпространство; фиксируем произвольную точку $p_0 \in S$. Положим

$$T := \{p_0 + \mathbf{w} |; \mathbf{w} \in W\} \subset S$$

Тогда $(T, W, +)$ - аффинное подпространство в $(S, V, +)$. Верно и обратное: любое аффинное подпространство в $(S, V, +)$ получается таким образом.

Одномерное аффинное подпространство естественно назвать (аффинной) прямой, двумерное - (аффинной) плоскостью и т.д.

Заметим, что пересечение аффинных подпространств в $(S, V, +)$ при условии, что оно непусто, снова является аффинным подпространством.

Подпространства линейного пространства можно задавать как линейные оболочки каких-то систем векторов. Для аффинного пространства есть аналогичное понятие - аффинная оболочка системы точек. Она определяется как наименьшее аффинное подпространство, содержащее данные точки.

Определение

15.4. Система точек $\{p_0, p_1, \ldots, p_k\}$ в аффинном пространстве $(S, V, +)$ называется а 6 $\oint$ фнно независимой, если не существует $k-1$-мерного аффинного подпространства в $(S, V, +)$, которое их содержит.

Например, система из одной точки всегда аффинно независима, из двух - если они различны, из трех - если они не лежат на одной прямой, из четырех - если они не лежат в одной двумерной плоскости и т.д.

Вернемся к нашей модели n-мерного аффинного пространства $(S, U, +)$, где $S = v + U$. Пусть его точки $\{p_0, p_1, \ldots, p_k\}$ соответствуют векторам $\{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$ в $v+U \subset V$ (то есть точка p_i - конец вектора v_i, "отложенного от $0 \in V$ "). Положим также $u_i := v_i - v_0 \in U, 1 \leq i \leq k$ и $W := \langle u_1, \ldots, u_k \rangle \subset U$. Ясно, что $(p_0 + W, W, +)$ является наименьшим аффинным подпространством в $(v+U, U, +)$, содержащим все точки $p_i, 1 \leq i \leq k$ (поскольку $p_i = p_0 + u_i$ и $u_i = \overrightarrow{p_0 p_i}$).

Lemma

15.5. В предыдущих обозначениях система векторов $\{u_1, \ldots, u_k\}$ линейно независима тогда и только тогда, когда система векторов $\{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$ линейно независима.

Proof. □

Пусть система $\{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$ линейно зависима и $\sum\limits_{i=0}^{k} \lambda_k v_k = 0$ - соответствующая нетривиальная линейная комбинация. Поскольку все $v_i \in v + U$, причем $v \notin U$, такое возможно только при условии $\sum\limits_{i=0}^{k} \lambda_k = 0$. Поэтому $\lambda_0 = -\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j$ и

$$0 = \sum_{i=0}^{k} \lambda_k v_k = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j v_j - \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \right) v_0 = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \left(v_j - v_0 \right) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j$$

Обратно:

$$\sum_{j=1}^{k} \mu_j u_j = \sum_{j=1}^{k} \mu_j \left(v_i - v_0 \right) = 0$$

Заметим, что условие линейной зависимости (или независимости) системы векторов $\{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$ не зависит от их порядка, а значит линейная зависимость или независимость полученной из нее системы $\{v_0 - v_m, \ldots, v_{m-1} - v_m, v_{m+1} - v_m, \ldots, v_k - v_m\}$ не зависит от выбора вектора v_m.

Предложение

15.6. Следующие условия эквивалентны:

1. система точек $\{p_0, p_1, \ldots, p_k\}$ аффинно независима;
2. система векторов $\{u_1, \ldots, u_k\}$ линейно независима.

Proof. □

1) $\Rightarrow$ 2): если система $\{u_1, \ldots, u_k\}$ линейно зависима, то $\dim W < k$ и все точки $p_i, 1 \leq i \leq k$ лежат в $\dim W$-мерном аффинном подпространстве $p_0 + W$, то есть система точек $\{p_0, p_1, \ldots, p_k\}$ аффинно зависима.
2) $\Rightarrow$ 1): если система точек $\{p_0, p_1, \ldots, p_k\}$ аффинно зависима, то размерность направляющего подпространства $\langle \overrightarrow{p_0 p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0 p_k} \rangle$ их аффинной оболочки $< k$, откуда следует требуемое, поскольку $u_i = \overrightarrow{p_0 p_i}$.

3.15.2 15.2 Cartesian Coordinate Systems

Пусть $(S, V, +)$ - аффинное n-мерное пространство.

Определение

15.7. Декартовой системой координат (кратко дск) в $(S, V, +)$ называется пара $o, \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, состоящая из точки $o \in S$ и базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в V.

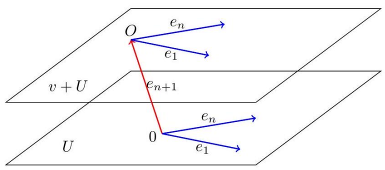
Если в пространстве $(S, V, +)$ задана дск $o, \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, то координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ произвольной точки $p \in S$ - это по определению координаты вектора $\overrightarrow{op} \in V$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$:

$$\overrightarrow{op} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$$

Легко видеть, что координаты точки $q = p + \mathbf{v}$ равны суммам соответствующих координат точки p и вектора $\mathbf{v}$. Действительно, условие $q = p + \mathbf{v}$ превращается в $\overrightarrow{oq} = \overrightarrow{op} + \mathbf{v}$ и, как мы знаем, координаты вектора $\overrightarrow{oq}$ равны суммам соответствующих координат векторов $\overrightarrow{op}$ и $\mathbf{v}$. Отсюда получаем, что координаты вектора $\overrightarrow{pq}$ равны разностям соответствуюших координат точек q и p.

Читателю предлагается убедиться, что прямые на плоскости и в пространстве, а также плоскости в пространстве имеют известные из курса аналитической геометрии уравнения.

Обратимся снова к введенной выше модели $(v + U, U, +)n$-мерного аффинного пространства. Напомним, что U является n-мерным линейным подпространством $n+1$-мерного линейного пространства V. Выберем базис в V следующим образом: пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ образуют базис в подпространстве U и $e_{n+1} \in v + U$. В этом базисе подмножество $v+U \subset V$ задается уравнением $x_{n+1} = 1$. Такой базис определяет некоторую декартову систему координат в $(v + U, U, +)$: в качестве точки $o \in v + U$ возьмем конец вектора e_{n+1}, а в качестве базиса в $U - \{e_1, \ldots, e_n\}$:



Тогда если вектор $w \in v+U$ имеет координаты $(x_1, \ldots, x_n, 1)^T$ в базисе $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}\}$ пространства V, то соответствующая ему точка в $(v + U, U, +)$ имеет координаты $(x_1, \ldots, x_n)^T$ в дск $o, \{e_1, \ldots, e_n\}$. (В самом деле, это - координатный столбец вектора $\overrightarrow{op} \in U$ в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$ пространства U).

Заметим, что подпространство $U \subset V$ характеризуется тем, что его векторы имеют нулевую $n+1$-ю координату, поэтому их прибавление к координатным столбцам $(x_1, \ldots, x_n, 1)^T$ не выводит за пределы указанного множества.

Рассмотрим замены базисов и координат. Пусть $\widetilde{C}$ - матрица перехода между базисами $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}\}$ и $\left\{e'_1, \ldots, e'_n, e'_{n+1}\right\}$ рассмотренного выше вида в пространстве V, то есть в которых первые n векторов образуют базис в подпространстве U, а $e_{n+1}, e'_{n+1} \in v + U$. Тогда $\widetilde{C}$ имеет блочный вид

$$\begin{pmatrix} C & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где C - матрица перехода между базисами $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ пространства $U, b = (b_1, \ldots, b_n)^T$ - столбец координат начала новой дск (отвечающей базису $\left\{e'_1, \ldots, e'_n, e'_{n+1}\right\}$) относительно старой дск. Соответственно, для координат векторов из $v + U$ имеем формулу замены

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Cx' + b \\ 1 \end{pmatrix}$$

где $x := (x_1 \ldots, x_n)^T, x' = (x_1, \ldots, x'_n)^T$, то есть связь декартовых координат точек задается формулой

$$x = Cx' + b,$$

знакомой из курса аналитической геометрии.

3.15.3 15.3 Affine Mappings

Пусть $(S, V, +)$ и $(T, U, +)$ - аффинные пространства над одним и тем же полем $\mathbb{K}$.

Определение

15.8. Аффинным отображением $(S, V, +) \to (T, U, +)$ называется пара (f, φ), состоящая из отображения множеств $f : S \to T$ и линейного отображения $\varphi : V \to U$ такая, что $\forall p \in S, \forall \mathbf{v} \in V$

$$f(p + \mathbf{v}) = f(p) + \varphi(\mathbf{v}) \tag{123}$$

Заметим, что условие (123) равносильно условию коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} S \times V \arrow[r, "+"] \arrow[d, "f \times \varphi"'] & S \arrow[d, "f"] \\ T \times U \arrow[r, "+"] & T \end{tikzcd}$$

Полезно также отметить, что линейное отображение φ восстанавливается по отображению f, удовлетворяющему условию (123). В самом деле, пусть $\mathbf{v} = \overrightarrow{pq}$, то есть $q = p + \mathbf{v}$; тогда $f(q) = f(p) + \varphi(\mathbf{v}) \Rightarrow \varphi(\mathbf{v}) = \overrightarrow{f(p)f(q)}$. Поэтому иногда мы будем для краткости записывать аффинное отображение просто как $f : S \to T$. Линейное отображение φ называется дифференциалом f, далее мы будем обозначать его df.

Наоборот, как непосредственно следует из (123), аффинное отображение f восстанавливается по своему дифференциалу df и образу $f(p) \in T$ произвольной точки $p \in S$.

Note.

15.9. Заметим также, что выполнение свойства (123) достаточно потребовать для некоторой точки $p \in S$ и для любого вектора $\mathbf{v} \in V$, тогда оно будет верно для любой точки $q \in S$. Действительно, пусть $f(p + \mathbf{v}) = f(p) + df(\mathbf{v}) \forall \mathbf{v} \in V$. Тогда

$$f(q + \mathbf{v}) = f((p + \overrightarrow{pq}) + \mathbf{v}) = f(p + (\overrightarrow{pq} + \mathbf{v})) = f(p) + df(\overrightarrow{pq} + \mathbf{v}) =$$
$$= f(p) + df(\overrightarrow{pq}) + df(\mathbf{v}) = f(p) + \overrightarrow{f(p)f(q)} + df(\mathbf{v}) = f(q) + df(\mathbf{v})$$

Предложение

15.10. Пусть $f : S \to T, g : T \to R$ - аффинные отображения. Тодда их композиция $g \circ f : S \to R$ - тоже аффинное отображение, причем $d(g \circ f) = (dg) \circ (df)$.

Proof. □

Пусть $p \in S, \mathbf{v} \in V$. Тогда имеем:

$$(g \circ f)(p+\mathbf{v}) = g(f(p+\mathbf{v})) = g(f(p)+df(\mathbf{v})) = g(f(p))+dg(df(\mathbf{v})) = (g \circ f)(p)+(dg \circ df)(\mathbf{v})$$

откуда вытекает аффинность композиции $g \circ f$, так как композиция линейных отображений $dg \circ df$ линейна.

Оказывается, обратимость аффинного отображения полностью определяется его дифференциалом.

Предложение

15.11. Аффинное отображение $f : S \to T$ биективно $\Leftrightarrow$ линейное отображение $df : V \to U$ биективно.

Доказательство следует непосредственно из формулы $f(p+v) = f(p) + df(v)$ при фиксированном $p \in S$.
В самом деле, предположим, что f биективно. Тогда если df не инъективно, то есть существуют $v \neq w \in V$ такие, что $df(v) = df(w)$, то точки $p+v \neq p+w$ при применении f имеют одинаковые образы. С другой стороны, так как в силу сюръективности $f \forall q \in T$ уравнение $f(p+v) = q$ разрешимо относительно v при фиксированном p, то $\forall q \in T \exists v \in V$ такой, что $df(v) = \overrightarrow{f(p)q}$, что означает сюръективность df.

Предположим теперь что df биективно. Тогда если f не инъективно, то для некоторых $v \neq w \in V \xrightarrow{f(p+v}) = f(p+w)$, что противоречит инъективности df. С другой стороны, если $v \in V$ - прообраз вектора $\overrightarrow{f(p)q} \in U$ относительно df, то $f(p+v) = q$, то есть произвольная точка $q \in S$ лежит в образе f.

Как мы знаем, отображение, обратное к биективному линейному, тоже линейно. То же верно и для аффинных отображений.

Предложение

15.12. Пусть $f : S \to T$ - биективное аффинное отображение. Тодда $f^{-1} : T \to S$ такжее аффинно, причем $d\left(f^{-1}\right) = (df)^{-1}$.

Proof. □

Для биективного отображения f однозначно определено теоретико-множественное обратное f^{-1}. Докажем, что если f аффинно, то f^{-1} тоже аффинно, а именно что для любых точек $p, q \in S$ справедливо равенство

$$f^{-1}(q) = f^{-1}(p) + (df)^{-1}(\overrightarrow{pq})$$

В самом деле,

$$f\left(f^{-1}(p) + (df)^{-1}(\overrightarrow{pq})\right) = f\left(f^{-1}(p)\right) + df\left(df^{-1}(\overrightarrow{pq})\right) = p + \overrightarrow{pq} = q = f\left(f^{-1}(q)\right)$$

откуда требуемое вытекает с учетом биективности f.
В качестве следствия из доказательства мы получили равенство $d\left(f^{-1}\right) = (df)^{-1}$ для биективного аффинного отображения f.

Определение

15.13. Два аффинных пространства $(S, V, +)$ и $(T, U, +)$ над одним и тем же полем изоморфны тогда и только тогда, когда существует биективное аффинное отображение $(f, df) : (S, V, +) \to (T, U, +)$.

Из доказанного выше следует, что на множестве всех аффинных пространств над данным полем отношение изоморфизма является отношением эквивалентности.

Теорема

15.14. Аффинные пространства над данным полем изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.

Proof. □

Из Предложения 15.11 следует, что если аффинные пространства изоморфны, то их размерности равны.

Докажем что верно обратное. Пусть $(S, V, +)$ и $(T, U, +)$ - аффинные пространства одинаковой размерности и $\varphi : V \to U$ - некоторый линейный изоморфизм. Выберем произвольные точки $p \in S$ и $q \in T$ и определим отображение $f : S \to T$ по формуле $f(p + v) = q + \varphi(v) \forall v \in V$. Тогда из Замечания 15.9 следует, что так определенное f является аффинным; кроме того, $df = \varphi$, а значит по Предложению 15.11f - изоморфизм.

В частности, любое n-мерное аффинное пространство изоморфно нашей модели $(v + U, U, +)$.

3.15.4 15.4 Affine Transformations

Определение

15.15. Аффинное отображение (f, df) из аффинного пространства $(S, V, +)$ в себя называется аффинным преобразованием.

Для краткости аффинное преобразование мы будем записывать просто $f : S \to S$. Рассмотрим примеры аффинных преобразований.

Пример 15.16. Тождественное преобразование $f = \mathrm{Id}_S : S \to S$ является аффинным. Заметим, что его дифференциал - тождественное линейное преобразование $\mathrm{Id}_V : V \to V$.

Тождественное преобразование - частный случай классов преобразований из следующих двух примеров.

Пример 15.17. Параллельный перенос на вектор $\mathbf{v} \in V$ определяется следующим образом:

$$t_{\mathbf{v}} : S \to S, \quad t_{\mathbf{v}}(p) = p + \mathbf{v} \quad \forall p \in S$$

Если $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, то $t_{\mathbf{0}} = \mathrm{Id}_S$. Заметим, что дифференциал $dt_{\mathbf{v}} = \mathrm{Id}_V$. Действительно, если $\mathbf{w} = \overrightarrow{pq}$, то

$$dt_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) = dt_{\mathbf{v}}(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{t_{\mathbf{v}}(p)t_{\mathbf{v}}(q)} = \overrightarrow{pq} = \mathbf{w}$$

Обратно, пусть $f : S \to S$ - аффинное преобразование такое, что $df = \mathrm{Id}_V$. Покажем, что $f = t_{\mathbf{v}}$ для некоторого $\mathbf{v} \in V$. В самом деле, выберем некоторую точку $p \in S$ и положим $\mathbf{v} := \overrightarrow{pf(p)}$. Тогда для произвольной точки $q \in S$ имеем:

$$f(q) = f(p) + df(\overrightarrow{pq}) = f(p) + \overrightarrow{pq} = p + \mathbf{v} + \overrightarrow{pq} = p + \overrightarrow{pq} + \mathbf{v} = q + \mathbf{v} = t_{\mathbf{v}}(q)$$

Пример 15.18. Гомотетией с центром в точке о $\in S$ и коэффициентом λ называется аффинное преобразование, задаваемое формулой $f(o + \mathbf{v}) = o + \lambda\mathbf{v}$. Заметим, что из определения следует, что $df = \lambda \, \mathrm{Id}_V$.

Покажем, что, обратно, аффинное преобразование $f : S \to S$ такое, что $df = \lambda \, \mathrm{Id}_V, \lambda \neq 1$, есть гомотетия с центром в некоторой точке $o \in S$. Центр гомотетии характеризуется тем, что это - неподвижная точка преобразования f, то есть $f(o) = o$. Покажем, что неподвижная точка в нашем случае действительно существует.

Пусть p - произвольная точка аффинного пространства S. Имеем:

$$f(o) = f(p + \overrightarrow{po}) = f(p) + df(\overrightarrow{po}) = f(p) + \lambda \, \mathrm{Id}_V(\overrightarrow{po}) = f(p) + \lambda\overrightarrow{po}$$

и если o - неподвижная точка, то $o = f(p) + \lambda\overrightarrow{pb}$, то есть $\overrightarrow{po} = \overrightarrow{pf(p)} + \lambda\overrightarrow{po}$, тогда $\overrightarrow{po} = \frac{1}{1-\lambda}\overrightarrow{pf(p)}$. Проверим, что точка $o = p + \overrightarrow{po}$ неподвижна:

$$f(o) = f\left(p + \frac{1}{1-\lambda}\overrightarrow{pf(p)}\right) = f(p) + \frac{\lambda}{1-\lambda}\overrightarrow{pf(p)} =$$
$$= f(p) + \overrightarrow{f(p)p} + \frac{1}{1-\lambda}\overrightarrow{pf(p)} = p + \frac{1}{1-\lambda}\overrightarrow{pf(p)} = o$$

Покажем теперь, что f - гомотетия с центром в неподвижной точке o. Пусть $q \in S$ - произвольная точка, тогда $f(q) = f(o + \overrightarrow{oq}) = f(o) + df(\overrightarrow{oq}) = o + \lambda\overrightarrow{oq}$, то есть f - действительно гомотетия с центром в точке o и коэффициентом λ.

Пример 15.19. Преобразование $f : S \to S$ такое, что $\forall q \in S f(q) = p$, где $p \in S$ - фиксированная точка, является аффинным. Для него $df = 0$.

Вернемся к изучению общих свойств аффинных преобразований. Из результатов предыдущего параграфа легко выводится следующее

Следствие

15.20. Биективные аффинные преобразования $f : S \to S$ образуют группу относительно операции композиции. Эта группа обозначается $\mathrm{GA}(S)$ и называется группой аффинных преобразований аффинного пространства S.

Для аффинного пространства $(S, V, +)$ через $\mathrm{Trans}(S)$ обозначим подгруппу $\{t_{\mathbf{v}} | \mathbf{v} \in V\} \subset \mathrm{GA}(S)$ параллельных переносов (см. Пример 15.17). Очевидно, что сопоставление $\mathbf{v} \mapsto t_{\mathbf{v}}$ определяет изоморфизм $\mathrm{Trans}(S) \to (V, +)$ группы параллельных переносов с аддитивной группой $(V, +)$ пространства V.

Следствие

15.21. Сопоставление $f \mapsto df$ задает гомоморфизм групп $d : \mathrm{GA}(S) \to \mathrm{GL}(V)$ с ядром $\mathrm{ker}d = \mathrm{Trans}(S)$.

Proof. □

То, что d является гомоморфизмом групп, следует из Предложения 15.10.
Часть утверждения, касающаяся ядра, следует из Примера 15.17.
То, что подгруппа параллельных переносов является нормальной подгруппой в $\mathrm{GA}(S)$, можно проверить и непосредственно вычислением:

$$\left(ft_v f^{-1}\right)(p) = f\left(f^{-1}(p) + v\right) = p + df(v) = t_{df(v)}(p)$$

для произвольных $f \in \mathrm{GA}(S)$ и $t_v \in \mathrm{Trans}(S)$.
Посмотрим теперь как аффинные преобразования задаются в декартовой системе координат. Пусть $o, \{e_1, \ldots, e_n\}$ - некоторая дск в аффинном пространстве $(S, V, +)$. Тогда из равенства $f(p) = f(o) + df(\overrightarrow{op})$ получаем равенство

$$(y_1, \ldots, y_n)^T = A\,(x_1, \ldots, x_n)^T + (b_1, \ldots, b_n)^T \tag{124}$$

в котором $(y_1, \ldots, y_n)^T, (x_1, \ldots, x_n)^T$ и $(b_1, \ldots, b_n)^T$ - кординатные столбцы соответственно точек $f(p), p$ и $f(o)$ в дск $o, \{e_1, \ldots, e_n\}$, а A - матрица линейного преобразования df в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$ пространства V. Другими словами, аффинное преобразование преобразует координатные столбцы точек по формуле $x \mapsto Ax + b$.

Вернемся теперь к нашей модели $(v + U, U, +)n$-мерного аффинного пространства. Ее преимущество в том, что она хорошо демонстрирует связь между линейными и аффинными преобразованиями. А именно, мы собираемся доказать, что аффинные преобразования афинного пространства $(v + U, U, +)$ - это в точности ограничения на $v + U \subset V$ линейных преобразований объемлющего линейного пространства V, которые оставляют $v + U$ инвариантным.

Предложение

15.22. Линейное преобразование $\varphi : V \to V$ оставляет подмножество $v + U \subset V$ инвариантным $\Leftrightarrow$ одновременно выполняются следующие условия:

1. $\varphi(v) \in v + U$;

2. подпротранство $U \subset V \varphi$-инвариантно.

Доказательство очевидно.
Пусть $o, \{e_1, \dots, e_n\}$ - дск в $(v + U, U, +)$, отвечающая базису $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}\}$ в V (то есть $\{e_1, \dots, e_n\}$ - базис в U, а начало координат $o \in v + U$ - конец вектора e_{n+1}). Тогда легко видеть, что матрица $\widetilde{A}$ оператора $\varphi : V \to V$ из предыдущего Предложения в базисе $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}\}$ имеет вид

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{125}$$

где A - матрица линейного оператора $\varphi|_U$ в базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$, а $\binom{b}{1}$ - координатный столбец вектора $\varphi(e_{n+1})$ в базисе $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}\}$. Наоборот, любая матрица указанного вида является матрицей оператора на V, оставляющего $v + U$ инвариантным.

Заметим, что

$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax + b \\ 1 \end{pmatrix} \tag{126}$$

Кроме того, напомним, что координаты точки из $v+U$ в дск $o, \{e_1, \dots, e_n\}$ получаются из координат соответствующего вектора из $v+U$ в базисе $\{e_1, \dots, e_n, e_{n+1}\}$ отбрасыванием последней единицы. Поэтому (126) равносильно формуле $x \mapsto Ax+b$ действия аффинного преобразования в координатах (ср. (124)).

Полученные результаты можно резюмировать в виде следующего Предложения.

Предложение

15.23. Любое аффинное преобразование аффинного пространства $(v + U, U, +)$ получается ограничением линейного преобразования $\varphi : V \to V$ облемлющего пространства V, оставляющего $v + U \subset V$ инвариантным. При этом $\varphi|_U$ является дифференциалом соответствуюшего аффинного преобразования. Наоборот, ограничение на $v + U$ произвольного линейного преобразования $\varphi : V \to V$ оббемлющего пространства V, оставляющего $v + U \subset V$ инвариантным, задает аффинное преобразование аффинного пространства $(v + U, U, +)$.

Теперь например то, что композиция аффинных преобразований аффинна и дифференциал композиции равен композиции дифференциалов можно вывести из равенства

$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AC & Ad + b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Кроме того, ясно, что матрица (125) обратима $\Leftrightarrow$ матрица A обратима, причем в последнем случае

$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Изучим теперь некоторые теоретико-групповые свойства группы $\mathrm{GA}(S)$, используя найденное нами ее матричное представление (в частности, с данного момента мы рассматриваем только обратимые аффинные преобразования).

Во-первых, гомоморфизм $d : \mathrm{GA}(S) \to \mathrm{GL}(U)$ в матричном виде выглядит как сопоставление

$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto A.$$

Его ядром является подгруппа параллельных переносов, образованных матрицами вида $\begin{pmatrix} E & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ для всевозможных столбцов $b \in \mathbb{K}^n$. Значит, подгруппа параллельных переносов $\mathrm{Trans}(S)$ нормальна в $\mathrm{GA}(S)$ (см.

Предложение

4.89).

Легко видеть, что матрицы вида $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ образуют подгруппу в $\mathrm{GA}(S)$, изоморфную $\mathrm{GL}(U)$. Эта подгруппа состоит из всех аффинных преобразований аффиного пространства $(v+U, U, +)$, оставляющих точку о неподвижной, то есть является стабилизатором точки $o \in v+U$. Кроме того, равенство $\begin{pmatrix} E & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ показывает, что любой элемент из группы $\mathrm{GA}(S)$ является произведением параллельного переноса и элемента из стабилизатора, причем, как легко убедиться, это представление единственно (если произведение записывать в данном порядке). Это означает, что группа $\mathrm{GA}(S)$ является полупрямым произведением указанных подгрупп (о том, что это такое, можно почитать, например, в [12]).

Заметим, что точка $o \in v+U$ ничем не отличается от других точек аффинного пространства. Используя тот факт, что стабилизаторы разных точек одной орбиты действия группы сопряжены с помощью
элемента, переводящего первую точку во вторую, найдем стабилизатор точки в $v+U$ с координатным столбцом $b \in \mathbb{K}^n$:

$$\begin{pmatrix} E & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -Ab+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

То есть при любом фиксированном b матрицы вида $\begin{pmatrix} A & -Ab+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ для $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ образуют подгруппу группы $\mathrm{GA}(S)$, изоморфную $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Задача

15.24. Докажите, что композиция гомотетий с чентрами в точках $p \neq q$ и коэффициентами λ, μ при $\lambda\mu \neq 1$ - гомотетия, а при $\lambda\mu = 1$ - нетривиальный [67] параллельный перенос.

Задача

15.25. Докажите, что группа преобразований аффинной плоскости S, порожденная гомотетиями с $\lambda \neq 0$ и параллельными переносами, допускает следующее описание. Ее элементами являются упорядоченные пары (b, λ), где $b \in \mathbb{K}^n, \lambda \in \mathbb{K}^*$, причем $(b,\lambda)\cdot(d,\mu) = (b+\lambda d, \lambda\mu)$. При этом роль нейтрального элемента играет $(0,1)$, роль обратного $-(b,\lambda)^{-1} = (-\lambda^{-1}b, \lambda^{-1})$. (Таким образом, данная группа изоморфна полупрямому произведению $\mathrm{Trans}(S)$ и $\mathbb{K}^*$).

Задача

15.26. 1) Докажите, что для одномерного аффинного пространства S над полем из трех элементов группа $\mathrm{GA}(S)$ изоморфна S_3. 2) Докажите, что для двумерного аффинного пространства S над полем из двух элементов группа $\mathrm{GA}(S)$ изоморфна S_4.

Мы знаем, что для любых двух базисов в линейном пространстве V существует единственное линейное преобразование, переводящее первый базис во второй (с сохранением порядка векторов). Оно автоматически оказывается обратимым. Мы собираемся доказать аналогичное утверждение для аффинных пространств.

Предложение

15.27. Пусть $\{p_0, \ldots, p_n\}$ - аффинно независимая система из $n+1$ точки в n-мерном аффинном пространстве $(S, V, +)$. Пусть $\{q_0, \ldots, q_n\}$ - произвольная система их $n+1$ точки в S. Тогда существует, причем единственное, аффинное преобразование $f : S \to S$ такое, что $f(p_i) = q_i, 0 \leq i \leq n$, причем f биективно $\Leftrightarrow$ точки $\{q_0, \ldots, q_n\}$ аффинно независимы.

Proof. □

Воспользуемся нашей моделью $(v + U, U, +) n$-мерного аффинного пространства. Пусть системе точек $\{p_0, \ldots, p_n\}$ отвечает система векторов $\{v_0, \ldots, v_n\}$ объемлющего пространства V. Из аффинной независимости точек следует ее линейная независимость, то есть что $\{v_0, \ldots, v_n\}$ - базис в V. Аналогично, пусть точкам $\{q_0, \ldots, q_n\}$ отвечает система векторов $\{w_0, \ldots, w_n\}$ в V. Мы знаем, что тогда существует единственное линейное преобразование $\varphi : V \to V$ такое, что $\varphi(v_i) = w_i, 0 \leq i \leq n$, причем оно будет изоморфизмом $\Leftrightarrow$ система $\{w_0, \ldots, w_n\}$ линейно независима, что равносильно аффинной независимости системы точек $\{q_0, \ldots, q_n\}$. Осталось заметить, что из условия следует, что $v + U$ инвариантно относительно φ.

В частности, из доказанного Предложения легко следует, что для любых двух дск в данном аффинном пространстве существует единственное аффинное преобразование, переводящее первую дск во вторую.

На этом мы завершаем наше краткое знакомство с аффинными пространствами. Далее можно было бы рассмотреть аффинные евклидова пространства $(S, V, +)$, для которых V не просто линейное, а евклидово пространство. В таких пространствах можно определить расстояние между точками (как $\text{dist}(p, q) = |\overrightarrow{pq}|$), углы между подпространствами и т.д. В них можно рассматривать не просто дск, а прямоугольные декартовы системы координат (пдск). В группе аффинных преобразований такого пространства имеется подгруппа движений - преобразований, сохраняющих расстояния между точками. Аффинное преобразование f является движением тогда и только тогда, когда его дифференциал $df : V \to V$

(остальное потом добавлю)

4 Other Topics and Similar Theory about Basics [DELETE THIS!!!]

4.1 Typical Designs

(определения и самые первые понятия, которые вводятся, потом сюда напишу. вроде не сложно, просто раз нужно потренироваться, чтобы не писать херни.)

(всё по костр 2)

4.1.1 Dimensionality of a Vector Space and its Basis

Теория

Могут представиться два случая: либо в пространстве V можно найти произвольное число линейно независимых векторов (системы векторов произвольного ранга), и тогда оно называется бесконечномерным, либо все достаточно большие системы векторов в V линейно зависимы. Бесконечномерные линейные пространства, содержательная теория которых предполагает наличие в них дополнительной, обычно топологической структуры, будут рассматриваться лишь эпизодически.

[067] то есть на ненулевой вектор.

Определение

3. Линейное пространство V, в котором существует n линейно независимых векторов, но нет линейно независимых систем с бОльшим числом векторов (большего ранга), называется n-мерным (в записи: $\dim_{\mathfrak{K}} V = n$ или просто $\dim V = n$). Нулевое пространство считается нульмерньм.

Это определение хорошо согласуется с понятием размерности прямой (одномерное пространство), плоскости ($n = 2$), пространства $\mathbb{R}^3_\Phi$ ($n = 3$). В новой терминологии ранг семейства векторов $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots\}$ есть не что иное как размерность линейной оболочки $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \rangle$.

П ри меры.

1) Координатное пространство $\mathfrak{K}^n$ имеет размерность n Если бы это было не так, то наше определение размерности следовало признать неполноценным.

2) Пространство матриц размера $m \times n$ имеет размерность mn, в чём легко убедиться, расположив элементы матрицы в одну строку длины mn и отождествив пространство $m \times n$-матриц с координатным пространством $\mathfrak{K}^{mn}$.

3) Пространство функций в примере 4 из § 1, очевидно, бесконечномерно.

4) Пространство P_n многочленов степени $\leqslant n - 1$ от одной переменной, очевидно, n-мерно. Линейно независимыми будут, например, векторы $1, t, \ldots, t^{n-1}$.

5) Пространство однородных форм степени k от m переменных имеет размерность $n = \begin{pmatrix} k + m - 1 \\ k \end{pmatrix}$ (проверьте это).

В двух последних примерах без труда указываются системы из n линейно независимых векторов. Для определения размерности необходимо, однако, убедиться в том, что в этих пространствах нет систем большего ранга. Перебора всевозможных систем можно избежать, как нетрудно сообразить, если использовать теорему 2 или её следствия.

О п ре д елени е 4.

Пусть V — n-мерное векторное пространство над полем $\mathfrak{k}$. Любая система из n линейно независимых векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \in V$ называется (конечным линейным) базисом пространства V.

Удобно считать, что базис нульмерного пространства образует пустое множество векторов. Существование базиса в V вытекает из определения n-мерного пространства.

Следующая теорема показывает, в частности, каким образом можно фактически строить новый базис, исходя из заданного.

Теорема

3.

Пусть V-векториое пространство над $\curvearrowleft$ с базисом $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$. Тогда имеют место следующие утверждения:

i) каждый вектор $\mathbf{v} \in V$ можно представить, и притом единственным образом, в виде линейной комбинации векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$;

ii) всякую систему из $s \leqslant n$ линейно независимых векторов $\mathbf{f}_1, \ldots \ldots, \mathbf{f}_8$ пространства V можно дополнить до базиса. *В* частности, любой вектор $\mathbf{v} \neq 0$ можно вКлючить в базис.

Proof. □

i) Присоединив к данному базису произвольный вектор $\mathbf{v} \in V$, мы получим согласно определению n-мерного пространства линейно зависимую систему, причём в нетривиальном соотношении

$$\alpha \mathbf{v} + \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_n \mathbf{e}_n = \mathbf{0}$$

коэффициент α должен быть отличен от нуля. Следовательно,

$$\mathbf{v} = \left(-\alpha^{-1}\alpha_1\right) \mathbf{e}_1 + \ldots + \left(-\alpha^{-1}\alpha_n\right) \mathbf{e}_n$$

- линейная комбинация базисных векторов. Из существования двух разложений

$$\beta_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \beta_n \mathbf{e}_n = \mathbf{v} = \gamma_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \gamma_n \mathbf{e}_n$$

мы получили бы после вычитания соотношение

$$(\beta_1 - \gamma_1)\,\mathbf{e}_1 + \ldots + (\beta_n - \gamma_n)\,\mathbf{e}_n = \mathbf{0},$$

но ввиду линейной независимости $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ отсюда вытекало бы равенство нулю всех коэффициентов:

$$\beta_1 - \gamma_1 = \ldots = \beta_n - \gamma_n = 0,$$

т.е. $\beta_1 = \gamma_1, \ldots, \beta_n = \gamma_n$. Тем самым установлена единственность разложения. ii) Рассмотрим систему векторов

$$\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_s; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n.$$

Выбросим теперь из системы (1) все те векторы, которые выражаются линейно через предыдущие. По условию $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_s$ линейно независимы, поэтому ни один из них выброшен не будет, и оставшаяся система примет вид

$$\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_s; \mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_t}.$$

Любое нетривиальное соотношение

$$\alpha_1 \mathbf{f}_1 + \ldots + \alpha_s \mathbf{f}_s + \beta_1 \mathbf{e}_{i_1} + \ldots + \beta_t \mathbf{e}_{i_t} = \mathbf{0}$$

содержало бы коэффициент $\beta_k \neq 0$ с максимальным номером k, и мы выразили бы вектор $\mathbf{e}_{i_k}$ через предыдущие векторы системы (2), что исключено по построению. С другой стороны, согласно i) все векторы из V выражаются линейно через базис $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$, тем более через систему (1), а стало быть, и через систему (2). Таким образом, линейно независимая система (2) максимальна. Она будет базисом пространства V, а $\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_t}$ - искомым дополнением.

Рассуждение, использованное при доказательстве утверждения ii), называют по традиции принципом Стейнича о замене. Тривиальным следствием утверждения ii) является импликация

$$V_1 \subsetneq V_2 \Longrightarrow r_1 < r_2,$$

где V_1, V_2 - подпространства в V размерностей соответственно r_1, r_2. З амеч ан и е 1. Число элементов базиса конечномерного пространства V не зависит от базиса, и иногда базис считается просто подмножеством в V, но вопрос о нумерации базисных элементов (или о порядке элементов базиса) приобретает значение при использовании матричного формализма, как это будет ясно из дальнейшего. Структура на множестве индексов базиса чаще всего определяется существом дела. Не всегда в качестве индексов берутся натуральные числа. Так, базис $(\delta_x | x \in X)$ из дельта-функций (см. пример 4 из § 1) пространства $\mathfrak{K}^X$($\mathfrak{K}$ - поле, $|X| < \infty$) естественно нумеруется элементами $x \in X$. Если вдобавок X - конечная группа, то линейное пространство $\mathfrak{K}^X$ функций на X со значениями в поле $\mathfrak{K}$ можно превратить в алгебру размерности $|X|$ над $\mathfrak{K}$ (см. определение в конце п. 2 из §1), положив

$$\delta_x * \delta_{x'} = \delta_{xx'} \quad \forall x, x' \in X$$

и распространив умножение на все функции $f = \sum f(x)\delta_x, \quad g = \sum g\left(x'\right)\delta_{x'}$ по линейности:

$$f * g = \sum_{x, x' \in X} f(x) g\left(x'\right) \delta_{xx'} = \sum_{y \in X}\left(\sum_{x \in X} f(x) g\left(x^{-1} y\right)\right) \delta_y.$$

Эта операция носит название свёртки функций. Если $X = \{x_1, x_2, \ldots \ \ldots, x_n\}$ и мы возьмём в V базис $(\Delta_1, \ldots, \Delta_n)\,, \Delta_i = \delta_{x_i}$, пронумерованный натуральными числами, то сразу же возникнет затруднение с определением номера k в формуле $\Delta_i * \Delta_j = \Delta_k$.

4.1.2 Coordinates and Isomorphism of Spaces

Теория

В силу теоремы 3 имеет смысл следующее

Оп ределение 5. Пусть $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ - базис векторного пространства V над $\mathfrak{K}$. Скаляры $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathfrak{K}$, входящие в разложение

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_n \mathbf{e}_n,$$

называются координатами вектора $\mathbf{v} \in V$ в данном базисе. Если $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_n \mathbf{e}_n, \mathbf{y} = \beta_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \beta_n \mathbf{e}_n$, то $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\alpha_1 + \beta_1) \mathbf{e}_1 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n) \mathbf{e}_n$, т.е. при сложении векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ их координаты складываются. Так как, далее, $\lambda \mathbf{x} = \lambda \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda \alpha_n \mathbf{e}_n$, то при умножении $\mathbf{x}$ на скаляр λ координаты вектора $\mathbf{x}$ умножаются на тот же скаляр. Вектор, все координаты которого равны нулю, совпадает с нулевым вектором.

Если P_n - пространство, векторами которого являются многочлены из $\mathbb{R}[t]$ степени $\leqslant n-1$, то, как уже отмечалось, один из базисов составляют векторы $\mathbf{e}_0 = 1, \mathbf{e}_1 = t, \ldots, \mathbf{e}_{n-1} = t^{n-1}$. В этом базисе координатами многочлена $f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_{n-1} t^{n-1}$ будут его коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$. Но тот же многочлен $f(t)$, записанный в виде

$$f(t) = f(\alpha) + f'(\alpha)(t-\alpha) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}(t-\alpha)^{n-1},$$

будет иметь в базисе $\mathbf{e}'_0 = 1, \mathbf{e}'_1 = t - \alpha, \ldots, \mathbf{e}'_{n-1} = (t-\alpha)^{n-1}$ координаты

$$f(\alpha), \quad f'(\alpha), \quad \ldots, \quad \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}$$

В $\mathbb{R}^n$ координатами вектора x $= (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ относительно базиса $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$ (раньше мы писали $E_{(1)}, E_{(2)}, \ldots, E_{(n)}$) являются числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (поэтому это пространство и называется координатным), но в $\mathbb{R}^n$ имеется бесчисленное множество других базисов, в которых координатами того же вектора x будут новые системы чисел. Рассмотрим теперь эту ситуацию в общем случае.

Пусть V n-мерное векторное пространство над полем κ и $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n), (\mathbf{e}'_1, \ldots \ \ldots, \mathbf{e}'_n)$ - какие-то два его базиса. Векторы одного базиса выражаются через векторы другого:

$$\begin{gathered}
\mathbf{e}'_1 = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{n1}\mathbf{e}_n \\
\vdots \\
\mathbf{e}'_n = a_{1n}\mathbf{e}_1 + a_{2n}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{nn}\mathbf{e}_n
\end{gathered}$$

Коэффициенты $a_{ij} \in \Re$ определяют матрицу

$$A = (a_{ij}) = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

называемую матрицей перехода от базиса $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ $(\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n)$. Следует подчеркнуть тот факт, что координатами вектора $\mathbf{e}'_j$ относительно базиса $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ служат элементы j-го столбца матрицы A.

Пусть координатами вектора $\mathbf{v} \in V$ будут $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ в базисе $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ и $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n$ - в каком-то новом базисе $(\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n)$, т.е.

$$\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_n \mathbf{e}_n = \mathbf{v} = \lambda'_1 \mathbf{e}'_1 + \ldots + \lambda'_n \mathbf{e}'_n.$$

После подстановки вместо $\mathbf{e}'_j$ их выражений (3) через $\mathbf{e}_i$ мы получим

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_n \mathbf{e}_n = \lambda'_1 (a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{n1}\mathbf{e}_n) + \lambda'_n (a_{1n}\mathbf{e}_1 + a_{2n}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{nn}\mathbf{e}_n)$$

откуда

$$\begin{gathered}
\lambda_1 = a_{11}\lambda'_1 + a_{12}\lambda'_2 + \ldots + a_{1n}\lambda'_n, \\
\lambda_n = a_{n1}\lambda'_1 + a_{n2}\lambda'_2 + \ldots + a_{nn}\lambda'_n,
\end{gathered}$$

или, как мы писали в [BA I, гл. 2], где $X = [\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$, $X' = [\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n]$ - столбцы старых и новых координат.

Формулы (4), (4') выражают старые координаты $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ вектора v через его новые координаты $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_n$ при помощи линейного преобразования переменных с матрицей A. Мы могли бы с самого начала выразить $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ через $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ (оба базиса в V равноправны), и тогда получились бы формулы

$$\lambda'_i = a'_{i1}\lambda_1 + a'_{i2}\lambda_2 + \ldots + a'_{in}\lambda_n, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Их существование означает, что линейное преобразование с матрицей A обратимо, т.е. $\det A \neq 0$, и (5) принимает вид

$$X' = A^{-1}X, \quad A^{-1} = \left(a'_{ij}\right).$$

Итак, справедлива

Теорема 4.

При переходе от базиса $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ пространства V к базису $(e'_1, \ldots, e'_n)$, определяемом матричей A, координаты вектора в новом базисе выражаются через старые координаты при помощи обратимого линейного преобразования с матричей A^{-1}. Важно отметить, что при явном выражении нового (штрихованного) базиса через исходный по формуле (3) естественным образом старые координаты выражаются через новые (штрихованные) по формуле (4) (обратить внимание на порядок суммирования), в то время как выражение новых координат через старые требует трудоёмкой операции обращения матрицы перехода. Использование координат позволяет свести операции над векторами к действиям над скалярами (скажем, над числами из $\mathbb{R}$), а выбор разумной системы координат (базиса) зачастую существенно упрощает вычисления. Понятие базиса или координатной системы мы используем теперь для того, чтобы алгебраически отождествить векторные пространства одинаковой размерности.

Определение изоморфного векторного пространства

Векторные пространства V и W над полем $\mathfrak{K}$ называются изоморфными, если существует биективное отображение $f : V \to W$, для которого

$$f(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{v})$$

при всех $\alpha, \beta \in \Re, \mathbf{K}, \mathbf{v} \in V$. Другими словами, f - изоморфизм аддитивных групп пространств V и W, обладающий дополнительным свойством $f(\alpha\mathbf{u}) = \alpha f(\mathbf{u})$. Говорят также, что отображение f линейно над κ, или К-линейно. Из определения изоморфизма групп вытекает, что отображение f^{-1} будет также изоморфизмом W и V. Кроме того, композиция изоморфизмов

$$U \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} W$$

будет изоморфизмом $f \circ g : U \to W$. Непосредственно видно, что размерность является инвариантом изоморфизма: если $(\mathbf{e}_1, \ldots \ \ldots, \mathbf{e}_n)-$ базис в V, то $(f(\mathbf{e}_1), \ldots, f(\mathbf{e}_n))-$ базис в W, и обратно.

Т еорема 5.

Все векторные пространства одинаковой размерности n над κ изоморфны. Более точно: все они изоморфны координатному пространству $\mathfrak{K}^n$.

То есть эта теорема показывает, что других инвариантов изоморфизма нет.

Proof. □

Пусть $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ - какой-нибудь базис n-мерного пространства V. Координаты $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ произвольного вектора x $= \alpha_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_n$ однозначно определены, поэтому соот- ветствие $f : \mathbf{x} \mapsto (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ между векторами из V и $\mathfrak{K}^n$ биективно. Если $\mathbf{y} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \beta_n\mathbf{e}_n$, То $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} = (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)\,\mathbf{e}_1 + \ldots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n)\,\mathbf{e}_n$. Стало быть,

$$f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1, \ldots, \alpha\alpha_n + \beta\beta_n) = \\ = \alpha\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + \beta\,(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y}),$$

что и является выражением свойств изоморфизма. Доказанная теорема в сущности утверждает, что, выбрав базис в V, мы придём к $\mathfrak{K}^n$. Однако было бы крайне неудобно ограничиваться изучением линейных задач только в $\mathfrak{K}^n$, поскольку подлинной целью является получение результатов, совсем не зависящих от специальных свойств базиса. Кроме того, при переходе к $\mathfrak{K}^n$ утрачивается наглядный характер многих векторных пространств таких, как обычное трехмерное пространство, пространство многочленов и др. Предупреждение. Изоморфизм между двумя векторными пространствами V, W, если он существует, определён однозначно только в двух частных случаях: а) $V = W = \{\mathbf{0}\}$; б) $\dim V = 1 = \dim W, \mathfrak{K}$ - поле из двух элементов (попробуйте доказать это). Во всех остальньх случаях изоморфизмов много.

Иногда бывает, что между двумя векторными пространствами определён некоторый изоморфизм, не зависящий от какого-либо произвола, например от выбора базисов в V и W. Такие изоморфизмы мы будем называть каноническими или естественными, в отличие от всех остальных - "случайных". Характерный пример естественного изоморфизма нам встретится в следующем параграфе.

4.1.3 Intersecting Subspaces

Теория

Хорошо известные теоретико-множественные операции пересечения и объединения мы применим к подпространствам. Пересечение $U_1 \cap U_2$ двух подпространств $U_1, U_2 \subset V$, очевидно, является подпространством. То же относится и к пересечению $U = \bigcap_{i \in I} U_i$ любого семейства $\{U_i | i \in \ \in \ I\}$ подпространств (возможно, что U - нулевое подпространство). Действительно, нулевой вектор, входящий во все U_i, входит в U, так что U непусто. Если, далее, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$, то любая их линейная комбинация $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$ входит во все U_i и, следовательно, $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in U$.

Заметим, что объединение $U_1 \cup U_2$ двух подпространств не обязательно является подпространством. Если, например, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ - линейно независимые векторы в V и $U_1 = \langle\mathbf{e}_1\rangle, U_2 = \langle\mathbf{e}_2\rangle$, то $U_1 \cup U_2$ не содержит $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$.

Наименьшим подпространством в V, содержащим U_1 и U_2, является, очевидно,

$$U = \{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 | \mathbf{u}_1 \in U_1, \mathbf{u}_2 \in U_2\}.$$

Это подпространство называется суммой U_1, U_2 и обозначается $U_1 + U_2$. Ясно, что $U_1 + U_2 = U_2 + U_1$, причём $U_1 + U_2 = U_2$ тогда и только тогда, когда $U_1 \subset U_2$. Аналогично определяется сумма любого конечного числа векторных подпространств $U_1, \ldots, U_m$. Именно, под $U_1 + \ldots + U_m$ понимается наименьшее векторное подпространство, содержащее все векторы из $U_i, 1 \leqslant i \leqslant m$, а также их всевозможные линейные комбинации. При этом не делается никакой расстановки скобок, поскольку $U_i + (U_j + U_k) = (U_i + U_j) + U_k$.

Если A, B - какие-то фигуры в трёхмерном физическом пространстве, возможно, с непустым пересечением $A \cap B$ и $\operatorname{vol}(A)$, $\operatorname{vol}(B)$ - их объёмы, то справедливо соотношение

$$\operatorname{vol}(A \cup B) = \operatorname{vol}(A) + \operatorname{vol}(B) - \operatorname{vol}(A \cap B).$$

Его аналог в случае пространств выражает Т еорем а 6. Пусть U и W - конечномерньe подпространства векторного пространства V. Тогда

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

Доказат тльст во. Положим

$$\dim U = k, \quad \dim W = l, \quad \dim(U \cap W) = m.$$

Так как $(U \cap W) \subset U, W$, то $m \leqslant k, m \leqslant l$. Выберем в $U \cap W$ какой-нибудь базис $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m)$ и, опираясь на теорему 3, дополним его, с одной стороны, до базиса $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m; \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k-m})$ подпространства U, а с другой - до базиса $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m; \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{l-m})$ подпространства W. Каждый вектор суммы $U + W$ имеет вид $\mathbf{u} + \mathbf{w}$, ге $\mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W$, а это значит, что

$$U + W = \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m; \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k-m}; \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{l-m} \rangle .$$

Если мы покажем, что система

$$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m; \mathbf{a}_1, \ldots \mathbf{a}_{k-m}; \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{l-m}$$

линейно независима и, стало быть, имеет место соотношение

$$\dim(U + V) = m + (k - m) + (l - m) = k + l - m,$$

совпадающее с (7), то доказательство будет завершено. Предположим, что это не так, и пусть

$$\sum_{s=1}^{m} \gamma_s \mathbf{e}_s + \sum_{i=1}^{k-m} \alpha_i \mathbf{a}_i + \sum_{j=1}^{l-m} \beta_j \mathbf{b}_j = \mathbf{0}$$

- нетривиальное линейное соотношение. Тогда мы имеем

$$\sum_{s=1}^{m} \gamma_s \mathbf{e}_s + \sum_{i=1}^{k-m} \alpha_i \mathbf{a}_i = -\sum_{j=1}^{l-m} \beta_j \mathbf{b}_j,$$

где в левой части равенства стоит элемент из U, а в правой — элемент из W. Значит, перед нами вектор из $U \cap W$, и мы можем записать $-\sum\limits_{j=1}^{l-m} \beta_j \mathbf{b}_j = \sum\limits_{s=1}^{m} \delta_s \mathbf{e}_s$, или

$$\sum_{s=1}^{m} \delta_s \mathbf{e}_s + \sum_{j=1}^{l-m} \beta_j \mathbf{b}_j = \mathbf{0}.$$

Но линейная зависимость базисной системы $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m; \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{l-m}\}$ подпространства W должна быть тривиальной. В частности, $\beta_1 = \ldots = \beta_{l-m} = 0$, и соотношение $(*)$, превратившееся теперь в линейную зависимость базисной системы $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m; \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k-m}\}$ подпространства U, также должно быть тривиальным: $\gamma_1 = \ldots$ $\ldots = \gamma_m = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{k-m} = 0$. Мы пришли к желаемому противоречию.

ге $\mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W$, а это значит, что

$$U + W = \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m; \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k-m}; \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{l-m} \rangle .$$

Если мы покажем, что система

$$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m; \mathbf{a}_1, \ldots \mathbf{a}_{k-m}; \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{l-m}$$

линейно независима и, стало быть, имеет место соотношение

$$\dim(U + V) = m + (k - m) + (l - m) = k + l - m,$$

совпадающее с (7), то доказательство будет завершено. Предположим, что это не так, и пусть

$$\sum_{s=1}^{m} \gamma_s \mathbf{e}_s + \sum_{i=1}^{k-m} \alpha_i \mathbf{a}_i + \sum_{j=1}^{l-m} \beta_j \mathbf{b}_j = \mathbf{0}$$

- нетривиальное линейное соотношение. Тогда мы имеем

$$\sum_{s=1}^{m} \gamma_s \mathbf{e}_s + \sum_{i=1}^{k-m} \alpha_i \mathbf{a}_i = -\sum_{j=1}^{l-m} \beta_j \mathbf{b}_j,$$

где в левой части равенства стоит элемент из U, а в правой — элемент из W. Значит, перед нами вектор из $U \cap W$, и мы можем записать $-\sum_{j=1}^{l-m} \beta_j \mathbf{b}_j = \sum_{s=1}^{m} \delta_s \mathbf{e}_s$, или

$$\sum_{s=1}^{m} \delta_s \mathbf{e}_s + \sum_{j=1}^{l-m} \beta_j \mathbf{b}_j = \mathbf{0}.$$

Но линейная зависимость базисной системы $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m; \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{l-m}\}$ подпространства W должна быть тривиальной. В частности, $\beta_1 = \ldots = \beta_{l-m} = 0$, и соотношение $(*)$, превратившееся теперь в линейную зависимость базисной системы $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m; \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k-m}\}$ подпространства U, также должно быть тривиальным: $\gamma_1 = \ldots$ $\ldots = \gamma_m = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{k-m} = 0$. Мы пришли к желаемому противоречию.

4.1.4 Direct Sums of Subspaces

Теория

ге $\mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W$, а это значит, что

$$U + W = \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m; \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k-m}; \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{l-m} \rangle .$$

Если мы покажем, что система

$$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m; \mathbf{a}_1, \ldots \mathbf{a}_{k-m}; \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{l-m}$$

линейно независима и, стало быть, имеет место соотношение

$$\dim(U + V) = m + (k - m) + (l - m) = k + l - m,$$

совпадающее с (7), то доказательство будет завершено. Предположим, что это не так, и пусть

$$\sum_{s=1}^{m} \gamma_s \mathbf{e}_s + \sum_{i=1}^{k-m} \alpha_i \mathbf{a}_i + \sum_{j=1}^{l-m} \beta_j \mathbf{b}_j = \mathbf{0}$$

- нетривиальное линейное соотношение. Тогда мы имеем

$$\sum_{s=1}^{m} \gamma_s \mathbf{e}_s + \sum_{i=1}^{k-m} \alpha_i \mathbf{a}_i = -\sum_{j=1}^{l-m} \beta_j \mathbf{b}_j,$$

где в левой части равенства стоит элемент из U, а в правой — элемент из W. Значит, перед нами вектор из $U \cap W$, и мы можем записать $-\sum_{j=1}^{l-m} \beta_j \mathbf{b}_j = \sum_{s=1}^{m} \delta_s \mathbf{e}_s$, или

$$\sum_{s=1}^{m} \delta_s \mathbf{e}_s + \sum_{j=1}^{l-m} \beta_j \mathbf{b}_j = \mathbf{0}.$$

Но линейная зависимость базисной системы $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m; \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{l-m}\}$ подпространства W должна быть тривиальной. В частности, $\beta_1 = \ldots = \beta_{l-m} = 0$, и соотношение $(*)$, превратившееся теперь в линейную зависимость базисной системы $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m; \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k-m}\}$ подпространства U, также должно быть тривиальным: $\gamma_1 = \ldots$ $\ldots = \gamma_m = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{k-m} = 0$. Мы пришли к желаемому противоречию.

индекс i фиксирован. Тогда $\mathbf{x} = \mathbf{u}_1 + \ldots + \widehat{\mathbf{u}}_i + \ldots + \mathbf{u}_m$, и для нулевого вектора мы получим два разложения $0 + \ldots + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \ldots + \mathbf{0} = \mathbf{0} =$

$$= \mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_{i-1} + (-\mathbf{x}) + \mathbf{u}_{i+1} + \ldots + \mathbf{u}_m.$$

Так как сумма прямая, то эти разложения должны совпадать. В частности, $-\mathbf{x} = \mathbf{0}$, и, следовательно, равенство (10) выполнено.

Обратно, предполагая справедливым (10), докажем единственность разложения нулевого вектора (этого, как мы знаем, достаточно, чтобы сумма была прямой). В самом деле, будем исходить из какого-нибудь разложения

$$\mathbf{0} = \mathbf{a}_1 + \ldots + \mathbf{a}_i + \ldots + \mathbf{a}_m.$$

Тогда при любом $i = 1, 2, \ldots, m$ имеем

$$-\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_1 + \ldots + \mathbf{a}_{i-1} + \mathbf{a}_{i+1} + \ldots + \mathbf{a}_m \in$$
$$\in U_i \cap \left(U_1 + \ldots + \widehat{U}_i + \ldots + U_m\right) = \mathbf{0}.$$

Стало быть, $\mathbf{a}_i = \mathbf{0}$. В случае $m = 2$ теорема 7 принимает особенно простую форму: сумма $U = U_1 + U_2$ прямая $\Longleftrightarrow U_1 \cap U_2 = 0$. В частности, привлекая соотношение (7), получаем, что $\dim U = \dim U_1 + \dim U_2$. Обобщение этого свойства выражает

Теорема

8. Сумма $U = U_1 + U_2 + \ldots + U_m$ вявяется прямой тогда и только тогда, когда

$$\dim U = \sum_{i=1}^{m} \dim U_i$$

Proof. □

Проводим его индукцией по m. При $m = 2$ справедливость утверждения отмечена выше, а в случае произвольного m воспользуемся теоремами 6 и 7. Именно, если сумма прямая, то прямой будет и сумма $U_1 + \ldots + \widehat{U}_i + \ldots + U_m$, а тогда $\dim U = \dim U_i + \dim\left(U_1 + \ldots + \widehat{U}_i + \ldots + U_m\right) -$

$$-\dim U_i \cap \left(U_1 + \ldots + \widehat{U}_i + \ldots + U_m\right) =$$
$$= \dim U_i + \left(\dim U_1 + \ldots + \widehat{\dim}_i + \ldots + \dim U_m\right) - 0 = \sum_{i=1}^{m} \dim U_i$$

Обратно, если формула (11) верна, то объединение базисов подпространств U_i будет базисом в U, и, значит, сумма прямая. Вариацией на ту же тему служит

Теорема

9. ДДя яюбого т-мерного подпространства U векторного пространства V размерности n найдётся такое $(n-m)$ - мериое подпространство W, ито $V = U \oplus W(U$ u W называются дополнительньми подпространствами). 30 Га. 1. Пространства и формь Доказа т ель ст во. Результат получается немедленно, если произвольный базис $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)$ в U дополнить до базиса $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m; \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-m})$ в V(воспользовавшись теоремой 3) и положить $W = \langle \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-m} \rangle$

Рассматривая прямые суммы, мы действовали пока в фиксированном векторном пространстве V; такие прямые суммы часто называют внутренними. Но иногда возникает необходимость в рассмотрении внешней прямой суммы $U \oplus W$ двух векторных пространств над одним и тем же полем , заранее никуда не вложенных в качестве подпространств. Под $U \oplus W$ в этом случае понимается совокупность $V = U \times W$ всевозможных упорядоченных пар $(\mathbf{u}, \mathbf{w})\mathbf{cu} \in U, \mathbf{w} \in W$. Операции сложения векторов из V и умножения их на скаляры определены формулой

$$\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \beta\left(\mathbf{u}', \mathbf{w}'\right) = \left(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}', \alpha\mathbf{w} + \beta\mathbf{w}'\right).$$

Это похоже на построение плоскости по двум её координатным осям. Векторы $(\mathbf{u}, \mathbf{0})$ порождают в V подпространство $\widetilde{U}$, изоморфное U, а векторы $(\mathbf{0}, \mathbf{w})$ порождают подпространство $\widetilde{W}$, изоморфное W. Изоморфизмы $(\mathbf{u}, \mathbf{0}) \mapsto \mathbf{u}, (\mathbf{0}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{w}$ здесь очевидны; вместе с тем можно записать

$$\underbrace{U \oplus W}_{\text{внешняя}} = V = \underbrace{\tilde{U} \oplus \widetilde{W}}_{\text{внутренняя}},$$

поскольку на $\tilde{U} \oplus \widetilde{W}$ мы уже смотрим как на прямую сумму подпространств данного нам векторного пространства V. В дальнейшем речь будет идти преимущественно о внутренних прямых суммах, поэтому всякие спецификации опускаются.

4.1.5 Factor-space

Суть конструкции

Теория

К заданному подпространству $L \subset \subset V$ существует, вообще говоря, много дополнительных подпространств $M \subset V$, для которых $V = L \oplus M$. Но все такие дополнения изоморфны одному векторному пространству, которое строится по V и L абболютно инвариантным способом, не связанным с какимлибо произволом.

Будем смотреть на V и L как на аддитивные абелевы группы. Множество

$$\mathbf{x} + L = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} | \mathbf{y} \in L\}$$

называется смежным классом V по L, вектор x - представителем этого смежного класса. Если $\mathbf{0} \neq \mathrm{z} \in (\mathrm{x} + L) \cap (\mathbf{x}' + L)$, то $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{x}' + \mathbf{y}' = \mathbf{z}$ и $\mathbf{x} + L = \mathbf{x}' + L = \mathbf{z} + L$. Поэтому два смежных класса либо не пересекаются, либо совпадают. При фиксированном L положим $\overline{\mathbf{x}} := \mathrm{x} + L$. Каждый вектор $\mathbf{v} \in V$ попадает в какой-то смежный класс, и если $\bar{V} = V/L$ - множество всех смежных классов V по L, то на $\bar{V}$ устанавливается структура абелевой группы по правилу $\overline{\mathrm{x}} + \overline{\mathrm{x}'} = \overline{\mathrm{x} + \mathrm{x}'}$. Операции коммутативности и ассоциатив-

ности проверяются непосредственно. Понятно, что $\overline{0} = L$ - нулевой элемент этой абелевой группы: $\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{0}} = \overline{\mathrm{x} + \mathbf{0}} = \overline{\mathrm{x}}$. Далее, $-\overline{\mathbf{x}} = \overline{-\mathbf{x}}$. даемся в том, что выполнены все аксиомы ВП $-\Pi_1$ из §1. Например,

$$1 \cdot (\mathbf{x} + L) = 1 \cdot \mathbf{x} + L = \mathbf{x} + L$$
$$\alpha(\beta(\mathbf{x} + L)) = \alpha(\beta\mathbf{x} + L) = \alpha\beta\mathbf{x} + L = (\alpha\beta)(\mathbf{x} + L)$$

Таким образом, $\bar{V} = V/L$ наделено естественным образом структурой векторного пространства, которое и называется фактор-пространством пространства V по подпространству L (или по модулю L). Вместо смежных классов мы могли бы рассматривать классы по отношению эквивалентности, определенному сравнением

$$\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}' (\mathrm{mod} L) \Longleftrightarrow \mathbf{x} - \mathbf{x}' \in L$$

но это была бы перефразировка сказанного.

П р и мер 7. Пусть $V = \mathbb{R}^2$ - координатная плоскость, а L - ось x. Дополнительным подпространством M служит любая прямая, проходящая через O и отличная от горизонтальной оси (рис. 2).

Дополнение M пересекает каждую прямую, параллельную оси x, точно в одной точке, так что M параметризует множество всех таких прямых. Это множество как раз и есть V/L.

Теорема

10. Пусть $V = L \oplus M$ - прямая сумма подпространств, $L, M \subset V$. Тогда отображение $f : \mathbf{u} \mapsto \mathbf{u} + L (\mathbf{u} \in M)$ является изоморфизмом между $M u V/L$.

Доказательсст во. В самом деле, f-линейное отображение, поскольку

$$f(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v})=\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}+L=\alpha(\mathbf{u}+L)+\beta(\mathbf{v}+L)=\alpha f(\mathbf{u})+\beta f(\mathbf{v}).$$

Пусть $\mathbf{v}+L$ - произвольный элемент из V/L. По условию $\mathbf{v}=\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}\in L,\mathbf{y}\in M$, так что $\mathbf{v}+L=\mathbf{x}+\mathbf{y}+L=(\mathbf{x}+L)+(\mathbf{y}+L)=L+(\mathbf{y}+L)=\mathbf{y}+L=f(\mathbf{y})$. Это доказывает сюръективность f. Если, далее, $\mathbf{u}\in\operatorname{Ker}f$, то $\mathbf{u}+L=L$, откуда $\mathbf{u}\in L$. Но $\mathbf{u}\in M$, а $L\cap M=\mathbf{0}$. Поэтому $\mathbf{u}=\mathbf{0}$, так что $\operatorname{Ker}f=\mathbf{0}$. Стало быть, f биективное отображение.

Следствие. Пусть L - произвольное подпространство в V. Тогда

$$\dim V/L=\dim V-\dim L.$$

Другими словами, $\dim V/L=\operatorname{codim}_V L$.

Proof. □

По теореме 9 найдётся такое подпространство $M\subset V$, что $V=L\oplus M$, причём $\dim M=\dim V-\dim L$. По только что доказанной теореме 10 это подпространство M изоморфно фактор-пространству V/L.

4.2 Dual Space

4.2.1 Fundamentals of

(мб сделаю потом разделами то, что ниже)

Определение двойственного пространства

Определение 4.1. *двойственное пространство - или пространство ковекторов, или пространство 1-форм -*

это линейное отображение из векторов в скаляры.

(сейчас задумался, что неплохо бы про единственность ее что-то написать, мб там есть теорема?)

например, можно их задавать с помощью скалярного произведения.

и эти функционалы собой задают *двойственное пространство.*

интересно, что любая невырожденная квадратичная форма $< a,b >$ на конечномерном (какой контрпример для бесконечномерного?) пространстве V задает изоморфизм $V\to V*$:

$$v*(v):=< v,v > \forall c\in V \tag{4.1}$$

Линейные функции по Кострикину

Двойственное пространство и двойственный базис

(если что, еще у Вавилова есть это)

Рефлексивность по Кострикину (!?!??!?!?!?!?)

(важно это пройти еще раз потом)

Простое сопоставление теоремы 1 и теоремы 5 из §2 приводит нас к заключению, что по крайней мере в случае $\dim V<\infty$ существует изоморфизм $V^*\cong V$. По тем же причинам будут изоморфны пространства V^* и $V^{**}=(V^*)^*$. По определению V^{**} - пространство, двойственное к V^*, т.е. пространство линейных функций на V^*. На первый взгляд, кажется затруднительно разумным образом интерпретировать его элементы в терминах исходного пространства V. Между тем, V находится в естественном соответствии с V, как показывает

теорема о существовании канонического изоморфизма

теорема:

Существует канонический изоморфизм $\varepsilon : V \to V^{**}$, определённый формулами

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon_{\mathbf{x}}, \quad \varepsilon_{\mathbf{x}}(f) = f(\mathbf{x}).$$

Здесь $\mathbf{x} \in V, f \in V^*, \varepsilon_{\mathbf{x}} \in V^{**}$.

Док аз а т ель с т в о.

Линейность ε проверяется непосредственно. Действительно, $\varepsilon_{\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}}(f) = f(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y}) = \alpha\varepsilon_{\mathbf{x}}(f) + +\beta\varepsilon_{\mathbf{y}}(f) = (\alpha\varepsilon_{\mathbf{x}} + \beta\varepsilon_{\mathbf{y}})(f)$ для всякой линейной функции $f : V \to F$. Отсюда $\varepsilon_{\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}} = \alpha\varepsilon_{\mathbf{x}} + \beta\varepsilon_{\mathbf{y}}$, т. е. $\varepsilon(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) = \alpha\varepsilon(\mathbf{x}) + \beta\varepsilon(\mathbf{y})$.

Чтобы убедиться в биективности ε, выберем в V и V^* двойственные базисы $V = \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle, V^* = \langle e^1, \ldots, e^n \rangle$. Тогда

$$\varepsilon_{\mathbf{e}_j}\left(e^i\right) = e^i\left(\mathbf{e}_j\right) = \delta_{ij}.$$

Апеллируя к доказательству теоремы 1, мы видим, что справедливо равенство $V^{**} = \langle \varepsilon_{\mathbf{e}_1}, \varepsilon_{\mathbf{e}_2}, \ldots, \varepsilon_{\mathbf{e}_n} \rangle$, т.е. $\left(\varepsilon_{\mathbf{e}_j}\right)$ – базис в V^{**}, двойственный к (e^i). Сюръективность и инъективность ε теперь очевидны.

Каноничность изоморфизма в заключена в его определении. О п р е делен и е 4. Свойство векторных пространств, выраженное в наличии естественного изоморфизма между V и V^{**}, называется рефлексивностью.

Рефлексивность делает пространства V и V^{**} совершенно равноправными. Отождествив V^{**} с V посредством естественного изоморфизма ε из теоремы 2, мы можем считать V пространством линейных функций на V^* и придать новый смысл формулам спаривания (3): $\mathbf{x}(f) = (f, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$. В частности, дяя всякого базиса в V^*cy - ществует однозначно определённый двойственный ему базис в V.

Критерий линейной независимости через двойственное пространство по Кострикину

Критерий линейной независимости. Используя понятие двойственного пространства V^*, удобно формулировать различные критерии линейной независимости векторов пространства V. Вначале доказывается

Лемма 1.

Если $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ - линейно зависимые векторы из V, а $f_1, \ldots, f_m$ - произвольные линейные функции на V, то

$$\det\left(f_i\left(\mathbf{a}_j\right)\right) = 0, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant m$$

)i - номер строки, j - номер столбца).

Proof. □

В силу линеиной зависимости векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ один из них, скажем, $\mathbf{a}_m$, является линейной комбинацией остальных (теорема 1 из § 2). Пусть $\mathbf{a}_m = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \alpha_{m-1}\mathbf{a}_{m-1}$. В определителе $\det\left(f_i\left(\mathbf{a}_j\right)\right)$ вычтем из последнего столбца первый, умноженный на α_1, второй, умноженный на α_2, и, наконец, $(m-1)$-й, умноженный на α_{m-1}. Мы знаем, что при этих преобразованиях веничина определителя не изменится. Вместе с тем на i-м месте послед= $f_i\left(\mathbf{a}_m - \alpha_1\mathbf{a}_1 - \ldots - \alpha_{m-1}\mathbf{a}_{m-1}\right) = f_i(\mathbf{0}) = 0, i = 1, 2, \ldots, m$. Поэтому определитель равен нулю.

Лемма 2.

Если $(f_1, \ldots, f_n)$ - базис пространства V^*, двойственного κV, то векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in V$ будут независимы тогда u только тогда, когда

$$\det\left(f_i\left(\mathbf{a}_j\right)\right) \neq 0, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

Proof. □

По лемме 1 линейная зависимость векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ влечёт равенство определителя нулю. Пусть теперь они линейно независимы, так что $V = \langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle$. Обозначим через $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ базис в V, двойственный к $(f_1, \ldots, f_n)$, а через $\alpha_{1j}, \ldots, \alpha_{nj}$ - координаты вектора $\mathbf{a}_j$ в этом базисе. Тогда

$$\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{Vmatrix}$$

будет матрицей перехода от базиса $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ к $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$. По теореме 4 из §2 она обратима и, следовательно, $\det(\alpha_{ij}) \neq 0$. Но $\alpha_{ij} = f_i(\mathbf{a}_j)$ (см. (4)), откуда и следует, что $\det(f_i(\mathbf{a}_j)) \neq 0$.

Теорема

3.
Пусть $(f_1, \ldots, f_n)$ - базис пространства V^*, двойственного κV. Тогда ранг системы векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k \in V$ равен наибольшему порядку отличного от нуля определителя вида

$$\det(f_i(\mathbf{a}_j)),$$
$$1 \leqslant i = i_1, \ldots, i_m \leqslant n; \quad 1 \leqslant j = j_1, \ldots, j_m \leqslant k.$$

Proof. □

Обозначим через r ранг системы векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$. Любые $m > r$ векторов $\mathbf{a}_{j_1}, \ldots, \mathbf{a}_{j_m}$ линейно зависимы и, значит, по лемме 1 любой определитель вида (5) порядка $m > r$ равен нулю.

Остаётся доказать, что существует определитель (5) порядка r, отличный от нуля. С этой целью обозначим через $\overline{f_1}, \ldots, \overline{f_n}$ ограничения линейных функций $f_1, \ldots, f_n$ на подпространство $U = \langle \mathbf{a}_1, \ldots \ \ldots, \mathbf{a}_k \rangle$. Докажем сначала, что

$$\left\langle \overline{f_1}, \ldots, \overline{f_n} \right\rangle = U^*,$$

где U^* - подпространство, двойственное к U. В самом деле, включение $\left\langle \overline{f_1}, \ldots, \overline{f_n} \right\rangle \subseteq U^*$ очевидно. Пусть, далее, $\tilde{f}$ - любой вектор из $U^*, (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r)$ - базис в U, а $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r; \mathbf{e}_{r+1}, \ldots, \mathbf{e}_n)$ - его дополнение до базиса в V. Рассмотрим линейную функцию $f \in V^*$, для которой $f(\mathbf{e}_i) = \tilde{f}(\mathbf{e}_i), i = 1, \ldots, r; f(\mathbf{e}_i) = 0, i = r+1, \ldots, n$ (существует функция $f \in V^*$ с любыми, а следовательно, и с этими значениями). Так как $V^* = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle$, то $f = \beta_1 f_1 + \ldots + \beta_n f_n$. Ограничим в этом равенстве все функции на U.

Очевидно, $\bar{f} = f|_U = \tilde{f}$, поскольку f и $\tilde{f}$ принимают одинаковые значения на базисных векторах $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r$ пространства U. Таким образом, $\tilde{f} = \bar{f} = \beta_1 \overline{f_1} + \ldots + \beta_n \overline{f_n}$, откуда следует, что $\tilde{f} \in \left\langle \overline{f_1}, \ldots, \overline{f_n} \right\rangle$, т.е. $U^* \subseteq \left\langle \overline{f_1}, \ldots, \overline{f_n} \right\rangle$. Тем самым равенство (6) доказано.

Выберем, наконец, r линейно независимых векторов как среди $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ (пусть ими будут $\mathbf{a}_{j_1}, \ldots, \mathbf{a}_{j_r}$), так и среди $\overline{f_1}, \ldots, \overline{f_n}$ (пусть ими будут $\overline{f_{i_1}}, \ldots, \overline{f_{i_r}}$). Они составляют базисы в соответствующих подпространствах U, U^* и по лемме 2

$$\det\left(\bar{f}_i(\mathbf{a}_j)\right) \neq 0, \quad i = i_1, \ldots, i_r; \quad j = j_1, \ldots, j_r.$$

Остаётся заметить, что $\bar{f}_i(\mathbf{a}_j) = f_i(\mathbf{a}_j)$.

Мы снова подошли вплотную к понятию ранга матрицы, но останавливаться ещё раз на его свойствах не имеет смысла.

Геометрическая интерпретация решений Лос по Кострикину

4.2.2 properties of Dual Space

(выше мы научились вводить двойственное пространство и поняли, что это такое) тут изучим его свойства.

4.2.3 Canonical Isomorphism

максимально подробно про него тут теория будет.

Конструкция (!??!)

(выше писал про это)

О деталях и применениях канонического изоморфизма (!?!?!?!?)

(что-то у меня спрашивали, я так и не отвечал, хз. в чем тут вообще сложность может быть????7)

4.2.4 Dual Module

хз

4.2.5 Conversion of Covector Coordinates

4.2.6 The Second Duality, Duality

4.2.7 Dual Linear Display

Пусть $\phi : U \longrightarrow V$ - линейное отображение правых R-модулей. Сейчас мы построим линейное отображение $\phi^* : V^* \longrightarrow U^*$ левых R-модулей. А именно, для любого $\theta \in V^*$ и любого $u \in U$ положим

$$((\theta)\phi^*)(u) = \theta(\phi(u)) = (\theta \circ \phi)(u).$$

Так как это равенство верно для любого $u \in U$, мы можем положить

$$(\theta)\phi^* = \theta \circ \phi.$$

Иными словами, отображение ϕ^* сопоставляет линейному функционалу на V его композицию с ϕ, которая, очевидно, является линейным функционалом на U. Сейчас мы покажем, что это единственный способ определить двойственное линейное отображение так, чтобы оно было согласовано с каноническим спариванием.

Теорема. Для июбого линейного отображения $\phi : U \longrightarrow V$ существует единственное линейное отображение $\phi^* : V^* \longrightarrow U^*$ такое, что

$$\langle(\theta)\phi^*, u\rangle = \langle\theta, \phi(u)\rangle.$$

Proof. □

Единственность ϕ^* очевидна, если ψ^* - другое отображение такое, что $\langle(\theta)\psi^*, u\rangle = \langle\theta, \phi(u)\rangle$ для всех $\theta \in V^*$ и $u \in U$, то, в силу невырожденности спаривания между U и U^* имеем $(\theta)\phi^* = (\theta)\psi^*$, для всех $\theta \in V^*$, но это и значит, что $\phi^* = \psi^*$.

Для доказательства существования зафиксируем $\theta \in V^*$ и рассмотрим отображение $u \mapsto \langle\theta, \phi(u)\rangle$ как функцию на U. В силу линейности спаривания по второму аргументу она линейна и, значит, принадлежит U^*. Обозначим ее через $(\theta)\phi^*$. Осталось заметить, что в силу линейности спаривания по первому аргументу сопоставление $\theta \mapsto (\theta)\phi^*$ линейно.

Теорема. Пусть x - матрица ϕ в базисах $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_m$. Тогда матрица двойственного линейного отображения ϕ^* в двойственных базисах $f_1^*, \dots, f_m^*$ и $e_1^*, \dots, e_n^*$ равна.

Proof. □

Отождествим вектор $u \in U$ со столбцом координат в базисе $e_1, \ldots, e_n$, а столбец $\phi(u) \in V$ со столбцом коордиан в базисе $f_1, \ldots, f_m$. По определению матрицы линейного отображения для правых модулей имеем $\phi(u) = xu$.

Проделаем теперь такую же операцию с элементами левых модулей V^* и U^* в двойственных базисах. При этом элементы двойственных модулей истолковываются как строки, а спаривания $U^* \times U \longrightarrow R$ и $V^* \times V \longrightarrow R$ - как умножение строки на столбец. Таким образом, утверждение теоремы представляет собой просто еще одну форму ассоциативности умножения, $\theta(xu) = (\theta x)(u)$. Теорема. Двойственное линейное отображение обладает следующими свойствами: - $(\phi + \psi)^* = \phi^* + \psi^*$ - $(\lambda\phi)^* = \phi^*\lambda$; - $(\phi\psi)^* = \psi^*\phi^*$; - $\mathrm{id}_V^* = \mathrm{id}_{V^*}$; - $\phi^{**} = \phi$.

Proof. □

Все эти свойства вытекают непосредственно из определения. Для модулей конечного ранга еще проще воспользоваться проведенным в предыдущей теореме вычислением матрицы двойственного линейного отображения.

4.2.8 Duality for Submodules

Определим левый ортогонал к подмодулю $U \leq V$ как

$$^{\perp}U = \{\phi \in V^* | \phi(u) = 0 \text{ для всех } u \in U\}.$$

Правый ортогонал к подмодулю $M \leq V^*$ определяется совершенно аналогично:

$$M^{\perp} = \{v \in V | \phi(v) = 0 \text{ для всех } \phi \in M\}.$$

Совершенно очевидно, что $^{\perp}U$ подмодуль в V^*, а $M^{\perp}$ подмодуль в V. Из этих определений непосредственно очевидно, что переход к ортогоналу обращает включения. Лемма. Для любых подмодулей $U, W \leq V uM, N \leq V^*$ имеем

$$U \leq W \iff {}^{\perp}U \geq {}^{\perp}W, \quad M \leq N \iff M^{\perp} \geq N^{\perp}.$$

Теорема. Предположим, что V конечномерно $uU \leq V$. Тогда

$$U^* \cong V^* / {}^{\perp}U.$$

Proof. □

Рассмотрим ограничение

$$\mathrm{res}_U^V : V^* \longrightarrow U^*, \quad \phi \mapsto \phi|_U .$$

Тогда $^{\perp}U$ есть в точности ядро этого отображения. Таким образом, для векторных пространств получаем.

Следствие

1. Имеет место равенство

$$\dim(V) = \dim(U) + \dim\left({}^{\perp}U\right)$$

Для конечномерных векторных пространств отсюда вытекает такое замечательное следствие.

Следствие

2. Пусть $\dim(V) < \infty$. Тогда дяя июбого подмодуля $U \leq V$ имеет место равенство $\left({}^{\perp}U\right)^{\perp} = U$.

Proof. □

В самом деле, ясно, что $\left({}^{\perp}U\right)^{\perp} \geq U$. С другой стороны, предыдущее следствие и его аналог с заменой правых модулей на левые, показывают, что

$$\dim(U) + \dim\left({}^{\perp}U\right) = \dim(V) = \dim\left(V^{*}\right) = \dim\left({}^{\perp}U\right) + \dim\left({}^{\perp}U\right)^{\perp}.$$

Таким образом, $\dim\left({}^{\perp}U\right)^{\perp} = \dim(U)$. Но это и значит, что $\left({}^{\perp}U\right)^{\perp} = U$. Разумеется, для бесконечномерных пространств и для свободных модулей конечного ранга над кольцом это, вообще говоря, совершенно неверно. В этих случаях, как правило, $\left({}^{\perp}U\right)^{\perp}$ строго больше, чем U. Для равенства U должно, по крайней мере, выделяться прямым слагаемым, а для модулей над кольцом это бывает крайне редко.

Следующий результат выражает двойствЕнность между суммой и ПЕРЕСЕЧЕнИЕм подМОдуЛЕй.

Теорема. Пусть $\dim(V) < \infty$. Тогда для июбых двух подпространств $U, W \leq V$ имеют место равенства

$${}^{\perp}(U \cap W) = {}^{\perp}U + {}^{\perp}W, \quad {}^{\perp}(U + W) = {}^{\perp}U \cap {}^{\perp}W.$$

Proof. □

Из леммы 1 вытекает, что ${}^{\perp}U, {}^{\perp}W \leq {}^{\perp}(U \cap W)$, а${}^{\perp}(U + W) \leq {}^{\perp}U, {}^{\perp}W$ и, значит,

$${}^{\perp}U + {}^{\perp}W \leq {}^{\perp}(U \cap W), \quad {}^{\perp}(U + W) \leq {}^{\perp}U \cap {}^{\perp}W.$$

Таким образом, нам осталось лишь доказать совпадение соответствующих размерностей. Это утверждение представляет собой в точности теорему о размерности суммы и пересечения. В самом деле,

$$\begin{gathered}\dim\left({}^{\perp}U + {}^{\perp}W\right) = \dim\left({}^{\perp}U\right) + \dim\left({}^{\perp}W\right) - \dim\left({}^{\perp}U \cap {}^{\perp}W\right) \geq \\ \dim\left({}^{\perp}U\right) + \dim\left({}^{\perp}W\right) - \dim\left({}^{\perp}(U + W)\right) = \\ \dim(V) - \dim(U) - \dim(W) + \dim(U + W) = \\ \dim(V) - \dim(U \cap W) = \dim\left({}^{\perp}(U \cap W)\right),\end{gathered}$$

как и утверждалось. Проверка совпадения размерностей для второго случая совершенно аналогична и читатель может провести ее самостоятельно. Впрочем, делать это не нужно, так как совпадение размерностей во втором случае эквивалентно их совпадению в первом случае. В этом можно убедиться, например, так:

$$\begin{gathered}\dim\left({}^{\perp}(U \cap W))\right) + \dim\left({}^{\perp}(U + W)\right) = \\ 2\dim(V) - \dim(U \cap W) - \dim(U + W) = 2\dim(V) - \dim(U) - \dim(W) = \\ \dim\left({}^{\perp}U\right) + \dim\left({}^{\perp}W\right) = \dim\left({}^{\perp}U + {}^{\perp}W\right) + \dim\left({}^{\perp}U \cap {}^{\perp}W\right)\end{gathered}$$

Мы только что убедились, что первые слагаемые в левой и правой частях совпадают. Но тогда, конечно, совпадают и вторые слагаемые. Следствие. Если $V = U \oplus W$, *то* $V^{*} = {}^{\perp}U \oplus {}^{\perp}W$.

4.2.9 Fredholm's Theorem

(?? чего не гуглится)

В настоящем параграфе мы вскроем подлинный механизм альтернативы Фредгольма. С точки зрения рассмотренной в настоящей главе теории она состоит в двойСтвЕннОСти мЕЖдУ ЯдРАми И ОвРАЗАми.

В параграфе 4 мы сопоставили каждому линейному отображению $\phi : U \longrightarrow V$ двойственное линейное отображение

$$\phi^* : V^* \longrightarrow U^*, \quad \theta \mapsto \theta \circ \phi.$$

При таком определении следующее утверждение практически очевидно по крайней мере для векторных пространств. Между тем, это одна из замечательных классических теорем математики, из которой вытекают чрезвычайно важные следствия.

Теорема Фредгольма.

Имеют место следующие равенства

$$\operatorname{Ker}(\phi^*) = {}^{\perp}\operatorname{Im}(\phi), \quad \operatorname{Im}(\phi^*) = {}^{\perp}\operatorname{Ker}(\phi).$$

Proof. □

Первое равенство совершенно очевидно. В самом деле, $\operatorname{Im}(\phi) = \{\phi(u), u \in U\}$, и поэтому ${}^{\perp}\operatorname{Im}(\phi) = \{\theta \in V^* | \forall u \in U, |\theta(\phi(u)) = 0\} = \{\theta \in V^* | \theta \circ \phi = 0\} = \operatorname{Ker}(\phi^*)$. Для конечномерных векторных пространств второе равенство сразу следует отсюда при помощи второй дуализации (замените ϕ на ϕ^* и примените следствие 2 предыдущего параграфа). Однако, для общего случая нужно независимое доказательство и сейчас мы увидим, что оно несколько сложнее, чем доказательство первой части. Это не должно нас удивлять, так как даже в теории множеств существование одностороннего обратного для инъективного отображения (т.е. то, что мы только что проделали) очевидно, а вот существование одностороннего обратного для сюръективного отображения гарантируется только аксиомой выбора. Тем более, она должна использоваться в нашем случае. Проще всего использовать аксиому выбора в форме Хана-Банаха: любой линейный функционал на подпространстве продолжается до линейного функционала на всем пространстве. В самом деле, $\operatorname{Ker}(\phi) = \{u \in U | \phi(u) = 0\}$, и поэтому ${}^{\perp}\operatorname{Ker}(\phi) = \{\theta \in U^* | \phi(u) = 0 \Longrightarrow \theta(u) = 0\} = \{\theta \in U^* | \operatorname{Ker}(\theta) \geq \operatorname{Ker}(\phi)\}$. По теореме о гомоморфизме каждый такой гомоморфизм θ пропускается через $\operatorname{Im}(\phi) = U/\operatorname{Ker}(\phi)$. Иными словами, существует такой линейный функционал $\eta \in \operatorname{Im}(\phi)^*$, что $\theta = \eta \circ \phi$. Так как $\operatorname{Im}(\phi)$ выделяется прямым слагаемым, то η можно продолжить на все V, например, положив его равным 0 на каком-то дополнении к $\operatorname{Im}(\phi)$. Так как нас интересуют только значения η на элементах $\operatorname{Im}(\phi)$, мы продолжаем обозначать получившийся линейный функционал на V той же буквой η. Таким образом, правая часть равна

$$\{\eta \circ \phi | \eta \in V^*\} = \operatorname{Im}(\phi^*),$$

как и утверждалось. Сформулируем несколько непосредственных следствий теоремы Фредгольма.

О применениях (??)

Следствие 1.

Имеют место следующие эквивалентности.
- ϕ эпиморфизм $\Longleftrightarrow$ ϕ^* мономорфизм.
- мономорфизм $\Longleftrightarrow$ ϕ^* эпиморфизм.
- изоморфизм $\Longleftrightarrow$ ϕ^* изоморфизм.

Следующая переформулировка этого утверждения называется альтернативой Фредгольма.

Следствие 2.

Система ax $= v$ имеет решение при любой правой части в том и только том случае, когда система ya $= 0$ имеет только тривиальное решение.

Proof. $\square$

$\mathrm{Ker}\,(\phi^*)^{\perp} = \mathrm{Im}(\phi)$.

Следствие 3.

Пусть $\phi : U \longrightarrow V$ - фредгольмов оператор. Тогда двойственный оператор $\phi^* : V^* \longrightarrow U^*$ тоже фредгольмов и

$$\mathrm{ind}\,(\phi^*) = -\,\mathrm{ind}(\phi).$$

4.2.10 dual to Dual

про то, что двойственное двойственному - изоморфно изначальному.
и как доказать?
и тут как раз линейные функционалы
но также среди них есть и субаддитивные функционалы.

Определение 4.2. *субаддитивные функционалы.*

(потом перепишу нормально)

Теорема 1. *теорема хана-банаха: Пусть X X — линейное, или векторное, пространство над полем действительных чисел положительно однородный субаддитивный функционал. Для любого линейного подпространства y линейного пространства x каждый линейный функционал f:Y R, удовлетворяющий условию*
может быть продолжен на все пространство X с сохранением этого неравенства.

(место для доказательства. да, его нам тоже якобы давали.)

4.2.11 About Calibration

конструкция градуировки

часто нам требуется конструкция *градуировки.*
это когда мы линейное пространство фиксированным разложением в прямую сумму:

$$L = \bigoplus_{i=0}^{\infty} L_i \tag{4.2}$$

(почему это разложение бесконечно?????)
место подумать про градуированные пространства.
также есть градуированное подпространство:

$$M = \bigoplus_{i=0}^{\infty} (M \cap L_i) \tag{4.3}$$

с этой конструкцией (КАК???) мы можем прийти к конструкции *градуированного фактор-пространства*

$$\bigoplus_{i=0}^{\infty} L_i/M_i \to L/M : \sum_{i=1}^{\infty} (l_i + M_i) \longmapsto \left(\sum_{i=0}^{\infty} l_i \right) + M \tag{4.4}$$

применения градуировки (!?!??)

(пока не так шарю.)

4.2.12 Norm of Linear Operator

(костр 2 нпр)
Пусть V - нормированное (в смысле определений из гл. $3, \S 2$, п. 5), не обязательно конечномерное векторное пространство над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Если $\| * \|$ - норма на V, то естественно поинтересоваться, будет ли нормированным векторное пространство $\mathcal{L}(V)$ линейных операторов на V. Существуют по крайней мере два эквивалентных способа введения нормы на $\mathcal{L}(V)$.

Определение

1. Назовём нормой $\|\mathcal{A}\|_s$ линейного оператора $\mathcal{A} : V \to V$ точную верхнюю грань значений функции $\mathbf{v} \mapsto \|\mathcal{A}\mathbf{v}\|$ на векторах $\mathbf{v} \in V$ единичной длины:

$$\|\mathcal{A}\|_s = \sup_{\|\mathbf{v}\|=1} \|\mathcal{A}\mathbf{v}\|.$$

Вообще говоря, существование $\|\mathcal{A}\|_s$ не гарантировано. $= \sqrt{\int\limits_0^1 f(t)^2 dt}$ и. Нассоространстве $V = \mathbb{R}[t]$ всех многочленов с нормой $\|f\| = \sqrt{\int\limits_0^1 f(t)^2 dt}$ рассмотрим оператор дифференцирования $\mathcal{D}_t$. Имеем

$$\left\|\sqrt{2n+1}t^n\right\| = \sqrt{(2n+1)\int\limits_0^1 t^{2n} dt} = 1.$$

Интересующая нас величина

$$\left\|\mathcal{D}_t\left(\sqrt{2n+1}t^n\right)\right\| = \left\|n\sqrt{2n+1}t^{n-1}\right\| = n\sqrt{2n+1}\sqrt{\int\limits_0^1 t^{2n-2} dt} = n\sqrt{\frac{2n+1}{2n-1}}$$

неограниченно растёт вместе со степенью n многочлена.

Теорема

1. Если V - конечномерное векторное пространство, то точная верхняя грань $\|\mathcal{A}\|_s$ существует.
Доказат ельство. По определению нормы и по определению линейного оператора функция $\mathbf{v} \mapsto \|\mathcal{A}\mathbf{v}\|$, будучи суперпозицией двух

4.2.13 Functions of Linear Operators (matrices)

4.2.14 Exponent:

4.2.15 Single-parameter Subgroups of a Linear Group

Функция exp интересна во многих отношениях, в том числе с теоретико-групповой точки зрения, как это видно из следующего простого утверждения.

Теоре м а 5.
Соответствие

$$\varphi_A : t \mapsto \exp(tA), \quad t \in \mathbb{R}$$

определённое для любой матрицы $A \in M_n(\mathfrak{K})$, $\sqrt{K} = \mathbb{R}$ или $\mathfrak{K} = \mathbb{C}$, есть непрерывное гомоморфное отображение аддитивной группы вещественных чисел $\mathbb{R}^{+}{}_6 GL_n(\surd)$.

Доказ а т ель с т во.

В самом деле, перефразируя следствие теоремы 4, мы можем утверждать, что $\varphi_A(t) \in GL_n(\mathfrak{K})$, причём

$$(\varphi_A(t))^{-1} = \varphi_A(-t).$$

Кроме того,

$$\varphi_A(s) \cdot \varphi(t) = \exp(sA) \cdot \exp(tA) = \exp(sA + tA) = \exp((s+t)A) = \varphi_A(s+t)$$

рывность заложена в определении экспоненты.

однопараметрическая группа линейных операторов

Оп редделение 4. Обычно множество $\{\exp(t\mathcal{A}) | t \in \mathbb{R}\}$ называют однопараметрической группой линейных операторов на V (при фиксированном базисе - однопараметрической группой матриц).

П р име р 6.

Если $A = a$ - вещественное число, то $\{\exp(ta) | t \in \mathbb{R}\}$ - группа вещественных чисел по умножению. Если $A = \sqrt{-1} = i$, то $\{\exp(ti) | t \in \mathbb{R}\}$ окружность.

Теорема о характеристических корнях (??)

Чтобы иметь более определённое суждение о природе матрицы $\exp A$ (оператора $\exp \mathcal{A}$), мы докажем следующее утверждение.

Теорема

6. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ - характеристические корни матрицы $A \in M_n(\mathbb{C})$, рассматриваемые со своими кратностями (т.е. λ_i не обязательно различны).

Тогда тарактеристическими корнями матричы exp A являются

$$\exp \lambda_1, \exp \lambda_2, \ldots, \exp \lambda_n.$$

Proof. □

Как мы знаем (теорема 1 из § 4 гл. 2), любая комплексная матрица подобна треугольной. В частности, для нашей матрицы A найдётся невырожденная матрица B такая, что $A = B^{-1}TB$, где T - (верхняя) треугольная матрица. Мы знаем также, что матрицы A и T имеют одни и те же характеристические корни. Так как характеристическими корнями треугольной матрицы являются её коэффициенты, стоящие на главной диагонали, то без ограничения общности считаем λ_i упорядоченными таким образом, что

$$T = \left\| \begin{array}{cccc} \lambda_1 & * & \ldots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & * \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{array} \right\|$$

Имеем

$$T^k = \left\| \begin{array}{cccc} \lambda_1^k & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{array} \right\|$$

откуда

$$T^k = \left\| \begin{array}{cccc} \lambda_1^k & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{array} \right\|$$

т.е. $\exp\lambda_1, \ldots, \exp\lambda_n$ - характеристические корни матрицы $\exp T$. Осталось заметить, что $\exp A = B^{-1} \cdot \exp T \cdot B$ (см. упр. 7.1.1), а поэтому $\exp\lambda_i$ будут также характеристическими корнями матрицы $\exp A$

Соотношение $\det\exp A = \exp(\operatorname{tr} A)$

След с т ви е. Для любой матрицы A справедливо соотношение

$$\det\exp A = \exp(\operatorname{tr} A).$$

Док аз а т ель с т в о.
В самом деле, определитель матрицы равен произведению всех её характеристических корней, а след - сумме характеристических корней, так что всё немедленно вытекает из теоремы 6. Более наглядно:

$$\begin{aligned} \det\exp A = \det B^{-1} \cdot \exp T \cdot B = \det\exp T = \\ = \prod_{i=1}^{n} \exp\lambda_i = \exp\left(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n\right) = \exp(\operatorname{tr} A). \end{aligned}$$

(доказано)
Из соотношения (6) вновь вытекает, что $\exp A$ - всегда невырожденная матрица, причём $\det\exp A$ - положительное вещественное число для всех $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Еще теория (?)

Сделаем ещё несколько замечаний по поводу экспоненты матриц (линейных операторов). Как всегда, обозначаем через ${}^tA$ матрицу, транспонированную к A, а через $\bar{A}$ - матрицу, полученную из A заменой всех её коэффициентов комплексно-сопряжёнными числами

4.2.16 Linear Operator Exponent

потом отработаю

4.2.17 Spectral Radius

потом отработаю
пока хз, см костр 2.

4.3 Invariant Subspaces and Eigenvectors

(впишу Кострикина 2, если будет нужно.)

4.3.1 Projectors

4.3.2 Invariant Subspaces

4.3.3 Eigenvectors

Основные свойства собственных векторов

Методы определения собственных векторов

Определение, если ничего необычного нет

Определение в случае совпадающих собственных значений

(каплю сложнее конструкци, пропишу!)

О численных способах определения

Eigenvectors[m,k]

Присоединенные векторы (??)

(из интернета теория, потом посмотрю.)

Пусть λ_0 - некоторое собственное значение преобразования A. Мы уже имели раньше такое определение.

Определение

1. Вектор $x \neq 0$ называется собственным вектором преобразования A, отвечающим собственному значению λ_0, если

$$Ax = \lambda_0 x, \text{ т. е. } (A - \lambda_0 E)\, x = 0.$$

Рассмотрим совокупность всех векторов, удовлетворяющих условию (1) при фиксированном λ_0. Ясно, что совокупность этих векторов является подпространством пространства R. Мы обозначим его $N^1_{\lambda_0}$. Легко видеть, что $N^1_{\lambda_0}$ инвариантно относительно преобразования A (проверьте!).

Заметим, что подпространство $N^1_{\lambda_0}$ состоит из всех собственных векторов преобразования A, отвечающих собственному значению λ_0, к которым добавлен ещё нулевой вектор.

Определение

2. Вектор x называется присоединенным вектором 1-го порядка преобразования A, отвечающим собственному значению λ_0, если вектор

$$y = (A - \lambda_0 E)\, x$$

является собственным вектором преобразования A. Пусть λ_0 - собственное значение преобразования A. Рассмотрим подпространство, состоящее из всех векторов x, для которых выполнено условие

$$(A - \lambda_0 E)^2\, x = 0,$$

т. е. ядро преобразования $(A - \lambda_0 E)^2$. Обозначим это подпространство $N^2_{\lambda_0}$ является инвариантным подпространством пространства R. В самом деле, пусть $x \in N^2_{\lambda}$, т. е.

$(A-\lambda_0 E)^2 x=0$. Нам надо доказать, что и вектор $Ax \in N_{\lambda_0}^2$, т. е. что $(A-\lambda_0 E)^2 Ax=0$. Но преобразование A перестановочно с $(A-\lambda_0 E)^2$, т. е.

$$(A-\lambda_0 E)^2 Ax = A(A-\lambda_0 E)^2 x=0.$$

Рассмотрим несколько более подробно структуру пространства $N_{\lambda_0}^2$. В нем есть векторы двух типов. Если $x \in N_{\lambda_0}^1$, т. е. $(A-\lambda_0 E)x=0$, то подавно и $(A-\lambda_0 E)^2 x=0$, т. е. $x \in N_{\lambda_0}^2$. Таким образом, $N_{\lambda_0}^1$ целиком содержится в $N_{\lambda_0}^2$. Если $x \in N_{\lambda_0}^2$, но $x \bar{\in} N_{\lambda_0}^1$, т. е.

$$(A-\lambda_0 E)x \neq 0,$$
$$(A-\lambda_0 E)^2 x = 0,$$

то x - присоединенным вектор 1-го порядка. Действительно, в этом случае $y=(A-\lambda_0 E)x$ есть собственный вектор. Таким образом, подпространство $N_{\lambda_0}^2$ получается, если к подпространству $N_{\lambda_0}^1$ добавить присоединенные векторы 1-го порядка.

Аналогично вводим подпространство $N_{\lambda_0}^k$, состоящее из всех векторов x, для которых

$$(A-\lambda_0 E)^k x=0$$

Это подпространство инвариантно относительно преобразования A. Ясно, что подпространство $N_{\lambda_0}^k$ содержит предыдущее подпространство $N_{\lambda_0}^{(k-1)}$.

Определение

3. Вектор x называется присоединенным вектором k-го порядка, если вектор

$$y=(A-\lambda_0 E)x$$

есть присоединенным вектор порядка $k-1$. По индукции можно показать, что если x - присоединенным вектор k-го порядка, то

$$(A-\lambda_0 E)^k x \neq 0$$
$$(A-\lambda_0 E)^{k+1} x = 0$$

Другими словами, присоединенным вектором k-го порядка называется вектор, принадлежащий $N_{\lambda_0}^{k+1}$ и не принадлежащий $N_{\lambda_0}^k$. Пример. Пусть R - пространство многочленов степени $\leqslant n-1$ и преобразование A дифференцирование:

$$AP(t)=\frac{d}{dt}P(t)$$

Легко видеть, что $\lambda=0$ есть собственное значение. Соответствующий ему собственный вектор $P(t)=\text{const}$. Найдем для этого преобразования подпространства N_0^k. По определению N_0^k состоит из всех многочленов $P(t)$, для которых $A^k P(t)=0$, т. е.

$$\frac{d^k}{dt^k}P(t)=0$$

Это будут все многочлены, степень которых не превышает $k-1$. Присоединенным векторами k - го порядка будут многочлены, степень которых в точности равна $k-1$.

В этом примере размерность каждого из подпространств равна N_0^k и она растет от 1 до n вместе с ростом k. Подпространство N_0^n уже совпадает со всем пространством R, и если мы захотим определять N_0^{n+1}, N_0^{n+2} и т. д., то все эти подпространства будут совпадать с N_0^n. Легко видеть также, что в этом примере $AN_0^{k+1}=N_0^k$. Это следует из того, что каждый многочлен степени k есть произволная от многочлена степени $k+1$.

О некоторых применениях идеи собственных векторов

О применениях в квантовой механике

(там важная констуркция, потом связь укажу.)

О применениях в диффурах

(типы решений и тракторий ими определяются, укажу потом.)

On eigenfaces

(прикольная мелочь, мб пару формул добавлю про это.)

4.3.4 Characteristic Polynomial

4.3.5 Diagonalizability Criterion

4.3.6 Existence of Invariant Subspaces

4.3.7 Conjugate Linear Operator

4.3.8 Factor Operator

4.4 Normal Forms

Обсудим подробно ЖНФ.
(!!! в 1ю часть вставлю суть ЖНФ, пока плохо понимаю, да и задачи еще не нарешал, так что работать над этим еще предстоит мне!)

4.4.1 Hamilton-cayley Theorem

(??? важность ее плохо указана.)
Пытаясь разобраться с действием заданного линейного оператора $\mathcal{A} : V \to V$, естественно поставить перед собой цель найти базис в V, наилучшим образом согласованный с $\mathcal{A}$. Другими словами, в классе подобных матриц $C^{-1}AC$, отвечающих оператору $\mathcal{A}$, требуется найти матрицу, имеющую как можно более простой вид. По понятным причинам эта задача существенно связана с основным полем $\mathfrak{K}$, над которым определено векторное пространство V. В дальнейшем считаем, что $\mathfrak{K} = \mathbb{C}$ - поле комплексных чисел, хотя в принципе $\mathbb{C}$ можно заменить на любое алгебраически замкнутое поле.
(?? про другие поля - хз, не тот уровень, чтобы я понимал это.)

Теорема о приведении к треугольному виду матрицы оператора

Матрицу линейного оператора $\mathcal{A}$ всегда можно в смысле подобия привести к треугольному виду.

Proof. □

(??? потом посмотрю.)
Проще всего в этом убедиться рассуждением по индукции.
По теореме 9 из §3 пространство V содержит инвариантную относительно $\mathcal{A}$ гиперплоскость $U : \mathcal{A}U \subset U$. По предположению индукции в U можно выбрать такой базис $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1})$, что $\mathcal{A}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i + \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \in \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{i-1} \rangle$. Имеем $V = \langle U, \mathbf{e}_n \rangle$, где $\mathbf{e}_n$ -

произвольный, не содержащийся в U вектор. Пусть $\mathcal{A}\mathbf{e}_n = \lambda_n\mathbf{e}_n + \mathbf{u}, \mathbf{u} \in U$. Таким образом, в базисе $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}, \mathbf{e}_n)$ действие оператора $\mathcal{A}$ выражается матрицей требуемого вида

$$A = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & * \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{Vmatrix}.$$

Теорема Гамильтона-Кэли

Теорема

Гамильтона-Кэли.

Линейный оператор $\mathcal{A}$ и соответствующая ему матрица A в любом базисе аннулируются своим характеристическим многочленом $\chi_{\mathcal{A}}(t)$, т.е.

$$\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$$

Proof. □

Так как это утверждение не зависит от выбора базиса, то естественно воспользоваться теоремой 1, с самого начала считая матрицу A в базисе $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ имеющей треугольный вид. Рассмотрим цепочку $\mathcal{A}$-инвариантных подпространств

$$V = V_0 \supset V_1 \supset \ldots \supset V_{n-1} \supset V_n = \mathbf{0},$$

где $V_k = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{n-k-1}, \mathbf{e}_{n-k} \rangle$. Так как $(\mathcal{A} - \lambda_{n-k}\mathcal{E})\,\mathbf{e}_{n-k} \in V_{k+1}$, то

$$(\mathcal{A} - \lambda_{n-k}\mathcal{E})\,V_k \subset V_{k+1}$$

и, стало быть,

$$\begin{aligned} &\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})V = \prod_{i=1}^{n} (\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{E})\,V = \\ &= (\mathcal{A} - \lambda_1\mathcal{E}) \ldots (\mathcal{A} - \lambda_n\mathcal{E})\,V_0 \subset (\mathcal{A} - \lambda_1\mathcal{E}) \ldots (\mathcal{A} - \lambda_{n-1}\mathcal{E})\,V_1 \subset \\ &\subset (\mathcal{A} - \lambda_1\mathcal{E}) \ldots (\mathcal{A} - \lambda_{n-2}\mathcal{E})\,V_2 \subset \ldots \subset (\mathcal{A} - \lambda_1\mathcal{E})\,V_{n-1} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Но $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})V = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$.

Следствие теоремы Гамильтона-Кэли

С л е д с т в и е.

Минимальный многочлен $\mu_{\mathcal{A}}$ линейного оператора является делителем характеристического многочлена $\chi_{\mathcal{A}}(t)$, делящимся на все линейные множители $t - \lambda, \lambda \in \mathrm{Spec}(\mathcal{A})$.

Proof. □

По определению $\mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$, а по теореме 2 $\chi_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$. Делимость $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ на $\mu_{\mathcal{A}}(t)$ вытекает теперь из теоремы 2 из §2. Если, далее, λ - собственное значение оператора $\mathcal{A}$, то

$$\mathcal{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Longrightarrow \mathbf{0} = \mu_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})\mathbf{v} = \mu_{\mathcal{A}}(\lambda)\mathbf{v} \Longrightarrow \mu_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0 \Rightarrow (t - \lambda)|\mu_{\mathcal{A}}(t)$$

(мы повторили вывод импликации (7) из §3).

Замечание.

Казалось бы, $\det(tE - A)|_{t=A} = \det(AE - A) = \det 0 = 0$, и теорема Гамильтона-Кэли доказана. Но это совершенно неверное рассуждение. Подумайте, почему.

(!??!?!!?!?!? действительно, почему????)

Примеры применения теоремы Гамильтона-Кэли по Кострикину

Теорема

Гамильтона-Кэли имеет многочисленные приложения, но нами пока она будет использоваться в самой непосредственной форме.

Пример 1. Пусть $\mathcal{A} : V \to V$ - нильпотентный линейный оператор индекса нильпотентности m (см. определение 3 из §2), так что $\mu_{\mathcal{A}}(t) = t^m$.

Пусть $\mathcal{A}^{m-1}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Тогда векторы $\mathbf{v}, \mathcal{A}\mathbf{v}, \ldots, \mathcal{A}^{m-1}\mathbf{v}$ линейно независимы. Действительно, всякая нетривиальная линейная зависимость имеет вид

$$\mathcal{A}^k\mathbf{v} + \alpha_1\mathcal{A}^{k+1}\mathbf{v} + \ldots + \alpha_{m-1-k}\mathcal{A}^{m-1}\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad 0 \leqslant k \leqslant m-1.$$

Применение оператора $\mathcal{A}^{m-1-k}$ к обеим частям этого равенства привело бы нас к соотношению $\mathcal{A}^{m-1}\mathbf{v} = \mathbf{0}$, противоречащему выбору $\mathbf{v}$.

Итак, индекс нильпотентности m оператора $\mathcal{A}$ не превосходит $n = \dim V$, что, разумеется, вытекает и из теоремы Гамильтона-Кэли. Предположим теперь, что $m = n$ и $\mathcal{A}^{n-1}\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$. Введём следующие обозначения для базисных векторов:

$$\mathbf{e}_1 = \mathcal{A}^{n-1}\mathbf{e}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathcal{A}^{n-2}\mathbf{e}, \quad \ldots, \quad \mathbf{e}_{n-1} = \mathcal{A}\mathbf{e}, \quad \mathbf{e}_n = \mathbf{e}.$$

Тогда $\mathcal{A}\mathbf{e}_1 = \mathbf{0}, \mathcal{A}\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_{k-1}, k > 1$, и матрицей оператора $\mathcal{A}$ в базисе $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ будет жорданова клетка $J_n(\lambda)$ с $\lambda = 0$, определение которой дано чуть ниже. Если, скажем, $V = \langle 1, t, \ldots, t^{n-1}\rangle$ - пространство многочленов степени $< n$ над $\mathbb{C}$ и $\mathcal{D} = \frac{d}{dt}$ - оператор дифференцирования по t, то матрицей этого оператора в базисе $(\mathbf{e}_i), \mathbf{e}_i = \frac{1}{i!}t^i$, будет как раз клетка $J_n(0)$.

4.4.2 Jordanian Normal Form

Определения для Жнф

Введем определения:

а) Жорданова клетка размера $m \times m$ (или порядка m) - матрица, соответствующая собственному значению λ:

$$J_m(\lambda) = \left\| \begin{array}{cccccc} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{array} \right\|$$

б) Жорданова матрица - матрица, состоящая из диагональных блоков $J_{m_i}(\lambda_i)$ и нулей вне этих блоков:

$$J = \left\| \begin{array}{cccc} J_{m_1}(\lambda_1) & \cdots & 0 & \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & & \cdots & J_{m_s}(\lambda_s) \end{array} \right\|$$

в) Жордановый базис для линейного оператора $\mathcal{A} : V \to V$ - такой базис пространства V, в котором матрица оператора $\mathcal{A}$ является жордановой, или, как говорят, имеет жорданову нормальную форму (ЖНФ) $J(\mathcal{A})$.

г) Приведением квадратной матрицы A к жордановой нормальной форме называется решение уравнения в матрицах вида $X^{-1}AX = J(A)$, X - (неизвестная) невырожденная матрица, а $J(A)$ - (неизвестная) жорданова матрица.

Заметим, что $J_m(\lambda) - \lambda E = J_m(0)$ - нильпотентная матрица. В частности, $(t-\lambda)^m$ - минимальный многочлен клетки Жрдана (2) и λ - её единственное собственное значение: $\operatorname{Spec} J_m(\lambda) = \{\lambda\}$.

Примеры (??)

П р и м е р 2.

Пусть $D_n(\lambda)$ - векторное пространство комплексных функций вида $e^{\lambda t} f(t)$, где $\lambda \in \mathbb{C}, f(t)$ пробегает многочлены степени $\leqslant n-1$. Так как

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t} f(t)\right)=e^{\lambda t}\left(\lambda f(t)+f^{\prime}(t)\right)$$

то дифференцирование $\mathcal{D}=\frac{d}{dt}$ является линейным оператором на $D_n(\lambda)$. Положим $\mathbf{e}_{i+1}=\frac{t^i}{i!} e^{\lambda t}, i=0, \ldots, n-1$. Очевидно,

$$\mathcal{D} \mathbf{e}_{i+1}=\frac{t^{i-1}}{(i-1)!} e^{\lambda t}+\lambda \frac{t^i}{i!} e^{\lambda t}=\mathbf{e}_i+\lambda \mathbf{e}_{i+1}$$

$(0!=1$; первое слагаемое отсутствует при $i=0)$. Следовательно, функции $\left(\frac{t^i}{i!} e^{\lambda t}\right)$ образуют жорданов базис для оператора $\mathcal{D}$ в нашем пространстве и $J(\mathcal{D})=J_n(\lambda)$.

П р и мер 3.

Если $f(t)$ - произвольный многочлен, то

$$f\left(J_m(\lambda)\right)=\| \begin{array}{ccccc}
f(\lambda) & f^{\prime}(\lambda)/1! & f^{\prime\prime}(\lambda)/2! & \cdots & f^{(m-1)}(\lambda)/(m-1)! \\
0 & f(\lambda) & f^{\prime}(\lambda)/1! & \cdots & f^{(m-2)}(\lambda)/(m-2)! \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & f(\lambda)
\end{array}$$

так что с $J_{m,\lambda}$ гораздо легче оперировать, чем с произвольными матрицами.

Теорема Жордана

Каждая квадратная матрица A порядка n над алгебраически замкнутым полем $\mathfrak{K}$)в частности, над $\mathbb{C}$) приводится к жордановой нормальной Форме. То есть существует невырожденная матрица C, для которой $^{-1}J(A)C=J(A)=J$ - матрица вида

$$J=\left\|\begin{array}{cccc}
J_{m_1}\left(\lambda_1\right) & \cdots & 0 & \\
\cdots & \cdots & \cdot & 0 \\
0 & & \cdots & J_{m_s}\left(\lambda_s\right)
\end{array}\right\| .$$

С точностью до перестановки клеток жорданова нормальная форма матрицы единственна.

Так как минимальные многочлены подобных матриц совпадают, то из основной теоремы и из замечаний, сделанных по поводу жордановой клетки $J_m(\lambda)$, следует, что

$$\mu_A(t)=\left(t-\lambda_{i_1}\right)^{m_{i_1}} \ldots\left(t-\lambda_{i_p}\right)^{m_{i_p}}$$

где $\left\{\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_p}\right\}$ - все попарно различные собственные значения матрицы A и m_{j_k} - максимальный порядок жордановой клетки, отвечающей собственному значению λ_{j_k}.

Ясно, что необходимым и достаточным условием диагонализируется отсутствие в $J(A)$ клеток порядка >1. Поэтому с учётом (3) получается следующий полезный критерий. тогда и только тогда, когда её минимальный многочлен $\mu_A(t)$ не имеет кратных корней.

Этот критерий эффективен, поскольку для вычисления $\mu_A(t)$ нет необходимости приводить матрицу A к жордановой нормальной форме.

Доказательство основной теоремы разбивается на три части, соответствующие пп. 3-5. Попутно будут сформулированы некоторые практические рекомендации для получения ЖНФ (жордановой нормальной формы), а затем мы укажем на другие доказательства.

(укажу более точно потом)

Корневые подпространства

Случай нильпотентного оператора

Доказательство Жнф (!?!?)

О применениях Жнф в дифференциальных уравнениях (!?!?!)

(тут это нормально укажу.)

Единственность

Приступая к доказательству единственности, укажем заодно практическое правило для приведения произвольной матрицы A порядка n к жордановой нормальной форме. Для этого нужно уметь находить число $N(m, \lambda)$ жордановых клеток $J_m(\lambda)$ порядка m, отвечающих собственному значению λ матрицы A. Сопоставим обычным образом матрице A оператор $\mathcal{A}$, действующий на n-мерном векторном пространстве V, и разложим V в прямую сумму

$$V = V(\lambda) \oplus V'$$

Где

$$V(\lambda) = \bigoplus_{j=1}^{s} \left\langle \mathbf{e}_j, (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})\mathbf{e}_j, \ldots, (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m_j-1}\mathbf{e}_j \right\rangle,$$

$$V' = \sum_{\lambda' \neq \lambda} V\left(\lambda'\right).$$

Будем подсчитывать ранг $r_t = \operatorname{rank}(A - \lambda E)^t$ матрицы $(A - \lambda E)^t$, или, что то же самое, размерность пространства $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^t V$. Эта размерность, конечно, не зависит от выбора базиса в V. Каждое из пространств в разложении (9) инвариантно относительно $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^t$, поэтому

$$\dim(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^t V = \sum_j \dim(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^t \mathbb{C}[\mathcal{A}]\mathbf{e}_j + \dim(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^t V'.$$

Считаем для определённости $m_1 \leqslant m_2 \leqslant \ldots \leqslant m_s$. Если $m_j \leqslant t$, то $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^t \mathbb{C}[\mathcal{A}]\mathbf{e}_j = \mathbf{0}$. При $m_j > t$ имеем $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^t \mathbb{C}[\mathcal{A}]\mathbf{e}_j = = \langle (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^t \mathbf{e}_j, (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{t+1}\mathbf{e}_j, \ldots, (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^{m_j-1}\mathbf{e}_j \rangle$, так что

$$\dim(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^t \mathbb{C}[\mathcal{A}]\mathbf{e}_j = m_j - t.$$

На V' оператор $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$ невырожден (теорема 1), поэтому Получаем

$$\dim(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^t V' = \dim V'.$$

$$r_t = \sum_{m_j > t} (m_j - t) + \dim V',$$

откуда

$$\begin{aligned} r_t - r_{t+1} &= \sum_{m_j > t} (m_j - t) - \sum_{m_j > t+1} (m_j - t - 1) = \\ &= \sum_{m_j > t} (m_j - t) - \sum_{m_j > t+1} (m_j - t) + \sum_{m_j > t+1} 1 = \\ &= \sum_{m_j = t+1} 1 + \sum_{m_j > t+1} 1 = N(t+1, \lambda) + N(t+2, \lambda) + \ldots \end{aligned}$$

Стало быть,

$$\begin{aligned} r_{m-1} - r_m - (r_m - r_{m+1}) &= \{N(m, \lambda) + N(m+1, \lambda) + \ldots\} - \{N(m+1, \lambda) + N(m+2, \lambda) + \ldots\} = \\ &= N(m, \lambda), \end{aligned}$$

и мы получаем окончательную формулу

$$N(m,\lambda) = r_{m-1} - 2r_m + r_{m+1},$$
$$m \geqslant 1, \quad r_t = \operatorname{rank}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^t, \quad r_0 = n.$$

Заметим, что r_t - инвариант матрицы A (т.е. число, определяемое классом подобия матрицы A). Значит, формулой (10) устанавливается также единственность жордановой формы $J(A)$.

(доказано по идее, да???)

До сих пор о матрице C, осуществляющей подобие

$$J(A) = C^{-1}AC,$$

4.4.3 Other About Jnf

Теорема Жордана-Шевале по Вавилову

(тут задротство на самом деле.)

4.4.4 About Other Normal Forms

(хз, мб такие есть, пока не работал с ними, Кострикин вроде написал неплохо.)

4.5 Other Properties

4.5.1 About the Khan-banach Theorem

(выше должна уже быть теория про линейные пространства и подпространства)
удивительно, но все просто.
(пока как заготовка)

мотивация

конструкция

4.6 Linear Vavilov Mappings

(пока это избегаю, потому что есть темы актуальнее.)

4.6.1 Module Structure on Homr(u, V)

1. Сумма линейных отображений. Пусть R - произвольное кольцо с 1. Пусть, далее, $\phi, \psi : U \longrightarrow V$ линейные отображения с общей областью определения и общей областью значений, где оба U и V одновременно являются левыми или правыми R-модулями. Тогда сумма $\phi + \psi : U \longrightarrow V$, $x \mapsto \phi(x) + \psi(x)$, этих линейных отображений тоже является линейным отображением. Аддитивность $\phi + \psi$ проверяется непосредственно

$$(\phi+\psi)(u+v) = \phi(u+v) + \psi(u+v) = \phi(u) + \phi(v) + \psi(u) + \psi(v) =$$
$$\phi(u) + \psi(v) + \phi(u) + \psi(v) = (\phi+\psi)(u) + (\phi+\psi)(v),$$

а однородность еще проще

$$(\phi+\psi)(u\lambda) = \phi(u\lambda) + \psi(u\lambda) = \phi(u)\lambda + \psi(u)\lambda = (\phi+\psi)(u)\lambda.$$

В силу поточечного характера эта операция обладает всеми свойствами сложения в V и превращает $\operatorname{Hom}_R(U, V)$ в абелеву группу.

Если пРАвыЕ R-модули U и V нЕ нЕСут никАКой дополнительной тить в R-модуль. Для того, чтобы разумным образом задать умножение на скаляры, необходимо, чтобы хотя бы один из модулей U или V являлся бимодулем.

2. Структура левого модуля на $\mathrm{Hom}_R(U, V)$. Пусть как обычно U правый R-модуль, а V является S-модулем- R. Мы можем определить на $\mathrm{Hom}_R(U, V)$ умножение на скаляры слева, полагая

$$(\lambda\phi)(x) = \lambda(\phi(x)), \quad \lambda \in S, \phi \in \mathrm{Hom}_R(U, V), x \in U.$$

В самом деле, следующая выкладка показывает, что так определенное отображение $\lambda\phi : U \longrightarrow V$ аддитивно:

$$(\lambda\phi)(x+y) = \lambda(\phi(x+y)) = \lambda(\phi(x)+\phi(y)) =$$
$$\lambda(\phi(x)) + \lambda(\phi(y)) = (\lambda\phi)(x) + (\lambda\phi)(y),$$

Проверка однородности совершенно аналогична:

$$(\lambda\phi)(x\alpha) = \lambda(\phi(x\alpha)) = \lambda(\phi(x)\alpha) = (\lambda(\phi(x)))\alpha = ((\lambda\phi)(x))\alpha$$

В этих вычислениях мы ставим слишком много скобок, поэтому они выглядят почти столь же коряво и заскорузло, как программы на Lisp. Чтобы избежать этого в дальнейшем, мы будем - в соответствии с практикой Mathematica и Maple - считать, что независимо от порядка записи пРИменЕнИЕ ФУнкции ИмеЕт БолеЕ выСОкий пРИОРитет, ЧЕМ ЛЮБАя АРИФМЕтичЕСкАЯ опЕРАция. Таким образом, $\lambda\phi(x)$ истолковывается как $\lambda(\phi(x))$, а не как $(\lambda\phi)(x)$.

Теорема

RL. Относительно введенных операций $\mathrm{Hom}_R\left(U_R, SV_R\right)$ является левььм S-модулем.

Proof. □

Все аксиомы модуля проверяются непосредственно по определению. Для полноты один раз приведем все детали. В дальнейшем проведение подобных выкладок будет оставляться читателю. Внешняя ассоциативность:

$$((\lambda\mu)\phi)(x) = (\lambda\mu)\phi(x) = \lambda(\mu\phi(x)) = \lambda((\mu\phi)(x)) = (\lambda(\mu\phi))(x).$$

Дистрибутивность относительно сложения скаляров:

$$((\lambda+\mu)\phi)(x) = (\lambda+\mu)\phi(x) = \lambda\phi(x) + \mu\phi(x) =$$
$$(\lambda\phi)(x) + (\mu\phi)(x) = (\lambda\phi + \mu\phi)(x).$$

Дистрибутивность относительно сложения векторов:

$$(\lambda(\phi+\psi))(x) = \lambda(\phi+\psi)(x) = \lambda(\phi(x)+\psi(x)) =$$
$$\lambda\phi(x) + \lambda\psi(x) = (\lambda\phi)(x) + (\lambda\psi)(x) = (\lambda\phi + \lambda\psi)(x).$$

Наконец, унитальность: $(1\phi)(x) = 1\phi(x) = \phi(x)$.

3. Структура правого модуля на $\mathrm{Hom}_R(U, V)$. Пусть как обычно V правый R-модуль, а U является S-модулем-R. Мы можем определить на $\mathrm{Hom}_R(U, V)$ умножение на скаляры справа, полагая

$$(\phi\lambda)(x) = \phi(\lambda x), \quad \phi \in \mathrm{Hom}_R(U, V), \lambda \in S, x \in U.$$

Проверим, что так определенное отображение $\phi\lambda : U \longrightarrow V$ действительно линейно. Аддитивность:

$$(\phi\lambda)(x+y) = \phi(\lambda(x+y)) = \phi(\lambda x + \lambda y) =$$
$$\phi(\lambda x) + \phi(\lambda y) = (\phi\lambda)(x) + (\phi\lambda)(y).$$

Однородность:

$$(\phi\lambda)(x\alpha) = \phi(\lambda(x\alpha)) = \phi((\lambda x)\alpha) = \phi(\lambda x)\alpha = (\phi\lambda)(x)\alpha.$$

Теперь мы можем сформулировать аналог

Теорема

RR. Относительно введенных операций $\mathrm{Hom}_R\left(sU_R, V_R\right)$ является правым S-модулем.

Обратите внимание на отличие этой теоремы от предыдущей, если раньше структура левого S-модуля на V задавала структуру левого же S-модуля на $\mathrm{Hom}(U, V)$, то теперь структура левого S-модуля на V задает структуру правого S-модуля на $\mathrm{Hom}(U, V)$. Это является еще одним выражением того принципа, что функтор $(U, V)(???) \, \mathrm{Hom}(U, V)$ ковариАнтен по второму АРГУменту И КОнтРАВАРИАНТЕН по пеРвому АРгУменту.

Гомоморфизмы левых модулей

Пусть теперь U и V два левых R-модуля. Если V является R-модулем-S, то мы можем определить на $\mathrm{Hom}_R(U, V)$ умножение на скаляры справа, полагая

$$(x)(\phi \lambda)=((x) \phi) \lambda, \quad x \in U, \phi \in \mathrm{Hom}_R(U, V), \lambda \in S .$$

мотивация

конструкция

4.6.2 Structure of Algebra on Endr(u)

мотивация

конструкция

4.6.3 Functoriality

мотивация

(хз)

конструкция

В настоящем параграфе мы покажем, что Hom_R можно рассматривать как функтор от двух аргументов

$$U, V \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_R(U, V),$$

причем этот функтор обладает очень хорошими свойствами. Пусть $\phi: Z \longrightarrow U, \psi: V \longrightarrow W$ линейные отображения. Тогда естественно определяется гомоморфизм

$$\mathrm{Hom}(\phi, \psi): \mathrm{Hom}(U, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Z, W).$$

А именно, гомоморфизм $\mathrm{Hom}(\phi, \psi)$ сопоставляет каждому линейному отображению $\theta: U \longrightarrow V$ композицию $\psi \theta \phi: Z \longrightarrow W$. Таким образом,

$$\mathrm{Hom}(\phi, \psi)(\theta)=\psi \theta \phi$$

Обратите внимание на то, что функтор Hom ковариантен по второму аргументу в том смысле, что линейное отображение $\psi: V \longrightarrow W$ порождает линейное отображение

$$\mathrm{Hom}(U, \psi): \mathrm{Hom}(U, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}(U, W),$$

действующее в том же направлении. В то же время, этот функтор контравариантен по первому аргументу, иными словами, линейное отображение $\phi: Z \longrightarrow U$ порождает линейное отображение

$$\mathrm{Hom}(\phi, V): \mathrm{Hom}(U, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}(Z, V),$$

действующее в противоположном направлении.

Теорема. Гомоморфизм Hom обладает следующими свойствами

- $\mathrm{Hom}\left(\phi \phi^{\prime}, \psi^{\prime} \psi\right)=\mathrm{Hom}\left(\phi^{\prime}, \psi^{\prime}\right) \mathrm{Hom}(\phi, \psi)$.
- $\mathrm{Hom}\left(\mathrm{id}_U, \mathrm{id}_V\right)=\mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(U, V)}$.
- $\mathrm{Hom}\left(\phi+\phi^{\prime}, \psi\right)=\mathrm{Hom}(\phi, \psi)+\mathrm{Hom}\left(\phi^{\prime}, \psi\right)$.
- $\mathrm{Hom}\left(\phi, \psi+\psi^{\prime}\right)=\mathrm{Hom}(\phi, \psi)+\mathrm{Hom}\left(\phi, \psi^{\prime}\right)$.

Proof. □

Первая формула представляет собой еще один вариант ассоциативности композиции: $\mathrm{Hom}\,(\phi\phi', \psi\psi')\,(\theta) = \psi'\psi\theta\phi\phi' =$

$$\mathrm{Hom}\,(\phi', \psi')\,(\psi\theta\phi) = \mathrm{Hom}\,(\phi', \psi')\,\mathrm{Hom}(\phi, \psi)(\theta).$$

Вторая формула очевидна, а третья и четвертая были фактически доказаны в предыдущем параграфе.

(ничего не понял, пока так)

4.6.4 Linear Mapping Matrix

мотивация

конструкция

4.6.5 Linear Mapping Matrix Transformation

мотивация

конструкция

4.6.6 Linear Mappings of Direct Sums

мотивация

конструкция

4.6.7 Semilinear Mappings

мотивация

конструкция

4.6.8 Module and Homomorphism Diagrams

мотивация

конструкция

4.6.9 Frobenius and Sylvester Inequalities

мотивация

конструкция

4.6.10 Fredholm Operators

мотивация

конструкция

4.6.11 The Three Homomorphisms Lemma

мотивация

конструкция

4.6.12 The Five Homomorphisms Lemma

(вообще хз, о чем речь, да и не буду это смотреть, пока основы не возьму.)

мотивация

конструкция

Лемма о пяти гомоморфизмах. Пусть строки коммутативной $\partial-$ граммиl

$$
\begin{array}{ccccccccc}
U_{-2} & \xrightarrow{\phi_{-2}} & U_{-1} & \xrightarrow{\phi_{-1}} & U_0 & \xrightarrow{\phi_0} & U_1 & \xrightarrow{\phi_1} & U_2 \\
\downarrow{\scriptstyle \pi_{-2}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_0} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_2} \\
V_{-2} & \xrightarrow{\psi_{-2}} & V_{-1} & \xrightarrow{\psi_{-1}} & V_0 & \xrightarrow{\psi_0} & V_1 & \xrightarrow{\psi_1} & V_2
\end{array}
$$

являются точньии последовательностями. Тогда если π_{-2} эпиморфно, а $\pi_{-1}\pi_1$ мономорфныl, то π_0 тоже мономорфно.
являются точньми последовательностями. Тодда если π_{-2} эпиморфно, а $\pi_{-1}\pi_1$ мономорфньг, то π_0 тоже мономорфно.

Proof. □

Пусть $x \in \operatorname{Ker}(h_0)$. В силу коммутативности третьего квадрата $\pi_1(\phi_0(x)) = \psi_0(\pi_0(x)) = 0$. Так как по условию $\operatorname{Ker}(\pi_1) = 0$, то $\phi_0(x) = 0$. В силу точности верхней строки в члене U_0 найдется такой элемент $y \in U_{-1}$, что $\phi_{-1}(y) = x$. В силу коммутативности второго квадрата $\psi_{-1}(\pi_{-1}(y)) = \pi_0(\phi_{-1}(y)) = \pi_0(x) = 0$, так что $\pi_{-1}(y) \in \operatorname{Ker}(\psi_{-1})$. В силу точности нижней строки в члене V_{-1} найдется такое $z \in V_{-2}$, что $\pi_{-1}(y) = \psi_{-2}(z)$. Но ведь по условию π_{-2} эпиморфно, так что найдется $w \in U_{-2}$ такое, что $\pi_{-2}(w) = z$. В силу коммутативности первого квадрата $\pi_{-1}(\phi_{-2}(w)) = \psi_{-2}(\pi_{-2}(w)) = \psi_{-2}(z) = \pi_{-1}(y)$. Так как по условию π_{-1} мономорфизм, то отсюда следует $\phi_{-2}(w) = y$. В силу точности верхней строки в члене U_{-1} отсюда следует, что $x = \phi_{-1}(y) = \phi_{-2}(\phi_{-1}(w)) = 0$, как и утверждалось.

Как всегда, утверждение, двойственное к любой теореме про отображения модулей, тоже является теоремой. Поэтому лемму о пяти гомоморфизмах можно сформулировать еще и так.

Лемма о пяти гомоморфизмах (bis). Если в условиях предыдущей леммьи π_2 мономорфно, а π_{-1} и π_1 эпиморфньи, то π_0 тоже эпиморфно.

Конечно, это утверждение сразу следует из предыдущего. Тем не менее, мы настоятельно рекомендуем начинающему самостоятельно провести диаграммный поиск в этом случае, чтобы убедиться, какие именно предположения об исходной диаграмме используются в доказательстве этого утверждения. Проделав это он убедится, что в доказательстве следствия использованы все условия.

4.7 Fundamentals of Euclidean Spaces

4.8 unitary Spaces

введя форму, мы сразу и получили *унитарное пространство.*

и тут дофига свойств про него.

(лучше сперва просто перечислить главные, потом уже заниматься доказательствами и конкретикой)

для каждой эрмитовой матрицы C

$$\bar{C}^T G C = E \tag{4.5}$$

также одна из важнейших

$$|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})|^2 \leq |\boldsymbol{u}|^2 |\boldsymbol{v}|^2 \tag{4.6}$$

4.8.1 Conjugated

и тут есть тип: сопряженное преобразование.

и теоремы про это все.

оказывается, это на самом деле полезно, так как с этими мыслями можно прийти к тому, что собственные числа эрмитовой матрицы вещественные, что очень мощно и полезно.

короче, оставляю эту главу на потом.

наверное это очень очень важная глава, очень важные свойства, так что ее почти первым делом нужно учить

4.8.2 Self-adjoint

и оно в УМФ встречается, так что отдельно нужно проработать все свойства этих объектов.

связки с линалом очень большие!

4.8.3 Revision

на самом деле мы очень часто работаем именно в унитарном пространстве, хотя и не замечаем этого.

4.9 Other Articles in This Report

4.9.1 connection of Unitary, Orthogonal and Symplectic Structures

(конец методички Ершова про унитарные пространства, пока не до этого.)

Суть по Ершову

Комплексное векторное пространство V — это абелева группа, для которой определена операция умножения на комплексные числа

$$\mathbb{C} \times V \to V, \quad (\lambda, \mathbf{v}) \mapsto \lambda \mathbf{v} \tag{4.7}$$

...

Этот оператор называется комплексной структурой

$$\mathrm{Sp}(2n) = \left\{ A \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}) | A^T I_{2n} A = I_{2n} \right\} \tag{4.8}$$

$$\mathrm{U}(n) = \mathrm{O}(2n) \cap \mathrm{Sp}(2n) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{O}(2n) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \cap \mathrm{Sp}(2n) \tag{4.9}$$

звучит пипец как круто и интересно! сперва основы только пересобрать нужно.

$$\begin{gathered}\gamma(\varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v})) = \gamma\left(\varphi(\mathbf{u}), \varphi\left(J\left(\mathbf{v}'\right)\right)\right) = \gamma\left(\varphi(\mathbf{u}), J\left(\varphi\left(\mathbf{v}'\right)\right)\right) = \\ \beta\left(\varphi(\mathbf{u}), \varphi\left(\mathbf{v}'\right)\right) = \beta\left(\mathbf{u}, \mathbf{v}'\right) = -\beta(\mathbf{u}, J(\mathbf{v})) = \gamma(\mathbf{u}, \mathbf{v})\end{gathered} \tag{4.10}$$

$$\mathrm{O}(2) \cap \mathrm{Sp}(2) = \mathrm{SO}(2) = \theta(\mathrm{U}(1)) \tag{4.11}$$

4.10 Hermitian Vector Spaces

(удивительно, но так с ходу я ничего не помню)

4.10.1 Hermitian Forms

4.10.2 Metric Ratios.

4.10.3 Orthogonality

4.10.4 Unitary Matrices

4.10.5 Normalized Vector Spaces

4.11 Linear Operators on Spaces with dot Product

(все по кострикину)

4.11.1 Relationship Between Linear Operators and θ-linear Forms

(абсолютно хз, даже пока не слышал это вообще, а у кострикина вначале почему-то)

4.11.2 Types of Linear Operators

4.11.3 Canonical View of Hermitian Operators

(вроде я должен ответить, а нихрена, я хз)

4.11.4 Reduction of the Quadratic Form to the Main Axes

4.11.5 Bringing a Pair of Quadratic Forms to a Canonical Form

4.11.6 Canonical View of Isometries

5 Deeper Mathematical Fundamentals of Linear Algebra

5.1 Modules in Depth According to Vavilov

(пока не занимался, для физика это слишком углубленно, нет на это времени пока что)

5.1.1 Modules and Vector Spaces

Пусть вначале R - ассоциативное, но не обязательно коммутативное кольцо с 1. 1. Модули. Следующее определение вводит одну из важнейших алгебраических структур, обобщающих одновременно понятия абелевой группы, векторного пространства и идеала. Собственно, сам термин модуль = Modul, module [10] как раз и обязан своим происхождением специальному случаю идеалов колец и исторически возник из выражения сравнение по модулю.

Определение. Аддитивно записываемая абелева группа M называется левым модулем над R (коротко, левым R-модулем), если элементы R действуют на M в качестве левых операторов, т.е. задано отобраЖение

$$R \times M \longrightarrow M, \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x,$$

- умножение элементов M на элементы R слева - причем выполняются следующие четыре аксиомы. V1 Внешняя ассоциативность:

$$(\lambda \mu) x = \lambda(\mu x)$$

для июбых $\lambda, \mu \in R, x \in M$. V2 Дистрибутивность относительно сложения скаляров:

$$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$$

для июбьх $\lambda, \mu \in R, x \in M$. V3 Дистрибутивность относительно сложения элементов модуля:

$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$$

для июбьх $\lambda \in R, x, y \in M$.

V4 унитальность:

$$1x = x \quad \text{дяя июбого } x \in M.$$

Аналогично определяются правые R-модули. При этом элементы R должсны действовать 6 качестве правых операторов,

$$M \times R \longrightarrow M, \quad (x, \lambda) \mapsto x\lambda,$$

так что аксиома V1 должна быть заменена на следующую аксиому: V1° Внешняя ассоциативность:

$$x(\lambda\mu) = (x\lambda)\mu.$$

для июбых $\lambda, \mu \in R, x \in M$. Когда кольцо R фиксировано, оно часто называется основным кольцом = Grundring, ground ring. Впрочем, некоторые устойчивые выражения, такие как смена базы, подразумевают романский вариант этого термина: anneau de base, anello di base. Если основное кольцо определено из контекста, о модулях над ним часто говорят просто о как о левых/правых модулях. В случае, когда кольцо R коммутативно, оно называется также кольцом скаляров = Skalarenring, scalar ring. Изредка мы будем ссылаться на элементы R как скаляры и в том случае, когда R некоммутативно, но строго говоря, это злоупотребление.

Обратите внимание на различие аксиом V1 и V1°: в первом случае x вначале умножается на второй из действующих скаляров, а во втором на первый. Особенно важен случай, когда кольцо R коммутативно. В этом случае порядок скаляров не важен и, следовательно, аксиомы V1 и V1° эквивалентны, так что любой левый R-модуль можно превратить в правый и наоборот, полагая $x\lambda = \lambda x$. В этом случае говорят просто о модулях над R или об R-модулях.

В общем случае левый R-модуль можно трактовать как правый R° модуль, где R° — кольцо, противоположное к R. А именно, пусть $^\circ : R \longrightarrow R^o, \lambda \mapsto \lambda^o$, есть канонический антиавтоморфизм колец R и R^o. Тогда полагая $x\lambda^o = \lambda x$ мы превращаем левый R-модуль в правый R^0-модуль. Точно так же правый R-модуль превращается в левый R°-модуль. Это значит, что мы могли бы рассматривать только левые или только правые модули. Это, однако, было бы неудобно, так как во многих конструкциях естественно одновременно рассматривать как левые, так и правые модули. Кроме того, очень часто возникают объекты, которые одновременно являются левым модулем над одним кольцом и правым модулем над другим.

В некоммутативном же случае указание на то, левые или правые модули рассматриваются, обязательно. Чтобы указать, что M рассматривается как левый модуль, часто пишут $_RM$, а правый - M_R. Наиболее ригорозные авторы резервируют термин R-модуль исключительно для левых модулей над R, при этом правый модуль над R называется модуль- R. модули и линЕйныЕ ОТОБРАЖЕния 31 Определение. B случае, когда $R = T$ является телом, вместо левых u правых модулей над T говорят о левых или правых векторных пространствах над Т. В случае, кодда $R = K$ - поле, говорят просто о векторных пространствах над K. Элементы векторного пространства часто называются векторами, в противоположность элементам тела T, которые называются скалярами.

Предостережение. Многие писатели в области анализа, дифференциальных уравнений и т.д. называют бесконечномерные векторные пространства линейными пространствами. Мы не различаем термины векторное пространство и линейное пространство и используем их как синонимы, независимо от того, конечномерны они или нет.

Предостережение. Полезно понимать, что тот факт, что операция в V записывается аддитивно, является чистой условностью. Например, $\mathbb{Q}^*$ с операцией умножения как сложением и возведением в целую степень как умножением на скаляры удовлетворяет всем аксиомам (правого) модуля: $\mathbf{V1}^\circ x^{mn} = (x^m)^n$; $\mathbf{V2} x^{m+n} = x^m x^n$ $\mathbf{V3}(xy)^n = x^n y^n$; $\mathbf{V4} x^1 = x$. Сформулируем несколько простейших следствий из аксиом модуля.

Задача

. Докажите, что для любых $\forall\lambda, \mu \in R, \forall x, y \in M$, выполняются тождества
• $0x = 0$; - $\lambda 0 = 0$; - $(-\lambda)x = -\lambda x = \lambda(-x)$; - $(\lambda - \mu)x = \lambda x - \mu x$; - $\lambda(x - y) = \lambda x - \lambda y$.

Задача

(allgemeine Distributivgesetz). Докажите, что в любом модуле выполняется обобщенная дистрибутивность умножения на скаляры относительно сложения:

$$\left(\alpha_1 + \ldots + \alpha_m\right)\left(x_1 + \ldots + x_n\right) = \sum_{i,j} \alpha_i x_j.$$

2. Бимодули. Предположим, что на M одновременно заданы структуры левого R-модуля и правого S-модуля. Говорят, что эти структуры согласованы, если выполняется следующая аксиома, утверждающая, что скаляры из R и S коммутируют. Заметим, что эта аксиома аналогична аксиоме, связывающей два умножения в алгебре.

V5 $\forall\lambda \in R, \forall x \in M, \forall\mu \in S, (\lambda x)\mu = \lambda(x\mu)$ (внешняя ассоциативность).

В этом случае M называется бимодулем или, если чтобы подчеркнуть, что M рассматривается как бимодуль, пишут ${}_R M_S$ и говорят об M как об R-модуле- S или иногда как об R-бимодуле- S.

Можно было бы рассматривать два левых или два правых действия и писать R, SM или $M_{R,S}$. Уто подразумевает, что операторы из R и S коммутируют, т.е., например, в случае левого действия

$$(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x), \quad \lambda \in R, \mu \in S, x \in M.$$

Модуль M, на котором заданы коммутирующие левые действия колец R и S, называется (R, S)-бимодулем. Правые (R, S)-бимодули - или коротко бимодули- (R, S) - определяются аналогично. Однако на практике гораздо чаще встречается случай, когда два кольца действуют на M с разных сторон. Комментарий. С использованием понятия тензорного произведения алгебр изучение бимодулей сводится к изучению обычных модулей над другим кольцом. Например, R модуль- S можно M рассматривать как левый (R, S°)-бимодуль, а его, в свою очередь как левый модуль над $R \otimes S^\circ$. С другой стороны, тот же модуль можно рассматривать как правый (R^o, S) бимодуль или, что то же самое, как правый модуль над $R^o \otimes S$.

5.1.2 Examples of Modules

В настоящем параграфе мы ограничимся перечислением нескольких первых примеров R-модулей и векторных пространств. Много дальнейших более рафинированных или более специальных примеров встретится нам в дальнейшем. - Нулевой модуль. Множество $\{0\}$, состоящее из одного элемента 0, вместе с операциями $0+0=0, \lambda 0 = 0$ для всех $\lambda \in R$, является R-модулем. Этот модуль называется нулевым модулем и обычно обозначается просто 0. - Эвклидовы пространства. Обычные векторы на эвклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ и в трехмерном эвклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ образуют векторные пространства над $\mathbb{R}$. Этот пример был впервые явно рассмотрен Симоном Стевином в конце XVI века. - Абелевы группы. Любая абелева группа M является модулем над $\mathbb{Z}$, если положить для $n \in \mathbb{N}$ и $x \in M$:

$$nx = x + \ldots + x \quad (n \text{ раз }), \quad 0x = 0, \quad (-n)x = n(-x)$$

- Абелевы группы (cont.) Любая абелева группа M является левым модулем над $\operatorname{End}(M)$. В самом деле, V1, V2 и V4 - это просто определение операций в $\operatorname{End}(M)$, а V3 - это определение эндоморфизма. - Дифференциальные абелевы группы. Пусть $R = \mathbb{Z}[d]$, где $d^2 = 0$ - кольцо двойных чисел над $\mathbb{Z}$. Тогда R-модуль - это в точности абелева группа M, в которой зафиксировано дифференцирование $a \mapsto da$, т.е. такой эндоморфизм, квадрат которого равен 0. мОДУли и линЕЙныЕ ОТОБРАЖЕния 33 - Кольцо как модуль над собой. Само кольцо R можно рассматривать как левый и как правый R-модуль. А именно, пусть $M = {}_RR$ совпадает с R как аддитивная группа, а левое умножение на элементы R задается формулой $x \mapsto \lambda x$, где $\lambda \in R, x \in M$. Тогда из аксиом кольца вытекает, что ${}_RR$ - левый R-модуль. Аналогично, полагая, что $M = R_R$ совпадает с R как аддитивная группа, а правое умножение на элементы R задается формулой $x \mapsto x\lambda$, где $x \in M, \lambda \in R$, мы задаем на R структуру правого R-модуля. Получающийся модуль называется обычно левым/правым свободным R-модулем ранга 1. - Идеалы. Каждый левый идеал I кольца R является левым R-модулем, правый идеал I - правым R-модулем, а двусторонний идеал I - бимодулем, или, если нужна особая точность, R-модулем- R. - Идеализация модуля. В действительности, каждый R-модуль- R можно естественно рассматривать как идеал в некотором кольце. А именно, введем на прямой сумме $R \oplus V$ абелевых групп R и V следующее умножение

$$(\alpha, u)(\beta, v) = (\alpha\beta, \alpha v + u\beta)$$

Легко проверить, что это умножение превращает $R \oplus V$ в ассоциативное кольцо, причем V идеал в $R \oplus V$, квадрат которого равен 0. Таким образом, в коммутативном случае каЖдый модуль мОЖЕт РАССмАтРИвАТьСя КАК идЕАЛ нЕКОторого КольЦА.

- Дробные идеалы. Пусть R - область целостности, K ее поле частных. Ненулевой подмодуль $I \leq K$ называется дробным идеалом кольца R, если существует такое $\lambda \in R^{\bullet}$, что $\lambda I \leq R$. Каждый ненулевой идеал R кольца является дробным идеалом.

Следующий важнейший пример модулей будет подробно рассмотрен в следующем параграфе.

- Свободные модули. Обозначим через ${}^nR$ - множество всех строк длины n а через R^n - множество всех столбцов высоты n с компонентами из R. Тогда ${}^nR$ является левым, а R^n - правым модулем над R. Они называются, соответственно, свободным левым и свободным правым модулями над R ранга n. - В дополнение к предыдущему примеру необходимо упомянуть, что ${}^nR$ является правым, а R^n - левым модулем над кольцом матриц $M(n, R)$, относительно обычного умножения столбца на матрицу слева и строки на матрицу справа. - Кольцо многочленов $R[x]$ от переменной x над кольцом R можно рассматривать как R-модуль относительно обычной операции сложения многочленов и операции умножения многочлена на константу. - Множество $M(m, n, R)$ матриц размера $m \times n$ с коэффициентами из кольца R можно рассматривать R-модуль- R относительно обычного сложения матриц и умножения матриц на скаляры слева и справа.

- В действительности множество $M(m, n, R)$ имеет естественную структуру $M(m, R)$-модуля- $M(n, R)$ относительно обычного умножения матриц размера $m \times n$ на квадратные матрицы степени m слева и на квадратные матрицы степени n справа.

- Если L/K - расширение полей, т.е. $K \subseteq L$, то L можно рассматривать как векторное пространство над K. Например, $\mathbb{C}$ - векторное пространство над $\mathbb{R}, \mathbb{R}$ - векторное пространство над $\mathbb{Q}$, а $\mathbb{F}_4$ - векторное пространство над $\mathbb{F}_2$.

- Пространство функций. Множество $K^X = \mathrm{Map}(X, K)$ всех функций на некотором множестве X со значениями в поле K является векторным пространством над K относительно обычного (поточечного) сложения функций и (поточечной) операции умножения функции на константу:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

В дальнейшем всегда, когда мы говорим о пространствах функций, мы имеем в виду какие-то подпространства K^X замкнутые относительно этих операций. - Модули над групповым кольцом. Пусть K - поле, G - конечная группа, а $K[G]$ - групповое кольцо группы G над K. Линейным представлением группы G степени n над полем K называется гомоморфизм $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$, в полную линейную группу n-мерного векторного пространства V над K. Полагая $gv = \rho(g)v$ и продолжая это действие по линейности на все кольцо $K[G]$, мы задаем на V структуру левого $K[G]$ - модуля.

5.1.3 Free Modules

В элементарной линейной алгебре обычно ограничиваются рассмотрением свободных модулей, т.е. модулей, в которых существует базис. Это понятие детально обсуждается вследующей главе, но уже сейчас удобно привести два основных примера. В действительности, с точностью до изоморфизма никаких других конечно порожденных свободных модулей нет. - Свободный левый модуль. Следуя Кону обозначим через ${}^nR$ множество всех строк длины n с компонентами из R, рассматриваемое как левый R-модуль. Иными словами, элементами ${}^nR$ являются все строки вида

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \quad x_i \in R,$$

причем операции вводятся покомпонентно:

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$
$$\lambda (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

Получающийся модуль называется свободным левым R-модулем ранга n. Вообще, свободным левым R-модулем ранга n называется любой модуль V, изоморфный ${}^nR$, его ранг обозначается $n = \mathrm{rk}(V)$. - Свободный правый модуль. Как обычно, R^n обозначает множество всех столбцов высоты n с компонентами из R, рассматриваемое как правый R-модуль. Иными словами, элементами R^n являются все столбцы вида

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_i \in R,$$

а операции сложения и умножения на множестве столбцов вводятся покомпонентно:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \lambda = \begin{pmatrix} x_1\lambda \\ \vdots \\ x_n\lambda \end{pmatrix}$$

Получающийся модуль называется свободным правым R-модулем ранга n. Вообще, свободным правым R-модулем ранга n называется любой модуль V, изоморфный R^n, его ранг обозначается $n = \mathrm{rk}(V)$. Предостережение 1. Для экономии места мы часто записываем столбец x в виде $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, как результат применения операции формального транспонирования к строке $(x_1, \ldots, x_n)$. Следует, однако, иметь в виду, что эта операция совпадает с настоящей операцией транспонирования матриц только в случае, когда кольцо R коммутативно. В этом последнем случае модули R^n и ${}^nR$ будут изоморфны как R-модули, и называются свободным R-модулем ранга n. Тем не менее, даже в случае коммутативного основного кольца их необходимо тщательно различать. На поверхностном уровне это будет очевидно сразу, как только мы определим матрицы. В дальнейшем вскроются гораздо более глубокие причины. Дело в том, что ${}^nR$ является правым $M(n, R)$-модулем, а R^n - левым $M(n, R)$-модулем. Иными словами, это значит, что R изоморфизм между ${}^nR$ и R^n, задаваемый транспонированием, не является каноническим, а связан с конкретным выбором базисов. Задание конкретного изоморфизма между ${}^nR$ и R^n вводит на R^n дополнительную структуру.

Предостережение 2. Подмодуль свободного модуля не обязан быть свободным. Например, если $x \in R$ - делитель нуля, то идеал $Rx \leq R$ не является свободным R-модулем. Более того, вообще говоря даже прямое слагаемое свободного модуля не обязано быть свободным. Прямые слагаемые свободных модулей называются проективными модулями. Вопрос о том, для каких классов колец R все проективные модули над R свободны, представляет собой один из центральных вопросов одного из центрального разделов алгебры - алгебраической K-теории.

5.1.4 Linear Mappings

Сейчас мы введем класс отображений, согласованных со структурой модуля/векторного пространства.

Определение. Пусть U и V - два правых R-модуля. Отображение $f : U \longrightarrow V, u \mapsto f(u)$, называется гомоморфизмом R-модулей, (или просто морфизмом R-модулей), если оно удовлетворяет следующим д$\mathfrak{o}$ум условиям. H1 Аддитивность:

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

для июбых $x, y \in U$, H2 Однородность степени 1:

$$f(x\lambda) = f(x)\lambda$$

для любых $\lambda \in R, x \in U$. Вместе два эти условия часто называются также линейностью или, точнее, R-линейностью. Совместно они означают, что каждая линейная комбинация векторов переходит под лействие f в линейную комбинацию образов с теми же коэффициентами:

$$f(u\alpha + v\beta) = f(u)\alpha + f(v)\beta.$$

Совершенно аналогично определяются и морфизмы левых R-модулей, при этом в большинстве элементарных учебников аксиома (H2) переписывается в виде **H2** Однородность степени 1:

$$f(\lambda x) = f(\lambda x),$$

для любых $\lambda \in R, x \in M$. Однако специалисты в области теории колец знают, что даже в случае, когда кольцо R коммутативно, гОмомОРфизмы лЕвых модулЕй моЖно зАпиСывать только СПРАвА. Отображение $f : M \longrightarrow N, u \mapsto (u)f$, левых модулей называется гомоморфизмом левых R-модулей, если

$$(x + y)f = (x)f + (y)f, \quad (\lambda x)f = \lambda(x)f,$$

для любых $x, y \in U$ и любого $\lambda \in R$. Именно в силу непривычности такой записи для большинства читателей в дальнейшем мы предпочитаем работать с правыми, а не с левыми модулями.

Множество всех гомоморфизмов из M в N обозначается через $\mathrm{Hom}(M, N)$ или, если нужно подчеркнуть, что M и N рассматриваются как R-модули, то $\mathrm{Hom}_R(M, N)$.

В частности, можно говорить о гомоморфизмах векторных пространств над полем, в этом случае они обычно называются просто линейными отображениями или, если нужно уточнить, о каком именно поле идет речь, -линейными отображениями. Как обычно, гомоморфизм f называется: - мономорфизмом, если f инъективен; - эпиморфизмом, если f сюръективен; - изоморфизмом, если f биективен; - эндоморфизмом, если $U = V$; - автоморфизмом, если $U = V$, а f биективен. Таким образом, изоморфизм - это такой гомоморфизм, который является одновременно мономорфизмом и эпиморфизмом; эндоморфизм - это гомоморфизм группы в себя, а автоморфизм - это изоморфизм группы на себя.

Эндоморфизмы векторных пространств обычно называются линейными операторами. Множество всех эндоморфизмов R-модуля M обозначается $\mathrm{End}_R(M)$ или просто $\mathrm{End}(M)$. Как мы увидим в дальнейшем, это множество всегда является ассоциативным - но, как правило, некоммутативным! - кольцом с 1, называемым кольцом эндоморфизмов модуля M. В случае векторных пространств говорят обычно о кольце (или алгебре) линейных операторов.

2. Первые примеры. Приведем несколько очевидных примеров линейных отображений.

- Для любых модулей нулевое отображение $0 : M \longrightarrow N$, переводящее все векторы $x \in M$ в 0, является гомоморфизмом M в N. - Для любого модуля тождественное отображение id: $M \longrightarrow M$, переводящее каждый $x \in M$ в себя, является эндоморфизмом модуля M. - Если кольцо R коммутативно, то умножение на любой элемент $\lambda \in R$ задает эндоморфизм модуля $M, x \mapsto x\lambda$, называемый гомотетией. В самом деле, линейность вытекает из дистрибутивности умножения вектора на скаляр относительно сложения векторов и коммутативности умножения в кольце R. - Координатная проекция $\mathrm{pr}_i : R^n \longrightarrow R$, сопоставляющая столбцу его i-ю компоненту, линейна. Вообще, пусть V - какое-то векторное пространство с базисом $e_1, \ldots, e_n$. Рассмотрим i-ю координатную функцию e_i^*, т. е. отображение, сопоставляющее вектору $x \in V$ его i-ю координату в этом базисе. Из единственности разложения по базису следует, что e_i^* линейно. В самом деле, координаты аддитивны и однородны:

$$e_i^*(u + v) = e_i^*(u) + e_i^*(v), \quad e_i^*(u)\lambda = e_i^*(u)\lambda.$$

Этот пример будет играть огромное значение в главе, посвященной двойственности. - Для любой матрицы $x \in M(m, n, R)$ отображение $R^n \longrightarrow R^m, u \mapsto xu$, задаваемое умножением на матрицу x слева, линейно:

$$x(u + v) = xu + xv, \quad x(u\lambda) = (xu)\lambda.$$

В действительностьи, в главе, посвященной линейным отображениям, мы узнаем, что никаких других линейных отображений между свободными модулями конечного ранга и не существует. Точно так же каждое линейное отображение ${}^nR \longrightarrow {}^mR$ свободных левых модулей состоит в умножении на некоторую матрицу $y \in M(n, m, R)$ справа, т. е. имеет вид $v \mapsto vy$. - Пусть $K \leq L$ - два поля и V - несет согласованные структуры векторного пространства над K и над L. Тогда K-линейное отображение совершенно не обязано быть L-линейным. Пусть, например, $K = \mathbb{R}$, а $L = V = \mathbb{C}$. Тогда комплексное сопряжение, переводящее комплексное число $z = a + bi$ в комплексно сопряженное $\bar{z} = a - bi$, является $\mathbb{R}$-линейным,

5.1.5 Reverse Ring Replacement

5.1.6 Direct Replacement of the Ring

5.1.7 Linear Combinations

5.1.8 Submodules

5.1.9 Linear Shell of the Vector System

5.1.10 Factor-module

5.1.11 Core and Linear Image

5.1.12 Homomorphism Theorem

Сейчас мы покажем, что как и для других алгебраических систем факторизация отображений замечательным образом согласована со структурой модуля. Следующая теорема является одним из наиболее типичных и характерных результатов общей алгебры. В полной общности, а именно, для групп с операторами, она была впервые сформулирована Эмми Нетер. Пусть U, V - модули над R, а $\phi : U \longrightarrow V$ - линейное отображение.

Теорема

о гомоморфизме. Для любого гомоморфизма $\phi : U \longrightarrow V$ имеет место изоморфизм

$$\operatorname{Im}(\phi) \cong U / \operatorname{Ker}(\phi)$$

Мы уже видели аналогичные результаты для групп и колец, поэтому можем особенно не вдаваться в детали. Тем не менее, вспомним, что вообще с каждым отображением $\phi : U \longrightarrow V$ связано его ядро $N(\phi)$, являющееся разбиением U на слои отображения ϕ. Эти слои являются классами эквивалентности $\sim$ определяемой условием

$$u \sim v \quad \Longleftrightarrow \quad \phi(u) = \phi(v).$$

В случае, когда ϕ линейно, слои являются в точности смежными классами по $\operatorname{Ker}(\phi)$. Кстати, это объясняет, почему мы называем ядром гомоморфизма слой, содержаший 0: в отличие от произвольных отображений для линейных отображений задание одного этого слоя однозначно определяет все остальные классы. В самом деле

$$\phi(u) = \phi(v) \quad \Longleftrightarrow \quad \phi(u - v) = \phi(u) - \phi(v) = 0$$

так что $u - v \in \operatorname{Ker}(\phi)$. Но это и значит, что $u + \operatorname{Ker}(\phi) = v + \operatorname{Ker}(\phi)$. Обратно, если $u + \operatorname{Ker}(\phi) = v + \operatorname{Ker}(\phi)$, то $u = v + x$ для некоторого $x \in \operatorname{Ker}(\phi)$, так что $\phi(u) = \phi(v + x) = \phi(v) + \phi(x) = \phi(v)$. Теперь у нас все готово, чтобы доказать теорему о гомоморфизме.

Proof. □

Как мы только что вспомнили, сопоставление

$$\bar{u} = u + \mathrm{Ker}(\phi) \mapsto \phi(u)$$

корректно определяет инъективное отображение $\bar{\phi} : U/\operatorname{Ker}(\phi) \longrightarrow V$, образ которого совпадает с $\mathrm{Im}(\phi)$. Для завершения доказательства теоремы нам остается лишь проверить, что $\bar{\phi}$ гомоморфизм. В самом деле, пользуясь определением произведения классов, определением $\bar{\phi}$ и тем, что ϕ - гомоморфизм, получаем

$$\bar{\phi}(\bar{u} + \bar{v}) = \bar{\phi}(\overline{u+v}) = \phi(u+v) = \phi(u) + \phi(v) = \bar{\phi}(\bar{u}) + \bar{\phi}(\bar{v}),$$

что и завершает доказательство. Следствие. Если $\phi : U \longrightarrow V$ эпиморфизм, mo $V \cong U/\operatorname{Ker}(\phi)$. Теорема. Пусть $\phi : U \longrightarrow V'$ - гомоморфизм ерупп, а нормальные подаруппы $U \trianglelefteq V, U' \trianglelefteq V'$ таковы, что $\phi(U) \leq U'$. Тогда ф индуцирует гомоморфизм

$$\bar{\phi} : V/U \longrightarrow V'/U', \quad \bar{\phi}(v + U) = \phi(v) + U'.$$

Proof. □

Прежде всего, необходимо проверить корректность этого определения. Для этого заметим, что если $u + U = v + U$, то по условию на ϕ имеем $\phi(u) - \phi(v) = \phi(x - y) \in U'$, так что $\phi(u) + U' = \phi(v) + U'$. Осталось убедиться в том, что $\bar{\phi}$ гомоморфизм. В самом деле,

$$\bar{\phi}((u + U) + (v + U)) = \bar{\phi}(u + v + U) =$$
$$\phi(u + v) + U' = \phi(u) + \phi(v) + U' =$$
$$(\phi(u) + U') + (\phi(v) + U') = \bar{\phi}(u + U) + \bar{\phi}(v + U).$$

Следствие. Если в условиях теоремы $U = \phi^{-1}(U')$, то гомоморфизм $\bar{\phi}$: $V/U \longrightarrow V'/U'$ инъективен. Если, кроме того, ϕ сюръективен, то $\bar{\phi}$ изоморфизм.

Теорема

фон Дика. Длй нюбьх подмодулей $U \leq V \leq W$ имеет место изоморфизм

$$(W/U)/(V/U) \cong W/V.$$

Proof. □

Обозначим через $\pi : W \longrightarrow W/V$ каноническую проекцию. Так как $U \leq V = \mathrm{Ker}(\pi), \pi$ индукцирует гомоморфизм $\pi' : W/U \longrightarrow W/V, w + U \mapsto w + V$. Ядро этого гомоморфизма равно $\mathrm{Ker}(\pi)/U = V/U$. Осталось применить теорему о гомоморфизме.

5.1.13 Sum and Intersection of Submodules

5.1.14 Direct Amounts and Projectors

5.1.15 Direct Sums and Direct Works

5.2 Vavilov Free and Projective Modules

5.2.1 Linear Dependency and Independence

мотивация

конструкция

5.2.2 Basis of the Free Module, Coordinates

мотивация

конструкция

5.2.3 Formal Linear Combinations

мотивация

конструкция

5.2.4 Universal Basis Property

мотивация

конструкция

5.2.5 Uniqueness of Rank

мотивация

конструкция

5.2.6 Rank Uniqueness

мотивация

конструкция

5.2.7 Allocation of Submodules by Equations to Coordinates

5.2.8 Stable Free Modules

мотивация

конструкция

5.2.9 Basis to Basis Transition Matrix

0

мотивация

конструкция

5.2.10 Coordinate Converters

5.2.11 Coordinate Systems in Projective Modules

мотивация

конструкция

5.3 Vavilov Vector Spaces

5.3.1 Linear Dependence over the Field

Отметим, прежде всего, важнейшую переформулировку условия линейной зависимости, в которой явным образом используется тот факт, что K поле.

Предложение. Пусть V векторное пространство над полем. Векторьи $u_1, \ldots, u_n \in V$ в том только том случае линейно зависимьг, когда один из них является линейной комбинацией остальных.

Proof. □

Предположим, что один из векторов u_i является линейной комбинацией остальных. Пусть, например, u_j есть линейная комбинация $u_i, i \neq j$, т.е. $u_j = \sum u_i\lambda_i, i \neq j$. Полагая $\lambda_j = -1$, получим $u_1\lambda_1 + \ldots + u_n\lambda_n = 0$, причем эта линейная зависимость нетривиальна, так как $\lambda_j \neq 0$. ($\Longrightarrow$) Обратно, пусть $u_1, \ldots, u_n$ линейно зависимы и $u_1\lambda_1 + \ldots + u_n\lambda_n = 0$ - нетривиальная линейная зависимость между ними. Тогда хотя бы один коэффициент этой зависимости отличен от 0, скажем, $\lambda_j \neq 0$. Разделив эту зависимость на λ_j и перенеся все члены, кроме j-го, в другую часть, получим $u_j = -\sum u_i\lambda_i$, где сумма берется по всем $i \neq j$.

Замечание. Ключевым моментом в доказательстве предложения является возможность разделить на λ_j. В случае, когда кольцо коэффициентов R

модуля M не является полем, это совершенно не так. Дело в том, что в любые два элемента $x, y \in R$ коммутативного кольца R, рассматриваемого как модуль над собой, линейно зависимы в нем: $yx + (-x)y = 0$. В то же время, конечно, ниоткуда не следует, что один из них должен быть кратным другого: - $2, 3 \in \mathbb{Z}$ линейно зависимы над $\mathbb{Z}$, но ни один из них не является целочисленным кратным второго. - $x, y \in K[x, y]$ линейно зависимы над $K[x, y]$, но ни один из них не является полиномиальным кратным второго.

В действительности, для других модулей дела обстоят еще значительно хуже: - Рассмотрим $M = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ как модуль над $\mathbb{Z}$. Тогда система, состоящая из одмого вектора $u = \overline{1} \in M$, будет линейно зависимой, хотя $u \neq 0$.

Из предложения вытекает, что для векторных пространств над полем линейно независима.

Мы будем часто использовать проведенное в доказательстве предложения рассуждение в следующей форме. А именно, предложение можно было бы сформулировать в следуюшей более точной форме: то из u_i , входит в линейную зависимость между ними с ненулевым коэффициентом, является линейной комбинацией остальных. Следствие. Если векторы $u_1, \ldots, u_n$ ликейно независимы, а тогда $w \in \langle u_1, \ldots, u_{n-1}, v\rangle$

Proof. □

Пусть

$$v = u_1\lambda_1 + \ldots + u_{n-1}\lambda_{n-1} + w\mu$$

Так как u не является линейной комбинацией $u_1, \ldots, u_{n-1}$, то $\mu \neq 0$. Разделив на μ и перенося в другую часть, мы видим, что

$$w = v\mu^{-1} - u_1\lambda_1\mu^{-1} - \ldots - u_{n-1}\lambda_{n-1}\mu^{-1}.$$

5.3.2 Steinitz's Theorem: Proof by Substitution

мотивация

Суть

(пока не знаю)

Теория

5.3.3 Steinitz's Theorem: Proof by Exclusion

мотивация

Суть

(пока не знаю)

Теория

5.3.4 Maximum Linearly Independent Systems

мотивация

конструкция

5.3.5 Minimum Generating Systems

мотивация

конструкция

5.3.6 Existence of Bases

5.3.7 Dimension of Vector Space

мотивация

конструкция

5.3.8 Relative Basis, Codimensionality

мотивация

конструкция

5.3.9 Theorem on the Dimension of the Kernel and the Image

0

мотивация

конструкция

5.3.10 Sum and Intersection Dimension Theorem

мотивация

конструкция

5.3.11 Vector Spaces Above Fp

мотивация

конструкция

5.3.12 Vector Spaces over Q

мотивация

конструкция

5.3.13 Gaussian Polynomials

мотивация

конструкция

5.3.14 Linear Algebra over a Finite Field

мотивация

конструкция

Part III

Problems

6 Problems about Basics and Basic Applications

6.1 Matrix Tasks

6.1.1 Problems About Determinants

Б-14.7

Вычислить определитель третьего порядка:
1)$|A_{200}|$;
2)$|A_{201}|$
3)$|A_{202}|$;
4)$|A_{203}|$; 5) $|A_{204}|$; 6) $|A_{205}|$; 7) $|A_{209}|$; 8) $|A_{210}|$; 9) $|A_{365}|$; 10) $|A_{364}|$; 1
1)$|A_{366}|$; 1
2)$|A_{368}|$.

Б-14.8

Вычислить $|A_{363}|$ при $\omega = e^{2\pi i/3}$.

Б-14.9

Вычислить якобиан перехода в координаты $x = r\cos\varphi\cos\psi, y = r\sin\varphi\cos\psi, z = r\sin\psi$.

Б-14.10

Решить отн
2)$|A_{212} - \lambda E| = 0$
3)$|A_{213} - \lambda E| = 0$

Б-14.11

Сколько слагаемых входит:
1)в формулу полного разложения определителя четвертого порядка;
2)в формулу полного разложения определителя пятого порядка?

Б-14.12

1)Имеются ли в формуле полного разложения огределителя матрицы $\|a_{ij}\|$ пятого порядка слагаемые $a_{15}a_{12}a_{34}a_{21}a_{43}$, $a_{55}a_{12}a_{34}a_{21}a_{43}$?

2)С какими знаками входят в формулу полного разложения определителя матрицы пятого порядка слагаемые $a_{12}a_{21}a_{34}a_{45}a_{53}, a_{15}a_{23}a_{34}a_{41}a_{52}$?

Б-14.13

Пусть в матрице A порядка n точно n элементов равны 1, а остальные - нули. Чему может быть равен определитель матрицы A?

Б-14.14.

Доказать, что определитель диагональной матрицы равен произведению ее диагональных элементов.

Б-14.15

Доказать, что определитель треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов.

Б-14.16

1)Как изменится определитель, если в матрице переставить две строки?
2)Как изменится определитель, если к одной строке матрицы прибавить другую?
3)Как изменится определитель, если одну строку в матрице умножить на число λ?
4)Как будет изменяться определитель, если со столбцами матрицы совершать такие же элементарные преобразования?

Б-14.17

Изменится ли определитель, если матрицу транспонировать?

Б-14.18

Как изменится определитель, если все элементы матрицы заменить комплексно сопряженными числами?

Б-14.19

Сформулировать несколько достаточных условий, при которых определитель матрицы A равен 0. Сформулировать необходимое и достаточное условие.

Б-14.20

Пусть $\det A \neq 0$. Доказать, что, применяя к строкам матрицы элементарные преобразования, сохраняющие определитель, можно получить:
1)треугольную матрицу;
2)диагональную матрицу.

Б-14.21

Вычислить определитель четвертого порядка:
1)$|A_{430}|$ 5) $|A_{436}|$;
2)$|A_{431}|$
3)$|A_{432}|$;
4)$|A_{435}|$ 9) $|A_{440}|$; 6) $|A_{437}|$; 7) $|A_{438}|$; 8) $|A_{439}|$; 10) $|A_{441}|$; 1
1)$|A_{434}|$; 1
2)$|A_{442}|$; 1
3)$|A_{443}|$ 1
4)$|A_{444}|$; 15) $|A_{445}|$.
1)$|A_{530}|$;
2)$|A_{532}|$;
3)$|A_{533}|$;
4)$|A_{541}|$; 5) $|A_{536}|$.

Б-14.23

Вычислить определитель порядка n:
1)$|A_{600}|$;
2)$|A_{601}|$;
3)$|A_{610}|$;
4)$|A_{611}|$; 5) $|A_{618}|$; 6) $|A_{605}|$; 7) $|A_{614}|$; 8) $|A_{615}|$; 9) $|A_{622}|$; 10) $|A_{633}|$ 1
1)$|A_{625}|$; 1
2)$|A_{626}|$; 1
3)$|A_{624}|$; 1
4)$|A_{628}|$; 15) $|A_{641}|$; 16) $|A_{636}|$; 17) $|A_{639}|$; 18) $|A_{621}|$ $(n = 2k)$.

Б-14.24

Вычислить определитель порядка n (полезно полу-
1)$|A_{623}|$;
2)$|A_{629}|$;
3)$|A_{631}|$;
4)$|A_{632}|$; 5) $|A_{634}|$; 6) $|A_{635}|$; 7) $|A_{644}|$ («детерминант Вандермонда»);

8) $\begin{vmatrix} \frac{1-a_1^n b_1^n}{1-a_1 b_1} & \cdots & \frac{1-a_1^n b_n^n}{1-a_1 b_n} \\ \cdots\cdots a_n \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \\ \frac{1-a_n^n b_1^n}{1-a_n b_1} & \cdots & \frac{1-a_n^n b_n^n}{1-a_n b_n} \end{vmatrix}$ 9) $\begin{vmatrix} 1+x_1 & \ldots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & \ldots & 1+x_2^n \\ \cdots\cdots & \ldots & \ldots \\ 1+x_n & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$ 10) (p)
$\begin{vmatrix} 2\alpha & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 2\alpha & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\alpha & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 2\alpha \end{vmatrix}$ 12) $\begin{vmatrix} 2\operatorname{ch}\varphi & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 2\operatorname{ch}\varphi & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\operatorname{ch}\varphi & \ldots & 0 & 0 \\ \cdots\cdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 2\operatorname{ch}\varphi \end{vmatrix}$ 1

3)(p) $|A_{638}$.

Б-14.25

Показать, что определитель матрицы A порядка τ равен 0, если в ней имеется нулевая подматрица размеров $k\times$ и $k+l>n$.

Б-14.26

Вычислить $\det A$, зная, что в матрице A суммі строк с четными номерами равна сумме строк с нечетнымг номерами.

Б-14.27

Как изменится определитель, если переставить столбцы матрицы, расположив их в обратном порядке?

Б-14.28

Как изменится определитель, если матрицу траніпонировать относительно второй диагонали?

Б-14.29

Числа 1081, 1403, 2093 и 1541 делятся на 23. Объяснить без вычислений, почему число

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 9 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

также делится на 23.

Б-14.30

Пусть M_{ij} - дополнительный минор элемента a_i матрицы A. Доказать, что $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{kj} M_{ij}(-1)^{i+j}=0$ при $k\neq i(n$ - порядок $A)$.

Б-14.31

1)Пусть все элементы матрицы второго порядка ягляются дифференцируемыми функциями от одной переменноє: t. Доказать, что для производной от определителя, рассматрг ваемого как функция от t, имеет место формула

$$\begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} a'(t) & b'(t) \\ c(t) & d(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ c'(t) & d'(t) \end{vmatrix}.$$

2)Составить и доказать формулу дифференцирования определителя порядка n.

Б-14.32

Доказать, что $\det(A-\lambda E)$ - многочлен от λ, и вычислить его коэффициенты. Задачи, в которых употребляются операции с матрицами и специальные виды матриц (14.33-14.44)

Б-14.33

Справедливы ли тождества (n - порядок матрицы A):
1)$\det(A+B)=\det A+\det B$
2)$\det(\lambda A)=\lambda\det A$
3)$\det(\lambda A)=\lambda^n\det A$;
4)$\det\left(A^k\right)=(\det A)^k$?

Б-14.34

Пусть A - квадратная матрица порядка n; b_{ij} - дополнительный минор ее элемента $a_{ij}; c_{ij}$ - алгебраическое дополнение элемента a_{ij}; из них образованы матрицы $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$. Доказать, что $\det B = \det C = (\det A)^{n-1}$.

Web. минор m_{32} и алгебраическое дополнение A_{32}

Вычислить минор M_{32} и алгебраическое дополнение A_{32} для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & 10 & 2 & -1 \\ 0 & 11 & -1 & 9 \end{pmatrix}$

Solution.

По определению M_{32} есть определитель матрицы, полученной вычеркиванием 3-ей строки и 2-го столбца из матрицы $\left(\begin{array}{r|r|rr} 1 & -1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 5 & 1 \\ \hline 3 & 10 & 2 & -1 \\ \hline 0 & 11 & -1 & 9 \end{array}\right)$.

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 9 \end{vmatrix} \overset{(2)+(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 9 & 3 \\ 0 & -1 & 9 \end{vmatrix} \overset{(2)\leftrightarrow(3)}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 9 \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix} \overset{(3)+9(2)}{=}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 84 \end{vmatrix} = -(1 \cdot (-1) \cdot 84) = 84$$

Ответ. -84.

Б-14.35

Доказать, что определитель эрмитовой матрицы вещественное число.

Б-14.36

Доказать, что определитель кососимметрической матрицы нечетного порядка равен 0.

Б-14.37

Доказать, что если матрица A унитарна, то $|\det A| = 1$.

Б-14.38

Доказать, что для любой вещественной матрицы A выполнено $\det AA^T \geqslant 0$.

Б-14.39

Пусть $B_1, \ldots, B_k$- квадратные матрицы, $\left\| 0 \ddots B_k \right\|$ - блочно диагональная матрица. Доказать, что $\det H^{\Box} = \det B_1 \ldots \det B_k$.

Б-14.40

Пусть A, D - квадратные матрицы, $H = \left\| \begin{matrix} A & O \\ B & D \end{matrix} \right\|$ - блочно треугольная матрица. Доказать, что

$$\det H^{\Box} = \det A \cdot \det D.$$

Б-14.41

Пусть A - квадратная матрица порядка $n, \det A = a, H = \left\| \begin{matrix} A & 2A \\ 3A & 4A \end{matrix} \right\|$. Вычислить $\det H^{\Box}$.

Б-14.42

Пусть A - квадратная матрица, A^2, A^3, A^4 - ее степени, $H = \left\| \begin{array}{cc} A & A^2 \\ A^3 & A^4 \end{array} \right\|$. Вычислить $\det H^\square$.

Б-14.43

1)Пусть A, B, C, E - квадратные матрицы порядка n, E - единичная матрица, $H = \left\| \begin{array}{cc} A & B \\ C & E \end{array} \right\|$. Доказать, что $\det H^\square = \det(A - BC)$.

2)Всегда ли справедливо равенство $\det H^\square = \det(AD$ - $-BC)$ для блочной матрицы $H = \left\| \begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array} \right\|$?

Б-14.44

Выразить определитель кронекеровского произведения $A \otimes B$ через определители матриц A, B.

6.1.2 Problems About Basic Transformations of Matrices

IMC-2021.1.1 Equation with Nilpotent Matrix

Let A be a real $n \times n$ matrix such that $A^3 = 0$.
(a) Prove that there is a unique real $n \times n$ matrix X that satisfies the equation

$$X + AX + XA^2 = A.$$

(b) Express X in terms of A.
Solution:
1)simplify $x + 4x + xA^2 = A \Rightarrow \left(x + 4x + xx^2\right) \cdot x = x^2 \Rightarrow \Rightarrow x \cdot x + xxx = a^2 \Rightarrow (E + s)xd = x^2$.

2)Prozle that $(E + x)$ is innentabee. Minimal polynomial of & is $p(t) = t^3$. If $x^3 = 0 \Rightarrow$ all eigenrlabues of $\Rightarrow$ are 0.
$E + t = C \cdot C^{-1} + Cy^{n-3}/0\big) C^{-1} = C\,(E + J) \cdot C^{-1}$
$|E + A| = |E + J| = 1 \Rightarrow \exists (E + A)^{-1}$.
$xd = (E + x)^{-1} \cdot A^2 = \left[\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k d^2\right] d^2 = \left(E - A + d^2\right) d^2 = d^2$. $xt = d^2$
$\Rightarrow \quad xt = d^2$.
$x + x + x + \phi^2 = x + 4x + A^2 \cdot x = x \rightarrow$
$\Rightarrow (E + t)x = t \rightarrow J'x$, which satisfies $(*)$
$x = (\vec{E} + A)^{-1} \cdot A = \left(E - A + d^2\right) A = A - A^2$

Б-15.10

Проверить, существует ли произведение, и если да, то вычислить его:
2)$\left\| \begin{array}{c} 2 \\ 4 \end{array} \right\| \|1 - 2\| \left\| \begin{array}{cc} 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \right\|$
4)$A_2 A_8 \mathbf{c}_8 A_2$.

Б-15.11

Вычислить:
1)$\left\| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right\|^n$;
2)$\left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|^n$;
3)$\left\| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|^3$;
4)$(A_5)^n$; 5) $(A_{13})^n$; 6) $(A_{14})^n$; 7) $(A_{77})^n$; 8) $(A_{601})^n$ 9) $(A_{614})^n$; 10) $(A_{613})^n$.

Б-15.12

Транспонировать матрицу:

1) $\begin{Vmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{Vmatrix}$;

2) $\begin{Vmatrix} 0 & & \lambda_1 \\ & \therefore & \\ \lambda_n & & 0 \end{Vmatrix}$

3) $\|123\|$;

4) $\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{Vmatrix}$ 5) A_9 6) A_{390}; 7) A_{544}; 8) A_{632}.

Б-15.13

Проверить справедливость тождества:
1)$(\alpha A)^T = \alpha A^T$;
2)$(AB)^T = B^T A^T$;
3)$(ABC)^T = C^T B^T A^T$;
4)$(A+B)^T = A^T + B^T$.

Б-15.14

Вычислить матрицу $P = E - (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_k)^T (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_k)$ (через $\mathbf{e}_i$ обозначена i-я строка единичной матрицы E).

Б-15.15.

Пусть a, b - столбцы одинаковой высоты и $H = \mathbf{ab}^T$. Доказать, что $H^2 = \lambda H$ для некоторого числа λ.

Б-15.16

Всегда ли верно матричное равенство $AB = BA$? Привести примеры коммутирующих и некоммутирующих матриц.

Б-15.17

Что можно сказать о размерах матриц A, B, если $AB = BA$?

Б-15.18

Вычислить матрицу $[A, B] = AB - BA$ (коммутатор матриц A, B), если:
1)$A = A_{12}, B = A_5$;
2)$A = A_{20}, B = A_{16}$.

Б-15.19

Проверить справедливость тождества (см. задачу 15.18):
1)$[A, B] = -[B, A]$;
2)$[A, A] = O$;
3)$[A, E] = [E, A] = O$;
4)$[A, (B + C)] = [A, B] + [A, C]$.

Б-15.20

Вычислить матрицу $\{A, B\} = \frac{1}{2}(AB + BA)$ (произведение Йордана матриц A, B), если:
1)$A = A_{12}, B = A_5$;
2)$A = A_{20}, B = A_{16}$.

Б-15.21

Проверить справедливость тождества (см. задачу 15.20):
1)$\{A, B\} = \{B, A\}$
2)$\{A, A\} = A^2$
3)$\{A, E\} = A$;
4)$\{A, (B + C)\} = \{A, B\} + \{A, C\}$.

Б-15.22

Вычислить $f(A)$, если:
1)$f(t) = t^2 - 2t + 1, A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$
2)$f(t) = t^2 - 2t + 1, A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$
3)$f(t) = t^2 - 3t + 2, A = A_{11}$
4)$f(t) = (t - \varepsilon)^2, A = A_{78}$

Math.stackexchange.4184678

If B is a square symmetric matrix of order $n \times n$ then is true that

$$\det\left(A^T \cdot B \cdot A\right) = \det\left(A^T \cdot A\right) \det B$$

where A is a matrix of order $n \times m$? Unfortunately I did not find a counterexample: in particular I tried to show that

$$A^T \cdot B \cdot A = A \cdot A^T \cdot B$$

so that the statement follows directely applying the Binet formula. So could someone help me, please?

Answer

It's only true for square matrices in general. If A, A^T are not assumed to be square, it is not true. Take $A = \binom{1}{1}$ and $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Then

$$\det\left(A^\top BA\right) = \det(3) = 3$$

but

$$\det\left(A^\top A\right) \cdot \det(B) = \det(2) \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

6.1.3 General Problems About Matrix Multiplication

(some obvious and far from being useful, but sill, not trivial)

Б-15.25

Доказать, что k-й столбец матрицы AB равен произведению матрицы A на k-й столбеп B.

Б-15.26

Сформулировать и доказать предложение, аналогичное 15.25, для строк.

Б-15.27

Доказать, что k-й столбегі матрицы AB равен линейной комбинации столбцов матрицы A с коэффициентами из элементов k-го столбца матрицы B.

Б-15.30

Сформулировать и доказать аналоги предложений 15.29 для столбцов.

Б-15.31

1)Доказать, что прибавление к строке матрицы линейной комбинации остальных ее строк может быть осуществлено при помощи последовательного применения основных элементарных преобразований строк.
2)Доказать аналогичное утверждение для преобразования, состоящего в перестановке двух строк матрицы.

Б-15.32

Вычислить произведение $\mathbf{e}_i A \mathbf{e}_k^T$ для произвольной матрицы A (через $\mathbf{e}_i$ обозначена i-я строка единичной матрицы подходящего размера).

Б-15.33

Для произвольной матрицы A и матричной единицы E_{ij} подходящего размера вычислить произведение:
1)$E_{ij}A$;
2)AE_{ij}.

Б-15.34

Пусть матрицы A и B таковы, что для произвольных столбдов ξ и η подходящей высоты выполнено равенство $\xi^T A\eta = \xi^T B\eta$. Доказать, что $A = B$.

Б-15.35

Пусть A - матрица размеров $m \times n, E_m$ и E_n - единичные матрицы порядка m и n соответствснно. Доказать, что $E_m A = AE_n = A$.

Б-15.36

На какую матрицу следует умножить матрицу A, чтобы в результате получить:
1)первый столбец A;
2)первую строку A?

Б-15.37

Подобрать элементарную матрицу K так, чтобы матрица KA получалась из A:
1)перестановкой двух первых строк A;
2)прибавлением первой строки ко второй;
3)умножением первой строки A на число $\lambda \neq 0$.

Б-15.38

Подобрать элементарную матрицу K так, чтобы произведение AK получалось из A при помощи заданного элементарного преобразования столбцов.

6.1.4 Problems About Inverse Matrix

Б-15.40 Возня с вырожденными матрицами

Пусть A - вырожденная матрица второго порядка, m - натуральное число. Доказать, что существует число λ такое, что $A^m = \lambda^{m-1}A$ для всех m.

Б-15.41 Обратима ли прямоугольная матрица?

Answer:

Б-15.42 Свойство определителя обратной матрицы

Доказать, что если матрица B, обратная к A, существует, то $\det A \neq 0, \det B \neq 0, \det B = (\det A)^{-1}$.

Web. Обратная матрица 4x4

Find the inverse of $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Solution 1

$$A^{-1} = \frac{C^T}{\det A},$$

where C^T is the transpose of the matrix whose elements are the cofactors of A. First we compute the determinant of A using the expansion of cofactors based on the elements of the third column

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (2)\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (1)(4) - (2)(-2) = 8$$

Next, we evaluate the matrix of cofactors and take the transpose:

$$C^T = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 6 & -3 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 6 & -3 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

You should check this calculation by verifying that $AA^{-1} = \mathbf{I}$, where $\mathbf{I}$ is the 3×3 identity matrix.

Solution by Gauss-Jordan elimination

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R^{(3)} \to R^{(3)} + \frac{3}{2}R^{(1)}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R^{(2)} \to R^{(2)} + \frac{1}{2}R^{(1)}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R^{(3)} \to R^{(3)} + R^{(2)}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R^{(3)} \to \frac{1}{4}R^{(3)}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R^{(2)} \to R^{(2)} - \frac{5}{2}R^{(3)}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & -5 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R^{(2)} \to -R^{(2)}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R^{(1)} \to R^{(1)} - R^{(2)}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 6 & -3 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R^{(1)} \to -\frac{1}{2}R^{(1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 6 & -3 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Web. Обратная матрица 4x4

С помощью элементарных преобразований найти обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solution

$$(A|E) := \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ниже в скобках над стрелками переходов будем подразумевать первой цифрой - модифицируемую строку.

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(3)-4(1) \\ (4)-3(1) \\ (2)-(1)}}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 25 & 3 & -2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 17 & 4 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(3)-25(2) \\ (4)-17(2)}}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & -29 & -50 & 1 & 25 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -20 & -34 & 0 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)-(4)}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -9 & -16 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & -20 & -34 & 0 & 18 \end{array}\right) \xrightarrow{(4)+4(3)}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -9 & -16 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -56 & -98 & 4 & 46 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(3)\div(-1) \\ (4)\div(-2)}}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -6 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9 & 16 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 28 & 49 & -2 & -23 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-(4)}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -6 & -1 & 0 & -27 & -49 & 2 & 23 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9 & 16 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 28 & 49 & -2 & -23 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)+(3)}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -6 & 0 & 0 & -18 & -33 & 1 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9 & 16 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 28 & 49 & -2 & -23 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)+6(2)}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & -12 & -21 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 9 & 16 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 28 & 49 & -2 & -23 \end{array}\right)$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -12 & -21 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 9 & 16 & -1 & -7 \\ 28 & 49 & -2 & -23 \end{pmatrix}$.

Web. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 5 \\ -6 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solution.

$A \cdot X = B \Rightarrow$

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Предположено, что $\det A \neq 0$, проверим: $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot (-2) \cdot 1 + 2 \cdot (-3) \cdot (-1) - (-1) \cdot 1 \cdot (-2) - 1 \cdot (-1) \cdot 1 - 2 \cdot (-2) \cdot (-2) = -2 + 4 + 6 - 2 + 3 - 8 = 1$, всё ок.

Найдем A^{-1} методом Жордана-Гаусса. Ниже в скобках над стрелками переходов будем подразумевать второй цифрой - модифицируемую строку. Добавим ко 2й строке 3ю, а также к 3й первую, получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{2(2)+(1) \\ 3(2)+(3)}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & -5 \end{array}\right) \overset{(3)+(2)}{\longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & -5 \end{array}\right) \overset{\substack{-1\cdot(2) \\ -1\cdot(3)}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 5 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 7 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 7 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 5 \\ -6 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 & 4 \\ -26 & -30 & -8 \\ 17 & -21 & -7 \end{pmatrix}$$

Б-15.43 Возня с простыми свойствами

1)Доказать, что если A, B, C - квадратные матрицы и $AB = E, AC = E$, то $B = C$.

2)Возможно ли равенство $AB = E$ для прямоугольных матриц? Справедливо ли утверждение 1) для прямоугольных матриц?

Б-15.44 Возня с простыми свойствами

Дана квадратная матрица $A = \|a_{ij}\|$. Выписать систему уравнений, которой удовлетворяют элементы j-го столбца матрицы A^{-1}.

Б-15.45 Считаем обратные

Вычислить:

1)$\begin{Vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{Vmatrix}^{-1}$;

2)$\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}^{-1}$

3)$\begin{Vmatrix} 0 & \lambda_1 \\ \lambda_n & 0 \end{Vmatrix}^{-1}$

4)$(A_{34})^{-1}$ 8) $(A_{203})^{-1}$ 5) $(A_{77})^{-1}$ 6) $(A_6)^{-1}$ 7) $(A_{207})^{-1}$; 10) $(A_{227})^{-1}$.

Solution

Берется и считается прямо, вряд ли проблемы будут.

Б-15.48 Возня с простыми свойствами обратных матриц

Проверить, справедливо ли тождество:
1)$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$;
2)$(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$;
3)$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4)$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$
5) $\left(A^{-1}\right)^k = \left(A^k\right)^{-1}$
6) $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

Solution

(???)

Б-15.49

1)Доказать, что квадратную матрицу с помощью элементарных преобразований строк можно перевести в единичную тогда и только тогда, когда она нсвырождена.

2)Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для элементарных преобразований столбцов матрицы.

Solution

(???)

Б-15.50 Возня с простыми свойствами

Доказать, что всякая невырожденная матрица есть произведение элементарных матриц.

Solution

(???)

Б-15.51 Разложить в произведение элементарных

Разложить данную матрицу в произведение элементарных матриц:
1)(p) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{Vmatrix}$
2)$\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$
3)$\begin{Vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$;
4)$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$.

Б-15.52

1)Пусть A, B - матрицы одного порядка и матрица A с помощью цепочки элементарных преобразований строк переведена в единичную матрицу E. В какую матрипу переведет та же цепочка элементарных преобразований матрицу E? Матрицу B?

2)Ответить на те же вопросы для цепочки элементарных преобразований столбцов матрицы A, переводяiцих A в E.

Б-15.53

1)Описать и обосновать способ вычисления матрицы A^{-1}, использующий элементарные преобразования строк матрицы $\|BE\|^{\square}$.

2)Описать и обосновать способ вычисления матрицы A^{-1}, использующий элементарные преобразования столбцов матрицы $\left\| \begin{matrix} A \\ E \end{matrix} \right\|^{\square}$.

Б-15.54

Вычислить:
4)$(A_{430})^{-1}$; 5) $(A_{432})^{-1}$ 6) $(A_{433})^{-1}$ 7) $(A_{434})^{-1}$; 8) $(A_{439})^{-1}$; 9) $(A_{601})^{-1}$ 1
2)$(A_{608})^{-1}$; 1
3)$(A_{618})^{-1}$.

Б-15.55

Пусть $A^2 + A + E = O$. Доказать, что матрица A невырождена, и указать простейший способ вычисления A^{-1}.

Б-15.56.

Пусть $A^m = O$. Доказать, что $(E - A)^{-1} = E + A + \cdots + A^{m-1}$.

Б-15.57

Матрица A коммутирует с B. Доказать, что тогда A^{-1} коммутирует с B^{-1} (предполагается, что матрицы обратимы).

Б-15.58

Проверить формулу $\left(S^{-1}AS\right)^m = S^{-1}A^mS$.

Б-15.59

Пусть $S^{-1}AS = B$ и $f(t)$ - многочлен. Доказать, что $f(B) = S^{-1}f(A)S$.

Б-15.60

Пусть a, b - столбцы одинаковой высоты, $1/\mu = 1 + \mathbf{b}^T\mathbf{a} \neq 0, B = E + \mathbf{ab}^T$. Проверить справедливость равенства $B^{-1} = E - \mu ab^T$.

Б-15.61

Пусть a, b - столбцы высоты n, A - обратимая матрица порядка n, $1/\mu = 1 + \mathbf{b}^T A^{-1}\mathbf{a} \neq 0$ и $B = A + \mathbf{ab}^T$. Проверить справедливость равенства $B^{-1} = A^{-1} - \mu A^{-1}\mathrm{ab}^T A^{-1}$.

Б-15.62

1)Описать и обосновать способ вычисления произведения $A^{-1}B$, использующий элементарные преобразования строк матрицы $\|BE\|^{\square}$.

2)Описать и обосновать способ вычисления произведения AB^{-1}, используюпий элементарные преобразования столбцов матрицы $\left\| \begin{matrix} A \\ E \end{matrix} \right\|^{\square}$.

Б-15.63

Вычислить произведения матриц:
1)$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|^{-1} \cdot \left\| \begin{matrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{matrix} \right\|$
2)$A_{205}A_{203}^{-1}$;

3)$A_{203}^{-1}A_{205}$;
4)$A_{210}^{-1}A_{205}$; 5) $A_{450}^{-1}A_{431}$; 6) $A_{618}A_{617}^{-1}$;

Б-15.64

Пусть матрицы A, C невырожденные. Решить матичное уравнение:
1)$AX = O$;
2)$AX = B$;
3)$XA = B$
4)$AXC = B$;
3)$A(X + C) = B$.

Б-15.65 Матрица из линейного уравнения:

Найти матрицу X из уравнения:

1)$\begin{Vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix} X = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$

2)$X \begin{Vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}$

3)$\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} X = \begin{Vmatrix} 10 \\ 17 \end{Vmatrix}$

4)$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{Vmatrix} X = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$;

5) $X \begin{Vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & -1 \end{Vmatrix}$

Solution

Берем, считаем обратные, домножаем. Запросто решается.

6.1.5 Other Basic Problems About Matrices 1

(специфика)

Known. Diagonalization of a Matrix in Superconductivity

the BCS matrix can be written as

$$\mathcal{H} = \epsilon\left(c_1^\dagger c_1 + c_2^\dagger c_2\right) + \lambda\left(c_1^\dagger c_2^\dagger + c_2 c_1\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} c_1^\dagger & c_2 & c_2^\dagger & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & -\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & -\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2^\dagger \\ c_2 \\ c_1^\dagger \end{pmatrix} + \epsilon$$

Diagonalize it.

Solution

(??? do it from purely linear algebra point of view... one needs just to compute eigenvalues and eigenvectors)

Golez. Diagonalization of a Matrix in Superconductivity

(write shortly this Denis's solution!!!! more detailed version - in the problem-solution section)

Solution

Qm-zettili.2.9

Consider the matrices $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & -1 \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2i & 0 \\ i & 0 & -5i \end{pmatrix}$.

(a) Are A and B Hermitian? Calculate AB and BA and verify that $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$; then calculate $[A, B]$ and verify that $\mathrm{Tr}([A, B]) = 0$.

(b) Find the eigenvalues and the normalized eigenvectors of A. Verify that the sum of the eigenvalues of A is equal to the value of $\mathrm{Tr}(A)$ calculated in (a) and that the three eigenvectors form a basis.

(c) Verify that $U^\dagger AU$ is diagonal and that $U^{-1} = U^\dagger$, where U is the matrix formed by the normalized eigenvectors of A.

(d) Calculate the inverse of $A' = U^\dagger AU$ and verify that A'^{-1} is a diagonal matrix whose eigenvalues are the inverse of those of A'.

Solution

Why I have added it? Because it is solved there, it is also a nice problem and I haven't yet written something similar here. Of course, it is a straightforward one.

(a) Taking the Hermitian adjoints of the matrices A and B (see (2.188))

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & -1 \end{pmatrix}, \quad B^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & -2i & 0 \\ 3 & 0 & 5i \end{pmatrix}$$

we see that A is Hermitian and B is not. Using the products

$$AB = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 21 \\ 1 & 2i & -5 \\ -i & -2 & 5i \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 7 & 3i & -3 \\ 0 & 2i & 2 \\ 7i & 5 & 5i \end{pmatrix}$$

we can obtain the commutator

$$[A, B] = \begin{pmatrix} 0 & -3i & 24 \\ 1 & 0 & -7 \\ -8i & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

From (2.408) we see that

$$\mathrm{Tr}(AB) = 7 + 2i + 5i = 7 + 7i = \mathrm{Tr}(BA)$$

That is, the cyclic permutation of matrices leaves the trace unchanged; see (2.206). On the other hand, (2.409) shows that the trace of the commutator $[A, B]$ is zero: $\mathrm{Tr}([A, B]) = 0 + 0 + 0 = 0$.

(b) The eigenvalues and eigenvectors of A were calculated in Example 2.19 (see (2.266), (2.268), (2.272), (2.274)). We have $a_1 = 7, a_2 = \sqrt{2}$, and $a_3 = -\sqrt{2}$:

$$|a_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |a_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} \\ \frac{i(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} \end{pmatrix}, \quad |a_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} \\ -\frac{i(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} \end{pmatrix}.$$

One can easily verify that the eigenvectors $|a_1\rangle, |a_2\rangle$, and $|a_3\rangle$ are mutually orthogonal: $\langle a_i \mid a_j\rangle = \delta_{ij}$ where $i, j = 1, 2, 3$. Since the set of $|a_1\rangle, |a_2\rangle$, and $|a_3\rangle$ satisfy the completeness condition

$$\sum_{j=1}^{3} |a_j\rangle \langle a_j| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

and since they are orthonormal, they form a complete and orthonormal basis.

(c) The columns of the matrix U are given by the eigenvectors (2.411):

$$U=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} & \frac{1}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} \\ 0 & \frac{i(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} & -\frac{i(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} \end{pmatrix}$$

We can show that the product $U^{\dagger}AU$ is diagonal where the diagonal elements are the eigenvalues of the matrix $A; U^{\dagger}AU$ is given by

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} & -\frac{i(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} & \frac{i(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i \\ 0 & i & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} & \frac{1}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} \\ 0 & \frac{i(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} & -\frac{i(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

We can also show that $U^{\dagger}U=1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} & -\frac{i(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} & \frac{i(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} & \frac{1}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} \\ 0 & \frac{i(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}} & -\frac{i(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

This implies that the matrix U is unitary: $U^{\dagger}=U^{-1}$. Note that, from (2.413), we have $|\det(U)|=|-i|=1$.

(d) Using (2.414) we can verify that the inverse of $A'=U^{\dagger}AU$ is a diagonal matrix whose elements are given by the inverse of the diagonal elements of A' :

$$A'=\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad A'^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Qm-zettili.2.11

Consider the matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$ and $B=\begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & -i & -2 \end{pmatrix}$.
(a) Check if A and B are Hermitian and find the eigenvalues and eigenvectors of A. Any degeneracies?
(b) Verify that $\operatorname{Tr}(AB)=\operatorname{Tr}(BA), \det(AB)=\det(A)\det(B)$, and $\det\left(B^{\dagger}\right)=(\det(B))^{*}$.
(c) Calculate the commutator $[A,B]$ and the anticommutator $\{A,B\}$.
(d) Calculate the inverses A^{-1}, B^{-1}, and $(AB)^{-1}$. Verify that $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.
(e) Calculate A^{2} and infer the expressions of A^{2n} and A^{2n+1}. Use these results to calculate the matrix of e^{xA}.

Solution

(a) The matrix A is Hermitian but B is not. The eigenvalues of A are $a_1=-1$ and $a_2=a_3=1$ and its normalized eigenvectors are

$$|a_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \quad |a_2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}, \quad |a_3\rangle=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Note that the eigenvalue 1 is doubly degenerate, since the two eigenvectors $|a_2\rangle$ and $|a_3\rangle$ correspond to the same eigenvalue $a_2=a_3=1$.

(b) A calculation of the products (AB) and (BA) reveals that the traces $\operatorname{Tr}(AB)$ and $\operatorname{Tr}(BA)$ are equal:

$$\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2i \\ 3 & 1 & 5 \\ -2i & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$
$$\operatorname{Tr}(BA) = \operatorname{Tr}\begin{pmatrix} 0 & i & 2i \\ -5i & 1 & 3i \\ 2i & -i & 0 \end{pmatrix} = 1 = \operatorname{Tr}(AB)$$

From the matrices A and B, we have $\det(A) = i(i) = -1, \det(B) = -4 + 16i$. We can thus write

$$\det(AB) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2i \\ 3 & 1 & 5 \\ -2i & 1 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 16i = (-1)(-4 + 16i) = \det(A)\det(B)$$

On the other hand, since $\det(B) = -4 + 16i$ and $\det\left(B^\dagger\right) = -4 - 16i$, we see that $\det\left(B^\dagger\right) = -4 - 16i = (-4 + 16i)^* = (\det(B))^*$.

(c) The commutator $[A, B]$ is given by

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2i \\ 3 & 1 & 5 \\ -2i & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & i & 2i \\ -5i & 1 & 3i \\ 2i & -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1-i & -4i \\ 3+5i & 0 & 5-3i \\ -4i & 1+i & 0 \end{pmatrix}$$

and the anticommutator $\{A, B\}$ by

$$AB + BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2i \\ 3 & 1 & 5 \\ -2i & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & i & 2i \\ -5i & 1 & 3i \\ 2i & -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1+i & 0 \\ 3-5i & 2 & 5+3i \\ 0 & 1-i & 0 \end{pmatrix}$$

(d) A calculation similar to (2.200) leads to the inverses of A, B, and AB :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{68}\begin{pmatrix} 22+3i & 8-2i & 20-5i \\ -6-24i & 4+16i & 10+40i \\ -12+3i & 8-2i & -14-5i \end{pmatrix},$$
$$(AB)^{-1} = \frac{1}{68}\begin{pmatrix} -5-20i & 8-2i & -3+22i \\ 40-10i & 4+16i & 24-6i \\ -5+14i & 8-2i & -3-12i \end{pmatrix}.$$

From (2.434) it is now easy to verify that the product $B^{-1}A^{-1}$ is equal to $(AB)^{-1}$:

$$B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{68}\begin{pmatrix} -5-20i & 8-2i & -3+22i \\ 40-10i & 4+16i & 24-6i \\ -5+14i & 8-2i & -3-12i \end{pmatrix} = (AB)^{-1}$$

(e) Since

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

we can write $A^3 = A, A^4 = I, A^5 = A$, and so on. We can generalize these relations to any value of $n : A^{2n} = I$ and $A^{2n+1} = A$:

$$A^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I, \quad A^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

Since $A^{2n} = I$ and $A^{2n+1} = A$, we can write

$$e^{xA}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^nA^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}A^{2n}}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}A^{2n+1}}{(2n+1)!}=I\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

The relations

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\cosh x,\quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sinh x$$

lead to

$$\begin{aligned} e^{xA}&=I\cosh x+A\sinh x=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cosh x+\begin{pmatrix}0&0&i\\0&1&0\\-i&0&0\end{pmatrix}\sinh x\\ &=\begin{pmatrix}\cosh x&0&i\sinh x\\0&\cosh x+\sinh x&0\\-i\sinh x&0&\cosh x\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Б-15.66

Пусть A, B - диагональные матрицы одного порядка, α - число. Доказать, что матрицы $\alpha A, A+B, AB, BA$ тоже диагональные и $AB=BA$.

Б-15.67

Пусть $A=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$. Доказать, что:
1)столбцы матрицы BA получаются умножением столбцов матрицы B на числа $\lambda_1,\dots,\lambda_n$;
2)строки матрицы AB получаются умножением строк B на числа $\lambda_1,\dots,\lambda_n$.

Б-15.68

Пусть A - диагональная матрица, $f(t)$ - многочлен. Доказать, что тогда матрица $f(A)$ также диагональна.

Б-15.69

Пусть матрица A диагональна, все ее диагональные элементы различны и $AB=BA$. Доказать, что тогда и матрица B диагональна.

Б-15.70

Матрица A перестановочна с любой диагональной матрицей порядка n. Доказать, что A - диагональная матрица порядка n.

Б-15.71

Матрица A перестановочна со всеми матричными единицами порядка n. Доказать, что A - скалярная матрица.

Б-15.72

Матрица A перестановочна с любой матрицей порядка n. Доказать, что A - скалярная матрица.

Б-15.73

Найти все матрицы, перестановочные с каждой невырожденной матрицей порядка n.

Б-15.74

Найти матрицу, эрмитово сопряженную данной матрице:
1)A_{82};
2)A_{86}
3)A_{89};
4)A_{81}.

Б-15.75

Проверить справедливость тождсства:
1)$(A+B)^H = A^H + B^H$;
2)$(\alpha A)^H = \bar{\alpha} A^H$;
3)$\left(A^H\right)^H = A$;
4)$(A \cdot B)^H = B^H A^H$; 5) $\left(A^H\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^H$.

Б-15.77

Доказать, что:
1)все диагональные элементы кососимметрической матрицы равны 0 ;
2)диагональные элементы эрмитовой матрицы вещественны;
3)диагональные элементы косоэрмитовой матрицы мнимыс.

Б-15.78

Доказать, что: 1.
1)если матрица A эрмитова, то матрица iA косоэрмитова; ().
2)если матрица A косоэрмитова, то iA эрмитова.

Б-15.79

1)Найти общий вид эрмитовых матриц второго порядка.
2)Найти общий вид косоэрмитовых матриц второго поряд- ка.
3)Указать все матрицы перестановок второго порядка. Доказать утверждения 15.80-15.86.

Б-15.80

Если матрица A диагональна и все ее диагональные элементы отличны от 0, то A^{-1} существует и является диагональной.

Б-15.81

Если матрица A верхняя треугольная и все се диагональные элементы отличны от 0, то A^{-1} существует и является верхней треугольной.

Б-15.82

Если A - невырожденная симметрическая матрица, то A^{-1}- также симметрическая матрица.

Б-15.83

Если A - нсвырожденная кососимметрическая матрица, то A^{-1} - также кососимметрическая матрица.

Б-15.84

Если A - ортогональная матрица, то A^{-1} существует и ортогональна.

Б-15.85

Если A - унитарная матрица, то A^{-1} существует и унитарна.

Б-15.88

Доказать, что данная матрица унитарна и найти обратную к ней:
1)A_{103};
2)$\frac{1}{\sqrt{2}} A_{488}$.

Б-15.89

Пусть матрицы A и B - верхние треугольные. Выразить элементы матрицы AB через элементы матриц A и B.

6.1.6 Other Basic Problems About Matrices 2

Б-15.90

Пусть матриlы A и B - верхние треугольные. Доказать, что матрицы $A+B$ и AB - также верхние треугольные.

Б-15.91

Пусть матрицы A и B симметрические. Доказать, что:
1)$A+B$ - симметрическая матрица;
2)A^k - симметрическая матрица при любом натуральном k;
3)матрица AB является симметрической тогда и только тогда, когда матрицы A и B перестановочны.

Б-15.92

Пусть матрицы A и B кососимметрические. Доказать, что:
1)$A+B$ - кососимметрическая матрица;
2)A^k- кососимметрическая матрица при нечетном k и симметрическая матрица при четном k;
3)матрица AB является симметрической тогда и только тогда, когда A и B перестановочны.
4)Сформулировать и доказать необходимое и достаточнне условие кососимметричности произведения матриц A и B.

Б-15.93

Пусть A - произвольная квадратная матрица. Доказать, что матрицы $A+A^T$ и AA^T симметрические, матрица $A-A^T$ кососимметрическая.

Б-15.94

Доказать, что любую квадратную матрицу можно разложить в сумму симмстричсской и кососимметричсской матриц. Единственно ли это разложение?

Б-15.98

Пусть матрицы A и B эрмитовы. Доказать, что:
1)матрица $A+B$ эрмитова; .
2)матрица AB является эрмитовой тогда и только тогда, когда матрицы A и B перестановочны.

Б-15.99

Пусть A - эрмитова матрица и $A=B+iC$, причем B и C - вещественные матрицы. Доказать, что B - симметрическая матрица, а C - кососимметрическая.

Б-15.10

0. Доказать, что любую квадратную матрицу можно разложить в сумму эрмитовой и косоэрмитовой. Единственно ли это разложение?
Доказать утверждения $15.101-15.104$.

Б-15.101.

Вещественная унитарная матрица ортогональна.

Б-15.102.

Если матрицы A и B ортогональны, то AB ор-

Б-15.103.

Если матрицы A и B унитарны, то AB унитарна.

Б-15.104.

Пусть A - ортогональная матрица. Тогда сумма квадратов элементов любой ее строки равна 1, а сумма попарных произведений соответствующих элементов двух различ- ных строк равна 0. Являются ли эти свойства опредсляющими?

Б-15.105.

Сформулировать и доказать свойства столбцов ортогональной матрицы, аналогичные 15.104.

Б-15.106.

Сформулировать и доказать свойства унитарной матрицы, аналогичные свойствам $15.104, 15.105$ ортогональной.

Б-15.107.

Доказать, что матрица перестановки ортогональна.

Б-15.108.

Доказать, что если A и B - матрицы перестановок, то AB - также матрица перестановки.

Б-15.109.

Известно, что матрица A диагональна и ортогональна. Что можно сказать о ее диагональных элементах λ_i?

Б-15.110

Матрица A диагональна и унитарна. Что можно сказать о ее диагональных элементах λ_i?

Б-15.111

Проверить, является ли данная матрица периодичной, нильпотентной или стохастической; найти период, показатель нильпотентности:
1)A_{22}
2)A_{14}
3)$\frac{1}{2}A_{12}$
4)A_5; 5) A_{77}; 6) A_{243}; 7) A_{235}; 8) A_{237} 9) A_{236} 10) A_{430} 1
1)A_{431} 1
2)A_{457} 1
3)$\frac{1}{7}A_{434}$ 1
4)A_{613}.

Б-15.112

Проверить, что для квадратных матриц Нильпотентная матрица всегда вырождена, периодичная - невырождена.

Б-15.113

Проверить, что для квадратных матриц Если A - нильпотентная матрица второго порядка, то $A^2 = O$.

Б-15.114

Проверить, что для квадратных матриц Треугольная матрица нильпотентна тогда и только тогда, когда все ее диагональные элементы нулевые.

Б-15.117

Пусть $A^m + A^{m-1} + \ldots + E = $ O. Доказать, что A - периодическая матрица.

6.1.7 Other Basic Problems About Matrices 3

Б-15.118 Матрица перестановки периодична

Проверить, что для квадратных матриц всякая матрица перестановки периодична.

Б-15.119 Унитарность и эрмитовость $\Rightarrow$ периодичность

Пусть квадратная матрица A является одновременно унитарной и эрмитовой. Доказать, что A периодична.

Б-15.120 Периодичность и нильпотентность

Пусть S - невырожденная матрица и $S^{-1}AS = B$. Тогда каждое из свойств: периодичность, нильпотентность выполняется для матриц A и B одновременно (т. е. если оно выполнено для матрицы A, то выполнено и для B, и обратно).

Б-15.121 Доказать неотрицательность

Пусть квадратные матрицы A и B неотрицательные. Тогда $A + B, AB$ - также неотрицательные матрицы.

Б-15.122

Пусть I - столбец из сдиниц, и матрица A неотрицательная. Доказать, что условие $AI = I$ - необходимос и достаточное условие стохастичности A.

Б-15.123

Доказать, что если матрицы A и B стохастические, то матрица AB также стохастическая.

Б-15.124

Пусть матрица A стохастическая. Существует ли A^{-1}? Будет ли A^{-1} стохастической, если она существует?

Б-15.125

В каком случае стохастическая матрица является ортогональной?

Б-15.126

Доказать справедливость тождества:
1)$\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$
2)$\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$.

Б-15.127

Пусть A - треугольная матрица, m - натуральное число. Вычислить след матрицы A^m.

6.1.8 Problems About Block Matrices

(15.131-15.141)

Б-15.131

Сформулировать условия, при которых эти матрицы можно перемножить. Доказать, что если существует произведение AB, то $(AB)^{\square} = A^{\square}B^{\square}$.

Б-15.132

Пусть A и B - верхние блочно-треугольные матрицы второго порядка и произведение AB существует. Получить формулу для вычисления матрицы $A^{\square}B^{\square}$.

Б-15.133

Пусть A - блочная матрица второго порядка, B - блочная матрица - столбец из двух блоков.
1)Сформулировать условия, при которых определено произведение AB.
2)Доказать, что если AB существует, то $(AB)^{\square} = A^{\square}B^{\square}$.
3)Получить формулу для вычисления $A^{\square}B^{\square}$.

Б-15.134

Пусть A и B - блочно диагональные матрицы. Сформулировать условия, при которых:
1)определено произведение AB;
2)$(AB)^{\square} = A^{\square}B^{\square}$;
3)определены произведения AB и BA;
4)$AB = BA$.

Б-15.135

Проверить справедливость тождеств $(A + B)^{\square} = \stackrel{4}{=} A^{\square} + B^{\square}, (AB)^{\square} = A^{\square}B^{\square}$ для произвольньх блочных матриц.

Б-15.136

Разбивая данные матрицы на блоки, вычислить произведение:
1)$A_{430}A_{431}$;
2)$A_{432}A_{450}$
3)$A_{450}A_{433}$; g.
4)$A_{451}A_{452}$; 5) $A_{436}A_{437}$ 6). $A_{530}A_{531}$.

Б-15.138

Пусть E - единичная матрица порядка $r; D$ - произвольная матрица размера $r \times s; \mathbf{o}, \mathbf{b}, \mathbf{x}$ - столбцы. Ре - шить уравнение:
1)$\|ED\|^{\square_{\mathbf{x}}} = \mathbf{o}$;
2)$\|ED\|^{\square_{\mathbf{x}}} = \mathbf{b}$.

Б-15.139

Вычислить кронекеровское произведение матриц:
1)$A_{17} \otimes \mathbf{c}_7$ 5) $A_{17} \otimes A_{18}$
2)$\mathbf{c}_7 \otimes A_{17}$
3)$A_{18} \otimes \mathbf{c}_8$
4)$\mathbf{c}_8 \otimes A_{18}$ 6) $A_{18} \otimes A_{17}$; 7) $A_{13} \otimes A_{19}$.

Б-15.140

Пусть $\mathbf{a} = \|a_1, \ldots, a_n\|, \mathbf{b} = \|b_1, \ldots, b_m\|^T$. Вычислить $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}, \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$ и сравнить с $\mathbf{ba}$.

Б-15.141

Проверить справедливость тождества:
1)$(\alpha A) \otimes B = \alpha(A \otimes B)$
2)$(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$;
3)$A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$.
4)$A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$; 5) $AB \otimes CD = (A \otimes C)(B \otimes D)$; 6) $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$.

6.1.9 Problems About Matrix Rank

Б-16.3

Возможно ли, чтобы в матрице не было базисного минора?

Б-16.4

Указать какой-нибудь базисный минор и определить ранг матрицы:

1)$\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$;

2)$\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{Vmatrix}$;

3)$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$;

4)$\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$; 5) $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$; 6) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{Vmatrix}$; 7) $\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$.

Б-16.5

Указать базисные строки в матрищах 1)-7) задачи 16.4.

Б-16.6

Указать базисные столбцы в матрицах 1)-7) задачи 16.4.

Б-16.7

Указать базисный минор, базисные столбцы и базисные строки в квадратной матрице с определителем, отличным от 0. Чему равен ранг такой матрицы? Доказать утверждения 16.8-16.13

Б-16.8

Ранг диагональной матрицы равен числу ее элементов, отличных от нуля.

Б-16.9

Если в матрице равны нулю все миноры порядка k, то и все миноры порядка $k+1$ равны нулю.

Б-16.10

Рант матрицы не меньше ранга любой ее подматрицы.

Б-16.11

Приписывание к матрице нулевого столбца не меняет ее ранга.

Б-16.12

Приписывание к матрице столбца, равного линейной комбинации ее столбцов, не меняет ее ранга.

Б-16.13

Если столбцы матрицы B являются линейными комбинациями столбцов матрицы A, то $\operatorname{rg} B \leqslant \operatorname{rg} A$.

Б-16.17

Описать способ вычисления ранга матрицы с использованием элементарных преобразований ее строк и столбцов.

Б-16.18

Вычислить ранг матрицы:

1)$\|10\|$; 6) A_{12} 6) A_{12}; 7) A_7; 8) A_{81}; 9) A_{111}; 10) A_{202}; 11) A_{205}; 12) A_{233}; 13) A_{214}; 14) A_{232}; 15) A_{368}

2)$\|010\|$;

3)A_{21};

4)A_{20}; 5) A_{13}; 16) A_{396}; 17) A_{408}; 18) A_{452}; 19) A_{435}; 20) A_{453}; 26) A_{544}; 27) A_{592}; 28) A_{632}; 29) A_{634}.

Б-16.19

Вычислить ранг матрицы при всевозможных значениях параметра:
1)A_{78};
2)A_{367};
3)A_{365};
4)A_{363}; 5) A_{508}; 6) A_{629}; 7) A_{645}.

Б-16.20

Вычислить ранг матрицы $A - \lambda E$ при всех значениях параметра λ, если:
1)$A = A_{47}$;
2)$A = A_{211}$;
3)$A = A_{431}$.

Б-16.21

Доказать, что если $\det A = 0$, то строки матрицы A, так же как и ее столбцы, линейно зависимы.

Б-16.22

Матрица A имеет порядок n и содержит нулевую подматрицу порядка $n-1$. Оценить ранг A.

Б-16.23

Матрица A имеет порядок n и содержит нулевую подматрицу порядка s. Оценить ранг A.

Б-16.24

Матрица A имеет порядок n и содержит подматрицу порядка $n-1$, имеющую ранг 1. Оценить ранг A.

Б-16.25

1)Оценить ранг произведения двух матриц через ранги сомножителей.
-)
2)Привести примеры, когда выполнены соотношения: $\operatorname{rg} AB < \operatorname{rg} A$, $\operatorname{rg} AB < \operatorname{rg} B$, $\operatorname{rg} AB < \min(\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} B), \operatorname{rg} AB = \operatorname{rg} A, \operatorname{rg} AB = \operatorname{rg} B$.

Б-16.26

1)Пусть **a** - строка, **b** - столбец. Вычислить ранг матрицы ba.
2)(р). Пусть $\operatorname{rg} A = 1$. Доказать, что матрица A равна произведению некоторого столбца на некоторую строку.

Б-16.27

Пусть A, B, C - матрицы, $\det A \neq 0$ и определены произведения AB, CA. Доказать, что $\operatorname{rg} AB = \operatorname{rg} B, \operatorname{rg} CA = \operatorname{rg} C$. Может ли быть выполнено какое-либо из этих равенств, если $\det A = 0$?

Б-16.28

Доказать, что если $\operatorname{rg} A = r$, то минор, стоящий на пересечении r линейно независимых строк и r линейно независимых столбцов матрицы A, отличен от 0.

Б-16.29

Пусть матрица A состоит из r линейно независимыг столбцов, B - из r линейно независимых строк. Чему равен ранг AB?

Б-16.30

Матрицы A и B имеют размеры соответственно $m \times r$ и $r \times n$, и $\operatorname{rg} AB = r$. Найти ранги матриц A и B.

Б-16.31

Разложение матрицы A в произведение $A = BC$ называется скелетным, если $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = \operatorname{rg} C$ и матрицы B и C имеют полный ранг (т.е. ранг, равный одному из размеров матрицы).

1)Доказать, что всякую матрицу A можно представить как произведение матрицы M, состоящей из базисных строк A, на некоторую матрицу K (скелетное разложение матрицы по строкам).

2)Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для скелетного разложения матрицы по столбцам.

3)Как связаны между собой различные скелетные разло-

Б-16.31

Разложение матрицы A в произведение $A = BC$ называется скелетным, если $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = \operatorname{rg} C$ и матрицы B и C имеют полный ранг (т.е. ранг, равный одному из размеров матрицы).

1)Доказать, что всякую матрицу A можно представить как произведение матрицы M, состоящей из базисных строк A, на некоторую матрицу K (скелетное разложение матрицы по строкам).

2)Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для скелетного разложения матрицы по столбцам.

3)Как связаны между собой различные скелетные разложения одной матрицы?

Б-16.32

Найти какие-нибудь скелетные разложения (см. задачу 16.3
1)по строкам и столбцам для следующих матриц:
1)A_{14}
2)A_{231}
3)A_{251};
4)A_{403}; 5) A_{454}.

Б-16.33

Доказать, что любую матрицу ранга r можно представить в виде суммы r матриц ранга 1.

Б-16.34

Указать, какие из выписанных ниже соотнопений возможны. Какие из них выполнены для произвольной пары матриц одинаковых размеров?
1)$\operatorname{rg}(A+B) = \operatorname{rg} A$;
2)$\operatorname{rg}(A+B) = \max(\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} B)$
3)$\operatorname{rg}(A+B) = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$
4)$\operatorname{rg}(A+B) < \min(\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} B)$; 5) $\operatorname{rg}(A+B) < \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$ 6) $\operatorname{rg}(A+B) \leqslant \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$.

Б-16.35

Пусть матрицы A и B имеют размеры соответсгвенно $m \times n$ и $n \times p$, и пусть $AB = O$. Доказать, что $\operatorname{rg} A +\ 4 \operatorname{rg} B \leqslant n$.

Б-16.36

Доказать, что

Б-16.37

Доказать, что

$$\operatorname{rg} \left\| \begin{matrix} A & O \\ O & B \end{matrix} \right\|^{\square} = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B.$$

Б-16.38

Доказать, что

$$\operatorname{rg} \left\| \begin{matrix} A & C \\ O & B \end{matrix} \right\|^{\square} \geqslant \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B.$$

Б-16.39

Пусть A - квадратная матрица. Доказать, что

$$\operatorname{rg} \left\| \begin{matrix} A & A^2 \\ A^3 & A^4 \end{matrix} \right\|^{\square} = \operatorname{rg} A.$$

Б-16.40

Пусть E - единичная, A, B - произвольные квадратные матрицы порядка n. Доказать, что

$$\operatorname{rg} \left\| \begin{matrix} E & B \\ A & AB \end{matrix} \right\|^{\square} = n.$$

Б-16.41

Доказать, что

$$\operatorname{rg} \left\| \begin{matrix} A & B \\ 3A & -B \end{matrix} \right\|^{\square} = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B.$$

Б-16.42

Пусть A невырожденная квадратная матрица порядка n, а матрицы B, C и D - прямоугольные. Найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы

$$\operatorname{rg} \left\| \begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix} \right\|^{\square} = n.$$

6.1.10 Problems About Conversion Matrix

1.

Найти матрицу линейного оператора, переводящего векторы $a_1 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

соответственно в векторы $b_1 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b_4 = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

в базисе, в котором даны координаты векторов. Найти размерности ядра и образа этого отображения

6.1.11 Problems About Qr Decompositions

5.

Найдите QR-разложение матрицы с помощью ортогонализации столбцов:

$$\begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & -2 & -1 & -\frac{7}{2} \\ -\frac{9}{2} & 6 & 2 & -\frac{7}{2} \\ -\frac{9}{2} & 6 & 3 & -\frac{17}{2} \\ -\frac{9}{2} & -2 & -2 & \frac{23}{2} \end{bmatrix}$$

6.1.12 Problems About Singular Decompositions

10.

Найти сингулярное разложение матрицы A. Проверить результат перемножением матриц. Какая матрица получится, если в разложении оставить только первое сингулярное число, а остальные сингулярные чи сла заменить нуля ми?

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 20 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & 20 & 20 \end{bmatrix}.$$

6.1.13 Problems About Polar Decompositions

(бкл)
29.52. Почему не является полярным разложением равенТто

$$\left\| \begin{array}{cc} 5 & 0 \\ 4 & 5 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} 4 & 5 \\ 5 & 0 \end{array} \right\| ?$$

29.53. Получить полярное разложение матрицы:

1)$| \begin{array}{cc} 11 & 10 \\ -2 & 5 \end{array} \|$

2)$\left\| \begin{array}{cc} 5 & 0 \\ 4 & 3 \end{array} \right\|$,

3)$\left\| \begin{array}{cc} \sqrt{3} & -2 \\ 0 & \sqrt{3} \end{array} \right\|$,

4)$\left\| \begin{array}{cc} 7 & 7 \\ 1 & 1 \end{array} \right\|$, 5) $\left\| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 4 & -3 \end{array} \right\|$ 6) $\left\| \begin{array}{cc} \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{array} \right\|$. 29.54. В пространстве $\mathcal{P}^2$ многочленов степени не выше 2:о стандартным скалярным произведением преобразование δ:опоставляет многочлену его производную. Для полярного разгожения δ написать в базисе $1, t, t^2$ матрицу Q ортогонального а матрицу V самосопряженного преобразования. 29.55. Доказать, что для произвольного линейного преобJазования φ существует вторая форма полярного разложения: $D = \psi\theta$, где ψ - неотрицательное самосопряженное преобразозание, а θ - ортогональное. 29.56. Доказать, что для квадратной матрицы A найдутся такие ортогональные матрицы Q и P, что $A = QDP$, где D - циагональная матрица с сингулярными числами матрицы A на циагонали. 29.57.

1)Доказать, что каково бы ни было полярное разлокение $\varphi = \theta\psi$, ортогональное преобразование θ переводит собтвенный вектор преобразования $\varphi^*\varphi$ в собственный вектор $\varphi\varphi^*$.

2)Доказать, что второй сингулярный базис состоит из соб:твенных векторов преобразования $\varphi\varphi^*$.

29.58. Пусть φ - невырожденное преобразование, и $\circ = \theta\psi = \psi_1\theta_1$, где ψ, ψ_1 неотрицательные самосопряженные, i θ, θ_1 - ортогональные преобразования.

1)Доказать, что $\theta = \theta_1$.

2)Как связаны ψ и ψ_1?

3)Доказать, что собственные значения ψ и ψ_1 одинаковы, а собственные векторы, вообще говоря, различны. 29.59. Доказать, что неотрицательное самосопряженное преобразование ψ в полярном разложении $\varphi = \theta\psi$ определено однозначно. 29.60. Доказать, что для невырожденного преобразования полярное разложение единственно. 29.61. Доказать, что линейное преобразование является нормальным тогда и только тогда, когда перестановочны сомножители в его полярном разложении. 29.62. Доказать, что сингулярные числа самосопряженного преобразования равны модулям его собственных значений. 29.63. Найти сингулярные числа ортогональной матрицы. 29.64. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ - сингулярные числа невырожденной матрицы A. Найти синтулярные числа A^{-1}.

29.65. Матрица умножена на число α. Как изменились ее сингулярные числа? 29.66. Доказать, что у преобразования φ и ему сопряженного φ^* сингулярные числа совпадают. 29.67. Доказать, что сингулярные числа матриц A и B совпадают тогда и только тогда, когда найдутся ортогональные матрицы U и V такие, что $B = UAV$. 29.68. Доказать, что для линейного преобразования φ отношение $|\varphi(x)|/|x|$ при любом ненулевом векторе x заключено между минимальным и максимальным сингулярным числом φ. 29.69. Доказать, что модули всех собственных значений преобразования φ принадлежат отрезку $[\alpha_n, \alpha_1]$, где α_1 и α_n - его наибольшее и наименьшее сингулярные числа. 29.70. Доказать, что для квадратной матрицы A произведение сингулярныг чисел равно $|\det A|$. 29.71. Найти сингулярные числа следующих матриц:

1)A_{202},

2)A_{239},

3)A_{213},

4)$\left\| \begin{array}{ccc} 6 & -6 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{array} \right\|$ 5) A_{646}.

6.1.14 Problems About Distances

6.

Найдите расстояние от вектора $\alpha = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ до подпространства L, заданного системой уравнений $Ax = 0$.

Найдите косинус угла между L и α.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

7.

Найдите расстояние между линейными многообразия ми $L(v_1, v_2) + x_1$ и $L(w_1, w_2) + x_2$, где $v_1 = [7 - 1 - 3 - 5 - 6]$, $v_2 = \left[\begin{array}{ccccc} 3 & 6 & 2 & -5 & 1 \end{array}\right]$, $w_1 = [\begin{array}{cccc} 2 & -4 & 0 & 4 \end{array}$

6.1.15 Problems About Canonical View

8.

Найдите канонический вид, угол и ось поворота ортогонального оператора, заданного матрицей:

$$A = \left[\begin{array}{ccc} -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} + \frac{3\sqrt{14}}{14} & -\frac{3}{7} + \frac{\sqrt{14}}{14} \\ \frac{1}{7} - \frac{3\sqrt{14}}{14} & -\frac{1}{14} & \frac{3}{14} + \frac{\sqrt{14}}{7} \\ -\frac{3}{7} - \frac{\sqrt{14}}{14} & \frac{3}{14} - \frac{\sqrt{14}}{7} & -\frac{9}{14} \end{array}\right]$$

6.1.16 Problems About Bringing to a Diagonal View

3.

Линейный оператор в векторном простран стве над поле м $\setminus$ задан в бази се $1, i$ матрицей A. Чему равен образ произвольного комплексного чи сла $x + iy$? Существует ли базис $z_1, z_2 \in$, в котором матрица этого линейного оператора ди агон альна? Если да, найдите соответствующие чи сла z_1, z_2 и ди агональный вид.

$$A = \left[\begin{array}{cc} -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{array}\right]$$

6.1.17 Problems About Diagonality

9.

Можно ли матрицу оператора, заданного матрицей A в некотором ортонормированном базисе, ортогональным преобразованием привести к диагональному виду? Если да, то указать преобразование и диагональный вид.

$$A = \left[\begin{array}{ccc} \frac{37}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{43}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right].$$

6.1.18 Problems About Pauli's σ-matrices

Rotation With Pauli Matrices

For the Pauli spin matrix, $B = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, find $e^{i\theta B}$ and show that your result is a rotation matrix. Repeat the calculation for $e^{-i\theta B}$.

Solution

First, we observe that:

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

where I is the 2×2 identity matrix. Thus,

$$B^{2n} = I, \quad \text{and} \quad B^{2n+1} = B, \quad \text{for any non-negative integer } n.$$

By definition, the matrix exponential is defined via its power series,

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta B} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta B)^n}{n!} = I + i\theta B - \frac{\theta^2 B^2}{2!} - i\frac{\theta^3 B^3}{3!} + \frac{\theta^4 B^4}{4!} + i\frac{\theta^5 B^5}{5!} + \cdots \\
&= I\left[1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots\right] + iB\left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots\right] \\
&= I\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{(2n)!} + iB\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n+1}}{(2n+1)!} = I\cos\theta + iB\sin\theta \\
&= \cos\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin\theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

which is a rotation matrix [cf. Eq.(6.14) on p. 120 of Boas]. The computation of $e^{-i\theta B}$ follows precisely the same steps, with θ replaced everywhere by $-\theta$. Hence,

$$
e^{-i\theta B} = I\cos\theta - iB\sin\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}
$$

Rotation With Pauli Matrices

Prove that:

$$
\sigma_x \cos\varphi + \sigma_y \sin\varphi = e^{-i\varphi\sigma_z/2}\sigma_x e^{i\varphi\sigma_z/2}, \tag{6.1}
$$

$$
\sigma_x \sin\varphi - \sigma_y \cos\varphi = -\, e^{-i\varphi\sigma_z/2}\sigma_y e^{i\varphi\sigma_z/2}. \tag{6.2}
$$

Solution

Sum With Fraction and Pauli Matrices

One crazy specialist in superconductivity analyzed a multi-terminal model of SNS junctions on a ring and asks you to simplify his Green's function:

$$
\bar{G}(z,\varphi) = -\frac{e^{i\varphi/2}}{2\pi\Omega_F} \sum_n \frac{e^{in\varphi}}{n + 1/2 + i\frac{\Delta_z}{\Omega_F}\tau_z\sigma_x - \frac{R}{\Omega_F}\tau_z\sigma_y} \tau_z\sigma_y
$$

Here are all parameters are constants and τ matrices are σ-matrices in a different space, so here the tensor product is assumed and the total Green's function is a 4x4 matrix.

Solution

$$
\bar{G}(z,\varphi) = -\frac{e^{i\varphi/2}}{2\pi\Omega_F} \sum_n \frac{e^{in\varphi}}{n + 1/2 + i\frac{\Delta_z}{\Omega_F}\tau_z\sigma_x - \frac{R}{\Omega_F}\tau_z\sigma_y} \tau_z\sigma_y = \tag{6.3}
$$

$$
\tag{6.4}
$$

$$
\left(\sum_n \frac{e^{in\vartheta}}{n + A} = \frac{2\pi i e^{-iA\vartheta}}{1 - e^{-2\pi i A}} \right) \tag{6.5}
$$

$$
\tag{6.6}
$$

$$
= -\frac{i e^{i\varphi/2}}{\Omega_F} \frac{\exp\left(-i(-\frac{R}{\Omega_F}\tau_z\sigma_y + i\frac{\Delta_z}{\Omega_F}\tau_z\sigma_x)\varphi - i\varphi/2\right)}{1 - e^{i\pi}\exp\left(-2\pi i(-\frac{R}{\Omega_F}\tau_z\sigma_y + i\frac{\Delta_z}{\Omega_F}\tau_z\sigma_x)\right)} \tau_z\sigma_y = \tag{6.7}
$$

$$
\tag{6.8}
$$

$$
= -\frac{i}{\Omega_F} \frac{\exp\left(i(\frac{R}{\Omega_F}\tau_z\sigma_y - i\frac{\Delta_z}{\Omega_F}\tau_z\sigma_x)\varphi\right)}{1 + \exp\left(2\pi i(\frac{R}{\Omega_F}\tau_z\sigma_y - i\frac{\Delta_z}{\Omega_F}\tau_z\sigma_x)\right)} \tau_z\sigma_y \tag{6.9}
$$

$$
\tag{6.10}
$$

$$
= -\frac{i}{\Omega_F} \frac{\exp\left(i\tau_z(R\sigma_y - i\Delta_Z\sigma_x)(\varphi - \pi)/\Omega_F\right)}{\exp\left(-\pi i(\frac{R}{\Omega_F}\tau_z\sigma_y - i\frac{\Delta_z}{\Omega_F}\tau_z\sigma_x)\right) + \exp\left(\pi i(\frac{R}{\Omega_F}\tau_z\sigma_y - i\frac{\Delta_z}{\Omega_F}\tau_z\sigma_x)\right)} \tau_z\sigma_y. \tag{6.11}
$$

We can also check in Wolfram that we have an identity matrix in the denominator:

```
Simplify[
MatrixExp[-I Pi (A ArrayFlatten[
TensorProduct[PauliMatrix[3], PauliMatrix[2]]] - I B ArrayFlatten[ TensorProduct[PauliMatrix
    [3], PauliMatrix[1]]])]
+
MatrixExp[ I Pi (A ArrayFlatten[ TensorProduct[PauliMatrix[3], PauliMatrix[2]]] - I B
    ArrayFlatten[TensorProduct[PauliMatrix[3], PauliMatrix[1]]])]
] // MatrixForm
```

Finally, we have

$$\bar{G}(z,\varphi) = -\frac{i}{2\Omega_F}\frac{\exp\left(i\tau_z(R\sigma_y - i\Delta_Z\sigma_x)(\varphi-\pi)/\Omega_F\right)}{\cos(\pi\sqrt{R^2-\Delta_Z^2}/\Omega_F)}\tau_z\sigma_y. \tag{6.12}$$

6.1.19 Problems About Dirac γ-matrices

(выпишу из КТП, там уже это написано. возможно, в квантмехе и записи по алгебре тоже это написано)

6.1.20 Problems About Matrices in Large Degrees

IMC-2021.2.1 $2021B = A^m + B^2$

Let A be a real $n\times n$ matrix and suppose that for every positive integer m there exists a real symmetric matrix B such that

$$2021B = A^m + B^2.$$

Prove that $|\det A| \leq 1$.

Solution.

Let B_m be the corresponding matrix B depending on m:

$$2021B_m = A^m + B_m^2.$$

For $m=1$, we obtain $A = 2021B_1 - B_1^2$. Since B_1 is real and symmetric, so is A. Thus A is diagonalizable and all eigenvalues of A are real.

Now fix a positive integer m and let λ be any real eigenvalue of A. Considering the diagonal form of both A and B_m, we know that there exists a real eigenvalue μ of B_m such that

$$2021\mu = \lambda^m + \mu^2 \Rightarrow \mu^2 - 2021\mu + \lambda^m = 0.$$

The last equation is a second degree equation with a real root. Therefore, the discriminant is non-negative:

$$2021^2 - 4\lambda^m \geq 0 \Rightarrow \lambda^m \leq \frac{2021^2}{4}.$$

If $|\lambda| > 1$, letting m even sufficiently large we reach a contradiction. Thus $|\lambda| \leq 1$. Finally, since $\det A$ is the product of the eigenvalues of A and each of them has absolute value less then or equal to 1, we get $|\det A| \leq 1$ as desired.

Second solution.

(ниже решение Олега, мб потом перепишу его, по сути переходим в базис из собственных векторов, преобразовываем A^m, далее находим максимум, оцениваем. хорошая задача, попрактикуюсь потом в ней. вроде у Олега такое же, только как-то больше выкладок)

$A^m = 202 + B - B^2 = (202 + E - B)B$

If $B = B^T \Rightarrow$ all eigenvealues of B are real, and exists a outhonormal basis of eigenrectors $\Rightarrow\ \Rightarrow$ $\det A^m$: $(\det\delta)^m = \det[(2021E - B)B] = = \det\left[\left(2021CC^{-1} - C\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\cdot C^{-1}\right)\cdot C\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\cdot C^{-1}\right) = = \det\left(C^{-1}\left(2021E - \operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\cdot\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\Delta_n)\cdot C^{-1}\right) = \therefore \det(2021E - \operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n))\det(\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)) = = \det(\operatorname{diay}(201 + -\lambda_1,\ldots,2021-\lambda_n))\cdot\det(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)) = = (2021-\lambda_1)\cdot\lambda_1\ldots\cdot\lambda_n(2021\cdot\lambda_n) \Rightarrow$ $|\det x|^m$: $|(202+\lambda_1)\lambda_1\ldots\cdot\lambda_n(2021\lambda_{11})|$ $f(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = (2021-\lambda_1)\lambda_1\ldots.(2021-\lambda_n)\lambda_n$

$\frac{\partial f_1}{\partial \lambda_1} = 2021 - 2\hat{\lambda}_1 > 0 \Rightarrow \left(\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_n\right) = \left(\frac{2021}{2}; \ldots; \frac{2021}{2}\right)$ $\frac{\partial f}{\partial a_n} = 202 + 2\hat{a}_n = 0$ Hessian: $H|_{\left(\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_n\right)} = \begin{pmatrix} -2 & & \\ \ddots & 0 & \\ 0 & - & \\ & & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow f\Big|_{\left(\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_n\right)} \to$ maxs. $|f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)| \leq \begin{pmatrix} 2021 \\ 2 \end{pmatrix}^n \to |\det A|^m \leq \left(\frac{2021}{2}\right)^n$

So if ω if take $m > n$ and m is fig enough $\Rightarrow |\det t| \leq \uparrow\rangle$

Академия Made.4 Предельные значения в матрице (?!?!?!?)

Найдите $\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{D_n}$, где

$$\begin{pmatrix} 19 & -48 \\ 8 & -21 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix}$$

Solution.

(хз, как такое решать, вроде к Жордановому базису перейти следует. пропишу в теории, что это типичный метод, что-то сразу и не думал про это.)

6.2 Tasks for Systems of Linear Equations

6.2.1 Problems About the Basics of Systems of Linear Equations

Б-17.1 Решить Слау

Выписать расширенную матрицу данной системы уравнений. Решить систему:
1)$2x_1 + x_2 = 10$,
2) $3x + 5y = 2$, $x_1 + x_2 = 17$ $5x + 9y = 4$
3)$2x_1 + x_2 - x_3 = 2$,
4)$y + 3z = -1$ $3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3$ $2x + 3y + 5z = 3$, $x_1 + x_3 = 3$ $3x + 5y + 7z = 6$
5) $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 16$, $x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 = 23$, $2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 10$, $4x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 1$;
6) $2x + 3y + 4z + 5t = 30$, $3x + 3y + 4z + 5t = 34$, $4x + 4y + 4z + 5t = 41$, $x + y + z + t = 10$;
7) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$, $x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = -3$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ $x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 3$, $x_1+x_2+x_4+x_5 = -2$; 8) $x_1+x_2 = 3$, $x_1+x_3 = 4$, $x_1+x_4 = -2$, $x_1+x_5 = -1$, $x_1+x_6 = 0$, $x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 = -1$.

Б-17.2 Решить Слау

Выписать систему линейных уравнений, соответствующую данной расширенной матрице. Решить систему, пользуясь правилом Крамера:
1)$\left\|A_{40}|\mathbf{c}_7\right\|$;
2)$\left\|A_6|\mathbf{c}_9\right\|$;
3)$\left\|A_{202}|\mathbf{c}_{54}\right\|$;
4)$\left\|A_{209}|\mathbf{c}_{55}\right\|$; 5) $\|A_{204}|\mathbf{c}_{56}\|$; 6) $\|A_{203}|\mathbf{c}_{53}\|$; 7) $\|A_{203}|\mathbf{o}\|$.

Б-17.3 Общие свойства Слау

Доказать утверждения:
1)Если уравнения системы (Б) являются линейными комбинациями уравнений совместной линейной системы (А), то множество решений системы (Б) содержит множество решений (А).
2)Присоединение к совместной системе линейных уравнений линейных комбинаций из ее уравнений заменяет систему на эквивалентную.
3)При элементарных преобразованиях строк расширенной матрицы совместная система линейных уравнений заменяется на эквивалентную.

Б-17.4 Как изменяются решения системы линейных уравнений при элементарных преобразованиях столбцов основной матрицы?

Answer:
(??? линейно как-то, я не знаю, нужно додумать)

Б-17.5 Вопрос про алгоритм Гаусса

Какую систему уравнений простейшего вида можно получить, применяя алгоритм Гаусса к строкам расширенной матрицы данной системы n линейных уравнений с n неизвестными, если основная матрица невырождена?

Answer:

(??? что ли простейшую систему, где каждая переменная равна числу??)

Б-17.6 Решить много Слау

Составить систему линейных уравнений по данной расширенной матрице. Решить систему (нижеследующие матрицы разбиты на 4 группы по порядку основной матрицы):

$n = 2$:

1)$\|A_{18}|\mathbf{c}_{10}\|$;

2)$\|A_{8}|\mathbf{c}_{12}\|$

3)$\|A_{10}|\mathbf{c}_{12}\|$

$n = 3$:

5) $\|A_{217}|\mathbf{c}_{60}\|$;

6) $\|A_{218}|\mathbf{c}_{61}\|$

7) $\|A_{219}|\mathbf{c}_{98}\|$;

8) $\|A_{220}|\mathbf{c}_{63}\|$;

$n = 4$

9) $\|A_{446}|\mathbf{c}_{154}\|$;

10) $\|A_{447}|\mathbf{c}_{155}\|$;

11)$\|A_{448}|\mathbf{c}_{185}\|$;

12)$\|A_{449}|\mathbf{c}_{157}\|$;

13)$\|A_{442}|\mathbf{c}_{158}\|$;

14)$\|A_{442}|\mathbf{c}_{159}\|$;

15) $\|A_{439}|\mathbf{c}_{160}\|$;

$n = 5$:

16) $\|A_{537}|\mathbf{c}_{232}\|$;

17) $\|A_{538}|\mathbf{c}_{238}\|$;

18) $\|A_{539}|\mathbf{c}_{233}\|$;

19) $\|A_{540}|\mathbf{c}_{234}\|$;

20) $\|A_{541}|\mathbf{c}_{235}\|$;

21)$\|A_{542}|\mathbf{c}_{236}\|$;

22)$\|A_{542}|\mathbf{c}_{237}\|$;

23)$\|A_{543}|\mathbf{c}_{268}\|$.

Solve Sole

Solve the following set of equations by the method of finding the inverse of the coefficient matrix.

$$\begin{cases} x + 2z = 8, \\ 2x - y = -5, \\ x + y + z = 4. \end{cases}$$

Solution

The coefficient matrix is:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

One can compute the inverse M^{-1} by using

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} C^T.$$

First, we compute $\det M$ via the expansion of cofactors. Using the first row,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1)(-1) + 2[(2)(1) - (-1)(1)] = 5$$

Next, we compute the transpose of the matrix of cofactors,

$$C^T = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Thus, Eq. (5) yields:

$$M^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Finally, the solution to the set of equations above is:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

That is, the solution is $x = -2, y = 1$ and $z = 5$.

Web. система 4x2 на метод Гаусса

Методом Гаусса решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + 17x_4 = 6 \end{cases}.$$

Solution

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 17 & 6 \end{array}\right).$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 17 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[(3)-(1)]{(2)-2(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 14 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)+2(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Последняя строка матрицы соответствует противоречивому уравнению

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = -2,$$

поэтому исходная система не имеет решений. Ха-ха.

Web. Система 3x4 на метод Гаусса

Найти методом Гаусса решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 - x_3 = -4 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = -2 \end{cases}.$$

Solution

Расширенная матрица нашей системы имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[(4)-(1)]{(3)-2\cdot(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[(4)-(2)]{(3)+3(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -15 \end{array}\right).$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -15 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)+(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & -15 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-2\cdot(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 55 \\ 0 & 1 & 0 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & -15 \end{array}\right)$$

Получили ответ: $\begin{cases} x_1 = 55 \\ x_2 = -19 \\ x_3 = -15 \end{cases}$ Проверка: $\begin{cases} 55 + 2\cdot(-19) + (-15) = 2 = 2 \\ -19 - (-15) = -4 = -4 \\ 2\cdot 55 + (-19) + 6\cdot(-15) = 1 = 1 \\ 55 + 3\cdot(-19) = -2 = -2 \end{cases}$

Web. Система 4x3 на метод Гаусса

Найти методом Гаусса общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}.$$

Solution

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)+3(1)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)+9(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & 22 & 10 & -2 & 20 \end{array}\right) \xrightarrow{(3)-2(2)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \end{array}\right).$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{(2)\div 11} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{10}{11} \end{array}\right) \xrightarrow{(1)-2(2)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & \frac{1}{11} & -\frac{9}{11} & \frac{2}{11} \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{10}{11} \end{array}\right) \xrightarrow{(1)\div(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{11} & \frac{9}{11} & -\frac{2}{11} \\ 0 & 1 & \frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{10}{11} \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{11}x_3 + \frac{9}{11}x_4 = -\frac{2}{11} \\ x_2 + \frac{5}{11}x_3 - \frac{1}{11}x_4 = \frac{10}{11} \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \frac{1}{11}x_3 - \frac{9}{11}x_4 - \frac{2}{11} \\ x_2 = -\frac{5}{11}x_3 + \frac{1}{11}x_4 + \frac{10}{11} \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{11}x_3 - \frac{9}{11}x_4 - \frac{2}{11} \\ x_2 = -\frac{5}{11}x_3 + \frac{1}{11}x_4 + \frac{10}{11} \end{cases}$

Б-18.1 Решить Слау

Выписать матрицу коэффициентов данной системы линейных однородных уравнений. Решить систему:

1)$x - y = 0$;

2)$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$

3)$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$;

4)$x+3y+2z = 0$, 5) $5x-8y+3z = 0$, $2x+4y+3z = 0$ $2x-3y+z = 0$ 6) $x+2y+3z = 0$, $2x+3y+4z = 0$, $x + y + z = 0$; 7) $5x_1 - 8x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0$, $4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 0$ 8) $x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0$, $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$ $3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0$ 9) $2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4 = 0$, $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$ $3x_1 + 6x_2 + 9x_3 - x_4 = 0$,

Solution

Берем выше алгоритм и используем.

Б-18.2

Доказать, что:
1)сумма двух решений однородной системы линейных уравнений есть решение той же системы;
2)произведение какого-либо решения однородной системы линейных уравнений на число есть решение той же системы.

Б-18.3

Пусть k - максимальное число линейно независимых решений однородной системы линейных уравнений. Выразить k через размеры и ранг матрицы системы. В каком случае $k = 0$?

Б-18.4 Сколько линейно независимых решений имеет однородная система линейных уравнений, если ее матрица невырождена?

Столько, сколько переменных, n.

Б-18.5 Может ли однородная система линейных уравнений оказаться несовместной?

Да.
(допишу подробнее)

Б-18.6 Условия числа решений

Сформулировать условия (и проверить их необходимость и достаточность), при которых однородная система линейных уравнений имеет:
1)единственное решение;
2)бесконечно много решений.

Answer:

Б-18.7

Составить и решить однородную систему линейных уравнений, заданную своей матрицей коэффициентов:
1)$\|12\|$;
2)$\|1111\|$
3)$\|1301\|$
4)A_{391} 5) A_{455}; 6) A_{500} 7) A_{514}; 8) A_{519}; 9) A_{573}; 10) A_{582}; 1
1)A_{583}.

Б-18.8

Составить однородную систему линейных уравнений по заданной матрице коэффициентов, содержащей параметр. Репгить систему при всевозможных значениях параметра:
1)$A = A_{221} - \lambda E$;
2)$A = A_{212} - \lambda E$
3)$A = A_{222} - \lambda E$;
4)$A = A_{365}$; 5) $A = A_{213} - \lambda E$;
2)$A = A_{363}$.
1

Б-18.9 Решить Слау

Решить однородную систему линейных уравнений, заданную своей матрицей коэффициентов. Составить и решить соответствующую сопряженную систему:
1)A_{114}
2)A_{115};
3)A_{118};
4)A_{205}; 5) A_{209} 6) A_{368} 7) A_{408}; 8) A_{145}; 9) A_{146}; 10) A_{443}; 1
1)A_{587}; 1

2)A_{536}.

Solution

(???)

Б-18.10 Могут ли данная однородная система линейных уравнений и ее сопряженная система иметь одинаковое число линейно независимых решений?

Б-18.11 Могут ли совпадать множества решений данной однородной системы линейных уравнений и ее сопряженной?

Б-18.12 Критерий нетривиального решения Слау

Доказать, что однородная система линейных уравнений имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда строки основной матрицы сопряженной системы линейно зависимы.

Solution

(???)

Б-18.13 Общий вид произвольной фундаментальной матрицы

Зная одну фундаментальную матрицу Ф, найти общий вид произвольной фундаментальной матрицы той же системы уравнений.

Solution

(???)

Б-18.14

Данная матрица является фундаментальной матрицей некоторой однородной системы линейных уравнений. Найти хотя бы одну нормальную фундаментальную матрицу:
1)A_{117}
2)A_{118}
3)A_{397}.

Б-18.17

Найти хотя бы одну однородную систему линейных уравнений, для которой данная матрица является фундаментальной:
1)A_{110};
2)A_{147};
3)$\mathbf{c}_{197}$;
4)(р) A_{148} 5) A_{411}.

Б-18.18.

Найти все однородные системы уравнений, эквивалентные данной системе $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$.

Б-18.19

Найти все однородные системы уравнений, для которых данная матрица Ф является фундаментальной.

Б-18.20

Дана матрица A, строки которой линейно независимы. Снизу к ней приписали транспонированную фундаментальную матрицу системы $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$. Доказать, что детерминант полученной матрицы отличен от нуля.

6.2.2 Problems About Systems of Linear Heterogeneous Equations

Б-19.1

Репіить систему линейных уравнений:
1)$2x - 3y = 4$;
2)$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1$
3)$2x + y + z = 4$, $3x + z = 4$;
4)$(\sqrt{2}+1)x+(\sqrt{2}-1)y-\sqrt{2}z = 1+\sqrt{2}$, $x+(3-2\sqrt{2})y+(\sqrt{2}-2)z = 1$; 5) $x+2y+3z = -4$, 6) $x_1+2x_2+x_3 = 2$, $2x + 3y + 4z = 1$, $2x_1 + 3x_2 + x_4 = 1$; $3x + 4y + 5z = 6$ 7) $5x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = -5$, $2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 2$, $3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -3$, $x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -4$ 8) $3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -2$, $5x_1 + 2x_3 + 5x_4 = -2$, $6x_1 + x_2 + 5x_3 + 7x_4 = -4$, $2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -2$; 9) $x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 6$, $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8$; 10) $6x_1 + 3x_2 + 14x_3 - 2x_4 + x_5 = 2$, $20x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 4x_4 + 11x_5 = 20$, $13x_1 + 4x_2 + 12x_3 + x_4 + 6x_5 = 11$ $4x_1 + 7x_2 + 46x_3 - 12x_4 - 7x_5 = -12$, $x_1 - 2x_2 - 16x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 7$.

Б-19.2

Доказать, что:
1)разность двух решений неоднородной системы линейных уравнений есть решение соответствующей однородной системы;
2)сумма любого решения неоднородной системы линейнњх уравнений и любого решения соответствующей однородной системы есть также решение данной неоднородной системы.

Б-19.3

На сколько единиц ранг основной матрицы системы может отличаться от ранга расширенной?

Б-19.4

Пусть система m линейныг уравнений с n неизвестными несовместна, а ее основная матрица имеет ранг n. К какому простейшему виду можно привести эту систему уравнений, применяя к строкам расширенной матрицы алгоритм Гаусса?

Б-19.5

Сформулировать необходимое и достаточное условие того, что система m линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение.

Б-19.6

Составить систему линейных уравнений по заданной расширенной матрице. Решить систему или установить ее несовместность. (Нижеприведенные матрицы разбиты на 4 группы по числу столбцов основной матрицы. Внутри каждой группы матрицы упорядочены по числу строк.) $n = 3$:
1)$\left\|A_{232}|\mathbf{c}_{64}\right\|$
2)$\left\|A_{232}|\mathbf{c}_{65}\right\|$;
3)$\left\|A_{238}|\mathbf{c}_{66}\right\|$;
4)$\|A_{239}|\mathbf{c}_{67}\|$ 5) $\|A_{241}|c_{68}\|$; 6) $\|A_{233}|\mathbf{c}_{70}\|$ 7) $\|A_{206}|\mathbf{c}_{55}\|$; 8) $\|A_{206}|\mathbf{c}_{51}\|$; 9) $\left\|A^T_{206}|\mathbf{c}_{70}\right\|$; 10) $\|A_{400}|\mathbf{c}_{162}\|$; 1
1)$\|A_{408}|\mathbf{c}_{243}\|$; 1
2)$\left\|A^T_{585}|\mathbf{c}_{240}\right\|$; 1
3)$\left\|A^T_{581}|\mathbf{c}_{239}\right\|$. $n = 4$: 1
4)$\left\|A^T_{145}|\mathbf{c}_{14}\right\|$; 15) $\|A_{506}|\mathbf{c}_{13}\|$; 16) $\left\|A^T_{149}|\mathbf{c}_{15}\right\|$;
$n = 5$: 3
1)$\left\|A_{574}|\mathbf{c}_{18}\right\|$; 3
2)$\left\|A_{575}|\mathbf{c}_{46}\right\|$; 3
3)$\left\|A_{576}|\mathbf{c}_{33}\right\|$; 3
4)$\|A_{581}|\mathbf{c}_{77}\|$; 35) $\|A_{581}|\mathbf{c}_{76}\|$; 36) $\left\|A^T_{422}|\mathbf{c}_{72}\right\|$; 37) $\|A_{577}|\mathbf{c}_{78}\|$; 38) $\|A_{584}|\mathbf{c}_{79}\|$; 39) $\|A_{578}|\mathbf{c}_{80}\|$; 40) $\|A_{579}|\mathbf{c}_{81}\|$; 4
1)$\left\|A_{580}|\mathbf{c}_{82}\right\|$; 4
2)$\left\|A_{581}|\mathbf{c}_{58}\right\|$; 4
3)$\left\|A^T_{522}|\mathbf{c}_{163}\right\|$; 4
4)$\left\|A^T_{523}|\mathbf{c}_{164}\right\|$; 45) $\left\|A^T_{524}|\mathbf{c}_{165}\right\|$; 46) $\|A_{588}|\mathbf{c}_{166}\|$; 47) $\left\|A^T_{520}|\mathbf{c}_{170}\right\|$; 48) $\|A_{544}|\mathbf{c}_{246}\|$; 49) $\|A_{533}|\mathbf{c}_{247}\|$. $n = 6$: 50) $\|A_{591}|\mathbf{c}_{271}\|$.

Б-19.7

Составить систему линейныхх уравнений по заданной расширенной матрице, содержащей параметр. Найти все значения параметра, при которых система совместна, и решить ее:
1)$\left\| A_{223} \middle| \mathbf{c}_{85} \right\|$;
2)$\left\| A_{224} \middle| \mathbf{c}_{86} \right\|$;
3)$\left\| A_{225} \middle| \mathbf{c}_{87} \right\|$;
4)$\left\| A_{226} \middle| \mathbf{c}_{88} \right\|$.

Б-19.8

Описать все линейные комбинации решений данной неоднородной системы линейных уравнений, которые являются решениями этой же системы.

Б-19.9

Описать все такие линейные комбинации решений данной линейной неоднородной системы уравнений, которые являются решениями соответствующей однородной системы.

Б-19.10

Пусть столбегі из свободных членов линейной системы уравнений равен сумме столбцов ее основной матрицы. Указать какое-либо частное репгение системы.

Б-19.11

Пусть столбец из свободных членов линейной системы уравнений совпадает с последним столбцом ее основной матрицы. Указать какое-либо частное решение системы.

Б-19.12

Пусть $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ - столбцы решений систем уравнений $A\mathbf{x} = \mathrm{a}, A\mathbf{y} = \mathbf{b}$ соответственно и α, β - некоторые числа. Какой системе уравнений удовлетворяет:
1)$\mathbf{z} = \alpha\mathbf{x}$
2)$z = x + y$
3)$\mathbf{z} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$

6.2.3 Problems About Conjugacy Conditions of the System of Linear Equations

Б-19.13

Доказать, что если столбцы основной матрицы линейно независимы, то система линейных уравнений имеет не более одного решения.

Б-19.14

Доказать, что если строки основной матрицы линейно независимы, то система уравнений совместна при любом столбце свободных членов.

Б-19.15

Доказать следующее утверждение: если система линейных уравнений совместна при любом столбце свободныг членов, то строки ее основной матрицы линейно независимы.

Б-19.16

Доказать, что всегда имеет место одна из двух возможностей: либо система линейных уравнений совместна при любом столбце свободных членов, либо ее сопряженная однородная система имеет ненулевое решение (альтернатива Фредгольма).

Б-19.17

Сформулировать условия (и доказать их необходимость и достаточность), которым должна удовлетворять основная матрица для того, чтобы число решений системы линейных уравнений, в зависимости от столбца b свободныгх членов, равнялось:
1)0 или 1 ;
2)1 или ∞;
3)0 или ∞;
4)1 при всех **b**.

Б-19.18

Система линейных уравнений задана своей расширенной матрицей. Проверить совместность этой системы, пользуясь теоремой Фредгольма и результатом задачи 18.9 для соответствующей сопряженной системы уравнений:
1)$\|A_{114}|\mathbf{c}_{89}\|$;
2)$\|A_{118}|\mathbf{c}_{90}\|$;
3)$\|A_{587}|\mathbf{c}_{171}\|$.

Б-19.19.

Система уравнений задана своей расширенной матрицей, содержащей параметр. Применяя теорему Фредгольма, найти все значения параметра, при которых система совместна, и решить ее:
1)$\|A_{205}|\mathbf{c}_{91}\|$
2)$\|A_{515}|\mathbf{c}_{91}\|$
3)$\|A_{507}|\mathbf{c}_{91}\|$.

Б-19.20

Система уравнений задана своей расширенной матрицей $\|A_{644}|\mathbf{c}_{282}\|$, зависящей от параметров $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu$. Описать множество значений параметров, при которых система совместна, и решить ее.

6.2.4 Problems About Equivalent Systems of Equations

(19.21-19.29)

Б-19.21

Доказать, что если эквивалентны совместные системы линейных неоднородных уравнений, то эквивалентны и соответствующие однородные системы.

Б-19.22

1)Доказать, что нетривиальные уравнения $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$ и $b_1x_1 + \cdots + b_nx_n = 0$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\operatorname{rg}\left\|\begin{matrix} a_1 & \ldots & a_n \\ b_1 & \ldots & b_n \end{matrix}\right\| = 1.$

2)Доказать, что нетривиальные уравнения $a_1x_1+\ldots\cdots+a_nx_n = a$ и $b_1x_1+\cdots+b_nx_n = b$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\operatorname{rg}\left\|\begin{matrix} a_1 & \ldots & a_n & a \\ b_1 & \ldots & b_n & b \end{matrix}\right\| = 1.$

3)Сформулировать признак попарной эквивалентности k линейных уравнений.

Б-19.23

1)Доказать, что системы линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{o}, B\mathbf{x} =$ o эквивалентны тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rg}\left\|\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\right\|^{\Box} = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B.$$

2)Доказать, что совместные системы линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{a}, B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rg}\left\|\begin{matrix} A & \mathrm{a} \\ B & \mathrm{b} \end{matrix}\right\|^{\Box} = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B.$$

Б-19.24

Проверить эквивалентность систем уравнений $18.1, 11)$ и $18.1, 12)$.

Б-19.25

Проверить, эквивалентны ли системы уравнений, определяемые расширенными матрицами:
1)$(A_{502}|\mathbf{c}_{17})$ и $(A_{503}|\mathbf{c}_{12})$;
2)$(A_{239}|\mathbf{c}_{67})$ и $(A_{240}|\mathbf{c}_{147})$;
3)$(A_{581}|\mathbf{c}_{69})$ и $\left(A_{422}^T|\mathbf{c}_{72}\right)$.

Б-19.26

Проверить эквивалентность всех систем данной совокупности (каждая система уравнений задана расширенной матрицей): $(A_{501}|\mathbf{c}_{16})$, $(A_{509}|\mathbf{c}_{67})$ и $(A_{510}|\mathbf{c}_{73})$.

Б-19.27

1)Допустим, что добавление к данной однородной системе линейных уравнений еще некоторого числа линейных однородных уравнений не меняет множества ее решений. Доказать, что добавленные уравнения являются линейными комбинациями уравнений данной системы.

2)Доказать то же утверждение для совместной системы линейньгх неоднородньхх уравнений. Сравнить с задачей 17.3. 2).

Б-19.28

1)Допустим, что каждое решение однородной системы линейных уравнений (А) является также и решением однородной системы линейных уравнений (Б). Доказать, что тогда каждое уравнение системы (Б) является линейной комбинацией уравнений систсмы (А).

2)Доказать то же утверждение для совместных систем линейных неоднородных уравнений. Сравнить с задачей 17.3. 1).

Б-19.29

1)Доказать, что две однородные системы линейных уравнений эквивалентны тогда и только тогда, когда уравнения каждой из них являются линейными комбинациями уравнений другой системы.

2)Доказать то же утверждение для совместных систем линейных неоднородных уравнений.

6.2.5 Problems About Application Tasks (????)

(вообще нет сил, так что пропускаю этот раздел, думаю, не так страшно.)

6.3 Linear Space Tasks

6.3.1 Problems About the Elementary Properties of Linear Spaces

Б-20.1 Можно ли

Можно ли подходящим введением операций сложения и умножения на число сделать линейным пространством:
1)пустое множество;
2)множество из одного элемента;
3)множество из двух элементов?

Б-20.2 Возня со свойствами линейных пространств

Доказать, что:
1)если система векторов содержит линейно зависимую подсистему, то она линейно зависима;
2)если система векторов линейно независима, то любая ее подсистема также линейно независима;
3)если векторы $a_1, \ldots, a_k$ линейно независимы, а векторы $a_0, a_1, \ldots, a_k$ линейно зависимы, то вектор a_0 являстся линейной комбинацией векторов $a_1, \ldots, a_k$.

Б-20.3 Возня со свойствами линейных пространств

Выяснить, является ли линейным подпространством данное множество векторов в n-мерном пространстве, и если является, то найти его размерность:
1)множество векторов, все координаты которых равны между собой;
2)множество векторов, первая координата которьг равна 0;
3)множество векторов, сумма координат которьх равна 0;
4)множество векторов, сумма координат которых равна 1.

Б-20.4 Возня со свойствами линейных пространств

Выяснить, является ли линейным подпространством данное множество векторов геометрического пространства, и если является, определить его размерность:
1)множество векторов плоскости, параллельных данной прямой;
2)множество векторов трехмерного пространства, перпендикулярных данной прямой;
3)множество векторов плоскости, по модулю не превосходящих 1
4)множество векторов плоскости, образующих угол α с данной прямой ($0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 90^\circ$).

Б-20.5

Доказать, что множество матриц размера $m \times n$ образует линейное пространство относительно обычных операций сложения матриц и умножения матрицы на число. Найти размерность и базис этого пространства $\nabla_{m\times n}$.

Б-20.6

Выяснить, является ли данное множество квадратных матриц порядка n, линейным подпространством в пространстве всех квадратных матриц порядка n, и если является, то найти его размерность:
1)множество матриц с нулевой первой строкой;
2)множество диагональных матриц;
3)множество верхних треугольных матриц;
4)множество симметрических матриц; 5) множество кососимметрических матриц; 6) множество вырожденных матриц.

Б-20.8

Доказать, что при любом натуральном n данное множество функций образует консчномерное линейное пространство; найти размерность и указать базис этого пространства:
1)множество многочленов степени не выше n (обозначается $\mathcal{P}^{(n)}$);
2)множество четных многочленов степени не выше n;
3)множество нечетных многочленов степени не выше n;
4)множество тригонометрических многочленов порядка не выше n, т. е. множество функций вида $f(t) = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \ldots + a_n \cos nt + b_n \sin nt$ 5) множество четных тригонометрических многочленов порядка не выше n; 6) множество нечетных тригонометрических многотленов порядка не выше n; 7) множсство функций вида $f(t) = e^{\alpha t}\left(a_0 + a_1 \cos t + \; + b_1 \sin t + \ldots + a_n \cos nt + b_n \sin nt\right)$, где α - фиксированное действительное число.

Б-20.9

Доказать, что данное множество функций образует бесконечномсрное линейное пространство:
1)множество всех многочленов;
2)множество всех тригонометрических многочленов;
3)множсство функций, непрерывньг на некотором отрезке.

Б-20.10

Найти линейную комбинацию столбцов:
1)$3\mathbf{c}_1 - \frac{1}{3}\mathbf{c}_2$;
2)$-\mathbf{c}_{29} + \mathbf{c}_{33} + 2\mathbf{c}_{31}$;
3)$\frac{1}{2}\mathbf{c}_{143} - \frac{1}{2}\mathbf{c}_{138}$;
4)$\mathbf{c}_{206} - 3\mathbf{c}_{198} + 2\mathbf{c}_{199}$.

Б-20.11

Найти линейную комбинацию матриц

$$\frac{1}{3}A_{215} - \frac{1}{2}A_{252} + A_{253} - A_{254}.$$

Б-20.17

Доказать что векторы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ образуют базис в n - мерном арифметическом пространстве, и найти координатный столбец вектора x в этом базисе:
1)$n = 1, \mathbf{e}_1 = \mathbf{c}_1, \mathbf{x} = \mathbf{c}_2$;
2)$n = 2, \mathbf{e}_1 = \mathbf{c}_{28}, \mathbf{e}_2 = \mathbf{c}_{29}, \mathbf{x} = \mathbf{c}_{30}$;
3)$n = 3, \mathbf{e}_1 = \mathbf{c}_{116}, \mathbf{e}_2 = \mathbf{c}_{120}, \mathbf{e}_3 = \mathbf{c}_{122}, \mathbf{x} = \mathbf{c}_{49}$;
4)$n = 4, \mathbf{e}_1 = \mathbf{c}_{196}, \mathbf{e}_2 = \mathbf{c}_{197}, \mathbf{e}_3 = \mathbf{c}_{198}, \mathbf{e}_4 = \mathbf{c}_{199}, \mathbf{x} = \mathbf{c}_{200}$; 5) $n = 5, \mathbf{e}_1 = \mathbf{c}_{255}, \mathbf{e}_2 = \mathbf{c}_{263}, \mathbf{e}_3 = \mathbf{c}_{264}, \mathbf{e}_4 = \mathbf{c}_{265}, \mathbf{e}_5 = \mathbf{c}_{266}$, $\mathbf{x} = \mathbf{c}_{267}$

Б-20.18

Доказать, что матрицы A_5, A_{10}, A_{13}, A_6 образуют базис в пространстве квадратных матриц порядка 2, и найти координатный столбец матрицы A_{26} в этом базисе.

Linear Independence of Exponents

Show that the functions $\left\{e^{ix}, e^{-ix}\right\}$ are linearly independent.

Solution

To solve this problem, we compute the Wronskian

$$W = \begin{vmatrix} e^{ix} & e^{-ix} \\ ie^{ix} & -ie^{-ix} \end{vmatrix} = -2i \neq 0$$

Since the Wronskian is nonvanishing, the functions $\left\{e^{ix}, e^{-ix}\right\}$ are linearly independent.

Б-20.19 Базисность симметрических матриц

Доказать, что матрицы $A_{200}, A_{202}, A_{205}, A_{204}, A_{203}$, A_{242} образуют базис в пространстве симметрических матриц порядка 3, и найти координатный столбец матрицы A_{215} в этом базисе.

Б-20.20. Базисность многочленов

Доказать, что многочлены $1, t-\alpha, (t-\alpha)^2, \ldots\ldots, (t-\alpha)^n$ образуют базис в пространстве многочленов степени не выше n, и найти координатный столбец произвольного многочлена $p_n(t)$ степени не выше n в этом базисе.

Б-20.21 Базисность многочленов

Доказать, что многочлены $2t + t^5, t^3 - t^5, t + t^3$ образуют базис в пространстве нечетных многочленов степени не выше 5, и найти координатный столбец многочлена $5t - t^3 + 2t^5$ в этом базисе.

Solution

(???)

Б-20.22

Найти размерность и базис линейного подпространства, заданного в некотором базисе системой линейных уравнений:
1)$A_{27}\mathbf{x} = \mathbf{0}$;
2)$A_{238}\mathbf{x} = \mathbf{0}$
3)$A_{249}\mathrm{x} = \mathbf{0}$;
4)$A_{391}\mathbf{x} = \mathbf{o}$ 5) $A_{110}\mathrm{x} = \mathbf{0}$; 6) $A_{442}\mathrm{x} = \mathrm{o}$; 7) $A_{577}\mathbf{x} = \mathbf{o}$.

Б-20.23

Составить систему уравнений, определяющую линейную оболочку данной системы столбцов:
1)c_{66}, c_{83};
4)$\mathbf{c}_{166}, \mathbf{c}_{196}$;
2)$\mathbf{c}_{31}, \mathbf{c}_{30}$;
3)$\mathbf{c}_{30}, \mathbf{c}_{29}$ 7) $\mathbf{c}_{166}, \mathbf{c}_{196}, \mathbf{c}_{197}, \mathbf{c}_{198}$ 6) $\mathbf{c}_{166}, \mathbf{c}_{198}, \mathbf{c}_{199}, \mathbf{c}_{201}$ 8) $\mathrm{c}_{166}, \mathrm{c}_{196}, \mathrm{c}_{107}, \mathrm{c}_{198}$; 8) $(0,0,0,0)^T$.

Б-20.24

Доказать, что каждая из двух систем векторов $\mathbf{f}_1, \ldots \ldots, \mathbf{f}_n$ и $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n$ является базисом в n-мерном арифметическом пространстве, и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму. Найти координаты вектора в первом базисе, если известны его координаты $\xi_1', \ldots, \xi_n'$ во втором базисе:

1)$n=1, \quad \mathbf{f}_1=\mathbf{c}_1, \quad \mathbf{g}_1=\mathbf{c}_3;$

2)$n=2, \quad \mathbf{f}_1=\mathbf{c}_{29}, \quad \mathbf{f}_2=\mathbf{c}_{33}, \quad \mathbf{g}_1=\mathbf{c}_{32}, \quad \mathbf{g}_2=\mathbf{c}_{28};$

3)$n=3, \mathbf{f}_1=\mathbf{c}_{116}, \mathbf{f}_2=\mathbf{c}_{117}, \mathbf{f}_3=\mathbf{c}_{94}, \mathbf{g}_1=\mathbf{c}_{119}, \mathbf{g}_2=\mathbf{c}_{84}, \mathbf{g}_3=\mathbf{c}_{83};$

4)$n=4, \mathbf{f}_1=\mathbf{c}_{166}, \mathbf{f}_2=\mathbf{c}_{196}, \mathbf{f}_3=\mathbf{c}_{197}, \mathbf{f}_4=\mathbf{c}_{198}, \mathbf{g}_1=\mathbf{c}_{199}, \mathbf{g}_2=\mathbf{c}_{200}, \quad \mathbf{g}_3=\mathbf{c}_{202}, \quad \mathbf{g}_4=\mathbf{c}_{203}.$

Б-20.25

Доказать, что каждая из двух систем матриц $A_{132}, \quad A_{143}, A_{134}, A_{133}, A_{110}, A_{135}$ и $A_{136}, A_{137}, A_{112}, A_{138}, A_{139}, A_{113}$ является базисом в пространстве матриц размера 3×2, и найти матригуу перехода от первого базиса ко второму. Найти координаты матрицы 3×2 в первом базисе, если известны ее координаты $\xi_1', \ldots, \xi_6'$ во втором базисе.

Б-20.26

Доказать, что каждая из двух систем матриц $A_{250}, A_{251}, A_{252}$ и $A_{253}, A_{254}, A_{255}$ является базисом в пространстве кососимметрических матриц порядка 3, и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму. Найти координаты кососимметрической матрицы порядка 3 в первом базисе, если известны ее координаты ξ_1', ξ_2', ξ_3' во втором базисе.

Б-20.27

Доказать, что каждая из двух систем функций $t-t^2, t^3, 1+5t+t^3, (1+t)^3$ и $(1+t)^3, (1-t)^3, t-t^2+t^3, 1+t+t^2+t^3$ является базисом в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицу перехода от первого базиса ко второму и координаты многочлена в первом базисе, если известны его координаты $\xi_1', \xi_2', \xi_3', \xi_4'$ во втором базисе.

Б-20.28

Доказать, что каждая из двух систем функций $\left(1+t^2\right)^2, \left(1-t^2\right)^2, 1$ и $1+t^2+t^4, 1-t^2+t^4, t^4$ является базисом в пространстве четных многочленов степени не выше 4, и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму. Найти координаты четного многочлена степени не выше 4 в первом базисе, если известны его координаты ξ_1', ξ_2', ξ_3' во втором базисе. § 21. Сумма и пересечение подпространств 185

Б-20.29

Как изменится матрица перехода от одного базиса к другому, если:

1)поменять местами i-й и j-й векторы первого базиса;

2)поменять местами i-й и j-й векторы второго базиса;

3)расположить векторы обоих базисов в обратном порядке.

Б-20.30

Матрица S_1 является матрицей перехода от первого базиса $e_1, \ldots, e_n$ в n-мерном линейном пространстве ко второму базису $f_1, \ldots, f_n$, а матрица S_2 - матрицей перехода от второго базиса к третьему базису $g_1, \ldots, g_n$. Найти матрицу перехода:

1)от первого базиса к третьему;

2)от второго базиса к первому.

Б-20.31

Описать взаимное расположение двух базисов в трехмерном линейном пространстве, если матрица перехода от первого базиса ко второму:

1)диагональная;

2)верхняя треугольная;

3)нижняя треугольная.

Б-20.32

Векторы базисов $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ даны своими координатными столбцами относительно базиса e. Эти столбцы составляют соответственно матрицы A и B. Найти матрицу перехода от базиса a к базису b, если:

1)$A=A_{54}, \quad B=A_{64}$

2)$A = A_{10}, \quad B = A_{34}$
3)$A = A_{427}, \quad B = A_{468}$.

Б-20.33

Доказать, что многочлены Лежандра $1, t,\ \frac{1}{2}\left(3t^2 - 1\right), \frac{1}{2}\left(5t^3 - 3t\right)$ образуют базис в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти матрицы перехода от стандартного базиса к данному и обратно.

Б-20.34

Найти координаты многочлена $p(t)$ в стандартном базисе пространства многочленов степени не выше 3 и в базисе задачи 20.33:
1)$p(t) = 5t^3 - 3t$
2)$p(t) = 2t - 1$;
3)$p(t) = 9t^2 - 1$;
4)$p(t) = 1 - 4t - 3t^2 + 10t^3$.

Кострикин.2-2.

5. Найти матрицу перехода от базиса $\left(1, t, \ldots, t^{n-1}\right)$ пространства P_n к базису $\left(1, (t-\alpha), \ldots, (t-\alpha)^{n-1}\right)$ того же пространства.

Кострикин.2-2.6.

Пусть θ - комплексный корень неприводимого над $\mathbb{Q}$ многочлена $f \in \mathbb{Q}[t]$. Найти размерность над $\mathbb{Q}$ пространства $\mathbb{Q}[\alpha] = \left\langle 1, \theta, \ldots, \theta^k, \ldots \right\rangle_{\mathbb{Q}}$.

Кострикин.2-

7. Доказать, что для прямых сумм не выполняется закон сокращения, т.е. из равенства сумм $U \oplus W_1 = U \oplus W_2$ с одинаковым слагаемым U, вообще говоря, не следует, что $W_1 = W_2$.

Кострикин.2-

8. Выяснить, конечномерно ли факторпространство $\mathfrak{K}[t]/L$, где:
а) L - подпространство P_n многочленов от t степени $\leqslant n-1$;
б) L - подпространство многочленов, делящихся на t^n;
в) L - подпространство многочленов от t^2?

Кострикин.2-

9. Доказать следующий аналог формулы Грассмана:

$$\operatorname{codim}(U + W) + \operatorname{codim}(U \cap W) = \operatorname{codim} U + \operatorname{codim} W$$

(U и W - подпространства конечной коразмерности не обязательно конечномерного векторного пространства V).

Кострикин.2-10

Следуя терминологии примера 8 из § 1, выделим тривиальные полумагические матрицы
Возникает вопрос: каковы размерности $\dim \mathrm{SMag}_n(\mathbb{Q})$ и $\dim \mathrm{Mag}_n(\mathbb{Q})$? Очевидно, $\mathrm{SMag}_2(\mathbb{Q}) = \langle E, D \rangle_{\mathrm{Q}}$. В этом случае $S = E + D$-единственная с точностью до рационального множителя магическая матрица. При $n = 3$ можно указать менее очевидную магическую матрицу

$$A = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right\|.$$

Вычислить указанные выше размерности при $n = 3$ и $n = 4$.

Кострикин.2-11.

Доказать разложение в прямую сумму

$$\mathrm{SMag}_n(\mathbb{Q}) = \mathrm{Mag}_n(\mathbb{Q}) \oplus \mathbb{Q}E \oplus \mathbb{Q}D.$$

Кострикин.2-12.

Пусть $V_1, \ldots, V_k$ - подпространства n-мерного векторного пространства V. Доказать, что если $\dim V_1 + \ldots + \dim V_k > n(k-1)$, то $\bigcap_{i=1}^{k} U_i \neq \mathbf{0}$ (прямое обобщение утверждений, вытекающих из формулы (7)).

Б-21.1

Доказать, что пространство квадратных матриц порядка n является прямой суммой подпространства симметрических матриц и подпространства кососимметрических матриц того же порядка.

Б-21.2

Доказать, что пространство многочленов степени не выше n является прямой суммой подпространства четных многочленов степени не выше n и подпространства нечетных многочленов степени не выше n.

Б-21.3

1)Доказать, что n-мерное линейное пространство является прямой суммой подпространства векторов, все координаты которых равны между собой, и подпространства векторов, сумма координат которых равна 0.

2)Дана матрица A из n строк. Доказать, что n-мерное арифметическое пространство является прямой суммой линейной оболочки столбцов A и подпространства решений системы линейных уравнений $A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Б-21.4

Доказать, что n-мерное арифметическое пространство является прямой суммой линейных подпространств, натянутых на системы векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ и $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_l$:

1)$n = 2, \quad \mathbf{a}_1 = \mathbf{c}_{30}, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{c}_{32}, \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_{35}$;

2)$n = 3, \quad \mathbf{a}_1 = \mathbf{c}_{141}, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{c}_{146}, \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_{66}, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_{140}$;

3)$n = 4, \mathbf{a}_1 = \mathbf{c}_{198}, \mathbf{a}_2 = \mathbf{c}_{196}, \mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_{197}, \mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_{166}, \mathbf{b}_3 = \mathbf{c}_{206}$;

4)$n = 4, \mathbf{a}_1 = \mathbf{c}_{196}, \mathbf{a}_2 = \mathbf{c}_{198}, \mathbf{a}_3 = \mathbf{c}_{202}, \mathbf{a}_4 = \mathbf{c}_{199}, \mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_{166}, \mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_{204}$.

Б-21.5

Разложить данный вектор x из n-мерного арифметического пространства в сумму двух векторов, один из которых лежит в $\mathcal{P}$, а другой - в $\mathcal{Q}$, где $\mathcal{P}$ - линейная оболочка системы векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$, а $\mathcal{Q}$ - линейная оболочка системы векторов $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_l$. Проверить единственность разложения:

1)$n = 2, \quad \mathbf{x} = \mathbf{c}_{29}, \quad \mathbf{a}_1 = \mathbf{c}_{28}, \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_{30}$;

2)$n = 3, \quad \mathbf{x} = \mathbf{c}_{120}, \quad \mathbf{a}_1 = \mathbf{c}_{84}, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{c}_{83}, \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_{66}$;

3)$n = 3, \quad \mathbf{x} = \mathbf{c}_{145}, \quad \mathbf{a}_1 = \mathbf{c}_{84}, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{c}_{83}, \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_{66}$;

4)$n = 3, \quad \mathbf{x} = \mathbf{c}_{139}, \quad \mathbf{a}_1 = \mathbf{c}_{84}, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{c}_{83}, \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_{66}$; 5) $n = 4, \mathbf{x} = \mathbf{c}_{200}, \mathbf{a}_1 = \mathbf{c}_{166}, \mathbf{a}_2 = \mathbf{c}_{198}, \mathbf{a}_3 = \mathbf{c}_{207}, \mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_{202}, \mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_{205}$.

Б-21.6

Найти проекцию данного вектора $\mathbf{x}$ из n-мерного арифметического пространства на линейное подпространство $\mathcal{P}$ параллельно линейному подпространству $\mathcal{Q}$, где $\mathcal{P}$ - линейная оболочка системы векторов $\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_k$, а $\mathcal{Q}$ - линейная оболочка системы векторов $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_l$:

1)$n = 2, \quad \mathbf{x} = \mathbf{c}_{32}, \quad \mathbf{a}_1 = \mathbf{c}_{30}, \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_{34}$;

2)$n = 2, \quad \mathbf{x} = \mathbf{c}_{37}, \quad \mathbf{a}_1 = \mathbf{c}_{30}, \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_{34}$;

3)$n = 2, \quad \mathbf{x} = \mathbf{c}_{35}, \quad \mathbf{a}_1 = \mathbf{c}_{30}, \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_{34}$;

4)$n = 3, \mathbf{x} = \mathbf{c}_{146}, \mathbf{a}_1 = \mathbf{c}_{66}, \mathbf{a}_2 = \mathbf{c}_{121}, \mathbf{a}_3 = \mathbf{c}_{122}, \mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_{145}$; 5) $n = 4, \mathbf{x} = \mathbf{c}_{201}, \mathbf{a}_1 = \mathbf{c}_{166}, \mathbf{a}_2 = \mathbf{c}_{199}, \mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_{197}, \mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_{198}$.

Б-21.7 Размерность и базис суммы и пересечения

Найти размерность и базис суммы и пересечения линейных подпространств n-мерного арифметического пространства, натянутых на системы векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ и $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_l$:

1)$n = 2, \quad \mathbf{a}_1 = \mathbf{c}_{34}, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{c}_{37}, \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{c}_{35}, \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_{30}, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_{36}, \mathbf{b}_3 = \mathbf{c}_{32}$

2)$n = 3, \mathbf{a}_1 = \mathbf{c}_{116}, \mathbf{a}_2 = \mathbf{c}_{121}, \mathbf{a}_3 = \mathbf{c}_{119}, \mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_{122}, \mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_{125}, \mathbf{b}_3 = \mathbf{c}_{138}$;

3)$n = 3, \mathbf{a}_1 = \mathbf{c}_{66}, \mathbf{a}_2 = \mathbf{c}_{139}, \mathbf{a}_3 = \mathbf{c}_{140}, \mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_{94}, \mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_{141}, \mathbf{b}_3 = \mathbf{c}_{117}$

4)(p) $n = 3, \mathbf{a}_1 = \mathbf{c}_{83}, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{c}_{142}, \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{c}_{143}, \mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_{84}, \mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_{144}, \quad \mathbf{b}_3 = \mathbf{c}_{117}$ 5) $n = 3, \mathbf{a}_1 = \mathbf{c}_{66}, \mathbf{a}_2 = \mathbf{c}_{116}, \mathbf{a}_3 = \mathbf{c}_{145}, \mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_{122}, \mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_{146}, \mathbf{b}_3 = \mathbf{c}_{147}$; 6) $n = 3, \mathbf{a}_1 = \mathbf{c}_{83}, \mathbf{a}_2 = \mathbf{c}_{84}, \mathbf{a}_3 = \mathbf{c}_{120}, \mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_{66}, \mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_{121}, \mathbf{b}_3 = \mathbf{c}_{122}$; 7) $n = 4, \mathbf{a}_1 = \mathbf{c}_{196}, \mathbf{a}_2 = \mathbf{c}_{200}, \mathbf{a}_3 = \mathbf{c}_{217}, \mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_{211}, \mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_{218}, \mathbf{b}_3 = \mathbf{c}_{219}$; 8) $n = 4, \mathbf{a}_1 = \mathbf{c}_{196}, \mathbf{a}_2 = \mathbf{c}_{198}, \mathbf{a}_3 = \mathbf{c}_{202}, \mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_{166}, \mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_{204}, \mathbf{b}_3 = \mathbf{c}_{197}$ 9) $n = 4, \mathbf{a}_1 = \mathbf{c}_{166}, \mathbf{a}_2 = \mathbf{c}_{196}, \mathbf{a}_3 = \mathbf{c}_{197}, \mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_{203}, \mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_{205}, \mathbf{b}_3 = \mathbf{c}_{206}$ 10) $n = 4, \quad \mathbf{a}_1 = \mathbf{c}_{166}, \quad \mathbf{a}_2 = \mathbf{c}_{198}, \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{c}_{196}, \mathbf{a}_4 = \mathbf{c}_{202}, \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_{207}, \quad \mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_{204}, \quad \mathbf{b}_3 = \mathbf{c}_{197}, \quad \mathbf{b}_4 = \mathbf{c}_{205}$; 1

1)(p) $n = 4$, $\mathbf{a}_1 = \| \ 1 \ \ -1 \ \ 1 \ \ 0 \ \|^T$, $\mathrm{a}_2 = \| \ 1 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 1 \ \|^T_T$, $\mathbf{a}_3 = \| \ 2 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 2 \ \|^T_T$, $\mathbf{a}_4 = \| \ 2 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 1 \ \|^T$, $\mathbf{b}_1 = \| \ \ 5 \ \ -1 \ \ 4 \ \|^T$, $\mathbf{b}_2 = \| \ 1 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 0 \ \|^T$, $\mathbf{b}_3 = \| \ 2 \ \ 2 \ \ 0 \ \ 3 \ \|^T$, $\mathbf{b}_4 = \| \ 1 \ \ 3 \ \ -1 \ \ 1 \ \|^T$.

Б-21.8 Размерность и базис суммы и пересечения

Найти размерность и базис суммы и пересечения линейных подпространств пространства квадратных матриц порядка 3, натянутых на системы матриц $A_{202}, A_{201}, A_{209}, A_{204}$ и $A_{256}, A_{205}, A_{257}, A_{258}$.

Б-21.9

Найти размерность и базис суммы и пересечения линейных подпространств пространства многочленов степени не выше 3, натянутых на системы многочленов $1 + 2t + t^3$, $1 + t + t^2, t - t^2 + t^3$ и $1 + t^2, 1 + 3t + t^3, 3t - t^2 + t^3$.

Б-21.10

Используя понятие суммыі двух линейныг подпространств, доказать неравенство $\operatorname{rg}(A + B) \leqslant \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$, где A и B - две матрицы одного размера $m \times n$.

Б-21.11

Доказать, что сумма $\mathcal{L}$ двух линейных подпространств $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ тогда и только тогда будет прямой суммой, когда хотя бы один вектор $x \in \mathcal{L}$ однозначно представляется в виде $x = y + z$, где $y \in \mathcal{P}, z \in \mathcal{Q}$.

Б-21.12

Пусть $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ - два линейных подпространства конечномерного линейного пространства. Доказать, что:

1)если сумма размерностей $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ больше размерности всего пространства, то пересечение $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ содержит ненулевой вектор;

2)если размерность суммы $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ на единицу больше размерности их пересечения, то одно из этих подпространств содержится в другом.

Б-21.13

Доказать, что для любого линейного подпространства $\mathcal{P}$ конечномерного линейного пространства существует другое подпространство $\mathcal{Q}$ такое, что все пространство является прямой суммой $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$.

Б-21.14

Пусть $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ - три линейных подпространства; $\mathcal{P} = (\mathcal{L} \cap \mathcal{N}) + (\mathcal{M} \cap \mathcal{N}), \mathcal{Q} = (\mathcal{L} + \mathcal{M}) \cap \mathcal{N}$.

1)Доказать, что $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}$.

2)Возможен ли случай $\mathcal{P} \neq \mathcal{Q}$? Привести соответствующий пример.

Б-21.15

Доказать, что сумма линейных подпространств $\mathcal{L}^{(1)}, \ldots, \mathcal{L}^{(k)}$ совпадает с множеством векторов, представимых в видс $x = x_1 + \ldots + x_k$, где $x_i \in \mathcal{L}^{(i)}, i = 1, \ldots, k$.

Б-21.16 Очевидное свойство трех линейных подпространств

Пусть $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ - три линейных подпространства. Доказать, что

$$\mathcal{L} + \mathcal{M} + \mathcal{N} = (\mathcal{L} + \mathcal{M}) + \mathcal{N} = \mathcal{L} + (\mathcal{M} + \mathcal{N}).$$

Б-21.17

Доказать, что сумма $\mathcal{L}$ линейных подпространств $\mathcal{L}^{(1)}, \ldots, \mathcal{L}^{(k)}$ тогда и только тогда будет прямой суммой, когда хотя бы один вектор $x \in \mathcal{L}$ однозначно представляется в виде $x = x_1 + \ldots + x_k$, где $x_i \in \mathcal{L}^{(i)}$ (обобщение задачи 21.11).

6.3.2 Problems About Complex Linear Spaces

Б-22.1

Найти линейную комбинацию столбцов:
1)$(1+i)\mathbf{c}_4 - i\mathbf{c}_5$;
2)$2i\mathbf{c}_{42} + (3+i)\mathbf{c}_{30} - \mathbf{c}_{41}$;
3)$(1-2i)\mathbf{c}_{148} + \frac{3}{2}\mathbf{c}_{152}$.

Б-22.2

Найти линейную комбинацию матриц

$$(2+i)A_{89} + iA_{10} + A_{27} - 2A_{91}.$$

Б-22.6

Доказать, что векторы $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ образуют базис в комплексном n-мерном арифметическом пространстве, и найти координатный столбец вектора $\mathbf{x}$ в этом базисе:
1)$n=1, \quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{c}_4, \quad \mathbf{x} = \mathbf{c}_5$;
2)$n=2, \quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{c}_{31}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{c}_{35}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{c}_{39}$;
3)$n=2, \quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{c}_{26}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{c}_{40}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{c}_{41}$;
4)$n=2, \quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{c}_{26}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{c}_{27}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{c}_{38}$; 5) $n=3, \mathbf{e}_1 = \mathbf{c}_{126}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{c}_{127}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{c}_{128}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{c}_{273}$; 6) $n=4, \mathbf{e}_1 = \mathbf{c}_{166}, \mathbf{e}_2 = \mathbf{c}_{207}, \mathbf{e}_3 = \mathbf{c}_{274}, \mathbf{e}_4 = \mathbf{c}_{275}, \mathbf{x} = \mathbf{c}_{276}$.

Б-22.7

Найти размерность и базис линейного пространства, заданного в некотором базисе системой линейных уравнений:
1)$A_{90}\mathbf{x} = \mathbf{0}$;
2)$A_{91}\mathrm{x} = \mathbf{0}$
3)$A_{369}\mathbf{x} = \mathbf{o}$
4)$A_{371}\mathbf{x} = \mathbf{0}$; 5) $A_{525}\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Б-22.8

Составить систему уравнений, определяющую линей- ную оболочку данной системы столбцов:
1)$\mathbf{c}_{40}, \mathbf{c}_{42}$
2)$\mathbf{c}_{26}, \mathbf{c}_{42}$
3)$\mathbf{c}_{215}$
4)$\mathbf{c}_{128}, \mathbf{c}_{273}$ 5) $\mathbf{c}_{275}, \mathbf{c}_{276}, \mathbf{c}_{214}, \mathbf{c}_{215}$.

Б-22.9

Доказать, что каждая из двух систем векторов $\mathbf{f}_1, \ldots \ \ldots, \mathbf{f}_n$ и $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n$ является базисом в комплексном n-мерном арифметическом пространстве, и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму. Найти координаты вектора в первом базисе, если известны его координаты $\xi_1', \ldots, \xi_n'$ во втором базисе:
1)$n=1, \mathbf{f}_1 = \mathbf{c}_4, \quad \mathbf{g}_1 = \mathbf{c}_6$;
2)$n=2, \mathbf{f}_1 = \mathbf{c}_{31}, \mathbf{f}_2 = \mathbf{c}_{45}, \quad \mathbf{g}_1 = \mathbf{c}_{44}, \quad \mathbf{g}_2 = \mathbf{c}_{39}$;
3)$n=3, \mathbf{f}_1 = \mathbf{c}_{129}, \mathbf{f}_2 = \mathbf{c}_{128}, \mathbf{f}_3 = \mathbf{c}_{130}, \mathbf{g}_1 = \mathbf{c}_{122}, \mathbf{g}_2 = \mathbf{c}_{126}, \mathrm{g}_3 = \mathrm{c}_{94}$.

Б-22.10

Найти проекцию данного вектора $\mathbf{x}$ двумерного комплексного арифметического пространства на линейное подпространство $\mathcal{P}$ параллельно линейному подпространству $\mathcal{Q}$, где $\mathcal{P}$ натянуто на вектор $\mathbf{c}_{44}$, а $\mathcal{Q}$ натянуто на вектор $\mathbf{c}_{40}$:
1)$\mathbf{x} = \mathbf{c}_{26}$;
2)$\mathbf{x} = \mathbf{c}_{42}$ 3
2)$\mathbf{x} = \mathbf{c}_{45}$

Б-22.11

Найти размерность и базис суммы и пересечения линейных подпространств комплексного n-мерного арифметического пространства, натянутых на системы векторов $\mathbf{a}_1, \ldots \ldots, \mathbf{a}_k$ и $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_l$:
1)$n=3, \mathbf{a}_1 = \mathbf{c}_{83}, \mathbf{a}_2 = \mathbf{c}_{134}, \mathbf{a}_3 = \mathbf{c}_{148}, \mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_{132}, \mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_{149}, \ \mathbf{b}_3 = \mathbf{c}_{150}$;
2)$n=3, \mathbf{a}_1 = \mathbf{c}_{131}, \mathbf{a}_2 = \mathbf{c}_{132}, \mathbf{a}_3 = \mathbf{c}_{133}, \mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_{134}, \mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_{135}, \ \mathbf{b}_3 = \mathbf{c}_{136}$;
3)$n=4, \mathbf{a}_1 = \mathbf{c}_{166}, \mathbf{a}_2 \approx \mathbf{c}_{220}, \mathbf{a}_3 = \mathbf{c}_{216}, \mathbf{a}_4 = \mathbf{c}_{215}, \mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_{221}, \ \mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_{222}, \quad \mathbf{b}_3 = \mathbf{c}_{223}, \quad \mathbf{b}_4 = \mathbf{c}_{214}$.

Б-22.12

1)Доказать, что если в n-мерном комплексном линейном пространстве рассматривать умножение векторов лишь на вещественные числа, то получим $2n$-мерное вещественное линейное пространство.

2)В двумерном комплексном арифметическом пространстве рассматривается операция умножения векторов лишь на вещественные числа. Найти базис в полученном вещественном пространстве и координатный столбец вектора $\mathbf{c}_{27}$ в этом базисе.

Б-22.13

Доказать, что множество многочленов степени не выше n с комплексными коэффициентами можно рассматривать и как комплексное линейное пространство, и как вещественное линейное пространство. В обоих случаях найти:

1)базис и размерность пространства;

2)координатный столбец многочлена $1-2i+(3+i)t-3t^2$ в найденном базисе (при $n=2$).

6.4 Tasks for Linear Mappings and Conversions

6.4.1 Problems About Main Properties of Linear Mappings and Transformations

Б-23.1

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ - произвольный вектор n-мерного арифметичсского пространства. Исследовать линейность преобразования φ, если:

1)$\varphi(\mathbf{x}) = (x_2, x_1 - x_2)^T \quad (n=2)$;

2)$\varphi(\mathbf{x}) = (x_2, x_1 x_2)^T \quad (n=2)$;

3)$\varphi(\mathbf{x}) = (x_2, x_1 - 3, x_3)^T \quad (n=3)$;

4)$\varphi(\mathbf{x}) = (2x_3 + x_1, 2x_3 x_1, x_1 - x_2)^T \quad (n=3)$; 5) $\varphi(\mathbf{x}) = (0, \ldots, 0)^T$ 6) $\varphi(\mathbf{x}) = \left(0, x_1 + 3x_2, x_2^2\right)^T \quad (n=3)$; 7) $\varphi(\mathbf{x}) = (0, \ldots, 0, 1)^T$; 8) $\varphi(\mathbf{x}) = (\sin x_1, \cos x_2, x_3)^T \quad (n=3)$; 9) $\varphi(\mathbf{x}) = (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1)^T$ 10) $\varphi(\mathbf{x}) = (2x_1, 2\left|x_2\right|, 2x_3)^T \quad (n=3)$.

Б-23.2

Доказать линейность преобразования φ пространства $\mathcal{L}$, выяснить, является ли φ инъективным, сюръективным или биективным, указать его матрицу в произвольном базисе пространства $\mathcal{L}$, если φ есть:

1)нулевое отображение;

2)тождественное преобразование;

3)гомотетия.

Б-23.3

Пусть φ - линейное отображение пространства $\mathcal{L}$ в $\tilde{\mathcal{L}}$. Доказать, что:

1)$\varphi(0) = 0$;

2)ядро φ есть линейное подпространство в $\tilde{\mathcal{L}}$;

3)образ $\varphi(\mathcal{M})$ линейного подпространства $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}$ есть подпространство в $\widetilde{\mathcal{L}}$, причем $\dim \varphi(\mathcal{M}) \leqslant \dim \mathcal{M}$;

4)φ инъективно тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$; 5) $\dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi = \dim \mathcal{L}$.

Б-23.4

Пусть $\mathcal{M}$ - подпространство линейного пространства $\mathcal{L}$. Доказать, что естественное вложение $\mathcal{M} \to \mathcal{L}$ - инъективное линейное отображение. Может ли оно быть изоморфизмом?

Б-23.5

Пусть $\mathcal{M}$ - подпространство линейного пространства $\mathcal{L}$. Отображение $\varphi : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ определено правилами: $\varphi(x) = x$ при $x \in \mathcal{M}, \varphi(x) = 0$ при $x \notin \mathcal{M}$. Линейно ли отображение φ?

Б-23.6

Пусть $\mathbf{x}$ - произвольный вектор, a, $\mathbf{n}$ - фиксированные ненулевые векторы геометрического векторного пространства (двумерного или трехмерного). Проверить линейность преобразования φ, заданного следующей формулой, и выяснить его геометрический смысл, если:
1)$\varphi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{a})\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}$
2)$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{x},\mathbf{n})}{(\mathbf{a},\mathbf{n})}\mathbf{a} \quad ((\mathbf{a}, \mathbf{n}) \neq 0)$
3)$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - (\mathbf{x}, \mathbf{n})\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}$;
4)$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{(\mathbf{x},\mathbf{n})}{(\mathbf{a},\mathbf{n})}\mathbf{a} \quad ((\mathbf{a}, \mathbf{n}) \neq 0)$; 5) $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2(\mathbf{x}, \mathbf{n})\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}$ 6) $\varphi(\mathbf{x}) = 2(\mathbf{a}, \mathbf{x})\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} - \mathbf{x}$.

Б-23.7

Проверить линейность и выяснить геометрический смысл преобразования φ трехмерного геометрического векторного пространства, заданного формулой (a, $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ - фиксированные векторы):
1)$\varphi(\mathbf{x}) = [\mathbf{x}, \mathbf{a}] \quad (|\mathbf{a}| = 1)$;
2)$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad ([\mathbf{u}, \mathbf{v}] \neq 0)$.

Б-23.8

Пусть a и $\mathbf{n}$ - ненулевые векторы трехмерного геометрического векторного пространства, причем $(\mathbf{a}, \mathbf{n}) \neq 0, \mathcal{L}_1-$
прямая с направляющим вектором a, a $\mathcal{L}_2$ - плоскость с нормальным вектором n. Записать формулой преобразование φ, проверить его линейность, найти ядро, множество значений и ранг, если φ есть:
1)ортогональное проектирование на $\mathcal{L}_2$;
2)ортогональное проектирование на $\mathcal{L}_1$;
3)проектирование на $\mathcal{L}_2$ параллельно вектору a;
4)проектирование на $\mathcal{L}_1$ параллельно $\mathcal{L}_2$; 5) ортогональное отражение относительно $\mathcal{L}_2$; 6) ортогональное отражение относительно $\mathcal{L}_1$; 7) отражение в $\mathcal{L}_2$ параллельно вектору a; 8) отражение в $\mathcal{L}_1$ параллельно $\mathcal{L}_2$.

В задачах 23.9-23.14 линейные подпространства трехмерного геометрического векторного пространства $\mathcal{E}_3$ заданы своими уравнениями в некотором ортонормированном базисе.

Б-23.9

Вычислить матрицу ортогонального проектирования пространства $\mathcal{E}_3$ на подпространство $\mathcal{L}$, если $\mathcal{L}$ есть:
1)прямая $x = z = 0$;
2)прямая $x = y = z$;
3)плоскость $x + y + z = 0$;
4)плоскость, натянутая на векторы $\mathbf{a}(-1, 1, -1)$ и $\mathbf{b}(1, -3, 2)$.

Б-23.10

Вычислить матрицу проектирования пространства
$\mathcal{E}_3$ на подптространство $\mathcal{L}$ параллельно подптостранству $\mathcal{M}$, если:
1)$\mathcal{L}$ определено уравнением $x = 0, \mathcal{M}$ - уравнениями $2x = 2y = -z$;
2)$\mathcal{L}$ имеет уравнение $x = y, \mathcal{M}$ определяется системой уравнений $x + y + z = 0, 2x + y + 4z = 0$;
3)$\mathcal{L}$ определено уравнениями $-20x = 15y = 12z, \mathcal{M}$ - уравнением $2x + 3y - z = 0$;
4)$\mathcal{L}$ определено системой уравнений $x - y + z = 0, 2x - 3y + 4z = 0, \mathcal{M}$ - уравнением $2x + 3y - 4z = 0$.

Б-23.11

Преобразования пространства $\mathcal{E}_3$ из задач 23.9 и 23.10 рассматриваются как линейные отображения пространства $\mathcal{E}_3$ на подпространство $\mathcal{L}$. Вычислить матрицу каждого из этих отображений в какой-либо паре базисов.

Б-23.12

Найти матригу линейного преобразования φ, если φ - ортогональное отражение пространства $\mathcal{E}_3$:
1)относительно плоскости $x = 0$;
2)относительно прямой $x = 2y = z$;
3)относительно линейной оболочки векторов a$(1, 0, -1)$ и $\mathbf{b}(1, 1, -2)$.

Б-23.13

Найти матрицу отражения пространства $\mathcal{E}_3$:
1)в плоскости $x = 0$ параллельно прямой $2x = y = -z$;
2)в прямой $x = z, \quad x - y + z = 0$ параллельно плоскости $x + y = 0$.

Б-23.14

В трехмерном геометрическом векторном пространстве $\mathcal{E}_3$ задан ортонормированный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Вычислить матрицу поворота пространства:
1)на угол α вокруг вектора $\mathbf{e}_3$;
2)на угол $\pi/2$ вокруг вектора $\mathbf{e}_1$;
3)на угол $2\pi/3$ вокруг прямой, имеющей уравнения $x = y = z$.

Б-23.15

Пусть линейное пространство $\mathcal{L}$ является прямой суммой ненулевых подпространств $\mathcal{L}', \mathcal{L}''$.
1)Доказать, что преобразование φ проектирования $\mathcal{L}$ на $\mathcal{L}'$ параллельно $\mathcal{L}''$ линейно. Найти ядро и множество значений φ. Записать матрицу преобразования φ в базисе, составленном из базисов подпространств $\mathcal{L}'$ и $\mathcal{L}''$.
2)Решить задачу, рассматривая φ как отображение пространства $\mathcal{L}$ на $\mathcal{L}'$.

Б-23.16

Пусть линейное пространство $\mathcal{L}$ является прямой суммой ненулевых подпространств $\mathcal{L}', \mathcal{L}''$. Доказать, что отражение φ пространства $\mathcal{L}$ в $\mathcal{L}'$ параллельно $\mathcal{L}''$ есть линейное преобразование пространства $\mathcal{L}$. Найти его ядро и множество значений. Показать, что φ является изоморфизмом. Записать матрицу φ в базисе, составленном из базисов подпространств $\mathcal{L}', \mathcal{L}''$

Б-23.17

Пусть $\varphi : \mathcal{L} \to \tilde{\mathcal{L}}$ - линейное отображение, $\mathcal{M} = \varphi(\mathcal{L})$. Рассмотрим φ как линейное отображение $\tilde{\varphi} : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$. Доказать, что:
1)ядра отображений φ и $\widetilde{\varphi}$ совпадают так же, как их ранги;
2)$\tilde{\varphi}$ сюръективно;
3)φ инъективно тогда и только тогда, когда $\tilde{\varphi}$ инъективно.
4)если $\dim \mathcal{L} = \dim \tilde{\mathcal{L}}$, то φ тогда и только тогда является изоморфизмом, когда изоморфизмом является $\tilde{\varphi}$. Выяснить связь между матрицами отображений φ и $\tilde{\varphi}$ (выбрать согласованные базисы в $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$).

Б-23.18

Доказать, что ранг матрицы линейного отображения не зависит от выбора пары базисов в линейных пространcтвах.

Б-23.19

Доказать, что:
1)ранг матрицы линейного сюръективного отображения равен числу ее строк;
2)ранг матрицы линейного инъективного отображения равен числу ее столбцов.

Б-23.20

Пусть $\varphi : \mathcal{L} \to \widetilde{\mathcal{L}}$ - линейное отображение, $\dim \mathcal{L} = n, \dim \tilde{\mathcal{L}} = m, A$ - матрица φ в некоторой паре базисов, $\operatorname{rg} A = r$. Доказать, что:
1)$\operatorname{rg} \varphi = r$
2)$\dim \operatorname{Ker} \varphi = n - r$.

Б-23.21

Доказать, что:
1)отображение, обратное к изоморфизму, существует и также является изоморфизмом;
2)линейное отображение, не являющееся изоморфизмом, не имеет обратного.

Б-23.22

1)Чему равен ранг и каково ядро линейного отображения $\varphi : \mathcal{L} \to \widetilde{\mathcal{L}}$, являющегося изоморфизмом?
2)Как связаны матрицы A, B линейного отображения и обратного к нему?

Б-23.23.

Пусть $\varphi : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ - линейное отображение, и $\dim \mathcal{L} = \dim \widetilde{\mathcal{L}}$. Доказать равносильность утверждений:
1)φ изоморфизм;
2)φ инъективно;
3)φ сюрьективно. Показать, что при $\dim \mathcal{L} \neq \dim \widetilde{\mathcal{L}}$ из 2) или 3) не следует 1).

Б-23.24

Пусть $\varphi : \mathcal{L} \to \tilde{\mathcal{L}}$ - линейное отображение, и $\dim \mathcal{L} = \dim \tilde{\mathcal{L}}$. Доказать утверждения:

1)Для того чтобы уравнение $\varphi(x) = y(x \in \mathcal{L})$ было разрешимо при любом $y \in \widetilde{\mathcal{L}}$ необходимо и достаточно, чтобы однородное уравнение $\varphi(x) =$ имело только нулевое решение.

2)Если уравнение $\varphi(x) = y$ разрешимо при всех $y \in \tilde{\mathcal{L}}$, то оно имеет для каждого y единственное решение.

3)Пусть уравнение $\varphi(x) = y$ разрсшимо не при всех $y \in \widetilde{\mathcal{L}}$, но при некотором y разрешимо. Тогда его решение не единственно.

Б-23.25

Доказать, что любое n-мерное линейное пространство изоморфно n-мерному арифметическому пространству над тем же полем и, следовательно, все линейные пространства одинаковой размерности (над одним и тем же полем) изоморфны.

Б-23.26

Линейное преобразование трехмерного арифметического пространства задано в стандартном базисе матрицей A. Найти образы векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ и объяснить геометрический смысл преобразования (кроме 3)):
1)$A = A_{261}, \mathbf{a}_1 = (1, 0, -1)^T$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 0)^T, \mathbf{a}_3 = (3, 3, 3)^T$;
2)$A = A_{221}, \mathbf{a}_1 = (1, 1, 2)^T, \mathbf{a}_2 = (1, 2, 3)^T, \mathbf{a}_3 = (1, 2, 4)^T$;
5) $A = A_{263}, \mathbf{a}_1 = (1, 1, -1)^T, \quad \mathbf{a}_2 = (1 + i, 1, -i)^T$, $\mathbf{a}_3 = (1 - i, 1, i)^T$. $\mathbf{a}_3 = (1 - i, 1, i)^T$.

Б-23.27

Линейное отображение n-мерного арифметического пространства в m-мерное задано матрицей A. Числа m и n определяются размерами матрицы. Вычислить образы указанныгх векторов:
1)$A = A_{507}, \quad \mathbf{a} = (4, -1, -1, 3)^T$;
2)$A = A_{455}, \quad \mathbf{a} = (-1, 1, 1, -1)^T$;
3)$A = A_{522}, \quad \mathbf{a} = (-2, 1, 3, -1)^T$;
4)$m = n, \quad A = A_{507}, \mathbf{a}_1 = (1, 1, \dots, 1)^T, \mathbf{a}_2 = (1, -1, 0, \dots \dots, 0)^T, \dots, a_n = (1, 0, \dots, 0, -1)^T$.

Б-23.28

Линейное преобразование n-мерного линейного пространства $\mathcal{L}$ задано матрицей A в базисе e. Число n определяется порядком матрицы. Найти ядро и множество значений преобразования. Выяснить, является ли оно изоморфизмом, если:
1)$A = A_{30}$
2)$A = A_{236}$
3)$A = A_{264}$
4)$A = A_{465}$; 5) $A = A_{466}$; 6) $A = A_{547}$.

Б-23.29

Линейное отображение n-мерного линейного пространства в m-мерное задано матрицей A в базисах e и f. Числа m и n определяются размерами матрицы. Найти ядро и множество значений отображения. Выяснить, является ли оно сюръективным, инъективным, если:
1)$A = A_{516}$
2)$A = A_{405}$
3)$A = A_{406}$;
4)$A = A_{576}$; 5) $A = A_{420}$ 6) $A = A_{585}$.

Б-23.30

Линейное отображение n-мерного арифметического пространства в m-мерное задано в стандартных базисах этих пространств матрицей A. Числа m и n определяются размерами матрицы. Вычислить полный прообраз вектора a, если:
1)$A = A_{513}$, $\quad$ a $= (-1, 0, 1)^T$;
2)$A = A_{581}$, $\quad \mathbf{a} = (1, 2, 1)^T$;
3)$A = A_{421}$, $\quad \mathbf{a} = (4, 2, 9, -20, -3)^T$;

Б-23.31

Линейное отображение n-мерного арифметического пространства в m-мерное задано в стандартных базисах этих пространств матрицей A. Числа m и n определяются размерами матрицы. Найти полный прообраз подпространства $\mathcal{M} \subset \nabla_m$, если:
1)$A = A_{576}$, $\quad \mathcal{M}$ натянуто на вектор $(3, -1)^T$;
2)$A = A_{517}, \mathcal{M}$ задано системой уравнений $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 - x_3 = 0$
3)$A = A_{592}, \mathcal{M}$ задано системой уравнений $2x_1 - x_3 = 0$, $2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$; $\quad -x_2 + 2x_4 - x_6 = 0$, $\quad x_5 = 0$.

Б-23.32

Доказать, что пространство $\nabla_{m\times n}$ вещественных матриц размеров $m \times n$ (задача 20.5) изоморфно арифметическому пространству ∇_{mn}.

Б-23.33

Пусть a $= (a_0, a_1, \ldots, a_n)^T$. Показать, что отображение $f(\mathbf{a}) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ устанавливает изоморфизм $(n + 1)$-мерного арифметического пространства и линейного пространства многочленов степени, не превосходящей n.

Б-23.34

Отображение двумерного вещественного арифметического пространства в линейное пространство вещественных квадратных матриц второго порядка задано формулой $\varphi\left(\begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix}\right) = \begin{Vmatrix} x & -y \\ y & x \end{Vmatrix}$. Доказать линейность и инъективность отображения φ. Вычислить его матрицу в стандартных базисах пространств.

Б-23.35

Отображжсние трехмерного вещественного арифметического пространства в пространство матриц второго порядка сопоставляет вектору $(x_1, x_2, x_3)^T$ матрицу $\begin{Vmatrix} x_2 & x_3 \\ -x_3 & x_1 \end{Vmatrix}$. Доказать линейность и инъективность отображения. Вычислить его матрицу в стандартных базисах пространств.

Б-23.36

Пусть $\mathcal{M}_{2\times 2}$ - множество комплексных матриц второго порядка, рассматриваемое как вещественное линейное пространство со стандартным базисом $E_{11}, iE_{11}, E_{21}, iE_{21}, E_{12}$, iE_{12}, E_{22}, iE_{22} (см. задачу 22.12). Отображение $\varphi : \nabla_3 \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ сопоставляет вектору $(x_1, x_2, x_3)^T$ матрицу $\begin{Vmatrix} x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & -x_3 \end{Vmatrix}$. Доказать, что отображение φ линейно и инъективно. Найти его матрицу в стандартных базисах пространств.

Б-23.37

Отображение $\varphi : \nabla_4 \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ (см. задачу 23.36) задано формулой $\varphi(x) = \begin{Vmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{Vmatrix}$, где $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, $a = x_1 + ix_2$, $\bar{a} = x_1 - ix_2$, $b = x_3 + ix_4$. Доказать, что φ линейно и инъективно, найти его матрицу в стандартных базисах пространств.

Б-23.38

Доказать, что данное множество квадратных матриц является вещественным линейным пространством, изоморфным арифметическому пространству ∇_3:
1)множество всех веществснных матриц второго порядка с нулевым следом;
2)множество всех вещественных кососимметрических матриц третьего порядка;

3)множество всех комплексных матриц вида $\left\| \begin{array}{cc} ix_3 & x_1+ix_2 \\ -x_1+ix_2 & -ix_3 \end{array} \right\|$, где x_1, x_2, x_3 - вещественные числа.

Б-23.39

Пусть $D = \frac{d}{dt}$ - операция дифференцирования, сопоставляющая функции $f(t)$ ее производную $f'(t)$. Показать, что D является линейным преобразованием линейного пространства функций, бесконечно дифференцируемьгх на интервале (a, b).

Б-23.40

Пусть $\mathcal{P}^{(m)}$ - линейное пространство вещественных многочленов степени не выше m.

1)Проверить, что дифференцирование (определенное в задаче 23.39) есть линейное преобразование $D : \mathcal{P}^{(m)} \to \mathcal{P}^{(m)}$, найти его ядро и множество значений. Вычислить матрицу преобразования D: а) в стандартном базисе $1, t, \dots, t^m$; б) в базисе $1, t-t_0, \dots, (t-t_0)^m$; в) в базисе $1, \frac{t}{1!}, \dots, \frac{t^m}{m!}$.

2)Найти матрицу дифференцирования как линейного отображения $D : \mathcal{P}^{(m)} \to \mathcal{P}^{(m-1)}$ базисах $1, t, \dots, \frac{t^m}{m!}$ и $1, t, \dots \cdots, \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}$

Б-23.41

Показать, что дифференцирование (задача 23.39) определяет линейное отображение:

1)пространства четных многочленов степени не выше $2n$ в пространство $\mathcal{P}$ нечетных многочленов степени не выше $2n-1$;

2)пространства нечетных многочленов степени не выше

$2n+1$ в пространство $\mathcal{Q}$ четных многочленов степени не выме $2n$.

Найти ядро, множество значений и ранг отображения. Записать его матрицу A в стандартньг базисах пространств. ванное число, $p(t)$ - многочлен степени не выше n, образуют линейное пространство, а дифференцирование является его линейным преобразованием. Вычислить матрицу преобразования в базисе $\frac{t^k}{k!}e^{\lambda t} (k = 0, 1, \dots, n)$.

Б-23.43

1)Показать, что дифференцирование является линейным преобразованием пространства тригонометрических многочленов $f(t) = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \dots + a_n \cos nt + b_n \sin nt$ порядка не выше n (см. задачу 20.8.4). Найти матрицу преобразования D в стандартном базисе $1, \cos t, \sin t, \dots$.. $\cos nt, \sin nt$ этого пространства.

2)Доказать, что дифференцирование D устанавливает изоморфизм между линейными пространствами нечетных тричетных тригонометрических многочленов вида $a_1 \cos t + a_2 \cos 2t + \dots + a_n \cos nt$($n$ - фиксированное число). Вычислить матрицы отображения D и обратного отображения в базисах $\sin t, \dots, \sin nt$ и $\cos t, \dots, \cos nt$.

Б-23.44 интегрирование как линейное отображение

Пусть $f(t)$ - непрерывная функция ($t \in \searrow$). Рассмотрим операцию интегрирования $I : f(t) \to \int\limits_0^t f(\xi) d\xi$.

1)Проверить, что интегрирование определяет линейное отображение $I : \mathcal{P}^{(n-1)} \to \mathcal{P}^{(n)} (n \geqslant 1)$, найти его ядро, множество значений и ранг. Записать матрицу отображения в стандартных базисах.

2)Интегрирование рассматривается как линейное преобразование пространства $\mathcal{P}$ всех вещественных многочленов. Найти его множество значений. Является ли это преобразование сюръективным, инъективным, изоморфизмом?

3)Пусть $\mathcal{M}$ - пространство многочленов с нулевым свободным членом, $I : \mathcal{P} \to \mathcal{M}$ - операция интегрирования и $D : \mathcal{M} \to \mathcal{P}$ - дифференцирование. Доказать, что эти линейные отображения взаимно обратны.

Б-23.45

Пусть $\mathcal{F}$ - линейное пространство функций $f(t)$, непрерывных на отрезке $[-1, 1], \tilde{\mathcal{F}}$ - линейное пространство непрерывно дифференцируемых на $[-1, 1]$ функций $f(t)$ таких, 'тто $f(0) = 0, \mathcal{G}$ и $\mathcal{H}$ - подпространства четных и нечетных функций в $\mathcal{F}$ соответственно.

1)Интегрирование I из задачи 23.44($-1 \leqslant t \leqslant 1$) рассматривается как линейное преобразование пространства $\mathcal{F}$. Является ли это преобразование инъективным, сюръективным? Обратимо ли оно?

2)Доказать, что интегрирование определяет изоморфизм $I : \mathcal{F} \to \tilde{\mathcal{F}}$. Найти для него обратное отображение.

3)Показать, что интегрирование определяет линейные отображения $I_1 : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ и $I_2 : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$. Ответить для этих отображений на вопросы п. 1).

Б-23.46

Пусть линейное преобразование пространства всех многочленов от t переводит каждый многочлен t^k в $t^{2k}(k=0,1,2,\ldots)$. Убедиться в том, что это преобразование инъективно, но не сюръективно. Найти множество его значений.

Б-23.47

Пусть $\nabla_{m\times n}$ - линейное пространство матриц размеров $m\times n$.

1)Доказать, что умножение матриц размеров $m\times n$ слева на фиксированную матрицу A размеров $k\times m$ есть линейное отображение $\varphi:\nabla_{m\times n}\rightarrow\nabla_{k\times n}$. Вычислить матрицу отображения φ в стандартных базисах, если $n=2, A=A_{27}$. Найти ядро и множество значений этого отображения.

2)Доказать, что умножение матриц размеров $m\times n$ справа на фиксированную матрицу B размеров $n\times k$ есть линейное отображение $\varphi:\nabla_{m\times n}\rightarrow\nabla_{m\times k}$. Вычислить матрицу отображения φ в стандартньхх базисах, если $m=2, B=A_{126}$. Найти ядро и множество значений отображения φ.

Б-23.48

Пусть $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_n$ - столбцы матрицы $X=\|\mathbf{x}_1\ldots\mathbf{x}_n\|$ размеров $m\times n$, и $Y=\|\mathbf{x}_1\ldots\mathbf{x}_{n-1}\|$. Отображение $\varphi:\nabla_{m\times n}\rightarrow\nabla_{m\times(n-1)}$ определим равенством $\varphi(X)=Y$.

1)Доказать, что отображение φ линейно, найти его ядро и множество значений.

2)Вычислить матрицу отображения φ в стандартных базисах пространств.

3)Показать, что φ является одним из отображений, определенных в задаче 23.47, для подходящей матрицы B.

Б-23.49

Пусть $M_1,\ldots,M_n$ - фиксированные матрицы порядка $m, \mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)^T$. Отображение $\varphi:\nabla_n\rightarrow\nabla_{m\times m}$ определим формулой $\varphi(\mathbf{x})=x_1M_1+\ldots+x_nM_n$. Доказать линейность отображения φ. Найти ядро, множество значений, ранг и вычислить матрицу A отображения φ в стандартных базисах, если $n=4, \quad M_1=A_{12}, \quad M_2=A_{13}, \quad M_3=A_{16}, \quad M_4=A_{20}$.

Б-23.50

В линейном пространстве вещественных многочленов $p(x,y)$ от двух переменных x,y преобразование φ определено формулой $\varphi(p(x,y))=p(x+a,y+b)(a,b$ - фиксированные числа). Показать, что φ определяет линейное преобразование пространства многочленов не выше второй степени, и вычислить его матрицу в базисе $1,x,y,x^2,xy,y^2$.

Б-23.51

Показать, что однородные многочлены степени n вида $p(x,y)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kx^{n-k}y^k$ образуют линейное подпространство $\mathcal{H}^{(n)}$ пространства всех многочленов от двух переменных. Преобразование φ определено одной из следующих формул:

1)$\varphi(p)=x\frac{\partial p}{\partial y}$;

2)$\varphi(p)=y\frac{\partial p}{\partial x}$

3)$\varphi(p)=x\frac{\partial p}{\partial x}-y\frac{\partial p}{\partial y}$. Доказать, что φ - линейное преобразование пространства $\mathcal{H}^{(n)}$, и вычислить его матрицу в базисе $x^n,x^{n-1}y,\ldots,xy^{n-1},y^n$. Найти ядро и множество значений преобразования φ.

6.4.2 Problems About Matrices of Linear Maps in Different Bases

Б-23.52

Пусть $e_1,\ldots,e_n$ - базис в линейном пространстве $\mathcal{L}$, а $f_1,\ldots,f_n$ - произвольные векторы из линейного пространства $\tilde{\mathcal{L}}$. Доказать, что существует единственное линейное отображение $\varphi:\mathcal{L}\rightarrow\widetilde{\mathcal{L}}$ такое, что $\varphi(e_i)=f_i(i=1,\ldots,n)$.

Б-23.53

1)Пусть $a_1,\ldots,a_k$ - линейно независимые векторы линейного пространства $\mathcal{L}$, а $b_1,\ldots,b_k$ - некоторые векторы пространства $\tilde{\mathcal{L}}$. Доказать, что существует линейное отображение $\varphi:\mathcal{L}\rightarrow\widetilde{\mathcal{L}}$ такое, что $\varphi(a_i)=b_i(i=1,\ldots,k)$. В каком случае отображение φ единственно?

2)Пусть $a_1, \ldots, a_k$ - векторы из $\mathcal{L}$, а $b_1, \ldots, b_k$ - векторы из $\tilde{\mathcal{L}}$. Сформулировать необходимые и достаточные условия, при которых: а) существует линейное отображение $\varphi : \mathcal{L} \to \tilde{\mathcal{L}}$ такое, что $\varphi(a_i) = b_i (i = 1, \ldots, k)$; б) это отображение единственно.

Б-23.54

Пусть A - невырожденная матрица порядка n, B - матрица размеров $m \times n$. Доказать, что существует единственное линейное отображение n-мерного арифметического пространства в m-мерное, при котором образами столбцов матрицы A являются соответствующие столбцы матрицы B. Найти матрицу этого отображения:

1)в стандартных базисах пространств;

2)в базисе пространства ∇_n из столбцов матрицы A и стандартном базисе пространства ∇_m;

3)в базисе пространства ∇_n из столбцов матрицы A и ба- и вычислить его матрицу в базисе $x^n, x^{n-1}y, \ldots, xy^{n-1}, y^n$. Найти ядро и множество значений преобразования φ.

Б-23.52

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ - базис в линейном пространстве $\mathcal{L}$, а $f_1, \ldots, f_n$ - произвольные векторы из линейного пространства $\tilde{\mathcal{L}}$. Доказать, что существует единственное линейное отображение $\varphi : \mathcal{L} \to \widetilde{\mathcal{L}}$ такое, что $\varphi(e_i) = f_i (i = 1, \ldots, n)$.

Б-23.53

1)Пусть $a_1, \ldots, a_k$ - линейно независимые векторы линейного пространства $\mathcal{L}$, а $b_1, \ldots, b_k$ - некоторые векторы пространства $\tilde{\mathcal{L}}$. Доказать, что существует линейное отображение $\varphi : \mathcal{L} \to \widetilde{\mathcal{L}}$ такое, что $\varphi(a_i) = b_i (i = 1, \ldots, k)$. В каком случае отображение φ единственно?

2)Пусть $a_1, \ldots, a_k$ - векторы из $\mathcal{L}$, а $b_1, \ldots, b_k$ - векторы из $\tilde{\mathcal{L}}$. Сформулировать необходимые и достаточные условия, при которых: а) существует линейное отображение $\varphi : \mathcal{L} \to \tilde{\mathcal{L}}$ такое, что $\varphi(a_i) = b_i (i = 1, \ldots, k)$; б) это отображение единственно.

Б-23.54

Пусть A - невырожденная матрица порядка n, B - матрица размеров $m \times n$. Доказать, что существует единственное линейное отображение n-мерного арифметического пространства в m-мерное, при котором образами столбцов матрицы A являются соответствующие столбцы матрицы B. Найти матрицу этого отображения:

1)в стандартных базисах пространств;

2)в базисе пространства ∇_n из столбцов матрицы A и стандартном базисе пространства ∇_m;

3)в базисе пространства ∇_n из столбцов матрицы A и базисе пространства ∇_m из столбщов матрицы B (при условии, что $m = n$ и B невырожліена).

Б-23.55

Пусть A и B - невырожденные матрицы порядка n. Доказать, что существует единственное линейное преобразование n-мерного арифметического пространства, переводящее столбцы матрицы A в соответствующие столбцы матрицы B. Найти матрицу этого преобразования:

1)в стандартном базисе;

2)в базисе из столбцов матрицы A;

3)в базисе из столбцов матрицы B.

Б-23.56

Линейное преобразование φ двумерного арифметического пространства переводит вектор $\mathbf{a}_i$ в вектор $\mathbf{b}_i (i = 1, 2)$. Вычислить матрицу преобразования φ в стандартном базисе, если:

1)$\mathbf{a}_1 = (1, -1)^T, \mathbf{a}_2 = (-1, 2)^T, \mathbf{b}_1 = (2, 0)^T, \mathbf{b}_2 = (-3, 1)^T$;

2)$\mathbf{a}_1 = (4, -3)^T, \mathbf{a}_2 = (2, 1)^T, \mathbf{b}_1 = (-2, -2)^T, \mathbf{b}_2 = (4, 4)^T$;

3)$\mathbf{a}_1 = (-5, 3)^T, \mathbf{a}_2 = (-3, 1)^T, \mathbf{b}_1 = (4, 15)^T, \mathbf{b}_2 = (0, 1)^T$;

4)$\mathbf{a}_1 = (1, 1)^T, \quad \mathbf{a}_2 = (1, 3)^T, \quad \mathbf{b}_1 = (0, \sqrt{2})^T, \mathbf{b}_2 = (-\sqrt{2}, 2\sqrt{2})^T$.

Б-23.57

Матрицы A, B составлены из координатных столбцов векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 в некотором базисе $\mathbf{e}$ трехмерного линейного пространства $\mathcal{L}$. Для приведенных ниже случаев проверить, что существует единственное линейное преобразование φ пространства $\mathcal{L}$, переводящее векторы a_i в b_i $(i = 1, 2, 3)$. Вычислить матрицу преобразования φ : а) в базисе e; б) в базисе a_1, a_2, a_3, если:

1)$A = A_{265}, B = A_{266}$;

2)$A = A_{268}, B = A_{269}$;
3)$A = A_{270}, B = A_{271}$;
4)$A = A_{229}, B = A_{272}$.

Б-23.58

Показать, что существует и единственно линейное отображение $\varphi : \nabla_n \to \nabla_m$, переводящее столбцы данной матрицы A в соответствующие столбцы матрицы B. Найти мат-рицы A, и стандартном базисе пространства ∇_m. а) $n = 2, m = 3, A = A_{33}, B = A_{140}$; б) $n = 3, m = 2, A = A_{276}, B = A_{394}$; в) $n = 2, m = 5, A = A_{34}, B = A_{171}$; г) $n = 4, m = 2, A = A_{467}, B = A_{505}$; д) $n = 3, m = 4, A = A_{227}, B = A_{407}$; е) $n = 4, m = 3, A = A_{484}, B = A_{518}$.

Б-23.59

Выяснить, существует ли линейное преобразование φ, переводящее столбцы матрицы A в соответствующие столбцы матрицы B. В случае существования вычислить матрицу φ в стандартном базисе:
1)$A = A_5, B = A_{35}$
2)$A = A_5, B = A_{12}$
3)$A = A_{277}, B = A_{278}$
4)$A = A_{213}, B = A_{279}$.

Б-23.60

При линейном отображении $\varphi : \nabla_n \to \nabla_m$ столбцы матрицы A переходят в соответствующие столбцы матрицы B. Выяснить, является ли отображение φ инъективным, сюръективным, найти размерность ядра и ранг отображения φ. Вычислить образ вектора а, если:
1)$A = A_{123}, \quad B = A_{24}, \quad \mathbf{a} = (1, 7, 3)^T$;
2)$A = A_{392}, \quad B = A_{230}, \quad \mathbf{a} = (3, 1)^T$;
3)$A = A_{422}, \quad B = A_{201}, \quad \mathbf{a} = (4, -4, -3, 12, 2)^T$;
4)$A = A_{241}, \quad B = A_{420}, \quad \mathrm{a} = (16, 5, -6)^T$.

Б-23.61

Показать, что существует единственное линейное преобразование комплексного арифметического простран- ства $\rfloor_n$, переводящее столбцы данной матрицы A в соответствующие столбцы матрицы B. Вычислить матрицу этого преобразования в стандартном базисе, если:
1)$n = 2, A = A_{92}, B = A_{93}$;
2)$n = 2, A = A_{94}, B = A_{95}$;
3)$n = 2, A = A_{96}, B = A_{97}$;
4)$n = 3, A = A_{373}, B = A_{374}$.

Б-23.62

Линейное преобразование φ имеет в данном базисе матрицу A, а координатные столбцы новых базисных векторов образуют матрицу S. Вычислить матрицу преобразования в новом базисе, если:
1)$A = A_{36}, S = A_{33}$
2)$A = A_{37}, S = A_{16}$;
3)$A = A_{38}, S = A_{39}$
4)$A = A_{40}, S = A_{104}$ 5) $A = A_{280}, S = A_{203}$; 6) $A = A_{281}, S = A_{282}$. 7) $A = A_{283}, S = A_{284}$; 8) $A = A_{285}, S = A_{265}$; 9) $A = A_{469}, S = A_{470}$; 10) $A = A_{471}, S = A_{439}$.

Б-23.63

Линейное преобразование комплексного арифметического пространства имеет в стандартном базисе матрицу A. Новый базис задан матрицей перехода S. Вычислить матрицу преобразования в новом базисе:
1)$A = A_{87}, S = A_{94}$
2)$A = A_{79}, S = A_{80} \quad \left(\varepsilon = e^{2\pi i/3}\right)$;
3)$A = A_{263}, S = A_{375}$;
4)$A = A_{259}, S = A_{363} \quad \left(\omega = e^{2\pi i/3}\right)$; 5) $A = A_{472}, S = A_{473}$; 6) $A = A_{474}, S = A_{475}$.

Б-23.64

Линейное отображение n-мерного арифметического пространства в m-мерное задано в стандартных базисах матрицей A, столбцы новых базисных векторов $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ и $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_m)$ составляют соответственно матрицы S и T. Вычислить матрицу отображения в базисах $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$:
1)$n = 3, \quad m = 2, \quad A = A_{392}, \quad S = A_{286}, \quad T = A_{42}$;
2)$n = 4, \quad m = 2, \quad A = A_{502}, \quad S = A_{476}, \quad T = A_{10}$;
3)$n = 2, \quad m = 3, \quad A = A_{117}, \quad S = A_9, \quad T = A_{227}$;
4)$n = 3, \quad m = 4, \quad A = A_{403}, \quad S = A_{285}, \quad T = A_{495}$.

Б-23.65

Вычислить матрицу линейного преобразования φ множества векторов плоскости с заданным на ней базисом, если φ есть:
1)отражение плоскости в прямой $x + 2y = 0$ параллельно прямой $x + 3y = 0$;
2)проектирование плоскости на прямую $x + y = 0$ параллельно прямой $4x + 5y = 0$;
3)сжатие с коэффициентом $\lambda = 2$ к прямой $3x - 2y = 0$ параллельно прямой $x - y = 0$.

Б-23.66

Вычислить матрицу линейного преобразования φ трехмерного геометрического векторного пространства (в котором задан ортонормированный базис), пользуясь надлежащей заменой базиса, если φ есть:
1)проектирование на плоскость $3x - y = 0$ параллельно прямой $x + z = 0, x + y + 2z = 0$;
2)отражение пространства в прямой $x = y = -2z$ параллельно плоскости $x + y + 3z = 0$;
3)сжатие с коэффициентом $\lambda = 2$ к плоскости $x - 2z = 0$ параллельно прямой $x = y = z$;
4)поворот вокруг прямой $x = y = -z$ на угол $\pi/2$; 5) поворот вокруг прямой $x + y = 0, y - z = 0$ на такой угол, что первая из данных плоскостей переходит во вторую.

Б-23.67

Пусть D - дифференцирование в пространстве многочленов степени не выше m. Вычислить матрицу преобразования D, если базис состоит из многочленов:
1)$1 + t, t + 2t^2, 3t^2 - 1 \quad (m = 2)$
2)$t^3 + 1, 1 - t, 1 - t + t^2, 1 - t + t^2 - t^3 \quad (m = 3)$
3)$1, 1 + t, 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!}, \ldots, 1 + \frac{t}{1!} + \ldots + \frac{t^m}{m!} \quad (m \geqslant 1)$; §

Б-23.

Основные свойства линейных отображений 207
4)$1, 1 + t, 1 + t + t^2, \ldots, 1 + t + \ldots + t^m \quad (m \geqslant 1)$ 5) $1, t - 1, t^2 - t, \ldots, t^m - t^{m-1} \quad (m \geqslant 1)$.

Б-23.68

Вычислить матрицу преобразования дифференцирования в пространстве тригонометрических многочленов порядка не выше n (см. задачу

Б-23.43

), если базис состоит из функкгций:
1)$1, \cos t - \sin t, \cos t + \sin t, \ldots, \cos nt - \sin nt, \cos nt + \sin nt (n \geqslant 1)$
2)$1, 1 + \cos t, \ldots, 1 + \cos t + \ldots + \cos nt, \sin t, \ldots, \sin t + \ldots \ldots + \sin nt$
3)$2\cos^2 t, \quad 2\sin^2 t, \quad \sin t + \cos t, \quad \sin t - \cos t, \quad (\sin t + \cos t)^2$ $(n = 2)$.

Б-23.69

Как изменится матрица линейного отображения, заданная в паре базисов $e_1, \ldots, e_n; f_1, \ldots, f_m$, если:
1)поменять местами векторы e_i и e_j;
2)поменять местами векторы f_k и f_l;
3)вектор e_i умножить на число $\lambda \neq 0$, а f_k умножить на $\mu \neq 0$
4)вектор e_i заменить на $e_i + e_j$, а вектор f_k - на $f_k - f_l$ $(i \neq j, k \neq l)$?

Б-23.70

Как изменится матрица линейного преобразования, заданная в базисе $e_1, \ldots, e_n$, если:
1)поменять местами векторы e_i и e_j;
2)вектор e_i умножить на число $\lambda \neq 0$;
3)вектор e_i заменить на $e_i + e_j$;
4)перейти к базису $e_n, e_1, \ldots, e_{n-1}$; 5) перейти к базису $e_n, e_{n-1}, \ldots, e_1$?

Б-23.71

1)Пусть A и B - матрицы линейного отображения в двух парах базисов. Доказать, что B можно получить из A элементарными преобразованиями строк и столбцов.
2)Пусть A и B - матрицы линейного преобразования в двух базисах. Доказать, что B можно получить из A согласованными друг с другом элементарными преобразованиями строк и столбцов.

Б-23.72

Пусть $\varphi : \mathcal{L} \to \widetilde{\mathcal{L}}$ - линейное отображение. Доказать, что:
1)если базисный вектор линейного пространства $\mathcal{L}$ принадлежит ядру φ, то соответствующий столбец матрицы отображения нулевой;
2)если $e_1, \ldots, e_n$ - базис пространства $\mathcal{L}$, причем векторы $e_{r+1}, \ldots, e_n (r \leqslant n)$ образуют базис ядра φ, то векторы $\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_r)$ образуют базис в $\varphi(\mathcal{L})$.

Б-23.73

Доказать, что для всякого линейного отображения φ существует пара базисов, в которых матрица отображения имеет простейыпий вид $\left\| \begin{matrix} E & O \\ O & O \end{matrix} \right\|$. Чему равен порядок матрицы E?

Б-23.74

В стандартных базисах арифметических пространств ∇_n и ∇_m линейное отображение φ имеет матрицу A. Найти пару базисов, в которой матрица отображения φ имеет простейший вид (см. задачу 23.73):
1)$A = A_{12}$;
2)$A = A_{32}$;
3)$A = A_{253}$
4)$A = A_{288}$; 5) $A = A_{576}$ 6) $A = A_{420}$.

Б-23.75

Пусть A - матрица линейного преобразования в некотором базисе. Доказать, что матрица, полученная из A центральной симметрией, является матрицей того же преобразования в другом базисе.

Б-23.76

Доказать, что подобны матрицы:
1)A_{77} и обратная к ней;
2)A_{259} и A_{260}.

Б-23.77

Найти все матрицы, каждая из которых подобна только самой себе.

6.4.3 Problems About Linear Mapping and Transformation Operations

(23.78-23.104)

Б-23.78

Даны линейные отображения $\varphi : \nabla_n \to \nabla_m, \psi : \nabla_l \to \nabla_k$

1)Указать условия на m, n, k, l, необходимые и достаточные для существования произведений $\varphi\psi$ и $\psi\varphi$.

2)Пусть $\chi = \varphi\psi$. Показать, что χ - линейное отображение. Как связаны матрицы отображений φ, ψ, χ?

Б-23.80

Доказать, что всякое линейное отображение представимо в виде произведения сюръективного и инъективного линейных отображений.

Б-23.81

Пусть $\mathcal{L} = \mathcal{L}' \oplus \mathcal{L}''$, где $\mathcal{L}', \mathcal{L}''$ - ненулевые подпространства линейного пространства $\mathcal{L}$. Показать, что тождественное преобразование представляется в виде суммы $\iota = \pi_1 + \pi_2$, где $\pi_1\,(\pi_2)$ - проектирование пространства $\mathcal{L}$ на подпространство $\mathcal{L}'\,(\mathcal{L}'')$ параллельно подпространству $\mathcal{L}''\,(\mathcal{L}')$.

Б-23.82

Координатные столбды векторов $a_1, a_2, a_3; b_1, b_2,\ \ b_3; \mathrm{c}_1, c_2, c_3$ образуют соответственно матрицы $A_{289}, A_{229}, A_{285}$. Линейное преобразование φ переводит векторы a_1, a_2, a_3 в b_1, b_2, b_3, а линейное преобразование ψ переводит b_1, b_2, b_3 в c_1, c_2, c_3 соответственно. Найти матрицу преобразования $\psi\varphi$:

1)в исходном базисе;

2)в базисе a_1, a_2, a_3;

3)в базисе b_1, b_2, b_3.

Б-23.83

Пусть φ, ψ - линейные преобразования двумерного арифметического пространства, φ имеет матрицу A_{44} в стандартном базисе, а ψ - матрицу A_{107} в базисе из столбцов матрицы A_{45}. Вычислить матрицу преобразования:

1)$\varphi^2 - 6\varphi + 9\iota$;

2)$\psi^2 + 4\psi + 4\iota$

3)$\varphi^2 - \psi^2$ в стандартном базисе;

4)$4\varphi\psi^{-1}$ в базисе из столбцов матрицы A_{45}; 5) $(\varphi + \psi)^4$ в базисе, образованном столбцами $(1,2)^T$, $(0,-1)^T$.

Б-23.84

Пусть $\mathcal{P}^{(n)}$ - пространство многочленов степени не выше $n (n \geqslant 1)$ с вещественными коэффициентами. Отображения

$$\varphi : \mathcal{P}^{(n-1)} \to \mathcal{P}^{(n)}, \quad \psi : \mathcal{P}^{(n)} \to \mathcal{P}^{(n-1)}$$

определим формулами

$$\varphi\left(a_0 + a_1 t + \ldots + a_{n-1} t^{n-1}\right) = a_0 t + a_1 t^2 + \ldots + a_{n-1} t^n$$
$$\psi\left(a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n\right) = a_1 + \ldots + a_n t^{n-1}$$

Проверить линейность отображений и показать, что $\psi\varphi$ - тождественное преобразование, а $\varphi\psi$ - нет.

Б-23.85

Пусть $\mathcal{L}$ - линейное пространство функций с базисом $\mathbf{e}, D$ - дифференцирование. Найти матрицу преобразования $D^k (k = 1, 2, \ldots)$, если:

1)$\mathcal{L}$ - пространство многочленов степени не выше n, $\mathbf{e} = (1, t, \ldots, t^n/n!)$ 210 ГЛ. 9. Линейнье отображения и преобразования

2)$\mathcal{L}$ - пространство тригонометрических многочленов порядка не выше n (см. задачу 23.43), e $= (1, \cos t, \sin t, \ldots, \cos nt, \sin nt)$

Б-23.86

В пространстве всех многочленов от t рассматриваются линейные преобразования: τ - умножение на t и дифференцирование $D = \frac{d}{dt}$. Найти преобразование:
1)τD
2)$D\tau$
3)коммутатор $[D, \tau] = D\tau - \tau D$.
4)Доказать равенство $D^m\tau - \tau D^m = mD^{m-1} \quad (m = 1, 2, \ldots; \quad D^0 = \iota)$.

Б-23.87

Доказать, что коммутатор $[\varphi, \psi] = \varphi\psi - \psi\varphi$ двух линейных преобразований конечномерного линейного пространства не может быть тождественным преобразованием (ср. задачу 15.130).

Б-23.88

Доказать, что матрицы подобных линейных преобразований подобны.

Б-23.89

Доказать, что отношение подобия между линейными преобразованиями является отношением эквивалентности (т.е. $\varphi \sim \varphi$; из $\varphi \sim \psi$ следует $\psi \sim \varphi$; из $\varphi \sim \psi$ и $\psi \sim \chi$ следует $\varphi \sim \chi$).

Б-23.90

Пусть φ, ψ - линейньте преобразования линейного пространства $\mathcal{L}$. Доказать, что:
1)если ψ подобно φ, то для любого базиса е пространства $\mathcal{L}$ существует такой базис $\mathbf{e}'$, что матрица преобразования ψ в базисе $\mathbf{e}'$ совпадает с матрицей φ в базисе $\mathbf{e}$;
2)если для прсобразований φ и ψ в $\mathcal{L}$ существуют такие базисы е и е $'$, что матрица преобразования φ в базисе $\mathbf{e}$ совпадает с матрицей преобразования ψ в базисе $\mathbf{e}'$, то φ и ψ подобны.

Б-23.91

Пусть линейные преобразования φ и ψ подобны. Показать, что подобны также преобразования:
1)$p(\varphi) = a_0\iota + a_1\varphi + \ldots + a_n\varphi^n$ и $p(\psi)$, где $p(t) = a_0 + a_1t + \ldots + a_nt^n$ - произвольный многочлен;
2)φ^{-1} и ψ^{-1}, если φ и ψ обратимы.

Б-23.92

Пусть φ и ψ - линейные преобразования некоторого линейного пространства, хотя бы одно из которых невырождено.
1)Доказать, что преобразования $\varphi\psi$ и $\psi\varphi$ подобны.
2)Сформулировать и доказать матричный вариант этого утверждения.

Б-23.93

Доказать, что линейное отображение ранга r представимо в виде суммы r линейных отображений ранга 1, но не представимо в виде суммы меньшего числа таких отображений (ср. задачу 16.33).

Б-23.94

Пусть φ, ψ - линейные отображения пространства $\mathcal{L}$ в $\tilde{\mathcal{L}}$. Доказать, что $\operatorname{rg}(\varphi + \psi) \leqslant \operatorname{rg}\varphi + \operatorname{rg}\psi$ (ср. задачу $16.34, 6)$).

Б-23.95

Пусть $\varphi : \mathcal{L} \to \mathcal{M}, \psi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ - линейные отображения, $\dim \mathcal{M} = m$. Доказать:
1)$\operatorname{rg}\varphi + \operatorname{rg}\psi - m \leqslant \operatorname{rg}(\psi\varphi) \leqslant \min(\operatorname{rg}\varphi, \operatorname{rg}\psi)$ (неравснства Сильвестра);
2)$\dim \operatorname{Ker}(\psi\varphi) \geqslant \dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Ker}\psi$;
3)если $\psi\varphi = \theta$, то $\operatorname{rg}\varphi + \operatorname{rg}\psi \leqslant m$ (напомним, что через θ обозначено нулевое отображение).

Б-23.96

Пусть $\varphi : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ - линейное преобразование. Доказать, что для любого k, удовлетворяющего условию $\operatorname{rg}\varphi \leqslant k \leqslant \leqslant n = \dim \mathcal{L}$, существует линейное преобразование ψ такое, что $\psi\varphi = \theta$ и $\operatorname{rg}\varphi + \operatorname{rg}\psi = k$.

Б-23.97

Доказать, что для любых двух перестановочных линейных преобразований φ и ψ имеет место включенис $\operatorname{Ker} \varphi + \operatorname{Ker} \psi \subseteq \operatorname{Ker}(\varphi\psi)$.

Б-23.98

Пусть φ - линейное преобразование n-мерного линейного пространства и $\varphi^2 = \iota$. Доказать, что:
1)$\operatorname{rg}(\varphi + \iota) + \operatorname{rg}(\varphi - \imath) = n$;
2)$\dim \operatorname{Ker}(\varphi + \iota) + \dim \operatorname{Ker}(\varphi - \imath) = n$.

Б-23.99

Пусть φ, ψ, χ - такие линейные отображения, что произведение $\varphi\psi\chi$ существует. Доказать, что

$$:\mathrm{i} \quad \operatorname{rg}(\varphi\psi) + \operatorname{rg}(\psi\chi) \leqslant \operatorname{rg} \psi + \operatorname{rg}(\varphi\psi\chi).$$

Б-23.99

Пусть φ, ψ, χ - такие линейные отображения, что произведение $\varphi\psi\chi$ существует. Доказать, что

$$\mathrm{i} \quad \operatorname{rg}(\varphi\psi) + \operatorname{rg}(\psi\chi) \leqslant \operatorname{rg} \psi + \operatorname{rg}(\varphi\psi\chi).$$

Б-23.10

0. Пусть $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ - вещественные линейные пространства и $L(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ - множество всех линейных отображений $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$.

1)Доказать, что $L(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ - линейное пространство относительно операций сложения линейных отображений и умножения отображения на число.

2)Пусть $\dim \mathcal{P} = n, \dim \mathcal{Q} = m$. Построить базис пространства $L(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ и найти его размерность.

3)Показать, что в условиях п.

2)пространство $L(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ изоморфно пространству $\nabla_{m \times n}$ вещественных матриц размеров $m \times n$.

Б-23.101.

Выяснить, образует ли данное множество линейных отображений линейное подпространство в $L(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ (см. задачу 23.100):

1)множество всех отображений ранга $k \geqslant 1$;

2)множество всех отображений ранга, не превосходящего $k \geqslant 1$

3)множество всех отображений, ядра которых содержат некоторое фиксированное подпространство из $\mathcal{P}$;

4)множество всех инъективных отображений;

Б-23.102.

Пусть в линейном пространстве $\mathcal{L}$ задан базис e. Доказать, что данное множество линейных преобразований пространства $\mathcal{L}$ является группой относительно операции умножения преобразований:

1)множество всех невырожденных преобразований;

2)множество всех преобразований с определителем, равным 1;

3)множество всех невырожденных преобразований, матрицы которых в базисе **e** верхние треугольные;

4)множество всех невырожденных преобразований, заданных в базисе **e** диагональными матрицами; 5) множество всех гомотетий $\lambda\iota$, где число λ отлично от 0 ; 6) множество всех преобразований, имеющих в базисе **e** матрицы перестановок.

Б-23.103.

В линейном пространстве $\mathcal{L}$ дан базис e. Является ли группой относительно умножения данное множество линейных преобразований пространства $\mathcal{L}$:

1)множество всех линейных преобразований;

2)множество всех преобразований, матрицы которых диагональны в базисе e;

3)множество всех невырожденных преобразований, которые в базисе **e** задаются целочисленными матрицами, т. е. матрицами $\|a_{ij}\|$, где a_{ij} - целые числа;

4)множество всех преобразований, матрицы которых в базисе **e** целочисленны и имеют определители, равные 1 или -1; 5) множество всех преобразований с данньм определителем d; 6) множество всех невырожденных преобразований, имеющих в базисе **e** матрицы, каждая строка и каждый столбец которых содержат ровно по одному ненулевому элементу?

6.4.4 Problems About Eigenvectors and Eigenvalues of Linear Transformations

Б-24.1

Доказать, что множество всех собственных векторов линейного преобразования, отвечаюгцих одному собственному значению, дополненное нулевым вектором, совпадает с собственным подпространством.

Б-24.2

Доказать, что:
1)ядро линейного преобразования совпадает с собственным подпространством, отвечающим нулевому собственному значению;
2)Собственное подпространство преобразования φ, отвечающее собственному значению λ, есть множество векторов, удовлетворяющих условию $\varphi(x) = \lambda x$.

Б-24.3

Пусть A - матрица, а λ - собственное значение линейного преобразования n-мерного линейного пространства. Чему равна размерность собственного подпространства, отвечающего собственному значению λ, если ранг матрицы $A - \lambda E$ равен r?

Б-24.4

Какой вид имеет матрица линейного преобразования, если первые k базисных векторов являются его собственными векторами?

Б-24.5

Доказать, что размерность собственного подпространства, отвечающего данному корню характеристического многочлена, не превосходит кратности этого корня.

Б-24.6

Пусть x, y - собственные векторы линейного преобразования, отвечающие различным собственным значениям, а числа α, β отличны от нуля. Доказать, что вектор $\alpha x + \beta y$ не является собственным.

Б-24.7

Доказать, что ненулевое линейное преобразование, для которого все ненулевые векторы собственные, является гомотетией.

Б-24.8

Доказать, что система собственных векторов, отвечающих попарно различным собственным значениям линейного преобразования, линейно независима.

Б-24.9

Доказать, что матрица линейного преобразования в некотором базисе тогда и только тогда диагональна, когда все векторы базиса собственные.

Б-24.10

Доказать, что линейное преобразование n-мерного линейного пространства, имеющее n различных собственных значений, диагонализируемо.

Б-24.11

Пусть φ - линейное преобразование конечномерного линейного пространства $\mathcal{L}$. Доказать, что следующие выскаЗывания равносильны:
1)φ диагонализируемо;
2)в $\mathcal{L}$ существует базис из собственных векторов преобразования φ
3)объединение базисов собственных подпространств является базисом в $\mathcal{L}$
4)кратность каждого корня λ характеристического уравнения равна размерности собственного подпространства $\mathcal{L}_\lambda$; 5) $\mathcal{L}$ является прямой суммой собственных подпространств.

Б-24.12

Доказать, что:
1)в комплексном линейном пространстве каждое характеристическое число матрицы линейного преобразования является собственным значением, так что произвольное линейное преобразование имеет хотя бы один счобственный вектор;
2)в вещественном пространстве каждое вещественное характеристическое число является собственным значением.

Б-24.13

Доказать, что линейное преобразование нечетномерного (например, трехмерного) вещественного линейного пространства имеет хотя бы один собственный вектор.

Б-24.14

1)Доказать, что характеристический многочлен, определитель и след матрицы линейного преобразования не зависят от выбора базиса.
2)Найти выражение коэффициентов характеристического многочлена, в частности следа и определителя матрицы порядка n, через характеристические числа.

Б-24.15

Найти собственные векторы и собственные значения каждого из следующих преобразований:
1)нулевого;
2)тождественного;
3)гомотетии.

Б-24.16

Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, заданного в некотором базисе n-мерного линейного пространства матрицей $A_{612} = J_n(\lambda)$.

Б-24.17

Пусть матрица линейного преобразования в некотором базисе - верхняя или нижняя треугольная с диагональными элементами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Найти все собственные значения этого преобразования.

Б-24.18

Пусть $\mathcal{L} = \mathcal{L}' \oplus \mathcal{L}''$, где $\mathcal{L}', \mathcal{L}''$ - ненулевые подпространства. Найти собственные значения и собственные подпространства линейного преобразования φ; доказать, что φ имеет базис из собственных векторов, и указать диагональный вид его матрицы, если φ есть:
1)проектирование на подпространство $\mathcal{L}'$ параллельно $\mathcal{L}''$;
2)отражение в подпространстве $\mathcal{L}'$ параллельно $\mathcal{L}''$.

Б-24.19

Найти собственные значения и собственные подпространства, привести к диагональному виду матрицы линейных преобразований, определенных в задаче 23.65.

Б-24.20

Найти собственные знаqения, собственные подпространства, привести к диагональному виду матрицу линейного преобразования, определенного в задаче:
1)$23.9, 1$;
2)$23.9, 2$);
3)$23.9, 3$);
4)$23.9, 4$); 5) $23.10, 1$; 6) $23.10, 2$); 7) $23.10, 3$) 8) $23.10, 4$); 9) 23.12, 1); 10) 23.12, 2); 1
1)$23.12, 3$); 1
2)$23.13, 1$); 1
3)$23.13, 2$)

Б-24.21

Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, определенного в задаче:
1)23.14, 1);
2)23.14, 2);
3)23.14, 3);
4)23.66, 1); 5) 23.66, 2); 6) 23.66, 3); 7) 23.66, 4); 8) 23.66, 5). Можно ли из собственных векторов преобразования составить базис?

Б-24.22

1)Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования φ, заданного матрицей

$$A = (a_1, \ldots, a_n)^T (b_1, \ldots, b_n) \neq O.$$

2)Найти необходимое и достаточное условие диагонализируемости преобразования φ.
3)Выяснить, диагонализируемы ли преобразования, заданные матрицами: а) A_{213}; б) A_{222}.

Б-24.23

Пусть k, m, n - натуральные числа, $1 \leqslant k \leqslant m \leqslant n$. Привести пример линейного преобразования n-мерного линейного пространства, для которого данное число λ является корнем характеристического многочлена кратности m, а отвечающее ему собственное подпространство имеет размерность k.

Б-24.24.

Пусть линейное преобразование φ трехмерного комплексного линейного пространства в некотором базисе имеет вещественную матрицу и по крайней мере одно характеристическое число этой матрицы не является вещественным. Доказать, что φ диагонализируемо.

Б-24.25

Пусть x - собственный вектор линейного преобразования φ, отвечающий собственному значению λ, а $p(t)$ - многочлен. Доказать, что вектор x является собственным для преобразования $p(\varphi)$ и принадлежит собственному значению $p(\lambda)$.

Б-24.26

Пусть $\lambda_1, , \ldots, \lambda_n$ - характеристические числа линейного преобразования φ в n-мерном линейном пространстве. Чему равны характеристические числа (с учетом кратностей) преобразования:
1)(р)φ^2;
2)(р) φ^m (m - натуральное число);
3)φ^{-1} (при условии, что φ обратимо);
4)$p(\varphi)$, где $p(t)$ - произвольный многочлен (при условии, что $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ различны)?

Б-24.27

Пусть характеристические многочлены квадратных матриц A и B имеют простые корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ и $\mu_1, \ldots, \mu_n$ соответственно. Найти характеристические числа кронекеров-
ского произведения $A \otimes B$ матриц A, B. (См. введение к § 15.)

Б-24.28

Пусть линейное преобразование φ линейного пространства $\mathcal{L}$ диагонализируемо. Доказать утверждения:
1)$\operatorname{Im} \varphi$ есть линейная оболочка множества всех собствен- ных векторов, отвечающих ненулевым собственным значениям;
2)$\mathcal{L} = \operatorname{Im} \varphi \oplus \operatorname{Ker} \varphi$

Б-24.29

Привести пример линейного преобразования φ пространства ∇_n, для которого $\nabla_n \neq \operatorname{Im} \varphi + \operatorname{Ker} \varphi$.

Б-24.30

Линейное преобразование вещественного n-мерного линейного пространства задано своей матрицей. Вычислить собственные значения и найти максимальную линейно независимую систему собственных векторов преобразования. Если найденная система вскторов образует базис, записать в нем матрицу преобразования и выяснить геометрический смысл преобразования: $n = 2$:
1)A_{46};
2)A_{14};
3)A_{36}
4)A_{47} 5) A_{48}; 6) A_{13}; 7) A_{12}; 8) A_5; 9) A_{30}; 10) A_{49} $n = 3 : 1$
1)A_{261} 1
2)A_{243}; 1
3)A_{290} 1
4)A_{291} 15) A_{292} 16) A_{293}; 17) A_{294}; 18) A_{295} 19) A_{221} 20) A_{267} 2
1)A_{296} 2
2)A_{297}; 2
3)A_{298}; 2
4)A_{273}; 25) A_{235} 30) A_{283};

Б-24.31

Линейное преобразование комплексного n-мерного линейного пространства задано своей матрицей. Найти базис из собственных векторов и записать матрицу преобразования в этом базисе: $n = 2$:
1)A_{20};
2)A_{50};
3)A_{82};
4)A_{79} $\left(\varepsilon = e^{2\pi i/3}\right)$; 5) A$_{94}$; 6) A_{77}; 7) A_{78} $\left(\varepsilon = e^{2\pi i/3}\right)$ 8) A_{87} $n = 3$: 9) A_{239}; 10) A_{262}; 1
1)A_{263}; 1
2)A_{300}; 1
3)A_{301}; 1
4)A_{260}; 15) A_{363} $\left(\omega = e^{2\pi i/3}\right)$; 16) A_{376}; 17) A_{377}; $n = 4 : 18)$ A_{432} 19) A_{447}; 20) A_{486} 2
1)A_{472}.

Б-24.32

Найти собственные значения и максимальную линейно независимую систему собственных векторов линейного преобразования, заданного своей матрицей. Объяснить, почему преобразование не диагонализируемо:
1)A_{51}
2)A_{52}
3)A_{286};
4)A_{303}; 5) A_{289}; 6) A_{236}; 7) A_{457}; 8) A_{487} 9) A_{548}.

Б-24.33

Найти характеристические числа линейного преобразования, заданного своей матрицей. Выяснить, диагонализируемо ли преобразование: а) в вещественном пространстве, б) в комплексном пространстве. Если да, то найти базис из собственных векторов и записать в нем матрицу преобразования; в противном случае указать, какое из необходимых условий диагонализуемости не выполнено:
1)A_{45};
2)A_{77}
3)A_{259}
4)A_{44} 5) A_{253} 6) A_{98}; 7) A_{436} 8) A_{430} 9) A_{478} 10) A_{474}

Б-24.34

Решить задачу на собственные значения и собствен- ные векторы и указать диагональный вид матрицы линейного преобразования, заданного в стандартном базисе: вещественного n-мерного арифметического пространства:
1)A_{604};
2)A_{621} $(n = 2m)$;
3)A_{625};
4)A_{627}; 5) A_{640}; 6) A_{639}; 7) A_{634}; 8) A_{620}; 9) $A_{606}\,(\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 1, \lambda_{m+1} = \ldots = \lambda_n = 2;$ $m = [(n+$ $+1)/2])$; 10) $A_{606}\,(\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 1, \lambda_{m+1} = \ldots = \lambda_n = 0;$ $m = [(n+$ $+1)/2])$ комплексного n-мерного арифметического пространства:

$$11)\ A_{605}\,(\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 1, \lambda_{m+1} = \ldots = \lambda_n = -1\ ;$$

$m = [(n+1)/2])$; 1
2)A_{614}; 1
3)A_{635}.

Б-24.35 Найти характеристические числа

Найти характеристические числа матрицы:
1)A_{490};
2)A_{491};
3)A_{492};
4)A_{549}; 5) A_{550};(4)
6) A_{638} 7) A_{643}; 8) A_{642} 9) A_{645}(n - нечетно).

Б-24.36 Бесконечные произведения

Вычислить: i)
1)$2^{n+1} \prod_{k=1}^{n} \cos \frac{\pi k}{n+1}$
2)$\sum\limits_{k=1}^{n} \cos \frac{\pi k}{n+1}$;
3)$\sum\limits_{k=0}^{n-1} \varepsilon^{k^2}$, где $\varepsilon = e^{2\pi i/n}, \quad n = 2m+1$;
4)$\prod_{0 \leqslant j<k \leqslant n-1} \left(\varepsilon^k - \varepsilon^j\right)$, где $\varepsilon = e^{2\pi i/n}, \quad n = 2m+1$.

Solution

(? как тут вообще линал поможет??)

Б-24.39

Треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны (с коэффициентом подобия λ). Если длины сторон треугольника ABC равны a, b, c, то соответствующие стороны треугольника $A'B'C'$ имеют длины $3a+b+c, \quad a+3b+c, a+b+3c$. Доказать, что треугольники правильные, и найти λ.

Б-24.40

Сумма различных натуральных чисел n_1, n_2, n_3, n_4 равна 18. После того как их увеличили в одинаковое число λ раз, получились числа $n_1+n_2+n_3+n_4, n_1+n_2-n_3-n_4$, $n_1-n_2+n_3-n_4, \quad n_1-2n_2-n_3+3n_4$. Найти $n_1, n_2, n_3, n_4, \lambda$.

Б-24.41

Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентной формулой: $x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}x_{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots); x_0 = a, \quad x_1 = b$. Доказать, что последовательность сходится, и найти ее предел.

Б-24.42

Найти собственные значения и собственные векторы (собственныс функции) дифференцирования D как линейного преобразования каждого из следующих линейных пространств вещественных функций (n - фиксированное натуральное число):

1)пространство всех многочленов степени не выше n;

2)пространство всех тригонометрических многочленов вида $f(t) = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \ldots + a_n \cos nt + b_n \sin nt$;

3)линейная оболочка системы функций $e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ - попарно различные числа.

4)пространство всех функций вида $e^{\lambda_0 t} p(t)$, где $p(t)$ - любой многочлен степени не выше n, λ_0 - фиксированное число ($\lambda_0 \neq 0$).

Б-24.43

Найти собственные значения и собственные векторы преобразования D^2 в пространствах функций задачи 24.42.

Б-24.44

Проверить, что функции вида $y = e^t p(t)$, где $p(t)$ - многочлен не выше второй степени, образуют линейное пространство L. Убедиться в том, что φ - линейное преобразование пространства $\mathcal{L}$, и решить для φ задачу на собственные значения и собственные векторы:
1)$\varphi(y) = y'' - 2y' + y$, т. е. $\varphi = D^2 - 2D + \iota$;
2)$\varphi = D^3 - 2D^2$
3)$\varphi = D^3 - 3D^2 + 3D + \iota$.

Б-24.45

Проверить, что функции вида $y = e^{-t}(a\cos t + b\sin t)$ образуют линейное пространство $\mathcal{M}$ и что преобразование $\varphi = p(D)$, где $p(t)$ - данный многочлен, D - дифференцирование, является линейным преобразованием пространства $\mathcal{M}$. Решить для φ задачу на собственные значения и собственные векторы, если:
1)$p(t) = (t+1)^2$
2)$p(t) = t^2 - 1$.

Б-24.46

В линейной оболочке функций $\cos 2t, \sin 2t, t\cos 2t,$ $t\sin 2t$ задано линейное преобразование $\varphi = p(D)$, где $p(t)$ - многочлен, D - дифференцирование. Решить для φ задачу на собственные значения и собственные векторы, если:
1)$p(t) = t^2 + 4$
2)$p(t) = t^4 + 8t^2$

Б-24.47

Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования φ пространства вещественных многочленов $p(t)$ не выше второй степени, если:
1)$\varphi(p) = tp'$;
2)$\varphi(p) = (tp)'$;
3)$\varphi(p) = t^2p'' - tp' + 2p$.

Б-24.48

Найти собственные значения и собственные векторы преобразования дифференцирования в пространстве функций, бесконечно дифференцируемых на всей числовой прямой.

Б-24.49

Пусть $\mathcal{L}$ - множество функций $y(t)$, бесконечно дифференцируемых на отрезке $[0,\pi]$ и таких, что $y(0) = y(\pi) = 0$.
1)Проверить, что $\mathcal{L}$ - линейное пространство.
2)Найти собственные векторы и собственные значения линейного преобразования φ пространства $\mathcal{L}$, заданного формулой $\varphi(y) = y''$.

Б-24.50

Пусть A, B - квадратные матрицы, и матрица $\left\| \begin{matrix} A & C \\ O & B \end{matrix} \right\|^{\square}$ диагонализируема. Доказать, что матрицы A, B диа-гонализируемы. Показать на примере, что обратное утверждение неверно.

Б-24.51

Зафиксируем вещественный многочлен $p_0(t)$ степени $m \quad (m \geqslant 1)$. Любой многочлен $p(t)$ можно разделить на $p_0(t)$ с остатком, т. е. однозначно представить в виде

$$p(t) = q(t)p_0(t) + r(t)$$

(степень остатка $r(t)$ меньше степени $p_0(t)$). Преобразование φ пространства $\mathcal{P}$ всех вещественных многочленов определим формулой $\varphi(p(t)) = r(t)$.
1)Показать, что преобразование φ линейно и $\varphi^2 = \varphi$.
2)Найти собственные значения и собственные векторы преобразования φ.
3)Доказать, что формула (
4)дает разложение пространства $\mathcal{P}$ в прямую сумму собственных подпространств.

Б-24.52

Пусть φ - операция взятия остатка от деления на многочлен $p_0(t)$ (см. задачу

Б-24.51

) в пространстве многочленов степени не выше 3. Найти базис из собственных векторов и записать матрицу преобразования φ в этом базисе, если:
1)$p_0(t) = t$
2)$p_0(t) = t^2 + 1$
3)$p_0(t) = (t-1)^3$.

Б-24.54

Множество комплексных матриц порядка n рассматривается как вещественное линейное пространство $\mathcal{M}$ размерности $2n^2$.
1)Проверить, что операция $\eta : A \to A^H = \bar{A}^T$ эрмитова сопряжения матрицы является вещественным линейным преобразованием пространства $\mathcal{M}$, причем $\eta^2 = \iota$.
2)Найти собственные значения и собственные векторы преобразования η.
3)Показать, что преобразование η не является линейным. преобразованием комплексного пространства $\rfloor_{n\times n}$.

Б-24.55

Пусть A - матрица второго порядка. Формула $\varphi(X) = AX$ определяет линейное преобразование пространства матриц второго порядка (задача 23.47). Найти собственные значения и максимальную линейно независимую систему собственных векторов преобразования φ. В случае, когда эта система является базисом, записать в нем матрицу преобразования φ:
1)$A = A_{46}$;
2)$A = A_{52}$
3)$A = A_{50}$ (в пространстве комплексных матриц).

Б-24.56

Решить задачу на собственные значения и собственные векторы для преобразования $\varphi(X) = XB$ пространства матриц второго порядка, если:
1)$B = A_{36}$
2)$B = A_{51}$ (пространство вещественное);
3)$B = A_{45}$ (пространство комплексное).

Б-24.58

Пусть A - невырожденная матрица второго порядка. Показать, что формула $\varphi(X) = A^{-1}XA$ определяет линейное преобразование пространства матриц второго порядка. Решить для преобразования φ задачу на собственные значения и собственные векторы, если:
1)$A = A_{22}$;
2)$A = A_{13}$.

Б-24.59

Найти собственные векторы и собственные значения преобразования сдвига в пространстве многочленов от двух переменных, определенного в задаче 23.50, если:
1)$a = 1, \quad b = 0$;
2)$a = 1, \quad b = -2$.

Б-24.60

Решить задачу о собственных значениях и собственных векторах для линейных преобразований пространства однородных многочленов степени n от двух переменных, определенных в задаче 23.51.

Б-24.61

Пусть A - матрица второго порядка, $(x^*, y^*) = (x, y)A$. Преобразование φ пространства многочленов $p(x, y)$ степени не выше n определим формулой $\varphi(p(x, y)) = p(x^*, y^*)$. Показать, что φ - линейное преобразование. Найти его собственные векторы и собственные значения, если $n = 2$ и

1)$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$;

2)$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$;
3)$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}$.

Б-24.62

Пусть $\mathcal{K}(x,y) = g_0(y) + xg_1(y) + x^2 g_2(y)$, где $g_0(y),\ g_1(y), g_2(y)$ - непрерывные функции на отрезке $[-1,1]$. Показать, что преобразование φ, определяемое формулой

$$\varphi(p(x)) = \int\limits_{-1}^{1} \mathcal{K}(x,y)p(y)dy$$

является линейным преобразованием пространства многочленов $p(x)$ степени не выше 2. Найти собственные значения и собственные векторы преобразования φ, если:
1)$\mathcal{K}(x,y) = 3x^2y + 5xy^2$
2)$\mathcal{K}(x,y) = y^2 + 2x(y-1) + \left(1-3y^2\right)x^2$.

Б-24.63

Показать, что формула

$$\varphi(f(x)) = \int\limits_{0}^{\pi} \mathcal{K}(x,y)f(y)dy$$

определяет линейное преобразование φ пространства тригонометрических многочленов вида:
1)$a\cos x + b\sin x$, если $\mathcal{K}(x,y) = \sin(x+y)$;
2)$a + b\cos 2x + c\sin 2x$, если $\mathcal{K}(x,y) = \cos^2(x-y)$. Найти собственные значения и собственные векторы преобразования φ.

Б-24.64

Найти собственные значения и собственные векторы оператора Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ в пространстве многочленов $p(x,y)$ с вещественными коэффициентами.

Б-24.65

Пусть φ, ψ - подобные преобразования линейного пространства $\mathcal{L}$ (см. формулу (5) введения к § 23). Доказать, что:
1)характеристические многочлены преобразований φ и ψ совпадают;
2)если x - собственный вектор преобразования φ, то $\omega^{-1}(x)$ - собственный вектор преобразования ψ, отвечающий тому же собственному значению;
3)если в $\mathcal{L}$ существует базис, в котором матрица преобразования φ диагональна (треугольна), то аналогичный базис существует и для ψ.
4)Показать на примере, что совпадение характеристических многочленов двух линейных преобразований не влечет подобия этих преобразований.

6.4.5 Problems About Invariant Subspaces and Permutation Transformations

(24.66-24.112)

Б-24.66

Доказать, что
1)ядро и
2)множество значений линейного преобразования являются инвариантными подпространствами.

Б-24.67

Доказать, что собственное подпространство линейного преобразования инвариантно.

Б-24.68

Пусть φ - линейное преобразование линейного пространства $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ - подпространство в $\mathcal{L}$, инвариантное относи-

тельно φ, и $p(t)$ - многочлен. Доказать, что данное подпространство в $\mathcal{L}$ инвариантно относительно φ:

1)$\varphi(\mathcal{M})$;
2)$\varphi^{-1}(\mathcal{M})$(если φ обратимо);
3)$\varphi^m(\mathcal{M})(m \geqslant 1)$
4)$\operatorname{Ker} p(\varphi)$; 5) $p(\varphi)(\mathcal{M})$.

Б-24.69

Доказать, что
1)сумма двух (и вообще любого конеччного множества) и
2)пересечение двух (и вообще любого множества) инвариантных подпространств линейного преобразования - инвариантные подпространства.

Б-24.70

Пусть φ - линейное преобразование линейного пространства. Доказать, что любое подпространство, содержащее $\operatorname{Im} \varphi$, инвариантно.

Б-24.71

Доказать, что если линейное преобразование φ невырождено, то φ и φ^{-1} имеют одни и те же инвариантные подпространства.

Б-24.72

Какой вид имеет матрица линейного преобразования n-мерного линейного пространства, если базис инвариантного подпространства образован:
1)первыми k базисными векторами;
2)последними $n-k$ базисными векторами?

Б-24.73

1)Пусть линейное пространство является прямой суммой двух инвариантных подпространств линейного преобразования. Доказать, что тогда в некотором базисе матрица преобразования имеет вид $\left\|\begin{array}{cc} A & O \\ O & B \end{array}\right\|$, где A, B - квадратные матрицы.

2)Сформулировать и доказать обратное утверждение.

Б-24.74

Доказать, что:
1)характеристический многочлен линейного преобразования делится на характеристический многочлен его ограничения на инвариантном подпространстве;
2)если все корни характеристического многочлена линейного преобразования φ линейного пространства $\mathcal{L}$ принадлежат полю, над которым определено $\mathcal{L}$, то всякое подпространство в $\mathcal{L}$, инвариантное относительно φ, содержит собственный вектор этого преобразования;
3)если линейное пространство является прямой суммой инвариантных подпространств линейного преобразования φ, то характеристический многочлен φ равен произведению характеристических многочленов ограничений φ на этих инвариантных подпространствах.

Б-24.75

Найти все подпространства, инвариантные относительно гомотетии линейного пространства.

Б-24.76

Найти подпространства, инвариантные относительно поворота плоскости вокруг начала координат на угол α.

Б-24.77

Найти подпространства трехмерного геометрического векторного пространства, инвариантные относительно поворота на угол α вокруг прямой $\mathbf{x} = t\mathbf{a}(\mathbf{a} \neq 0)$.

Б-24.78

Пусть линейное преобразование n-мерного линейного пространства имеет n попарно различных собственных значений. Найти все инвариантные подпространства и подсчитать их количество.

Б-24.79

Пусть φ - диагонализируемое линейное преобразование n-мерного линейного пространства $\mathcal{L}$. Найти все подпространства в $\mathcal{L}$, инвариантные относительно преобразования φ.

Б-24.80

Пусть в базисе $e_1, \ldots, e_n$ линейного пространства $\mathcal{L}$ линейное преобразование φ имеет матрицу:
1)$J_2(\lambda) \quad (n = 2)$
2)$J_3(\lambda) \quad (n = 3)$;
3)$J_n(\lambda)$. Найти все подпространства в $\mathcal{L}$, инвариантные относительно φ.

Б-24.81

Пусть $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$. Найти инвариантные подпространства данного линейного преобразования пространства $\mathcal{L}$:
1)проектирования на $\mathcal{L}_1$ параллельно $\mathcal{L}_2$;
2)отражения в $\mathcal{L}_1$ параллельно $\mathcal{L}_2$.

Б-24.82

1)Показать, что преобразование φ проектирования линейного пространства обладает свойством: $\varphi^2 = \varphi$.
2)Доказать, что ненулевое линейное преобразование $\varphi \neq \iota$, для которого $\varphi^2 = \varphi$, есть проектирование на $\operatorname{Im}\varphi$ параллельно $\operatorname{Ker}\varphi$.

Б-24.83

1)Показать, что преобразование φ отражения линейного пространства в подпространстве обладает свойством $\varphi^2 = \iota$.
2)Доказать, что линейное преобразование φ, отличное от $\pm\iota$, для которого $\varphi^2 = \iota$, есть отражение пространства в подпространстве неподвижных векторов параллельно некоторому дополнительному подпространству.

Б-24.84

Пусть φ - линейное преобразование пространства $\mathcal{L}$. Доказать, что при любом α каждое подпространство, содержащее $\operatorname{Im}(\varphi + \alpha\iota)$, инвариантно относительно φ.

Б-24.85

Доказать утверждения:
1)Если линейное преобразование n-мерного линейного пространства имеет собственный вектор, то для него существует и $(n-1)$-мерное инвариантное подпространство.
2)Пусть A - матрица линейного преобразования φ в некотором базисе $\mathbf{e}, \lambda$ - собственное значение и строка $\mathbf{a}$ определена уравнением a $(A - \lambda E) = 0$. Тогда уравнение $\mathbf{a}\xi = 0$ в базисе $\mathbf{e}$ определяет $(n-1)$-мерное подпространство, инвариантное относительно преобразования φ. Справедливо ли обратное утверждение?
3)Всякое k-мерное инвариантное подпространство линейного преобразования комплексного пространства содержит $(k-1)$-мерное инвариантное подпространство.

Б-24.86

Линейное прсобразование φ арифметического пространства ∇_n в стандартном базисе $e_1, \ldots, e_n$ задано матрицей A. Найти подпространства, инвариантные относительно φ, если:
1)$A = A_{36}$
2)$A = A_{51}$
3)$A = A_{306}$;
4)$A = A_{287}$ 5) $A = A_{604}$; 6) $A = A_{621} \quad (n = 2m)$; 7) $A = A_{625}$.

Б-24.87

Найти $(n-1)$-мерные подпространства в ∇_n, инвармуантные относительно линейного преобразования, заданного своей матрицей A, если:
1)$A = A_{241}$
2)$A = A_{222}$;
3)$A = A_{238}$
4)$A = A_{262}$; 5) $A = A_{487}$ 6) $A = A_{447}$ 7) $A = A_{549}$; 8) $A = A_{640}$.

Б-24.88

1)Пусть $\lambda = \alpha + i\beta \quad (\beta \neq 0)$ - характеристическое число вещественной матрицы A порядка $n, \mathbf{l} = \mathbf{x} + i\mathbf{y}$ - собственный вектор линейного преобразования пространства $\rfloor_n$ с матрицей A (x, y - вещественные векторы). Доказать, что $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ образуют базис двумерного инвариантного подпространства линейного преобразования пространства ∇_n, задан- ного матрицей A.
2)Найти двумерные инвариантные подпространства $\mathcal{L}$ для линейного преобразования пространства ∇_4, заданного в стандартном базисе матрицей A_{474}.

Б-24.89

Пусть φ - линейное преобразование вещественного линейного пространства, $\lambda, \bar{\lambda}$ - пара его комплексно сопряженных характеристических чисел, $p = -(\lambda + \bar{\lambda})$ и $q = \lambda\bar{\lambda}$. Доказать, что квазисобственное подпространство $\operatorname{Ker}\left(\varphi^2 + p\varphi + q\iota\right)$ - ненулевое и инвариантно относительно φ.

Б-24.90

Найти квазисобственные подпространства преобра. вшания φ, заданного матрицей A:
1)$A = \left\|\begin{array}{rrr} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{array}\right\|$
2)$A = \left\|\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right\|$;
3)$A = \left\|\begin{array}{rrrr} 0 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right\|$
4)A_{423}; 5) A_{474}.

Б-24.91

Доказать, что квазисобственное подпространство нє содержит собственных векторов, и через каждый его вектор проходит двумерное инвариантное подпространство.

Б-24.92

Доказать, что размерность квазисобственного подпространства - четное число.

Б-24.93

Доказать, что квазисобственное подпространствс можно разложить в прямую сумму двумерных инвариантных подпространств.

Б-24.94

Доказать, что размерность квазисобственного пространства не превосходит удвоенной кратности соответствующего характеристического числа.

Б-24.95

Доказать, что в двумерном инвариантном подпространстве преобразования φ, не содержащем собственных векторов, можно выбрать базис так, что матрица ограничения φ будет иметь вид $\begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{Vmatrix}$.

Б-24.96

Доказать, что любое двумерное инвариантное подпространство, не содержащее собственных векторов, лежит в некотором квазисобственном подпространстве.

Б-24.97

Доказать, что любые два квазисобственные подпространства имеют нулевое пересечение.

Б-24.98

Доказать, что собственные и квазисобственные подпространства линейного преобразования расположены так, что сумма их - прямая сумма.

Б-24.99

Для каждого из преобразований задачи 24.90 найти матрицу перехода к такому базису, в котором его матрица - клеточно диагональная, и найти матрицу преобразования в этом базисе. (В каждом случае найти хотя бы одно решение.)

Б-24.10

0.

1)Пусть линейное преобразование φn-мерного линейного пространства $\mathcal{L}$ обладает цепочкой вложенных друг

в друга попарно различных инвариантных подпространств: $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{L}_n = \mathcal{L}$. Доказать, что в $\mathcal{L}$ существует базис, в котором матрица преобразования φ верхняя треугольная.

2)Пусть в базисе $e_1, \ldots, e_n$ матрица линейного преобразования φ пространства $\mathcal{L}$ верхняя треугольная. Доказать, что подпространства $\mathcal{L}_k = \mathcal{L}\{e_1, \ldots, e_k\} \quad (k = 1, \ldots, n)$ инвариантны относительно φ и $\mathcal{L}_k \subset \mathcal{L}_{k+1} \quad (k = 1, \ldots, n-1)$.

Б-24.101.

Линейное преобразование пространства ∇_3 задано матрицей A в стандартном базисе. Привести матрицу преобразования к треугольному виду, если:

1)$A = A_{241}$

2)$A = A_{222}$

3)$A = A_{283}$

4)$A = A_{263}$.

Б-24.102.

1)Пусть $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{L}_r = \mathcal{L}$ - цепочка подпространств линейного пространства $\mathcal{L}$, инвариантных относительно линейного преобразования $\varphi, \dim \mathcal{L}_i = n_i \, (n_1 < n_2 < \ldots \; \ldots < n_r = n)$. Допустим, что базис $e_1, \ldots, e_n$ выбран так, что векторы $e_1, \ldots, e_{n_i}$ принадлежат $\mathcal{L}_i \quad (i = 1, \ldots, r)$. Показать, что матрица A_φ - верхняя блочно треугольная с диагональными блоками размеров $k_i \times k_i$, где $k_i = n_i - n_{i-1} (i = 2, \ldots, r)$,

2)Пусть в некотором базисе матрица линейного преобразования - верхняя блочно треугольная. Доказать, что преобразование обладает цепочкой инвариантных подпространств. Выразить их размерности через порядки диагональных блоков.

Б-24.103.

Пусть $\mathcal{L}$ - линейное пространство бесконечно дифференцируемых функций $f(t) \quad (t \in \searrow), n$ - целое неотрицательное число, λ - фиксированное действительное число. Доказать, что данное множество функций образует подпространство в $\mathcal{L}$, инвариантное относительно дифференцирования D:

1)множество всех многочленов;

2)множество всех многочленов степени не выше n;

3)множество всех тригонометрических многочленов порядка не выше n;

4)множество всех линейных комбинаций функций $e^{\lambda_1 t}, \ldots \; e^{\lambda_n t}$ 5) множество всех функций $f(t) = e^{\lambda t} p(t)$, где $p(t)$ - произвольный многочлен; 6) множество всех функций $f(t) = e^{\lambda t} T(t)$, где $T(t)$ - произвольный тригонометрический многочлен; 7) множество всех функций $p(t) \cos t, p(t) \sin t$, где $p(t)$ произвольный многочлен.

Б-24.104.

Пусть $\mathcal{L}$ - линейное пространство функций задачи 24.103, $\varphi = D^2$. Доказать, что данное множество функций является подпространством в $\mathcal{L}$, инвариантным относительно преобразования φ. Найти собственные значения и собственные векторы ограничения преобразования на этом подпространсТВЕ:

1)множество всех четных многочленов степени не выме $2n$;
2)множество всех нечетных многочленов степени не выШІ $2n+1$
3)множество всех четных тригонометрических многочле- нов $a_0 + a_1 \cos t + \ldots + a_n \cos nt$
4)множество всех нечетных тригонометрических многочленов $b_1 \sin t + \ldots + b_n \sin nt$.

Б-24.105.

Найти все подпространства линейного пространства всех многочленов, инвариантные относительно дифференцирования.

Б-24.106.

Показать, что линейное преобразование пространства всех многочленов, состоящее в умножении многочленов на t, не имеет ни собственных векторов, ни инвариантных подпространств (кроме нулевого подпространства и всего пространства).

Б-24.107.

Найти подпространства, инвариантные относительно операции взятия остатка (см. задачу 24.5
1)в пространстве всех многочленов.

Б-24.108.

Пусть φ - линейное преобразование пространства многочленов $p(x, y)$, определенное в задаче 24.61. Доказать, что подпространства однородных многотленов степени $n \quad (n = 0, 1, \ldots)$ инвариантны относительно преобразования φ.

Б-24.109.

Найти подпространства линейного пространства матриц порядка n, инвариантные относительно транспонирования.

Б-24.110

В пространстве $\nabla_{n\times n}$ рассматривается преобразование $\varphi(X) = AX$, где A - фиксированная матрица. Доказать, что $\nabla_{n\times n}$ является прямой суммой n подпространств, инвариантных относительно φ.

Б-24.111

В пространстве $\nabla_{n\times n}$ рассматривается преобразование $\varphi(X) = AX - XA$, где A - фиксированная матрица. Доказать, что данное множество образует инвариантное относительно φ подпространство:

1)множество всех матриц с нулевым следом;
2)множество всех верхних треугольных матриц (если матрица A верхняя треугольная);
3)множество всех кососимметрических матриц (если матрица A кососимметрическая);
4)множество всех диагональных матриц (если матрица A диагональная).

Б-24.112

Линейное преобразование φ пространства $\nabla_{n\times n}$ вещественных матриц порядка n определено формулой $\varphi(X) = A^T X + XA$, где A - фиксированная матрица.

1)Доказать, что кососимметрические матрицы образуют подпространство в $\nabla_{n\times n}$, инвариантное относительно преобразования φ;
2)выразить характеристические числа ограничения φ на этом подпространстве через характеристические числа матрицы A.

Б-24.113

Линейное преобразование пространства матриц порядка n определено формулой $\varphi(X) = A^{-1}XA$, где A невырожденная матрица. Доказать, что данное множество матриц является подпространством, инвариантным относительно преобразования φ:

1)множество всех матриц с нулевым следом;
2)множество всех скалярных матриц;

3)множество всех верхних треугольных матриц (если матрица A верхняя треугольная);

4)а) множество всех симметрических матриц; б) множество всех кососимметрических матриц (если матрица A ортогональная);

5) а) множество всех эрмитовых матриц; б) множество всех косоэрмитовых матриц (если A - унитарная матрица и если эти множества - подпространства $2n^2$-мерного вещественного пространства комплексных матриц порядка n).

Б-24.114

Линейное преобразование φ комплексного пространства матриц второго порядка задано формулой $\varphi(X) = A^{-1}XA$, где $A = A_{77}, \alpha$ - вещественное число. Найти собственные значения и собственные векторы ограничения преобразования φ на подпространстве:

1)симметрических матриц;

2)матриц с нулевым следом.

6.4.6 Problems About Jordan Matrix Form

(24.115-24.138)

Б-24.115

Привести пример матрицы порядка $n > 1$, имеющей характеристическое число λ кратности $k, 1 \leqslant k \leqslant n$, и собственное подпространство размерности m. Сколько жордановых клеток отвечает этому λ, и чему равна сумма порядков этих клеток?

Форум-mathhelpplanet Жнф матрицы (?)

Найти жорданову форму и жорданов базис линейного оператора, заданного матрицей $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 4 & -6 & -6 \\ -8 & 16 & 14 \end{pmatrix}$.

Вычислим характеристический многочлен $\varphi(\lambda)$ матрицы $\mathbf{A}$:

$$\varphi(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 5 & 4 \\ 4 & -6-\lambda & -6 \\ -8 & 16 & 14-\lambda \end{vmatrix} = 12 - 16\lambda + 7\lambda^2 - \lambda^3 = -(\lambda-2)^2(\lambda-3).$$

Таким образом, получили два собственных значения $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 3$. Так как алгебраическая кратность $\lambda_1 = 2$ равна 2, нужно вычислить геометрическую кратность k этого собственного значения. Для этого посчитаем ранг матрицы $\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{E}$:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 4 \\ 4 & -8 & -6 \end{vmatrix} = 0 \text{ и } \mathrm{M}_2(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 4 \neq 0, \text{ следовательно, } \operatorname{rang}(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{E}) = 2$$

Таким образом, имеем $k = n - \operatorname{rang}(\mathbf{A} - 2\mathbf{E}) = 3 - 2 = 1$, где n-порядок матрицы $\mathbf{A}$. Итак, жорданова форма линейного оператора, заданного матрицей $\mathbf{A}$ имеет вид

$$J_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ или } J_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Б-24.116

Проверить прямым вычислением терему Гамильтона-Кэли для данной матрицы и определить ее минимальный многочлен:

1)A_{37};

2)A_{38}

3)A_{29};

4)A_{82}; 5) A_{98} 6) A_{233} 7) A_{222} 8) A_{236}.

Б-24.117

Может ли минимальный многочлен матрицы порядка n

1)быть многочленом первой степени;

2)иметь вид $(t - \lambda)^n$. Привести примеры.

Б-24.118

1)Показать, что собственный вектор является корневым. Чему равна высота собственного вектора?
2)Доказать, что матрица линейного преобразования тогда и только тогда диагонализуема, когда высота каждого корневого вектора равна 1.

Б-24.119

Доказать, что корневые векторы, отвечающие попарно различным собственным значениям, линейно независимы.

Б-24.120

Пусть $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ корневые подпространства, отвечающие собственным значениям $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Доказать, что $\mathcal{K}_2$ инвариантно относительно $\psi_1 = \varphi - \lambda_1 \iota$, и ограничение ψ_1 на $\mathcal{K}_2$ невырождено.

Б-24.121

Доказать, что размерность корневого подпространства равна кратности соответствующего собственного значения как корня характеристического многочлена.

Б-24.122

Доказать линейную независимость векторов жордановой цепочки.

Б-24.123

Доказать, что начальные векторы жордановых цепочек, составляющих базис корневого подпространства, образуют базис соответствующего собственного подпространства.

Б-24.124.

Пусть размерность собственного подпространства, соответствующего характеристическому числу λ, меньше кратности λ. Каждый ли собственный вектор имеет присоединенный вектор?

Б-24.125

Найти базисы корневых подпространств линейного преобразования, заданного матрицей A:
1)A_{27};
2)A_{11};
3)A_5;
4)A_{51} 5) A_{198} 6) A_{222} 7) A_{303}; 8) A_{289}.

Б-24.126

Проверить, что линейное преобразование, заданное матрицей A, нильпотентно и найти для него жорданов базис и жорданову форму матрицы:
1)A_5;
2)$A_{38} - 2E$;
3)$A_{52} - 5E$;
4)A_{236}; 5) A_{235} (6) $A_{283} + E$ 7) A_{458} 8) A_{457}; 9) A_{485}.

Б-24.127

Привести к жордановой форме матрицу:
1)A_{51};
2)A_{30};
3)A_{49};
4)A_{52}; 5) A_{198} 6) A_{299}; 7) A_{247}; 8) A_{248};   9) A_{264}; 10) A_{273}; 1
1)A_{738}
2)(р) A_{283}; 1
3)A_{289}; 1
4)A_{484}; 15) (р) A_{465} 16) A_{460}; 17) A_{469}; 18) A_{487}.

Б-24.128

Приводятся ли к жордановой форме следующие матрицы линейных преобразований вещественного пространства? Найти их жорданову форму как матриц линейных преобразований комплексного пространства:
1)A_{45};
2)A_{62};
3)A_{44};
4)A_{262}; 5) A_{301} 6) A_{447}; 7) A_{474}

Б-24.129

Привести к жордановой форме матрицу линейного преобразования комплексного арифметического пространства:
1)A_{82};
2)A_{78};
3)A_{80};
4)A_{98}.

Б-24.130

Вычислить значение следующих многочленов от матрицы $J_n(\lambda)$:
1)$(t-\lambda)^m$
2)t^m;
3)произвольный многочлен $f(t)$.

Б-24.131

Найти жорданову форму матрицы:
1)$J_n^2(\lambda)$
2)$J_n^m(\lambda)$ (m натуральное);
3)$J_n^{-1}(\lambda) \quad (\lambda \neq 0)$

Б-24.131

Найти жорданову форму матрицы:
1)$J_n^2(\lambda)$;
2)$J_n^m(\lambda)$ (m натуральное);
3)$J_n^{-1}(\lambda) \quad (\lambda \neq 0)$.

Б-24.132

Что можно сказать о матрице A порядка n, если ее мынимальный многочлен удовлетворяет следующему условию:
1)имеет все корни кратности 1 ;
2)с точностью до знака совпадает с характеристическим многочленом.

Б-24.133

Пусть $\varphi^m = \iota$ для некоторого натурального числа m. Доказать, что жорданова форма матрицы φ диагональна. Какие числа стоят на диагонали этой матрицы?

Б-24.134

Найти жорданову форму линейного преобразования комплексного арифметического пространства с матрицей:
1)A_{594};
2)A_{599};
3)A_{609};
4)A_{615} 5) A_{619}; 6) A_{620} 7) A_{632} 8) A_{635} 9) A_{640} 10) A_{641}.

Б-24.135

Не находя жордановых базисов, установить жордановы формы матриц, зная, что их характеристические многочлены равны $(t-1)^4$:
1)$A_{458}+E$
2)A_{460}
3)A_{469}.

Б-24.136

Проверить, что матрицы A_{221} и $-A_{273}$ имеют одинаковые характеристические многочлены. Найти их минимальные многочлены и жордановы формы.

Б-24.137

Определить жорданову форму матрицы A по заданному характеристическому многочлену $p(t) = -(t+1)^3(t-2)^2$, зная, что $\mathrm{Rg}(A-2E) = 3,$ а $\mathrm{Rg}(A+E) = 4$.

Б-24.138

Найти экспоненту матрицы:
1)$J_n(0)$;
2)A_5;
3)$\begin{Vmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{Vmatrix}, \quad \alpha \in \diagdown.$

Б-24.139

Пусть линейные преобразования φ, ψ перестановочны. Доказать, что:
1)ядро и множество значений одного из них инвариантны относительно другого;
2)собственные подпространства преобразования φ инвариантны относительно ψ.

Б-24.140

Пусть λ_0 - собственное значение линейного преобразования φ.
1)Доказать, тто подпространства $\mathcal{L}_k = \mathrm{Ker}\,(\varphi - \lambda_0\iota)^k \quad (k = 1, 2, \ldots)$ инвариантны относительно φ.
2)Показать, что $\mathcal{L}_k \subseteq \mathcal{L}_{k+1}$. Может ли включение быть строгим?

Б-24.141

Доказать, что:
1)любые два перестановочных линейных преобразования комплексного пространства имеют общий собственный вектор;
2)то же утверждение верно для вещественного пространства, если все характеристические числа преобразований вещественны. 21.142. Пусть φ - вырожденное линейное преобразование конечномерного линейного пространства. Доказать, что существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всех $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, преобразование $\varphi + \varepsilon\iota$ невырождено.

Б-24.143

Доказать, что для любых двух линейных преобразований φ, ψ одного и того же линейного пространства характеристические многочлены преобразований $\varphi\psi$ и $\psi\varphi$ совпадают.

Б-24.144

Пусть φ, ψ - перестановочные линейные преобразования n-мерного пространства, причем φ имеет n различных собственных значений. Доказать, что все собственные векторы преобразования φ являются собственными и для ψ, так что матрицы φ и ψ диагональны в обшем для них базисе.

Б-24.145

Пусть линейное преобразование φ диагонализируемо и каждое его собственное подпространство инвариантно относительно линейного преобразования ψ. Доказать, что $\varphi\psi = \psi\varphi$.

Б-24.146

Пусть $\mathcal{L} = \mathcal{L}' \oplus \mathcal{L}''$, где $\mathcal{L}', \mathcal{L}''$ - ненулевые линейные подпространства в $\mathcal{L}$.
1)Пусть φ - проектирование пространства $\mathcal{L}$ на $\mathcal{L}'$ параллельно $\mathcal{L}''$, а ψ - некоторое линейное преобразование в $\mathcal{L}$. Доказать, что $\varphi\psi = \psi\varphi$ тогда и только тогда, когда подпространства $\mathcal{L}'$ и $\mathcal{L}''$ инвариантны относительно ψ.
2)Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для отражения пространства $\mathcal{L}$ в $\mathcal{L}'$ параллельно $\mathcal{L}''$.

Б-24.147

Пусть φ, ψ - линейные преобразования n-мерного линейного пространства. Дано, что $\varphi^n = \theta, \dim \operatorname{Ker} \varphi = 1$ и $[\psi, \varphi] = \psi\varphi - \varphi\psi = \varphi$. Доказать, что ψ имеет n собственных значений вида $\lambda, \lambda - 1, \ldots, \lambda - (n-1)$, где λ - некоторое число.

Б-24.148

Пусть φ и ψ - линейные преобразования пространства $\mathcal{L}$, причем φ взаимно однозначно. Найдите такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ линейное преобразование $\varphi + \delta\psi$ взаимно однозначно.

6.4.7 Problems About the Exponent of Matrices

Киселев-л2.1.2. Тождество с коммутаторами

Докажите операторное тождество $\mathrm{e}^A B \mathrm{e}^{-A} = B + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{[A, [A, \ldots [A, B] \ldots]]}_{n}$.

Solution

$$F(\lambda) := \mathrm{e}^{\lambda A} B \mathrm{e}^{-\lambda A},$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^n F(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda^n}\right|_{\lambda=0} = \left.\sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k \mathrm{e}^{\lambda A} B \mathrm{e}^{-\lambda A} A^{n-k} (-1)^{n-k}\right|_{\lambda=0} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B A^{n-k} (-1)^{n-k},$$

$C_n^k = n!/k!(n-k)!$.

Поэтому искомый оператор имеет вид:

$$\mathrm{e}^A B \mathrm{e}^{-A} = F(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B A^{n-k} (-1)^{n-k}.$$

При $n = 0$ коэффициент C_0^0=1 и

$$\sum_{k=0}^{0} A^k B A^{n-k} (-1)^{n-k} = B.$$

Докажем методом индукции равенство

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B A^{n-k} (-1)^{n-k} = \underbrace{[A, [A, \ldots [A, B] \ldots]}_{n}.$$

$n = 1 \Rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{1} C_1^k A^k B A^{n-k} (-1)^{n-k} = -BA + AB \equiv [A, B].$$

Пусть при $n = m \geqslant 1$ верно равенство

$$\sum_{k=0}^{m} C_m^k A^k B A^{m-k} (-1)^{m-k} = \underbrace{[A, [A, \ldots [A, B] \ldots]}_{m},$$

тогда при $n = m + 1$ заметим прежде всего, что $C_{m+1}^k = \frac{m!}{k!(m-k)!} \frac{(m+1-k)+k}{m+1-k} = C_m^k + C_m^{k-1}$, причем это тождество справедливо при $k = m+1$, когда следует положить $C_m^{m+1} = 0$, и при $k = 0$, когда мы полагаем $C_m^{-1} = 0$. (???? подумаю про это потом!!) Тогда

$$\sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k A^k B A^{m+1-k} (-1)^{m+1-k} = \sum_{k=0}^{m} C_m^k A^k B A^{m+1-k} (-1)^{m+1-k} + \sum_{k=1}^{m+1} C_m^{k-1} A^k B A^{m-(k-1)} (-1)^{m-(k-1)} =$$

$$= -\left(\sum_{k=0}^{m} C_m^k A^k B A^{m-k} (-1)^{m-k}\right) A + A \left(\sum_{k=0}^{m} C_m^k A^k B A^{m-k} (-1)^{m-k}\right) =$$

$$= [A, \underbrace{[A, [A, \ldots [A, B] \ldots]]}_{m} = \underbrace{[A, [A, \ldots [A, B] \ldots]}_{(m+1)},$$

т. е. мы получаем верное равенство. Таким образом, утверждение доказано.

Киселев-л2.1.3. Экспоненты и операторы

Докажите операторное тождество для любой операторной функции $F(B)$:

$$\mathrm{e}^{A}F(B)\mathrm{e}^{-A}=F\left(\mathrm{e}^{A}B\mathrm{e}^{-A}\right).$$

Solution

Согласно общему определению функция от оператора записывается в виде ряда Тейлора

$$F(B)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}F^{(n)}(0)B^{n},$$

так что рассмотрим выражение

$$\mathrm{e}^{A}B^{n}\mathrm{e}^{-A}=\underbrace{\mathrm{e}^{A}B\mathrm{e}^{-A}\ldots\mathrm{e}^{A}B\mathrm{e}^{-A}}_{n}=\left(\mathrm{e}^{A}B\mathrm{e}^{-A}\right)^{n},$$

где мы учли, что $\mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{-A}=\mathbb{1}$. Значит, действительно,

$$\mathrm{e}^{A}F(B)\mathrm{e}^{-A}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}F^{(n)}(0)\left(\mathrm{e}^{A}B\mathrm{e}^{-A}\right)^{n}=F\left(\mathrm{e}^{A}B\mathrm{e}^{-A}\right)$$

(??? еще чуть подумаю об этом.)

Киселев-л2.1.4. Коммутаторы и перестановки

Докажите, что для операторов A и B, перестановочных со своим коммутатором $[A,B]$, имеют место равенства

$$\mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B}=\mathrm{e}^{[A,B]}\mathrm{e}^{B}\mathrm{e}^{A}$$

и

$$\left(\mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B}\right)^{n}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}n(n+1)[A,B]}\mathrm{e}^{nB}\mathrm{e}^{nA}.$$

Solution.

Известно, что для любой операторной функции $\mathrm{e}^{A}F(B)\mathrm{e}^{-A}=F\left(\mathrm{e}^{A}B\mathrm{e}^{-A}\right)$, поэтому

$$\mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B}=\mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B}\mathrm{e}^{-A}\mathrm{e}^{A}=\exp\left(\mathrm{e}^{A}B\mathrm{e}^{-A}\right)\mathrm{e}^{A}.$$

А также известно, что $\mathrm{e}^{A}B\mathrm{e}^{-A}=B+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\underbrace{[A,[A,\ldots[A,B]\ldots]}_{n}$, и тут по условию задачи обрывается на первом слагаемом:

$$\mathrm{e}^{A}B\mathrm{e}^{-A}=B+[A,B]$$

Поэтому,

$$\mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B}=\mathrm{e}^{B+[A,B]}\mathrm{e}^{A}=\mathrm{e}^{[A,B]}\mathrm{e}^{B}\mathrm{e}^{A},$$

поскольку $[B,[A,B]]=[A,[A,B]]=0$, и первая часть утверждения доказана.

(??? дальше я уже не соображаю, потом заново подумаю.)

Далее,

$$\left(\mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B}\right)^{n}=\left(\mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B}\right)^{n-1}\mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B}=\left(\mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B}\right)^{n-1}\mathrm{e}^{[A,B]}\mathrm{e}^{B}\mathrm{e}^{A}=\mathrm{e}^{[A,B]}\left(\mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B}\right)^{n-1}\mathrm{e}^{B}\mathrm{e}^{A}.$$

Эту цепочку можно продолжить, поскольку аналогичным образом

$$\left(\mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B}\right)^{n-1}\mathrm{e}^{B}\mathrm{e}^{A}=\mathrm{e}^{[A,B]}\left(\mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B}\right)^{n-2}\mathrm{e}^{B}\left(\mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B}\right)\mathrm{e}^{A}=\mathrm{e}^{2[A,B]}\left(\mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B}\right)^{n-2}\mathrm{e}^{2B}\mathrm{e}^{2A}.$$

Уже доказано, что

$$\mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{kB}=\mathrm{e}^{k[A,B]}\mathrm{e}^{kB}\mathrm{e}^{A},$$

где k - число. Значит, продолжая понижать степень так, как это было сделано выше, находим

$$\left(\mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B}\right)^{n}=\mathrm{e}^{\sum\limits_{k=1}^{m}k[A,B]}\left(\mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B}\right)^{n-m}\mathrm{e}^{mB}\mathrm{e}^{mA}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}n(n+1)[A,B]}\mathrm{e}^{nB}\mathrm{e}^{nA},$$

где мы использовали известное выражение для суммы арифметической прогрессии.

Киселев-л2.1.5. Тождество Бейкера-Хаусдорфа

Докажите, что для операторов A и B, перестановочных со своим коммутатором $[A, B]$, имеет место тождество Бейкера-Хаусдорфа

$$\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}[A,B]}\mathrm{e}^{B}\mathrm{e}^{A}.$$

Solution

Вычислим $\exp(A+B)$ как предел

$$\mathrm{e}^{A+B} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}(A+B)\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\mathrm{e}^{A/n}\mathrm{e}^{B/n}\right)^n,$$

где порядок сомножителей под знаком степени, конечно, можно было выбрать и обратным, что не умаляет общности дальнейшего рассмотрения. В предыдущей задаче мы показали, что

$$\left(\mathrm{e}^{A/n}\mathrm{e}^{B/n}\right)^n = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}n(n+1)\frac{1}{n^2}[A,B]}\mathrm{e}^{B}\mathrm{e}^{A},$$

так что

$$\mathrm{e}^{A+B} = \lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}n(n+1)\frac{1}{n^2}[A,B]}\mathrm{e}^{B}\mathrm{e}^{A} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}[A,B]}\mathrm{e}^{B}\mathrm{e}^{A}$$

6.5 Tasks for Euclidean and Unitary Spaces

6.5.1 Problems About Dot Product and Gram Matrix

Б-25.2

Может ли скалярное произведение в вещественном n-мерном линейном пространстве задаваться следующей функцией от координат векторов:
1)$x_1y_1 + 2x_2y_2$, а) $n = 2$;
2)$x_1y_1 + x_2$, $\quad n = 2$; б) $n = 3$;
3)$3x_1y_1 + 2x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$, $\quad n = 2$;
4)$2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$, $\quad n = 2$; 5) $x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, $\quad n = 3$.

Б-25.3

На плоскости нарисован эллипс с полуосями 2 и 1. Пусть дан вектор $\mathbf{x}$. Рассмотрим вектор $\mathbf{x}_0$, сонаправленный $\mathbf{cx}$, начало которого - центр эллипса, а конец лежит на эллипсе. Положим $\varphi(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|/\,|\mathbf{x}_0|$, и $\varphi(\mathbf{o}) = 0$. Теперь произвольной паре векторов можно сопоставить число

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi^2(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - \varphi^2(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

Доказать, что этим определено скалярное произведение. Найти его выражение через координаты векторов в канонической системе координат эллипса.

Б-25.4

1)Доказать, что функция $F(X, Y) = \operatorname{tr} X^T Y$ записывается через элементы матриц формулой (
1)из введения и может быть принята за скалярное произведение в пространстве вещественных матриц размеров $m \times n$.
2)Евклидовой нормой матрицы называется ее длина при этом скалярном произведении. Доказать, что евклидова норма равна квадратному корню из суммы квадратов всех элементов матрицы.
3)Найти длины векторов стандартного базиса и углы между ними относительно такого скалярного произведения.

Б-25.5

Рассматривается пространство квадратных матриц порядка n, и каждой паре матриц сопоставлено число:
1)$F(X, Y) = \operatorname{tr} XY$;
2)$F(X, Y) = \operatorname{tr} X \operatorname{tr} Y$;
Может ли такая функция быть принята за скалярное произведение?

Б-25.6

Пусть P фиксированная квадратная матрица порядка m. При каких условиях на эту матрицу функция $F(X,Y) = \operatorname{tr} X^T PY$ является скалярным произведением в линейном пространстве матриц размеров $m \times n$?

Б-25.7

В линейном пространстве функций, непрерывных на отрезке $[-1,1]$, функциям f и g сопоставляется число

$$(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

Доказать, что этим определено скалярное произведение.

Б-25.8

В линейном пространстве многочленов степени не выше n двум многочленам p и q сопоставлено число $F(p,q)$. Доказать, что этим определено скалярное произведение:

1)$F(p,q) = \int\limits_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$

2)F - сумма произведений производных порядка k, вычисленных в точке t_0

$$F(p,q) = \sum_{k=0}^{n} p^{(k)}\left(t_0\right) q^{(k)}\left(t_0\right);$$

3)F - сумма произведений коэффициентов при равных степенях,

$$F(p,q) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_k;$$

4)F - сумма произведений значений p и q в $m > n$ раз-

$$F(p,q) = \sum_{k=1}^{m} p\left(t_k\right) q\left(t_k\right)$$

(Убедиться, что требование $m > n$ необходимо.)

Б-25.9

Доказать, что в евклидовом пространстве из задачи 25.8,
1)многочлены Лежандра

$$P_0(t) = 1, \quad P_k(t) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dt^k}\left(t^2 - 1\right)^k \quad (k = 1, \ldots, n)$$

образуют ортогональный базис. Найти длины (нормы) этих многочленов.

Б-25.10

Пусть **e** - базис в линейном пространстве $\mathcal{E}$. Доказать, что в $\mathcal{E}$ существует одно и только одно скалярное произведение, относительно которого базис e - ортонормированный.

Б-25.11

Пусть в вещественном линейном пространстве заданы два скалярных произведения $(x,y)_1$ и $(x,y)_2$. Доказать, что для любых положительных чисел λ и μ функция $(x,y) = \lambda(x,y)_1 + \mu(x,y)_2$ - также скалярное произведение.

Б-25.12

Дано линейное пространство $\mathcal{L}$ - прямая сумма подпространств $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$, в которых заданы скалярные произведения $(x,y)_1$ и $(x,y)_2$. Пусть $x = x_1 + x_2$ и $y = y_1 + y_2$, где $x_1, y_1 \in \mathcal{L}_1; x_2, y_2 \in \mathcal{L}_2$. Доказать, что функция $(x,y) = \left(x_1, y_1\right)_1 + \left(x_2, y_2\right)_2$ есть скалярное произведение на $\mathcal{L}$.

Б-25.13

Пусть $|x|$ длина вектора x в евклидовом пространстве. Доказать, что:
1)$(x,y) = \frac{1}{4}\left(|x+y|^2 - |x-y|^2\right)$;
2)$(x,y) = \frac{1}{2}\left(|x+y|^2 - |x|^2 - |y|^2\right)$.

Б-25.14

Пусть в вещественном линейном пространстве заданы два скалярных произведения $(x,y)_1$ и $(x,y)_2$, и любой вектор имеет одинаковыс длины в каждом из них: $(x,x)_1 = (x,x)_2$. Доказать, что скалярные произведения совпадают.

Б-25.15

В пространстве многочленов степени $\leqslant 3$ со стандартным скалярным произведением задан треугольник со сторонами t, t^3 и $t - t^3$. Найти
1)углы треугольника;
1)длины его сторон.

Б-25.16

Доказать, что треугольник в евклидовом пространстве прямоугольный тогда и только тогда, когда длина одной из сторон равна длине другой стороны, умноженной на косинус угла между этими сторонами.

Б-25.17

Доказать, что медиана треугольника в евклидовом пространстве короче одной из сторон, между которыми она лежит.

Б-25.18

Доказать, что сумма углов произвольного треугольника в евклидовом пространстве равна π.

Б-25.19

Пусть $\mathcal{L}$ конечномерное линейное пространство. Доказать, что выбор определенного изоморфизма $\mathcal{L}$ на его сопряженное $\mathcal{L}^*$ равносилен заданию скалярного произведения в $\mathcal{L}$.
Скалярное произведение в координатах (2 5.20-25.44)

Б-25.20

В арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти скалярные произведения
2)$\|\ 1\quad 2\quad 1\quad 4\|^T$ и $\|1\quad -1\quad 1\quad 0\ \|^T$;
3)$\| -121-4\|^T$ и $\|4-1-21\|^T$;
4)$\mathbf{c}_{171}$ и $\mathbf{c}_{172}$; 5) $\mathbf{c}_{174}$ и $\mathbf{c}_{175}$.

Б-25.21

Найти угол между ребром и диагональю n-мерного куба.

Б-25.22

Найти длины векторов и косинусы углов между ними в задаче 25.20.

Б-25.23

Пусть в некотором базисе квадрат длины любого вектора x равен сумме квадратов его координат. Доказать, что базис ортонормированный.

Б-25.24

Нарисовать на плоскости какой-либо базис с матрицей Грама A_{19}. Описать все множество таких базисов.

Б-25.25.

Найти скалярное произведение векторов, если заданы их координаты в некотором базисе и матрица Грама Γ этого базиса:

1)$\| \ 1 \quad 1 \quad 1 \ \|^T, \| \ 1 \quad 3 \quad 1 \ \|^T, \quad \Gamma = \left\| \begin{matrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{matrix} \right\|$ oh.

2)$\| -1 -1 \quad 1\|^T, \| \ 0 \quad 1 \quad 3 \ \|^T, \quad \Gamma = \left\| \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{matrix} \right\|$;

3)$\mathbf{c}_{20}, \mathbf{c}_{23}, \Gamma = A_{24}$;

4)$\mathbf{c}_{23}, \mathbf{c}_{36}, \Gamma = A_{17}$; 5) $\|1 \dots 1\|^T, \mathbf{c}_{282}, A_{630}$.

Б-25.26

Найти углы между векторами, заданными их координатами: 1)$| \ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \ \|, \quad\ 0 \quad 2 \quad 0 \quad 2$; базис ортонормированный;

2)$| \ 2 \quad 1 \quad \sqrt{2} \quad 1\|, \| \ 0 \quad 2 \quad 0 \quad 2\|$; базис ортонормированный; , $x^*_:$

4)$\|10\| \ 1 \ 0\|01\|$; базис с матрицей Грама $\left\| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{matrix} \right\|$; 5) $\mathbf{c}_{12}, \mathbf{c}_{33}$; базис с матрицей Грама A_{58}; 6) $\mathbf{c}_{18}, \mathbf{c}_{12}$; базис с матрицей Грама A_{58}.

Б-25.27

Найти длины векторов в задаче 25.25.

Б-25.28

При каких значениях параметров ε, α данные матрицы могут служить матрицами Грама в евклидовом пространстве:

1)A_{80};

2)A_{77};

3)A_{76}.

Б-25.29

Доказать, что в n-мерном пространстве квадратная матрица Γ порядка n может служить матрицей Грама каколибо базиса тогда и только тогда, когда найдется квадратная матрица S с детерминантом, отличным от нуля, такая, что $\Gamma = S^T S$.

Б-25.30

Доказать, что в n-мерном пространстве квадратная матрица Γ порядка n может служить матрицей Грама какого-либо базиса тогда и только тогда, когда она положительно определена, то есть $\Gamma = \Gamma^T$ и $\xi^T \Gamma \xi > 0$ для любого столбца $\xi \neq 0$.

Б-25.31

Пусть - матрица Грама некоторого базиса е. Доказать, что матрицами Грама некоторых базисов являются также матрицы:

1)Γ^{-1};

2)Γ^2;

3)Γ^k, где k целое.

Б-25.32

Пусть Γ_1 и Γ_2 - матрицы Грама базисов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$. Доказать, что при любых положительных коэффициентах матрица $\Gamma = \alpha_1 \Gamma_1 + \alpha_2 \Gamma_2$ также есть матрица Грама некоторого базиса.

Б-25.33

В матрице Грама некоторого базиса все элементы равны либо 0, либо 1, либо -1. Доказать, что базис ортонормированный.

Б-25.34

Доказать, что максимальный по модулю элемент матрицы Грама расположен на главной диагонали.

Б-25.35

Может ли третья строка матрицы Грама некоторого базиса в четырехмерном пространстве быть строкой:
1)$\| \ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \ \|$; 2) $\| -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \ $;
3)$\| \ 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \ $;
4)$\| \ 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \ \|$

Б-25.36

Найти матрицу Грама стандартного базиса пространства квадратных матриц второго порядка со скалярным произведением, определенным в задаче 25.6, если P равно:
1)A_{17};
2)A_{24}.

Б-25.37

В пространстве многочленов степени не выше двух со стандартным скалярным произведением найти матрицу Грама стандартного базиса.

Б-25.38

В пространстве квадратных матриц порядка n со скалярным произведением задачи 25.4 найти матрицу Грама стандартного базиса.

Б-25.39

Дана матрица Грама базиса е. Найти матрицу Грама его биортогонального базиса $\mathbf{e}^*$.

Б-25.39

Дана матрица Грама базиса е. Найти матрицу Грама его биортогонального базиса $\mathbf{e}^*$.

Б-25.40

Пусть любые два различных вектора из системы $x_1, \ldots, x_n$ образуют угол $\pi/3$. Доказать, что эти векторы линейно независимы.

Б-25.41

Даны две системы векторов $x_1, \ldots, x_p$ и $y_1, \ldots, y_p$, и из скалярных произведений $c_{ij} = (x_i, y_j)$ составлена матрица C.
1)Доказать, что $\det C = 0$, если хоть одна из систем линейно зависима.
2)Верно ли обратное утверждение?

Б-25.42

Две упорядоченные системы векторов $e_1, \ldots, e_k$ и $f_1, \ldots, f_k$ в евклидовом пространстве называются биортогональными, если $(e_i, f_j) = 0$ при $i \neq j$, а $(e_i, f_i) = 1$ для всех i. Доказать, что каждая из двух биортогональных систем линейно независима.

Б-25.43

Для системы векторов $x_1, \ldots, x_p$ евклидова пространства составляется матрица C с элементами $c_{ij} = (x_i, x_j)$. Пусть $\operatorname{Rg} C = k$ и минор порядка k в левом верхнем углу базисный. Указать какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему данной системы векторов.

Б-25.44

Используя свойства матрицы, составленной из всевозможных скалярных произведений, доказать, что для любой матрицы A выполнено $\operatorname{Rg} A^T A = \operatorname{Rg} A$.

6.5.2 Problems About Orthogonal Matrices

(25.45-25.58)

Б-25.45

Какие из следующих матриц являются ортогональными: 9.:
1)A_{32}; 7) A_{243};
2)A_{22};
3)A_{16}
4)A_{15}; 5) A_{20} 6) A_{64}; w. 1
2)A_{432}; 8) A_{253} 9) A_{255}; 10) A_{329} 1
1)A_{330}; (
4)12)A_{432}; 1
3)A_{433}; 1
4)A_{445}; 15) A_{436}.

Б-25.46

Останется ли ортогональная матрица ортогональной если:
1)переставить ее строки;
2)переставить ее столбцы;
3)написать элементы строк, имеющих нечетные номера, в обратном порядке;
4)транспонировать; 5) повернуть вокруг побочной диагонали; 6) 6) умножить одну из строк на число; 7) прибавить одну из строк к другой.

Б-25.50

Может ли ортогональная матрица четвертого порядка содержать строку:
1)$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$;
2)$\begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix}$?

Б-25.51

Дана строка длины n, сумма квадратов элементов которой равна 1. Существует ли ортогональная матрица порядка n с такой строкой?

Б-25.52

Найти все ортогональные матрицы, имеющие первую строку $\begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\frac{1}{2} \end{Vmatrix}$.

Б-25.53

1)Могут ли все элементы ортогональной матрицы быть положительными?
2)Доказать, что ортогональная матрица, все элементы которой неотрицательны, получается из единичной матрицы перестановкой столбцов.

Б-25.54

Найти все ортогональные матрицы, являющиеся верхними треугольными.

Б-25.55

При каком условии подматрица ортогональной матрицы также будет ортогональной?

Б-25.56

Допустим, что все элементы ортогональной матрицы порядка n равны между собой по абсолютной величине. Чему равна абсолютная величина элемента?

Б-25.57

Доказать, что ортогональные матрицы, описанные в задаче 25.56, существуют, если $n = 2^k, k$ - натуральное число.

Б-25.58

1)Даны два ортонормированных базиса $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_n$. Доказать, что матрица из скалярных произведений (e_i, f_j) - ортогональная.

2)Даны две ортонормированные системы по $k < n$ векторов в n-мерном евклидовом пространстве. При каком условии ортогональна матрица из попарных скалярных произведений векторов этих систем?

6.5.3 Problems About Orthogonal Subspace Complement

Б-26.1

Пусть a - ненулевой вектор n-мерного евклидова пространства. Доказать, что уравнение $(a, x) = 0$ определяет подпространство размерности $n - 1$.

Б-26.2

Пусть множества P и Q векторов евклидова пространства таковы, что $(x, y) = 0$ для любых $x \in P$ и $y \in Q$. Доказать, что линейные оболочки этих множеств ортогональны.

Б-26.3

В евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ найти ортогональные дополнения

1)нулевого подпространства;

2)пространства $\mathcal{E}$.

Б-26.4

Пусть подпространства $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_s$ евклидова пространства попарно ортогональны. Доказать, что $\mathcal{L}_1 + \ldots + \mathcal{L}_s$ - прямая сумма.

Б-26.5

Доказать следующие свойства операции перехода к ортогональному дополнению:

1)$(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)^{\perp} = \mathcal{L}_1^{\perp} \cap \mathcal{L}_2^{\perp}$

2)$(\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2)^{\perp} = \mathcal{L}_1^{\perp} + \mathcal{L}_2^{\perp}$;

3)$\left(\mathcal{L}^{\perp}\right)^{\perp} = \mathcal{L}$.

Б-26.6

Подпространства $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ ортогональны. Обязательно ли ортогональны $\mathcal{L}_1^{\perp}$ и $\mathcal{L}_2^{\perp}$?

Б-26.7

Найти нормированный вектор, ортогональный заданным:

1)$\|404\|^T, \|265\|^T$, базис ортонормированный;

2)$\|2321\|^T, \|1012\|^T, \|0100\|^T$, базис ортонормированный;

3)$\|31\|^T$, базис с матрицей Грама A_{56};

4)$\|-110\|^T$, $\|011\|^T$, базис с матрицей Грама A_{207}.

Б-26.8

Подпространство $\mathcal{L}$ задано в ортонормированном базсе системой линейных уравнений $A\xi = $. Найти:

1)базис в $\mathcal{L}^{\perp}$;

2)систему уравнений подпространства $\mathcal{L}^{\perp}$.

Б-26.9

Пусть $a_1, \ldots, a_k$ - базис подпространства $\mathcal{L}$, и координатные столбы векторов $a_1, \ldots, a_k$ в ортонормированном базисе пространства $\mathcal{E}$ составляют матрицу A. Найти:

1)базис в $\mathcal{L}^{\perp}$;

2)систему уравнений подпространства $\mathcal{L}^{\perp}$.

Б-26.10

Решите с помощью геометрических соображений задачу 18.20.

Б-26.11

Подпространство $\mathcal{L}$ задано в базисе e с матрицей Грама Γ системой линейных уравнений $A\xi =$. Найти:
1)базис в $\mathcal{L}^{\perp}$
2)матрицу системы уравнений подпространства $\mathcal{L}^{\perp}$.

Б-26.12

Пусть $a_1, \dots, a_k$ - базис подпространства $\mathcal{L}$, и координатные столбы векторов $a_1, \dots, a_k$ в базисе **e** пространства $\mathcal{E}$ составляют матрицу A. Дана матрица Грама Γ базиса e. Найти:
1)базис в $\mathcal{L}^{\perp}$
2)матрицу системы уравнений подпространства $\mathcal{L}^{\perp}$.

Б-26.13

Подпространство $\mathcal{L}$ задано как линейная оболочка -кторов, имеющих в ортонормированном базисе координаты - столбцы:
1)$\|312\|^T$
2)$\|1-51\|^T, \|-111\|^T$
3)$\|3-1591\|^T, \|3-6-32\|^T$;
4)$\|43-32\|^T$, $\|-132-3\|^T$, $\|291-4\|^T$. Найти: а) матрицу системы уравнений, определяющей $\mathcal{L}^{\perp}$, б) базис в $\mathcal{L}^{\perp}$.

Б-26.14

Подпространство $\mathcal{L}$ задано в ортонормированном базисе системой линейных уравнений $A\xi = 0$. Найти базис подпространства $\mathcal{L}^{\perp}$, если матрица A равна:
1)$\|321\|$;
2)$\left\| \begin{matrix} 1 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\|$;
3)$\left| \begin{matrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{matrix} \right\|$;
4)$\left\| \begin{matrix} 1 & -5 & -6 & 11 \\ 5 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & 8 & 7 & 15 \end{matrix} \right\|$; 5) A_{519}; 6) A_{582}; 7) A_{518}; 8) A_{514}.

Б-26.15

Подпространство $\mathcal{L}$ задано в ортонормированном базисе системой линейных уравнений $A\xi = 0$. Найти систему уравнений подпространства $\mathcal{L}^{\perp}$:
1)$x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0$, $8x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0$
2)$8x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0$ $8x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0$ $-6x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 0$ $3x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 + 11x_5$
3)$3x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 + 11x_5 = 0$,
3)$4x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 16x_5 = 0$;
4)$5x_1 + 24x_2 - 7x_3 - 3x_4 = 0$, $-x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 0$ $-x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 0$б
5) Система уравнений имеет матрицу а) A_{573}, б) A_{583}.

Б-26.16

Подпространство $\mathcal{L}$ задано в базисе **e** с матрицей Грама Γ системой линейных уравнений $A\xi = 0$:
1)$A = \|121\|^T, \Gamma = A_{207}$;
2)$A = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|, \Gamma = A_{385}$;
3)$A = \left\| \begin{matrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\|, \Gamma = A_{386}$;
4)$A = \left\| \begin{matrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|, \Gamma = A_{424}$. Найти: а) базис в $\mathcal{L}^{\perp}$; б) матрицу системы уравнений подпространства $\mathcal{L}^{\perp}$.

Б-26.17

Пусть $a_1, \dots, a_k$ - базис подпространства $\mathcal{L}$, и координатные столбцы векторов $a_1, \dots, a_k$ в базисе **e** пространства $\mathcal{E}$ составляют матрицу A. Дана матрица Грама Γ базиса e:

1)$A = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 2 \end{matrix} \right\|^T, \quad \Gamma = A_{207};$

2)$A = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\|, \quad \Gamma = A_{385};$

3)$A = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix} \right\|, \quad \Gamma = A_{386};$

4)$A = \left\| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{matrix} \right\|, \quad \Gamma = A_{424}$. Найти а) базис в $\mathcal{L}^\perp$; б) систему уравнений подпространства $\mathcal{L}^\perp$

Б-26.18

В пространстве квадратных матриц со стандартным скалярным произведением найти ортогональное дополнение подпространства

1)матриц со следом, равным нулю;

2)верхних треугольных матриц.

Б-26.19

В пространстве многочленов степени не выше n со стандартным скалярным произведением найти ортогональное дополнение подпространства многочленов четной степени.

Б-26.20

Пусть евклидово пространство $\mathcal{E}$ - прямая сумма подпространств $\mathcal{L}_i (i = 1, \dots, s)$, и $x = \sum x_i y = \sum y_i \, (x_i, y_i \in \in \mathcal{L}_i)$. Доказать, что подпространства $\mathcal{L}_i$ попарно ортогональны, если $(x, y) = \sum (x_i, y_i)$ для любых x и y.

Б-26.21

1)Для нахождения коэффициентов разложения вектора $\vec{b}$ по векторам $\vec{a_1}$ и $\vec{a_2}$ составлена система из трех линейных уравнений с двумя неизвестными. Установить, что теорема Фредгольма для этой системы равносильна следующему (геометрически очевидному) утверждению: вектор $\vec{b}$ раскладывается по $\vec{a_1}$ и $\vec{a_2}$ тогда и только тогда, когда он ортогонален каждому вектору $\vec{y}$, ортогональному этим векторам.

2)Доказать теорему Фредгольма, пользуясь результатом задачи (??).

6.5.4 Problems About Orthogonal Projections

(26.22-26.41)

Б-26.22

В евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ задан вектор x. Найти его ортогональную проекцию и ортогональную составляющую при проектировании

1)на нулевое подпространство;

2)на $\mathcal{E}$.

Б-26.23

В подпространстве $\mathcal{L} \subset \mathcal{E}$ задан базис $a_1, \dots, a_k$. В ортонормированном базисе пространства $\mathcal{E}$ координатные столбцы этих векторов составляют матрицу A. Вектор $x \in \mathcal{E}$ задан своим координатным столбцом. Найти ортогональные проекции x' и x'' вектора x на $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^\perp$.

Б-26.24

В ортонормированном базисе подпространство $\mathcal{L}$ задано системой линейных уравнений с матрицей A (строки A линейно независимы). Вектор x задан своим координатным столбцом ξ. Найти ортогональные проекции x' и x'' вектора x на $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^\perp$.

Б-26.25

В пространстве $\mathcal{E}$ выбран базис е с матрицей Грама Г. Подпространство $\mathcal{L}$ натянуто на линейно независимые векторы $a_1, \ldots, a_k$, координатные столбцы которых составляют матрицу A. Вектор $x \in \mathcal{E}$ задан своим координатным столбцом . Найти ортогональные проекции x' и x'' вектора x на $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^{\perp}$.

Б-26.26.

В базисе **e** с матрицей Грама Г подпространство $\mathcal{L}$ задано системой линейных уравнений с матрицей A (строки A линейно независимы). Вектор x задан своим координатным столбцом ξ. Найти ортогональные проекции x' и x'' вектора x на $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^{\perp}$.

Б-26.27

Подпространство $\mathcal{L}$ - линейная оболочка векторов $a_1, \ldots, a_k$. В ортонормированном базисе заданы координатные столбцы этих векторов и координатный столбец ξ вектора x. Найти координатные столбцы ξ' и ξ'' ортогональных проекций вектора x соответственно на $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^{\perp}$:

1)$\mathbf{a}_1 = \| \; 10 \quad 5 \quad 5 \; \|^T, \quad \xi = \| \; 3 \quad 0 \quad 0 \; \|^T;$

2)$\mathrm{a}_1 = \| \; 1 \quad 5 \; \|^T, \quad \mathrm{a}_2 = \| \; -1 \quad 3 \; \|^T, \quad \xi = \| \; 1 \quad 3 \quad -2 \; \|^T;$

3)$\mathrm{a}_1 = \| \; 2 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \; \|^T, \quad \varepsilon = \| \; 5 \quad 3 \quad 7 \quad 0 \; \|^T;$

4)$\mathbf{a}_1 = \| \; -2 \quad 1 \quad 1 \; \|^T, \quad \mathbf{a}_2 = \|1 \; 1 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \; \|^T, \xi = \| \; 2 \quad -1 \quad 3 \quad -2 \; \|^T;$

Б-26.28

В ортонормированном базисе подпространство $\mathcal{L}$:адано системой линейных уравнений с матрицей A, а векпор x - координатным столбдом ξ. Найти проекции x на $\mathcal{L}$ и rа $\mathcal{L}^{\perp}$

1)$A = \| \; 1 \quad 1 \quad 1 \; \|, \quad \xi = \| \; 1 \quad 2 \quad 3 \; \|^T;$

2)$A = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ -1 & -1 & 2 \end{Vmatrix}, \quad \xi = \| \; 4 \quad 2 \quad 6 \; \|^T;$

4)$A = \begin{Vmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 \\ 3 & -5 & 6 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \varepsilon = \| \; -5 \quad 9 \quad 4 \; \|^T;$ 4. 5) $A = \begin{Vmatrix} 4 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \end{Vmatrix}, \quad \xi = \| \; -2 \quad 4 \quad 2 \quad 0 \; \|^T;$

Т6 6) $A = \begin{Vmatrix} 10 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 8 & 3 & 1 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \xi = \|8 - 5 \quad 3 \quad -1\|^T.$

Б-26.29

Для векторов и подпространств, заданных в зада-те 26.28 найти координаты вектора y, получаемого отражением зектора x в подпространстве $\mathcal{L}$.

Б-26.30

Найти ортогональную проекцию многочлена $35t^4 + -15t^3 - 15t^2 - 8t + 4$ на подпространство многочленов степени эе выше 2 в пространстве многочленов:

1)со стандартным скалярным произведением;

2)со скалярным произведением, определенным в задаге 25.8, 3).

Б-26.31

В пространстве многочленов со стандартным скагярным произведением найти расстояние от многочлена t^n до тинейной оболочки многочленов $1, t, \ldots, t^{n-1}$:

1)при $n = 2$;

2)при $n = 3$.

Б-26.33

Пусть для любого вектора $x \in \mathcal{E}$ сумма его ортогоэальных проекций на подпространства $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{E}$ равна ортоональной проекции x на их сумму $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$. Доказать, что подтространства $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ ортогональны.

Б-26.34

Рассматривается пространство функций, непрерывгых на отрезке $[-1,1]$, со скалярным произведением, опреде- 254 ГЛ. 10. Евклидовы и унитарнъе пространства ленным в задаче 25.7. Ортогональную проекцию функции f на подпространство $\mathcal{P}_k$ многочленов степени не выше k, разложить по базису, состоящему из многочленов Лежандра $P_i(t)$ (задача 25.9).

Б-26.35

Пусть x' - ортогональная проекция x на подпространство. Доказать, что $|x'| \leqslant |x|$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $x' = x$.

Б-26.36

Пусть x' - ортогональная проекция x на подпространство $\mathcal{L} \subset \mathcal{E}$, а x'' - ортогональная составляющая. Доказать, что для любого вектора $y \in \mathcal{L}$, отличного от x', выполнено $|x''| < |x - y|$.

Б-26.37

Пусть $\mathcal{L}_i, \quad (i = 1, \ldots, s)$ попарно ортогональные подпространства евклидова пространства. Доказать, что сумма квадратов длин проекций произвольного вектора x на эти подпространства не превосходит $|x|^2$, и эта граница достигает- ся, если x принадлежит сумме подпространств.

Б-26.38

Рассмотрим два подпространства $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2$. Обозначим через $\mathcal{L}'$ ортогональное дополнение $\mathcal{L}_1$ в $\mathcal{L}_2$, а x_1, x_2 и x' ортогональные проекции вектора x на подпространства $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ и $\mathcal{L}'$. Доказать, что:

1)$x_2 = x_1 + x'$

2)$|x_1| \leqslant |x_2|$, причем для любого x равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$.

Б-26.39

Пусть $\mathcal{L}$ – k-мерное подпространство n-мерного евклидова пространства $\mathcal{E}$. Пусть также $e_1, \ldots, e_n$ - ортонормированный базис в $\mathcal{E}$, а $e_1', \ldots, e_n'$ ортогональные проекции этих векторов на $\mathcal{L}$. Доказать, что $\sum\limits_{i=1}^{k} |e_i'|^2 = k$.

Б-26.40

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ - ортонормированный базис в евклидовом пространстве и система векторов $g_1, \ldots, g_n$ такова, что $\sum\limits_{i=1}^{n} |\mathrm{e}_i - g_i| < 1$. Доказать, что эта система векторов линейно независима.

Б-26.41

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ - ортонормированный базис в евклидовом пространстве и система векторов $g_1, \ldots, g_n$ такова, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \cos\left(\widehat{e_i, g_i}^{\,i}\right) \geqslant (2n-1)/2$. Доказать, что эта система векторов линейно независима.

6.5.5 Problems About Orthogonalization

Б-26.42

Ортогонализовать следующие системы векторов арифметического пространства со стандартным скалярным произведением:

1)$\| \; 1 \quad 3 \quad -2 \; \|^T, \| \quad 7 \quad -2 \; \|^T$; 7) $\| \; 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \; \|^T, \| \; 2 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \; \|^T, \quad 4 \quad 4 \quad 0 \quad 2 \; \|^T$,

Б-26.43

В евклиловом пространстве $\mathcal{E}$ выбран ортонормиро- $\|1 - 5 - 5 - 1\|^T$.

Б-26.43

В евклидовом пространстве $\mathcal{E}$ выбран ортонормированный базис e. В нем заданы координаты векторов базиса a подпространства $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{E}$. С помощью процесса ортогонализации найти са в $\mathcal{L}$ и выписать матрицу перехода от базиса a к этому базису:

1)$\|3 \quad 1\|^T, \|9-7\|^T$

2)$\| \ 1 \quad 1 \quad 0 \ \|^T, \quad \| \ 2 \quad 0 \quad -1 \ \|^T, \quad \| \ 0 \quad 0 \quad 3 \ \|^T;$

3)$\|1 \quad 1{-}2\sqrt{2}\|^T, \quad \|3{-}1{-}2\sqrt{2}\|^T, \|42{-}\sqrt{2}\|^T$; 6) $\| \ 1 \quad 4 \quad 2 \quad 3 \ \|^T, \quad \| \ 1 \quad 5 \quad 0 \quad 3 \ \|^T, \quad \| \ -1 \quad 9 \quad 2 \quad 7 \ \|^T;$ 7) $\|4-2-10\|^T, \quad \|9-2-20\|^T, \|-3-1 \quad 11 \quad 1\|^T;$

Б-26.44

Ортогонализовать и нормировать систему векторов, заданных в базисе **e** своими координатными столбцами. Матрица Грама Γ базиса e задана:

1)$\|13\|^T, \|24\|^T, \quad \Gamma = A_{19};$

Б-26.45

1)С помощью процесса ортогонализации доказать, что невырожденная квадратная матрица может быть разло- 256 Гл. 10. Евклидовы и унитарные пространства Жена в произведение ортогональной матрицы Q и верхней треугольной матрицы R с положительными диагональными элементами (QR-разложение).

2)Доказать единственность QR-разложения невырожденной матрицы.

Б-26.46

Получить QR-разложение данной матрицы (задача 26.45):

1)$\begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 6 \end{Vmatrix};$

2)$\begin{Vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & -7 \end{Vmatrix};$

3)$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{Vmatrix};$

4)$\begin{Vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{Vmatrix}; 5\Bigg) \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & 3 \end{Vmatrix}; 6\Bigg) \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix},$

Б-26.47

Доказать, что матрица Грама произвольного базиса может быть разложена в произведение $\Gamma = R^T R$, где R - верхняя треугольная матрица с положительными элементами на диагонали. (Сравнить это с задачей 25.29.)

Б-26.48

В евклидовом пространстве известна матрица Грама базиса **f**. Найти матрицу перехода к ортонормированному базису, получаемому ортогонализацией **f**:

1)$\Gamma = \begin{Vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 13 \end{Vmatrix}$

2)$\Gamma = \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 13 \end{Vmatrix}$

3)$\Gamma = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{Vmatrix};$

4)$\Gamma = \begin{Vmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 20 \end{Vmatrix}.$

6.5.6 Problems About Volume

(26.49-26.54)

Б-26.49

Доказать, что детерминант матрицы Грама системы векторов не меняется при ортогонализации этой системы (без нормировки векторов).

Б-26.50

Найти объем параллелепипеда, построенного на заданных векторах. Координатные столбцы векторов в ортонормированном базисе составляют матрицу:
1)A_{617} при $n=4$;
2)$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$;
3)A_{395};
4)A_{397}; 5) A_{398} 6) A_{412} 7) A_{436}.

Б-26.51

Найти объем параллелепипеда, построенного на заданных векторах. Координатные столбцы векторов в базисе e составляют матрицу A. Матрица Грама базиса e равна Γ :
1)$A=A_{402}, \quad \Gamma=\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$;
2)$A=A_{404}, \quad \Gamma=A_{630}$ при $n=4$;
3)$A=A_{397}, \quad \Gamma=A_{424}$.

Б-26.52

Доказать, что объем параллелепипеда, построенно- го на векторах $f_1,\ldots,f_n$, не превосходит произведения длин его ребер:

$$V\{f_1,\ldots,f_n\}=\det\Gamma(f_1,\ldots,f_n)\leqslant|f_1|^2\ldots|f_n|^2,$$

и равенство имеет место тогда и только тогда, когда ребра попарно ортогональны.

Б-26.53

Для квадратной матрицы A порядка n:
1)доказать неравенство Адамара

$$|\det A|^2\leqslant\prod_{k=1}^n\left(\sum_{i=1}^n|a_{ik}|^2\right);$$

2)выяснить условия, при которых неравенство Адамара выполнено как равенство;
3)выписать неравенство Адамара для матрицы A_{18}. Чем объясняется такая большая разница между правой и левой частью?

Б-26.54

1)Пусть $e_1,\ldots,e_n$ - базис в евклидовом пространстве, и $e''_{k+1},\ldots,e''_n$ - ортогональные проекции векторов $e_{k+1},\ldots\ \ldots,e_n$ на ортогональное дополнение линейной оболочки $e_1,\ldots,e_k$. Доказать, что $V\{e_1,\ldots,e_n\}=V\{e_1,\ldots,e_k\}\,V\{e''_{k+1},\ldots,e''_n\}$.
2)В n-мерном евклидовом пространстве дано подпространство $\mathcal{L}$ и линейно независимые векторы $a_1,\ldots,a_p$. Обозначим $a'_1,\ldots,a'_p$ ортогональные проекции этих векторов на $\mathcal{L}$. Доказать, что $\det\Gamma(a_1,\ldots,a_p)\geqslant\det\Gamma\left(a'_1,\ldots,a'_p\right)$.

6.5.7 Problems About Angle between Vector and Subspace

Б-26.55

Пусть x' - ортогональная проекция вектора x на подпространство $\mathcal{L}$. Доказать, что угол вектора x и подпространства $\mathcal{L}$ равен углу между x и x', если $x'\neq0$, и равен $\pi/2$, если $x'=0$. $9-1715$

Б-26.56

Пусть x' - ортогональная проекция вектора x на подпространство $\mathcal{L}$ и угол вектора x и подпространства $\mathcal{L}$ равен φ. Доказать, что $\cos\varphi = |x'|\,/|x|$.

Б-26.57

Доказать, что сумма углов вектора x с подпространствами $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^{\perp}$ равна $\pi/2$. 2

Б-26.58

В ортонормированном базисе векторы x и $f_1, \ldots, f_k$ заданы их координатными столбцами ξ и $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$. Найти угол между вектором x и подпространством $\mathcal{L}$, натянутым на x и $f_1, \ldots, f_k$:
3)$\xi = \| \; 2 \quad 6 \quad 2 \quad 6 \; \|^T, \varphi_1 = \|0 - 1 \quad -1 \quad 1\|^T$,

6.5.8 Problems About Reflection

(26.59-26.62)

Б-26.59

Пусть ненулевые векторы x и a заданы их координатными столбцами ξ и а соответственно, подпространство $\mathcal{L}$ определяется уравнением $(a, x) = 0$. Найти образ y при отражении вектора x в подпространстве $\mathcal{L}$:
1)$\xi = \|11\|^T, \quad \mathbf{a} = \|10\|^T$, базис ортонормированный;
2)$\xi = \mathbf{c}_{162}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{c}_{171}$, базис ортонормированный;
3)$\xi = \|11\|^T, \quad \mathbf{a} = \|10\|^T$, базис с матрицей Грама A_{19};
4)$\xi = \| \; 2 \quad 2 \quad 1 \quad -1 \; \|^T, \quad \mathbf{a} = \| \; 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \; \|^T$, базис с матрицей Грама $\begin{Vmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 8 \end{Vmatrix}$.

Б-26.60

В ортонормированном базисе подпространство $\mathcal{L}$ задано системой линейных уравнений с матрицей A, а вектор x - координатным столбцом ξ. Найти образ y при отражении вектора x в подпространстве $\mathcal{L}$:
1)$A = \| \; 1 \quad 1 \quad 1 \; \|, \quad \varepsilon = \| \; 1 \quad 2 \quad 3 \; \|^T$;
2)$A = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ -1 & -1 & 2 \end{Vmatrix}, \quad \xi = \| \quad 2 \quad 6 \; \|^T$;
3)$A = \| \; 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \; \|, \quad \xi = \| \; 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \; \|^T$;
4)$A = \begin{Vmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 \\ 3 & -5 & 6 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \xi = \| \; -5 \quad 9 \quad 4 \; \|^T$; 5) $A = \begin{Vmatrix} 4 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \end{Vmatrix}, \quad \xi = \| - 2 \quad 4 \quad 2 \quad 0\|^T$;
6) $A = \begin{Vmatrix} 10 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 8 & 3 & 1 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \xi = \|8 - 5 \quad 3 - 1\|^T$.

Б-26.61

При каком необходимом и достаточном условии вектор x можно перевести в вектор y с помощью отражения в $(n-1)$-мерном подпространстве $\mathcal{L}$? Как найти такое подпространство, если условие выполнено?

Б-26.62

Подобрать $(n-1)$-мерное подпространство $\mathcal{L}$ так, чтобы вектор x при отражении в нем перешел в данный вектор y. Векторы заданы в ортонормированном базисе их координатными столбцами ξ и η:
1)$\xi = \| \; 1 \quad 2 \; \|^T, \quad \eta = \|21\|^T$;
2)$\varepsilon = \mathbf{c}_{192}, \quad \eta = \mathbf{c}_{197}$;
3)$\xi = \mathrm{c}_{160}, \quad \eta = \mathrm{c}_{182}$;
4)$\xi = c_{203}, \quad \eta = c_{168}$.

6.5.9 Problems About Linear Functions on Euclidean Space

(26.63-2 6.74)

Б-26.63

Найти коэффициенты линейной функции, присоединенной к данному вектору. Вектор задан координатным столбцом a в базисе с матрицей Грама Γ:

1)$\mathbf{a} = \| \ 1 \quad 1 \quad 1 \ \|^T, \Gamma = A_{294}$

2)$\mathrm{a} = \| \ 1 \quad 1 \quad -1 \ \|^T, \Gamma = A_{308}$;

3)$\mathrm{a} = \| \ -2 \quad 1 \quad 0 \ \|^T, \quad \Gamma = A_{207}$.

Б-26.64

Найти координатный столбец вектора, присоединенного к данной линейной функции. Функция задана строкой коэффициентов φ в базисе с матрицей Грама Γ:

1)$\varphi = \| \ 4 \quad 0 \quad 4 \ , \quad \Gamma = A_{294}$;

2)$\varphi = \| \ 4 \quad 0 \quad 2 \ , \quad \Gamma = A_{308}$;

3)$\varphi = \| \ 3 \quad 5 \quad 3 \ , \quad \Gamma = A_{207}$.

Б-26.65

В пространстве квадратных матриц порядка n со скалярным произведением $(X, Y) = \operatorname{tr} X^T Y$ найти вектор (матрицу) C, присоединенный к функции:

1)$f(X) = \operatorname{tr} X$

2)$f(X) = \sum\limits_{i,j} x_{ij}$

3)$n = 4$ и $f(X)$ рав- но элементу произведения матрицы A_{444} на X, расположенному в первой строке и первом столбце.

Б-26.66

В пространстве многочленов степени $\leqslant$ 3 со стандартным скалярным произведением линейная функция сопоставляет многочлену $p(t)$ его свободный член $p(0)$. Найти вектор (многочлен), присоединенный к этой линейной функции.

Б-26.67

В базисе **e** переставлены векторы. Как изменится его биортогональный базис? 9+ 260 ГЛ. 10. Евклидовњ и унитарнње пространства

Б-26.68

В арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением столбцы $\xi_1, \ldots, \xi_n$ составляют базис. Найти соответствующий биортогональный базис:

1)$\xi_1 = \|20\|_T^T, \quad \xi_2 = \| \ 0 \quad 3 \ \|_T^T$;

2)$\varepsilon_1 = \|1 \quad 2\|_T^T, \quad \varepsilon_2 = \|21\|_T^T$;

4)$\xi_1 = \| \ 1 \quad 1 \quad 1 \ \|^T, \quad \varepsilon_2 = \| \ 1 \quad 1 \quad 0 \ \|^T, \quad \xi_3 = \| \ 1 \quad 0 \quad 0 \ \|^T$.

Б-26.69

В евклидовом пространстве в базисе **e** с матрицей Грама Γ даны координаты векторов базиса **h**. Найти координаты векторов биортогонального базиса $\mathbf{h}^*$:

2)$\|1 - 1\|^T, \|1 \quad 1\|^T, \quad \Gamma = A_{32}$;

Б-26.70

В пространстве многочленов степени не выше 2 со стандартным скалярным произведением найти базис, биортогональный базису $1, t, t^2$.

Б-26.71

Доказать, что координаты вектора x в базисе **e** можно вычислить по формулам $\xi^i = (x, e_i^*), \quad i = 1, \ldots, n$, где e_i^* - векторы базиса, биортогонального e.

Б-26.72

Доказать, что скалярное произведение в евклидовом пространстве можно вычислить по формуле $(x, y) = \xi^1 \eta_1^* + \ldots \ldots + \xi^n \eta_n^*$, где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ - координаты вектора x в базисе e, а $\eta_1^*, \ldots, \eta_n^*$ - координаты вектора y в биортогональном базисе $\mathbf{e}^*$.

Б-26.73

1)Найти матрицу перехода от базиса e к его биортогональному базису $\mathbf{e}^*$.
2)Используя полученный результат, доказать, что $\Gamma_{\mathbf{e}^*} = \Gamma_{\mathbf{e}}^{-1}$.

Б-26.74

Пусть S - матрица перехода от базиса e к базису $\mathbf{f}$. Найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}^*$, биортогонального $\mathbf{e}$, базису $\mathbf{f}^*$, биортогональному $\mathbf{f}$.

6.5.10 Problems About Unitary Spaces

Б-27.1

Будет ли комплексное двумерное линейное пространство унитарным, если в нем задать скалярное произведение следующей функцией от координат векторов:
1)$x_1y_1 + x_2y_2$
2)$\bar{x}_1y_1 + \bar{x}_2y_2$
3)$\bar{x}_1\bar{y}_1 + \bar{x}_2\bar{y}_2$
4)$\bar{x}_1\bar{y}_1 + x_2y_2$.

Б-27.2

1)Доказать, что функция $F(X, Y) = \operatorname{tr} X^T\bar{Y}$ может быть принята за унитарное скалярное произведение в пространстве комплексных матриц размеров $m \times n$.
2)Найти длины векторов стандартного базиса и углы между ними относительно такого скалярного произведения.
3)Рассматривается пространство комплексных квадратных матриц порядка n, и каждой паре матриц сопоставлено число $F(X, Y) = \operatorname{tr} X \operatorname{tr} \bar{Y}$. Может ли такая функция быть принята за унитарное скалярное произведение?

Б-27.3

Унитарной нормой матрицы называется ее длина при скалярном произведении, определенном в задаче 27.2, 1). Доказать, что унитарная норма равна квадратному корню из суммы квадратов модулей всех элементов матрицы.

Б-27.4

Пусть e - базис в комплексном линейном пространстве $\mathcal{E}$. Доказать, что в $\mathcal{E}$ существует одно и только одно унитарное скалярное произведение, относительно которого базис e - ортонормированный.

Б-27.5

Пусть в комплексном линейном пространстве заданы два унитарных скалярных произведения $(x, y)_1$ и $(x, y)_2$. Доказать, что для любых вещественных положительных чисел λ и μ функция $(x, y) = \lambda(x, y)_1 + \mu(x, y)_2$ - также унитарное скалярное произведение.

Б-27.6

Доказать, что в унитарном пространстве равенства из задачи 25.13 выполняются не для любых пар векторов.

Б-27.7

Пусть в комплексном линейном пространстве заданы два скалярных произведения $(x, y)_1 = (x, y)_2$ и любой вектор имеет одинаковые длины в каждом из них: $(x, x)_1 = (x, x)_2$. Доказать, что скалярные произведения совпадают.

Б-27.8

Доказать, что треугольник со сторонами x, y и z в унитарном пространстве прямоугольный, если $|z| = |x| \cos(\widehat{x, z})$, и может не быть прямоугольным, если $|z| = |x| \cos(\widehat{z, x})$.

Б-27.9

Доказать, что в унитарном пространстве из $(x, y) = 0$ следует $|x|^2 + |y|^2 = |x+y|^2$. Что можно сказать о произведении (x, y), если последнее равенство выполнено?

6.5.11 Problems About Dot Product in Coordinates

Б-27.10

В комплексном арифметическом пространстве сс стандартным скалярным произведением найти скалярные прсизведения векторов

1)$\| \ 1 \ i \ \|^T, \| \ i1\|^T,;$ 2)$\|1i\|^T, \|1i\|^T;$

3) $\|1+2i-1+2i\|^T, \|2-i2+i\|^T;$ 4) $\|1i1\|^T, \|i \quad 1i\|^T$ 5) $\|1+i1+i1+i\|^T, \|1-i1-i1-i\|^T$; 6) $\mathbf{c}_{222}, \quad \mathbf{c}_{223}$; 7) $\mathbf{c}_{221}, \quad \mathbf{c}_{215}$

Б-27.11

В задаче 27.10 для каждой пары векторов найтє длину первого вектора.

Б-27.12

Найти скалярное произведение векторов унитарнсго пространства по их координатам в базисе $\mathbf{e}$ и матрице Грсма Γ этого базиса:

1)$\|1 \quad i\|^T, \quad \|2i \quad 1\|^T, \quad \Gamma = \begin{Vmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{Vmatrix};$

2)$\|1+i \quad i\|^T, \quad \|1 \quad 1-i\|^T, \quad \Gamma = \begin{Vmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{Vmatrix};$

3)$\mathbf{c}_{40}, \quad \mathbf{c}_{41}, \quad \Gamma = A_{87};$

4)$\mathbf{c}_{44}, \quad \mathbf{c}_{40}, \quad \Gamma = A_{86};$ 5) $\|2+i \quad 0 \quad 1+2i\|^T, \quad \|2-i \quad 1 \quad 2+i\|^T, \quad \Gamma = \begin{Vmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 2 & -i \end{Vmatrix}$ 6) $\| \ 1 \quad 1 \quad 1 \ \|^T, \quad \| \ 1 \quad 0 \quad 1 \ \|^T, \quad \Gamma = \begin{Vmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 2 & -i \\ 0 & i & 2 \end{Vmatrix}$ 7) $\|-12+i1\|^T, \quad \|1-i1+i\|^T, \quad \Gamma = \begin{Vmatrix} 1+i & 3 & i \\ 0 & -i & 2 \end{Vmatrix}$

Б-27.13

В задаче 27.12 для каждой пары векторов найтг длину первого вектора.

Б-27.16

Выбрать из банка эрмитовы матрицы (за исключением вещественных симметричных) и среди них те, которые могут служить матрицами Грама в унитарном пространстве.

Б-27.17

В матрице Грама некоторого базиса в унитарном пространстве все ненулевые элементы по модулю равны 1. Доказать, что базис ортонормированный.

Б-27.18

В матрице Грама некоторого базиса:
1)ко всем элементам главной диагонали прибавили вещественное число α;
2)к некоторым элементам главной диагонали прибавили положительное число α;
3)переставили две строки;
4)переставили две строки, а также два столбца с теми же номерами, что и у строк.
Осталась ли матрица эрмитовой, может ли она быть матрицей Грама какого-либо базиса?

Б-27.19

Доказать, что детерминант матрицы, составленной из попарных скалярных произведений некоторой системы векторов - вещественное неотрицательное число, равное нулю тогда и только тогда, когда эта система векторов линейно зависима.

Б-27.20

Доказать, что для любой комплексной матрицы $\operatorname{Rg} A^T \bar{A} = \operatorname{Rg} A$.

Б-27.21

Выбрать из банка унитарные матрицы, не являющиесяК вещественными ортогональными матрицами.

Б-27.22

Написать какую-нибудь унитарную матрицу третьего порядка.

Б-27.23

Описать все треугольные унитарные матрицы.

Б-27.24

Может ли унитарная матрица четвертого порядка содержать строку:
1)$\|i - i \quad i - i\|$
2)$\left\| \frac{1+i}{2} 0 0 \frac{1-i}{2} \right\|$ 4
3)$\left\| \frac{1+i}{\sqrt{8}} \; \frac{1-i}{\sqrt{8}} \; \frac{-1+i}{\sqrt{8}} \; \frac{-1-i}{\sqrt{8}} \right\|$.

Б-27.25

Пусть A и B - вещественные квадратные матрицы порядка n. Из них можно составить комплексную матригу $C = A + iB$ и вещественную матрицу порядка $2n$

$$D = \left\| \begin{array}{c|c} A & -B \\ \hline B & A \end{array} \right\|^{\square}.$$

Доказать, что:
1)C эрмитова тогда и только тогда, когда D симметрична;
2)C унитарна тогда и только тогда, когда D ортогональна.

6.5.12 Problems About Orthogonality in Unitary Spaces

Б-27.26

В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти базис в ортогональном дополнении подпространства, заданного системой линейных уравнений:
1)$x_1 + ix_2 = 0$;
2)$x_1 + ix_2 + (1 - i)x_3 = 0; -ix_1 + (2 + i)x_2 - x_3 = 0$;
3)однородная система с матрицей A_{377};
4)однородная система с матрицей A_{368}; 5) однородная система с матрицей A_{372}.

Б-27.27.

В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти базис в ортогональном дополнении подпространства, натянутого на следующие векторы:
1)$\|1i\|^T$;
2)$\| - i11 + i\|^T$;
3)$\| \; 1 \quad -i \quad 1 \; \|^T, \| \; i \quad 1 \quad 0 \; \|^T$;
4)столбцы матрицы A_{372}; 5) столбцы матрицы A_{368}.

Б-27.28

При помощи процесса ортогонализации построить ортонормированный базис в линейной оболочке заданных векторов комплексного арифметического пространства со стандартным скалярным произведением:
3)$\|1 \quad i \quad 1\|^T, \quad \|2 - i \quad i - 12\|^T$; 5) $\|1 + i2 + i1 - i\|^T, \| - 24 + i1 - i\|^T, \|12 + i2 - i\|^T$.

Б-27.29

В комплексном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти ортогональную проекцию вектора x на линейную оболочку векторов $a_1, \dots, a_k$:
1)$x = \|1 - i\|^T, \quad a = \|1 - 1\|$;
2)$x = \|2 + i \quad 0 \quad 2 - i\|^T, \quad a = \| - 1 \quad i \quad 1 + i\|^T$;
3)$x = \|2 + i \quad i2 - i\|^T, \quad a_1 = \|1 \quad i \quad 1\|^T, \quad a_2 = \|i \quad 0 \quad - i\|^T$;
4)$x = \|1{+}i \quad 1{+}i \quad 1\|^T, \quad a_1 = \|{-1} \quad i \quad 1\|^T, a_2 = \|1{+}i \quad 1{-}i \quad 0\|^T$; 5) $x = \mathbf{c}_{130}, \quad a_1 = \mathbf{c}_{134}, \quad a_2 = \mathbf{c}_{132}$.

6.6 Problems for Linear Transformations of Euclidean and Unitary Spaces

6.6.1 Problems About Examples of Linear Transformations of Euclidean Space.

Б-28.1

Пусть $a_1, \dots, a_k$ - ортонормированный базис в подпространстве $\mathcal{L} \subset \mathcal{E}$. Координатные столбцы этих векторов в ортонормированном базисе $\mathbf{e}$ пространства $\mathcal{E}$ составляют матрицу A. Написать в базисе $\mathbf{e}$ матрицу
1)ортогонального проектирования на пространство $\mathcal{L}$;
2)матрицу отражения в подпространстве $\mathcal{L}$.

Б-28.2

Пусть $a_1, \dots, a_k$ - базис в подпространстве $\mathcal{L} \subset \mathcal{E}$. Координатные столбцы этих векторов в ортонормированном базисе $\mathbf{e}$ пространства $\mathcal{E}$ составляют матрицу A. Написать в базисе $\mathbf{e}$ матрицу:
1)ортогонального проектирования на подпространство $\mathcal{L}$;
2)матрицу отражения в подпространстве $\mathcal{L}$.

Б-28.3

Пусть $a_1, \dots, a_k$ - базис в подпространстве $\mathcal{L} \subset \mathcal{E}$. Координатные столбцы этих векторов в базисе $\mathbf{e}$ пространства $\mathcal{E}$ составляют матрицу A. Дана матрица Грама Γ базиса e. Написать в базисе $\mathbf{e}$ матрицу:
1)ортогонального проектирования на подпространство $\mathcal{L}$;
2)матрицу отражения в подпространстве $\mathcal{L}$.

Б-28.4

1)Дан вектор a, и подпространство $\mathcal{L} \subset \mathcal{E}$ задано уравнением $(a, x) = 0$. Найти образ вектора x при отражении в $\mathcal{L}$ и выразить матрицу этого преобразования через координатный столбец а вектора a в ортонормированном базисе.
2)Пусть даны вектор x и вектор y длины 1. Найти $(n - 1)$ - мерное подпространство, при отражении в котором x переходит
в вектор $\lambda y \quad (\lambda > 0)$. Чему равно λ?

Б-28.5

Найти матрицу отражения в $(n - 1)$-мерном подпространстве, переводящего вектор x в вектор y. Векторы заданы своими координатными столбцами ξ и η в ортонормированном базисе:
2)$\varepsilon = \| - 12\|^T, \quad \eta = \|1 - 2\|^T$;
3)$\xi = \| \ 1 \quad 1 \quad 1 \ \|^T, \quad \eta = \| \ 1 \quad -1 \quad 1 \ \|^T$;
5) $\xi = \| \ 1 \quad 0 \quad 2 \quad 1 \ \|^T, \quad \eta = \| \ -1 \quad 1 \quad 0 \ \|^T$.

Б-28.6

Выяснить геометрический смысл преобразования, заданного в ортонормированном базисе матрицей:
1)$(1/2)A_{468}$;
2)$(1/3)A_{202}$;
3)$(1/18)A_{350}$;
4)A_{430};
5) A_{431}.

Б-28.7

Рассматривается четырехмерное евклидово пространство и ортонормированный базис e в нем. Во всех случаях поворот производится в направлении от первого из указанных векторов ко второму. Написать матрицу:

1)поворота на $\pi/2$ в линейной оболочке $\mathcal{L}$ векторов $e_2 + e_3$ и $e_1 - e_4$ (векторы $\mathcal{L}^\perp$ неподвижны);

2)поворота на $\pi/4$ в линейной оболочке $\mathcal{L}$ векторов $e_1 + e_4$ и $e_2 - e_3$ (векторы $\mathcal{L}^\perp$ неподвижны);

3)поворота на $\pi/6$ в линейной оболочке $\mathcal{L}$ векторов $e_1 - e_2$ и e $3_3 - e_4$ (векторы $\mathcal{L}^\perp$ неподвижны);

4)поворота на $\pi/4$ в линейной оболочке $\mathcal{L}$ векторов $e_1 + e_2$ и $e_3 + e_4$ и на $\pi/4$ в линейной оболочке $\mathcal{L}$ векторов $e_3 - e_4$ и $e_1 - e_2$.

Б-28.8

Пусть $f_1, \ldots, f_m$ и $g_1, \ldots, g_m$ - две системы векторов в n-мерном евклидовом пространстве. Их координатные столбцы в ортонормированном базисе составляют, соответственно, матрицы F и G. Найти матрипу преобразования

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} (x, f_j)\, g_j.$$

Б-28.9

В подпространствах $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{E}$ выбраны ортонормированные базисы $a_1, \ldots, a_k$ и $b_1, \ldots, b_m$. Вектор $x \in \mathcal{A}$ проектируется на $\mathcal{B}$, а затем полученная проекция проектируется на $\mathcal{A}$. Этим определено преобразование подпространства $\mathcal{A}$. Найти его матрицу в базисе $a_1, \ldots, a_k$. Доказать, что собственные значения этого преобразования принадлежат отрезку $[0, 1]$.

6.6.2 Problems About Conjugate Conversion

Б-28.10

Пусть для некоторого преобразования φ евклидова пространства нашлось преобразование φ^* такое, что $(\varphi(x), y) = (x, \varphi^*(y))$ для любых векторов x и y. Доказать, что оба преобразования являются линейными.

Б-28.11

Найти преобразование, сопряженное произвольному преобразованию φ одномерного евклидова пространства.

Б-28.12

Найти преобразование, сопряженное преобразованию из задачи 28.8.

Б-28.13

Доказать, что два преобразования перестановочны тогда и только тогда, когда перестановочны их сопряженные

Б-28.14

Пусть преобразование φ нильпотентно. Доказать, что его сопряженное преобразование также нильпотентно с тем же показателем нильпотентности.

Б-28.15

Доказать, что для двух преобразований φ и ψ произведение $\varphi^*\psi =$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im}\varphi$ ортогональНо $\operatorname{Im}\psi$.

Б-28.16

Пусть φ - поворот плоскости на угол α. Найти сопряженное преобразование φ^*.

Б-28.17

Пусть $\bar{a}$ - фиксированный вектор трехмерного геометрического пространства. Преобразование φ сопоставляет каждому вектору $\vec{x}$ векторное произведение $[\bar{a}, \vec{x}]$. Найти φ^*.

Б-28.18

В арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением преобразование φ переводит векторы a_1, a_2, a_3 соответственно в векторы b_1, b_2, b_3. Найти матрицу сопряженного преобразования φ^*:
1)$a_1 = \mathbf{c}_{99}, a_2 = \mathbf{c}_{52}, a_3 = \mathbf{c}_{51}; b_1 = \mathbf{c}_{110}, b_2 = \mathbf{c}_{89}, b_3 = \mathbf{c}_{64};$
2)$a_1 = \mathbf{c}_{142}, \quad a_2 = \mathbf{c}_{66}, \quad a_3 = \mathbf{c}_{144}; \quad b_1 = \mathbf{c}_{83}, \quad b_2 = \mathbf{c}_{139}, b_3 = \mathrm{c}_{104}$
3)$a_1 = \mathbf{c}_{57}, a_2 = \mathbf{c}_{77}, a_3 = \mathbf{c}_{64}; b_1 = \mathbf{c}_{145}, b_2 = \mathbf{c}_{101}, b_3 = \mathbf{c}_{67}.$

Б-28.19

Дана матрица A преобразования φ в базисе $\mathbf{e}$ с матрицей Грама Γ. Найти матрицу сопряженного преобразования φ^*:
1)$A = A_{50}, \quad \Gamma = A_{19};$
2)$A = A_{16}, \quad \Gamma = A_{104};$
3)$A = A_{20}, \quad \Gamma = A_{104};$
4)$A = A_{260}, \quad \Gamma = A_{178}$; 5) $A = A_{199}, \quad \Gamma = A_{176}$; 6) $A = A_{261}, \quad \Gamma = A_{176}$; 7) $A = A_{259}, \quad \Gamma = A_{177}$; 8) $A = A_{260}, \quad \Gamma = A_{179}$ 9) $A = A_{269}, \quad \Gamma = A_{388}$.

Б-28.20

В трехмерном арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением найти преобразование, сопряженное проектированию на прямую $x = 2y = 3z$ параллельно плоскости $z = 0$.

Б-28.21

В пространстве $\mathcal{P}^2$ многочленов степени не выше 2 со стандартным скалярным произведением преобразование δ сопоставляет многочлену его производную. Найти сопряженное преобразование δ^*. Написать матрицу δ^*:
1)в базисе $1, t, t^2$,
2)в базисе $1, t, \left(3t^2 - 1\right)/2$.

Б-28.22

В пространстве $\mathcal{P}^2$ многочленов степени не выше 2 со скалярным произведением, определенным в задаче 25.8, 3), преобразование δ сопоставляет многочлену его производную. Найти сопряженное прсобразование δ^*. Написать матрицу δ^*:
1)в базисе $1, t, t^2$,
2)в базисе $1, t, \left(3t^2 - 1\right)/2$.

Б-28.23

Пусть A - квадратная матрица порядка n. Любой квадратной матрице X того же порядка сопоставляется матрица $\varphi(X) = AX$. Этим определено линейное преобразование пространства квадратных матриц со стандартным скалярным произведением. Найти его сопряженное преобразование φ^*.

Б-28.24

Пусть A - невырожденная квадратная матрица порядка n. Любой квадратной матрице X того же порядка сопоставляется матрица $\varphi(X) = A^{-1}XA$. Этим определено линейное преобразование пространства квадратных матриц со стандартным скалярным произведением. Найти его сопряженное преобразование φ^*.

Б-28.25

Доказать следующие свойства операции перехода к сопряженному преобразованию в евклидовом пространстве:
1)$(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*;$
2)$(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*;$
3)$(\alpha\varphi)^* = \alpha\varphi^*;$
4)Если φ имеет обратное, то φ^* также обратимо, и $\left(\varphi^*\right)^{-1} = \left(\varphi^{-1}\right)^*$.

Б-28.26

Доказать, что у сопряженных друг другу преобразований евклидова пространства совпадают:
1)ранги,
2)характеристические многочлены,
3)собственные значения,
4)размерности собственных подпространств.

Б-28.27

Пусть преобразование φ диагонализуемо. Доказать, что φ^* также диагонализуемо.

Б-28.

Б-28.

Пусть e - базис из собственных векторов преобразования φ. Доказать, что его биортогональный базис e* состоит из собственных векторов сопряженного преобразования φ^*.

Б-28.29

Пусть преобразование φ в базисе **e** имеет матрицу A. Доказать, что φ^* в биортогональном базисе e* имеет матрицу A^T.

Б-28.30

1)Доказать, что множество значений линейного преобразования φ совпадает с ортогональным дополнением ядра сопряженного преобразования φ^*.
2)Убедиться, что утверждение
1)равносильно теореме Ф редгольма для систем линейных уравнений.

Б-28.31

Найти множество значений прсобразования δ^* из задачи 28.21 и непосредственно проверить, что оно совпадает с ортогональным дополнением ядра φ.

Б-28.32

Найти ядро преобразования φ из задачи 28.17 и непосредственно проверить, что оно совпадает с ортогональным дополнением множества значений φ^*.

Б-28.33

1)Пусть λ_1 и λ_2 - различные собственные значения преобразования φ евклидова пространства. Доказать, что $\operatorname{Ker}(\varphi-\lambda_1\iota)\subseteq\operatorname{Im}(\varphi-\lambda_2\iota)$
2)Верно ли такое утверждение для преобразования линейного пространства?

Б-28.34

1)Пусть подпространство $\mathcal{L}\subset\mathcal{E}$ инвариантно относительно преобразования φ. Доказать, что $\mathcal{L}^\perp$ инвариантно относительно φ^*.
2)Пусть преобразование φ имеет вещественное характеристическое число. Доказать, что у него есть $(n-1)$-мерное инвариантное подпространство. Верно ли обратное утверждение?
3)Пусть все корни характеристического многочлена преобразования φ вещественны. Доказать, что найдется такой ортонормированный базис, в котором матрица преобразования верхняя треугольная.

Б-28.35

Преобразование φ задано в ортонормированном базисе матрицей A. Найти ортонормированный базис, в котором его матрица A' верхняя треугольная, и написать матрицу A':
1)$A=\begin{Vmatrix} 3 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 2\\ -1 & -1 & 1\end{Vmatrix}$
2)$A=A_{221}$;
3)$A=A_{292}$;
4)$A=A_{290}$; 5) $A=A_{261}$. принадлежащие неравным собственным значениям, ортогональны.

Б-28.37

Пусть φ - линейное преобразование евклидова пространства. Как связаны жордановы формы преобразований φ и φ^*?

6.6.3 Problems About Self-adjoint and Orthogonal Transformations

Б-29.1

Может ли матрица самосопряженного преобразования в каком бы то ни было базисе быть:
1)не симметричной;
2)кососимметричной.

Б-29.2

Доказать, что матрица A является матрицей самосопряженного преобразования в базисе $\mathbf{e}$ тогда и только тогда, когда матрица $\Gamma_{\mathbf{e}}A$ симметрична.

Б-29.3

Доказать, что все собственные значения самосопряженного преобразования равны нулю тогда и только тогда, когда это - нулевое преобразование.

Б-29.4

Найти все самосопряженные нильпотентные преобразования.

Б-29.5

Найти все самосопряженные ортогональные преобразования.

Б-29.6

Найти все самосопряженные идемпотентные преобразования.

Б-29.7

Пусть φ - самосопряженное преобразование пространства $\mathcal{E}$. Доказать, что:
1)$\mathcal{E}$ - прямая сумма подпространств $\operatorname{Im}\varphi$ и $\operatorname{Ker}\varphi$ и эти подпространства ортогональны;
2)в $\operatorname{Im}\varphi$ существует базис из собственных векторов φ, соответствующих ненулевым собственным значениям.

Б-29.8

Преобразование φ задано в ортонормированном базисе матрицей A_{452}. Найдите какой-нибудь ортонормированный базис, векторы которого лежат в $\operatorname{Im}\varphi$ и $\operatorname{Ker}\varphi$, и матрицу преобразования в этом базисе.

Б-29.9

Сколько существует ортонормированных базисов из собственных векторов данного самосопряженного преобразования, если оно:
1)не имеет кратных характеристических чисел;
2)имеет кратные характеристические числа?

Б-29.10

Может ли самосопряженное преобразование иметь базис из собственных векторов:
1)не ортонормированный;
2)не ортогональный.

Б-29.11

Пусть в пространстве существует ортонормированный базис из собственных векторов преобразования φ. Доказать, что преобразование φ - самосопряженное.

Б-29.12

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ - собственные значения, а $e_1, \ldots \ldots, e_n$ - ортонормированный базис из собственных векторов самосопряженного преобразования φ (e_i принадлежит λ_i).Найти $\varphi(x)$ для произвольного вектора x.

Б-29.13

Доказать, что матрица A может быть матрицей самосопряженного преобразования φ в некотором базисе тогда и только тогда, когда найдется такая невырожденная матрица S, что $S^{-1}AS$ диагональная матрица.

Б-29.14

Может ли самосопряженное преобразование в каком бы то ни было базисе иметь матрицу:
1)A_{55},
2)A_{50}
3)A_{26},
4)A_{49}.

Б-29.15

Пусть $\mathcal{E} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$. Доказать, что проектирование на $\mathcal{L}_1$ параллельно $\mathcal{L}_2$ является самосопряженным преобразованием тогда и только тогда, когда $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1^{\perp}$.

Б-29.16

Пусть преобразования φ и ψ - самосопряженные. Доказать, что самосопряженными будут также преобразования:
1)$\alpha\varphi + \beta\psi$ при любых $\alpha, \beta \in \diagdown$
2)$\varphi\psi + \psi\varphi$,
3)φ^{-1} для невырожденного φ.

Б-29.17

Доказать, что произведение самосопряженных преобразований является самосопряженным тогда и только тогда, когда они перестановочны.

Б-29.18

Доказать, что в каждом инвариантном подпространстве самосопряженного преобразования найдется ортонормированный базис из собственных векторов этого преобразования.

Б-29.19

Найти матрицу перехода к ортонормированному базису из собственных векторов преобразования φ и матрицу преобразования в этом базисе, если φ задано в ортонормированном базисе матрицей:
1)A_{59};
2)A_{12};
3)A_{28};
4)A_{47}; 5) A_{200}; 6) A_{203} 1
2)A_{456} 7) A_{350}; 8) A_{280}; 9) A_{294}; 10) A_{288}; 1
1)A_{434}; 16) A_{175}

Б-29.20

Преобразование φ арифметического пространства со стандартным скалярным произведением задано матрицей A_{627}. Найти собственные значения и ортонормированный базис из собственных векторов этого преобразования.

Б-29.21

Доказать, что для самосопряженного преобразования размерность собственного подпространства, соответствующего собственному значению λ, равна кратности λ как корня характеристического многочлена.

Б-29.22

Доказать, что два самосопряженных преобразования перестановочны тогда и только тогда, когда имеют общий ортонормированный базис из собственных векторов.

Б-29.23

Для двух самосопряженных преобразований, заданных в ортонормированном базисе матрицами:

$$A = \begin{Vmatrix} 17 & -2 & 2 \\ -2 & 14 & 4 \\ 2 & 4 & 14 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} -7 & 4 & -4 \\ 4 & -1 & 8 \\ -4 & -8 & -1 \end{Vmatrix},$$

найти матрицу перехода к общему ортонормированному базису из собственных векторов и матрицы преобразований в этом базисе.

Б-29.24

Доказать, что любое самосопряженное преобразование ранга r можно разложить в сумму r самосопряженных преобразований ранга 1.

Б-29.25

Доказать, что любое самосопряженное преобразование можно разложить в линейную комбинацию ортогональных проектирований на попарно ортогональные одномерные подпространства.

Б-29.26

Самосопряженное преобразование φ задано в ортонормированном базисе матрицей A. Разложить φ в линейную комбинацию ортогональных проектирований на попарно ортогональные подпространства:
1)$A = A_{174}$;
2)$A = A_{175}$;
3)$A = A_{294}$.

Б-29.27

Доказать, что самосопряженные преобразования φ и ψ равны тогда и только тогда, когда $(\varphi(x), x) = (\psi(x), x)$ для любого $x \in \mathcal{E}$.

Б-29.28

Доказать, что самосопряженное преобразование φ положительно (неотрицательно) тогда и только тогда, когда все его собственные значения положительны (соответственно неотрицательны).

Б-29.29.

Доказать, что положительное самосопряженное преобразование может быть разложено на произведение n сжатий по попарно ортогональным направлениям.

Б-29.30

Разложить в произведение трех сжатий по попарно ортогональным направлениям (иначе - к трем попарно ортогональным плоскостям) преобразования, заданные в ортонормированном базисе матрицами
1)A_{174};
2)A_{175}.

Б-29.31

Доказать, что неотрицательное самосопряженное преобразование имеет обратное тогда и только тогда, когда оно положительно.

Б-29.32

1)Доказать, что для неотрицательного самосопряженного преобразования φ найдется неотрицательное самосопряженное преобразование ψ такое, что $\psi^2 = \varphi$. Необходима ли неотрицательность φ?

2)Доказать, что преобразование ψ однозначно определено. 29.33. Преобразование φ задано в ортонормированном базисе своей матрицей. Найти матрицу положительного самосо- пряженного преобразования ψ такого, что $\psi^2 = \varphi$:

1)$A = A_{47}$;

2)$A = \begin{Vmatrix} 5/2 & 3/2 \\ 3/2 & 5/2 \end{Vmatrix}$

3)$A = \begin{Vmatrix} 19 & 3 & 3 \\ 3 & 19 & 3 \\ 3 & 3 & 19 \end{Vmatrix}$.

Б-29.34

Пусть собственные значения самосопряженного преобразования φ пронумерованы так, что $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$.

1)Доказать, что

$$\lambda_1 = \max_{0 \neq x \in \mathcal{E}} \frac{(\varphi(x), x)}{|x|^2}, \quad \lambda_n = \min_{0 \neq x \in \mathcal{E}} \frac{(\varphi(x), x)}{|x|^2}.$$

§

Б-29.

Самосопряжсеннъ и ортогоналъnъе преобразования 275

2)Доказать, что $(\varphi(x), x)/|x|^2 = \lambda_1$ (или λ_n), тогда и только тогда, когда x - собственный вектор, принадлежащий λ_1 (соответственно λ_n).

Б-29.35

Доказать, что диагональные элементы симметрической матрицы заключены между ее минимальным и максимальным характеристическими числами.

Б-29.36

Пусть A - симметрическая матрица, λ_1 и λ_n - ее максимальное и минимальное характеристические числа, а μ_1 и μ_k - максимальное и минимальное характеристические числа ее диагональной подматрицы. Доказать, что $\lambda_1 \geqslant \mu_1 \geqslant \mu_k \geqslant \geqslant \lambda_n$.

Б-29.37

Пусть φ линейное преобразование евклидова пространства. Доказать, что:

1)преобразования $\varphi^*\varphi$ и $\varphi\varphi^*$ - неотрицательные самосопряженные.

2)$\operatorname{Ker} \varphi^*\varphi = \operatorname{Ker} \varphi$ и $\operatorname{Im} \varphi^*\varphi = \operatorname{Im} \varphi^*$.

3)$\operatorname{Rg} \varphi^*\varphi = \operatorname{Rg} \varphi\varphi^* = \operatorname{Rg} \varphi$.

4)собственные значения и их кратности у прсобразований $\varphi^*\varphi$ и $\varphi\varphi^*$ совпадают. Ортогональные преобразования (

Б-29.38

-

Б-29.51

)

Б-29.38

Пусть преобразование φ изометрично, т.е. $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$ для любых векторов x и y. Доказать, что φ линейно и взаимно однозначно.

Б-29.39

Доказать, что ортогональные преобразования евклидова пространства $\mathcal{E}$ образуют группу относительно обычной операции умножения преобразований.

Б-29.40

1)Убедиться, что сумма ортогональных преобразований в общем случае не является ортогональным преобразованием.
2)Является ли ортогональным преобразованием произведсние ортогонального преобразования на число?

Б-29.41

Доказать, что для любых двух векторов одинаковой длины найдется ортогональное преобразование, переводящее первый вектор во второй.

Б-29.42

Доказать, что для любых двух ортонормированных базисов найдется ортогональное преобразование, переводящее первый базис во второй.

Б-29.43

Доказать, что преобразование из задачи 28.23 является ортогональным тогда и только тогда, когда матрица A ортогональна.

Б-29.44

В евклидовом пространстве выбран базис с матрицей Грама . Найти условие на матрицу линейного преобразования, необходимое и достаточное для того, чтобы это преобразование было ортогональным.

Б-29.45

Может ли ортогональное преобразование в некотором базисе иметь матрицу:
1)A_{16},
2)A_{34}?

Б-29.46

Ортогональное преобразование арифметического пространства со стандартным скалярным произведением переводит столбцы матрицы A в столбцы B. Как связаны матрицы A и B?

Б-29.47

Линейное преобразование φ арифметического пространства со стандартным скалярным произведением переводит столбцы матрицы A в столбцы матрицы B. Является ли φ ортогональным:
1)$A = \begin{Vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 8 & 2 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$
2)$A = A_{44}, \quad B = A_{34}$;
3)$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -6 \\ -1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -6 \end{Vmatrix}$;
4)$A = A_{332}, \quad B = A_{339}$?

Б-29.48

Пусть $x_1, \ldots, x_k$ и $y_1, \ldots, y_k$ - векторы n-мерного евклидова пространства, и ортогональное преобразование φ таково, что $\varphi(x_i) = y_i, \quad i = 1, \ldots, k$. Доказать, что это возможно тогда и только тогда, когда матрицы из попарных скалярных произведений обеих систем векторов равны.

Б-29.49

Пусть $\mathcal{L}$ - инвариантное подпространство ортогонального преобразования φ. Доказать, что $\mathcal{L}^{\perp}$ - также инвариантно относительно φ. Как этот результат связан с задачей 25.55?

Б-29.50

Ортогональное преобразование задано в ортонормированном базисе матрицей A. Найти матрицу S перехода к каноническому базису и матрицу A' преобразования в этом базисе:
1)$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$
2)$\frac{1}{4}\begin{Vmatrix} -1 & -3 & -\sqrt{6} \\ -3 & -1 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{Vmatrix}$
3)A_{414}
4)$\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \|.$

Б-29.51

Доказать, что преобразование $\varphi^*\varphi$ ортогонально толда и только тогда, когда ортогонально φ.

6.6.4 Problems About Conjugate Unitary Space Transformations

Б-30.1

Пусть $a_1, \ldots, a_k$ - базис в подпространстве $\mathcal{L} \subset \mathcal{U}$. Координатные столбцы этих векторов в ортонормированном базисе $\mathbf{e}$ пространства $\mathcal{U}$ составляют матрицу A. Написать в базисе e:
1)матрицу P ортогонального проектирования на подпространство $\mathcal{L}$,
2)матрицу Q отражения в подпространстве $\mathcal{L}$.

Б-30.2

Пусть $\mathcal{L} \subset \mathcal{U}$ линейная оболочка векторов a_1 и a_2. В ортонормированном базисе $\mathbf{e}$ пространства $\mathcal{U}$ даны координатные столбцы этих векторов. Написать в базисе $\mathbf{e}$ матрицу P ортогонального проектирования на подпространство $\mathcal{L}$ и матрицу Q отражения в подпространстве $\mathcal{L}$:
1)$\|1 \quad i \quad 1+i\|^T, \quad \|i \quad 1 \quad 1-i\|^T$;
2)$\|i \quad i1\|^T, \quad \|2i \quad 0 \quad 3\|^T$;
3)$\| \ i \quad 1 \quad 1 \quad i \ \|^T, \quad \| \ 2 \quad 0 \quad 3 \quad i \ \|^T$.

Б-30.3

Дан вектор a, и подпространство $\mathcal{L} \subset \mathcal{U}$ задано уравнением $(a, x) = 0$. Найти образ вектора x при отражении в $\mathcal{L}$, и выразить матрицу этого преобразования через координатный столбец а вектора a в ортонормированном базисе.

Б-30.4

В ортонормированном базисе дан координатный столбец а вектора . Пусть φ - отражение в подпространстве $\mathcal{L} \subset \mathcal{U}$, заданном уравнением $(a, x) = 0$. Выразить матрицу преобразования φ через а, если:
1)$\mathbf{a} = \|3 - 12i\|^T$;
2)$\mathbf{a} = \mathbf{c}_{153}$
3)$\mathbf{a} = \mathbf{c}_{131}$
4)$\mathrm{a} = \mathrm{c}_{215}$

Б-30.5

Доказать, что в унитарном пространстве операция перехода к сопряженному преобразованию обладает следующими свойствами:
1)$(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$;
2)$(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$;
3)$(\alpha\varphi)^* = \bar{\alpha}\varphi^*$;
4)если φ имеет обратное, то φ^* также имеет обратное, и $(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$.

Б-30.6

В ортонормированном базисе дана матрица линейного преобразования унитарного пространства. Найти матрицу сопряженного преобразования:
1)A_{88};
2)A_{103};
3)A_{100}.

Б-30.7

Пусть A - матрица линейного преобразования в базисе с матрицей Грама Г. Найти матрицу сопряженного преобразования:
1)$A = A_{92}, \quad \Gamma = A_{87}$
2)$A = A_{97}, \quad \Gamma = A_{86}$
3)$A = A_{375}, \quad \Gamma = A_{388}$.

Б-30.8

1)Пусть вектор x является собственным для преобразования φ с собственным значением λ и собственным для φ^* с собственным значением μ. Доказать, что $\lambda = \bar{\mu}$.

2)Доказать, что преобразование φ^*, сопряженное преобразованию φ с собственными значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, имеет собственные значения $\overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_n}$.

Б-30.9

Пусть подпространство $\mathcal{L}$ инвариантно относительно преобразования φ. Доказать, что $\mathcal{L}^{\perp}$ инвариантно относительно сопряженного преобразования φ^*.

Б-30.10

1)Доказать, что множество значений линейного преобразования φ унитарного пространства совпадает с ортогональным дополнением ядра сопряженного преобразования φ^*.

2)Доказать, что теорема Фредгольма для комплексных систем линейных уравнений верна также и в следующей формулировке: система $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ совместна тогда и только тогда, когда

Б-30.11

1)Доказать, что у каждого линейного преобразования унитарного пространства есть $(n-1)$-мерное инвариантное подпространство. Верно ли это утверждение для комплексных линейных пространств?

2)Доказать, что для каждого линейного преобразования унитарного пространства найдется такой ортонормированный базис, в котором матрица преобразования верхняя треугольная.

Б-30.12

В ортонормированном базисе дана матрица A линейного преобразования φ. Найти матрицу S перехода к ортонормированному базису, в котором φ имеет треугольную матрицу A', и написать матрицу A':

2)$A = \begin{Vmatrix} -1 & -1+i & -1-i \\ 1+i & 1 & 1+i \\ 1-i & 1-i & 1 \end{Vmatrix}$;

3)$A = \begin{Vmatrix} i & i & -i \\ i & 1 & 0 \\ 1 & 1+i & -i \end{Vmatrix}$

6.6.5 Problems About Normal Unitary Space Transformations

Б-30.13

Найти условие на матрицу преобразования φ в ортонормированном базисе, необходимое и достаточное для того, чтобы φ было нормальным.

Б-30.14

Для нормального преобразования φ пространства $\mathcal{U}$ доказать, что:
1)$\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\varphi^*$;
2)$\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Im}\varphi^*$;
3)$\mathcal{U} = \operatorname{Ker}\varphi \oplus \operatorname{Im}\varphi$.

Б-30.15

Доказать, что преобразование φ нормально тогда и только тогда, когда каждый собственный вектор для φ является собственным и для φ^*.

Б-30.16

Пусть $\mathcal{L}$ - собственное подпространство нормального преобразования φ. Доказать, что $\mathcal{L}^\perp$ инвариантно относительно φ.

Б-30.17

Пусть x и y - собственные векторы нормального преобразования φ, принадлежащие различным собственным значениям. Доказать, что x и y ортогональны.

Б-30.18

Пусть φ - нормальное преобразование унитарного пространства $\mathcal{U}$. Доказать, что
1)$\mathcal{U}$ - прямая сумма попарно ортогональных собственных подпространств пребразования φ.
2)В $\mathcal{U}$ существует ортонормированный базис из собственных векторов φ.

Б-30.19

Пусть у преобразования существует ортонормированный базис из собственных векторов. Доказать, что оно является нормальным.

Б-30.20

Доказать, что произведение нормальных преобразований является нормальным, если они перестановочны. Верно ли обратное утверждение?

Б-30.20

Доказать, что произведение нормальных преобразований является нормальным, если они перестановочны. Верно ли обратное утверждение?

Б-30.21

Доказать, что преобразование φ унитарного пространства является нормальным тогда и только тогда, когда для любого инвариантного подпространства $\mathcal{L}$ подпространство $\mathcal{L}^\perp$ также инвариантно.

Б-30.22

Нормальное преобразование задано в ортонормированном базисе матрицей A. Найти матрицу S перехода к ортонормированному базису из собственных векторов и матрицу A' преобразования в этом базисе:

1)$A = \left\| \begin{matrix} 2 & i \\ i & 2 \end{matrix} \right\|$

2)$A = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{matrix} \right\|$

3)$A = \frac{1}{3} \left\| \begin{matrix} 3-i & 2i & 0 \\ 2i & 3 & 2i \\ 0 & 2i & 3+i \end{matrix} \right\|.$

Б-30.23

Пусть преобразования φ и ψ - нормальные, и $\varphi\psi = $. Следует ли отсюда, что $\psi\varphi = o$?

Б-30.24

Доказать, что:
1)для любой комплексной матрицы сумма квадратов модулей всех элементов не меньше суммы квадратов модулей всех собственных значений (каждое из которых считается столько раз, какова его кратность);
2)для нормальной матрицы упомянутые в первом пункте суммы равны.

6.6.6 Problems About Self-adjoint and Unitary Transformations

(30.25-30.44)

Б-30.25

Пусть преобразования φ и ψ самосопряженные. Доказать, что самосопряженными будут и преобразования $\varphi\psi + \psi\varphi$ и $i\varphi\psi - i\psi\varphi$.

Б-30.26

Доказать, что:
1)самосопряженные преобразования можно определить как нормальные преобразования, собственные значения которых вещественны;
2)унитарные преобразования можно определить как нормальные преобразования, собственные значения которых по модулю равны 1.

Б-30.27

Доказать, что:
1)каждое преобразование φ унитарного пространства можно представить в виде $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, где φ_1 и φ_2 - самосопряженные преобразования;
2)φ_1 и φ_2 перестановочны тогда и только тогда, когда φ - нормальное преобразование.

Б-30.28

Доказать, что произведение ненулевого самосопряженного преобразования на число α будет самосопряженным тогда и только тогда, когда α вещественно.

Б-30.29

Пусть преобразование φ таково, что $(\varphi(x), x) = 0$ для любого вектора $x \in \mathcal{U}$. Доказать, что $\varphi = o$, если:
1)φ самосопряженное;
2)φ удовлетворяет условию $\varphi = -\varphi^*$.

Б-30.30.

Доказать, что $(\varphi(x), x)$ вещественно для любого вектора $x \in \mathcal{U}$ тогда и только тогда, когда φ - самосопряженное.

Б-30.31

Пусть преобразования φ и ψ самосопряженные. Доказать, что $(\varphi(x), \psi(x))$ вещественно для любого вектора $x \in \mathcal{U}$ тогда и только тогда, когда φ и ψ перестановочны.

Б-30.32

Пусть φ - неотрицательное самосопряженное преобразование и $\operatorname{tr}\varphi = 0$. Доказать, что $\varphi = o$.

Б-30.33

Доказать, что преобразование φ является нормальным тогда и только тогда, когда $|\varphi(x)| = |\varphi^*(x)|$ для любого вектора x.

Б-30.34

Найти условие на матрицу линейного преобразования φ в базисе с матрицей Грама Γ, необходимое и достаточное для того, чтобы преобразование было:
1)самосопряженным;
2)унитарным.

Б-30.35

Доказать, что матрица A является матрицей самосопряженного преобразования ранга 1 в ортонормированном базисе тогда и только тогда, когда найдется такой столбец a, что $A = \bar{\mathbf{a}}\mathbf{a}^T$.

Б-30.36

В ортонормированном базисе дана матрица A самосопряженного преобразования унитарного пространства. Найти матрицу перехода S к ортонормированному базису из собственных векторов и матрицу A' преобразования в новом базисе:
1) $\begin{Vmatrix} 7 & 3i \\ -3i & -1 \end{Vmatrix}; 2) \begin{Vmatrix} 4 & \sqrt{3}+i \\ \sqrt{3}-i & 1 \end{Vmatrix}; 3) \begin{Vmatrix} 5 & \sqrt{2}(1+i) \\ \sqrt{2}(1-i) & 2 \end{Vmatrix};$
4)A_{377}.

Б-30.37

Пусть φ - самосопряженное преобразование. Доказать, что:
1)преобразование $\psi = (\varphi - i\iota)^{-1}(\varphi + i\iota)$ определено и является унитарным;
2)$\psi - \iota$ имеет обратное, и $\varphi = i(\psi + \iota)(\psi - \iota)^{-1}$.

Б-30.38

1)Доказать, что линейное преобразование φ - унитарное тогда и только тогда, когда $\varphi^* = \varphi^{-1}$.
2)Доказать, что для унитарного преобразования сопряженное - также унитарное.
2)сохраняет попарные скалярные произведения базисных векторов некоторого базиса.

Б-30.42

φ - нормальное преобразование, некоторая натуральная степень которого есть тождественное преобразование. Доказать, что φ - унитарное.

Б-30.43

1)Будет ли сумма унитарных преобразований унитарным преобразованием?
2)Будет ли унитарным преобразованием произведение унитарного преобразования на число α?

Б-30.44

Для унитарного преобразования, заданного в ортонормированном базисе матрицей A, найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу преобразования в этом базисе:
1)$A = \begin{Vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{Vmatrix}$
2)$A = \frac{1}{5}\begin{Vmatrix} 3+3i & \sqrt{7} \\ -\sqrt{7} & 3-3i \end{Vmatrix}$
3)$A = \frac{1}{9}\begin{Vmatrix} 4+3i & 4i & -6-2i \\ -4i & 4-3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{Vmatrix}$.

6.7 Tasks for Functions in Linear Space

7 Problems about Specific Constructions and Specific Applications

7.0.1 Problems About Linear Functions

Б-31.3

Как выражаются через базисные векторы коэффициенты линейной функции в базисе e?

Б-31.4

Выпишите строку коэффициентов нулевой линейной функции.

Б-31.5

Может ли для линейной функции f, заданной на $\mathcal{L}_n$, при всех $x \in \mathcal{L}_n$ выполняться:
1)неравенство $f(x) > 0$;
2)неравенство $f(x) \geqslant 0$;
3)равенство f$(x) = \alpha$?

Б-31.6

Даны линейная функция f на $\mathcal{L}_n$ и число α. Всегда ли найдется такой вектор x из $\mathcal{L}_n$, что f$(x) = \alpha$?

Б-31.7

Определить множество значений произвольной линейной функции на вещественном линейном пространстве.

Б-31.8

Пусть $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$ - координатный столбец вектора $x \in \mathcal{L}_3$ в некотором базисе. Будет ли линейной функция f на $\mathcal{L}_3$, определенная равенством:
1)f$(x) = \xi_1 + \xi_2$;
2)f$(x) = \xi_1 - (\xi_2)^2$;
3)f$(x) = \xi_1 + 1$;
4)f$(x) = \xi_1 + 2\xi_2 - 3\xi_3$?

Б-31.9

Выписать строку коэффициентов функции f в случаях 1),
4)задачи 31.8.

Б-31.10

В некотором базисе пространства $\mathcal{L}_3$ функции f и g имеют координатные строки соответственно $(1, 2, 3)$ и $(3, 2, 1)$. Найти координатные строки функций:
1)$f + g$;
2)2f;
3)3 g;
4)$f - g$.

Б-31.11

1)Пусть a - вектор из пространства $\mathcal{E}_3$. Сопоставим каждому вектору **x** из $\mathcal{E}_3$ его скалярную ортогональную проекцию на ось, определяемую вектором a. Доказать, что этим определяется линейная функция на $\mathcal{E}_3$. Найти координатную строку этой функции в каком-нибудь ортонормированном базисе пространства $\mathcal{E}_3$.

2)Пусть m - какая-нибудь плоскость в пространстве $\mathcal{E}_3$. Сопоставим каждому вектору из $\mathcal{E}_3$ длину его ортогональной проекции на m. Будет ли полученная числовая функция линейной?

Б-31.12

1)Пусть a - фиксированный вектор на плоскости $\mathcal{E}_2$. Сопоставим каждому вектору x из $\mathcal{E}_2$ число, равное площади ориентированного параллелограмма, построенного на векторах **a** и x. Доказать, что этим определена линейная функция на $\mathcal{E}_2$, и вычислить ее координатную строку в каком-нибудь ортонормированном базисе.

2)Пусть a - фиксированный вектор на плоскости $\mathcal{E}_2$. Сопоставим каждому вектору $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_2$ число, равное площади параллелограмма, построенного на векторах a и **x**. Будет ли построенная функция линейной?

Б-31.13

1)Пусть a и **b** - фиксированные векторы в пространстве $\mathcal{E}_3$. Сопоставим произвольному вектору x $\in \mathcal{E}_3$ число, равное объему ориентированного параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и **x**, или нулю, если $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и **x** компланарны. Доказать, что этим определена линейная функция, и вычислить ее координатную строку в каком-либо ортонормированном базисе.

2)Пусть a и b - фиксированные вскторы в пространстве $\mathcal{E}_3$. Сопоставим произвольному вектору $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_3$ число, равное объему параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и **x**, или нулю, если $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и x компланарны. Будет ли построенная функция линейной?

Б-31.14

1)Сопоставим столбцу высоты n отношение первых двух его элементов. Будет ли этим определена функция на ∇_n?

2)Сопоставим каждому столбцу высоты n сумму квадратов всех его элементов. Будет ли этим определена линейная функция на ∇_n?

3)Сопоставим каждому столбцу высоты n его i-й элемент. Доказать, что этим определена линейная функция на ∇_n, и найти ее координатную строку в стандартном базисе пространства ∇_n

4)Сопоставим каждому столбцу высоты n сумму его элементов. Доказать, что этим определена линейная функция на ∇_n, и найти ее координатную строку в стандартном базисе пространства ∇_n.

Б-31.15

Функция $\operatorname{tr} X$ сопоставляет каждой квадратной матрице X порядка n ее след. Проверить, что эта функция является линейной, и найти ее координатную строку (координатную матрицу) в стандартном базисе пространства матриц.

Б-31.16

Пусть C - квадратная матрица порядка n. Сопоставим каждой квадратной матрице X порядка n число $\operatorname{tr}\left(C^T X\right)$. Показать, что этим определена линейная функция на пространстве $\nabla_{n\times n}$, и найти ее координатную строку (координатную матрицу).

Б-31.17

Пусть f - какая-нибудь линейная функция, определенная на пространстве $\nabla_{n\times n}$. Доказать, что существует такая квадратная матрица C, что для произвольной матрицы $X \in \nabla_{n\times n}$ выполнено равенство $\mathrm{f}(X) = \operatorname{tr}\left(C^T X\right)$.

Б-31.18

Пусть линейная функция f на пространстве $\nabla_{n\times n}$ для любых двух квадратных матриц A и B порядка n удовлетворяет условию $\mathrm{f}(AB) = \mathrm{f}(BA)$. Доказать, что f определяется равенством $\mathrm{f}(X) = \alpha \operatorname{tr} X$.

Б-31.19

1)Сопоставим каждому многочлену $p(t)$ стегени $\leqslant 3$ число

$$f(p) = \int\limits_{-1}^{1} \left(1+t^2\right) p(t)dt$$

Доказать, что этим определена линейная функция на пространстве многочленов $\mathcal{P}^{(3)}$, и вычислить ее координатную строку в базисе из многочленов $1, t, t^2, t^3$.

2)Сопоставим каждому многочлену $p(t)$ степени $\leqslant 3$ число

$$\mathrm{f}(p) = \int\limits_{0}^{1} p\left(t^2\right) dt.$$

Доказать, что этим определена линейная функция на пространстве многочленов $\mathcal{P}^{(3)}$, и вычислить ее координатную строку в базисе из многочленов $1, t, t^2, t^3$.

Б-31.20

Сопоставим каждому многочлену $p(t)$ степени $\leqslant n$ его значение при $t = 0$. Доказать, что этим определена линейная функция на $\mathcal{P}^{(n)}$, и вычислить ее координатную строку в базисе $1, t, t^2, \ldots, t^n$.

Б-31.20

Сопоставим каждому многочлену $p(t)$ степени $\leqslant n$ его значение при $t = 0$. Доказать, что этим определена линейная функция на $\mathcal{P}^{(n)}$, и вычислить ее координатную строку в базисе $1, t, t^2, \ldots, t^n$.

Б-31.21

Пусть t_0 - фиксированное число. Сопоставим каждому многочлену $p(t)$ степени $\leqslant n$ его значение при $t = t_0$. Доказать, что этим определена линейная функция φ на пространстве $\mathcal{P}^{(n)}$. Вычислить координатную строку функции φ в базисах $1, t, \ldots, t^n$ и $1, t - t_0, \ldots, (t - t_0)^n$.

Б-31.22

Пусть $t_1, \ldots, t_{n+1}$ - попарно различные точки числовой оси, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}$ - соответствующие этим точкам линейные функции на пространстве $\mathcal{P}^{(n)}$, определенные в задаче 31.21.

1)Доказать, что функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}$ линейно независимы.

2)Доказать, что произвольная линейная функция на пространстве $\mathcal{P}^{(n)}$ может быть разложена в линейную комбинацию функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}$.

Б-31.23

Линейная функция δ сопоставляет каждому многочлену $p(t)$ степени $n \quad (n \leqslant 2)$ его свободный член. Разложить эту функцию в линейную комбинацию функций $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, сопоставляющих каждому многочлену его значение соответственно при $t = 1, t = 2$ и $t = 3$.

Б-31.24

Пусть t_0 - какое-нибудь, а $t_1, \ldots, t_{n+1}$ - попарно различные вещественные числа. Доказать, что найдутся такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$, что для любого многочлена $p(t) \in \mathcal{P}^{(n)}$ будет выполнено равенство $p(t_0) = \lambda_1 p(t_1) + \ldots + \lambda_{n+1} p(t_{n+1})$.

Б-31.25

Пусть k - натуральное число. Сопоставим каждому многочлену $p(t)$ степени $\leqslant n$ значение его k-й производной при $t = 0$. Доказать, что этим определена линейная функция на пространстве $\mathcal{P}^{(n)}$, и вычислить ее координатную строку в базисе $1, t, t^2, \ldots, t^n$.

Б-31.26

Пусть k - натуральное число, $k \leqslant n, t_0$ - вещественное число. Сопоставим каждому многочлену $p(t)$ степени не выше n значение его k-й производной при $t = t_0$. Доказать, что этим определена линейная функция на пространстве $\mathcal{P}^{(n)}$. Вычислить ее координатную строку в базисах:

1)$1, t, \ldots, t^n$;

2)$1, t - t_0, \ldots, (t - t_0)^n$.

Б-31.27

Линейные функции $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n$ определены на пространстве $\mathcal{P}^{(n)}$ равенствами

$$\delta_k(p) = \left.\frac{d^k(p)}{dt^k}\right|_{t=t_0} \quad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Доказать, что функции $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n$ линейно независимы.

Доказать, что функции $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n$ линейно независимы.

Б-31.28

Функции $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n$ определены так же, как в задаче

Б-31.27

Доказать, что произвольная линейная функция, заданная на пространстве $\mathcal{P}^{(n)}$, может быть разложена в линейную комбинацию функций $\delta_k (k = 0, 1, \ldots, n)$.

Б-31.29

Пусть в базисе e_1, e_2, e_3 линейная функция f выражается через координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 вектора x формулой $\mathrm{f}(x) = \xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3$. Какой формулой выражается $\mathrm{f}(x)$ через координаты x в базисе $e_1' = e_1 + e_2, e_2' = e_2 + e_3, e_3' = e_3 + e_1$?

Б-31.30

Доказать, что всякую ненулевую линейную функцию f на $\mathcal{L}_n$ подходящим выбором базиса в $\mathcal{L}_n$ можно привести к виду $\mathrm{f}(x) = \xi_1$, где ξ_1 - первая координата вектора x.

Б-31.

Б-31.

В базисе $\mathbf{e}$ линейная функция f имеет строку коэффициентов $\varkappa$. Найти ее строку коэффициентов $\varkappa'$ в базисе $\mathbf{e}' = \mathbf{e}S$, если:
1)$\varkappa = \mathbf{c}_{52}^T, \quad S = A_{201}$;
2)$\boldsymbol{x} = \mathbf{c}_{64}^T, \quad S = A_{202}$;
3)$\varkappa = \mathbf{c}_{66}^T, \quad S = A_{203}$;
4)$\boldsymbol{x} = \mathbf{c}_{51}^T, \quad S = A_{204}$.

Б-31.32

Функции $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, определенные в задаче 31.23, а также функции $\delta_0, \delta_1, \delta_2$, определенные с помощью формул

$$\delta_k(p) = \left.\frac{d^k(p)}{dt^k}\right|_{t=2}, \quad k = 0, 1, 2,$$

образуют пару базисов в пространстве $\mathcal{P}^{(2)*}$. Выписать формулы перехода от первого базиса ко второму.

7.0.2 Problems About Biorthogonal Basis

(

Б-31.33

-

Б-31.42

)

Б-31.33

1)Многочлены $1, t, \ldots, t^n$ образуют базис в пространстве $\mathcal{P}^{(n)}$. Найти соответствующий биортогональный базис.

2)Многочлены $1, t - t_0, \ldots, (t - t_0)^n$ образуют базис в пространстве $\mathcal{P}^{(n)}$. Найти соответствующий биортогональный базис.

Б-31.34

Как преобразуется биортогональный базис, если данный базис преобразуется матрицей перехода S?

Б-31.35

1)Пусть базису e_1, e_2, e_3 пространства $\mathcal{L}_3$ биортогонален базис $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3$ пространства $\mathcal{L}_3^*$. Найти базис, биортогональный базису $e_1' = e_1 + e_2, e_2' = e_2 + e_3, e_3' = e_3$.

2)В четырехмерном арифметическом пространстве столбцы матрицы A_{433} образуют базис. Найти строки коэффициентов элементов биортогонального базиса.

Б-31.36

Построить базис пространства $\mathcal{P}^{(2)}$, биортогональный базису из функций $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, определенных в задаче 31.23.

Б-31.37

Найти базис пространства $\mathcal{P}^{(n)}$, биортогональный базису из функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n+1}$, построенному в задачах $31.21, 31.22$. Вычислить координаты произвольного многочлена в найденном базисе.

Б-31.38

Построить базис пространства $\mathcal{P}^{(2)}$, биортогональный базису из функций $\delta_0, \delta_1, \delta_2$, определенных в задаче 31.32.

Б-31.39

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ - базис в пространстве $\mathcal{L}_n$, а $\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_n$ - биортогональный ему базис в $\mathcal{L}_n^*$. Доказать, что для всех $x \in \mathcal{L}_n$ выполнено равенство $\frac{\text{§ 91. Линейнве функции}}{x=\mathrm{f}_1(x)e_1+\ldots+\mathrm{f}_n(x)e_n,}$ 291 а для всех $\mathrm{y} \in \mathcal{L}_n^*$ - равенство

$$\mathrm{y} = \mathrm{y}\left(e_1\right)\mathrm{f}_1 + \ldots + \mathrm{y}\left(e_n\right)\mathrm{f}_n.$$

Применить формулу (
1)к базисам, рассмотренным в задаче 31.34.

Б-31.40

Используя результат задачи 31.34, доказать, что многочлены $p_0, \ldots, p_k$ степени не выше k линейно независимы тогда и только тогда, когда для некоторого t_0 $\det\left\|p_i^{(j)}\left(t_0\right)\right\| \neq 0$.

Б-31.41

Найти базис, биортогональный стандартному базису пространства $\nabla_{n\times n}$. Вычислить матрицы C, соответствующие функциям этого базиса (в смысле задачи 31.17).

Б-31.42

Матрицы Паули

$$\sigma_0 = \left\|\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right\|, \quad \sigma_1 = \left\|\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}\right\|, \quad \sigma_2 = \left\|\begin{array}{cc} 0 & -i \\ i & 0 \end{array}\right\|, \quad \sigma_3 = \left\|\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array}\right\|$$

образуют базис в пространстве комплексных квадратных матриц порядка 2. Найти базис, биортогональный базису $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, и вычислить матрицы C, соответствующие функциям этого базиса в смысле задачи

Б-31.17

7.0.3 Problems About Linear Function Zeroing

(31.43-31.49)

Б-31.43

Доказать, что произведение двух линейных функций на $\mathcal{L}_n$ тождественно равно 0 тогда и только тогда, когда хотя бы одна из функций нулевая.

Б-31.44

Пусть f - линейная функция на $\mathcal{L}_n$. Доказать, что множество $\mathcal{N}$ векторов, для которых $\mathrm{f}(x) = 0$, является линейным подпространством в $\mathcal{L}_n$. Какова размерность $\mathcal{N}$? Возможно ли совпадение $\mathcal{N}$ и $\mathcal{L}_n$?

Б-31.45

Пусть f, g - линейные функции на $\mathcal{L}_n$ и $\mathrm{f}(x) = 0$ для всех тех x, для которых $\mathrm{g}(x) = 0$. Доказать, что тогда найдется такое число α, что $\mathrm{f} = \alpha\mathrm{g}$.

Б-31.46

В пространстве $\mathcal{L}_4$ выбран базис и даны линейные функции с координатными строками $(5, 24, -7, -1)$ и $(-1, -2, 7, 3)$. Найти множество векторов, на которых эти функции одновременно обращаются в 0.

Б-31.47

Пусть $\mathcal{N}$ - линейное подпространство в $\mathcal{L}_n, \mathcal{K}$ - множество всех линейных функций, обращающихся в 0 на $\mathcal{N}$. Доказать, что $\mathcal{K}$ является линейным подпространством в $\mathcal{L}_n^*$, и вычислить его размерность.

Б-31.48

Подпространство $\mathcal{N}$ в $\mathcal{L}_5$ задано в некотором базисе как линейная оболочка векторов с координатными столбцами $(0,0,1,1,1)^T$ и $(0,1,0,0,1)^T$. Найти в том же базисе координатные строки всех линейных функций, обращающихся в 0 на $\mathcal{N}$.

Б-31.49

Подпространство $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}^{(6)}$ задано как множество всех многочленов вида $(t-1)(t-2)^2p(t)$, где $p(t) \in \mathcal{P}^{(3)}$. Найти множество линейных функций, определенных на $\mathcal{P}^{(6)}$ и обращающихся в 0 на $\mathcal{N}$.

Б-31.50

Пусть $\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_k$ и f линейные функции на линейном пространстве $\mathcal{L}$, и $\mathcal{N}$ - множество таких векторов из $\mathcal{L}$, что $\mathrm{f}_1(x) = \ldots = \mathrm{f}_k(x) = 0$. Доказать, что f раскладывается по $\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_k$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{f}(x) = 0$ для всех x из $\mathcal{N}$.

7.0.4 Problems About Bilinear and Quadratic Functions

Б-32.1

Составить матрицу данной билинейной формы и записать соответствующую ей квадратичную форму в n-мерном линейном пространстве:
1)$x_1y_1 \quad (n=1)$
2)$x_1y_1 \quad (n=2)$
3)$2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 - 5x_2y_2 \quad (n=2)$;
4)$x_1y_2 - 3x_1y_3 + 7x_2y_3 + x_2y_1 - 3x_3y_1 + 7x_3y_2 + x_3y_3 \quad (n=3)$ 5) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i$ 6) $\sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_{n-i+1}$ 7) $\sum\limits_{|i-j|\leqslant 1} x_iy_j$.

Б-32.2

Восстановить симметричную билинейную форму в n мерном линейном пространстве по данной квадратичной форме и составить ее матрицу:
1)$-3x_1^2 \quad (n=1)$;
2)$-18x_1x_2 + 9x_2^2 \quad (n=2)$;
3)$x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 12x_2x_3 + 7x_3^2 \quad (n=3)$;
4)$2x_1^2 - 6x_1x_2 - 3x_2^2 \quad (n=3)$; 5) $\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_ix_{i+1}$

Б-32.3

Записать квадратичную форму, имеюшую данную матрицу:
1)A_{47}
2)A_{37}
3)A_{307}
4)A_{280}; 5) A_{484}; 6) A_{471}; 7) A_{593} 8) A_{634}.

Б-32.4

1)Восстановить симметричную билинейную функцию по порожденной ей квадратичной функции.
2)Доказать, что любую билинейную функцию $\mathrm{b}(x,y)$ можно единственным образом представить как сумму $\mathrm{b}(x,y) = \mathrm{b}_+(x,y) + \mathrm{b}_-(x,y)$, где $\mathrm{b}_+(x,y) = \mathrm{b}_+(y,x)$, а b $\mathrm{b}_-(x,y) = -\mathrm{b}_-(y,x)$. Доказать, что при этом $\mathrm{b}(x,x) = \mathrm{b}_+(x,x)$.

Б-32.5

Как изменится матрица билинейной (квадратичной) функции, если изменить базис $e_1, \ldots, e_n$ следующим образом:
1)поменять местами i-й и j-й векторы базиса;
2)умножить i-й базисный вектор на число $\lambda \neq 0$;
3)вектор e_i заменить на $e_i + \lambda e_j (i \neq j)$;
4)векторы базиса расположить в обратном порядке?

Б-32.6

Квадратичная функция и линейное преобразование имеют в некотором базисе одинаковые матрицы. Какой должна быть матрица перехода от этого базиса к другому базису для того, чтобы в другом базисе матрицы квадратичной функции и линейного преобразования также совпадали?

Б-32.7

Квадратичная функция дана в базисе $e_1, \ldots, e_n$. Записать эту квадратичную функцию в базисе $e'_1, \ldots, e'_n$:
1)$25x_1^2 - 14x_1x_2 + 2x_2^2, \quad e'_1 = e_1 + e_2, \quad e'_2 = -e_1 + e_2;$
2)$3x_1^2 + 10x_1x_2 + 9x_2^2, \quad e'_1 = 2e_1 - e_2, \quad e'_2 = e_1 - e_2;$
3)$4x_1^2 - 12x_1x_2 + 9x_2^2, \quad e'_1 = \frac{1}{4}e_1 - \frac{1}{6}e_2, \quad e'_2 = \frac{1}{4}e_1 + \frac{1}{6}e_2;$
4)$x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_3^2, \quad e'_1 = e_1 + e_2 + e_3, \quad e'_2 = 2e_1 -$

Б-32.8

Привести данную квадратичную форму к каноничегекому виду с помощью метода Лагранжа или элементарных преобразований ее матрицы. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы:
1)$4x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2;$
2)$x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2;$
3)$-x_1x_2;$
4)$25x_1^2 + 30x_1x_2 + 9x_2^2$; 5) $2x_1x_2 - x_1^2 - 2x_2^2$ 6) $24x_1x_2 - 16x_1^2 - 9x_2^2$; 7) $x_1^2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_3^2$; 8) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 - 4x_3^2$; 9) $2x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 9x_2^2 + 19x_3^2$; 10) $9x_1^2 - 12x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$; 1
1)$8x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$; 1
2)(p) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$ 1
3)$x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 3x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4$; 1
4)$x_1^2 - 2x_1x_3 + x_2^2 - 2x_2x_4 + x_3^2 - 2x_3x_5 + x_4^2 - 2x_4x_6 + x_5^2 + x_6^2$ 15) $x_1x_2 + 2x_2x_3 - 3x_3x_4$; 16) $x_1x_2 + x_2x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$.

Б-32.9

Выяснить, какие квадратичные формы из задачи 32.8 являются положительно определенными, отрицательно определенными, полуопределенными.

Б-32.10

Привести к каноническому виду данную билинейную форму:
1)$x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2$
2)$x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$
3)$13x_1y_1 - 5x_1y_2 - 5x_2y_1 + 2x_2y_2;$
4)$-x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$; 5) $x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2$; 6) $x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2$ 7) $x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_3$.

Б-32.11

Доказать, что несимметричную билинейную функцию нельзя привести к диагональному виду.

Б-32.12

Привести квадратичную форму, зависящую от действительного параметра λ, к каноническому виду при всевозможных значениях λ:
1)$3x_1^2 - 2x_1x_2 + \lambda x_2^2;$
2)$8x_1^2 + \lambda x_1x_2 + 2x_2^2;$
3)$2x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2^2 + \lambda x_3^2;$

4)$x_1^2+x_2^2+4x_3^2+\lambda x_4^2+4x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+2x_2x_4+5x_3x_4$ 5) $3x_2^2+6x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3+\lambda x_2x_4+x_3^2+x_3x_4+x_4^2$.

Б-32.13

Привести к каноническому виду данную квадратичную форму в n-мерном пространстве:

1)$x_1^2+2\sum\limits_{i=2}^{n}x_i^2-2\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$

2)$x_1^2+2\sum\limits_{i=1}^{n-1}(-1)^ix_ix_{i+1}$;

3)$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$;

4) $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$ 5) $-\sum\limits_{i=1}^{n}ix_i^2+2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}ix_ix_j$ 6) $\sum\limits_{i=1}^{n}\left((i-1)^2+1\right)x_i^2+2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}ix_ix_j$.

Б-32.14

Доказать, что для положительной определенности квадратичной функции $\mathrm{k}(x)$ необходимо и достаточно любое из условий:

1)$\mathrm{k}\left(e_i\right)>0(i=1,\ldots,n)$ для любого базиса $e_1,\ldots,e_n$;

2)$\mathrm{k}(x)$ приводится к диагональному виду с положительными коэффициентами;

3)$\mathrm{k}(x)$ приводится к каноническому виду $\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2$.

Б-32.15

Показать, что для положительной определенности квадратичной функции необходима, но недостаточна положительность всех диагональных элементов ее матрицы в некотором базисе.

Б-32.16

Доказать, что квадратичная форма отрицательно определена тогда и только тогда, когда знаки главных миноров ее матрицы чередуются следующим образом:

$$\Delta_1<0,\Delta_2>0,\Delta_3<0,\ldots,\operatorname{sign}\Delta_n=(-1)^n.$$

Б-32.17

Пусть ранг квадратичной функции $\mathrm{k}(x)$ в n-мерном линейном пространстве $\mathcal{L}$ равен r. Доказать утверждения:

1)в $\mathcal{L}$ существует базис, в котором главные миноры Δ_k матрицы функции $\mathrm{k}(x)$ отличны от нуля при $k=1,\ldots,r$ и равны нулю при $k=r+1,\ldots,n$.

2)пусть в некотором базисе главные миноры $\Delta_k(k=1,\ldots,r)$ матрицы функции $\mathrm{k}(x)$ отличны от нуля. Тогда $\mathrm{k}(x)$ приводится к диагональной форме $\sum\limits_{k=1}^{r}\frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}\xi_k^2\left(\Delta_0=1\right)$ и к канонической форме $\sum\limits_{k=1}^{r}\varepsilon_k\xi_k^2$, где $\varepsilon_k=\operatorname{sign}\frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}(k=1,\ldots,r)$.

Б-32.18

При каких значениях параметра λ данная квадратичная форма положительно, отрицательно определена или полуопределена:

1)$\lambda x_1^2-4x_1x_2+(\lambda+3)x_2^2$

2)$-9x_1^2+6\lambda x_1x_2-x_2^2$;

3)$\lambda x_1^2+8x_2^2+x_3^2+16x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$;

4)$x_1^2+2\lambda x_1x_2+2x_1x_3+4x_2^2-\lambda x_3^2+2x_2x_3$; 5) $(4-\lambda)x_1^2+(4-\lambda)x_2^2-(2+\lambda)x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3+8x_2x_3$?

Б-32.19

Пусть $\mathrm{k}(x)$ - квадратичная функция в линейном пространстве $\mathcal{L}$. Является ли линейным подпространством в $\mathcal{L}$ множество всех векторов x из $\mathcal{L}$, для которых $\mathrm{k}(x)\geqslant 0(\mathrm{k}(x)\leqslant\leqslant 0)$? Рассмотреть примеры $\mathrm{k}(x)=x_1^2+x_2^2-x_3^2(n=3)$ и $\mathrm{h}(x)=x_1^2+x_2^2\quad(n=3)$.

Б-32.20

1)В матрице положительно определенной квадратичной формы увеличили один диагональный элемент. Доказать, что детерминант матрицы увеличился.

2)Доказать, что в матрице положительно определенной квадратичной формы максимальный по модулю элемент положителен.

Б-32.21

1)Доказать, что в линейном пространстве вещественных квадратных матриц порядка n функция $\mathrm{k}(X) = \operatorname{tr}\left(X^T X\right)$ является положительно определенной квадратичной функцией.

2)Доказать, что в линейном пространстве вещественных квадратных матриц порядка n функция $\mathrm{k}(X) = \operatorname{tr}\left(X^2\right)$ является квадратичной функцией. Найти ее ранг и сигнатуру.

Б-32.22

Доказать, что функция

$$I(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

является симметричной билинейной функцией в пространстве многочленов степени не выше n. Привести ее к каноническому виду при n= 3.

Б-32.23

Доказать, что ранг билинейной функции равен 1 тогда и только тогда, когда эта функция - произведение двух ненулевых линейных функций.

Б-32.24

Доказать, что для представимости квадратичной функции в виде произведения двух линейных вещественных функций необходимо и достаточно, чтобы либо ранг этой квадратичной функции не превосходил 1, либо ранг был равен 2, а сигнатура равна нулю.

Б-32.25

При каком необходимом и достаточном условии квадратичные функции $\mathrm{k}(x)$ и $-\mathrm{k}(x)$ могут быть приведены k одному и тому же каноническому виду?

Б-32.26

1)Пусть $\mathrm{b}(x,y)$ - билинейная функция в линейном пространстве $\mathcal{L}$. Назовем функцию $\mathrm{b}(x,y)$ инвариантной относительно линейного преобразования φ пространства $\mathcal{L}$, если $\mathrm{b}(\varphi(x),\varphi(y)) = \mathrm{b}(x,y)$ для всех $x, y \in \mathcal{L}$. Доказать, что b тогда и только тогда инвариантна относительно φ, когда их матрицы (B и A соответственно) в некотором базисе удовлетворяют равенству $A^T BA = B$.

2)Найти все линейные преобразования двумерного пространства, относительно которых инвариантна билинейная форма: а) $x_1y_1 + x_2y_2$ б) $x_1y_1 - x_2y_2$.

7.0.5 Problems About Quadratic Functions in Euclidean Space and Pairs of Forms

(32.27-32.39)

Б-32.27

Квадратичная (билинейная) функция записана в ортонормированном базисе n-мерного евклидова пространства. Найти ортонормированный базис, в котором данная функция имеет диагональный вид, и записать этот диагональный вид. $n = 2$:

1)$-4x_1^2 + 10x_1x_2 - 4x_2^2$;

2)$\frac{4}{3}x_1^2 - 2x_1x_2 + \frac{3}{4}x_2^2$

3)$7x_1^2 + 4\sqrt{3}x_1x_2 + 3x_2^2$

4)$-x_1y_1 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 - 9x_2y_2$ 5) $-x_1y_1 + \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_1 - x_2y_2$ $n = 3$: 6) $-x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2$ 7) $2x_1^2 - 4x_1x_2 + 9x_2^2 + 4x_2x_3 + 2x_3^2$ 8) $x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_3$;

9) $2x_1y_2+2x_2y_1-2x_1y_3-2x_3y_1+4x_2y_2+4x_2y_3+4x_3y_2-3x_3y_3$ 10) (p) $2x_1^2+4x_1x_2-2x_1x_3-x_2^2+4x_2x_3+2x_3^2$; 1

1)$3x_1^2-2x_1x_2-2x_1x_3+3x_2^2-2x_2x_3+3x_3^2$; 1

2)$3x_1^2+8x_1x_2-8x_1x_3-7x_2^2-8x_2x_3+3x_3^2$; 1

3)$x_1^2-x_1x_2+x_1x_3+x_2^2+x_2x_3+x_3^2$; 1

4)$4x_1^2+4x_1x_2-12x_1x_3+x_2^2-6x_2x_3+9x_3^2$; 15) $x_1y_2+x_2y_1-2x_1y_3-2x_3y_1-x_1y_1-x_2y_2+2x_2y_3+2x_3y_2-4x_3y_3$ 16) $x_1y_2+x_2y_1+x_1y_3+x_3y_1+x_2y_2-x_3y_3$. $n=4$: 17) $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4+x_2^2-2x_2x_3-2x_2x_4+x_3^2-$ $-2x_3x_4+x_4^2$ 18) $x_1^2-2x_1x_2+6x_1x_3+8x_1x_4+4x_2^2-2x_2x_4-6x_3x_4+x_4^2$; 19) $2x_1^2-4x_1x_2+4x_1x_3+6x_2^2-$ $6x_2x_3+2x_2x_4+6x_3^2+2x_3x_4+4x_4^2$; 20) $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4-x_2^2-x_3^2-x_4^2$; 2

1)$\frac{1}{2}x_1y_2+\frac{1}{2}x_2y_1+\frac{1}{2}x_3y_4+\frac{1}{2}x_4y_3$; 2

2)$3x_1^2-8x_1x_2-3x_2^2-x_3^2+4x_3x_4-4x_4^2$; 2

3)$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$; 2

4) $\sum\limits_{i,j=1}^{n}(-1)^{i+j}x_iy_j$ 25) $\sum\limits_{i=1}^{2n-1}x_ix_{2n-i}$ 26) $\sum\limits_{i=1}^{2n}x_i^2+\sum\limits_{i=1}^{2n}x_ix_{2n-i+1}$; 27) $\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$.

Б-32.28

Найти канонический вид, ранг и сигнатуру каждой из квадратичных и билинейных форм задачи 32.27.

Б-32.29

Доказать, что квадратичная форма является положительно определенной тогда и только тогда, когда все характеристические числа ее матрицы положительны, и отрицательно определенной тогда и только тогда, когда отрицательны.

Б-32.30

Пусть все характеристические числа вещественной симметрической матрицы A принадлежат отрезку $[a,b]$. Доказать, что квадратичная форма с матрицей $A-\lambda E$ положительно определена при $\lambda<a$ и отрицательно определена при $\lambda>b$.

Б-32.31

Доказать, что квадратичная форма положительно определена тогда и только тогда, когда все коэффициенты характеристического многочлена ее матрицы отличны от нуля и знаки этих коэффициентов чередуются, причем свободный член положителен.

Б-32.32.

1)Доказать, что линейное преобразование φ евклидова пространства, присоединенное к заданной в нем симметричной билинейной функции $\mathrm{b}(x,y)$, является самосопряженным.

2)Пусть в некотором базисе $\mathbf{e}$ билинейная функция $\mathrm{b}(x,y)$ имеет симметричную матрицу B, а матрица Грама базиса $\mathbf{e}$ равна . Найти матрицу преобразования, присоединенного к функции $\mathrm{b}(x,y)$.

Б-32.33

В базисс е евклидова пространства задана квадратичная форма. Найти в том же базисе матрицу присоединенного к ней преобразования, если матрица Грама базиса е равна Γ:

1)$4x_1^2+16x_1x_2+6x_2^2,\quad \Gamma=A_{56}$;

2)$4x_1^2-6x_1x_2-5x_2^2, \Gamma=A_{55}$

3)$2x_1x_2-x_2^2,\quad \Gamma=A_9$;

4)$2x_1^2+4x_1x_2-2x_1x_3-x_2^2+4x_2x_3+2x_3^2,\quad \Gamma=A_{207}$; 5) $5x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3,\quad \Gamma=A_{308}$; 6) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4-2x_2x_3-2x_2x_4-2x_3x_4,\quad \Gamma=A_{471}$.

Б-32.34

Пусть в некотором базисе $\mathbf{e}$ n-мерного евклидова пространства с матрицей Грама Γ квадратичная функция $\mathrm{k}(x)$ имеет матрицу B. Доказать, что ортонормированный базис, в котором $\mathrm{k}(x)$ диагональна, и ее диагональные коэффициенты в этом базисе находятся как решения обобщенной задачи на собственные значения и собственные векторы: $B\xi=\lambda\Gamma\xi(\xi\in\in\nabla_n)$

Б-32.35

Пусть $\mathcal{M}$ – r-мерное линейное подпространство n мерного евклидова пространства. Функция $\mathrm{k}(x)$ равна квадрату длины ортогональной проекции вектора x на подпространство $\mathcal{M}$. Доказать, что функция $\mathrm{k}(x)$ является квадратичной. Найти диагональный вид, который имеет эта функция в некотором ортонормированном базисе.

Б-32.36

Проверить, что по меньшей мере одна из двух данных квадратичных форм является знакоопределенной. Найти замену координат, приводящую эти две формы одновременно к диагональному виду, и записать этот диагональный вид обеих Форм.

1)$\mathrm{f} = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2, \quad \mathrm{g} = 4x_1^2 + 16x_1x_2 + 6x_2^2$

2)$\mathrm{f} = 2x_1^2 - 3x_1x_2 - \frac{5}{2}x_2^2, \quad \mathrm{g} = 2x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2$

3)$\mathrm{f} = 11x_1^2 - 6x_1x_2 + x_2^2, \quad \mathrm{g} = 13x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2;$

4)$\mathrm{f} = 9x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2, \quad \mathrm{g} = 2x_1x_2 - x_2^2$; 5) $\mathrm{f} = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2, \quad \mathrm{g} = 17x_1^2 + 8x_1x_2 + x_2^2$; 6) $\mathrm{f} = x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2, \quad \mathrm{g} = 2x_1x_2 - \frac{7}{2}x_1^2 - x_2^2$; 7) $\mathrm{f} = (1+4\sqrt{6})x_1^2 + 2\sqrt{6}x_1x_2, \quad \mathrm{g} = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$; 8) $\mathrm{f} = \left(1 + 2m\sqrt{a^2+a}\right)x_1^2 + 2\sqrt{a^2+a}x_1x_2, \quad \mathrm{g} = \left(1+m^2\right)x_1^2 + 2mx_1x_2 + x_2^2$, где m и a - вещсственные параметры, $a^2 + a \geqslant 0$;

9) $\mathrm{f} = 5x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2, \quad \mathrm{g} = 5x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 2x_3^2$ 10) $\mathrm{f} = 15x_2^2 - 4x_3^2 - 10x_1x_2 - 8x_1x_3 + 22x_2x_3, \quad \mathrm{g} = x_1^2 - 2x_1x_3 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$; 1

1)(p) $\mathrm{f} = 6x_1^2 + 6x_1x_3 + x_2^2 - 6x_2x_3 + 6x_3^2, \ \mathrm{g} = 2x_1^2 + 2x_1x_3 + x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2$; 1

2)$\mathrm{f} = 2x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_3^2, \quad \mathrm{g} = 9x_1^2 - 12x_1x_2 - 24x_1x_3 + 4x_2^2 + 16x_2x_3 + 16x_3^2$; 1

3)$\mathrm{f} = x_1^2 + 7x_2^2 + 16x_3^2 + 19x_4^2 - 4x_1x_2 + 10x_1x_3 - 10x_1x_4 - 26x_2x_3 + 8x_2x_4 - 2x_3x_4, \quad \mathrm{g} = -x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 4x_2x_3 - 5x_3^2 + 6x_3x_4 - 10x_4^2$; 1

4)$\mathrm{f} = x_1^2 - 4x_2x_3 + 4x_3^2 - 4x_3x_4 + 4x_4^2, \quad \mathrm{g} = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 - 2x_3x_4 + 2x_4^2.$

Б-32.37

Доказать, что если среди линейных комбинаций двух квадратичных функций имеется положительно определенная, то эти две функции одновременно приводятся к диагональной форме. Показать на примере, что это условие не является необходимым.

Б-32.38

В некотором базисе $\mathbf{e}$ n-мерного линейного пространства квадратичные функции f и g имеют соответственно матрицы F и G. Пусть в базисе $\mathbf{e}'$, заданном матрицей перехода S от базиса e, функция g имеет каноническую форму $\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$, а функция f - диагональную форму $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi_i'^2$. Доказать, что:

1)$\det(F - \lambda G) = (\det S)^2 (\lambda_1 - \lambda) \ldots (\lambda_n - \lambda)$;

2)векторы базиса $\mathbf{e}'$ находятся из системы уравнений $(F- -\lambda G)\xi = \mathrm{o}$ для каждого корня λ уравнения $\det(F - \lambda G) = 0$.

Б-32.39

Не находя замены координат, приводящей положительно определенную квадратичную форму g к каноническому виду, а квадратичную форму f к диагональному виду, найти этот диагональный вид формы f.

1)$\mathrm{f} = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2, \quad \mathrm{g} = 10x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2;$

2)$\mathrm{f} = 89x_1^2 - 42x_1x_2 + 5x_2^2, \ \mathrm{g} = 41x_1^2 - 18x_1x_2 + 2x_2^2;$

3)$\mathrm{f} = 7x_1x_2 + 31x_2^2, \ \mathrm{g} = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$; qq 4)$\mathrm{f} = 8x_1^2 - 5x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2, \quad \mathrm{g} = x_1^2 - x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2.$

7.0.6 Problems About Bilinear and Quadratic Functions in a Complex Space

(32.40-32.47)

Б-32.40

Показать, что:

1)если $\mathrm{b}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ - билинейная функция в n-мерном комплексном арифметическом пространстве, то функция $\mathrm{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathrm{b}(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{y}})$ является эрмитовой билинейной;

2)если $\mathrm{b}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ - эрмитова билинейная функция в пространстве $\rfloor_n$, то b $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathrm{h}(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{y}})$ - билинейная функция.

Б-32.41

Привести следующие квадратичные формы к каноническому виду:
1)$4x_1^2 - 12ix_1x_2 - 9x_2^2$,
3)$2x_1^2 + 24(i+1)x_1x_2 + 16x_2^2$
3)x_1x_2;
4)$\varepsilon^2 x_1^2 - \varepsilon x_1x_2 + x_2^2, \varepsilon = e^{2\pi i/3}$ 5) $(1+i)x_1^2 + (2+2i)x_1x_3 + ix_2^2 + 3x_3^2$; 6) $x_1^2 + (2-2i)x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2ix_2^2 + (2+2i)x_2x_3 + (1+i)x_3^2$; 7) $-x_1^2 - 4ix_1x_2 - (2-2i)x_1x_3 + 4x_2^2 - (4+4i)x_2x_3 + 2ix_3^2$.

Б-32.42

Составить матрицы данных эрмитовых билинейных форм в n-мерном пространстве: d.
1)$-ix_1\bar{y}_1 \quad (n=1)$;
2)$-ix_1\bar{y}_1 \quad (n=2)$;
3)$3x_1\bar{y}_1 + 4ix_1\bar{y}_2 - 5x_2\bar{y}_1 + ix_2\bar{y}_2 \quad (n=2)$;
4)$-3ix_1\bar{y}_1 + 2x_1\bar{y}_2 + 2x_2\bar{y}_1 + (1-i)x_2\bar{y}_2 \quad (n=2)$; 5) $(1+i)x_1\bar{y}_2 + (1+i)x_2\bar{y}_1 - 5x_2\bar{y}_2 \quad (n=2)$;

Б-32.43

Какие из эрмитовых билинейных форм в задаче 32.42 симметричны? Записать соответствующие им эрмитовы квадратичные формы.

Б-32.44

Записать эрмитову квадратичную форму, имеющую данную матрицу:
1)A_{47}
2)A_{79} (при $\varepsilon = e^{2\pi i/3}$);
3)A_{280};
4)A_{491}.

Б-32.45

Эрмитова квадратичная форма записана в ортонормированном базисе n-мерного унитарного пространства. Найти ортонормированный базис, в котором данная эрмитова квадратичная форма имеет диагональный вид, и записать этот диагональный вид:
1)$2|x_1|^2 + ix_1\bar{x}_2 - ix_2\bar{x}_1 + 2|x_2|^2 \quad (n=2)$;
2)$|x_1|^2 + (3-4i)x_1\bar{x}_2 + (3+4i)x_2\bar{x}_1 + |x_2|^2 \quad (n=2)$;
3)$|x_1|^2 + \varepsilon x_1\bar{x}_2 + \bar{\varepsilon}x_2\bar{x}_1 + |x_2|^2 \quad \left(\varepsilon = e^{2\pi i/3}\right) \quad (n=2)$;
4)$3|x_1|^2 + 3|x_2|^2 - 5|x_3|^2 - ix_1\bar{x}_2 + ix_2\bar{x}_1 \quad (n=3)$; 5) $|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + x_1\bar{x}_2 + x_2\bar{x}_1 + ix_1\bar{x}_3 - ix_3\bar{x}_1 + ix_2\bar{x}_3 - ix_3\bar{x}_2 \quad (n=3)$; 6) $12|x_1|^2 - (1+i)x_1\bar{x}_2 - (1-i)x_2\bar{x}_1 + 2x_1\bar{x}_3 + 2x_3\bar{x}_1 + (3+3i)x_1\bar{x}_4 + (3-3i)x_4\bar{x}_1 + 12|x_2|^2 + (1-i)x_2\bar{x}_3 + (1+i)x_3\bar{x}_2 - 2x_2\bar{x}_4 - 2x_4\bar{x}_2 + 8|x_3|^2 - (1+i)x_3\bar{x}_4 - (1-i)x_4\bar{x}_3 + 8|x_4|^2$ $(n=4)$.

Б-32.46

Восстановить симметричную эрмитову билинейную функцию $\mathrm{h}(x,y)$ по эрмитовой квадратичной функции $\mathrm{k}(x) = \mathrm{h}(x,x)$.

Б-32.47

Доказать, что в линейном пространстве комплексных матриц порядка n функция $\mathrm{k}(X) = \operatorname{tr}\left(X \cdot \bar{X}^T\right)$ является положительно определенной эрмитовой квадратичной функцией.

7.1 Problems on Affine and Point Euclidean Spaces

7.1.1 Problems About Affine Spaces

Б-33.1

Проверить, что n-мерное линейное пространство $\mathcal{L}$ является аффинным пространством с пространством векторов, совпадающим с $\mathcal{L}$, если точками этого аффинного пространства считать векторы из $\mathcal{L}$ и всякой упорядоченной паре векторов a, b ставить в соответствие вектор $x = b - a$.

Б-33.2

Доказать, что в аффинном пространстве $\mathcal{A}$:
1)$\overrightarrow{AA} =$ для любой точки A из $\mathcal{A}$;
2)$P(A, o) = A$ для любой точки A из $\mathcal{A}$;
3)$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ для любых точек A и B из $\mathcal{A}$;
4)равенство $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ имеет место тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1}$.

Б-33.3

1)Доказать, что система точек $A_0, A_1, \ldots, A_k$ аффинного пространства независима тогда и только тогда, когда не существует плоскости размерности, меньшей k, содержащей эту систему точек.

2)Доказать, что система точек $A_0, A_1, \ldots, A_k$ аффинного пространства независима тогда и только тогда, когда для произвольной точки O из равенств

$$\lambda_0\overrightarrow{OA_0} + \lambda_1\overrightarrow{OA_1} + \ldots + \lambda_k\overrightarrow{OA_k} = o,$$
$$\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 0$$
$$\text{следует, что } \lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0.$$

Б-33.4

Независима ли система точек с координатами:
1)$(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$
2)$(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(2, 2, 2)$;
3)$(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(2/3, 2/3, 2/3)$?

Б-33.5

Показать, что понятие независимости системы точек $A_0, A_1, \ldots, A_k$ равноправно относительно всех точек этой системы. А именно, если система векторов $A_0A_1, A_0A_2, \ldots, A_0A_k$
(??)
пространствами
1)если $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}'$, то
1)если $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}'$, то либо m и m$'$ не имеют общих точек,
2)$\subset$ m$'$
2)если $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$,то m и m$'$ либо не имеют общих точек, либо совпадают.

Б-33.7

Доказать, что если прямая имеет две различные общие точки с плоскостью, то она принадлежит этой плоскости.

Б-33.8

Доказать, что если k-мерная плоскость m_1 содержит независимую систему точек $A_0, A_1, \ldots, A_k$, общих с плоскостью m_2, то $\mathrm{m}_1 \subset \mathrm{m}_2$.

Б-33.9

Доказать, что существует ровно одна k-мерная плоскость, содержащая независимую систему точек $A_0, A_1, \ldots, A_k$.

Б-33.10

Пусть $A_0, A_1, \ldots, A_k$ - независимая система точек в k-мерной плоскости m, а O - фиксированная точка аффинного пространства. Доказать, что m состоит из тех и только тех точек A, для которых

$$\overrightarrow{OA} = \lambda_0\overrightarrow{OA_0} + \lambda_1\overrightarrow{OA_1} + \ldots + \lambda_k\overrightarrow{OA_k},$$

$$+\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1.$$

Б-33.11

Пусть l_1, l_2, l_3, l_4 - прямые в аффинном пространстве, причем l_1 параллельна 1_2, а l_3 параллельна l_4. Пусть, далее, l_3 пересекает l_1 и l_2 в точках A_1 и B_1 соответственно, а l_4 B_2 такой, что $\widehat{A_1A_2} = \widehat{B_1B_2}, \overline{A_1B_1} = \widehat{A_2B_2}$.

Б-33.12

Доказать, что любые две прямые n-мерного аффинного пространства ($n \geqslant 3$) целиком содержатся в некоторой трехмерной плоскости.

Б-33.13

При каком необходимом и достаточном условии две прямые $x = a_0 + a_1 t$ и $x = b_0 + b_1 t$ содержатся в одной двумерной плоскости?

Б-33.14

Составить уравнения: 1) прямой, проходящей через точки $A(-1, 0, 3, -2)$ и $B(2, 1, 4, 5)$
2)двумерной плоскости, проходящей через точки $A(-2, 1, 1, 1), B(1, 3, -5, 2)$ и $C(0, 1, 1, 4)$;
3)трехмерной плоскости (гиперплоскости), проходящей через точки $A(1, 1, 0, -1), B(2, -1, 3, 3), C(1, -1, 1, 5)$ и $D(0, 0, 3, -1)$.

Б-33.15

Пусть $A\left(x_1', x_2', \ldots, x_n'\right)$ и $B\left(x_1'', x_2'', \ldots, x_n''\right)$ - две различные точки, p и q - некоторые числа. Найти координаты точки C, делящей отрезок AB в отношении $p : q$.

Б-33.16

Пусть точки A, B, C в n-мерном пространстве не лежат на одной прямой. Доказать, что медианы треугольника ABC проходят через одну точку и делятся в этой точке в отношении $2 : 1$, считая от вершины.

Б-33.17

Точка M принадлежит гиперплоскости заданной уравнением $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a_0 = 0$, а вектор $\overline{MM_1}$ имеет координатный столбец $(a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$. Доказать, что координаты точки M_1 удовлетворяют неравенству $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a_0 > 0$.

Б-33.18

Составить параметрические уравнения плоскости, заданной системой линейных уравнений: 1) $A_{27}\mathbf{x} = \mathbf{c}_{46}$
2)$A_{10}\mathbf{x} = \mathbf{c}_{29}$
3)$A_{198}\mathbf{x} = \mathbf{c}_{123}$
4)$A_{249}\mathbf{x} = \mathbf{c}_{124}$ 5) $A_{267}\mathbf{x} = \mathbf{c}_{66}$ 6) $A_{517}\mathbf{x} = \mathbf{c}_{125}$ 7) $A_{403}\mathbf{x} = \mathbf{c}_{208}$ 8) $A_{586}\mathbf{x} = \mathbf{c}_{123}$.

Б-33.19

Составить систему уравнений, определяющую данную плоскость: 1) $\mathbf{x} = \mathbf{c}_{28} + t\mathbf{c}_{33}$
2)$\mathbf{x} = \mathbf{c}_{83} + t_1 c_{84} + t_2 c_{66}$
3)$\mathbf{x} = \mathbf{c}_{147} + t\mathbf{c}_{146}$
4)$\mathbf{x} = \mathbf{c}_{168} + t\mathbf{c}_{207}$ 5) $\mathbf{x} = \mathbf{c}_{199} + t_1\mathbf{c}_{166} + t_2\mathbf{c}_{200}$

Б-33.20

Составить уравнение гиперплоскости в четырехмерном пространстве, проходящей через точку $M(-1, 2, 3, 5)$ параллельно гиперплоскости $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 + 5 = 0$.

Б-33.21

Составить уравнение прямой в четырехмерном пространстве, проходящей через точку $M \cdot (-1, 3, 4, 0)$ параллельно прямой $x_1 = 2 + 3t, x_2 = -1 + t, x_3 = 7t, x_4 = 2 - t$.

Б-33.22

Составить уравнения трехмерной плоскости в пятимерном пространстве, проходящей: 1) через точку $M(0,1,-1,3,4)$ параллельно трехмерной плоскости $x_1+2x_2+3x_3=x_4, x_1+x_2+x_3+x_4=2x_5$;

2)через точки $M_1(1,3,1,0,1)$ и $M_2(0,0,1,1,-1)$ параллельно двумерной плоскости $x_1+x_2-1=0, x_1-x_3+x_4=0,\ x_1+x_3-x_5+1=0$

3)через точки $M_1(-1,2,0,0,4), M_2(1,1,1,1,1), M_3(0,1,\ 3,-1,1)$ параллельно прямой $x_1=1+2t, x_2=3-t, x_3=4, x_4=1+t, x_5=-t$.

Б-33.23

Пусть 1 и m - две плоскости в аффинном пространстве с направляющими подпространствами $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ соответственно, проходящие: 1 - через точку A, m - через точку B. Доказать, что: 1) пересечение 1cm непусто тогда и только тогда, когда вектор $\overline{AB}$ принадлежит подпространству $\mathcal{L}+\mathcal{M}$;

2)если плоскости 1 и m пересекаются, то пересечение 1 $\cap$ m представляет собой плоскость с направляющим подпространством $\mathcal{L}\cap\mathcal{M}$.

Б-33.24

Пусть две плоскости размерностей k_1 и k_2 в n - мерном аффинном пространстве имеют общую точку, и $k_1+k_2>n$. Доказать, что размерность пересечения данных плоскостей не меньше, чем k_1+k_2-n. Дать формулировки этого утверждения для всех возможных случаев при $n=3$ и $n=4$.

Б-33.25

Пусть плоскость 1 с направляющим подпространством $\mathcal{L}$ проходит через точку A, плоскость m с направляющим подпространством $\mathcal{M}$ проходит через точку B, не совпадающую с A. Доказать, что существует и единственна плоскость наименьшей размерности, содержащая как l, так и m; при этом направляющим подпространством искомой плоскости является сумма $\mathcal{L}+\mathcal{M}+\mathcal{P}$, где $\mathcal{P}$ - подпространство, натянутое на вектор $\overrightarrow{AB}$.

Б-33.26

Сформулировать и доказать утверждение, аналогичное утверждению в задаче 33.25, для трех плоскостей.

Б-33.27

Составить уравнения заданной плоскости в четырехмерном пространстве: 1) двумерной плоскости, содержащей точку $A(-1,0,2,3)$

и прямую $x_1=1-t, x_2=3+2t, x_3=1+t, x_4=3t$;

2)двумерной плоскости, содержапей параллельные прямые $x_1=-1+2t, x_2=t, x_3=0, x_4=-5-t$ и $x_1=3+2t,\ x_2=-4+t, x_3=1, x_4=-t$

3)трехмерной плоскости, содержащей точку $A(-3,0,1,0)$ и двумерную плоскость $x_1-x_2+x_3-1=0, x_1+x_2+x_4=0$.

Б-33.28

Составить уравнения плоскости наименьшей размерности, содержащей две данные плоскости пятимерного пространства: 1) прямые $x_1=1-t, x_2=2+3t, x_3=4t, x_4=-t, x_5=3$ и $x_1=2+t, x_2=2t, x_3=1+t, x_4=-1+2t, x_5=3-t$;

2)прямую $x_1=2+t, x_2=-t, x_3=-1+t, x_4=1+2t,\ x_5=-3t$ и двумерную плоскость $x_1=t_1+3t_2, x_2=-1+4t_1-t_2, x_3=-3+t_1+t_2, x_4=4-t_1+t_2, x_5=-2+t_2$

3)двумерные плоскости $x_1-x_3+x_4-1=0, x_1+2x_4-x_5-2=0, x_2+x_3-2=0$ и $x_1=x_2=x_3=1$.

Б-33.29

1) Доказать, что если две плоскости в n-мерном пространстве абсолютно скрещиваются, то сумма их размерностей не превосходит $n-1$.

2)Доказать, что если две плоскости в n-мерном пространстве скрещиваются параллельно r-мерной плоскости, то сумма их размерностей не превосходит $n+r-1$.

Б-33.30

Исследовать взаимное расположение прямой и двумерной плоскости в четырехмерном пространстве, если двумерная плоскость задается уравнениями $x_1 - 2x_3 + 1 = 0, x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 2 = 0$, а прямая задана параметрически: 1) $x_1 = 3 + 2t, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = 2 + t, \quad x_4 = t$
2)$x_1 = -2 + 3t, \quad x_2 = 3 - t, \quad x_3 = -1 + 2t, \quad x_4 = -4 + 4t;$
3)$x_1 = 6 + t, \quad x_2 = 5 - t, \quad x_3 = 1 + 2t, \quad x_4 = 1 + 3t$
4)$x_1 = -1 + 2t, \quad x_2 = 1 + t, \quad x_3 = t, \quad x_4 = 1 - t.$

Б-33.31

Исследовать взаимное расположение двух двумерных плоскостей в пятимерном пространстве, если первая плоскость задается уравнениями $x_1 = x_2 = 1, x_3 + x_4 = x_5$, а вторая - параметрическими уравнениями: 1) $x_1 = 2 + t_1, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 3 + 2t_2, \quad x_4 = 4, \quad x_5 = 5 + t_1 + t_2$
2)$x_1 = -t_1, \quad x_2 = 3 + 2t_1, \quad x_3 = 2 + t_1, \quad x_4 = 1 + t_1 - t_2, x_5 = 2 + t_2$
3)$x_1 = 2 + t_1 + t_2, \quad x_2 = 3 + t_1 + t_2, \quad x_3 = 3 + 2t_1 + t_2, x_4 = 4 + t_1, \quad x_5 = 5 - 2t_2$
4)$x_1 = t_1 - t_2, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = t_1, \quad x_4 = 1 - t_2, \quad x_5 = 3 - t_1 + t_2$ 5) $x_1 = 1, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 1 + t_1 + t_2, \quad x_4 = 2 + 2t_1 - 2t_2, x_5 = -5 + 3t_1 - t_2$ 6) $x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2 + 2t_1 + t_2, \quad x_4 = -3 + t_1 - 3t_2, x_5 = -1 + 3t_1 - 2t_2.$

Б-33.32

Доказать, что две прямые в четырехмерном пространстве, заданные уравнениями $\mathbf{x} = \mathbf{c}_{209} + t\mathbf{c}_{197}$ и $\mathbf{x} = \mathbf{c}_{210} + t\mathbf{c}_{201}$, имеют единственную общую точку. Найти координаты этой точки и составить уравнения двумерной плоскости, содержащей данные прямые.

Б-33.33.

Точками аффинного пространства являются многочлены степени не выше 4, векторами являются те же многочлены: $\overline{p_1(t)p_2(t)} = p_2(t) - p_1(t)$. Первая прямая содержит точки $2t^4 - 2t$ и $t^4 + t^3 - t$, вторая прямая содержит точки $5 + 10t^2 + 2t^3$ и $-1 - 2t^2 + 2t^3$. Доказать, что эти прямые имеют единственную общую точку, и найти эту точку (многочлен).

Б-33.34

Составить параметрические уравнения прямой в четырехмерном пространстве, содержащей точку с координатным столбцом $\mathbf{c}_{211}$ и пересекающей прямые $\mathbf{x} = \mathbf{c}_{212} + t\mathbf{c}_{202}$ и $\mathbf{x} = \mathbf{c}_{213} + t\mathbf{c}_{210}$; найти координаты точек пересечения.

Б-33.35

Система точек $A_1, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_j$ независима. Доказать, что существуют непересекающиеся плоскости 1 и m размсрностей $k - 1$ и $j - 1$ соответственно такие, что плоскость 1 содержит точки $A_1, \ldots, A_k$, а плоскость m содержит точки $B_1, \ldots, B_j$.

Б-33.36

Пусть l и m - плоскости аффинного пространства такие, что пространство векторов аффинного пространства является прямой суммой направляющих подпространств $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ этих плоскостей. Доказать, что: 1) проекция любой точки аффинного пространства на плоскость 1 параллельно плоскости m определена однозначно;
2)проекция любого вектора $\overline{AB}$ на плоскость 1 параллельно плоскости m является проекцией этого вектора на подпространство $\mathcal{L}$ параллельно подпространству $\mathcal{M}$.

Б-33.37

Найти координаты проекции точки $M(5, 0, -3, 4)$ четырехмерного пространства: 1) на гиперплоскость $x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2$ параллельно прямой $x_1 = 1 - t, x_2 = 3 + 4t, x_3 = 3t, x_4 = 1 + t$
2)на двумерную плоскость $x_1 - x_2 + x_3 + 1 = 0, x_1 + x_2 = x_4$ параллельно двумерной плоскости $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, $x_1 - 2x_4 - 3 = 0$.

Б-33.38

Является ли выпуклым множество точек в n-мерном аффинном пространстве $(n = 1, 2, \ldots)$, координаты $x_1, \ldots, x_n$ которых в декартовой системе координат удовлетворяют условию: $\cdots$ 1) $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a_0 = 0$
2)$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a_0 \geqslant 0$; (.)

3)$\lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2 \leqslant 1$, где $\lambda_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n; \Rightarrow$
4)$\lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2 \geqslant 1$, где $\lambda_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, n$; 5) $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0$; 6) $x_1 x_2 \ldots x_n \geqslant 0$?

Б-33.39

Доказать выпуклость k-мерного параллелепипеда.

Б-33.40

Доказать, что пересечение выпуклых множеств является выпуклым множеством.

Б-33.41

Найти проекцию четырехмерного симплекса, ограниченного гиперплоскостями $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$ и $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$, на гиперплоскость $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ параллельно прямой $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

Б-33.42

Доказать, что все диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке, называемой центром параллелепипеда.

Б-33.43

Для k-мерного параллелепипеда найти число: 1) различных p-мерных граней;
2)различных диагоналей.

Б-33.44

Определить форму и вершины сечений четырехмерного параллелепипеда $-1 \leqslant x_i \leqslant 1, i = 1, 2, 3, 4$, гиперплоскостью $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

7.1.2 Problems About Point Euclidean Spaces

(тут жесткие задачи на расстояния, углы, я пока не готов к этому, пропишу сперва теорию про это.)
(возможно, это в ангем перенесу)

Б-34.1

Проверить, что расстояние $\rho(A, B)$ между точками A и B в точечном евклидовом пространстве обладает следующими свойствами:
1)$\rho(A, B) = \rho(B, A)$ для любых точек A и B;
2)$\rho(A, B) \leqslant \rho(A, C) + \rho(B, C)$ для любых точек A, B, C;
3)для любой точки C такой, что $\overrightarrow{Ac} = \lambda \overrightarrow{AB}$, выполняется равенство $\rho(A, C) = |\lambda| \rho(A, B)$.
(лень, вроде в теории это делается)

Б-34.2 Стороны и углы треугольника по координатам (?)

Найти длины сторон и внутренние углы треугольника ABC, заданного координатами вершин:
1)$A(-1, 0, -1, 2), \quad B(0, 2, 0, 3), \quad C(2, 1, 1, 2)$;
2)$A(1, 2, 2, -1), \quad B(3, 0, 3, -1), C(2, 1, 1, 0)$;
3)$A(0, 1, -1, 2, -1), \quad B(4, 1, 1, 2, 3), \quad C(3, 4, 2, 5, -1)$.
Стороны можно просто найти как расстояния между точками, а углы - там формулу забыл, по идее как-то через скалярное произведение.
(потренируюсь потом.)

Б-34.3

Доказать, что множеством точек, равноудаленных от двух заданных различных точек A и B, является гиперплоскость, проходящая через середину отрезка AB перпендикулярно этому отрезку.
(как-то расписать мб нужно расстояния? хотя вроде очевидно, что так должно быть.)

Б-34.4 Радиус описанной около четырехмерного симплекса сферы (!?)

Найти центр и радиус сферы, описанной около четырехмерного симплекса, заданного координатами вершин:
1)$A_0(4,-2,-1,-1)$, $A_1(1,1,2,2)$, $A_2(3,1,0,0)$, $A_3(0,2,3,-1)$, $A_4(1,-5,-4,2)$;
2) $A_0(3,3,1,-1)$, $A_1(1,3,3,1)$, $A_2(0,3,4,-1)$, $A_3(2,1,2,3)$, $A_4(2,3,0,1)$.

Б-34.5

Гиперплоскость m в четырехмерном точечном евклидовом пространстве содержит тетраэдр, заданный координатами своих вершин: $A_1(4,4,-1,1), A_2(-2,-8,-5,1), A_3(3,3,1,3), A_4(1,-2,4,1)$. Гиперплоскость m рассматривается как трехмерное точечное евклидово пространство. Найти в этом пространстве центр и радиус сферы, описанной около данного тетраэдра.

Б-34.6

Доказать, что расстояние от точки A до k-мерной плоскости m равно:
1)расстоянию между точкой A и ее ортогональной проекцией на m;

2) длине ортогональной составляющей вектора $\overrightarrow{AB}$(B - произвольная точка из m) относительно направляющего подпространства плоскости m.

Б-34.7

Пусть 1 и m - плоскости с направляющими подпространствами $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ соответственно, проходящие: 1 - через точку A и m - через точку B. Доказать, что расстояние между плоскостями 1 и m равно длине ортогональной составляющей вектора $\overline{AB}$ относительно подпространства $\mathcal{L}+\mathcal{M}$.

Б-34.8

Гиперплоскость m задана уравнением $a_1x_1+\ldots\cdots+a_nx_n+a_0=0$. Доказать, что:
1)вектор с координатным столбцом $(a_1,\ldots,a_n)^T$ ортогонален m;
2) расстояние от точки $A\,(y_1,\ldots,y_n)$ до m равно

$$|a_1y_1+\ldots+a_ny_n+a_0|\,/\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}.$$

Б-34.9

Точка A задана координатами, гиперплоскость m - уравнением. Найти расстояние от A до m, если:
1)$A(9,2,-3,1)$, m: $3x_1+x_2-x_3-5x_4+3=0$;
2) $A(1,-3,0,-2,4), \mathrm{m}: 2x_1-5x_2+x_3+3x_4+5x_5-7=0$.

Б-34.10

Составить уравнение гиперплоскости, параллельной гиперплоскости m и расположенной от m на заданном расстоянии d, если:
1)$\mathrm{m}: 5x_1+2x_2-4x_3+2x_4=3$, $d=2$;
2) $\mathrm{m}: x_1-4x_2+2x_3+2x_4=4$, $d=5$;
3)m: $2x_1-x_2-x_3+x_4+3x_5=-5$, $d=3$.

Б-34.11 ортогональная проекция точки на гиперплоскость (???!!)

Найти ортогональную проекцию точки A на гиперплоскость m:
1)$A(7,-1,6,1)$, m: $3x_1-x_2+2x_3+x_4=5$;
2) $A(1,2,8,-2)$, m: $2x_1-2x_3+x_4=11$;
3)$A(3,0,-1,2,6)$, m: $5x_1+3x_2-2x_3-x_4+4x_5=-16$.

Б-34.12

Точки A и B заданы своими координатами. Найти ортогональную проекцию вектора $\overline{AB}$ на гиперплоскость m, если:
1)$A(-3,0,1,3)$, $B(5,2,2,3)$, m: $2x_1+x_2-x_4=3$; 2) $A(3,3,-8,-3,4)$, $B(3,2,-1,-2,2)$, $\mathrm{m}: x_1+x_2-2x_3+x_4+x_5=5$.

Б-34.13

Найти отношение длины ортогональной проекции произвольного ребра n-мерного куба на его диагональ к длине диагонали.

Б-34.14

Найти точку, ортогонально симметричную точке A относительно гиперплоскости m:
1)$A(5,5,3,3)$, m: $2x_1+3x_2+x_3+2x_4+2=0$; 2) $A(3,5,-3,5)$, $\quad \mathrm{m}: x_1-3x_2+4x_3-5x_4-2=0$;
3)$A(3,6,3,8,1), \mathrm{m}: x_1-x_2-2x_4+2x_5-3=0$.

Б-34.15

Найти ортогональную проекцию точки A на прямую l:
1)$A(1,-5,2,0)$; l: $x_1=4+t, \quad x_2=3+2t, \quad x_3=-3-t, x_4=7+3t$ 2) $A(-2,1,4,2)$; l: $x_1=-3+2t, \quad x_2=3-t, x_3=-1+t, x_4=-3+t$
3)$A(2,4,3,-1,1)$; $\quad 1: x_1=2-2t, \quad x_2=-1+3t, \quad x_3=-1+2t, \quad x_4=2+t, \quad x_5=-t$.

Б-34.16

Точка A не принадлежит плоскости m. Доказать, что существует единственная прямая, проходящая через точку A, пересекающая m и перпендикулярная к m.

Б-34.17

Составить уравнения перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую 1:
1)$A(1,-3,-2,4)$; l: $x_1=4+3t, \quad x_2=2+t, \quad x_3=3+t, x_4=-1-t$
2) $A(1,-3,-1,3)$; l: $x_1=2+t, \quad x_2=1-2t, \quad x_3=-1+2t, \quad x_4=t$
3)$A(4,0,1,1,1)$; l: $x_1=t, \quad x_2=3-2t, \quad x_3=-2+t, x_4=-3+2t, \quad x_5=t$

Б-34.18

Найти точку, ортогонально симметричную точке A относительно прямой l:
1)$A(4,1,-1,-1)$, $\quad$ 1 - прямая задачи $34.15, 1)$; 2) $A(2,5,-3,-2), 1$ - прямая задачи $34.15, 2)$.

Б-34.19

Найти угол между вектором, заданным координатным столбцом a, и гиперплоскостью m, если:
1)$\mathbf{a}=(0,1,0,1)^T$, m: $3x_1-x_2+x_3-5x_4=2$
2) $\mathbf{a}=(1,-1,1,1)^T, \quad \mathrm{m}: 3x_1-x_2+2x_3+2x_4=5$
3)$\mathbf{a}=(1,-3,2,-1,-1)^T$, m: $x_1+x_2-2x_3+3x_4-x_5=1$.

Б-34.20

Найти угол между прямыми l_1 и l_2, если:
1)$l_1: x_1=4+t, \quad x_2=-2t, \quad x_3=1-t, \quad x_4=2; \quad l_2: x_1=3, x_2=t, \quad x_3=5+t, \quad x_4=-1$
2) $\mathrm{l}_1: \quad x_1=1+t, \quad x_2=2+t, \quad x_3=3+t, \quad x_4=2t, \quad x_5=1-t; \quad \mathrm{l}_2: x_1=t, \quad x_2=5, \quad x_3=-1+t, \quad x_4=3-2t, \quad x_5=2t$.

Б-34.21

Найти расстояние от точки A до прямой 1:
1)$A(0,3,2,-5)$; $\quad \mathrm{l}: \quad x_1=1+t, \quad x_2=-t, \quad x_3=2+2t, x_4=-2+2t$
2) $A(2,-2,1,5)$; l: $x_1=3+t, \quad x_2=-1+t, \quad x_3=2+t,$
3)$A(3,3,1,0,0)$; l: $\quad x_1=2+3t, \quad x_2=1+2t, \quad x_3=-t, x_4=1+t, \quad x_5=-1-t$
4)$A(1,-1,-1,1)$; l: $x_1+x_2+2x_3+1=0, \quad 3x_2+2x_3-x_4-1=0, \quad x_1-x_2+x_3+x_4+2=0$.

Б-34.22

Прямая l_1 с направляющим вектором a_1 проходит через точку A_1, прямая l_2 с направляющим вектором a_2 проходит через точку A_2. Доказать, что:
1)если a_1 и a_2 не коллинеарны, то квадрат расстояния между l_1 и l_2 равен $\det\Gamma\left(\overrightarrow{A_1A_2}, a_1, a_2\right) / \det\Gamma\left(a_1, a_2\right)$;

2) если a_1 и a_2 коллинеарны, то квадрат расстояния между l_1 и l_2 равен $\det\Gamma\left(\overrightarrow{A_1A_2}, a_1\right) / \left|a_1\right|^2$.

Б-34.23

Найти расстояние между прямыми l_1 и l_2:
1)$\mathrm{l}_1: \quad x_1=1+t, \quad x_2=-1, \quad x_3=-t, \quad x_4=-2+t$ $\mathrm{l}_2: x_1=4+t, \quad x_2=2t, \quad x_3=1+t, \quad x_4=t$
2) $\mathrm{l}_1: \quad x_1=2+t, \quad x_2=-1-2t, \quad x_3=2+2t, \quad x_4=1-t$ $l_2: x_1=3-t, \quad x_2=1+2t, \quad x_3=-1-2t, \quad x_4=2+t$
3)$\mathrm{l}_1: \quad x_1=3+t, \quad x_2=2, \quad x_3=t, \quad x_4=3+t, \quad x_5=-t$; $l_2: x_1=1+2t, \quad x_2=2t, \quad x_3=1-t, \quad x_4=t, \quad x_5=2$
4)$l_1: x_1=1+t, \quad x_2=2t, \quad x_3=1-t, \quad x_4=-1+t, \quad x_5=t$; $\mathrm{l}_2: x_1=3+t, \quad x_2=-2t, \quad x_3=-1-t, \quad x_4=1+t, \quad x_5=2+t$; 5) $l_1: \quad x_1=1-2t, \quad x_2=0, \quad x_3=t, \quad x_4=1+t, \quad x_5=2$; $l_2: x_1=-1+t, \quad x_2=-1+t, \quad x_3=0, \quad x_4=1, \quad x_5=-2-t$.

Б-34.24

Составить уравнения перпендикуляра, опущенного из точки A на плоскость m, если:
1)$A(3,7,-2,1)$; $\quad \mathrm{m}: x_1=2+t_1, \quad x_2=2+t_2, \quad x_3=t_1+t_2, \quad x_4=-t_2$
2) $A(-3,-1,4,7,-3)$; m: $x_1=t_1+t_3, \quad x_2=2+t_2+t_3$ $x_3=2+t_1, \quad x_4=1+t_2+t_3, \quad x_5=1+t_2$.

Б-34.25

Найти ортогональную проекцию точки A на плоф кость m, если:
1)$A(-3,2,2,-2)$; $\quad \mathrm{m}: \quad x_1=2+t_1+t_2, \quad x_2=4+2t_1$ $x_3=t_1, \quad x_4=-t_2$;
2) $A(3,2,1,4,-1)$; $\quad \mathrm{m}: x_1=1+t_1, \quad x_2=-1+t_2, \quad x_3=2+t_1+t_2, \quad x_4=-2-t_1, \quad x_5=t_2$
3)$A(0,-1,5,1,-2)$; m: $x_1=1+t_1, \quad x_2=t_3, \quad x_3=1+t_1+t_2, \quad x_4=-2+t_3, \quad x_5=-1+t_2$.

Б-34.26

Найти точку, ортогонально симметричную точке f относительно плоскости m, если:
1)$A(5,3,-1,-1)$; $\mathrm{m}: x_1=1+t_1, \quad x_2=t_2, \quad x_3=-2+t_2, \quad x_4=-1+t_1$
2) $A(3,5,0,2,2)$; $\quad \mathrm{m}: x_1=t_1, \quad x_2=2+t_2, \quad x_3=-3+t_1$ $x_4=3-t_1-t_2, \quad x_5=1$.

Б-34.27

Пусть m - плоскость с направляющим подпро странством $\mathcal{M}$, проходящая через точку A_0, а $f_1,\ldots,f_k$ - базис в $\mathcal{M}$. Доказать, что квадрат расстояния от точки A_1 дс плоскости m равен

$$\det\Gamma\left(\overrightarrow{A_0A_1}, f_1,\ldots,f_k\right) / \det\Gamma\left(f_1,\ldots,f_k\right).$$

Б-34.28

Найти расстояние от точки A до плоскости m:
1)в задаче 34.24, 1); 2) в задаче 34.24, 2).

Б-34.29

Найти расстояние от точки A до плоскости m, заданной параметрически, если:
1)$A(1,2,1,1)$; $\quad \mathrm{m}: \quad x_1=-2t_1+4t_2, \quad x_2=-1+t_1-t_2, x_3=-t_3, \quad x_4=t_1-t_2$
2) $A(3,1,1,0)$; $\quad \mathrm{m}: \quad x_1=-2+t_1, \quad x_2=-t_1+2t_2, \quad x_3=t_1-t_2, \quad x_4=1-t_1-t_2$
3)$A(1,2,1,3,0)$; $\quad \mathrm{m}: \quad x_1=1+t_1, \quad x_2=-t_1+t_2, \quad x_3=$
$=1+t_2, \quad x_4=-1-t_2, \quad x_5=t_1$.

Б-34.30

Найти расстояние от точки A до плоскости m, заданной системой линейных уравнений, если:
1)$A(1,0,0,1)$; $\quad \mathrm{m}: x_1+2x_2+2x_3-3x_4=7, \quad x_1-2x_3+2x_4=-6$
2) $A(1,2,0,0)$; $\quad \mathrm{m}: x_1+x_2-x_3-x_4=1, \quad 2x_2-3x_3+x_4=2, \quad 2x_1+x_3-3x_4=0$.

Б-34.31

Точки A и B заданы своими координатами. Найти угол между вектором $\overrightarrow{AB}$ и плоскостью m, если:
1)$A(1,2,2,3)$, $\quad B(4,0,0,2)$; $\quad \mathrm{m}: x_1=1+t_1, \quad x_2=2+t_2, \quad x_3=-t_1+t_2, \quad x_4=3$ 2) $A(0,1,-1,0,1)$, $B(3,1,0,1,2)$; $\mathrm{m}: x_1=t_1+t_2, x_2=5, x_3=-t_2, \quad x_4=-t_1+t_2, \quad x_5=2+t_1$
3)$A(-1,-1,1,0,1)$, $\quad B(2,1,1,1,0)$; $\quad \mathrm{m}: x_1=t_1+t_3, x_2=2+t_2, \quad x_3=1-t_2, \quad x_4=-t_1+t_3, \quad x_5=-2t_3$.

Б-34.32

Плоскости 1 и m из n-мерного точечного евклидова шространства с направляющими подпространствами $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ соответственно проходят: 1 - через точку A, m - через точку B. Пусть $g_1, \ldots, g_k$ - базис в подпространстве $\mathcal{L}+\mathcal{M}$. Доказать, 'то квадрат расстояния между плоскостями 1 и m равен

$$\det \Gamma\left(\overrightarrow{AB}, g_1, \ldots, g_k\right) / \det \Gamma\left(g_1, \ldots, g_k\right).$$

Б-34.33

Найти расстояние между плоскостями 1 и m:

1)l: $x_1=2-2t, \quad x_2=4+t, \quad x_3=1+t, \quad x_4=0$; m: $x_1=1-2t_1, \quad x_2=1+2t_1+3t_2, \quad x_3=1+t_1, \quad x_4=1++2t_1+2t_2$ 2) l: $x_1=3+t_1+2t_2, \quad x_2=-t_1, \quad x_3=1+t_1-t_2$, $x_4=-t_1-t_2$; $\quad$ m : $x_1=2t_1+t_2, \quad x_2=1-3t_1+t_2$, $x_3=-8-t_2, x_4=1+t_1-t_2$;

3)l: $x_1=2+t, \quad x_2=2t, \quad x_3=1, \quad x_4=t, \quad x_5=0$; m : $x_1=0, \quad x_2=1+t_1+t_2, \quad x_3=3+2t_2, \quad x_4=2t_1, \quad x_5==1+t_1-t_2$;

4)l: $x_1=1+t_2, \quad x_2=t_2, \quad x_3=t_1, \quad x_4=t_1, \quad x_5=2t_1$; m : $x_1=t_2+2t_3, \quad x_2=2+t_1+2t_3, \quad x_3=x_4=1+t_1-t_2+t_3$, $x_5=2+t_1-t_2+2t_3$; 5) 1 : $\quad 2x_1-x_3+3x_4=0, \quad 2x_1-2x_2+3x_3-3x_4=8$; m : $x_2=-3x_3-2x_4=2, \quad x_1-x_3-x_4=0$; 6) 1: $x_1+x_2-x_3=1, \quad 2x_1+x_2-x_4=4$; $\quad$ m : x_1+x_2+ $+x_3=-1, \quad x_1+x_3+x_4=1, \quad 2x_1-x_2-x_4=0$.

Б-34.34.

В n-мерном пространстве плоскости m_1 и m_2 раз- мерностей k_1 и k_2 соответственно абсолютно скрещиваются. Доказать, что:

1)существует единственная плоскость размерности $n-k_1-k_2$, ортогональная m_1 и к m_2 и пересекаюшая каждую из этих плоскостей;

2)существует единственная прямая, ортогональная к m_1 и к m_2 и пересекающая каждую из этих плоскостей.

Б-34.35

Найти уравнения плоскости максимальной размерности, ортогональной к заданным плоскостям m_1 и m_2 и пересекающей каждую из этих плоскостей, а также уравнения общего перпендикуляра к m_1 и m_2, если:

1)m_1 и m_2 - прямые в задаче $34.23, 1)$;
2)m_1 и m_2 - прямые в задаче $34.23, 3)$;
3)m_1 и m_2 - плоскости в задаче $34.33, 3)$.

Б-34.36

Найти угол между плоскостями $\mathrm{m}_1 : x_1=2+t_1+t_2, x_2=x_3=t_1, x_4=-1+t_1-t_2$ и $\mathrm{m}_2 : x_1=t_1+2t_2, x_2=3+t_2, x_3=2-t_1-2t_2, x_4=-t_2$.

Б-34.37 Углы в пятимерном симплексе (???)

В правильном пятимерном симплексе $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$ найти угол:
1)между гранями $A_0A_1A_2$ и $A_0A_3A_4$;
2)между гранями $A_0A_1A_2$ и $A_0A_3A_4A_5$;
3)между гранями $A_0A_1A_2$ и $A_1A_2A_3A_4A_5$.
(черт, хз)

7.2 Tasks for Forms

7.2.1 Problems About Quadratic Shapes

Привести квадратичную форму к нормальному виду

Привести квадратичную форму $Q(x)$ к нормальному виду и указать матрицу перехода к базису, в котором квадратичная форма имеет нормальный вид. Найдите индексы инерции.

$$Q(x)=-8x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3-4x_2^2+4x_2x_3-5x_3^2$$

Solution:

7.3 Tasks for Tensors (?!)

7.3.1 Problems About the Basics of Tensors, Indices

Б-35.1

Пусть ξ^1, ξ^2 и η^1, η^2 - координаты векторов x и y в произвольном базисе двумерного линейного пространства.

Сопоставим этому базису числа:
1)$\xi^1 + \xi^2$
2)$\xi^1 + \eta^1$
3)$\begin{vmatrix} \xi^1 & \eta^1 \\ \xi^2 & \eta^2 \end{vmatrix}$

Как изменяются эти числа при замене базиса? Проверьте, является ли каждая из данных величин тензором.
1)$(\xi')^1 + (\xi')^2 = \left(\tau_1^1 + \tau_1^2\right)\xi^1 + \left(\tau_2^1 + \tau_2^2\right)\xi^2$;
2)$(\xi')^1 + (\eta')^1 = \tau_1^1\left(\xi^1 + \eta^1\right) + \tau_2^1\left(\xi^2 + \eta^2\right)$;
3)$\begin{vmatrix} (\xi')^1 & (\eta')^1 \\ (\xi')^2 & (\eta')^2 \end{vmatrix} = \det T \cdot \begin{vmatrix} \xi^2 & \eta^1 \\ \xi^2 & \eta^2 \end{vmatrix}$.

Ни одна из величин не является ни тензором, ни инвариантом.
(??? как проверить?? вроде очевидно, потому что легко найти такую замену базиса, при которой след меняется. не глубоко это ещё понимаю.)

Б-35.2

Сопоставим каждому базису в линейном пространстве $\mathcal{L}_n$:
1)число 1;
2)упорядоченный набор чисел $1, \ldots, n$. Будет ли данное соответствие тензором? Инвариантом?
(?? и как проверять???)

Б-35.3

Пусть φ - линейное преобразование линейного пространства $\mathcal{L}_3$. Обозначим через $A = \left\|a_j^i\right\|$ его матрицу в произвольном базисе и сопоставим этому базису число:
1)$\det A$
2)$\cos\det A$
3)$\operatorname{Rg} A$;
4)$\det A^T A$
5) $a_1^1 + a_2^2$
6) $a_1^1 + a_2^2 + a_3^3$.
В каких случаях этим определен инвариант?

Б-35.4

Пусть b - билинейная функция, $B = \|b_{ij}\|$ - ее матрица в произвольном базисе пространства $\mathcal{L}_n$.
Сопоставим этому базису число:
1)$\det B$
2)$b_{11} + \ldots + b_{nn}$
3)b_{11}
4)$\det B^T B$
5) $\operatorname{Rg} B$
6) $\operatorname{sign}\det B$.
Как изменяется каждая из этих величин при замене базиса? В каких случаях она определяет инвариант?

Возня с позицией индексов

Какие свойства у $\omega^{\nu}_{\bullet\mu} = \omega^{\mu}_{\bullet\nu}$?

Solution

(задачу оставил, она абсолютно бесполезная, в решении своем не уверен, всем в этом мире плевать на эту задачу)

Докажем, что просто такое свойство и всё. Let's consider

$$\omega^{\nu}_{\bullet\mu} = \omega^{\mu}_{\bullet\nu},$$

Which means that

$$\omega^{\nu}_{\bullet\mu} = g^{\nu b} g_{\mu a} \omega_{b}^{\bullet a}.$$

This is the main condition.

Definition of transpose:

$$\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{\beta}_{\bullet\alpha} \equiv A_{\alpha}^{\bullet\beta}.$$

Definition of symmetric tensor:

$$\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{\beta}_{\bullet\alpha} = A^{\beta}_{\bullet\alpha}.$$

For ω we have

$$(\omega^{\mathrm{T}})^{\nu}_{\bullet\mu} = \omega_{\mu}^{\bullet\nu} = g_{a\mu} g^{b\nu} \omega^{a}_{\bullet b} \neq \omega^{\nu}_{\bullet\mu}$$

But I didn't use the main condition.

So ω is not symmetric, because for symmetric tensor there should be $(\omega^{\mathrm{T}})^{\nu}_{\bullet\mu} = \omega^{\nu}_{\bullet\mu}$

Пример в случае произвольной метрики

For example, if

$$\omega^{\nu}_{\bullet\mu} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad g = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad g^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

From $\omega^{\nu}_{\bullet\mu} = \omega^{\mu}_{\bullet\nu}$ we have

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = g = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad g^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

than we have

$$(\omega^{\mathrm{T}})^{\nu}_{\bullet\mu} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5}(2a+3c) + \frac{3}{5}(2b+3d) & \frac{3}{5}(2a+3c) - \frac{2}{5}(2b+3d) \\ -\frac{2}{5}(3a+2c) + \frac{3}{5}(3b+2d) & \frac{3}{5}(3a+2c) - \frac{2}{5}(3b+2d) \end{pmatrix}$$

so

$$(\omega^{\mathrm{T}})^{\nu}_{\bullet\mu} \neq \omega^{\nu}_{\bullet\mu} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

so it is not symmetric.

But I didn't use the main condition $\omega^{\nu}_{\bullet\mu} = g^{\nu b} g_{\mu a} \omega_{b}^{\bullet a}$.

Б-35.6

1)Какого типа тензор в $\mathcal{L}_n$ определяет билинейная функция? Как найти компоненты этого тензора?
2)Какого типа тензор в $\mathcal{L}_n$ определяет квадратичная функция? Как найти компоненты этого тензора?

Б-35.7

Линейные функции f, g имеют в базисе $\mathbf{e}$ пространства $\mathcal{L}_n$ коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ соответственно. Показать, что функции:
1)f^2;
2)fg определяют тензоры в $\mathcal{L}_n$, указать их типы и выписать для каждого компоненты в базисе e.

Б-35.8

Линейные функции f, g имеют в базисе $\mathbf{e}$ пространства $\mathcal{L}_n$ коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ и $b_1, \ldots, b_n$ соответственно. Сопоставим каждой паре векторов x, y из $\mathcal{L}_n$ число:
1)$\mathrm{f}(x)\mathrm{g}(y)$;
2)$\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(y)$. Показать, что каждая из полученных функций определяет тенsор в $\mathcal{L}_n$, указать его тип и выписать компоненты в базисе $\mathbf{e}$.

Б-35.9

Каждой паре векторов x, y линейного пространства $\mathcal{L}_n (n \geqslant 3)$ сопоставлено число $\mathrm{f}(x, y)$, определяемое через компоненты $\xi^1, \ldots, \xi^n$ и $\eta^1, \ldots, \eta^n$ этих векторов, заданные в базисе e, одной из следующих формул:
1)$\mathrm{f}(x, y) = \xi^1 \eta^3$;
2)$\mathrm{f}(x, y) = \sum\limits_1^n \xi^i \eta^i$ Указать тип соответствующего тензора и выписать его компоненты в базисе e.

Б-35.10

Функция f: $\mathcal{L}_n \to \setminus (n \geqslant 2)$ определяется через компоненты $\xi^1, \ldots, \xi^n$ вектора x, заданные в базисе $\mathbf{e}$, одной из формул:
1)$f(x) = \xi^1 + \xi^2$;
2)$f(x) = \left(\xi^1\right)^2 + 2\xi^1\xi^2$
3)$f(x) = \left(\xi^1 + \ldots + \xi^n\right)^2$;
4)$f(x) = \sum\limits_1^n \left(\xi^i\right)^2$.

Б-35.11

Пусть $\mathcal{L}_n^*$ - пространство всех линейных функций, определенных на линейном пространстве $\mathcal{L}_n$, а $\varphi : \mathcal{L}_n^* \to \setminus$ - линейная функция на $\mathcal{L}_n^*$. Показать, что φ определяет тензор тигга $(1, 0)$ на $\mathcal{L}_n$. 330 ГЛ. 14. Тензоры ?

Б-35.12

Даны тензоры $a_{ij}, a_j^i, \xi^i, \eta^i, b_i$. Величины c, d, g, определены в каждом базисе формулами:
1)$c = a_{ij}\xi^i\eta^j$
2)$d = a_{ij}\xi^i\xi^j$
3)$g = a_j^i b_i \xi^j$
4)$h = b_i\xi^i$. Опираясь на закон преобразования компонент данных тензс ров, показать непосредственно, что эти величины являются ин вариантами.

Б-35.13

Даны тензоры a_j^i, ξ^i, b_i. Величины c^i, d_i определе ны в каждом базисе формулами $c^i = a_j^i \xi^j$ и $d_i = a_i^j b_j$ соответственно. Опираясь на закон преобразования компонент данны тензоров, показать, что c^i есть вектор, а d_i - ковектор.

Б-35.14

Тензор типа $(1, 1)$ имеет в некотором базисе компоненты

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Изменяются ли его компоненты при переходе к другому базису? Какой геометрический смысл имеет этот тензор?

Б-35.15

Тензор типа $(0, 2)$ имеет в некотором базисе компо- ненты

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Как изменятся его компоненты при переходе к другому базису? Какая билинейная функция соответствует этому тензору?

Б-35.16

Тензор типа $(1,0)$ имеет в некотором базисе компоненты

$$\theta^i = \begin{cases} 1, & \text{если } i = i_0; \\ 0, & \text{если } i \neq i_0 \end{cases}$$

(i_0- фиксированное целое число, $1 \leqslant i_0 \leqslant n$). Найти компоненты данного тензора в базисе $\mathbf{e}' = \mathbf{e}S$.

Б-35.17

Тензор типа $(0,1)$ имеет в некотором базисе компоненты

$$\theta_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i = i_0; \\ 0, & \text{если } i \neq i_0 \end{cases}$$

)i_0 - фиксированное целое число, $1 \leqslant i_0 \leqslant n$). Найти компоненты этого тензора в базисе $\mathbf{e}' = \mathbf{e}S$.

Б-35.18

Каждому базису пространства $\mathcal{L}_n (n > 2)$ сопоставлены числа

$$\delta^{ij}_{kl} = \begin{cases} 1, \text{ если } i = k \neq j = l \\ -1, \text{ если } i = l \neq j = k \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Будет ли такое соответствие тензором? Сколько нулевых компонент у этого тензора при $n = 3$?

Б-35.19

Тензор θ типа $(0,2)$ имеет в некотором базисе $\mathbf{e}$ линейного пространства $\mathcal{L}_n (n > 2)$ компоненты $\theta_{kl} = \delta^{i_0 j_0}_{kl}$ (i_0, j_0 - фиксированные целые числа, $1 \leqslant i_0 \leqslant n, 1 \leqslant j_0 \leqslant n$, символ $\delta^{i_0 j_0}_{kl}$ определен в задаче 35.18).

1)Выписать'явно все компоненты тензора θ в базисе $\mathbf{e}$ при $n = 3$.

2)Найти компоненты тензора θ в базисе $\mathbf{e}' = \mathbf{e}S$.

Б-35.20

Каждому базису пространства $\mathcal{L}_n (n > k \geqslant 1)$ сопоставлены числа: Будет ли такое соответствие тензором?

Б-35.21

1)Тензор типа $(0,n)$ имеет в некотором базисе компоненты $\varepsilon_{i_1 \ldots i_n} = \begin{cases} (-1)^{N(i_1 \ldots i_n)}, & \text{если все числа } i_1, \ldots, i_k \text{ различны;} \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$ $(N(i_1 \ldots i_n)-$ число нарушений порядка в перестановке $(i_1, \ldots, i_n))$.

Вычислить компоненты данного тензора в базисе $\mathbf{e}' = \mathbf{e}S$.

2)Каждому базису пространства $\mathcal{L}_n$ сопоставлены числа $\varepsilon_{i_1,\ldots,i_n}$. Будет ли это соответствие тензором типа $(0,n)$?

Б-35.22

В четырехмерном пространстве дан трехвалентный тензор. Сколько компонент он имеет? Сколько слагаемых входит в выражение новой компоненты через старую при записи закона преобразования компонент? Сколько сомножителей будет в каждом слагаемом?

Б-35.23

В пространстве $\mathcal{L}_2$ дан тензор типа:
1)$(1,1)$
2)$(2,0)$;
3)$(1,2)$. В развернутой форме, не используя сокращенньх обозначениі суммирования, написать закон преобразования его компонент

Б-35.24

В двумерном пространстве задан тензор типа (p, q) Упорядочим его компоненты так, чтобы они составили столбец a высоты $2^{\mathrm{p+q}}$. Записать закон преобразования компоненз тензора в виде $\mathbf{a}' = V\mathbf{a}$, где V - квадратная матрица порядкэ 2^{p+q} и:
1)$p = 1, q = 1$;
2)$p = 2, q = 0$;
3)$p = 1, q = 2$.

Б-35.25

Записать в матричной форме закон преобразования компонент тензоров типа:
1)$(0, 2)$;
2)$(1, 1)$;
3)$(2, 0)$.

Б-35.26

Компоненты двухвалентного тензора типа (p, q) образуют в произвольном базисе **e** линейного пространства $\mathcal{L}_n$ матрицу A_e. Сопоставим базису e матрицу A_e^{-1}. Доказать, что это соответствие определяет тензор, и указать его тип, если:
1)$p = 0, q = 2$;
2)$p = 1, q = 1$ (объяснить геометрический смысл полученного тензора);
3)$p = 2, \quad q = 0$.

Б-35.27

Тензоры каких типов имеют двумерные матрицы компонент? Трехмерные? Четырехмерные? k-мерные матрицы компонент?

Б-35.28

Трехмерная матрица $\|a_{ijk}\|$ второго порядка имеет сечение $k = 1$, состоящее из единиц, а сечение $k = 2$ - из нулей. Выписать a_{ijk} для всевозможных значений индексов.

Б-35.29

Трехмерная матрица $\|a_{ijk}\|$ третьего порядка имеет сечения $k = 1$ и $k = 2$, состоящие из единиц, а сечение $k = 3$ из нулей. Выписать двумерные сечения данной матрицы, соответствующие $i = 1, i = 2, i = 3$.

Б-35.30

1)Сколько различных двумерных сечений имеет трехмерная матрица третьего порядка? Какой порядок имеет каждое сечение?
2)Сколько двумерных сечений имеет четырехмерная матрица второго порядка?
3)Сколько двумерных сечений имеет четырехмерная матрица третьего порядка?

Б-35.31

Числа δ_{kl}^{ij} образуют четырехмерную матрицу второ(7) порядка.
1)Выписать все ее двумерные сечения, соответствующие фиксированным нижним индексам.
2)Найти связь между сечениями матрицы $\left\|\delta_{kl}^{ij}\right\|$ и матрицсй $\|\theta_{kl}\|$ (символы $\delta_{kl}^{ij}, \theta_{kl}$ определены в задачах $35.18, 35.19$ соответственно).

Б-35.32

1)Даны базис e и $(p + q)$-мерная матрица A. Доканать, что существует тензор типа (p, q), имеющий в базисе **e** матрицу A.
2)Доказать, что существует тензор любого наперед заданного типа.

Б-35.33

Пусть f - вещественная функция от трех аргументов $x \in \mathcal{L}_n, y \in \mathcal{L}_n, z \in \mathcal{L}_n$, линейная по каждому из этих аргументов при фиксированных остальных.

1)Выразить значение данной функции через компоненты векторов x, y, z.

2)Показать, что совокупность коэффициентов полученной формы представляет собой тензор типа $(0, 3)$.

3)Выразить компоненты этого тензора через значения f на базисных векторах.

Б-35.34

Линейные функции $\mathrm{f}, \mathrm{g}, \mathrm{h}$ на $\mathcal{L}_3$ имеют в базисе $\mathbf{e}$ коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2, \beta_3; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ соответственно. Сопоставим тройке векторов x, y, z из $\mathcal{L}_3$ число:

1)$\mathrm{f}(x)\mathrm{g}(y)\mathrm{h}(z)$;

2)$\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(y)\mathrm{f}(z)$;

3)$\mathrm{f}(x)\mathrm{f}(y)\mathrm{f}(z)+\mathrm{g}(x)\mathrm{g}(y)\mathrm{g}(z)+\mathrm{h}(x)\mathrm{h}(y)\mathrm{h}(z)$. Показать, что каждая из построенных функций определяет тензор в $\mathcal{L}_3$, указать его тип и выписать матрицу в базисе $\mathbf{e}$.

Б-35.35.

Каждой тройке векторов пространства $\mathcal{L}_3$ сопоставлено число $\mathrm{f}(x, y, z)$, определяемое через компоненты этих векторов в некотором базисе $-\xi^1, \xi^2, \xi^3; \eta^2, \eta^2, \eta^3; \zeta^1, \zeta^2, \zeta^3$ - одной из следующих формул:

1)$\mathrm{f}(x, y, z) = \xi^1\eta^2\zeta^3 + \xi^3\eta^2\zeta^1$

2)$\mathrm{f}(x, y, z) = \sum\limits_{i=1}^{3} \xi^i\eta^i\zeta^i$. Указать тип соответствующего тензора и выписать его матрицу.

Б-35.36

Пусть $\mathcal{B}$ - линейное пространство билинейных функций на $\mathcal{L}_n$, а $\varphi : \mathcal{L}_n \to \mathcal{B}$ - линейное отображение. Показать, что φ определяет тензор типа $(0, 3)$ в пространстве $\mathcal{L}_n$.

Б-35.37

Тензор типа (p, q) в базисе e_1, e_2, e_3 пространства L задан матрицей A. Найти его матриту в базисе e_1', e_2', e_3', есл

1)$p = 2, q = 1, \quad A = A_{726}, e_1' = e_1, e_2' = e_3, e_3' = e_2$;

2)$p = 2, q = 1, A = A_{727}, e_1' = -e_1, e_2' = -e_2, e_3' = -e$;

3)$p = 0, \quad q = 3, \quad A = A_{723}, \quad e_1' = 2e_1, \quad e_2' = -e_2, \quad e_3' = 3e_;$

Б-35.38

Определить, как изменяются компоненты тензор типа $(1, 2)$, заданного в пространстве $\mathcal{L}_n$, при произвольно: перестановке базисных векторов.

Б-35.39

Тензор типа (p, q) в базисе $\mathbf{e}$ пространства $\mathcal{L}_2$ задај матрицей A. Найти его матрицу в базисе $\mathbf{e}' = \mathbf{e}S$, если:

1)$p = 1, q = 2, A = A_{652}, S = A_{24}$;

2)$p = 0, q = 3, A = A_{654}, S = A_{19}$

3)$p = 0, q = 3, \quad A = A_{654}, S = A_{24}$

7.3.2 Problems About Linear Operations and Tensor Multiplication

Б-36.1

Проверить закон преобразования компонент суммы тензоров a^i_{jk} и b^i_{jk}, исходя из закона преобразования компонент слагаемых.

Б-36.2

Как связана сумма линейных преобразований с суммой соответствующих тензоров?

Б-36.3

Пусть A_e - матрица линейного преобразования $\varphi . B_e$ - матрица билинейной функции b в базисе e. Определена ли сумма $A_e + B_e$? Будет ли тензором соответствие, сопоставляющее каждому базису e сумму матриц $A_e + B_e$?

Б-36.4

Тензоры a и b одного типа имеют в базисе **e** матрицы компонент A и B. Найти компоненты тензоров: а) $a + b$; б) $2a + 3b$; в) $b - 2a$ в том же базисе, если:
1)$A = A_{650}, \quad B = A_{651}$;
2)$A = A_{651}, \quad B = A_{652}$;
3)$A = A_{652}, B = A_{653}$;
4)$A = A_{693}, B = A_{697}$.

Б-36.5

Заданы матрицы A, B, C, D из компонент четырех тензоров. Определить, являются ли тензоры линейно зависимыми, если:
1)$A = A_{662}, B = A_{665}, C = A_{663}, D = A_{652}$;
2)$A = A_{650}, B = A_{651}, C = A_{652}, D = A_{653}$;
3)$A = A_{666}, B = A_{663}, C = A_{650}, D = A_{652}$.

Б-36.6

1)Какова размерность линейного пространства $\mathcal{L}$ тензоров типа (p, q) в двумерном пространстве?
2)Указать какой-нибудь базис в $\mathcal{L}$.
3)Указать еще один базис в $\mathcal{L}$.

Б-36.7

Базису e двумерного линейного пространства соответствует базис $\mathbf{e}^*$ в пространстве тензоров типа:
1)$(0, 1)$
2)$(1, 1)$;
3)(p)$(0, 2)$;
4)$(1, 2)$. Њазис e* состоит из тензоров, имеющих в базисе **e** одну комионенту, равную 1, а остальные - равные 0. Как преобразуется базис $\mathbf{e}^*$, если базис e преобразуется матрицей перехода S?

Б-36.8.

Проверить закон преобразования компонент тензора $a \otimes b$, исходя из законов преобразования компонент сомножителей a^i_{jk}, b^i_{jk}

Б-36.9.

Найти тип и матрицу тензора $a \otimes b$, если:

	тип a	матрица a	тип b	матрица b
1)	$(1, 0)$,	$\mathbf{c}_{12}$,	$(1, 0)$,	$\mathbf{c}_{31}$;
2)	$(1, 0)$,	$\mathbf{c}_{12}$,	$(0, 1)$,	$\mathbf{c}_{31}^T$;
3)	$(1, 0)$, ,	$\mathbf{c}_{12}^T$,	$(1, 0)$,	$\mathbf{c}_{31}$;
4)	$(0, 1)$,	$\mathbf{c}_{12}^T$,	$(0, 1)$,	$\mathbf{c}_{31}^T$;
j)	$(0, 2)$,	A_{17}^T,	$(0, 1)$,	$\mathbf{c}_7^T$;
6)	$(0, 1)$,	$\mathbf{c}_7^T$,	$(0, 2)$,	A_{17};
7)	$(2, 0)$,	A_{18},	$(1, 0)$,	$\mathbf{c}_8$
8)	$(1, 1)$,	A_{18},	$(1, 0)$,	$\mathbf{c}_8$
9)	$(1, 0)$,	$\mathbf{c}_8$,	$(2, 0)$,	A_{18}
10)	$(1, 0)$,	$\mathbf{c}_8$,	$(1, 1)$,	A_{18}
11)	$(0, 3)$,	A_{650},	$(0, 1)$,	$\mathbf{c}_{25}^T$
12)	$(0, 1)$,	$\mathbf{c}_{25}^T$,	$(0, 3)$,	A_{650}^T
13)	$(1, 2)$,	A_{651}^T,	$(0, 1)$,	$\mathbf{c}_8^T$
14)	$(0, 1)$,	$\mathbf{c}_8^T$,	$(1, 2)$,	A_{651};
15)	$(0, 2)$,	A_{17},	$(0, 2)$,	A_{18};
16)	$(0, 2)$,	A_{18},	$(0, 2)$,	A_{17};

Б-36.10

Записать матрицу из компонент тензора:
1)$a^i b^j$
2)$a_i b_j$;
3)$a^i b_j$
4)$a_i b^j$ как кронекеровское произведение матриц из компонент этих тензоров.

Б-36.11.

Пусть a, b - двухвалентные тензоры с матрицами A, B. Какого типа должны быть эти тензоры, чтобы матрица их тензорного произведения была (правым) кронекеровским произведением:
1)$A \otimes B$;
2)$B \otimes A$?

Б-36.12

Линейные функции f и g заданы в базисе $\mathbf{e}$ координатными строками $\varkappa$ и μ. Найти матрицу тензора: 1)$\mathrm{f} \otimes \mathrm{g}$; 2)$\mathrm{g} \otimes \mathrm{f}$. Какой геометрический смысл имеют эти тензоры?

Б-36.13

Линейная функция f задана в базисе $\mathbf{e}$ координат, $f \otimes y$. Какой геометрический смысл имеет этот тензор?

Б-36.14

1)Пусть x - вектор, f - ковектор. Доказать, чт $\mathrm{f} \otimes x = x \otimes \mathrm{f}$
2)Привести пример тензоров a и b, для которых $a \otimes b \neq 7 \neq b \otimes a$.

Б-36.15

Пусть x_1, x_2, x_3 - векторы, а $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3$ - ковекторы. Какие из приведенных ниже выражений имеют смысл? Если данное выражение есть тензор, указать его тип:
1)$x_1 \otimes x_2 + x_2 \otimes x_3$
2)$x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 + x_2 \otimes x_3$
3)$x_1 \otimes \mathrm{f}_1 - 2\mathrm{f}_1 \otimes x_1$
4)$x_1 \otimes \mathrm{f}_2 + \mathrm{f}_1 \otimes \mathrm{f}_2$; 5) $x_1 \otimes \mathrm{f}_2 + x_2 \otimes \mathrm{f}_1$; 6) $\mathrm{f}_1 \otimes x_1 \otimes x_2 + x_2 \otimes x_3 \otimes \mathrm{f}_2$; 7) $x_1 \otimes x_2 + x_3 \otimes x_3 - x_1 \otimes x_1$ 8) $\mathrm{f}_1 \otimes \mathrm{f}_2 - 3\left(\mathrm{f}_2 \otimes \mathrm{f}_3\right)$.

Б-36.16

Найти компоненты тензоров 1), 3), 5), 7), 8) задачи 36.15, если векторы x_1, x_2, x_3 и ковекторы $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3$ заданы с помощью столбцов и строк соответственно: $\mathbf{c}_{20}, \mathbf{c}_{12}, \mathbf{c}_{25}, \mathbf{c}_8^T$, $\mathbf{c}_{10}^T, \mathbf{c}_{22}^T$

Б-36.17

1)Пусть $a = x \otimes y$, а векторы x и y имеют в базисе $\mathbf{e}$. компоненты $1, 0, 0$ и $0, 1, 0$ соответственно. Найти компоненты, тензора a в базисе $\mathbf{e}$ и в базисе $\mathbf{e}' = \mathbf{e}S$, где $S = A_{207}$.
2)Пусть $a = \mathrm{f} \otimes \mathrm{g}$, а ковекторы f и g имеют в базисе $\mathbf{e}$ координатные строки $(1, 0, 0)$ и $(0, 1, 0)$ соответственно. Найти компоненты тензора a в базисе $\mathbf{e}$ и в базисе $\mathbf{e}' = \mathrm{e}S$, где $S = A_{207}$.
3)Пусть $a = x \otimes \mathrm{f}$, а вектор x и ковектор f имеют в базисе $\mathbf{e}$ компоненты $1, 0, 0$ и $0, 1, 0$ соответственно. Найти компоненты тензора a в базисе $\mathbf{e}$ и в базисе $\mathbf{e}' = \mathbf{e}S$, где $S = A_{207}$. Сравнить результаты задач 1), 2), 3).

Б-36.18

Разложить тензор в произведение одновалентных тензоров, если он имеет:
1)тип $(2, 0)$ и матрицу A_5;
2)тип $(2, 1)$ и матрицу A_{673}.

Б-36.19.

1)Пусть a - тензор типа $(1,1)$ и матрица его компонент имеет ранг r. Доказать, что найдутся r линейно независимых векторов $a_1,\dots,a_r$ и r линейно независимых ковекторов

$\mathrm{f}_1,\dots,\mathrm{f}_r$ таких, что $a=\sum\limits_{\alpha=1}^{r} a_\alpha \otimes \mathrm{f}^\alpha$.

2)Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для тензоров типа $(2,0)$.

Б-36.20

1)Пусть тензор a типа $(0,2)$ имеет в некотором базисе матрицу ранга r. Доказать, что существуют r линейно независимых ковекторов $\mathrm{f}_1,\dots,\mathrm{f}_r$ и r линейно независимых ковекторов $g_1,\dots,g_r$ таких, что $a=\sum\limits_{\alpha=1}^{r}\mathrm{f}_\alpha\otimes\mathrm{g}_\alpha$.

2)Представить билинейную функцию $3\xi^1\eta^1+2\xi^1\eta^2+3\xi^2\eta^1+2\xi^2\eta^2$ как произведение линейных. Единственно ли такое представление?

3)Билинейная функция f в некотором базисе линейного пространства задана матрицей A_{454}. Представить ее как сумму двух произведений пар линейных функций: $\mathrm{f}(x,y)=\mathrm{f}_1(x)\mathrm{g}_1(y)+\mathrm{f}_2(x)\mathrm{g}_2(y)$. Единственно ли это представление?

7.3.3 Problems About Clotting (!!!)

(!!! это в основном нужно прорешать!!)

Б-36.21.

Исходя из законов преобразования тензоров $a^i_{jk}, a^i_j, b^i_j, a_i, b^{ij}, a^{ij}_{klm}, \xi^k$, проверить закон преобразования компонент сверток:

1)a^i_{ji};

2)$a^i_j b^j_k$

3)$a_i b^{ij}$

4)$a^{ij}_{klm}\xi^k$.

Б-36.22

Исходя из геометрического смысла тензоров a_i, ξ^i, a^i_j, b_{ij}, объяснить геометрический смысл сверток:

1)$a_i\xi^i$

2)$a^i_j\xi^j$

3)$b_{ij}\xi^i\xi^j$.

Б-36.23

Можно ли свернуть:

1)вектор и ковектор?

2)вектор и вектор?

3)пару ковекторов?

Б-36.25

Тензоры $a^i_j, \xi^i, \varkappa_i$ заданы матрицами: $A_{232}, \mathbf{c}_{104}$, $\mathbf{c}^T_{104}$. Вычислить свертки:

1)$a^i_j\xi^j$;

2)$a^i_j\varkappa_i$;

3)$a^i_j\xi^j\varkappa_i$.

Б-36.26

Сколько различных тензоров можно образовать при помощи свертывания из данного тензора типа $(2,2)$?

Б-36.27

Тензор a_k^{ij} задан матрицей:
1)A_{651}
2)A_{655}. Найти матрицы сверток: а) a_i^{ij} б) a_j^{ij}.

Б-36.28

Тензор a_{kl}^{ij} задан матрицей:
1)A_{649};
2)A_{693};
3)A_{694}. Вычислить свертки: а) a_{il}^{ij}; б) a_{kj}^{ij}; в) a_{ki}^{ij}; г) a_{il}^{ij}; д) a_{ij}^{ij}; е) a_{ji}^{ij}.

Б-36.29.

1)Каждому базису пространства $\mathcal{L}_n$ сопоставлен упорядоченный набор чисел a_{klm}^{ij} (все индексы пробегают значения от 1 до n). Известно, что для произвольного вектора ξ^k числа $a_{klm}^{ij}\xi^k$ являются компонентами тензора типа $(2, 2)$. Доказать, что a_{klm}^{ij} - тензор типа (2,3).

2)Каждому базису пространства $\mathcal{L}_n$ сопоставлен упорядоченный набор чисел a_{klm}^{ij} (все индексы пробегают значения от 1 до n). Известно, что для произвольного тензора u_{ij}^k типа $(1, 2)$ числа $a_{klm}^{ij}u_{ij}^k$ являются компонентами тензора типа $(0, 2)$. Доказать, что a_{klm}^{ij} - тензор типа (2,3).

2)Каждому базису пространства $\mathcal{L}_n$ сопоставлен упорядоченный набор чисел a_{klm}^{ij} (все индексы пробегают значения от 1 до n). Известно, что для произвольного тензора u_{ij}^k типа $(1, 2)$ числа $a_{klm}^{ij}u_{ij}^k$ являются компонентами тензора типа $(0, 2)$. Доказать, что a_{klm}^{ij} - тензор типа $(2, 3)$.

7.3.4 Problems About Transposition, Symmetry, Alternation

Симметричные и антисимметричные тензоры (36.30-36.57).

Б-36.30

Можно ли транспонировать тензор:
1)типа $(1, 1)$;
2)типа $(2, 0)$?

Б-36.31.

Один тензор типа $(0, 2)$ получается из другого транспонированием. Как связаны соответствующие билинейные функции?

Б-36.32

Тензоры
1)a_{ij};
2)a^{ij};
3)a_k^{ij};
4)a_{jk}^i
заданы соответственно матрицами $A_{16}, A_{16}, A_{670}, A_{670}$.
Найти матрицы транспонированных тензоров.

Б-36.33

1)Сколько различных тензоров можно получить с помощью операции транспонирования из данного тензора $a_{i_1 \dots i_k}$?

2)Тензор типа $(0, 3)$ задан матрицей A_{670}. Выписать матрицы всех тензоров, получаемых из него транспонированием. Изменится ли ответ, если данный тензор имеет тип $(3, 0)$?

3)Тензор a с компонентами a_{ijk} задан матрицей A_{727}. Выписать матрицы транспонированных тензоров b и c, если $b_{ijk} = a_{jki}, c_{ijk} = a_{ikj}$.

4)Тензор a с компонентами a_{ijkl} задан матрицей A_{717}. Выписать матрицы транспонированных тензоров b и c, если $b_{ijkl} = a_{kjli}$; $c_{ijkl} = a_{lkji}$

Б-36.35

Не используя сокращенных обозначений, выпишите все компоненты тензоров, заданных в пространстве $\mathcal{L}_2$:
1)$x^i y^k$;
2)$x^{(i} y^{k)}$
3)$x^{[i} y^{k]}$
4)$x^i a_{jk}$; 5) $x^i a_{ik}$; 6) $x^k a^i_i$; 7) $x^{(k} a^{i}_i$ 8) $x^{[k} a^{i]}_i$ 9) $a^i_i a^k_k$ 10) $a^i_{[i} a^k_{k]}$; 1
1)$a^i_{(i} a^k_{k)}$ 1
2)$\delta^i_j a^k_i$ 1
3)$\delta^i_j a^j_k$; 1
4)$\delta^i_j a^j_i$ 15) $\delta^i_j a^k_l$; 16) $a^k_l \delta^i_j$

Б-36.36.

Тензор a^{ij} задан матрицей:
1)A_{10}
2)A_{77}
3)A_{24}
4)A_{232}.
Найти компоненты тензоров:)$a^{(ij)}$; б) $a^{[ij]}$.

Б-36.37

Тензор a_{ijk} задан матрицей:
1)A_{650};
2)A_{651};
3)A_{720}. Найти компоненты тензоров: а) $a_{(ij)k}$ б) $a_{i(jk)}$ в) $a_{(i|j|k)}$; г) $a_{(ijk)}$.

Б-36.38

Тензор a^{ij}_{kl} задан матрицей:
1)A_{694};
2)A_{684} Найти компоненты тензоров: а) $a^{(ij)}_{kl}$; б) $a^{ij}_{(kl)}$ в) $a^{(ij)}_{(kl)}$.

Б-36.39.

Тензор a_{ijk} задан матрицей:
1)A_{650};
2)A_{651};
3)A_{720}. Найти компоненты тензоров: а) $a_{[ij]k}$; б) $a_{i[jk]}$; в) $a_{[i|j|k]}$.

Б-36.40

Тензор a^{ij}_{kl} задан матрицей:
1)A_{694};
2)A_{684}. Найти компоненты тензоров: а) $a^{[ij]}_{kl}$; б) $a^{ij}_{[kl]}$; в) $a^{[ij]}_{[kl]}$.

Б-36.41.

Тензор a_{ijk} задан матрицей:
1)A_{726};
2)A_{721}. Найти компоненты тензоров: а) $a_{[ijk]}$; б) $a_{(ijk)}$.

Б-36.42

Тензор типа $(0, 3)$ задан матрицей:
1)A_{723};
2)A_{725};
3)A_{720};
4)A_{650}; 5) A_{722}.

Б-36.43

Тензор a^i_j задан матрицей A:
1)A_{58};
2)A_{207}. Вычислить инварианты: а) a^i_i; б) $a^i_{[i}a^k_{k]}$; в) $a^i_{[i}a^j_j a^k_{k]}$. Сравнить найденные инварианты с коэффициентами характеристического многочлена матрицы A.

Б-36.44

1)Доказать, что тензор $\varepsilon_{i_1\dots i_n}$ (см. задачу 35.2
1)кососимметричен по любой паре индексов.
2)Доказать, что тензор $\varepsilon_{i_1\dots i_n}$ кососимметричен по любому подмножеству множества индексов.
3)Доказать, что тензор $\delta^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_k}$ (см. задачу 35.20) кососимметричен по любой паре верхних индексов.
4)Доказать, что тензор $\delta^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_k}$ кососимметричен по любому подмножеству множества верхних индексов. 5) Доказать утверждение
4)для нижних индексов.

Б-36.45

Пусть a_{ij} и b^{ij} - компоненты соответственно симметричного и антисимметричного тензоров. Вычислить свертку $a_{ij}b^{ij}$.

Б-36.46

Для тензора $\delta^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots i_k}$, определенного в задаче 35.20, и произвольных тензоров $a^{j_1\dots j_k}$ и $b_{i_1\dots i_k}$ доказать, что:
1)$\delta^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_k}a^{j_1\dots j_k} = a^{[i_1\dots i_k]}$
2)$\delta^{i_1\dots i_k}_{j_1\dots j_k}b_{i_1\dots i_k} = b_{[j_1\dots j_k]}$.

Б-36.47

Пусть $a_{ijk}\xi^i\xi^j\xi^k = 0$ для любого вектора ξ^i. Дока- Показать, что $a_{[ijk]} = 0$.

Б-36.48

Доказать, что $a^{(i}_j a^{k)}_l = a^i_{(j}a^k_{l)}, a^{[i}_j a^{k]}_l = a^i_{[j}a^k_{l]}$.

Б-36.49.

Вычислить:
1)$\delta^i_j\delta^j_l\delta^l_k\delta^k_i$
2)$\delta^i_j\delta^j_k\delta^k_l\delta^l_m$
3)$\delta^i_{[i}\delta^j_j\delta^k_{k]}$
4)$\delta^i_{(i}\delta^j_j\delta^k_{k)}$ 5) $\delta^i_j\delta^j_i\delta^k_l a^l_k$.

Б-36.50

1)Пусть тензор симметричен по некоторой паре индексов. Доказать, что операция симметрирования по этим индексам тензора не меняет, а операция альтернирования дает нулевой тензор.
2)Пусть тензор антисимметричен по некоторой паре индексов. Доказать, что операция симметрирования по этим индексам дает нулевой тензор, а операция альтернирования тензора не меняет.

Б-36.51.

1)Доказать, что для симметричного по двум первым индексам тензора имеет место тождество

$$a_{(ijk)} = \frac{1}{3}\left(a_{ijk} + a_{kij} + a_{jki}\right).$$

2)Доказать, что для антисимметричного по двум первым индексам тензора имеет место тождество

$$a_{[ijk]} = \frac{1}{3}\left(a_{ijk} + a_{kij} + a_{jki}\right).$$

Б-36.52

1)Тензор типа $(0,3)$ симметричен по двум первым и симметричен по двум последним индексам. Доказать, что он симметричен также и по первому и третьему индексам.

2)Тензор типа $(0,3)$ антисимметричен по двум первым и антисимметричен по двум последним индексам. Доказать, что он антисимметричен также и по первому и третьему индексам.

3)Пусть тензор типа $(0,3)$ симметричен по двум первымм индексам и антисимметричен по двум последним индексам. Доказать, что он нулевой.

Б-36.53

1)Привести пример тензора типа $(0,3)$, для которого $a_{[ijk]} = 0$, но не симметричного по трем индексам.

2)Привести пример тензора типа $(0,3)$, для которого $a_{(ijk)} = 0$, но не антисимметричного по трем индексам.

3)Доказать, что для ненулевого тензора a типа $(0,3)$ возможно одновременное выполнение равенств $a_{(ijk)} = 0$ и $a_{[ijk]} = 0$.

Б-36.54

Доказать, что любой тензор типа $(0,2)$ или $(2,0)$ можно разложить в сумму симметричного и антисимметричного тензоров.

Б-36.55

Разложить в сумму симметричного и антисимметричного тензоров тензор типа $(0,2)$, заданный матрицей:

1)A_{49};

2)A_{16};

3)A_{234}.

Б-36.56

Из символа Кронекера с помощью тензорных операций получить тензоры:

1)δ^{ij}_{kl};

2)$\delta^{i_1 \ldots i_k}_{j_1 \ldots j_k}$ (см. задачи $35.18, 35.20$).

Б-36.57

1)Пусть симметричный тензор а типа $(0,2)$ имеет в некотором базисе матрицу ранга r. Доказать, что существуют r линейно независимых ковекторов $\mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_r$, таких, что $a = \sum\limits_{\alpha=1}^{r} \mathrm{f}_\alpha \otimes \mathrm{f}_\alpha$.

2)Сформулировать и доказать обратное утверждение.

3)Квадратичная функция φ в $\mathcal{L}_2$ задана матрицей A_{56}. Представить ее как сумму квадратов двух линейных функций. Единственно ли это представление?

7.3.5 Problems About Euclidean Space Tensors

(добавлю из теории поля задачи потом.)

Б-37.1

Векторы e'_1, e'_2 заданы своими координатами $(1,0)$ и $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ относительно некоторого ортонормированного базиса e_1, e_2 двумерного евклидова пространства. Выписать матрицы: а) метрического, б) контравариантного метрического, в) дискриминантного тензоров в базисах:

1)e_1, e_2;

2)e'_1, e'_2.

Б-37.2

Доказать, что в произвольном базисе евклидова пространства дискриминантный тензор имеет следующие компоненты: $\varepsilon_{i_1 \ldots i_n} = 0$, если среди значений индексов есть равные, и $\varepsilon_{i_1 \ldots i_n} = (-1)^{N(i_1 \ldots i_n)} \sigma \sqrt{\det \Gamma}$, если индексы погарно различны. Здесь Γ - матрица метрического тензора, $N(i_1 \ldots i_n)$ - число нарушений порядка в перестановке $(i_1, \ldots, i_n)$; $\sigma = 1$ для правых базисов, $\sigma = -1$ для левых базисов.

Б-37.3

Доказать, что во всех правых ортонормированныг базисах дискриминантный тензор имеет следующие компоненты: $\varepsilon_{i_1 \dots i_n} = 0$, если среди индексов есть равные, и $\varepsilon_{i_1 \dots i_n} = (-1)^{N(i_1 \dots i_n)}$, если $i_1 \dots i_n$ попарно различны. Здесь $N(i_1 \dots i_n)$

Б-37.4

Какой тензор получается, если у метрического тензора поднять один индекс? Оба индекса?

Б-37.5

Какой тензор получается, если у символа Кронекера опустить индекс? Поднять индекс?

Б-37.6

Привести примеры свертывания с метрическим тензором, встречавшиеся в курсе линейной алгебры.

Б-37.7

1)Тензор a^i_j определяет линейное преобразование в евклидовом пространстве $\mathcal{E}_n$. Найти тензор, определяющий сопряженное преобразование.

2)Сформулировать условие, при котором тензор a^i_j определяет самосопряженное преобразование.

Б-37.8

Метрический тензор и тензор a_{ij} заданы соответственно матрицами:
1)A_{55}, A_9
2)A_{57}, A_{18}
3)A_{245}, A_{210}. Найти матрицы тензоров: а) $a^{i}_{\cdot j}$; б) $a^{-j}_{i \cdot j}$; в) a^{ij}.

Б-37.9

Верно ли утверждение: если матрица тензора a_{ij} симметрична, то симметричны и матрицы тензоров:
1)$a^{\cdot j}_{i \cdot}$;
2)a^{ij}?

Б-37.10

Метрический тензор и тензор a^i_j заданы соответственно матрицами:
1)A_{58}, A_{40}
2)A_{207}, A_{232}. Найти матрицы тензоров: а) a^i_{ij}; б) $a^{\cdot j}_{i \cdot}$

Б-37.11

Метрический тензор и тензор a^i_{jk} заданы соответственно матрицами:
1)A_{55}, A_{650};
2)A_{55}, A_{651};
3)A_{207}, A_{722}. Найти матрицу тензора: а) a_{ijk}; б) $a^{ij}_{\cdot \cdot k}$; в) $a^{i \cdot k}_{\cdot j}$; г) a^{ijk}.

Б-37.12

Метрический тензор и тензор a^{ij}_{kl} заданы соответственно матрицами:
1)A_{57}, A_{697};
2)A_{19}, A_{694}. Найти матрицы тензоров: а) a_{ijkl}; б) a^{ijkl}.

Б-37.13

Упростить выражения:
1)$\left(a_{ij} g^{jk} + \delta^j_i a_{lj} g^{lk}\right) g_{ks}$;
2)$\delta^i_j \delta^j_k g^{kl} a_{lj}$;
3)$a_{ij} g^{jk} g_{kl} g^{ls}$.

Б-37.14

Известно, что $a^{ij}_k = g^{il}g^{jm}a_{lmk}$. Выразить a_{lmk} через a^{ij}_k.

Б-37.15

Пусть φ - линейное преобразование евклидова пространства, φ^* - сопряженное преобразование. У тензора, соответствующего произведению преобразований $\varphi\varphi^*$, опускают индекс. Показать, что полученный тензор имеет тип $(0, 2)$ и симметричен.

Б-37.16

В двумерном евклидовом пространстве $\mathcal{E}_2$ вектору ξ^k сопоставляется вектор $g^{ij}\varepsilon_{jk}\xi^k$. Доказать, что этим определено линейное преобразование пространства $\mathcal{E}_2$, и выяснить его геометрический смысл.

Б-37.17

В трехмерном евклидовом пространстве паре векторов ξ^i, η^j сопоставляется вектор $\zeta^k = g^{kl}\varepsilon_{lij}\xi^i\eta^j$. Доказать, что вектор ζ^k есть векторное произведение векторов ξ^i и η^j.

Б-37.18

В четырехмерном евклидовом пространстве векторам x, y, z с компонентами ξ^i, η^j, ζ^k сопоставляется линейная функция f с коэффициентами $\varkappa_l = \varepsilon_{ijkl}\xi^i\eta^j\zeta^k$. Доказать, что $\mathrm{f}(x) = \mathrm{f}(y) = \mathrm{f}(z) = 0$.

Белоусов-1.1.5 Свертка δ_{ii}.

Суммируем 3 единицы, получаем ответ: 3.

Белоусов-1.1.6 Свертка $\delta_{ij}\delta_{jk}\delta_{kl}\delta_{li}$.

Имеем не ноль только в случае совпадающих всех индексов, их может быть 3, суммируем, ответ: 3.

Белоусов-1.1.7 Свертка по 1/3 индексов $e_{ijk}e_{mnk}$.

Ответ: $\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$.
(???? не помню, откуда она выводится, но это очень известная формула. напишу потом в теорию, пока вроде не писал ещё.)

Белоусов-1.1.8 Свертка по 2/3 индексов $e_{ijk}e_{mjk}$.

По известной формуле имеем $\delta_{im}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{jm} = 3\delta_{im} - \delta_{im} = 2\delta_{im}$.

Белоусов-1.1.9 Свертка по 3/3 индексов $e_{ijk}e_{ijk}$.

По известной формуле имеем $\delta_{ii}\delta_{jj} - \delta_{ij}\delta_{ji} = 3\delta_{ii} - \delta_{ii} = 2\delta_{ii} = 6$.

Белоусов-1.1.10 Другая свертка по 3/3 индексов $e_{ijk}e_{jik}$.

$e_{ijk}e_{ijk} = -e_{ijk}e_{ijk} = -6$.

7.3.6 Tasks of Vector Analysis (??)

(их в матан перенесу потом.)

Белоусов-1.1.11 Преобразовать rot rota.

Перепишем ротор по определению, раскроем по формуле двойного векторного произведения, перепишем через другие операторы:

$$[\nabla \times [\nabla \times \mathbf{a}]] = \nabla(\nabla\mathbf{a}) - (\nabla\nabla)\mathbf{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} - \Delta\mathbf{a}$$

(?? как через диффгем это сделать?)

Белоусов-1.1.12 Преобразовать $\mathrm{div}[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]$.

Перепишем дивергенцию по определению, раскроем по формуле дифференцирования произведения функций и переставим множители местами:

$$(\nabla[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]) = (\nabla\,[\mathbf{a}\times\mathbf{b}_c]) + (\nabla\,[\mathbf{a}_c\times\mathbf{b}]) = (\mathbf{b},[\nabla\times\mathbf{a}]) - (\mathbf{a},[\nabla\times\mathbf{b}])$$

Индекс с у векторной функции означает, что в данном выражении она не дифференцируется.
(?? укажу в теории, что именно так дифференцируется векторное произведение.)

Белоусов-1.1.13 Преобразовать $\mathrm{rot}[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]$.

Solution: Перепишем ротор по определению, раскроем по формуле дифференцирования произведения функций, переставим множители местами, введем определения:

$$\begin{aligned}[\nabla\times[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]] &= [\nabla\times[\mathbf{a}_c\times\mathbf{b}]] + [\nabla\times[\mathbf{a}\times\mathbf{b}_c]] = \\ &= \mathbf{a}(\nabla\mathbf{b}) - (\nabla\mathbf{a}_c)\,\mathbf{b} - \mathbf{b}(\nabla\mathbf{a}) + (\nabla\mathbf{b}_c)\,\mathbf{a} = \\ &= \mathbf{a}\,\mathrm{div}\,\mathbf{b} - (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b} - \mathbf{b}\,\mathrm{div}\,\mathbf{a} + (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a}.\end{aligned}$$

Белоусов-1.1.14 Преобразовать $\mathbf{grad}(\mathbf{ab})$.

Solution: Из $\nabla(ab) = \nabla(a_c b) + \nabla(a b_c)$ и $X(YZ) = [Y\times[Z\times Z]] + (YX)Z$ получаем:

$$\mathrm{grad}(\mathbf{ab}) = [\mathbf{a}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{b}] + [\mathbf{b}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{a}] + (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a}$$

(?? как через диффгем это сделать??? было ли бы это проще?)

Белоусов-1.1.15 Преобразовать $\mathrm{div}(\boldsymbol{\mu_c} r)$.

Solution: Считая вектор $\boldsymbol{\mu}_c$ постоянным, вычислить $\mathrm{div}(\boldsymbol{\mu}_c r)$:

$$\nabla(\mu r) = (\mu\nabla r) = (\mu\,\mathrm{grad}\,r) = (\mu\mathbf{n}).$$

Важно не забывать, что мы должны получить скаляр, что и дается этим скалярным произведением.
(укажу в типичных формулах, что градиент r - это направляющий вектор)

Белоусов-1.1.16 Преобразовать $\mathrm{grad}(\boldsymbol{\mu}_c\boldsymbol{r})$.

Solution: Действуем только на $\boldsymbol{r}$ и получаем вектор:

$$\nabla(\mu, r) = (\mu,\nabla r) = \mu.$$

(!!!! Именно так работаем с градиентом!!!)

Там еще много задач

7.3.7 Problems About Minkowski Space Tensors

Белоусов-1.2.1 Свертка по всем индексам $e^{\mu\nu\varkappa\lambda}e_{\mu\nu\varkappa\lambda}$

Белоусов-1.2.2 Свертка по 3-м из 4-х индексов $e^{\mu\nu\varkappa\lambda}e_{\rho\nu\varkappa\lambda}$.

Белоусов-1.2.3 Свертка по 2-м из 4-х индексов $e^{\mu\nu\varkappa\lambda}e_{\rho\sigma\varkappa\lambda}$.

Белоусов-1.2.4 Дуальный скаляр к $e_{\mu\nu\varkappa\lambda}$ $\tilde{e}$ в Минковском

Вычислить дуальный к полностью антисимметричному тензору $e_{\mu\nu\varkappa\lambda}$ скаляр $\tilde{e}$ в 4-мерном пространстве Минковского.

Белоусов-1.2.5 Выражение

Выразить дважды дуальный тензор $\tilde{\tilde{F}}_{\mu\nu}$ через исходный антисимметричный тензор $F_{\mu\nu}$.

Белоусов-1.2.6 Выражение

Пусть $G_{\mu\nu\lambda} = \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu}$. Записать $\widetilde{G}^\lambda$ через $\widetilde{F}^{\lambda\mu}$.

Белоусов-1.2. $\widetilde{f}^{\nu\lambda}$ через $\widetilde{A}^{\nu\lambda\mu}$

Пусть $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Записать $\widetilde{F}^{\nu\lambda}$ через $\widetilde{A}^{\nu\lambda\mu}$.

Белоусов-1.2. Два дуальных тензора

Выразить $\widetilde{F}^{\mu\nu}\widetilde{F}_{\mu\nu}$ через антисимметричный тензор $F_{\mu\nu}$.

7.3.8 Problems About Tensors in Field Theory

Тензоры в суперграфитации

(много придумать можно, просто пока лучше доудмать эту тему еще раз)

Тензоры в суперграфитации

(много придумать можно, просто пока лучше доудмать эту тему еще раз)

Тензоры в суперграфитации

(много придумать можно, просто пока лучше доудмать эту тему еще раз)

Тензоры в суперграфитации

(много придумать можно, просто пока лучше доудмать эту тему еще раз)

Тензоры в суперграфитации

(много придумать можно, просто пока лучше доудмать эту тему еще раз)

Тензоры в дуальных преобразованиях

(тупо задачу Проена впишу, только нормально написав ее. вот лагранжиан, вот инструкции, вперед)

Solution

(?? ну и тут это решение будет?)

Тензоры в дуальных преобразованиях

(тут задача по выводу свойств, заготовлю, типа с таких формул стартуем, к таким нужно прийти, всё в тензорном виде, не ошибитесь с индексами.)

Solution

(уже решал это, пропишу сюда разные матем вопросы)

Тензоры в дуальных преобразованиях

(уже решал это, пропишу сюда разные матем вопросы)

Тензоры в дуальных преобразованиях

(уже решал это, пропишу сюда разные матем вопросы)

7.3.9 Problems About Tensors in Curved Spaces

(из записи по ОТО перенесу сюда задачи. В диффгеме примерно это же будет.)

7.3.10 Problems About Polyvectors and External Shapes

(этого же в диффгеме много будет, большая отдельная тема)

Б-38.1

Функция f_a от двух векторов на трехмерном векторном пространстве сопоставляет любым векторам x и y смешанное произведение (a, x, y). Доказать, что f_a – 2-форма. Выразить ее матрицу в ортонормированном базисе через координаты вектора a.

Б-38.2

Найти связь между векторным произведением двух векторов и их внешним произведением.

Б-38.3

Написать матрицу 2-формы ω в базисе $\mathbf{e}$ пространства $\mathcal{L}_4$, если дано ее выражение через 1-формы, составляющие базис, биортогональный e:
1)$\omega = \mathrm{f}^1 \wedge \mathrm{f}_2$;
2)$\omega = -\mathrm{f}_1 \wedge \mathrm{f}^3 + \mathrm{f}^2 \wedge \mathrm{f}^4$;
3)$\omega = f^1 \wedge f^2 + f^1 \wedge f^3 + f^1 \wedge f^4 + f^2 \wedge f^3 + f^3 \wedge f^4$.

Б-38.4

Найти внешнее произведение двух 1-форм, заданных координатными строками:
1)$\mathbf{c}_{79}^T, \mathbf{c}_{75}^T$;
2)$\mathbf{c}_{95}^T, \mathbf{c}_{93}^T$;
3)$\mathbf{c}_{174}^T, \mathbf{c}_{166}^T$
4)$\mathbf{c}_{156}^T, \mathbf{c}_{193}^T$.

Б-38.5

Найти внешнее произведение трех 1-форм, заданных координатными строками:
1)$\mathbf{c}_{12}^T, \mathbf{c}_{13}^T, \mathbf{c}_{14}^T$;
2)$\mathbf{c}_{99}^T, \mathbf{c}_{52}^T, \mathbf{c}_{51}^T$
3)$\mathbf{c}_{83}^T, \mathbf{c}_{124}^T, \mathbf{c}_{118}^T$
4)$\mathbf{c}_{172}^T, \mathbf{c}_{154}^T, \mathbf{c}_{218}^T$ 5) $\mathbf{c}_{197}^T, \mathbf{c}_{198}^T, \mathbf{c}_{207}^T$ 6) $\mathbf{c}_{255}^T, \mathbf{c}_{256}^T, \mathbf{c}_{257}^T$

Б-38.6

2-форма задана матрицей, 1-форма задана координатной строкой. Найти их внешнее произведение.
1)$A_{254}, \mathbf{c}_{81}^T$;
2)$A_{254}, \mathbf{c}_{66}^T$
3)$A_{252}, \mathbf{c}_{93}^T$
4)$A_{499}, \mathbf{c}_{162}^T$; 5) $A_{432}, \mathbf{c}_{204}^T$.

Б-38.7

Пусть u, u_1, v и w - внешние формы степеней соот- ветственно p, p, q и r. Доказать, что:
1)$(\lambda u) \wedge v = \lambda(u \wedge v)$
2)$(u + u_1) \wedge v = u \wedge v + u_1 \wedge v$
3)$(u \wedge v) \wedge w = u \wedge (v \wedge w)$;
4)$u \wedge v = (-1)^{pq} v \wedge u$.

Б-38.8

Доказать, что значение q-формы на системе векторов $x_1, \ldots, x_q$ фактически зависит только от q-вектора $x_1 \wedge \ldots \wedge x_q$.

Б-38.9

Пусть $\mathrm{f}^1, \ldots, \mathrm{f}^p$ – 1-формы. Найти значение p-формы $\mathrm{f}^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{f}^p$ на системе векторов $x_1, \ldots, x_p$.

Б-38.10

2-форма в $\mathcal{L}_4$ задана строкой ее существенных ком-. понент φ, а векторы x и y - координатными столбцами ξ, η. Найти значение 2-формы на паре x, y:

1)$\varphi = \mathbf{c}_{279}^T, \quad \xi = \mathbf{c}_{174}, \quad \eta = \mathbf{c}_{186}$

2)$\varphi = \mathbf{c}_{269}^T, \quad \xi = \mathbf{c}_{171}, \quad \eta = \mathbf{c}_{177}$.

Б-38.11

Доказать, что для линейной зависимости векторов $a_1, \ldots, a_p$ необходимо и достаточно, чтобы $a_1 \wedge \ldots \wedge a_p = 0$.

и. :

Б-38.12

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ - базис в $\mathcal{L}_n$. Доказать, что:

1)бивекторы $e_i \wedge e_j$ для всех пар i, j таких, что $i < j$, образуют базис в пространстве бивекторов пространства $\mathcal{L}_n$.

2)p-векторы $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$ для всех сочетаний индексов $i_1, \ldots, i_p \, (i_1 < \ldots < i_p)$ образуют базис в пространстве p - векторов пространства $\mathcal{L}_n$.

Б-38.13

Базису $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ пространства $\mathcal{L}_4$ сопоставим базис $\varepsilon = (e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_4, e_3 \wedge e_4)$ соответствующего пространства бивекторов, а базису $\mathbf{e}'$ - аналогично построенный базис ε'. Найти матрицу перехода от ε к ε', если матрица перехода от е к $\mathbf{e}'$ есть S.

Б-38.14

Внешнее произведение $u^{i_1 \ldots i_{n-1}}$ векторов $x_1, \ldots \ldots, x_{n-1}$ из $\mathcal{L}_n$ имеет n существенных компонент. Доказать, что при замене базиса в $\mathcal{L}_n$ с матрицей перехода S строка а $= \left(a^1, \ldots, a^n\right)$ из существенных компонент $a^i = u^{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n}$ преобразуется по формуле $\mathbf{a}' = \mathrm{a} S (\det S)^{-1}$.

Б-38.15

Используя результат задачи 38.8, доказать, что линейное пространство p-форм может быть отождествлено с сопряженным к линейному пространству p-векторов.

Б-38.16

Доказать, что в $\mathcal{L}_3$ каждый бивектор разложим.

Б-38.17

Доказать, что для разложимости бивектора u^{ij} в $\mathcal{L}_4$ необходимо и достаточно выполнение равенства $u^{12}u^{34} - u^{13}u^{24} + u^{14}u^{23} = 0$.

Б-38.18

Пусть a_1, a_2, a_3 и a_4 - линейно независимые векторы. Разложимы ли бивекторы:

1)$a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4$

2)$a_3 \wedge a_2 + a_1 \wedge a_4 + a_1 \wedge a_2$

3)$a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4 + a_3 \wedge a_2 + a_1 \wedge a_4$?

Б-38.17

Доказать, что для разложимости бивектора u^{ij} в $\mathcal{L}_4$ необходимо и достаточно выполнение равенства $u^{12}u^{34} - u^{13}u^{24} + u^{14}u^{23} = 0$.

Б-38.18

Пусть a_1, a_2, a_3 и a_4 - линейно независимые векторы. Разложимы ли бивекторы:

1)$a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4$

2)$a_3 \wedge a_2 + a_1 \wedge a_4 + a_1 \wedge a_2$

3)$a_1 \wedge a_2 + a_3 \wedge a_4 + a_3 \wedge a_2 + a_1 \wedge a_4$?

Б-38.19

Разложим ли бивектор в $\mathcal{L}_4$, задаваемый в некотором базисе столбцом существенных компонент а:
1)$\mathbf{a} = \mathbf{c}_{279}$
2)$\mathbf{a} = \mathbf{c}_{269}$
3)$\mathbf{a} = \mathbf{c}_{278}$
4)$\mathbf{a} = \mathbf{c}_{281}$?

Б-38.20

Доказать, что подпространство, порождаемое p вектором, имеет размерность $r \leqslant p$, причем равенство достигается для разложимых p-векторов и только для них.

Б-38.21

1)Пусть разложимый бивектор в базисе $e_1, \ldots, e_n$ имеет компоненты u^{ij}. Доказать, что векторы $l^i = u^{ij} e_j$ лежат в пространстве, порождаемом этим бивектором.
2)Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для разложимых p-векторов.

Б-38.22

Может ли размерность подпространства, порождаемого бивектором в пространстве $\mathcal{L}_4$, равняться 1? 3?

Б-38.23

В некотором базисе пространства $\mathcal{L}_4$ бивектор u определен столбцом существенных компонент а. Найти линейное подпространство, порождаемое этим бивектором:
1)$\mathbf{a} = \mathbf{c}_{279}$
2)$\mathbf{a} = \mathbf{c}_{269}$
3)$\mathbf{a} = \mathbf{c}_{278}$;
4)$\mathbf{a} = \mathbf{c}_{280}$.

Б-38.24

Доказать, что разложимый p-вектор, определяющий подпространство $\mathcal{L}_p$, может быть найден по этому подпространству с точностью до числового множителя.

Б-38.25

Подпространство $\mathcal{L}_2$ в пространстве $\mathcal{L}_4$ задано системой линейных уравнений с матрицей A. Найти компоненты бивектора, определяющего $\mathcal{L}_2$:
1)$A = A_{502}$;
2)$A = A_{503}$;
3)$A = A_{506}$.

Б-38.26

Подпространства $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ в пространстве $\mathcal{L}_4$ порождсны соответственно вектором x и бивектором u. Вектор задан координатным столбцом ξ, а бивектор - столбдом существенных компонент а. Проверить, что $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2$, и найти такой вектор y, что $u = x \wedge y$:
1)$\xi = (-2, 6, 1, 1)^T, \mathbf{a} = (10, 1, 3, 2, -4, -1)^T$;
2)$\xi = (1, 2, 0, 1)^T, \mathbf{a} = (2, 1, 3, 2, 4, -1)^T$.

Б-38.27

Подпространства $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ в пространстве $\mathcal{L}_4$ порождены соответственно вектором x и бивектором u. Вектор задан координатным столбцом ξ, а бивектор - столбцом существенных компонент а. Проверить, что $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{o\}$, и найти 3 -вектор, порождающий $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$. Найти уравнение подпространства $\mathcal{L}$:
1)$\boldsymbol{\xi} = (2, 2, 1, 1)^T, \mathbf{a} = (2, 1, 3, 2, 4, -1)^T$;
2)$\boldsymbol{\xi} = (1, 0, 1, 1)^T, \mathbf{a} = (9, 5, 1, 4, -1, -1)^T$.

Б-38.28

Пусть 1-формы $f^1, \ldots, f^k$ линейно независимы и для 1-форм $g^1, \ldots, g^k$ выполнено равенство $\mathrm{f}^1 \wedge g^1 + \ldots$ $\ldots + \mathrm{f}^k \wedge g^k = 0$. Доказать, что $g^i = \sum\limits_{j=1}^{k} a^{ij} \mathrm{f}^j$ для всех $i = 1, \ldots, k$, причем $a^{ij} = a^{ji}$ (лемма Картана).

Б-38.29

1-формы $\mathrm{f}^1, \mathrm{f}^2$ и g^1 заданы координатными строками $\varphi^1, \varphi^2, \xi^1$. Существует ли такая 1-форма g^2, что $\mathrm{f}^1 \wedge g^1 + \mathrm{f}^2 \wedge g^2 = 0$? Найти все такие формы, если они существуют:
1)$\varphi^1 = \mathbf{c}_{172}^T, \varphi^2 = \mathbf{c}_{173}^T, \quad \xi^1 = \mathbf{c}_{166}^T$
2)$\varphi^1 = \mathbf{c}_{197}^T, \varphi^2 = \mathbf{c}_{185}^T, \quad \xi^1 = \mathbf{c}_{166}^T$;
3)$\varphi^1 = \mathbf{c}_{166}^T, \varphi^2 = \mathbf{c}_{228}^T, \quad \xi^1 = \mathbf{c}_{227}^T$;
4)$\varphi^1 = \mathbf{c}_{171}^T, \varphi^2 = \mathbf{c}_{186}^T, \quad \xi^1 = \mathbf{c}_{193}^T$.

Б-38.30

Доказать, что для каждой 2-формы ω существует базис $\mathrm{f}^1, \ldots, \mathrm{f}^n$ в пространстве 1-форм такой, что форма ω имеет канонический вид $\omega = \mathrm{f}^1 \wedge \mathrm{f}^2 + \mathrm{f}^3 \wedge \mathrm{f}^4 + \ldots + \mathrm{f}^{2p-1} \wedge \mathrm{f}^{2p}$ $(2p \leqslant n)$.

Б-38.31

2-форма задана своей матрицей в некотором базисе. Привести ее к каноническому виду, описанному в задаче 38.30:
1)A_{250};
2)A_{439}
3)A_{490}
4)A_{499}.

7.4 Problems About Linear Algebra in Specific Physics

There are many easy applications, for which there is no need in a special sections, so they are written before. Here, there are problems that are more physical, then mathematical, but still, methods of linear algebra are the key steps for solving them.

7.4.1 Problems About Specific Field Theory

(пока это в отдельных записях. потом выпишу сюда. Тут именно такая специфика, не просто свойства применяются, а именно решаются действительно важные задачи. Для тренировки применений свойств - см. разделы выше с задачами для просто тренировки)

7.4.2 Problems About Specific Mechanics

(пока это в отдельных записях. потом выпишу сюда. Тут именно такая специфика, не просто свойства применяются, а именно решаются действительно важные задачи. Для тренировки применений свойств - см. разделы выше с задачами для просто тренировки)

7.4.3 Problems About Specific Gravity

(пока это в отдельных записях. потом выпишу сюда. Тут именно такая специфика, не просто свойства применяются, а именно решаются действительно важные задачи. Для тренировки применений свойств - см. разделы выше с задачами для просто тренировки)

7.4.4 Problems About Specific Quantum Mechanics

(пока это в отдельных записях. потом выпишу сюда. Тут именно такая специфика, не просто свойства применяются, а именно решаются действительно важные задачи. Для тренировки применений свойств - см. разделы выше с задачами для просто тренировки)

7.4.5 Problems About Specific Superconductivity

Approximation of the Spectrum

(write that in MTJJ there is this and that formula for the current and density of states)
Find the approximated spectrum.
(!!! point out that we work with the matrix 4x4!!!! the key thing here is to know, how to work with it!!!)

Solution

An analytical solution can be obtained if we approximate the system: we linearize the local dot's Green's function near the Fermi energy, in other words, we approximate as follows:

$$\Sigma(\omega) \simeq \Sigma(0) + \omega \left. \frac{d\Sigma(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=0}, \tag{7.1}$$

where

$$\Sigma(0) = \sum_{j=1}^{N} \Gamma_j [e^{i\varphi_j}\tau_+ + e^{-i\varphi_j}\tau_-]; \qquad \left. \frac{d\Sigma(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=0} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\Gamma_j}{\Delta_j}. \tag{7.2}$$

After the introduction of Z, which is proportional to unit 4×4 matrix,

$$Z := 1 - \frac{d\Sigma(0)}{d\omega} = 1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{\Gamma_j}{\Delta_j}, \tag{7.3}$$

we obtain:

$$\omega - h_D - \Sigma(\omega) \simeq \omega - h_D - \Sigma(0) - \omega \frac{d\Sigma(0)}{d\omega} = Z\omega - h_D - \Sigma(0) = Z(\omega - h_{\text{eff}}); \tag{7.4}$$

$$h_{\text{eff}} := Z^{-1}\big(h_D + \Sigma(0)\big) = Z^{-1} \left(V\tau_z + \Delta_Z \sigma_z + \sum_{j=1}^{N} \Gamma_j [e^{i\varphi_j}\tau_+ + e^{-i\varphi_j}\tau_-] \right). \tag{7.5}$$

Eq. (**??**) tells us that we need to find eigenvalues of h_{eff}. This can be achieved, for example, straightforwardly by writing 4×4 matrix[1]. We will parameterize the four eigenvalues by indices $\tau = 0, 1$ and $\sigma = 0, 1$ and write the analytical formula for the bound states as follows:

$$E_{\tau,\sigma} = \tau \left[1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{\Gamma_j}{\Delta_j} \right]^{-1} \left(\sqrt{V^2 + |\sum_{j=1}^{N} \Gamma_j e^{i\varphi_j}|^2} + \sigma \Delta_Z \right). \tag{7.6}$$

Now the dependence of our system's Andreev levels on the initial parameters of the model $\Gamma_j, \Delta_j, \varphi_j, V, \Delta_Z, t'_j, t_j$ (for each wire) by the combination $\Gamma_j := (t'_j)^2/t_j$ plays role. The simplification of this formula for the case of $N = 2$ and $N = 3$ will be presented shortly.

me. Calculation of Josephson Current

(write that in MTJJ there is this and that formula for the current and density of states)
Find the current.
(!!! point out that we work with the matrix 4x4!!!! the key thing here is to know, how to work with it!!!)

Solution

The current can be determined from the Gibbs free energy, which, in its turn, is derived from the density of states ρ (see review in Sec. **??**). More precisely, ρ is obtained from d matrix by $\rho(\omega, \varphi) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \frac{\partial}{\partial \omega} \ln \det d\,(\omega, \varphi)$, and the d matrix is obtained from GF of the model by (**??**). Thus, the current in the j^{th} lead can be determined

[1] Or by using Wolfram Mathematica, or by solving for $\Delta_Z = 0$ and then add the Zeeman splitting Δ_Z like in quantum mechanics.

by some careful transformations:

$$J_j(\varphi) = -\frac{2e}{h\beta}\int_0^\infty d\omega \ln\left(2\cosh\frac{\beta\omega}{2}\right)\frac{\partial}{\partial\varphi}\delta\rho(\omega,\varphi) \overset{\text{i b p}}{\underset{\Phi_0=\frac{h}{2e}\equiv\frac{\pi\hbar}{e}}{=}} \tag{7.7}$$

$$= -\frac{1}{\Phi_0}\operatorname{Im}\int_0^\infty d\omega \tanh\frac{\beta\omega}{2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\ln\det d\left(\omega+i\eta,\varphi\right) \overset{f(\omega)=\frac{1}{e^{\beta\omega}+1}}{=} \tag{7.8}$$

$$= \frac{1}{\Phi_0}\Im\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega f(\omega)\mathrm{tr}\frac{\partial}{\partial\varphi}\ln\det(\omega+i\eta-h_D-\Sigma(\omega+i\eta)) = \tag{7.9}$$

$$= \frac{1}{\Phi_0}\Im\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega f(\omega)\mathrm{tr}\frac{1}{\omega+i\eta-h_D-\Sigma(\omega+i\eta)}\frac{\partial\Sigma(\omega+i\eta)}{\partial\varphi_j} = \tag{7.10}$$

$$= \frac{1}{2i\Phi_0}\int d\omega f(\omega)\,\mathrm{tr}\,\frac{1}{\omega+i\eta-h_D-\Sigma(\omega+i\eta)}\frac{\partial\Sigma(\omega+i\eta)}{\partial\varphi_j} - \tag{7.11}$$

$$- \frac{1}{2i\Phi_0}\int d\omega f(\omega)\,\mathrm{tr}\,\frac{1}{\omega-i\eta-h_D-\Sigma(\omega-i\eta)}\frac{\partial\Sigma(\omega-i\eta)}{\partial\varphi_j}. \tag{7.12}$$

The poles of the integrand allows one to make a simplification. The Fermi function produces fermionic poles. The first integral because of $\omega+i\eta$ has poles from the propagator in the lower-half of the complex plane, thus we need to close the contour to the upper-half. In this region we have only poles from Fermi's function (when $e^{\beta\omega}=-1$). It means, $\beta\omega=\pi+2\pi n, n=0,1,2,3...$ The second integral should be closed in the lower part of the plane, where the poles are $\beta\omega=\pi+2\pi n, n=-1,-2,-3..$, because of $\omega-i\eta$ in it. As a result,

$$J_j(\varphi) = \frac{1}{2i\Phi_0}\cdot 2\pi i\sum_{\omega_n\geq 0}\underbrace{\mathrm{res}(f(\omega))}_{-1/\beta}\,\mathrm{tr}\,\frac{1}{\omega+i\eta-h_D-\Sigma(\omega+i\eta)}\frac{\partial\Sigma(\omega+i\eta)}{\partial\varphi_j} - \tag{7.13}$$

$$- \frac{1}{2i\Phi_0}\cdot(-2\pi i)\sum_{\omega_n<0}\underbrace{\mathrm{res}(f(\omega))}_{-1/\beta}\,\mathrm{tr}\,\frac{1}{\omega-i\eta-h_D-\Sigma(\omega-i\eta)}\frac{\partial\Sigma(\omega-i\eta)}{\partial\varphi_j} = \tag{7.14}$$

$$= -\frac{\pi}{\Phi_0}\frac{1}{\beta}\sum_{\omega_n}\mathrm{tr}\frac{1}{i\omega_n-h_D-\Sigma(i\omega_n)}\frac{\partial\Sigma(i\omega_n)}{\partial\varphi_j}. \tag{7.15}$$

At $T=0$ the sum is changed to the integral[2]:

$$J_j(\varphi, T=0) = -\frac{1}{2\Phi_0}\int d\omega\ \mathrm{tr}\frac{1}{i\omega-h_D-\Sigma(i\omega)}\frac{\partial\Sigma(i\omega)}{\partial\varphi_j}. \tag{7.16}$$

From this equation, the Ambegoakar-Baratoff's formula can be obtained if one neglects $\Sigma(i\omega)$ in the denominator (this is the tunneling limit). This is because $\Sigma\sim\Gamma$, so after decomposition of the denominator into series, the terms from Σ from the denominator will be of the highest order in Γ.

To compute currents from j-th contact to j'-th we need to compute $J_j - J_{j'}$. Soon the results of this formula will be presented.

7.4.6 Problems About Special 1d, 2d Materials

(we also work there with matrices, Dirac materials, etc.)

7.4.7 Problems About Other Specific Condensed Matter

7.4.8 Problems About Other Special Applications

(пока это в отдельных записях. потом выпишу сюда. Тут именно такая специфика, не просто свойства применяются, а именно решаются действительно важные задачи. Для тренировки применений свойств - см. разделы выше с задачами для просто тренировки)

7.5 Problems About Linear Algebra Applications in Mathematics and Programming

(тоже мб впишу, но пока я этим не занимаюсь вообще)

[2]See, for example, Eq. (89) in [?]

8 Problems by Arutunov, Ershov

8.1 Introduction

8.1.1 0 Некоторые определения

Для удобства читателей в данном разделе мы приведем несколько важных определений, которые будут использоваться в дальнейшем. Этот раздел нужно воспринимать как словарик терминов. Чтобы научиться свободно ими пользоваться, нужно на каждое понятие разобрать по нескольку примеров, которые легко найти в рекомендованных учебниках по алгебре.

8.1.2 0.1. Отношение эквивалентности

Определение 0.1. Декартовым произведением $X \times Y$ множеств X и Y называется множество всех упорядоченных пар

$$\{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Таким образом, $(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x', y = y'$.

Определение 0.2. (Бинарным) соответствием между множествами X и Y называется произвольное подмножество $R \subset X \times Y$.

Для произвольного соответствия $R \subset X \times Y$ определим транспонированное соответствие $R^T \subset Y \times X$ как

$$R^T = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\},$$

то есть пара $(y, x) \in Y \times X$ принадлежит R^T тогда и только тогда, когда пара $(x, y) \in X \times Y$ принадлежит R. Очевидно, что $\left(R^T\right)^T = R$.

Определение 0.3. (Бинарным) отношением на множестве X называется бинарное соответствие между X и X, то есть произвольное подмножество $R \subset X \times X$.

Например, если X - множество людей, определим отношение R "быть родителем" на X как $R = \{(x, y) \mid y$ - родитель $x\}$. Тогда транспонированное отношение R^T есть отношение "быть ребенком".

Пример. Диагональ $\Delta_X := \{(x, x) \mid x \in X\} \subset X \times X$ задает отношение равенства на X.

Для произвольных соответствий $R_1 \subset X \times Y$ и $R_2 \subset Y \times Z$ определим их композицию $R_2 \circ R_1$ как соответствие

$$\{(x, z) \in X \times Z \mid \text{ существует } y \in Y, \text{ для которого } (x, y) \in R_1, (y, z) \in R_2\} \subset X \times Z.$$

Например, композиция отношения "быть родителем" и отношения "быть братом" на множестве людей X есть отношение "быть дядей", а композиция отношения "быть родителем" с собой - отношение "быть бабушкой или дедушкой".

Нетрудно проверить, что $\Delta_Y \circ R = R = R \circ \Delta_X$ для любого соответствия $R \subset X \times Y$, а также что композиция соответствий ассоциативна, то есть для произвольных

$$R_1 \subset X \times Y, \quad R_2 \subset Y \times Z, \quad R_3 \subset Z \times W$$

соответствия $(R_3 \circ R_2) \circ R_1$ и $R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$ между множествами X и W равны. Также верно равенство $(R_2 \circ R_1)^T = R_1^T \circ R_2^T$.

Для читателей, знакомых с понятием булевой алгебры, будет полезно решить следующую задачу, которая дает еще одну интерпретацию матричного умножения (основная интерпретация последнего для нас - композиция линейных отображений).

Задача 0.4. В случае конечных множеств X и Y придумайте способ задания соответствий между X и Y с помощью матриц так, чтобы отношению равенства отвечала бы единичная матрица, транспонированному соответствию отвечала транспонированная матрица, а композиции соответствий - произведение матриц.

Важнейшим методом познания какой-либо части окружающего мира является нахождение естественной классификации ее объектов. Классификация элементов некоторого множества X разбиение множества на классы. Любое такое разбиение происходит из (и, в свою очередь, определяет) некоторого отношения эквивалентности на X.

Определение 0.5. Отношение R на X называется отношением эквивалентности на множестве X, если оно обладает свойствами:

1. рефлексивности: $(x,x) \in R$ для любого $x \in X$ (эквивалентно, $\Delta_X \subset R$);
2. симметричности: $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$ (эквивалентно, $R = R^T$);
3. транзитивности: $(x,y) \in R$ и $(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$ (эквивалентно, $R \circ R \subset R$, где $\circ$ обозначает композицию отношений).

Например, на множестве людей X отношение
$$R_1 = \{(x,y) \mid y \text{ знает } x\}$$
не является отношением эквивалентности (например, отсутствует симметричность), отношение
$$R_2 = \{(x,y) \mid y \text{ знако́м с } x\}$$
также не является отношением эквивалентности (оно симметрично, но не транзитивно), а отношения "быть родственником" или "жить в одном доме" - отношения эквивалентности.

Пусть R - отношение эквивалентности на множестве X. В этом случае вместо $(x,y) \in R$ пишут $x \sim_R y$ или просто $x \sim y$, если ясно, какое отношение эквивалентности имеется в виду.

Пусть X - множество, на котором задано отношение эквивалентности $\sim$. Классом эквивалентности элемента $x \in X$ назовем подмножество $[x] \subset X$, состоящее из всех элементов, эквивалентных x, то есть $[x] := \{y \in X \mid y \sim x\}$. Произвольный элемент $y \in [x]$ называется представителем класса эквивалентности $[x]$.

Например, для отношения эквивалентности "жить в одном доме" классы эквивалентности - жильцы одного дома. Произвольный жилец дома является представителем такого класса.

Предложение 0.6. $[x] = [x'] \Leftrightarrow x \sim x'$.

Доказательство. Пусть $[x] = [x']$. Так как $x \sim x$, то $x \in [x] == [x']$, а значит, $x \sim x'$.

Наоборот, предположим, что $x \sim x'$. Пусть $y \in [x] \Rightarrow y \sim\sim x \Rightarrow y \sim x' \Rightarrow y \in [x']$. Таким образом, $[x] \subset [x']$. Тогда в силу симметричности отношения эквивалентности $[x] = [x']$.

Определение 0.7. Разбиением множества X называется представление его в виде объединения непересекающихся [2] подмно-

жеств, то есть в виде $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha, \quad X_\alpha \subset X$, причем $X_\alpha \bigcap X_\beta == \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$.

Предложение 0.8. Классы эквивалентности отношения эквивалентности $\sim$ на X образуют разбиение множества X.

Доказательство. Так как $x \in [x]$, то каждый элемент множества X принадлежит некоторому классу эквивалентности. Покажем, что если классы $[x], [x']$ имеют непустое пересечение, то они совпадают. Пусть $y \in [x] \cap [x']$. Тогда $y \sim x \Rightarrow x \sim y$, а также $y \sim x' \Rightarrow x \sim x' \Rightarrow [x] = [x']$.

Заметим, что верно и обратное: по любому разбиению $X == \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ множества X определяется единственное отношение эквивалентности на X, для которого $X_\alpha, \alpha \in A$, являются классами эквивалентности. То есть существует естественное взаимно однозначное соответствие между отношениями эквивалентности на множестве X и разбиениями X.

Теперь заметим, что классы эквивалентности отношения эквивалентности $\sim$ на X сами можно рассматривать как элементы некоторого множества, которое называется фактормножеством множества X по отношению эквивалентности $\sim$. Фактормножество множества X по отношению эквивалентности $\sim$ обозначается $X/\sim$.

Рассмотрим примеры. Фактормножество множества людей по отношению эквивалентности "жить в одном доме" - множество домов (мы считаем, что каждый человек живет в доме, причем единственном).

Пример 0.1. (Свободные векторы на плоскости.) Направленным отрезком AB на плоскости называется упорядоченная пара точек (A, B) на плоскости. Два направленных отрезка AB и $A'B'$ называются эквивалентными, если середины AB' и $A'B$ совпадают.

[22] То есть имеющих пустое пересечение.

Читателю предлагается убедиться, что это - действительно отношение эквивалентости и что его классы эквивалентности в точности свободные векторы на плоскости.

Пример 0.2. (Рациональные числа.) Рассмотрим множество упорядоченных пар целых чисел $(m, n), m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$. Определим на данном множестве отношение

$$(m, n) \sim (m', n') \Leftrightarrow mn' = m'n. \tag{1}$$

Рефлексивность и симметричность такого отношения очевидны. Проверим транзитивность. Пусть $(m', n') \sim (m'', n'')$, то есть $m'n'' = m''n'$. Умножая обе части равенства в (1) на n'', а обе части предыдущего равенства - на n, получаем $mn'n'' == m'nn''; m'n''n = m''n'n$, откуда, сокращая на n' (и используя $n' \neq 0$), получаем $mn'' = m''n$. Класс эквивалентности этого отношения называется рациональным числом. Множество рациональных чисел обозначается $\mathbb{Q}$.

Пример 0.3. Две матрицы $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ назовем эквивалентными, если одну в другую можно перевести композицией элементарных преобразований строк. То, что это действительно отношение эквивалентности, легко следует из определения элементарных преобразований (в частности, из их обратимости). Каждый класс эквивалентности содержит единственную матрицу строгого ступенчатого вида (такой вид имеют матрицы, у которых самый левый ненулевой элемент каждой строки равен 1, располагается строго правее, чем в предыдущей строке, и является единственным ненулевым элементом своего столбца). Например, все обратимые матрицы данного порядка n эквивалентны друг другу (и, в частности, эквивалентны единичной матрице порядка n).

Пример 0.4. В начальном курсе алгебры на множестве систем линейных уравнений рассматриваются следующие два отношения эквивалентности:

1. две системы эквивалентны, если их множества решений совпадают (то есть каждое решение первой является решением второй и наоборот);

2. две системы эквивалентны, если каждое уравнение второй системы является линейной комбинацией уравнений первой системы и наоборот.
   Важным результатом является теорема, утверждающая, что эти два отношения эквивалентности совпадают на множестве совместных систем (в частности, на множестве однородных систем). В частности, две совместные системы, состоящие из одинакового числа уравнений, имеют одинаковое множество решений тогда и только тогда, когда существует последовательность элементарных преобразований уравнений (или строк расширенной матрицы) первой системы, переводящая ее во вторую.

8.1.3 0.2. Группы

Определение 0.9. Бинарной операцией φ на множестве X называется произвольное отображение $\varphi : X \times X \to X$.

Иногда бывает полезно рассматривать и другие операции, например тернарные (примером такой операции является смешанное произведение векторов в $\mathbb{R}^3$). Часто бывают нужны унарные операции, например операция обращения, которая ставит в соответствие элементу g обратный $*^{-1} : g \to g^{-1}$. Унарную операцию, которая обратна самой себе, называют инволючией.

Определение 0.10. Группой называется множество G, на котором задана бинарная операция

$$\mu : G \times G \to G, \quad (g_1, g_2) \mapsto \mu (g_1, g_2),$$

удовлетворяющая следующим условиям ("аксиомам группы"):

1. операция μ ассоциативна: $\mu (g_1, \mu (g_2, g_3)) = \mu (\mu (g_1, g_2), g_3) \forall g_1, g_2, g_3 \in G$;

2. существует нейтральный элемент (называемый также единичным элементом или единицей) $e \in G$, то есть такой, что $\mu(g, e) = g = \mu(e, g) \forall g \in G$ (в частности, $G \neq \varnothing$);

3. $\forall g \in G$ существует элемент множества G, обозначаемый g^{-1}, удовлетворяющий условию $\mu (g, g^{-1}) = e = \mu (g^{-1}, g)$. Элемент g^{-1} называется обратным элементом для $g \in G$.

Простым следствием аксиом группы является единственность единицы e и обратного g^{-1} для каждого $g \in G$.

Определение 0.11. Группа G называется коммутативной или абелевой, если операция μ наряду со свойствами 1)-3) из определения группы обладает свойством коммутативности: $\mu\left(g_1, g_2\right) == \mu\left(g_2, g_1\right) \forall g_1, g_2 \in G$.

Обычно бинарная операция μ записывается как умножение (то есть $\mu\left(g_1, g_2\right) = g_1 g_2$, "мультипликативная запись") либо как сложение ($\mu\left(g_1, g_2\right) = g_1 + g_2$, "аддитивная запись"). Почти всегда операцию в некоммутативных группах записывают мультипликативно, а в коммутативных группах - аддитивно (в этом

случае нейтральный элемент e обычно обозначают 0 , а вместо g^{-1} пишут $-g$).

Простейшими примерами коммутативных групп будут стандартные числовые множества: целые числа $\mathbb{Z}$, рациональные числа $\mathbb{Q}$, вещественные числа $\mathbb{R}$ относительно операции сложения.

Пример 0.5. (Мультипликативная группа поля.) Отметим, что относительно операции умножения рациональные, вещественные числа, или, более общо, элементы произвольного поля [3]$\mathbb{K}$, будут являться группой, только если из них убрать 0 . Соответствующая группа называется мультипликативной группой поля $\mathbb{K}$ и обозначается $\mathbb{K}^*$.

Пример 0.6. Важным примером некоммутативной группы является группа невырожденных матриц $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ порядка n при $n > 1$ относительно операции умножения.

Сразу же зафиксируем некоторые дополнительные классы матриц, также образующих группы относительно операции умножения. Это группа $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$, состоящая из матриц порядка n с единичным определителем, группа $\mathrm{O}(n)$, состоящая из вещественных ортогональнью матриц, то есть

$$\mathrm{O}(n) = \left\{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid A^T A = E\right\}$$

и группа $\mathrm{SO}(n)$, состоящая из вещественных ортогональных матриц с определителем единица.

В случае поля $\mathbb{C}$ множество унитарных матриц

$$\mathrm{U}(n) := \left\{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid \bar{A}^T A = E\right\}$$

и множество унитарных матриц с определителем единица также являются группами, последняя обозначается $\mathrm{SU}(n)$. Проверку того, что указанные множества матриц являются группами, мы оставляем читателю в качестве простого упражнения.

Пример 0.7. Пусть X - произвольное множество, $S(X)$ - множество всех биекций $f : X \rightarrow X$. На множестве отображений $X \rightarrow X$ определена бинарная операция - композиция отображений $(f, g) \mapsto f \circ g$. Так как композиция биекций является биекцией, то о определяет бинарную операцию на $S(X)$ (говорят также, что " $S(X)$ замкнуто относительно операции о"). Кроме того,

композиция отображений ассоциативна, тождественное отображение является ее нейтральным элементом, и отображение, обратное к биекции, является биекцией. Таким образом, $S(X)$ является группой. Если $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, то $S(X)$ обозначается S_n и называется группой перестановок на n элементах. Заметим, что порядок (=число элементов) группы S_n есть $n!$. При $n \geq 3$ группа S_n некоммутативна.

Пусть на множестве X одновременно заданы некоторая бинарная операция $\bullet$ и отношение эквивалентности $\sim$.

Определение 0.12. Отношение эквивалентности ~ называется согласованным с бинарной операцией $\cdot$, если из $x \sim x', y \sim y'$ следует $x \cdot y \sim x' \cdot y'$.

При выполнении условия согласованности можно определить бинарную операцию * на множестве классов эквивалентности (то есть на фактормножестве $X/\sim$) по формуле $[x] * [y] := [x \cdot y]$. На первый взгляд, определение зависит от выбора представителей x, y классов $[x]$ и $[y]$ (см. Предложение 0.6). Действительно, чтобы получить произведение классов $[x]$ и $[y]$, мы перемножаем их представителей x, y, а затем берем класс их произведения $[\ x \cdot y\ ]$. Получим ли мы тот же результат, если представим класс $[x]$ в виде $[x']$, где $x' \sim x$, а класс $[y]$ - в виде $[y']$, где $y' \sim y$? Да, это как раз следует из условия согласованности, в чем читатель легко убедится.

Этот простой и общий способ определения операции на фактормножестве постоянно используется в алгебре (при определении факторгрупп, факторпространств, факторколец и т.д.) Заметим еще, что свойства ассоциативности, коммутативности операции $\bullet$, а также наличие единичного или обратного элемента "наследуются" операцией *.

[23] Определение поля мы напоминаем ниже, см. определение 0.18 .

Читатель легко убедится, что отношение эквивалентности из примера 0.1 согласовано с операцией сложения направленных отрезков по правилу треугольника, и, таким образом, определяет операцию сложения свободных векторов. То же можно сказать про операцию умножения направленных отрезков на действительные числа.

Аналогично дела обстоят в примере 0.2 . Более подробно операции суммы и произведения рациональных чисел определяются

на представителях классов эквивалентности как

$$(m_1, n_1) + (m_2, n_2) = (m_1 n_2 + n_1 m_2, n_1 n_2)$$
$$(m_1, n_1) \cdot (m_2, n_2) = (m_1 m_2, n_1 n_2)$$

Читатель легко убедится, что отношение эквивалентности (1) согласовано с этими операциями, и, таким образом, последние определяют операции сложения и умножения рациональных чисел.

Пример 0.8. Фиксируем некоторое натуральное число $p \in \mathbb{N}$. На множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ рассмотрим следующее отношение эквивалентности $\sim$: $m \sim n \Leftrightarrow p \mid (n-m)$ (т.е. p делит $n-m$). Читателю предлагается проверить, что отношение эквивалентности $\sim$ согласовано с операцией сложения на $\mathbb{Z}$, и, тем самым, мы получаем группу из p элементов, которую далее будем обозначать через $\mathbb{Z}_p$. Конструкция этого примера - частный случай конструкции факторгруппы (см., например, [12]).

Определение 0.13. Гомоморфизмом группы G в группу H называется отображение $\varphi : G \to H$ такое, что

$$\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G.$$

Гомоморфизм φ называется изоморфизмом, если он биективен.
Несложными следствиями определения гомоморфизма являются утверждения:

- $\varphi(e_G) = e_H$, где e_G - нейтральный элемент в группе G, а e_H- в H.
- $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1} \quad \forall g \in G.$

Заметим также, что если $\varphi : G \to H$ - изоморфизм, то обратное отображение φ^{-1} : $H \to G$ является гомоморфизмом групп, и, таким образом, тоже изоморфизм, причем

$$\varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{id}_G, \quad \varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_H$$

(здесь $\mathrm{id}_G, \mathrm{id}_H$ - тождественные отображения соответствующих множеств).

Каждое отображение множеств $f : X \to Y$ задает некоторое отношение эквивалентности на X (два элемента $x, x' \in X$ эквивалентны $\Leftrightarrow f(x) = f(x')$). В случае гомоморфизмов групп данное отношение эквивалентности имеет простое описание в терминах ядра гомоморфизма (см. [12]).

Задача 0.14. Построить изоморфизм групп между аддитивной группой $\mathbb{R}$ и мультипликативной группой $\mathbb{R}_+$положительных действительных чисел.

Пример 0.9. Определитель

$$\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \to \mathrm{GL}_1(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^*, \quad A \mapsto \det A$$

задает гомоморфизм групп, что следует из тождества

$$\det(AB) = \det A \det B \quad \forall A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}).$$

Пример 0.10. Сопоставление перестановке на n элементах ее знака определяет гомоморфизм $\mathrm{sgn} : S_n \to \{\pm 1\}$ из группы S_n в группу из двух элементов $\{\pm 1\}$ (состоящую из $1, -1 \in \mathbb{Z}$ и рассматриваемую с операцией умножения. Это группа элементов кольца $^4\mathbb{Z}$, обратимых относительно умножения; ее естественно обозначить $\mathbb{Z}^*$). Это следует из тождества $\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau)$, верного для любых двух перестановок $\sigma, \tau \in S_n$.

Пример 0.11. Группа $\mathrm{GL}(V)$ обратимых линейных преобразований n-мерного векторного пространства V над полем $\mathbb{K}$ относительно операции композиции изоморфна группе $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ (выбор базиса в V позволяет линейному оператору сопоставить единственную матрицу и, тем самым, задает конкретный изоморфизм между $\mathrm{GL}(V)$ и $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$).

Пример 0.12. Группа изометрий $\mathrm{O}(V)$ евклидова пространства V (т.е. линейных преобразований вещественного векторного пространства, сохраняющих билинейную симметричную положительно определенную форму; такие преобразования называются *ор* тогональными) изоморфна $\mathrm{O}(n)$. Действительно, выбор ортонормированного базиса в

V задает ее изоморфизм с ортогональной группой $\mathrm{O}(n)$ (ортогональное преобразование в ортонормированном базисе имеет ортогональную матрицу).

8.1.4 0.3. Действия групп

Определение 0.15. Действием группы G на множестве X называется произвольный гомоморфизм $\alpha : G \to S(X)$ (группа $S(X)$ определена в примере 0.7).

Таким образом, для любого $g \in G$ $\alpha(g)$ - биекция множества X на себя. Запись $\alpha(g)(x)$ (результат применения биекции $\alpha(g)$ к элементу $x \in X$) часто сокращают до gx, если ясно, о каком действии идет речь.

Действие группы G на множестве X называется тавтологическим, если группа G по своему определению является подгруппой [5] группы $S(X)$. В этом случае гомоморфизм $\alpha : G \to S(X)-$ тождественное вложение (= инъективное отображение).

Например, группы $\mathrm{GL}(V), \mathrm{O}(V)$ и S_n тавтологически действуют на множестве элементов векторного пространства V, евклидова пространства V и $\{1, \ldots, n\}$ соответственно.

Пусть V - n-мерное векторное пространство над полем $\mathbb{K}$. При выборе базиса в V тавтологическое действие группы $\mathrm{GL}(V)$ на V переходит в действие группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ на пространстве $\mathbb{K}^n$ столбцов высоты n с элементами из поля $\mathbb{K}$ умножением (слева) матрицы на столбец.

Группа вращений трехмерного пространства, переводящих правильный многогранник в себя, действует на множествах его вершин, ребер и граней.

Пример 0.13. (Действие сопряжениями.) Определим действие α группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ на множестве $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ матриц порядка n с помощью формулы

$$\alpha(C)(X) = CXC^{-1} \quad \forall C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \quad X \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}).$$

Пример 0.14. Определим действие β группы $\mathrm{O}(n)$ на пространстве $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ симметрических матриц над полем $\mathbb{R}$ с помощью формулы

$$\beta(C)(X) = CXC^T \quad \forall C \in \mathrm{O}(n), \quad X \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}).$$

По действию α группы G на множестве X можно определить следующее отношение эквивалентности $\sim_\alpha$ на X :

$$x \sim_\alpha y \Leftrightarrow \exists g \in G \text{ такой, что } y = \alpha(g)(x).$$

Из определения действия группы непосредственно следует, что это действительно отношение эквивалентности (читателю предлагается провести несложную проверку).

Определение 0.16. Орбитой действия α называется класс эквивалентности отношения $\sim_\alpha$. Действие G на X называется транзитивным, если все элементы X между собой эквивалентны, то есть все множество X представляет собой одну орбиту.

Пример 0.15. Чтобы пояснить терминологию, рассмотрим следующий пример. На аффинной (т.е. точечной) евклидовой плоскости V рассмотрим следующее отношение эквивалентности: точки $p \in V$ и $q \in V$ эквивалентны, $p \sim q \Leftrightarrow$ они находятся на одинаковом расстоянии от начала координат O. Классами эквивалентности являются концентрические окружности с центром в O (включая "окружность нулевого радиуса" - саму точку O), они - орбиты действия группы $\mathrm{SO}(2)$ вращениями плоскости V вокруг O. Расстояние от произвольной точки орбиты до начала координат постоянно [6], сопоставление орбите этого расстояния определяет биекцию множества орбит (т.е. фактормножества) с множеством неотрицательных действительных чисел.

Еще примеры. В случае тавтологического действия $\mathrm{GL}(V)$ на V (в случае $V \neq \{\mathbf{0}\}$) имеем две орбиты: одна состоит из всех ненулевых векторов, другая - только из нулевого вектора. Кроме того, $\mathrm{GL}(V)$ транзитивно действует на множестве упорядоченных наборов из фиксированного числа $k \leq n = \dim V$ линейно независимых векторов из V. В частности, $\mathrm{GL}(V)$ транзитивно действует на множестве всех базисов в V.

В случае тавтологического действия $\mathrm{O}(V)$ на евклидовом пространстве V орбиты отвечают неотрицательным вещественным числам: два вектора из V эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую длину. Кроме того, $\mathrm{O}(V)$ транзитивно

[24] Определение кольца дано ниже, см. определение 0.17.

[25] Определение подгруппы см. в любом учебнике алгебры.

действует на множестве упорядоченных наборов из фиксированного числа $k \leq n = \dim V$ единичных попарно ортогональ-

ных векторов из V. В частности, $\mathrm{O}(V)$ транзитивно действует на множестве всех ортонормированных базисов в V.

В случае действия α из примера 0.13 две матрицы $X, Y \in\in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ эквивалентны относительно отношения $\sim_\alpha$ тогда и только тогда, когда они являются матрицами одного и того же оператора в разных базисах. Действительно, если $\varphi : V \to V$ имеет матрицу Y в базисе $\{\mathbf{e}\} := \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ - матрица перехода от базиса $\{\mathbf{e}\}$ к базису $\{\mathbf{e}'\} := \{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$, то $X = C^{-1}YC$ - матрица оператора φ в базисе $\{\mathbf{e}'\}$, эквивалентно, $Y = CXC^{-1}$. В случае $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ это эквивалентно тому, что X и Y имеют одну и ту же жорданову нормальную форму.

В случае действия β из примера 0.14 две матрицы $X, Y \in\in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ эквивалентны относительно отношения $\sim_\beta$ тогда и только тогда, когда они являются матрицами одного и того же самосопряженного оператора в евклидовом пространстве в разных ортонормированных базисах. Это эквивалентно тому, что они приводятся к одному и тому же диагональному виду ортогональными заменами базиса.

Пример 0.16. Напомним, что элементарное преобразование строк матрицы A задается ее умножением слева на некоторую обратимую ("элементарную") матрицу, и композиция элементарных преобразований отвечает произведению соответствующих элементарных матриц. Обратно, любую обратимую матрицу можно представить в виде произведения элементарных, и, значит, умножение A на обратимую матрицу слева отвечает композиции элементарных преобразований строк матрицы A. Из этого следует, что отношение эквивалентности, описанное в примере 0.3 , совпадает с отношением эквивалентности, определяемым действием группы $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ на $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ умножением слева. То есть две матрицы $A, B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $\exists C \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ такая, что $B = CA$.

Пример 0.17. В этом примере мы приводим концептуальное доказательство формул Крамера (взятое из [12]), хорошо иллюстрирующее применение идеи инвариантности.

Рассмотрим систему линейных уравнений $A\vec{x} = \vec{b}$, где A - невырожденная матрица порядка n, а $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ и $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n)^T$ - столбцы неизвестных и правых частей соответственно. Докажем, что данная система имеет единственное

решение, которое может быть найдено по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \ldots, \quad x_n = \frac{\det A_n}{\det A}, \tag{2}$$

где A_i - матрица, получаемая из матрицы A заменой ее i-го столбца на столбец $\vec{b}$ правых частей.

Производя элементарные преобразования строк расширенной матрицы, мы будем получать некоторые новые системы, эквивалентные исходной. Так как элементарными преобразованиями строк расширенную матрицу исходной системы можно привести к виду $(\ E \mid \vec{b'}\ )$, где E - единичная матрица порядка n, а $\vec{b'} = (b'_1, \ldots, b'_n)^T$ - некоторый столбец, то исходная система эквивалентна системе $x_1 = b'_1, \ldots, x_n = b'_n$. Эта система имеет единственное решение $(b'_1, \ldots, b'_n)^T$, значит, то же верно и для исходной системы.

Отношения определителей в правых частях равенств (2) не меняются при элементарных преобразованиях строк расширенной матрицы так же, как не меняется и решение $(b'_1, \ldots, b'_n)^T$ соответствующих систем. Значит, если для какой-то из этих систем равенства (2) имеют место, то то же верно и для исходной системы (если две функции f и g постоянны на некотором множестве X и их значения совпадают в некоторой точке $x \in X$, то они совпадают на всем множестве X). Для системы с единичной матрицей коэффициентов $A = E$ равенства (2) легко проверяются. Действительно, в числителе стоит определитель матрицы, отличающейся от единичной заменой i-го столбца на столбец $\vec{b'}$, он равен b'_i, и, значит, формулы (2) верны для системы с единичной матрицей коэффициентов.

Другие примеры отношений эквивалентности, возникающие в линейной алгебре, рассматриваются в разделе 5.1. в конце этого пособия.

[26] Функции, постоянные на орбитах, называются инвариантами данного действия.

8.1.5 0.4. Кольца, поля, векторные пространства и алгебры

Определение 0.17. Кольцом R называется аддитивная абелева группа $(R, +)$, в которой есть также операция умножения, кото-
рая удовлетворяет свойству дистрибутивности:

$$a(b+c) = ab + ac, \quad (b+c)a = ba + ca \quad \forall a, b, c \in R.$$

Следующие условия являются дополнительными и в произвольном кольце могут не выполняться:

- ассоциативность (мультипликативная) $(ab)c = a(bc)$;
- наличие мультипликативной единицы 1 , то есть такого элемента, что $a\mathbf{1} = \mathbf{1}a = a$;
- коммутативность $ab = ba$.

Эти условия выделяют специальные классы колец: ассоциативные кольца, кольца с единицей и коммутативные кольца соответственно.

Определение 0.18. Полем называется ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, в котором не менее двух элементов, и все ненулевые элементы обратимы.

Легко видеть, что поле является не только абелевой группой по сложению, но, если убрать из него ноль (нейтральный элемент аддитивной группы), также и абелевой группой по умножению. Примерами бесконечных полей являются $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Множество целых чисел $\mathbb{Z}$ относительно обычных операций сложения и умножения является коммутативным ассоциативным кольцом с единицей, но не полем.

Отношение эквивалентности $\sim$ из примера 0.8 согласовано не только с операцией сложения, но и с операцией умножения, и поэтому на фактормножестве возникает структура ассоциативного коммутативного кольца с единицей, также обозначаемого $\mathbb{Z}_p$, причем это кольцо является полем тогда и только тогда, когда p простое.

В следующем определении нам понадобится понятие внешней бинарной операции, а именно произвольного отображения

$$\varphi : K \times L \to L$$

где $K \neq L$.

Определение 0.19. Векторным пространством над полем $\mathbb{K}$ называется множество V вместе с двумя бинарными операциями: внутренней

$$V \times V \to V, \quad (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \mapsto \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

и внешней

$$\mathbb{K} \times V \to V, \quad (\lambda, \mathbf{v}) \mapsto \lambda\mathbf{v}$$

удовлетворяющими условиям:

- $(V, +)$ - абелева группа (в частности, $\mathbf{0} \in V$);
- $1\mathbf{v} = \mathbf{v} \forall \mathbf{v} \in V, \lambda(\mu\mathbf{v}) = (\lambda\mu)\mathbf{v} \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \mathbf{v} \in V$;
- $(\lambda + \mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v}, \lambda(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \lambda\mathbf{v}_1 + \lambda\mathbf{v}_2 \quad \forall \lambda, \mu \in\in \mathbb{K}; \mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$.

Элементы векторного пространства называются векторами, мы их обозначаем жирными буквами.

Определение 0.20. Алгеброй над полем $\mathbb{K}$ называется множество A, снабженное тремя бинарными операциями (двумя внутренними и одной внешней):

$$A \times A \to A, \quad (a_1, a_2) \mapsto a_1 + a_2, \quad A \times A \to A, \quad (a_1, a_2) \mapsto a_1 a_2,$$
$$\mathbb{K} \times A \to A, \quad (\lambda, a) \mapsto \lambda a,$$

называемыми соответственно сложением, умножением и умножением на скаляры (=элементы поля $\mathbb{K}$), обладающими следующими свойствами:

- относительно операций сложения и умножения A является кольцом;
- относительно сложения и умножения на скаляры A является векторным пространством;
- $(\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda(ab) \forall \lambda \in \mathbb{K}, a, b \in A$.

Алгебра называется ассоциативной (коммутативной, с единицей), если соответствующее кольцо ассоциативно (коммутативно, с единицей).

Основным для нас примером ассоциативной алгебры над полем $\mathbb{K}$ будет алгебра линейных операторов на векторном пространстве V над полем $\mathbb{K}$, обозначаемая $\mathcal{L}(V)$. В ней операции

сложения, умножения и умножения на скаляры задаются соответственно сложением линейных операторов, их композицией и умножением операторов на скаляры. Выбор базиса в V определяет некоторый изоморфизм $\mathcal{L}(V)$ с алгеброй матриц $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{K})$, где $n = \dim V$ (изоморфизм - биекция, сохраняющая все операции). Алгебра $\mathcal{L}(V)$ обладает единицей (тождественным оператором) и некоммутативна при $n > 1$.

Поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ является алгеброй над полем $\mathbb{R}$. Более того, если $\mathbb{F}$ - подполе поля $\mathbb{K}$, то $\mathbb{K}$ является $\mathbb{F}$-алгеброй. Ниже мы также встретимся с алгеброй кватернионов $\mathbb{H}$ - ассоциативной некоммутативной алгеброй с единицей над полем $\mathbb{R}$, в которой всякий ненулевой элемент обратим. Таким образом, $\mathbb{H}$ является некоммутативным аналогом поля; такие алгебраические структуры называются телами. Можно распространить понятие векторного пространства на случай, когда вместо основного поля рассматривается тело, только в случае тел нужно различать понятия левого и правого векторного пространства.

Примером неассоциативной алгебры является 3 -мерное евклидово ориентированное пространство с векторным произведением в качестве умножения. Это пример алгебры из важнейшего класса неассоциативных алгебр - алгебр Ли.

8.2 1 Линейные пространства

8.2.1 1.1. Линейные подпространства, прямые суммы

Задача 1.

1. Пусть U, V, W - подпространства некоторого конечномерного векторного пространства.
a) Справедлива ли формула

$$\begin{gathered}\dim(U+V+W)=\dim U+\dim V+\dim W- \\ -\dim(U\cap V)-\dim(V\cap W)-\dim(W\cap U)+\dim(U\cap V\cap W)?\end{gathered} \tag{3}$$

b) Предположим, что выполнены условия

$$U\cap V=V\cap W=W\cap U=\{0\}. \tag{4}$$

Верно ли тогда, что сумма $U+V+W$ подпространств U, V, W прямая? Если нет, то как нужно изменить условия (4), чтобы это было верно?

Решение. а) Формула (3), вообще говоря, неверна. Для построения соответствующего примера возьмем в качестве U, V, W три попарно различных одномерных подпространства в $\mathbb{R}^2$. Тогда левая часть (3) равна 2 , а правая -3 . Однако, например, при условии ($U+V$) $\cap W=U\cap W+V\cap W$ формула (3) будет верна:

$$\begin{gathered}\dim((U+V)+W)=\dim(U+V)+\dim W-\dim((U+V)\cap W)= \\ =\dim U+\dim V-\dim(U\cap V)+\dim W- \\ -\dim(U\cap W)-\dim(V\cap W)+\dim(U\cap V\cap W).\end{gathered}$$

b) Формула, вообще говоря, неверна. Подходит тот же пример, что и в пункте a). Условия (4), чтобы утверждение пункта b) было верно, можно изменить, потребовав выполнения любой пары из более сильных условий:

$$U\cap(V+W)=\{0\},\quad V\cap(W+U)=\{0\},\quad W\cap(U+V)=\{0\}.$$

Действительно, достаточность следует из того, что если существует нетривиальное представление нулевого вектора $\mathbf{u}+\mathbf{v}++\mathbf{w}=\mathbf{0}$ и если, например, $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$, то $\mathbf{u}=-\mathbf{v}-\mathbf{w}$ и, значит, $U\cap(V+W)\neq\{0\}$. Чтобы доказать необходимость, предположим, например, что $U\cap(V+W)\neq\{0\}$, и тогда получим нетривиальное

представление нулевого вектора, а значит, сумма не прямая. □

Комментарий. Пункт а) призван избавить от заблуждения, возникающего из-за того, что (верная) формула

$$\dim(U+V)=\dim U+\dim V-\dim(U\cap V)$$

по виду похожа на формулу включений и исключений.

Определение 1.2. Пусть V - векторное пространство над полем $\mathbb{K}, U \subset V$ - его подпространство. Подпространство $W \subset V$ называется прямым дополнением к U в V, если $V=U\oplus W$.

Если задано разложение $V=U\otimes W$ пространства V в прямую сумму, то для любого вектора $\mathbf{v}\in V$ существует единственное представление в виде суммы

$$\mathbf{v}=\mathrm{Pr}_U^W(\mathbf{v})+\mathrm{Pr}_W^U(\mathbf{v}),\quad \text{где}\quad \mathrm{Pr}_U^W(\mathbf{v})\in U,\quad \mathrm{Pr}_W^U(\mathbf{v})\in W.$$

В этом случае $\mathrm{Pr}_U^W(\mathbf{v})$ называется проекцией $\mathbf{v}$ на подпространство U параллельно подпространству $W, \mathrm{ar}_W^U(\mathbf{v})$ - проекцией $\mathbf{v}$ на подпространство W параллельно U.

Задача 1.

3. Пусть U,V,W - подпространства в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, состоящие соответственно из кососимметрических, симметрических и верхнетреугольных матриц. Доказать, что V и W - различные прямые дополнения к U в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, и найти проекции матричных единиц $E_{ij}(1\le i,j\le n)$ на U параллельно V и на U параллельно W.

Решение. 1) Докажем, что $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})=U\oplus V$. Во-первых, так как любую матрицу $A\in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ можно представить в виде суммы кососимметрической $\frac{A-A^T}{2}$ и симметрической $\frac{A+A^T}{2}$, то $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})=U+V$. Единственность такого представления можно вывести непосредственно: пусть $A=B+C$, где $B^T=-B, C^T==C$. Тогда $A^T=-B+C\Rightarrow A+A^T=2C, A-A^T=2B$. Иначе можно проверить, что $U\cap V=\{0\}$ (матрица, одновременно симметричная и кососимметричная, нулевая) [7].

2) Докажем, что $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})=U\oplus W$. Для произвольной матрицы $A\in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ через A_1 обозначим матрицу того же размера, элементы которой ниже главной диагонали совпадают с соответствующими элементами A, а на главной диагонали и выше стоят нули. Тогда $B':=A_1-A_1^T$ есть кососимметрическая матрица, элементы которой ниже главной диагонали такие же, как и у A. Тогда $C':=A-B'$ - верхнетреугольная матрица. Кроме того, легко видеть, что $U\cap W=\{0\}$ (матрица, одновременно являющаяся кососимметрической и верхнетреугольной, нулевая). Значит, представление $A=B'+C'$ указанного вида единственно.

3) Найдем проекции: $\mathrm{Pr}_U^V(E_{ij})=\frac{E_{ij}-E_{ji}}{2}$, в то время как $\mathrm{Pr}_U^W(E_{ij})=0$ при $i\le j$ и $\mathrm{Pr}_U^W(E_{ij})=E_{ij}-E_{ji}$ при $i>j$.

Комментарии. 1) Данная задача призвана избавить от двух заблуждений. Первое заключается в том, что прямое дополнение (которое часто путается с ортогональным дополнением) единственно. Второе - в том, что проекция на подпространство зависит только от самогó подпространства, но не от выбора прямого дополнения (путаница с ортогональным проектированием). См. также задачи 3.4, 3.5 ниже.

2) Пусть $\varphi: V\to V$ - линейный оператор, такой, что $\varphi^2==\mathrm{id}_V$. Тогда существуют φ-инвариантные подпространства $U\subset\subset V, W\subset V$ такие, что $V=U\otimes W$ и $\varphi|_U=\mathrm{id}_U,\quad \varphi|_W=-\mathrm{id}_W$. Действительно,

$$\mathbf{v}=\frac{\mathbf{v}+\varphi(\mathbf{v})}{2}+\frac{\mathbf{v}-\varphi(\mathbf{v})}{2}\quad \forall\mathbf{v}\in V, \tag{5}$$

причем первое слагаемое в правой части принадлежит U, а второе $-W$. Из определения подпространств U и W очевидно, что $U\cap W=\{\mathbf{0}\}$. Заметим, что U (соотв. W) - собственное подпространство оператора φ, отвечающее собственному значению 1 (соотв. -1). Других собственных значений у φ быть не может: из $\varphi(\mathbf{v})=\lambda\mathbf{v}, \mathbf{v}\ne\mathbf{0}$ и соотношения $\varphi^2=\mathrm{id}_V$ получаем $\mathbf{v}=\lambda^2\mathbf{v}$, откуда $\lambda^2=1$.

[27] Заметим, что можно также непосредственно посчитать размерности: $\dim U=\frac{n(n-1)}{2}, \dim V=\frac{n(n+1)}{2}$; тогда из тривиальности пересечения следует представление $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ в виде прямой суммы подпространств U и V.

Таким образом, оператор φ на вектор $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, где $\mathbf{u} \in\in U, \mathbf{w} \in W$, действует следующим образом: $\varphi(\mathbf{u} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} - \mathbf{w}$. Такое преобразование естественно назвать отражением относительно U параллельно W.

Примером такого оператора φ является оператор транспони-

рования $\varphi(A) := A^T$ на пространстве матриц $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, поскольку $\left(A^T\right)^T = A \forall A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Тогда формула (5) снова дает нам представление квадратной матрицы в виде суммы симметричной и кососимметричной, полученное в пункте 1) решения предыдущей задачи.

Другим примером такого оператора φ является оператор четности $\varphi(f)(x) = f(-x)$, действующий на пространстве всех функций на прямой $\mathbb{R}$ (или в каком-либо его инвариантном подпространстве - непрерывных, дифференцируемых и т.д. функций). Тогда формула (5) дает представление произвольной функции f на $\mathbb{R}$ в виде суммы четной и нечетной:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Пусть $V = U \oplus W$. Легко проверить, что проекция $\mathrm{Pr}_U^W(\mathbf{v})$ вектора $\mathbf{v}$ на подпространство U параллельно подпространству W линейно зависит от $\mathbf{v}$, то есть для любых $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ и скаляра λ

$$\mathrm{Pr}_U^W\left(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\right) = \mathrm{Pr}_U^W\left(\mathbf{v}_1\right) + \mathrm{Pr}_U^W\left(\mathbf{v}_2\right), \quad \mathrm{Pr}_U^W(\lambda \mathbf{v}) = \lambda \,\mathrm{Pr}_U^W(\mathbf{v}).$$

Определение 1.4. Оператором проектирования на подпространство U параллельно подпространству W называется линейный оператор $\varphi : V \to V$, определенный равенством

$$\varphi(\mathbf{v}) = \mathrm{Pr}_U^W(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Он обозначается Pr_U^W.

Определение 1.5. Линейный оператор $P : V \to V$, удовлетворяющий соотношению $P^2 = P$, называется проектором.

Так, легко проверить, что оператор Pr_U^W является проектором. Оказывается, что существует естественная биекция между множеством проекторов и множеством упорядоченных пар (U, W) подпространств пространства V таких, что $V = U \oplus W$.

Задача 1.

6. Доказать, что отображение

$$P \mapsto (\operatorname{im} P, \ker P) \tag{6}$$

является биекцией между множеством проекторов $P : V \to V$ и множеством упорядоченных пар (U, W) подпространств пространства V таких, что $V = U \otimes W$. Если P отвечает паре (U, W), то какой проектор будет отвечать паре (W, U)?

Решение. Во-первых, покажем, что если $P : V \to V$ - проектор, то $V = \ker P \oplus \operatorname{im} P$. Действительно, $V = \ker P + \operatorname{im} P$, так как

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} - P\mathbf{v}) + P\mathbf{v} \tag{7}$$

С другой стороны, из $\mathbf{w} = P\mathbf{v}$ и $P\mathbf{w} = \mathbf{0}$ следует $\mathbf{0} = P^2\mathbf{v} = P\mathbf{v} == \mathbf{w}$, так что $\ker P \cap \operatorname{im} P = \{\mathbf{0}\}$, и, значит, $V = \ker P \oplus \operatorname{im} P$.

Во-вторых, покажем, что P совпадает с оператором Pr_U^W проектирования на подпространство $U := \operatorname{im} P \subset V$ параллельно подпространству $W := \ker P \subset V$. Действительно, из (7) имеем

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} - P\mathbf{v}) + P\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W$$

тогда из единственности представления вектора в виде суммы слагаемых из W и из U получаем $P\mathbf{v} = \mathbf{u}, \mathbf{v} - P\mathbf{v} = \mathbf{w}$, и, значит, наш оператор P действует на произвольный вектор $\mathbf{v} \in\in V$, сопоставляя ему его проекцию на U параллельно W^8, то есть $P = \mathrm{Pr}_U^W$.

В-третьих, заметим, что если $\mathrm{Pr}_U^W : V \to V$ - оператор проектирования на подпространство U параллельно W для некоторых подпространств $U \subset V, W \subset V$ таких, что $U \otimes W = V$, то $U = \operatorname{im} \mathrm{Pr}_U^W, W = \ker \mathrm{Pr}_U^W$.

Используя приведенные выше утверждения, легко получаем, что отображения $P \mapsto (\operatorname{im} P, \ker P)$ и $(U, W) \mapsto \mathrm{Pr}_U^W$ определяют взаимно обратные биекции.

Теперь ясно, что если проектор P отвечает паре (U,W), то паре (W,U) отвечает проектор $\mathrm{id}_V - P$. Проверим, что это действительно проектор. Имеем

$$(\mathrm{id}_V - P)^2 = \mathrm{id}_V^2 - 2P + P^2 = \mathrm{id}_V - P$$

Значит, действительно, $(\mathrm{id}_V - P)^2 = \mathrm{id}_V - P$.
Комментарий. Более того, для заданного прямого разложения $V = \oplus_{i=1}^n V_i$ определим n проекторов $P_i, 1 \leq i \leq n$ по формуле

$P_i\left(\sum_{j=1}^n \mathbf{v}_j\right) = \mathbf{v}_i$. Тогда $\sum_{i=1}^n P_i = \mathrm{Id}_V, P_i P_j = 0$ при $i \neq j$. Обратно, имея такое семейство проекторов, определим подпространства $V_i := \operatorname{im} P_i$. Тогда $V = \oplus_{i=1}^n V_i$. Например, разложению $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) = U \otimes V$ в прямую сумму подпространств симметрических V и кососимметрических U матриц (см. задачу 1.3) отвечают проекторы $\mathrm{Pr}_V^U(A) = \frac{A+A^T}{2}, \mathrm{Pr}_U^V(A) = \frac{A-A^T}{2}$. Подробности см. в [28], гл. 1, §5.

8.2.2 1.2. Векторные пространства над конечными полями

Помимо бесконечных полей (таких, как $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) существуют поля, содержащие конечное число элементов - конечные поля. Простейшим примером такого поля является $\mathbb{Z}_2$, поле классов вычетов по модулю 2 , состоящее из двух элементов, которые мы обозначим 0 и 1, с таблицами сложения и умножения:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Заметим в связи с этим, что поле из q элементов существует тогда и только тогда, когда $q = p^m$, где p - простое (называемое характеристикой поля), а m - натуральное число, большее 0 (заметим, что конечное поле из p^m элементов единственно с точностью до изоморфизма). Идея доказательства заключается в следующем [9]. Любое конечное поле содержит подполе, изоморфное полю $\mathbb{Z}_p$ классов вычетов по модулю p. Но любое поле $\mathbb{F}$, содержащее подполе $\mathbb{K}$, является векторным пространством над $\mathbb{K}$, ср. задачу 1.11. Далее требуемое утверждение вытекает из пункта а) следующей задачи.

Задача 1.

7. Пусть V - n-мерное векторное пространство над полем $\mathbb{F}$, состоящим из q элементов. Найти:
a) число векторов в пространстве V;
b) число решений уравнения $AX = 0$, где A - прямоугольная матрица ранга r, X - столбец неизвестных высоты n;
c) число базисов пространства V;
d) число невырожденных матриц порядка n над полем $\mathbb{F}$;
e) число k-мерных подпространств пространства V.

Решение. a) Выбор произвольного базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в пространстве V задает изоморфизм $V \cong \mathbb{F}^n$ между V и n-мерным арифметическим пространством над полем $\mathbb{F}$, то есть множеством всех упорядоченных наборов из n элементов поля $\mathbb{F}$. Этот изоморфизм сопоставляет вектору $\mathbf{v} \in V$ набор его координат в выбранном базисе [10]. Стало быть, мощность множества V есть q^n.
b) Из теории систем линейных уравнений известно, что множество решений однородной системы является векторным подпространством в $\mathbb{F}^n$ размерности $n-r$, поэтому, согласно пункту а), число решений есть q^{n-r}.
c) Напомним два факта о системах линейно независимых векторов. Любой упорядоченный

[28] Другое рассуждение: если $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{u}, \mathbf{w} \in W, \mathbf{u} \in U$, то $\exists \mathbf{v}' \in V$ такой, что $\mathbf{u} = P\mathbf{v}'$, и тогда $P\mathbf{v} = P\mathbf{w} + P\mathbf{u} = P\mathbf{u} = P^2\mathbf{v}' = P\mathbf{v}' = \mathbf{u}$.

[29] Подробнее см., например, [12], гл. 1, § 5.

набор линейно независимых векторов может быть продолжен до базиса (вообще говоря, многими способами). Подсистема линейно независимой системы векторов линейно независима.

Таким образом, в качестве первого базисного вектора можно взять произвольный ненулевой вектор пространства V. Таких векторов $q^n - 1$ штук. Пусть первый вектор $\mathbf{v}_1$ выбран, тогда в качестве второго вектора $\mathbf{v}_2$ базиса можно взять произвольный вектор такой, что система $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ линейно независима, т.е. $\mathbf{v}_2$ - произвольный вектор, неколлинеарный $\mathbf{v}_1$. Векторы, коллинеарные $\mathbf{v}_1$, образуют одномерное подпространство в V, то есть вектор $\mathbf{v}_2$ может быть выбран $q^n - q$ способами.

Предположим, что уже выбрана линейно независимая система $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, тогда в качестве $\mathbf{v}_{k+1}$ можно взять произвольный вектор, не принадлежащий линейной оболочке выбранных k векторов. Последняя имеет размерность k, поэтому число способов, которыми может быть выбран $k+1$-й базисный вектор,

есть $q^n - q^k$. В результате получаем, что число базисов есть

$$[B_n]_q := (q^n - 1)(q^n - q) \ldots (q^n - q^{n-1}) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=1}^{n} (q^k - 1).$$

d) Зафиксируем произвольный базис $\{\mathbf{e}\} := \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в V. Тогда мы определяем отображение из множества базисов пространства V в множество обратимых матриц порядка n с элементами из $\mathbb{F}$, ставя в соответствие произвольному базису $\{\mathbf{v}\}$:=:= $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ матрицу перехода $C_{\{\mathbf{e}\}\to\{\mathbf{v}\}}$ от выбранного базиса к базису $\{\mathbf{v}\}$ (например, самому́ базису $\{\mathbf{e}\}$ отвечает единичная матрица). Наоборот, если C - обратимая матрица порядка n с элементами из $\mathbb{F}$, то набор $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ векторов из V, задаваемый равенством $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) C$, является базисом в V. Нетрудно проверить, что построенные отображения - взаимно обратные биекции между указанными множествами.

e) Любой упорядоченный набор $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k\}$ из k линейно независимых векторов в V задает k-мерное подпространство $W \subset V$, в котором он является базисом; из пункта c) следует, что таких наборов

$$\left[A_n^k\right]_q := (q^n - 1)(q^n - q) \ldots (q^n - q^{k-1}) = q^{\frac{k(k-1)}{2}} \prod_{l=n-k+1}^{n} (q^l - 1)$$

штук. Таким образом, мы получаем отображение из множества таких наборов в множество k-мерных подпространств в V, которое, очевидно, сюръективно. Различных наборов $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k\}$, задающих одно и то же подпространство $W \subset V$, столько же, сколько различных базисов в k-мерном пространстве над полем $\mathbb{F}$, то есть $[B_k]_q$ штук. Пусть число k-мерных подпространств в V есть $\left[C_n^k\right]_q$, тогда

$$\left[C_n^k\right]_q := \frac{\left[A_n^k\right]_q}{[B_k]_q} = \frac{\prod_{l=1}^{n} (q^l - 1)}{\prod_{m=1}^{k} (q^m - 1) \prod_{r=1}^{n-k} (q^r - 1)} \tag{8}$$

Число $\left[C_n^k\right]_q$ называется q-биномиальным коэффициентом.

Комментарий. Дадим геометрическое истолкование использованного в пункте b) результата из теории систем линейных урав-

нений. Заметим, что множество решений данной системы линейных однородных уравнений можно интерпретировать как ядро линейного отображения $\varphi : V \to W$, где $\dim V = n, \dim W = m$, где m равно числу уравнений системы, имеющего матрицу A относительно выбранных базисов в V и W. Выбранные базисы позволяют отождествить V и W с пространствами $\mathbb{F}^n$ и $\mathbb{F}^m$ соответственно. Тогда ранг r матрицы A совпадает с рангом ее системы столбцов, что равно $\dim \operatorname{im} \varphi$ (и, значит, ранг матрицы линейного отображения не зависит от выбора базисов). Тогда из известной формулы $\dim \ker \varphi + \dim \operatorname{im} \varphi = \dim V$ получаем $\dim \ker \varphi = n - r$.

Наша интуиция о векторных пространствах основана на наглядных образах вещественной прямой, плоскости или трехмерного пространства, но общие теоремы о

[210] Заметим, что это верно и при $n = \dim V = 0 :$ в этом случае базис пуст (мощность произвольного базиса равна размерности, в нульмерном случае базис - пустое множество, не содержащее элементов), линейная комбинация нулевого числа слагаемых есть 0 (объяснение см., например, в статье "Empty sum" в Википедии).

векторных пространствах можно применять и в общей ситуации, когда основное поле сильно непохоже на вещественное (причем для решения задачи никаких свойств конечного поля, кроме его порядка, знать не нужно). С другой стороны, она показывает наличие связи между линейной алгеброй над конечными полями и комбинаторикой.

В пунктах c) и d) нами фактически посчитан порядок группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$, оказавшийся равным $[B_n]_q$. Для знакомых с понятиями теории групп отметим, что этот результат дает другой способ получения формулы из пункта e), используя формулу длины орбиты и транзитивность действия (терминологию действий групп см., например, в [27], гл. 1, 3)$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ на множестве k-мерных подпространств в $\mathbb{F}^n$. (Указание: стабилизатор подпространства, являющегося линейной оболочкой k столбцов $(1,0,\ldots,0)^T,(0,1,0,\ldots,0)^T,\ldots,(0,\ldots,1,\ldots,0)^T$, образован блочными матрицами вида

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

где A - произвольная обратимая матрица порядка k, а последние $n-k$ столбцов дополняют первые k до базиса в $\mathbb{F}^n$. Иначе говоря, B - произвольная $k\times(n-k)$-матрица, а C - обратимая матрица порядка $n-k$).

Дадим объяснение термину q-биномиальный коэффициент. Имеет место следующий q-аналог биномиальной формулы: пусть x и y - переменные, подчиненные соотношению $yx=qxy$. Тогда

для всех $n>0$ имеем

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\left[C_n^k\right]_q x^k y^{n-k}$$

Эта формула показывает, что для q-биномиальных коэффициентов верны q-аналоги формул для обычных биномиальных коэффициентов, которые при этом имеют интерпретацию в терминах геометрии подпространств векторного пространства над конечным полем (см. задачу ниже). Доказательство этой и других q биномиальных формул можно посмотреть в книге [21], гл. 4, см. также популярную статью [20].

Перепишем формулу (8) в виде

$$\left[C_n^k\right]_q=\frac{\prod_{l=1}^{n}\frac{q^l-1}{q-1}}{\prod_{m=1}^{k}\frac{q^m-1}{q-1}\prod_{r=1}^{n-k}\frac{q^r-1}{q-1}}.$$

Рассмотрим формальный предел $\left[C_n^k\right]_q$ при $q\to1$. Тогда оказывается, что

$$\lim_{q\to1}\left[C_n^k\right]_q=C_n^k$$

где C_n^k — "обычный" биномиальный коэффициент.

Интересной идеей в связи с вышесказанным является нахождение "правильного" определения "поля из одного элемента", геометрия над которым отвечала бы обычной комбинаторике (тогда аналогом линейных групп $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ являлись бы симметрические группы S_n), позволяющего для $q=1$ получать результаты, аналогичные случаю $q>1$.

Обычные биномиальные коэффициенты удовлетворяют хорошо известным соотношениям: $C_n^k=C_n^{n-k}$ и $C_n^k=C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k$ (тождество Паскаля). В следующей задаче устанавливаются аналогичные соотношения для $\left[C_n^k\right]_q$.

Задача 1.

8. Используя интерпретацию числа $\left[C_n^k\right]_q$ как количества k-мерных подпространств в n-мерном пространстве V над q-элементным полем $\mathbb{F}$, доказать тождества

1. $\left[C_n^k\right]_q=\left[C_n^{n-k}\right]_q$,
2. $\left[C_n^k\right]_q=\left[C_{n-1}^{k-1}\right]_q+q^k\left[C_{n-1}^k\right]_q$ (" q-тождество Паскаля").

Решение. 1) Пусть $U \subset V$ - векторные пространства над полем $\mathbb{F}, \dim U = k, \dim V = n$. Рассмотрим аннулятор $\operatorname{Ann}(U)$ подпространства $U \subset V$ - по определению, это подпространство в V^*, определяемое следующим образом:

$$\operatorname{Ann}(U) := \{f \in V^* \mid f(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \forall \mathbf{u} \in U\}.$$

Легко проверить, что $\dim(\operatorname{Ann}(U)) = n - k$. Покажем, что сопоставление

$$U \mapsto \operatorname{Ann}(U) \tag{9}$$

задает биекцию между k-мерными подпространствами в V и $n-k$-мерными подпространствами в V^*. Действительно, отождествляя V с дважды двойственным $(V^*)^*$ с помощью канонического изоморфизма, мы можем отождествить $\operatorname{Ann}(\operatorname{Ann}(U))$ с подпространством в V, которое, как легко видеть, совпадает с U, то есть $\operatorname{Ann}(\operatorname{Ann}(U)) = U$. Таким образом, (9) инъективно. Для доказательства сюръективности (9) возьмем произвольное $n-k$-мерное подпространство $W \subset V^*$, положим $U := \operatorname{Ann}(W) \subset\subset V$ (здесь мы снова используем канонический изоморфизм V с $(V^*)^*$). Тогда $U - k$-мерное подпространство в V такое, что $Ann(U) = W$.

Таким образом, существует биекция между k-мерными подпространствами в V и $n-k$-мерными подпространствами в V^* (при этом ясно, что $\dim V^* = \dim V = n$). Значит, эти конечные множества подпространств имеют одинаковую мощность, то есть $\left[C_n^k\right]_q = \left[C_n^{n-k}\right]_q$.

2) Рассмотрим сюръективное линейное отображение $\pi : V \to\to V'$, где V' - еще одно векторное пространство над $\mathbb{F}, \dim V' == n-1$. Пусть $U \subset V$ - некоторое подпространство, $\dim U = k$. Тогда возможно два случая: a) $\dim \pi(U) = k-1$ и b) $\dim \pi(U) == k$ (второй случай имеет место тогда и только тогда, когда $U \cap \cap \ker \pi = \{\mathbf{0}\}$). k-мерные подпространства $U \subset V$, для которых реализуется случай a), назовем "подпространствами первого типа", а в случае b) - "подпространствами второго типа" (относительно проекции π).

Пусть $U' \subset V'$ - произвольное $k-1$-мерное подпространство; тогда $U := \pi^{-1}(U') \subset V$ - единственное k-мерное подпространство в V такое, что $\pi(U) = U'$. Тем самым мы установили биекцию между подпространствами первого типа и $k-$ 1 -мерными подпространствами пространства V'. Значит, число

подпространств первого типа есть $\left[C_{n-1}^{k-1}\right]_q$.

Пусть теперь $W' \subset V'$ - некоторое k-мерное подпространство в V'. Пусть $\{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_k\}$ - некоторый базис в W'. Так как отображение сюръективно, то существует набор $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ векторов из V такой, что $\pi(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}'_i, \quad 1 \leq i \leq k$. Ясно, что набор $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ линейно независим, и поэтому является базисом в некотором k-мерном подпространстве $W \subset V$ таком, что $\pi(W) = W'$. Так как ограничение $\pi|_W$ отображения π на подпространство $W \subset V$ определяет биекцию указанного подпространства с подпространством $W' \subset V'$, то базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ в W такой, что $\pi(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}'_i, \quad 1 \leq i \leq k$, единственный. Положим $\ker \pi = \langle \mathbf{v} \rangle$. В таком случае набор $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ векторов из V с соотношениями $\pi(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}'_i, \quad 1 \leq i \leq k$ определяется с точностью до прибавления к каждому из векторов $\mathbf{e}_i$ произвольного элемента из ядра: набор $\{\mathbf{e}_1 + \lambda_1 \mathbf{v}, \ldots, \mathbf{e}_k + \lambda_k \mathbf{v}\}$ тоже подходит, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ - произвольные элементы поля $\mathbb{F}$. Каждый из этих наборов является базисом в k-мерном подпространстве $\widetilde{W} \subset V$ таком, что $\pi(\widetilde{W}) = W'$, причем разные наборы отвечают разным подпространствам. Поэтому в каждое k-мерное подпространство $W' \subset V'$ отображается (под действием π) в точности q^k различных подпространств второго типа. Таким образом, подпространств второго типа $q^k \left[C_{n-1}^k\right]_q$ штук.

Каждое k-мерное подпространство в V принадлежит либо к первому, либо ко второму типу, и, значит, их всего $\left[C_{n-1}^{k-1}\right]_q + +q^k \left[C_{n-1}^k\right]_q$ штук.

Используя q-тождество Паскаля из предыдущей задачи, индукцией по n легко доказать, что $\left[C_n^k\right]_q$ является многочленом от q с целыми коэффициентами, значение которого в точке $q = 1$ равно "обычному" биномиальному коэффициенту C_n^k. Для этого многочлена есть интересная интерпретация в терминах клеток Шуберта конечного многообразия Грассмана, о которой можно прочитать в [16], с. 138-140.

Напомним, что симметрической разностью двух множеств X, Y называется множество

$$X \triangle Y := (X \backslash Y) \cup (Y \backslash X) = (X \cup Y) \backslash (X \cap Y).$$

Задача 1.

9. a) В непустой системе $\mathcal{M}$ подмножеств n-элементного множества S вместе с любыми двумя подмножествами $A, B \in \mathcal{M}$ содержится их симметрическая разность $A \triangle B$. Докажите, что количество элементов в $\mathcal{M}$ есть степень двойки.
b) В предыдущем пункте найдите количество таких множеств $\mathcal{M}$ мощности 2^k.

Решение. a) Пусть $A \subset S$ - произвольное подмножество в S. Определим функцию $\chi_A : S \to \mathbb{Z}_2$, называемую характеристической функцией подмножества A, следующим образом:

$$\chi_A(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } s \in A; \\ 0, & \text{если } s \notin A. \end{cases}$$

Заметим, что каждая функция $\psi : S \to \mathbb{Z}_2$ является характеристической функцией некоторого подмножества $B_\psi \subset S$, причем легко проверить, что $A \mapsto \chi_A, \psi \mapsto B_\psi$ - взаимно обратные биекции между функциями $\psi : S \to \mathbb{Z}_2$ и подмножествами $A \subset S$. При этом легко проверить, что

$$\chi_{A \triangle B} = \chi_A + \chi_B \tag{10}$$

(учесть, что $1 + 1 = 0$ в $\mathbb{Z}_2$!).
Положим

$$X(\mathcal{M}) := \{\chi_A \mid A \in \mathcal{M}\}$$

Тогда формула (10) показывает, что отображение $A \mapsto \chi_A$ определяет биекцию множества $\mathcal{M}$ с множеством $X(\mathcal{M})$, отождествляющую операцию симметрической разности на $\mathcal{M}$ с операцией сложения функций из $X(\mathcal{M})$. Но $X(\mathcal{M})$ является абелевой группой относительно операции сложения функций, таким образом, данная биекция - изоморфизм указанных групп.

Чуть более подпробно: операция симметрической разности ассоциативна, то есть

$$A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C \quad \text{для любых } A, B, C \subset S.$$

Действительно, это прямо вытекает из ассоциативности сложения характеристических функций, которая, в свою очередь, следует из ассоциативности сложения в $\mathbb{Z}_2$. Так как нулевая функция - нейтральный элемент относительно сложения, то

$$A \triangle \varnothing = A = \varnothing \triangle A \quad \forall A \subset S$$

то есть пустое множество $\varnothing \subset S$ играет роль нейтрального элемента относительно операции $\triangle$ на подмножествах. Кроме того, в силу

$$A \triangle A = \varnothing \quad \forall A \subset S$$

(эквивалентно, $\chi_A + \chi_A = \chi_\varnothing$), элемент $A \subset S$ сам себе обратен, и если система подмножеств $\mathcal{M}$ непуста, то $\varnothing \in \mathcal{M}$. Из сказанного следует, что $\mathcal{M}$ с операцией $\triangle$ является группой, а так как

$$A \triangle B = B \triangle A \quad \forall A, B \subset S$$

то, более того, абелевой группой [11].
Заметим теперь, что $X(\mathcal{M})$ является векторным пространством над полем $\mathbb{Z}_2$:

$$0 \cdot \chi_A = \chi_\varnothing, 1 \cdot \chi_A = \chi_A \quad \forall A \in \mathcal{M}$$

Аксиомы векторного пространства можно проверить и непосредственно: например, из $0 \cdot \chi_A = \chi_\varnothing, \chi_A + \chi_A = \chi_\varnothing$ вытекает $(1+1) \cdot \chi_A = \chi_A + \chi_A \quad \forall A \in \mathcal{M}$.

Значит, и $\mathcal{M}$ является векторным пространством над $\mathbb{Z}_2$, если определить умножение на элементы поля $\mathbb{Z}_2$ как $0 \cdot A = \varnothing, 1 \cdot A == A$. (Заметим, что до этого момента мы не использовали конечность множества S.) Так как число элементов в $\mathcal{M}$ конечно, то $\mathcal{M}$ является конечномерным векторным пространством над $\mathbb{Z}_2$, а значит, согласно пункту а) предыдущей задачи, число элементов в $\mathcal{M}$ равно 2^k, где $k = \dim \mathcal{M}$. Например, если $\mathcal{M} = 2^S$ (множество всех подмножеств в S), то $\dim \mathcal{M} = n$, и в качестве базиса в $\mathcal{M}$ можно взять одноэлементные подмножества в S.
b) Согласно пункту e) задачи 1.7, это число есть $\left[C_n^k\right]_2$.

Комментарии. 1) Таким образом, операция симметрической разности множеств отвечает сложению их характеристических функций (со значениями в $\mathbb{Z}_2$), см. (10). Легко видеть, что операции умножения характеристических функций отвечает пересечение множеств: $\chi_{A\cap B} = \chi_A \chi_B$. Пусть теперь непустое $\mathcal{M} \subset 2^S$ замкнуто не только относительно операции $\triangle$, но и относительно пересечения.

Во-первых, заметим, что из дистрибутивного закона в $\mathbb{Z}_2$ следуют равенства $A\cap(B\triangle C) = (A\cap B)\triangle(A\cap C), \quad (A\triangle B)\cap C = (A\cap C)\triangle(B\cap C)$, которые показывают, что $\mathcal{M}$ с операциями симметрической разности и пересечения является коммутативным (в силу $A\cap B == B\cap A$) кольцом.

Во-вторых, покажем, что $A, B \in \mathcal{M} \Rightarrow A\cup B \in \mathcal{M}, \quad A\backslash B \in\in \mathcal{M}$. Действительно,

$$\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B + \chi_A\chi_B = \chi_{A\triangle B} + \chi_{A\cap B} = \chi_{A\triangle B\triangle(A\cap B)}$$

$$\chi_{A\backslash B} = \chi_A + \chi_{A\cap B} = \chi_{A\triangle(A\cap B)}$$

Отсюда легко видеть, что в семействе подмножеств $\mathcal{M}$ есть единственная минимальная система из некоторого числа $k(0 \le\le k \le n)$ непустых непересекающихся подмножеств $P_i, 1 \le\le i \le k$, таких, что любое подмножество из $\mathcal{M}$ (единственным) образом представляется в виде объединения каких-то из множеств P_i. В частности, $\mathcal{M}$ есть кольцо с единицей (ее роль играет $\cup_{i=1}^k P_i \in \mathcal{M}$). Ясно, что $\mathcal{M} \cong \mathbb{Z}_2^k$ как $\mathbb{Z}_2$-алгебра. В частности, для $\mathcal{M} = 2^S$ подмножества $P_i, \quad 1 \le i \le n$, - все одноэлементные подмножества в S.
2) Интересно еще посмотреть, что происходит, если в качестве S взять счетное множество. Упомянем два случая: (i), когда в качестве $\mathcal{M}$ берется множество всех конечных подмножеств в S, и (ii), когда в качестве $\mathcal{M}$ берется множество всех подмножеств в S. Ясно, что в обоих случаях получаем семейства подмножеств, замкнутые относительно операций $\triangle$ и $\cap$[12]. В случае (i) элементы $X(\mathcal{M})$ - всевозможные финитные (то есть отличные от 0 только в конечном числе точек) $\mathbb{Z}_2$-значные функции на S, и в качестве базиса в $\mathbb{Z}_2$-векторном пространстве $X(\mathcal{M})$ можно взять дельта-функции одноэлементных подмножеств в S (а в случае векторного пространства $\mathcal{M}$ - сами эти одноэлементные подмножества). В частности, в этом случае пространство $X(\mathcal{M})$ имеет счетную размерность (и само является счетным как множество). В то же время в случае (ii) счетного базиса в векторных пространствах $\mathcal{M}$ и $X(\mathcal{M})$ (которые на этот раз

как множества имеют мощность континуума) не существует [13], но из леммы Цорна (эквивалентной аксиоме выбора) все равно следует существование некоторого базиса (см. [28]), на этот раз имеющего мощность континуума. Можно показать, что векторное пространство из пункта (ii) изоморфно двойственному к пространству из пункта (i).
3) Установленную в решении задачи связь между подмножествами и их характеристическими функциями удобно использовать для доказательства свойств операций над множествами. Например, рассмотрим множество 2^S всех подмножеств конечного множества S. Докажем, что функция $\rho : 2^S \times 2^S \to \mathbb{R}$, определенная равенством $\rho(X,Y) := \natural(X\triangle Y)$ (мощность симметрической разности $X, Y \in 2^S$), есть метрика на 2^S. Действительно, во-первых, $\rho(X,Y) \ge 0$, причем $\rho(X,Y) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad X = Y$. Вовторых, очевидно, что $\rho(X,Y) = \rho(Y,X)$. В-третьих, для доказательства неравенства треугольника $\rho(X,Z) \le \rho(X,Y) + \rho(Y,Z)$ докажем включение $X\triangle Z \subset (X\triangle Y)\cup(Y\triangle Z)$. Заметим, что $p \notin (X\triangle Y)\cup(Y\triangle Z)$ равносильно системе

$$\begin{cases} \chi_{X\triangle Y}(p) = 0; \\ \chi_{Y\triangle Z}(p) = 0, \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \chi_X(p) + \chi_Y(p) = 0; \\ \chi_Y(p) + \chi_Z(p) = 0. \end{cases}$$

Складывая равенства последней системы (с учетом того, что все слагаемые в них - вычеты по модулю 2), получаем $\chi_X(p) + +\chi_Z(p) = 0$, то есть $\chi_{X\triangle Z}(p) = 0$, что равносильно $p \notin X\triangle Z$. Таким образом, неравенство треугольника доказано.

С использованием того факта, что ρ - метрика, можно дать красивое решение следующей задачи. Пусть ц $S = 10, \mathcal{M} \subset 2^S$ произвольное семейство из 100 подмножеств в S. Доказать, что в $\mathcal{M}$ найдется пара элементов, мощность симметрической разности которых не превосходит 2 . Для этого рассмотрим 2^S как метрическое пространство с метрикой ρ и возьмем 100 замкнутых шаров $B(P) := \{X \subset S \mid \rho(P,X) \le 1\}$ в 2^S единичного радиуса с центрами во всех элементах P из $\mathcal{M}$. В каждом таком шаре ровно 11 элементов, если бы все эти шары не пересекались, то в 2^S было бы не менее $100 \cdot 11 = 1100$ элементов, что невозможно ($2^{10} = 1024$). Поэтому существует

---

[211] Вообще, легко видеть, что группа, все неединичные элементы которой имеют порядок 2 , абелева.
[212] Таким образом, конечные подмножества образуют подкольцо.

$X \in B(P) \cap B(Q)$ для некоторой пары $P, Q \in \mathcal{M}, P \neq Q$. Тогда в силу неравенства треугольника $\rho(P,Q) \le \rho(P,X) + \rho(X,Q) \le 2$, то есть ?? $(P \triangle Q) \le 2$.

8.2.3 1.3. Линейные преобразования и их матрицы

Задача 1.

10. Найти матрицу линейного преобразования $\varphi_{\mathbf{v}}$ в стандартном базисе $\mathbb{R}^3$, заданного формулой $\varphi_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = [\mathbf{v}, \mathbf{x}]$, где $[\cdot,\cdot]$ обозначает векторное произведение, а $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$ данный вектор.

Решение. Пусть $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ - стандартный базис в $\mathbb{R}^3$. Тогда имеем

$$\varphi_{\mathbf{v}}(\mathbf{i}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = v_3\mathbf{j} - v_2\mathbf{k}, \varphi_{\mathbf{v}}(\mathbf{j}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -v_3\mathbf{i} + v_1\mathbf{k},$$

$$\varphi_{\mathbf{v}}(\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = v_2\mathbf{i} - v_1\mathbf{j}.$$

Получаем, что оператор $\varphi_{\mathbf{v}}$ в указанном базисе имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Комментарий. Полученная матрица оператора $\varphi_{\mathbf{v}}$ кососимметрична. Вообще, легко видеть, что сопоставление $\boldsymbol{v} \mapsto \varphi_{\mathbf{v}}$ определяет линейный изоморфизм пространства $\mathbb{R}^3$ с подпространством кососимметрических матриц в $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$. Хотелось бы понять инвариантный смысл данного результата. Для этого заметим, что из свойств смешанного произведения следует равенство

$$(\varphi_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}), \mathbf{w}) + (\mathbf{x}, \varphi_{\mathbf{v}}(\mathbf{w})) = 0 \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$$

(здесь внешние круглые скобки обозначают стандартное евклидово скалярное произведение на $\mathbb{R}^3$). Таким образом, $\varphi^*_{\mathbf{v}} = -\varphi_{\mathbf{v}}$ (здесь $*$ обозначает операцию перехода к сопряженному оператору), такие операторы называются кососимметрическими. Так как в евклидовом случае матрица сопряженного оператора в ортонормированном базисе является транспонированной к матрице исходного оператора, то мы возвращаемся к полученному результату.

Отметим еще одно интересное свойство построенного изоморфизма $\mathbb{R}^3$ с подпространством кососимметрических матриц в $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$. Во-первых, заметим, что кососимметрические матрицы замкнуты относительно операции взятия коммутатора

$$[A, B] := AB - BA.$$

Действительно, если $A^T = -A, B^T = -B$, то

$$\begin{aligned}[A,B]^T =& (AB - BA)^T = B^T A^T - A^T B^T = \\ &= BA - AB = -[A,B].\end{aligned}$$

Это означает, что векторное пространство кососимметрических матриц с операцией взятия коммутатора является алгеброй Ли. Тождество Якоби для векторного произведения можно переписать в виде

$$[[\mathbf{v}, \mathbf{w}], \mathbf{x}] = [\mathbf{v}, [\mathbf{w}, \mathbf{x}]] - [\mathbf{w}, [\mathbf{v}, \mathbf{x}]],$$

откуда следует равенство $\varphi_{[\mathbf{v},\mathbf{w}]} = \varphi_{\mathbf{v}}\varphi_{\mathbf{w}} - \varphi_{\mathbf{w}}\varphi_{\mathbf{v}}$. Таким образом, построенный в задаче изоморфизм является не просто изоморфизмом векторных пространств, а изоморфизмом алгебр Ли.

[213] Базис, построенный в случае (i), не подходит, так как в конечные линейные комбинации по нему раскладываются характеристические функции только конечных подмножеств.

Задача 1.

11. Рассмотрим поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ как векторное пространство над $\mathbb{R}$ с базисом $\{1, i\}$. Проверьте, что для каждого $z = a + bi \in \mathbb{C}$ отображение $\varphi_z(w) = z \cdot w, w \in \mathbb{C}$, определяет линейное преобразование $\mathbb{C}$, и найдите его матрицу в базисе $\{1, i\}$. Покажите, что отображение

$$a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

определяет изоморфизм между полем $\mathbb{C}$ и подалгеброй матриц указанного вида в $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$. Какие матрицы при этой биекции соответствуют множеству $\{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$?

Решение. Используя дистрибутивность умножения, имеем

$$\varphi_z(w_1 + w_2) = z \cdot (w_1 + w_2) = z \cdot w_1 + z \cdot w_2 = \\ = \varphi_z(w_1) + \varphi_z(w_2) \quad \forall z, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$$

Аналогично, используя ассоциативность и коммутативность умножения, получаем

$$\varphi_z(\lambda w) = z \cdot (\lambda w) = \lambda z \cdot w = \lambda \varphi_z(w) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, z, w \in \mathbb{C}$$

Значит, для любого $z \in \mathbb{C}$ отображение $\varphi_z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ является $\mathbb{R}$-линейным оператором. Чтобы найти его матрицу в $\mathbb{R}$-базисе $\{1, i\}$, пишем $\varphi_z(1) = z \cdot 1 = a1 + bi \Rightarrow$ ее первый столбец есть $(a, b)^T$. Аналогично, $\varphi_z(i) = (a + bi) \cdot i = -b1 + ai \Rightarrow$ ее второй столбец есть $(-b, a)^T$.

То, что сопоставление $z \mapsto \varphi_z$ комплексному числу z соответствующего линейного преобразования φ_z сохраняет операции, означает выполнение тождеств

$$\varphi_{z_1+z_2} = \varphi_{z_1} + \varphi_{z_2}, \quad \varphi_{z_1 z_2} = \varphi_{z_1}\varphi_{z_2}, \quad \varphi_{z^{-1}} = (\varphi_z)^{-1}. \tag{11}$$

Их можно проверить непосредственно, перемножая комплексные числа и матрицы. Например, второе из тождеств (11) следует из равенств

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & -ad - bc \\ ad + bc & ac - bd \end{pmatrix}.$$

Однако проще заметить, что $\varphi_{a+bi} = aE + bI$, где E - единичная 2×2-матрица, а $I := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, причем $I^2 = -E$ и матрицы E и I коммутируют. Заметим еще, что

$$|a + bi|^2 = \det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2 \geq 0$$

причем строго больше нуля, если $z \neq 0$. Фактически нами построено вложение поля комплексных чисел в алгебру матриц $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$.

Комплексные числа $z, |z| = 1$ имеют вид $z = e^{i\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$. Тогда по формуле Эйлера $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha$ им отвечают матрицы

$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ поворота на угол α. Тем самым мы получили изоморфизм групп

$$\mathrm{U}(1) \to \mathrm{SO}(2) \tag{12}$$

где $\mathrm{U}(1) := \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$ с операцией умножения, а $\mathrm{SO}(2)$ группа ортогональных 2×2-матриц с единичным определителем (любая такая матрица является матрицей поворота плоскости, и обратно).

Заметим, что матрицы поворота также имеют вид $\exp(I\alpha)$, где $\exp(I\alpha)$ обозначает экспоненту матрицы $I\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$, определяемую как результат подстановки матрицы в ряд $\exp x == \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Вычисление в данном случае облегчается тем, что $I^4 = E$ (читателю предлагается его провести).

Кстати, формула сложения для тригонометрических функций - следствие геометрического факта: композиция поворота на угол α с поворотом на угол β есть поворот на угол $\alpha + \beta$ (композиция преобразований отвечает произведению их матриц).

Отметим еще, что аналогом показательной формы $z = re^{i\alpha}$ комплексного числа для матриц рассматриваемого вида является представление [14]

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a^2+b^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a^2+b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{13}$$

Заметим также, что комплексное сопряжение тоже может быть задано с помощью операций с матрицами, например, как сопряжение при помощи матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, то есть как

$$\varphi_{\bar{z}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \varphi_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Комментарии. Пусть V - линейное пространство над $\mathbb{R}$. Линейный оператор $I : V \to V$, удовлетворяющий условию $I^2 == -\mathrm{id}_V$, называется комплексной структурой на V. Причина такого названия заключается в том, что любой такой оператор I позволяет задать на V структуру векторного пространства над $\mathbb{C}$, определив умножение на комплексные числа формулой

$$(a+bi)\cdot\mathbf{v} := a\cdot\mathbf{v} + b\cdot I(\mathbf{v})$$

В частности, если на конечномерном вещественном пространстве V существует комплексная структура, то $\dim V = 2n, n \in \mathbb{N}$ (действительно, из $I^2 = -\mathrm{id}_V$ получаем $(\det I)^2 = (-1)^n$, что для нечетного n невозможно, поскольку $\det I$ - действительное число).

Вложение $\mathbb{C} \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, описанное в предыдущей задаче, отвечает комплексной структуре

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

на $\mathbb{R}^2$, которую мы назовем стандартной. С другой стороны, эта комплексная структура не единственна: например, легко проверить, что

$$I = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

тоже является комплексной структурой.
Приведенные соображения пригодятся при решении следующей задачи.

Задача 1.

12. Описать все комплексные структуры на $V = \mathbb{R}^2$.
Решение. Во-первых, заметим, что любая комплексная структура I сопряжена [15] со стандартной. Действительно, выберем произвольный вектор $\mathbf{u} \in V, \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, и положим $\mathbf{v} := I(\mathbf{u})$. Тогда, очевидно, $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ - базис в V. В этом базисе матрица I совпадает с матрицей (14) стандартной комплексной структуры.

Следовательно, все комплексные структуры на V имеют вид

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{16}$$

для обратимых матриц

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Производя умножение матриц (16), получаем

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ac+bd & -a^2-b^2 \\ c^2+d^2 & -ac-bd \end{pmatrix}.$$

Обозначив векторы-столбцы $\mathbf{u} := (a,b)^T, \mathbf{v} := (c,d)^T$, полученный результат можно переписать в виде

[214] То есть так называемое полярное разложение, см. [7], с. 236, а также определение 3.36.
[215]С. пример 0.13.

$$\frac{1}{\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}}\begin{pmatrix} (\mathbf{u},\mathbf{v}) & -|\mathbf{u}|^2 \\ |\mathbf{v}|^2 & -(\mathbf{u},\mathbf{v}) \end{pmatrix}, \tag{17}$$

где $\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}$ обозначает определитель матрицы, составленной из векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, который называется псевдоскалярным произведением векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Его геометрический смысл - ориентированная площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$.

Вид полученной матрицы можно еще более упростить, введя угол φ между $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ (измеряемый против часовой стрелки) и положительный параметр $\lambda := \frac{|\mathbf{u}|}{|\mathbf{v}|}$. Тогда (17) запишется в виде

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} & \frac{-\lambda}{\sin\varphi} \\ \frac{1}{\lambda\sin\varphi} & \frac{-1}{\operatorname{tg}\varphi} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы показали, что множество комплексных структур на $V = \mathbb{R}^2$ является двухпараметрическим. Например, комплексная структура (15) получается при $\lambda = 1, \varphi = \frac{\pi}{4}$, стандартная - при $\lambda = 1, \varphi = \frac{\pi}{2}$ (в этом случае в матрице выше $\frac{1}{\operatorname{tg}}$ нужно заменить на ctg).

Это множество комплексных структур может быть также описано как однородное пространство [16]$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_+/\mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$. $\square$

Комментарий. Заметим, что на двумерном векторном пространстве V над полем $\mathbb{R}$ евклидова метрика и ориентация однозначно задают некоторую комплексную структуру I, а именно

оператор поворота на угол $\frac{\pi}{2}$ в положительном направлении.

Обратно, пусть I - комплексная структура на V. Пусть $\mathbf{u} \in\in V, \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, тогда если $\mathbf{v} := I(\mathbf{u})$, то $\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}$ - базис в V. Объявим его положительным. Мы утверждаем, что если $\mathbf{u}' \in V$ - еще какой-то ненулевой вектор, то базис $\{\mathbf{u}',\mathbf{v}'\}$ (где $\mathbf{v}' := I(\mathbf{u}')$) одинаково ориентирован с $\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}$. Действительно, если $\mathbf{u}' = \alpha\mathbf{u}++\beta\mathbf{v}$, то $\mathbf{v}' = I(\mathbf{u}') = \alpha I(\mathbf{u})+\beta I(\mathbf{v}) = -\beta\mathbf{u}+\alpha\mathbf{v}$, и матрица перехода от базиса $\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}$ к базису $\{\mathbf{u}',\mathbf{v}'\}$ есть матрица

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \tag{18}$$

имеющая положительный определитель. Таким образом, мы доказали, что комплексная структура на V задает некоторую ориентацию на V.

Можно ли по комплексной структуре I на V восстановить евклидову метрику на V ? Снова выберем ненулевой вектор $\mathbf{u} \in V$ и объявим базис $\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}$ ортонормированным, где $\mathbf{v} := I(\mathbf{u})$. Это полностью фиксирует некоторую евклидову метрику на V (именно ту, матрица Грама которой в базисе $\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}$ единичная). Как мы показали выше, при замене вектора $\mathbf{u}$ другим ненулевым вектором $\mathbf{u}'$ получается базис $\{\mathbf{u}',\mathbf{v}'\}$, связанный с исходным базисом матрицей перехода (18). Последняя отличается от матрицы поворота только положительным множителем (ср. (13)). Отсюда следует, что по комплексной структуре евклидова метрика восстанавливается с точностью до умножения на положительное число. Множество таких пропорциональных метрик называют конформным классом евклидовых метрик.

Изложенная выше связь между комплексными структурами, метриками и ориентациями играет важную роль в теории римановых поверхностей (см., например, [34], ч. II, лекция 8).

Напомним (см., например, [12]), что алгебра кватернионов $\mathbb{H}$ является алгеброй над $\mathbb{R}$ с базисом $\{\mathbf{1},\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ со следующей таблицей умножения:

$\times$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	$\mathbf{i}$	$-\mathbf{1}$	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	$-\mathbf{1}$	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	$-\mathbf{1}$

Таким образом, $\mathbf{1}$ - "обычная" единица (нейтральный элемент относительно умножения). Из соотношений (19) следует, что данная алгебра ассоциативна [17], но не коммутативна; более того, любой ее ненулевой элемент имеет мультипликативный

[216] Объяснение этого понятия см., например, в [27], гл. 1, §3.

обратный, то есть $\mathbb{H}$ - алгебра с делением (= некоммутативное поле, называемое также телом).

Отметим, что кватернионы дают простой, но нетривиальный пример неабелевой группы.

Задача 1.

13. Докажите, что $\mathbb{Q}_8 := (\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}, \times)$ является группой.

Решение. Во-первых, из соотношений (19) следует, что множество $\mathbb{Q}_8$ замкнуто относительно операции умножения. Во-вторых, свойство ассоциативности для каждого набора из трех элементов легко проверяется непосредственно с помощью соотношений (19) (или может быть выведено из ассоциативности алгебры $\mathbb{H}$). В-третьих, элемент $\mathbf{1}$ играет роль единичного элемента. Наконец, $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}$, значит, $\mathbf{i}^{-1} = -\mathbf{i}, \mathbf{j}^{-1} = -\mathbf{j}, \mathbf{k}^{-1} = -\mathbf{k}$, $-\mathbf{1}^{-1} = -\mathbf{1}$, откуда следует существование обратного для каждого элемента $\mathbb{Q}_8$. $\square$

Комментарий. Хотя группа $\mathbb{Q}_8$ сама по себе неабелева, все ее собственные подгруппы абелевы и даже циклические (это единственная неабелева p-группа с таким свойством). Для тех, кто знаком с теорией групп, отметим, что такие группы называются локально циклическими. Кроме того, все подгруппы $\mathbb{Q}_8$ являются нормальными (такие группы называются гамильтоновыми).

Таким образом, каждый кватернион $\mathbf{x}$ однозначно представляется в виде

$$\mathbf{x} = x_0\mathbf{1} + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}, \quad x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

Если при этом $x_0 = 0$, то кватернион $\mathbf{x}$ называется чисто мнимым. Чисто мнимые кватернионы образуют трехмерное подпространство в $\mathbb{H}$.

Соотношения (19) при условии ассоциативности эквивалентны другой системе:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}, \quad \mathbf{ij} + \mathbf{ji} = \mathbf{jk} + \mathbf{kj} = \mathbf{ki} + \mathbf{ik} = \mathbf{0},$$

которая, в свою очередь, эквивалентна тождеству (ср. задачу 3.11):

$$(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})^2 = -\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)\mathbf{1} \quad \forall a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}. \tag{20}$$

Более общо, с использованием приведенных выше соотношений легко проверить, что произведение чисто мнимых кватернионов $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ есть $-(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)\mathbf{1} + (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$,
то есть выражается через скалярное ($\mathbf{a}, \mathbf{b}$) и векторное $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ произведения векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, если считать базис $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ в пространстве чисто мнимых кватернионов правым ортонормированным.

Кватернионы были открыты У. Р. Гамильтоном в 1843 году в результате попыток найти многомерный аналог комплексных чисел, содержащий более одной мнимой единицы. Их место в математике показывает следующая теорема Фробениуса [32].

Теорема 1.14. Любая конечномерная ассоциативная алгебра с делением над полем действительных чисел изоморфна одной из алгебр $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ или $\mathbb{H}$.

Задача 1.

15. Построить инъективный гомоморфизм $\psi : \mathbb{H} \to\to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ алгебры кватернионов $\mathbb{H}$ в алгебру комплексных матриц $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ (гомоморфизм алгебр над $\mathbb{R}$).

Решение. Пользуясь теми же идеями, что и в задаче 1.11, можно получить представление $\mathbb{H}$ вещественными 4×4-матрицами. В то же время произвольный кватернион $\mathbf{x}$ можно однозначно

представить в виде $z_1\mathbf{1} + z_2\mathbf{j}$, где z_1, z_2 - комплексные числа. Легко проверить, что тем самым $\mathbb{H}$ превращается в двумерное векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ с базисом $\{\mathbf{1}, \mathbf{j}\}$. Отметим, что $\mathbb{H}$ не является алгеброй над $\mathbb{C}$, поскольку, например, $\mathbf{j}z = \bar{z}\mathbf{j}$, где $z \in \mathbb{C}$. Легко проверить, что кватернионы перемножаются по формуле

$$(w_1\mathbf{1} + w_2\mathbf{j})(z_1\mathbf{1} + z_2\mathbf{j}) = (w_1z_1 - w_2\bar{z}_2)\mathbf{1} + (w_1z_2 + w_2\bar{z}_1)\mathbf{j} \tag{21}$$

где $w_k, z_k \in \mathbb{C}$.
Если мы умножаем кватернионы на комплексные числа слева, то, чтобы умножение на

[217] Заметим, что ассоциативность умножения в алгебре следует из ассоциативности умножения базисных векторов.

кватернион $\mathbf{x}$ определяло бы на $\mathbb{HC}$-линейный оператор, умножать на $\mathbf{x}$ нужно справа. Действительно, если, напротив, $\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) := \mathbf{xy}$, где $\mathbf{y} \in \mathbb{H}$, то $\varphi_{\mathbf{x}}(z\mathbf{y}) == \mathbf{x}z\mathbf{y} \neq z\mathbf{xy} = z\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$ для общего $z \in \mathbb{C}$. Таким образом, определим $\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) := \mathbf{yx}$. Проверим, что

$$\varphi_{\mathbf{x}} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$$

— $\mathbb{C}$-линейный оператор. Действительно, во-первых,

$$\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y} + \mathbf{t}) = (\mathbf{y} + \mathbf{t})\mathbf{x} = \mathbf{yx} + \mathbf{tx} = \varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) + \varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{t})$$

(здесь мы использовали дистрибутивность сложения относительно умножения в $\mathbb{H}$) и, во-вторых,

$$\varphi_{\mathbf{x}}(z\mathbf{y}) = (z\mathbf{y})\mathbf{x} = z(\mathbf{yx}) = z\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \forall z \in \mathbb{C}$$

Найдем матрицу $A_{\mathbf{x}}$ оператора $\varphi_{\mathbf{x}}$, где $\mathbf{x} = z_1\mathbf{1} + z_2\mathbf{j}$, в базисе $\{\mathbf{1}, \mathbf{j}\}$. Из соотношений

$$\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{1}) = \mathbf{x} = z_1\mathbf{1} + z_2\mathbf{j} \quad \text{и} \quad \varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{j}) = \mathbf{j}\,(z_1\mathbf{1} + z_2\mathbf{j}) = -\bar{z}_2\mathbf{1} + \bar{z}_1\mathbf{j}$$

получаем

$$A_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, умножение $\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \mathbf{yx}, \mathbf{y} = w_1\mathbf{1} + w_2\mathbf{j}$ в терминах матриц запишется следующим образом:

$$\begin{pmatrix} z_1 & -\bar{z}_2 \\ z_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1w_1 - \bar{z}_2w_2 \\ z_2w_1 + \bar{z}_1w_2 \end{pmatrix}, \quad \text{ср. (21).}$$

Заметим, что

$$\varphi_{\mathbf{t}}\left(\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})\right) = \varphi_{\mathbf{t}}(\mathbf{yx}) = (\mathbf{yx})\mathbf{t} = \mathbf{y}(\mathbf{xt}) = \varphi_{\mathbf{xt}}(\mathbf{y}),$$

то есть $\varphi_{\mathbf{t}} \circ \varphi_{\mathbf{x}} = \varphi_{\mathbf{xt}}$. То есть в терминах матриц

$$A_{\mathbf{t}}A_{\mathbf{x}} = A_{\mathbf{xt}} \tag{22}$$

Мы видим, что отображение

$$\rho : \mathbb{H} \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}), \quad \rho(\mathbf{x}) = A_{\mathbf{x}}$$

является не гомоморфизмом, а антигомоморфизмом (произведение элементов переходит в произведение образов в обратном порядке) колец. Чтобы получить гомоморфизм, заменим матрицы $A_{\mathbf{x}}$ на $A_{\mathbf{x}}^T$, тогда (22) превратится в $A_{\mathbf{x}}^T A_{\mathbf{t}}^T = A_{\mathbf{xt}}^T$, то есть

$$\psi : \mathbb{H} \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C}), \quad \psi(\mathbf{x}) := A_{\mathbf{x}}^T$$

является искомым гомоморфизмом алгебр над $\mathbb{R}$.
Таким образом, алгебру $\mathbb{H}$ мы можем отождествить с подалгеброй в $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ так, что роль базисных кватернионов $\{\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ играют соответственно матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Комментарий. Таким образом, в задаче построен инъективный гомоморфизм (то есть вложение)

$$\psi : \mathbb{H} \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$$

алгебры кватернионов в алгебру комплексных матриц, который кватерниону $\mathbf{x} = z_1\mathbf{1} + z_2\mathbf{j}$ сопоставляет матрицу

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Его можно рассматривать как аналог вложения $\mathbb{C} \to \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, построенного в задаче 1.11. Например, посмотрим, что является кватернионным аналогом гомоморфизма групп (12).

Определим модуль $|\mathbf{x}|$ кватерниона $\mathbf{x} = x_0\mathbf{1} + x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$

как неотрицательное число, равное $\sqrt{\mathbf{x}\overline{\mathbf{x}}} = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, где $\overline{\mathbf{x}} := x_0\mathbf{1} - x_1\mathbf{i} - x_2\mathbf{j} - x_3\mathbf{k}$ - сопряженный к $\mathbf{x}$ кватернион ($\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$ - аналог операции комплексного сопряжения). Заметим, что $\mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow |\mathbf{x}| > 0$. Легко проверить, что

$$|\mathbf{xy}| = |\mathbf{x}||\mathbf{y}| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H},$$

поэтому сопоставление ненулевому кватерниону его модуля, $\mathbf{x} \mapsto\mapsto |\mathbf{x}|$, определяет гомоморфизм группы $\mathbb{H}^*$ ненулевых кватернионов с операцией умножения в группу $\mathbb{R}_+$положительных действительных чисел тоже с операцией умножения,

$$\mathbb{H}^* \to \mathbb{R}_+.$$

Ядро построенного гомоморфизма (= полный прообраз $1 \in \mathbb{R}_+$) есть подгруппа группы $\mathbb{H}^*$, состоящая из кватернионов, модуль которых равен единице. Ее стандартное обозначение $\mathrm{Sp}(1)$. Это - кватернионный аналог группы $\mathrm{U}(1) = \{z \in \mathbb{C} || z \ |= 1\}$, только в отличие от $\mathrm{U}(1)$ группа $\mathrm{Sp}(1)$ некоммутативна. Ограничение ψ на $\mathrm{Sp}(1)$ определяет изоморфизм последней группы с группой комплексных матриц вида (23) с единичным определителем, которая обозначается $\mathrm{SU}(2)$ (обозначение происходит от слов special unitary group, так как это в точности унитарные матрицы порядка 2 с единичным определителем). Таким образом, аналогом гомоморфизма (12) является гомоморфизм (изоморфизм) групп

$$\mathrm{Sp}(1) \to \mathrm{SU}(2)$$

Матрица (23) имеет определитель $1 \Leftrightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$, последнее уравнение определяет трехмерную сферу единичного радиуса в $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$, то есть "топологически" $\mathrm{SU}(2)$ является трехмерной сферой (аналог того, что $\mathrm{U}(1)$ - единичная окружность в $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$). Группа $\mathrm{SU}(2)$ тесно связана с группой $\mathrm{SO}(3)$ вращений трехмерного евклидова пространства, об этой связи можно почитать, например, в [28], ч. $2, 11$.

Вообще, кватернионы - очень интересный математический объект и, кроме того, имеют многочисленные применения в физике. Заинтересовавшемуся читателю рекомендуем прочитать [22], § 4, [37], § 8, а также брошюру [3].

Заметим, что из равенства $\dim\ker\varphi + \dim\operatorname{im}\varphi = \dim V$ для линейного оператора $\varphi : V \to V$ не следует, что

$$V = \ker\varphi \oplus \operatorname{im}\varphi. \tag{24}$$

Простейший пример к этому дает линейный оператор, имеющий в некотором базисе матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (для него ядро и образ совпадают с линейной оболочкой вектора $(1,0)^T$ в $\mathbb{R}^2$). В то же время для проекторов (24) верно. Общая ситуация объясняется следующей задачей.

Задача 1.

16. Пусть φ - линейное преобразование конечномерного пространства V. Доказать, что $V = \ker\varphi \oplus \operatorname{im}\varphi \Leftrightarrow\Leftrightarrow \ker(\varphi^2) = \ker\varphi$.

Решение. Во-первых, заметим, что всегда $\ker\varphi \subset \ker(\varphi^2)$. Пусть имеет место обратное включение $\ker(\varphi^2) \subset \ker\varphi$. Выберем произвольный вектор $\mathbf{v} \in \ker\varphi \cap \operatorname{im}\varphi \Rightarrow \varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ и $\exists \mathbf{u} \in V$ такой, что $\mathbf{v} = \varphi(\mathbf{u}) \Rightarrow \varphi^2(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \Rightarrow \varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Тогда сумма $\ker\varphi$ и $\operatorname{im}\varphi$ прямая, и по соображениям размерности $V = \ker\varphi \oplus \operatorname{im}\varphi$.

Обратно, пусть $\ker\varphi \cap \operatorname{im}\varphi = \{\mathbf{0}\}$. Если $\varphi(\varphi(\mathbf{v})) = \mathbf{0}$, то $\varphi(\mathbf{v}) \in \ker\varphi \cap \operatorname{im}\varphi = \{\mathbf{0}\} \Rightarrow \varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v} \in \ker\varphi \Rightarrow\Rightarrow \ker(\varphi^2) \subset \ker\varphi$.

Комментарий. Например, для проектора (см. задачу 1.6) имеем $\varphi^2 = \varphi$, поэтому $\ker(\varphi^2) = \ker\varphi$, в то время как для оператора, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, квадрат равен нулю, и, значит, $\ker\varphi \subsetneqq \ker(\varphi^2)$.

8.3 2 Линейные операторы

8.3.1 2.1. Структура линейного преобразования

Пусть $\varphi : V \to V$ - линейный оператор, A - его матрица в некотором базисе пространства V.

Определение 2.1. Характеристическим многочленом оператора φ называется многочлен

$$\chi_\varphi(t) := \det(tE - A).$$

Проверим, что характеристический многочлен оператора корректно определен (то есть не зависит от базиса, в котором вычислялась матрица A оператора φ). Действительно, в другом базисе матрица того же оператора будет $A' = C^{-1}AC$, где C - матрица перехода между базисами, и тогда

$$\det(tE - A') = \det\left(tE - C^{-1}AC\right) = \det\left(C^{-1}(tE - A)C\right) =$$
$$= \det\left(C^{-1}\right)\det(tE - A)\det C = \det(tE - A)$$

Отметим полезную формулу:

$$\chi_\varphi(t) = t^n - (\operatorname{tr} A)t^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det A, \tag{25}$$

где A - матрица оператора φ в произвольном базисе. В частности, след и определитель матрицы оператора не зависят от базиса (и, таким образом, можно говорить про след и определитель оператора; то же, конечно, относится и к другим коэффициентам характеристического многочлена, по поводу их выражения через матрицу A оператора см. текст после леммы 2.31).

Задача 2.

2. Пусть P - матрица проектора (см. определение 1.5) в некотором базисе. Докажите, что ранг матрицы P равен ее следу.

Решение. След матрицы линейного оператора, будучи одним из коэффициентов характеристического многочлена, не зависит от базиса [18]. Аналогично, ранг матрицы линейного оператора, бу-

дучи равным размерности его образа, также не зависит от базиса. Значит, указанную формулу $\operatorname{rk} P = \operatorname{tr} P$ достаточно доказать в каком-то одном базисе.

Мы знаем (см. задачу 1.6), что проектор $P : V \to V$ совпадает с оператором проектирования Pr_U^W на некоторое подпространство $U \subset V$ параллельно некоторому подпространству $W \subset V$ такому, что $V = U \otimes W$, причем $U = \operatorname{im} P, W = \ker P$. Выберем базис в V, согласованный с указанным разложением в прямую сумму, то есть такой, что его первые k векторов образуют базис в U, а оставшиеся $n-k$ - базис в W. Легко видеть, что в указанном базисе оператор P имеет диагональную матрицу, в которой на первых k местах на главной диагонали стоят единицы, а на оставшихся $n-k$ - нули. Тогда число единиц есть $k = \dim U = \operatorname{rk} P$, а их сумма есть $\operatorname{tr} P$.

Задача 2.

3. Пусть A - матрица (в некотором базисе) поворота трехмерного пространства вокруг некоторой оси на угол α. Выразить α через элементы матрицы A.

Решение. Как и в предшествующей задаче, воспользуемся независимостью следа матрицы оператора от базиса. Выберем в трехмерном пространстве ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, у которого $\mathbf{e}_3$ совпадает с направлением оси поворота, а $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ образуют базис в ортогональной к $\mathbf{e}_3$ плоскости. Тогда матрица поворота имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

или с возможной заменой α на $-\alpha$ (что не влияет на знак диагональных элементов в силу четности функции $\cos\alpha$). Отсюда получаем, что $\cos\alpha = \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2}$.

Последовательность Фибоначчи $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ определяется тем, что каждый следующий член равен сумме двух предыдущих, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, и двумя начальными членами $a_0 = 0, a_1 = 1$.

Задача 2.

4. Найти явную формулу для a_n.

Решение. 1-й способ. Заметим, что вектор $\mathbf{v}_n := (a_n, a_{n-1})^T$ линейно выражается через $\mathbf{v}_{n-1}$:

$$\mathbf{v}_n = A\mathbf{v}_{n-1}, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[218] Впрочем, инвариантность следа может быть легко доказана и с помощью непосредственно проверяемого тождества $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) \forall A \in\in \operatorname{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K}), B \in \operatorname{Mat}_{n\times m}(\mathbb{K})$.

причем $\mathbf{v}_1 = (1,0)^T$. Поэтому a_n есть первая компонента $A^{n-1}\mathbf{v}_1$.
Рассмотрим $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ как матрицу некоторого оператора, заданную относительно стандартного базиса в $\mathbb{R}^2$. Характеристический многочлен оператора с матрицей A есть $\chi_A(t) == t^2 - (\operatorname{tr} A)t + \det A = t^2 - t - 1$; его корни $\alpha := \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Поскольку $\alpha \neq \beta$, матрица A диагонализируема. Легко посчитать, что собственные векторы, отвечающие α и β, суть соответственно $\mathbf{u}_1 := (\alpha, 1)^T, \mathbf{u}_2 := (\beta, 1)^T$. Тогда наш оператор в базисе $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ имеет диагональную матрицу $\Lambda := \operatorname{diag}(\alpha, \beta)$, и мы имеем $\Lambda = C^{-1}AC$, где $C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ - матрица перехода от исходного стандартного базиса к базису $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$. Тогда $A = C\Lambda C^{-1}$ и, значит, для любого натурального $n \geq 1 A^{n-1} = C\Lambda^{n-1}C^{-1}$, причем (как легко проверить) возведение диагональной матрицы в степень сводится к возведению в степень ее диагональных элементов. Находим $C^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$, и теперь первая компонента $A^{n-1}\mathbf{v}_1$ легко вычисляется:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^n - \beta^n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

□

Для полноты приведем два других решения данной задачи.
2-й способ (интерполяционный многочлен). Согласно теореме Гамильтона-Кэли, характеристический многочлен $\chi_A(t)$ аннулирует оператор A. Для произвольного многочлена $P(t) \in\in \mathbb{R}[t]$ существует многочлен $p(t) \in \mathbb{R}[t]$ степени не выше 1 такой, что $P(A) = p(A)$ (равенство элементов кольца матриц $\operatorname{Mat}_2(\mathbb{R})$). Чтобы это доказать, поделим $P(t)$ на $\chi_A(t)$ с остатком: $P(t) == Q(t)\chi_A(t) + p(t)$, где либо $p(t) = 0$, либо $\deg p(t) < \deg \chi_A(t) == 2$, тогда $P(A) = p(A)$, поскольку $\chi_A(A) = 0$ (нулевой линейный оператор).

Для каждого натурального n рассмотрим многочлен $P_n(t) == t^n$; согласно предыдущему, $\forall n \in \mathbb{N} \exists p_n(t) = a_n + b_n t \in \mathbb{R}[t]$ такой, что $P_n(A) = p_n(A)$. Легко видеть, что последнее равенство равносильно системе

$$\begin{cases} P_n(\alpha) = p_n(\alpha) = a_n + b_n\alpha \\ P_n(\beta) = p_n(\beta) = a_n + b_n\beta \end{cases}$$

(Действительно, так как A имеет простой спектр, то существует обратимая матрица C такая, что $C^{-1}AC = \Lambda = \operatorname{diag}(\alpha, \beta)$; кроме того,

$$C^{-1}P(A)C = P\left(C^{-1}AC\right) = P(\Lambda) = \operatorname{diag}(P(\alpha), P(\beta)),$$

и аналогично

$$C^{-1}p(A)C = p\left(C^{-1}AC\right) = p(\Lambda) = \operatorname{diag}(p(\alpha), p(\beta));$$

теперь осталось только заметить, что равенства $P(A) = p(A)$ и $C^{-1}P(A)C = C^{-1}p(A)C$ равносильны.) Таким образом, нам нужно решить (относительно a_n, b_n) систему

$$\begin{cases} a_n + b_n \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \\ a_n + b_n \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \end{cases}$$

откуда $2a_n + b_n = \alpha^n + \beta^n, \sqrt{5}b_n = \alpha^n - \beta^n$. Несложные вычисления приводят к результату

$$P_n(A) = A^n = a_nE + b_nA = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}\right) & \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\alpha^n - \beta^n\right) \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\alpha^n - \beta^n\right) & \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}\right) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы приходим к той же формуле для n-го числа Фибоначчи, что и в предыдущем решении. Подробности см. в [12], гл. 6, § 5.

3-й способ (метод производящих функций). Здесь удобнее вместо исходной последовательности рассмотреть последовательность $f_0 = 1, f_1 = 1, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Рассмотрим ее

производящую функцию
$\operatorname{Fib}(s) := f_0 s^0 + f_1 s + f_2 s^2 + \ldots + f_n s^n + \ldots = 1 + s + 2s^2 + 3s^3 + 5s^4 + \ldots$

Умножая обе части предыдущего равенства на $s+s^2$ и используя рекуррентное соотношение для последовательности Фибоначчи, получаем равенство в кольце формальных степенных рядов

$$\left(s+s^2\right)\mathrm{Fib}(s)=\mathrm{Fib}(s)-1$$

откуда

$$\mathrm{Fib}(s)=\frac{1}{1-s-s^2}$$

Раскладывая последнее выражение на простейшие дроби, получаем

$$\frac{1}{1-s-s^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{s+\frac{1+\sqrt{5}}{2}}-\frac{1}{s-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\alpha+s}-\frac{1}{\beta+s}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\alpha(1-\beta s)}-\frac{1}{\beta(1-\alpha s)}\right)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta^n s^n}{\alpha}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n s^n}{\beta}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right)s^n$$

где использовано соотношение $\alpha\beta=-1$. Мы приходим тем самым к полученной выше формуле для a_n (с учетом сделанного сдвига нумерации последовательности). Подробности см., например, в [11], § 11, 12; [29], § 2.2 или в [30], § 2.2.

Комментарии. В связи со $2-$ способом нам потребовался ответ на следующий вопрос: пусть на n-мерном вещественном пространстве V задан линейный оператор $A:V\to V$, тогда для каких многочленов $f(t),g(t)\in\mathbb{R}[t]$ имеет место равенство $f(A)==g(A)$? Очевидно, этот вопрос эквивалентен следующему: когда $f(A)=0$? Ясно, что такие ненулевые многочлены существуют, так как $E=A^0,A,A^2,\ldots A^{n^2}$ линейно зависимы, поскольку $\dim\left(\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})\right)=n^2$.

Например, пусть A имеет простой спектр $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$, содержащийся в $\mathbb{R}$. Тогда $f(A)=0\Leftrightarrow f\left(\lambda_k\right)=0\forall k,1\le k\le n$. Если же жорданова нормальная форма A есть одна клетка $J_n(\lambda),\lambda\in\in\mathbb{R}$, то $f(A)=0\Leftrightarrow f^{(k)}(\lambda)=0\forall k,0\le k\le n-1$. Доказательство последнего утверждения следует из тождества

$$f\left(J_n(\lambda)\right)=\begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{1}{2}f''(\lambda) & \ldots & \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\lambda)\\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) & \ldots & \frac{1}{(n-2)!}f^{(n-2)}(\lambda)\\ 0 & 0 & f(\lambda) & \ldots & \frac{1}{(n-3)!}f^{(n-3)}(\lambda)\\ \ldots\ldots\ldots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & f(\lambda)\end{pmatrix}. \qquad (26)$$

Можно также спросить: чему изоморфна подалгебра $\mathbb{R}[A]\subset\subset\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, порожденная (как алгебра с единицей) оператором A ? В случае простого спектра $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$, содержащегося в $\mathbb{R}$, имеем изоморфизм $\mathbb{R}[A]\cong\mathbb{R}^n$, который задается формулой

$$\mathbb{R}[A]\ni f(A)\mapsto\left(f\left(\lambda_1\right),\ldots,f\left(\lambda_n\right)\right)\in\mathbb{R}^n$$

Другими словами, $\mathbb{R}[A]$ в этом случае - алгебра $\mathbb{R}$-значных функций на спектре оператора A. В случае оператора A с жордановой формой, совпадающей с одной жордановой клеткой $J_n(\lambda)$, алгебра $\mathbb{R}[A]$ изоморфна $\mathbb{R}[t]/\left(t^n\right)\cong\mathbb{R}[\varepsilon]$, где ε удовлетворяет единственному соотношению $\varepsilon^n=0$, причем изоморфизм задается формулой, ср. (26):

$$\mathbb{R}[A]\ni f(A)=f(\lambda)E+\frac{f'(\lambda)}{1}\left(J_n(\lambda)-\lambda E\right)+$$
$$+\frac{f''(\lambda)}{2!}\left(J_n(\lambda)-\lambda E\right)^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!}\left(J_n(\lambda)-\lambda E\right)^{n-1}\mapsto$$
$$\mapsto f(\lambda)+\frac{f'(\lambda)}{1!}\varepsilon+\frac{f''(\lambda)}{2!}\varepsilon^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!}\varepsilon^{n-1}\in\mathbb{R}[\varepsilon]$$

Чему изоморфна алгебра $\mathbb{R}[A]$ в случае, когда спектр не содержится в $\mathbb{R}$? Рассмотрим сюръективный гомоморфизм алгебр $\mathbb{R}[t]\to\mathbb{R}[A]$, ядром которого является (главный) идеал в $\mathbb{R}[t]$, порожденный минимальным многочленом $m_A(t) \in \mathbb{R}[t]$ оператора A. Тогда, согласно теореме о гомоморфизмах колец, $\mathbb{R}[A] \cong\cong \mathbb{R}[t]/\left(m_A(t)\right)$.

Дадим полный ответ в частном случае $n = 2$, когда возможны варианты: $\mathbb{R}[A] \cong \mathbb{C}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}[\varepsilon]$ (с точностью до изоморфизма, это - все коммутативные ассоциативные двумерные алгебры над $\mathbb{R}$ с единицей), а также $\mathbb{R}$.

Имеет место изоморфизм $\mathbb{R}[A] \cong \mathbb{C} \Leftrightarrow m_A(t)$ - неприводимый над $\mathbb{R}$ многочлен второй степени $\Leftrightarrow \chi_A(t)$ - неприводимый над $\mathbb{R}$ многочлен второй степени [19] $\Leftrightarrow (\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A < 0$, ср. с задачей 1.11. В случае, когда $m_A(t)$ имеет два различных корня в $\mathbb{R}$, факторкольцо $\mathbb{R}[A] \cong \mathbb{R}^2$; в случае, когда $m_A(t)$ имеет кратный корень, $\mathbb{R}[A] \cong \mathbb{R}[\varepsilon], \varepsilon^2 = 0$, в согласии со сказанным выше. Если $\deg\left(m_A(t)\right) = 1$, то $\mathbb{R}[A] \cong \mathbb{R}$. Подробности см. в [22], § 5 .

Заметим, что формулу Тейлора можно записать в виде формального тождества

$$\exp\left(h\frac{d}{dx}\right) f(x) = T_h(f(x)) \tag{27}$$

где $T_h(f(x)) := f(x+h)$ - оператор сдвига.

Задача 2.

5. Проверить формулу (27) для

1. вещественных многочленов степени не выше n;

2. функций на $\mathbb{R}$ из линейной оболочки $\langle \sin x, \cos x \rangle$.

Решение. В этой задаче мы будем вычислять экспоненту конечномерного линейного оператора φ. Она определяется как сумма ряда, получающегося подстановкой матрицы A оператора φ в ряд для экспоненты $\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. При этом получается матрица $\exp A$, являющаяся матрицей линейного оператора $\exp \varphi$. Действительно, если мы выберем другой базис, отвечающий матрице перехода C, то φ будет иметь в нем матрицу $C^{-1}AC$ и из легко проверяемого соотношения $\exp\left(C^{-1}AC\right) = C^{-1}(\exp A)C$ следует, что $\exp A$ преобразуется как матрица оператора при переходе к новому базису. Обоснование сходимости ряда $\exp A$ для произвольной матрицы A порядка n приведено, например, в [12], гл. 2, §5. Там же приводится пример использования матричной экспоненты для решения системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

1. Пусть $\mathbb{R}[x]_n$ обозначает пространство вещественных многочленов степени не выше n. Рассмотрим базис в $\mathbb{R}[x]_n$, состоящий из мономов $\left\{1, \frac{x}{1!}, \frac{x^2}{2!}, \ldots, \frac{x^n}{n!}\right\}$. В этом базисе матрица D оператора дифференцирования $\frac{d}{dx}$ есть следующая матрица порядка

$n+1$:

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(такая матрица называется жордановой клеткой порядка $n+1 c$ собственным значением 0 и обозначается $J_{n+1}(0)$). В силу соотношения $D^{n+1} = 0$, сумма ряда $\exp(hD)$ есть конечная сумма

$$E + \sum_{k=1}^{n} D^k \frac{h^k}{k!} = \begin{pmatrix} 1 & h & \frac{h^2}{2!} & \frac{h^3}{3!} & \cdots & \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{h^n}{n!} \\ 0 & 1 & h & \frac{h^2}{2!} & \cdots & \frac{h^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 0 & 1 & h & \cdots & \frac{h^{n-3}}{(n-3)!} & \frac{h^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(для вычисления также можно использовать (26)).
С другой стороны, формула

[219] В этом случае он совпадает с $m_A(t)$.

$T_h\left(\frac{x^k}{k!}\right)=\frac{(x+h)^k}{k!}=\frac{h^k}{k!}+\frac{h^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\frac{x}{1!}+\frac{h^{k-2}}{(k-2)!}\cdot\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^k}{k!}$
показывает, что линейный оператор $T_h:\mathbb{R}[x]_n\to\mathbb{R}[x]_n$ имеет ту же самую матрицу в базисе $\left\{1,\frac{x}{1!},\frac{x^2}{2!},\ldots,\frac{x^n}{n!}\right\}$, что и $\exp\left(h\frac{d}{dx}\right)$. Значит, эти два оператора на пространстве $\mathbb{R}[x]_n$ равны.

2) Оператор $\frac{d}{dx}$ в базисе $\{\sin x,\cos x\}$ имеет матрицу $D:=:=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$. Для вычисления $\exp(hD)$ можно либо воспользоваться задачей 1.11, либо просуммировать ряд из матриц, используя соотношение $D^2=-E$ и разложения в ряды Маклорена для функций $\sin h,\cos h$.В любом случае получается ответ: $\exp(hD)=\begin{pmatrix}\cos h&-\sin h\\\sin h&\cos h\end{pmatrix}$.

С другой стороны, используя тригонометрические тождества $\sin(x+h)=\cos h\sin x+\sin h\cos x,\cos(x+h)=-\sin h\sin x++\cos h\cos x$ (напомним, что $\sin x,\cos x$ - базисные векторы, а
$\sin h$ и $\cos h$ - координаты разложения по базису), получаем, что матрица T_h в том же базисе та же самая.

Комментарий. Решенная задача подсказывает быстрый способ нахождения экспоненты $\exp\left(hJ_n(\lambda)\right)$, где $J_n(\lambda)$ - жорданова клетка порядка n с собственным значением λ. Дело в том, что оператор дифференцирования на пространстве квазимногочленов степени, не превосходящей $n-1$, в базисе

$$\left\{e^{\lambda x},\frac{x}{1!}e^{\lambda x},\frac{x^2}{2!}e^{\lambda x},\ldots,\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda x}\right\}$$

как раз имеет матрицу $J_n(\lambda)$. Таким образом, по формуле Тейлора $\exp\left(hJ_n(\lambda)\right)=T_h$, где T_h - матрица оператора $f(x)\mapsto f(x+h)$ сдвига на h в том же базисе.
Определение 2.6. Говорят, что две матрицы $A,B:V\to V$ коммутируют, если $AB=BA$. Другими словами, их коммутатор $[A,B]=AB-BA$ равен 0 .

Задача 2.

7. Найти все матрицы в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$, коммутирующие с жордановой клеткой $J_n(\lambda)$.
Решение. Во-первых, заметим, что $\forall B\in\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ множество

$$N(B):=\{A\in\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})\mid[A,B]=0\}$$

является векторным пространством [20]. Во-вторых, так как $J_n(\lambda)==\lambda E+J_n(0)$, а скалярные матрицы коммутируют со всеми матрицами, то достаточно найти пространство матриц, коммутирующих с $J_n:=J_n(0)$. Ясно, что алгебра $\mathbb{K}\left[J_n\right]$ матриц вида (ср. 26):

$$f\left(J_n\right)=\begin{pmatrix}\alpha_0&\alpha_1&\alpha_2&\ldots&\alpha_{n-1}\\0&\alpha_0&\alpha_1&\ldots&\alpha_{n-2}\\0&0&\alpha_0&\vdots&\alpha_{n-3}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\ldots&\alpha_0\end{pmatrix},\tag{28}$$

где $f(t)=\alpha_0+\alpha_1t+\ldots+\alpha_{n-1}t^{n-1}\in\mathbb{K}[t]$, является коммутативной подалгеброй в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ размерности n (поскольку $\left(J_n\right)^n=0$), то есть $\mathbb{K}\left[J_n\right]\subset N\left(J_n\right)$.

Покажем, что в действительности $\mathbb{K}\left[J_n\right]=N\left(J_n\right)$. Матрица J_n является матрицей оператора φ, действующего в выбранном базисе $\left\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\right\}$ по формуле $\varphi\left(\mathbf{e}_k\right)=\mathbf{e}_{k-1},2\leq k\leq n,\varphi\left(\mathbf{e}_1\right)==\mathbf{0}$. Пусть $A\in N\left(J_n\right)$. Пусть

$$A\mathbf{e}_n=\alpha_{n-1}\mathbf{e}_1+\alpha_{n-2}\mathbf{e}_2+\ldots+\alpha_0\mathbf{e}_n,$$

где α_k - некоторые скаляры. Тогда

$$A\mathbf{e}_{n-1}=AJ_n\mathbf{e}_n=J_nA\mathbf{e}_n=\alpha_{n-2}\mathbf{e}_1+\alpha_{n-3}\mathbf{e}_2+\ldots+\alpha_0\mathbf{e}_{n-1}$$
$$A\mathbf{e}_{n-2}=AJ_n\mathbf{e}_{n-1}=J_nA\mathbf{e}_{n-1}=\alpha_{n-3}\mathbf{e}_1+\alpha_{n-4}\mathbf{e}_2+\ldots+\alpha_0\mathbf{e}_{n-2}$$

и так далее. Таким образом, оператор A в данном базисе имеет матрицу (28).

Векторное пространство квадратных матриц $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ можно отождествить с арифметическим пространством $\mathbb{R}^{n^2}$, например, выбрав в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ базис из матричных единиц E_{ij}. При этом отождествлении матрице $A=(a_{ij})$ сопоставляется набор ее координат - матричных элементов (a_{ij}) (упорядоченных в соответствии с выбранным

[220] Даже подалгеброй с единицей в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$, поскольку $[AC,B]=A[C,B]++[A,B]C$.

порядком в базисе из матричных единиц). Пространство $\mathbb{R}^{n^2}$ можно рассматривать как метрическое пространство относительно стандартной метрики, в которой квадрат длины $|\mathbf{a}|^2$ вектора $\mathbf{a}=(a_k)$ выражается формулой $|\mathbf{a}|^2 == \sum_{k=1}^{n^2} a_k^2$ (в терминах матрицы A это равно $|A|^2 := \operatorname{tr}\left(A^T A\right)^{21}$).

Таким образом, $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$ - метрическое пространство. Напомним, что подмножество $M \subset X$ метрического пространства X называется плотным [24], если для любой точки $x \in X$ любая ее окрестность U_x имеет непустое пересечение с M. Равносильное определение: подмножество M плотно в X, если всякая точка $x \in X$ является точкой прикосновения M, или, что эквивалентно, замыкание M совпадает с X.

Задача 2.

8. Доказать, что множество обратимых матриц порядка n плотно в $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$.

Решение. Пусть $A \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$ - произвольная матрица. Рассмотрим ее характеристический многочлен $\chi_A(t)=\det(tE-A)$.

Многочлен $\chi_A(t)$ ненулевой, поскольку у него коэффициент при t^n равен 1. Ненулевой многочлен степени n имеет не более n корней, поэтому существует проколотая окрестность точки $t=0$ на прямой, в которой нет корней $\chi_A(t)$. Для любого t, не принадлежащего множеству корней $\chi_A(t)$, матрица $A-tE$ обратима. Таким образом, любая окрестность матрицы A в $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})=\mathbb{R}^{n^2}$ содержит обратимую матрицу.

Комментарии. 1) Во-первых, заметим, что в предшествующих рассуждениях поле $\mathbb{R}$ может быть заменено полем $\mathbb{C}$.
2) Множество необратимых матриц порядка n совпадает с множеством нулей

$$\{A \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{R}) \mid \det A=0\}$$

многочлена $\det A$ от n^2 переменных - элементов матрицы A.В частности, оно замкнуто (поскольку многочлен - непрерывная функция), а дополнение к нему - множество обратимых матриц - открыто.
3) Полученный в задаче результат позволяет распространять "по непрерывности" тождества, известные для обратимых матриц, на все матрицы (в случае полей $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$). Докажем, например, равенство $\chi_{AB}(t)=\chi_{BA}(t)$ для любых $A, B \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$. Если матрица A обратима, то матрицы AB и BA сопряжены: $BA=A^{-1}(AB)A$, и требуемое равенство следует из инвариантности характеристического многочлена оператора относительно замен базиса. Рассмотрим теперь многочлен $f_{AB}(t):=\chi_{AB}(t)--\chi_{BA}(t)$. Коэффициенты $f_{AB}(t)$, являясь непрерывными функциями (многочленами) матричных элементов A (при фиксированной матрице B), обращаются в 0 на плотном подмножестве в $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$, состоящем из обратимых матриц. Значит, они равны нулю всюду [22]. Другой пример использования этого метода распространение полярного разложения на вырожденные матрицы при условии, что оно доказано для невырожденных (см. задачу 3.38).

Задача 2.

9. Доказать, что множество диагонализируемых матриц плотно в $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{C})$.

Решение. Заметим, что произвольную матрицу $A \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{C})$ можно привести к верхнему треугольному виду (см. задачу 2.29 , а также [7], гл. VI, § 4), то есть существует такая обратимая матрица $C \in \operatorname{Mat}_n(\mathbb{C})$, что $C^{-1}AC=T$, где матрица T - верхняя треугольная. На главной диагонали T стоит набор $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ собственных значений матрицы T (и A). Если они попарно различны, то матрица A диагонализируема. Если среди них есть совпадающие, то их можно сколь угодно мало изменить, чтобы сделать попарно различными. Пусть при этом мы получили диагонализируемую матрицу T' с попарно различными собственными значениями $\lambda_1', \ldots, \lambda_n'$, то же можно сказать и про матрицу $A':=CT'C^{-1}$. Выбирая T' сколь угодно мало отличающейся от T, можно сделать

[221] Мы предостерегаем читателя от путаницы: здесь и ниже $|A|$ обозначает не определитель, а евклидову длину матрицы A как вектора пространства $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$ со скалярным произведением $(A, B)=\operatorname{tr}\left(A^T B\right)$, см. задачу 3.5.

[222] Здесь мы используем следующий результат из анализа: непрерывная функция $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, равная нулю на плотном подмножестве $U \subset \mathbb{R}^m$, равна нулю на всем $\mathbb{R}^m$.

A' сколь угодно мало отличающейся от $A = CTC^{-1}$, поскольку матричные элементы A' являются линейными функциями от матричных элементов T', а значит, непрерывны.

Комментарий. Достаточным условием диагонализируемости матрицы A над $\mathbb{C}$ является отсутствие кратных корней у ее характеристического многочлена $\chi_A(t)$. Подмножество матриц в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ без кратных корней задается условием, что дискриминант $\Delta\left(\chi_A(t)\right) \neq 0$. Заметим, что $\Delta\left(\chi_A(t)\right)$ - ненулевой многочлен от матричных элементов A (которые мы считаем независимыми переменными), его множество нулей - собственное замкнутое подмножество в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$.

Доказанный в задаче результат позволяет распространять "по непрерывности" тождества, известные для диагонализируемых матриц, на все матрицы данного порядка над $\mathbb{C}$. Пример такого доказательства дает следующая задача.

Напомним, что теорема Гамильтона-Кэли утверждает, что характеристический многочлен $\chi_\varphi(t)$ аннулирует оператор, то есть $\chi_\varphi(\varphi) = 0$.

Задача 2.

10. Используя результат предыдущей задачи, доказать теорему Гамильтона-Кэли для полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

Решение. Рассмотрим вначале случай алгебраически замкнутого поля $\mathbb{C}$. Пусть в некотором базисе оператор φ имеет матрицу A. Для диагонализируемых операторов теорема почти очевидна.

Действительно, если $A = C\Lambda C^{-1}$, где $\Lambda := \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right)$, то

$$\chi_A(t) = \prod_i \left(t - \lambda_i\right) \Rightarrow \chi_A(A) = \chi_A\left(C\Lambda C^{-1}\right) =$$

$$= C\chi_A(\Lambda)C^{-1} = C\left(\prod_i \left(\Lambda - \lambda_i E\right)\right)C^{-1} = 0$$

Для доказательства в общем случае осталось лишь заметить, что $A \mapsto \chi_A(A)$ - непрерывная функция $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, равная 0 на плотном подмножестве, состоящем из диагонализируемых матриц, следовательно, она тождественно равна нулю на всем множестве $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$.

Осталось доказать теорему для случая поля $\mathbb{R}$. Пусть $A \in\in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ - матрица оператора, действующего на вещественном векторном пространстве. Матрицу A можно рассматривать и как матрицу из $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, и тогда по доказанному получаем $\chi_A(A) == 0$. При этом понятно, что характеристический многочлен $\chi_A(t)$ не зависит от того, рассматриваем ли мы матрицу A как матрицу с вещественными или комплексными элементами. □

Задача 2.

11. Пусть V - векторное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\varphi : V \to V$ - линейный оператор, $\chi_\varphi(t) = \prod_{i=1}^k \left(t - \lambda_i\right)^{r_i}, r_i \geq\geq 1$ - его характеристический многочлен, причем $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Доказать, что φ диагонализируем $\Leftrightarrow$ $\lambda_i \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq k$ и многочлен $m_\varphi(t) := \prod_{i=1}^k \left(t - \lambda_i\right)$ аннулирует φ (на самом деле он совпадает с минимальным многочленом φ).

Решение. Пусть φ диагонализируем. Тогда в V существует базис, состоящий из собственных векторов оператора φ. Так как сумма собственных подпространств, отвечающих разным собственным значениям, является прямой (см. [7], VI, § 4), то

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_l}, \quad l \leq k, \tag{29}$$

где V_{λ_i} - собственное подпространство, отвечающее собственному значению λ_i. Поскольку размерность собственного подпространства V_{λ_i} не превосходит кратности r_i корня λ_i характеристического многочлена (см. [7], VI, § 4), (29) возможно, только если $\dim V_{\lambda_i} = r_i$ и $l = k$. Значит, все $\lambda_i \in \mathbb{K}$. С другой стороны, легко видеть, что ограничение $\varphi - \lambda_i \mathrm{id}$ на V_{λ_i} - нулевой опе-

ратор. Тогда $\prod_{i=1}^k \left(\varphi - \lambda_i \mathrm{id}\right)$ - нулевой оператор на V. Значит, $m_\varphi(t)$ аннулирует φ.

Обратно, пусть $m_\varphi(t)$ аннулирует φ. Определим многочлены $g_i(t) := m_\varphi(t)\left(t - \lambda_i\right)^{-1}, 1 \leq i \leq k$. Очевидно, что

$$L_i := \mathrm{im}\left(g_i(\varphi)\right) \subset V_{\lambda_i}.$$

Многочлены $g_1(t), \ldots, g_k(t) \in \mathbb{K}[t]$ взаимно просты в совокупности, поэтому существуют многочлены $h_i(t), 1 \leq i \leq k$ такие, что $\sum_{i=1}^{k} g_i(t) h_i(t) = 1$. Тогда $\sum_{i=1}^{k} g_i(\varphi) h_i(\varphi) = \mathrm{id}_V$, а следовательно, $V = L_1 + \ldots + L_k$. Так как $L_i \subset V_{\lambda_i}$ и $V_{\lambda_i} \cap \left(\oplus_{j \neq i} V_{\lambda_j}\right) = \{\mathbf{0}\}$, то $V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}$ (и $L_i = V_{\lambda_i}$).

Определение 2.12. Линейный оператор $\varphi : V \rightarrow V$ называется нильпотентным, если существует такое натуральное k, что $\varphi^k == 0$. Наименьшее k с указанным свойством называется высотой оператора или порядком нильпотентности.

Например, жорданова клетка $J_n(0)$ нильпотентна: $J_n(0)^n = 0$. Следующая задача является важным этапом при доказательстве теоремы о жордановой нормальной форме (ЖНФ).

Задача 2.

13. Пусть N - нильпотентный оператор высоты n и e - такой вектор, что $N^{n-1}\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$. Доказать, что система векторов $\{\mathbf{e}, N\mathbf{e}, N^2\mathbf{e}, \ldots, N^{n-1}\mathbf{e}\}$ линейно независима.

Решение. Предположим обратное: существуют такие не равные одновременно нулю константы $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$, что

$$\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j N^j \mathbf{e} = \mathbf{0}$$

Пусть k - номер первого ненулевого коэффициента $\alpha_k \neq 0$. В таком случае после применения к левой и правой частям последней формулы оператора N^{n-k-1} получим

$$\alpha_k N^{n-1}\mathbf{e} + \alpha_{k+1} N^n \mathbf{e} + \cdots = \mathbf{0}.$$

Все слагаемые, кроме первого, по определению нильпотентного оператора нулевые. Значит, в силу выбора вектора e получаем, что $\alpha_k = 0$. Следовательно, все коэффициенты α_j равны нулю. Значит, наша система линейно независима.

Комментарий. Отметим, что полученная система линейно независима, но совсем не обязана быть базисом. Проверьте, что примером такого оператора является оператор, ЖНФ которого состоит из нескольких жордановых клеток с нулевым собственным значением.

Задача 2.

14. Рассмотрим нильпотентный оператор $N : V \rightarrow\rightarrow V$. Доказать, что порядок нильпотентности оператора N не может превышать $\dim V$.

Решение. Предположим обратное. Значит, существует такой вектор $\mathbf{e} \in V$, что $N^n \mathbf{e} \neq \mathbf{0}$, причем $n > \dim V$. Как было показано в задаче 2.13, система векторов $\{\mathbf{e}, N\mathbf{e}, \ldots, N^n \mathbf{e}\}$ линейно независима, чего не может быть, так как $n > \dim V$.

Отсюда, например, следует, что не существует решений уравнения $x^3 = 0$, которые не были бы решениями уравнения $x^2 = 0$ среди квадратных матриц $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{K})$.

Задача 2.

15. Пусть V - конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{K}, \varphi : V \rightarrow V$ - линейный оператор на V. Предположим, что все корни характеристического многочлена [23]φ равны 0 (в случае алгебраически замкнутого основного поля $\mathbb{K}$ это эквивалентно равенству нулю всех собственных значений φ). Доказать, что тогда φ нильпотентен.

Решение. Характеристический многочлен φ имеет только нулевой корень, значит, $\chi_\varphi(t) = t^n$, где $n = \dim V$. По теореме Гамильтона-Кэли, $\varphi^n = 0$. Кстати, заметим, что для наименьшего k такого, что $\varphi^k = 0$, мы еще раз получили оценку $k \leq\leq \dim V$, причем все случаи $1 \leq k \leq n$ реализуются (взять в левом верхнем углу жорданову клетку $J_k(0)$ и дополнить нулями, если $k < n$).

Комментарий. Заметим, что если линейный оператор φ на векторном пространстве V нильпотентен, то все его собственные значения равны 0 . Действительно, предположим, что у нильпотентного оператора φ степени нильпотентности n есть собственное значение λ. Тогда существует $\mathbf{v} \in V, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ такой, что $\varphi(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{0} = \varphi^n(\mathbf{v}) = \lambda^n \mathbf{v} \quad \Rightarrow$

$\lambda^n = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0$. Кроме того, 0 является собственным значением φ. Действительно, $\varphi^{n-1} \neq 0$, значит, существует $\mathbf{u} \in V$ такой, что $\varphi^{n-1}(\mathbf{u}) \neq \mathbf{0}$,

но $\varphi^n(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. Полагая $\mathbf{w} := \varphi^{n-1}(\mathbf{u})$, имеем $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, но $\varphi(\mathbf{w}) == \mathbf{0} \Rightarrow 0$ является собственным значением φ.

Более того, верно утверждение, обратное доказанному в предшествующей задаче: все корни характеристического многочлена нильпотентного оператора φ равны 0 . Для алгебраически замкнутого основного поля $\mathbb{K}$ это следует из предыдущего: в этом случае все корни характеристического многочлена являются собственными значениями. Если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, то для доказательства можно использовать комплексификацию V (см. ниже), а в общем случае - расширение поля скаляров (см. [28]). Доказательство в случае произвольного поля $\mathbb{K}$ можно также получить, используя задачу 2.30.

Задача 2.

16. Доказать, что симметричная нильпотентная матрица A с вещественными (или комплексными) элементами нулевая.

Решение. Вещественная симметричная матрица A обязательно диагонализируема, то есть существует невырожденная матрица C такая, что матрица $\Lambda = C^{-1}AC$ диагональна, причем на ее главной диагонали стоят собственные значения матрицы A, которые, согласно вышесказанному, равны нулю.

Задача 2.

17. Пусть f - ненулевая линейная функция на векторном пространстве V (не обязательно конечномерном) над (произвольным) полем $\mathbb{K}, U = \ker(f)$. Доказать, что

a) U - максимальное подпространство V, т.е. оно не содержится ни в каком другом подпространстве в V, отличном от V;

b) $V = U \oplus \langle \mathbf{v} \rangle$ для любого $\mathbf{v} \notin U$;

c) если g - еще одна линейная функция на V и $\ker g = \ker f$, то существует такой $\alpha \in \mathbb{K}, \alpha \neq 0$, что $g = \alpha f$.

Решение. Напомним, что $\ker f := \{\mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v}) = 0\}-$ ядро линейной функции f.

Пусть дано подпространство $W \subset V$ такое, что $U \subsetneqq W \subset V$; нужно доказать, что $W = V$. Выберем $\mathbf{w} \in W, \mathbf{w} \notin U \Rightarrow f(\mathbf{w}) \neq\neq \mathbf{0}$. Возьмем произвольный $\mathbf{v} \in V \Rightarrow \mathbf{v} - \frac{f(\mathbf{v})}{f(\mathbf{w})}\mathbf{w} \in U \Rightarrow \mathbf{v} \in\in W \Rightarrow W = V$. Тем самым пункт a) доказан.

$f \neq 0 \Rightarrow \exists \mathbf{v} \in V$ такой, что $f(\mathbf{v}) \neq 0$. Выберем произвольный $\mathbf{v}' \in V \Rightarrow \mathbf{v}' - \frac{f(\mathbf{v}')}{f(\mathbf{v})}\mathbf{v} \in U \Rightarrow V = U \otimes \langle \mathbf{v} \rangle$. Тем самым пункт b) доказан.

Выберем $\mathbf{v} \in V, \mathbf{v} \notin \ker f = \ker g \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{K}, \alpha \neq 0$, такой, что $g(\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v})$. Рассмотрим линейную функцию $h := g - \alpha f$. Имеем $h(\mathbf{v}) = 0$, $h|_U = 0$; но, в силу пункта b), $V = U \oplus \langle \mathbf{v} \rangle \Rightarrow\Rightarrow h = 0$. Тем самым пункт c) доказан.

Комментарий. Полезность данной задачи заключается в демонстрации того, как можно работать с линейными пространствами без условия конечномерности и использования базисов.

Задача 2.

18. Пусть V - линейное пространство размерности n, а $\varphi : V \to V$ - линейный оператор. Доказать, что все $n-1$ мерные φ-инвариантные подпространства в V имеют вид $\ker f$ для некоторого собственного вектора f оператора φ^*. Обратно, доказать, что любое подпространство вида $\ker f$, где f - некоторый собственный вектор оператора φ^*, инвариантно относительно φ.

Решение. Напомним, что для линейного пространства V над полем $\mathbb{K}$ через V^* обозначается двойственное пространство

$$V^* := \{f : V \to \mathbb{K} \mid f \text{ линейно над } \mathbb{K}\},$$

то есть пространство всех линейных функционалов на V. Если V конечномерно, то V^* тоже конечномерно, причем имеет ту же размерность, что и V. Для каждого линейного отображения $\varphi : V \to W$ имеем линейное отображение $\varphi^* : W^* \to V^*$, которое

[223] В алгебраическом замыкании $\mathbb{K}$.

произвольный линейный функционал $f \in W^*$ переводит в линейный функционал $\varphi^*(f) \in V^*$, однозначно определяемый условием, что на произвольном векторе $\mathbf{v} \in V$ он принимает значение $f(\varphi(\mathbf{v}))$, то есть определяемое формулой $\varphi^*(f)(\mathbf{v}) == f(\varphi(\mathbf{v})) \forall \mathbf{v} \in V, f \in W^{*}$[24]. В частности, для линейного оператора $\varphi : V \to V$ имеем линейный оператор $\varphi^* : V^* \to V^*$.

Пусть $U \subset V - \varphi$-инвариантное подпространство в $V, \dim U == n - 1$. Тогда $\exists f \in V^*$ такой, что $U = \ker f := \{\mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v}) = 0\}$ (очевидно, что $f \neq 0$). Из предыдущей задачи следует, что такой f определен однозначно с точностью до умножения на ненулевой

скаляр $\alpha \in \mathbb{K}$. Кроме того, если для некоторого $g \in V^*$ из $\mathbf{u} \in U$ следует $g(\mathbf{u}) = 0$, то $g = \lambda f, \lambda \in \mathbb{K}$. Последнее как раз верно для $g = \varphi^*(f)$:

$$\forall \mathbf{u} \in U \quad \varphi^*(f)(\mathbf{u}) = f(\varphi(\mathbf{u})) = 0$$

следовательно, $\varphi^*(f) = \lambda f$, то есть $f \in V^*$ - собственный вектор оператора φ^*.

Обратно, пусть $\varphi^*(f) = \lambda f$. Тогда из $\mathbf{u} \in U$ следует $\varphi^*(f)(\mathbf{u}) == \lambda f(\mathbf{u}) = 0$, значит, $f(\varphi(\mathbf{u})) = 0 \forall \mathbf{u} \in U \Rightarrow \varphi(\mathbf{u}) \in U$, поскольку $U = \ker f$.

Пусть $\varphi : V \to V$ - линейный оператор, $U \subset V$ - инвариантное относительно φ подпространство, то есть $\varphi(U) \subset U$. Тогда определено ограничение $\left.\varphi\right|_U$ оператора φ на подпространство U, которое является оператором на пространстве U, задаваемым формулой

$$\left.\varphi\right|_U(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u} \in U.$$

Для краткости обозначим $\psi := \left.\varphi\right|_U$. Выберем базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ в $U \subset V$ и дополним его до базиса $\{\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_n\}$ всего V, в нем оператор φ имеет матрицу $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, где A - матрица ψ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$[25]. Из этого легко видеть, что характеристический многочлен $\chi_\psi(t)$ ограничения $\psi = \left.\varphi\right|_U$ делит характеристический многочлен $\chi_\varphi(t)$ оператора φ.

Задача 2.

19. Пусть φ - линейный оператор на $V, \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ - набор его различных собственных значений, принадлежащих основному полю, $V_{\lambda_j} \subset V$ - соответствующие собственные подпространства. Пусть $U \subset V - \varphi$-инвариантное подпространство. Доказать, что если для $\mathbf{u} \in U$ существует представление

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_k \tag{30}$$

где $\mathbf{v}_j \in V_{\lambda_j}$, то $\mathbf{v}_j \in U \forall j, 1 \leq j \leq k$.

Решение. Воспользуемся индукцией по числу l ненулевых слагаемых в разложении (30). Для $l = 1$ утверждение очевидно. Допустим, что требуемое утверждение верно для разложений вида (30) с числом ненулевых компонент $\mathbf{v}_j$, не превосходящим

$l - 1$, докажем, что тогда утверждение верно для разложений с l ненулевыми компонентами. Без ограничения общности можно считать, что ненулевыми являются первые l компонент в (30). Пусть

$$U \ni \mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_l \tag{31}$$

где все $\mathbf{v}_j \neq \mathbf{0}$. Тогда $\varphi(\mathbf{u}) = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_l \mathbf{v}_l$. Вычитая из последнего тождества равенство, полученное умножением обеих частей (31) на λ_l, имеем

$$\varphi(\mathbf{u}) - \lambda_l \mathbf{u} = (\lambda_1 - \lambda_l) \mathbf{v}_1 + \ldots + (\lambda_{l-1} - \lambda_l) \mathbf{v}_{l-1}.$$

Мы получили разложение вида (30), содержащее $l - 1$ ненулевую компоненту, следовательно, по предположению индукции, $\mathbf{v}_j \in\in U \cap V_{\lambda_j}, \quad 1 \leq j \leq l - 1$. Но тогда из (31) и $\mathbf{v}_l \in U$, что и требовалось доказать.

Приведем также вариант доказательства без использования индукции. Подействуем на $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_k \in U$ оператором φ, получим

$$\varphi(\mathbf{u}) = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_k \mathbf{v}_k \in U$$

Далее,

[224] Нетрудно показать, что * определяет контравариантный функтор из категории линейных пространств над полем $\mathbb{K}$ в себя, см. [28], гл. 1, §13.

[225] Блок C также имеет интерпретацию - это матрица фактороператора, он определен перед задачей 2.28.

$$\varphi^2(\mathbf{u}) = \lambda_1^2\mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_k^2\mathbf{v}_k \in U, \ldots,$$
$$\varphi^{k-1}(\mathbf{u}) = \lambda_1^{k-1}\mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_k^{k-1}\mathbf{v}_k \in U.$$

Переписывая полученные равенства в матричном виде, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_k^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \ldots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \\ \ldots \\ \mathbf{v}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \\ \ldots \\ \mathbf{u}_k \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{u}_j := \varphi^{j-1}(\mathbf{u}) \in U, \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}$. Матрица слева - матрица Вандермонда, при $\lambda_i \neq \lambda_j$ она обратима $\Rightarrow$ все $\mathbf{v}_j$ также лежат в U.

Положив в условии предыдущей задачи $U = \{\mathbf{0}\}$, в качестве следствия получим следующее важное утверждение: собственные векторы, отвечающие разным собственным значениям, линейно независимы.

Задача 2.

20. Доказать, что если оператор $\varphi : V \to V$ диаго-
нализируем, то и его ограничение $\varphi|_U$ на любое инвариантное подпространство $U \subset V$ диагонализируемо.

Решение. Очевидно, что оператор φ диагонализируем $\Leftrightarrow$ $V == V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}$. В предыдущей задаче доказано, что если подпространство $U \subset V\varphi$-инвариантно, то для представления произвольного вектора $\mathbf{u} \in U$ вида

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_k,$$

где $\mathbf{v}_j \in V_{\lambda_j}$, следует $\mathbf{v}_j \in U \forall j$. Другими словами, $U = (U \cap V_{\lambda_1}) \oplus \oplus \ldots \oplus (U \cap V_{\lambda_k})$. Отсюда следует диагонализируемость оператора $\varphi|_U$, так как $U \cap V_{\lambda_j}$ - его собственные подпространства.

Другое решение задачи можно получить, используя задачу 2.11 и тот факт, что если $f(t) \in \mathbb{K}[t], U \subset V$ - φ-инвариантное подпространство, то $f\left(\varphi|_U\right) = f(\varphi)|_U$, а значит, минимальный многочлен оператора $\varphi|_U$ делит минимальный многочлен φ (такое решение приведено в [12], гл. 6, 5).

Задача 2.

21. Пусть оператор $\varphi : V \to V$ диагонализируем. Тогда любое его φ-инвариантное подпространство $U \subset V$ имеет φ-инвариантное прямое дополнение $W \subset V$, то есть такое φ инвариантное подпространство $W \subset V$, что $V = U \oplus W$.

Решение. В предыдущих обозначениях пусть

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}, \quad U = (U \cap V_{\lambda_1}) \oplus \ldots \oplus (U \cap V_{\lambda_k}).$$

Для каждого подпространства $U \cap V_{\lambda_i} \subset V_{\lambda_i}$ выберем произвольное прямое дополнение $W_i \subset V_{\lambda_i}$. Тогда подпространство $W == W_1 \oplus \ldots \oplus W_k \subset V$ является φ-инвариантным и $V = U \oplus W$.

Задача 2.

22. 1) Доказать, что два диагонализируемых оператора $\varphi, \psi : V \to V$ коммутируют тогда и только тогда, когда они имеют общий базис из собственных векторов.
2) Распространить этот результат на произвольное множество коммутирующих диагонализируемых операторов.

Решение. 1) Тождество $\varphi\psi = \psi\varphi$ влечет $(\varphi - \lambda\mathrm{id})\psi = \psi(\varphi - -\lambda\mathrm{id})$ для любого скаляра λ. Значит, произвольное собственное подпространство V_λ оператора φ является ψ-инвариантным. По условию ψ диагонализируемо, значит, согласно задаче 2.20 , его ограничение на V_λ диагонализируемо, то есть для $\psi|_{V_\lambda}$ есть базис

из собственных векторов, которые, очевидно, собственные также и для φ (с собственным значением λ). Поскольку $V = V_{\lambda_1} \oplus \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ - все попарно различные собственные значения оператора φ, и в каждом V_{λ_j} есть общий собственный базис для $\psi|_{V_j}$ и $\varphi|_{V_j}$, то объединение таких базисов по всем $j, 1 \leq j \leq k$, даст требуемый базис во всем V.

Таким образом, из $[\varphi, \psi] = 0$ следует существование общего базиса из собственных векторов. Обратное утверждение очевидно.
2) Пусть у нас есть три коммутирующих диагонализируемых оператора φ, ψ, χ. Пусть V_λ и W_μ - собственные подпространства операторов φ и ψ соответственно. Тогда, как установлено ранее, подпространство $V_\lambda \cap W_\mu$ является χ-инвариантным.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ - набор всех различных собственных значений оператора φ и $\mu_1, \ldots, \mu_l$ - аналогичный набор для ψ. Пусть $V_{ij} := V_{\lambda_i} \cap W_{\mu_j}$. Из предыдущего пункта следует, что сумма подпространств $V_{ij} \subset V$ совпадает с V (так как содержит базис). Кроме того, покажем, что это подпространства линейно независимы, то есть из $\sum \mathbf{v}_{ij} = \mathbf{0}$, где $\mathbf{v}_{ij} \in V_{ij}$, следует, что все $\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{0}$. Для этого рассмотрим систему равенств

$$\sum_i \left(\sum_j \mathbf{v}_{ij} \right) = \mathbf{0}, \quad \sum_i \lambda_i \left(\sum_j \mathbf{v}_{ij} \right) = \mathbf{0}, \quad \ldots,$$

$$\sum_i \lambda_i^{k-1} \left(\sum_j \mathbf{v}_{ij} \right) = \mathbf{0}$$

получающуюся из первого последовательным применением φ. Далее, рассуждая, как во втором способе в решении задачи 2.19, получаем, что $\sum_j \mathbf{v}_{ij} = \mathbf{0} \forall i$. Применяя теперь к последнему равенству ψ, получаем $\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{0} \forall i, j$.

Далее ограничиваем χ на каждое ненулевое подпространство вида V_{ij} и замечаем, что пространство V по доказанному представляется в виде их прямой суммы. Снова применяя задачу 2.20 , получаем, что ограничение χ на все V_{ij} диагонализируемо. Теперь уже очевидно, как, используя индукцию по числу векторов, доказать требуемый результат для любого конечного множества коммутирующих диагонализируемых операторов.

Для того чтобы распространить его на произвольные множества, достаточно заметить, что для конечномерного пространства V пространство операторов на нем конечномерно, поэтому среди произвольного множества операторов только конечное число линейно независимых.

Задача 2.

23. Пусть $\varphi : V \to V$ - диагонализируемый оператор с простым спектром. Доказать, что любой оператор $\psi : V \to V$ такой, что $\varphi\psi = \psi\varphi$, может быть представлен в виде многочлена от φ. Верно ли это, если спектр оператора φ не прост?

Решение. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ - базис в V, состоящий из общих собственных векторов операторов φ и ψ, существование которого было доказано в предыдущей задаче. То есть $\varphi(\mathbf{e}_i) == \lambda_i \mathbf{e}_i, \psi(\mathbf{e}_i) = \mu_i \mathbf{e}_i$, причем $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Заметим, что существует многочлен $f(t)$ степени не выше $n-1$ такой, что

$$f(\lambda_i) = \mu_i, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{32}$$

Тогда для матриц операторов φ и ψ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ имеем равенство $f(\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$. Отсюда и для операторов $f(\varphi) = \psi$.

Дадим "линейно-алгебраическое" доказательство существования многочлена $f(t)$ степени не выше $n-1$, удовлетворяющего системе (32).

Пусть $W := \mathbb{K}[x]_{n-1}$ - пространство многочленов степени не выше $n-1$. Мы знаем, что $\dim W = n$. Пусть $\theta_i \in W^*$ - набор линейных функционалов, задаваемых формулой

$$\theta_i(h) := h(\lambda_i) \forall h \in W.$$

Покажем, что $\{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ образуют базис в W^*. Так как $\dim W^* == \dim W = n$, достаточно доказать линейную независимость.

Пусть $\sum_{i=1}^n \alpha_i \theta_i = 0$ - равенство нулю линейного функционала. Применяя его к элементам базиса $\{1, x, \ldots, x^{n-1}\}$ в W, получаем, что $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ - решение системы линейных однородных уравнений с матрицей Вандермонда, отвечающей $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Поскольку $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, эта система имеет только тривиальное решение. Тем самым линейная независимость $\{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ доказана.

Пусть $\{g_1, \ldots g_n\}$ - биортогональный (=взаимный) базис в $W \cong W^{**}$ к базису $\{\theta_1, \ldots, \theta_n\}$ в W^*, то есть

$$\theta_i(g_j) = g_j(\lambda_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Тогда $\forall h \in W$ имеем

$$h(t)=\sum_{i=1}^{n} \theta_i(h) g_i(t)=\sum_{i=1}^{n} h\left(\lambda_i\right) g_i(t)$$

(эта формула называется интерполяционной формулой Лагранжа) - формула, задающая многочлен степени не выше $n-1$, принимающий в точках $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ значения $h\left(\lambda_1\right), \ldots, h\left(\lambda_n\right)$, которые могут быть произвольными. В частности, задав значения (32), получим требуемый многочлен $f(t)$.

Нетрудно получить следующий явный вид многочленов g_i :

$$g_i(t)=\frac{\prod_{j \neq i}\left(t-\lambda_j\right)}{\prod_{j \neq i}\left(\lambda_i-\lambda_j\right)}$$

8.3.2 2.2. Комплексификация

Пусть V - векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. Рассмотрим векторное пространство $V \oplus V$ над $\mathbb{R}$, элементами которого являются упорядоченные пары векторов из V с покомпонентными операциями сложения и умножения на вещественные числа. То есть

$$V \oplus V=\{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mid \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V\}$$

$$\left(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1\right)+\left(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2\right)=\left(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2\right)$$

$$\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v})=(\alpha \mathbf{u}, \alpha \mathbf{v}) \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \alpha \in \mathbb{R}$$

Легко проверить, что если $\operatorname{dim} V=n$, то $\operatorname{dim}(V \oplus V)=2 n$, и если $\left\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\right\}$ - базис в V, то $\left\{\left(\mathbf{e}_1, \mathbf{0}\right),\left(\mathbf{0}, \mathbf{e}_1\right),\left(\mathbf{e}_2, \mathbf{0}\right),\left(\mathbf{0}, \mathbf{e}_2\right), \ldots,\left(\mathbf{e}_n, \mathbf{0}\right),\left(\mathbf{0}, \mathbf{e}_n\right)\right\}$ - базис в $V \oplus V$.

Сейчас мы определим умножение элементов $V \oplus V$ на элементы поля $\mathbb{C}$, продолжающее умножение на $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, которое задаст на $V \oplus V$ структуру векторного пространства над $\mathbb{C}$. Из комментария к задаче 1.11 мы знаем, что для этого нужно задать комплексную структуру на $V \oplus V$, то есть такой линейный

оператор $I: V \oplus V \rightarrow V \oplus V$, что $I^2=-\mathrm{id}$ (такой I играет роль "умножения на i "). А именно, положим

$$I(\mathbf{u}, \mathbf{v})=(-\mathbf{v}, \mathbf{u})$$

Линейность I очевидна. Кроме того,

$$I^2(\mathbf{u}, \mathbf{v})=I(-\mathbf{v}, \mathbf{u})=(-\mathbf{u},-\mathbf{v})=-\operatorname{id}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) .$$

Пусть $z:=\alpha+\beta i, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ - комплексное число, тогда

$$(\alpha+\beta i)(\mathbf{u}, \mathbf{v})=(\alpha \mathrm{id}+\beta I)(\mathbf{u}, \mathbf{v})=$$

$$=(\alpha \mathbf{u}, \alpha \mathbf{v})+(-\beta \mathbf{v}, \beta \mathbf{u})=(\alpha \mathbf{u}-\beta \mathbf{v}, \alpha \mathbf{v}+\beta \mathbf{u})$$

Из определения I следует, что $I(\mathbf{v}, \mathbf{0})=(\mathbf{0}, \mathbf{v})$. Чтобы упростить обозначения, обозначим ($\mathbf{u}, \mathbf{0}$) через $\mathbf{u}$, тогда ($\mathbf{u}, \mathbf{v}$) $=\mathbf{u}++i \mathbf{v}$, и в этих обозначениях умножение на комплексные числа запишется в виде

$$(\alpha+\beta i)(\mathbf{u}+i \mathbf{v})=\alpha \mathbf{u}-\beta \mathbf{v}+i(\alpha \mathbf{v}+\beta \mathbf{u}) . \tag{33}$$

Легко проверить, что это определяет на $V \oplus V$ структуру векторного пространства над $\mathbb{C}$, которое мы обозначим $V^{\mathbb{C}}$ и назовем комплексификацией вещественного векторного пространства V. Если $\left\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\right\}$ - базис в V (как векторном пространстве над $\mathbb{R}$), то $\left\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\right\}$ (то есть $\left\{\left(\mathbf{e}_1, \mathbf{0}\right),\left(\mathbf{e}_2, \mathbf{0}\right), \ldots,\left(\mathbf{e}_n, \mathbf{0}\right)\right\}$) - базис в $V^{\mathbb{C}}$ (как в векторном пространстве над $\mathbb{C}$).

Заметим, что для каждого подпространства $W \subset V^{\mathbb{C}}$ определено его комплексное сопряжение $\bar{W} \subset V^{\mathbb{C}}$, задаваемое условием $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in W \Leftrightarrow(\mathbf{u},-\mathbf{v}) \in \bar{W}$.

Задача 2.

24. Доказать, что подпространство $W \subset V^{\mathbb{C}}$ является комплексификацией некоторого подпространства $U \subset V$ тогда и только тогда, когда $W=\bar{W}$.

Решение. Пусть $W=\bar{W}$, тогда $\{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in W \quad \Leftrightarrow \quad(\mathbf{u},-\mathbf{v}) \in \in W\} \quad \Leftrightarrow \quad\{(\mathbf{u}, \mathbf{0}) \in W,(\mathbf{0}, \mathbf{v}) \in W\}$. В других обозначениях, $\mathbf{u}+i \mathbf{v} \in W \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u}, i \mathbf{v} \in W$. Кроме того, так как W является векторным пространством над $\mathbb{C}$, то $\mathbf{u} \in W \Leftrightarrow i \mathbf{u} \in W$. Теперь легко видеть, что W является комплексификацией подпространства $U \subset V$, состоящего из таких $\mathbf{u} \in V$, что $(\ \mathbf{u}, \mathbf{0}) \in W$.

Обратная импликация очевидна.

Пусть $\varphi : V \to V$ – $\mathbb{R}$-линейный оператор. Определим отображение $\varphi^{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$ формулой $\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v}))$, то есть $\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) + i\varphi(\mathbf{v})$. Его линейность над $\mathbb{C}$, то есть тождество

$$\varphi^{\mathbb{C}}((\alpha + i\beta)(\mathbf{u} + i\mathbf{v})) = (\alpha + i\beta)\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{u} + i\mathbf{v}),$$

проверяется непосредственно. Таким образом, $\varphi^{\mathbb{C}}$ – $\mathbb{C}$-линейный оператор на $V^{\mathbb{C}}$. Заметим, что $\varphi^{\mathbb{C}}$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в $V^{\mathbb{C}}$ имеет ту же матрицу, что и φ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в V. В частности, их характеристические многочлены совпадают.

У оператора $\varphi : V \to V$, где V - векторное пространство над $\mathbb{R}$, может не оказаться ни одного собственного вектора. Причина этого состоит в том, что характеристический многочлен $\chi_\varphi(t)$ может не иметь вещественных корней (в случае, когда размерность V четна). После комплексификации для каждого корня (в том числе комплексного) собственные векторы оператора $\varphi^{\mathbb{C}}$ в $V^{\mathbb{C}}$ будут существовать.

Задача 2.

25. Найти собственные векторы комплексификации $\varphi^{\mathbb{C}}$ оператора φ поворота на угол $\frac{\pi}{2}$ в комплексификации $V^{\mathbb{C}}$ евклидовой плоскости V.

Решение. В правом ортонормированном базисе в V оператор φ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Его характеристический многочлен $\chi_\varphi(t) = t^2 + 1$ имеет корни $\pm i$. Соответствующие собственные векторы можно найти стандартным способом, решая системы линейных уравнений, но можно также воспользоваться следующими соображениями. Заметим, что такую же матрицу имеет оператор дифференцирования в базисе $\{\sin x, \cos x\}$ линейной оболочки $\langle \sin x, \cos x \rangle$ функций на $\mathbb{R}$(см. задачу 2.5). Из анализа известно, что собственными функциями оператора дифференцирования являются экспоненты: общее решение дифференциального уравнения $f'(x) = \lambda f(x)$, где $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \lambda \in \mathbb{C}$, имеет вид $C \exp(\lambda x)$, где $C \in \mathbb{C}$. Беря линейные комбинации функций $\sin x, \cos x$ с коэффициентами из $\mathbb{R}$, экспоненту не получить, другое дело - комплексные линейные комбинации. По формуле Эйлера, $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$, значит, собственный вектор, отвечающий собственному значению i, имеет координатный столбец $(i, 1)^T$, а собственный вектор, отвечающий собственному значению $t = -i$, - столбец $(-i, 1)^T$.

Задача 2.

26. Доказать, что у любого линейного оператора φ на векторном пространстве V над $\mathbb{R}, \dim V \geq 1$, есть 1 - или 2 -мерное инвариантное подпространство.

Решение. Если характеристический многочлен $\chi_\varphi(t)$ имеет корень $\lambda \in \mathbb{R}$, то ему отвечает собственный вектор $\mathbf{v} \in V$ и одномерное подпространство $\langle \mathbf{v} \rangle \subset V$ является φ-инвариантным.

Пусть $\chi_\varphi(t)$ не имеет вещественных корней (в частности, размерность V четна). Пусть $\lambda = \mu + i\nu$ - комплексный корень $\chi_\varphi(t)$. Рассмотрим $\mathbb{C}$-линейный оператор $\varphi^{\mathbb{C}} : V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$. Тогда λ является корнем $\chi_{\varphi^{\mathbb{C}}}(t) = \chi_\varphi(t)$ и существует собственный вектор оператора $\varphi^{\mathbb{C}}$ с собственным значением λ, то есть ненулевой вектор $\mathbf{w} \in V^{\mathbb{C}}$ такой, что $\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{w}) = \lambda \mathbf{w}$. Пусть $\mathbf{w} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$, где $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Тогда

$$\varphi^{\mathbb{C}}(\mathbf{w}) = \lambda \mathbf{w} = (\mu + i\nu)(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) =$$
$$= \mu\mathbf{u} - \nu\mathbf{v} + i(\nu\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{u}) + i\varphi(\mathbf{v})$$

(где мы использовали (33) и определение $\varphi^{\mathbb{C}}$). Отсюда легко получить, что $\varphi(\mathbf{u}) = \mu\mathbf{u} - \nu\mathbf{v}, \quad \varphi(\mathbf{v}) = \nu\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}$. Также легко проверяется, что $\mathbf{u} - i\mathbf{v}$ - собственный вектор оператора $\varphi^{\mathbb{C}}$ с собственным значением $\mu - i\nu = \bar{\lambda}$. Так как $\lambda \neq \bar{\lambda}$ при $\lambda \notin \mathbb{R}$, то векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ линейно независимы. Значит, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \subset V$ – φ-инвариантная плоскость.

Заметим, что ограничение φ на инвариантное подпространство $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \subset V$ в базисе $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{pmatrix}$.

8.3.3 2.3. Факторпространство и фактороператор

Пусть V - векторное пространство над некоторым полем $\mathbb{K}$, $U \subset V$ - его подпространство. Определим следующее отношение эквивалентности на V. По определению
$$\mathbf{v} \sim \mathbf{v}' \Leftrightarrow \mathbf{v}' - \mathbf{v} \in U.$$

Проверим, что это - действительно отношение эквивалентности. 1) Рефлексивность: $\forall \mathbf{v} \in V \mathbf{v} \sim \mathbf{v}$. Действительно, $\mathbf{v} - \mathbf{v} = \mathbf{0} \in U$ (любое подпространство содержит нулевой вектор). 2) Симметричность: $\mathbf{v} \sim \mathbf{v}' \Rightarrow \mathbf{v}' \sim \mathbf{v}$. Действительно, если $\mathbf{v}' - \mathbf{v} \in U$,

то $\mathbf{v} - \mathbf{v}' \in U$ (подпространство вместе с каждым вектором содержит его противоположный). 3) Транзитивность: $\mathbf{v} \sim \mathbf{v}', \mathbf{v}' \sim\sim \mathbf{v}'' \Rightarrow \mathbf{v} \sim \mathbf{v}''$. Действительно, если $\mathbf{v}' - \mathbf{v} \in U, \mathbf{v}'' - \mathbf{v}' \in U$, то $\mathbf{v}'' - \mathbf{v} = (\mathbf{v}'' - \mathbf{v}') + (\mathbf{v}' - \mathbf{v}) \in U($ подпространство вместе с каждой парой векторов содержит их сумму).

Обозначим через $[\mathbf{v}]$ класс эквивалентности $\mathbf{v} \in V$, то есть $[\mathbf{v}] := \{\mathbf{v}' \in V \mid \mathbf{v}' \sim \mathbf{v}\}$. Таким образом, $[\mathbf{v}]$ - подмножество V, а произвольный элемент $\mathbf{v}' \in [\mathbf{v}]$ - представитель класса $[\mathbf{v}]$. Другое его описание: $[\mathbf{v}] = \{\mathbf{v} + \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in U\}$. В частности, $[\mathbf{0}] = U$. Заметим, что
$$[\mathbf{v}_1] = [\mathbf{v}_2] \Leftrightarrow \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \in U \Leftrightarrow \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{u}, \text{ где } \mathbf{u} \in U.$$

Рассмотрим новое множество, элементами которого являются классы эквивалентности векторов $\mathbf{v} \in V$. Обозначим его V/U. Таким образом, $[\mathbf{v}] \in V/U$. Превратим множество V/U в векторное пространство над $\mathbb{K}$. Для этого нужно определить сумму элементов вида $[\mathbf{v}]$, их умножение на скаляры из $\mathbb{K}$ и проверить выполнение аксиом векторного пространства. Положим по определению
$$[\mathbf{v}_1] + [\mathbf{v}_2] := [\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2]\,, \quad \lambda[\mathbf{v}] := [\lambda \mathbf{v}].$$

Ключевой момент заключается в проверке корректности введенных операций сложения и умножения на скаляры (см. определение 0.12). Дело в том, что сумму классов $[\mathbf{v}_1]$ и $[\mathbf{v}_2]$ мы определили как класс суммы их конкретных представителей $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. Нужно проверить, что последний не зависит от выбора этих представителей. То же для умножения на скаляры.

Таким образом, нужно проверить, что если $[\mathbf{v}_1'] = [\mathbf{v}_1]\,, [\mathbf{v}_2'] == [\mathbf{v}_2]$, то $[\mathbf{v}_1' + \mathbf{v}_2'] = [\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2]$, а также если $[\mathbf{v}'] = [\mathbf{v}]$, то $[\lambda \mathbf{v}'] == [\lambda \mathbf{v}]$.

Итак, проверим корректность операции сложения. Если $[\mathbf{v}_1'] == [\mathbf{v}_1]$, то $\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_1 \in U$, аналогично из $[\mathbf{v}_2'] = [\mathbf{v}_2]$ вытекает $\mathbf{v}_2' - \mathbf{v}_2 \in U$. Тогда $(\mathbf{v}_1' + \mathbf{v}_2') - (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = (\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_1) + (\mathbf{v}_2' - \mathbf{v}_2) \in U$, то есть $[\mathbf{v}_1' + \mathbf{v}_2'] = [\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2]$.

Проверка корректности умножения на скаляры:
$$[\mathbf{v}'] = [\mathbf{v}] \Rightarrow \mathbf{v}' - \mathbf{v} \in U \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda \mathbf{v}' - \lambda \mathbf{v} = \lambda\,(\mathbf{v}' - \mathbf{v}) \in U \Rightarrow [\lambda \mathbf{v}'] = [\lambda \mathbf{v}].$$

Аксиомы векторного пространства над полем $\mathbb{K}$ для множе-

ства V/U с введенными операциями сложения и умножения на скаляры следуют из соответствующих аксиом для V (в частности, роль нулевого вектора в V/U играет $[\mathbf{0}]$, противоположного к $[\mathbf{v}]$ – $[-\mathbf{v}]$, и т.д.). Таким образом, V/U само является векторным пространством над полем $\mathbb{K}$, которое называется факторпространством пространства V по подпространству U.

Задача 2.

27. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k\}$ - базис в подпространстве $U \subset V$. Тогда $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n\}$ - базис в $V \Leftrightarrow \{[\mathbf{e}_{k+1}]\,, \dots, [\mathbf{e}_n]\}$ - базис в V/U.

Решение. $\Rightarrow$ Имеем
$$\sum_{j=k+1}^{n} \beta_j\,[\mathbf{e}_j] = [\mathbf{0}] \Leftrightarrow \sum_{j=k+1}^{n} \beta_j \mathbf{e}_j \in U \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sum_{j=k+1}^{n} \beta_j \mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{e}_i \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \beta_j = 0, \quad k+1 \le j \le n, \quad \alpha_i = 0, \quad 1 \le i \le k,$$

поскольку система векторов $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ линейно независима.
Пусть теперь $\mathbf{v} \in V$ - произвольный вектор. Тогда

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \mathbf{e}_i \Rightarrow [\mathbf{v}] = \sum_{j=k+1}^{n} \mu_j [\mathbf{e}_j]$$

$\Leftarrow$ Так как $\{[\mathbf{e}_{k+1}], \ldots, [\mathbf{e}_n]\}$ - базис в V/U, то

$$\sum_{j=k+1}^{n} \beta_j [\mathbf{e}_j] = [\mathbf{0}] \quad \Leftrightarrow \quad \beta_j = 0, \quad k+1 \leq j \leq n$$

То есть

$$\sum_{j=k+1}^{n} \beta_j \mathbf{e}_j \in U \quad \Leftrightarrow \quad \beta_j = 0, \quad k+1 \leq j \leq n \tag{34}$$

Пусть

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{e}_i = \sum_{j=k+1}^{n} \beta_j \mathbf{e}_j.$$

Тогда из (34) следует, что $\beta_j = 0, \quad k+1 \leq j \leq n$. Тогда $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{e}_i = 0$, и так как $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ - базис в U, то $\alpha_i = 0, 1 \leq\leq i \leq k$. Тем самым доказана линейная независимость векторов $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.

Пусть $\mathbf{v} \in V$ - произвольный вектор. Тогда $[\mathbf{v}] = \sum_{j=k+1}^{n} \mu_j [\mathbf{e}_j]$. Значит,

$$\mathbf{v} - \sum_{j=k+1}^{n} \mu_j \mathbf{e}_j \in U \Rightarrow \mathbf{v} - \sum_{j=k+1}^{n} \mu_j \mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^{k} \mu_i \mathbf{e}_i.$$

Таким образом, любой вектор $\mathbf{v} \in V$ раскладывается по системе $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.

Заметим, что из предыдущей задачи следует, что $\dim V/U == \dim V - \dim U$. (Другое доказательство этого факта: имеем сюръективное линейное отображение ("каноническую проекцию")

$$\pi : V \to V/U, \quad \pi(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]$$

причем, как легко видеть, $\ker \pi = U$. Тогда по известной формуле $\dim \ker \pi + \dim \operatorname{im} \pi = \dim V$ имеем $\dim U + \dim V/U = \dim V$.)

Пусть $\varphi : V \to V$ - линейный оператор, $U \subset V$ - его инвариантное подпространство, то есть $\varphi(U) \subset U$. Тогда формула $\bar{\varphi}([\mathbf{v}]) = [\varphi(\mathbf{v})]$ определяет линейный оператор $\bar{\varphi} : V/U \to V/U$, называемый фактороператором.

Проверим корректность определения фактороператора (в терминологии вводной главы, согласованность отношения эквивалентности с оператором как унарной операцией). То есть нужно проверить импликацию

$$[\mathbf{v}'] = [\mathbf{v}] \Rightarrow [\varphi(\mathbf{v}')] = [\varphi(\mathbf{v})].$$

Действительно, используя φ-инвариантность U, имеем

$$[\mathbf{v}'] = [\mathbf{v}] \Rightarrow \mathbf{v}' - \mathbf{v} \in U \Rightarrow \varphi(\mathbf{v}') - \varphi(\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{v}' - \mathbf{v}) \in U \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad [\varphi(\mathbf{v}')] = [\varphi(\mathbf{v})].$$

Линейность $\bar{\varphi}$ следует из линейности φ, например,

$$\bar{\varphi}([\mathbf{v}_1] + [\mathbf{v}_2]) = \bar{\varphi}([\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2]) = [\varphi(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)] = [\varphi(\mathbf{v}_1) + \varphi(\mathbf{v}_2)] =$$
$$= [\varphi(\mathbf{v}_1)] + [\varphi(\mathbf{v}_2)] = \bar{\varphi}([\mathbf{v}_1]) + \bar{\varphi}([\mathbf{v}_2]).$$

Задача 2.

28. Пусть оператор $\varphi : V \rightarrow V$ диагонализируем, $U \subset\subset V - \varphi$-инвариантное подпространство. Тогда фактороператор $\bar{\varphi} : V/U \rightarrow V/U$ тоже диагонализируем.

Решение. Используя решение задачи 2.21 , найдем базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ в V из собственных векторов оператора $\varphi, \varphi(\mathbf{e}_i) == \mu_i \mathbf{e}_i$ (при этом μ_i не предполагаются попарно различными) такой, что $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ - базис в U, а $\{\mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ - базис в φ-инвариантном прямом дополнении $W, V = U \oplus W$. Из задачи 2.27 мы знаем, что $\{[\mathbf{e}_{k+1}], \ldots, [\mathbf{e}_n]\}$ - базис в V/U. Тогда $\bar{\varphi}([\mathbf{e}_j]) = \mu_j [\mathbf{e}_j], k+1 \leq j \leq n$.

В частности, если блочная матрица $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, где A и $C-$ квадратные подматрицы, диагонализируема, то и матрицы A и C диагонализируемы (поскольку являются матрицами ограничения оператора и фактороператора в соответствующих базисах). Обратное, конечно, неверно.

Используя понятия факторпространства и фактороператора, докажем следующий полезный результат.

Задача 2.

29. Пусть V - векторное пространство над полем $\mathbb{C}$, $\varphi : V \rightarrow V$ - линейный оператор. Тогда в V существует такой базис, в котором матрица оператора φ является верхнетреугольной.

Решение. Воспользуемся индукцией по $n = \dim V$. При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть утверждение верно для пространств размерности, не превосходящей $n-1$, докажем тогда его справедливость для n.

Любой линейный оператор над $\mathbb{C}$ имеет собственный вектор. Некоторый собственный вектор оператора φ обозначим $\mathbf{e}_1$. То есть $\mathbf{e}_1 \neq \mathbf{0}, \varphi(\mathbf{e}_1) = \lambda \mathbf{e}_1$. Подпространство $U := \langle \mathbf{e}_1 \rangle$ является инвариантным относительно φ. Рассмотрим фактороператор
$\bar{\varphi} : V/U \rightarrow V/U$. Так как $\dim V/U = \dim V - \dim U = n-1$, то по предположению индукции существует базис $\{[\mathbf{e}_2], \ldots, [\mathbf{e}_n]\}$ в V/U, в котором $\bar{\varphi}$ имеет верхнюю треугольную матрицу. Последнее означает, что

$$\bar{\varphi}([\mathbf{e}_k]) = a_{2k} [\mathbf{e}_2] + \ldots + a_{kk} [\mathbf{e}_k] \quad \text{при всех } 2 \leq k \leq n. \tag{35}$$

Равенство (35) можно записать как $[\varphi(\mathbf{e}_k)] = [a_{2k}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{kk}\mathbf{e}_k]$, что эквивалентно тому, что $\varphi(\mathbf{e}_k) - (a_{2k}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{kk}\mathbf{e}_k) \in U$, то есть $\varphi(\mathbf{e}_k) = a_{1k}\mathbf{e}_1 + a_{2k}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{kk}\mathbf{e}_k$ для некоторых $a_{1k} \in\in \mathbb{C}$ при $2 \leq k \leq n$. Кроме того, $\varphi(\mathbf{e}_1) = \lambda \mathbf{e}_1 = a_{11}\mathbf{e}_1$. Тогда в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ (см. задачу 2.27) пространства V оператор φ имеет верхнюю треугольную матрицу.

Другой способ решения этой задачи - воспользоваться существованием $n-1$-мерного инвариантного подпространства, которое следует из задачи 2.18 , и снова использовать индукцию по n. Вот еще один способ доказательства существования $n-1$-мерного инвариантного подпространства. Заметим, что $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ такое, что $\ker(\varphi - \lambda \operatorname{id}_V) \neq \{\mathbf{0}\}$. Тогда $\dim(\operatorname{im}(\varphi - \lambda \operatorname{id}_V)) \leq n-1$. Пусть U - произвольное $n-1$-мерное подпространство в V, содержащее $\operatorname{im}(\varphi - \lambda \operatorname{id}_V)$. Тогда U является φ-инвариантным. Действительно, $\forall \mathbf{u} \in U \varphi(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{u}) - \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{u} \in U$, поскольку $\varphi(\mathbf{u}) - \lambda\mathbf{u} \in U$ и $\lambda\mathbf{u} \in U$.

Задача 2.

30. Пусть $\varphi : V \rightarrow V$ - нильпотентный линейный оператор на конечномерном пространстве V над полем $\mathbb{K}$. Тогда в V существует такой базис, в котором матрица оператора φ является верхней нильтреугольной.

Решение. Так же, как и в предыдущей задаче, используем индукцию по $n := \dim V$. Для $n = 1 \varphi$ - нулевой оператор. Пусть утверждение верно для операторов на пространствах $V, \dim V \leq\leq n-1$. Если φ нильпотентен, то $\ker \varphi \neq \{\mathbf{0}\} \Rightarrow \exists \mathbf{e}_1 \neq \mathbf{0}$ такой, что $\varphi(\mathbf{e}_1) = \mathbf{0}$. Очевидно, что подпространство $\langle \mathbf{e}_1 \rangle \subset V \varphi$-инвариантно. Рассмотрим фактороператор $\bar{\varphi} : V/U \rightarrow V/U$, из его определения $\bar{\varphi}([\mathbf{v}]) = [\varphi(\mathbf{v})] \forall \mathbf{v} \in V$ легко следует, что он также нильпотентен. Поскольку $\dim V/U = n-1$, то по предположению индукции существует базис $\{[\mathbf{e}_2], \ldots, [\mathbf{e}_n]\}$ в V/U, в котором матрица $\bar{\varphi}$ является верхней нильтреугольной. Последнее означает, что

$$\bar{\varphi}([\mathbf{e}_k]) = a_{2k} [\mathbf{e}_2] + \ldots + a_{k-1k} [\mathbf{e}_{k-1}] \quad \text{при всех} \quad 2 \leq k \leq n. \tag{36}$$

Равенство (36) можно записать как

$$[\varphi(\mathbf{e}_k)] = [a_{2k}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{k-1k}\mathbf{e}_{k-1}]$$

что эквивалентно тому, что $\varphi(\mathbf{e}_k) - (a_{2k}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{k-1k}\mathbf{e}_{k-1}) \in U$, то есть $\varphi(\mathbf{e}_k) = a_{1k}\mathbf{e}_1 + a_{2k}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{k-1k}\mathbf{e}_{k-1}$ для некоторых $a_{1k} \in \mathbb{K}$ при $2 \le k \le n$. Кроме того, $\varphi(\mathbf{e}_1) = \mathbf{0}$. Тогда в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ (см. задачу 2.27) пространства V оператор φ имеет верхнюю нильтреугольную матрицу. В частности, все собственные значения нильпотентного оператора равны 0 .

Читатель, желающий потренироваться в проведении доказательств индукцией по размерности с использованием факторпространств, может попробовать доказать этим способом теорему Гамильтона-Кэли для алгебраически замкнутого поля (такое доказательство дано в [28], ч. 1, § 8).

Опишем способ получения явных выражений для коэффициентов характеристического многочлена (25) через матрицу A оператора $\varphi : V \to V$ (где V - векторное пространство над $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$). Пока мы знаем явные выражения только для двух коэффициентов - перед λ^{n-1}(а именно $-\operatorname{tr} A$) и свободного члена (а именно $(-1)^n \det A$).

Докажем предварительно один результат о симметрических многочленах [26]. Пусть $\sigma_r(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n], 1 \le r \le n$ элементарные симметрические многочлены, определяемые формулами

$$\sigma_r(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_r \le n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r}$$

Определим также симметрические многочлены

$$s_r(x_1, \ldots, x_n) := x_1^r + x_2^r + \ldots + x_n^r.$$

Лемма 2.31. Для любых $1 \le k \le n$ имеет место соотночение

$$\begin{gathered} s_k(x_1, \ldots, x_n) - \sigma_1(x_1, \ldots, x_n)\, s_{k-1}(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \\ +(-1)^k k \sigma_k(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{gathered} \tag{37}$$

Доказательство. Имеет место тождество

$$\prod_{i=1}^{k}(x - x_i) = x^k - \sigma_1(x_1, \ldots, x_k)\, x^{k-1} + \ldots + (-1)^k \sigma_k(x_1, \ldots, x_k).$$

Подставим в него $x = x_i, 1 \le i \le k$ и просуммируем полученные равенства, получим

$$\begin{gathered} 0 = s_k(x_1, \ldots, x_k) - \sigma_1(x_1, \ldots, x_k)\, s_{k-1}(x_1, \ldots, x_k) + \ldots + \\ +(-1)^k k \sigma_k(x_1, \ldots, x_k) \end{gathered}$$

тем самым требуемая формула (37) доказана в случае $k = n$.
Далее воспользуемся индукцией по $l = n - k$. При $l = 0$ справедливость тождества установлена. Предположим, что тождество верно для всех $0 \le l < n - k$, покажем, что тогда оно верно для $n - k$. Многочлен, стоящий в левой части (37), - симметрический многочлен от $x_1, \ldots, x_n$. Положим в нем $x_n = 0$. Так как при $r \le n - 1$

$$\sigma_r(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = \sigma_r(x_1, \ldots, x_{n-1})$$
$$s_r(x_1, \ldots x_{n-1}, 0) = s_r(x_1, \ldots x_{n-1})$$

то при $x_n = 0$ многочлен, стоящий в левой части (37), равен нулю по предположению индукции. Значит, он делится на x_n, а поскольку он симметрический, и на $\sigma_n(x_1, \ldots, x_n)$. Так как его степень есть $k < n$, то он равен нулю.

Пользуясь результатом задачи 2.29 , найдем базис, в котором матрица A оператора φ верхняя треугольная (предварительно комплексифицировав V в случае поля $\mathbb{R}$). Тогда на ее главной диагонали стоят $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ - собственные значения φ (с учетом кратности). По формуле Виета:

[226] По поводу определения и свойств симметрических многочленов см. [12], гл. 3, § 8 или [25], гл. 6, § 2.

$$
\chi_{\varphi}(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\left(\lambda-\lambda_{i}\right)=\lambda^{n}-\sigma_{1}\left(\lambda_{1}, \ldots, \lambda_{n}\right) \lambda^{n-1}+ \\
+\sigma_{2}\left(\lambda_{1}, \ldots, \lambda_{n}\right) \lambda^{n-2}+\ldots+(-1)^{n} \sigma_{n}\left(\lambda_{1}, \ldots, \lambda_{n}\right) \tag{38}
$$

где $\sigma_{r}\left(\lambda_{1}, \ldots, \lambda_{n}\right)-r$-й элементарный симметрический многочлен от переменных $\lambda_{1}, \ldots, \lambda_{n}$, который равен

$$
\sigma_{r}\left(\lambda_{1}, \ldots, \lambda_{n}\right)=\sum_{1 \leq i_{1}<\ldots<i_{r} \leq n} \lambda_{i_{1}} \ldots \lambda_{i_{r}},
$$

причем $\operatorname{tr} A=\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i}=\sigma_{1}\left(\lambda_{1}, \ldots, \lambda_{n}\right), \quad \operatorname{det} A=\prod_{i=1}^{n} \lambda_{i}==\sigma_{n}\left(\lambda_{1}, \ldots, \lambda_{n}\right)$. Таким образом, нам нужно найти выражения остальных элементарных симметрических многочленов от собственных значений через матрицу A.

Поскольку матрица A верхняя треугольная, очевидно равенctbo

$$
\operatorname{tr}\left(A^{r}\right)=\lambda_{1}^{r}+\ldots+\lambda_{n}^{r}=s_{r}\left(\lambda_{1}, \ldots, \lambda_{n}\right).
$$

Используя это наблюдение и формулу (37), мы можем получить выражения для всех коэффициентов характеристического многочлена (38) через $\operatorname{tr}\left(A^{r}\right), 1 \leq r \leq n$.

Заметим, что числа $\operatorname{tr}\left(A^{r}\right)$ не зависят от базиса в V, в котором записана матрица A оператора φ. Действительно, если $A^{\prime}=C^{-1} A C$, то $\operatorname{tr}\left(A^{\prime r}\right)=\operatorname{tr}\left(C^{-1} A^{r} C\right)=\operatorname{tr}\left(A^{r}\right)$.

Вот несколько первых коэффициентов $\chi_{\varphi}(\lambda)$:

$$
\sigma_{1}\left(\lambda_{1}, \ldots, \lambda_{n}\right)=\operatorname{tr} A, \quad \sigma_{2}\left(\lambda_{1}, \ldots, \lambda_{n}\right)=\frac{1}{2}\left((\operatorname{tr} A)^{2}-\operatorname{tr}\left(A^{2}\right)\right),
$$

$$
\sigma_{3}\left(\lambda_{1}, \ldots, \lambda_{n}\right)=\frac{1}{6}\left((\operatorname{tr} A)^{3}-3 \operatorname{tr}(A) \operatorname{tr}\left(A^{2}\right)+2 \operatorname{tr}\left(A^{3}\right)\right)
$$

и т.д. Кстати, определитель $\sigma_{n}\left(\lambda_{1}, \ldots, \lambda_{n}\right)=\operatorname{det} A$ также может быть выражен через $\operatorname{tr}\left(A^{r}\right), 1 \leq r \leq n$.

Отметим еще, что, согласно основной теореме о симметрических многочленах, произвольный симметрический многочлен $f \in \mathbb{Z}\left[x_{1}, \ldots, x_{n}\right]$ единственным образом представляется в виде многочлена с целыми коэффициентами от элементарных симметрических многочленов $\sigma_{1}\left(x_{1}, \ldots, x_{n}\right), \ldots, \sigma_{n}\left(x_{1}, \ldots, x_{n}\right)$ (то есть подкольцо симметрических многочленов в $\mathbb{Z}\left[x_{1}, \ldots, x_{n}\right]$ само есть кольцо многочленов от n переменных $\mathbb{Z}\left[\sigma_{1}, \ldots, \sigma_{n}\right]$). В частности, это верно для $s_{r}\left(x_{1}, \ldots, x_{n}\right) \in \mathbb{Z}\left[x_{1}, \ldots, x_{n}\right], 1 \leq r \leq n$. В свою очередь, многочлены $\sigma_{r}\left(x_{1}, \ldots, x_{n}\right), 1 \leq r \leq n$ тоже могут быть представлены как многочлены от $s_{1}\left(x_{1}, \ldots, x_{n}\right), \ldots, s_{n}\left(x_{1}, \ldots, x_{n}\right)$, но только уже с рациональными коэффициентами (то есть подкольцо симметрических многочленов в кольце $\mathbb{Q}\left[x_{1}, \ldots, x_{n}\right]$ есть $\mathbb{Q}\left[\sigma_{1}, \ldots, \sigma_{n}\right]=\mathbb{Q}\left[s_{1}, \ldots, s_{n}\right]$) - отсюда знаменатели в приведенных выше формулах.

8.3.4 2.4. Жорданова нормальная форма

Даже в случае векторного пространства V над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ не для всякого оператора $\varphi: V \rightarrow V$ существует базис в V, состоящий из собственных векторов оператора φ. Простейшим примером является оператор на двумерном пространстве с матрицей $A=\left(\begin{smallmatrix}0 & 1 \\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$. Его единственным собственным значением является 0 , и соответствующее собственное подпространство, совпадающее с ядром, есть линейная оболочка вектора $(1,0)^{T}$. Таким образом, оператор с такой матрицей не приводится к диагональному виду, иными словами, не существует обратимой матрицы $C \in \mathrm{GL}_{2}(\mathbb{K})$ такой, что $C^{-1} A C=\Lambda$, где матрица Λ диагональна.

Определение 2.32. Жордановой матрицей называется блочнодиагональная матрица с жордановыми клетками $J_{k}(\lambda)$ (вообще говоря, с разными собственными значениями λ) в качестве диагональных блоков. Жордановым базисом для оператора $\varphi: V \rightarrow\rightarrow V$ называется такой базис в V, в котором φ имеет жорданову матрицу. Последняя называется жордановой нормальной формой оператора φ.

Теорема 2.33. Для любого линейного оператора $\varphi : V \rightarrow V$ на конечномерном пространстве V над полем $\mathbb{C}$ существует жорданов базис. Корданова нормальная форма оператора φ определена однозначно с точностью до перестановки жордановых клеток.

Заметим, что диагональный вид - частный случай жордановой нормальной формы, когда все жордановы клетки имеют размер 1.

Если оператор φ нильпотентен, то все его жордановы клетки отвечают $\lambda = 0$, и обратно (см. задачу 2.15 и комментарий к ней).

Задача 2.

34. Доказать существование жорданова базиса для нильпотентного оператора $\varphi : V \rightarrow V$.

В более развернутом виде нам нужно доказать следующее. Если $\varphi : V \rightarrow V$ - линейный оператор на конечномерном векторном пространстве V такой, что $\varphi^m = 0$ для некоторого $m \geq 1$, то

в V существует такой набор векторов $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ и отвечающий им набор натуральных чисел $k_1, \ldots, k_r$, что система векторов

$$\varphi^{k_1-1}(\mathbf{v}_1), \varphi^{k_1-2}(\mathbf{v}_1), \ldots, \varphi(\mathbf{v}_1), \mathbf{v}_1, \ldots, \varphi^{k_r-1}(\mathbf{v}_r)$$
$$\varphi^{k_r-2}(\mathbf{v}_r), \ldots, \varphi(\mathbf{v}_r), \mathbf{v}_r$$

где $\varphi^{k_i}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{0}$ для всех $1 \leq i \leq r$, является базисом в V[27]. Легко видеть, что это - жорданов базис для φ, и обратно, любой жорданов базис имеет такой вид.

Данную задачу можно решить разными способами, например, их можно найти в [12] и [26]. Ниже приведено доказательство, основанное на работе [38].

Решение задачи 2.34. Воспользуемся индукцией по $\dim V$. Если $\dim V = 1$, то $\varphi = 0$ и требуемый результат, очевидно, верен. Для доказательства шага индукции предположим, что $\dim V \geq 2$. Ясно, что $\varphi(V) := \operatorname{im} \varphi \subset V$, но при этом $\varphi(V) \neq V$, ибо тогда $\varphi^m(V) = \varphi^{m-1}(V) = \ldots = \varphi(V) = V$, что противоречит равенству $\varphi^m = 0$. Кроме того, в случае $\varphi = 0$ требуемый результат тривиален. Таким образом, мы можем предположить, что

$$0 \subsetneqq \varphi(V) \subsetneqq V.$$

По предположению индукции (примененному к пространству $U := \varphi(V)$ и ограничению на него оператора φ) в U существует набор векторов $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_l$ такой, что

$$\mathbf{u}_1, \varphi(\mathbf{u}_1), \ldots, \varphi^{l_1-1}(\mathbf{u}_1), \ldots, \mathbf{u}_s, \varphi(\mathbf{u}_s), \ldots, \varphi^{l_s-1}(\mathbf{u}_s) \tag{39}$$

- базис в U и $\varphi^{l_i}(\mathbf{u}_i) = \mathbf{0}$ для $1 \leq i \leq s$.

Для $1 \leq i \leq s$ выберем такие векторы $\mathbf{v}_i \in V$, что $\varphi(\mathbf{v}_i) = \mathbf{u}_i$ (такие $\mathbf{v}_i$ существуют, поскольку $\mathbf{u}_i \in \varphi(V)$). Подпространство $\ker \varphi \subset V$ содержит линейно независимые векторы $\varphi^{l_1-1}(\mathbf{u}_1), \ldots, \varphi^{l_s-1}(\mathbf{u}_s)$. Дополним эти векторы до базиса в $\ker \varphi$ векторами $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_p$. Мы докажем, что

$$\mathbf{v}_1, \varphi(\mathbf{v}_1), \ldots, \varphi^{l_1}(\mathbf{v}_1), \ldots, \mathbf{v}_s, \varphi(\mathbf{v}_s), \ldots, \varphi^{l_s}(\mathbf{v}_s), \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_p \tag{40}$$

- требуемый (с точностью до перестановки векторов) базис в V. Для доказательства линейной независимости системы (40)

применим φ к произвольной линейной комбинации указанных векторов, равной нулю. Тогда в силу линейной независимости системы (39) получим, что коэффициенты перед векторами

$$\mathbf{v}_1, \ldots, \varphi^{l_1-1}(\mathbf{v}_1), \ldots, \mathbf{v}_s, \ldots, \varphi^{l_s-1}(\mathbf{v}_s)$$

равны нулю. Теперь линейная независимость (40) следует из того, что

$$\varphi^{l_1}(\mathbf{v}_1), \ldots, \varphi^{l_s}(\mathbf{v}_s), \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_p$$

- базис в $\ker \varphi$.

Проверим теперь, что число векторов в (40) равно $\dim V$. Действительно, из (39) $\dim \operatorname{im} \varphi = l_1 + \ldots + l_s$; кроме того, $\dim \ker \varphi == s + p$. Тогда

$$\dim V = \operatorname{dimim} \varphi + \dim \ker \varphi = (l_1 + 1) \ldots + (l_s + 1) + p,$$

а это - в точности число элементов в системе (40).

[227] Заметим, что порядок нильпотентности φ тогда равен $\max_{1 \leq i \leq r}(k_i)$.

Задача 2.

35. Пусть V - конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{C}, \varphi : V \to V$ - линейный оператор такой, что $\varphi^k == \mathrm{id}_V$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Доказать, что φ диагонализируем.

Решение. 1-й способ. Пусть J - жорданова нормальная форма оператора φ. Она определена однозначно с точностью до перестановки клеток. Пусть она не является диагональной, это означает, что хотя бы одна клетка $J_r(\lambda)$ имеет размер $r > 1$. Заметим еще, что $\lambda \neq 0$, поскольку φ обратим.

Заметим теперь, что если $r \geq 2$, то ни в какой натуральной степени $J_r(\lambda)$ не может быть диагональной матрицей. Действительно, $J_r(\lambda) = \lambda E + J_r$ (где $J_r := J_r(0)$) и матрицы E и J_r коммутируют, поэтому по формуле бинома имеем

$$J_r(\lambda)^k = \lambda^k E + k\lambda^{k-1} J_r + \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} J_r^2 + \ldots + J_r^k$$

(если $k \geq r$, то несколько последних слагаемых равны 0). С другой стороны, если $\varphi^k = \mathrm{id}_V$, то $J^k = E$, поскольку id_V имеет единичную матрицу E в любом базисе. Противоречие.

2-й способ. Многочлен $f(\lambda) = \lambda^k - 1$ является аннулирующим для оператора φ, причем все его корни простые (то есть не кратные), так как он взаимно прост с производной $f'(\lambda) = k\lambda^{k-1}$.

Следовательно, минимальный многочлен, будучи его делителем, тоже не имеет кратных корней. В то же время легко видеть, что кратность r_i корня λ_i минимального многочлена линейного оператора ψ над полем $\mathbb{C}$ равна максимальному размеру жордановой клетки, отвечающей собственному значению λ_i. Значит, в жордановой форме оператора φ все клетки размера 1.

Заметим, что в случае даже алгебраически замкнутого поля положительной характеристики результат предыдущей задачи неверен: контрпример дает матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

чья p-я степень над полем характеристики p равна единичной матрице.

Две квадратные матрицы $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ называются подобными, если найдется обратимая матрица $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ такая, что $B = C^{-1}AC$ (см. примеры 0.13 и 4) из § 5.1.). Подобие отношение эквивалентности на множестве квадратных матриц данного порядка. Другое его описание: две матрицы порядка n подобны, если они являются матрицами одного и того же линейного оператора на n-мерном пространстве V над полем $\mathbb{K}$.

Задача 2.

36. Доказать, что любая квадратная матрица над полем $\mathbb{C}$ подобна своей транспонированной.

Решение. Теорема о ЖНФ утверждает, что если поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто (например, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), то любая матрица $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ подобна жордановой матрице J_A, причем для каждого корня λ характеристического многочлена $\chi_A(t)$ число и размер жордановых клеток в J_A однозначно определяются самой матрицей A (другими словами, J_A определена однозначно с точностью до перестановок жордановых клеток).

Из того, что A подобна J_A, следует, что A^T подобна J_A^T. Поскольку подобие является отношением эквивалентности, для решения задачи достаточно доказать, что J_A подобна J_A^T. Для этого, в свою очередь, достаточно установить, что жорданова клетка $J_k(\lambda)$ подобна $J_k(\lambda)^T$. Далее, из того, что $J_k(\lambda) = \lambda E + +J_k, J_k(\lambda)^T = \lambda E + J_k^T$ (где $J_k := J_k(0)$), легко следует, что достаточно установить подобие матриц J_k и J_k^T. (Действительно, если $J_k^T = C^{-1}J_kC$, то $J_k(\lambda)^T = \lambda E + J_k^T = C^{-1}(\lambda E + J_k)C =$
$= C^{-1}J_k(\lambda)C$). Так как $\mathrm{rk}\left(\left(J_k^T\right)^m\right) = \mathrm{rk}\left(J_k^m\right)^T = \mathrm{rk}\left(J_k^m\right) \forall m \in \mathbb{N}$, то жорданова нормальная форма J_k^T есть J_k, откуда следует требуемое.

Другой, еще более короткий, способ решения основан на том, что $\chi_A(t) = \chi_{A^T}(t)$ и для любого корня λ характеристического многочлена и для любого натурального m

$$\mathrm{rk}\left((A - \lambda E)^m\right) = \mathrm{rk}\left((A - \lambda E)^m\right)^T = \mathrm{rk}\left(\left(A^T - \lambda E\right)^m\right),$$

откуда следует, что жордановы нормальные формы матриц A и A^T совпадают, поскольку число и размер жордановых клеток для данного λ полностью определяются набором указанных рангов. □

Задача 2.

37. Найти жорданову нормальную форму и жорданов базис оператора $D = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$ на пространстве $\mathbb{R}[x,y]_4$ многочленов степени не выше 4 от переменных x, y.

Решение. Во-первых, заметим, что оператор D нильпотентен $\Rightarrow$ все жордановы клетки будут иметь собственное значение 0 . Проще всего решать эту задачу, сделав замену переменных $u :=:= \frac{x+y}{2}, v := \frac{x-y}{2}$. Тогда $D = \frac{\partial}{\partial u}$; кроме того, $\mathbb{R}[x,y]_4 = \mathbb{R}[u,v]_4$. Тогда имеем жордановы цепочки (вертикальная цепочка - набор базисных векторов, отвечающих одной жордановой клетке):

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{u^4}{4!} & \frac{u^3 v}{3!} & \frac{u^2 v^2}{2!} & uv^3 & v^4 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\frac{u^3}{3!} & \frac{u^2 v}{2!} & uv^2 & v^3 & 0 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\frac{u^2}{2!} & uv & v^2 & 0 & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\
u & v & 0 & & \\
\downarrow & \downarrow & & & \\
1 & 0 & & & \\
\downarrow & & & & \\
0. & & & &
\end{array}$$

Горизонтальные строки отвечают подпространствам V_k однородных многочленов в $\mathbb{R}[u,v]_4$ степени $k, 0 \leq k \leq 4$, при этом $\dim V_k = k+1$. Видно, что ограничение $D|_{V_k}$ отображает V_k

на V_{k-1}, причем $\dim\ker D|_{V_k} = 1$. Таким образом, в жордановой нормальной форме D имеется по одной жордановой клетке размера от 1 до 5 , а жорданов базис получается, например, если выбрать базис в $\mathbb{R}[x,y]_4$ из мономов в диаграмме выше, упорядоченных снизу вверх в каждой цепочке (сначала - собственный вектор, потом корневой вектор высоты $2, \ldots$), а сами цепочки - слева направо (это будет отвечать упорядочению жордановых клеток по убыванию). То есть жорданова нормальная форма тогда имеет вид

$$\begin{pmatrix}
J_5 & & & & \\
& J_4 & & & \\
& & J_3 & & \\
& & & J_2 & \\
& & & & J_1
\end{pmatrix}$$

8.4 3 Евклидовы и эрмитовы пространства

8.4.1 3.1. Билинейные и квадратичные функции

Определение 3.1. Квадратичной формой q на векторном пространстве V над полем $\mathbb{K}$ называется отображение $q : V \to \mathbb{K}$, для которого существует билинейная форма $h : V \times V \to \mathbb{K}$ со свойством

$$q(\mathbf{v}) = h(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Если характеристика поля $\mathbb{K}$ не равна 2 , то для всякой квадратичной формы q существует единственная симметричная билинейная форма g со свойством $q(\mathbf{v}) = g(\mathbf{v}, \mathbf{v})$, называемая поляризацией q. Нетрудно показать, что поляризация может быть найдена по формуле

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 1/2[q(\mathbf{v}+\mathbf{w}) - q(\mathbf{v}) - q(\mathbf{w})] \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V. \tag{41}$$

В произвольном базисе квадратичная форма задается однородным многочленом второй степени от координат векторов. Обратно, всякий такой многочлен является выражением некоторой квадратичной формы в заданном базисе.

Задача 3.

2. Убедитесь, что функция $A \mapsto \det A$ является квадратичной формой на пространстве $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, и покажите, что ее поляризация равна $\widetilde{\det}(A, B) := \mathrm{tr}(A\widehat{B})/2$, где $\widehat{B}$ - присоединенная к B матрица [28]. Какова сигнатура этой формы?
Решение. По определению, $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, последнее выражение - однородный многочлен второй степени от матричных элементов a_{ij}, то есть от координат матрицы A в базисе из матричных единиц E_{ij}. Таким образом, определитель - квадратичная форма на пространстве $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$.

Найдем ее поляризацию, применяя (41):

$$\det(A+B) - \det A - \det B = a_{11}b_{22} - a_{12}b_{21} - a_{21}b_{12} + a_{22}b_{11} =$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{21} \\ b_{22} \end{pmatrix}.$$

Прямым вычислением легко убедиться, что полученная билинейная функция совпадает с $\mathrm{tr}(A\widehat{B})$. Приведение к сумме квадратов с помощью элементарных преобразований или методом Лагранжа показывает, что сигнатура этой формы (2,2).

Эту задачу (без пункта о сигнатуре) можно решить и подругому. Во-первых, покажем, что $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}(A\widehat{B})/2$ - билинейная форма на $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ такая, что $\det A = \mathrm{tr}(A\widehat{A})/2$. Отсюда будет следовать, что $A \mapsto \det A-$ квадратичная форма на $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$. А поскольку билинейная форма $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}(A\widehat{B})/2$ симметрична, то она - поляризация $\det A$.

Линейность функции $\mathrm{tr}(A\widehat{B})$ как функции от первого аргумента A при фиксированном втором очевидна; линейность относительно второго аргумента следует из линейности отображения $B \mapsto \widehat{B}$. Отсюда следует билинейность $\widetilde{\det}(A, B)$. Легко проверяемое тождество $\mathrm{tr}(A\widehat{A})/2 = \det A$ означает равенство $\widetilde{\det}(A, A) = \det A$. Значит, $A \mapsto \det A-$ квадратичная форма.

Симметричность $\widetilde{\det}(A, B)$ вытекает из проверяемого прямым вычислением тождества $\mathrm{tr}(A\widehat{B}) = \mathrm{tr}(B\widehat{A})$. Это и означает, что симметричная билинейная форма $\mathrm{tr}(A\widehat{B})/2$ является поляризацией квадратичной формы $A \mapsto \det A$.

Задача 3.

3. Может ли матрица

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

быть матрицей Грама некоторого базиса евклидова пространства?

Решение. Нет, не может. Для доказательства проще всего воспользоваться критерием Сильвестра, но можно рассуждать и непосредственно с помощью неравенства Коши-Буняковского: подматрица, стоящая на пересечении 1 -й и 2 -й строк и 1 -го и 2 -го столбцов матрицы G, показывает, что

$$|\mathbf{e}_1|^2 |\mathbf{e}_2|^2 - (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)^2 = -3 < 0$$

(где $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ - базис, в котором записана матрица Грама G), что в евклидовом пространстве невозможно.

Комментарий. С помощью приведения квадратичной формы к сумме квадратов (по методу Лагранжа, с помощью элементарных преобразований или по методу Якоби, см. [12], гл. 5, § 4) легко проверить, что сигнатура формы, имеющей (в некотором базисе) матрицу Грама G, есть $(2, 1)$, то есть найдется базис, в котором матрица Грама имеет

[228] То есть транспонированная к матрице, состоящей из алгебраических дополнений матрицы B.

диагональный вид $\operatorname{diag}(1,1,-1)$, или, эквивалентно, найдется невырожденная матрица C такая, что $C^T G C = \operatorname{diag}(1,1,-1)$.

Пусть V - евклидово пространство, $U \subset V$ - его подпространство. Тогда $V = U \oplus U^\perp$, где $U^\perp := \{\mathbf{v} \in V \mid (\mathbf{v}, \mathbf{u}) == 0 \forall \mathbf{u} \in U\}$, - ортогочальное дополнение к U в V. Следовательно, $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$ и $U \cap U^\perp = \{\mathbf{0}\}$.

Задача 3.

4. Пусть V - конечномерное пространство над $\mathbb{R}$, $U \subset V, W \subset V$ - его подпространства, причем $V = U \otimes W$. Доказать, что существует скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$(= евклидова структура) на V такое, что $W = U^\perp$ (и, таким образом, приведенное выше прямое разложение есть $V = U \oplus U^\perp$). Единственно ли оно?
Решение. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k\}$ - базис в $U, \{\mathbf{e}_{k+1}, \ldots \mathbf{e}_n\}$ - базис в W, тогда их объединение $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ - базис в V. Объявим его ортонормированным; тогда, очевидно, $W = U^\perp$.

Если базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ ортонормирован для евклидовой структуры $(\cdot,\cdot)$, то ортонормированы и все базисы, получающиеся из него ортогональной заменой, и только они (см. комментарий к задаче 3.9 ниже). Отсюда легко видеть, что, за исключением тривиального случая $V = \{\mathbf{0}\}$, требуемая евклидова структура не единственна.

Задача 3.

5. Доказать, что пространство $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$ с билинейной функцией $(\ A, B\ ) :=\operatorname{tr}\left(A^T B\right)$ является евклидовым пространством. Найти ортогональное дополнение в $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$ к подпространствам V симметрических и W верхнетреугольных матриц.
Решение. Во-первых, нужно проверить билинейность, симметричность и положительную определенность данной билинейной функции. Линейность по первому аргументу:

$$(A + A', B) = \operatorname{tr}\left((A + A')^T B\right) = \operatorname{tr}\left(\left(A^T + A^T\right) B\right) =$$

$$= \operatorname{tr}\left(A^T B + A^T B\right) = \operatorname{tr}\left(A^T B\right) + \operatorname{tr}\left(A^T B\right) = (A, B) + (A', B),$$

$$(\lambda A, B) = \operatorname{tr}\left((\lambda A)^T B\right) = \operatorname{tr}\left(\lambda A^T B\right) = \lambda \operatorname{tr}\left(A^T B\right) = \lambda (A, B),$$

и аналогично для второго аргумента. Симметричность:

$$(A, B) = \operatorname{tr}\left(A^T B\right) = \operatorname{tr}\left(\left(A^T B\right)^T\right) = \operatorname{tr}\left(B^T A\right) = (B, A).$$

Положительная определенность следует из формулы $\operatorname{tr}\left(A^T A\right) == \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2$. Таким образом, $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$ со скалярным произведением $(\cdot,\cdot) - n^2$-мерное евклидово пространство.

Для нахождения ортогонального дополнения к подпространству W верхнетреугольных матриц воспользуемся следующим легко проверяемым утверждением: если $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ - ортонормированный базис в евклидовом пространстве V, то для произвольного подмножества $I := \{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$ ортогональным дополнением к линейной оболочке векторов $\{\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_k}\}$ является линейная оболочка векторов $\left\{\mathbf{e}_{j_1}, \ldots, \mathbf{e}_{j_{n-k}}\right\}$, где $\{j_1, \ldots,\ j_{n-k}\} = \{1, \ldots, n\} \backslash I$.

Легко проверить, что матричные единицы $\{E_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ (при выбранном упорядочивании) образуют в евклидовом пространстве $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$ ортонормированный базис. Подпространство W совпадает с линейной оболочкой матриц $\{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq j \leq \leq n\}$, поэтому ортогональным дополнением $W^\perp$ является линейная оболочка матриц $\{E_{ij} \mid 1 \leq j < i \leq n\}$, то есть подпространство нижних нильтреугольных матриц (матриц, у которых нули на главной диагонали и выше).

Чтобы найти ортогональное дополнение к подпространству симметрических матриц V, для начала заметим, что $\operatorname{tr}\left(A^T B\right) == \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij}$. Если B ортогональна симметрическим матрицам, то, в частности, она ортогональна матрицам $E_{ii}, i = 1, \ldots, n$. Отсюда $b_{ii} = 0, \quad i = 1, \ldots, n$. Кроме того, B ортогональна всем матрицам вида $E_{ij} + E_{ji}$, откуда $b_{ij} + b_{ji} = 0, \quad 1 \leq i < j \leq n$. Значит, матрица B кососимметрична.

С другой стороны, если $A = A^T$, а $B = -B^T$, то

$$
\begin{aligned}
(A, B) = \operatorname{tr}\left(A^T B\right) = \operatorname{tr}(A B) = \operatorname{tr}(B A) = \\
= \operatorname{tr}\left(A^T B^T\right) = -\operatorname{tr}\left(A^T B\right) = -(A, B),
\end{aligned}
$$

откуда $(A, B) = 0$. Объединяя этот результат с предыдущим, получаем, что $V^{\perp}$ совпадает с подпространством кососимметрических матриц.

Результат про $V^{\perp}$ можно доказать и по-другому, если заметить, что оператор транспонирования

$$
T : \operatorname{Mat}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \operatorname{Mat}_n(\mathbb{R}), \quad T(A) = A^T
$$

самосопряжен относительно скалярного произведения $(A, B) == \operatorname{tr}\left(A^T B\right)$:

$$
\begin{aligned}
(T(A), B) = \left(A^T, B\right) = \operatorname{tr}(A B) = \operatorname{tr}(B A) = \\
= \operatorname{tr}\left(A^T B^T\right) = \left(A, B^T\right) = (A, T(B))
\end{aligned}
$$

(здесь мы воспользовались известным свойством следа $\operatorname{tr}(A B) == \operatorname{tr}(B A)$, см. задачу 2.2). Собственные подпространства самосопряженного оператора, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны. Подпространства симметричных и кососимметричных операторов в $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$ - собственные подпространства, отвечающие собственным значениям 1 и -1 .

Задача 3.

6. Доказать, что функция $q(A) := \operatorname{tr}\left(A^2\right)$ является квадратичной формой на пространстве $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$, и найти ее сигнатуру.

Решение. Легко видеть, что $g(A, B) := \operatorname{tr}(A B)$ - билинейная форма на $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$ такая, что $q(A) = g(A, A)$. Таким образом, q - квадратичная форма на $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$. Кстати, ввиду тождества $\operatorname{tr}(A B) = \operatorname{tr}(B A)$, билинейная форма g симметрична.

Пусть $A^T = A$. Тогда, в силу предыдущей задачи, $\operatorname{tr}\left(A^2\right) == \operatorname{tr}\left(A^T A\right) > 0 \forall A \neq 0$. Таким образом, на подпространстве $V \subset\subset \operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$ симметрических матриц q положительно определена.

Пусть $B^T = -B$. Тогда, в силу предыдущей задачи, $\operatorname{tr}\left(B^2\right) == -\operatorname{tr}\left(B^T B\right) < 0 \quad \forall B \neq 0$. Таким образом, на подпространстве $U \subset \operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$ кососимметрических матриц q отрицательно определена.

Приведем два варианта дальнейших рассуждений. Во-первых, легко заметить, что U и V ортогональны относительно g : для симметрической и кососимметрической матриц A, B имеем

$$
\begin{aligned}
g(A, B) = \operatorname{tr}(A B) = \operatorname{tr}\left(B^T A^T\right) = -\operatorname{tr}(B A) = \\
= -\operatorname{tr}(A B) = -g(A, B) \quad \Rightarrow \quad g(A, B) = 0
\end{aligned}
$$

Объединяя ортонормированные базисы в V и U, получаем ор-

тонормированный базис в $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$, в котором $\operatorname{dim} V = \frac{n(n+1)}{2}$ элементов имеют скалярный квадрат 1 и $\operatorname{dim} U = \frac{n(n-1)}{2}$ элементов - скалярный квадрат -1 .

Во-вторых, можно воспользоваться следующим соображением: если в пространстве L с квадратичной формой q есть k мерное подпространство $W \subset L$, ограничение q на которое положительно (отрицательно) определено, то положительный (отрицательный) индекс инерции q не меньше k. Действительно, W невырождено, поэтому $L = W \oplus W^{\perp}$. Возвращаясь к нашей задаче, мы видим, что положительный индекс инерции q не меньше $\frac{n(n+1)}{2}$, а отрицательный индекс инерции - не меньше $\frac{n(n-1)}{2}$, причем сумма этих чисел равна $n^2 = \operatorname{dim}_{\operatorname{Mat}}^n(\mathbb{R})$. Отсюда следует, что индексы инерции в точности равны указанным числам. $\square$

Задача 3.

7. Доказать, что формула $(f, g) = \int_{-1}^1 f(t) g(t) d t$ определяет скалярное произведение на линейном пространстве вещественнозначных функций, непрерывных на отрезке $[-1,1]$.

Решение. Билинейность следует из свойства линейности интеграла (см. [31], теорема 12.10 на с. 117), симметричность - из коммутативности умножения функций. Докажем положительную определенность. Если функция f тождественно не равна нулю на отрезке $[-1,1]$, найдется точка $\alpha \in [-1,1]$ такая, что $f(\alpha) \neq 0$. Тогда (здесь используется непрерывность) для некоторого $\varepsilon > 0$ найдется ε-окрестность $U_\varepsilon(\alpha)$ точки α (односторонняя в случае, когда α совпадает с одним из концов отрезка) такая, что $|f(x)| \geq |f(\alpha)|/2 \forall x \in U_\varepsilon(\alpha)$. Тогда $(f,f) = \int_{-1}^{1} f(t)^2 dt \geq\geq f(\alpha)^2\varepsilon/4$. Подробности см., например, в [31], теорема 12.15 на с. 121 . $\square$

Комментарий. Заметим, что данное пространство функций бесконечномерно. Так, например, мономы $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ линейно независимы как функции на $[-1,1]$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Однако мономы не образуют ортонормированного базиса. Можно при помощи процесса Грама-Шмидта построить ортогональную систему из многочленов. Тогда мы придем к системе многочленов Лежандра (см., например, [28]), известны и другие системы ортогональных многочленов. Впрочем, есть и простой пример ортогональной (даже нормированной) системы функций на
$[-1,1]$: это система из тригонометрических функций

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos k\pi x, \sin k\pi x \mid k \in \mathbb{N}\right\}.$$

Разложение функции по такому базису приводит к понятию ряда Фурье.

Обратим внимание читателя, что многие вопросы, которые не являются сложными для конечномерных пространств, в случае пространств бесконечномерных уже могут быть непростыми. Так, например, не очевиден ответ на вопрос, является ли в пространстве бесконечно дифференцируемых функций указанный базис из тригонометрических функций максимальной линейно независимой системой векторов. Подробнее об этом можно прочитать, например, в [24] (см. также добавление 5.3. в конце пособия).

Задача 3.

8. Доказать, что матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

положительно определена.

Решение. В пространстве многочленов $\mathbb{R}[x]_{n-1}$ степени не выше $n-1$ введем скалярное произведение $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Очевидно, форма $(\ \cdot, \cdot\ )$ билинейна, симметрична и положительно определена, значит, пространство $\mathbb{R}[x]_{n-1}$, снабженное данной билинейной формой, является n-мерным евклидовым пространством.

Рассмотрим базис $\{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\}$ в $\mathbb{R}[x]_{n-1}$. Нетрудно проверить, что приведенная в условии матрица является матрицей Грама этого базиса.

Комментарий. Указанная в условии задачи матрица называется матрицей Гильберта и является классическим примером плохо обусловленной матрицы, то есть если A_n - матрица Гильберта n-го порядка, то число обусловленности $\|A_n\| \times \|A_n^{-1}\|$ - велико. Вообще, матрица Гильберта является хорошей тестовой матрицей для проверки алгоритмов решения систем линейных урав-

нений и алгоритмов точного нахождения определителей матриц, наглядно демонстрируя даже на матрицах небольшого размера, какие проблемы возникают в вычислительной математике. Попробуйте, например, при помощи классического метода Гаусса на компьютере обратить матрицу Гильберта размера 5×5.

Задача 3.

9. Доказать, что квадратичная форма является положительно определенной тогда и только тогда, когда ее матрица A представляется в виде $A = C^T C$ для некоторой невырожденной верхней треугольной матрицы C.

Решение. То, что существует такая невырожденная матрица C, очевидно. Действительно, для положительно определенной квадратичной формы существует ортонормированный базис, то есть базис, в котором она имеет единичную матрицу E. Если Q - матрица перехода от исходного базиса к данному ортонормированному, то $E = Q^T A Q$, тогда можно положить $C = Q^{-1}$. То, что, обратно, квадратичная форма с матрицей $A = C^T C$ положительно определена, тоже очевидно, так как условие положительной определенности не зависит от базиса, а для такой квадратичной формы найдется базис, в котором ее матрица есть E (и она сама есть сумма квадратов).

Однако доказательство существования невырожденной верхней треугольной матрицы C с указанным свойством требует чуть более тонкого исследования. А именно, вспомним, что ортонормированный базис можно строить из исходного с помощью алгоритма Грама-Шмидта. Точнее, пусть исходный базис (в котором матрица квадратичной формы была A) есть $\{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$. Тогда ортогональный базис $\{\mathbf{e}''_1, \ldots, \mathbf{e}''_n\}$ строится по индукции: в качестве $\mathbf{e}''_1$ возьмем $\mathbf{e}'_1$, и, если $\mathbf{e}''_1, \ldots, \mathbf{e}''_{i-1}$ уже построены, $\mathbf{e}''_i$ ищем в виде $\mathbf{e}''_i = \mathbf{e}'_i - \sum_{j=1}^{i-1} x_j \mathbf{e}'_j$, где скаляры x_j находятся из условия ортогональности $\mathbf{e}''_i$ к векторам $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_{i-1}$. Такой набор $\{x_j\}$ существует и единствен, поскольку является решением квадратной системы линейных уравнений, матрицей коэффициентов которой является матрица Грама системы линейно независимых векторов $\left\{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_{i-1}\right\}$, которая в силу положительной определенности квадратичной формы невырождена.

Легко видеть, что матрица перехода от базиса $\{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$ к его ортогонализации $\{\mathbf{e}''_1, \ldots, \mathbf{e}''_n\}$ верхняя треугольная с единицами на главной диагонали. Затем при построении ортонормированного базиса мы каждый столбец умножаем на величину, об-

ратную длине соответствующего базисного вектора ортогонального базиса (что равносильно умножению матрицы перехода справа на диагональную матрицу). Это дает искомую верхнетреугольную матрицу. Заметим еще, что на главной диагонали этой матрицы стоят положительные числа.

Комментарий. Заметим, что из приведенного рассуждения легко выводится, что для произвольной невырожденной матрицы $C \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ существует, причем единственная, пара, состоящая из ортогональной матрицы Q и верхней треугольной матрицы с положительными диагональными элементами R такая, что $C = QR$ (так называемое " QR-разложение" [7], гл. VII, § 1, п. 9).

Кстати, данный результат позволяет описать множество всех структур евклидова пространства на вещественном векторном n-мерном пространстве V. Действительно, пусть $\mathcal{E}$ - структура евклидова пространства на V, для которой базис $\{\mathbf{e}\} := \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \}$ является ортонормированным (ясно, что выбор ортонормированного базиса определяет евклидову структуру однозначно; обратно, базис определяется евклидовой структурой с точностью до ортогональной замены). Тогда если $\mathcal{E}'$ - еще одна структура евклидова пространства на V с некоторым ортонормированным базисом $\{\mathbf{e}'\} := \{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$, то существует единственная матрица $C_{\{\mathbf{e}\} \to \{\mathbf{e}'\}} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (матрица перехода). Таким образом, на множестве евклидовых структур на V группа $\mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ действует транзитивно, причем стабилизатором точки является ортогональная подгруппа $\mathrm{O}(n) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Тогда множество евклидовых структур есть однородное пространство $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathrm{O}(n)$, которое QR-разложение позволяет отождествить с множеством верхних треугольных матриц с положительными элементами на главной диагонали.

Задача 3.

10. Пусть V - двумерное векторное пространство над $\mathbb{R}$, снабженное билинейной симметричной формой h сигнатуры $(1, 1)$. Найти группу изометрий (V, h).

Решение. Выберем ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ в V, в котором матрица Грама формы h имеет вид $H := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, а значит, сама билинейная форма $h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = x_1 y_1 - x_2 y_2$, где $\mathbf{u} == (x_1, x_2)^T, \mathbf{v} = (y_1, y_2)^T$.

Линейное преобразование $\varphi : V \to V$ является изометрией тогда и только тогда, когда $h(\varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v})) = h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Если $A = A_\varphi$ - матрица преобразования φ в выбранном базисе, то это эквивалентно равенству $(A\mathbf{u})^T H (A\mathbf{v}) = \mathbf{u}^T H \mathbf{v} \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, откуда
$$A^T H A = H \tag{42}$$

То есть наша задача - найти все матрицы A, удовлетворяющие (42). Равенство (42) можно переписать в эквивалентном виде $A^T H = H A^{-1}$. Заметим, что из (42) следует, что $\det A = \pm 1$.

Пусть $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, тогда если $\det A=1$, то $A^{-1}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, и мы получаем систему $a=d, b=c, a^2-b^2=1$, то есть $A==\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, причем $a^2-b^2=1$. Последнее равенство - уравнение гиперболы, одну ее ветвь можно параметризовать, положив $a=\operatorname{ch}\vartheta, b=\operatorname{sh}\vartheta, \vartheta\in\mathbb{R}$, другую $-a=-\operatorname{ch}\vartheta, b=-\operatorname{sh}\vartheta, \vartheta\in\mathbb{R}$. Первая ветвь отвечает множеству матриц

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\vartheta & \operatorname{sh}\vartheta \\ \operatorname{sh}\vartheta & \operatorname{ch}\vartheta \end{pmatrix} \tag{43}$$

содержащему единичный элемент (при $\vartheta=0$). Легко проверить, что это - подгруппа в группе $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ (даже в $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$).

Пусть $\det A=-1$, в этом случае $A^{-1}=\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, тогда из (42) получаем систему $a=-d, b=-c$, кроме того, из $\det A==-1$ получаем $a^2-b^2=1$. В этом случае мы также имеем два семейства: $a=\operatorname{ch}\vartheta, b=\operatorname{sh}\vartheta$ и $a=-\operatorname{ch}\vartheta, b=-\operatorname{sh}\vartheta$.

Таким образом, группа изометрий (V,h) в выбранном базисе состоит из матриц, принадлежащих четырем семействам:

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\vartheta & \operatorname{sh}\vartheta \\ \operatorname{sh}\vartheta & \operatorname{ch}\vartheta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\vartheta & -\operatorname{sh}\vartheta \\ -\operatorname{sh}\vartheta & -\operatorname{ch}\vartheta \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\vartheta & \operatorname{sh}\vartheta \\ -\operatorname{sh}\vartheta & -\operatorname{ch}\vartheta \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} -\operatorname{ch}\vartheta & -\operatorname{sh}\vartheta \\ \operatorname{sh}\vartheta & \operatorname{ch}\vartheta \end{pmatrix}, \text{ где } \vartheta\in\mathbb{R},$$

причем первое семейство является подгруппой ("связной компонентой единицы").

Комментарий. Матрицы (43) похожи на матрицы поворота плоскости, правда, в них участвуют гиперболические функции вместо тригонометрических. Действительно, матрицы (43) сохраняют квадратичную форму $x_1^2-x_2^2$, в то время как "обычные" матрицы поворота - форму $x_1^2+x_2^2$. Матрицы вида (43) определяют так называемые гиперболические повороты, при которых концы векторов, отложенных от начала координат, движутся по равнобочной гиперболе (в то время как в случае обычных поворотов - по окружности).

Гиперболические повороты дают геометрическое описание так называемых бустов (переходов к новой инерциальной системе отсчета) в специальной теории относительности (СТО). Поясним это.

Пространство-время в СТО - четырехмерное вещественное линейное пространство V, снабженное квадратичной формой сигнатуры (1,3) ("метрикой Минковского"). Выбирая ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_0,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$, отождествим V с $\mathbb{R}^4$, при этом квадратичная форма примет вид $c^2t^2-x^2-y^2-z^2$, где $t-$ временна́я, x,y,z - пространственные координаты, а c - физическая постоянная, имеющая физическую размерность скорости (скорость света в вакууме). Заметим, что выбор базиса фиксирует некоторую инерциальную систему отсчета, для которой ортогональное дополнение $\langle\mathbf{e}_0\rangle^\perp$ к временно́й оси t (то есть трехмерное подпространство в V с базисом $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$) - пространство одновременных событий для соответствующего наблюдателя.

Изометрии пространства-времени образуют так называемую группу Лоренца a[29]. Они включают в себя помимо обычных вращений в трехмерном пространстве $\langle\mathbf{e}_0\rangle^\perp$ гиперболические повороты в плоскостях с ортонормированными базисами вида $\{\mathbf{e}_0,\mathbf{e}\}$ (гиперболические, так как ограничение формы $c^2t^2-x^2-y^2-z^2$ на такую плоскость имеет сигнатуру $(1,1)$), "перемешивающие" временну́ю и пространственную координаты. Например, пусть $\mathbf{e}=\mathbf{e}_1$. Тогда гиперболический поворот в этой плоскости - то же, что буст в направлении оси x.

Более подробно: к матрице (43) добавим справа внизу единичную матрицу порядка 2 , дополнив нулями до матрицы порядка 4 , и полученную матрицу интерпретируем как матрицу перехода от базиса $\{\mathbf{e}_0,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ к новому ортонормированному

базису $\{\mathbf{e}_0',\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ (т.е. матрицу A в формуле (42) мы интерпретируем как матрицу перехода, это соответствует интерпретации A как пассивного преобразования). Тогда старые и новые координаты окажутся связанными формулой

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\vartheta & \operatorname{sh}\vartheta & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\vartheta & \operatorname{ch}\vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

[229] Впервые описанную А. Пуанкаре.

В СТО безразмерная величина $\operatorname{th}\vartheta$ интерпретируется как v/c, где v - скорость новой системы отсчета, связанной с базисом $\{\mathbf{e}_0', \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ относительно старой системы отсчета, связанной с базисом $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. То есть формулы перехода к новой системе отсчета, движущейся относительно старой со скоростью v в направлении оси x, имеют следующий вид:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \\ \frac{v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \end{array} \right) \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}, \quad y = y', \quad z = z'$$

Таким образом, буст в направлении оси x записывается формулами

$$t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad y = y', z = z'$$

Заметим, что при $v/c \to 0$ приведенные выше формулы переходят в преобразование Галилея $t = t', x = x' + vt', y = y', z = z'$. Еще одно простое следствие: композиция двух бустов на гиперболические углы ϑ и ϕ в направлении оси x есть буст на гиперболический угол $\vartheta + \phi$ в направлении оси x, и тогда из формулы $\operatorname{th}(\vartheta + \phi) = \frac{\operatorname{th}\vartheta + \operatorname{th}\phi}{1 + \operatorname{th}\vartheta \operatorname{th}\phi}$ получаем релятивистский закон сложения скоростей $v'' = \frac{v+v'}{1+\frac{vv'}{c^2}}$.

О некоторых интересных свойствах геометрии пространствавремени (например, о неравенстве Коши-Буняковского-Шварца для времениподобных векторов, обращенном в другую сторону, что приводит к "парадоксу" близнецов) и их физических следствиях можно прочитать в [28], ч. 2, §12.

Задача 3.

11. Извлечь квадратный корень [30] из квадратичной формы $q(\mathbf{v}) = x_1^2 + x_2^2$ в $\mathbb{R}^2$, где $\mathbf{v} = (x_1, x_2)^T$.

Решение. Запишем формально

$q(\mathbf{v}) = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 e_1 + x_2 e_2)^2 = x_1^2 e_1^2 + x_1 x_2 (e_1 e_2 + e_2 e_1) + x_2^2 e_2^2.$

Попробуем интерпретировать e_1, e_2 как матрицы из $\operatorname{Mat}_2(\mathbb{R})$, интерпретируя, кроме того, левую часть (44) как скалярную матрицу $q(\mathbf{v})E = (x_1^2 + x_2^2) E$. Тогда из (44) получаем систему матричных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{c} e_1^2 = E = e_2^2, \\ e_1 e_2 + e_2 e_1 = 0. \end{array} \right. \tag{45}$$

Эти соотношения удовлетворяются, например, матрицами

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(знаки "-" во второй матрице - дань традиции, см. уравнения (46) ниже).

Теперь можно сформулировать, в каком смысле нам удалось извлечь квадратный корень из $q(\mathbf{v}) = x_1^2 + x_2^2$. Именно, для пространства $\mathbb{R}^2$ с квадратичной формой $q(\mathbf{v}) = x_1^2 + x_2^2$ мы нашли такую алгебру (конкретно $\operatorname{Mat}_2(\mathbb{R})$) с единицей (E) и такое линейное отображение $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \operatorname{Mat}_2(\mathbb{R})$ (конкретно, $\varphi(\mathbf{v}) = x_1 e_1 + + x_2 e_2$, где $\mathbf{v} = (x_1, x_2)^T$), что $q(\mathbf{v})E = \varphi(\mathbf{v})^2 \quad \forall \mathbf{v} = (x_1, x_2)^T \in\in \mathbb{R}^2$.

Комментарии. 1) Интересно, что ту же идею можно применить, чтобы извлечь квадратный корень D из дифференциального оператора 2 -го порядка, например из оператора Лапласа $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Тогда

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Применяя полученный оператор к столбцу $(u, v)^T$ функций от x, y и приравнивая результат нулю, получаем систему уравнений

Коши-Римана:

[230] Точный смысл этого выяснится по ходу решения.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \tag{46}$$

комплексной дифференцируемости функции $f(x+iy) = u(x,y)++iv(x,y)$. В частности, вещественная $u(x,y)$ и мнимая $v(x,y)$ части голоморфной функции $f(z), z := x+iy$, удовлетворяют уравнению Лапласа $\Delta(u) = 0 = \Delta(v)$, то есть являются гармоническими. Подробности см. в [37], § 8, с. 95-100 и в [28], гл. 2, § 15.

2) Легко проверить, что построенная нами алгебра $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ как алгебра над $\mathbb{R}$ порождается матрицами e_1, e_2, которые связаны соотношениями (45). Она называется алгеброй Клиффорда пары ($\mathbb{R}^2, q$), где q - рассмотренная нами квадратичная форма. Многие интересные алгебры являются алгебрами Клиффорда квадратичных форм: например, внешняя алгебра является алгеброй Клиффорда нулевой формы, а алгебра кватернионов - квадратичной формы $q(\mathbf{v}) = -x_1^2 - x_2^2$ на $\mathbb{R}^2$ (см. (20)).

Алгебры Клиффорда - очень интересный математический объект, объединяющий алгебру, топологию и анализ. Кроме того, они играют важную роль в релятивистской квантовой механике. По существу, П. Дирак переоткрыл это понятие (открытое на полвека раньше математиком У. К. Клиффордом), когда написал свое знаменитое уравнение, описывающее релятивистский электрон.

В следующей задаче предполагаются известными гауссов интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$ и формула замены переменных в кратном интеграле, которую легко найти в любом учебнике анализа.

Задача 3.

12. [33] Пусть $q(\vec{x}) = (\vec{x}, A\vec{x})$ - положительно определенная квадратичная форма на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, где матрица A симметрична. Доказать равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-q(\vec{x})} d\vec{x} = \pi^{n/2} (\det A)^{-1/2}$$

Решение. Заметим, что слева стоит n-кратный интеграл от функции n переменных, причем $d\vec{x} := dx_1 \dots dx_n$.

Так как по условию q положительно определена и A симметрична, то существует $U \in \mathrm{O}(n), \det U = 1$ такая, что $\Lambda == \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \dots \lambda_n) = UAU^T$, причем $\lambda_i > 0$ при $1 \le i \le n$. Сделаем замену $\vec{y} = U\vec{x}$, тогда $(\vec{x}, A\vec{x}) = (\vec{y}, \Lambda\vec{y})$. Действительно,

$$\vec{y}^T \Lambda \vec{y} = (U\vec{x})^T \Lambda U \vec{x} = \vec{x}^T U^T \Lambda U \vec{x} = \vec{x}^T A \vec{x}.$$

Кроме того, $dy_1 \dots dy_n = dx_1 \dots dx_n$, так как якобиан замены $\det U = 1$. Тогда имеем (см. теорему 3.28 ; подробное обоснование из теории кратных несобственных интегралов см. в [19], гл. XI, § 6):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\vec{x}, A\vec{x})} d\vec{x} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\vec{y}, \Lambda\vec{y})} d\vec{y} =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda_1 y_1^2 - \dots - \lambda_n y_n^2} dy_1 \dots dy_n =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda_1 y_1^2} dy_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda_n y_n^2} dy_n =$$
$$= \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda_i}} = \pi^{n/2} (\det A)^{-1/2}.$$

Комментарий. Доказанное равенство (точнее, его обобщения) играют важную роль в современной теоретической физике, особенно в квантовой теории поля.

Следующая задача решается методами анализа, а не линейной алгебры, хотя результат имеет непосредственное отношение к геометрии евклидова пространства (и к тому же представляет независимый интерес).

Задача 3.

13. Пусть S^n - сфера единичного радиуса в евклидовом пространстве $V, \dim V = n+1$. Вычислить объем $\operatorname{vol}(S^n)$.

Решение. В ортонормированном базисе сфера $S^n(R) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ радиуса R задается уравнением $x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = R^2$. Пусть $r-$ длина радиус-вектора точки с координатами $(x_1, \ldots, x_{n+1})$, тогда $r^2 = x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2$. Посчитаем интеграл

$$I_{n+1} := \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-r^2} dx_1 \ldots dx_{n+1}$$

двумя способами. С одной стороны, согласно предыдущей задаче, $I_{n+1} = \pi^{\frac{n+1}{2}}$. С другой стороны, расслаивая пространство $\mathbb{R}^{n+1}$ на сферические слои и замечая, что объем слоя, заключенного между сферами радиусов r и $r + dr$ (при малом dr), приближенно равен $\operatorname{vol}(S^n(r))\, dr$, получим, что

$$I_{n+1} = \int_0^{+\infty} e^{-r^2} \operatorname{vol}(S^n(r))\, dr$$

Используя очевидное равенство

$$\operatorname{vol}(S^n(r)) = r^n \operatorname{vol}(S^n(1)) = r^n \operatorname{vol}(S^n)$$

имеем

$$\operatorname{vol}(S^n) \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^n dr = \pi^{\frac{n+1}{2}}$$

Интеграл в последнем равенстве выражается через Γ-функцию, точнее, он равен $\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$. Окончательно,

$$\operatorname{vol}(S^n) = \frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

Используя функциональное уравнение $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, справедливое для любого $x > 0$ и значения $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(1) = 1$, легко посчитать объем n-мерной сферы для любого натурального n.

8.4.2 3.2. Линейные преобразования евклидовых пространств

Задача 3.

14. Пусть V - евклидово пространство, $\varphi : V \to V$ линейный оператор.

1. Доказать, что если φ диагонализируем, то и его сопряженный оператор φ^* диагонализируем.

2. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ - базис из собственных векторов оператора φ. Доказать, что биортогональный, или, как говорят, взаимный, базис $\{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$ состоит из собственных векторов сопряженного оператора φ^*.

Решение. Так как в любом евклидовом пространстве есть ортонормированный базис, а в ортонормированном базисе матрица сопряженного оператора φ^* является транспонированной к матрице оператора φ, то характеристические многочлены $\chi_{\varphi^*}(t)$ и $\chi_\varphi(t)$ совпадают.

Воспользуемся критерием диагонализируемости из задачи 2.11. Если $m(t) \in \mathbb{R}[t]$ - произвольный аннулирующий многочлен для оператора φ, то он также аннулирует и φ^*. Действительно,

$$(m(\varphi^*)(\mathbf{u}), \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, m(\varphi)(\mathbf{v})) = 0 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \Rightarrow m(\varphi^*) = 0.$$

Значит, φ^* диагонализируем.
Пусть $\varphi(\mathbf{e}_i) = \lambda_i \mathbf{e}_i, 1 \leq i \leq n$. Тогда имеем

$$\begin{gathered}(\varphi^*(\mathbf{e}'_i), \mathbf{e}_j) = (\mathbf{e}'_i, \varphi(\mathbf{e}_j)) = \lambda_j (\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_j) = \\ = \lambda_j \delta_{ij} = (\lambda_i \mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_j) \quad \forall j, \quad 1 \leq j \leq n\end{gathered}$$

Поэтому $\varphi^*(\mathbf{e}'_i) = \lambda_i \mathbf{e}'_i$. Заметим, что это дает еще одно доказательство утверждения пункта 1).

Задача 3.

15. Пусть V - евклидово n-мерное пространство, $\varphi : V \to\to V$ - линейный оператор.

1. Доказать, что если $U \subset V$ инвариантно относительно φ, то $U^{\perp}$ инвариантно относительно φ^*.
2. Пусть φ имеет собственное значение $\lambda \in \mathbb{R}$. Доказать, что у

$$\varphi$$

тогда есть $(n-1)$-мерное инвариантное подпространство. Верно ли обратное утверждение?

3. Пусть все корни характеристического многочлена $\chi_{\varphi}(t)$ оператора φ вещественны. Доказать, что найдется такой ортонормированный базис, в котором матрица оператора φ верхняя треугольная.

Решение. 1) Пусть $\mathbf{v} \in U^{\perp}$, тогда, используя инвариантность U, имеем
$$(\varphi^*(\mathbf{v}), \mathbf{u}) = (\mathbf{v}, \varphi(\mathbf{u})) = (\mathbf{v}, \mathbf{u}') = 0 \quad \forall \mathbf{u} \in U \Rightarrow \varphi^*(\mathbf{v}) \in U^{\perp}.$$

2. Рассмотрим линейный оператор $\psi := \varphi - \lambda \mathrm{id} : V \to V$. Так как $\ker \psi \neq \{\mathbf{0}\}$, то $\dim \mathrm{im}\, \psi \leq n-1$. Пусть $U \subset V$ - произвольное подпространство размерности ($n-1$) такое, что $\mathrm{im}\, \psi \subset U$.

Покажем, что U является φ-инвариантным. Пусть $\mathbf{u} \in U$ - произвольный вектор, тогда
$$\varphi(\mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u} \in \mathrm{im}(\varphi - \lambda\, \mathrm{id}) + U = U.$$

Обратно, пусть $U \subset V - (n-1)$-мерное φ-инвариантное подпространство. Тогда $U^{\perp} - 1$-мерное φ^*-инвариантное подпространство $\Rightarrow$ $U^{\perp} = \langle \mathbf{v} \rangle$, где $\mathbf{v}$ - собственный вектор оператора φ^*. Согласно уже доказанному, у φ^* есть $(n-1)$-мерное инвариантное подпространство $W \subset V$, тогда по пункту 1) одномерное подпространство $W^{\perp}$ является $\varphi^{**} = \varphi$-инвариантным, тогда $W^{\perp} = \langle \mathbf{w} \rangle$, где $\mathbf{w}$ - собственный вектор оператора φ, который отвечает некоторому вещественному собственному значению φ.

Дадим другое доказательство этого пункта. Во всяком евклидовом пространстве есть ортонормированный базис. В ортонормированном базисе матрица A_{φ^*} сопряженного оператора является транспонированной к матрице A_{φ}. Отсюда легко видеть, что характеристические многочлены, а значит, и наборы их корней, для операторов φ и φ^* совпадают. Поэтому существует $\mathbf{v} \in V, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ такой, что $\varphi^*(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$. Из невырожденности ограничения скалярного произведения на $\langle \mathbf{v} \rangle$ следует, что $\dim\left(\langle \mathbf{v} \rangle^{\perp}\right) = n-1$, а из предыдущего пункта - что $\langle \mathbf{v} \rangle^{\perp}$ инвариантно относительно $\varphi^{**} = \varphi$.

Обратно, пусть U - инвариантное $(n-1)$-мерное подпространство для φ. Тогда по предыдущему пункту $U^{\perp}$ инвариантно относительно φ^*, причем, поскольку оно одномерно, $U^{\perp} = \langle \mathbf{v} \rangle$. Тогда $\mathbf{v}$ - собственный вектор оператора φ^* с собственным значением $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда, как объяснено выше, λ также является собственным значением φ.

3) Воспользуемся индукцией по $n = \dim V$. Для $n = 1$ утверждение, очевидно, верно. Пусть оно верно для операторов на евклидовых пространствах размерности $\leq n-1$. Пусть $V-$ евклидово пространство размерности n. Тогда по предыдущему пункту у $\varphi : V \to V$ есть инвариантное подпространство $U \subset V$ размерности ($n-1$). Пусть $\psi := \varphi|_U$. Тогда $\chi_{\psi}(t) \mid \chi_{\varphi}(t) \Rightarrow$ все корни характеристического многочлена $\chi_{\psi}(t)$ также вещественны. По предположению индукции для $\psi : U \to U$ существует ортонормированный базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}\}$, в котором матрица ψ верхняя треугольная. Добавляя к нему единичный вектор $\mathbf{e}_n$ из $U^{\perp}$, получим искомый ортонормированный базис для φ.

Комментарий. Внимательный читатель, наверное, заметил, что пункт 2) данной задачи тесно связан с задачей 2.18. Точнее, в задаче 2.18 для линейного оператора $\varphi : V \to V$ рассматривался линейный оператор $\varphi^* : V^* \to V^*$ на двойственном (сопряженном) пространстве V^*. Однако наличие невырожденной билинейной формы g на V определяет линейный изоморфизм
$$\widetilde{g} : V \to V^*, \quad g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\widetilde{g}(\mathbf{u}), \mathbf{v}) \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

где круглые скобки справа - каноническое билинейное отображение $V^* \times V \to \mathbb{R}$. (Эквивалентное определение: $\widetilde{g}$ отображает произвольный вектор $\mathbf{u} \in V$ в линейный функционал $\widetilde{g}(\mathbf{u}) == g(\mathbf{u}, \cdot)$ на V.) Это позволяет определить оператор

$$\varphi_g^* := \widetilde{g}^{-1} \circ \varphi^* \circ \widetilde{g} : V \to V,$$

который в случае, когда g есть евклидово скалярное произведение на V, совпадает с оператором, сопряженным к φ в использованном выше смысле. Действительно,

$$g\left(\varphi_g^*(\mathbf{u}), \mathbf{v}\right) = g\left(\widetilde{g}^{-1}\left(\varphi^*(\widetilde{g}(\mathbf{u}))\right), \mathbf{v}\right) =$$
$$= (\varphi^*(\widetilde{g}(\mathbf{u})), \mathbf{v}) = (\widetilde{g}(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v})) = g(\mathbf{u}, \varphi(\mathbf{v}))$$

(Подробности см. в [28], ч. 2.8.) Пусть $f \in V^*$ - собственный вектор для $\varphi^*, \varphi^*(f) = \lambda f$, как в задаче 2.18. Тогда $f = \widetilde{g}(\mathbf{v})$ для единственного $\mathbf{v} \in V$. Имеем

$$\varphi_g^*(\mathbf{v}) = \widetilde{g}^{-1}\left(\varphi^*(\widetilde{g}(\mathbf{v}))\right) = \widetilde{g}^{-1}\left(\varphi^*(f)\right) = \widetilde{g}^{-1}(\lambda f) = \lambda \widetilde{g}^{-1}(f) = \lambda \mathbf{v}$$

то есть $\mathbf{v}$ - собственный вектор φ_g^*, как в п. 2 задачи 3.15. Кроме того, $\ker f = \langle \mathbf{v} \rangle^{\perp}$ – $(n-1)$-мерное φ-инвариантное подпространство в V.

Пункт 3) данной задачи также тесно связан с задачей 2.29 (с единственным уточнением, что строится ортонормированный базис). Немного другой путь решения состоит в том, чтобы, используя существование ($n-1$)-мерного инвариантного подпространства, доказать существование какого-то (не обязательно ортонормированного) базиса, в котором матрица φ верхняя треугольная, а затем ортонормировать его при помощи алгоритма Грама-Шмидта.

Задача 3.

16. Пусть $\varphi : V \to V$ - линейный оператор на евклидовом пространстве V. Доказать, что $\ker \varphi = (\operatorname{im} \varphi^*)^{\perp}$.

Решение. Для произвольных $\mathbf{u} \in \ker \varphi, \mathbf{v} \in V$ имеем

$$(\varphi^*(\mathbf{v}), \mathbf{u}) = (\mathbf{v}, \varphi(\mathbf{u})) = 0,$$

следовательно, $\mathbf{u} \in (\operatorname{im} \varphi^*)^{\perp}$, то есть $\ker \varphi \subset (\operatorname{im} \varphi^*)^{\perp}$.

Обратно, если $\mathbf{u} \in (\operatorname{im} \varphi^*)^{\perp}$, то для произвольного $\mathbf{v} \in V$ получаем

$$0 = (\varphi^*(\mathbf{v}), \mathbf{u}) = (\mathbf{v}, \varphi(\mathbf{u})).$$

Последнее означает, что $\varphi(\mathbf{u})$ ортогонален всем векторам из V; так как скалярное произведение невырождено, то $\varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, то есть $\mathbf{u} \in \ker \varphi$. Значит, $(\operatorname{im} \varphi^*)^{\perp} \subset \ker \varphi$. □

Задача 3.

17. Пусть $\varphi : V \to V$ - линейный оператор на евклидовом пространстве V. Доказать, что $\ker(\varphi^* \varphi) = \ker \varphi$ и $\operatorname{im}(\varphi^* \varphi) = \operatorname{im} \varphi^*$.

Решение. Ясно, что всегда $\ker \varphi \subset \ker(\varphi^* \varphi)$. Докажем обратное включение. Пусть $\varphi^* \varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, тогда в силу невырожденности скалярного произведения

$$0 = (\varphi^* \varphi(\mathbf{u}), \mathbf{u}) = (\varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{u})) \Leftrightarrow \varphi(\mathbf{u}) = \mathbf{0}.$$

Таким образом, $\ker(\varphi^* \varphi) = \ker \varphi$.

Для доказательства второго равенства возьмем ортогональные дополнения к обеим частям доказанного равенства. В силу предыдущей задачи, $(\ker \varphi)^{\perp} = \operatorname{im} \varphi^*$ и $(\ker(\varphi^* \varphi))^{\perp} = \operatorname{im}(\varphi^* \varphi)$, так как оператор $\varphi^* \varphi$ самосопряжен (см. задачу 3.37). □

Задача 3.

18. а) Выяснить, может ли матрица A являться матрицей самосопряженного оператора в евклидовом пространстве в некотором, не обязательно ортонормированном, базисе, если

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

b) В случае положительного ответа предъявить (хотя бы одно) скалярное произведение, относительно которого оператор самосопряжен.

Решение. a) Если бы в условии речь шла про ортонормированный базис, то никакая из указанных матриц не могла бы быть матрицей самосопряженного оператора, поскольку в этом случае она должна быть симметричной. Однако в условии речь идет про произвольный базис. Согласно известной теореме, оператор $f : V \to V$ на евклидовом пространстве V самосопряжен $\Leftrightarrow$ он диагонализируется в ортонормированном базисе (состоящем из собственных векторов) и имеет вещественный спектр. То есть если оператор самосопряжен, то его матрица имеет вещественный спектр и диагонализируема (существует базис пространства из ее собственных векторов).

В случае 1) характеристический многочлен

$$\chi_A(t) = t^2 - (\operatorname{tr} A)t + \det A = t^2 - 2t + 2$$

имеет отрицательный дискриминант, поэтому собственные значения оператора с матрицей п. 1) не являются вещественными.

В случае 2) характеристический многочлен

$$\chi_A(t) = t^2 - (\operatorname{tr} A)t + \det A = t^2 - 6t + 9 = (t-3)^2$$

имеет кратный корень; поэтому не выполнено достаточное условие диагонализируемости (что спектр оператора прост), и простое вычисление показывает, что размерность собственного подпространства равна 1 , значит, не существует базиса двумерного пространства V, состоящего из собственных векторов, следовательно оператор не диагонализируем.

В случае 3) характеристический многочлен

$$\chi_A(t) = t^2 - (\operatorname{tr} A)t + \det A = t^2 - t - 2 = (t+1)(t-2)$$

имеет два различных вещественных корня, следовательно, он диагонализируем и имеет вещественный спектр. Таким образом, матрица п. 3) может быть матрицей самосопряженного оператора.

b) Чтобы найти скалярное произведение, относительно которого матрица A из п. 3) является матрицей самосопряженного оператора, найдем некоторый базис из собственных векторов и объявим его ортонормированным (ясно, что этим скалярное произведение будет однозначно определено). Например, в качестве такого базиса можно взять $\{\mathbf{v}\} := \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, где $\mathbf{v}_1 = (1, -1)^T$, $\mathbf{v}_2 = (1, 2)^T$.

Комментарий. Для лучшего понимания полезно провести независимую проверку ответа пункта b). По определению, матрица Грама полученного скалярного произведения в базисе $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ есть единичная матрица E. Матрица перехода $C := C_{\{\mathbf{e}\}\to\{\mathbf{v}\}}$ от стандартного базиса $\{\mathbf{e}\} := \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}, \mathbf{e}_1 = (1,0)^T, \mathbf{e}_2 = (0,1)^T$ (относительно которого задана исходная матрица A) к базису $\{\mathbf{v}\}$ есть $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Таким образом, матрица Грама G относительно стандартного базиса $\{\mathbf{e}\}$ есть

$$G = \left(C^{-1}\right)^T C^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Простое вычисление теперь показывает, что матричное равенство $A^T G = GA$ действительно выполняется, а оно как раз и говорит о том, что матрица A является матрицей самосопряженного оператора относительно скалярного произведения с матрицей Грама G.

Задача 3.

19. Описать самосопряженные проекторы.

Решение. В задаче 1.6 было показано, что всякий проектор, то есть оператор $P : V \to V$, удовлетворяющий соотношению $P^2 = P$, является оператором проектирования на подпространство $U := \operatorname{im} P$ параллельно подпространству $W := \ker P$. Одновременно подпространства U и W (в случае, если они ненулевые) являются собственными подпространствами оператора P с собственными значениями соответственно 1 и 0 . Так как собственные подпространства самосопряженного оператора, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны, то необходимым условием самосопряженности проектора является ортогональность U и W, то есть $W = U^{\perp}$. В этом случае проектор есть оператор ортогонального проектирования на подпространство $U \subset V$. Это условие является также достаточным: действительно, если оператор диагонализируется в ортонормированном базисе и имеет вещественный спектр, то он самосопряжен.

Комментарий. Важная роль ортогональных проекторов (особенно в функциональном анализе) связана с тем, что любой самосопряженный оператор в определенном смысле по ним раскладывается. Опишем такое разложение (как по умолчанию принято в этом тексте) в конечномерном случае. А именно, пусть
$f : V \to V$ - самосопряженный оператор, $\mathrm{Spec}(f)$ - его спектр (набор собственных значений), $V_\lambda, \lambda \in \mathrm{Spec}(f)$ - соответствующие собственные подпространства, $P_\lambda : V \to V$ - операторы ортогонального проектирования на V_λ. Тогда имеет место формула спектрального разложения оператора f :

$$f = \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f)} \lambda P_\lambda$$

Подробности см. в [28], гл. 2, § 8, п. 9.
Пусть V - конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. Понятие самосопряженного оператора, вообще говоря, зависит от выбора структуры евклидова пространства на V (то есть билинейной симметричной положительно определенной формы, задающей скалярное произведение). Однако очевидно, что, например, тождественный оператор id_V самосопряжен относительно любого скалярного произведения на V.

Задача 3.

20. Описать линейные операторы на V, которые являются самосопряженными относительно любого скалярного произведения на V.

Решение. Ясно, что операторы вида $\lambda \mathrm{id}_V, \lambda \in \mathbb{R}$, удовлетворяют условию. С другой стороны, пусть у диагонализируемого оператора φ на V есть два различных собственных значения $\lambda \neq \mu$ и пусть V_λ, V_μ - соответствующие собственные подпространства. Для того чтобы φ был самосопряжен относительно скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$, необходимо, чтобы V_λ и V_μ были ортогональны относительно $(\ \cdot,\cdot\ )$. Но ясно, что, меняя скалярное произведение в V, можно добиться того, чтобы два ненулевых подпространства $V_\lambda, V_\mu, V_\lambda \cap V_\mu = \{\mathbf{0}\}$, были бы не ортогональны. Значит, линейный оператор, имеющий более одного собственного значения, не может быть самосопряжен относительно произвольного скалярного произведения.

Задача 3.

21. Доказать, что два самосопряженных оператора A, B в евклидовом пространстве V коммутируют тогда и только тогда, когда они имеют общий ортонормированный базис из собственных векторов (ср. задачу 2.22).

Решение. Легко видеть, что если оператор $B : V \to V$ самосопряжен, то его ограничение $B|_U$ на любое инвариантное подпространство $U \subset V$ также самосопряжено.

Если $AB = BA$, то $B(A - \lambda \mathrm{id}) = (A - \lambda \mathrm{id})B$ для любого скаляра λ, следовательно, собственные подпространства оператора A инвариантны относительно B. Значит, ограничение $B|_{V_\lambda}$ на собственное подпространство V_λ оператора A самосопряжено $\Rightarrow$ для него в V_λ существует ортонормированный базис из собственных векторов, которые, очевидно, являются также собственными и для A. Поскольку собственные подпространства, отвечающие разным собственным значениям самосопряженного оператора, ортогональны, объединение базисов в собственных подпространствах даст искомый базис в V, ср. с доказательством задачи 2.22.

Таким образом, из $[A, B] = 0$ следует существование общего ортонормированного базиса из собственных векторов. Обратное утверждение очевидно.

Приведем еще вариант доказательства с использованием индукции по $n = \dim V$. При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть оно верно для евклидовых пространств V

размерности, не превосходящей $n-1$. Пусть $\dim V = n$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ - некоторое собственное значение $A : V \to V$. Рассмотрим соответствующее собственное подпространство $V_\lambda = \ker(A - \lambda\,\mathrm{id}) \subset V$. Оно является B-инвариантным, так как

$$\forall \mathbf{v} \in V_\lambda \quad A(B\mathbf{v}) = B(A\mathbf{v}) = \lambda B\mathbf{v} \Rightarrow B\mathbf{v} \in V_\lambda.$$

Так как ограничение $B|_{V_\lambda}$ на V_λ является самосопряженным оператором, то у $B|_{V_\lambda}$ есть собственный вектор $\mathbf{w} \in V_\lambda$, который, поскольку лежит в V_λ, является также собственным для оператора A. Подпространство $\langle \mathbf{w} \rangle \subset V$ является A и B-инвариантным, поэтому его ортогональное дополнение $U := \langle \mathbf{w} \rangle^\perp \subset V$ также A и B-инвариантно (см. п. 1 , задачи 3.15) и имеет размерность $n-1$. По предположению индукции в U есть ортонормированный базис из общих собственных векторов для $A|_U$ и $B|_U$, дополняя его вектором $\frac{1}{|\mathbf{w}|}\mathbf{w}$, получим ортонормированный базис в V, состоящий из общих собственных векторов операторов A и B.

Комментарий. В квантовой механике коммутирующим самосопряженным операторам отвечают совместные наблюдаемые.

Задача 3.

22. Доказать, что в трехмерном евклидовом пространстве любое ортогональное преобразование, сохраняющее ориентацию, является вращением относительно некоторой оси.

Это утверждение также называется теоремой Эйлера. Решение. Пусть $f : V \to V$ - данное ортогональное преобразование. A priori его определитель может быть либо 1 , либо -1 , но так как по условию f сохраняет ориентацию, то $\det f > 0$, то есть $\det f = 1$. Определитель есть произведение собственных значений, которые являются корнями характеристического многочлена $\chi_f(t) \in \mathbb{R}[t], \deg \chi_f(t) = 3$. Всякий такой многочлен имеет (хотя бы один) вещественный корень $\alpha \in \mathbb{R}$. Пусть $\mathbf{u}$ - соответствующий собственный вектор, $f(\mathbf{u}) = \alpha\mathbf{u}$. Так как f ортогонален, то $\alpha = \pm 1$ (действительно, $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (f(\mathbf{u}), f(\mathbf{u})) = \alpha^2(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \neq 0$). Если $\chi_f(t)$ имеет также комплексный корень λ, то $\bar\lambda$ также является корнем, и $1 = \det f = \alpha|\lambda|^2$, откуда $\alpha = 1$ (и $|\lambda| = 1$). Если же все три корня вещественные, то предшествующие рассуждения показывают, что возможны два случая: $\{1, -1, -1\}$ и $\{1, 1, 1\}$. В любом случае f имеет собственное значение 1 .

В случае, когда есть пара комплексно-сопряженных корней или набор $\{1, -1, -1\}$, покажем, что ортогональное дополнение $U^\perp$ к собственному подпространству $U \subset V$, отвечающему собственному значению 1 (ясно, что $\dim U = 1 \Rightarrow \dim U^\perp == 2$), является f-инвариантным. Действительно, если $\mathbf{w} \in U^\perp$, то $0 = (\mathbf{u}, \mathbf{w}) = (f(\mathbf{u}), f(\mathbf{w})) = (\mathbf{u}, f(\mathbf{w}))\forall \mathbf{u} \in U \Rightarrow f(\mathbf{w}) \in U^\perp$. Тогда f индуцирует ортогональное преобразование плоскости $U^\perp \subset V$ с определителем 1 , которое, очевидно, является вращением (на некоторый угол $\neq \pi$ в случае комплексных корней и на угол π в случае вещественных). Тогда и само $f : V \to V$ является вращением вокруг оси с направляющим вектором $\mathbf{u}$.

В случае корней $\{1, 1, 1\}$ имеем тождественное преобразование, которое является вращением (вокруг произвольной оси) на нулевой угол.

Комментарий. Теорема Эйлера означает, что какое бы сложное движение твердое тело с неподвижной точкой не совершало, конечное его положение получается из начального вращением вокруг некоторой оси.

Легко понять, что для пространств четной размерности утверждение, аналогичное теореме Эйлера, не имеет места. Четномер-

ное пространство можно представить в виде прямой суммы ортогональных плоскостей, попарно пересекающихся только в начале координат. Движение, которое сохраняет только начало координат, - это композиция поворотов в этих плоскостях. Более аккуратно это утверждение выводится из общей теоремы, описывающей канонический вид ортогональных операторов и утверждающей, что для ортогональности оператора f в евклидовом пространстве необходимо и достаточно, чтобы в некотором ортонормированном базисе его матрица имела блочно-диагональный вид с блоками размера 2×2 вида $A(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ (вообще говоря, с разными φ) и размера 1 вида ± 1. Подробности см. в [28], гл. 2, § 7.

Задача 3.

23. Пусть оператор в некотором ортонормированном базисе евклидовой плоскости имеет матрицу

$$B(\varphi)=\left(\begin{array}{cc}\cos\varphi & \sin\varphi\\ \sin\varphi & -\cos\varphi\end{array}\right)$$

для некоторого $\varphi\in\mathbb{R}$. Выяснить его геометрический смысл и найти его канонический вид.

Решение. На первый взгляд, данная матрица напоминает матрицу поворота, однако $\det B(\varphi)=-1$, значит, в отличие от поворота этот оператор меняет ориентацию. Тем не менее ясно, что преобразование, заданное матрицей $B(\varphi)$, ортогонально. С другой стороны, так как матрица $B(\varphi)$ симметрична, то соответствующий оператор является самосопряженным. Значит, его собственные значения вещественны, а так как собственные значения ортогонального оператора по модулю равны 1 , то они принадлежат множеству $\{\pm 1\}$. Так как определитель $\det B(\varphi)$ равен -1 , то $B(\varphi)$ имеет два разных собственных значения $\lambda_1=1, \lambda_2=-1$ (это также следует из того, что если бы собственные значения совпадали, то матрица $B(\varphi)$ была бы скалярной, что не так).

Каждому из собственных значений $1,-1$ соответствует одномерное собственное подпространство, причем эти собственные подпространства взаимно ортогональны, так как оператор самосопряжен. Следовательно, геометрический смысл данного преобразования - это так называемое ортогональное отражение относительно одномерного подпространства с направляющим век-

тором $(\cos(\varphi/2),\sin(\varphi/2))^T$ (это собственный вектор с собственным значением 1), а канонический вид - диагональная матрица с числами 1 и -1 на главной диагонали. Прямым вычислением можно проверить, что $B(\varphi)^2=E$.

В разделе 2.2. мы уже определили комплексификацию $V^{\mathbb{C}}$ вещественного векторного пространства V, которая есть комплексное векторное пространство той же размерности. В случае, когда V - евклидово пространство со скалярным произведением g, на пространстве $V^{\mathbb{C}}$ можно определить эрмитово скалярное произведение $g^{\mathbb{C}}$, превращающее $V^{\mathbb{C}}$ в унитарное пространство.

Более общо, пусть g - билинейная форма на V. Определим функцию $g^{\mathbb{C}}: V^{\mathbb{C}}\times V^{\mathbb{C}}\to\mathbb{C}$ следующим образом:

$$\begin{gathered}g^{\mathbb{C}}\left(\mathbf{u}_1+i\mathbf{v}_1,\mathbf{u}_2+i\mathbf{v}_2\right)=\\ =g\left(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\right)+g\left(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\right)+i\left(g\left(\mathbf{v}_1,\mathbf{u}_2\right)-g\left(\mathbf{u}_1,\mathbf{v}_2\right)\right),\end{gathered}$$

где $\mathbf{u}_1+i\mathbf{v}_1,\mathbf{u}_2+i\mathbf{v}_2\in V^{\mathbb{C}}$. Нетрудно проверить, что $g^{\mathbb{C}}$ - полуторалинейная форма на $V^{\mathbb{C}}$. Более того, если g симметрична, то $g^{\mathbb{C}}$ эрмитово симметрична. Теперь легко убедиться, что если (V,g) - евклидово пространство, то $\left(V^{\mathbb{C}},g^{\mathbb{C}}\right)$ - унитарное пространство.

Например, если применить данную конструкцию к пространству $C[-1,1]$ вещественнозначных непрерывных функций на отрезке $[-1,1]$ со скалярным произведением из задачи 3.7 , получим пространство непрерывных функций $f:[-1,1]\to\mathbb{C}$ с эрмитовым скалярным произведением $(f,g)=\int_{-1}^{1} f(x)\bar{g}(x)dx$.

Мы приведем два примера использования комплексификации евклидова пространства.

Задача 3.

24. Доказать, что все корни характеристического многочлена самосопряженного оператора в евклидовом или унитарном пространстве вещественны.

Решение. Пусть сначала V - унитарное пространство с эрмитовым скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$, а $\varphi: V\to V$ - самосопряженный оператор. Пусть $\lambda\in\mathbb{C}$ - произвольный корень многочлена $\chi_{\varphi}(t)$. Тогда $\exists\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ такой, что $\varphi(\mathbf{v})=\lambda\mathbf{v}$. Имеем

$$(\varphi(\mathbf{v}),\mathbf{v})=\lambda(\mathbf{v},\mathbf{v})=(\mathbf{v},\varphi(\mathbf{v}))=\bar{\lambda}(\mathbf{v},\mathbf{v})\Rightarrow\lambda=\bar{\lambda}$$

(где мы использовали $(\mathbf{v},\mathbf{v})\neq 0$).

Случай, когда V - евклидово пространство, а φ - самосопряженный оператор на V, сводится к предыдущему с помощью комплексификации. А именно, пусть $V^{\mathbb{C}}$ - определенная выше унитарная комплексификация $V,\varphi^{\mathbb{C}}: V^{\mathbb{C}}\to V^{\mathbb{C}}$ - комплексификация оператора φ (см. раздел 2.2.). Тогда легко видеть, что $\varphi^{\mathbb{C}}$ - самосопряженный оператор на унитарном пространстве $V^{\mathbb{C}}$ (такие операторы еще называются эрмитовыми). Действительно,

$$\begin{aligned} g^{\mathbb{C}}\left(\varphi^{\mathbb{C}}\left(\mathbf{u}_1+i\mathbf{v}_1\right),\mathbf{u}_2+i\mathbf{v}_2\right)&=g^{\mathbb{C}}\left(\varphi\left(\mathbf{u}_1\right)+i\varphi\left(\mathbf{v}_1\right),\mathbf{u}_2+i\mathbf{v}_2\right)=\\ =&g\left(\varphi\left(\mathbf{u}_1\right),\mathbf{u}_2\right)+g\left(\varphi\left(\mathbf{v}_1\right),\mathbf{v}_2\right)+i\left(g\left(\varphi\left(\mathbf{v}_1\right),\mathbf{u}_2\right)-g\left(\varphi\left(\mathbf{u}_1\right),\mathbf{v}_2\right)\right)=\\ =&g\left(\mathbf{u}_1,\varphi\left(\mathbf{u}_2\right)\right)+g\left(\mathbf{v}_1,\varphi\left(\mathbf{v}_2\right)\right)+i\left(g\left(\mathbf{v}_1,\varphi\left(\mathbf{u}_2\right)\right)-g\left(\mathbf{u}_1,\varphi\left(\mathbf{v}_2\right)\right)\right)=\\ =&g^{\mathbb{C}}\left(\mathbf{u}_1+i\mathbf{v}_1,\varphi\left(\mathbf{u}_2\right)+i\varphi\left(\mathbf{v}_2\right)\right)=g^{\mathbb{C}}\left(\mathbf{u}_1+i\mathbf{v}_1,\varphi^{\mathbb{C}}\left(\mathbf{u}_2+i\mathbf{v}_2\right)\right)\end{aligned}$$

Из первой части доказательства следует, что для оператора $\varphi^{\mathbb{C}}$ требуемое утверждение верно. Для завершения доказательства остается заметить, что $\chi_{\varphi}(t)=\chi_{\varphi^{\mathbb{C}}}(t)$ (см. раздел 2.2.). □

В решении предыдущей задачи доказано, что комплексификация самосопряженного оператора является самосопряженным (эрмитовым) оператором. Аналогично, комплексификация ортогонального оператора является унитарным оператором.

Действительно, пусть $\varphi : V \rightarrow V$ - ортогональный оператор на евклидовом пространстве V, то есть $g(\varphi(\mathbf{u}),\varphi(\mathbf{v}))=g(\mathbf{u},\mathbf{v})$ для всех $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$. Тогда для $\varphi^{\mathbb{C}}: V^{\mathbb{C}}\rightarrow V^{\mathbb{C}}$ получаем

$$\begin{gathered} g^{\mathbb{C}}\left(\varphi^{\mathbb{C}}\left(\mathbf{u}_1+i\mathbf{v}_1\right),\varphi^{\mathbb{C}}\left(\mathbf{u}_2+i\mathbf{v}_2\right)\right)=\\ =g^{\mathbb{C}}\left(\varphi\left(\mathbf{u}_1\right)+i\varphi\left(\mathbf{v}_1\right),\varphi\left(\mathbf{u}_2\right)+i\varphi\left(\mathbf{v}_2\right)\right)=\\ =g\left(\varphi\left(\mathbf{u}_1\right),\varphi\left(\mathbf{u}_2\right)\right)+g\left(\varphi\left(\mathbf{v}_1\right),\varphi\left(\mathbf{v}_2\right)\right)+\\ +i\left(g\left(\varphi\left(\mathbf{v}_1\right),\varphi\left(\mathbf{u}_2\right)\right)-g\left(\varphi\left(\mathbf{u}_1\right),\varphi\left(\mathbf{v}_2\right)\right)\right)=\\ =g\left(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\right)+g\left(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\right)+i\left(g\left(\mathbf{v}_1,\mathbf{u}_2\right)-g\left(\mathbf{u}_1,\mathbf{v}_2\right)\right)=\\ =g^{\mathbb{C}}\left(\mathbf{u}_1+i\mathbf{v}_1,\mathbf{u}_2+i\mathbf{v}_2\right).\end{gathered}$$

Если V - унитарное пространство, а $\varphi : V\rightarrow V$ - унитарный оператор на V, то модуль всех собственных значений φ равен 1 . Действительно, если $\mathbf{v}\in V,\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$ и $\varphi(\mathbf{v})=\lambda\mathbf{v}$, то

$$(\mathbf{v},\mathbf{v})=(\varphi(\mathbf{v}),\varphi(\mathbf{v}))=\lambda\bar{\lambda}(\mathbf{v},\mathbf{v})\Rightarrow|\lambda|=1.$$

Таким образом, из предыдущего получаем, что все корни характеристического многочлена ортогонального оператора лежат на единичной окружности в $\mathbb{C}$.

Кроме того, если $\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ - собственные векторы унитарного оператора φ, отвечающие разным собственным значениям $\lambda,\mu,\lambda\neq\mu$, то $(\mathbf{v},\mathbf{w})=0$. Действительно,

$$(\mathbf{v},\mathbf{w})=(\varphi(\mathbf{v}),\varphi(\mathbf{w}))=\lambda\bar{\mu}(\mathbf{v},\mathbf{w}),$$

и так как по доказанному $|\lambda|=|\mu|=1$, причем $\lambda\neq\mu$, то $\lambda\bar{\mu}\neq\neq 1\Rightarrow(\mathbf{v},\mathbf{w})=0$.

Пусть теперь V - евклидово пространство, а $\varphi : V\rightarrow V$ - ортогональный оператор на нем. Пусть $V^{\mathbb{C}}$ - комплексификация V, являющаяся унитарным пространством, $\varphi^{\mathbb{C}}$ - унитарный оператор на $V^{\mathbb{C}}$, являющийся комплексификацией φ. Из пункта 2.2. мы знаем, что собственному значению $\lambda\notin\mathbb{R}$ комплексификации $\varphi^{\mathbb{C}}$ соответствует двумерное инвариантное подпространство $V^{\lambda}\subset V$ оператора φ.

Задача 3.

25. Пусть V^{λ},V^{μ} - два двумерных инвариантных подпространства оператора φ, которые отвечают разным невещественным собственным значениям $\lambda\neq\mu,\lambda\neq\bar{\mu}$ комплексификации $\varphi^{\mathbb{C}}$. Доказать, что тогда $V^{\lambda}\perp V^{\mu}$ (как подпространства евклидова пространства V).

Решение. Пусть $\mathbf{v}:=\mathbf{v}_1+i\mathbf{v}_2,\mathbf{w}:=\mathbf{w}_1+i\mathbf{w}_2$ - собственные векторы оператора $\varphi^{\mathbb{C}}$ с собственными значениями λ,μ соответственно. Тогда $\mathbf{w}':=\mathbf{w}_1-i\mathbf{w}_2$ - собственный вектор оператора $\varphi^{\mathbb{C}}$ с собственным значением $\bar{\mu}$. Согласно ранее доказанному,

$$g^{\mathbb{C}}(\mathbf{v},\mathbf{w})=0=g^{\mathbb{C}}\left(\mathbf{v},\mathbf{w}'\right)$$

то есть

$$\begin{aligned}0&=g^{\mathbb{C}}(\mathbf{v},\mathbf{w})=g\left(\mathbf{v}_1,\mathbf{w}_1\right)+g\left(\mathbf{v}_2,\mathbf{w}_2\right)+i\left(g\left(\mathbf{v}_2,\mathbf{w}_1\right)-g\left(\mathbf{v}_1,\mathbf{w}_2\right)\right),\\ 0&=g^{\mathbb{C}}\left(\mathbf{v},\mathbf{w}'\right)=g\left(\mathbf{v}_1,\mathbf{w}_1\right)-g\left(\mathbf{v}_2,\mathbf{w}_2\right)+i\left(g\left(\mathbf{v}_2,\mathbf{w}_1\right)+g\left(\mathbf{v}_1,\mathbf{w}_2\right)\right).\end{aligned}$$

Разделяя вещественную и мнимую части, получаем систему:

$$0 = g(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1) + g(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2) = g(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1) - g(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2),$$
$$0 = g(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1) - g(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2) = g(\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1) + g(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2).$$

Из нее следует требуемое:

$$V^\lambda = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \perp \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle = V^\mu.$$

Доказанный результат мы примéним к нахождению канонического вида ортогонального оператора.

Задача 3.

26. Привести к каноническому виду ортогональный оператор φ, имеющий в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства V матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. Характеристический многочлен этого оператора

$$\chi_\varphi(t) = t^4 + 1 = \left(t^2 + \sqrt{2}t + 1\right)\left(t^2 - \sqrt{2}t + 1\right)$$

имеет две пары комплексно-сопряженных корней. Это, как легко видеть, $\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $-\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Положим $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ и найдем соответствующий собственный вектор комплексификации $\varphi^{\mathbb{C}}$, решая систему линейных однородных уравнений с матрицей

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Взяв последнюю координату в качестве параметра $x \neq 0$, получаем собственный вектор комплексификации:

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x - i\frac{\sqrt{2}}{2}x, -ix, \frac{\sqrt{2}}{2}x - i\frac{\sqrt{2}}{2}, x\right)^T.$$

Полагая $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, получаем вектор

$$\mathbf{v} := \left(-\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}, -i\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$$

с действительной частью $\mathbf{v}_1 := \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$ и соответственно мнимой частью $\mathbf{v}_2 := \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, 0\right)^T$. Вещественная и мнимая части ортогональны и нормированы.

Заметим, что ортогональность $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ неслучайна. Действительно, помимо собственного вектора $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2$, у унитарного оператора $\varphi^{\mathbb{C}}$ есть также собственный вектор $\mathbf{v}' = \mathbf{v}_1 - i\mathbf{v}_2$ с собственным значением $\bar{\lambda} \neq \lambda$. Так как собственные векторы унитарного оператора, отвечающие разным собственным значениям, ортогональны, то

$$g^{\mathbb{C}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) - g(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2) + i\left(g(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) + g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)\right) = 0,$$

откуда получаем $|\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2|$ и $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$.

Собственным вектором φ, отвечающим собственному значению $\bar{\lambda}$, будет, очевидно, $\mathbf{v}' = \mathbf{v}_1 - i\mathbf{v}_2$. Матрица ограничения φ на инвариантное подпространство $V^\lambda = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$ в базисе $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ есть

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}. \tag{47}$$

Если $\mu = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ - представитель другой пары комплексносопряженных собственных значений, то, как мы знаем из предыдущей задачи, $V^\mu = \left(V^\lambda\right)^\perp = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle^\perp$. Альтернативно, решая систему линейных однородных уравнений с матрицей

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & -1 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

получим собственный вектор

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - i\frac{\sqrt{2}}{2}x, ix, -\frac{\sqrt{2}}{2}x - i\frac{\sqrt{2}}{2}x, x\right)^T.$$

Полагая $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, получаем вектор $\mathbf{w} := \left(\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}, i\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$, с действительной частью $\mathbf{w}_1 := \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$ и соответственно мнимой частью $\mathbf{w}_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, 0\right)^T$, части ортогональны и

нормированы. Тем самым получаем инвариантное подпространство $V^\mu = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle$, которое, как легко проверить, является ортогональным дополнением к V^λ (впрочем, это следует из предыдущей задачи). Матрица ограничения φ на инвариантное подпространство $V^\mu = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle$ в базисе $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ есть

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{3\pi}{4} & -\sin\frac{3\pi}{4} \\ \sin\frac{3\pi}{4} & \cos\frac{3\pi}{4} \end{pmatrix}. \tag{48}$$

Таким образом, мы получаем, что в ортонормированном базисе $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ евклидова пространства V матрица оператора

$$\varphi$$

является блочно-диагональной. Причем блоки этой матрицы имеют вид (47) и (48).

Задача 3.

27. На линейном пространстве функций, непрерывных на отрезке $[-1, 1]$, со скалярным произведением из задачи 3.7 , преобразование φ задано формулой

$$\varphi(f)(y) = \int_{-1}^{1} K(x, y) f(x) dx$$

где $K : [-1, 1] \times [-1, 1] \to \mathbb{R}$ - непрерывная функция. При каком условии на функцию K оператор φ будет самосопряженным?

Решение. Проверка того, что формулы из условия действительно задают скалярное произведение, была проведена в задаче 3.7. То, что φ - линейный оператор, очевидным образом следует из свойств интеграла.

Решение задачи основано на выкладке [31] :

$$(\varphi(f), g) = \int_{-1}^{1} \varphi(f)(y) g(y) dy = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} K(x, y) f(x) dx g(y) dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x) \left(\int_{-1}^{1} K(x, y) g(y) dy\right) dx = (f, \varphi^*(g))$$

Таким образом, $\varphi^*(f)(y) = \int_{-1}^{1} K(y, x) f(x) dx$, и если $\varphi = \varphi^*$, то для любой непрерывной функции f на отрезке $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^{1} (K(x, y) - K(y, x)) f(x) dx = 0$$

[231] Далее используется следствие из теоремы Фубини о свед́ении двойного интеграла к повторному, которая изучается на втором курсе. Для полноты мы приводим его формулировку в комментарии ниже.

откуда (в силу непрерывности функции $K(x,y)$) получаем, что $\forall y \in [-1,1]$ должно выполняться условие $K(x,y)-K(y,x)\equiv 0$ как функция от x на отрезке $[-1,1] \Rightarrow K(x,y)\equiv K(y,x)$ на всем квадрате $[-1,1]\times[-1,1]$.

Комментарии. 1) Чтобы догадаться до правильного ответа, можно рассмотреть следующую "дискретную" модель. Рассмотрим вместо отрезка конечное множество точек $x_1,\dots,x_n$; тогда K является $n\times n$-матрицей с элементами $K(x_j,x_i)=:a_{ij}$, функция f - столбцом $\mathbf{u}=(u_1,\dots,u_n)^T, u_i := f(x_i)$; функция g - столбцом $\mathbf{v}=(v_1,\dots,v_n)^T, v_i := g(x_i)$. Кроме того, действие оператора φ на функцию f сводится к умножению матрицы A на столбец $\mathbf{u}$, а скалярное произведение задается стандартной формулой (как в ортонормированном базисе) $(\mathbf{u},\mathbf{v})=\mathbf{u}^T\mathbf{v}$. Значит, если $(A\mathbf{u},\mathbf{v})=(A\mathbf{u})^T\mathbf{v}=\mathbf{u}^T\left(A^T\mathbf{v}\right)=(\mathbf{u},A^*\mathbf{v})$, то оператору A^* соответствует матрица A^T.

Следовательно, оператор, сопряженный φ, имеет производящую функцию $K^*(x,y)=K(y,x)$ и φ самосопряжен, если и только если $K(x,y)=K(y,x)$.

2) Приведем формулировку использованной нами выше теоремы Фубини из курса математического анализа (см., например, [10], гл. 19, § 19.3.), которая позволяет менять местами порядок интегрирования.

Теорема 3.28. Пусть функиия f непрерывна на прямоугольнике $P:=[a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{R}^2$. Тогда

$$\iint_P f(x,y)dxdy=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx.$$

Задача 3.

29. Показать, что оператор двукратного дифференцирования $\mathbf{A}=\frac{d^2}{dx^2}$ является самосопряженным оператором в

пространстве V тригонометрических многочленов

$$V=\{a_0+a_1\cos x+b_1\sin x+\ldots+a_n\cos nx+b_n\sin nx\}$$

с евклидовым скалярным произведением

$$(f,g)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)g(x)dx$$

Показать, что функции $1/\sqrt{2},\cos x,\sin x,\dots,\cos nx,\sin nx$ образуют ортонормированный базис для оператора $\mathbf{A}$, найти соответствующие собственные значения.

Решение. Ясно, что функции $\{1,\cos kx,\sin kx \mid k\geq 1\}$ линейно независимы, следовательно, $\dim V = 2n+1$. Элементы пространства V называются тригонометрическими многочленами. Заметим, что оператор $\frac{d}{dx}$ (а значит, и $\mathbf{A}=\frac{d}{dx}\circ\frac{d}{dx}$) переводит пространство V в себя. По формуле интегрирования по частям для любых тригонометрических многочленов f,g имеем

$$\left(\frac{df}{dx},g\right)+\left(f,\frac{dg}{dx}\right)=fg|_0^{2\pi}=0$$

Таким образом, на V

$$\left(\frac{df}{dx},g\right)=\left(f,-\frac{dg}{dx}\right)$$

т.е. оператор $-\frac{d}{dx}$ сопряжен с оператором $\frac{d}{dx}$. Отсюда получаем

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}\right)^*=\left(\frac{d}{dx}\circ\frac{d}{dx}\right)^*=\left(\frac{d}{dx}\right)^*\circ\left(\frac{d}{dx}\right)^*=$$
$$=\left(-\frac{d}{dx}\right)\circ\left(-\frac{d}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\circ\frac{d}{dx}=\frac{d^2}{dx^2}$$

(здесь мы использовали тождество [32]$(\psi\circ\varphi)^*=\varphi^*\circ\psi^*$), то есть оператор A самосопряжен.

Для оператора $\mathbf{A}$, как для любого самосопряженного оператора, существует ортонормированный базис из собственных век-

торов. Легко проверить, что функция $f(x) \equiv 1$ - собственный вектор оператора $\mathbf{A}$ с собственным значением 0 , а $\cos kx$ и $\sin kx$ - собственные векторы оператора $\mathbf{A}$ с собственным значением $-k^2$. Так как собственные подпространства самосопряженного оператора, отвечающие разным собственным значениям, взаимно ортогональны, при $k \neq l$ получаем

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \cos lx dx = \int_0^{2\pi} \sin kx \sin lx dx = \int_0^{2\pi} \cos kx \sin lx dx = 0$$

Разумеется, эти хорошо известные соотношения могут быть проверены и прямым вычислением.

Нормированность рассматриваемого базиса следует из очевидных равенств

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 kx dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 kx dx = \pi \quad \text{при} \quad k > 0$$

Таким образом, в указанном в условии ортонормированном базисе оператор $\mathbf{A}$ имеет следующий диагональный вид:

$$\operatorname{diag}\left(0, -1, -1, -2^2, -2^2, \ldots, -n^2, -n^2\right)$$

Комментарий. Отсюда можно вывести следующий важный факт. Оператор Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$, действующий в пространстве финитных функций (бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем), является самосопряженным оператором. Отметим, что в пространстве дважды непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a, b]$ со скалярным произведением, определенным как интеграл по соответствующему отрезку от произведения функций, оператор Лапласа самосопряженным уже не будет, так как получающийся при интегрировании по частям смешанный член в ноль обращаться не обязан. Действительно, если мы возьмем пару функций x и x^2, которые, разумеется, будут удовлетворять всем перечисленным условиям, скажем, на отрезке $[0, 1]$, самосопряженность оператора $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$

означает, что

$$\int_0^1 x^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} x\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2\right) x dx \tag{49}$$

В левой части выражения (49) получилось нулевое выражение, а в правой, как несложно убедиться, не ноль.

8.4.3 3.3. Билинейные и квадратичные функции в евклидовых пространствах

Пусть V - евклидово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot), h : V \times V \to \mathbb{R}$ - билинейная функция на V. Тогда, как показывает следующая задача, существует единственный линейный оператор $\varphi = \varphi_h : V \to V$, определяемый равенством

$$h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \varphi(\mathbf{v})) \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \tag{50}$$

Замечание. Для читателей, знакомых с тензорными обозначениями, заметим, что билинейная форма h получается из линейного оператора φ_h опусканием верхнего индекса с помощью метрики g :

$$h_{ij} u^i v^j = g_{ij} u^i \varphi(\mathbf{v})^j = g_{ij} u^i \varphi_k^j v^k = g_{ik} \varphi_j^k u^i v^j \Rightarrow h_{ij} = g_{ik} \varphi_j^k$$

(свертка по k), ср. формулу (51) ниже. Здесь мы пользуемся обозначениями А. Эйнштейна (суммирование по повторяющимся сверху и снизу индексам). Обратно, φ_h получается из h с помощью подъема индекса в присутствии метрики g.

Заметим, что и множество линейных операторов $V \to V$, и множество билинейных функций $V \times V \to \mathbb{R}$ являются векторными пространствами над $\mathbb{R}$ одной и той же размерности n^2, где $n = \dim V$ (например, в базисе оператор и билинейная функция однозначно задаются своими матрицами, причем любая матрица может быть как матрицей линейного оператора, так и матрицей билинейной функции). Пространство

[232] Можно также использовать повторное интегрирование по частям.

билинейных функций на V обозначим $\mathcal{B}(V)$, пространство линейных операторов на V $\mathcal{L}(V)$.

Задача 3.

30. 1) Сопоставление $h \mapsto \varphi_h$ определяет изоморфизм векторных пространств $\alpha : \mathcal{B}(V) \to \mathcal{L}(V)$.
2) При изоморфизме α симметричные билинейные функции отвечают самосопряженным операторам.

Решение. 1) Построим линейное отображение $\beta : \mathcal{L}(V) \to \mathcal{B}(V)$, обратное к отображению α, а именно для линейного оператора $\varphi : V \to V$ определим билинейную функцию $h = h_\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ равенством (50). То есть по определению $\beta(\varphi) = h_\varphi$. Линейность отображения β очевидна. Так как пространства операторов и билинейных функций на V, как указывалось, имеют одинаковые размерности, то для доказательства того, что β - линейный изоморфизм, достаточно доказать его инъективность.

Пусть $\varphi \neq 0$, тогда, конечно, существует такой вектор $\mathbf{v} \in V$, что $\varphi(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$. Кроме того, в силу невырожденности скалярного произведения существует вектор $\mathbf{u} \in V$ такой, что

$$(\mathbf{u}, \varphi(\mathbf{v})) = h_\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq 0 \Rightarrow \beta(\varphi) = h_\varphi \neq 0.$$

Таким образом, линейное отображение β - изоморфизм, а значит, и обратное к нему отображение α тоже является изоморфизмом.
2) Проверим теперь второе утверждение. Действительно, для всех $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$

$$h(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = h(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \Leftrightarrow (\mathbf{u}, \varphi(\mathbf{v})) = (\mathbf{v}, \varphi(\mathbf{u})) = (\varphi(\mathbf{u}), \mathbf{v}),$$

что равносильно самосопряженности оператора φ.
Пусть $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ - некоторый базис в V, в котором евклидово скалярное произведение ($\cdot, \cdot$) имеет матрицу Грама G, билинейная форма h - матрицу H, а оператор φ_h - матрицу $A = A_\varphi$. Кроме того, пусть $\vec{u}, \vec{v}$ - координатные столбцы векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v}$. Тогда (50) переписывается в виде

$$\vec{u}^T H \vec{v} = \vec{u}^T G A \vec{v} \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \Leftrightarrow H = GA \Leftrightarrow A = G^{-1} H. \tag{51}$$

В частности, если базис ортонормированный, то $G = E$, а значит, $A = H$.

Пусть $\{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$ - еще один базис в V, C - матрица перехода к нему от старого базиса. Тогда в очевидных обозначениях

мы должны иметь $G' = C^T G C, H' = C^T H C$. Проверим, что тогда $A' = C^{-1} A C$ (как и должно быть для матрицы оператора). Действительно,

$$A' = G'^{-1} H' = \left(C^T G C\right)^{-1} C^T H C =$$
$$= C^{-1} G^{-1} C^{-T} C^T H C = C^{-1} G^{-1} H C = C^{-1} A C.$$

В частности, если оба базиса ортонормированные, то C - ортогональная матрица, то есть $C^{-1} = C^T$, и тогда $A' = C^{-1} A C == C^T A C = C^T H C = H'$.

Пусть h - симметричная билинейная форма. Так как для самосопряженного оператора φ_h существует ортонормированный базис из собственных векторов, а значит, в нем его матрица A диагональна, то и матрица билинейной формы H в этом базисе тоже диагональна. Таким образом, для любой симметричной билинейной (или квадратичной) формы на евклидовом пространстве существует ортонормированный базис, в котором она диагональна (для квадратичной формы последнее означает, что в соответствующих координатах она имеет вид $\sum_k \lambda_k x_k^2$).

Задача 3.

31. Пусть V - векторное пространство над $\mathbb{R}, g, h$ две квадратичные формы на V, причем g положительно определена. Доказать, что в V существует базис, в котором матрица Грама первой формы $G = E$, а матрица H второй формы h диагональна.

Решение. Так как g положительно определена, то (V, g) - евклидово пространство. Построим по h симметричную билинейную форму $\widetilde{h}$ ("поляризацию" h), с которой ассоциируем самосопряженный оператор φ, как показано выше (заметим, что сопоставление $\widetilde{h} \mapsto \varphi_{\widetilde{h}}$ зависит и от g). Тогда для построенного нами самосопряженного оператора φ существует ортонормированный базис из собственных векторов. В этом базисе мы имеем $G=E, A=H$ и A диагональна (с собственными значениями φ на главной диагонали).

Изложим теперь алгоритм приведения пары форм к диагональному виду. Пусть в некотором базисе пространства V форма g имеет матрицу G, а форма h - матрицу H, тогда матрица опе-

ратора φ есть $A=A_{\varphi}=G^{-1} H$. Имеем

$$\begin{gathered}
\operatorname{det}(A-\lambda E)=\operatorname{det}\left(G^{-1} H-\lambda E\right)=\operatorname{det}\left(G^{-1} H-\lambda G^{-1} G\right)= \\
=\operatorname{det}\left(G^{-1}(H-\lambda G)\right)=\operatorname{det}\left(G^{-1}\right) \operatorname{det}(H-\lambda G) .
\end{gathered}$$

Таким образом, собственные значения φ совпадают с корнями "обобщенного характеристического уравнения" $\operatorname{det}(H-\lambda G)=0$ (так как A - матрица самосопряженного оператора, то все они вещественны). Пусть λ_{k} - некоторый корень. Тогда соответствующие собственные векторы находятся как (ненулевые) решения системы линейных однородных уравнений $\left(A-\lambda_{k} E\right) \vec{v}=\overrightarrow{0}$ (здесь $\vec{v}$ - неизвестный столбец координат собственного вектора v). Данная система эквивалентна системе $\left(H-\lambda_{k} G\right) \vec{v}==\overrightarrow{0}$. Заметим, что собственные векторы, отвечающие разным собственным значениям, автоматически будут ортогональны относительно g, в случае же кратного собственного значения λ_{k} базисные векторы из соответствующего собственного подпространства нужно ортогонализовать отдельно (например, с помощью алгоритма Грама-Шмидта) относительно матрицы Грама G. Далее полученный ортогональный базис, опять же используя матрицу G, нужно нормировать. В полученном ортонормированном относительно формы g базисе матрица Грама формы g будет единичной E, а матрица h - диагональной $\operatorname{diag}\left(\lambda_{1}, \ldots, \lambda_{n}\right)$.

Полученный в данном разделе результат о приведении пары квадратичных форм к главным осям имеет важное применение в теории малых колебаний. Роль квадратичных форм в этом случае играют кинетическая и потенциальная энергии, причем первая из них положительно определена. Подробнее см., например, в книге [4].

8.4.4 3.4. Полярное разложение

Задача 3.

32. Показать, что множество ортогональных матриц $O(n)$ в $\operatorname{Mat}_{n}(\mathbb{R})$ является замкнутым и ограниченным. И соответственно множество унитарных матриц $U(n)$ - замкнутое и ограниченное подмножество в $\operatorname{Mat}_{n}(\mathbb{C})$.

Решение. Доказательство проведем в ортогональном случае, для унитарного рассуждения аналогичны. Выше в задаче 3.5 мы ввели структуру евклидова пространства на $\operatorname{Mat}_{n}(\mathbb{R})$ с помощью

скалярного произведения $(A, B)=\operatorname{tr}\left(A^{T} B\right)$. Для ортогональной матрицы $U^{T} U=E$, поэтому ее квадрат евклидовой длины есть $|U|^{2}=\operatorname{tr}\left(U^{T} U\right)=n$, то есть множество ортогональных матриц лежит в сфере радиуса $\sqrt{n}$, следовательно, оно ограничено. Переписывая матричное уравнение $U^{T} U=E$ в терминах матричных элементов $a_{i j}$ матрицы U, получаем набор $n(n+1) / 2$ полиномиальных уравнений

$$\sum_{m=1}^{n} a_{m j} a_{m k}=\delta_{j k}, \quad 1 \leq j \leq k \leq n$$

(эти уравнения просто означают, что столбцы матрицы U, рассматриваемые как векторы из $\mathbb{R}^{n}$ со стандартным скалярным произведением, образуют там ортонормированный базис). Полиномы - непрерывные функции, значит, их множество нулей замкнуто. Пересечение произвольного семейства замкнутых множеств замкнуто.

Комментарий. Подмножество в $\mathbb{R}^{n}$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено. Значит, в предыдущей задаче фактически доказано, что множества $O(n)$ и $U(n)$ компактны.

Определение 3.33. Самосопряженный оператор A называется неотрицательным (соотв. положительным), если $(A \mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0$ (соотв. $(A \mathbf{v}, \mathbf{v})>0$) для всех $\mathbf{v} \in V$ (соотв. для всех $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$).

Задача 3.

34. Доказать, что условие неотрицательности (положительности) оператора A равносильно неотрицательности (положительности) всех точек спектра A.

Решение. Самосопряженный оператор A имеет вещественный спектр. Пусть $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}, \lambda \in \mathbb{R}$, тогда если A неотрицателен, то $\lambda(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = (A\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0 \forall \mathbf{v} \in V \Rightarrow \lambda \geq 0$. Если A положителен, то $\lambda \neq 0$ и $\lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda > 0$.

Обратно, если спектр неотрицателен (положителен), то, выбирая ортонормированный базис из собственных векторов, легко убедиться, что квадратичная форма $\mathbf{v} \mapsto (A\mathbf{v}, \mathbf{v})$ неотрицательно (положительно) определена.

Очевидно, неотрицательный оператор невырожден тогда и только тогда, когда он положителен.

Задача 3.

35. Доказать, что из каждого неотрицательного оператора A можно извлечь единственный неотрицательный квадратный корень.

Решение. Пусть $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ - все различные собственные значения оператора A, а $V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}$ - разложение в ортогональную сумму собственных подпространств оператора A. На каждом V_{λ_j} оператор A действует как скалярный оператор $\lambda_j \operatorname{id}_{V_\lambda}$, причем $\lambda_j \geq 0$, значит, из него можно извлечь арифметический квадратный корень. Тогда мы получим неотрицательный оператор B, ограничение которого на V_{λ_j} есть $\sqrt{\lambda_j}\operatorname{id}_{V_{\lambda_j}}$ (оператор B самосопряжен, поскольку он диагонализируется в ортонормированном базисе и имеет вещественный спектр). Тем самым показано существование арифметического квадратного корня из неотрицательного оператора.

Докажем его единственность. Пусть, обратно, $A = B^2$. Пусть $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_l\}$ - все различные собственные значения оператора B, а $V = V_{\sigma_1} \oplus \ldots \oplus V_{\sigma_l}$ - разложение в ортогональную прямую сумму собственных подпространств оператора B. Заметим, что ограничение $B^2 = A$ на V_{σ_r} есть скалярный оператор $\sigma_r^2 \operatorname{id}_{V_{\sigma_r}}$. Значит, $k = l$, следовательно (возможно, после перенумерации), $\lambda_j = \sigma_j^2$ и $V_{\lambda_j} = V_{\sigma_j}$.

Таким образом, положительные операторы - аналог положительных действительных чисел. Сейчас мы получим аналог представления произвольного комплексного числа z в экспоненциальном виде $z = re^{i\varphi}$, где $r \in \mathbb{R}, r \geq 0$ и $\varphi \in \mathbb{R}$. Заметим, что число $e^{i\varphi}$ - матрица унитарного оператора в ортонормированном базисе в одномерном эрмитовом пространстве. Заметим также, что в этом представлении $r = |z|$ определено по z однозначно, а $e^{i\varphi}$ однозначно [33] при $z \neq 0$.

Пусть V - конечномерное евклидово (эрмитово) пространство, $A : V \to V$ - линейный оператор на V.

Определение 3.36. Полярным разложением оператора A называется его представление в виде $A = UB$, где U - ортогональный (унитарный), а B - неотрицательный самосопряженный операторы, см. [7], гл. VII, § 2, п. 6.

Заметим, что наряду с разложением $A = UB$ можно совершенно аналогично рассматривать разложение вида $A = BU$.

Для полноты аналогии с показательной формой записи комплексного числа отметим, что любой унитарный оператор U может быть представлен в виде $\exp(iS)$, где S - самосопряженный, см., например, [28], ч. 2, §8 или [16], гл. 5, §20.

Полярное разложение имеет простой физический смысл. Деформация тела с закрепленной точкой в первом приближении описывается невырожденным линейным оператором A, который есть композиция положительного самосопряженного оператора B (который есть композиция растяжений (сжатий) по трем взаимно перпендикулярным направлениям - это так называемый тензор деформаций) и поворота U вокруг некоторой оси (см. задачу 3.22).

Задача 3.

37. Проверить, что A^*A - неотрицательный самосопряженный оператор и что он положителен тогда и только тогда, когда A обратим.

[233] Разумеется, речь не об однозначности φ, которое определено только с точностью до $2\pi k$.

Решение. $(A^*A\mathbf{v},\mathbf{v}) = (A\mathbf{v}, A\mathbf{v}) = (\mathbf{v}, A^*A\mathbf{v}) \Rightarrow A^*A$ самосопряжен. Так как $(A^*A\mathbf{v},\mathbf{v}) = (A\mathbf{v}, A\mathbf{v}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V \Rightarrow A^*A$ неотрицателен. A обратим $\Leftrightarrow \forall \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \quad A\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

Если $A = UB$ - полярное разложение, то

$$A^*A = B^*U^*UB = B^2$$

Поэтому неотрицательный самосопряженный оператор B определяется как арифметический квадратный корень из $A^*A, B == \sqrt{A^*A}$. Пусть A обратим, тогда, как мы видели, B обратим и $U = AB^{-1}$ - ортогональный (унитарный) оператор. Действительно,

$$U^*U = \left(AB^{-1}\right)^* AB^{-1} = B^{-1}A^*AB^{-1} = B^{-1}B^2B^{-1} = \mathrm{id}_V$$

Тем самым мы получили полярное разложение в случае, когда A обратим. В этом случае B и U определены по A однозначно. Действительно, если $A = UB$, то $A^* = BU^*$ и $A^*A = BU^*UB = B^2$. В задаче 3.35 мы доказали, что неотрицательный B определен однозначно. Тогда если A обратим, то B положителен и $U = AB^{-1}$.

В задаче 2.8 мы уже доказали, что обратимые операторы образуют плотное подмножество в пространстве всех операторов.

Это утверждение может быть использовано для следующей задачи.

Задача 3.

38. Доказать существование полярного разложения для всех операторов на V[34].

Решение. Пусть A - необратимый оператор на V. Используя плотность обратимых операторов, выберем последовательность обратимых операторов $\{A_n\}$, сходящуюся к A. Тогда $A_n = U_nB_n$, где B_n - арифметический квадратный корень из положительного оператора $A_n^*A_n$, а $U_n = A_nB_n^{-1}$. Далее, используя непрерывность перехода к сопряженному и композиции операторов, получаем $\{A_n^*A_n\} \to A^*A$, то есть $\{B_n^2\} \to B^2$, где $B := \sqrt{A^*A}$. Отсюда (используя непрерывность арифметического квадратного корня из неотрицательного оператора) легко вывести, что $\{B_n\} \to B$ (в связи с этим заметим, что замыкание множества положительных самосопряженных операторов - множество неотрицательных самосопряженных операторов).

Далее, $\{U_n = A_nB_n^{-1}\}$ - последовательность ортогональных (унитарных) операторов. Согласно задаче 3.32 множество ортогональных (унитарных) операторов замкнуто и ограничено в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ (соотв. в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$), а следовательно, компактно. Метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда оно секвенциально компактно, то есть когда любая его последовательность имеет предельную точку. Значит, $\{U_n\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность $\{U_n'\}$, сходящуюся к ортогональному (унитарному) оператору U_0 (ввиду замкнутости множества ортогональных (унитарных) операторов в пространстве всех операторов). Пусть $\{A_n'\}, \{B_n'\}$ - соответствующие подпоследовательности в $\{A_n\}, \{B_n\}$ соответственно. Теперь из непрерывности композиции операторов получаем, что $\{U_n'B_n'\} \to U_0B$, но, с другой стороны, $U_n'B_n' = A_n'$ и $\{A_n'\} \to A$. Следовательно, $A = U_0B$.

Комментарий. Заметим, что предельных точек U_0, вообще говоря, много, если оператор A необратим. В качестве примера можно рассмотреть сходящуюся к нулевой последовательность

матриц

$$A_n = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n}{n} & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^n}{n} \end{pmatrix} \to 0$$

Тогда $B_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$, а $U_n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то есть предельными точками являются E и $-E$. Впрочем, понятно и так, что полярное разложение нулевого оператора есть $U \cdot 0$, где U - произвольная ортогональная (унитарная) матрица.

[234] Причем в случае необратимого A неотрицательный самосопряженный оператор B определен однозначно, а ортогональный (унитарный) - нет.

8.4.5 3.5. Сингулярное разложение и норма оператора

Пусть снова V - конечномерное евклидово (эрмитово) пространство, $A : V \to V$ - линейный оператор на V. Выше мы получили полярное разложение $A = UB$, где B - неотрицательный самосопряженный, а U - ортогональный (унитарный) операторы.

Выберем некоторый ортонормированный базис в V и будем записывать операторы матрицами в нем (обозначая матрицы теми же буквами). Для определенности ниже мы предполагаем, что V евклидово, эрмитов случай полностью аналогичен (с единственным отличием, что матрица сопряженного оператора к A в ортонормированном базисе есть $\bar{A}^T$).

Матрица B - неотрицательная симметричная, поэтому она диагонализируется в некотором ортонормированном базисе, то есть существует такая ортогональная матрица U_1, что

$$U_1 B U_1^T = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) =: \Lambda,$$

причем все $\sigma_i \geq 0$. Тогда $A = UB = UU_1^T \Lambda U_1 = U_2 \Lambda U_1$, где $U_2 := UU_1^T$ - ортогональная матрица.

То есть нами доказан следующий результат: для любой вещественной квадратной матрицы A существует представление

$$A = U_2 \Lambda U_1, \tag{52}$$

где U_1, U_2 - ортогональные матрицы, а Λ - диагональная матрица с неотрицательными диагональными элементами. Представление (52) называется сингулярным разложением матрицы A, а неотрицательные числа $\sigma_i, 1 \leq i \leq n$ - сингулярными значениями матрицы A. Заметим, что σ_i - собственные значения матрицы B, а из задачи 3.35 мы знаем, что $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, где λ_i -

собственные значения неотрицательного самосопряженного оператора A^*A (с симметричной матрицей $A^T A$ в выбранном ортонормированном базисе пространства V).

Сингулярные значения матрицы A имеют следующий геометрический смысл: при линейном отображении с матрицей A единичная сфера пространства V переходит в эллипсоид в V, полуоси которого - сингулярные значения A.

Введем важное (особенно в функциональном анализе) понятие операторной нормы линейного оператора на евклидовом (эрмитовом) пространстве.

Пусть V - евклидово (эрмитово) пространство, тогда на V задана функция (длина вектора):

$$|\cdot| : V \to \mathbb{R}, \quad \mathbf{v} \mapsto |\mathbf{v}| := \sqrt{(\mathbf{v}, \mathbf{v})}$$

Определение 3.39. Пусть V - евклидово (эрмитово) пространство, $A : V \to V$ - линейный оператор. Нормой оператора A называется число (если оно существует):

$$\|A\| := \sup_{|\mathbf{v}| \leq 1} |A\mathbf{v}| \tag{53}$$

где верхняя грань берется по всем векторам $\mathbf{v} \in V, |\mathbf{v}| \leq 1$, то есть по замкнутому единичному шару в V. Если $\|A\|$ существует, то оператор A называется ограниченным.

Заметим, что если $V \neq \{0\}$, то норму оператора можно также определить равенствами

$$\|A\| = \sup_{\mathbf{v} \neq \mathbf{0}} \frac{|A\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} \quad \text{или} \quad \|A\| = \sup_{|\mathbf{v}|=1} |A\mathbf{v}|,$$

где в последнем равенстве верхняя грань справа берется по *еди* ничной сфере $S(V)$ пространства V. Действительно, если $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, то $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \in S(V)$ и $\frac{|A\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} = \left|A\left(\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right)\right|$, поэтому два последних равенства определяют одно и то же число (если одно из них конечно). С другой стороны, если $\mathbf{v} \neq 0$ и $|\mathbf{v}| \leq 1 \Rightarrow |A\mathbf{v}| \leq \frac{|A\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} = \left|A\left(\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right)\right|$, поэтому оба этих числа совпадают с первоначальным определением (53).

Теорема 3.40. Функиия $\|\cdot\|$ на пространстве линейных операторов на V имеет следующие свойства:

1. если A ограничен $uA \neq 0$, то $\|A\| > 0$;

2. если A ограничен, то $\|\lambda A\|=|\lambda|\|A\|$;

3. если A и B ограничены, то $A+B$ тоже ограничен, причем $\|A+B\| \leq\|A\|+\|B\|$;

4. если A и B ограничены, то AB тоже ограничен, причем $\|AB\| \leq\|A\|\|B\|$.

Доказательство. Свойства 1) и 2) очевидны. Докажем свойство 3) (при $V \neq\{0\}$):

$$\|A+B\|=\sup_{|\mathbf{v}|=1}|(A+B)(\mathbf{v})|=\sup_{|\mathbf{v}|=1}|A\mathbf{v}+B\mathbf{v}| \leq$$

$$\leq \sup_{|\mathbf{v}|=1}(|A\mathbf{v}|+|B\mathbf{v}|) \leq \sup_{|\mathbf{v}|=1}|A\mathbf{v}|+\sup_{|\mathbf{v}|=1}|B\mathbf{v}|=\|A\|+\|B\|$$

Докажем 4). Если B - нулевой оператор, то равенство 4) очевидно. В противном случае имеем

$$\|AB\|=\sup_{\mathbf{v} \neq \mathbf{0}} \frac{|AB(\mathbf{v})|}{|\mathbf{v}|}=\sup_{B\mathbf{v} \neq \mathbf{0}}\left(\frac{|AB(\mathbf{v})|}{|B\mathbf{v}|} \frac{|B\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}\right) \leq$$

$$\leq \sup_{B\mathbf{v} \neq \mathbf{0}} \frac{|AB(\mathbf{v})|}{|B\mathbf{v}|} \sup_{B\mathbf{v} \neq \mathbf{0}} \frac{|B\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} \leq \sup_{\mathbf{v} \neq \mathbf{0}} \frac{|A\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} \sup_{\mathbf{v} \neq \mathbf{0}} \frac{|B\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}=\|A\|\|B\| .$$

Из пунктов 2) и 3) доказанной теоремы следует, что ограниченные операторы образуют подпространство, а из пункта 4) что даже подалгебру в алгебре $\mathcal{L}(V)$ всех линейных операторов на V.

Следующая теорема описывает связь с нормой операции взятия сопряженного оператора.

Теорема 3.41. Для любого оператора $A: V \rightarrow V$ имеем

$$\left\|A^{*}\right\|=\|A\|, \quad\left\|A^{*} A\right\|=\|A\|^{2}$$

(последнее из равенств называется " C^{*}-тождеством").

Доказательство. Пусть $\mathbf{v} \in V,|\mathbf{v}| \leq 1$, тогда

$$|A\mathbf{v}|^{2}=(A\mathbf{v}, A\mathbf{v})=\left(A^{*} A\mathbf{v}, \mathbf{v}\right) \leq \tag{54}$$

$$\leq\left|A^{*} A\mathbf{v}\right|\left|\mathbf{v}\right| \leq\left\|A^{*} A\right\|\left|\mathbf{v}\right|^{2} \leq\left\|A^{*}\right\|\|A\| \tag{55}$$

где мы последовательно использовали определение квадрата длины через скалярное произведение, определение сопряженного оператора, неравенство Коши-Буняковского, очевидное неравенство $|L\mathbf{v}| \leq\|L\||\mathbf{v}|$ для любого линейного оператора $L: V \rightarrow V$, свойство 4) операторной нормы из предыдущей теоремы и условие $|\mathbf{v}| \leq 1$.

Переходя к верхним граням в (54) по $\mathbf{v} \in V,|\mathbf{v}| \leq 1$, получаем $\|A\|^{2} \leq\left\|A^{*} A\right\| \leq \left\|A^{*}\right\|\|A\|$, откуда $\|A\| \leq\left\|A^{*}\right\|$. Теперь, используя $A^{**}=A$, имеем $\left\|A^{*}\right\| \leq\|A\|$, следовательно, $\|A\|=\left\|A^{*}\right\|$, а значит, и $\left\|A^{*} A\right\|=\|A\|^{2}$.

Задача 3.

42. Если V конечномерно, то любой оператор на V ограничен и верхняя грань в определении нормы оператора (53) может быть заменена на максимум.

Решение. Единичная сфера $S(V)$ в V замкнута и ограничена (а значит, компактна, так как V конечномерно). Кроме того, так как функция $\mathbf{v} \mapsto|A\mathbf{v}|$ непрерывна на $S(V)$ (в ортонормированном базисе это просто функция $f(\vec{x}):=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{j}\right)^{2}}$ от координат вектора), то данная функция ограничена и верхняя грань ее значений достигается.

Понятие нормы оператора позволяет обосновать сходимость рядов от операторов, таких как $\exp(A)$ (см., например, [12], гл. 6, § 5 или [9]).

Пусть $\left\{\lambda_{1}, \ldots, \lambda_{k}\right\}$ - набор собственных значений оператора A на конечномерном пространстве V. Тогда неотрицательное число

$$\rho(A):=\max_{1 \leq i \leq k}\left|\lambda_{i}\right|$$

называется спектральным радиусом оператора A. Легко видеть, что $\|A\| \geq \rho(A)$.

Задача 3.

43. Если A самосопряжен, то $\|A\| = \rho(A)$.

Решение. Из конечномерности V следует, что нам нужно найти максимум функции $\mathbf{v} \mapsto |A\mathbf{v}|$ на единичной сфере $S(V)$ пространства V. Ясно, что он равен арифметическому квадратному корню из максимума функции $\mathbf{v} \mapsto (A\mathbf{v}, A\mathbf{v})$ на $S(V)$.

Для самосопряженного оператора $L : V \to V$ рассмотрим квадратичную функцию $q(\mathbf{v}) := (L\mathbf{v}, \mathbf{v})$. Попробуем найти максимум функции $q(\mathbf{v})$ на сфере $(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 1$.

Необходимое условие экстремума следующее: если $\mathbf{v}, |\mathbf{v}| = 1$ - точка экстремума функции q, то для любого касательного вектора $\mathbf{w}$ к сфере в точке $\mathbf{v}$ (то есть $\forall \mathbf{w}, \mathbf{w} \perp \mathbf{v}$) значение дифференциала $dq|_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) = 0$, то есть

$$dq|_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) = 2(L\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0 \quad \forall \mathbf{w} \perp \mathbf{v}.$$

Легко видеть, что последнее означает, что $\mathbf{v}$ - собственный вектор оператора L.

Так как $S(V)$ компактна, а q непрерывна, то максимум функции q на $S(V)$ достигается, и так как q дифференцируема, в точке максимума выполнено необходимое условие экстремума. Значит, максимум достигается на некотором собственном векторе. Отсюда следует, что он совпадает с максимальным собственным значением оператора L.

Полагая теперь $L = A^2$, получаем, что максимум функции $\mathbf{v} \mapsto |A\mathbf{v}|$ на $S(V)$ равен $\rho(A)$, что и требовалось.

Задача 3.

44. Пусть $A : V \to V$ - оператор в евклидовом пространстве V. Тогда

$$\|A\| = \sqrt{\rho\left(A^*A\right)}.$$

Решение. Имеем

$$\|A\|^2 = \|A^*A\| = \rho\left(A^*A\right),$$

где использовано C^*-тождество и самосопряженность оператора A^*A.

Замечание 1. Последняя задача показывает, что норма оператора полностью определяется самой алгеброй операторов (с операцией * перехода к сопряженному оператору). Действительно, спектр оператора $A^*A : V \to V$ - множество тех $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых оператор ($A^*A - \lambda \mathrm{id}_V$) необратим, а значит, $\rho\left(A^*A\right)$ определяется алгебраическими свойствами оператора A^*A.

Замечание 2. Из полученного выше сингулярного разложения следует, что

$$\sqrt{\rho\left(A^*A\right)} = \max_{1 \le i \le n} \sigma_i$$

где $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ - сингулярные значения оператора A. В частности, $\|A\| = \|\Lambda\|$.

Действительно, заметим, что если $U : V \to V$ - ортогональный оператор, то $|U\mathbf{v}| = |\mathbf{v}| \forall \mathbf{v} \in V$. Поэтому из определения нормы оператора легко следует, что $\|AU\| = \|UA\| = \|A\|$, и, таким образом, если $A = U_2 \Lambda U_1$ - сингулярное разложение оператора A, то $\|A\| = \|\Lambda\|$.

Таким образом, если A самосопряжен, то $\|A\| = \rho(A)$, в то же время для оператора A, имеющего в ортонормированном базисе матрицу $J_n(0), n \ge 2, 1 = \|A\| > \rho(A) = 0$.

Вот еще пример: диагонализируемый оператор A, имеющий матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ в ортонормированном базисе. В таком случае $\Lambda = \mathrm{diag}(\sqrt{2}, 0)$, поэтому $\|A\| = \sqrt{2} > \rho(A) = 1$ (максимум $|A\mathbf{v}|$ достигается на векторе $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$). Если мы изменим скалярное произведение в V так, чтобы базис, в котором A имеет диагональный вид, был ортонормированным [35], то тогда $\|A\| == 1 = \rho(A)$ - наименьшая возможная норма оператора с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Наибольшая же норма сверху не ограничена (то есть путем выбора скалярного произведения может быть сделана сколь угодно большой).

Пусть A - матрица оператора в некотором ортонормированном базисе пространства V. Выше мы определили евклидову длину матрицы $|A| = \sqrt{\mathrm{tr}\left(A^TA\right)}$. Заметим, что при произвольной замене базиса в V длина матрицы оператора, вообще говоря, меняется, однако она сохраняется при ортогональных заменах базиса. Действительно, если $U^TU = E$, то

$$\left|U^T A U\right|^2 = \operatorname{tr}\left(\left(U^T A U\right)^T U^T A U\right) = \operatorname{tr}\left(U^T A^T U U^T A U\right) = \\ = \operatorname{tr}\left(U^T A^T A U\right) = \operatorname{tr}\left(A^T A\right) = |A|^2$$

Задача 3.

45. Пусть $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ - матрица некоторого оператора в ортонормированном базисе V. Доказать, что

$$\|A\| \leq |A| \leq \sqrt{n}\|A\| \tag{56}$$

Решение. Непосредственным вычислением, аналогичным проведенному выше, доказывается, что $|AU| = |UA| = |A|$ для любой ортогональной матрицы U. Аналогичное свойство операторной нормы $\|AU\| = \|UA\| = \|A\|$ было доказано в замечании 2 . Значит, неравенство (56) достаточно доказать для $A = \Lambda$.

Объединяя предыдущую задачу и замечание 2 , мы получаем, что $\|\Lambda\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sigma_i$. Равенство $|\Lambda| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}$ очевидно. Из этого легко следует требуемый результат.

Комментарий. Заметим, что длина матрицы оператора обладает свойствами 1) - 3) [36] из теоремы 3.40, то есть является некоторой нормой (см. [12], см. также добавление 5.3.) на пространстве операторов на V, отличной от операторной $\|\cdot\|$. Существует теорема (см., например, [12] или [9]), утверждающая, что любые две нормы $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ на конечномерном пространстве W эквивалентны, то есть найдутся такие положительные константы $m \leq M$, что $m\|\mathbf{w}\|_1 \leq \|\mathbf{w}\|_2 \leq M\|\mathbf{w}\|_1 \quad \forall \mathbf{w} \in W$. Это верно, в частности, если W является пространством линейных операторов на конечномерном пространстве V, которое, в свою очередь, является конечномерным линейным пространством над тем же полем. А на бесконечномерных пространствах не все нормы эквивалентны. Более того, неравенство (56) свидетельствует о том, что в бесконечномерном случае, когда V - гильбертово пространство, операторная норма $\|\cdot\|$ и норма $|\cdot|$, называемая нормой Гильберта-Шмидта, не эквивалентны (поскольку $M = \sqrt{n}$ зависит от $n = \dim V$ и от двойного неравенства (56), остается только $\|A\| \leq |A|$, то есть норма Гильберта-Шмидта мажорирует операторную норму). В частности, не всякий ограниченный оператор в (бесконечномерном) гильбертовом пространстве V имеет конечную норму Гильберта-Шмидта, последнее условие выделяет специальный класс операторов в V.

8.4.6 3.6. Псевдообратная матрица

Одной из важнейших операций в линейной алгебре является обращение матриц. Напомним лишний раз, что обратная матрица - это решение уравнения $AX = E$, где A - известная квадратная матрица размера $n \times n, X$ - неизвестная матрица, а E единичная. Как мы знаем, если определитель матрицы A отличен от нуля, то решение у такого уравнения существует, причем единственное. Обратим внимание читателя, что отсюда отнюдь не следует "автоматически", что эта же матрица будет решением уравнения $XA = E$. Более того, в других алгебраических структурах, отличных от алгебры матриц, левый и правый обратные элементы могут не совпадать. Более того, в некоторых структурах даже левый и правый нейтральный элементы (часто говорят единица) совершенно не обязаны совпадать.

Задача 3.

46. Пусть X_0 - решение уравнения $AX = E$, где A квадратная невырожденная матрица. Докажите, что X_0 - единственное решение этого уравнения, причем $X_0 A = AX_0$.
Решение. Докажем, что если $AX_0 = E$, то $X_0 A = E$. Действительно, раз $AX_0 = E$, значит,

[235] При этом изменится, разумеется, операция перехода к сопряженному оператору, то есть мы не получаем противоречия с замечанием 1 .

[236] А также и 4) и $|A^*| = |A|$, однако C^*-тождество не выполнено. Так что противоречия с замечанием 1 нет.

$(AX_0)\,A = A$, в силу ассоциативности умножения матриц, следовательно, и $A\,(X_0A) = A$. Откуда получаем, что

$$A\,((X_0A) - E) = 0.$$

Обозначим через $x_j j$-й столбец матрицы $X_0A - E$. Полученное матричное равенство распадается в серию равенств столбцов

$$Ax_j = 0,$$

в силу невырожденности матрицы A мы имеем, что $x_j = 0$, значит, $X_0A = E$. Мы умышленно не пользуемся здесь формулой для обращения матриц и пользуемся только самыми элементарными свойствами матриц, так как на самом деле при доказательстве формулы обращения неявно используется утверждение данной задачи.

Теперь докажем единственность. Пусть X_0, X_1 - решения уравнения $AX = E$. В таком случае $A\,(X_0 - X_1) = 0$, и аналогично с рассуждением из первого пункта получаем, что $X_0 = X_1$.

Предлагаем читателю самостоятельно проверить такой "очевидный" факт, что в алгебре матриц только одна правая еди-

ница, то есть существует единственная матрица E такая, что $AE = A, \forall A$. Отдельно проверьте, что правая единица совпадает с левой.

Вернемся к уравнению $AX = E$.

Если матрица A имеет нулевой определитель, то решения нет. Если мы избавимся от требования к матрице A быть квадратной и предположим, что A и X - прямоугольные матрицы согласованного размера, то у соответствующего уравнения, вообще говоря, не будет единственного решения. Однако есть способ определить так называемые псевдообратные матрицы, которые, с одной стороны, будут удовлетворять свойствам, похожим на свойства обратной матрицы, а с другой стороны, для них будет верна теорема существования и единственности для всевозможных, в том числе и прямоугольных, матриц A.

Пусть A - некоторая матрица размера $m \times n$.

Определение 3.47. Матрицу A^+размера $n \times m$ будем называть псевдообратной матрицей для A, если выполняются два условия:

$$AA^+A = A \text{ и}$$
$$\exists U, V : A^+ = UA^* = A^*V,$$

здесь U, V - матрицы подходящего размера, а $A^* = \bar{A}^T$ - сопряженная матрица.

Первое условие - это следствие уравнения $AX = E$, и, к сожалению, уравнение $AXA = A$ имеет, вообще говоря, бесконечное множество решений. Второе условие нужно для выбора канонического решения. В силу причин, о которых будет сказано ниже (связь с методом наименьших квадратов), условие выбирается таким образом, что строки и столбцы псевдообратной матрицы должны являться линейными комбинациями строк и столбцов исходной матрицы и сопряженной к ней.

Задача 3.

48. Пусть A - квадратная невырожденная матрица. Докажите, что $A^+ = A^{-1}$.

Решение. По условию обратная матрица существует, докажем, что она будет псевдообратной. Начнем с первого условия:

$$AA^+A = AA^{-1}A = EA = A.$$

Проверим второе условие. Нужно подобрать такую матрицу U, что $A^{-1} = UA^*$. Поскольку матрица A была невырожденной, такой же будет и матрица A^*, значит, $U = A^{-1}A^{*-1} = (A^*A)^{-1}$, аналогично находится и матрица V.

Естественные вопросы: для каких матриц псевдообратная матрица определена, и если определена, то будет ли она единственной? Следующее утверждение носит название теоремы МураПенроуза.

Задача 3.

49. Докажите, что для любой матрицы $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}$ существует, причем единственная псевдообратная матрица A^+.

Решение. Пусть $\mathrm{rk}\,A = r$. Представим матрицу A в виде произведения $A = BC$, где матрица B имеет размер $m \times r$, матрица C имеет размер $r \times n$. Заметим, что если такое разложение существует, то $\operatorname{rk} B = \operatorname{rk} C = r$. Действительно, с одной стороны, $\operatorname{rk} B \le r$ и $\operatorname{rk} C \le r$, с другой стороны, $\operatorname{rk}(BC) \le \min(\operatorname{rk} B, \operatorname{rk} C)$. Остается проверить, что такое разложение действительно существует (оно, вообще говоря, не единственно). Возьмем в качестве матрицы B какую-нибудь матрицу, r столбцов которой совпадают с r линейно независимыми столбцами исходной матрицы A. Тогда уравнение $A = BC$ означает, что j-й столбец матрицы A равен линейной комбинации этих столбцов с коэффициентами, которые являются элементами j-го столбца матрицы C. Разумеется, такие коэффициенты можно подобрать, так как любой столбец матрицы A должен выражаться как линейная комбинация r линейно независимых столбцов (так как это максимальное количество линейно независимых столбцов в матрице A). Читателю в качестве несложного упражнения предлагается доказать, что таких разложений, вообще говоря, бесконечно много.

Далее, фиксируем разложение $A = BC$. Понятно, что B^*B и CC^* - квадратные матрицы размера $r \times r$. Значит, эти матрицы невырождены, так как в матрицах B и C было по r линейно независимых столбцов [37].

Логично предположить, что по аналогии с обратными матрицами должно иметь место равенство $A^+ = C^+B^+$, поэтому логично сначала найти B^+и C^+. Мы знаем, что B^*B - невырожденная матрица. Пусть $L := (B^*B)^{-1}$. Тогда $LB^*B = E$.

Домножив слева на B, получаем $B\left(LB^*\right)B = B$. Остается проверить, что матрица

$$B^+ = \left(B^*B\right)^{-1}B^*$$

удовлетворяет и второму условию для псевдообратной матрицы, то есть должны существовать такие матрицы U, V, что

$$B^+ = UB^* = B^*V$$

В качестве матрицы U можно взять матрицу L. Найдем матрицу V, удовлетворяющую условию

$$B^+ = B^*V$$

В качестве матрицы V можно взять $V = B\left(B^*B\right)^{-1}B^+$, где B^+ мы определили выше.

Аналогичные рассуждения показывают, что $C^+ = C^*\left(CC^*\right)^{-1}$. Проверим теперь нашу гипотезу, что $A^+ = C^+B^+$.

Прежде всего проверим условие $AA^+A = A$. Имеем
$AA^+A = A\left(C^+B^+\right)A = BCC^*\left(CC^*\right)^{-1}\left(B^*B\right)^{-1}B^*BC = BC = A$.
Теперь остается проверить, что найдутся такие матрицы U и V, что $A^+ = UA^* = A^*V$. Если преобразовать явное выражение для матрицы A^+, которое мы получили выше, получим

$$A^+ = C^*\left(CC^*\right)^{-1}\left(B^*B\right)^{-1}B^* =$$
$$= C^*\left(CC^*\right)^{-1}\left(B^*B\right)^{-1}\left[\left(CC^*\right)^{-1}CC^*\right]B^* = UC^*B^* = UA^*$$

Аналогично находится и матрица V.
Проверим теперь, что матрица A^+единственна. Действительно, пусть есть две псевдообратные матрицы $A^+_{1,2}$такие, что

$$AA_j^+A = A, \quad A_j^+ = U_jA^* = A^*V_j, \quad j = 1, 2.$$

Положим $D = A_2^+ - A_1^+$. Мы хотим доказать, что $D = 0$. Легко видеть, что

$$ADA = 0, \quad D = \left(U_2 - U_1\right)A^* = A^*\left(V_2 - V_1\right).$$

Заметим, что $(DA)^* = A^*D^* = A^*\left(A^*\left(V_2 - V_1\right)\right)^* = A^*V^*A$, где
$V = V_2 - V_1$. Значит,

$$(DA)^*DA = A^*V^*ADA = A^*V^*(ADA) = 0.$$

Как следует из результатов пункта 3.4., отсюда мы получаем, что $DA = 0$. С другой стороны,

$$0 = DAU^* = DD^*,$$

где $U := U_2 - U_1$, значит, и $DD^* = 0$, следовательно, окончательно получаем $D = 0$. $\square$

Теперь перейдем к вопросу о прикладной роли псевдообратной матрицы. Логично предположить, что уравнение $Ax = y$ должно иметь "решение" $x = A^+y$. Вопрос только,

---

[237] Для доказательства невырожденности указанных матриц также можно воспользоваться идеей задачи 3.37.

в каком смысле, если система уравнений несовместна или, наоборот, имеет бесконечно много решений. Справедлива следующая теорема (см., например, [15], с. 36).

Теорема 3.50. Вектор x_0, определяемый как $x_0 := A^+y$, является наилучшим приближенным решением системы $Ax = y$, то есть квадратичное отклонение $|y - Ax|^2$ достигает минимального значения при $x = x_0$, а среди всех векторов x таких, что значение квадратичного отклонения минимально, вектор x_0 имеет наименьший модуль $|x_0|$.

Таким образом, оказывается, что псевдообратные матрицы при отсутствии единственного решения дают наилучшее решение в смысле метода наименьших квадратов, что и обуславливает важное прикладное значение данного объекта. Заметим, что в настоящем параграфе псевдообратная матрица построена в алгоритмизуемом виде. Вопрос об эффективности данного, явного, алгоритма мы не обсуждаем, и заинтересованного читателя отсылаем к современным работам по теории алгоритмов.

8.5 4 Тензоры

Операция тензорного произведения и ее вариации используются во многих разделах математики, а также физики и ее приложений (от квантовой теории [238] и общей теории относительности до теории упругости), поэтому каждому, кто планирует заниматься этими науками, полезно серьезно ее изучить.

Данную часть пособия можно рассматривать только как введение в тензорные произведения векторных пространств, в ней не обсуждаются многие необходимые для теории и приложений понятия (тензорная, симметрическая и внешняя алгебры, мы также не затрагиваем таких важных вещей, как свертка, подъем и опускание индексов и т.п.). Однако мы надеемся, что данное введение подготовит читателя к изучению тензорной алгебры по учебникам (наше изложение ближе всего к [28], см. также [12]).

Понятие тензора охватывает хорошо знакомые по предыдущему тексту объекты, как векторы, линейные функционалы, линейные операторы и билинейные формы. Если V - векторное пространство (над некоторым полем $\mathbb{K}$), то векторы "живут" в само́м пространстве V, линейные функционалы - в двойственном (сопряженном) пространстве V^*, а линейные операторы и билинейные формы на V - в пространствах $V^* \otimes V$ и $V^* \otimes V^*$ соответственно, где " $\otimes$ " обозначает некоторую новую операцию над векторными пространствами - их тензорное произведение. Полезными оказываются и элементы многократных тензорных произведений, например, $V^* \otimes V^* \otimes V$. При этом полезно рассматривать все подобные тензорные произведения копий пространств V и V^* одновременно, так как они связаны друг с другом множеством отображений (таких как свертки). Сначала мы постараемся подготовить читателя к введению этой операции на более простых примерах и после чего перейдем к ее определению и изучению.

8.5.1 4.1. Универсальные свойства в линейной алгебре

Мы хотим определить тензорное произведение через его универсальное свойство (такое определение в настоящее время является общепринятым в математике, но в учебной литературе оно пока встречается нечасто, см. [28]). Однако именно универсальное свойство является тем, что характеризует тензорное произведение, и кроме того, оно удобно для проведения доказательств (как будет видно в дальнейшем).

Чтобы сориентировать читателя, о свойствах какого рода пойдет речь ниже, зададимся вопросом: как среди всех множеств может быть охарактеризовано (произвольное) одноэлементное множество P (без явного описания его "строения", то есть его мощности)? Нетрудно видеть, что оно обладает следующим свойством: для любого множества S существует единственная функция $f^S : S \to P$. Этим свойством одноэлементное множество определяется однозначно с точностью до канонической биекции.

Аналогично, пустое множество $\varnothing$ однозначно определяется как такое множество Q, что для любого множества S существует единственная функция $f_S : Q \to S$.

[238] Например, для квантовых систем типичны так называемые запутанные состояния, в которых известна вся возможная информация о составной системе, но при этом ничего не известно о ее подсистемах (в роли составной системы может, например, выступать система из двух спинов, в роли ее подсистем - отдельные спины). О том, как тензорные произведения позволяют описывать такие парадоксальные свойства квантовых систем, можно прочитать в научно-популярной книге [35].

Читателю предлагается подумать, какие математические объекты играют аналогичную роль, если вместо множеств в качестве объектов и функций в качестве отображений рассматривать a) группы и гомоморфизмы; b) векторные пространства и линейные отображения; c) кольца с единицей и гомоморфизмы колец, сохраняющих единицу.

Заметим, что не только тензорное произведение, но и другие общие математические конструкции могут быть определены через свойство универсальности. В качестве примеров из линейной алгебры приведем такие определения (внешней) прямой суммы векторных пространств и факторпространства.

Прямая сумма линейных пространств

Определение 4.1. Пусть U, V - векторные пространства над полем $\mathbb{K}$. Их прямой суммой назовем тройку (W, α, β), состоящую из векторного пространства W над тем же полем и линейных отображений $\alpha : U \to W, \beta : V \to W$, обладающую следующим универсальным свойством: для любого векторного пространства L над тем же полем и любой пары линейных отображений $\varphi : U \to L, \psi : V \to L$ существует притом единственное

линейное отображение $\chi : W \to L$ такое, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\varphi"'] & W \arrow[d, "\chi"] & V \arrow[l, "\beta"'] \arrow[dl, "\psi"] \\ & L & \end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть $\varphi = \chi \circ \alpha, \psi = \chi \circ \beta$.

Из определения непосредственно следует, что α и β - вложения [39], и их образы имеют нулевое пересечение как подпространства в W. Действительно, возьмем в диаграмме $L = U, \varphi = \mathrm{id}_U$. Тогда в силу коммутативности диаграммы $\chi(\alpha(\mathbf{u})) = \mathbf{u} \forall \mathbf{u} \in U$ и α - вложение. Теперь, кроме того, предположим, что ψ - нулевое отображение. Пусть $\mathbf{w} = \alpha(\mathbf{u}) = \beta(\mathbf{v})$, тогда $\chi(\alpha(\mathbf{u})) = \mathbf{u}$, $\chi(\beta(\mathbf{v})) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{w} = \mathbf{0}$.

Теорема 4.2. Прямая сумма U и V существует.

Доказательство. Покажем, что прямая сумма U и V существует, предъявив ее явную конструкцию. Пусть W есть множество пар $\{(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mid \mathbf{u} \in U, \mathbf{v} \in V\}$ с покомпонентным сложением и умножением на скаляры, тогда это - векторное пространство над тем же полем. Определим линейные отображения

$$\alpha : U \to W, \alpha(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \mathbf{0}), \quad \beta : V \to W, \beta(\mathbf{v}) = (\mathbf{0}, \mathbf{v}).$$

Тогда (W, α, β) - прямая сумма пространств U и V. Действительно, если даны φ и ψ, такие как в диаграмме, то если χ, делающее диаграмму коммутативной, существует, то мы должны иметь

$\chi(\alpha(\mathbf{u})) = \chi(\mathbf{u}, \mathbf{0}) = \varphi(\mathbf{u})$, аналогично, $\chi(\beta(\mathbf{v})) = \chi(\mathbf{0}, \mathbf{v}) = \psi(\mathbf{v})$.

Кроме того, в силу линейности χ получаем

$$\chi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \chi(\alpha(\mathbf{u}) + \beta(\mathbf{v})) = \chi(\alpha(\mathbf{u})) + \chi(\beta(\mathbf{v})) = \varphi(\mathbf{u}) + \psi(\mathbf{v}).$$

Тем самым χ однозначно определено условием коммутативности диаграммы и линейностью, а значит, прямая сумма действительно существует. $\square$

Пусть теперь (W, α, β) и (W', α', β') - две суммы пространств U и V. Тогда по универсальному свойству сумм имеем коммутативные диаграммы:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha'"'] & W \arrow[d, "\chi"] & V \arrow[l, "\beta"'] \arrow[dl, "\beta'"] \\ & W' & \end{tikzcd}$$

[239] То есть инъективные линейные отображения.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha'"'] & W & V \arrow[l, "\beta"'] \arrow[dl, "\beta'"] \\
& W'. \arrow[u, "\chi'"] &
\end{tikzcd}$$

Из них получаем

$$\begin{aligned}
\alpha' = \chi \circ \alpha, \quad \alpha = \chi' \circ \alpha' \Rightarrow \chi' \circ \chi \circ \alpha = \alpha, \\
\beta' = \chi \circ \beta, \quad \beta = \chi' \circ \beta' \Rightarrow \chi' \circ \chi \circ \beta = \beta.
\end{aligned}$$

Значит, диаграмма

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha"'] & W \arrow[d, "\chi' \circ \chi"] & V \arrow[l, "\beta"'] \arrow[dl, "\beta"] \\
& W &
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Но если в ней вместо $\chi' \circ \chi$ поставить id_W, то полученная диаграмма тоже будет коммутативна. Используя теперь единственность отображения, делающего диаграмму суммы (57) коммутативной, получаем $\chi' \circ \chi = \mathrm{id}_W$. Аналогично получается тождество $\chi \circ \chi' = \mathrm{id}_{W'}$.

Таким образом, из универсального свойства следует единственность прямой суммы (W, α, β) пространств U и V в следующем сильном смысле: если (W', α', β') - еще одна прямая сумма пространств U и V, то существуют такие однозначно определенные линейные отображения $\chi : W \to W'$ и $\chi' : W' \to W$, что $\chi' \circ \chi = \mathrm{id}_W$ и $\chi \circ \chi' = \mathrm{id}_{W'}$ (в этом случае они являются взаимно обратными изоморфизмами), причем $\alpha' = \chi \circ \alpha, \beta' = \chi \circ \beta$ и т.д. Это сильное свойство единственности выражают следующим образом.

Теорема 4.3. Прямая сумма пространств единственна с точностью до канонического изоморфизма.

Прямая сумма пространств U и V обычно обозначается просто $U \otimes V$ (при этом отображения α, β обычно явно не указыва-

ются).

Факторпространство. Определению факторпространства предпошлем пару задач.

Задача 4.

4. Пусть $\varphi : V \to L, \psi : V \to W$ - линейные отображения. Когда существует линейное $\chi : W \to L$ такое, что $\chi \circ \psi == \varphi$, то есть диаграмма

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & W \arrow[dl, "\chi"] \\
L &
\end{tikzcd}$$

коммутативна? При каком условии такое χ единственно?

Решение. Покажем, что требуемое χ существует тогда и только тогда, когда $\ker \psi \subset \ker \varphi$.

Если χ существует, то $\chi(\psi(\mathbf{v})) = \varphi(\mathbf{v}) \forall \mathbf{v} \in V$. Значит, если $\mathbf{v} \notin \ker \varphi$, то $\varphi(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$ и $\psi(\mathbf{v}) \neq \mathbf{0}$, а значит, $\mathbf{v} \notin \ker \psi$.

Обратно, предположим, что $\ker \psi \subset \ker \varphi$. Определим сначала ограничение $\chi|_{\mathrm{im}\,\psi}$ отображения χ на подпространство $\mathrm{im}\,\psi \subset W$. Если $\mathbf{w} = \psi(\mathbf{v})$, то единственный способ удовлетворить требованию коммутативности диаграммы - положить $\chi|_{\mathrm{im}\,\psi}(\mathbf{w}) == \varphi(\mathbf{v})$. Проверим, что этим условием $\chi|_{\mathrm{im}\psi}$ корректно определено. Пусть $\mathbf{w} = \psi(\mathbf{v}) = \psi(\mathbf{v}')$, тогда $\mathbf{v}' - \mathbf{v} \in \ker\psi \subset \ker\varphi$, а значит, $\varphi(\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{v}')$. Проверим линейность $\chi|_{\mathrm{im}\psi}$. Если $\mathbf{w}_1 == \psi(\mathbf{v}_1), \mathbf{w}_2 = \psi(\mathbf{v}_2)$, то $\chi|_{\mathrm{im}\,\psi}(\mathbf{w}_1) = \varphi(\mathbf{v}_1), \chi|_{\mathrm{im}\,\psi}(\mathbf{w}_2) = \varphi(\mathbf{v}_2)$. Кроме того, из линейности ψ имеем $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \psi(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$. Тогда

$$\chi|_{\mathrm{im}\,\psi}(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \varphi(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \varphi(\mathbf{v}_1) + \varphi(\mathbf{v}_2) = \\ = \chi|_{\mathrm{im}\,\psi}(\mathbf{w}_1) + \chi|_{\mathrm{im}\,\psi}(\mathbf{w}_2).$$

Аналогично получаем $\chi|_{\mathrm{im}\,\psi}(\alpha\mathbf{w}) = \alpha\chi|_{\mathrm{im}\,\psi}(\mathbf{w})\forall\mathbf{w} \in W, \alpha \in \mathbb{K}$.
Для подпространства $\mathrm{im}\,\psi \subset W$ выберем произвольное прямое дополнение $M \subset W$, то есть $W = \mathrm{im}\,\psi \oplus M$. Пусть $\tau : M \to L$ - произвольное линейное отображение. Теперь, используя универсальное свойство прямой суммы, для пары $\chi|_{\mathrm{im}\psi}, \tau$ получим единственное линейное отображение $\chi = \chi(\tau) : W \to L$, ограничение которого на подпространство $\mathrm{im}\,\psi \subset W$ есть $\chi|_{\mathrm{im}\,\psi}$, а на

подпространство $M \subset W - \tau$, делающее диаграмму (ср. (57))

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{im}\,\psi \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\chi|_{\mathrm{im}\,\psi}"'] & \mathrm{im}\,\psi \oplus M \arrow[d, "\chi"] & M \arrow[l, "\beta"'] \arrow[dl, "\tau"] \\
& L &
\end{tikzcd}$$

коммутативной. Легко видеть, что χ - требуемое отображение.
Заметим, что $\chi|_{\mathrm{im}\psi}$ условием задачи определено однозначно, в то время как τ мы выбирали произвольно. Отсюда следует, что единственность χ равносильна единственности τ, последнее имеет место, только если $M = \{\mathbf{0}\}$, то есть когда ψ сюръективно. □

В качестве примера применения доказанного результата получим некоторое обобщение пункта c) задачи 2.17.

Задача 4.

5. Пусть V - линейное пространство над полем $\mathbb{K}$ (не обязательно конечномерное), $f_1, \ldots, f_n$ - набор линейных функционалов $f_i : V \to \mathbb{K}, f : V \to \mathbb{K}$ - еще один функционал такой, что $\cap_{i=1}^n \ker f_i \subset \ker f$. Доказать, что тогда f является линейной комбинацией $f_1, \ldots, f_n$, то есть существуют такие скаляры $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_i \in \mathbb{K}$, что $f = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n$.
Заметим, что утверждение, обратное условию задачи, также имеет место.
Решение. Рассмотрим линейное отображение

$$\varphi : V \to \mathbb{K}^n, \quad \mathbf{v} \mapsto (f_1(\mathbf{v}), \ldots, f_n(\mathbf{v})).$$

Так как по условию $\cap_{i=1}^n \ker f_i \subset \ker f$, то, согласно задаче 4.4, существует линейная функция $\bar{f}$ на $\mathbb{K}^n$ такая, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{K}^n \arrow[dl, "\bar{f}"] \\
\mathbb{K} &
\end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть $f = \bar{f} \circ \varphi$. Тогда для произвольного $\mathbf{v} \in V$ имеем

$$f(\mathbf{v}) = (\bar{f} \circ \varphi)(\mathbf{v}) = \bar{f}\left(\sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{v})\mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(\mathbf{v}),$$

где $\mathbf{e}_i$ - элементы стандартного базиса $\mathbb{K}^n$, а $\alpha_i := \bar{f}(\mathbf{e}_i)$ (согласно все той же задаче 4.4, функционал $\bar{f}$ единствен тогда и только тогда, когда φ сюръективно, что, в свою очередь, имеет место тогда и только тогда, когда $f_1, \ldots, f_n$ линейно независимы. Это дает критерий единственности α_i-х). □

В разделе 2.3. мы уже дали определение факторпространства. Сейчас мы дадим его определение через универсальное свойство и установим связь между этими определениями.

Определение 4.6. Пусть V - векторное пространство над полем $\mathbb{K}, U \subset V$ - его подпространство. Факторпространством пространства V по подпространству U называется пара (W, p), состоящая из векторного пространства W над полем $\mathbb{K}$ и линейного отображения $p : V \to W$, обладающая следующим универсальным свойством: для любого векторного пространства L над тем же полем и линейного отображения $\varphi : V \to L$ такого, что $\ker\varphi \supset U$ существует, причем единственное, линейное отображение $\chi : W \to L$ такое, что $\chi \circ p = \varphi$, то есть диаграмма

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\varphi"'] & W \arrow[dl, "\chi"] \\ L & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Теорема 4.7. Факторпространство V по U существует и единственно с точностью до канонического изоморфизма.

Доказательство. Для доказательства существования мы предъявим явную конструкцию факторпространства и проверим свойство универсальности (далее мы используем обозначения из раздела 2.3.). Точнее, рассмотрим пару ($V/U, \pi$), где линейное пространство V/U нами было определено ранее в разделе 2.3., а отображение $\pi : V \to V/U$ - каноническая проекция, определенная равенством $\pi(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}] \quad \forall \mathbf{v} \in V$.

Проверим линейность канонической проекции π :

$$\pi(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = [\mathbf{u}+\mathbf{v}] = [\mathbf{u}] + [\mathbf{v}] = \pi(\mathbf{u}) + \pi(\mathbf{v})$$

$$\pi(\lambda\mathbf{v}) = [\lambda\mathbf{v}] = \lambda[\mathbf{v}] = \lambda\pi(\mathbf{v})$$

Далее, покажем, что $\ker\pi = U$. Действительно,

$$\mathbf{v} \in \ker\pi \Leftrightarrow \pi(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}] = [\mathbf{0}] \Leftrightarrow \mathbf{v} \in U.$$

Кроме того, так как любой элемент из U/V по определению имеет вид $[\mathbf{v}]$ для некоторого $\mathbf{v} \in V$, то проекция π сюръективна. Теперь требуемое универсальное свойство пары ($V/U, \pi$) следует из предыдущей задачи.

Вот план другого, непосредственного, доказательства универсального свойства (без ссылки на предыдущую задачу). Для данного $\varphi : V \to L$ определим $\chi : V/U \to L$ как $\chi([\mathbf{v}]) = \varphi(\mathbf{v})$. Такое определение χ - следствие требования коммутативности диаграммы $\chi \circ \pi = \varphi$. Далее нужно, используя условие $U \subset \ker\varphi$, проверить корректность определения χ : то есть если $[\mathbf{v}] = [\mathbf{v}']$, то $\chi(\mathbf{v}) = \chi(\mathbf{v}')$. Затем проверить линейность χ и заметить, что требованием коммутативности диаграммы отображение χ определено однозначно.

Единственность факторпространства с точностью до канонического изоморфизма доказывается следуя той же схеме, что и для прямой суммы. Пусть (W, p) и (W', p') - два факторпространства пространства V по подпространству U. Тогда имеем коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p'"'] & W \arrow[dl, "f"] \\ W' & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p'"'] & W \\ W', \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

согласно которым $p' = f \circ p, p = f' \circ p'$, а следовательно, имеем $p = f' \circ f \circ p, p' = f \circ f' \circ p'$. Получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p"'] & W \arrow[dl, "f' \circ f"] \\ W, & \end{tikzcd}$$

но она останется коммутативной, если вместо $f' \circ f$ взять id_W. В силу единственности χ в диаграмме (58) (примененной к случаю $L = W, \varphi = p$) получаем, что $f' \circ f = \mathrm{id}_W$. Аналогично доказывается $f \circ f' = \mathrm{id}_{W'}$. $\square$

Следующая задача имеет аналоги в различных разделах алгебры, которые носят название "основной теоремы о гомоморфизмах" (групп, колец, алгебр).

Задача 4.

8. Пусть $\varphi : V \to W$ - линейное отображение векторных пространств (не обязательно конечномерных). Доказать, что $\operatorname{im} \varphi \cong V / \ker \varphi$.

Решение. Пусть, как выше,

$$\pi : V \to V / \ker \varphi, \quad \pi(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]$$

- каноническая проекция на факторпространство. Пусть $\bar{\varphi}$ коограничение отображения φ на $\operatorname{im} \varphi$, то есть такое отображение $\bar{\varphi} : V \to \operatorname{im} \varphi$, что $\bar{\varphi}(\mathbf{v}) = \varphi(\mathbf{v}) \forall \mathbf{v} \in V$[40]. Определим линейное отображение $\alpha : V / \ker \varphi \to \operatorname{im} \varphi$, делающее диаграмму

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\overline{\varphi}"] \arrow[d, "\pi"'] & \operatorname{im} \varphi \\ V/\ker \varphi \arrow[ur, "\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативной, положив $\alpha[\mathbf{v}] = \varphi(\mathbf{v})$. Легко проверяется, что α корректно определено и линейно. Покажем, что α - изоморфизм. Сюръективность α очевидна. Кроме того,

$$\alpha[\mathbf{v}] = \mathbf{0} \Leftrightarrow \varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{v} \in \ker \varphi \Leftrightarrow [\mathbf{v}] = \mathbf{0}.$$

Значит, α инъективно. $\square$

Комментарий. Предположим, что $\operatorname{im} \varphi$ конечномерен. Тогда в качестве следствия из предыдущей задачи получаем, что факторпространство $V / \ker \varphi$ также конечномерно и $\dim(V / \ker \varphi) == \dim(\operatorname{im} \varphi)$. Вообще, если U - подпространство в V такое, что

факторпространство V/U конечномерно, то размерность V/U называется коразмерностью U в V и обозначается $\operatorname{codim}_V U$. Например, из пункта а) задачи

[240] Другими словами, $\bar{\varphi}$ получено из φ ограничением области значений с W на $\operatorname{im} \varphi$.

2.17 следует, что если $f : V \to \mathbb{K}$ ненулевой линейный функционал, то $\operatorname{codim}_V(\ker f) = 1$. Предыдущая задача очевидным образом обобщает это утверждение. Кроме того, если пространство V конечномерно, то, поскольку $\dim(V/\ker\varphi) = \dim V - \dim\ker\varphi$ (см. задачу 2.27), получаем хорошо известную формулу $\dim V = \dim\ker\varphi + \dim\operatorname{im}\varphi$.

Изучением универсальных свойств разных математических конструкций занимается теория категорий, ей посвящены отдельные параграфы в книгах [28] и [37]; много примеров универсальных конструкций также можно найти в [17], более продвинутым вопросам теории категорий посвящена [18].

/

8.5.2 4.2. Универсальное свойство тензорного произведения

Определение 4.9. Пусть U, V - векторные пространства над полем $\mathbb{K}$ (не обязательно конечномерные). Их тензорным произведением называется пара (W, t), которая состоит из векторного пространства W над тем же полем и билинейного отображения $t : U \times V \to W$, обладающая следующим свойством универсальности: для любого векторного пространства L над полем $\mathbb{K}$ и произвольного билинейного отображения $g : U \times V \to\to L$ существует, притом единственное, линейное отображение $f = f(g) : W \to L$ такое, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "t"] \arrow[d, "g"'] & W \arrow[dl, "f(g)"] \\ L & \end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть $g = f(g) \circ t$.

Теорема 4.10. Тензорное произведение двух x^{41} пространств существует.

Доказательство. Доказательство заключается в предъявлении явной конструкции тензорного произведения, для которой нужно проверить выполнение универсального свойства. Предположим для простоты, что пространства U и V конечномерны, $\dim U = m, \dim V = n$.

1. Конструкция тензорного произведения. Пусть $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ и $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ - некоторые базисы в U и V соответственно. Определим пару (W, t) так: $t(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j) =: \mathbf{w}_{ij}$, где $\{\mathbf{w}_{ij}\}_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$ – базис в W. Тем самым билинейное отображение t однозначно определено:
$$t\left(\sum_i \lambda_i \mathbf{u}_i, \sum_j \mu_j \mathbf{v}_j\right) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j \mathbf{w}_{ij}. \tag{59}$$

2. Проверка универсального свойства. Пусть $g : U \times V \to L$– произвольное билинейное отображение. Линейное отображение $f(g) : W \to L$ зададим на базисе $\{\mathbf{w}_{ij}\}_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$ пространства W формулой $f(g)(\mathbf{w}_{ij}) = g(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j)$. Тем самым линейное отображение $f(g)$ корректно определено. Кроме того, ясно, что это единственное линейное отображение со свойством $g = f(g) \circ t$.

Может показаться, что конструкция тензорного произведения зависит от выбора базисов $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ и $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ в пространствах U и V, но это не так. Действительно, легко проверить (используя матрицы перехода), что если $\mathbf{w}_{ij} = t(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j)$ образуют базис в W, то и для любых базисов $\{\mathbf{u}'_1, \ldots, \mathbf{u}'_m\}$ и $\{\mathbf{v}'_1, \ldots, \mathbf{v}'_n\}$ в U и V векторы $\mathbf{w}'_{ij} := t\left(\mathbf{u}'_i, \mathbf{v}'_j\right)$ также образуют базис в W.

[241] А также любого конечного числа - в определении нужно просто заменить билинейные отображения полилинейными.

В литературе можно встретить и другие конструкции тензорного произведения (см., например, [28]). Но обычно удобно работать не с конкретной реализацией, а использовать универсальное свойство.

Например, из свойства универсальности сразу получим утверждение о единственности тензорного произведения.

Теорема 4.11. Тензорное произведение единственно с точностъю до канонического изоморфизма.

Доказательство. Мы покажем, что если (W', t') - еще одно тензорное произведение пространств U и V, то существуют такие единственные линейные отображения $f : W \to W'$ и $f' : W' \to W$,

что $f \circ t = t', f' \circ t' = t, f' \circ f = \mathrm{id}_W, f \circ f' = \mathrm{id}_{W'}$. Действительно, по свойству универсальности пар (W, t) и (W', t') существуют такие единственные $f : W \to W'$ и $f' : W' \to W$, что диаграммы

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "t"] \arrow[d, "t'"'] & W \arrow[dl, "f"] \\ W' & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "t"] \arrow[d, "t'"'] & W \\ W' \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативны, то есть $f \circ t = t', f' \circ t' = t$. Тогда диаграмма

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "t"] \arrow[d, "t"'] & W \arrow[dl, "f' \circ f"] \\ W & \end{tikzcd}$$

коммутативна, но коммутативна также диаграмма, в которой вместо $f' \circ f$ стоит id_W. В силу единственности $f' \circ f = \mathrm{id}_W$, аналогично доказывается $f \circ f' = \mathrm{id}_{W'}$. $\square$

То есть в указанном в теореме смысле тензорное произведение единственно ("единственно с точностью до канонического изоморфизма") и не зависит от конкретной конструкции. Пространство W обычно обозначается $U \otimes V$ и часто само называется тензорным произведением U и V.

Следствие 4.12. $\dim(U \otimes V) = \dim U \cdot \dim V$.

Доказательство. В доказательстве теоремы 4.10 мы предъявили конструкцию тензорного произведения (W, t) пространств U и V, для которой $\dim W = \dim U \cdot \dim V$, а из единственности тензорного произведения с точностью до изоморфизма следует, что $\dim(U \otimes V)$ корректно определена (то есть не зависит от выбора конкретной конструкции тензорного произведения). $\square$

Элементы пространства $U \otimes V$ называются тензорами, а элементы $U \otimes V$, лежащие в образе t, - разложимьми тензорами и обозначаются $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} := t(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Как следует из предыдущего, множество разложимых тензоров содержит некоторый базис пространства $U \otimes V$. Отсюда, конечно, не следует, что всякий тензор разложим (за исключением случаев, когда одно из пространств U или V имеет размерность ≤ 1): нужно помнить, что

отображение t не линейное, а билинейное, и его образ в общем случае не является линейным подпространством (см. замечание ниже).

Заметим еще, что из билинейности универсального отображения $t : U \times V \to U \otimes V$

следуют соотношения
$$(\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2)\otimes\mathbf{v}=\mathbf{u}_1\otimes\mathbf{v}+\mathbf{u}_2\otimes\mathbf{v},\quad (\lambda\mathbf{u})\otimes\mathbf{v}=\lambda(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})$$

и аналогичные соотношения для 2 -го аргумента.

Введем дополнительные обозначения. Пространство билинейных отображений $U\times V\to L$ обозначим $\mathcal{L}(U,V;L)$, а пространство линейных отображений $W\to L-\mathcal{L}(W;L)$.

Из определения тензорного произведения легко следует, что сопоставление $g\mapsto f(g)$ определяет канонический (то есть инвариантно определенный, не зависящий от базиса) изоморфизм линейных пространств
$$\mathcal{L}(U,V;L)\to\mathcal{L}(U\otimes V;L) \tag{60}$$

Замечание (про геометрию универсального билинейного отображения). Имеется тесная связь между универсальным билинейным отображением t и отображением Сегре (см. ниже), играющим важную роль в проективной и алгебраической геометрии. В свою очередь, отображение Сегре дает некоторое описание образа билинейного отображения (который не является линейным подпространством).

Заметим, что из (59) следует, что в координатах относительно выбранных базисов в пространствах U и V отображение t задается следующей формулой:
$$t\left((\lambda_1,\ldots,\lambda_m),(\mu_1,\ldots,\mu_n)\right)=(\lambda_1\mu_1,\ldots,\lambda_m\mu_n)\,.$$

Пусть проективные пространства $\mathrm{P}_{\mathbb{K}}^{m-1}$ и $\mathrm{P}_{\mathbb{K}}^{n-1}$ над полем $\mathbb{K}$ проективизации пространств U и V с однородными координатами $[\lambda_1:\ldots:\lambda_m]$ и $[\mu_1:\ldots:\mu_n]$ соответственно (см. [28], часть 3, § 6). Тогда t индуцирует отображение проективных пространств
$$\widetilde{t}:\mathrm{P}_{\mathbb{K}}^{m-1}\times\mathrm{P}_{\mathbb{K}}^{n-1}\to\mathrm{P}_{\mathbb{K}}^{mn-1},$$
$$\widetilde{t}\left([\lambda_1:\ldots:\lambda_m],[\mu_1:\ldots:\mu_n]\right)=[\lambda_1\mu_1:\ldots:\lambda_m\mu_n]\,.$$

Данное отображение называется отображением (или вложением) Сегре (см., например, [36]). Если $[\nu_{11}:\ldots:\nu_{mn}]$ - однородные координаты в $\mathrm{P}_{\mathbb{K}}^{mn-1}$, то образ отображения Сегре является пересечением квадрик
$$\nu_{ij}\nu_{kl}-\nu_{il}\nu_{kj}=0,\quad 1\le i,k\le m, 1\le j,l\le n.$$

Если однородные координаты ν_{ij} записать в матрицу, то выписанная система квадратных уравнений - условие того, что ранг данной матрицы равен 1 (все миноры второго порядка обращаются в нуль).

В частном случае $m=n=2$ образ отображения Сегре
$$\widetilde{t}\left(\mathrm{P}_{\mathbb{K}}^1\times\mathrm{P}_{\mathbb{K}}^1\right)\subset\mathrm{P}_{\mathbb{K}}^3$$

- квадрика

$$\nu_{11}\nu_{22}-\nu_{12}\nu_{21}=0$$

В случае $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ в аффинной карте она выглядит как однополостный гиперболоид, два семейства прямолинейных образующих которого отвечают проективным прямым $\{x\}\times\mathrm{P}_{\mathbb{K}}^1$ и $\mathrm{P}_{\mathbb{K}}^1\times\{y\}$, где $x,y\in\mathrm{P}_{\mathbb{K}}^1$ - некоторые точки.

8.5.3 4.3. Тензорное произведение линейных отображений

Пусть даны некоторые линейные отображения
$$\varphi:U\to L,\quad \psi:V\to M$$

Построим линейное отображение
$$\chi:U\otimes V\to L\otimes M$$

однозначно (поскольку разложимые тензоры содержат базис) задаваемое равенством
$$\chi(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})=\varphi(\mathbf{u})\otimes\psi(\mathbf{v})\forall\mathbf{u}\in U,\mathbf{v}\in V$$

Для этого сначала определим билинейное отображение
$$g:U\times V\to L\otimes M,\quad g(\mathbf{u},\mathbf{v})=\varphi(\mathbf{u})\otimes\psi(\mathbf{v})$$

Тогда по универсальному свойству тензорного произведения существует единственное линейное отображение χ, превращающее диаграмму

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "t"] \arrow[d, "g"'] & U \otimes V \arrow[dl, "\chi"] \\ L \otimes M & \end{tikzcd}$$

в коммутативную. Очевидно, что χ - искомое. Его часто обозначают $\varphi \otimes \psi$ и называют тензорным произведением линейных отображений φ и ψ.

Если φ относительно выбранных базисов в U и L имеет матрицу A, а ψ - относительно базисов в V и M - матрицу B, то $\varphi \otimes \psi$ относительно тензорных произведений базисов в $U \otimes V$ и $L \otimes M$ (при соответствующем упорядочивании) имеет в качестве матрицы кронекерово произведение матриц $A \otimes B$.

Задача 4.

13. Пусть линейные операторы $\varphi, \psi : V \to V$ в базисе $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ пространства V заданы матрицами

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_\psi = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу оператора $\varphi \otimes \psi : V \otimes V \to V \otimes V$ в базисе $\{\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2\}$.

Решение. Имеем

$$(\varphi \otimes \psi)(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) = \varphi(\mathbf{e}_1) \otimes \psi(\mathbf{e}_1) =$$
$$= (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \otimes (2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2;$$

аналогично

$$(\varphi \otimes \psi)(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) = \varphi(\mathbf{e}_1) \otimes \psi(\mathbf{e}_2) =$$
$$= (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \otimes (-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2,$$
$$(\varphi \otimes \psi)(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) = \varphi(\mathbf{e}_2) \otimes \psi(\mathbf{e}_1) =$$
$$= (2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2) \otimes (2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2) = 4\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + 6\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + 9\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2,$$
$$(\varphi \otimes \psi)(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) = \varphi(\mathbf{e}_2) \otimes \psi(\mathbf{e}_2) =$$
$$= (2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2) \otimes (-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = -2\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2.$$

Таким образом,

$$A_{\varphi\otimes\psi} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \\ -2 & 1 & 6 & -3 \\ -3 & -1 & 9 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} & 2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \\ -1\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} & 3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

- кронекерово произведение матриц A_φ и A_ψ. $\square$

8.5.4 4.4. Канонические изоморфизмы

Построим канонический изоморфизм

$$U^* \otimes V^* \cong (U \otimes V)^*. \tag{61}$$

Для этого, во-первых, определим билинейное отображение

$$g : U^* \times V^* \to \mathcal{L}(U, V; \mathbb{K})$$

(где $\mathcal{L}(U, V; \mathbb{K})$ обозначает векторное пространство билинейных отображений $U \times V \to \mathbb{K}$) с помощью формулы

$$g(\alpha, \beta)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{u})\beta(\mathbf{v}),$$

где $\alpha \in U^*, \beta \in V^*, \mathbf{u} \in U, \mathbf{v} \in V$. По универсальному свойству тензорного произведения тогда существует единственное линейное отображение

$$f : U^* \otimes V^* \to \mathcal{L}(U, V; \mathbb{K})$$

такое, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} U^* \times V^* \arrow[r, "t"] \arrow[d, "g"'] & U^* \otimes V^* \arrow[dl, "f"] \\ \mathcal{L}(U, V; \mathbb{K}) & \end{tikzcd}$$

коммутативна. Беря композицию f с изоморфизмом (60) при $L=\mathbb{K}$, получим линейное отображение $\phi : U^* \otimes V^* \rightarrow (U \otimes V)^*$ (поскольку $\mathcal{L}(U \otimes V; \mathbb{K}) = (U \otimes V)^*$).

Покажем, что ϕ - изоморфизм. Очевидно, достаточно дока-

зать, что f - изоморфизм. Более того, так как f - линейное отображение между пространствами одинаковой размерности, достаточно установить сюръективность f. Покажем, что

$$g\left(\mathbf{u}^i, \mathbf{v}^j\right) = f\left(\mathbf{u}^i \otimes \mathbf{v}^j\right), \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

составляют базис в $\mathcal{L}(U, V; \mathbb{K})$, где $\{\mathbf{u}^1, \ldots, \mathbf{u}^m\}$ - базис в U^*, двойственный базису $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ в U, а $\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n\}$ - базис в V^*, двойственный базису $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ в V. Действительно, по определению g имеем

$$g\left(\mathbf{u}^i, \mathbf{v}^j\right)(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_l) = \mathbf{u}^i(\mathbf{u}_k)\,\mathbf{v}^j(\mathbf{v}_l) = \delta^i_k \delta^j_l$$

где

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

- символ Кронекера. Если $h \in \mathcal{L}(U, V; \mathbb{K})$ - произвольная билинейная форма, то $h = \sum_{i,j} h_{ij} g\left(\mathbf{u}^i, \mathbf{v}^j\right)$, где $h_{ij} := h\left(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_j\right) \in \mathbb{K}$ единственное разложение h по $g\left(\mathbf{u}^i, \mathbf{v}^j\right) \in \mathcal{L}(U, V; \mathbb{K})$. Тем самым сюръективность f доказана, поскольку это - линейное отображение, образ которого содержит базис.

Для понимания следующего канонического изоморфизма полезна такая задача.

Задача 4.

14. Всякое линейное отображение $\varphi : U \to V$ ранга 1 имеет вид $\mathbf{u} \mapsto \xi(\mathbf{u})\mathbf{v} \quad \forall \mathbf{u} \in U$, где пара $\xi \in U^*, \mathbf{v} \in V$ определена отображением φ однозначно с точностью до замены $\xi \mapsto \lambda\xi, \mathbf{v} \mapsto \lambda^{-1}\mathbf{v}$ для $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Решение. $\operatorname{rk}\varphi = \dim \operatorname{im}\varphi = 1 \Leftrightarrow \operatorname{im}\varphi = \langle \mathbf{v} \rangle$ для некоторого $\mathbf{v} \in V, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Тогда $\varphi(\mathbf{u}) = \xi(\mathbf{u})\mathbf{v}$, причем из линейности φ следует, что $\xi(\mathbf{u})$ линейно зависит от $\mathbf{u}$, то есть является линейной формой.

Ясно, что вектор $\mathbf{v}$ такой, что $\operatorname{im}\varphi = \langle \mathbf{v} \rangle$ определен отображением φ однозначно с точностью до ненулевого множителя. Также ясно, что $\langle \xi \rangle = \operatorname{Ann}(\ker\varphi)$[42], поэтому $\xi \in U^*$ также определен отображением φ однозначно с точностью до ненулевого множителя.

Построим теперь канонический изоморфизм

$$U^* \otimes V \cong \mathcal{L}(U; V). \tag{62}$$

Для этого, во-первых, определим билинейное отображение

$$g : U^* \times V \to \mathcal{L}(U, V)$$

с помощью формулы

$$g(\alpha, \mathbf{v})(\mathbf{u}) = \alpha(\mathbf{u})\mathbf{v},$$

где $\alpha \in U^*, \mathbf{u} \in U, \mathbf{v} \in V$. Согласно универсальному свойству тензорного произведения, существует, причем единственное, линейное отображение $f : U^* \otimes V \to \mathcal{L}(U; V)$, которое превращает диаграмму

$$\begin{tikzcd} U^* \times V \arrow[r, "t"] \arrow[d, "g"'] & U^* \otimes V \arrow[dl, "f"] \\ \mathcal{L}(U; V) & \end{tikzcd}$$

[242] Аннулятор $\operatorname{Ann}(W) \subset U^*$ подпространства $W \subset U$ был определен нами ранее в пункте 1) задачи 1.8.

в коммутативную.
Покажем, что f - изоморфизм. Снова, в силу равенства размерностей, достаточно доказать его сюръективность. Из равенства $g\left(\mathbf{u}^{i}, \mathbf{v}_{j}\right)\left(\mathbf{u}_{k}\right)=\delta_{k}^{i} \mathbf{v}_{j}$ легко получить, что матрица оператора $f\left(\mathbf{u}^{i} \otimes \mathbf{v}_{j}\right)$ в выбранных в пространствах U, V базисах есть E_{ji}, причем когда i пробегает числа от 1 до m, а j - от 1 до n, матрицы E_{ji} пробегают некоторый базис пространства $\mathcal{L}(U; V)$. Тем самым сюръективность установлена. □

Интересно отметить, что образ $\operatorname{im} t$ универсального билинейного отображения t из диаграммы (63) ("разложимые тензоры") состоит в точности из линейных отображений ранга ≤ 1[43], в частности, отображение t не сюръективно, хотя его образ содержит базис $U^{*} \otimes V$. Это, конечно, связано с тем, что t является не линейным, а билинейным отображением (см. Замечание выше).

В частном случае $U=V$ мы имеем канонический изоморфизм

$$f: V^{*} \otimes V \rightarrow \mathcal{L}(V; V)=: \mathcal{L}(V) \tag{64}$$

Заметим, что в $\mathcal{L}(V)$ есть выделенный элемент, а именно тождественный оператор id_{V}. Какой элемент $V^{*} \otimes V$ ему отвечает при каноническом изоморфизме из формулы (64)? Легко видеть, что $f^{-1}\left(\mathrm{id}_{V}\right)=\sum_{i} \mathbf{v}^{i} \otimes \mathbf{v}_{i}$[44] для любой пары двойственных базисов $\left\{\mathbf{v}_{i}\right\},\left\{\mathbf{v}^{j}\right\}$.

На пространстве $\mathcal{L}(V)$ имеется канонический линейный функционал следа $\operatorname{tr}: \mathcal{L}(V) \rightarrow \mathbb{K}$, сопоставляющий линейному оператору его след. С другой стороны, на векторном пространстве $V^{*} \otimes V$ есть линейный функционал $c: V^{*} \otimes V \rightarrow \mathbb{K}$, называемый сверткой. Это - линейное отображение, которое на разложимых тензорах $\alpha \otimes \boldsymbol{v} \in V^{*} \otimes V$ определяется как вычисление значения линейного функционала α на векторе $\mathbf{v}$, то есть $c(\alpha \otimes \mathbf{v})=\alpha(\mathbf{v}) \in \mathbb{K}$.

Задача 4.

15. Показать, что при отождествлении пространства $\mathcal{L}(V)$ с $V^{*} \otimes V$ посредством изоморфизма (64) след переходит в свертку, то есть $\operatorname{tr} \circ f=c$.

Решение. При изоморфизме (64) тензор $\sum_{i, j} t_{i}^{j} \mathbf{v}^{i} \otimes \mathbf{v}_{j}$ отождествляется с линейным оператором $T: V \rightarrow V$, имеющим в базисе $\left\{\mathbf{v}_{1}, \ldots, \mathbf{v}_{n}\right\}$ матрицу $\left(\ t_{i}^{j}\ \right)$ (таким образом, верхний индекс - номер строки, нижний - номер столбца). След - линейный функционал $\left(t_{i}^{j}\right) \mapsto \sum_{i} t_{i}^{i}$, инвариантный относительно замен базиса. Он отвечает сопоставлению тензору $\sum_{i, j} t_{i}^{j} \mathbf{v}^{i} \otimes \mathbf{v}_{j}$ числа $\sum_{i} t_{i}^{i}$. С другой стороны,

$$c\left(\sum_{i, j} t_{i}^{j} \mathbf{v}^{i} \otimes \mathbf{v}_{j}\right)=\sum_{i, j} t_{i}^{j} \mathbf{v}^{i}\left(\mathbf{v}_{j}\right)=\sum_{i, j} t_{i}^{j} \delta_{j}^{i}=\sum_{i} t_{i}^{i}.$$

Многие знакомые операции в линейной алгебре (например, вычисление значения функционала (линейного оператора) на векторе, композиция линейных операторов, подъем (опускание) индексов в присутствии метрики и т.д.) выражаются через свертку.

Дальнейшую информацию по этому поводу читатель найдет в рекомендованных учебниках (например, в [28]).

Наконец, построим канонический изоморфизм

$$\mathcal{L}(U, V; W) \cong U^{*} \otimes V^{*} \otimes W \tag{65}$$

как композицию

$$\mathcal{L}(U, V; W) \cong \mathcal{L}(U \otimes V; W) \cong(U \otimes V)^{*} \otimes W \cong U^{*} \otimes V^{*} \otimes W,$$

где мы последовательно использовали (60), (62), (61), а также ассоциативность тензорного произведения, о которой можно почитать в [28].

[243] Действительно, то, что линейное отображение, отвечающее ненулевому разложимому тензору $\alpha \otimes \mathbf{v}, \alpha \in U^{*}, \mathbf{v} \in V$, имеет ранг 1, очевидно. В обратную сторону, если отображение $\varphi: U \rightarrow V$ имеет ранг 1 , то $\operatorname{im} \varphi=\langle\mathbf{v}\rangle, \forall \mathbf{u} \in U \varphi(\mathbf{u})=\alpha(\mathbf{u}) \mathbf{v}, \alpha \in U^{*} \Rightarrow \varphi=f(\alpha \otimes \mathbf{v})$.

[244] С использованием указанного изоморфизма в квантовой механике тождественный оператор в дираковских обозначениях записывается в виде $\sum_{i}|i\rangle\langle i|$.

8.5.5 4.5. Тензоры малых рангов

Пусть V - конечномерное пространство над полем $\mathbb{K}$. Произвольный элемент пространства

$$T_q^p(V) := \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{q} \otimes \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{p}$$

называется тензором на V типа (p, q) или ранга (валентности) $p+q$. Перечислим тензоры малого ранга.

a) $T_0^0(V) = \mathbb{K}$[245], то есть тензоры ранга 0 на V - в точности скаляры.

b) $T_1^0(V) = V^*$, то есть тензоры типа (0,1) на V - линейные функционалы на пространстве V.

c) $T_0^1(V) = V$, то есть тензоры типа (1,0) на V - векторы из пространства V.

d) $T_2^0(V) = V^* \otimes V^*$, причем канонические изоморфизмы $\mathcal{L}(V, V; \mathbb{K}) \cong \mathcal{L}(V \otimes V; \mathbb{K}) = (V \otimes V)^*$(60) и $(V \otimes V)^* \cong V^* \otimes V^*$ (61) показывают, что элементы $T_2^0(V)$ - в точности билинейные функции $V \times V \to \mathbb{K}$.

e) $T_1^1(V) = V^* \otimes V$ и канонический изоморфизм (62) позволяет отождествить $T_1^1(V)$ с $\mathcal{L}(V)$, то есть тензоры типа (1,1) в точности линейные операторы на V.

f) Пространство $T_0^2(V) = V \otimes V$ отождествляется с пространством билинейных форм на V^*, что показывает композиция канонических изоморфизмов:

$$\begin{gathered}
V \otimes V \cong (V \otimes V)^{**} = \mathcal{L}\left((V \otimes V)^*; \mathbb{K}\right) \cong \\
\cong \mathcal{L}\left(V^* \otimes V^*; \mathbb{K}\right) \cong \mathcal{L}\left(V^*, V^*; \mathbb{K}\right)
\end{gathered}$$

g) $T_2^1(V) = V^* \otimes V^* \otimes V$ и канонический изоморфизм (65) позволяет отождествить тензоры типа $(1,2)$ с билинейными отображениями $V \times V \to V$, то есть со структурами алгебр на V (не обязательно ассоциативных). Дело в том, что билинейное отображение $\mu : V \times V \to V$ задает умножение $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 := \mu(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ векторов из V, дистрибутивное относительно сложения.

8.5.6 4.6. Координатная запись тензоров

Выберем в пространстве V некоторый базис $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, а в двойственном пространстве V^* - соответствующий двойственный базис $\{\mathbf{e}^1, \ldots, \mathbf{e}^n\}, \mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \delta_j^i$. Тогда, согласно предыдущему, в $T_q^p(V)$ набор

$\left\{\mathbf{e}^{j_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}^{j_q} \otimes \mathbf{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_p} \mid 1 \leq i_k, j_l \leq n, 1 \leq k \leq p, 1 \leq l \leq q\right\}$

является базисом (при выбранном упорядочивании), называемым тензорным базисом. Заметим, что $\dim T_q^p(V) = n^{p+q}$.

Таким образом, любой элемент $T \in T_q^p(V)$ (тензор типа (p,q)) может быть разложен по указанному базису:

$$T = \sum t_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p} \mathbf{e}^{j_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}^{j_q} \otimes \mathbf{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_p}$$

Чтобы упростить обозначения, тензор типа (p, q) часто просто записывается набором своих координат $\left\{t_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p}\right\}$ в данном тензорном базисе. Разумеется, набор $\left\{t_{j_1 \ldots j_q}^{i_1 \ldots i_p}\right\}$, вообще говоря, зависит от выбора тензорного базиса; опишем эту зависимость.

Пусть есть еще один базис $\{\mathbf{e}'\} := \{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$ в V и C матрица перехода от старого базиса $\{\mathbf{e}\}$ к новому $\{\mathbf{e}'\}$. То есть $\mathbf{e}'_i = \sum \mathbf{e}_j c_i^j$, где $C = \left(c_i^j\right)$, причем в такой записи верхний индекс обозначает номер строки, а нижний - столбца. Тогда для двойственных базисов, как легко проверить, имеем $\mathbf{e}^i = \sum d_j^i \mathbf{e}^j$,

где $D = \left(d_i^j\right) = C^{-1}$. Действительно, пусть $\mathbf{e}^j = \sum_k d_k^j \mathbf{e}^k$; тогда имеем

$$\delta_i^j = \mathbf{e}'^j(\mathbf{e}'_i) = \sum_m d_m^j \mathbf{e}^m \left(\sum_k \mathbf{e}_k c_i^k\right) = \sum_{k,m} d_m^j c_i^k \delta_k^m = \sum_k d_k^j c_i^k$$

[245] Это - категорный вариант empty product, см. примечание на с. 30 .

что в матричном виде записывается как $DC = E$, следовательно, $D = C^{-1}$[246]. Эквивалентно, имеем

$$\mathbf{e}_i = \sum_j \mathbf{e}'_j d^j_i, \quad \mathbf{e}^i = \sum_j c^i_j \mathbf{e}^j$$

Теперь, подставляя в равенство

$$\begin{aligned} T &= \sum t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_p} \otimes \mathbf{e}^{j_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}^{j_q} = \\ &= \sum t'^{k_1 \ldots k_p}_{l_1 \ldots l_q} \mathbf{e}'_{k_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}'_{k_p} \otimes \mathbf{e}'^{l_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}'^{l_q} \end{aligned}$$

полученные выражения для $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^j$ через $\mathbf{e}'_k, \mathbf{e}^l$ и приравнивая два разложения по одному тензорному базису, получаем формулу преобразования координат тензора:

$$t'^{k_1 \ldots k_p}_{l_1 \ldots l_q} = \sum d^{k_1}_{i_1} \ldots d^{k_p}_{i_p} c^{j_1}_{l_1} \ldots c^{j_q}_{l_q} t^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \tag{66}$$

(суммирование по всем повторяющимся сверху и снизу индексам).

Проверим, что полученная формула согласуется с описанием тензоров малого ранга в предыдущем пункте. Например, для линейных форм из $\mathbf{e}^i = \sum c^i_j \mathbf{e}^j$ получаем

$$\sum t_i \mathbf{e}^i = \sum c^i_j t_i \mathbf{e}'^j = \sum t'_j \mathbf{e}'^j \Rightarrow t'_j = \sum c^i_j t_i,$$

а это - в точности формула преобразования (66) для тензоров типа $(0,1)$.

Аналогично, для тензоров типа $(1,0)$ формула (66) сводится к $t^i = \sum d^i_j t^j$ - формуле преобразования координат вектора при замене базиса.

Далее, для тензоров типа $(0,2)$ формула (66) сводится к виду $t'_{ij} = \sum c^k_i c^l_j t_{kl}$, что в матричном виде записывается как $T' == C^T T C$, то есть как формула преобразования координат билинейной формы при замене базиса.

В случае тензоров типа $(1,1)$ формула (66) сводится к $t'^i_j == \sum d^i_k c^l_j t^k_l$, то есть в матричном виде к $T' = DTC = C^{-1}TC$. Это - в точности формула преобразования матрицы линейного оператора при замене базиса. Заметим, что тождественному оператору id_V отвечает тензор, который в произвольной паре двойственных базисов $\{\mathbf{e}_i\}, \{\mathbf{e}^j\}$ имеет вид $\sum_i \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_i$. Таким образом, его координаты $\left\{\delta^i_j\right\}$ не зависят от базиса в V.

Из предыдущего пункта мы знаем, что тензор типа $(1,2)$ структура алгебры на V. выбранном базисе структура алгебры задается набором из n^3 чисел γ^k_{ij}, которые определяются равенством $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \sum_k \gamma^k_{ij} \mathbf{e}_k$. Покажем, что он преобразуется по формуле (66) как набор координат тензора типа (1,2). Действительно, с одной стороны, по определению получаем

$$\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = \sum_k \gamma'^k_{ij} \mathbf{e}'_k \tag{67}$$

с другой стороны, используя билинейность умножения, имеем

$$\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = \sum_{l,m} c^l_i c^m_j \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_m = \sum_{l,m,r} c^l_i c^m_j \gamma^r_{lm} \mathbf{e}_r = \sum_{l,m,r,k} c^l_i c^m_j \gamma^r_{lm} d^k_r \mathbf{e}'_k \tag{68}$$

Приравнивая коэффициенты перед $\mathbf{e}'_k$ в (67) и (68), получаем

$$\gamma^k_{ij} = \sum_{l,m,r} c^l_i c^m_j d^k_r \gamma^r_{lm}$$

что действительно совпадает с законом преобразования координат тензоров типа $(1,2)$. Набор $\left\{\gamma^k_{ij}\right\}$ называется тензором структурных констант данной алгебры.

Например, если $[\cdot,\cdot] : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ - векторное произведение в ориентированном трехмерном евклидовом пространстве, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ - произвольный базис в $\mathbb{R}^3$, то набор коэффициентов $\left\{a^k_{ij}\right\}$, определенных равенствами $[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j] = \sum_k a^k_{ij} \mathbf{e}_k$, образует тензор типа $(1,2)$. Действительно, из билинейности векторного

[246] Таким образом, при замене базиса в V двойственный базис в V^* преобразуется по той же формуле, что и координаты вектора. Конечно, это не случайно: элементы двойственного к $\{\mathbf{e}\}$ базиса суть координатные функции относительно $\{\mathbf{e}\}$.

произведения следует, что умножение $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = [\mathbf{u},\mathbf{v}]$ определяет структуру (неассоциативной) алгебры на $\mathbb{R}^3$. Таким образом, $\left\{a_{ij}^k\right\}$ - ее тензор структурных констант.

Тензор $\left\{t_{j_1\dots j_q}^{i_1\dots i_p}\right\}$ называется инвариантным, если он имеет одинаковые координаты во всех тензорных базисах в $T_q^p(V)$. Если V - евклидово пространство, то $\left\{t_{j_1\dots j_q}^{i_1\dots i_p}\right\}$ называется изотропным, если он инвариантен относительно ортогональных преобразований V (т.е. имеет одинаковые координаты во всех тензорных базисах, получающихся друг из друга с помощью ортогональных преобразований V). Ясно, что всякий инвариантный тензор изотропен, но, вообще говоря, не наоборот.

Задача 4.

16. a) Найти все инвариантные тензоры ранга 2. b) Найти все изотропные тензоры типа (0,2).

Решение. a) Во-первых, заметим, что если ненулевой тензор $T \in T_q^p(V)$ инвариантен, то $p=q$. Действительно, рассмотрим замену базиса $\mathbf{e}_i' = \lambda\mathbf{e}_i, 1\le i\le n$. Тогда из формулы замены координат тензора $t_{j_1\dots j_q}^{i_1\dots i_p} = \lambda^{q-p} t_{j_1\dots j_q}^{i_1\dots i_p}$.

Таким образом, достаточно рассмотреть тензоры типа $(1,1)$. Ранее такие тензоры мы отождествили с линейными операторами на V, причем тогда координаты тензора типа $(1,1)$ в тензорном базисе $\{\mathbf{e}^i\otimes\mathbf{e}_j\}$ в $V^*\otimes V$ - то же самое, что матричные элементы матрицы этого оператора в базисе $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$ пространства V. Таким образом, инвариантные тензоры типа $(1,1)$ отвечают линейным операторам, которые имеют одинаковые матрицы во всех базисах, то есть матрицы A, такие что $CA=AC$ для любой обратимой матрицы C. Легко видеть, что тогда $A=\lambda E$, то есть инвариантные тензоры типа $(1,1)$ - операторы $\lambda\mathrm{id}_V$, кратные тождественному. Таким образом, инвариантный тензор T типа $(1,1)$ имеет координаты $t_i^j = \lambda\delta_i^j$.

b) Выше мы видели, что пространство тензоров типа (0,2) отождествляется с пространством билинейных функций, при этом координаты такого тензора в тензорном базисе $\{\mathbf{e}^i\otimes\mathbf{e}^j\}$ в $V^*\otimes V^*$ - то же, что матричные элементы матрицы соответствующей билинейной функции в базисе $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$ пространства V. Таким образом, нужно найти билинейные функции, имеющие одну и ту же матрицу во всех базисах, получаемых друг из друга ортогональной заменой.

Поскольку V - евклидово пространство, на нем уже задан тензор типа $(0,2)$ - положительно определенная симметричная билинейная функция g, задающая скалярное произведение. Пусть $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$ - ортонормированный базис в V. Рассмотрим ортогональную замену базиса $\mathbf{e}_i' = -\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j' = \mathbf{e}_j$ при $j\ne i$. Тогда при $i\ne j$ получаем $t_{ij}' = -t_{ij}$, то есть изотропный тензор в этом базисе должен иметь вид $\sum_i \lambda_i\delta_{ij}$. Далее, при ортогональной замене $\mathbf{e}_i' = \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j' = \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k' = \mathbf{e}_k$ при $k\ne i,j$ имеем $t_{ii}' = t_{jj}, t_{j,j}' = t_{ii}$. Таким образом, изотропный тензор t_{ij} имеет вид $\lambda\delta_{ij}$. То есть матрица соответствующей билинейной функции в ортонормированном базисе есть λE, и билинейная функция пропорциональна евклидовой структуре на V.

Комментарий. Очевидно, что не существует ненулевых изотропных тензоров ранга 1. Можно показать, что также не существует ненулевых изотропных тензоров ранга 3 . Изотропные тензоры типа $(4,0)$ образуют трехпараметрическое семейство

$$t_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\delta_{ik}\delta_{jl} + \nu\delta_{il}\delta_{jk}$$

Инвариантные тензоры ранга 4 образуют двухпараметрическое семейство

$$t_{kl}^{ij} = \lambda\delta_k^i\delta_l^j + \mu\delta_l^i\delta_k^j$$

8.5.7 4.7. Еще о канонических изоморфизмах

Данный раздел посвящен довольно тонким специальным вопросам, которые часто вызывают трудности при углубленном изучении линейной алгебры.

Выше мы уже пользовались понятием канонического изоморфизма как такого изоморфизма, который может быть определен инвариантно, независимо от какого-либо произвола (выбора базиса и т.д.). Полное объяснение этого понятия можно дать только в рамках теории категорий. В данном разделе мы будем пользоваться следующим определением.

Пусть у нас есть пара отображений $\theta = (\theta_0, \theta_1)$, причем θ_0 произвольному конечномерному векторному пространству V (над данным полем) сопоставляет некоторое новое векторное пространство $\theta_0(V)$, которое ему изоморфно. А отображение θ_1 сопоставляет линейному отображению $\varphi : V \to W$ линейное отображение
$\theta_1(\varphi) : \theta_0(V) \to \theta_0(W)$, причем $\theta_1(\mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_{\theta_0(V)}$ и для линейных отображений $\psi : U \to V$, $\varphi : V \to W$ имеет место равенство

$$\theta_1(\varphi \circ \psi) = \theta_1(\varphi) \circ \theta_1(\psi) : \theta_0(U) \to \theta_0(W). \tag{69}$$

Такая пара θ называется ковариантным функтором из категории конечномерных векторных пространств (над данным полем) в себя. Пример: тождественный функтор $\mathrm{Id} = (\mathrm{Id}_0, \mathrm{Id}_1)$,

$$\mathrm{Id}_0(V) = V, \quad \mathrm{Id}_1(\varphi) = \varphi$$

Другой пример дает функтор двойного сопряжения:

$$\theta_0(V) = V^{**}, \quad \theta_1(\varphi) = \varphi^{**}$$

Помимо ковариантных, существуют контравариантные функторы, отличие которых от первых заключается в том, что они обращают направление стрелок. Более подробно: контравариантный функтор $\theta = (\theta_0, \theta_1)$ линейному отображению $\varphi : V \to W$ сопоставляет линейное отображение $\theta_1(\varphi) : \theta_0(W) \to \theta_0(V)$, и вместо (69) для композиции отображений $\psi : U \to V$ и $\varphi : V \to W$ имеем

$$\theta_1(\varphi \circ \psi) = \theta_1(\psi) \circ \theta_1(\varphi) : \theta_0(W) \to \theta_0(U). \tag{70}$$

Примером контравариантного функтора является функтор сопряжения:

$$\theta_0(V) = V^*, \quad \theta_1(\varphi) = \varphi^*$$

Проверим для него (70). Для $f \in W^*, \mathbf{u} \in U$ имеем

$$(\varphi \circ \psi)^*(f)(\mathbf{u}) = f((\varphi \circ \psi)(\mathbf{u})) = f(\varphi(\psi(\mathbf{u}))) =$$
$$= \varphi^*(f)(\psi(\mathbf{u})) = \psi^*\left(\varphi^*(f)\right)(\mathbf{u}) = \left(\psi^* \circ \varphi^*\right)(f)(\mathbf{u})$$

откуда $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$, что в данном случае то же, что и (70).

Определение 4.17. Пусть θ - ковариантный функтор. Изоморфизм $\alpha : \mathrm{Id} \Rightarrow \theta$ между тождественным функтором Id и θ - набор изоморфизмов $\alpha_V : V \to \theta_0(V)$, по одному для каждого конечномерного векторного пространства V, таких, что для

любого линейного отображения $\varphi : V \to W$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\alpha_V"] \arrow[d, "\varphi"'] & \theta_0(V) \arrow[d, "\theta_1(\varphi)"] \\ W \arrow[r, "\alpha_W"] & \theta_0(W) \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Некоторый изоморфизм $\beta : V \to \theta_0(V)$ линейных пространств называется каноническим, если существует изоморфизм функторов $\alpha : \mathrm{Id} \Rightarrow \theta$ такой, что $\beta = \alpha_V$.

Существование канонического изоморфизма $\beta : V \to \theta_0(V)$ подразумевает существование конструкции α, которая для всякого конечномерного пространства W порождает изоморфизм $\alpha_W : W \to \theta_0(W)$, причем $\beta = \alpha_V$, и для этих изоморфизмов диаграммы в определении выше коммутативны.

Задача 4.

18. Построить канонический изоморфизм

$$\varepsilon_V : V \to V^{**}.$$

Решение. Напомним, что для каждого векторного пространства V определено линейное отображение $\varepsilon_V : V \to V^{**}$, сопоставляющее вектору $\mathbf{v} \in V$ функционал $\varepsilon_V(\mathbf{v})$ на пространстве линейных функционалов V^*, принимающий на $f \in V^*$ значение, равное значению f на векторе $\mathbf{v}$, т.е. $\varepsilon_V(\mathbf{v})(f) = f(\mathbf{v})$. Кроме того, в курсе линейной алгебры доказывается, что в случае конечномерного V отображение ε_V является изоморфизмом линейных пространств.

Мы утверждаем, что (для конечномерных V) набор $\{\varepsilon_V\}$ определяет изоморфизм между тождественным функтором и функтором двойного сопряжения.

Для доказательства этого нужно проверить коммутативность всевозможных квадратов вида

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varepsilon_V"] \arrow[d, "\varphi"'] & V^{**} \arrow[d, "\varphi^{**}"] \\ W \arrow[r, "\varepsilon_W"] & W^{**}. \end{tikzcd}$$

Для удобства выкладок введём обозначение $\psi := \varphi^* : W^* \to V^*$. Для произвольного $\mathbf{v} \in V$ рассмотрим линейный функционал $\varepsilon_V(\mathbf{v}) \in V^{**}$ такой, что $\varepsilon_V(\mathbf{v})(f) = f(\mathbf{v}) \forall f \in V^*$. Применив к нему φ^{**} (то есть ψ^*), получим элемент $\psi^*(\varepsilon_V(\mathbf{v})) \in W^{**}$ такой, что

$$\psi^*(\varepsilon_V(\mathbf{v}))(g) = \varepsilon_V(\mathbf{v})(\psi(g)) \forall g \in W^*$$

причём

$$\varepsilon_V(\mathbf{v})(\psi(g)) = \varepsilon_V(\mathbf{v})(\varphi^*(g)) = \varphi^*(g)(\mathbf{v}) = g(\varphi(\mathbf{v}))$$

Такой ответ мы получили, двигаясь по диаграмме вправо и вниз, начав с вектора $\mathbf{v} \in V$. Путь вниз и вправо даёт нам элемент $\varepsilon_W(\varphi(\mathbf{v})) \in W^{**}$, который на произвольном $g \in W^*$ принимает значение $\varepsilon_W(\varphi(\mathbf{v}))(g) = g(\varphi(\mathbf{v}))$, то есть то же, что и $\varphi^{**}(\varepsilon_V(\mathbf{v}))$, откуда и следует коммутативность диаграммы.

Комментарий. Заметим, что если V бесконечномерно, то отображение $\varepsilon_V : V \to V^{**}$ остается инъективным, но перестает быть сюръективным. Более того, пространство V изоморфно своему двойственному V^* тогда и только тогда, когда оно конечномерно. Например, читателю предлагается доказать, что пространство многочленов $\mathbb{Q}[x]$ не изоморфно своему двойственному. В функциональном анализе для нормированного пространства V вместо пространства V^* всех линейных функционалов на V обычно рассматривают его подпространство $V^\sharp \subset V^*$, состоящее из ограниченных функционалов. В этом случае определено отображение $\varepsilon_V^\sharp : V \to V^{\sharp\#}$, которое в некоторых случаях (например, для гильбертовых пространств) является изоморфизмом. Такие (нормированные) пространства называются рефлексивными.

Задача 4.

19. Существует ли канонический изоморфизм

$$V \to V^*?$$

Решение. Как было отмечено выше, функтор сопряжения контравариантный, то есть линейному отображению $\varphi : V \to W$ он сопоставляет отображение

$$\varphi^* : W^* \to V^*, \quad \varphi^*(f)(\mathbf{v}) = f(\varphi(\mathbf{v}))$$

Если $\alpha_V : V \to V^*$ - канонический изоморфизм, то аналог диаграммы (71) должен выглядеть так:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\alpha_V"] \arrow[d, "\varphi"'] & V^{*} \\ W \arrow[r, "\alpha_W"] & W^{*}. \arrow[u, "\varphi^{*}"'] \end{tikzcd}$$

В частности, полагая $W = V$, для любого линейного оператора $\varphi : V \to V$ мы должны иметь коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\alpha_V"] \arrow[d, "\varphi"'] & V^* \\ V \arrow[r, "\alpha_V"] & V^*. \arrow[u, "\varphi^*"'] \end{tikzcd}$$

Полагая $\varphi = 0$, мы видим, что из коммутативности диаграммы следует $\alpha_V = 0$. $\square$

Комментарий. Отметим, что если мы ограничимся рассмотрением только евклидовых пространств V, то канонический изоморфизм $\alpha_V : V \to V^*$ будет существовать. Точнее, изоморфизм α_V, сопоставляющий произвольному вектору $\mathbf{v} \in V$ функционал $\alpha_V(\mathbf{v}) \in V^*$, $\alpha_V(\mathbf{v})(\mathbf{u}) := (\mathbf{v}, \mathbf{u})_V \forall \mathbf{u} \in V$, где $(\cdot,\cdot)_V$ - скалярное произведение на V, будет каноническим. Это связано с тем, что сопоставление $V \mapsto \theta_0(V) = V^*$ в случае евклидовых V можно продолжить до ковариантного функтора, определив θ_1 на линейном отображении $\varphi : V \to W$ (где W - еще одно евклидово пространство) по следующей формуле. Пусть $f \in V^*$, тогда существует единственный $\mathbf{v} \in V$ такой, что $f = \alpha_V(\mathbf{v})$. Тогда $\theta_1(\varphi)(f) := \alpha_W(\varphi(\mathbf{v}))$. Теперь для евклидовых пространств V, W коммутативность всех диаграмм из определения 4.17 непосредственно следует из определений входящих в них отображений.

В задаче 4.18 нами был построен канонический изоморфизм $\varepsilon_V : V \to V^{**}$. Естественно задаться вопросом: сколько таких изоморфизмов?

Задача 4.

20. Описать канонические изоморфизмы $V \to V^{**}$.

Решение. Канонический изоморфизм - семейство изоморфизмов $\alpha_V : V \to V^{**}$, по одному для каждого конечномерного векторного пространства V над данным полем $\mathbb{K}$, которые согласованы в следующем смысле: для любого линейного отображения
$\varphi : V \to W$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\alpha_V"] \arrow[d, "\varphi"'] & V^{**} \arrow[d, "\varphi^{**}"] \\ W \arrow[r, "\alpha_W"] & W^{**} \end{tikzcd}$$

коммутативна.

В частности, если $W = V$, то для любого линейного оператора $\varphi : V \to V$ имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\alpha_V"] \arrow[d, "\varphi"'] & V^{**} \arrow[d, "\varphi^{**}"] \\ V \arrow[r, "\alpha_V"] & V^{**}. \end{tikzcd}$$

Иначе говоря, $\forall$ линейного $\varphi : V \to V, \forall f \in V^*, \forall \mathbf{v} \in V$ имеем равенство

$$(\alpha_V(\mathbf{v}), \varphi^*(f)) = (\alpha_V(\varphi(\mathbf{v})), f)\,, \tag{73}$$

где внешние скобки обозначают каноническую (ни от чего не зависящую) билинейную функцию $V^{**} \times V^* \to \mathbb{K}$.

Рассмотрим билинейную функцию

$$b : V^* \times V \to \mathbb{K}, \quad b(f, \mathbf{v}) := (\alpha_V(\mathbf{v}), f)\,.$$

Тогда равенство (73) перепишется в виде

$$b\left(\varphi^*(f), \mathbf{v}\right) = b(f, \varphi(\mathbf{v})). \tag{74}$$

Выберем базис $\{\mathbf{e}_i\}$ в V и двойственный к нему $\{\mathbf{e}^j\}$ в V^*; пусть φ имеет матрицу Φ в базисе $\{\mathbf{e}_i\}$, тогда φ^* имеет матрицу Φ^T в двойственном базисе $\{\mathbf{e}^j\}$. В этих базисах равенство (74) перепишется в виде

$$\left(\Phi^T\vec{f}\right)^T B\vec{v} = \vec{f}^T B\Phi\vec{v}, \quad \text{то есть} \quad \vec{f}^T\Phi B\vec{v} = \vec{f}^T B\Phi\vec{v}.$$

Отсюда получаем, что матрица B билинейной формы b коммутирует со всеми матрицами Φ, то есть является скалярной матрицей λE. С другой стороны, легко видеть, что "стандартный"

канонический изоморфизм

$$\varepsilon_V : V \to V^{**}, \quad \varepsilon_V(\mathbf{v})(f) = f(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V, f \in V^*$$

отвечает матрице $B = E$, так как в этом случае $(\varepsilon_V(\mathbf{v}), f) == f(\mathbf{v}) = \vec{f}^T\vec{v}$. Следовательно, множество канонических изоморфизмов $V \to V^{**}$ отождествляется с множеством ненулевых скаляров из поля $\mathbb{K}$: любой такой изоморфизм α_V имеет вид $\lambda\varepsilon_V, \lambda \in \mathbb{K}\backslash\{0\}$. Причем скаляр λ один и тот же для всех V в силу согласованности (72) изоморфизмов для разных пространств.

8.6 5 Приложение

8.6.1 5.1. Примеры отношений эквивалентности

Рассмотрим примеры отношений эквивалентности, возникающих в линейной алгебре. Легкая проверка того, что это - действительно отношения эквивалентности, оставляется читателю. Мы надеемся, что изучение данного раздела поможет систематизировать ряд результатов из курса линейной алгебры.

1. Пусть $X = \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$, два элемента $A, A' \in X$ эквивалентны $\Leftrightarrow \exists D \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K}), C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ такие, что $A' = DAC^{-1}$. Другими словами, две матрицы A, A' эквивалентны $\Leftrightarrow$ они являются матрицами одного и того же линейного отображения $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ в разных базисах.

Данное отношение эквивалентности имеет единственный инвариант [47] - ранг матрицы (= размерность образа линейного отображения). Более того, две $m \times n$-матрицы A, A' с элементами из поля $\mathbb{K}$ эквивалентны $\Leftrightarrow$ их ранги равны. Значит, классов эквивалентности всего $\min(m, n) + 1$ штук. Канонический представитель класса, отвечающего $r, 0 \leq r \leq \min(m, n)$, - матрица, имеющая вид $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1') Пусть $X = \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$, два элемента $A, A' \in X$ эквивалентны $\Leftrightarrow$ существует последовательность элементарных преобразований строк и столбцов, превращающая A в A'. Данное отношение эквивалентности совпадает с отношением п. 1).

2) Пусть $X = \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$, два элемента $A, A' \in X$ эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют ортогональные матрицы $D \in \mathrm{O}(m), C \in \mathrm{O}(n)$[48] такие, что $A' = DAC^T$. Другими словами, две матрицы A, A' эквивалентны, если и только если они являются матрицами одного и того же линейного отображения $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ в разных ортонормированных базисах.

Это отношение более тонкое, чем в пункте 1), поэтому неудивительно, что появляются дополнительные инварианты. Любая матрица $A \in X$ представляется в виде (ср. (52)) $A = U\Lambda V$, где U и V - ортогональные матрицы порядков m и n соответствен-

но, а $\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in X$, где $\Lambda_r = \mathrm{diag}\,(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$, причем все $\sigma_i > 0$. По существу, это аналог рассмотренного выше сингулярного разложения, но только не для операторов, а для линейных отображений между евклидовыми пространствами.

[247] Инвариант - функция на X, постоянная на классах эквивалентности.

[48] Напомним, что $\mathrm{O}(n)$ обозначает группу ортогональных матриц порядка n, то есть вещественных матриц таких, что $C^TC = E$.

Классы эквивалентности взаимно однозначно соответствуют наборам вещественных чисел $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ при условии $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r$.
3) Пусть $X = \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$, два элемента $A, A' \in X$ эквивалентны $\Leftrightarrow$ $\exists D \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ такая, что $A' = DA$. Данное отношение эквивалентности совпадает со следующим, более знакомым по теории систем линейных уравнений.

3') Пусть $X = \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$, два элемента $A, A' \in X$ эквивалентны $\Leftrightarrow$ существует последовательность элементарных преобразований строк, превращающая A в A'. Другими словами, матрицы A, A' эквивалентны $\Leftrightarrow$ они задают эквивалентные системы из m линейных однородных уравнений.

Ранг является инвариантом данного отношения. Более того, каждый класс эквивалентности содержит единственную строгую ступенчатую матрицу, то есть ступенчатую матрицу, в которой главным переменным отвечает единичная подматрица. Существует также биекция между классами эквивалентности и линейными подпространствами в $\mathbb{K}^n$, которые могут быть заданы системой из не более чем m уравнений. Если ввести подмножество X_r в X, состоящее из матриц ранга $r, 0 \leq r \leq \min(m, n)$, то классы эквивалентности элементов X_r будут отвечать множеству, состоящему из всех $k := n - r$-мерных подпространств в $\mathbb{K}^n$, то есть множеству точек грассманиана $\mathrm{Gr}(k, n)$ над полем $\mathbb{K}$. Подробнее см. [16], гл. 3, 8.
4) Пусть $X = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, два элемента $A, A' \in X$ эквивалентны $\Leftrightarrow$ $\exists C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ такая, что $A' = CAC^{-1}$. Другими словами, две матрицы A, A' эквивалентны $\Leftrightarrow$ они являются матрицами одного и того же линейного оператора $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ в разных базисах.

Инварианты: ранг, характеристический многочлен (в частности, след и определитель). Две матрицы эквивалентны $\Leftrightarrow$ они имеют одинаковую жорданову нормальную форму (с точностью до перестановки жордановых клеток). Классов столько же, сколько различных жордановых нормальных форм для матриц порядка n (мы не различаем жордановы формы, отличающиеся только перестановкой клеток). В частности, если $n \neq 0$, то классы эквивалентности образуют континуальное множество.
5) Пусть $X = \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ - подпространство симметрических матриц в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ (такая матрица определяет билинейную симметричную форму); два элемента $A, A' \in X$ эквивалентны, если существует такая обратимая матрица $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, что $A' == CAC^T$. Другими словами, две матрицы эквивалентны $\Leftrightarrow$ они являются матрицами одной и той же билинейной симметричной формы в разных базисах. Канонический представитель класса - диагональная матрица с числами $1, -1$ и 0 на главной диагонали (таким образом, классов - конечное число). Инвариант сигнатура (r_+, r_-, r_0).
6) Пусть X - снова подпространство $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ симметрических матриц в $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ (теперь интерпретируем такую матрицу как матрицу самосопряженного оператора в ортонормированном базисе); два элемента $A, A' \in X$ эквивалентны $\Leftrightarrow$ $\exists C \in \mathrm{O}(n)$ такая, что $A' = CAC^T$. Другими словами, две такие матрицы эквивалентны $\Leftrightarrow$ они являются матрицами одного и того же самосопряженного оператора в разных ортонормированных базисах. Инвариантом является характеристический многочлен. Канонический вид: диагональная матрица с вещественными числами на главной диагонали (набор собственных значений определен однозначно с точностью до перестановки).

Рассмотренные выше примеры 1) - 6) отношений эквивалентности возникают из разбиений множеств с заданным действием групп на орбиты (детали оставляем читателю).

8.6.2 5.2. Элементы теории представлений

Ряд результатов, касающихся линейных операторов, имеют далеко идущие обобщения в теории представлений. Здесь мы не собираемся систематически излагать данную теорию (это потребовало бы много больше места и привлечения ряда новых идей, см., например, [12], гл. 11), а только лишь наметим направление, в котором идеи линейной алгебры находят свое развитие в теории представлений, и рассмотрим несколько простых, но достаточно содержательных примеров.

Определение 5.1. Линейным представлением группы G в векторном пространстве V называется произвольный гомоморфизм $R : G \to \mathrm{GL}(V)$. Пространство V называется пространством представления R.

Заметим, что из определения сразу следует, что $R(e) = \mathrm{id}_V$, где $e \in G$ - единичный элемент, и $R\left(g^{-1}\right) = R(g)^{-1}$.

Пример 5.1. Пусть G - произвольная группа, V - произвольное векторное пространство (над полем $\mathbb{K}$). Тогда гомоморфизм $R : G \to \mathrm{GL}(V)$, определенный формулой $R(g) = \mathrm{id}_V \quad \forall g \in G$ линейное представление группы G в пространстве V, называемое тривиальным.

Пример 5.2. Пусть G - группа из двух элементов: нейтрального e и элемента σ второго порядка $\sigma^2 = e$. Рассмотрим V -n-мерное евклидово пространство. Легко видеть, что для того, чтобы задать представление G в V, необходимо и достаточно найти такой оператор $R(\sigma)$ на V, что $R(\sigma)^2 = \mathrm{id}_V$. Например, пусть $R(\sigma)$ - ортогональное отражение в пространстве V относительно подпространства $W \subset V$ размерности k, где $0 \leq k \leq n$. Тогда R - линейное представление G. Представление R тривиально при $k = n$, а при $k = 0 \quad R(\sigma) = -\mathrm{id}_V$.

Пример 5.3. Пусть S_n - группа перестановок множества натуральных чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$. Пусть $V - n$-мерное векторное пространство над полем $\mathbb{K}$ с выбранным базисом $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Определим так называемое мономиальное представление M_n группы S_n по формуле

$$M_n : S_n \to \mathrm{GL}(V), \quad M_n(\sigma)\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{\sigma(i)} \forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad \sigma \in S_n$$

(на произвольные векторы представление однозначно продолжается с базисных по линейности).

Пример 5.4. Пусть X - некоторое множество, на котором задано действие φ группы G (напомним, что φ - гомоморфизм из G в группу биективных преобразований множества X). Таким образом, $\varphi(g)(x)$ - результат применения биекции $\varphi(g)$ к элементу $x \in X$. Для упрощения дальнейших обозначений мы будем писать gx вместо $\varphi(g)(x)$, где $x \in X, \quad g \in G$.

Пусть $\mathbb{K}$ - некоторое поле, а V - пространство всех финитных (то есть каждая функция отлична от нуля только в конечном числе точек из X) функций $f : X \to \mathbb{K}$. Ясно, что V - векторное пространство над $\mathbb{K}$, базисом в котором является набор

дельта-функций δ_x, определяемых так:

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Действие φ группы G на X задает некоторое линейное представление $R = R_\varphi$ группы G на пространстве V :

$$R : G \to \mathrm{GL}(V), \quad (R(g)f)(x) = f\left(g^{-1}x\right),$$

то есть значение функции $R(g)f$, полученной применением оператора $R(g)$ к функции f, в точке x равно значению f в точке $g^{-1}x$. Например,

$$\left(R(g)\delta_x\right)(gy) = \delta_x\left(g^{-1}g(y)\right) = \delta_x(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

откуда $R(g)\delta_x = \delta_{gx}$.

Причина, почему при определении представления на функциях пишут g^{-1}, а не g, связана с тем, что только в этом случае мы получаем представление группы G, а именно выполнение равенства $(R(hg)f)(x) = (R(h)R(g)f)(x)$. Действительно, при таком определении левая часть последнего равенства принимает вид $f\left((hg)^{-1}x\right) = f\left(g^{-1}h^{-1}x\right)$, а правая $R(g)f\left(h^{-1}x\right) = f\left(g^{-1}h^{-1}x\right)$.

В частности, если в качестве множества X взять множество элементов группы G, а в качестве действия φ - действие группы G на себе левыми сдвигами $\varphi(g)h = gh$, мы получим регулярное представление группы G. Если группа G конечна, то его размерность равна порядку группы. Это представление играет важную роль: например, если характеристика $\mathbb{K}$ не делит порядок группы G, то оно содержит любое неприводимое (см. ниже) представление группы G.

Далее, если взять в качестве группы $G = S_n$ группу перестановок множества $X = \{1, \ldots, n\}$, а в качестве действия φ "тавтологическое" действие на X перестановками, то мы получим мономиальное представление из предыдущего примера (при этом дельта-функции δ_i отождествляются с векторами базиса $\mathbf{e}_i$).

Пример 5.5. В евклидовой плоскости V рассмотрим правильный треугольник с вершинами в точках $A_1(1, 0), A_2(1/2, \sqrt{3}/2)$

и $A_3(-1/2, -\sqrt{3}/2)$. Группа симметрий D_3 правильного треугольника [49] состоит из шести элементов: трех отражений относительно высот и трех поворотов вокруг его центра на углы $0, 2\pi/3$ и $4\pi/3$ радиан. Сопоставляя симметрии треугольника индуцируемую ей перестановку на множестве вершин, легко убедиться, что группа D_3 изоморфна S_3. Таким образом, сопоставляя перестановкам из S_3 линейные операторы в V, осуществляющие соответствующие перестановки вершин, получим некоторое линейное представление R группы S_3. Так как S_n порождается транспозициями (перестановками пар элементов), достаточно выписать операторы $R(23), R(13), R(12)$, соответствующие транспозициям. Для фиксированного выше треугольника, пользуясь задачей 3.23, получаем

$$R(23) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, R(13) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, R(12) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Тогда, например, циклической перестановке (123) отвечает оператор поворота на угол $2\pi/3$:

$$R(123) = R(13) \circ R(12) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Пример 5.6. Аналогично предыдущему примеру, задание множества всех вращений трехмерного евклидова пространства, сохраняющих (как подмножество) некоторый правильный многогранник, определяет линейное представление соответствующей абстрактной группы. Например, группа вращений, переводящих куб в себя, состоит из 24 элементов. Эта группа изоморфна группе перестановок S_4, в чем можно убедиться, рассмотрев индуцированное действие на 4 -элементном множестве из диагоналей куба. Кроме того, группа вращений куба действует перестановками на множестве из трех прямых, соединяющих центры противоположных граней. Так мы получаем ее сюръективный гомоморфизм на группу S_3. Беря его композицию с линейным представлением, описанным в предыдущем примере, получаем еще

одно (на этот раз двумерное) представление группы S_4.

Определение 5.2. Морфизмом φ между представлением

$$R : G \to \mathrm{GL}(U)$$

и представлением

$$S : G \to \mathrm{GL}(V)$$

группы G называется такое линейное отображение $\varphi : U \to V$, что $\varphi \circ R(g) = S(g) \circ \varphi \quad \forall g \in G$.

Последнее равенство удобно записывать как коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "R(g)"] \arrow[d, "\varphi"'] & U \arrow[d, "\varphi"] \\ V \arrow[r, "S(g)"'] & V, \end{tikzcd}$$

то есть независимость $\forall g \in G$ результата (взятия композиции отображений) от выбора пути по ориентированному графу. Для краткости указанный морфизм мы будем обозначать $\varphi : R \to S$.

Обратимый морфизм из представления R в представление S называется эквивалентностью (или иногда изоморфизмом) представлений. Таким образом, $R \sim S \quad \Leftrightarrow \quad \exists$ линейный изоморфизм $\varphi : U \to V$ такой, что $S(g) = \varphi R(g) \varphi^{-1} \quad \forall g \in G$ (подчеркнем, что φ один и тот же для всех g).

Определение 5.3. Пусть $R : G \to \mathrm{GL}(V)$ - такое представление, что некоторое подпространство $U \subset V$ инвариантно относительно операторов $R(g) : V \to V, \quad \forall g \in$

[249] Группа симметрий D_n правильного n-угольника называется группой ∂u эдра и состоит из $2n$ элементов, из которых n поворотов и n отражений относительно осей симметрии.

G. Тогда, рассматривая ограничения $S(g) := R(g)|_U$ операторов на инвариантное подпространство U, получаем некоторое новое представление $S : G \to \mathrm{GL}(U)$, называемое подпредставлением представления R. Иногда в литературе подпредставлением называют само подпространство U.

Если при наличии инвариантного подпространства $U \subset V$ вместо ограничения $R(g)|_U$ операторов рассмотреть факторолераторы $\bar{R}(g) : V/U \to V/U, \quad \bar{R}(g)(v+U) = R(g)(v)+U$, то мы получим определение факторпредставления $\bar{R} : G \to \mathrm{GL}(V/U)$.

Легко видеть, что если $\varphi : R \to S$ - морфизм представлений группы G, то его ядро и образ - подпредставления соответственно представлений R и S.

Любое представление содержит нулевое подпредставление и подпредставление, совпадающее со всем представлением. Остальные подпредставления мы будем называть собственными.

Пример 5.7. Пусть G - снова группа из двух элементов. Два представления $R : G \to \mathrm{GL}(V)$ и $S : G \to \mathrm{GL}(U)$ вида, описанного в примере 5.2, эквивалентны тогда и только тогда, когда $\dim V = \dim U$ и размерности соответствующих подпространств $W \subset V, W' \subset U$ совпадают.

Очевидно, что минимальные (относительно включения) ненулевые собственные подпредставления такого представления одномерные подпространства собственных подпространств (отвечающих возможным собственным значениям 1 и -1) оператора $R(g)$. Любое ненулевое подпредставление получается как сумма таких.

Пример 5.8. Вернемся к мономиальному представлению, определенному в примере 5.3. Пусть $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + \ldots + \mathbf{e}_n \in V$. Тогда ограничение мономиального представления M_n группы S_n на подпространство $\langle \mathbf{v} \rangle \subset V$ является тривиальным представлением. Таким образом, мономиальное представление содержит подпредставление. Заметим, что у него есть инвариантное прямое дополнение, то есть прямое дополнение к $\langle \mathbf{v} \rangle$ в V, которое является еще одним подпредставлением. А именно, определим подпространство $U := \{\mathbf{u} = \sum u_i \mathbf{e}_i \mid \sum u_i = 0\} \subset V$, которое, как легко проверить, также инвариантно относительно всех $M_n(g), \quad g \in S_n$. Очевидно, что $V = \langle \mathbf{v} \rangle \oplus U$ - прямая сумма подпредставлений.

Читателю предлагается проверить, что если $n = 3$ и V евклидово пространство, то подпредставление U эквивалентно представлению группы S_3, рассмотренному в примере 5.5.

Определение 5.4. Ненулевое представление $R : G \to \mathrm{GL}(V)$ называется неприводимым, если у него нет собственных подпредставлений.

Очевидно, что представление, эквивалентное неприводимому, само неприводимо.

Например, одномерное представление группы всегда неприводимо. Обратно, если группа G абелева, а поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто, то всякое неприводимое представление G над $\mathbb{K}$ одномерно (см. задачу 5.8 ниже).

Пример 5.9. Покажем, что в случае поля $\mathbb{K}$ нулевой характеристики подпредставление U мономиального представления M_n, построенное в предыдущем примере, неприводимо. Пусть $W \subset U$ - некоторое ненулевое подпредставление U, а $\mathbf{u} = \sum u_i \mathbf{e}_i \neq \mathbf{0}$ некоторый вектор из W. Так как $\sum u_i = 0$, то найдется пара $i \neq j$ такая, что $u_i \neq u_j$. Не теряя общности, можно предположить, что $\{i, j\} = \{1, 2\}$. Тогда

$$\mathbf{u} - M_n(12)\mathbf{u} = (u_1 - u_2)(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) \neq \mathbf{0},$$

то есть $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 \in W$. Для любой пары $\{i, j\}, \quad i \neq j$ существует $\sigma \in S_n$, переводящая 1 в i, а 2 - в j, тогда $M_n(\sigma)(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$, а из последних векторов можно составить базис в U. Значит, $W = U$, и, таким образом, U неприводимо.

В частности, представление примера 5.5 неприводимо (и даже его комплексификация - неприводимое представление над $\mathbb{C}$. Заметим, что при расширении основного поля представление может, вообще говоря, перестать быть неприводимым: например, представление циклической группы C_n вращениями евклидовой плоскости, будучи неприводимым (при $n > 2$) над $\mathbb{R}$, становится приводимым при комплексификации).

Пример 5.10. Докажем неприводимость трехмерного представления группы S_4 вращениями куба из примера 5.6. Из геометрических соображений ясно, что одномерных подпространств, инвариантных относительно всех вращений куба, нет. Если бы было инвариантное двумерное подпространство, то так как образ представления лежит в группе ортогональных операторов, то его ортогональное дополнение тоже было бы инвариантным, но мы только что констатировали отсутствие одномерных инвариантных подпространств. Таким образом, данное представление неприводимо.

О следующей задаче можно также прочитать в [12], гл. 11, § 1, предложение 2.

Задача 5.5. Доказать, что комплексификация нечетномерного неприводимого вещественного представления сама неприводима.

Решение. Пусть $V^{\mathbb{C}}$ - комплексификация пространства неприводимого представления $R: G \to \mathrm{GL}(V)$. Пусть $W \subset V^{\mathbb{C}}$ ненулевое инвариантное подпространство. Рассмотрим тогда его комплексно-сопряженное подпространство $\bar{W} \subset V^{\mathbb{C}}$, определенное (в наших обозначениях из раздела 2.2.) условием ($\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in W$, только если $(\mathbf{u}, -\mathbf{v}) \in \bar{W}$. Тогда из инвариантности пространства W следует инвариантность и пространства $\bar{W}$. Действительно, если $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in W \quad \Rightarrow \quad (R(g)\mathbf{u}, R(g)\mathbf{v}) \in W \quad \Rightarrow$ из $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \bar{W}$ следует $(R(g)\mathbf{u}, R(g)\mathbf{v}) \in \bar{W}$.

Теперь легко видеть, что подпространства $W \cap \bar{W}$ и $W + \bar{W}$ инвариантны относительно операторов представления и относительно комплексного сопряжения. Используя задачу 2.24 , мы видим, что они являются комплексификациями некоторых инвариантных подпространств в V. В силу неприводимости представления R эти инвариантные подпространства обязаны совпадать соответственно с нулевым подпространством $\{\mathbf{0}\} \subset V$ и всем пространством V, откуда $W \cap \bar{W} = \{\mathbf{0}\}, W + \bar{W} = V^{\mathbb{C}}$, и последняя сумма прямая. Так как, очевидно, $\dim W = \dim \bar{W}$, то $\dim V^{\mathbb{C}} = 2 \dim W$, что противоречит нечетномерности пространства V. Таким образом, мы получили противоречие с предположением о существовании нетривиального инвариантного подпространства $W \subset V$.

В качестве следствия из предыдущей задачи и примера 5.10 получаем, например, неприводимость комплексификации трехмерного вещественного представления группы S_4 из примера 5.6.

Далее следуют три несложные задачи, содержащие важнейшие общие результаты о неприводимых представлениях.

Задача 5.6. Пусть R и S - два неприводимых представления группы G. Доказать, что морфизм $\varphi: R \to S$ - либо нулевое отображение, либо эквивалентность.

Решение. Поскольку R неприводимо, то $\ker \varphi$, будучи подпредставлением в R, является несобственным. В случае, если ядро совпадает со всем пространством представления R, то морфизм нулевой. В противном случае ядро нулевое, и образ, будучи подпредставлением в S, совпадает, в силу неприводимости S, со всем пространством представления S.

Следующая задача хорошо известна как лемма Шура. Напомним, что эндоморфизмом называется морфизм в себя.

Задача 5.7. Всякий эндоморфизм неприводимого представления R над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ скалярен.

Решение. Пусть $R: G \to \mathrm{GL}(V)$ - неприводимое представление группы G над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$. Непосредственно из определения морфизма представлений следует, что оператор $\varphi: V \to V$ является эндоморфизмом представления R тогда и только тогда, когда он коммутирует со всеми операторами $R(g), \forall g \in G$. Тогда если φ - эндоморфизм, то и $\varphi - \lambda \mathrm{id}_V$ является эндоморфизмом для $\forall \lambda \in \mathbb{K}$. Выбрав в качестве λ собственное значение оператора φ (которое существует в силу алгебраической замкнутости поля $\mathbb{K}$), в силу предыдущей задачи получим, что $\varphi - \lambda \mathrm{id}_V = 0$, то есть $\varphi = \lambda \mathrm{id}_V$.

Докажем наконец упоминавшийся выше результат о неприводимых представлениях абелевых групп.

Задача 5.8. Неприводимое представление абелевой группы над алгебраически замкнутым полем одномерно.

Решение. Пусть $R: G \to \mathrm{GL}(V)$ - неприводимое представление абелевой группы G над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$. Тогда $\forall g \in G$ оператор $R(g)$ является эндоморфизмом представления R, поскольку коммутирует со всеми операторами представления (образ абелевой группы при гомоморфизме абелев). По лемме Шура все операторы представления скалярны, то есть имеют вид $\lambda \, \mathrm{id}_V$. Значит, любое подпространство в V является инвариантным, и представление будет неприводимым только при $\dim V = 1$.

Конечно, если поле не является алгебраически замкнутым, то у абелевой группы могут существовать неприводимые представления размерности больше 1 . Например, представление над $\mathbb{R}$ циклической группы C_n порядка $n > 2$ поворотами евклидовой плоскости. Заметим, что над полем $\mathbb{C}$ для конечной группы G справедливо и обратное утверждение: если всякое неприводимое представление группы G одномерно, то группа G обязательно абелева (см. задачу 5.15).

Задача 5.9. Описать с точностью до эквивалентности всевозможные неприводимые представления над полем $\mathbb{C}$ циклической группы C_n.

Решение. Пусть $R : C_n \to \mathrm{GL}(V)$ - неприводимое представление группы C_n над полем $\mathbb{C}$, тогда $\dim V = 1$. Пусть $\mathbf{v} \in V$ произвольный ненулевой вектор. Пусть g - образующий элемент группы C_n. Тогда $R(g)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, и $R(g)^n\mathbf{v} = \mathrm{id}_V \mathbf{v} = \lambda^n\mathbf{v}$, поэтому $\lambda^n = 1$, то есть λ - корень n-й степени из 1 . Соответствующее одномерное представление обозначим R_λ. Заметим, что если μ еще один корень n-й степени из единицы, $\lambda \neq \mu$, то представления R_λ и R_μ неэквивалентны. Следовательно, все неприводимые представления исчерпываются представлениями вида R_λ, которых (с точностью до эквивалентности) $n = \natural C_n$ штук.

Заметим, что конечная группа G над полем $\mathbb{C}$ имеет столько попарно неэквивалентных неприводимых представлений, сколько у нее классов сопряженных элементов. В случае абелевой группы число таких классов совпадает с порядком группы.

Задача 5.10. Пусть G - абелева группа, все элементы которой имеют конечный порядок. Доказать, что любое конечномерное представление G над $\mathbb{C}$ эквивалентно прямой сумме одномерных представлений.

Решение. Пусть $R : G \to \mathrm{GL}(V)$ - произвольное представление группы G над полем $\mathbb{C}$. Операторы $R(g)$ имеют конечный порядок и потому, согласно задаче 2.35 , диагонализируемы; кроме того, они попарно коммутируют. Тогда из задачи 2.22 следует, что для них существует общий базис из собственных векторов. Из этого с очевидностью следует требуемое.

Однако не для любой абелевой (и даже циклической) группы заключение условия предыдущей задачи верно. Действительно, возьмем $G = \mathbb{Z}$ и рассмотрим ее представление $R(n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $n \in \mathbb{Z}$. Тем не менее для ряда классов групп всякое представление над полями $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ представляется в виде прямой суммы неприводимых (которые в случае неабелевой группы не обязательно одномерны). Для конечных групп этот результат доказан в задаче 5.14.

Определение 5.11. Представление $R : G \to \mathrm{GL}(V)$ называется вполне приводимым, если у каждого инвариантного подпространства есть инвариантное прямое дополнение. Другими словами, если представление V содержит подпредставление $U \subset V$,

то существует подпредставление $W \subset V$ такое, что представление V эквивалентно прямой сумме представлений $U \otimes W$.

Заметим, что, по определению, неприводимое представление вполне приводимо.

Полезно понимать условие полной приводимости как аналог "отсутствия жордановых клеток" (размера больше 1) у оператора. Действительно, жорданова клетка $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ дает пример оператора, для которого у инвариантного подпространства $\left\langle (1,0)^T \right\rangle$ нет инвариантного дополнения.

Дадим еще пример приводимого, но не вполне приводимого представления конечной группы. Для этого возьмем циклическую группу C_p порядка p с образующим g, а в качестве V возьмем двумерное пространство над полем $\mathbb{K}$ характеристики p. Пусть $R\left(g^k\right) = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Легко проверяется, что у инвариантного подпространства $\left\langle (1,0)^T \right\rangle$ нет инвариантного дополнения.

Описание вполне приводимых представлений сильно упрощает доказательство следующего важного результата (полное доказательство см., например, в [12], гл. 11, §1).

Теорема 5.12. Представление вполне приводимо тогда и только тогда, когда оно эквивалентно прямой сумме неприводимых представлений.

Таким образом, неприводимые представления играют роль строительных блоков (или атомов) для вполне приводимых, причем принцип построения очень простой - взятие прямой суммы. Далее естественно ожидать утверждения о единственности представления в виде прямой суммы неприводимых (по поводу точных формулировок см. [12]).

Замечательно, что существует следующий общий результат, известный как теорема Машке.

Теорема 5.13. Всякое линейное представление конечной группы над полем характеристики, не делящей порядок группы, вполне приводимо.

В частности, в случае полей нулевой характеристики (таких как $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) всякое представление конечной группы G вполне приводимо.

Задача 5.14. Доказать предыдущую теорему в случае полей $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

Решение. Пусть $R : G \to \mathrm{GL}(V)$ - представление конечной группы G порядка $\nmid G$ над $\mathbb{C}$. Идея доказательства состоит в том, что если бы пространство V было бы унитарным, а образ G при гомоморфизме R лежал бы в унитарной группе, то так как для любого инвариантного подпространства унитарного оператора его ортогональное дополнение тоже инвариантно, то в этом случае для произвольного подпредставления, беря его ортогональное дополнение, мы получили бы инвариантное прямое дополнение.

Снабдим V произвольным эрмитовым скалярным произведением $\{\cdot,\cdot\}$, а затем определим новое эрмитово скалярное произведение $(\ \cdot,\cdot\ )$ по формуле

$$(\mathbf{u},\mathbf{v}):=\frac{1}{\natural G}\sum_{g\in G}\{R(g)(\mathbf{u}),R(g)(\mathbf{v})\}.$$

Покажем, что все операторы вида $R(g), g\in G$ являются унитарными относительно $(\ \cdot,\cdot\ )$. Действительно, для произвольного $h\in G$ имеем

$$(R(h)\mathbf{u},R(h)\mathbf{v})=\frac{1}{\natural G}\sum_{g\in G}\{R(h)R(g)(\mathbf{u}),R(h)R(g)(\mathbf{v})\}=$$

$$=\frac{1}{\natural G}\sum_{g\in G}\{R(hg)(\mathbf{u}),R(hg)(\mathbf{v})\}=\frac{1}{\natural G}\sum_{g\in G}\{R(g)(\mathbf{u}),R(g)(\mathbf{v})\}.$$

То есть окончательно получаем

$$(R(h)\mathbf{u},R(h)\mathbf{v})=(\mathbf{u},\mathbf{v}),$$

поскольку, когда элементы g пробегают всю группу G, элементы вида hg (где $h\in G$ - некоторый фиксированный элемент) тоже пробегают всю группу G.

В случае поля $\mathbb{R}$ доказательство полностью аналогично, если вместо эрмитова взять евклидово скалярное произведение.

С несколько иным доказательством теоремы Машке можно ознакомиться по книге [12] (гл. 11, §2).

Задача 5.15. Пусть G - конечная группа, всякое неприводимое представление которой над $\mathbb{C}$ одномерно. Доказать, что G абелева.

Решение. Во-первых, заметим, что существует линейное представление $R:G\to \mathrm{GL}(V)$, ядро которого нулевое. Например, в качестве такого V можно взять пространство, имеющее базис вида $\{\mathbf{e}_g\mid g\in G\}$, и действие операторов представления задается на базисных векторах как $R(h)\mathbf{e}_g=\mathbf{e}_{hg}$, а далее продолжается на V по линейности (это - регулярное представление, определенное в примере 5.4). Согласно предыдущей задаче, такое представление вполне приводимо, тогда по условию оно эквивалентно прямой сумме одномерных. То есть образ группы содержится в алгебре диагональных (в соответствующем базисе) матриц, которая коммутативна.

Следующий важный класс представлений можно рассматривать как аналог диагонализируемых операторов с различными собственными значениями.

Определение 5.16. Вполне приводимое представление называется представлением с простым спектром, если оно является прямой суммой попарно неэквивалентных неприводимых представлений.

Задача 5.17. Пусть $R:G\to \mathrm{GL}(V)$ - вполне приводимое представление с простым спектром над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$. Пусть $R=R_1\oplus\ldots\oplus R_m$ - его разложение в прямую сумму попарно неэквивалентных неприводимых представлений $R_i:G\to \mathrm{GL}\left(V_i\right), V=V_1\oplus\ldots\oplus V_m$. Тогда всякий эндоморфизм φ представления R имеет вид

$$\varphi(\mathbf{v})=\sum_i\lambda_i\mathbf{v}_i,\quad \text{где } \mathbf{v}=\sum_i\mathbf{v}_i,\quad \mathbf{v}_i\in V_i$$

для некоторых $\lambda_i\in\mathbb{K}$. Другими словами, ограничение φ на каждую неприводимую компоненту является скалярным оператором.

Решение. Пусть $\psi_{ij}:V_i\to V_j$ есть композиция ограничения $\varphi|_{V_i}:V_i\to V=V_1\oplus\ldots\oplus V_m$ с проекцией $\pi_j:V=V_1\oplus\ldots\oplus V_m\to V_j$ на j-е прямое слагаемое. Легко видеть, что ψ_{ij} определяет морфизм представлений $R_i\to R_j$. Так как представления R_i,R_j

неприводимы, то, согласно задаче $5.6, \psi_{ij}$ - либо нулевое отображение, либо эквивалентность. Так как представление R имеет простой спектр, то R_i неэквивалентно R_j при $i\neq j$, и в этом случае $\psi_{ij}=0$. Из этого легко видеть, что морфизм φ сохраняет неприводимые компоненты. Если же $i=j$, то по лемме Шура $\psi_{ii}=\lambda_i\mathrm{id}_{V_i}$ для некоторого $\lambda_i\in\mathbb{K}$, откуда все и следует.

В заключение приведем одну классическую задачу, см. [23], которая подводит итог нашему краткому введению в теорию представлений групп.

Задача 5.18. В лаборатории одного института лежит модель куба. Один из сотрудников занумеровал грани куба цифрами $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Другой, придя в институт на следующий день, заменил каждое число на среднее арифметическое соседних чисел. Первый, заметив это, на другой день ответил тем же. Какие числа окажутся на гранях куба через месяц, если известно, что оба сотрудника ходят в институт через день?
Решение. Пусть $V-6$-мерное пространство комплекснозначных функций, постоянных на гранях куба. Действие группы S_4 вращений куба на множестве его граней определяет линейное представление $R: S_4 \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ (см. пример 5.4).

Попробуем разложить представление R на неприводимые компоненты. Легко видеть, что подпространства четных функций (принимающих равные значения на противоположных гранях куба) и нечетных функций (принимающих равные по модулю, но разного знака значения) инвариантны относительно представления R, и, следовательно, R разлагается в прямую сумму представлений R_e и R_o. В свою очередь, среди четных функций содержатся константы, которые образуют одномерное подпредставление R_c в R_e. Это последнее имеет в R_e дополнительное подпредставление R_e^0, пространство которого состоит из четных функций с суммой значений 0 .

Оказывается, что представления R_e^0, R_o группы S_4 неприводимы (R_c неприводимо, поскольку одномерно). Таким образом, $R=R_c \oplus R_e^0 \oplus R_o$ - разложение представления R в прямую сумму неприводимых [50]. В частности, мы видим, что R - представление с простым спектром.

Докажем неприводимость представления R_e^0. Для этого заметим, что представление R_e эквивалентно представлению, полученному композицией сюръективного гомоморфизма $S_4 \rightarrow S_3$ (задаваемого действием группы вращений куба перестановками на множестве из трех пар противоположных граней) с мономиальным представлением группы S_3 (над $\mathbb{C}$, см. пример 5.3), причем $R_e=R_c \oplus R_e^0$ отвечает разложению мономиального представления на неприводимые компоненты, полученному в примерах 5.8 и 5.9. Для этого в качестве базиса в пространстве представления R_e нужно рассмотреть функции, принимающие значение 1 на некоторой паре противоположных граней и 0 на остальных гранях.

Представление R_o также неприводимо, так как оно эквивалентно комплексификации представления S_4 вращениями куба. Покажем это. Отложим базисные векторы ортонормированного базиса от центра куба со стороной 2 так, чтобы базисные векторы были перпендикулярны соответствующим граням куба. Пусть конец базисного вектора e_i лежит на грани F_i, а $F_i^{\prime}$ - противоположная грань ($i=1,2,3$). Пусть g_i - функции из пространства представления R_o, равные 1 на грани $F_i,-1$ - на грани $F_i^{\prime}$ и 0 на остальных гранях. Теперь очевидно, что представление R_o группы S_4 на нечетных функциях - то же (точнее, эквивалентно), что и представление группы S_4 поворотами трехмерного пространства, оставляющими куб инвариантным (как подмножество).

Далее, отображение $\varphi: V \rightarrow V$, сопоставляющее функции $f \in V$ новую функцию $\varphi(f)$, значение которой на каждой грани равно среднему арифметическому значений f на соседних гранях, является линейным оператором. Ключевое наблюдение состоит в том, что оператор φ перестановочен (т.е. коммутирует) со всеми элементами $R(g) \in \mathrm{GL}(V), g \in S_4$, то есть

$$
R(g)(\varphi(f))=\varphi(R(g) f) \forall g \in S_4, f \in V .
$$

Последнее следует из того, что повороты сохраняют отношение смежности граней. Другими словами, φ является эндоморфизмом представления R. Теперь, применяя утверждение условия задачи 5.17, получаем, что ограничения φ на неприводимые компоненты R_c, R_e^0 и R_o представления R являются скалярными операторами. Вычисляя соответствующие скалярные множите-

ли, получаем: $\lambda_c=1, \lambda_e^0=-1/2, \lambda_o=0$. Отсюда, возвращаясь к условию задачи, получаем, что постоянная компонента исходной функции (равная среднему арифметическому значений по всем граням, то есть 3,5) не меняется при итерациях оператора φ, нечетная компонента после первой итерации обнуляется, а четная с нулевой суммой быстро убывает (при каждой итерации умножаясь на $-1/2$). Таким образом, с хорошей точностью ответ - постоянная функция, равная среднему арифметическому (то есть 3,5).

[250] Ниже мы даем геометрическое доказательство этого факта. Более простое и естественное доказательство опирается на понятие характера представления и дано в книге [12], гл. 11, §4, пример 7.

8.6.3 5.3. О бесконечномерном случае

Настоящая работа посвящена преимущественно случаю конечномерных линейных пространств, которые и являются предметом рассмотрения курса линейной алгебры. Бесконечномерные линейные пространства заметно отличаются по своим свойствам от конечномерных и изучаются в курсе функционального анализа. В прикладных задачах и других математических дисциплинах бывают нужны и конечномерные, и бесконечномерные пространства, поэтому предостережем читателя от скоропалительных суждений о "полезности" тех или иных изучаемых разделов математики. Отметим только, что в любой параграф настоящего пособия можно добавить ссылки на самые современные работы, посвященные решению конкретных прикладных задач, в которых используются средства линейной алгебры. То же самое можно сделать и с функциональным анализом.

Приведем, однако, некоторые примеры отличия бесконечномерных пространств от конечномерных. Первые проблемы начинаются уже с понятием базиса пространства.

Пусть V - некоторое векторное пространство, не являющееся, вообще говоря, конечномерным. В линейной алгебре базисом в V называется семейство векторов из V такое, что произвольный вектор $\mathbf{v} \in V$ однозначно представляется в виде конечной линейной комбинации векторов из этого семейства. Однако в функциональном анализе обычно рассматривают векторные пространства (над полями $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$) с дополнительными структурами (такими как норма), которые позволяют придавать смысл некоторым бесконечным линейным комбинациям, как мы сейчас продемонстрируем.

Определение 5.19. Нормой в векторном пространстве V называется функция $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$, обладающая свойствами:

1. $\|\mathbf{v}\| > 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$;
2. $\|\lambda\mathbf{v}\| = |\lambda|\|\mathbf{v}\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \mathbf{v} \in V$;
3. $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\| \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ ("неравенство треугольника").

Пара $(V, \|\cdot\|)$, состоящая из векторного пространства и заданной на нем нормы, называется нормированным пространством.

Например, длина вектора $|\mathbf{v}|$ евклидова пространства V является нормой. Свойства 1) - 3) из теоремы 3.40 показывают, что операторная норма является нормой на векторном пространстве ограниченных линейных операторов.

Определение 5.20. Последовательность $\{\mathbf{v}_n\}$ векторов нормированного пространства ($V, \|\cdot\|$) называется сходящейся к вектору $\mathbf{v} \in V$, если

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_n\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

В частности, если $\{\mathbf{u}_n\}$ - последовательность векторов пространства $(V, \|\cdot\|)$, то $\mathbf{v}$ есть сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{u}_k$, если последовательность частичных сумм $\mathbf{v}_n := \sum_{k=1}^{n} \mathbf{u}_k$ сходится к $\mathbf{v}$.

Простым следствием определений является тот факт, что предел сходящейся последовательности векторов нормированного пространства определен однозначно.

Для нормированных пространств можно попытаться изменить приведенное выше понятие базиса с учетом возможности разложения векторов в бесконечные линейные комбинации. Так мы приходим к следующему определению.

Определение 5.21. Последовательность векторов $\{\mathbf{e}_k\}$ нормированного пространства ($V, \|\cdot\|$) называется базисом Шаудера в $(V, \|\cdot\|)$, если для всякого вектора $\mathbf{v} \in V$ существует единственная числовая последовательность $\{\lambda_k\}$ такая, что

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \mathbf{e}_k \tag{75}$$

где сходимость ряда понимается в том смысле, что

$$\left\| \mathbf{v} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbf{e}_k \right\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

Заметим, что сходимость ряда (75) не предполагается абсолютной, поэтому существенно, что базисом Шаудера называется именно последовательность векторов, то есть эти векторы упорядочены.

Чтобы отличить "обычные" базисы от базисов Шаудера, в функциональном анализе первые называют базисами Гамеля. В любом векторном пространстве существует базис Гамеля (в бесконечномерном случае доказательство опирается на аксиому выбора), причем любые два базиса в одном и том же пространстве имеют одинаковую мощность.

Как видно, принципиальное отличие базиса Гамеля от базиса Шаудера состоит в количестве суммируемых векторов. Для базиса Гамеля оно строго конечно, а для базиса Шаудера счётно.

Наиболее полную теорию удается построить для полных нормированных пространств, называемых банаховыми. Напомним, что метрическое (в частности, нормированное) пространство называется полным, если всякая фундаментальная последовательность его элементов имеет предел, также принадлежащий этому пространству.

Нетрудно видеть [51], что нормированное пространство, обладающее базисом Шаудера, обязательно сепарабельно (то есть имеет счетное всюду плотное подмножество). Заметим, что не во всяком сепарабельном банаховом пространстве есть базис Шаудера. Это так называемая проблема Банаха-Шаудера, решенная П. Энфло во второй половине XX века.

Среди нормированных пространств наиболее "хорошими" являются пространства, чья норма $\|\cdot\|$ происходит из некоторого скалярного произведения, то есть $\|\mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{v}, \mathbf{v})$.
Замечание. Интересный вопрос: как охарактеризовать нормированные пространства V, чья норма происходит из скалярного произведения? Нетрудно видеть, что необходимым условием яв-
ляется следующее тождество параллелограмма:

$$\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 + \|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2 = 2\|\mathbf{v}\|^2 + 2\|\mathbf{w}\|^2 \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V.$$

Теорема Йордана-фон Нойманна утверждает, что это условие является и достаточным (см., например, [33], гл. 2, §12).

Рассмотрим евклидово (унитарное) пространство V со счетным базисом Гамеля $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots\}$, который можно считать ортонормированным (иначе применим к нему алгоритм ортогонализации). Таким образом, элементы V можно отождествить с последовательностями

$$\mathbf{x} := (x_1, x_2, \ldots), \quad x_k \in \mathbb{R} \quad (\text{ или } \quad x_k \in \mathbb{C}),$$

причем $x_k \neq 0$ только для конечного числа индексов $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$$

(ряд справа всегда сходится, т.к. содержит только конечное число ненулевых слагаемых). Главный недостаток данного пространства состоит в том, что оно не полно, то есть не банахово.

Задача 5.22. Привести пример фундаментальной последовательности векторов из V, которая не сходится по норме ни к какому элементу из V.

Решение. Рассмотрим, например, последовательность $\{\mathbf{x}_n\}$ следующего вида: $\mathbf{x}_n = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^{n-1}}, 0, \ldots\right) \in V$. Покажем, что она фундаментальна. Например, при $m > n$ имеем

$$\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n\|^2 = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{m-1}} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

Таким образом, $\forall \varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall m, n > N \; \|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n\| < \varepsilon$, что и означает фундаментальность.

Пусть $\mathbf{x} := \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n$. Из сходимости по норме следует, что для всякого $k \in \mathbb{N}$ последовательность k-х координат векторов $\mathbf{x}_n$ сходится к k-й координате вектора $\mathbf{x}$. Тогда $\mathbf{x} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots\right)$ последовательность, у которой бесконечно много элементов не равно нулю, и легко видеть, что она не принадлежит пространству V.

Чтобы из неполного метрического (в частности, нормированного) пространства получить полное, в математике существует специальная операция, называемая пополнением. Мы не будем ее здесь приводить, отметим лишь, что она обобщает построение поля действительных чисел с помощью фундаментальных последовательностей рациональных. Применяя эту операцию к нашему пространству V, мы получаем некоторое полное нормированное пространство $\bar{V}$, содержащее V в качестве плотного подмножества. Это пространство имеет стандартное обозначение ℓ_2 и состоит

[251] Рассматривая конечные линейные комбинации элементов базиса Шаудера с рациональными коэффициентами.

из всех (вещественных или комплексных) последовательностей $(x_1, x_2, \dots)$ таких, что ряд $\sum_k |x_k|^2$ сходится.

Задача 5.23. 1) Доказать, что для векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots)$ из пространства ℓ_2 ряд $\sum_i x_i y_i$ (или $\sum_i x_i \bar{y}_i$ в унитарном случае) абсолютно сходится.
2) Доказать, что ℓ_2 является векторным пространством относительно очевидных операций сложения и умножения на число.

Решение. Абсолютная сходимость рядов следует из числового неравенства $|ab| \leq \frac{1}{2}\left(|a|^2 + |b|^2\right)$. Пункт 2) следует из пункта 1).

Полнота пространства ℓ_2 доказывается в стандартных учебниках функционального анализа (см., например, [24]). Заметим, что из этого факта и задачи 5.22 следует, что мощность базиса Гамеля в ℓ_2 строго больше счетной (можно показать, что базис Гамеля пространства ℓ_2 имеет континуальную мощность).

Для $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \ell_2$ определим их скалярное произведение как $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_i x_i y_i$ (или $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_i x_i \bar{y}_i$ в унитарном случае) и норму $\|\mathbf{x}\|^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x})$. Тогда ℓ_2 превращается в евклидово (соотв. унитарное) пространство.

Определение 5.24. Полное евклидово (унитарное) бесконечномерное пространство называется вещественным (комплексным) гильбертовым пространством.

Таким образом, пространство ℓ_2 суммируемых с квадратом вещественных (комплексных) последовательностей является примером вещественного (комплексного) гильбертова пространства.

Легко видеть, что набор "стандартных" векторов $\{\mathbf{e}_n\}$, имеющих вид $\mathbf{e}_n = (0, \dots 0, 1, 0, \dots)$ (единица на n-м месте), образует базис Шаудера в ℓ_2. В частности, сразу получаем, что пространство ℓ_2 сепарабельно.

Имеет место следующая важная теорема.

Теорема 5.25. Любые два сепарабельных вещественных (комплексных) гильбертовых пространства изоморфны.

То есть если V и W - два сепарабельных гильбертова пространства над одним и тем же полем со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_V$ и $(\cdot,\cdot)_W$ соответственно, то существует линейный изоморфизм $\varphi : V \to W$ такой, что
$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\varphi(\mathbf{u}), \varphi(\mathbf{v}))_W \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

Другой пример (комплексного) гильбертова пространства возникает при рассмотрении функций $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ на некотором отрезке $[a, b]$, для которых конечен интеграл Лебега $\int_a^b |f(t)|^2 dt$. Для определенности в качестве отрезка возьмем $[-\pi, \pi]$. Элементами гильбертова пространства $L_2[-\pi, \pi]$ являются классы следующего отношения эквивалентности на множестве таких функций: две функции эквивалентны, если они различаются на множестве нулевой меры. Скалярное произведение в $L_2[-\pi, \pi]$ задается формулой
$$(f, g) := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \bar{g}(t) dt$$

(таким образом, $\|f\|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$).

Замечание. Необходимость рассмотрения интеграла Лебега вместо интеграла Римана связана с тем, что предел сходящейся по указанной норме последовательности интегрируемых по Риману функций, вообще говоря, не интегрируем по Риману, а интегрируемых по Лебегу - интегрируем по Лебегу, то есть пространство $L_2[-\pi, \pi]$ полно.

Можно показать, что пространство $L_2[-\pi, \pi]$ сепарабельно, причем в качестве ортонормированного базиса Шаудера в нем может быть выбрана последовательность периодических функций
$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots \right\}.$$

В теории гильбертовых пространств такие системы функций называются полными ортонормированными системами (термин "полная" в применении к ортонормированной системе означает, что ее линейная оболочка всюду плотна в $L_2[-\pi, \pi]$).

Таким образом, согласно приведенной выше теореме, гильбертово пространство $L_2[-\pi, \pi]$ изоморфно комплексному пространству ℓ_2, причем изоморфизм можно задать отображением базисных векторов

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \mapsto (1,0,\ldots), \cos t \mapsto (0,1,0,\ldots), \sin t \mapsto (0,0,1,0,\ldots), \ldots$$

Здесь ситуация полностью аналогична случаю конечномерных евклидовых (унитарных) пространств: там у нас было "эталонное" координатное евклидово (унитарное) пространство $\mathbb{R}^n$ (соотв. $\mathbb{C}^n$), скалярное произведение в котором задавалось формулой $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ (соотв. $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k$), причем если V - еще какое-то евклидово (унитарное) n-мерное пространство, то любой выбор ортонормированного базиса в V определяет его изоморфизм с $\mathbb{R}^n$ (соотв. с $\mathbb{C}^n$).

Другой пример полной ортонормированной системы функций в $L_2[-\pi,\pi]$ можно получить, производя ортогонализацию последовательности мономов $\{1,t,t^2,\ldots\}$. Это определит еще один изоморфизм с координатным пространством ℓ_2.

Легко понять, что $L_2[-\pi,\pi] = H_0 \oplus H_1$ - ортогональная прямая сумма замкнутых подпространств четных H_0 и нечетных H_1 функций (точнее, классов эквивалентности функций). Пространства H_0 и H_1 сами являются гильбертовыми пространствами с полными ортонормированными системами $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos t, \cos 2t, \ldots\right\}$ и $\{\sin t, \sin 2t, \ldots\}$ соответственно. В частности, мы имеем изоморфизм гильбертовых пространств

$$\ell_2 \to H_1, \quad \mathbf{x} = (x_1,x_2,\ldots) \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} x_k \sin kt, \tag{76}$$

сохраняющий скалярные произведения (в частности, нормы векторов).

Напомним, что если $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ - ортонормированный базис в n-мерном евклидовом пространстве V, то коэффициенты разложения произвольного вектора $\mathbf{v} \in V$ по нему даются равен-

ствами $v_k = (\mathbf{v},\mathbf{e}_k)$. Оказывается, что эти же формулы применимы для нахождения коэффициентов разложения вектора по полной ортонормированной системе в гильбертовом пространстве. Мы не будем здесь доказывать этот результат. Отметим лишь, что из него следует, что обратный к (76) изоморфизм $H_1 \to \ell_2$ задается следующим образом:

$$H_1 \ni f \mapsto \{x_k\} \in \ell_2, \quad \text{где} \quad x_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt dt, \tag{77}$$

причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \tag{78}$$

Для функции $f \in H_1$ коэффициенты x_k, определяемые по формулам (77), называются коэффициентами Фурье, а рядом Фурье называют ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k \sin kt$. Равенство (78) называется равенством Парсеваля. Оно выполняется для любой полной ортонормированной системы.

Задача 5.26. Найти в пространстве нечетных функций H_1 норму функции $f(t) = t$, рассматриваемой как функцию на отрезке $[-\pi,\pi]$, а также ее разложение в ряд Фурье. Выяснить смысл равенства Парсеваля для этого случая.

Решение. По формулам (77)

$$x_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin kt dt = -\frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi} t d\cos kt = -\frac{1}{\pi k} t\cos kt\Big|_{-\pi}^{\pi} +$$
$$+\frac{1}{\pi k^2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt d(kt) = \frac{(-1)^{k+1}2}{k}$$

Значит,

$$t = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kt$$

Таким образом, равенство $\|f\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2$ дает нам следущее:

$$4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t^2dt=\frac{2\pi^2}{3}$$

Тем самым мы получили формулу (Л. Эйлер, 1734)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

для суммы ряда из обратных квадратов натуральных чисел. □

Рассмотрим бесконечную матрицу $A=(a_{ij})\,, i,j\in\mathbb{N}$, с матричными элементами

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если } |i-j|=1;\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

В пространстве ℓ_2 она определяет ограниченный [52] линейный оператор, действующий на базисных векторах следующим образом:

$$A\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_2, A\mathbf{e}_k=\mathbf{e}_{k-1}+\mathbf{e}_{k+1}, k>1.$$

Задача 5.27. Покажите, что при изоморфизме (76) оператор A переходит в оператор умножения на функцию $2\cos t$ в пространстве H_1.

Решение. Оператор A переходит в оператор φ, действующий на полной ортонормированной системе $\{\sin kt\}$ в гильбертовом пространстве H_1 по формулам

$$\varphi(\sin t)=\sin 2t,\quad \varphi(\sin kt)=\sin(k+1)t+\sin(k-1)t, k>1.$$

Теперь результат следует из тригонометрического тождества

$$\sin(k+1)t+\sin(k-1)t=2\cos t\sin kt.$$

□

Комментарий. Этот пример поучителен тем, что у оператора A нет собственных векторов. Он показывает, что понятие спектра оператора в бесконечномерном случае должно быть модифицировано. При "правильном" определении спектра A он состоит из всех $\lambda\in[-2,2]$, то есть заполняет целый отрезок (т.к. A, очевидно, самосопряжен, его спектральный радиус совпадает с операторной нормой).

[52] Можно показать, что его норма равна 2.

Напомним (см. определение 3.39), что оператор называется ограниченным, если его норма ограничена, и неограниченным в противоположном случае. Выше мы доказали, что в конечномерном пространстве любой линейный оператор ограничен. Напомним, что доказательство этого факта опирается на компактность единичной сферы. В бесконечномерном нормированном пространстве единичная сфера уже не будет компактна, за подробностями отошлем интересующегося читателя к любому учебнику функционального анализа, например, [24]. Из некомпактности сферы следует, что существуют неограниченные операторы (на самом деле, в любом бесконечномерном пространстве существуют неограниченные операторы), причем многие чрезвычайно полезные операторы, например оператор дифференцирования, не будут ограниченными в "стандартных" нормах.

Задача 5.28. Докажите, что оператор дифференцирования не ограничен в пространстве $C^{\infty}[0;1]$ бесконечно дифференцируемых функций на отрезке $[0;1]$ с нормой

$$\|f\|^2=\int_0^1 f^2(t)dt$$

Решение. Выберем сначала удобное множество векторов с единичной нормой. Имеем

$$\left\|\sqrt{2n+1}t^n\right\|^2=(2n+1)\int_0^1 t^{2n}dt=1$$

Обозначим для удобства $a_n(t):=\sqrt{2n+1}t^n$. Как мы выяснили, $\|a_n\|=1$. Теперь подействуем на элементы a_n оператором дифференцирования:

$$a_n'(t)=n\sqrt{2n+1}t^{n-1}$$

Вычислим теперь норму a_n' :

$$\|a_n'\|^2=n^2(2n+1)\int_0^1 t^{2n-2}dt=\frac{n^2(2n+1)}{2n-1}$$

И при $n \to \infty$ легко видеть, что $\|a'_n\| \to \infty$, а значит, оператор дифференцирования не ограничен.

Существование неограниченных операторов приводит, например, к тому, что нельзя переставлять линейный оператор и предел, то есть для неограниченного оператора A и сходящейся последовательности $\{b_n\}$, вообще говоря, $A \lim b_n \neq \lim (Ab_n)$. Более того, предел в правой части вообще не обязан существовать.

Задача 5.29. Приведите пример линейного оператора A и сходящейся последовательности $\{b_n\}$ такой, что последовательность $\{Ab_n\}$ не ограничена.

Решение. Продолжая пример из предыдущей задачи, рассмотрим последовательность $\{b_n\}$, где

$$b_n(t) := t^n$$

Заметим, что $\|b_n\|^2 = \frac{1}{2n+1} \to 0$. То есть последовательность сходится к 0 . Применив к этой последовательности (неограниченный, как мы выяснили) оператор дифференцирования, получим

$$b'_n(t) = nt^{n-1}$$

И тогда $\|b'_n\|^2 = \frac{n^2}{2n-1}$, а эта последовательность уже не ограничена.

Таким образом, $A\left(\lim b_n\right) = 0$, но $\lim \left(Ab_n\right)$ - вообще не существует.

Комментарий. Неприятным следствием неограниченности оператора дифференцирования и вообще особенностью бесконечномерных пространств является то, что условия, при которых функциональный ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать, достаточно сложны. Вообще, многие трудности, с которыми читатель столкнется в курсе математического и функционального анализа, касающиеся вопросов сходимости, происходят именно из неограниченности в "стандартных нормах" полезного и хорошо знакомого оператора дифференцирования. Решать данную проблему приходится путем выбора подходящих норм и правильных пространств, между которыми действует оператор дифференцирования. Заинтересованному читателю посоветуем почитать литературу по пространствам Соболева и вообще функциональному анализу, например, [24].

Part IV
Special Linear Algebra in a Nutshell

9 Specific Theoretical Properties

9.1 Special properties of matrices

9.1.1 complex and large matrices (!?)

9.1.2 Atypical determinants

(см. Ершова темы, там есть задачи про это, потом продумаю. редко нужные они на самом деле, но интересные)

Определитель в модели Борна-Инфельда

(про преобразование его тут тоже укажу, вопрос пока что)

9.1.3 Matrix decompositions

(приведу это, не самая частая тема)

9.2 On the algebraic properties of linear algebra

9.2.1 5 Rings, Fields

5.1 Reversible Elements and Zero Dividers

Предложение

5.1. Пусть R - ассоциативное кольцо с единицей. Тогда множество обратимых (по умножению) элементов R^* в R образует группу по умножению.

Предложение

5.6. Обратимый элемент не может быть делителем нуля.

5.2 Ring of Polynomials Above the Field

Аналогично алгебре многочленов от одной переменной $\mathbb{K}[x]$ можно определить алгебру многочленов от n переменных $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Для этого рассмотрим векторное пространство V над $\mathbb{K}$ с базисом $e_{k_1 k_2 \ldots k_n}, k_i \geq 0$. Зададим правило умножения базисных векторов

$$e_{k_1 k_2 \ldots k_n} e_{l_1 l_2 \ldots l_n} = e_{k_1+l_1 k_2+l_2 \ldots k_n+l_n}$$

и продолжим его по билинейности на их конечные линейные комбинации. Ясно, что определенное таким образом умножение ассоциативно, коммутативно и $e_{00\ldots0}$ играет роль единицы. Обозначая $x_1 := e_{10\ldots0}, x_1 := e_{010\ldots0}, \ldots, x_n := e_{00,\ldots01}$, получаем $e_{k_1 k_2 \ldots k_n} = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$ и приходим к обычной записи многочлена от n переменных

$$f = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n \geq 0} a_{k_1 k_2 \ldots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$$

в которой только конечное число коэффициентов $a_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ отлично от нуля.

Теорема

5.10. Если поле $\mathbb{K}$ бесконечно, то разные многочлены над $\mathbb{K}$ определяют разные функции.

Теорема

5.12. Пусть $f, g \in \mathbb{K}[x]$, причем $g \neq 0$. Тогда существуют такие многочлены q и r, что $f = qg + r$ и либо $r = 0$, либо $\deg r < \deg g$. Многочлены q и r определены этими условиями однозначно.

5.3 General Properties of Polynomial Roots

Элемент c поля $\mathbb{K}$ называется корнем многочлена $f \in \mathbb{K}[x]$ (или соответствующего алгебраического уравнения $f(x) = 0$), если $f(c) = 0$. Из Теоремы Безу (см. предыдущий параграф) следует

Теорема

5.13. Элемент с поля $\mathbb{K}$ является корнем многочлена $f \in \mathbb{K}[x]$ тогда и только тогда, когда f делится на $x - c$.
Этим можно воспользоваться для доказательства следующей теоремы.

Теорема

5.14. Число корней ненулевого многочлена не превосходит его степени.

Теорема

5.16. Число корней ненулевого многочлена с учётом их кратностей не превосходит степени многочлена, причём равенство имеет место тогда и только тогда, когда этот многочлен раскладывается на линейные множители.

Предложение

5.17. Если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то коэффициенты разложения $f \in \mathbb{K}[x]$ по степеням $x - c$ могут быть найдены по формулам

$$b_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}$$

Теорема

5.18. Если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то кратность корня с многочлена $f \in \mathbb{K}[x]$ равна наименьшему порядку производной многочлена f, не обращающейся в нуль в точке .

5.4 Polynomials over the Fields $\mathbb{C}$ and $\mathbb{R}$

Теорема

5.20. Всякий многочлен положительной степени над полем $\mathbb{C}$ имеет корень.

Следствие

5.21. В кольце $\mathbb{C}[x]$ всякий ненулевой многочлен раскладывается на линейные множители.

Следствие

5.22. Всякий многочлен степени n над $\mathbb{C}$ имеет n корней с учетом кратностей.

Теорема

5.23. Пусть $f \in \mathbb{R}[x]$ и $\in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ - корень f, то и комплексно сопряженное $\bar{c}$ также является корнем f, причем той же кратности что и с.

5.5 Euclidean Rings

Определение

5.27. Коммутативное ассоциативное кольцо с единицей и без делителей нуля называется целостным кольцом (или областью целостности).

Определение

5.28. Целостное кольцо A, не являющееся полем, называется евклидовым, если существует функция

$$N : A \backslash \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$$

(называемая (евклидовой) нормой), удовлетворяющая следующим условиям:

1. $N(ab) \geq N(a)$, причем равенство имеет место только тогда, когда элемент b обратим;
2. для любых $a, b \in A$, где $b \neq 0$, существуют такие $q, r \in A$, что $a = qb + r$ и либо $r = 0$, либо $N(r) < N(b)$.

Теорема

5.32. В евклидовом кольце для любых двух элементов a, b существует наибольший общий делитель d, и он может быть представлен в виде $d = au + bv$, где u, v - какие-то элементы кольца.

Определение

5.34. Необратимый ненулевой элемент p целостного кольца называется простым, если его нельзя представить в виде $p = ab$, где a и b - необратимые элементы.

Lemma

5.36. Если простой элемент p кольца A делит произведение $a_1 a_2 \ldots a_n$, то он делит хотя бы один из сомножителей $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Теорема

5.37. В евклидовом кольце всякий необратимый ненулевой элемент может быть разложен на простые множители, причем это разложение единственно с точностью до перестановки множителей и умножения их на обратимые элементы. (Говоря о разложении на простые множители мы не исключаем разложения, состоящего только из одного множителя).

Предложение

5.39. Существуют сколь угодно длинные отрезки натурального ряда, не содержащие простых чисел.

5.6 Deduction Class Rings

Напомним, что определение кольца классов вычетов $\mathbb{Z}_n$ по модулю n дано в Примере 1.51. Это - ассоциативное коммутативное кольцо с единицей.

Предложение

5.41. Элемент $[k] \in \mathbb{Z}_n$ обратим $\Leftrightarrow (k, n) = 1$.

Следствие 5.42.

$|\mathbb{Z}_n^*| = \phi(n)$, где ϕ - функция Эйлера.

Предложение

5.49. Пусть $(k, l) = 1, n := kl$. Тогда отображение
$$\varphi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}_l, \quad [a]_n \mapsto ([a]_k, [a]_l)$$
является изоморфизмом колец.

5.7 Fields

Предложение

5.51. Любое поле характеристики p содержит подполе, изоморфное $\mathbb{Z}_p$. Любое поле характеристики 0 содержит подполе, изоморфное $\mathbb{Q}$.

Задача

5.52. Докажите, что группа $\mathbb{Z}$ не изоморфна аддитивной группе никакого векторного пространства.

Предложение

5.53.
Мощность конечного поля является степенью простого числа (его характеристики).
На самом деле, для любого простого p и натурального n существует поле из p^n элементов и оно единственно с точностью до изоморфизма. Мы не будем доказывать этот общий результат, ограничившись ниже построением поля из p^2 элементов.

Теорема

5.55. Конечная подгруппа мультипликативной группы $\mathbb{K}^*$ любого поля $\mathbb{K}$ (в частности, мулвтипликативная группа любого конечного поля) является циклической.

Lemma

5.56. Пусть H - такая конечная группа порядка n, что для любого $d|n$
$$\natural \left\{ x \in H | x^d = 1 \right\} \leq d$$
(здесь $\natural S$ обозначает мощность множества S). Тогда H - циклическая группа.

Предложение

5.57. (ср. Задачу 2.21) Пусть элемент $\alpha \in \mathbb{K}^*$ не является квадратом. Тогда множество матриц,

$$\left\{ \left(\begin{array}{cc} a & \alpha b \\ b & a \end{array} \right) \middle| \ a, b \in \mathbb{K} \right\} \subset \mathrm{Mat}_2(\mathbb{K}) \tag{43}$$

является полем, содержащим $\mathbb{K}$ в качестве подполя и являющимся 2 -мерным векторным пространством над $\mathbb{K}$.

9.2.2 Basis, Linear Dependence, Dimensions, Coordinates

Properties of a basis

Lemma

6.1. Система векторов $\{v_1, \ldots, v_m\}$ линейного пространства V (см. Определение1.61) линейно зависима тогда и только тогда, когда (хотя бы) один из ее векторов представляется в виде линейной комбинации остальных.

Lemma

6.2. Пусть система векторов $\{v_1, \ldots, v_m\}$ линейного пространства V линейно независима. Тогда для $u \in V$ существует представление $u = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$ тогда и только тогда, когда система $\{v_1, \ldots, v_m, u\}$ линейно зависима.

Lemma

6.3. Пусть $u = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$; тогда такое разложение единственно тогда и только тогда, когда система $\{v_1, \ldots, v_m\}$ линейно независима.

Предложение

6.4. (Основная лемма о линейной зависимости). Если векторы $u_1, \ldots, u_n$ линейного пространства V линейно выражаются через векторы $v_1, \ldots, v_m$ того же пространства, причем $n > m$, то (какова бы ни была система $\{v_1, \ldots, v_m\}$) система векторов $\{u_1, \ldots, u_n\}$ линейно зависима.

Определение

6.6. Линейной оболочкой подмножества $S \subset V$ называется множество всех векторов из V, представимых в виде (конечных!) линейных комбинаций элементов из S. Линейная оболочка обозначается $\langle S \rangle$.

Определение

6.8. Пространство V называется конечномерным, если оно порождается некоторым своим конечным подмножеством.

Теорема

6.9. Из всякого конечного порождающего множества S пространства V можно выбрать базис пространства V.

Теорема

6.11. Все базисы конечномерного линейного пространства V содержат одно и то же число векторов.

Определение

6.12. Размерностью конечномерного векторного пространства V называется число элементов его произвольного базиса.

Предложение

6.16. Пусть $S \subset V$ - произвольное (конечное или бесконечное) подмножество в $V, \dim V = n < \infty$. Тогда любое линейно независимое подмножество T в S можно дополнить до максимального линейно независимого подмножества в S.

Предложение

6.17. Любое максимальное линейно независимое подмножество $\{e_1, \ldots, e_k\}$ в S является базисом в линейной оболочке $\langle S \rangle$.

Теорема

6.18. Всякую линейно независимую систему векторов конечномерного векторного пространства V можно дополнить до базиса в V.

Теорема

6.19. (Свойство монотонности размерности). Если U - линейное подпространство в V, то $\dim U \leq \dim V$, причем если $\dim U = \dim V$, то $U = V$.

Lemma 6.20. (Лемма Штайница)

Пусть система векторов $\{u_1, \ldots, u_n\}$ порождает пространство V, а система $\{v_1, \ldots, v_m\}$ векторов из V линейно независима. Тогда $n \geq m$.

6.4 Coordinates of the Vector in the Basis

Предложение

6.52. Сопоставление каждому вектору n-мерного линейного пространства V его координатного столбца в фиксированном базисе $e := \{e_1, \ldots, e_n\}$ задает биекцию

$$\varphi_e : V \to \mathbb{K}^n, \quad \varphi_e(v) = (v_1, \ldots, v_n)^T$$

пространства V с пространством столбцов $\mathbb{K}^n$ высоты n. Кроме того, данная биекция сохраняет операции: $\varphi_e(u+v) = \varphi_e(u) + \varphi_e(v)$ (координатный столбеи суммы векторов равен сумме координатных столбцов слагаемых) и $\varphi_e(\lambda v) = \lambda \varphi_e(v)$ (координатный столбеи произведения вектора на скаляр равен произведению координатного столбца вектора на тот же скаляр).

Следствие

6.53. При любом выборе базиса в пространстве V линейные зависимости между векторами V - то же, что линейные зависимости между их координатными столбцами.

Предложение

6.54. Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ - базис в V. Система векторов $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$, задаваемая (48), линейно независима (является базисом в V) тогда и только тогда, когда матрица C невырождена.

Определение

6.55. Матрицей перехода от базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ к базису $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ называется матрица C, определенная равенством (48).

$$(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n) = (e_1, e_2, \ldots, e_n)\, C \tag{48}$$

Предложение

6.58. Если C - матрица перехода от базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ к базису $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$, а D - матрица перехода от $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ к базису $\{e''_1, \ldots, e''_n\}$, то CD матриц, перехода от $\{e_1, \ldots, e_n\}$ к $\{e''_1, \ldots, e''_n\}$.

9.2.3 Affine Space (???)

(добавили точки - получили много общих свойств. Пока не считаю актуальной тему, но когда-то пропишу ее)

Разложение аффинного преобразования евклидова точечного пространства в произведение сдвига, движения с неподвижной точкой и растяжения во взаимно перпендикулярных направлениях.

Определитель аффинного преобразования как коэффициент изменения ориентированного объёма

Классификация движений прямой и плоскости

Классификация движений трёхмерного евклидова пространства

Квадратичные функции на аффинном пространстве. Свойство центральности

9.2.4 On the basic concepts of algebra

(еще раз скорее всего не лишним будет раздел про то, что значат что определения разные. пока в алгебре начал это писать.)

9.2.5 modules in general

Модули и векторные пространства

Пусть вначале R - ассоциативное, но не обязательно коммутативное кольцо с 1.

1. Модули. Следующее определение вводит одну из важнейших алгебраических структур, обобщающих одновременно понятия абелевой группы, векторного пространства и идеала. Собственно, сам термин модуль = Modul, module [10] как раз и обязан своим происхождением специальному случаю идеалов колец и исторически возник из выражения сравнение по модулю.

Определение. Аддитивно записываемая абелева группа M называется левым модулем над R (коротко, левым R-модулем), если элементы R действуют на M в качестве левых операторов, т.е. задано отобраЖение

$$R \times M \longrightarrow M, \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x,$$

- умножение элементов M на элементы R слева - причем выполняются следующие четыре аксиомы.

V1 Внешняя ассоциативность:

$$(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$$

для июбых $\lambda, \mu \in R, x \in M$.

V2 Дистрибутивность относительно сложения скаляров:

$$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$$

для июбых $\lambda, \mu \in R, x \in M$.

V3 Дистрибутивность относительно сложения элементов модуля:

$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$$

для июбых $\lambda \in R, x, y \in M$.

V4 унитальность:

$$1x = x \quad \text{дяя июбого } x \in M.$$

Аналогично определяются правые R-модули. При этом элементы R должсны действовать в качестве правых операторов,

$$M \times R \longrightarrow M, \quad (x, \lambda) \mapsto x\lambda,$$

так что аксиома V1 должна быть заменена на следующую аксиому: V1° Внешняя ассоциативность:

$$x(\lambda\mu) = (x\lambda)\mu.$$

для июбых $\lambda, \mu \in R, x \in M$. Когда кольцо R фиксировано, оно часто называется основным кольцом = Grundring, ground ring. Впрочем, некоторые устойчивые выражения, такие как смена базы, подразумевают романский вариант этого термина: anneau de base, anello di base. Если основное кольцо определено из контекста, о модулях над ним часто говорят просто о как о левых/правых модулях. В случае, когда кольцо R коммутативно, оно называется также кольцом скаляров = Skalarenring, scalar ring. Изредка мы будем ссылаться на элементы R как скаляры и в том случае, когда R некоммутативно, но строго говоря, это злоупотребление.

Обратите внимание на различие аксиом V1 и V1°: в первом случае x вначале умножается на второй из действующих скаляров, а во втором на первый. Особенно важен случай, когда кольцо R коммутативно. В этом случае порядок скаляров не важен и, следовательно, аксиомы V1 и V1° эквивалентны, так что любой левый R-модуль можно превратить в правый и наоборот, полагая $x\lambda = \lambda x$. В этом случае говорят просто о модулях над R или об R-модулях.

В общем случае левый R-модуль можно трактовать как правый R° модуль, где R° — кольцо, противоположное к R. А именно, пусть $^\circ : R \longrightarrow R^o, \lambda \mapsto \lambda^o$, есть канонический антиавтоморфизм колец R и R^o. Тогда полагая $x\lambda^o = \lambda x$ мы превращаем левый R-модуль в правый R^0-модуль. Точно так же правый R-модуль превращается в левый R°-модуль. Это значит, что мы могли бы рассматривать только левые или только правые модули. Это, однако, было бы неудобно, так как во многих конструкциях естественно одновременно рассматривать как левые, так и правые модули. Кроме того, очень часто возникают объекты, которые одновременно являются левым модулем над одним кольцом и правым модулем над другим.

В некоммутативном же случае указание на то, левые или правые модули рассматриваются, обязательно. Чтобы указать, что M рассматривается как левый модуль, часто пишут $_RM$, а правый - M_R. Наиболее ригорозные авторы резервируют термин R-модуль исключительно для левых модулей над R, при этом правый модуль над R называется модуль- R.

Определение. *В* случае, когда $R = T$ является телом, вместо левых *и* правых модулей над T говорят о левых или правых векторных пространствах над T. В случае, кодда

$R = K$ - поле, говорят просто о векторных пространствах над K. Элементы векторного пространства часто называются векторами, в противоположность элементам тела T, которые называются скалярами.

Предостережение. Многие писатели в области анализа, дифференциальных уравнений и т.д. называют бесконечномерные векторные пространства линейными пространствами. Мы не различаем термины векторное пространство и линейное пространство и используем их как синонимы, независимо от того, конечномерны они или нет.

Предостережение. Полезно понимать, что тот факт, что операция в V записывается аддитивно, является чистой условностью. Например, $\mathbb{Q}^*$ с операцией умножения как сложением и возведением в целую степень как умножением на скаляры удовлетворяет всем аксиомам (правого) модуля: $\mathbf{V1}°x^{mn} = (x^m)^n$; $\mathbf{V2}x^{m+n} = x^m x^n$ $\mathbf{V3}(xy)^n = x^n y^n$; $\mathbf{V4}x^1 = x$. Сформулируем несколько простейших следствий из аксиом модуля. Задача. Докажите, что для любых $\forall\lambda, \mu \in R, \forall x, y \in M$, выполняются тождества

• $0x = 0$; - $\lambda 0 = 0$; - $(-\lambda)x = -\lambda x = \lambda(-x)$; - $(\lambda - \mu)x = \lambda x - \mu x$; - $\lambda(x - y) = \lambda x - \lambda y$.

Задача (allgemeine Distributivgesetz). Докажите, что в любом модуле выполняется обобщенная дистрибутивность умножения на скаляры относительно сложения:

$$(\alpha_1 + \ldots + \alpha_m)(x_1 + \ldots + x_n) = \sum_{i,j} \alpha_i x_j.$$

2. Бимодули

. Предположим, что на M одновременно заданы структуры левого R-модуля и правого S-модуля. Говорят, что эти структуры согласованы, если выполняется следующая аксиома, утверждающая, что скаляры из R и S коммутируют. Заметим, что эта аксиома аналогична аксиоме, связывающей два умножения в алгебре.

$$\text{V5 } \forall\lambda \in R, \forall x \in M, \forall\mu \in S, (\lambda x)\mu = \lambda(x\mu) \text{ (внешняя ассоциативность).}$$

В этом случае M называется бимодулем или, если чтобы подчеркнуть, что M рассматривается как бимодуль, пишут ${}_R M_S$ и говорят об M как об R-модуле- S или иногда как об R-бимодуле- S.

Можно было бы рассматривать два левых или два правых действия и писать R, SM или $M_{R,S}$. Это подразумевает, что операторы из R и S коммутируют, т.е., например, в случае левого действия

$$(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x), \quad \lambda \in R, \mu \in S, x \in M.$$

Модуль M, на котором заданы коммутирующие левые действия колец R и S, называется (R, S)-бимодулем. Правые (R, S)-бимодули - или коротко бимодули- (R, S) - определяются аналогично. Однако на практике гораздо чаще встречается случай, когда два кольца действуют на M с разных сторон.

Комментарий. С использованием понятия тензорного произведения алгебр изучение бимодулей сводится к изучению обычных модулей над другим кольцом. Например, R модуль- S можно M рассматривать как левый $(R, S°)$-бимодуль, а его, в свою очередь как левый модуль над $R \otimes S°$. С другой стороны, тот же модуль можно рассматривать как правый (R^o, S) бимодуль или, что то же самое, как правый модуль над $R^o \otimes S$.

Примеры модулей

В настоящем параграфе мы ограничимся перечислением нескольких первых примеров R-модулей и векторных пространств. Много дальнейших более рафинированных или более специальных примеров встретится нам в дальнейшем.

- Нулевой модуль. Множество $\{0\}$, состоящее из одного элемента 0, вместе с операциями $0+0 = 0, \lambda 0 = 0$ для всех $\lambda \in R$, является R-модулем. Этот модуль называется нулевым модулем и обычно обозначается просто 0.

- Эвклидовы пространства. Обычные векторы на эвклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ и в трехмерном эвклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ образуют векторные пространства над $\mathbb{R}$. Этот пример был впервые явно рассмотрен Симоном Стевином в конце XVI века.

- Абелевы группы. Любая абелева группа M является модулем над $\mathbb{Z}$, если положить для $n \in \mathbb{N}$ и $x \in M$:

$$nx = x + \ldots + x \quad (n \text{ раз }), \quad 0x = 0, \quad (-n)x = n(-x)$$

- Абелевы группы (cont.) Любая абелева группа M является левым модулем над $\mathrm{End}(M)$. В самом деле, V1, V2 и V4 - это просто определение операций в $\mathrm{End}(M)$, а V3 - это определение эндоморфизма.

- Дифференциальные абелевы группы. Пусть $R = \mathbb{Z}[d]$, где $d^2 = 0$ - кольцо двойных чисел над $\mathbb{Z}$. Тогда R-модуль - это в точности абелева группа M, в которой зафиксировано дифференцирование $a \mapsto da$, т.е. такой эндоморфизм, квадрат которого равен 0.

- Кольцо как модуль над собой. Само кольцо R можно рассматривать как левый и как правый R-модуль. А именно, пусть $M = {}_R R$ совпадает с R как аддитивная группа, а левое умножение на элементы R задается формулой $x \mapsto \lambda x$, где $\lambda \in R, x \in M$. Тогда из аксиом кольца вытекает, что ${}_R R$ - левый R-модуль. Аналогично, полагая, что $M = R_R$ совпадает с R как аддитивная группа, а правое умножение на элементы R задается формулой $x \mapsto x\lambda$, где $x \in M, \lambda \in R$, мы задаем на R структуру правого R-модуля. Получающийся модуль называется обычно левым/правым свободным R-модулем ранга 1.

- Идеалы. Каждый левый идеал I кольца R является левым R-модулем, правый идеал I - правым R-модулем, а двусторонний идеал I - бимодулем, или, если нужна особая точность, R-модулем- R.

- Идеализация модуля. В действительности, каждый R-модуль- R можно естественно рассматривать как идеал в некотором кольце. А именно, введем на прямой сумме $R \oplus V$ абелевых групп R и V следующее умножение

$$(\alpha, u)(\beta, v) = (\alpha\beta, \alpha v + u\beta)$$

Легко проверить, что это умножение превращает $R \oplus V$ в ассоциативное кольцо, причем V идеал в $R \oplus V$, квадрат которого равен 0. Таким образом, в коммутативном случае каЖдый модуль мОЖЕт РАССмАтРИвАТьСя КАК идЕАЛ нЕКОторого КольЦА.
- Дробные идеалы. Пусть R - область целостности, K ее поле частных. Ненулевой подмодуль $I \leq K$ называется дробным идеалом кольца R, если существует такое $\lambda \in R^\bullet$, что $\lambda I \leq R$. Каждый ненулевой идеал R кольца является дробным идеалом.

Следующий важнейший пример модулей будет подробно рассмотрен в следующем параграфе.

- Свободные модули. Обозначим через ${}^n R$ - множество всех строк длины n а через R^n - множество всех столбцов высоты n с компонентами из R. Тогда ${}^n R$ является левым, а R^n - правым модулем над R. Они называются, соответственно, свободным левым и свободным правым модулями над R ранга n.

- В дополнение к предыдущему примеру необходимо упомянуть, что ${}^n R$ является правым, а R^n - левым модулем над кольцом матриц $M(n, R)$, относительно обычного умножения столбца на матрицу слева и строки на матрицу справа.

- Кольцо многочленов $R[x]$ от переменной x над кольцом R можно рассматривать как R-модуль относительно обычной операции сложения многочленов и операции умножения многочлена на константу.

- Множество $M(m, n, R)$ матриц размера $m \times n$ с коэффициентами из кольца R можно рассматривать R-модуль- R относительно обычного сложения матриц и умножения матриц на скаляры слева и справа.

- В действительности множество $M(m, n, R)$ имеет естественную структуру $M(m, R)$-модуля- $M(n, R)$ относительно обычного умножения матриц размера $m \times n$ на квадратные матрицы степени m слева и на квадратные матрицы степени n справа.

- Если L/K - расширение полей, т.е. $K \subseteq L$, то L можно рассматривать как векторное пространство над K. Например, $\mathbb{C}$ - векторное пространство над $\mathbb{R}, \mathbb{R}$ - векторное пространство над $\mathbb{Q}$, а $\mathbb{F}_4$ - векторное пространство над $\mathbb{F}_2$.

- Пространство функций. Множество $K^X = \mathrm{Map}(X, K)$ всех функций на некотором множестве X со значениями в поле K является векторным пространством над K относительно обычного (поточечного) сложения функций и (поточечной) операции умножения функции на константу:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

В дальнейшем всегда, когда мы говорим о пространствах функций, мы имеем в виду какие-то подпространства K^X замкнутые относительно этих операций.

- Модули над групповым кольцом. Пусть K - поле, G - конечная группа, а $K[G]$ - групповое кольцо группы G над K. Линейным представлением группы G степени n над полем K называется гомоморфизм $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$, в полную линейную группу n-мерного векторного пространства V над K. Полагая $gv = \rho(g)v$ и продолжая это действие по линейности на все кольцо $K[G]$, мы задаем на V структуру левого $K[G]$ - модуля.

Свободные модули

Свободные модули - модули, в которых существует базис.

- Свободный левый модуль. Следуя Кону обозначим через ${}^nR$ множество всех строк длины n с компонентами из R, рассматриваемое как левый R-модуль. Иными словами, элементами ${}^nR$ являются все строки вида

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \quad x_i \in R,$$

причем операции вводятся покомпонентно:

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$
$$\lambda (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

Получающийся модуль называется свободным левым R-модулем ранга n. Вообще, свободным левым R-модулем ранга n называется любой модуль V, изоморфный ${}^nR$, его ранг обозначается $n = \mathrm{rk}(V)$.

- Свободный правый модуль. Как обычно, R^n обозначает множество всех столбцов высоты n с компонентами из R, рассматриваемое как правый R-модуль. Иными словами, элементами R^n являются все столбцы вида

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_i \in R,$$

а операции сложения и умножения на множестве столбцов вводятся покомпонентно:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \lambda = \begin{pmatrix} x_1\lambda \\ \vdots \\ x_n\lambda \end{pmatrix}$$

Получающийся модуль называется свободным правым R-модулем ранга n. Вообще, свободным правым R-модулем ранга n называется любой модуль V, изоморфный R^n, его ранг обозначается $n = \mathrm{rk}(V)$.

Предостережение 1. Для экономии места мы часто записываем столбец x в виде $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, как результат применения операции формального транспонирования к строке $(x_1, \ldots, x_n)$. Следует, однако, иметь в виду, что эта операция совпадает с настоящей операцией транспонирования матриц только в случае, когда кольцо R коммутативно. В этом последнем случае модули R^n и ${}^nR$ будут изоморфны как R-модули, и называются свободным R-модулем ранга n. Тем не менее, даже в случае коммутативного основного кольца их необходимо тщательно различать. На поверхностном уровне это будет очевидно сразу, как только мы определим матрицы. В дальнейшем вскроются гораздо более глубокие причины. Дело в том, что ${}^nR$ является правым $M(n, R)$-модулем, а R^n - левым $M(n, R)$-модулем. Иными словами, это значит, что R изоморфизм между ${}^nR$ и R^n, задаваемый транспонированием, не является каноническим, а связан с конкретным выбором базисов. Задание конкретного изоморфизма между ${}^nR$ и R^n вводит на R^n дополнительную структуру.

Предостережение 2. Подмодуль свободного модуля не обязан быть свободным. Например, если $x \in R$ - делитель нуля, то идеал $Rx \leq R$ не является свободным R-модулем. Более того, вообще говоря даже прямое слагаемое свободного модуля не обязано быть свободным. Прямые слагаемые свободных модулей называются проективными модулями. Вопрос о том, для каких классов колец R все проективные модули над R свободны, представляет собой один из центральных вопросов одного из центрального разделов алгебры - алгебраической K-теории.

Линейные отображения

Пусть U и V - два правых R-модуля. Отображение $f : U \longrightarrow V, u \mapsto f(u)$, называется гомоморфизмом R-модулей, (или просто морфизмом R-модулей), если оно удовлетворяет следующим дөум условиям.

H1 Аддитивность:

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

для июбых $x, y \in U$,

H2 Однородность степени 1:

$$f(x\lambda) = f(x)\lambda$$

для любых $\lambda \in R, x \in U$.

Вместе два эти условия часто называются также линейностью или, точнее, R-линейностью. Совместно они означают, что каждая линейная комбинация векторов переходит под лействие f в линейную комбинацию образов с теми же коэффициентами:

$$f(u\alpha + v\beta) = f(u)\alpha + f(v)\beta.$$

Совершенно аналогично определяются и морфизмы левых R-модулей, при этом в большинстве элементарных учебников аксиома (H2) переписывается в виде **H2** Однородность степени 1:

$$f(\lambda x) = f(\lambda x),$$

для любых $\lambda \in R, x \in M$. Однако специалисты в области теории колец знают, что даже в случае, когда кольцо R коммутативно, гОмомОРфизмы лЕвых модулЕй моЖно зАпиСывать только СПРАвА. Отображение $f : M \longrightarrow N, u \mapsto (u)f$, левых модулей называется гомоморфизмом левых R-модулей, если

$$(x + y)f = (x)f + (y)f, \quad (\lambda x)f = \lambda(x)f,$$

для любых $x, y \in U$ и любого $\lambda \in R$. Именно в силу непривычности такой записи для большинства читателей в дальнейшем мы предпочитаем работать с правыми, а не с левыми модулями.

Множество всех гомоморфизмов из M в N обозначается через $\mathrm{Hom}(M, N)$ или, если нужно подчеркнуть, что M и N рассматриваются как R-модули, то $\mathrm{Hom}_R(M, N)$.

В частности, можно говорить о гомоморфизмах векторных пространств над полем, в этом случае они обычно называются просто линейными отображениями или, если нужно уточнить, о каком именно поле идет речь, -линейными отображениями.

Как обычно, гомоморфизм f называется:

- мономорфизмом, если f инъективен;
- эпиморфизмом, если f сюръективен;
- изоморфизмом, если f биективен;
- эндоморфизмом, если $U = V$;
- автоморфизмом, если $U = V$, а f биективен.

Таким образом, изоморфизм - это такой гомоморфизм, который является одновременно мономорфизмом и эпиморфизмом; эндоморфизм - это гомоморфизм группы в себя, а автоморфизм - это изоморфизм группы на себя.

Эндоморфизмы векторных пространств обычно называются линейными операторами. Множество всех эндоморфизмов R-модуля M обозначается $\mathrm{End}_R(M)$ или просто $\mathrm{End}(M)$. Как мы увидим в дальнейшем, это множество всегда является ассоциативным - но, как правило, некоммутативным! - кольцом с 1, называемым кольцом эндоморфизмов модуля M. В случае векторных пространств говорят обычно о кольце (или алгебре) линейных операторов.

2. Первые примеры. Приведем несколько очевидных примеров линейных отображений.

- Для любых модулей нулевое отображение $0 : M \longrightarrow N$, переводящее все векторы $x \in M$ в 0, является гомоморфизмом M в N.

- Для любого модуля тождественное отображение id: $M \longrightarrow M$, переводящее каждый $x \in M$ в себя, является эндоморфизмом модуля M.

- Если кольцо R коммутативно, то умножение на любой элемент $\lambda \in R$ задает эндоморфизм модуля $M, x \mapsto x\lambda$, называемый гомотетией. В самом деле, линейность вытекает из дистрибутивности умножения вектора на скаляр относительно сложения векторов и коммутативности умножения в кольце R.

- Координатная проекция $\mathrm{pr}_i : R^n \longrightarrow R$, сопоставляющая столбцу его i-ю компоненту, линейна. Вообще, пусть V - какое-то векторное пространство с базисом $e_1, \ldots, e_n$. Рассмотрим i-ю координатную функцию e_i^*, т. е. отображение, сопоставляющее вектору $x \in V$ его i-ю координату в этом базисе. Из единственности разложения по базису следует, что e_i^* линейно. В самом деле, координаты аддитивны и однородны:

$$e_i^*(u+v) = e_i^*(u) + e_i^*(v), \quad e_i^*(u)\lambda = e_i^*(u)\lambda.$$

Этот пример будет играть огромное значение в главе, посвященной двойственности.

- Для любой матрицы $x \in M(m,n,R)$ отображение $R^n \longrightarrow R^m, u \mapsto xu$, задаваемое умножением на матрицу x слева, линейно:

$$x(u+v) = xu + xv, \quad x(u\lambda) = (xu)\lambda.$$

В действительностьи, в главе, посвященной линейным отображениям, мы узнаем, что никаких других линейных отображений между свободными модулями конечного ранга и не существует. Точно так же каждое линейное отображение ${}^nR \longrightarrow {}^mR$ свободных левых модулей состоит в умножении на некоторую матрицу $y \in M(n,m,R)$ справа, т. е. имеет вид $v \mapsto vy$.

- Пусть $K \leq L$ - два поля и V - несет согласованные структуры векторного пространства над K и над L. Тогда K-линейное отображение совершенно не обязано быть L-линейным. Пусть, например, $K = \mathbb{R}$, а $L = V = \mathbb{C}$. Тогда комплексное сопряжение, переводящее комплексное число $z = a + bi$ в комплексно сопряженное $\bar{z} = a - bi$, является $\mathbb{R}$-линейным,

Обратная замена кольца

Прямая замена кольца

Линейные комбинации

Подмодули

Линейная оболочка системы векторов

Фактор-модуль

Ядро и образ линейного отображения

Теорема о гомоморфизме

Сейчас мы покажем, что как и для других алгебраических систем факторизация отображений замечательным образом согласована со структурой модуля. Следующая теорема является одним из наиболее типичных и характерных результатов общей алгебры. В полной общности, а именно, для групп с операторами, она была впервые сформулирована Эмми Нетер. Пусть U, V - модули над R, а $\phi : U \longrightarrow V$ - линейное отображение. Теорема о гомоморфизме. Для любого гомоморфизма $\phi : U \longrightarrow V$ имеет место изоморфизм

$$\mathrm{Im}(\phi) \cong U/\operatorname{Ker}(\phi)$$

Мы уже видели аналогичные результаты для групп и колец, поэтому можем особенно не вдаваться в детали. Тем не менее, вспомним, что вообще с каждым отображением $\phi : U \longrightarrow V$ связано его ядро $N(\phi)$, являющееся разбиением U на слои отображения ϕ. Эти слои являются классами эквивалентности $\sim$ определяемой условием

$$u \sim v \quad \Longleftrightarrow \quad \phi(u) = \phi(v).$$

В случае, когда ϕ линейно, слои являются в точности смежными классами по $\operatorname{Ker}(\phi)$. Кстати, это объясняет, почему мы называем ядром гомоморфизма слой, содержаший 0: в отличие от произвольных отображений для линейных отображений задание одного этого слоя однозначно определяет все остальные классы. В самом деле

$$\phi(u) = \phi(v) \quad \Longleftrightarrow \quad \phi(u-v) = \phi(u) - \phi(v) = 0$$

так что $u - v \in \mathrm{Ker}(\phi)$. Но это и значит, что $u + \mathrm{Ker}(\phi) = v + \mathrm{Ker}(\phi)$. Обратно, если $u + \mathrm{Ker}(\phi) = v + \mathrm{Ker}(\phi)$, то $u = v + x$ для некоторого $x \in \mathrm{Ker}(\phi)$, так что $\phi(u) = \phi(v + x) = \phi(v) + \phi(x) = \phi(v)$. Теперь у нас все готово, чтобы доказать теорему о гомоморфизме. Доказательство. Как мы только что вспомнили, сопоставление

$$\bar{u} = u + \mathrm{Ker}(\phi) \mapsto \phi(u)$$

корректно определяет инъективное отображение $\bar{\phi} : U/\mathrm{Ker}(\phi) \longrightarrow V$, образ которого совпадает с $\mathrm{Im}(\phi)$. Для завершения доказательства теоремы нам остается лишь проверить, что $\bar{\phi}$ гомоморфизм. В самом деле, пользуясь определением произведения классов, определением $\bar{\phi}$ и тем, что ϕ - гомоморфизм, получаем

$$\bar{\phi}(\bar{u} + \bar{v}) = \bar{\phi}(\overline{u + v}) = \phi(u + v) = \phi(u) + \phi(v) = \bar{\phi}(\bar{u}) + \bar{\phi}(\bar{v}),$$

что и завершает доказательство. Следствие. Если $\phi : U \longrightarrow V$ эпиморфизм, mo $V \cong U/\mathrm{Ker}(\phi)$. Теорема. Пусть $\phi : U \longrightarrow V'$ - гомоморфизм ерупп, а нормальные подаруппы $U \trianglelefteq V, U' \trianglelefteq V'$ таковы, что $\phi(U) \leq U'$. Тогда ф индуцирует гомоморфизм

$$\bar{\phi} : V/U \longrightarrow V'/U', \quad \bar{\phi}(v + U) = \phi(v) + U'.$$

Доказательство. Прежде всего, необходимо проверить корректность этого определения. Для этого заметим, что если $u+U = v+U$, то по условию на ϕ имеем $\phi(u)-\phi(v) = \phi(x-y) \in U'$, так что $\phi(u)+U' = \phi(v)+U'$. Осталось убедиться в том, что $\bar{\phi}$ гомоморфизм. В самом деле,

$$\bar{\phi}((u + U) + (v + U)) = \bar{\phi}(u + v + U) =$$
$$\phi(u + v) + U' = \phi(u) + \phi(v) + U' =$$
$$(\phi(u) + U') + (\phi(v) + U') = \bar{\phi}(u + U) + \bar{\phi}(v + U).$$

Следствие. Если в условиях теоремы $U = \phi^{-1}(U')$, то гомоморфизм $\bar{\phi}$: $V/U \longrightarrow V'/U'$ инъективен. Если, кроме того, ϕ сюръективен, то $\bar{\phi}$ изоморфизм. Теорема фон Дика. Длй нюбьх подмодулей $U \leq V \leq W$ имеет место изоморфизм

$$(W/U)/(V/U) \cong W/V.$$

Доказательство. Обозначим через $\pi : W \longrightarrow W/V$ каноническую проекцию. Так как $U \leq V = \mathrm{Ker}(\pi), \pi$ индукцирует гомоморфизм $\pi' : W/U \longrightarrow W/V, w + U \mapsto w + V$. Ядро этого гомоморфизма равно $\mathrm{Ker}(\pi)/U = V/U$. Осталось применить теорему о гомоморфизме.

Сумма и пересечение подмодулей

Прямые суммы и проекторы

Прямые суммы и прямые произведения

9.2.6 Vavilov free and projective modules

Линейная зависимость и независимость

Базис свободного модуля, координаты

Формальные линейные комбинации

Универсальное свойство базиса

Единственность ранга

Неединственность ранга

Выделение подмодулей уравнениями на координаты

Стабильно свободные модули

Матрица перехода от базиса к базису

Преобразование координат

Координатные системы в проективных модулях

10 Specific Applications

10.1 Matrix/tensor expansion applications

10.1.1 decompositions in the theory of gravity

(см. статью Торна, пока не актуально)

10.2 linear algebra in mechanics

(там полным полно всего, знаю книги, но не занимался пока что)

10.3 Main Formulas of Other Applications in Physics

(там полным полно всего, знаю книги, но не занимался пока что)

10.3.1 On Linear Algebra in Quantum Computing (??)

(saw this, I'll add a lot if I work on this!)

10.4 applications in programming (!??)

(скоро прорешаю задачник, пропишу суть сюда.)

Part V
Other Topics of Linear Algebra

11 Useful matrices

11.1 Pauli σ-matrices

11.1.1 Main Properties

(??)

11.1.2 Pauli σ-matrices in Condensed Matter

(??)

11.1.3 Pauli σ-matrices in Quantum Computations

(??)

11.2 Dirac γ-matrices

(write it, see QFT)

11.2.1 Main Properties

(??)

11.2.2 Dirac γ-matrices in Qft

(??)

12 Systems of Linear Algebraic Equations

Обсудим подробно методы решения любых линейных уравнений

12.1 Typical Solution Methods

12.1.1 Overview of Methods for Solving Slau

Есть прямые и косвенные методы решения.
Прямые:

- правило Крамера $u_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$
- нахождение обратной матрицы
- метод Гаусса

Далее обзор итерационных методов решения (!?!?)
(пока не шарю их, потом буду писать)
Канонический вид записи двухслойных итерационных методов:

$$B_k \frac{x^{k+1} - x^k}{\tau_k} + Ax^k = f \tag{12.1}$$

Если параметр $\tau = 1$, то говорят, что у нас МПИ без параметра. Если $B_k = E$, то МПИ называется явным.
(когда он такой???)
чаще мы пишем:

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{R}\mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{F}, \qquad \mathbf{R} - \text{матрица перехода} \tag{12.2}$$

отклонение от результата называется *невязкой решения*: $r = Au - f$.

12.1.2 Linear System Compatibility Condition

(см Ильин Позняк, изи, запишу потом)

12.1.3 Inverse Matrix Method

12.1.4 Gaussian Elimination

Суть

О случаях применения (??)

О алгоритмах численного расчета (??)

(тут коды и вычматы, небольшая доработка.)

12.1.5 Kramer's Rule

(write later)

12.1.6 finding the Inverse Matrix

Суть (???)

действительно, этого и достаточно для решения СЛАУ.
(прямой метод)

12.2 About Other Numerical Methods for Solving Slau

(мб потом уменьшу раздел, все-таки это лучше в вычматах писать, а тут именно основы давать.)

12.2.1 mathematical Constructions for Numerical Solutions

минимум теории, которой дальше для решений будем пользоваться.

норма векторов

В общем случае она любая, у которой:

$$\begin{array}{l} 1.\ p(x) = 0 \Rightarrow x = 0_V \\ 2.\ \forall x, y \in V, p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) \\ 3.\ \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall x \in V, p(\alpha x) = |\alpha| p(x) \end{array} \tag{12.3}$$

Часто она такая:

$$\|u\|_p = \sqrt[p]{\sum_{j=1}^{N} |u_j|^p} \tag{12.4}$$

Но есть и типичные примеры: (???)

$$\|u\|_1 = \max_j |u_j|\,, \quad \text{где } p = \infty, \quad \text{Октаэдрическая норма вектора} \tag{12.5}$$

$$\|u\|_2 = \sum_{j=1}^{N} |u_j|\,, \quad \text{где } p = 1 \quad \text{Кубическая норма вектора} \tag{12.6}$$

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{N} |u_j|^2}, \quad \text{где } p = 2 \quad \text{евклидова норма вектора} \tag{12.7}$$

12.2.2 Lu Decomposition

(прямой метод)

Суть (???)

Если $A = LU$, то $Au = (LU)u = f \iff Lv = f,\ Uu = v$

Таким образом, находим просто v из треугольной матрицы, идя вниз, дальше u также из треугольной, идя вверх.

В частности, если матрица симметричная и положительно определенная, то ее можно представить (????) в виде $A = LL^T$, в этом случае решение называется *методом Холецкого*

(зачем они нужны??)

12.2.3 Simple Iteration Method

Обзор итерационных методов решения (!?!?)

(?? решения чего?? в любом случае, потом буду смотреть, пока не до этого.)

Канонический вид записи двухслойных итерационных методов:

$$B_k \frac{x^{k+1} - x^k}{\tau_k} + Ax^k = f \tag{12.8}$$

[3]. Если параметр $\tau = 1$, то говорят, что у нас МПИ без параметра. Если $B_k = E$, то МПИ называется явным.

(когда он такой???)

чаще мы пишем:

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{R}\mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{F}, \qquad \mathbf{R} - \text{матрица перехода} \tag{12.9}$$

отклонение от результата называется *невязкой решения*: $r = Au - f$.

[3]потом мб про это запишу, это вроде бы важно

Метод в двух словах

нужно преобразовать $A\vec{x} = \vec{f}$ к виду $\vec{x} = R\vec{x} + \vec{F}$.
МПИ в широком смысле это любой итерационный процесс такого вида.
МПИ в узком смысле - это привод системы к итерационному виду с помощью введения параметра τ, в итоге: $x = \underbrace{(E - \tau A)}_{\mathbb{R}} x + \underbrace{\tau f}_{F}$

Другими словами, мы берем $u^{(0)} = \vec{0}$, дальше считаем невязку $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{f} - \mathbf{Au}^{(0)}$ и пишем итерационный процесс: $\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(0)} + \tau \mathbf{r}^{(0)}$
Чаще всего нас интересует вопрос, какой же выбрать шаг, чтобы метод сходился и сделал это лучшим образом?
свойства:

- если $\|R\| \leqslant q < 1$, то МПИ сходящийся
- для сходимости необх и дост $\rho(R) < 1$ или $\tau \leqslant \frac{2}{\lambda_{\max}}$
- $\tau_{\text{опт}} = \frac{2}{\lambda_{\min} + \lambda_{\max}}$

12.2.4 jacobi Method

Обзор итерационных методов решения (!?!?)

(?? решения чего?? в любом случае, потом буду смотреть, пока не до этого.)
Канонический вид записи двухслойных итерационных методов:

$$B_k \frac{x^{k+1} - x^k}{\tau_k} + Ax^k = f \tag{12.10}$$

Если параметр $\tau = 1$, то говорят, что у нас МПИ без параметра. Если $B_k = E$, то МПИ называется явным.
(когда он такой???)
чаще мы пишем:

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{Ru}^{(k)} + \mathbf{F}, \qquad \mathbf{R} - \text{матрица перехода} \tag{12.11}$$

отклонение от результата называется *невязкой решения*: $r = Au - f$.

сам метод

Метод якоби состоит следующей итерационной модели:

$$\begin{cases} x_1^{(s+1)} = \frac{1}{a_{11}} \left(f_1 - \sum\limits_{j=2}^{n} a_{1j} x_j^{(s)} \right) \\ x_i^{(s+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(f_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(s)} - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(s)} \right) \end{cases} \tag{12.12}$$

или, если представить $A = L + D + U$, то:

$$Lx^{(s)} + Dx^{(s+1)} + Ux^{(s)} = f \tag{12.13}$$

В итоге в стандартном виде:

$$x^{(s+1)} = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_{\mathrm{R}} x^{(s)} + D^{-1} f \tag{12.14}$$

свойства:

- Условие его применимости

$$\forall \lambda : \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad |\lambda| < 1. \tag{12.15}$$

- сходится метод именно к этой СЛАУ, если выполнено *условие диагонального переобладания* $|a_{ii}| > \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|\,, i = 1, \ldots, n$
- в реальности когда используем?
-

12.2.5 seidel Method

сам метод

В отличие от метода Якоби, итерационный процесс тут следующий:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^{(s+1)} + a_{12}x_2^{(s)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(s)} = f_1 \\ a_{21}x_1^{(s+1)} + a_{22}x_2^{(s+1)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(s)} = f_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1^{(s+1)} + a_{n2}x_2^{(s+1)} + \cdots + a_{nn}x_n^{(s+1)} = f_n \end{cases} \tag{12.16}$$

то есть

$$\begin{cases} x_1^{(s+1)} = \frac{1}{a_{11}} \left(f_1 - \sum\limits_{j=2}^{n} a_{1j}x_j^{(s)} \right) \\ x_i^{(s+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(f_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(s+1)} - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(s)} \right) \end{cases} \tag{12.17}$$

или в итерационном виде:

$$x^{(s+1)} = \underbrace{-(L+D)^{-1}U}_{R}\, x^{(s)} + \underbrace{(L+D)^{-1}f}_{F} \tag{12.18}$$

свойства

- Условие на схождение этого метода:

$$\forall\lambda : \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \ldots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad |\lambda| < 1. \tag{12.19}$$

- При условии диагонального преобладания метод Зейделя сходится быстрее метода Якоби. (????)
- (Достаточное условие сходимости метода Зейделя). Пусть A – вещественная, симметричная, положительно определенная матрица. В этом случае итерационный метод Зейделя сходится

теперь пример, как используем:

Область сходимости

хз

12.2.6 method of Sequential Upper Relaxation

сам метод

Если мы движемся по методу Зейделя в правильном направлении, то можно изменить скорость этого схождения, записав после каждого применения метода Зейделя функцию от его результата:

$$\mathbf{u}_i^{(k+1)} = \mathbf{u}_i^{(k)} + \omega \left(\mathbf{z}_i^{(k+1)} - \mathbf{u}_i^{(k)} \right) \tag{12.20}$$

при $\omega = 1$ это метод Зейделя. Если $1 < \omega < 2$, то это метод ПВР.

можно то же самое записать:

$$x_i^{(s+1)} = (1-\omega)x_i^{(s)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(s+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(s)}\right) \tag{12.21}$$

сходимость

Обсудим сходимость.

Теорема 2. *(Островского–Рейча) Пусть матрица$A = A^*>0$. Тогда метод релаксации сходится для любого $\omega \in (0,2)$*

12.2.7 About Other Methods

(другие тут просто укажу, где-то отдельно буду прописывать.)

13 Tensor Algebra: Special Methods

13.1 Fundamentals of

13.1.1 Structures of Tensors and Typical Tensors

Определение тензоров как полилинейной формы

Определение 13.1. *Пусть $\mathfrak{K}$ - поле, V - векторное пространство над $\mathfrak{K}, V^*$ - сопряжённое к V пространство, p и q - целые числа $\geqslant 0$,*

$$V^p \times (V^*)^q = \underbrace{V \times \ldots \times V}_{p} \times \underbrace{V^* \times V^*}_{q}$$

- декартово произведение p экземпляров пространства V и q экземпляров пространства V^*. Всякое $(p+q)$-линейное отображение

$$f : V^p \times (V^*)^q \to \mathfrak{K}$$

называется тензором на V типа (p,q) и валентности (или ранга) $p+q$.

Говорят также, что f - смешанный тензор, p раз ковариантный и q раз контравариантный. При $p=0$ тензор f будет просто контравариантным, а при $q=0$ - ковариантным.

Совокупность $\mathbb{T}^{p;q} = \mathbb{T}_p^q(V)$ всех тензоров на V типа (p,q) образует векторное пространство. Действительно, если $f, g \in \mathbb{T}_p^q(V)$ и $\alpha, \beta \in \mathfrak{K}$, то под $\alpha f + \beta g$ естественно понимать тензор, определённый формулой

$$(\alpha f + \beta g)(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p; u_1, \ldots, u_q) = \alpha f(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p; u_1, \ldots, u_q) + \beta f(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p; u_1, \ldots, u_q)$$

Типичные примеры

Тензоры типа (1,0) и (0,1)

Тензорами типа $(1,0)$ являются обычные линейные функции на V, т.е. элементы из V^*.

Тензорами типа $(0,1)$ - линейные функции на V^*, т.е. элементы из V^{**}.

Тензоры $(0,1)$ можно считать векторами элементами из V. В силу рефлексивности конечномерных векторных пространств между V и V^{**} существует естественный изоморфизм, позволяющий отождествить $\varphi \in V^{**}$ с некоторым вектором $\mathbf{x}_\varphi \in V$ или, наоборот, вектор $\mathbf{x}$ - линейной функцией $\varepsilon_{\mathbf{x}} \in V^{**}$. Это отождествление реализуется в записи линейной формы

$$f(\mathbf{x}) = (f, \mathbf{x}),$$

которую мы уже применяли ранее. При фиксированном f это есть линейная функция на V, а при фиксированном $\mathbf{x}$ - линейная функция на V^*.

(продублирую в 1 часть!!! я это прописал нормально?? пока нет, нужно переписать.)

Тензоры типа (2,0) и (0,2)

Ковариантный тензор типа $(2, 0)$ есть билинейная форма на V, а контравариантный тензор типа $(0, 2)$ - билинейная форма на V^*.

Тензоры типа $(1, 1) \cong \mathcal{L}(V)$

(типичная тема линала, тут качественно нужно написать!)

Каждому тензору типа $(1, 1)$ отвечает, и притом единственный, линейный оператор на V. Докажем это.

(??? с 1го раза не понял, потом мб вернусь к этому.)

По определению $f(\mathbf{x}, u)$ - функция, линейная по x $\in V$ и по $u \in V^*$. При любом фиксированном x функция f линейна по u, поэтому найдётся вектор $\mathcal{F}\mathbf{x} \in V$, для которого

$$f(\mathbf{x}, u) = (u, \mathcal{F}\mathbf{x})$$

(мы использовали запись $f(\mathbf{x}) = (f, \mathbf{x})$).

(??? где выше эта запись написана?? выше плохо выучена теория про двойственность!!)

Так как $f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}, u) = \alpha f(\mathbf{x}, u) + \beta f(\mathbf{y}, u)$, то

$$(u, \mathcal{F}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y})) = \alpha(u, \mathcal{F}\mathbf{x}) + \beta(u, \mathcal{F}\mathbf{y}) = (u, \alpha\mathcal{F}\mathbf{x} + \beta\mathcal{F}\mathbf{y}),$$

откуда

$$\mathcal{F}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha\mathcal{F}\mathbf{x} + \beta\mathcal{F}\mathbf{y}$$

т.е. $\mathcal{F}$ - линейный оператор на V. Обратно, для каждого $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(V)$ строится функция $f : V \times V^* \to \Re$ по формуле (2), линейная по $\mathbf{x} \in V$ и $u \in V^*$.

Ясно, что соответствие $f \mapsto \mathcal{F}$ биективно.

Тензоры типа (1,2) (???!!!)

(Тоже Ершов упоминал)

Связи определений тензоров друг с другом (!!!!)

(тут собираю их и показываю эквивалентность. типичная тема теории.)

13.1.2 Tensor Product

(вроде написано хреново, так что не так уж хорошо зашло мне, но пока так.)

Тензорное произведение тензоров из разных пространствах

(Кострикин начинает с этого, зачем - хз)

Пусть

$$f : V_1 \times \ldots \times V_r \to \mathfrak{K}, \quad g : W_1 \times \ldots \times W_s \to \mathfrak{K}$$

- произвольные полилинейные формы. Это значит, что V_i, W_j - никак не связанные друг с другом векторные пространства.

Определение 13.2. *Под тензорным произведением f и g понимают отображение*

$$f \otimes g : V_1 \times \ldots \times V_r \times W_1 \times \ldots \times W_s \to \mathfrak{K},$$

определённое формулой

$$(f \otimes g)(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r; w_1, \ldots, w_s) = f(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r)\, g(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s).$$

Подчеркнем, что переменные $\mathbf{v}_i$ независимы от переменных $\mathbf{w}_j$.

Очевидно, что $f \otimes g$ - полилинейное отображение, поскольку, например, при фиксированных $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r; \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w_s}$ мы имеем функцию, пропорциональную $g(\mathbf{w}_1, \ldots)$, которая линейна по $\mathbf{w}_1$.

Если f и g - линейные формы на V, то

$$(f \otimes g)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) g(\mathbf{y})$$

- билинейная форма специального вида на V, уже тут видим, что $f \otimes g \neq g \otimes f$:

$$(g \otimes f)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}) g(\mathbf{x}) \neq f(\mathbf{x}) g(\mathbf{y}) = (f \otimes g)(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

В то же время выполняется закон ассоциативности

$$(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h)$$

для любых трёх полилинейных форм (скажем, $h : U_1 \times \ldots \times U_t \to \mathfrak{K}$), поскольку левая и правая части совпадают как функции с

$$f(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r)\, g(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s)\, h(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_t).$$

Где оно нужно?

(хотя бы где-то я встречу это? что разные пространства f и g?)

Тензорное произведение тензоров из одного пространства

Пусть теперь f - тензор типа (p, q) и g - тензор типа (r, s). Тогда $f \otimes g$ будет полилинейной функцией на декартовом произведении

$$V^p \times (V^*)^q \times V^r \times (V^*)^s$$

Отождествим это произведение с $V^{p+r} \times (V^*)^{q+s}$. По определению тензорные произведение тензоров f и g - $f \otimes g$ - это тензор на V типа $(p + r, q + s)$, определённый формулой

$$(f \otimes g)(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{p+r}; u_1, \ldots, u_{q+s}) = f(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p; u_1, \ldots, u_q)\, g(\mathbf{v}_{p+1}, \ldots, \mathbf{v}_{p+r}; u_{q+1}, \ldots, u_{q+s})$$

для всех $\mathbf{v}_i \in V$ и $u_j \in V^*$.

Из этого определения и раскрытия $\alpha f + \beta g$ тензоров видно, что имеет место дистрибутивность тензорного умножения:

$$(\alpha f + \beta g) \otimes h = \alpha f \otimes h + \beta g \otimes h$$
$$h \otimes (\alpha f + \beta g) = \alpha h \otimes f + \beta h \otimes g$$

Резюмируем сказанное: (в 1ю часть)
1) операция умножения $\otimes$ определена для тензоров произвольных типов;
2) валентность произведения равна сумме валентностей сомножителей;
3) тензорное произведение ассоциативно и дистрибутивно, но не коммутативно.

Пример элементарного тензора

Пусть f, g, h - три линейные функции на V и $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ - два вектора из V. Как мы заметили ранее, при известных отождествлениях можно говорить о трёх тензорах f, g, h типа $(1,0)$ и о двух тензорах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ типа (0,1), а в таком случае - и о тензоре

$$t = f \otimes g \otimes h \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$$

типа (3,2). Если $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V, u, v \in V^*$, то

$$t(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, u, v) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{y})h(\mathbf{z})\mathbf{a}(u)\mathbf{b}(v),$$

где под $\mathbf{a}(u), \mathbf{b}(v)$ следует понимать выражения, определённые формулой $\mathbf{a}(u) = (\mathbf{a}, u) = (u, \mathbf{a}) = u(\mathbf{a})$.

(?? и что с того? удалю скорее всего, пустой пример от Кострикина.)

13.1.3 Tensor Coordinates

(??? казалось бы, на что тут можно потратить пару страниц???)

Мы уже почувствовали необходимость в чётком разделении элементов из V и V^*.

(???? нет)

Тензорный анализ в классическом понимании начинается тогда, когда в пространстве $\mathbb{T}_p^q(V)$ выбирается базис и тензор описывается своими координатами. Обычно в V и V^* выбираются дуальные (взаимные) базисы

$$V = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle, \quad V^* = \left\langle e^1, \dots, e^n \right\rangle$$

с указанным расположением индексов у базисных векторов. Для наглядности векторы с верхними индексами у нас изображаются обычным (бледным) шрифтом. Расположение индексов у соответствующих координат противоположное, т.е. мы полагаем $\sum\limits_i \alpha^i \mathbf{e}_i$ для x $\in V, f = \sum\limits_i \beta_i e^i$ для $f \in V^*$. Напомним, что

$$\left(\mathbf{e}_i, e^j\right) = \left(e^j, \mathbf{e}_i\right) = \delta_i^j = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j, \end{cases}$$

$$f(\mathbf{x}) = (f, \mathbf{x}) = \sum_i \alpha^i \beta_i.$$

здесь верхние индексы никогда не будут показателями степеней.

Суммирование по немым индексам

В тензорном анализе суммирование обычно ведётся по так называемым немым индексам, встречающимся один раз сверху и один раз снизу. Поэтому для тех, кто часто соприкасается с тензорами, "двухэтажное" расположение индексов постепенно привело к молчаливому соглашению опускать знак суммирования, отождествляя, например, $\mathbf{x} = \sum\limits_i \alpha^i \mathbf{e}_i \mathbf{c} \mathbf{x} = \alpha^i \mathbf{e}_i$. Мы этого соглашения не придерживаемся. Условимся, однако, суммирование по различным индексам заменять знаком кратной суммы:

$$\sum_i \sum_j \cdots \sum_k = \sum_{i,j,\dots,k},$$

не указывая пределов суммирования, поскольку из контекста ясно, какие значения пробегают индексы (обычно от 1 до $n = \dim V$).

Определение координат тензора

Пусть дан произвольный тензор T типа (p, q), значения которого обозначаются в виде

$$T_{i_1,\ldots,i_p}^{j_1,\ldots,j_q} := T\left(\mathbf{e}_{i_1},\ldots,\mathbf{e}_{i_p}, e^{j_1},\ldots,e^{j_q}\right).$$

Числа $T_{i_1,\ldots,i_p}^{j_1,\ldots,j_q}$ называются координатами (коэффициентами или компонентами) тензора T в базисе $(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)$.

Мы придадим этому определению привычный смысл, выбрав надлежащий базис в самом пространстве $\mathbb{T}^{p;q}$ тензоров типа (p, q). Рассмотрим так называемый разложимый тензор типа (p, q)

$$e^{i_1}\otimes\ldots\otimes e^{i_p}\otimes\mathbf{e}_{j_1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{e}_{j_q},$$

отождествляя, как и ранее, $\mathbf{e}_{j_1},\ldots,\mathbf{e}_{j_q}$ с линейными функциями на V^* : $\mathbf{e}_j(f) = f(\mathbf{e}_j) = (f, \mathbf{e}_j)$. Так как $(e^i, \mathbf{e}_{i'}) = \delta^i_{i'}$, $\left(\mathbf{e}_k, e^{k'}\right) = \delta_k^{k'}$, то

$$\left(e^{i_1}\otimes\ldots\otimes e^{i_p}\otimes\mathbf{e}_{j_1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{e}_{j_q}\right)\left(\mathbf{e}_{i'_1},\ldots,\mathbf{e}_{i'_p}, e^{j'_1},\ldots,e^{j'_q}\right) = \delta^{i_1}_{i'_1}\ldots\delta^{i_p}_{i'_p}\delta^{j'_1}_{j_1}\ldots\delta^{j'_q}_{j_q}$$

Построим тензор

$$T_1 = \sum_{i,j} T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} e^{i_1}\otimes\ldots\otimes e^{i_p}\otimes\mathbf{e}_{j_1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{e}_{j_q},$$

являющийся линейной комбинацией тензоров $e^{i_1}\otimes\ldots\otimes e^{i_p}\otimes\mathbf{e}_{j_1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{e}_{j_q}$ с коэффициентами $T_{i_1,\ldots,i_p}^{j_1,\ldots,j_q}$. Получим

$$T_1\left(\mathbf{e}_{i_1},\ldots,\mathbf{e}_{i_p}, e^{j_1},\ldots,e^{j_q}\right) = T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p},$$

т.е. как раз координаты тензора T.

Своими координатами тензор T определяется полностью, поскольку в силу его полилинейности для произвольных векторов

$$\mathbf{x}_1 = \sum_{i_1}\xi^{i_1}\mathbf{e}_{i_1}, \quad \ldots, \quad \mathbf{x}_p = \sum_{i_p}\rho^{i_p}\mathbf{e}_{i_p}$$

и линейных форм

$$u^1 = \sum_{j_1}\sigma_{j_1}e^{j_1}, \quad \ldots, \quad u^q = \sum_{j_q}\tau_{j_q}e^{j_q}$$

имеем

$$T\left(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_p, u^1,\ldots,u^q\right) = \sum_{i,j} T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}\xi^{i_1}\ldots\rho^{i_p}\sigma_{j_1}\ldots\tau_{j_q}$$

Вспомним в этой связи, что билинейную форму $f : V^2 \to\curvearrowleft$ мы записывали в виде $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum f_{ij}x_iy_j$. Единственное различие заключается в расположении индексов. Теперь мы писали бы $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum\limits_{ij} f^i y^j$.

Раз координаты тензоров T_1 и T совпадают, должны совпадать сами тензоры, т.е.

$$T = \sum_{i,j} T^{j_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p} e^{i_1}\otimes\ldots\otimes e^{i_p}\otimes\mathbf{e}_{j_1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{e}_{j_q}.$$

В частности, всякая билинейная форма f имеет вид

$$f = \sum_{ij} f_{ij}e^i\otimes e^j.$$

Осталось показать, что разложимые тензоры вида (9), отвечающие различным наборам индексов $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q$, линейно независимы, но это прямо следует из правила (10) вычисления их значений. Действительно, предположив существование линейной зависимости

$$\sum \lambda_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_q} = 0$$

с какими-то коэффициентами $\lambda_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \in \curvearrowleft$ и обращаясь с левой частью этого равенства, как с тензором T_1 выше, мы немедленно приходим к выводу, что $\lambda_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = 0$.

О размерности пространства (??)

Размерность пространства $\mathbb{T}^{p;q}$ равна числу различных базисных векторов (9). Она совпадает, следовательно, с числом n^{p+q} всевозможных наборов индексов $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q$, каждый из которых независимо от других пробегает значения от 1 до n. Из соображений наглядности координаты (8) тензора T следовало бы размещать в виде пространственной кубической таблицы. Размерность куба равна валентности тензора T. Привычные нам строки, столбцы, квадратные матрицы будут частными случаями таких $(p+q)$-мерных таблиц.

Резюмируем сказанное в виде следующего утверждения.

Тензоры на V типа (p, q) составляют векторное пространство $\mathbb{T}_p^q(V)$ размерности n^{p+q} с базисными векторами

$$e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_q},$$

где $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ базис пространства V^*.

Существует, и притом только один, тензор с наперёд заданными координатами $T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$.

(?? не бестолковая ли эта теорема?)

13.1.4 Tensors in Different Coordinate Systems

Правило изменения тензоров при переходе в другую систему координат

Нам нужно получить правило изменения координат тензора при переходе к новому базису. Пусть $(\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n)$ - какой-то другой базис пространства V, $(e'^1, \dots, e'^n)$ - дуальный к нему базис пространства V^* и $A = \left(a_j^i\right)$ - матрица перехода от $(\mathbf{e}_i)$ к $(\mathbf{e}'_i)$. Элементы a_j^i матрицы A обозначены так, что верхний индекс указывает номер строки, а нижний - номер столбца. В этих обозначениях

$$\mathbf{e}'_k = \sum_i a_k^i \mathbf{e}_i, \quad k = 1, \dots, n.$$

Обозначив через $B = \left(b_j^i\right)$ матрицу, транспонированную к матрице перехода от (e^i) к (e^i), мы должны писать

$$e'^k = \sum_i b_i^k e^i$$

в точном соответствии с правилом суммирования по “разноэтажным” одинаково обозначаемым индексам. Введём вспомогательную матрицу $B^{-1} = C = \left(c_j^i\right)$

$$e^k = \sum_i c_i^k e^i$$

Используя свойство (7) дуальных базисов, находим

$$c_j^k = \left(\sum_i c_i^k e'^i, \mathbf{e}'_j \right) = (e^k, \mathbf{e}'_j) = \left(e^k, \sum_i a_j^i \mathbf{e}_i \right) = a_j^k.$$

Стало быть, $C = A$ и

$$e^k = \sum_i a_i^k e^{ii}$$

Далее, $B = A^{-1}$, и мы видим, что матрицей перехода от (e^i) к (e^i) является ${}^tB = {}^t\left(A^{-1}\right) = {}^tA^{-1}$ - матрица, которую называют контраградиентной к A.

Найдём теперь координаты $T^{j_1 \ldots q_q}_{\ \prime \atop i_1 \ldots i_p}$ нашего тензора T в базисе

$$e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{ii_p} \otimes \mathbf{e}'_{j_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}'_{j_q}$$

По определению (см. (8))

$$T = \sum_{i,j} T^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{j_q} = \sum_{i,j} T'^{j'_1 \ldots j'_q \ldots i'_p} e^{i'_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}'_{j'_q} =$$
$$= \sum \left(\sum b^{i'_1 \ldots i'_p}_{i_1 \ldots i_p} T''_{i'_1 \ldots i'_q} a^{j_1 \ldots j_q}_{j'_1 \ldots j'_q} \right) e^{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{j_q}.$$

Теорема 2.

При переходе от дуальных базисов $(\mathbf{e}_i), (e^i)$ пространств V и V^* к новым дуальным базисам тех же пространств по Формулам (13) и (14) координаты тензора T типа (p, q) преобразуются по формулам

$$T^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p} = \sum_{i', j'} b^{i'_1 \ldots i'_p}_{i_1 \ldots i_p} T^{j'_{j'_1} \ldots j'_q}_{\ \prime \atop i'_1 \ldots i'_p} a^{j_1 \ldots j_q}.$$

Говорят, что в формуле (15) матрица $A = \left(a^i_j\right)$ действует на верхние индексы координат тензора, а матрица $B = \left(b^i_j\right) = A^{-1}$ на нижне индексы. Определение тензора, данное в самом начале, можно теперь высказать иначе, назвав тензором на V типа (p, q) соответствие T, относящее каждому базису пространства V систему из n^{p+q} скаляров $T^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p}$ (внизу стоят p ковариантных индексов, вверху - q контравариантных индексов) таким образом, что системы, отвечающие различным базисам, связаны между собой соотношениями (15).

Действия над тензорами, сформулированные на языке полилинейных форм, легко описать и на координатном уровне. Скажем, если S и T-два тензора одинакового типа, то их линейной комбинацией $\alpha S + \beta T$ называется тензор с координатами

$$\alpha S^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p} + \beta T^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p}.$$

Произведение тензоров

Произведением тензоров $\left(Q^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p}\right)$ и $\left(R^{l_1 \ldots l_t}_{k_1 \ldots k_s}\right)$ любых типов будет тензор с координатами

$$T^{j_1 \ldots j_q l_1 \ldots l_t}_{i_1 \ldots i_p k_1 \ldots k_s} = Q^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p} R^{l_1 \ldots l_t}_{k_1 \ldots k_s}$$

Это определение на самом деле от выбора базиса не зависит, поскольку применение к левой части (16) преобразования (15) сводится к перераспределению величин $a^{j'}_j, b^j_{j'}$ между множителями Q и R в правой части.

Пример 2

Рассмотрим линейный оператор $\mathcal{F}$ на V. Мы видели (см. пример 1), что $\mathcal{F}$ можно интерпретировать как тензор типа (1,1). Это согласуется и с матричными обозначениями. Если $V = \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$ и $\mathcal{F}\mathbf{e}_k = \sum\limits_i f_k^i \mathbf{e}_i$, то в случае перехода к новому базису по формулам

$$\mathbf{e}'_k = \sum_i a_k^i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e}_k = \sum_i b_k^i \mathbf{e}'_i, \quad \sum_i b_k^i a_i^l = \delta_k^l$$

будем иметь

$$\sum_s f_k'^s \mathbf{e}'_s = \mathcal{F}\mathbf{e}'_k = \sum_i a_k^i \mathcal{F}\mathbf{e}_i = \sum_{i,j} a_k^i f_i^j \mathbf{e}_j = \sum_{i,j,s} a_k^i f_i^j b_j^s \mathbf{e}'_s.$$

Отсюда

$$f_k'^s = \sum_{i,j} a_k^i f_i^j b_j^s$$

как это и должно быть для тензора $F = \left(f_j^i\right)$, один раз ковариантного и один раз контравариантного. Формула (17) в иных обозначениях нам уже встречалась при выражении матрицы линейного оператора в различных базисах.

13.1.5 Tensor Product of Spaces (??)

(не очень зашел параграф, там еще с теорией групп связки, потом когда-то мб посмотрю.)

Какая-то теорема, обосновывающая определение (??)

Теорема 3.

Пусть V, W-векторные пространства над полем k. Тогда существуют векторное пространство T над κ и билинейное отображение $\tau : V \times W \to T$, удовлетворяющее условиям:

(T1) если $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$ линейно независимы $u \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k \in W$, то $\sum\limits_{i=1}^k \tau(\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i) = 0 \Longrightarrow \mathbf{w}_1 = 0, \ldots, \mathbf{w}_k = 0$;

(T2) t если $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k \in W$ линейно независимы $u \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$, то $\sum\limits_i \tau(\mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i) = 0 \Longrightarrow \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$

(T3) τ - сюръективное отображение, т.е.

$$T = \langle \tau(\mathbf{v}, \mathbf{w}) | \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W \rangle_\Omega.$$

Кроме того, пара (τ, T) универсальна в том смысле, что какова бы ни была пара (τ', T'), состоящая из векторного пространства T' и билинейного отображения $\tau' : V \times W \to T'$, найдётся единственное линейное отображение $\sigma : T \to T'$, для которого $\tau'(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sigma(\tau(\mathbf{v}, \mathbf{w})), \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W$.

(??? господи, зачем вообще эта теорема??? огромная и как будто бесполезная.)

Доказательство.

Ниже даётся лишь набросок необходимых рассуждений.

а) Если $V = \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle_{\Re}, W = \langle \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m \rangle_{\widehat{K}}$, то $(T1) - (T3)$ эквивалентны в совокупности единственному условию: векторы $\tau(\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j), 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m$, составляют базис пространства T.

б) Для любого nm-мерного пространства T над k отображение τ с $\mathbf{v} = \sum\limits_i \alpha_i \mathbf{e}_i, \mathbf{w} = \sum\limits_j \beta_j \mathbf{f}_j$ можно определить соотношением

$$\tau(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \mathbf{t}_{ij},$$

где $(\mathbf{t}_{ij} | 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m)$-базис в T. Согласно а) пара (τ, T) удовлетворяет условиям $(T1) - (T3)$, и все пары получаются таким способом.

в) Для всякой пары (τ', T') с билинейным отображением $\tau' : V \times \times W \to T'$ определим линейное отображение $\sigma : T \to T'$, полагая $\sigma\left(\sum \gamma_{ij} \mathbf{t}_{ij}\right) = \sum \gamma_{ij} \tau' \left(\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j\right), \gamma_{ij} \in \mathfrak{K}$.

Согласно а) и б) $\tau'(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum \alpha_i \beta_j \tau' \left(\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j\right) = \sigma\left(\sum \alpha_i \beta_j \mathbf{t}_{ij}\right) = \sigma(\tau(\mathbf{v}, \mathbf{w}))$. Обратно: если $\sigma(\tau(\mathbf{v}, \mathbf{w})) = \tau'(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, то $\sigma\left(\mathbf{t}_{ij}\right) = \sigma\left(\tau\left(\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j\right)\right) = \tau'\left(\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j\right)$.

г) Предположив существование двух универсальных пар (τ, T), (τ', T'), мы легко обнаруживаем, что линейные отображения $\sigma : T \to T', \sigma' : T' \to T$ являются на самом деле взаимно обратными изоморфизмами: $\sigma' \circ \sigma = e_T, \sigma \circ \sigma' = e_{T'}$. Таким образом, $T \cong T'$, причём изоморфизм $\sigma : T \to T'$ обладает свойством, указанным в формулировке теоремы.

(доказано)

Определение тензорного произведения векторных пространств

Пару (τ, T), однозначно определённую с точностью до изоморфизма по заданным векторным пространствам V, W, называют тензорным произведением этих пространств.

Нетрудно показать, что в системе $(T1) - (T3)$ можно опустить условие $(T1)$ или $(T2)$, а при априорном предположении $\dim T = nm$ для определения тензорного произведения достаточно оставить одно из трёх условий.

Записывая $T = V \otimes_K W$ или просто $V \otimes W$, мы должны ещё помнить, что векторное пространство T снабжено билинейным отображением $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$ декартова произведения $V \times W$ на T, удовлетворяющим условиям $(T1) - (T3)$.

Итак, элементами тензорного произведения $V \otimes W$ служат формальные линейные комбинации с коэффициентами из k упорядоченных пар $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \mathbf{c} \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W$. При этом предполагаются выполненными следующие условия:

$$\begin{gathered}
(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \otimes \mathbf{w} - \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{w} - \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{w} = 0 \\
\mathbf{v} \otimes (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) - \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}_1 - \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}_2 = 0, \\
\lambda \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} - \mathbf{v} \otimes \lambda \mathbf{w} = 0, \quad \lambda \in \mathfrak{K} \\
\lambda(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = \lambda \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} = \mathbf{v} \otimes \lambda \mathbf{w}
\end{gathered}$$

Непосредственно из теоремы 3 видно, что биективные отображения $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \mapsto \mathbf{w} \otimes \mathbf{v}, (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \otimes \mathbf{w} \mapsto \mathbf{u} \otimes (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}), \mathbf{v} \otimes \lambda \mapsto \lambda \otimes \mathbf{v} \mapsto \lambda \mathbf{v}$ устанавливают так называемые канонические изоморфизмы векторных пространств

$$\begin{gathered}
V \otimes W \cong W \otimes V \\
(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W), \\
V \otimes \mathfrak{K} \cong \mathfrak{K} \otimes V \cong V
\end{gathered}$$

(эти изоморфизмы нельзя заменить равенствами). (??? почему????)

(?? глубоко эти утверждения не понимаю, но вроде вообще это не важно.)

Выполнены также законы дистрибутивности

$$\begin{gathered}
(U \oplus V) \otimes W \cong (U \otimes W) \oplus (V \otimes W), \\
U \otimes (V \oplus W) \cong (U \otimes V) \oplus (U \otimes W).
\end{gathered}$$

Тензорное произведение линейных операторов

Следующим шагом в рассматриваемой конструкции должен быть синтез пространств и линейных операторов на них.

Пусть $\mathcal{A} : V \to V, \mathcal{B} : W \to W$ - линейные операторы. Их тензорным произведением называется линейный оператор

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} : V \otimes W \to V \otimes W,$$

действующий по правилу

$$(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = \mathcal{A}\mathbf{v} \otimes \mathcal{B}\mathbf{w}$$

И далее по линейности $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \left(\sum (\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{w}_i)\right) = \sum \mathcal{A}\mathbf{v}_i \otimes \mathcal{B}\mathbf{w}_i$.

Ясно, что это определение согласовано с соотношениями

$$\begin{gathered}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \otimes \mathbf{w} - \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{w} - \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{w} = 0 \\ \mathbf{v} \otimes (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) - \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}_1 - \mathbf{v} \otimes \mathbf{w}_2 = 0 \\ \lambda\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} - \mathbf{v} \otimes \lambda\mathbf{w} = 0, \quad \lambda \in \mathfrak{K} \\ \lambda(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = \lambda\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} = \mathbf{v} \otimes \lambda\mathbf{w}.\end{gathered}$$

Например,

$$\mathcal{A}\left(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\right) \otimes \mathcal{B}\mathbf{w} - \mathcal{A}\mathbf{v}_1 \otimes \mathcal{B}\mathbf{w} - \mathcal{A}\mathbf{v}_2 \otimes \mathcal{B}\mathbf{w} = (\mathcal{A}\mathbf{v}_1 + \mathcal{A}\mathbf{v}_2) \otimes \mathcal{B}\mathbf{w} - \mathcal{A}\mathbf{v}_1 \otimes \mathcal{B}\mathbf{w} - \mathcal{A}\mathbf{v}_2 \otimes \mathcal{B}\mathbf{w} = 0$$

Поэтому действие $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ на $V \otimes W$ задано корректно.

Отметим также непосредственно вытекающие из правила на тензорное произведение операторов соотношения

$$\begin{aligned}&(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})(\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}) = \mathcal{A}\mathcal{C} \otimes \mathcal{B}\mathcal{D}, \\ &(\mathcal{A} + \mathcal{C}) \otimes \mathcal{B} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} + \mathcal{C} \otimes \mathcal{B}, \\ &\mathcal{A} \otimes (\mathcal{B} + \mathcal{D}) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} + \mathcal{A} \otimes \mathcal{D}, \\ &\mathcal{A} \otimes \lambda\mathcal{B} = \lambda\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \lambda(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}).\end{aligned}$$

(Проверку их оставляем читателю. ????)

Еще пара свойств (???)

Пусть, как прежде, $V = \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle, W = \langle \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m \rangle$. Матрицу $A \otimes B$ размера $nm \times nm$ оператора $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ в базисе

$$(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{f}_m, \ldots, \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{f}_m)$$

мы получим, заметив, что

$$\begin{aligned}&\mathcal{A}\mathbf{e}_i = \sum_{i'} \alpha_{i'i} \mathbf{i}_{i'}, \\ &\mathcal{B}\mathbf{f}_j = \sum_{j'} \beta_{j'j} \mathbf{f}_{j'}, \\ &(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j) = \sum_{i',j'} \alpha_{i'i}\beta_{j'j} \mathbf{e}_{i'} \otimes \mathbf{f}_{j'}.\end{aligned}$$

Стало быть, с $A = (\alpha_{i'i}), B = (\beta_{j'j})$ имеем

$$A \otimes B = (\alpha_{i'i}\beta_{j'j}) = \begin{Vmatrix} \alpha_{11}B & \alpha_{12}B & \ldots & \alpha_{1n}B \\ \alpha_{21}B & \alpha_{22}B & \vdots & \alpha_{2n}B \\ \alpha_{n1}B & \alpha_{n2}B & \ldots & \alpha_{nn}B \end{Vmatrix}.$$

В частности, имеем формулу для следа

$$\operatorname{tr} A \otimes B = \alpha_{11} \operatorname{tr} B + \ldots + \alpha_{nn} \operatorname{tr} B = \operatorname{tr} A \cdot \operatorname{tr} B$$

Отметим попутно, что

$$\begin{aligned}\det A \otimes B &= \det\left((A \otimes E_m)(E_n \otimes B)\right) = \\ &= \det(A \otimes E_m) \cdot \det(E_n \otimes B) = \\ &= (\det A)^m (\det B)^n\end{aligned}$$

так что невырожденность операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ влечёт невырожденность их тензорного произведения $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Формулы (21) и (22) используются в теории представлений групп.

Об обобщениях и применениях тензорного произведения (???)

(их много, потом укажу.)

(в том числе в кострикине 3, до которого я почти не доходил в плане переучивания, там будет это использоваться. потом дожму!)

13.1.6 Diagram Methods for Tensors

Теория по Иванову

(тут куча картинок не вставлена, потом вставлю.)

Диаграммные обозначения развивают идею использования дужек (1.2.11), соединяющих парные немые индексы.

В диаграммных обозначениях тензоры (векторы, ковекторы и т.д.) представляются в виде узлов, в которых сходится определённое (для каждого сорта объекта) число линий. Вы можете себе представить такой объект как некое электронное устройство, из которого торчит k проводков. Каждый из проводков соответствует индексу.

Проводки можно соединять попарно, причём соединяемые проводки могут относиться как к разным узлам, так и к одному узлу. Такое соединение обозначает приравнивание соответствующих индексов и суммирование по всему их диапазону.

Диаграммные обозначения тензоров не всегда удобны для вычислений, но их полезно держать в голове, так как они автоматически подразумевают правильный баланс индексов. Однако проводки бывают разных сортов и соединяются они по следующим правилам: - Каждый индекс/проводок является либо верхним (контравариантным), либо нижним (ковариантным) индексом. Соединять между собой можно только верхние и нижние индексы. - Каждый индекс/проводок имеет свою область определения. Для соединяемых проводков области определения должны совпадать. Мы считаем, что индексы для разных систем координат пробегают разные наборы значений. - В некоторых случаях удобно проводки/индексы ли/мультииндексы. - Иногда линии (или выходы узлов) полезно подписывать соответствующими буквенными индексами, чтобы не перепутать порядок индексов и упростить перевод формул в другие обозначения.

Таким образом, в диаграммных обозначениях тензорные формулы представляются в виде диаграмм. Если диаграмма состоит из нескольких несвязанных кусков, то подразумевается, что они умножаются друг на друга.

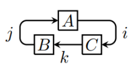
Диаграмма, в свою очередь, может рассматриваться как узел, несущий все внешние (свободные, оставшиеся не соединёнными) линии/проводки. Если у диаграммы нет внешних линий, то это скаляр.

Диаграммы с одинаковым набором внешних линий (тензоры одного типа) образуют линейное пространство (их можно умножать на числа и складывать). Вектор, ковектор, их свёртка: (i) $\xrightarrow{i} = v^i$, (u) $\xleftarrow{i} = u_i$, (v) $\xrightarrow{i}$ (i) $= v^i u_i$.

Метрический тензор и обратный метрический тензор в диаграммных обозначениях представляются как некоторые переходники, позволяющие менять ориентацию линий. Метрический тензор, скалярное произведение двух векторов, опускание индекса: Обратный метрический тензор, скалярное произведение двух ковекторов, поднимание индекса: Линейное преобразование, действие преобразования на вектор, произведение преобразований (соединение их в цепочку):

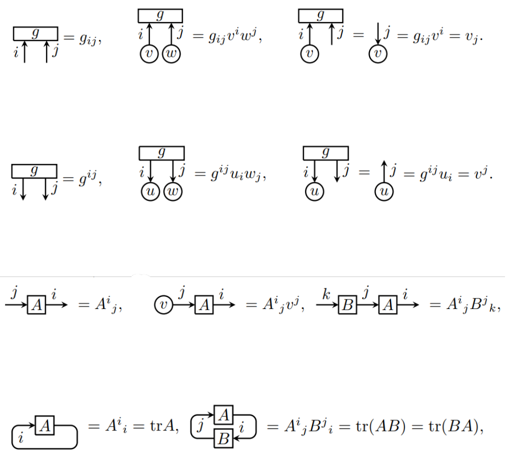
В матричном виде могут быть записаны только те тензорные выражения, которые можно вытянуть в цепочку. С помощью операции взятия следа эту цепочку можно замкнуть в кольцо. След можно брать только от тензора у которого один индекс верхний, а другой нижний! След - замыкание матрицы на себя:

$$\mathrm{i} \ = A^i{}_i = \operatorname{tr} A, \vec{A}$$



$$= A^i{}_j B^j{}_k C^k{}_i = \operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(BCA) = \operatorname{tr}(CAB).$$

$$(v)\xrightarrow{i} = v^i, \qquad (u)\xleftarrow{i} = u_i, \qquad (v)\xrightarrow{i}(u) = v^i u_i.$$



Применения в квантовой теории информации

13.2 Operations on Tensors

13.2.1 свертка

(это тренировать нужно!)

Понятие свертки

След линейного оператора

Для линейного оператора $\mathcal{F} : V \to V$ с матрицей $F = \left(f_j^i\right)$ в некотором базисе $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ инвариантным образом определено понятие следа

$$\operatorname{tr} \mathcal{F} = \sum_i f_i^i,$$

то есть при его независимости от выбора базиса.

Инвариантность следа

Инвариантность следа, т.е. его независимость от выбора базиса, легко усматривается при интерпретации $\left(f_j^i\right)$ как тензора типа $(1,1)$, поскольку в базисе $(\mathbf{e}_i')$ имеем

$$\sum_k f'^k_{k\ k} = \sum_{i,j,k} a_k^i f_i^j b_j^k = \sum_{i,j} f_i^j \sum_k b_j^k a_k^i = \sum_{i,j} f_i^j \delta_j^i = \sum_i f_i^i = \operatorname{tr} \mathcal{F}.$$

Определение следа

Определение 13.3. *Зафиксируем все переменные, кроме* $\mathbf{x}_r$ *и* u_s*, мы получим билинейную форму:*

$$f\left(\mathbf{x}_r, u_s\right) := T\left(\ldots, \mathbf{x}_r, \ldots, u_s, \ldots\right).$$

Свёртка тензора T *по* r*-му ковариантному индексу и по* s*-му контравариантному индексу это сумма*

$$\bar{T} = \sum_k f\left(\mathbf{e}_k, e^k\right)$$

Операции взятия следа в тензорном анализе соответствует более общая операция свёртывания. Чтобы её определить, проще всего временно отождествить смешанный тензор T типа (p,q) с его значением как $(p+q)$-линейной формы на произвольных векторах $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p \in V, u_1, \ldots, u_q \in V^*$.

Независимость свертки от базиса

В сумме (1) каждое слагаемое $f\left(\mathbf{e}_k, e^k\right)$, являющееся полилинейной формой от $\mathbf{x}_1, \ldots, \widehat{\mathbf{x}}_r, \ldots, \widehat{u}_s \ldots, u_q$, зависит от выбора базиса в V, но $\bar{T}$ от выбора базиса не зависит (как всегда, $\widehat{a}$ означает пропуск символа a).

Действительно, если $\mathbf{e}'_k = \sum\limits_i a^i_k \mathbf{e}_i, A = (a^i_k)$, то $e'^k = \sum\limits_i b^k_i e^i$, где $B = \left(b^k_i\right) = A^{-1}$. Поэтому

$$\sum_k f\left(\mathbf{e}'_k, e'^k\right) = \sum_{i,j,k} a^i_k b^k_j f\left(\mathbf{e}_i, e^j\right) =$$
$$= \sum_{i,j} \left(\sum_k b^k_j a^i_k\right) f\left(\mathbf{e}_i, e^j\right) = \sum_{i,j} \delta^i_j f\left(\mathbf{e}_i, e^j\right) = \sum_i f\left(\mathbf{e}_i, e^i\right) = \bar{T},$$

что и доказывает инвариантность $\bar{T}$.

(??? ниже - хз)

Как мы знаем, билинейную форму f можно представить в виде

$$f\left(\mathbf{x}_r, u_s\right) = \left(u_s, \mathcal{F}\mathbf{x}_r\right),$$

где $\mathcal{F}$ - линейный оператор, зависящий от $\mathbf{x}_1, \ldots, \widehat{\mathbf{x}}_r, \ldots, \widehat{u}_s \ldots, u_q$. В таком случае $\bar{T} = \operatorname{tr}\mathcal{F}$, а это ещё раз устанавливает независимость $\bar{T}$ от выбора базиса и делает очевидной связь между операциями свёртывания и взятия следа.

Обозначим операцию свёртывания по паре индексов r, s символом tr^s_r. Она будет линейным отображением

$$\mathbb{T}^q_p(V) \to \mathbb{T}^{q-1}_{p-1}(V),$$

относящим каждому разложимому смешанному тензору

$$R = f_1 \otimes \ldots \otimes f_p \otimes \mathbf{v}_1 \otimes \ldots \otimes \mathbf{v}_q, \quad \mathbf{v}_i \in V, \quad f_j \in V^*,$$

тензор

$$\operatorname{tr}^s_r(R) = \left(f_r, \mathbf{v}_s\right) f_1 \otimes \ldots \otimes \widehat{f_r} \otimes \ldots \otimes \widehat{\mathbf{v}}_s \otimes \ldots \otimes \mathbf{v}_q.$$

Теорема о свертке в координатной форме (?)

Свёртка по -му ковариантному индексу u по s-му контравариантному индексу смешанного тензора T типа (p,q) является тензором $\bar{T}$ типа $(p-1, q-1)$ к координатами, определёнными по формуле

$$\bar{T}^{j_1 \ldots j_{s-1} j_{s+1} \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_{r-1} i_{r+1} \ldots i_p} = \sum_k T^{j_1 \ldots j_{s-1} k j_{s+1} \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_{r-1} k i_{r+1} \ldots i_p}.$$

Так как $(e^r, \mathbf{e}_s) = \delta^r_s$, то операцию tr^s_r удобно выразить в координатной форме. Пусть

$$T = \sum_{i,j} T^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{j_q}$$

Тогда

$$\bar{T} = \operatorname{tr}^s_r(T) = \sum_{i,j} T^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p} \operatorname{tr}^s_r\left(e^{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{j_q}\right) =$$
$$= \sum_{i,j} T^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p} \delta^{i_r}_{j_s} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes \widehat{e}^{i_r} \otimes \ldots \otimes \widehat{\mathbf{e}}_{j_s} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{j_q} =$$
$$= \sum_{i,j} T^{j_1 \ldots \hat{j} \ldots \ldots j_q}_{i_1 \ldots \hat{i}_r \ldots i_p} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes \widehat{e}^{i_r} \otimes \ldots \otimes \widehat{\mathbf{e}}_{j_s} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{j_q}$$

где
$$\bar{T}^{j_1\dots j_{s-1}j_{s+1}\dots j_q}_{i_1\dots i_{r-1}i_{r+1}\dots i_p} = \sum_k T^{j_1\dots j_{s-1}kj_{s+1}\dots j_q}_{i_1\dots i_{r-1}ki_{r+1}\dots i_p}.$$

Мы знаем, что разложимые тензоры

$$e^{i_1} \otimes \dots \otimes \widehat{e}^{i_r} \otimes \dots \otimes e^{i_p} \otimes \mathbf{e}_{j_1} \otimes \dots \otimes \widehat{\mathbf{e}}_{j_s} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{j_q}$$

составляют базис пространства $\mathbb{T}^{q-1}_{p-1}(V)$, поэтому $\bar{T}^{j_1\dots j_{s-1}j_{s+1}\dots j_q}_{i_1\dots i_{r-1}i_{s+1}\dots i_p}$ координаты тензора $\bar{T}$.

О полном свертывании

К тензору $\bar{T} = \mathrm{tr}^s_r(T)$ можно в свою очередь применить операцию свёртывания. В результате m-кратного свёртывания, где $m = \min(p, q)$, получится либо скаляр, либо чисто ковариантный (или чисто контравариантный) тензор, к которому операция свёртывания уже не применима. В этом случае говорят о полном свёртывании тензора.

Известные операции как свертки (???)

(??? ниже пока так и не въехал, потом еще посмотрю.)

Взятие следа линейного оператора - пример полного свёртывания.

Примером неполного свёртывания может служить произведение двух линейных операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.В самом деле, если $A = \left(a^i_j\right)$, $B = \left(b^k_l\right)$ - матрицы этих операторов в каком-то базисе, то тензор
$$T = T^{ik}_{jl}, \quad T^{ik}_{jl} = a^i_j b^k_l,$$

свёрнутый по ковариантному индексу тензора A и по контравариантному индексу тензора B, будет равен тензору $C = (c^i_l)$, где

$$c^i_l = \sum_j T^{ij}_{jl} = \sum_j a^i_j b^j_l.$$

Легко догадаться, что c^i_l - элемент произведения матриц AB.

Рассмотренный пример иллюстрирует часто применяемую операцию, которая состоит в образовании произведения двух тензоров (не являющихся одновременно контравариантными или ковариантными) и последующего свёртывания полученного смешанного тензора по одной или нескольким парам индексов.

(??? совсем не понял)

13.2.2 Structural Tensor of Algebra

(???)

Определение алгебры

Пусть V - конечномерная алгебра над полем k с операцией умножения $(a, b) \mapsto a * b$, не обязательно ассоциативной. Если $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ - базис пространства V, то

$$\mathbf{e}_i * \mathbf{e}_j = \sum_k \gamma^k_{ij} \mathbf{e}_k.$$

О п ре деление 2. Скаляры $\gamma^k_{ij} \in \mathfrak{K}$ называются структурными константами алгебры V в данном базисе.

Заданием Г алгебра V полностью определяется.

В силу билинейности операции умножения $*$ алгебра V полностью определяется заданием базиса и структурных констант в нём.

Структурные константы в разных базисах

В другом базисе $(\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n)$ структурные константы будут совсем иными

$$\mathbf{e}'_i * \mathbf{e}'_j = \sum_k \gamma'^k_{ij} \mathbf{e}'_k.$$

Найдем связь между структурными константами в различных базисах, для этого типично разложим новый базис по старому, а затем обратно перейдем к новому. Пусть $\mathbf{e}'_i = \sum\limits_s a^s_i \mathbf{e}_s$, $\mathbf{e}_j = \sum\limits_t b^t_j \mathbf{e}'_t$, так что $B = \left(b^t_j\right) = A^{-1}$, $A = (a^s_i)$. Имеем

$$\sum_k \gamma^k_{ij} e'_k = \mathbf{e}'_i * \mathbf{e}'_j = \left(\sum_s a^s_i \mathbf{e}_s\right) * \left(\sum_t a^t_j \mathbf{e}_t\right) =$$
$$= \sum_{s,t} a^s_i a^t_j \mathbf{e}_s * \mathbf{e}_t = \sum_{s,t,r} a^s_i a^t_j \gamma^r_{st} \mathbf{e}_r = \sum_{s,t,r,k} a^s_i a^t_j \gamma^r_{st} b^k_r \mathbf{e}'_k$$

откуда

$$\gamma'^k_{ij} = \sum_{s,t,r} a^s_i a^t_j \gamma^r_{st} b^k_r.$$

Сравнив эту формулу с формулой преобразования тензоров $T^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p} = \sum\limits_{i',j'} b^{i'_1 \ldots i'_p}_{i_1 \ldots i_p} T^{j'_1}_{\imath'_1 \ldots j'_q} a^{j_1 \ldots j_q}_{j'_1 \ldots j'_q}$, видим, что структурные константы меняются так же, как координаты тензора типа $(2, 1)$. Следовательно, мы имеем право рассматривать так называемый структурный тензор $\Gamma = \left(\gamma^k_{ij}\right)$ алгебры V.

Формула следа (??)

Для фиксированного $\mathbf{a} \in V$ рассмотрим отображение $L_{\mathbf{a}} : \mathbf{x} \mapsto \mapsto \mathbf{a} * \mathbf{x}$, являющееся, очевидно, линейным оператором на V. Важным инструментом для исследования строения алгебры V служит форма следа - билинейная симметричная форма

$$f_V(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \operatorname{tr} L_{\mathbf{a}} L_{\mathbf{b}}.$$

Билинейность формы f_V вытекает из билинейности операции $*$, её симметричность - из общего свойства $\operatorname{tr} \mathcal{AB} = \operatorname{tr} \mathcal{BA}$.

Для явного вычисления f_V запишем $\mathbf{a} = \sum\limits_i \alpha^i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{b} = \sum\limits_i \beta^i \mathbf{e}_i$ и тогда

$$L_{\mathbf{a}} L_{\mathbf{b}} \mathbf{e}_k = \mathbf{a} * (\mathbf{b} * \mathbf{e}_k) = \sum_{i,j} \alpha^i \beta^j \mathbf{e}_i * (\mathbf{e}_j * \mathbf{e}_k) = \sum_{i,j,s} \alpha^i \beta^j \gamma^s_{jk} \gamma^t_{is} \mathbf{e}_t.$$

Чтобы вычислить $f_V(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, нужно взять диагональные коэффициенты матрицы

$$\left(R^t_k\right) \quad \text{с} \quad R^t_k = \sum_{i,j,s} \alpha^i \beta^j \gamma^s_{jk} \gamma^t_{is}$$

и просуммировать их:

$$f_V(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i,j,s,t} \alpha^i \beta^j \gamma^s_{jk} \gamma^t_{is}.$$

Как и следовало ожидать, мы записали $f_V(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ в виде полной свёртки тензора.

Пример алгебры с векторным произведением (??)

(?? и чего пример?? не очень понимаю, в чем его важность и зачем он? но скорее всего он на самом деле полезный)

С точки зрения механики и физики интересно рассмотреть трёхмерную алгебру Ли $V = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$, операция умножения в которой $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \mathbf{a} * \mathbf{b} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ задаётся правилом векторного умножения векторов в трёхмерном евклидовом пространстве

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = \mathbf{e}_3, \quad [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1] = \mathbf{e}_2, \quad [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = \mathbf{e}_1.$$

Здесь $\gamma_{ij}^k \neq 0$ лишь для трёх попарно различных индексов i, j, k, причём $\gamma_{ji}^k = = -\gamma_{ij}^k \cdot$ Для любых векторов

$$\mathbf{a} = \alpha^1 \mathbf{e}_1 + \alpha^2 \mathbf{e}_2 + \alpha^3 \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = \beta^1 \mathbf{e}_1 + \beta^2 \mathbf{e}_2 + \beta^3 \mathbf{e}_3$$

скалярное произведение вычисляется по обычной формуле

$$(\mathbf{a} | \mathbf{b}) = \alpha^1 \beta^1 + \alpha^2 \beta^2 + \alpha^3 \beta^3,$$

а произведение в алгебре - по формуле

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \left(\alpha^2 \beta^3 - \alpha^3 \beta^2\right) \mathbf{e}_1 + \left(\alpha^3 \beta^1 - \alpha^1 \beta^3\right) \mathbf{e}_2 + \left(\alpha^1 \beta^2 - \alpha^2 \beta^1\right) \mathbf{e}_3.$$

Вспомним в этой связи выражение для координат момента силы. Опираясь на формулу (6), можно непосредственно проверить, что скалярное произведение (5) обладает свойством "ассоциативности"

$$([\mathbf{a}, \mathbf{b}] | \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \mid [\mathbf{b}, \mathbf{c}]).$$

Это красивое соотношение является на самом деле следствием свойства ассоциативности формы следа в произвольной конечномерной алгебре Ли V

$$f_V([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) = f_V(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]).$$

Для доказательства этого заметим, что тождество Якоби в V, переписанное в виде

$$[[\mathbf{x}, \mathbf{y}], \mathbf{z}] + [[\mathbf{z}, \mathbf{x}], \mathbf{y}] + [[\mathbf{y}, \mathbf{z}], \mathbf{x}] = 0$$

$$[[\mathbf{x}, \mathbf{y}], \mathbf{z}] = [\mathbf{x}, [\mathbf{y}, \mathbf{z}]] - [\mathbf{y}, [\mathbf{x}, \mathbf{z}]],$$

даёт нам для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$

$$L_{[\mathbf{x}, \mathbf{y}]} = L_{\mathbf{x}} L_{\mathbf{y}} - L_{\mathbf{y}} L_{\mathbf{x}}.$$

Так как $\operatorname{tr} \mathcal{AB} = \operatorname{tr} \mathcal{BA}$, то, полагая поочерёдно $\mathcal{A} = L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{a}}, \mathcal{B} = L_{\mathbf{c}}$ или $\mathcal{A} = L_{\mathbf{c}} L_{\mathbf{b}}$, $\mathcal{B} = L_{\mathbf{a}}$, получим

$$\begin{aligned} f_V([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) &= \operatorname{tr} L_{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]} L_{\mathrm{c}} = \operatorname{tr} \left(L_{\mathbf{a}} L_{\mathbf{b}} L_{\mathrm{c}} - L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{a}} L_{\mathbf{c}}\right) = \\ &= \operatorname{tr} L_{\mathbf{a}} L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{c}} - \operatorname{tr} L_{\mathbf{c}} L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{a}} = \operatorname{tr} L_{\mathbf{a}} L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{c}} - \operatorname{tr} L_{\mathbf{a}} L_{\mathbf{c}} L_{\mathbf{b}} = \\ &= \operatorname{tr} L_{\mathbf{a}} \left(L_{\mathbf{b}} L_{\mathbf{c}} - L_{\mathbf{c}} L_{\mathbf{b}}\right) = \operatorname{tr} L_{\mathbf{a}} L_{[\mathbf{b}, \mathbf{c}]} = f_V(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) \end{aligned}$$

что и даёт соотношение $f_V([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) = f_V(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}])$.

Эквивалентность (7) и (8) в случае нашей трёхмерной алгебры прямо вытекает из подсчёта $f_V(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ по тензорной формуле (4):

$$f_V(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -2 \left(\alpha^1 \beta^1 + \alpha^2 \beta^2 + \alpha^3 \beta^3\right) = -2(\mathbf{a} | \mathbf{b}).$$

Обратим ещё внимание на следующее обстоятельство. Соотношение (7), переписанное в виде

$$(L_{\mathbf{a}} \mathbf{x} | \mathbf{y}) + (\mathbf{x} | L_{\mathbf{a}} \mathbf{y}) = 0$$

и означающее попросту кососимметричность матрицы, отвечающей оператору L_{a} в каком-нибудь базисе, чем-то напоминает условие ортогональности оператора $\mathcal{A} \in O_3(\mathbb{R}) = \operatorname{Aut}((\mathbf{x} | \mathbf{y}))$:

$$(\mathcal{A} \mathbf{x} | \mathcal{A} \mathbf{y}) = (\mathbf{x} | \mathbf{y}).$$

Оказывается, связь здесь самая непосредственная, и корни её уходят в общую теорию групп и алгебр Ли.

13.2.3 Symmetry and Symmetric Tensors

Симметричность тензора по первым двум ковариантным индексам и по последним двум контравариантным индексам означает:

$$T^{r\ldots st}_{ij\ldots k} = T^{r\ldots ss}_{ij\ldots k} = T^{r\ldots st}_{ji\ldots k} = T^{r\ldots .ts}_{ji\ldots k}.$$

Перестановка ковариантного индекса с контравариантным, вообще говоря, не имеет смысла и не приводит к тензору.

Обсуждая вопросы симметричности и кососимметричности, мы нисколько не потеряем в общности, если ограничимся тензорами типа $(p, 0)$ или $(0, q)$, причём перестановки будем применять ко всем $p($ или $q)$ индексам, а не к какой-то их части. Кроме того, поле $\mathfrak{k}$, которое до сей поры считалось произвольным, мы будем считать имеющим нулевую характеристику. В приложениях наиболее важны поля $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

Пусть для определённости $T \in \mathbb{T}^0_p(V)$, т.е. $T = \sum\limits_{i_1\ldots i_p} T_{i_1\ldots i_p} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_p}$, и S_p - симметрическая группа степени p, действующая на множестве индексов $\{1, 2, \ldots, p\}$. Для любой перестановки $\pi \in S_p$ положим

$$f_\pi(T)\left(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p\right) = T\left(\mathbf{x}_{\pi 1}, \ldots, \mathbf{x}_{\pi p}\right)$$

(здесь $\mathbf{x}_i$ - вектор с номером i; его k-й координатой будет x^k_i).

Так как T - полилинейная форма на V^p, то и $f_\pi(T)$ - полилинейная форма, причём того же типа $(p, 0)$. Действительно, если, скажем, $\pi k = 1$, то

$$\begin{aligned} f_\pi(T)\left(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p\right) &= T\left(\mathbf{x}_{\pi 1}, \ldots, \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{x}_{\pi p}\right) = \\ &= \alpha T\left(\mathbf{x}_{\pi 1}, \ldots, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{\pi p}\right) + \beta T\left(\mathbf{x}_{\pi 1}, \ldots, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{x}_{\pi p}\right) = \\ &= \alpha f_\pi(T)\left(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p\right) + \beta f_\pi(T)\left(\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p\right). \end{aligned}$$

Полагая ещё по определению

$$f_\pi\left(\alpha T' + \beta T''\right) = \alpha f_\pi\left(T'\right) + \beta f_\pi\left(T''\right),$$

мы видим, что π индуцирует невырожденный линейный оператор $f_\pi : \mathbb{T}^{p;0} \to \mathbb{T}^{p;0}$. Полезно заметить ещё, что $f_\sigma \circ f_\tau = f_{\sigma\tau}$ (см. [BA I, гл. 1, §8, п. 4]).

В соответствии с выражением (9) тензора T через базисные элементы $e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_p}$ его координатами являются $T_{i_1\ldots i_p} = T\left(\mathbf{e}_{i_1}, \ldots \ \ldots, \mathbf{e}_{i_p}\right)$. Координатами тензора $f_\pi T$ в том же базисе будут

$$f_\pi(T)_{i_1\ldots i_p} = f_\pi(T)\left(\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_p}\right) = T\left(\mathbf{e}_{i_{\pi 1}}, \ldots, \mathbf{e}_{i_{\pi p}}\right) = T_{i_{\pi 1}\ldots i_{\pi p}},$$

Т.е.

$$f_\pi(T) = \sum_{i_1\ldots i_p} T_{i_{\pi 1}\ldots i_{\pi p}} e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_p},$$

или, что равносильно,

$$f_\pi(T) = \sum_{i_1\ldots i_p} T_{i_1\ldots i_p} e^{i_{\pi^{-1}1} \otimes \ldots \otimes e^{i_{\pi^{-1}p}}}.$$

Отсюда, между прочим, следует, что

$$f_{\pi^{-1}}\left(e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_p}\right) = e^{i_{\pi 1}} \otimes \ldots \otimes e^{i_{\pi p}}.$$

Конечно, если бы мы рассматривали действие S_p на контравариантных тензорах, то получили бы формулу

$$f_{\pi^{-1}}(T) = \sum_{i_1\ldots i_p} T^{i_1\ldots i_p} \mathbf{e}_{i_{\pi^{-1}1}} \otimes \ldots \otimes \mathbf{e}_{i_{\pi^{-1}p}}.$$

Определение симметричного тензора $(p, 0)$ и симметризации

Определение 3. Тензор T типа $(p, 0)$ (или $(0, q)$) называется симметричным, если $f_\pi(T) = T$ для всех $\pi \in S_p$ (соответственно для всех $\pi \in S_q$). Симметризацией (или симметрированием) тензоров из $T_p^0(V)$ называется отображение

$$S = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} f_\pi : T_p^0(V) \to T_p^0(V).$$

Подпростанства симметричных тензоров в $\mathbb{T}_p^0(V)$ и $\mathbb{T}_0^q(V)$ обозначим соответственно через $\mathbb{T}_p^+(V)$ и $\mathbb{T}_+^q(V)$. Например,

$$S\left(e^1 \otimes e^2 \otimes e^2\right) = \frac{1}{3}\left(e^1 \otimes e^2 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^1 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^2 \otimes e^1\right).$$

Очевидно, результат симметризации всякого тензора из $\mathbb{T}_p^0$ симметричен:

$$f_\sigma(S(T)) = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} f_\sigma\left(f_\pi(T)\right) = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} f_{\sigma\pi}(T) = \frac{1}{p!} \sum_{\tau \in S_p} f_\tau(T) = S(T)$$

Мы воспользовались здесь тем фактом, что при фиксированной перестановке $\sigma \in S_p$ элементы $\sigma\pi$ пробегают вместе с π все элементы группы S_p, причём ровно по одному разу. Итак, $\operatorname{Im} S \subset \mathbb{T}_p^+(V)$.

Напротив, на симметричных тензорах симметризация является тождественной операцией, как это следует непосредственно из (12), так что $T \in \mathbb{T}_p^+(V) \Longrightarrow T = S(T)$. Стало быть, имеет место

Теорема 2. Действие отображения симметризации S иа $\mathbb{T}_p^0$ обладает свойствами $S^2 = S u \operatorname{Im} S = \mathbb{T}_p^+(V)$.

П р и ме р 2. Одним из классических примеров тензора является тензор инерции - симметричная матрица $J = (J_{ij})$ порядка 3, где J_{ii} - осевой момент инерции твёрдого тела относительно оси $\mathbf{e}_i$, а $J_{ij}, i \neq j$, - центробежные моменты инерции, взятые с обратными знаками. Итак, пусть дано вращающееся твёрдое тело с одной закреплённой точкой $\dot{o}$. Предполагается, что тело состоит из некоторого числа n частиц с массами m_k; положение частиц задано векторамистолбцами $[x_k, y_k, z_k], 1 \leqslant k \leqslant n$. Тензор J, описывающий распределение массы и используемый при вычислении углового момента и кинетической энергии тела, задаётся матричным соотношением

$$J = \left(\sum_k \left(x_k, y_k, z_k\right)\left[x_k, y_k, z_k\right]\right) E - \sum_k \left[x_k, y_k, z_k\right]\left(x_k, y_k, z_k\right)$$

(здесь, как обычно, E - единичная матрица порядка $3, (x_k, y_k, z_k) = {}^t\left[x_k, y_k, z_k\right]$ - вектор-строка; суммирование заменяется интегрированием в случае непрерывно распределённой массы тела). Переходя от первоначального прямоугольного репера $(\dot{o}; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ к штрихованному при помощи ортогональной матрицы A по обычному правилу $[x_k, y_k, z_k] \to A\left[x_k, y_k, z_k\right] = [x_k', y_k', z_k']$ (понятно, что A не действует на массы m_k), мы получим матрицу

$$J' = AJ^tA = AJA^{-1},$$

т.е. $J_{ij}' = \sum\limits_{r,s} a_i^r a_j^s J_{rs}$, как и положено для тензора валентности 2. Если выписать компоненты J_{ij} в явном виде, то из (*) будем иметь

$$J = \left\| \begin{array}{ccc} \sum\limits_k m_k\left(y_k^2 + z_k^2\right) & -\sum\limits_k m_k x_k y_k & -\sum\limits_k m_k x_k z_k \\ -\sum\limits_k m_k x_k y_k & \sum\limits_k m_k\left(x_k^2 + z_k^2\right) & -\sum\limits_k m_k y_k z_k \\ -\sum\limits_k m_k x_k z_k & -\sum\limits_k m_k y_k z_k & \sum\limits_k m_k\left(x_k^2 + y_k^2\right) \end{array} \right\|.$$

Координаты J_{ij} не могут рассматриваться как физические величины, имеющие независимый от выбора репера смысл, но как мы видели, в целом J такой смысл приобретает, причём с J ассоциируются три тензорных инварианта:

$$J_1 = \operatorname{tr} J = 2\sum_k m_k \left(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2\right)$$
$$J_2 = \begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{11} & J_{13} \\ J_{31} & J_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} J_{22} & J_{23} \\ J_{32} & J_{33} \end{vmatrix}$$
$$J_3 = \det J$$

Инвариантность J_1, J_2, J_3 относительно поворотов - следствие инвариантности характеристического многочлена матрицы J.

Приведение J к главным осям, а симметричность J это позволяет сделать, даст нам матрицу $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ с собственными значениями $\lambda_i > 0, i = 1, 2, 3$, называемыми главтьми моментами икерчии. В частности, тензор инерции положительно определён. Если ω - угловая скорость вращающегося тела, а $\mathbf{j}$ - угловой момент, то $\mathbf{j} = J\omega$. Параллельность $\mathbf{j}$ и ω имеет место тогда и только тогда, когда тело вращается вокруг одной из своих главных осей.

В своё время теоремой 3 из §4 гл. 1 мы установили биективное соответствие между квадратичными формами и симметричными билинейными формами. Это соответствие в более слабой форме продолжает иметь место и в случае полилинейных форм.

Оп ределение 4. Функцию $Q : \mathbf{x} \mapsto$ на V назовём однородной степени р, если

$$Q(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}, \ldots, \mathbf{x}),$$

Отображение симметризации, применённое к форме F, даёт нам по теореме 2 симметричную p-линейную форму $S(F)$:

$$(S(F))\left(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p\right) = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} F\left(\mathbf{x}_{\pi 1}, \ldots, \mathbf{x}_{\pi p}\right),$$

где $F : V^p \to \mathfrak{R}$ - какая-нибудь p-линейная форма на V. Ясно, что

$$Q(\mathbf{x}) = (S(F))(\mathbf{x}, \ldots, \mathbf{x})$$

Форма $S(F)$ называется p-линейной формой, полярной κQ. Мы получили часть следующего утверждения. Теорема 3. Каждая однородная Функиия Q степени р выражается через свою полярную р-линейную Форяу в виде (13). Форма, полярная к Q, единственна.

Доказат ельство. Единственность полярной формы следует из её координатного выражения. Пусть

$$(S(F))\left(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_p\right) = \sum (S(F))_{i_1 \ldots i_p} x_1^{i_1} \ldots x_p^{i_p}.$$

Тогда

$$Q(\mathbf{x}) = \sum (S(F))_{i_1 \ldots i_p} x^{i_1} \ldots x^{i_p}.$$

Однородный многочлен $f\left[X_1, \ldots, X_n\right]$ степени p от n независимых переменных, значение которого при $X_i = x^i$ есть $Q(\mathbf{x})$, единственным образом записывается в виде

$$f\left(X_1, \ldots, X_n\right) = \sum_{i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_p} f_{i_1 \ldots i_p} X_{i_1} \ldots X_{i_p}.$$

Сравнивая (14) и (15), получаем

$$f_{i_1 \ldots i_p} = c \cdot (S(F))_{i_1 \ldots i_p},$$

где $c = c\left(i_1, \ldots, i_p\right) \in \mathbb{Z}$ - множитель, равный числу различных размещений, которые возникают при всевозможных перестановках индексов в строке $i_1, \ldots, i_p$. Например, при

$p=4$ имеем $c(i,i,k,l)=12, c(i,i,i,j)=4$ и т.д. Вместе с $f_{i_1\ldots i_p}$ однозначно определёнными оказываются и коэффициенты $(S(F))_{i_1\ldots i_p}$.

По существу мы получили биективное соответствие между пространством симметричных тензоров $\mathbb{T}_p^+(V)$ и пространством $\mathfrak{K}\left[X_1,\ldots,X_n\right]_p$ однородных многочленов (форм) степени p от n независимых переменных. То же самое относится к пространству $\mathbb{T}_+^p(V)$. Заметим в этой связи, что

$$\dim\mathfrak{K}\left[X_1,\ldots,X_n\right]_p=\binom{n+p-1}{p}.$$

13.2.4 Alternating and Skew-symmetric Tensors

Как и ранее, ограничимся тензорами типа $(p,0)$ или $(0,q)$ и зададим действие симметрической группы S_p на $T\in\mathbb{T}_p^0(V)$ формулой (10) или (11).

Определение 5. Назовём тензор T кососимметрицньм или антисимметричны.м, если

$$f_\pi(T)=\varepsilon_\pi T\quad\forall\pi\in S_p,$$

где ε_π - знак (или чётность) перестановки π. Напомним, что $\varepsilon:\pi\mapsto\varepsilon_\pi$ - гомоморфизм группы S_p в $\{\pm1\}$ со значениями $\varepsilon_\tau=-1$ на всех транспозициях τ.

Условие (16) можно заменить эквивалентным ему требованием

$$f_\tau(T)=-T,$$

где τ пробегает множество транспозиций (это ясно из определения и из равенства $f_\sigma\left(f_\pi(T)\right)=f_{\sigma\pi}(T)$, что в свою очередь выражается в виде

$$T(\ldots,\mathbf{x},\ldots,\mathbf{y},\ldots)=-T(\ldots,\mathbf{y},\ldots,\mathbf{x},\ldots),\quad\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$$

(на месте точек стоят произвольные векторы - одни и те же в обеих частях равенства (17)). $\mathbf{y}$ нас $\operatorname{char}\mathfrak{K}=0$, поэтому при $\mathbf{x}=\mathbf{y}=\mathbf{z}$ из (17) следует

$$T(\ldots,\mathbf{z},\ldots,\mathbf{z},\ldots)=0.$$

Положив $\mathbf{z}=\mathbf{x}+\mathbf{y}$ в $(17')$ и воспользовавшись полилинейностью T, мы получим

$$\begin{aligned}&T(\ldots,\mathbf{x}+\mathbf{y},\ldots,\mathbf{x}+\mathbf{y},\ldots)=\\&\quad=T(\ldots,\mathbf{x},\ldots,\mathbf{x},\ldots)+T(\ldots,\mathbf{y},\ldots,\mathbf{y},\ldots)+T(\ldots,\mathbf{x},\ldots,\mathbf{y},\ldots)+T(\ldots,\mathbf{y},\ldots,\mathbf{x},\ldots),\end{aligned}$$

а это значит, что из $(17')$ следует (17). Поэтому условия (17) и $(17')$ равносильны.

Свойство кососимметричности тензора T очевидным образом выражается на языке координат $T_{i_1\ldots i_p}$. Например, при $p=2$ кососимметричность означает $T_{ij}=-T_{ji}$ (кососимметричность линейного оператора или квадратной матрицы порядка n), причём это свойство, как и следовало ожидать, с выбором базиса не связано. В общем случае

$$T_{i_{E1}\ldots i_{\pi p}}=\varepsilon_\pi T_{i_1\ldots i_p}.$$

Стало быть, любая координата кососимметричного тензора однозначно определяетсл координатой с теми же индексами, расположенныпи, скажем, в порядке возрастания:

$$T_{i_1i_2\ldots i_p},\quad 1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_p\leqslant n.$$

Всякая координата с двумя одинаковыми индексами равна нулю. Напротив, координаты вида (18) с различными наборами индексов никак не связаны между собой, так что всего получается $\binom{n}{p}$ независимых координат. Эти предварительные соображения мы сейчас уточним и разовьём.

Определение альтернирования

Отображение

$$A = \frac{1}{p!}\sum_{\pi\in S_p} \varepsilon_\pi f_\pi : \mathbb{T}_p^0(V) \to \mathbb{T}_p^0(V)$$

называется альтернированием. Естественно также ввести множество $\Lambda^p(V^*)$ кососимметричных тензоров, содержащихся в $\mathbb{T}_p^0(V)$ (соответственно $\Lambda^q(V) \subset \mathbb{T}_0^q$) .На самом деле эти множества являются подпространствами, как это видно, например, из следующей импликации:

$$f_\pi P = \varepsilon_\pi P, \quad f_\pi R = \varepsilon_\pi R \Longrightarrow f_\pi(\alpha P + \beta R) = \alpha f_\pi P + \beta f_\pi R =$$
$$= \alpha\varepsilon_\pi P + \beta\varepsilon_\pi R = \varepsilon_\pi(\alpha P + \beta R) \quad \forall \alpha, \beta \in \pi.$$

Теорема о критерии альтернирования

Теорема 4. Отображение альтернирования (19) является линейным оператором

$$A(\alpha T + \beta R) = \alpha A(T) + \beta A(R),$$

обладающим следующими свойствами:
1) $A^2 = A$
2) $\operatorname{Im} A = \Lambda^p(V^*)$
3) $A(f_\sigma(T)) = \varepsilon_\sigma A(T)$.
Доказательство. 1) Согласно (19) имеем

$$A^2 = \frac{1}{(p!)^2}\sum_{\sigma,\pi\in S_p} \varepsilon_\sigma\varepsilon_\pi f_\sigma \circ f_\pi = \frac{1}{(p!)^2}\sum_{\sigma,\pi\in S_p} \varepsilon_{\sigma\pi} f_{\sigma\pi} = \frac{1}{p!}\sum_{\rho\in S_p} \varepsilon_\rho f_\rho = A$$

Здесь учтено, что любой элемент $\rho \in S_p$ ровно $p!$ способами представляется в виде произведения $\sigma\pi$: σ выбирается любым, π находится 283 из равенства $\pi = \sigma^{-1}\rho$. Использована также мультипликативность ε_σ и f_σ по σ.

2) Для всякого $T \in \mathbb{T}_p^0$ имеем

$$f_\sigma(A(T)) = \frac{1}{p!}\sum_{\pi\in S_p} \varepsilon_\pi f_\sigma(f_\pi(T)) = \varepsilon_\sigma \frac{1}{p!}\sum_{\pi\in S_p} \varepsilon_{\sigma\pi} f_{\sigma\pi}(T) = \varepsilon_\sigma A(T),$$

так что $\operatorname{Im} A \subseteq \Lambda_p(V^*)$.С другой стороны,

$$T \in \Lambda^p(V^*) \Longrightarrow A(T) = \frac{1}{p!}\sum_{\pi\in S_p} \varepsilon_\pi f_\pi(T) = \frac{1}{p!}\sum_{\pi\in S_p} \varepsilon_\pi^2 T = \frac{1}{p!}\sum_{\pi\in S_p} T = T.$$

Это и даёт нужное утверждение.

3) В 2) было проверено, что $f_\sigma A = \varepsilon_\sigma A$. По тем же причинам $A f_\sigma = \varepsilon_\sigma A$

13.2.5 Tensor Spaces

Определение

Ковариантный кососимметричный тензор, т.е. элемент пространства $\Lambda^p(V^*)$, принято называть внешней p - формой или, более подробно, внешней формой степени p ка V. Контравариантные кососимметричные векторы (элементы пространства $\Lambda^p(V)$ называются p-векторами

Считается, что $\Lambda^1(V^*) = V^*$ и $\Lambda^1(V) = V$. Введём, далее, внешнюю прямую сумму (см. § 2 гл. 1)

$$\mathbb{T}(V^*) = \kappa \oplus \mathbb{T}_1^0(V) \oplus \mathbb{T}_2^0(V) \oplus \dots$$

бесконечного числа тензорных пространств $\mathbb{T}_p^0(V), p = 0, 1, \ldots$ Элементами этой суммы считаются последовательности

$$(f_0, f_1, f_2, \ldots) = \sum_{i \geqslant 0} f_i, \quad f_i \in \mathbb{T}_i^0(V),$$

члены которой почти все (т.е. исключая конечное их число) равны нулю.

На $\mathbb{T}(V^*)$ можно смотреть как на бесконечномерную ассоциативную алгебру с умножением, определённым для тензоров:

$$\left(\sum_{i=0}^{s} f_i\right) \otimes \left(\sum_{j=0}^{t} g_j\right) = \sum_{i+j=0}^{s+t} f_i \otimes g_j = \sum_{k=0}^{s+t} h_k.$$

При этом, разумеется, выполнено условие

$$\lambda(f \otimes g) = \lambda f \otimes g = f \otimes \lambda g, \quad \lambda \in \mathfrak{K}.$$

Мы назовём $\mathbb{T}(V^*)$ алгеброй ковариантнхх тензоров. Правило (6) весьма напоминает правило умножения многочленов и отличается от него разве лишь некоммутативностью. В$\mathbb{T}_p^0(V)$ выделяется подпространство $\mathbb{T}_p^+(V)$ симметричных тензоров, отождествляемое, как мы видели в конце п. 3, с пространством однородных многочленов степени p от n переменных. Их внешняя прямая сумма является обычной алгеброй многочленов, а правило (6), надлежащим образом доопределённое, совпадает с правилом умножения многочлеНОВ.

Совершенно аналогичным образом вводится алгебра контравариантнхх тензоров

$$\mathbb{T}(V) = \nwarrow \oplus \mathbb{T}_0^1 \oplus \mathbb{T}_0^2 + \ldots$$

а в ней выделяется подпространство

$$S(V) = T_+(V) = \bigoplus_{q=0}^{\infty} \mathbb{T}_+^q(V)$$

симметричных тензоров, снова изоморфное алгебре обычных многочленов от $n = \dim V$ переменных. В явном виде структура коммутативной ассоциативной алгебры на пространстве $S(V)$ вводится по формуле

$$T_1 T_2 = S\left(T_1 \otimes T_2\right), \quad T_1 \in T_+^p(V), \quad T_2 \in T_+^q(V).$$

Алгебра $S(V)$ над полем $\Re$ называется симметрической алгеброй пространства V. Теперь мы обращаем своё внимание на подпространства

$$\Lambda\left(V^*\right) = \mathfrak{K} \oplus \Lambda^1\left(V^*\right) \oplus \Lambda^2\left(V^*\right) \oplus \ldots \subset \mathbb{T}\left(V^*\right),$$
$$\Lambda(V) = \mathfrak{K} \oplus \Lambda^1(V) \oplus \Lambda^2(V) \oplus \ldots \subset \mathbb{T}(V).$$

В отличие от симметричных тензоров (ковариантных или контравариантных), подпространства, определённые соотношениями (8), не являются подалгебрами в $\mathbb{T}(V^*)$ и соответственно в $\mathbb{T}(V)$. Оказывается, однако, что на $\Lambda(V^*)$ и $\Lambda(V)$ можно ввести естественным образом операцию, превращающую их в ассоциативные алгебры.

3. Рассмотренные нами операции симметризации и альтернирования возможны лишь над полем $\mathfrak{K}$ характеристики нуль. Как избавиться от этого ограничения, показано в [2].

13.3 Algebraic Theory of Tensors (!?!)

(по Вавилову. мб потом займусь, пока не до этого.)

13.4 Decomposition of Tensors Into Rows

(часть от гиперфайн и гравитации тут.)
(пока по Кипу Торну)

13.4.1 General Methods

Упрощенные формулы разложения тензоров в ряды (!!!!)

(вот это основное я и буду прорабатывать.)

A. Symmetric, Trace-free Tensors

In this section we state, without proof, a number of formulas that are useful in tensorial multipole analyses. The proofs are straightforward, if tedious.

Following in the footsteps of Sachs (1961) and Pirani (1964) we shall make extensive use of symmetric tracefree tensors ("STF" tensors). One can calculate the STF part of a tensor which is not ST F by two steps: (i) Construct the symmetric part:

$$S_{k_1 \cdots k_l} \equiv [A_{k_1 \cdots k_l}]^{\mathrm{S}} = \frac{1}{l!} \sum_{\pi} A_{k_{\pi(1)} \cdots k_{\pi(l)}}.$$

Here the summation goes over all $l!$ permutations π of $1, , l$. (ii) Remove all traces [cf. Eq. (2.44) of Pirani (1964)]:

$$[A_{k_1 \circ 0 k_l}]^{\mathrm{STF}} = \sum_{n=0}^{[l/2]} a^n \delta_{(k_1 k_2} \cdots \delta_{k_{2n-1} k_{2n}} S_{k_{2n+1}} \cdots k_l{}^{[j_1 j_1 \cdots\cdots j_n j_n},$$

$$a^n \equiv (-1)^n \tfrac{l!(2l-2n-1)!!}{(l-2n)!(2l-1)!!(2n)!!}.$$

Here $[l/2]$ means the largest integer less than or equal to $l/2$.

B. Integrals over a Sphere

The following integrals are useful when doing multipole calculations:

$$\frac{1}{4\pi} \int N_{A_{2l+1}} d\Omega = 0,$$

$$\frac{1}{4\pi} \int N_{A_{2l}} d\Omega = \left(\frac{1}{2l+1} \right) \delta_{(a_1 a_2} \cdots \delta_{a_{2l-1} a_{2l})}.$$

[Recall definition (1.6b) of N_{A_l}.] The completely symmetrized product of Kronecker deltas has the form

$$\delta_{(a_1 a_2} \cdots \delta_{a_{2l-1} a_{2l})} =$$

$$= \frac{1}{(2l-1)!!} \sum_{j_2, j_4, \cdots, j_{2k}} \delta_{a_1 a_{j_2}} \delta_{a_{j_3} a_j} \cdots \delta_{a_{j_{2l-1}} a_{j_{2l}}},$$

where

j_2 is summed from 2 to $2l$,

j_3 is the smallest integer not equal to 1 or j_2, j_4 is summed over all integers, 2 to $2l$, not equal to j_2 or j_3

j_5 is the smallest integer not equal to 1 or j_2 or j_3 or j_4,

From Eqs. (2.3) and (2.4) it follows that, for any two STF tensors Q and B,

$$\frac{1}{4\pi} \int (\mathcal{Q}_{A_p} N_{A_p})(\mathcal{B}_{B_q} N_{B_q}) d\Omega$$

$= 0$ if Q and Q have different rank, $p \neq q$

$= \frac{p!}{(2p+1)!!} \mathbb{Q}_{A_p} \mathbb{B}_{A_p}$ if $p = q$;

$\frac{1}{4\pi} \int n_i \left(Q_{A_p} N_{A_p} \right) \left(Q_{B_q} N_{B_q} \right) d\Omega$

$= 0$ unless Q and Q differ in rank by 1

$= \frac{p!}{(2p+1)!!} Q_{i A_{p-1}} Q_{A_{p-1}}$ if $q = p - 1$.

Scalar Spherical Harmonics

The usual representation of scalar spherical harmonics is in terms of complex functions of θ and ϕ,

$$\begin{aligned} Y^{lm} &= C^{lm} e^{im\phi} P^{lm}(\cos\theta) && \text{for } m \geqslant 0, \\ &= C^{lm}\left(e^{i\phi}\sin\theta\right)^m \sum_{j=0}^{[(l-m)/2]} a^{lmj}(\cos\theta)^{l-m-2j} && \text{for } m \geqslant 0, \\ &= (-1)^m Y^{llml*} && \text{for } m < 0. \end{aligned}$$

Here $*$ denotes complex conjugation; $[(l-m)/2]$ means "the largest integer less than or equal to $(l-m)/2$ "; and

$$C^{lm} \equiv (-1)^m \left(\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right)^{1/2},$$

$$a^{lmj} \equiv \frac{(-1)^j}{2lj!(l-j)!}\frac{(2l-2j)!}{(l-m-2j)!}.$$

These scalar harmonics are orthonormal

$$\int Y^{lm} Y^{l'm'} * d\Omega = \delta_{ll,}\delta_{mm'};$$

they have parity $\pi = (-1)^l$ ("electric-type" parity); and under complex conjugation they transform as

$$Y^{lm*} = (-1)^m Y^{l-m}.$$

The set of all symmetric trace-free tensors of rank l ("STF-l tensors") generates an irreducible representation of the rotation group, of weight l [Gel'fand et al. (1963), Courant and Hilbert (1953)]. Hence, there exists a one-to-one mapping between them and the spherical harmonics of order l; see Pirani (1964), pp. 289-290. To exhibit that mapping one expresses the Cartesian components of the unit radial vector $\mathbf{n}$ in the form

$$n_x + in_y = e^{i\phi}\sin\theta, \quad n_z = \cos\theta;$$

and one then inserts these expressions into Eq. (2.7), obtaining

$$Y^{lm}(\theta,\phi) = Y^{lm}_{K_l} N_{K_l}.$$

Here $Y^{lm}_{K_l}$ is the following (location-independent) STF-l tensor:

$$\begin{aligned} Y^{lm}_{k_1\cdots k_l} \equiv\ & C^{lm}\sum_{j=0}^{[(l-m)/2]} a^{lmj}\left(\delta^1_{(k_1} + i\delta^2_{(k_1}\right)\cdots\left(\delta^1_{k_m} + i\delta^2_{k_m}\right) \\ & \times\delta^3_{k_{m+1}}\cdots\delta^3_{k_{l-2j}}\left(\delta^{a_1}_{k_{l-2j+1}}\delta^{a_1}_{k_{l-2j+2}}\right)\cdots\left(\delta^{a_j}_{k_{l-1}}\delta^{a_j}_{k_l}\right)\Big) \end{aligned}$$

$$Y^{lm}_{k_1\cdots k_l} = (-1)^m\left(Y^{l|m!}_{k_1\cdots k_l}\right) * \text{ for } m<0, \quad \text{for } m \geqslant 0$$

where $\delta^{a_i}_{k_s}$ is the Kronecker delta.

The tensors Y^{lm}_K with $-l \leqslant m \leqslant +l$ serve two roles: first, they generate the spherical harmonics of order l [Eq. (2.11)]; second, they form a basis for the $(2l+1)$ dimensional vector space of STF-l tensors; i.e., any STF-l tensor $\mathfrak{F}$ can be expanded as

$$\mathcal{F}_{K_l} = \sum_{m=-l}^{1} F^{lm}\mathcal{Y}^{lm}_{K_l}$$

The tensor components $\mathcal{F}_{K_l}$ are real if and only if $F^{l-m} = (-1)^m F^{\imath m*}$. Expansion (2.13a) can be inverted as follows:

$$\begin{aligned} F^{lm} &= \int\sum_{m'=-l}^{l}\left(F^{lm'}Y^{lm'}\right)Y^{lm*}d\Omega = \int\mathfrak{F}_{K_l}N_{K_l}Y^{lm*}d\Omega \\ &= 4\pi\frac{l!}{(2l+1)!!}\mathfrak{F}_{K_l}\mathcal{Y}^{lm*}_{K_l}. \end{aligned}$$

Here the integral is over a sphere surrounding the origin, and the integral was performed with the help of Eqs. (2.11) and (2.5).

In practical calculations one can use spherical harmonics and STF-l tensors interchangeably: Consider any sphere centered on the coordinate origin, and on that sphere consider any scalar function $f(\theta, \phi)$. One can expand $f(\theta, \phi)$ in spherical harmonics with complexnumber expansion coefficients

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} F^{lm} Y^{lm}(\theta, \phi);$$

alternatively, one can expand it in powers of the unit radial vector n, with coefficients that are STF-l tensors

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \mathfrak{F}_{K_l} N_{K_l}.$$

The expansion coefficients of the two schemes are related by Eqs. (2.13a) and (2.13b).

Vector Spherical Harmonics

Several different conventions for vector spherical harmonics exist in the literature. That of Rose [(1955), p. 22], Edmonds [(1957), p. 82], and Mathews (1962) is the most closely tied to the rotation group. It is obtained by coupling scalar harmonics of order l' to the basis vectors

$$\boldsymbol{\xi}^0 \equiv \mathbf{e}_z, \quad \boldsymbol{\xi}^{\pm 1} \equiv \mp (\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y)/\sqrt{2}$$

(which transform under an irreducible representation of order 1), thereby obtaining harmonics $\mathrm{Y}^{l',lm}$ that transform under a representation of order $l = l' \pm (1 \text{ or } 0)$,

$$\mathbf{Y}^{l',lm}(\theta, \phi) = \sum_{m'=-l'}^{l'} \sum_{m''=-1}^{1} (1l'm''m'|lm)\, \xi^{m''} Y^{l'm'},$$
$$l' = l \pm (1 \text{ or } 0).$$

Here $(l''l'm''m'|lm)$ are Wigner (Clebsch-Gordan) coefficients. (Edmonds and Mathews use the notation $Y_{ll'm}$; Rose uses $\mathbf{T}^m_{ll'}$) We shall call $\mathbf{Y}^{l',lm}$ and the corresponding tensor harmonics (Sec. II.E) "pure-orbital harmonics" because they are eigenfunctions of the orbital angular momentum operator L^2 [Eq. (2.42b)]. For fixed l' and l they transform among each other according to an irreducible representation of order l. These harmonics are orthonormal

$$\int \mathrm{Y}^{l,LM} \cdot \mathbf{Y}^{l',L'M'*} d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{LL^\circ}, \delta_{MM'};$$

$\mathbf{Y}^{l',lm}$ has parity $\pi = (-1)^{l'+1}$ [which means that, because the Cartesian basis vectors $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ reverse direction under parity inversions, the Cartesian components satisfy $Y^{l'}_j, lm(-\mathbf{n}) = -(-1)^{l'+1} Y^{l'}_j, lm(\mathbf{n})]$; and under complex conjugation it transforms as

$$\mathbf{Y}^{l',lm*} = (-1)^{l'+l+m+1} \mathrm{Y}^{l',l-m}.$$

These pure-orbital vector harmonics are nicely re- lated to solutions of Laplace's equation and the vector wave equation (Secs. II.F and II.G). However, they are not optimally designed for describing radiation, in the radiation zone, because $\mathrm{Y}^{l\neq 1,lm}$ is neither purely radial nor purely transverse. The following "pure-spin vector harmonics" are better suited for describing radiation:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Y}^{E,lm} &= (2l+1)^{-1/2} \left[(l+1)^{1/2} \mathbf{Y}^{l-1,lm} + l^{1/2} \mathrm{Y}^{l+1,lm} \right] \\
&= [l(l+1)]^{-1/2} r \nabla Y^{lm} = -\mathrm{n} \times \mathrm{Y}^{B,lm}, \\
\mathbf{Y}^{B,lm} &= i\mathbf{Y}^{l,lm} = i[l(l+1)]^{-1/2}\, \mathrm{L} Y^{lm} = \mathbf{n} \times \mathrm{Y}^{E,lm}, \\
\mathrm{Y}^{R,lm} &= (2l+1)^{-1/2} \left[l^{1/2} \mathbf{Y}^{l-1,lm} - (l+1)^{1/2} \mathbf{Y}^{l+1,lm} \right] \\
&= \mathrm{n} Y^{lm}.
\end{aligned}$$

Here ∇ is the gradient operator of Euclidean threespace, and L is the angular momentum operator

$$\mathbf{L} \equiv (1/i)\mathbf{x} \times \boldsymbol{\nabla}.$$

$\mathrm{Y}^{E,lm}$ and $\mathrm{Y}^{B,lm}$ are purely transverse; $\mathrm{Y}^{R,lm}$ is purely radial; $\mathrm{Y}^{E,lm}$ and $\mathrm{Y}^{R,lm}$ have "electric-type parity" $\pi = (-1)^l$; $\mathrm{Y}^{B,lm}$ has "magnetic-type parity", $\pi = (-1)^{l+1}$; these Y's are orthonormal

$$\int \mathbf{Y}^{J,lm} \cdot \mathbf{Y}^{J\prime}, l'm' * d\Omega = \delta_{JJ}, \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

and their complex conjugates are

$$\mathrm{Y}^{J,lm*} = (-1)^m \mathbf{Y}^{J,l-m}.$$

[The factor i was included in Eq. (2.18b) in order to produce this complex conjugate relationship.] We call these harmonics "pure spin" because they enter in pure form into the description of the polarization of purespin zero-rest-mass vector fields $\big(\mathbf{Y}^{E,lm}$ and $\mathbf{Y}^{B}, lm$ for transverse spin-one-i.e., electromagnetism; $\mathbf{Y}^{R,lm}$ for longitudinal spin-zero). These pure-spin vector harmonics are intimately related to the Regge-Wheeler (1957) vector harmonics:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}^{E,lm} &= [l(l+1)]^{-1/2}\Psi^{lm},\\
\mathbf{Y}^{B,lm} &= [l(l+1)]^{-1/2}\Phi^{lm},\\
\mathbf{Y}^{R,lm} &= \mathbf{n}Y^{lm};
\end{aligned}$$

and also to the Newman-Penrose (1966) spin-weighted spherical harmonics ${}_sY^{lm}$ [for details of which see Goldberg et al. (1967)]:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Y}^{E,lm} = 2^{-1/2}\left({}_{-1}Y^{lm}\ \mathrm{m} - {}_{1}Y^{lm}\ \mathrm{m}^*\right)\\
&\mathbf{Y}^{B,lm} = -2^{-1/2}i\left({}_{-1}Y^{lm}\mathbf{m} + {}_{1}Y^{lm}\mathbf{m}^*\right),\\
&\mathbf{Y}^{R,lm} = {}_0Y^{lm}\mathbf{n},\\
&\mathrm{m} \equiv 2^{-1/2}\left(\mathbf{e}_\theta + i\mathrm{e}_\phi\right), \quad \mathrm{m}^* = 2^{-1/2}\left(\mathrm{e}_\theta - i\mathbf{e}_\phi\right).
\end{aligned}$$

The STF version of vector spherical harmonics can be obtained by inserting expression (2.11) for Y^{lm} into the second expression in each of Eqs. $(2.18a - 2.18c)$ for $\mathbf{Y}^{E,lm}$, $\mathbf{Y}^{B,lm}$, and $\mathbf{Y}^{R,lm}$,

$$\begin{aligned}
Y_j^{E,lm} &= [l/(l+1)]^{1/2}\left[\mathcal{Y}_{jA}^{lm} N_{l_1} N_{l-1}\right]^T\\
&\qquad \left[\pi = (-1)^l\right],\\
Y_j^{B,lm} &= [l/(l+1)]^{1/2}\epsilon_{jpq} n_p Y_{qA}^{lm} N_{l-1} N_{A_{l-1}}\\
&\qquad \left[\pi = (-1)^{l+1}\right],\\
Y_j^{R,lm} &= n_j Y_{A_l}^{lm} N_{A_l} \quad \left[\pi = (-1)^l\right].
\end{aligned}$$

Here ϵ_{jpq} is the Levi-Civita tensor (antisymmetric symbol), and the superscript T means "transverse part of" [Eq. (1.9)]. By comparing with Eqs. (2.18) one can derive the relationship between the pure-orbital harmonics and the STF harmonics

$$\begin{aligned}
Y_j^{l-1,lm} =& [l/(2l+1)]^{1/2} Y_{jA}^{lm} N_{A^{l-1}},\\
Y_j^{l,lm} =& -i[l/(l+1)]^{1/2}\epsilon_{jpq} n_p Y_{qA_{l-1}^{lm}}^{lm} N_{A_{l-1}},\\
Y_j^{l+1,lm} =& -[(2l+1)/(l+1)]^{1/2}\\
&\times\left\{n_j Y_{A_l}^{lm} N_{A_l} - [l/(2l+1)] Y_{jA_{l-1}}^{lm} N_{A_{l-1}}\right\}.
\end{aligned}$$

An arbitrary vector field $\mathbf{V}(\theta, \phi)$ can be expanded in terms of pure-orbital harmonics or pure-spin harmonics or Regge-Wheeler harmonics or spin-weighted harmonics; and one can read off the relationships between the expansion coefficients by examining the relationships between the harmonics themselves. For example, the pure-spin and STF expansions have the forms

$$V_j = \sum_{l,m} \left(E^{lm} Y_j^{E,lm} + B^{lm} Y_j^{B,lm} + R^{lm} Y_j^{R,lm} \right),$$

$$V_j = \sum_{l} \left(\left[\mathcal{E}_{jA_{l-1}} N_{A_{l-1}} \right]^T + \epsilon_{jpq} n_p \otimes_{qA_{l-1}} N_{A_{l-1}} + n_j \mathbb{R}_{A_l} N_{A_l} \right)$$

and by comparing with Eqs. (2.23) one deduces that

$$\mathcal{E}_{A_l} = \left(\frac{l}{l+1} \right)^{1/2} \sum_m E^{lm} y_{A_l}^{lm},$$

$$Q_{A_l} = \left(\frac{l}{l+1} \right)^{1/2} \sum_m B^{lm} y_{A_l}^{lm},$$

$$Q_{A_l} = \sum_m R^{lm} \mathcal{Y}_{A_l}^{lm}.$$

One can invert these relations using Eqs. (2.13).

In calculations with STF spherical harmonics the following identities are useful:

$$y_{A_l}^{lm*} y_A^{lm'} = \frac{1}{4\pi} \frac{(2l+1)!!}{l!} \delta_{m'm},$$

$$\mathcal{Y}_{A_l}^{lm*} \mathcal{Y}_{jA_l}^{(l+1)(\mu+m)} = \frac{1}{4\pi} \frac{(2l+3)!!}{(l+1)!} \left(\frac{l+1}{2l+3} \right)^{1/2} (1l\mu m|l+1\mu+m) \xi_j^{\mu}$$

if $\mu = 0$ or ± 1

$= 0$ if $\mu \neq 0$ or ± 1,

$$\epsilon_{jpq} \mathcal{Y}_{pA}^{lm*} *_{l-1} \mathcal{Y}_{qA}^{l(m-1)} = \frac{i}{4\pi} \frac{(2l+1)!!}{l!2l} [2(l+m)(l-m+1)]^{1/2} \xi_j^{-1},$$

$$\epsilon_{jpq} Y_{pA}^{lm*} \mathcal{Y}_{q-1}^{lm} = \frac{i}{4\pi} \frac{(2l+1)!!}{l!} \frac{m}{l} \xi_j^0,$$

$$\epsilon_{jpq} \mathcal{Y}_{pA}^{lm*} \mathcal{Y}_{q-A}^{l(m+1)} = \frac{-i}{4\pi} \frac{(2l+1)!!}{l!2l} [2(l-m)(l+m+1)]^{1/2} \xi_j^1,$$

$$\epsilon_{jpq} Y_{pA}^{lm*} Y_{l-1}^{l(m+\mu)} = 0 \text{ if } \mu \neq 0 \text{ or } \pm 1.$$

Equation (2.26a) can be derived by combining the orthonormality relation for scalar harmonics with Eqs.

(2.11) and (2.5); Eq. (2.26b) follows from Eqs. (2.6), (2.23c), (2.18c), (2.11), (2.16), and orthonormality for scalar harmonics; Eqs. (2.26c)-(2.26f) follow from Eqs. (2.5), (2.24a), (2.16), (2.15), orthonormality for scalar harmonics, and algebraic expressions for the relevant Clebsch-Gordan coefficients.

Tensor Spherical Harmonics

Mathews (1962) has constructed a set of "pure-orbital" tensor spherical harmonics which, like the $Y^{l',lm}$, are closely tied to the rotation group. He first couples the basis vectors ξ^m to obtain five symmetric basis tensors t^m, which transform among each other under an irreducible representation of the rotation group of order 2,

$$\mathbf{t}^m = \sum_{m'=-1}^{1} \sum_{m''=-1}^{1} (11m'm''|2m)\, \xi^{m'} \otimes \xi^{m''},$$

and a single basis tensor-the unit tensor (equal to $3^{-1/2}$ times the Euclidean metric) - which gives a representation of order zero

$$3^{-1/2}\delta = -\sum_{m'=-1}^{1} \sum_{m''=-1}^{1} (11m'm''|00)\, \xi^{m'} \otimes \xi^{m''}.$$

The analogous tensors that give a representation of order 1 are antisymmetric, and are thus of no interest for gravitational-wave theory. See Zerilli (1970) for details. In terms of Cartesian basis vectors $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ these symmetric basis tensors are

$$
\begin{aligned}
\mathrm{t}^{\pm 2} &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}_x \otimes \mathrm{e}_x - \mathrm{e}_y \otimes \mathrm{e}_y\right) \pm \frac{1}{2} i \left(\mathrm{e}_x \otimes \mathrm{e}_y + \mathrm{e}_y \otimes \mathrm{e}_x\right), \\
\mathrm{t}^{\pm 1} &= \mp \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}_x \otimes \mathrm{e}_z + \mathrm{e}_z \otimes \mathrm{e}_x\right) - \frac{1}{2} i \left(\mathrm{e}_y \otimes \mathrm{e}_z + \mathrm{e}_z \otimes \mathrm{e}_y\right) \\
\mathrm{t}^{0} &= 6^{-1/2}\left(-\mathrm{e}_x \otimes \mathrm{e}_x - \mathrm{e}_y \otimes \mathrm{e}_y + 2\mathrm{e}_z \otimes \mathrm{e}_z\right), \\
3^{-1/2}\delta &= 3^{-1/2}\left(\mathrm{e}_x \otimes \mathrm{e}_x + \mathrm{e}_y \otimes \mathrm{e}_y + \mathrm{e}_z \otimes \mathrm{e}_z\right)
\end{aligned}
$$

Mathews then couples these basis tensors to the scalar spherical harmonics to obtain the six basis harmonics

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T}^{2l',lm} &= \sum_{m'=-l'}^{l'} \sum_{m''=-2}^{2} (l' 2 m' m'' | lm)\, Y^{l'm'} \mathbf{t}^{m''}, \\
l' &= l \pm (0, 1, \text{ or } 2); \\
\mathbf{T}^{0l,lm} &= -Y^{lm} 3^{-1/2} \delta.
\end{aligned}
$$

[Mathews (1962) uses the notation $T_{ll'm}$ for $\mathbf{T}^{2l',lm}$; and actually, he never introduces or uses $\mathrm{T}^{0l,lm}$; Zerilli (1970) defines the analogous, antisymmetric, $T^{1l'}, lm$, and he uses the notation $T^{(\lambda)}_{ll'm}$ for our $T^{\lambda l',lm}$.] The pureorbital harmonics $\mathrm{T}^{\lambda l',lm}$ with fixed λ, l', and l transform among each other under rotations according to an irreducible representation of order l. These harmonics are orthornormal

$$
\int T^{\lambda l,LM}_{jk} T^{\lambda' l',L'M'*}_{jk} d\Omega = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{ll'} \delta_{LL'} \delta_{MM'}
$$

they have parity $\pi = (-1)^{l'}$; and under complex conjugation they transform as

$$
\mathbf{T}^{\lambda l',lm*} = (-1)^{l'+l+m} \mathbf{T}^{\lambda l',l-m} \text{ for } \lambda = 0 \text{ or } 2.
$$

These pure-orbital tensor harmonics are nicely related to solutions of Laplace's equation (Sec. II.F) and the wave equation (Sec. II.G). However, they are not optimally designed for describing radiation in the radiation zone because, under local rotations about the radial vector, their tensor components (for fixed λ, l', l, m) do not transform as the components of the polarization tensor of a pure spin state. The following "pure-spin tensor harmonics" introduced by Zerilli (1970) [and for spin 2 by Mathews (1962)], do behave like pure-spin states {note Zerilli's sign error on the second term of Eq. (2.30a) -his Eq. (6c); also note that the fourth line of his Eq. (6a) should read $\times[J(J-1)]^{1/2}[(2J-1)(2J+1)]^{-1/2} T^{(2)}_{J,J-2,M}$}:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T}^{L0,lm} &= \left(\frac{(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l+3)}\right)^{1/2} \mathbf{T}^{2l+2,lm} - \left(\frac{2l(l+1)}{3(2l-1)(2l+3)}\right)^{1/2} \mathrm{T}^{2l,lm} + \left(\frac{(l-1)l}{(2l-1)(2l+1)}\right)^{1/2} \mathbf{T}^{2l-2,lm} \\
&= \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} Y^{lm}; \\
\mathrm{T}^{T0,lm} &= -\left(\frac{(l+1)(l+2)}{2(2l+1)(2l+3)}\right)^{1/2} \mathrm{T}^{2l+2,lm} + \left(\frac{l(l+1)}{3(2l-1)(2l+3)}\right)^{1/2} \mathrm{T}^{2l,lm} - \left(\frac{(l-1)l}{2(2l-1)(2l+1)}\right)^{1/2} \mathbf{T}^{2l} \\
&= 2^{-1/2}(\delta - \mathrm{n} \otimes \mathrm{n}) Y^{lm}; \\
\mathbf{T}^{E1,lm} &= -\left(\frac{2l(l+2)}{(2l+1)(2l+3)}\right)^{1/2} \mathbf{T}^{2l+2,lm} - \left(\frac{3}{(2l-1)(2l+3)}\right)^{1/2} \mathbf{T}^{2l,lm} + \left(\frac{2(l-1)(l+1)}{(2l-1)(2l+1)}\right)^{1/2} \mathbf{T}^{2l-2,lm} \\
&= \left[-2\mathbf{n} \times \mathbf{T}^{B1,lm}\right]^{\mathrm{S}}; \\
\mathbf{T}^{E2,lm} &= \left(\frac{l(l-1)}{2(2l+1)(2l+3)}\right)^{1/2} \mathbf{T}^{2l+2,lm} + \left(\frac{3(l-1)(l+2)}{(2l-1)(2l+3)}\right)^{1/2} \mathbf{T}^{2} l, lm + \left(\frac{(l+1)(l+2)}{2(2l-1)(2l+1)}\right)^{1/2} \mathbf{T}^{2l-2,l}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T}^{B2,lm} &= -i\left(\frac{l-1}{2l+1}\right)^{1/2}\mathbf{T}^{2l+1,lm} - i\left(\frac{l+2}{2l+1}\right)^{1/2}\mathbf{T}^{2l-1,lm} \\
&= \left(\frac{2}{(l-1)(l+2)}\right)^{1/2}\left[i\mathbf{L}\mathbf{Y}^{E,lm}\right]^{\mathrm{STT}} \\
&= \left(\frac{2}{(l-1)(l+2)}\right)^{1/2}\left[r\nabla\mathbf{Y}^{B,lm}\right]^{\mathrm{STT}} \\
&= \left(2\frac{(l-2)!}{(l+2)!}\right)^{1/2}\left[i\mathbf{L}r\nabla Y^{lm}\right]^{\mathrm{STT}} \\
&= \left(2\frac{(l-2)!}{(l+2)!}\right)^{1/2}\left[ir\nabla\mathbf{L}Y^{lm}\right]^{\mathrm{STT}} \\
&= \left[\mathbf{n}\times\mathbf{T}^{E2,lm}\right]^{\mathrm{S}}.
\end{aligned}
$$

Here a superscript S means "symmetric part of" and superscript TT means "transverse traceless part of" [Eqs. (1.7b) and (1.11)]; ∇ is the gradient operator and L is the angular momentum operator [Eq. (2.19)].

[Zerilli (1970) uses the notation

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{a}_{lm} = \mathbf{T}^{L0,lm}, \quad \mathbf{b}_{lm} = \mathbf{T}^{E1,lm}, \quad \mathbf{c}_{lm} = -i\mathbf{T}^{B1,lm}, \\
&\mathbf{d}_{lm} = -i\mathbf{T}^{B2,lm}, \quad \mathbf{f}_{lm} = \mathbf{T}^{E2,lm}, \quad \mathbf{g}_{lm} = \mathbf{T}^{T0,lm};
\end{aligned}
$$

and Mathews (1962) uses the notation

$$
\mathbf{T}_{lm}^{m} = \mathbf{T}^{E2,lm}, \quad \mathbf{T}_{lm}^{e} = i\mathbf{T}^{B2,lm}.
$$

Zerilli and Mathews, and also Wagoner (1977) use the ter ms "electric-type parity" and "magnetic-type parity" to refer to $\pi = (-1)^{l+1}$ and $\pi = (-1)^{l}$, respectively-which is opposite to our terminology and to that found everywhere else in the general relativity literature. Their terminology leads to the objectionable convention that the gravitational waves produced by a slow-motion source are predominantly of "magnetic quadrupole" type; our terminology makes them "electric quadrupole."] The transfor mation (2.30) from pure-orbital to pure-spin harmonics is unitary; therefore it is easily inverted:

$$\mathbf{T}^{0l,lm} = -3^{-1/2}\mathbf{T}^{L0,lm} - \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}\mathbf{T}^{T0,lm},$$

$$\mathbf{T}^{2l-2,lm} = \left(\frac{(l-1)l}{(2l-1)(2l+1)}\right)^{1/2}\mathbf{T}^{L0,lm}$$

$$-\left(\frac{(l-1)l}{2(2l-1)(2l+1)}\right)^{1/2}\mathbf{T}^{T0,lm}$$

$$+\left(\frac{2(l-1)(l+1)}{(2l-1)(2l+1)}\right)^{1/2}\mathbf{T}^{E1,lm}$$

$$+\left(\frac{(l+1)(l+2)}{2(2l-1)(2l+1)}\right)^{1/2}\mathbf{T}^{E2,lm},$$

$$\mathbf{T}^{2l-1,lm} = i\left(\frac{l-1}{2l+1}\right)^{1/2}\mathbf{T}^{B1,lm} + i\left(\frac{l+2}{2l+1}\right)^{1/2}\mathbf{T}^{B2,lm},$$

$$+\left(\frac{l(l+1)}{3(2l-1)(2l+3)}\right)^{1/2}\mathbf{T}^{T0,lm}$$

$$\mathbf{T}^{2l,lm} = -\left(\frac{2l(l+1)}{3(2l-1)(2l+3)}\right)^{1/2}\mathbf{T}^{L0,lm}$$

$$+\left(\frac{3(l-1)(l+2)}{(2l-1)(2l+3)}\right)^{1/2}\mathbf{T}^{E2,lm},$$

$$\mathbf{T}^{E1,lm}$$

$$\mathbf{T}^{2}l^{+1,1,lm} = -i\left(\frac{l+2}{2l+1}\right)^{1/2}\mathbf{T}^{B1,lm} + i\left(\frac{l-1}{2l+1}\right)^{1/2}\mathbf{T}^{B2,lm}$$

$$\mathbf{T}^{2l+2,lm} = \left(\frac{(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l+3)}\right)^{1/2}\mathbf{T}^{20,lm}$$

$$-\left(\frac{(l+1)(l+2)}{2(2l+1)(2l+3)}\right)^{1/2}\mathbf{T}^{T0,lm}$$

$$-\left(\frac{2l(l+2)}{(2l+1)(2l+3)}\right)^{1/2}\mathbf{T}^{E1,lm}$$

$$+\left(\frac{l(l-1)}{2(2l+1)(2l+3)}\right)^{1/2}\mathbf{T}^{E2,lm}$$

For fixed l, m, θ, ϕ the pure-spin harmonics have the following algebraic and directionality properties:

$\mathrm{T}^{L0,lm}$: pure "longitudinal"'(i.e., pure radial);

$T^{T0,lm}$: pure transverse; proportional to the transverse projection tensor P_{jk};

$\mathbf{T}^{E1,lm}$ and $\mathbf{T}^{B1,lm}$: mixed longitudinal and transverse;

$\mathbf{T}^{E2,lm}$ and $\mathbf{T}^{B2,lm}$: transverse and traceless.

These algebraic and directionality properties are the same as those of the following pure-spin (i.e., purehelicity) states of radially propagating gravitational waves in general metric theories of gravity [Eardley, Lee, and Lightman (1973); Eardley et al. (1973)], which in turn correspond to the following NewmanPenrose (1962) tetrad components of the Riemann tensor of a wave

$\mathbf{T}^{L0,lm}$: longitudinal, spin 0 (Newman-Penrose Ψ_2),

$\mathbf{T}^{T0,lm}$: transverse, spin 0 (Newman-Penrose Φ_{22}),

$\mathbf{T}^{E1,lm}$ and $\mathbf{T}^{B1,lm}$: spin 1 (Newman-Penrose Ψ_3),

$\mathbf{T}^{E2,lm}$ and $\mathbf{T}^{B2,lm}$: spin 2 (Newman-Penrose Ψ_4).

The harmonics $\mathbf{T}^{L0,lm}, \mathbf{T}^{x0,lm}, \mathbf{T}^{E1,lm}$, and $\mathbf{T}^{E2,lm}$ have "electric-type" parity $\pi = (-1)^l$; while $\mathbf{T}^{B1,lm}$ and $\mathbf{T}^{B2,lm}$ have "magnetic-type" parity $\pi = (-1)^{l+1}$. The pure-spin harmonics are orthonormal

$$\int T^{JS,lm}_{jk} T^{J'S',l'm'*}_{jk} d\Omega = \delta_{JJ}, \delta_{ss'}, \delta_{lll'}\delta_{mm'};$$

and their complex conjugates are given by

$$\mathbf{T}^{JS,lm*} = (-1)^m \mathbf{T}^{JS,l_m}.$$

[The factor i was included in Eqs. (2.30e) and (2.30f) in order to produce this complex-conjugate relation.]

These pure-spin tensor harmonics are intimately related to the Regge-Wheeler (1957) tensor harmonics [see Zerilli (1969, 1970), Sandberg (1978)]:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}^{L0,lm} &= Y^{lm}\delta - \mathbf{\Phi}^{lm}, \\
\mathbf{T}^{T0,lm} &= 2^{-1/2}\mathbf{\Phi}^{lm}, \\
\mathbf{T}^{E1,lm} &= \left(\frac{2}{l(l+1)}\right)^{1/2} \left[\mathbf{n} \otimes \mathbf{\Psi}^{lm}\right]^{\mathrm{S}}, \\
\mathbf{T}^{B1,lm} &= \left(\frac{2}{l(l+1)}\right)^{1/2} \left[\mathbf{n} \otimes \mathbf{\Phi}^{lm}\right]^{\mathrm{S}}, \\
\mathbf{T}^{E2,lm} &= \left(2\frac{(l-2)!}{(l+2)!}\right)^{1/2} \left(\mathbf{\Psi}^{lm} + \frac{l(l+1)}{2}\mathbf{\Phi}^{lm}\right) \\
&= \left(2\frac{(l-2)!}{(l+2)!}\right)^{1/2} \left[\mathbf{\Psi}^{lm}\right]^{\mathbf{TT}}, \\
\mathbf{T}^{B2,lm} &= \left(2\frac{(l-2)!}{(l+2)!}\right)^{1/2} \chi^{lm},
\end{aligned}$$

and also to the Newman-Penrose (1966) spin-weighted spherical harmonics [for details of which see Goldberg et al. (1967)]:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}^{l0,lm} &= {}_0Y^{lm}\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \\
\mathbf{T}^{T0,lm} &= 2^{-1/2lm}{}_{0}Y^{l\boldsymbol{\delta}-\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})}, \\
\mathbf{T}^{E1,lm} &= \left[{}_{-1}Y^{lm}\mathbf{m} \otimes \mathbf{n} - {}_{1}Y^{lm}\mathbf{m}^* \otimes \mathbf{n}\right]^{\mathrm{s}}, \\
\mathbf{T}^{B1,lm} &= -i\left[{}_{-1}Y^{lm}\mathbf{m} \otimes \mathbf{n} + {}_{1}Y^{lm}\mathbf{m}^* \otimes \mathbf{n}\right]^{\mathrm{s}}, \\
\mathbf{T}^{E2,lm} &= 2^{-1/2}\left[{}_{-2}Y^{lm}\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + {}_{2}Y^{lm}\mathbf{m}^* \otimes \mathbf{m}^*\right], \\
\mathbf{T}^{B2,lm} &= -i2^{-1/2}\left[{}_{-2}Y^{lm}\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} - {}_{2}Y^{lm}\mathbf{m}^* \otimes \mathbf{m}^*\right].
\end{aligned}$$

The STF version of tensor spherical harmonics can be obtained by inserting expression (2.11) for Y^{lm} into Eqs. (2.30) for the pure-spin harmonics:

$$\begin{aligned}
T^{L0,lm}_{jk} =& n_j n_k \mathcal{Y}^{lm}_{A_l} N_{A_l}, \\
T^{T0,lm}_{jk} =& 2^{-1/2}\left(\delta_{jk} - n_j n_k\right)\mathcal{Y}^{lm}_{A_l} N_{A_l}, \\
T^{E1,lm}_{jk} =& [2l/(l+1)]^{1/2} \\
& \times \left[n_{(j}\mathcal{Y}^{lm}_{k)A}A_{l-1}N_{A_{l-1}} - n_j n_k \mathcal{Y}^{lm}_{A_l} N_{A_l}\right], \\
T^{B1,lm}_{jk} =& [2l/(l+1)]^{1/2}\left[n_{(j}\epsilon_{k)pq}n_p \mathcal{Y}^{lm}_{qA_{l-1}m} N_{A_{l-1}}\right], \\
T^{E2,lm}_{jk} =& \left(\frac{2(l-1)l}{(l+1)(l+2)}\right)^{1/2}\left[\mathcal{Y}^{lm}_{jkAl-2}N_{A_{l-2}}\right]^{\mathrm{TT}}, \\
T^{B2,lm}_{jk} =& \left(\frac{2(l-1)l}{(l+1)(l+2)}\right)^{1/2}\left[n_p\epsilon_{pq(j}\mathcal{Y}^{lm}_{k)qA^{lm}_{l-2}}N_{A_{l-2}}\right]^{\mathrm{TT}}.
\end{aligned}$$

By comparing with Eqs. (2.33) one can derive the relation between the pure-orbital harmonics and the STF harmonics:

$$
\begin{aligned}
T^{0\ l,lm}_{jkjk} &= \frac{(-1)^{l+1}}{3^{1/2}(2l-1)!!} r^{l+1}\left(r^{-1}\right), A_l \mathcal{Y}^{lm}_{A_l}\delta_{jk} = \frac{-1}{3^{1/2}}\mathcal{Y}^{lm}_{A_l} N_{A_l}\delta_{jk}, \\
T^{2l,lm}_{jk} &= \frac{(-1)^{l+1}}{(2l-1)!!}\left(\frac{6l(2l-1)}{(l+1)(2l+3)}\right)^{1/2} r^{l+1}\left[\left(r^{-1}\right), A_{l-1}\left(j\mathcal{Y}^{lm}_{k)A_{l-1}} - \frac{1}{3}\left(r^{-1}\right), A_l \mathcal{Y}^{lm}_{A}\delta_{jk}\right] \\
&= -\left(\frac{6l(2l-1)}{(l+1)(2l+3)}\right)^{1/2}\left[n_{(j}\mathcal{Y}^{lm}_{k)A^{lm}_{l-1}} N_{A_{l-1}} - \left(\frac{l-1}{2l-1}\right)\mathcal{Y}^{lm}_{jkA_{l-2}} N_{A_{l-2}} - \frac{1}{3}\mathcal{Y}^{lm}_{A_l} N_{A_l}\delta_{jk}\right] \\
T^{2}_{jk} l-2, lm &= \frac{(-1)^{l}(2l-3)}{(2l-3)!!}\left(\frac{(l-1)l}{(2l-1)(2l+1)}\right)^{1/2} r^{l-1}\left(r^{-1}\right)_{,A_{l-2}}\mathcal{Y}^{lm}_{jkA^{lm}_{l-2}} = \left(\frac{(l-1)l}{(2l-1)(2l+1)}\right)^{1/2} Y^{lm}_{jkA_{l-2}} N \\
T^{2l+2,lm}_{jk} &= \frac{(-1)^{l}}{(2l+3)!!}\left(\frac{(2l+1)(2l+3)}{(l+1)(l+2)}\right)^{1/2} r^{l+3}\left(r^{-1}\right), A^{jk}_{l l}\mathcal{Y}^{lm}_{A} = \left(\frac{(2l+1)(2l+3)}{(l+1)(l+2)}\right)^{1/2} \\
&\times\left[\mathcal{Y}^{lm}_{A_l} N_{A_l} n_j n_k - \left(\frac{2l}{2l+3}\right) n_{(j}\mathcal{Y}^{lm}_{k\to A_{l-1}} N_{A_{l-1}} + \frac{l(l-1)}{(2l+1)(2l+3)}\mathfrak{Y}^{lm}_{jkA_{l-2}} N_{A_{l-2}} - \frac{1}{2l+3}\mathcal{Y}^{lm}_{A_l} N_{A_l}\right. \\
T^{2l-1,lm}_{jk} &= i\frac{(-1)^{l-1}(2l-1)}{(2l-1)!!}\left(\frac{2l(l-1)}{(l+1)(2l+1)}\right)^{1/2} r^{l}\left(r^{-1}\right)_{,A_{l-2}p}\epsilon_{pq(j}\mathcal{Y}^{lm}_{k)\alpha A_{l-2}} = \\
&= i\left(\frac{2l(l-1)}{(l+1)(2l+1)}\right)^{1/2}\epsilon_{pq(j}\mathcal{Y}^{lm}_{k)qA_{l-2}} n_p N_{A_{l-2}}, \\
&= -i\left(\frac{2l(2l+1)}{(l+1)(l+2)}\right)^{1/2}\left[n_{(j}\epsilon_{k)pq} n_p \mathcal{Y}^{lm}_{qA_{l-1}} N_{A_{l-1}} - \left(\frac{l-1}{2l+1}\right)\epsilon_{pq(j}\mathcal{Y}_{k)qA^{lm}_{l-2}} n_p N_{A_{l-2}}\right].
\end{aligned}
$$

An arbitrary tensor field $\mathbf{w}(\theta,\phi)$ can be expanded in terms of pure-orbital harmonics or pure-spin harmonics or Regge-Wheeler harmonics or spin-weighted harmonics; and one can read off the relationships between the expansion coefficients by examining the relationships between the harmonics themselves and by invoking Eqs. (2.13). The situation is fully analogous to the vector case [Eqs. (2.25)].

13.4.2 Solutions of Laplace's Equation

When solving Laplace's equation or the flat-space wave equation it is most convenient to use sets of spherical harmonics which are eigenfunctions of the "orbital angular momentum" operator

$$\mathbf{L}^2 = -r^2\nabla^2 + \partial_r r^2 \partial_r .$$

The pure-orbital harmonics are eigenfunctions of L^2,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L}^2 Y^{lm} &= l(l+1) Y^{lm}, \\
\mathbf{L}^2 \mathbf{Y}^{l',lm} &= l'\left(l'+1\right)\mathbf{Y}^{l',lm}, \\
\mathbf{L}^2 \mathbf{T}^{\lambda l',lm} &= l'\left(l'+1\right)\mathbf{T}^{\lambda l',lm}
\end{aligned}
$$

but the pure-spin harmonics, the Regge-Wheeler harmonics, and the spin-weighted harmonics are not.

By virtue of Eqs. (2.42), the general scalar, vector, and tensor solutions of Laplace's equation $\nabla^2\psi = 0$ are

$$
\begin{aligned}
F(r,\theta,\phi) &= \sum_{l,m}\left(F^{lm} r^{-(l+1)} + G^{lm} r^{l}\right) Y^{lm}, \\
\mathbf{V}(r,\theta,\phi) &= \sum_{l',l,m}\left(F^{l',lm} r^{-(l'+1)} + G^{l',lm} r^{l'}\right)\mathbf{Y}^{l',lm},
\end{aligned}
$$

$$T^{2\ l+1,\ lm}_{jk} = i\frac{(-1)^{l}}{(2l+1)!!}\left(\frac{2l(2l+1)}{(l+1)(l+2)}\right)^{1/2} r^{\,l+2}(r^{-1})_{,A_{l-1}p(j}\epsilon_{k)pq}\mathcal{Y}^{lm}_{qA_{l-1}}$$

$$\mathsf{U}(r,\theta,\phi) = \sum_{\lambda, l', l, m} \left(F^{\lambda l', lm} r^{-(l'+1)} + G^{\lambda l', lm} r^{l'}\right) \mathsf{T}^{\lambda l', lm} .$$

One can construct the STF form of these solutions by inserting expressions (2.11), (2.24), and (2.40) into Eqs. (2.43), by using the relation $r,j = n_j$, by using the symmetry and trace-free features of $\mathcal{Y}^{lm}_{A_l}$, and by making suitable changes of notation. The result for the general solution that is well behaved at infinity is

$$F(r, \mathrm{n}) = \sum_{l=0}^{\infty} a_{A_l} \left(\frac{1}{r}\right)_{,A_l},$$

$$V_j(r, \mathrm{n}) = \sum_{l=1}^{\infty} \left[\mathfrak{D}_{jA_{l-1}} \left(\frac{1}{r}\right)_{,A_{l-1}} + \epsilon_{jpq} \mathfrak{C}_{qA_{l-1}} \left(\frac{1}{r}\right)_{,pA_{l-1}} \right] + \sum_{l=0}^{\infty} D_{A_l} \left(\frac{1}{r}\right)_{,jA_l},$$

$$U_{jk}(r, \mathrm{n}) = \sum_{l=0}^{\infty} \delta_{jk} \mathcal{E}_{A_l} \left(\frac{1}{r}\right)_{,A_l} + \sum_{l=2}^{\infty} \left[\mathfrak{F}_{jkA_{l-2}} \left(\frac{1}{r}\right)_{,A_{l-2}} + \epsilon_{pqj} \mathcal{S}_{kqA_{l-2}} \left(\frac{1}{r}\right)_{,pA_{l-2}} \right]^s + \sum_{l=1}^{\infty} \left[\mathfrak{K}_{jA_{l-1}} \left(\frac{1}{r}\right)_{,kA_{l-1}} + \epsilon_{jpq} g_{qA_{l-1}} \left(\frac{1}{r}\right)_{,kpA_{l-1}} \right]^s + \sum_{l=0}^{\infty} g_{A_l} \left(\frac{1}{r}\right)_{,jkA_l}.$$

The solutions which blow up at infinity are less simply expressed in STF form. It is easy to see from $\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta_3(\mathrm{x})$ that the STF expressions (2.44) do satisfy Laplace's equation everywhere except at the singular point $r = 0$.

13.4.3 Solutions of the Wave Equation

It is useful to introduce the following "basis" solutions to the vacuum wave equation $\Box\psi = (-\partial_t^2 + \nabla^2)\,\psi = 0$:

$$\Phi^{\epsilon\omega lm}(t, r, \theta, \phi) = (|\omega|/2\pi)^{1/2} e^{-i\omega t} h^{\epsilon l}(\omega r) Y^{lm}(\theta, \phi),$$

$$\Phi_j{}^{\epsilon\omega l' lm}(t, r, \theta, \phi) = (|\omega|/2\pi)^{1/2} e^{-i\omega t} \times h^{\epsilon l'}(\omega r) Y_j^{l', lm}(\theta, \phi),$$

$$\Phi_{jk}^{\epsilon\omega\lambda l' lm}(t, r, \theta, \phi) = (|\omega|/2\pi)^{1/2} e^{-i\omega t} \times h^{\epsilon l'}(\omega r) T_{jk}^{\lambda\lambda', lm}(\theta, \phi).$$

Here ω is a real frequency and ϵ is either $+$ (outgoing waves) or - (ingoing waves). We use the unconventional notation $h^{\epsilon l}(x)$ for spherical Hankel functions

$$h^{+l} = h_l^{(1)} = j^l + iy^l, \quad h^{-l} = h_l^{(2)} = j^l - iy^l,$$

where j^l and y^l are the spherical Bessel functions. Some useful formulas are

$$h^{\epsilon l}(x) = -\epsilon i x^l \left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^l \left(\frac{e^{\epsilon i x}}{x}\right),$$
$$h^{\epsilon l}(x) = e^{\epsilon i x}\sum_{k=0}^{l}\frac{(-\epsilon i)^{l+1-k}(l+k)!}{2^k k!(l-k)!}\frac{1}{x^{k+1}},$$
$$h^{\epsilon l}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{l+2k}}{2^k k!(2l+2k+1)!!}$$
$$+\epsilon i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2l+1)!!}{2^k l!(-1-2l)(1-2l)\cdots(2k-1-2l)}\frac{1}{x^{l+1-2k}}.$$

In addition to the outgoing and ingoing basis solutions, it is useful to define standing-wave basis solutions

$$\Phi^{s\omega lm} = \frac{1}{2}\left(\Phi^{+\omega lm}+\Phi^{-\omega lm}\right),$$
$$\Phi_j^{S\omega l'lm} = \frac{1}{2}\left(\Phi_j^{+\omega l'lm}+\Phi_j^{-\omega l'lm}\right),$$
$$\Phi_{jk}^{S\omega\lambda l'lm} = \frac{1}{2}\left(\Phi_{jk}^{+\omega\lambda l'lm}+\Phi_{jk}^{-\omega\lambda l'lm}\right).$$

Note that they are given by expressions (2.45) with $h^{\epsilon l}(\omega r)$ replaced by $j^l(\omega r) = \mathrm{Re}\left[h^{\epsilon l}(\omega r)\right]$.

From the basis solutions (2.45) and (2.48) one can construct scalar, vector, and symmetric-tensor Green's functions which satisfy

$$\Box G^{\epsilon}(x,x') = -\delta_4(x-x'),$$
$$\Box G^{\epsilon}_{j\cdot k}(x,x') = -\delta_{jk}\delta_4(x-x'),$$
$$\Box G^{\epsilon}_{jk\cdot pq}(x,x') = -\frac{1}{2}\left(\delta_{jp}\delta_{kq}+\delta_{jq}\delta_{kp}\right)\delta_4(x-x'),$$

and which have outgoing waves at infinity for $\epsilon = +1$, ingoing for $\epsilon = -1$. The Green's functions are given by

$$G^{\epsilon}(x,x') = \epsilon i\sum_{l,m}\int d\omega\left\{\mathrm{sgn}(\omega)\Phi^{\epsilon\omega lm}(x)\left[\Phi^{S\omega lm}(x')\right]^*\right\} \text{ if } r>r'$$
$$= \epsilon i\sum_{l,m}\int d\omega\left\{\mathrm{sgn}(\omega)\Phi^{s\omega lm}(x)\left[\Phi^{(-\epsilon)\omega lm}(x')\right]^*\right\} \text{ if } r<r';$$
$$G^{\epsilon}_{j\cdot k}(x,x') = \epsilon i\sum_{l'lm}\int d\omega\left\{\mathrm{sgn}(\omega)\Phi_j^{\epsilon\omega l'lm}(x)\left[\Phi_k^{S\omega l'lm}(x')\right]^*\right\} \text{ if } r>r'$$
$$= \epsilon i\sum_{l'lm}\int d\omega\left\{\mathrm{sgn}(\omega)\Phi_j^{S\omega l'lm}(x)\left[\Phi_k^{(-\epsilon)\omega l'lm}(x')\right]^{*\}} \text{ if } r<r';$$
$$G^{\epsilon}_{jk\cdot pq}(x,x') = \epsilon i\sum_{\lambda l'lm}\int d\omega\left\{\mathrm{sgn}(\omega)\Phi_{jk}^{\epsilon\omega\lambda l'lm}(x)\left[\Phi_{pq}^{S\omega\lambda l'lm}(x')\right]^*\right\} \text{ if } r>r'$$
$$= \epsilon i\sum_{\lambda l'\imath m}\int d\omega\left\{\mathrm{sgn}(\omega)\Phi_{jk}^{S\omega\lambda l'\imath m}(x)\left[\Phi_{pq}^{(-\epsilon)\omega\lambda l'lm}(x')\right]^{*\}} \text{ if } r<r'.$$

Here $\mathrm{sgn}(\omega)$ is the sign of $\omega(+1$ or $-1)$. One can derive these factorized expansions of the Green's functions by the same standard method as Chrzanowski and Misner (1974) use in the Kerr metric; see their Eqs. (2.15) -(2.19).

The basis solutions (2.45), (2.48), and Green's functions (2.50) do not have simple forms when written in STF language. However, the general solutions of the vacuum wave equations do have simple forms [Sachs (1961), Pirani (1964)]:

$$F(t,r,\theta,\phi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{\epsilon}\left[r^{-1}a^{\epsilon}_{A_l}(t-\epsilon r)\right],A_l,$$

$$V_j(t,r,\theta,\phi)=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{\epsilon}\left\{\left[r^{-1}\mathscr{B}^{\epsilon}_{jA_{l-1}}(t-\epsilon r)\right],A_{l-1}+\left[r^{-1}\epsilon_{jpq}{}^{\epsilon}_{qA_{l-1}}(t-\epsilon r)\right]_{,pA_{l-1}}\right\}+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{\epsilon}\left[r^{-1}D^{\epsilon}_{A_l}(t-\epsilon r)\right.$$

$$U_{jk}(t,r,\theta,\phi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{\epsilon}\delta_{jk}\left[r^{-1}\mathcal{E}^{\epsilon}_{A_l}(t-\epsilon r)\right]_{,A_l}$$

$$+\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{\epsilon}\left\{\left[r^{-1}\mathcal{F}^{\epsilon}_{jkA_{l-2}}(t-\epsilon r)\right]_{,A_{l-2}}+\left[r^{-1}\epsilon_{pq(j}\mathcal{G}_{k)qA^{\epsilon}_{l-2}}(t-\epsilon r)\right]_{,pA_{l-2}}\right\}$$

$$+\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{\epsilon}\left\{\left[r^{-1}\mathcal{C}^{\epsilon}_{A_{l-1}(j}(t-\epsilon r)\right]_{,k)A}{}_{l-1}+\left(\left[r^{-1}\epsilon_{jpq}\mathfrak{d}^{\epsilon}_{qA_{l-1}}(t-\epsilon r)\right]_{,kpA_{l-1}}\right)^{S}\right\}+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{\epsilon}\left[r^{-1}\boldsymbol{K}^{\epsilon}_{A_l}(t-\epsilon r)\right]_{,jk}$$

Here the capital script coefficients are arbitrary functions of $t-\epsilon r$. That these expressions satisfy the wave equation follows trivially from the fact that $r^{-1}f(t-\epsilon r)$ satisfies it:

$$\square\left[r^{-1}f(t-\epsilon r)\right]=0,\ \text{except at } r=0.$$

In manipulating STF solutions of the wave equation, the following relations-which are valid for any STF tensorare useful:

$$\left[r^{-1}\mathbb{B}_{A_l}(t-\epsilon r)\right]_{,A_l}=\sum_{k=0}^{l}\frac{(-1)^l(l+k)!\epsilon^{l-k}}{2^{kk}!(l-k)!}\frac{1}{r^{k+1}}(l-k)\mathbb{B}_{Al}(t-\epsilon r)N_{A_l}\qquad \text{at all } r$$

$$=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^l(2l+1)!!}{2^kk!(-1-2l)(1-2l)\cdots(2k-1-2l)}\frac{1}{r^{l+1-2k}}{}^{(2k)}\mathbb{B}_{A_l}(t)N_{A_l}$$

Here a prefix superscript in parentheses means differentiation

$${}^{(n)}\mathbb{B}(u)\equiv\left(\frac{d}{du}\right)^n\mathbb{C}(u).$$

Equation (2.53a) is given on p. 299 of Pirani (1964) for the case $\epsilon=+1$ of outgoing waves [except for an error of $(-1)^l$]; it can be derived by straightforward differentiation. Expression (2.53b) is derived most easily by comparison of (2.53a) and (2.53b) with the corresponding expansions of spherical Bessel functions, Eqs. (2.47).

13.4.4 REGIONS OF Spacetime Around an Isolated Source

We shall characterize a source of gravitational waves, semiquantitatively, by the following length scales:

$$L\equiv\text{“size of source”}$$
$$\equiv\left[\begin{array}{l}\text{radius of region inside which the}\\ \text{stress -energy } T^{\alpha\beta}\text{ is contained}\end{array}\right],$$
$$2M\equiv\text{“gravitational radius of source”}$$
$$\equiv\left[\begin{array}{l}2\times\ \text{mass of source in}\\ \text{units where } G=c=1\end{array}\right],$$
$$x\equiv\text{“reduced wavelength of waves”}$$
$$\equiv\left[\begin{array}{l}1/2\pi\times\ \text{characteristic wavelength}\\ \text{of gravitational waves emitted}\\ \text{by source}\end{array}\right],$$

Rev. Mod. Phys., Vol. 52, No. 2, Part I, April 1980

$$\left.\begin{array}{l}r_I\equiv\text{“inner radius of local wave zone”}\\ r_0\equiv\text{“outer radius of local wave zone”}\end{array}\right\}\text{(see below)}$$

Corresponding to these length scales, we shall divide space around a source into the following regions:

Source: $r \leqslant L$,
Strong-field region: $rs10M$ if $10MZL$
typically does not exist
if $L \gg 10M$,

Weak-field near zone: $L < r, \quad 10M \ll r, \quad r \ll x$,
Local wave zone: $r_I \lesssim r \lesssim r_0$
Distant wave zone: $r_0 \lesssim r$.

The "local wave zone" is the region in which (i) the source's waves are weak, outgoing ripples on a background spacetime, and (ii) the effects of the background curvature on the wave propagation are negligible.

The inner edge of the local wave zone (r_I) is the location at which one or more of the following effects becomes important: (i) the waves cease to be waves and become a near-zone field, i.e., r becomes $\lesssim x$; (ii) the gravitational pull of the source produces a significant red shift, i.e., r becomes $\sim 2M =$ (Schwarzschild radius of source); (iii) the background curvature produced by the source distorts the wave fronts and backscatters the waves significantly, i.e., $\left(r^3/M\right)^{1/2}$ becomes sx; (iv) the outer limits of the source itself are encountered, i.e., r becomes $sL =$ (size of source). Thus, the inner edge of the local wave zone is given by

$$-\epsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{l+2k}}{2^k k!\,(2l+1+2k)!!}\, {}^{(2l+1+2k)}\mathcal{B}_{A_l}(t) N_{A_l} \qquad \text{in near zone.}$$

$$r_I = \alpha \times \max \left\{\chi, 2M, \left(M\chi^2\right)^{1/3}, L\right\},$$
$$\alpha \equiv \left(\begin{array}{c}\text{some suitable number} \\ \text{large compared to unity}\end{array}\right).$$

The outer edge of the local wave zone r_0 is the location at which one or more of the following effects becomes important: (i) a significant phase shift has been produced by the " M/r " gravitational field of the source, i.e., $(M/x)\ln\left(r/r_I\right)$ is no longer $\ll \pi$; (ii) the background curvature due to nearby masses or due to the external universe perturbs the propagation of the waves, i.e., r is no longer $\ll R_B =$ (background radius of curvature). Thus, the outer edge of the local wave zone is given by

$$r_0 = \min\left[r_I \exp(x/\beta M), R_B/\gamma\right]$$
$$\beta, \gamma \equiv \left(\begin{array}{c}\text{some suitable numbers} \\ \text{large compared to unity}\end{array}\right)$$

Of course, we require that our large numbers α, β, γ be adjusted so that the thickness of the local wave zone is very large compared to the reduced wavelength:

$$r_0 - r_I \gg x.$$

Previous work in gravitational-wave theory has not distinguished the local wave zone from the distant wave zone. I think it useful to make this distinction, and to split the theory of gravitational waves into two corresponding parts: Part one deals with the source's generation of the waves, and with their propagation into the local wave zone; thus, it deals with the spacetime region $r < r_0$ (all of spacetime except the distant wave zone). Part two deals with the propagation of the waves from the local wave zone out through the distant wave zone to the observer, i.e., with the region $r > r_I$ (all of the wave zone). The two parts, wave generation and wave propagation, overlap in the local wave zone; and the two theories can be matched together there.

By making this split one can simplify the (semi)rigorous theory of wave generation. No longer must that theory face logarithmic divergences due to phase shifts produced by the mass of the source, or the energy in the waves; and no longer need one be terribly careful about choosing coordinates that avoid those divergences, a la Bondi, van der Burg, and Metzner (1962). Rather, one can use any naive, asymptotically Minkowskii coordinate system one wishes in the theory of wave generation. Such a coordinate system will serve just fine to get the waves out of the source and into the local wave zone. One can then leave to wave propagation theory the delicate task of getting the waves out of the local wave zone, through the region of dangerous logarithmic divergences, and on into the observer's detector. Moreover, for almost all realistic situations wave propagation theory can do its job admirably well using the elementary formalism of geometric optics [e.g., exercise 35.15 of Misner, Thorne, and Wheeler (1973) - cited henceforth as "MTW"-or last section of Thorne (1977)].

Throughout this paper we shall confine attention to sources which possess a local wave zone-and we shall call such sources "isolated." It seems likely that every source of gravitational waves in the Universe today is "isolated." However, in the very early Universe the background curvature $1/R_B^2$ was so large that sources might not have been isolated.

In complex situations the location of the local wave zone might not be obvious. Consider, for example, a neutron star passing very near a supermassive black hole. The tidal pull of the hole sets the neutron star into oscillation, and the star's oscillations produce gravitational waves [Mashoon (1973); Turner (1977)]. If the hole is large enough, or if the star is far enough from it, there may exist a local wave zone around the star which does not also enclose the entire hole. Of greater interest-because more radiation will be produced-is the case where the star is very near the hole and the hole is small enough ($M_h \lesssim 100 M_\odot$) to produce large-amplitude oscillations, and perhaps even disrupt the star. In this case, before the waves can escape the influence of the star, they get perturbed by the background curvature of the hole. One must then consider the entire star-hole system as the source, and construct a local wave zone that surrounds them both.

13.5 Decomposition Applications in Tensors

13.5.1 Multipole Moments Expressed as Integrals over Source

(теория по Кипу Торну, до которой я еще не дошел.)

A. General Sources

For any asymptotically flat system one can introduce an asymptotically Minkowskii coordinate system in which the quantity

$$\bar{h}^{\alpha\beta} \equiv -(-g)^{1/2} g^{\alpha\beta} + \eta^{\alpha\beta}$$

[2] Note DeWitt's correction of an error in the Peters formula for the angular momentum density in the waves, as detailed on p. 992 of MTW. satisfies the de Donder gauge condition

$$\bar{h}^{\alpha\beta}, \beta = 0;$$

see, e.g., Fock (1964, p. 193). In these de Donder coordinates the exact Einstein field equations take the form

$$\square \bar{h}^{\alpha\beta} = -16\pi\tau^{\alpha\beta},$$

where $\square$ is the flat-space scalar wave operator $-\partial_t^2 + \nabla^2$, and the "effective stress-energy" $\tau^{\alpha\beta}$ has the form $\tau^{\alpha\beta} = (-g)\left(T^{\alpha\beta} + t_{LL}^{\alpha\beta}\right) + (16\pi)^{-1}\left[\bar{h}^{\alpha\mu}, \bar{h}^{\beta\nu}{}_{;}\mu - \bar{h}^{\alpha\beta}, {}_{,\mu\nu}\bar{h}^{\mu\nu}\right]$.

Here $t_{LL}^{\alpha\beta}$ is the Landau-Lifshitz pseudotensor [MTW Eq. (20.22), or Landau and Lifshitz (1971) Eq. (101.7)]. The effective stress-energy and its two individual pieces are coordinate-divergence-free

$$\tau^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0; \quad \left[(-g)\left(T^{\alpha\beta} + t_{\mathrm{LL}}^{\alpha\beta}\right)\right]_{,\beta} = 0.$$

Far from the source, where $\left|\bar{h}^{\alpha\beta}\right| \ll 1, \bar{h}^{\alpha\beta}$ reduces to the trace-reversed metric perturbation: $\bar{h}^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}h$.

For systems with extremely strong internal gravitye.g., systems involving black holes - the de Donder coordinate system may not cover all of spacetime in a nonsingular manner. In the rest of Sec. V (but only here) we forego treating such systems; i.e., we restrict ourselves to systems which admit nonsingular spacetime-covering de Donder coordinates. We can then invert the Einstein field equations using the flatspace outgoing-wave Green's function $G_{jk\cdot pq}^{+}(x, x')$ [cf. Eqs. (5.2b) and (2.49)]

$$\bar{h}_{jk}(x) = 16\pi \int G_{jk\cdot pq}^{+}(x, x')\, \tau_{pq}(x')\, d^4x'.$$

Note that this in fact is an integral equation for $\bar{h}_{jk}$, because τ_{pq} depends on $\bar{h}_{jk}$ [Eq. (5.3)].

We now restrict attention to field points x in the local wave zone; we take the transverse-traceless part of the radiation field $\bar{h}^{\mathrm{TT}}_{jk} = h^{\mathrm{TT}}_{jk}$; and we use the factorized form (2.50c) of the Green's function to obtain

$$h^{\mathrm{TT}}_{jk}(x) = 16\pi i \sum_{\lambda l' lm} \int d\omega \left(\operatorname{sgn}(\omega) \left[\Phi^{+\omega\lambda l' lm}_{jk}(x) \right]^{\mathrm{TT}} \times \int \left[\Phi^{S\omega\lambda l' lm}_{pq}(x') \right]^{*} \tau_{pq}(x')\, d^4x' \right)$$

Again this is an integral equation; τ_{p_q} depends on h^{TT}_{jk} as well as on other parts of the gravitational field. Of the basis outgoing-wave solutions $\Phi^{+\omega\lambda l' lm}_{jk}$ only those with $\lambda = 2$ have nonzero TT part; and of these, the ones with $l' = l-2, l, l+2$ contribute to the mass multipole, while the ones with $l' = l-1, l+1$ contribute to the current multipole. More specifically, upon inserting into Eq. (5.6) expressions (2.45c) and (2.48c) for the Φ 's, and upon using Eqs. (2.33) and (2.34) to compute the TT parts of the pure-orbital harmonics $T^{\lambda l', lm}_{jk}$, and upon using the leading $1/r$ term in expression (2.47 b) for $h^{+l}(\omega r)$, one obtains the standard radiation-zone expansion (4.3) for h^{TT}_{jk}, and the following expressions for the multipole moments of the radiation field (where we have changed the names of the integration variables from t', r', Ω' to t', r, Ω)

$${}^{(l)}I^{lm}(t) = (-i)^{l+2} 8 \int e^{-i\omega(t-t')} \left[\left(\frac{(l+1)(l+2)}{2(2l-1)(2l+1)} \right)^{1/2} \left[T^{2l-2,lm}_{pq}(\Omega)\right]^{*} j^{l-2}(\omega r) - \left(\frac{3(l-1)(l+2)}{(2l-1)(2l+3)} \right)^{1/2} [T \right.$$
$$\left. + \left(\frac{l(l-1)}{2(2l+1)(2l+3)} \right)^{1/2} \left[T^{2}_{pq} l+2, lm(\Omega)\right]^{*} j^{l+2}(\omega r) \right] \tau_{pq}(t', r, \Omega)\, r^2 d\Omega dr dt' d\omega,$$

$${}^{(l)}S^{lm}(t) = (-i)^{l+2} 8 \int e^{-i\omega(t-t')} \left[\left(\frac{l+2}{2l+1} \right)^{1/2} \left[T^{2l-1,lm}_{pq}(\Omega)\right]^{*} j^{l-1}(\omega r) \right.$$
$$\left. - \left(\frac{l-1}{2l+1} \right)^{1/2} \left[T^{2l+1,lm}_{pq}(\Omega)\right]^{*} j^{l+1}(\omega r) \right] \tau_{pq}(t', r, \Omega)\, r^2 d\Omega dr dt' d\omega.$$

In these expressions the integral over frequency can be performed explicitly using the fact that the Fourier transform of a spherical Bessel function is a Legendre polynomial. The result is

$${}^{(l)}I^{lm}(t) = 8\pi(-1)^l \int r^2 d\Omega dr \left\{ \int_{-1}^{+1} d\eta \left[\left(\frac{(l+1)(l+2)}{2(2l-1)(2l+1)} \right)^{1/2} \left[T^{2l-2,lm}_{pq}(\Omega)\right]^{*} P^{l-2}(\eta) \right. \right.$$
$$\left. + \left(\frac{3(l-1)(l+2)}{(2l-1)(2l+3)} \right)^{1/2} \left[T^{2}_{pq} l, lm(\Omega)\right]^{*} P^{l}(\eta) + \left(\frac{l(l-1)}{2(2l+1)(2l+3)} \right)^{1/2} \left[T^{2}_{pq} l+2, lm(\Omega)\right]^{*} P^{l+2}(\eta) \right] \tau_{pq}(t -$$

$${}^{(l)}S^{lm}(t) = 8\pi i(-1)^{l+1} \int r^2 d\Omega dr \left\{ \int_{-1}^{+1} d\eta \left[\left(\frac{l+2}{2l+1} \right)^{1/2} \left[T^{2}_{pq} l-1, lm(\Omega)\right]^{*} P^{l-1}(\eta) \right. \right.$$
$$\left. \left. + \left(\frac{l-1}{2l+1} \right)^{1/2} \left[T^{2l+1,lm}_{pq}(\Omega)\right]^{*} p^{l+1}(\eta) \right] \tau_{pq}(t - r\eta, r, \Omega) \right\}$$

where P^l is our unconventional notation for the Lengendre polynomial of order l. These types of gravitational source integrals involving Legendre polynomials were first constructed by Campbell, Macek, and Morgan (1977).

The corresponding source integrals for the STF moments $\mathcal{J}_{A_l}$ and $\mathcal{S}_{A_l}$ can be constructed by inserting expressions (2.40) for $T^2 l', lm$ into Eq. (5.7), and by then comparing with Eq.

(4.7). (In making the comparison one should note that, because $\mathcal{Y}_{A_l}^{lm*}$ is STF on its l indices, only the STF parts of the quantities contracted into $Y_{A_l}^{lm*}$ can contribute to I^{lm} and S^{lm}.) The result is

$$\begin{aligned}(l)g_{A_l}=&\Bigg[\frac{l)l-1))2l-3)!!}{2\pi i^{l+2}}\int e^{-i\omega)t-t')}\Bigg\{N_{A_{l-2}}\tau_{a_{l-1}a_l}\left(j^{l-2}-\frac{6(l-1)(2l+1)}{(l+1)(2l+3)}j^l+\frac{(l-1)l(2l-1)}{(l+1)(l+2)(2l+3)}j^{l+2}\right.\\&+N_{A_{l-1}}\tau_{a_lj}n_j\left(\frac{6(2l-1)(2l+1)}{(l+1)(2l+3)}j^l-\frac{2l(2l-1)(2l+1)}{(l+1)(l+2)(2l+3)}j^{l+2}\right)+N_{A_l}\tau_{jj}\left(-\frac{2(2l-1)(2l+1)}{(l+1)(2l+3)}j^l-\right.\\&+N_{A_l}n_jn_k\tau_{jk}\left(\frac{(2l-1)(2l+1)}{(l+1)(l+2)}j^{l+2}\right)\Bigg\}d\omega d^3xdt'\Bigg]^{\mathrm{STF}}\\{}^{(l)}\mathcal{S}_{A_l}=&\Bigg[\frac{(l-1)(2l-1)!!}{2\pi i^{l-1}}\int e^{-i\omega(t-t')}\\&\times\left\{N_{A_{l-2}}\epsilon_{a_{l-1}pj}n_{\bar{p}}\tau_{ja_l}\left[j^{l-1}-\left(\frac{l-1}{l+2}\right)j^{l+1}\right]+\left(\frac{2l+1}{l+2}\right)N_{A_{l-1}}\epsilon_{a_lpj}n_p\tau_{jk}n_kj^{l+1}\right\}d\omega d^3xdt'\Bigg]^{\mathrm{sTF}}\end{aligned}$$

Here $j^{l'}\equiv j^{l'}(\omega r)$ and $\tau_{jk}\equiv\tau_{jk}(t',\mathrm{x})$. These are the STF analogs of Eq. (5.7). The analogs of Eq. (5.8), involving Legendre functions rather than spherical Bessel functions, can be derived by performing the integral over ω in Eq. (5.9).

The source integrals (5.7)-(5.9) for I^{lm}, S^{lm}, g_{A_l}, and $\mathcal{S}_{A_l}$ are not particularly useful when the source has strong gravity and fast motions. This is because the integrals involve τ_{jk}, which in turn depends on the gravitational field $\bar{h}_{\alpha\beta}$[Eq.. (5.3)]. It may be prohibitively difficult to compute $\bar{h}_{\alpha\beta}$ for insertion into the source integrals.

B. Slow-motion Sources

We now specialize to slow-motion sources-i.e., to sources which are confined to the deep interior of the near zone. For such sources
$\omega r\ll 1$ for r such that $\tau_{\alpha\beta}$ is non-negligible
in size, and
for ω such that non-negligible radiation
emerges at this frequency.

Hence, we can expand the spherical Bessel functions $j^{l'}(\omega r)$ in powers of $\omega r\lfloor$ real part of Eqs. (2.47c)] and keep only the leading term

$$j^{l'}(\omega r)=\left[(2l'+1)!!\right]^{-1}(\omega r)^{l'}\left[1+O\left(\omega^2r^2\right)\right].$$

The dominant contribution to the mass moment ${}^{(l)}I^{lm}$ comes from $l'=l-2; l'=l$ is down from it by $(\omega r)^2$, and $l'=l+2$ is down by $(\omega r)^4$. The dominant contribution to the current moment ${}^{(l)}S^{lm}$ comes from $l'=l-1; l'=l+1$ is down by $(\omega r)^2$. Hence, aside from fractional errors in the integrands of order $(\omega r)^2$,

$$\begin{aligned}{}^{(l)}I^{lm}(t)=&\frac{8(-i)^{l+2}}{(2l-3)!!}\left(\frac{(l+1)(l+2)}{2(2l-1)(2l+1)}\right)^{1/2}\\&\times\int(\omega r)^{l-2}e^{-i\omega(t-t')}\left[T_{pq}^2l-2,lm(\Omega)\right]^*\\&\times\tau_{pq}\left(t',\mathbf{x}\right)d^3xdt'd\omega,\\{}^{(l)}S^{lm}(t)=&\frac{8(-i)^{l+2}}{(2l-1)!!}\left(\frac{l+2}{2l+1}\right)^{1/2}\\&\times\int(\omega r)^{l-1}e^{-i\omega(t-t')}\left[T_{pq}^{2l-1,lm}(\Omega)\right]^*\\&\times\tau_{pq}\left(t',\mathbf{x}\right)d^3xdt'd\omega.\end{aligned}$$

We now perform the integrals over ω and t' using the relations

$$\int(-i\omega)^{l'}e^{-i\omega(t-t')}f\left(t'\right)dt'd\omega=2\pi^{(l')}f(t);$$

and we express $T_{pq}^{2}l',lm(\Omega)$ in STF form using Eqs. (2.40). The result is

$$\begin{aligned}{}^{(2)}I^{lm}(t)=&\frac{16\pi}{(2l+1)!!}\left(\frac{(l-1)l(l+1)(l+2)}{2}\right)^{1/2}\\&\times\mathcal{Y}_{jkA_{l-2}^{lm*}}^{lm*}\int X_{A_{l-2}}\tau_{jk}(t,\mathbf{x})d^{3}x,\\{}^{(1)}S^{lm}(t)=&\frac{16\pi}{(2l+1)!!}\left(\frac{2(l-1)l(l+2)}{l+1}\right)^{1/2}\\&\times\epsilon_{pqj}Y_{kqA}^{lm*}\int x_{p}X_{A_{l-2}}\tau_{jk}(t,\mathbf{x})d^{3}x.\end{aligned}$$

By virtue of the "differential conservation laws", $\tau^{\alpha\beta}{}_{,B}=0$ of the source-which we can rewrite

$$\partial_{t}\tau_{00}=\tau_{0j,j},\quad\partial_{t}\tau_{0j}=\tau_{jk,k}$$

-the source satisfies the identities

$$\begin{aligned}&(l-1)l\tau_{jk}X_{A_{l-2}}\mathcal{Y}_{jkA}^{lm*}\\&=\left(\partial_{t}{}^{2}\tau_{00}\right)X_{A_{l}}Y_{A_{l}}^{lm*}-\left(\tau_{jk}X_{A_{l}}\right),{}_{jk}\mathcal{Y}_{A_{l}}^{lm*}\\&+2l\left(\tau_{jk}X_{Al-1}\right)_{j}\mathcal{Y}_{kA_{l-1}}^{lm*};\\&(l-1)\epsilon_{pqj}\mathcal{Y}_{kqA}^{lm*}\tau_{l-2}x_{p}X_{A_{l-2}}\\&=-\epsilon_{pqj}\mathcal{Y}_{qA}^{lm*}\left(\partial_{t-1}\tau_{0j}\right)x_{p}X_{Al-1}\\&+\epsilon_{pqj}Y_{qA}^{lm*}\left(\tau_{jk}x_{p}X_{Al-1}\right)_{k}.\end{aligned}$$

By inserting these identities into Eqs. (5.14) and integrating out the divergences to zero, we obtain

$$\begin{aligned}I^{lm}=&\frac{16\pi}{(2l+1)!!}\left(\frac{(l+1)(l+2)}{2(l-1)l}\right)^{1/2}\mathcal{Y}_{A_{l}}^{lm*}\int\tau_{00}X_{A_{l}}d^{3}x,\\S^{lm}=&\frac{-32\pi}{(2l+1)!!}\left(\frac{l(l+2)}{2(l-1)(l+1)}\right)^{1/2}\\&\times y_{jA}^{lm*}l_{l-1}^{m}\int\epsilon_{jpq}x_{p}\left(-\tau_{0q}\right)X_{A_{l-1}}d^{3}x.\end{aligned}$$

By then comparing with Eqs. (2.11), (2.24a), and (2.23b) we obtain

$$\begin{aligned}I^{lm}&=\frac{16\pi}{(2l+1)!!}\left(\frac{(l+1)(l+2)}{2(l-1)l}\right)^{1/2}\int\tau_{00}Y^{lm*}r^{l}d^{3}x,\\S^{lm}&=\frac{-32\pi}{(2l+1)!!}\left(\frac{(l+2)(2l+1)}{2(l-1)(l+1)}\right)^{1/2}\\&\times\int\epsilon_{jpq}x_{p}\left(-\tau_{0q}\right)Y_{j}^{l-1,lm*}r^{l-1}d^{3}x\\&=\frac{32\pi}{(2l+1)!!}\left(\frac{l+2}{2(l-1)}\right)^{1/2}\int\left(-\tau_{0j}\right)Y_{j}^{B,lm*\gamma^{l}d^{3}x.}\end{aligned}$$

Similarly, by comparing Eqs. (5.17) with (4.7), and by noting that because Y_{A}^{lm*} is STF on its l indices only the STF parts of the integrals in Eqs. (5.17a) and (5.17b) contribute to I^{lm} and S^{lm}, we obtain

$$g_{A_l} = \left[\int \tau_{00} X_{A_l} d^3x\right]^{\mathrm{STF}},$$
$$s_{A_l} = \left[\int \epsilon_{a_l \mathrm{pq}} x_p \left(-\tau_{0a)}\right) X_{A_{l-1}} d^3x\right]^{\mathrm{STF}}.$$

Thus, the mass moment $g_A(t)$ which characterizes the radiation field is equal to the STF part of the l th *mo* - ment of the effective mass distribution τ_{00}; and the current moment $\mathfrak{S}_{A_1}(t)$ is equal to the STF part of the $(l-1)$ th moment of the effective angular momentum distribution $\epsilon_{jpq} x_p \left(-\tau_{0q}\right) = \epsilon_{jpq} x_p \tau_q^0$. The general expressions (5.18) were derived in linearized theory by Mathews (1962). The mass quadrupole term dates back to Einstein (1918); and the current quadrupole and mass octupole terms, in rather different notation, are due to Papapetrou (1962, 1971). Expressions (5.18) and (5.19) for the radiation moments are not exact. If M is the mass of the source, L is its characteristic size, $\pi = 1/\omega$ is the characteristic reduced wavelength or time scale of the radiation it
emits, and $\chi_d \sim L\left|\tau_{00}/\tau_{0q}\right|$ is the characteristic dynami-
cal time scale for internal motions of the source, then Eqs. (5.18) and (5.19) make errors of magnitude

$$\left|\delta I^{lm}\right| \sim \left|\delta \mathcal{G}_A\right| \sim M L^l (L/\pi)^2,$$
$$\left|\delta S^{lm}\right| \sim \left|\delta \mathbb{S}_A\right| \sim M L \left(L/x_d\right) (L/\pi)^2;$$

cf. Eq. (5.11) and associated discussion. For typical systems

$$\left|I^{lm}\right| \sim \left|g_{A_l}\right| \sim M L^l, \quad \left|S^{lm}\right| \sim \left|S_{A_l}\right| \sim M L^l \left(L/x_d\right);$$

so that the fractional errors are of order $(L/\chi)^2$. However, for highly symmetrical systems the actual moments of interest may be much smaller than (5.21); and the fractional errors can be dangerously larger than $(L/\pi)^2$.

It is straightforward to derive from Eqs. (5.7) or (5.9) higher-order corrections to the slow-motion moments (5.18) and (5.19). One need only keep higherorder terms in the expansions of $j^{l'}(\omega r)$. By keeping all terms in the expansions one obtains the following exact infinite series for the moments of a slow-motion source

$$I^{lm} = \frac{16\pi}{(2l+1)!!}\left(\frac{(l+1)(l+2)}{2(l-1)l}\right)^{1/2} \int \tau_{00} Y^{lm*} r^l d^3x$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty} \frac{16\pi}{2^k k!(2l+2k+1)!!} \left(\partial_t\right)^{2k} \int \tau_{pq} r^{l+2k} \left[\frac{(2l+2k+1)}{2(k+1)}\left(\frac{(l+1)(l+2)}{2(2l-1)(2l+1)}\right)^{1/2} T_{pq}^{2l-2,lm*}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{3(l-1)(l+2)}{(2l-1)(2l+3)}\right)^{1/2} T_{pq}^2 2, lm* + \frac{2k}{2l+2k+3}\left(\frac{l(l-1)}{2(2l+1)(2l+3)}\right)^{1/2} T_{pqpq}^2 l+2, lm*\right] d^3x,$$

$$S^{lm} = \frac{-32\pi}{(2l+1)!!}\left(\frac{(l+2)(2l+1)}{2(l-1)(l+1)}\right)^{1/2} \int \epsilon_{jpq} x_p \left(-\tau_{oq}\right) Y_j^{l-1,lm*} \gamma^{l-1} d^3x$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty} \frac{16\pi i}{2^k k!(2l+2k+1)!!} \left(\partial_t\right)^{2k+1} \int \tau_{pq} r^{l+2k+1} \left[\frac{1}{2(k+1)}\left(\frac{l+2}{2l+1}\right)^{1/2} T_{pq}^2 l^{2-1,lm*} + \frac{1}{2l+2k+3}\left(\frac{l-1}{2l+1}\right)^{1/\ldots}\right.$$

$$g_{A_l} = \left[\int \left(\tau_{00} X_{A_l} + \sum_{k=0}^{\infty} (r\partial_t)^{2k} \left(A^{lk} r^2 X_{A_{l-2}} \tau_{a_{l-1}{}^a l} + B^{lk} X_{A_{l-1}} \tau_{a_l j^j} x_j + C^{lk} X_{A_l} \tau_{jj} + D^{lk} X_{A_l} n_b n_q \tau_{pq}\right)\right) d^3x\right.$$

$$s_{A_l} = \left[\int \left(x_{A_{l-1}} \epsilon_a p^{pq} x_p \left(-\tau_{0q}\right) + \sum_{k=0}^{\infty} (r\partial_t)^{2k+1} \left(E^{lk} X_{A_{l-2}} \epsilon_{al-1} x_p x_p \tau_{aa_l}^{\ r+F^{lk} X_{A_{l-1}}} \epsilon_{ap^{pq}} x_p \tau_{aj} n_j\right)\right) d^3x\right]^{\mathrm{sT}F}.$$

In expressions (5.23) the coefficients $A^{lk}, , F^{lk}$ are

$$A^{lk} = \frac{(l-1)l(2l+1)!!}{2^k k!(2l+2k+3)!!} \left[\left(\frac{2l+2k+1)(2l+2k+3)}{2(2l-1)(2l+1)(k+1)} + \frac{6(l-1)(2l+2k+3)}{(l+1)(2l-1)(2l+3)} + \frac{2(l-1)lk}{(l+1)(l+2)(2l+1)(2l} \right. \right.$$

$$B^{lk} = -\frac{(l-1)l(2l+1)!!}{(l+1)(2l+3)2^{k-1}k!(2l+2k+1)!!} \left[3 + \frac{2lk}{(l+2)(2l+2k+3)} \right],$$

$$C^{lk} = \frac{(l-1)l(2l+1)!!}{(l+1)(2l+3)2^{k-1}k!(2l+2k+1)!!} \left[1 - \frac{k}{(l+2)(2l+2k+3)} \right],$$

$$D^{lk} = \frac{(l-1)l(2l+1)!!k}{(l+1)(l+2)2^{k-1}k!(2l+2k+3)!!}$$

$$E^{lk} = \frac{(l-1)(2l-1)!!}{2^k k!(2l+2k+3)!!} \left[\left(\frac{l-1}{l+2} \right) + \frac{(2l+2k+3)}{2(k+1)} \right],$$

$$F^{lk} = -\frac{(l-1)(2l+1)!!}{(l+2)2^k k!(2l+2k+3)!!}.$$

Although the exact source integrals (5.22) and (5.23) were derived using Fourier-transform techniques [Eqs. (5.6)-(5.9)], they are valid independently of the Fourier transformability of h_{jk}^{Tr}. Fourier transforms are nothing but a trick to simplify algebraic manipulations that can be performed equally well in the time domain.

It is straightforward to verify that, if the multipole moment $\mathfrak{T}_{A_l}$ ($\equiv g_{A_l}$ or $\mathfrak{S}_{A_l}$) is the largest contributor to the radiation field (4.8), then one can ignore "gravitational pseudotensor" contributions to $\mathfrak{M}_{A_l}$ from radii $\chi \sim r$; i.e., one can confine the integrals (5.18), (5.19), (5.22), (5.23) for $\mathfrak{M}_{A_l}$ to radii deep inside the near zone. In doing so, one makes errors $|\delta \mathfrak{M}_{A_l}| \lesssim (M/X)\,|\mathfrak{N}_{A_l}|$; cf. Eq. (9.34) below.

As we shall see below, Eqs. (5.22) and (5.23) can be used to generate post-Newtonian and post-post-Newtonian formulas for the radiative moments.

Newtonian Sources

Specialize now to slow-motion sources with weak internal gravity and small internal stresses. Characterize the slow motion by a velocity parameter

$v \sim$ maximum of typical $\left\{ \frac{|T_{0j}|}{|T_{00}|}, \frac{|T_{\alpha\beta,0}|}{|T_{\alpha\beta,j}|} \right\}$;

characterize the weak gravity by

$$\epsilon \equiv \text{ maximum over entire source of } \bar{h}_{00};$$

and characterize the small stresses by

$$S \equiv \text{ maximum over entire source of } |T_{jk}| \,/\, |T_{00}|\,.$$

One obtains the Newtonian theory of gravity by (i) beginning in de Donder gauge [Eqs. (5.1)-(5.4)]; (ii) restricting attention to sources with

$$\epsilon \sim (L/\chi)^2 \sim v^2 \sim S \ll 1;$$

(iii) restricting attention to the near-zone neighbor hood of the source, $r \leq L$; and (iv) expanding the equations of motion (5.4) to lowest order in ϵ and linearizing the Einstein field equations, (5.2b); see, e.g., Chap. 18 of MTW.

For Newtonian sources, the theory of gravitationalwave generation is obtained by carrying out the procedures of Secs. V.A and V.B, and ignoring fractional corrections of order $\epsilon \sim (L/\chi)^2 \sim v^2 \sim S$. The result is Eqs. (5.18) and (5.19) for the multipole moments of the radiation field, with $\tau_{00} = \rho =$ (Newtonian mass density) and $-\tau_{0j} = \rho v_j =$ (Newtonian momentum density):

$$
\begin{aligned}
I^{lm} =& \frac{16\pi}{(2l+1)!!}\left(\frac{(l+1)(l+2)}{2(l-1)l}\right)^{1/2}\int \rho Y^{lm*} r^l d^3x \\
S^{lm} =& \frac{-32\pi}{(2l+1)!!}\left(\frac{(l+2)(2l+1)}{2(l-1)(l+1)}\right)^{1/2} \\
& \times \int\left(\epsilon_{jpq}x_p\rho v_q\right) Y_j^{l-1,lm*} r^{l-1} d^3x \\
{}_{A_l} =& \left[\int \rho X_{A_l} d^3x\right]^{\mathrm{STF}}, \\
\boldsymbol{s}_{A_l} =& \left[\int\left(\epsilon_{a_l pq}x_p\rho v_q\right) X_{A_{l-1}} d^3x\right]^{\mathrm{STF}}.
\end{aligned}
$$

Of course, the general expressions (5.27) are familiar from Mathews (1962) and the leading terms are familiar from Einstein (1918) and Papapetrou (1962, 1971). Note that the integrands of these source integrals are free of any reference to the gravitational field. They depend only on the source's material mass density and angular momentum density.

For typical Newtonian sources the multipole moments will have magnitudes (5.21) and will therefore produce radiation fields of strength

$$
\begin{aligned}
\left(h_{jk}^{\mathrm{TT}}\right)_{\text{mass } l\text{-pole}} &\sim (M/v)(L/x)^l, \\
\left(h_{jk}^{\mathrm{TT}}\right)_{\text{current } l\text{-pole}} &\sim (M/r)(L/x)^{l+1},
\end{aligned}
$$

where we have assumed that the source's dynamical time scale and gravitational-wave time scale are the same, $x_d \sim x$. For such sources, the Newtonian fractional errors $\epsilon \sim (L/x)^2 \sim v^2 \sim S$ in computing the various moments are such that

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\left(h_{jk}^{T}\right)_{\text{mass } l- \text{ pole}}}{\text{error in } \left(h_{jk}^{TT}\right)_{\text{mass quadrupole}}}\right| &\sim \left(\frac{\pi}{L}\right)^{4-l}, \\
\left|\frac{\left(h_{jk}^{\mathrm{T}}\right)_{\text{current } l\text{-pole}}}{\text{error in } \left(h_{jk}^{\mathrm{TT}}\right)_{\text{mass quadrupole}}}\right| &\sim \left(\frac{\pi}{L}\right)^{3-l}.
\end{aligned}
$$

Thus, only the mass quadrupole, mass octupole, and current quadrupole fields are larger than the dominant (mass quadrupole) error.

Post-newtonian Sources

For sources with $\epsilon \sim (L/x)^2 \sim (L/x_d)^2 \sim v^2 \sim S$ small, but not extremely small, one may want to compute the radiation field with higher accuracy. One can do so using a post-Newtonian wave-generation formalism derived by Epstein and Wagoner (1975) and Wagoner (1977). [See Turner and Wagoner (1979) for an application of the formalism to collapsing stars.]

The Epstein-Wagoner procedure for deriving this formalism is the same as in the Newtonian case: (i) One constructs a near-zone post-Newtonian formalism for analyzing the source's motions; and one forces the formalism to satisfy the de Donder gauge condition (5.2a) to post-Newtonian order. (ii) Then one computes the radiative multipole moments, accurate to postNewtonian order [fractional errors $\sim (L/x)^4$] from Eqs. (5.22) and (5.23).

The resulting expressions for the multipole moments are

$$
\begin{aligned}
I^{lm} =& \frac{16\pi}{(2l+1)!!}\left(\frac{(l+1)(l+2)}{2(l-1)l}\right)^{1/2} \\
& \times \int\left\{\tau_{00}Y^{lm*} + \frac{1}{2}\left(\frac{(l-1)l(2l+1)}{2l-1}\right)^{1/2} T_{jk}^{2l-2,lm*}\tau_{jk}\right. \\
& \left. + \left(\frac{6l(l-1)^2}{(l+1)(2l-1)(2l+3)}\right)^{1/2} T_{jk}^{2l,lm*}\tau_{jk}\right\} r^l d^3x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S^{lm} =& \frac{-32\pi}{(2l+1)!!}\left(\frac{(l+2)(2l+1)}{2(l-1)(l+1)}\right)^{1/2} \\
&\times \int \Bigg\{ \epsilon_{jpq} n_p \left(-\tau_{0q}\right) Y_j^{l-1,lm*} - \frac{i[2(l-1)(l+1)]^{1/2}}{2(2l+1)} \\
&\times \left[\frac{1}{2} T_{jk}^{2l-1,lm*} + \frac{1}{2l+3}\left(\frac{i-1}{l+2}\right)^{1/2} T_{jk}^{ll+1,lm*}\right] r\partial_t \tau_{jk} \Bigg\} r^l d^3x;
\end{aligned}
$$

$$
\mathfrak{g}_{A_l} = \left[\int \left(\tau_{00} X_{A_l} + A^{l0}\gamma^2 X_{A_{l-2}} \tau_{a_{l-1}a_l}\right.\right.
$$

$$
\begin{aligned}
&\left.\left.+B^{l0} X_{A_{l-1}} \tau_{a_l j} x_j + C^{l0} X_{A_l} \tau_{jj}\right) d^3\lambda\right]^{\mathrm{sTF}} \\
s_{A_l} =& \left[\int \left(X_{A_{l-1}} \epsilon_{a_l jk} x_j \left(-\tau_{0k}\right) + E^{l0} X_{A_{l-2}} \epsilon_{a_{l-1} jk} x_j r^2 \partial_t \tau_{k a_l}\right.\right. \\
&\left.\left.+F^{l0} X_{A_{l-1}} \epsilon_{a_l jk} x_j r \partial_t \tau_{kp} n_p\right) d^3x\right]^{\mathrm{sTF}}.
\end{aligned}
$$

Here

$$
\begin{aligned}
A^{l0} &= \frac{(l-1)l(l+9)}{2(l+1)(2l+3)}, \quad B^{l0} = -\frac{6(l-1)l}{(l+1)(2l+3)}, \\
C^{l0} &= \frac{2(l-1)l}{(l+1)(2l+3)}, \quad E^{l0} = \frac{(l-1)(l+4)}{2(l+2)(2l+3)}, \\
F^{l0} &= -\frac{(l-1)}{(l+2)(2l+3)}
\end{aligned}
$$

[cf. Eq. (5.24)]. In these expressions $\tau_{\alpha\beta}$ is the effective stress-energy tensor (5.3), evaluated at post-Newtonian order in the post-Newtonian de Donder gauge [Eqs. (37) of Epstein and Wagoner (1975), with indices lowered using the Minkowskii metric]. These $\tau_{\alpha\beta}$ depend on the source's Newtonian gravitational potential Φ, but they are free of any reference to the gravitational-wave field h_{jk}^{TT}.

For typical post-Newtonian sources the multipole moments will have magnitudes (5.21) and will therefore produce radiation fields of strength (5.29). When this is the case, the post-Newtonian fractional errors $(L/x)^4$ in computing the various moments are such that

$$
\left|\frac{\left(h_{jk}^{\mathrm{Tr}}\right)_{\text{mass}}\ l\text{-opole}}{}\right| \sim \left(\frac{x}{L}\right)^{6-l},
$$

$$
\left|\frac{\left(h_{jk}^{\mathrm{Tr}}\right)_{\text{current}}\ l\text{-pole}}{(\text{error in } \ h_{jk}^{TT})_{\text{mass quadrupole}}}\right| \sim \left(\frac{x}{L}\right)^{5-l}.
$$

If one is willing to drop all terms in h_{jk}^{TT} smaller than or comparable to the (mass quadrupole) errors, then for such sources one need only compute mass multipoles of order $l \leqslant 5$ and current multipoles of $l \leqslant 4$; and in doing the computations one need keep the post-Newtonian corrections only in the mass 2-pole and 3-pole and in the current 2-pole. [For the other moments the Newtonian expressions (5.27) and (5.28) produce radiation fields accurate to post-Newtonian order.] This is the procedure followed by Epstein and Wagoner (1975); see also Wagoner (1977).

On the other hand, for some special sources [e.g., torsional oscillations of neutron stars, Schumaker and Thorne (1980); also the collapse of a very slowly rotating star, Turner and Wagoner (1979)], the mass quadrupole moment will be strongly suppressed; Eqs. (5.34) will not apply; and one will be justified in keeping post-Newtonian corrections in one or mure of the higher moments.

13.6 Tensor Networks

13.7 External Algebra

Обсудим подробно внешнюю алгебру, или алгебру Грассмана.
(нужно будет - выгружу, пока не выгружал)

13.7.1 external Multiplication

(костр 2 нпр)
хз

13.7.2 connection With Determinants

хз

13.7.3 Vector Subspaces and P-vectors

хз

13.7.4 Conditions for the Degradability of P-vectors

хз

13.8 Symmetric Algebra

хз, зачем она

13.9 Other Applications of Tensors

(some very important will be before, but here there are those which are too far away from linear algebra)

13.9.1 Applications of Tensors in Statistical Physics

(??? write it there)

13.9.2 Programming Applications (!?!??)

(просто знаю, что такое есть, этого много, так что буду потом изучать, если нужно будет.)

13.9.3 On Tensars in Quantum Mechanics (??)

Чистые и смешанные состояния

(там смешанные состояния, все это укажу, пока не полностью понял)

14 Special Matrices and Operations over Them

14.1 Other Properties

14.1.1 Condition Numbers

(характеристика матрицы при СЛАУ)

Суть (??)

Число обусловленности матрицы показывает насколько матрица близка к матрице неполного ранга (для квадратных матриц - к вырожденности).

((почему?) говорят, что это даже лучший критерий, чем определитель (???))

$$Ax = f \tag{14.1}$$

$$A(x + \delta x) = f + \delta f \tag{14.2}$$

$$\frac{\|\delta f\|}{\|f\|} \leqslant \delta_0 \tag{14.3}$$

Найдем соотношение, которое будет связывать относительную погрешность решения с относительной погрешностью правой части, т. е насколько сильно возмутится решение системы

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leqslant \mu \frac{\|\delta f\|}{\|f\|} \tag{14.4}$$

мы ввели *число обусловленности системы.*
(тут место, где я мб покажу это)
число обусловленности системы
(????)
заметим, что если матрица диагональная, то $\mu = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$

$$\mu(A) = \|A\| \left\|A^{-1}\right\|$$

(я что-то хз, как посчитать)
также можно ввести

$$\mu = \frac{\sup \|Au\|}{\inf \|Au\|} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{cond}(A) = \frac{\max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}{\min_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}} \tag{14.5}$$

свойства:

- $\mu \geqslant 1$, $\mu = 1$ для матриц вращения. (????)

применение числа обусловленности

сразу можно найти то, как оценивается возмущение решения при возмущении системы.
$Au = f, \quad \det A \neq 0, \quad \mu \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} < 1.$

$$\frac{\|\Delta u\|}{\|u\|} \leqslant \frac{\mu}{1 - \mu \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\Delta f\|}{\|f\|} + \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \right) \tag{14.6}$$

Proof. (доказательство какое-то тупое)
скипаю

□

(короче, потом запишу)

14.1.2 determinants of the n-th Order

(методы для них тут приведу.)

14.2 Applications of Orthogonal Matrices

(все применения тут раскрою)

14.2.1 rotation of Space

есть взаимно однозначное соответствие между ориентациями твердого тела и множеством ортогональных матриц

$$AA^T = E; \qquad detA = \pm 1$$

матрица направляющих косинусов связывает разложение одного и того же вектора в неподвижном и подвижном базисе

14.2.2 Euler's Final Turn Theorem

Теорема

вращения Эйлера утверждает, что любое движение твёрдого тела в трёхмерном пространстве, имеющее неподвижную точку, является вращением тела вокруг некоторой оси.

Таким образом, вращение может быть описано тремя координатами: двумя координатами оси вращения (например, широта и долгота) и углом поворота.

Euler's Theorem. If $\mathbf{R}$ is a 3×3 matrix satisfying $\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}$ and $\det \mathbf{R} = +1$, then there is a non-zero vector v satisfying $\mathbf{Rv} = \mathbf{v}$

Counterexamples are easy to find in two or other even dimensions. Even in three dimensions, it is not immediately obvious that the composition of rotations about distinct axes is equivalent to a rotation about a single axis. This important fact has a myriad of applications in pure and applied mathematics, and as a result there are many known proofs. In this 300 th anniversary year of Euler's birth, we give a constructive proof of the fixed vector $\mathbf{v}$ that appears to be new.

Proof. Если $\mathbf{A} := \frac{1}{2}\left(\mathbf{R} - \mathbf{R}^T\right)$ это кососимметричная часть матрицы $\mathbf{R}$, то тогда вектор $\mathbf{v} := (a_{23}, a_{31}, a_{12})$ is left fixed by $\mathbf{R}$. This follows from $\mathbf{RAR}^T = \mathbf{A}$, which is immediate from the definition of $\mathbf{A}$. To see that $\mathbf{RAR}^{-1} = \mathbf{RAR}^T = \mathbf{A}$ is equivalent to $\mathbf{Rv} = \mathbf{v}$, we invoke the linear

isomorphism $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{J_v}$ between $\mathbb{R}^3$ and the skew-symmetric 3×3 matrices, given explicitly by

$$\mathbf{J_v} := \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{J_v}$ is just the matrix implementing cross-product with $\mathbf{v}$; i.e., $\mathbf{J_v}(\mathbf{w}) := \mathbf{v} \times \mathbf{w}$ for all $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$. An essential fact about the cross-product operation is its invariance under any such rotation matrix $\mathbf{R}$, that is, $\mathbf{R}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{Rv} \times \mathbf{Rw}$. In terms of

the map $\mathbf{J}$, this says $\mathbf{J_{Rv}}(\mathbf{Rw}) = \mathbf{RJ_v}(\mathbf{w})$ or simply $\mathbf{J_{Rv}R} = \mathbf{RJ_v}$. Rearranging this, we arrive at $\mathbf{J_{Rv}} = \mathbf{RJ_vR}^{-1}$. (In the language of representation theory, this says that $\mathbf{J}$ is an equivalence or "intertwining operator" between the standard representation of $\mathbf{SO}(3)$ on $\mathbb{R}^3$ and the adjoint representation on its Lie algebra, so(3), the skew-adjoint 3×3 matrices. Or, in more elementary terms, the matrix for cross-product with a rotated vector is obtained by conjugating (by the rotation) the matrix for cross-product with the un-rotated vector.) It is now immediate that a vector $\mathbf{v}$ is fixed by a rotation $\mathbf{R}$ if and only if the skew-adjoint matrix $\mathbf{J_v}$ is fixed under conjugation by $\mathbf{R}$.

But we are not through yet! What if $\mathbf{A} = \mathbf{0}$? Such orthogonal matrices-the symmetric ones - have measure zero, and correspond to angles of rotation 0 and π. But still they are important, and we have a similar result for them. In this (nongeneric) case, $\mathbf{R} = \mathbf{R}^T$ and so $\mathbf{R}^2 = \mathbf{I}$. Therefore, $\mathbf{R}(\mathbf{I} + \mathbf{R}) = \mathbf{R} + \mathbf{R}^2 = \mathbf{I} + \mathbf{R}$ so the columns of $\mathbf{I} + \mathbf{R}$ are fixed. since $\mathbf{R}$ is proper ($\det \mathbf{R} = +1$), $\mathbf{R} \neq -\mathbf{I}$, so $\mathbf{I} + \mathbf{R}$ has a non-zero column that is fixed by $\mathbf{R}$.

□

14.2.3 Rodrigues' Rotation Formula

The fact that the axis of a generic rotation $\mathbf{R}$ is a multiple of the vector corresponding to the anti-symmetric part of $\mathbf{R}$ has been observed and used in other contexts in the past. There is also another construction that does not require any multi-

plications to obtain the axis. As we will outline below, all of these constructions assume the existence of an axis, and seem to require appeals to less elementary concepts than our approach above to turn them into proofs of Euler's theorem. The axis-angle representation of a rotation $\mathbf{R}$ about a unit axis $\mathbf{v}$ by an angle θ is based upon the decomposition of a vector $\mathbf{x}$ into a component along $\mathbf{v}$, and a component orthogonal to $\mathbf{v} : \mathbf{x} = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v} + (\mathbf{x} - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v})$. since $\mathbf{v}\times((\mathbf{x} - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}))$ is the image of $\mathbf{x} - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}$ under a quarter-turn counterclockwise rotation of $\mathbf{v}^{\perp}$, and $\mathbf{R}\mathbf{v} = \mathbf{v}$, we can check that

$$\mathbf{R}\mathbf{x} = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v} + (\cos\theta)(\mathbf{x} - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}) + (\sin\theta)(\mathbf{v}\times(\mathbf{x} - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}))$$

Using $\mathbf{v}\times\mathbf{v} = \mathbf{0}$, this simplifies to

$$\mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{x} + (\sin\theta)(\mathbf{v}\times\mathbf{x}) + (1-\cos\theta)((\mathbf{x}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v} - \mathbf{x})$$

If $\mathbf{J}_{\mathbf{v}}$ is the matrix defined earlier by $\mathbf{J}_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}\times\mathbf{x}$, the fact that $\mathbf{v}$ is a unit vector implies $\mathbf{J}_{\mathbf{v}}^2 = \mathbf{v}\mathbf{v}^T - \mathbf{I}$, or $\mathbf{J}_{\mathbf{v}}^2\mathbf{x} = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v} - \mathbf{x}$, which leads to the Euler-Rodrigues rotation formula:

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + (\sin\theta)\mathbf{J}_{\mathbf{v}} + (1-\cos\theta)\mathbf{J}_{\mathbf{v}}^2$$

In [1], Alperin derives this result from Lagrange's well-known triple product formula $\mathbf{p}\times(\mathbf{q}\times\mathbf{r}) = (\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{q} - (\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})\mathbf{r}$, while Fillmore [5] and Kahan [6] derive it for $\mathbf{R}(\theta) = \exp(\theta\mathbf{J}_{\mathbf{v}})$ using the series representation for exp and the recurrence $\mathbf{J}_{\mathbf{v}}^{n+2k} = (-1)^k\mathbf{J}_{\mathbf{v}}^{n+2k}, n > 0$. Fillmore takes the series as the definition of $\exp(\theta\mathbf{J}_{\mathbf{v}})$ while Kahan solves the initial value problem $d\mathbf{R}/d\theta = \mathbf{J}_{\mathbf{v}}\mathbf{R}$

$\mathbf{R}(0) = \mathbf{I}$. Kahan observes that this formula implies $\frac{1}{2}\left(\mathbf{R} - \mathbf{R}^T\right) = (\sin\theta)\mathbf{J}_{\mathbf{v}}$ which can be used (as we did) to recover the axis in the generic case, and points out this can fail numerically when $\sin\theta$ is small. Fillmore uses the formula to show that if we define $\mathbf{S} := \mathbf{R} + \mathbf{R}^T + (1 - \mathrm{trace}(\mathbf{R}))\mathbf{I}$ (clearly a symmetric matrix) then $\mathbf{S} = (3 - \mathrm{trace}(\mathbf{R}))\mathbf{v}\mathbf{v}^T$. This gives another method to obtain the axis without multiplication, as the right-hand side exhibits this matrix as a rank one symmetric matrix, any of whose non-zero columns are multiples of v. Kalman [7] makes the related observation that for any $\mathbf{x}, \mathbf{R}(\mathbf{S}\mathbf{x}) = \mathbf{S}\mathbf{x}$. He shows that this is equivalent to $\mathbf{R}^3 - \mathrm{trace}(\mathbf{R})\mathbf{R}^2 + \mathrm{trace}(\mathbf{R})\mathbf{R} - \mathbf{I} = \mathbf{0}$, and confirms this by applying the Cayley-Hamilton theorem. Fillmore and Kalman both use the fact that the eigenvalues of $\mathbf{R}$ are $\{1, \cos\theta + i\sin\theta, \cos\theta - i\sin\theta\}$ to show trace $(\mathbf{R}) = 1 + 2\cos\theta$ Note that all of these approaches start with the assumption that $\mathbf{R}$ is a rotation about an axis v through an angle θ, and so cannot be used as a proof of Euler's theorem without considerable modification. (Moreover they all invoke results like the Cayley-Hamilton theorem, the power series for exp, and facts about solutions of the characteristic equation of a matrix that seem less elementary than the approach we have given above.) However, granting the truth of Euler's theorem, they do give alternative derivations for our construction of the axis of a rotation in the generic case, and recognizing this, Kahan presents the classical proof based on characteristic polynomials that 1 is an eigenvalue of $\mathbf{R}$, and suggests finding the corresponding eigenvector by elimination or computing an appropriate column of $\mathrm{Adj}(\mathbf{R} - \mathbf{I})$. Fillmore also examines the improper case, and the representation of

orthogonal transformations as the product of two (in the proper case) or three (in the improper case) reflections.

There have also been several algorithms proposed to compute the unit quaternions $\pm\mathbf{Q}$ corresponding to $\mathbf{R}$, $[2, 10-12]$. Most are based upon a modified version of the Euler-Rodrigues rotation formula, which has a nice expression in terms of the components of the unit quaternion associated with $\mathbf{R}, \mathbf{Q} = [q, \mathbf{q}] = \left[\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\mathbf{v}\right]$. Using $\sin\theta = 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$, we get $\sin\theta\mathbf{J}_{\mathbf{v}} = 2q\mathbf{J}_{\mathbf{q}}$, and since $1-$ $\cos\theta = 1 - \cos\left(2\frac{\theta}{2}\right) = 1 - \left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$ we get $(1-\cos\theta)\mathbf{J}_{\mathbf{v}}^2 = 2\mathbf{J}_{\mathbf{q}}^2$ This leads to the well-known quaternion-to-matrix formula

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + 2q\mathbf{J}_{\mathbf{q}} + 2\mathbf{J}_{\mathbf{q}}^2$$

Because the vector part of Q is a unit axis of **R**, scaled by $\sin\frac{\theta}{2}$ (rather than $\sin\theta$ as in our construction), matrix-to-quaternion algorithms compute the anti-symmetric part of **R**, then perform square roots and division to accomplish the desired scaling. In another forthcoming paper [9], we present new and efficient algorithms for implementing and interpolating rotations based on a novel realization of a rotation and unit quaternions without reference to an axis.

14.2.4 hermitian Matrices

Матрица A^* , полученная из исходной матрицы A транспонированием и заменой каждого элемента комплексно сопряжённым ему, называется эрмитово сопряженной.

обзор свойств

обзор применений

определение

собственные вектора, отвечающие собственным значениям, ортогональны

(тут мб доказательство через бра кет векторы от Володи)

14.2.5 unitary Matrices

??????????????

унитарные матрицы диагонализуемы

доказательство того, что
!!! Покажите,что унитарные матрицы,как и эрмитовы, диагонализуемы.
Указание:покажите,что эрмитова и анти-эрмитова часть унитарного оператора диагонализуемы совместно.

14.2.6 Search for Inverse Matrix (?!!)

еще раз алгоритм, и почему именно так?

14.3 functions of the Matrix

см грантмахер
или кострикин

14.4 Products

как они применяются?

14.4.1 LU Decomposition

хз почему, но так можно раскладывать.

Теорема 3. *мб можно раскладывать в $A = LU$, если все главные миноры не 0-е.*

Реализация в программировании

14.4.2 $L + D + U$ Decomposition

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{L} + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{3n} \\ & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{U} \tag{14.7}$$

Реализация в программировании

14.4.3 polar Decomposition

это просто конечно жесть, но матрицам только по нему и нужно учиться.
нпр можно раскладывать квадратную матрицу на треугольные сомнижители.

Теорема 4. *(стр 50 грантмахер)*
любую квадратную матрицу с отличными от 0 минорами можно раздложить в произведение верхней треугольной на нижнюю треугольную.

$$A = BC = \begin{Vmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} \end{Vmatrix} \tag{14.8}$$

и еще какие-то свойства

ну и как бы жесть, уже что-то можем мощное очень делать.
и следствия этого еще есть какие-то
и остального дофига еще.

Реализация в программировании

14.5 Spectrum

(перепишу потом из конспектов семинара)

14.5.1 descent Methods?

Метод наискорейшего спуска

(тут доказательства и пояснения)
в итоге

$$\tau_k = \frac{(\vec{r}_k, \vec{r}_k)}{(A\vec{r}_k, \vec{r}_k)} \tag{14.9}$$

Реализация в программировании

14.5.2 Method of Minimal Discrepancies??

$$\tau_k = -\frac{b}{2a} = \frac{(A\vec{r}_k, \vec{r}_k)}{(A\vec{r}_k, A\vec{r}_k)} \tag{14.10}$$

Метод сопряженных градиентов

(вообще хз, о чем там он?)

Реализация в программировании

14.5.3 Finding the Boundaries of the Spectrum

Вычисление максимального (не по модулю) собственного значения

Реализация в программировании

15 Special constructions

15.1 Other Matrix Properties

(тут мб грантмахера пройду, пропишу их, и следствия. тут полно тем, просто не до них мне.)

15.1.1 Non-negative Kostrikin Matrices

(где приложения, там он это писал.)

Производственная мотивировка

(что???)

Свойства неотрицательных матриц

15.1.2 About Stochastic Matrices

15.2 orthogonal Polynomials

(ну вот такие есть, нужно будет - досмотрю, думаю, спокойно можно жить, не особо разбираясь в этом)

15.2.1 Legendre Polynomials (spherical Polynomials)

(мб единственное, что выгружу вскоре)

15.2.2 Approximation Problem

15.2.3 Least Squares Means

15.2.4 Linear Systems and the Least Squares Method

15.2.5 Trigonometric Polynomials

15.2.6 Note on Self-adjoint Operators

15.2.7 Orthogonalization With Weight

15.2.8 Chebyshev Polynomials (first Kind)

15.2.9 Hermite Polynomials

15.3 Linear Algebra in Classical Examples According to Vavilov

(пока эта теория от Вавилова тут, потом посмотрим, куда её вставить. пока хз вообще.)

15.3.1 Sequence Spaces

Суть

(пока не знаю)

Теория

О случаях применения

(пока не знаю)

15.3.2 Function Spaces: Common Areas

Суть

(пока не знаю)

Теория

О случаях применения

(пока не знаю)

15.3.3 Function Spaces: Examples

Суть

(пока не знаю)

Теория

О случаях применения

(пока не знаю)
93 4

15.3.4 Modules Above Function Rings

Суть

(пока не знаю)

Теория

О случаях применения

(пока не знаю)

15.3.5 Modules Above the Polynomial Ring

Суть

(пока не знаю)

Теория

О случаях применения

(пока не знаю)
96 6

15.3.6 Modules Above the Ring of Differential Operators

Суть

(пока не знаю)

Теория

О случаях применения

(пока не знаю)
96 7

15.3.7 Space Generated by Shifts and Stretches of the Function

Суть

(пока не знаю)

Теория

О случаях применения

(пока не знаю)
97 8

15.3.8 Interesting Examples of Linear Dependence

Суть

(пока не знаю)

Теория

О случаях применения

(пока не знаю)
99 9

15.3.9 Dedekind-artin Theorem

Суть

(пока не знаю)

Теория

О случаях применения

(пока не знаю)
100 10

15.3.10 Topological Bases

Суть

(пока не знаю)

Теория

О случаях применения

(пока не знаю)

15.4 Special Bilinear Forms

15.4.1 Sesquilinear Form

(Полуторалинейная форма. не знаю, зачем она, но мб когда-то подумаю про это. пока это не нужно мне вообще.)

15.5 Unsolved Tasks

(пока это не смотрю, потому что вообще не до этого.)

15.5.1 Strassen's Problem

15.5.2 Orthogonal Expansions

(???)

15.5.3 Finite Projective Planes

(???)

15.5.4 Space Bases and Latin Squares

(???)

15.6 Spinors

Here, I'll discuss spinors. It is not recommended to think about them, if basics of linear algebra is not learned and if you are not doing research about them. It is too easy to get lost and not understand anything about them.

(this is a topic for a book, it is written in the note on algebra, but here I'll maybe someday write also something about what are they.)

15.7 Geometry of Spaces with Scalar Product According to Kostrikin Manin

15.7.1 1.0 Geometry

Эта и следующая части нашего курса посвящены теме, которую можно назвать «линейные геометрии», и ей уместно предпослать краткое обсуждение современного смысла слов «геометрия» и «геометрический». В течение многих столетий под геометрией понималась геометрия Евклида на плоскости и в пространстве. Она продолжает составлять основное содержание обычного школьного курса, и эволюцию геометрических понятий удобно проследить на примере характерных особенностей этой, ныне весьма частной, геометричсской дисциплины.

«Фигуры». Школьная геометрия начинается с изучения таких фигур на плоскости, как прямые, углы, треугольники, окружности и круги и т. П. Естественное обобщение этой ситуации состоит в выборе некоторого пространства M, «объемлющего пространства» нашей геометрии, и некоторого множества подмножеств в M - изунаемых в этом пространстве «фигур».

«Движения». Вторая существенная компонента школьной геометрии - это измерение длин и углов и выяснение соотношений между линейными и угловыми элементами различных фигур. Потребовалось длительное историческое развитие, прежде чем было осознано, что в основе этих измерений лежит существование отдельного математического объекта-группы движений евклидовой плоскости или евклидова пространства как целого, и что все метрические понятия могут быть определены в терминах этой групы. Например, расстояние между точками является единственной функцией от пары точек, инварнантной относительно группы евклидовых движений (если потребовать ее непрерывности и еще выбрать «единицу длины»-расстояние между выбранной парой точек). «Эрлангенская программа» Ф. Клейна (1872) зафиксировала понимание этого замечательного принципа, и «геометрией» надолго стало изучение пространств M, снабженных достаточно большой группой симметрий, и свойств фигур, инвариантных относительно действия этой группы, включая углы, расстояния и объемы.

«Числа». Открытием столь же фундаментальной важности (и гораздо более ранним) был декартов «метод коордннат» и основанная на нем аналитнческая геометрия плоскости и пространства. С современной точки зрения координаты суть некоторые функции на пространстве M (или на его подмножествах) с вещественными, комплексными или еще более общими значениями. Задание конкретных значений этих функций позволяет зафиксировать точку пространства, а задание соотношений между этими значениями определяет множество точек. Описание класса рассматриваемых в данной геометрии фигур в M можно заменить описанием класса соотношений между координатами, которые описывают интересующие нас фигуры. Поразительная гибкость и сила метода Декарта связана с тем, что функции на пространстве можно складывать и умножать, интегрировать, дифференцировать и применять другие процессы предельного перехода и в конечном счете пользоваться всей мощью математического анализа. Все общие современные геометрические дисциплины - топология, дифференциальная и комплексно аналитическая геометрия, алгебраическая геометрия выбирают в качестве исходного определения понятие геометрического объекта как совокупности пространства M и заданной на нем совокупности F (локальных) функций.

«Отображенння». Если (M_1, F_1) и (M_2, F_2) - два геометрических объекта описанного выше типа, то можно рассматривать отображения $M_1 \rightarrow M_2$, которые обладают тем свойством, что обратное отображение на функциях переводит элементы из F_2 в элементы из F_1. В наиболее логически завершенных схемах среди таких отображений находятся как группы симметрий Ф. Клейна, так и сами координатные функции (как отображения M в R или C). Геометрические объекты образуют категорию, и ее морфизмы служат достаточно тонкой заменой симметрий даже в тех случаях, когда этих симметрий не слишком много (как у общих римановых пространств, где можно измерять длины, углы и объемы, но двнжений, вообще говоря, недостаточно).

Линейные геометрии. Теперь мы можем охарактеризовать место линейных геометрий в этой общей картине. В известном смысле слова линейные геометрии относятся к числу непосредственных потомков геометрии Евклида. Рассматриваемые в них пространства M суть либо линейнье пространства (теперь уже над общими полями, хотя $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$ по-прежнему остаются в центре внимания, особенно ввиду многочисленных приложений), либо пространства, пронзводные от линейных: аффинные («линейные пространства без отмеченного начала координат») и проективные («аффинные пространства, пополненные бесконечно удаленными точками»). Группы симметрий суть подгруппы линейной группы, которые сохраняют фиксированное «скалярное произведение», а также их расширения сдвигами (аффнннные группы) или факторгруппы по гомотетиям (проективные группы). Рассматриваемые функции линейны нли близки к линейным, иногда квадратичны. Фигуры суть линейные подпространства и многообразия (обобщения прямых на евклидовой плоскости) и квадрики (обобщения окружностей). Можно представлять себе эти обобщения евклидовой геометрии как результаг чисто логического анализа, и устано- вившийся формализм линейных геометрий действительно обладает удивительной стройностью и компактностью. Но жизнеспособность этой ветви математики в значительной мере связана с ее многообразными естественнонаучными приложениями. Понятие скалярного произведения, лежащее в основе всей второй части курса, может служить для измерения углов в абстрактных евклидовых пространствах. Но математик, который не знает, что оно же измеряет вероятности (в моделях квантовой механики), скорости (в пространстве Минковского специальной теории относительности) и коэффициенты корреляции случайных величин (в теории вероятности), лишается не только общей широты кругозора, но и гибкости чисто математической ннтуиции. Поэтому мы сочли необходимым включить в курс сведения и об этих интерпретациях.

15.7.2 2. Scalar Products

1. Полилинейные отображения.

Пусть $L_1, \ldots, L_n, M$ - линейные пространства над общим полем $\mathscr{K}$. Полилинейным отображением (при $n=2$ билинейным) называется отображение

$$f : L_1 \times \ldots \times L_n \rightarrow M, (l_1, \ldots, l_n) \mapsto f(l_1, \ldots, l_n) \in M,$$

которое линейно как функция любого из аргументов $l_i \in L_i$ при фиксированных остальных $l_j \in L_j, j = 1, \ldots, n, j \neq i$. Иными словами,

$$\begin{gathered} f(l_1, \ldots, l_i + l_i', l_{t+1}, \ldots, l_n) = \\ = f(l_1, \ldots, l_i, \ldots, l_n) + f(l_1, \ldots, l_i', \ldots, l_n), \\ f(l_1, \ldots, al_l, l_{i+1}, \ldots, l_n) = af(l_1, \ldots, l_i, \ldots, l_n) \end{gathered}$$

для $i = 1, \ldots, n; a \in \mathscr{K}$. В случае $M = \mathscr{K}$ полилинейные отображения называются также полилинейными функциями, или формами.

В первой части мы уже встречались с билинейными отображениями

$$\begin{aligned} L^* \times L \rightarrow \mathscr{K} : (f, l) \mapsto f(l), \quad & f \in L^*, l \in L; \\ \mathscr{L}(L, M) \times L \rightarrow M : (f, l) \mapsto f(l), \quad & f \in \mathscr{L}(L, M), l \in L. \end{aligned}$$

Определитель квадратной матрицы полилинеен как функция от ее строк и столбцов. Еще один пример:

$$\mathscr{K}^n \times \mathscr{K}^m \rightarrow \mathscr{K}^p : (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \sum_{i,j} g_{ij} x_i y_j = \vec{x}^t \vec{G} \vec{y}$$

где G– любая матрица размера $n \times m$ над $\mathscr{K}$, векторы из $\mathscr{K}^n, \mathscr{K}^m$. представлены столбцами своих координат.

Общие полилинейные отображения мы будем изучать позже, в части, посвященной тензорной алгебре. Здесь же мы займемся важнейшим для приложений классом билинейных функций $L \times L \rightarrow \mathscr{K}$, а также, при $\mathscr{K} = \mathbf{C}$, функций $L \times \bar{L} \rightarrow \mathbf{C}$, где $\bar{L}$ - пространство, комплексно содряженное с L (см. ч. $1, \S 12$). Каждая такая функция называется также скалярным произведением или метрикой, на пространстве L, и пара (L, скалярное произведение) рассматривается как единый геометрический объект.

Изучаемые в этой части метрики лишь в специальных случаях являются метриками в смысле определения п. 1 $10 ч. 1, и читатель не должен смешивать эти омонимы.

Скалярное произведение $L \times L \to \mathbf{C}$ чаще всего рассматривают как полуторалинейное отображение $g : L \times L \to \mathbf{C}$, линейное по первому аргументу и полулинейное по второму: $g\left(al_1, bl_2\right) = a\bar{b}g\left(l_1, l_2\right)$.

Способы задания скалярного произведения.

а) Пусть $g : LX\ XL \to \mathscr{H}$ (или $L \times \bar{L} \to \mathbf{C}$)- некоторое скалярное пронзведение на конечномерном пространстве 'L. Выберем базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в L и определим матрицу

$$G = \left(g\left(e_i, e_j\right)\right); \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Она называется матрицей Грама базнса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ относительно g, а также матрицей g в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Задание $\{e_i\}$ и G вполне определяет g, потому что в силу свойства билинейности

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j g\left(e_i, e_j\right) = \vec{x}^t \vec{G}$$

В случае полуторалинейной формы аналогичная формула приобретает вид

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_i\right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i \bar{y}_j g\left(e_i, e_j\right) = \overrightarrow{x}^t \overrightarrow{y}$$

Наоборот, если базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ фиксирован, а G-любая матрица размера $n \times n$ над $\mathscr{K}$, то отображение $(\vec{x}, \vec{y}) \to \vec{x}^t \vec{G} \vec{y}$ (или $\vec{x}^t \hat{G}_y$ в полуторалинейном случае) определяет скалярное произведение на L с матрицей G в этом базисе, как показывают очевидные проверки. Таким образом, наша конструкция устанавливает биекцию между скалярными произведениями (билинейными или полуторалинейными) на n-мерном пространстве с базисом и матрицами размера $n \times n$.

Выясним, как меняется G при замене базиса. Пусть A - матрица перехода к штрихованному базису. В координатах: $\vec{x} = \overrightarrow{Ax'}$, где $\vec{x}$-столбец координат вектора в старом базисе, а $\overrightarrow{x'}$ - столбец его же координат в новом. Тогда в билинейном случае

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^t \overrightarrow{Gy} = \left(\overrightarrow{Ax'}, tG\left(\overrightarrow{Ay'}\right)\right) = \left(\vec{x}'\right)^t A^t G \overrightarrow{Ay'},$$

так что матрца Грама штрихованного базиса равна $A^t G A$. Аналогично, в полуторалинейном случае она равна $A^t G \bar{A}$.

В первой части курса матрнцы служили нам в основном для записи линейных отображений, и интересно выяснить, нет ли естественного линейного отображения, связанного с g и отвечающего матрице Грама G. Оно действительно существует, и его конструкция дает равносильный способ задания скалярного произведения.

б) Пусть $g : L \times L \to \mathscr{K}$ - скалярное произведение. Поставим в соответствие каждому вектору $l \in L$ функцию $g_l : L \to \mathscr{K}$, для которой

$$g_l(m) = g(l, m), \quad m \in L.$$

Эта функция линейна по m в билинейном случае и антилинейна в полуторалинейном, т. е. $g_l \in L^*$ нли соответственно $g_l \in \bar{L}^*$ для каждого l. Кроме того, отображение

$$\tilde{g} : L \to L^* \quad \text{или } L \to \bar{L}^* : l \mapsto g_l = \tilde{g}(l)$$

линейно, канонически построено по g и однозначно определяет g по формуле

$$g(l, m) = (\tilde{g}(l), m),$$

где внешние скобки справа обозначают каноническое билинейное отображение $L^* \times L \to \mathscr{K}$ или $\bar{L}^* \times L \to \mathbf{C}$.

Наоборот, по любому линейному отображению $\tilde{g} : L \to L^*$ (или $L \to \bar{L}^*$) однозначно восстанавливается билинейное отображение $g : L \times L \to \mathscr{K}$ (или $g : L \times \bar{L} \to \mathbf{C}$) по той же формуле

$$g(l, m) = (\tilde{g}(l), m).$$

Связь с предыдущей конструкцией такова: если в L выбран базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и g задается матрицей G в этом базисе, то $\tilde{g}$ задается матрицей G^t в базисах $\{e_1, \ldots, e_n\}, \{e^1, \ldots, e^n\}$, двойственных друг другу.

Действительно, если $\tilde{g}$ задано матрицей G^t, то соответствующее скалярное произведение g в двойственных базисах имеет вид

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = (\tilde{g}(\vec{x}), \vec{y}) = (\tilde{g}(\vec{x}))^t \vec{y} \left(\text{ или } (\tilde{g}(\vec{x}))^t \overrightarrow{\overline{y}} \right) =$$

$$= \left(G^t \vec{x}\right)^t \vec{y} \left(\text{ или } {}'G^t \vec{x}\right)^t \overrightarrow{\overline{y}} \Big) = \vec{x}^t G \vec{y} \left(\text{ или } \overrightarrow{x^t} G \overrightarrow{\overline{y}} \right),$$

что доказывает требуемое. Здесь мы пользовались замечанием, сделанным в \$7 ч. 1, о том, что каноническое отображение $L^* X \ X L \to \mathscr{K}$ в двойственных базисах определяется формулой $(\vec{x}, \vec{y}) = x\vec{t}.$

Свойства симметрии скалярных произведений.

Перестановка аргументов в билинейном скалярном произведении g определяет новое скалярное произведение g^t:

$$g^t(l, m) = g(m, l).$$

В полуторалинейном случае эта операция также меняет места «линейного» и «полулинейного» аргументов; если мы хотим, чтобц этого не произошло, то удобнее рассматривать $\overrightarrow{\mathrm{g}}^t$:

$$\bar{g}^t(l, m) = \overline{g(m, l)}.$$

у $\bar{g}^t$ линейный аргумент будет на первом месте, если у g он был на первом месте, а полулинейный - соответственно на втором. Операция $g \longmapsto g^t$ или $g \longmapsto \bar{g}^t$ легко описывается на языке матриц Грама: она отвечает операции $G \mapsto G^t$ или $G \longmapsto \bar{G}^t$ соответственно (предполагается, что $g, g^t, \bar{g}^t$ пишутся в одном и том же базисе L). Действительно,

$$g^t(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{y}, \vec{x}) = \vec{y}^t \overrightarrow{G\vec{x}} = \left(\vec{y}^t \overrightarrow{G\vec{x}}\right)^t = \vec{x}^t G^t \vec{y},$$

$$\bar{g}^t(\vec{x}, \vec{y}) = \overrightarrow{\overline{g(\vec{y}, \vec{x})}} = \overline{y^t G \overrightarrow{\vec{x}}} = \overrightarrow{(\vec{y}} t \vec{G}^t \Big)^t = \overrightarrow{x^t} \vec{G}^t \vec{y}.$$

Мы будем заниматься почти исключительно скалярными произведениями, которые удовлетворяют одному из следующих условнй симметрии относительно этой операции:

а) $g^t = g$. Такие скалярные произведения называются симметричными, а геометрия пространств с симметричным скалярным произведением называется ортогональной геометрией. Симметричные скалярные произведения задаются симметричными матрицами Грама G.

б) $g^t = -g$. Такие скалярные произведенияя называются антисимпетричными, или симплектическими, а соответствующие геометрии называются симплектическими. Им отвечают антисимметричные матрицы Грама.

Полуторалинейный случай:

в) $\bar{g}^t = g$. Такие скалярные произведения называются эрмитово симметричными, или просто эрмитовыми, а соответствующие геометрни - эрмитовымиl. Им отвечают эрмитовы матрицы. Грама. Из условия $\bar{g}^t = g$ следует, что $\bar{g}(l, l) = g(l, l)$ для всех $l \in L$, т.е. все значения $g(l, l)$ вецественны.

Эрмитово антисимметричные скалярные произведения обычно не рассматриваются специально, ибо отображение $g \longmapsto ig$ устанавливает биекцию между ними и эрмитово симметричными скалярными произведениями:

$$\bar{g}^t = g \Leftrightarrow \overline{(ig)^t} = -ig.$$

Геометрические свийства скалярных произведений, отличающихся друг от друга лишь множителем, практически одни и те же. Напротив, ортогональная геометрия во многом отличается от симплектической: редукция соотношений $g^t = g$ и $g^t = -g$ друг к другу таким простым способом невозможна.

Ортотонативость.

Пусть (L, g)-векторное пространство со скалярным пропвв деяием. Векторы $l_1, l_2 \in L$ называются ортогональны..nil (относительно g), если $g(l_1, l_2) = 0$. Подпространства $L_1, L_2 \subset L$ называются ортогональными, если $g(l_1, l_2) = 0$ для всех $l_1 \in L_1, l_2 \cong L_2$. Основная причина, по которой важны лишь скалярные произведения с одним из свойств симметрии предыдущего пунктя, состоит в том, что для них свойство ортогональности векторов или подпространств симметрично относительно тих векто- ров или подпространств. Действительно: если $g^t = \pm g$ или $g^t = \bar{g}$, ТО

$$g(l, m) = 0 \Leftrightarrow \pm g^t(l, m) = 0 \Leftrightarrow g(m, l) = 0$$

и аналогично в эрмитовом случае (по поводу обратного утверждения см. упражнение 3).

Если не оговорено обратное, в дальнейшем мы будем рассматривать только ортогональные, симплектические или эрмитовы скалярные произведения. Первое применение понятия ортогональности содержится в следующем определенин.

Определение.

а) Ядром скалярного произведения g на пространстве L называется множество всех векторов $l \in L$, ортогональноlx ко всем векторам L.

б) g называется невырожденным, если ядро формы g тривиально, т. е. состоит только из нуля.

Очевидно, ядро формы g совпадает с ядром линейного отображения

$$\tilde{g} : L \rightarrow L^* \text{ (или } L \rightarrow \bar{L}^*\text{)}$$

и потому является динейным подпространством в L. Поэтому задание невырожденной формы g можно заменить заданием изоморфизма $L \rightarrow L^*$ (или L^*). Так как матрнцей $\tilde{g}$ служит транспонированная матрица Грама G^t базиса L, невырожденность g равносильна невырожденности матрицы Грама (любого базиса). В тензорной алгебре и ее приложениях к дифференциальной геометрии и физике очень широко используется то обстоятельство, что невырожденная ортогональная форма g определявт изоморфизм $L \rightarrow L^*$: оно служит основой техники «поднятия и опускания индексов».

Ранг g определяется как размерность образа $\tilde{g}$, или как ранг матрнцы Грама G.

Задача классификации.

Пусть $(L_1, g_1), (L_2, g_2)$ - два линейных пространства со скалярными произведениями над полем $\mathscr{K}$. Назовем их изометрией любой линейный изоморфизм $f : L_1 \underset{\rightarrow}{\rightarrow} L_2$, который сохраняет значения всех скалярных произведений, т. е.

$$g_1(l, l') = g_2(f(l), f(l')) \text{ для всех } l, l' \in L_1.$$

Назовем такие пространства изометричными, если между ними существует изометрия. Очевидно, тождественное отображение является изометрией, композиция изометрий есть изометрия и линейное отображение, обратное к изометрии, есть изометрия. В следующем параграфе мы решим задачу классификацин пространств с точностью до изометрии, а затем изучим группы изометрий пространства с самим собой и покажем, что среди них содержатся классические группы, описанные в \$4 ч. 1.

ласcическое решение задачи классифнкации состоит в том, что всякое пространство со скалярным произведением разлагается в прямую сумму попарно ортогональных подпространств малой размерности (один в ортогональном и эрмитовом случае, один или два-в симплектическом). Поэтому мы закончим этот параграф непосредственным описанием таких маломерных пространств с метрикой.

Одномерные ортогональные пространства.

Пусть $\dim L = 1$, g - ортогональное скалярное произведение на L. Возьмем любой ненулевой вектор $l \in L$. Если $g(l, l) = 0$, то $g \equiv 0$, так что g вырожденное и нулевое. Если $g(l, l) = a \neq 0$, то для любого $x \in \mathscr{K}$ значенне $g(xl, xl)$ равно ax^2, так что все значения $g(l, l)$ на ненулевых векторах в L составляют в мультипликативной группе $\mathscr{K}^* = \mathscr{K} \backslash \{0\}$ поля $\mathscr{K}$ смежный класс по подгруппе, состоящей из квадратов: $\{ax^2|x \in \mathscr{K}^*\} \equiv \mathscr{K}^*/\left(\mathscr{K}^*\right)^2$. Этот смеюнный класс полностью характеризует невврожденное симметричное скалярное произведение на одномерном пространстве L: для $(L_1, \dot{g}_1)$ и (L_2, g_2) два таких класса совпадают тогда и только тогда, когда эти пространства изометричны. В самом деле, если $g_1\left(l_1, l_1\right) = ax^2$, $g_2\left(l_2, l_2\right) = ay^2$, где $l_i \in L_i$, то отображение $f : l_1 - y^{-1}xl_2$ определяет изометрию L_1 с L_2, что доказывает достаточность. Необходимость очевидна.

Так как $\mathbf{R}^*/\left(\mathbf{R}^*\right)^2 = \{\pm 1\}$ и $\mathbf{C}^* = \left(\mathbf{C}^*\right)^2$, мы получаем следующие важные частные случаи классификации.

Над $\mathbf{R}$ любое одномерное ортогональное пространство изометрично одномерному координатному пространству с одним из трех скалярньх произведений: $xy, -xy, 0$.

Над C любое одномерное ортогональное пространство изометрично одномерному координатному пространству с одним из двух скалярньх произведений: $, 0$.

Одномерные эрмитовы пространства.

Здесь рассуждения аналогичны. Основное поле равно C; вырожденность формы равносильна ее обращению в нуль. Если же форма невырождена, то множество значений $g(l, l)$ для ненулевых векторов $l \in L$ есть смежный класс подгруппы $\mathbf{R}_+^* = \{x \Longleftarrow R^* | x > 0\}$ в группе $\mathbf{C}^*$, ибо $g(al, al) = a\bar{a}g(l, l) = |a|^2 g(l, l)$, и $|a|^2$ пробегает все значения в $\mathbf{R}_+^*$, когда $a \Subset \mathbf{C}^*$. Но каждое ненулевое комплексное число z однозначно представляется в виде $re^{i\varphi}$, где $r \in R_+^*$, а $e^{l\varphi}$ лежнг на единичной комплексной окружности, которую мы обозначим

$$\mathbf{C}_1^* = \{z \in \mathbf{C}^* || z \mid = 1\}$$

На групповом языке это определяет прямое разложение $\mathbf{C}^* = \mathbf{R}_+^* \times \chi \mathbf{C}_1^*$ и изоморфизм $\mathbf{C}^*/\mathbf{R}_+^* \to \mathbf{C}_1^*$. Таким образом, невырожденные полуторалинейные формы классифицируются комплексными числами, по модулю равными единице. Однако мы еще не полностью учли свойетва эрмитовости, которое означает, что $g(l, l) = \overline{g(l, l)}$, т. е. что значения $g(l, l)$ все вещественны. Поэтому эрмитовым формам отвечают.только чнсла \pm 1 в $\mathbf{C}_1^*$, как и в ортогональном случае над $\mathbf{R}$. Окончательный ответ:

Над $\mathbf{C}$ любое одномерное зрмитово пространство изометрично одномерному координатному пространстеу с одним из трех скаляркьих произведений: $x\bar{y}, -x\bar{y}, 0$. Одномерные ортогональные пространства над $\mathbf{R}$ (или эрмитовы над C) со скалярными пронзведениями $xy, -xy, 0$ (или $x\bar{y}, -x\bar{y}, 0$) в подходящем базисе мы будем называть соответственно положительными, отрицательными и нулевыми. Скалярные пронзведения ненулевых векторов на себя в них принимают соответственно только положительные, только отрицательные или только нулевые значения.

Одномерные симплектические пространства.

Здесь мы встречаемся с новой ситуацией: любая антисимметричная форма на одномерном пространстве над полем характеристики $\neq 2$ тождественно равна нулю, в частности, вырождена! Действительно,

$$g(l, l) = -g(l, l) \Rightarrow 2g(l, l) = 0,$$

$$g(al, bl) = abg(l, l) = 0.$$

Что касается характеристики 2, то условие антисимметрии $g(l, m) = -g(m, l)$ в этом случае равносильно условию симметрии $g(l, m) = g(m, l)$, так что над такими полями симплектическая геометрия не отличается от ортогональной. Впрочем, у ортогональной геометрии также появляются свои особенности, и мы обычно будем этот случай исключать из рассмотрения.

Ясно поэтому, что одномерные симплектические пространства не могут быть строительным материалом для конструкции общих симплектических пространств, и нужно пойти по крайней мере на шаг дальше.

Двумерные симплектические пространства.

Пусть (L, g) - двумерное пространство с кососимметрической формой g над полем $\mathscr{K}$ характеристики $\neq 2$. Если форма g вырождена, то она автоматически нулевая. В самом деле, пусть $l \neq 0$ - такой вектор, что $g(l, m) = 0$, для всех $m \in L$. Дополним l до базиса

$\{l, l'\}$ в L и учтем, что $g(l', l') = g(l, l) = 0$ по предыдушему пункту. Тогда для любых $a, b, a', b' \in \mathscr{K}$ имеем

$$g(al + a'l', bl + b'l') = abg(l, l) + ab'g(l, l') - a'bg(l, l') + bb'g(l', l') \Rightarrow 0.$$

Пусть теперь g ненулевая и, значит, невырожденная. Тогда существует пара векторов e_1, e_2 с $g(e_1, e_2) = a \neq 0$ и даже с $a = 1$: $g(a^{-1}e_1, e_2) = a^{-1}a = 1$.

Пусть $g(e_1, e_2) = 1$. Тогда векторы e_1, e_2 линейно независимы и, значит, образуют базис L: если, скажем, $e_1 = ae_2$, то $g(ae_2, e_2) = ag(e_2, e_2) = 0$. В координатах относительно такого базиса скалярное произведение g записывается в виде

$$g(x_1e_1 + x_2e_2, y_1e_1 + y_2e_2) = x_1y_2 - x_2y_1$$

и имеет матрицу Грама

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Окончательно, получаем: Над полем $\mathscr{K}$ характеристики $\neq 2$ любое двумерное симплектическое пространство изометрично координатному пространству $\mathscr{K}^2$ со скалярным произведением $x_1y_2 - x_2y_1$ или 0.

УПРАЖНЕНИЯ

Пусть L, M - конечномерные линейные пространетва над полем $\mathscr{K}$ и $g : L \times M \to \mathscr{K}$ - билинейное отображение. Назовем левым ядром g множество $L_0 = \{l \in L | g(l, m) = 0$ для всех $m \Subset M\}$, правым ядром g множество $M_0 = \{m \in M | g(l, m) = 0$ для всех $l \in L\}$. Покажите следующие утверждения:

а) $\dim L/L_0 = \dim M/M_0$.

б) g индуцирует билинейное отображение $g' : L/L_0 \times M/M_0 \to \mathscr{K}$, $g'(l + L_0, m + M_0) = g(l, m)$, у которого левое и правое ядра нулевые.

Докажите, что всякое билинейное скалярное произведение $g : L \times L \to \mathscr{K}$ (над полем $\mathscr{K}$ характеристнки $\neq 2$) однозначно разлагается в сумму симметричного и антисимметричного скалярного произведения.

Пусть $g : L \times L \to \mathscr{K}$ - такое билинейное скалярное произведение, что свойство ортогональности пары векторов симметрично: из $g(l_1, l_2) = 0$ следует, что $g(l_2, l_1) = 0$. Докажите, что тогда g либо симметрично, либо антисимметрично. (Указания. а) Пусть $l, m, n \in L$. Докажите, что $g(l, g(l, n)m - g(l, m)n) = 0$. Пользуясь симметрией ортогона.иьности, выведите отсюда, что $g(l, n)g(m, l) = g(n, l)g(l, m)$. 6) Положив $n = l$, выведите отсюда, что если $g(l, m) \neq g(m, l)$, то $g(l, l) = 0$. в) Покажите, что $g(n, n) = 0$ для любого вектора $n \in L$, если g несимметрично. С этой целью выберите l, m с $g(l, m) \neq g(m, l)$ и разберите отдельно случан $g(l, n) \neq g(n, l)$, $g(l, n) = g(n, l)$. г) Покажите, что если $g(n, n) = 0$ для всех $n \in L$, то g антисимметрнчно.)

Дайте классификацию одномерных ортогональных пространств над конечным полем $\mathscr{K}$ характеристики $\neq 2$, покгзав, что $\mathscr{K}^*/(\mathscr{K}^*)^2$ есть циклическая группа второго порядка. (Указание: Покажите, что ядро гомоморфизма $\mathscr{X}^{**} \to \mathscr{K}^* : x \longmapsto x^2$ имеет порядок 2, пользуясь тем, что любой многочлен над полем имеет не больше корней, чем его степень.)

Пусть (L, g) - линейное пространство размерности n с невырожденным скалярным произведением. Докажите, что семейство векторов $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в L линейно независимо тогда и только тогда, когда матрица $(g(e_i, e_i))$ невырождена.

15.7.3 3. Classification Theorems

Основная цель этого параграфа-дать классификацию конечномерных ортогональных, эрмитовых и симплектических пространств с точностью до изометрии. Пусть (L, g) - такое пространство, $L_0 \subset L$ - его подпространство. Ограничение g на L_0 является скалярным произведением на L_0. Назовем L_0 невырожденным, если ограничение g на L_0 невырождено, и изотропным, если ограничение g на L_0 равно нулю. Существенно, что если даже L невырождено, ограничения g на нетривиальные подпространства могут быть вырожденными кли нулевыми. Например, в симплектическом случае вырождены все одномерные подпространства, а в ортогональном пространстве $\mathbf{R}^2$с произведением $x_1y_1 - x_2y_2$ вырождено подпространство, натянутое на вектор $(1, 1)$.

Ортогональным дополнением к подпространству $L_0 \subset L$ называется множество

$$L_0^1 = \{l \in L \lg(l_0, l) = 0 \quad \text{для всех } l_0 \in L_0\}$$

(не путать с введенным в первой части ортогональным дополне- нием к L_0, лежащим в L^*, здесь мы им пользоваться не будем). Легко видеть, что $L_0^{\perp}$ является линейным подпространством в L.

Предложение.

Пусть (L, g) конечномермо.

а) Если подпространство $L_0 \subset L$ невырождено, то $L = L_0 \oplus L_0^{\perp}$.

б) Если оба подпространства $L_0 u L_0^{+}$невырождены, то $\left(L_0^{\perp}\right)^{\perp} = L_0$.

Доказ ательств о. а) Пусть $\tilde{g} : L \to L^*$ (или L^*) - отображение, ассоциированное с g, как в предыдущем параграфе. Обозначим через $\tilde{g}_0$ его ограничение на $L_0, \tilde{g}_0 : L_0 \to L^*$ (или L^*). Если L_0 невырождено, то $\operatorname{Ker} \tilde{g}_0 = 0$: иначе в L_0 есть вектор, ортогональный ко всему L и тем более к L_0. Поэтому $\dim \operatorname{Im} \tilde{g}_0 = \dim L_0$. Это означает, что когда l_0 пробегает L_0, линейные формы $g(l_0, \cdot)$ от второго аргумента из L или L пробегают $\dim L_0$-мерное пространство линейных форм на L или L. Так как $L_0^{\perp}$ есть пересечение ядер этих форм, $\dim L_0^{\perp} = \dim L - \dim L_0$, т. е.

$$\dim L_0 + \dim L_0^1 = \dim L.$$

С другой стороны, из невырожденности L_0 следует, что $L_0 \cap L_0^{\perp} = \{0\}$, ибо $L_0 \cap L_0^{\perp}$ есть ядро ограничения g на L_0. Поэтому сумма $L + L_0^{\frac{1}{1}}$ прямая; но ее размерность равна $\dim L$, так что $L_0 \oplus L_0^{\perp} = L$.

б) Из определений ясно, что $L_0 \subset \left(L_0^{\perp}\right)^{\perp}$. С другой стороны, если $L_0, L_0^{\perp}$ невырождены, то по предыдушему

$$\dim \left(L_0^{\perp}\right)^{\perp} = \dim L - \dim L_0^{\perp} = \dim L_0.$$

Это завершает доказательство.

Теорема.

Пусть (L, g) - конечномерное ортогональное (над полем характеристики $\neq 2$), эрмитово или симплектическое пространство. Тогда существует разложение L в прямую сумму попарно ортогональных подпространств:

$$L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_m$$

одномерных в ортогональном и эрмитовом случае и одномерных вырожденных или двумерных невырожденных в симплектическом случае.

Д ок аз ательство. Проведем индукцию по размерности L. Случай $\dim L = 1$ тривиален; пусть $\dim L \geqslant 2$. Если g нулевая, доказывать нечего. Если g ненулевая, то в симплектическом случае имеется пара векторов $l_1, l_2 \in L$ с $g(l_1, l_2) \neq 0$. Согласно п. 10 предыдушего параграфа, натянутое на них подпространство L_0 невырождено. По предложению п. $2L = L_0 \oplus L_0^{\perp}$, и по индуктивному предположению мы можем далее разложить L_0^{1}, как сформулировано в теореме. Это даст требуемое разложение L.

В ортогональном и эрмитовом случае мы покажем, что из нетривиальности g следует существование невырожденного одномерного подпространства L_0; проверив это, мы сможем положить $L = L_0 \oplus L_0^{\perp}$ и применить прежнее рассуждение, т. е. индукцию по размерности L.

В самом деле, допустим, что $g(l, l) = 0$ для всех $l \in L$, и покажем, что тогда $g \equiv 0$. Действительно, для всех $l_1, l_2 \Leftarrow L$ имеем

$$0 = g(l_1 + l_2, l_1 + l_2) == g(l_1, l_1) + 2g(l_1, l_2) + g(l_2, l_2) = 2g(l_1, l_2)$$

или

$0 = g(l_1 + l_2, l_1 + l_2) = g(l_1, l_1) + 2\operatorname{Re} g(l_1, l_2) + g(l_2, l_2) = 2\operatorname{Re} g(l_1, l_2)$.

В ортогональном случае отсюда сразу следует, что $g(l_1, l_2) = 0$. В эрмитовом мы получаем лишь, что $\operatorname{Re} g(l_1, l_2) = 0$, т. е. $g(l_1, l_2) = ia, a \in \mathbf{R}$. Но если $a \neq 0$, то также

$$0 = \operatorname{Re} g\left((ia)^{-1} l_1, l_2\right) = \operatorname{Re}(ia)^{-1} g(l_1, l_2) = 1.$$

Получаем противоречие.

Это завершает доказательство.

Перейдем теперь к проблеме единственности. Само по себе разложение в ортогональную прямую сумму, существование которого утверждается в теореме п. 3, далеко не единственно, кроме тривиальных случаев размерности 1 (или 2 в симплектическом случае). Над обцими полями в случае ортогональной геометрин неоднозначно определяется также и набор инвариантов $a_i \in \in \mathscr{K}^* / \mathscr{K}^{*2}$, который характеризует ограничения g на одномерныс подпространства L_i. Точный ответ на вопрос о классификации ортогональных пространств существенно зависит от свойств основного поля, и для $\mathscr{K} = \mathbf{Q}$, например, связан с такими довольно тонкими теоретико-числовыми фактами, как квадратичный закон взаимности. Поэтому в ортогональном случае мы ограничимся описанием результата для $\mathscr{K} = \mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$ (дальнейшие подробности см. В \$14).

Инварианты пространств с метрикой. Пусть (L, g) - пространство со скалярным пронзведением. Положим $n = \dim L$, $r_0 = \dim L_0$, где L_0 - ядро формы g. Кроме того, введем два дополнительных инварианта, относящихся только к ортогональной для $\mathscr{K} = \mathbf{R}$ и эрмитовой геометриям: r_+и r_-, числа положительных и отрицательных одномерных подпространств L_i в некотором ортогональном разложении L в прямую сумму, как в теореме п. 3.

Очевидно, $r_0 \leqslant n$ и $n = r_0 + r_+ + r_-$для эрмитовой и ортогональной геометрии над R. Набор (r_0, r_+, r_-)называется сигнатурой пространства. Прн $r_0 = 0$ сигнатурой называют иногда также (r_+, r_-)или $r_+ - r_-$(считая $n = r_+ + r_-$известным).

Теперь мы можем сформулировать теорему единственности.

Теорема.

а) Симплектические пространства над произвольным полем, а также ортогональные пространства над $\mathbf{C}$ с точностью до изометрии определяются двумя цельми числами n, r_0, т. е. размерностями пространства и ядра скалярного произведения.

б) Ортогональные пространства над $\mathbf{R}$ и эрмитовы пространства над С с точностью до изометрии определяются сигнатурой (r_0, r_+, r_-), которая не зависит от выбора ортогонального разложения (это утверждение называется теоремой инерции).

Доказ ательств о. а) Пусть (L, g) - симплектнческое пространство или ортогональное пространство над С. Рассмотрим его прямое разложение $L = \bigoplus_{i=1}^{n} L_i$, как в теореме п. 3, и покажем, что r_0 совпадает с числом одномерных пространств в этом разложенин, вырожденных для g. На самом деле сумма этих пространств L_0 совпадает с ядром g. Действительно, очевидно, что она содержится в этом ядре, ибо элементы L_0 ортогональны как к L_0, так и к остальным слагаемым. С другой стороны, если $L_0 = \bigoplus_{i=1}^{r_n} L_l$ и

$$l=\sum_{j=1}^{n} l_j, \quad l_j \in L_i, \exists j>r_0, l_j \neq 0,$$

то

$$g\left(l, l_j\right)=g\left(l_j, l_j\right) \neq 0$$

в ортогональном случае, и существует вектор $l_j^{\prime} \in L_j$с

$$g\left(l, l_i^{\prime}\right)=g\left(l_f, l_i^{\prime}\right) \neq 0$$

в симплектическом случае, ибо иначе ядро ограничения g на L_f было бы нетривиально, и g на L_j была бы нулевой по п. 10\$2, вопреки тому, что $j>r_0$. Поэтому $l \notin$ (ядро g), и $L_0=$ (ядро g). Если теперь (L, g) и $\left(L^{\prime}, g^{\prime}\right)$ - два таких пространства с одинаковыми n и r, то, построив их ортогнальные прямые разложения $L=\bigoplus_{i=1}^n L_i$ и $L^{\prime}=\bigoplus_{i=1}^n L_i^{\prime}$, для которых (ядро g) $=\bigoplus_{i=1}^{r_0} L_i$ и (ядро $g^{\prime}$) $=\bigoplus_{i=1}^{r_0} L_i^{\prime}$ мы можем определить изометрию (L, g) с $\left(L, g^{\prime}\right)$ как прямую сумму изометрий $\bigoplus f_i, f_i: L_i \rightarrow L_i^{\prime}$, которые существуют в силу результатов пп. 7 и 10§2.

б) Пусть теперь (L, g) и $\left(L^{\prime}, g^{\prime}\right)$ - пара ортогональных пространств над $\mathbf{R}$ или эрмитовых над $\mathbf{C}$ с сигнатурами $\left(r_0, r_{+}, r_{-}\right)$и $\left(r_0^{\prime}, r_{+}^{\prime}, r_{-}^{\prime}\right)$, определенными с помощью некоторых ортогональных разложений $L=\bigoplus L_i, L^{\prime}=\bigoplus L_i^{\prime}$, как в теореме п. 3. Предположим, что между ними существует изометрия. Тогда прежде всего $\operatorname{dim} L=\operatorname{dim} L^{\prime}$, так пто $r_0+r_{+}+r_{-}=r_0^{\prime}+r_{+}^{\prime}+r_{-}^{\prime}$. Далее, точно так же, как в предыдущем пункте, проверяется, что r_0 совпадает с размерностью ядра g, а $r_0^{\prime}$ - с размерностью ядра $g^{\prime}$, а эти ядра суть суммы нулевых пространств L_i и $L_i^{\prime}$ в соответствующих разложениях. Поскольку изометрия определяет линейный изоморфизм между ядрами, имеем $r_0=r_0^{\prime}$ и $r_{+}+r_{-}=r_{+}^{\prime}+r_{-}^{\prime}$.

Остается проверить, что $r_{+}=r_{+}^{\prime}, r_{-}=r_{-}^{\prime}$. Положим $L=L_0 \oplus L_{+} \oplus L_{-}, \quad L^{\prime}= L_0^{\prime} \oplus L_{+}^{\prime} \oplus L_{-}^{\prime}$, где L_0, L_{+}, L_{-}- суммы нулевых, положительных и отрицательных подпространств исходного разложения L, и соответственно для $L^{\prime}$. Предположнм, что $r_{+}=\operatorname{dim} L_{+}>r_{+}^{\prime}=\operatorname{dim} L_{+}^{\prime}$, и придем в противоречию; возможность $r_{+}<r_{+}^{\prime}$ разбирается аналогично. Ограничим изометрию $f: L \rightarrow L^{\prime}$ на $L_{+} \subset L$. Каждый вектор $f(l)$ однозначно представляется в виде суммы

$$f(l)=f(l)_0+f(l)_{+}+f(l)_{-},$$

где $f(l)_{+} \in L_{+}^{\prime}$ и т. п. Отображение $L_{+} \rightarrow L_{+}^{\prime}, l \mapsto f(l)_{+}$линейно. Так как по предположению $\operatorname{dim} L_{+}>\operatorname{dim} L_{+}^{\prime}$, существует ненулевой вектор $l \in L_{+}$, для которого $f(l)_{+}=0$, так что

$$f(l)=f(l)_0+f(l)_{-} .$$

Но $g(l, l)>0$, потому что $l \in L_{+}$и L_{+}есть ортогональная прямая сумма положительных одномерных пространств. Так как f - изометрия, мы должны иметь также $g^{\prime}(f(l), f(l))> 0$. С другой стороны,

$g^{\prime}(f(l), f(l))=g^{\prime}\left(f(l)_0+f(l)_{-}, \quad f(l)_0+f(l)_{-}\right)=g^{\prime}\left(f(l)_{-}, f(l)_{-}\right) \leqslant 0$.

Это противоречие завершает доказательство того, что у изометричных пространств сигнатуры, вычисленные по любым ортогональным разложениям, одинаковы.

Наоборот, если $(L, g),\left(L^{\prime}, g^{\prime}\right)$ - два пространства с одинаковыми сигнатурами, то между подпространствами из их ортогональных разложений $L=\bigoplus L_i$ и $L^{\prime}=\bigoplus L_i^{\prime}$ можно установить взаимно однозначное соответствие $L_i \leftrightarrow L_i^{\prime}$, сохраняющее знак ограничения g на L_i и $g^{\prime}$ на $L_i^{\prime}$ соответственно. По результатам пп. 7 и 8§2 существуют изометрин $f_i: L_i \rightarrow L_i^{\prime}$, и их прямая сумма $\bigoplus f_i$ будет изометрией между L и $L^{\prime}$.

Теперь мы выведем несколько следствий и переформулировок теорем пп. 3 и 5, которые подчеркивают разные аспекты ситуации.

Базисы. Пусть (L, g) - пространство со скалярным произведением. Базис $\left\{e_1, \ldots, e_n\right\}$ в L называется ортогональным, если $g\left(e_i, e_j\right)=0$ для всех $i \neq j$. Из теоремы п. 5 следует, что у любого ортогомального или эрмитова пространства имеется ортогональный базис. Действительно, достаточно постронть разложение $L=\bigoplus L_i$ на ортогональные одномерные подпространства и затем выбрать $e_i \in L_i, e_i \neq 0$.

Ортогональный базис $\{e_i\}$ называется ортонормированным, если $g(e_i, e_i) = 0$ или \pm 1 для всех i. Обсуждение в конце \$2 показывает, что у любого ортогомального пространства над $\mathbf{R}$ или C у любого эрмитова пространства имеется ортонормированньй базис. Теорема п. 5 показывает, что числа элементов е ортонормированного базиса с $g(e, e) = 0, 1$ или -1 не зависят от базиса для $\mathscr{H} = \mathbf{R}$ (ортогональный случай) и $\mathscr{H} = \mathbf{C}$ (эрмнтов случай). В ортогональном случае над $\mathbf{C}$ всегда можно добиться того, что $g(e_i, e_i) = 0$ или висят от самого базиса. Матрица Грама ортонормированного базиса имеет вид

$$\left(\begin{array}{c|c|c} E_{r_+} & 0 & 0 \\ \hline 0 & -E_{r_-} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(при надлежащем упорядочении). Чаще всего понятие ортонормированного базиса применяют в невырожденном случае, когда векторов e_i с $g(e_i, e_i) = 0$ нет. Следующая простая, но важная формула позволяет явно написать коэффициенты разложения любого вектора $e \in L$ по ортогональному базису (в невырожденном случае):

$$e = \sum_{i=1}^{n} \frac{g(e, e_i)}{g(e_i, e_i)} e_i$$

Действительно, скалярные пронзведения левой и правой части со всеми e_i совпадают, а из невырожденности следует, цто если $g(e, e_i) = g(e', e_i)$ для всех i, то $e = e'$, ибо $e - e'$ лежит в ядре формы g.

В симплектическом пространстве ортогональный базис, очевидно, может существовать, только если $g = 0$. Теорема п. 3 обеспечивает, однако, существование симплектического базиса $\{e_1, e_2, \ldots \quad \ldots, e_r; e_{r+1}, \ldots, e_{2r}; e_{2r+1}, \ldots, e_n\}$, который характеризуется тем, йто

$$g(e_i, e_{r+i}) = -g(e_{r+i}, e_i) = 1, \quad i = 1, \ldots, r,$$

а все остальные попарные скалярные произведения равны нулю. Действительно, следует разложить L в ортогональную прямую сумму двумерных невырожденных подпространств $L_i, 1 \leqslant i \leqslant r$, одномерных вырожденных $L_l, 2r+1 \leqslant j \leqslant n$, и в качестве $\{e_i, e_{r+i}\}$ для $1 \leqslant i \leqslant r$ взять базис L_i, построенный в п. 10§2, а в качестве e_j для $2r+1 \leqslant j \leqslant n$ взять любой ненулевой вектор из L_i.

Матрица Грама симплектического базиса имеет вид

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & E_r & 0 \\ \hline -E_r & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ранг симплектической формы, по теореме п. 5, равен $2r$. В частности, невырожденное синплектическое пространство облзательно четномерно.

Пусть L - невырожденное симплектическое пространство, $\{e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_{2r}\}$ - симплектический базис в нем. Пусть L_1-линейная оболочка $\{e_1, \ldots, e_r\}; L_2$-линейная оболочка $\{e_{r+1}, \ldots, e_{2r}\}$. Очевидно, пространства L_1 и L_2 изотропны, имеют п1оловинную размерность и $L = L_1 \oplus L_2$. Каноническое отображение $\tilde{g}: L \to L^*$ определяет отображение

$$\tilde{g}_1: L_2 \to L_1^*; \quad \tilde{g}_1(l_2)(l_1) = g(l_2, l_1)$$

Это отображение является изоморфизмом, ибо $\dim L_2 = \dim L_1 = \dim L_1^*$ и $\operatorname{Ker} \tilde{g}_1 = 0$: вектор из $\operatorname{Ker} \tilde{g}_1$ ортогонален к L_2, ибо L_2 изотропно, и к L_1 по определению, а L невырождено.

Отсюда следует, что юобое невырожденное симплектическое пространство изометрично пространству вида. $L = L_1^* \oplus L_1$ с симплектической формой

$$g((f, l), (f', l')) = f(l') - f'(l); f, f' \in L_1^*, \quad l, l' \in L_1.$$

Дальнейшие подробности см. в \$12.

Матрицы. Описывая скалярные произведения их матрицами Грама и переходя от случайного базиса к ортогональному или симплектическому, мы в силу результатов п. 2 & и П. 6 этого параграфа получаем следующие факты:

а) Всякую квадратную симметричную матрицу G над полем $\mathscr{K}$ можно привести к диагональному виду преобразованием $G \longmapsto A^t G A$, где A невырождена. При $\mathscr{K} = \mathbf{R}$

можно добиться, чтобы на диагонали стояли только 0, \pm 1, а при $\mathscr{K} = \mathbf{C}$ - только 0,1; количества 0 и \pm 1 (соответственно 0 и 1) будут зависеть лишь от G, но не от A.

б) Всякую квадратную антисимметричную матрицу G над полем $\mathscr{K}$ характеристики $\neq 2$ можно привести преобразованием $G \longmapsto A^t GA$, где A невырождена, к виду

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & E_r & 0 \\ \hline -E_r & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Число $2r$ равно рангу G.

в) Всякую эрмитову матрицу G над C можно привести к диагональному виду с числами $0, \pm 1$ на диагонали преобразованием $G \longmapsto A^t G\bar{A}$, где A невырождена. Количества 0 и \pm 1 зависят пишь от G.

Билинейные формы. Если векторы пространства (L, g) с фиксированным базисом записываются координатами в этом базисе, то выражение g через координаты является билинейной формой от $2n$ переменных, $n = \dim L$:

$$g = (x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j = \vec{x}^t G \vec{y},$$

где G - матрица Грама базиса. Замена базиса сводится к линейному преобразованию переменных $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$ с помощью одной и той же невырожденной матрицы A в билинейном случае (или матрицы A для $\vec{x}, \bar{A}$ для $\overline{\vec{y}}$ в полуторалинейном слу чае). Предыдуие результаты означают, что в зависимости от свойств симметрии матрицы G форму можно привести таким преобразованием к одному из следующих вндов, называемых каноническими.

Ортогональный случай над любым полем:

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} a_l x_l y_l$$

над полем $\mathbf{R}$ можно добиться того, чтобы $a_i = 0, \pm 1$; над полем $\mathbf{C}$ - чтобы $a_i = 0$ или 1.

Эрмитов случай (форма полуторалинейная):

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \bar{y}_i$$

$a_i = 0$ или 1.

Симплектический случай: $n = 2r + r_0$, и форма имевт вид

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{r} (x_i y_{r+i} - y_i x_{r+i})$$

Квадратичные формы. Квадратичной формой q на пространстве L называется такое отображение $q : L \to \mathscr{K}$, для которого существует билинейная форма $h : L \times L \to \mathscr{H}$ со свойством

$$q(l) = h(l, l) \text{ для всех } l \in L.$$

Покажем, что если характеристика поля $\mathscr{K}$ не равна 2, то для всякой квадратичной формы q существует единственная симметричная билинейная форма g со свойством $q(l) = g(l, l)$, называемая поляризацией q.

Для доказательства существования положим $q(l) = h(l, l)$, где h-исходная билинейная форма, и

$$g(l, m) = \frac{1}{2}[h(l, m) + h(m, l)].$$

Очевидно, g симметрична, т. е. $g(l, m) = g(m, l)$. Кроме того,

$$g(l,l)=\frac{1}{2}[h(l,l)+h(l,l)]=q(l).$$

Билинейность g сразу же следует из билинейности h.

Для доказательства единственности заметим, что если $q(l)=g_1(l,l)=g_2(l,l)$, где g_1,g_2 симметричны и билинейны, то форма $g=g_1-g_2$ тоже симметрична и бнлинейна, и $g(l,l)=0$ для всех $l\in L$. Но по рассуждению в доказательстве теоремы п. 3 отсюда следует, что $g(l,m)=0$ для всех $l,m\in L$, что завершает доказательство. Заметим, что если $q(l)=g(l,l), g$ симметрична, то

$$g(l,m)=\frac{1}{2}[q(l+m)-q(l)-q(m)].$$

Мы установили, таким образом, что ортогональные геометрии (над полями характеристики $\neq 2$) можно рассматривать как гео- метрии пар (L,q), где $q: L\rightarrow\mathscr{K}$ - квадратичная форма. В координатах квадратичпая форма записывается в виде

$$q(\vec{x})=\sum_{i,i=1}^{n}a_{ij}x_ix_i$$

где матрица (a_{ij}) определяется однозначно, если она симметрична: $a_{ij}=a_{ji}$. Например,

$$q\left(x_1,x_2\right)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2.$$

Теоремы классификации означают, что невырожденной линейной заменой переменных квадратичную форму можно привести к сумме квадратов с коэффициентами:

$$q(\vec{x})=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i^2$$

Если $\mathscr{K}=\mathbf{R}$, можно считать, что $a_i=0,\pm1$; количества r_0,r_+,r_- нулей и плюс-минус единиц определены однозначно и составляют сигнатуру исходной квадратичной формы; r_++r_- — то ее ранг. Если $\mathscr{K}=\mathbf{C}$, можно считать, что $a_i=0,1$; колнчество единиц это ранг формы; он также определен однозначно.

15.7.4 4. Orthogonalization Algorithm and Orthogonal Polynomials

В этом параграфе мы опишем классические алгоритмы для отыскания ортогональных базисов и важные примеры таких базисов в пространствах функций.

Приведение квадратичной формы к сумме квадратов. Пусть

$$q\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j, a_{ij}=a_{ji},$$

квадратичная форма над полем $\mathscr{K}$ характеристики $\neq 2$. Следуюшая процедура дает удобный практический способ отыскания линейной замены переменных x_i, приводящей q к сумме квадратов (с коэффициентами).

Случ ай 1. Существует ненулевой диагональный коэффициент. Перенумеровав переменные, мы можем считать, что $a_{11}\neq 0$. Тогда

$$q\left(x_1,\ldots,x_n\right)=a_{11}x_1^2+x_1\left(2a_{12}x_2+\ldots+2a_{1n}x_n\right)+q'\left(x_2,\ldots,x_n\right),$$

где q' - квадратичная форма от $\leqslant n-1$ переменных. Выделяя полный квадрат, находим

$$q\left(x_1,\ldots,x_n\right)=a_{11}\left(x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\ldots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2+q''\left(x_2,\ldots,x_n\right),$$

где q'' - новая квадратичная форма от $\leqslant n-1$ переменных. Полагая

$$y_1=x_1+a_{11}^{-1}\left(a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\right),\quad y_2=x_2,\ldots,y_n=x_n,$$

мы получаем в новых переменных форму

$$a_{11}y_1^2 + q''(y_2, \ldots, y_n)$$

и следующий шаг алгоритма состоит в применении его к q''.

С лучай 2. Все диагональные коэффициенть равны кулю. Если вообще $q = 0$, то делать ничего не нужно: $q = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot x_i^2$. Иначе, перенумеровав переменные, можно считать, что $a_{12} \neq 0$. Тогда

$$q(x_1, \ldots, x_n) = \\ = 2a_{12}x_1x_2 + x_1l_1(x_3, \ldots, x_n) + x_2l_2(x_3, \ldots, x_n) + q'(x_3, \ldots, x_n),$$

где l_1, l_2-линейные формы, а q' - квадратичная. Положим

$$x_1 = y_1 + y_2, \quad x_2 = y_1 - y_2, \quad x_i = y_i, \quad i \geqslant 3.$$

В новых переменных форма q приобретает вид

$$2a_{12}\left(y_1^2 - y_2^2\right) + q''(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

где q'' не содержит членов с y_1^2, y_2^2. Поэтому к ней можно применить способ выделения полного квадрата и снова свести задачу к меньшему числу переменных. Последовательное прнменение этих шагов приведет форму к внду $\sum_{i=1}^{n} a_i z_i^2$. Окончательная линейная замена переменных будет невырожленной, так как таковы все промежуточные замены.

Последняя замена переменных $u_i = \sqrt{|a_i|}z_i$ при $a_i \neq 0$ в случае $\mathscr{K} = \mathrm{R}$ и $u_i = \sqrt{a_i}z_i$ при $a_i \neq 0$ в случае $\mathscr{K} = \mathbf{C}$ приведет форму к сумме квадратов с коэффициентами $0, \pm 1$ или $0, 1$.

Алгоритм ортогонализации Грама - Шмидта. ОН весьма близок к описанному в предыдущем пункте, но формулируется в более геометрических терминах. Мы будем рассматривать одновременно ортогональный и эрмитов случай.

Исходными данными являются: пространство (L, g) с ортогональной или эрмитовой метрикой, заданной в базисе $\{e_1', \ldots, e_n'\}$. Пусть L_i - подпространство, натянутое на $e_1', \ldots, e_i', i = 1, \ldots, n$. Процесс ортогонализации, применеый к базису $\{e_1', \ldots, e_n'\}$, можно рассматривать как конструктивное доказательство следующего результата:

Предложение.

Предположим, что в описанны. обозначениях все подпространства $L_1, \ldots, L_n$ невьрождены. Тогда суцествует такой ортогональный базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ пространства L, что линейная оболочка $\{e_1, \ldots, e_i\}$ совпадает с L_i для всех $i = 1, \ldots, n$. Он называетсл результатол ортогонализации исходного базиса $\{e_1', \ldots, e_n'\}$. Каждый вектор e_i определен однознацно с толностью до улножения на ненулевой скаляр. Доказательств о. Построим e_i индукцией по i. В качестве e_1 можно взять e_1'. Если $e_1, \ldots, e_{i-1}$ уже построены, будем искать e_i в виде

$$e_i = e_i - \sum_{i=1}^{i-i} x_j e_j', \quad x_i \in \mathscr{K}.$$

Так как $\{e_1', \ldots, e_i'\}$ порождают L_i, а $\left\{e_1', \ldots, e_{i-1}'\right\}$ и $\{e_1, \ldots \ldots, e_{i-1}\}$ порождают L_{i-1}, любой такой вектор e_i вместе с $e_1, \ldots \ldots, e_{i-1}$ будетпорождать L_i. Поэтому достаточно добиться того, чтобы e_i был ортогонален к $e_1, \ldots, e_{i-1}$, или, что то же самое, к $e_1', \ldots, e_{t-1}'$. Эти условия означают, что $g(e_i, e_k') = 0, k = 1, \ldots \ldots, i-1$, или

$$\sum_{i=1}^{i-1} x_i g\left(e_j', e_k'\right) = g\left(e_i', e_k'\right), \quad k = 1, \ldots, i-1.$$

Это система $i-1$ линейных уравнений для $i-1$ неизвестных x_j. Ее матрица коэффициентов есть матрица Грама базиса $\left\{e_1', \ldots, e_{i-1}'\right\}$ пространства L_{i-1}. По предположению, она невырождена, так что x_j существуют и определены однозначно. Любой ненулевой вектор $\tilde{e}_i$, ортогональный к L_{i-1}, должен быть пропорционален $\boldsymbol{e}_i$.

Более простая и решаемая сразу система уравнений получится, если искать e_i в виде

$$e_i = e_i' - \sum_{i=1}^{i-1} y_j e_j, y_j \subseteq \mathscr{K},$$

считая $e_1, \ldots, e_{i-1}$ уже найденными. Поскольку $e_1, \ldots, e_{i-1}$ попарно ортогональны, из условий $g(e_i, e_j) = 0, 1 \leqslant j \leqslant i-1$, находим

$$y_j = \frac{g(e_i', e_j)}{g(e_j, e_j)}, \quad j = 1, \ldots, i-1.$$

Весь смысл этого доказательства состоит в явном выписывании систем линейных уравнений, последовательное решение которых определяет e_i. Заметим, что матрица коэффициентов первой системы суть последовательные диагональные миноры матрицы Грама исходного базиса:

$$G_i = \left(g\left(e_j', e_k'\right)\right), \quad 1 \leqslant j, k \leqslant i.$$

Если бы мы не стремнлись к алгоритмичности, проще всего было бы рассуждать так: в силу предложения п. 2 \$ и невырожденности L_{i-1} имеем

$$L_l = L_{i-1} \oplus L_{i-1}^{\frac{1}{1}}; \quad \dim L_{i-1}^{\frac{1}{2}} = \dim L_i - \dim L_{i-1} = 1.$$

Возьмем теперь в качестве e_i любой ненулевой вектор из $L_{\frac{1}{i-1}}$.

Замечания и следствия. а) Процесс ортогонализации Грама - Шмидта чаще всего применяется в ситуации, когда $g(l, l) > 0$ для всех $l \in L, l \neq 0$, т. е. к евклидовым и унитарным пространствам, которые мы подробно изучим позже. В этом случае все подпространства L автоматически невырождены, и ортогонализировать можно любой исходный базис. Форма g с таким свойством называется положительно определенной, и ее матрицы Грама называются положительно определенными.

б) В случае $\mathscr{K} = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$ можно строить сразу ортонормированный базис. Для этого, отыскав вектор e_i, как в доказательстве предложения, следует тут же заменить его на $\lg(e_i, e_i)|^{-1/2} e_i$ или $g(e_i, e_i)^{-1/2} e_i$ (для ортогональных пространств над $\mathbf{C}$).

в) Любой ортогональный базис невырожденного подпространства $L_0 \subset L$ молсно дополнить до ортогонального базиса всего пространства L.

Действительно, $L = L_0 \oplus L_0^{\frac{1}{1}},$ и в качестве дополнения можно взять ортогональный базис $L_0^{\perp}$. Искать его можно методом Грама - Шмидта, если сначала как-нибудь дополнить базис L_0 до базиса L, позаботившись о невырожденности промежуточных подпространств.

г) Пусть $\{e_1', \ldots, e_n'\}$-базис (L, g), а $\{e_1, \ldots, e_n\}$-его ортогонализация. Положим $a_i = g(e_i, e_i)$-это единственные ненулевые элементы матрицы Грама базиса $\{e_i\}$. Будем считать, что g эрмитова или g ортогональна над R. Тогда все числа a_i вещественны, и сигнатура g определяется количеством положительных и отрицательных чисел a_i. Покажем, как восстановить ее по минорам исходной матрицы Грама $G = \{g(e_i', e_k')\}$. Пусть $G_i - i$-й диагональный минор, т. е. матрица Грама $\{e_1', \ldots, e_i'\}$. Если A_i - матрица перехода к базису $\{e_1, \ldots, e_i\}$, то

$$\det(g(e_k, e_j))_{1 \leqslant k, i \leqslant i} = a_1 \ldots a_i = \det\left(A_i^t G_i A_l\right) = \det G_i (\det A_i)^2$$

в ортогональном случае или

$$a_1 \ldots a_i = \det\left(A_i^t G_i \bar{A}_i\right) = \det G_i |\det A_i|^2$$

в эрмитовом случае. Поэтому всегда

$$\text{знак } a_1 \ldots a_i = \text{ знак } \det G_i.$$

Итак, сигнатура формы g определяется числом положительных и отрицательных элементов последовательности

$$\det G_1, \frac{\det G_2}{\det G_1}, \ldots, \frac{\det G_n}{\det G_{n-1}}.$$

В частности, форма g (и ее матрица G) положительно определена тогда и только тогда, когда все миноры $\det G_i$ положительны (напомним, что G либо вещественна и симметрична, либо комплексна и эрмитово симметрична). Этот результат называется критерием Сильвестра.

Более общо, для невырожденной квадратичной формы над любым полем тождество

$$a_1 \dots a_i = \det G_i \left(\det A_i\right)^2$$

показывает, что исходную форму с симметричной матрицей Gu невьцожденными диагональными минорами G_i можно линейньм преобразованием переменных привести к виду

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\det G_i}{\det G_{i-1}} y_i^2, \det G_0 = 1,$$

ибо квадраты $\left(\det A_i\right)^2$, мешающие непосредственно выразить a_i через $\det G_j$, можно внести сомножителями в переменные. Этот результат называется теоремой Якоби.

Билинейные формы на пространствах функций. Рассмотрим функции f_1, f_2, заданные на отрезке (a, b) вещественной прямой (возможно, $a = -\infty, b = \infty$) и принимающие вещественные или комплексные значения. Пусть $G(x)$ - фнксированная функция от $x \in (a, b)$. Билинейные формы на пространствах функций в анализе часто задаются выражениями типа

$$g\left(f_1, f_2\right) = \int_a^b G(x) f_1(x) f_2(x) dx$$

или (полуторалинейный случай)

$$g\left(f_1, f_2\right) = \int_a^b G(x) f_1(x) \overline{f_2(x)} dx$$

Разумеется, G, f_1 и f_2 должны удовлетворять каким-то условиям интегрируемости; в последующцх примерах онн будут выполнены автоматически.

Функция G называется весом формы g. Значение

$$g(f, f) = \int_a^b G(x) f(x)^2 dx \text{ или } \int_a^b G(x) |f(x)|^2 dx$$

есть взвешенное квадратииное среднее функцин f (с весом G); если $G \geqslant 0$, его можно рассматривать как некоторую интегральную меру уклонения f от нуля. Типнчная задача аппроксимации функции f линейными комбинациями некоторого заданного набора функций $f_1, \dots, f_n, \dots$ состоит в поиске таких коэффициентов $a_1, \dots, a_n, \dots$, которые при дашном n минимизируют взвешенное средпсе квадратичное функции

$$f - \sum a_i f_i$$

Позже будет видно, что коэффициенты a_i особенно просто находятся в случае, когда $\{f_i\}$ образуют ортогональную или ортонормированную систему относительно скалярного произведения g. В этом параграфе мы огранні чимся явным описанием нескольких важных ортогональных систем.

Тригонометрические миогочлеаы. Здесь $(i = 1, (a, b) = (0, 2\pi)$. Тригонолетрическими многочленали (нин многочленами Фурье) называются конечные линейные комбинации функций $\cos nx, \sin nx$ или конечные линейные комбинации функций e^{inx}, $n \in \mathbf{Z}$. Обычно первые применяются в теории вещественнозначных функций, а вторые - комплекснозначных. Поскольку $e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$, над $\mathbf{C}$ оба пространства многочленов Фурье совпадают. Над $\mathbf{R}$ используется билинейная метрика, над $\mathbf{C}$ - полуторалинейная. Функции $\{1, \cos nx, \sin nx | n \geqslant 1\}$ и $\{e^{inx} | n \in Z\}$ линейно независимы (как над **R**, так и над **C**). роме того, они образуют ортогональную систему, как следует из легко проверяемых формул:

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx = \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} \pi \text{ при } m = n > 0, \\ 0 \text{ при } m \neq n, \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} e^{imx} e^{i\pi x} dx = \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x} dx = \begin{cases} 2\pi \text{ при } m = n, \\ 0 \text{ при } m \neq n. \end{cases}$$

Системы

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx | n \geqslant 1 \right\} \text{ и } \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} | n \in Z \right\}$$

поэтому ортонормированы. Скалярные произведения любой функции f на $[0, 2\pi]$ с элементами этих ортонормированных систем называются коэффициентами Фурье этой функцип:

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n \geqslant 1,$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n \geqslant 1,$$

для вещественных функщий f и

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n \in \mathbf{Z},$$

для комплексных функций. Если сама функция f является многочленом Фурье, то по формуле разложения из п. 6 3 имеем

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} a_0 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n \geqslant 1} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

для вещественных функций f и

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$$

для комплексных функций f. Суммы справа, разумеется, конечны в рассматриваемом случае. Бесконечные ряды такой структуры называются рядами Фурье. Вопрос об их сходимости вообще и сходимости к той функции f, коэффициентами Фурье которой являются a_n, b_n, в частности, исследуется в одной из важнейших глав анализа.

Многочлены Лежандра. Здесь $G = 1, (a, b) = (-1, 1)$. Многочлены Лежандра $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \ldots$ определяются как результат процесса ортогонализации, примененного К базису $\{1, x, x^2, \ldots,\}$ пространства вещественных многочленов. Обычно они нормируются условием $P_n(1) = 1$. В такой нормировке их явный вид дается следующим результатом:

Предложение.

$P_0(x)=1, \quad P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n, n\geqslant 1.$

Доказ ательство. Так как степень многочлена $\left(x^2-1\right)^n$ равна $2n$, степень $\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n$ равна n, так что $P_1,\ldots,P_i$ порождают то же пространство над $\mathbf{R}$, что и $1,x,\ldots,x^i$. Поэтому для проверки ортогональности $P_i,P_i,i\neq 1$, достаточно убедиться, чТО

$$\int\limits_{-1}^{1} x^k P_n(x)dx=0 \text{ при } \quad k<n.$$

Интегрируя по частям, получим

$\int\limits_{-}^{1}$

$x^k\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n dx=$

$$=x^k\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^2-1\right)^n\Big|_{-1}^{1}-k\int\limits_{-1}^{1}x^{k-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^2-1\right)^n dx$$

Первое слагаемое обрацается в нуль, ибо $\left(x^2-1\right)^n$ в точках \pm 1 имеет корень кратности n, а каждое дифференцирование снижает кратность корня на единицу. Ко второму слагаемому можно применить аналогичную процедуру; после k шагов получится интеграл, пропорциональный

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\left(x^2-1\right)^n dx=\frac{d^{n-k-1}}{dx^{n-k-1}}\left(x^2-1\right)^n\Big|_{-1}^{1}=0$$

Далее, по формуле Лейбница

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[(x-1)^n(x+1)^n\right]=\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c}n\\k\end{array}\right)\frac{d^k}{dx^k}(x-1)^n\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x+1)^n.$$

В точке $x=1$ не обращается в нуль только слагаемое, отвечающее $k=n$, так что

$$P_n(1)=\frac{1}{2^n n!}\left(\begin{array}{c}n\\n\end{array}\right)\left[\frac{d^n}{dx^n}(x-1)^n\right](x+1)^n\Big|_{x=1}=\frac{1}{2^n n!}\cdot 1\cdot n!\cdot 2^n=1,$$

что завершает доказательство.

Многочлены Чебышева. $G=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},(a,b)=(-1,1)$. Многочлены $T_n(x),n\geqslant 0$, суть результат ортогонализации базиса $\{1,x,x^2,\ldots\}$. Явные формулы:

$$T_n(x)=\frac{(-2)^n n!}{(2n)!}\sqrt{1-x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(1-x^2\right)^{n-1/2}=\cos(n\arccos x).$$

Нормировка:

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{T_m(x)T_n(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}0 & \text{при} \quad m\neq n\\ \pi/2 & \text{при} \quad m=n\neq 0,\\ \pi & \text{при} \quad m=n=0\end{cases}$$

Многочлены Эрмита. $G=e^{-x^2},(a,b)=(-\infty,\infty)$. Многочлены $H_n(x)$ суть результат ортогонализации базиса $\{1,x,x^2,\ldots\}$. Явные формулы:

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

Нормировка:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad m \neq n, \\ 2^n n! \sqrt{\pi} & \text{при} \quad m = n. \end{cases}$$

Мы оставляем доказательства читателю в качестве упражнения.

УПРАЖНЕНИЯ

Доказать, что эрмитова или ортогональная форма g неотрицательно определена, т.е. $g(l, l) \geqslant 0$ для всех $l \notin L$, тогда и только тогда, когда все диагональные миноры ее матрицы Грама неотрицательны.

Доказать утверждения п. 9 и 10 этого параграфа.

15.7.5 5. Euclidean Spaces

Определение. Евклидовым пространством называется конечномерное вещественное линейное пространство L с симметричным положительно определенным скалярным произведением. Мы будем писать (l, m) вместо $g(l, m)$ и $|l|$ вместо $(l, l)^{1/2}$; число $|l|$ оудем пазывать длиной вектора l.

Из результатов, доказанных в §$3-4$, следует, что:

а) во всяком евклидовом пространстве есть ортонормированный базис, все векторы которого имеют длину 1;

б) поэтому оно изометрично координатному евклидову пространству $\mathbb{R}^n (n = \dim L)$, в котором

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, |\vec{x}| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$

Ключом ко многим свойствам евклидова пространства является многократно переоткрывавшееся неравенство Коши - Буняковского - Шварца:

Предложение.

Для любых $l_1, l_2 \Subset L$ имеем

$$(l_1, l_2) \leqslant |l_1| |l_2| .$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы l_1, l_2 линейно зависимы.

Док азательство. В случае $l_1 = 0$ имеет место равенство и l_1, l_2 линейно зависимы. Будем считать, что $l_1 \neq 0$. Для любого вещественного числа t имеем

$$|tl_1 + l_2|^2 = (tl_1 + l_2, tl_1 + l_2) = t^2 |l_1|^2 + 2t (l_1, l_2) + |l_2|^2 \geqslant 0$$

В силу положительной определенности скалярного пропзведения. Поэтому дискриминант квадратного трехялена справа неположителен, т. е.

$$(l_1, l_2)^2 - |l_1|^2 |l_2|^2 \leqslant 0.$$

Он равен нулю тогда и только тогда, когда этот трехчлен имеет вешественный корень t_0. В этом случае

$$|t_0 l_1 + l_2|^2 = 0 \Leftrightarrow l_2 = -t_0 l_1,$$

что завершает доказательство.

Следствие (неравенство треугольника). Для любых $l_1, l_2, l_3 \in L$

$$|l_1 + l_2| \leqslant |l_1| + |l_2|\,, \quad |l_1 - l_3| \leqslant |l_1 - l_2| + |l_2 - l_3|\,.$$

Доказ ательств о. Имеем

$$|l_1 + l_2|^2 = |l_1|^2 + 2\,(l_1, l_2) + |l_2|^2 \leqslant |l_1|^2 + 2\,|l_1|\,|l_2| + |\,|l_2|^2 = \\ = (|l_1| + |l_2|)^2\,.$$

Заменив здесь l_1 на $l_1 - l_2$ и l_2 на $l_2 - l_3$, получим второе неравенство.

Следствие. Евклидова длина вектора $||\ |$ является нормой на L в смысле определения в $n.4\$10$ и. 1, а функцил $d(l, m) = |l - m|$-метрикой в смысле определения $n.1$ там же.

Доказательство. Остается проверить только, что $|al| = |a||l|$ для всех $a \in \mathbf{R}$, но

$$|al| = (al, al)^{1/2} = \left(a^2|l|^2\right)^{1/2} = |a||l|.$$

Углы и расстояния. Пусть $l_1, l_2 \in L$-ненулевые векторы. В силу предложения п. 2

$$-1 \leqslant \frac{(l_1, l_2)}{|l_1|\,|l_2|} \leqslant 1$$

Поэтому существует единственный угол $\varphi, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, для иогорого

$$\cos\varphi = \frac{(l_1, l_2)}{|l_1|\,|l_2|}$$

Он называется углом между векторами l_1, l_2. ПІоскольку скалярное произведение симметрично, это «неориентированный угол», чем и объясняется интервал его значений. В соответствии со школьной геометрией угол между ортогональными векторами равен $\pi/2$. Можно систематически развить евклидову геометрию на основе данных определений длины и угла и убедиться, что в размерностях два и три она совпадает с классической.

Например, многомерная теорема Пифагора есть тривиальное следствие определений: если векторы $l_1, \ldots, l_n$ попарно ортогональны, то

$$\left|\sum_{i=1}^{n} l_l\right|^2 = \sum_{i=1}^{n} |l_l|^2$$

Обычная формула косинусов в геометрии плоскости, примененная к треугольнику со сторонамн l_1, l_2, l_3, утверждает, что

$$|l_3|^2 = |l_1|^2 + |l_2|^2 - 2\,|l_1|\,||l_2|\cos\varphi,$$

где φ - угол между l_1 и l_2. В векторном варианте $l_3 = l_1 - l_2$, и эта формула превращается в тождество

$$|l_1 - l_2|^2 = |l_1|^2 + |l_2|^2 - 2\,(l_1, l_2)$$

в соответствии с нашим определением угла.

Пусть $U, V \subset L-$-два множества в евклидовом пространстве. Расстоянием между ними называется неотрицательное число

$$d(U, V) = \inf\left\{|l_1 - l_2|\|l_1 \in U, l_2 \in V\right\}.$$

Рассмотрим частный случай: $U = \{l\}$ (один вектор), $V = L_0 \subset L$ - линейное подпространство. В силу предложення п. 2§3 имеем $L = L_0 \oplus L_0^{\frac{1}{0}}$ и $l = l_0 + l_0'$, где $l_0 \in L_0$, $l_0' \in L_j^{\frac{1}{j}}$. Векторы l_0, l_0' суть ортогональные проекции l на $L_0, L_0^{\perp}$ соответственно.

Предложение.

Расстояние от l до L_0 равно длине ортогональной проекции l на $L_0^{\perp}$.

Доказ ательство. Для любого вектора $m \in L_0$ имеем

$$|l-m|^2 = |l_0 + l_0' - m|^2 = |l_0 - m|^2 + |l_0'|^2$$

в силу теоремы Пифагора, ибо векторы $l_0 - m \in L_0$ и $l_0' \in L_0^{\frac{1}{1}}$ ортогональны. Следовательно,

$$|i-m|^2 \geqslant |\iota_0|^2$$

и равенство достигается только в случае $m = l_0$, что доказывает требуемое.

Если в L_0 выбран ортонормированный базис $\{e_1, \ldots, e_m\}$, то проекция l на L_0 определяется формулой

$$l_0 = \sum_{i=1}^{m} (l, e_l)\, e_i$$

Действительно, левая и правая части имеют одинаковые скалярные пронзведения со всеми e_i, поэтому их разность лежит в $L_0^{\perp}$. Окончательно,

$$d\,(l, L_0) = \left| l - \sum_{i=1}^{m} (l, e_l)\, e_i \right|$$

есть наименьшее значение $|l-m|$, когда m пробегает L_0. Поскольку $|l_0|^2 \leqslant |l|^2$ по той же теореме Пифагора, имеем

$$\sum_{i=1}^{m} (l, e_i)^2 \leqslant |l|^2$$

Приложения к пространствам функций. Рассмотрим в качестве примера пространство непрерывных вещественных функций на $[a, b] \subset$ R со скалярным пронзведением

$$(f, g) = \int_a^b fg dx$$

Оно бесконечномерно, но все наши неравенства будут относиться к конечному числу таких функций, так что каждый раз можно будет считать, что мы работаем в конечномерном евклидовом пространстве: $\int_a^b f^2(x)dx \geqslant 0$ и если $\int_a^b f^2(x)dx = 0$, то $f(x) \equiv 0$.

Неравенство Коши - Буняковского - Шварца приобретает вид

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leqslant \int_a^b f(x)^2 dx \int_a^b g(x)^2 dx.$$

Нерввенство треугольника:

$$\left(\int_a^b (f(x)+g(x))^2 dx \right)^{1/2} \leqslant \left(\int_a^b f(x)^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_a^b g(x)^2 dx \right)^{1/2}$$

Если $(a, b) = (0, 2\pi)$ и a_i, b_i - коэффициенты Фурье функции $f(x)$, как в п. 6\$4, то многочлен Фурье

$$l_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} a_0 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

является ортогональной проекцией $f(x)$ на линейную оболочку $\{1, \cos nx, \sin nx | 1 \leqslant n \leqslant N\}$. Поэтому коэффициенты Фурье $f(x)$ при каждом N минимизируют среднеквадратичное отклонение $f(x)$ от многочленов Фурье «стегени» $\leqslant N$. Неравенство $|f_N|^2 \leqslant |f|^2$ приобретает вид

$$a_0^2 + \sum_{i=1}^{N} \left(a_i^2 + b_i^2\right) \leqslant \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx$$

Поскольку правая часть не зависит от N, а $a_i^2, b_i^2 \geqslant 0$, ряд

$$a_0^2 + \sum_{i=!}^{\infty} \left(a_i^2 + b_i^2\right)$$

сходится для любой непрерывной функции $f(x)$ на $[0, 2\pi]$. Можно доказать, что он сходится в точности к $\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx$.

Совершенно аналогичные соображения применимы к многочленам Лежандра, Чебышева и Эрмига. Мы оставляем их в качестве упражнения читателю.

Метод наименьших квадратов. Рассмотрим систему m линейных уравнений для n неизвестных с вещественными коэффициентами

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Предположим, что эта система «переопределена», т. е. $m > n$ и ранг матрнцы коэффициентов равен n. Тогда она, вообще говоря, не имеет решений. Но можно попробовать найти такие значения неизвестных $x_1^0, \ldots, x_n^0$, чтобы суммарное среднеквадратичное отклонение левых частей от правых

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j^0 - b_i \right)^2$$

принимало наименьшее возможное значение. Эта задача имеет существенные практические приложения. Например, при геодезических работах местность разбивается на сеть треугольников, некоторые элементы которых измеряются, а другие вычисляются по формулам тригонометрии. Поскольку все измерения приближенные, рекомендуется сделать их больше, чем строго необходимо для вычисления остальных элементов, но по той же причине тогда уравнения для этих элементов почти наверняка окажутся несовместными. Метод наименьших квадратов позволяет получить «приближенное решениеу, более надежное из-за большего количества вложенной в систему информации.

Покажем, что наша задача может быть решена с использованием результатов п. 7. Интерпретируем столбцы матрицы коэффи- циентов $e_i = (a_{1i}, \ldots, a_{mi})$ и столбец свободных членов $f = (b_1, \ldots, b_m)$ как векторы координатного евклидова пространства $\mathbf{R}^m$ со стандартным скалярным произведением. Положив

$$e = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

получим, что

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \right)^2 = \left| \sum_{i=1}^{n} x_i e_i - f \right|^2.$$

Поэтому минимум среднеквадратичного отклонения достигается тогда, когда $\sum_{i=1}^{n} x_i^0 e_i$ является ортогональной проекцией f на подпространство, натянутое на e_i. Это означает, что коэффициенты x_i^0 должны находиться из системы n уравнений с n неизвестными

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^0 e_i, e_j \right) = (f, e_l), j = 1, \ldots, n,$$

так называемой «нормальной системыц». Ее определитель есть определитель матрицы Грама $((e_i, e_f))$, где

$$(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^{m} a_{ki} a_{kj}$$

Он отличен от нуля, ибо предполагалось, что ранг исходной системы, т. е. системы векторов (e_i), равен n (см. упражнение 5 к \$2). Поэтому решение существует и единственно.

Вернемся теперь к теме «измерения в евклидовом пространстве».

n-мерный объем. На одномерном евклидовом пространстве простейшим фигурам - отрезкам и их конечным объединениям можно поставить в соответствие длины и уммы длин. На евклидовой плоскости школьная геометрия учит измерять площади таких фигур, как прямоугольники, треугольники и, с некоторым трудом, круги. Обобщение этих понятий дает глубокая общая теория меры, естественное место которой не здесь. Мы ограничимся списком основных свойств и элементарными вычнслениями, связаниыми со специальной мерой фигур в n-мерном евклидовом пространстве - их n-мерным оббемом.

n-мерный объем есть функция vol ^{n}, определенная на некоторых подмножествах n-мерного евклидова пространства L, называемых измеримыми, и принимаюшая неотрицательные вещественные значения или ∞ (на ограниченных измеримых множествах - только конечные значения). Совокупность измеримых множеств достаточно богата. Мы просто постулируем следующий список свойств vol^n и измеримость фигурирующих в них множеств, не доказывая существование функции с такими свойствами и не указывая естественную область ее определения. а) Функция vol ^{n} счетно аддитивна, т. е.

$$\mathrm{vol}^n \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol}^n U_i, \text{ если } U_i \cap U_i = \varnothing \text{ при } i \neq j;$$

vol ^{1}(точка) $= 0$; vol ^{1} (отрезок) = длина отрезка. Отрезок в одномерном евклидовом пространстве есть множество векторов вида $tl_1 + (1-t)l_2, 0 \leqslant t \leqslant 1$; его длина есть $|l_1 - l_2|$.

б) Если $U \subseteq V$, то $\mathrm{vol}^n U \leqslant \mathrm{vol}^n V$.

в) Если $L = L_1 \oplus L_2$ (ортогональная прямая сумма), $\dim L_1 = m, \quad \dim L_2 = n, \quad U \subset L_1, \quad V \subset L_2,$ то для $U \times V = \{(l_1, l_2) \,|\, l_1 \in U, l_2 \in V\} \in L_1 \oplus L_2$ имеем

$$\mathrm{vol}^{m+n}(U \times V) = \mathrm{vol}^m U \cdot \mathrm{vol}^n V.$$

г) Если $f : L \to L$ - произвольный линейный оператор, то $\mathrm{vol}^n(f(U)) = |\det f| \, \mathrm{vol}^n U, n = \dim L$.

Свойства, а), б) едва ли нуждаются в комментариях. Свойство в) является сильным обобщением формулы площади прямоугольника (произведение длин сторон) или объема прямого цилиндра (произведение площади основания на длину образующей). Заметим, что из свойства в) вытекает, что $(m+n)$-мерный объем ограниченного множества W в L, лежащего в подпространстве L_1 размерности $m < m+n$, равен нулю. Действительно, тогда $L = L_1 \oplus L_1^{\perp}$ и $W = V \times \{0\}$, наконец, $\mathrm{vol}^n(\{0\}) = 0$ при $n > 0$ в силу а) и в).

Смысл свойства г) менее очевиден. Оно является основным вкладом линейной алгебры в теорию евклидовых объемов и сл-ужит причиной появления якобианов в формализме многомерного интегрирования. Возможно, нанболее интуитивное объяснение его состоит в замечании, что оператор растяжения в $a \in \mathbf{R}$ раз вдоль одного из векторов ортогонального базиса должен умножать объемы на $|a|$ в силу свойств а) и в). Но любой ненулевой вектор можно дополнить до ортогонального базиса, поэтому диагонализируемый оператор f с собственными значениями $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ должен умножать объемы на $|a_1| \ldots |a_n| = |\det f|$. Наконец, изометрии должны сохранять объемы, и, как мы убедимся позже, любой оператор есть композиция диагонализируемого и изометрии (см. \$ 8, упражнение 11).

Теперь, пользуясь этими аксиомами, приведем список объемов простейших и наиболее важных n-мерных фигур.

Единичный куб. Это множество $\{t_1e_1+\ldots+t_ne_n|0\leqslant t_i\leqslant 1\}$, где $\{e_1,\ldots,e_n\}$ - некоторый ортонормированный базис L. Из свойств а) и в) из п. 9 сразу следует, что его объем равен единице.

Куб со стороной $a>0$ получится, если разрешить t_i пробегать значения $0\leqslant t_i\leqslant a$. Так как он является образом единичного куба относительно гомотетии - умножения на a, - его объем равен a^n.

Параллелепипед со сторонами $\{l_1,\ldots,l_n\}$. Это множество $\{t_1l_1+\ldots+t_nl_n|0\leqslant t_i\leqslant 1\}$. Мы покажем, что его объем равен $\sqrt{|\det G|}$, где $G=((l_i,l_j))$ - матрица Грама сторон. В самом деле, если $\{l_1,\ldots,l_n\}$ линейно зависимы, то соответствующий параллелепипед лежит в подпространстве размерности $<\dim L$ и его n-мерный объем равен нулю по замечанию в п. 9. В то же время матрица G вырождена.

Поэтому остается разобрать случай, когда $\{l_1,\ldots,l_n\}$ линейно независимы. Пусть $\{e_1,\ldots,e_n\}$-ортонормированный базис в L, а f-линейное отображение $L\to L$, переводящее e_i в $l_i, i=1,\ldots\ldots,n$. Если A - матрица этого отображения в базисе $\{e_i\}$:

$$(l_1,\ldots,l_n)=(e_1,\ldots,\theta_n)\,A,$$

то матрица Грама $\{l_l\}$ равна A^tA, ибо матрица рама $\{e_i\}$ еди. ничная. Следовательно,

$$\sqrt{|\det G|}=\sqrt{|\det{(A^tA)}|}=|\det A|.$$

С другой стороны, $|\det A|=|\det f|$, и f переводит единичный куб в наш параллелепипед. В силу свойства г) из п. 9 объем параллелепипеда равен $|\det f|$, что завершает доказательство.

n-мерный шар радиуса r. Это множество векторов

$$B^n(r)=\{l||l|\leqslant r\},$$

или, в ортогональных координатах,

$$B^n(r)=\left\{(x_1,\ldots,x_n)\,|\sum_{i=1}^n x_i^2\leqslant r^2\right\}.$$

Так как $B^n(r)$ получается из $B^n(1)$ растяжением в r раз, имеем $\operatorname{vol}^n B^n(r)=\operatorname{vol}^n B^n(1)r^n$.

онстанта $\operatorname{vol}^n B^n(1)=b_n$ может быть вычислена лишь аналитическими средствами. Рассекая $(n+1)$-мерный шар n-мерными линейными подмногообразиями, ортогональными к некоторому направлению, получим индуктивную формулу

$$b_{n+1}=\left[2\int_0^1\left(\sqrt{1-x_{n+1}^2}\right)^n dx_{n+1}\right]b_n, n\geqslant 1.$$

Разумеется, $b_1=2, b_2=\pi, b_3=\frac{4}{3}\pi$.

n-мерный эллипсоид с полуосями $r_1,\ldots,r_n$. Он задается в ортогональных координатах уравнениями

$$\sum_{i=1}^n\left(\frac{x_i}{r_i}\right)^2\leqslant 1$$

Поскольку он получается из $B^n(1)$ растяжениями в r_i раз вдоль i-й полуоси, его объем равен $b_nr_1\ldots r_n$.

Одно свойство n-мерного объема. Оно состоит в том, что при очень больших n «объем n-мерной фигуры сосредоточен вблизи ее поверхности». Например, объем шарового кольца между сферами радиуса 1 и $1-\varepsilon$ равен $b_n\left[1-(1-\varepsilon)^n\right]$, что при фиксированном сколь угодно малом ε, но растущем n стремится к b_n. Двадцатимерный арбуз радиуса 20 cm с толщнной корки 1 см чуть не на две трети состоит из корки:

$$1-\left(1-\frac{1}{20}\right)^{20} \approx 1-e^{-1}$$

Это обстоятельство играет большую роль в статистической механике. Рассмотрим, напримр, простейшую модель газа в резервуаре, состоящего из n атомов, которые будем считать матернальными точками массы 2 (в подходящей системе единиц). Представнм мгновенное состояние газа n трехмерными векторами $(\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n)$ скоростей всех молекул в физическом евклидовом пространстве, т. е. точкой $3n$-мерного координатного пространства $\mathbf{R}^{3n}$. Квадрат длины векторов в $\mathbf{R}^{3n}$ имеет прямой физнческий смысл энергии системы (суммы кинетических энергий атомов):

$$E=\sum_{i=1}^{n}\left|v_i\right|^2$$

Для макроскопического объема газв в нормальных условиях порядок n есть 10^{23} (число Авогадро), так что состояние гава описывается точкой на сфере огромной размерности, радиус которой есть корень квадратный из энергии.

Пусть два таких резервуара соединены так, что они могут обмениваться энергией, но не атомами, и сумма их энергий $E_1+\,+E_2=E$ остается постоянной. Тогда энергии E_1 и E_2 большую часть времени будут близки к таким, которые максимизируют «объем пространства состояний», доступный объединенной системе, т. е. произведение

$$\operatorname{vol}^{n_1} B\left(E_1^{1/2}\right) \operatorname{vol}^{n_2} B\left(E_2^{1/2}\right)$$

(мы заменили площади сфер объемами шаров, что буквально не верно, но почти не влияет на результат). Так как с ростом E_1 и убыванием $E_2\,(E_1+E_2=\text{ const})$ первый объем невероятно быстро растет, а второй убывает, имеется резкий пик этого произведения при некоторых значениях E_1, E_2, отвечающий «наиболее вероятному» состоянию объединенной системы. Очевидно, это происходит там, где

$$\frac{d}{dE_1}\log\operatorname{vol}^{n_1} B\left(E_1^{1/2}\right)=\frac{d}{dE_2}\log\operatorname{vol}^{n_2} B\left(E_2^{1/2}\right)$$

Обратные к этнм величинам суть (с точностью до пропорциональности) температуры резервуаров, н наиболее вероятное состояние отвечает равенству температур.

УПРАЖНЕНИЯ

Доказать, что угол φ наклона прямой в плоскости $\mathbf{R}^2$, проходящей изз начала координат в среднеквадратичном как можно ближе km заданным точкам $\left(a_i, b_i\right), i=1,\ldots,m$, определяется формулой

$$\operatorname{tg}\varphi=\left(\sum_{i=1}^{m} a_i b_i\right) / \left(\sum_{i=1}^{m} a_i^2\right)$$

(Указание. Найти нануучшее «приближенное решение» системы уравнений $a_l x=b_i$)

Пусть $P_n(x)$ – n-й многочлен Лежандра. Доказать, что старший коэффйциент многочлена $u_n(x)=\frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}P_n(x)$ равен единице и что минимум интеграла $I(u)=\int\limits_{-1}^{1} u(x)^2 dx$ на множестве многочленов $u(x)$ степени n со старшим коэффициентом 1 достигается при $u=u_n$. (Указание. Разложить u по многочленам Лежандра степени $\leqslant n$.)

Пусть (S, μ) - пара, состояшая из конечного множества S и вещественной функции $\mu : S \to \mathbf{R}$, удовлетворяющей двум условиям: $\mu(s) \geqslant 0$ для всех s е $S_{\text{и}} \sum\limits_{s \in S} \mu(s) = 1$. Рассмотрим на пространстве вещественных функцин $F(S)$ на S (со значениями в R) линейный функционал $E : F(S) \to \mathbf{R}$:

$$E(f) = \sum_{s \in S} \mu(s) f(s)$$

Обозначим через $F_0(S)$ ядро E.

(S, μ) называется конечным вероятностным пространством, элементы $F(S)$ случайными величинами на нем, элементы $F_0(S)$ - нормированными случайнымн величнными, число $E(f)$ - математическим ожиданнем величнны f. Случайные величины образуют кольцо относительно обычного умножения функций.

Доказать следующие факты.

а) $F(S)$ и $F_0(S)$ имеют структуру ортогонального пространства с квадратом длины вектора f, равным $E\left(f^2\right)$. Пространство $F(S)$ евклидово тогда и только тогда, когда $\mu(s) > 0$ для всех $s \in S$.

б) Для любых случайных величин $f, g \in F(S)$ и $a, b \in \mathbf{R}$ положим

$$P(f = a) = \sum_{f(s) = a} \mu(s); P(f = a; g = b) = \sum_{\substack{f(s) = a \\ g(s) = b}} \mu(s)$$

(«вероятности того, что f принимает зиачение a ил $f = a$ и $g = b$ одновременнов). Назовем две случайные величины независимыми, если

$$P(f = a; g = b) = P(f = a) P(g = b)$$

при всех $a, b \in \mathbf{R}$. Доказать, что если нормированные случайные величины f. $g \in F_0(S)$ независимы, то они ортогональны.

Построить пример, показывающий, что обратное неверно.

Скалярное произведение величин $f, g \in F_0(S)$ называется их ковариацией, а косинус угла между ними - коэффициентом корреляции.

15.7.6 6. Unitary Spaces

Определение. Унитарным пространством называется комплексное линейное пространство L эрмитовым положительно определенным скалярным произведением, Как в 5, мы будем писать (l, m) вместо $g(l, m)$ и $|l|$ вместо $(l, l)^{1/2}$. Ниже мы убедимся, что $|l|$ является нормой на L в смысле §10 ч. 1. Унитарные пространства, полные относительно этой нормы, называются также гильбертовыми. В частности, конечномерные унитарные пространства гильбертовы.

Из результатов, доказанных в $\$3 - 4$, следует, что:

а) всякое конечномерное унитарное пространство имеет ортонормированный базис, все векторы которого имеют длину 1;

б) поэтому оно изоморфно координатному унитарному про. странству $\mathbf{C}^n (n = \dim L)$ со скалярным произведением

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i, \quad |\vec{x}| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$$

Ряд свойств унитарных пространств близок к свойствам евклидовых, главным образом по следующей причине: если L-конечномерное унитарное пространство, то на его овешествлении $L_{\mathbf{R}}$ имеется (единственная) структура евклидова пространства, в которой норма $|l|$ вектора та же, что и в L. Существование видно из предыдущего абзаца: если $\{e_1, \ldots, e_n\}$-ортонормированный базис L, а $\{e_1, ie_1, e_2, ie_2, \ldots, e_n, ie_n\}$ - соответствующий базис L_{R}, ТО

$$\left|\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right|^2 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 = \sum_{j=1}^{n} \left((\operatorname{Re} x_j)^2 + (\operatorname{Im} x_j)^2\right),$$

и выражение справа есть евклидов квадрат нормы вектора $\sum_{j=1}^{n} \operatorname{Re} x_j e_j + \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Im} x_j \, (ie_j)$ в ортонормированном базисе $\{e_j, ie_j\}$. Единственность следует из п. 9$3.

Однако скалярные произведения в унитарном пространстве L и евклидовом L_{R} не совпадают: второе принимает только вещественные значения, а первое - комплексные. На самом деле, эрмитово скалярное произведение на комплексном пространстве приводит не только к ортогональной, но и к симплектической структуре на L_R с помощью следующей конструкции.

Временно мы возврашаемся к обоозначению $g(l, m)$ для эрмитова скалярного произведения на L и положим

$$a(l, m) = \operatorname{Re} g(l, m),$$
$$b(l, m) = \operatorname{Im} g(l, m).$$

Тогда имеют место следующие факты:

Предложение.

а) $a(l, m)$-симметричное, а $b(l, m)$-антисимметричное скалярное произведение на L_{R}; оба они инвариантни относительно умножения на $i, r.$ е. канонической комплексной структуры на L_{R}:

$a(il, im) = a(l, m), b(il, im) = b(l, m)$;

б) а и в связаны следующими соотношениями:

$$a(l, m) = b(il, m), b(l, m) = -a(il, m)$$

в) любая пара связанных соотношениями б) i-инвариантных форм a, b на L_{R}, первая из которых симметрична, а вторая антисимметрична, определяет эрмитово скалярное произведение на L по формуле

$$g(l, m) = a(l, m) + ib(l, m)$$

г) форма g положительно определена тогда и только тогда, когда форма а полонительно определена.

Доказательство. Условие эрмитовой симметрии $g(l, m) = \overline{g(m, l)}$ равносильно тому, что

$$a(l, m) + ib(l, m) = a(m, l) - ib(m, l),$$

т. е. симметрии a и антисимметрии b. Условие $g(il, im) = i\bar{i}g(l, m) = g(l, m)$ равносильно i-инвариантности a и b. Условие C-линейности g по первому аргументу означает $\mathbf{R}$-линейность и линейность относительно умножения на i, т. е.

$$a(il, m) + ib(il, m) = g(il, m) = ig(l, m) = -b(l, m) + ia(l, m),$$

откуда следуют соотношения б) и утверждение в). Наконец, $g(l, l) = a(l, l)$ в силу антисимметрии b, откуда следует r).

Следствие. *В* прежних обозначениях, если g положительно определена $\{e_1, \ldots, e_n\}$-ортонормированный базис для g, то $\{e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n\}$ является ортонормированным базисом для а и симплектическим для b.

Наоборот, если L-2n-мерное вещественное пространство с евклидовой формой а и симплектической b, а также базисом $\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{2n}\}$, ортонормированным для а и симплектическим для b, то, введя на L комплексную структуру с помощью оператора

$$J(e_j) = e_{n+j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n; J(e_j) = -e_{i-n}, n+1 \leqslant j \leqslant 2n,$$

и скалярное произведение $g(l, m) = a(l, m) + ib(l, m)$, мы получим комплексное пространство c положительно определенной эрмитовой формой, для которого $\{e_1, \ldots, e_n\}$ является ортонормированчым базисом над C.

Доказательство получается простой проверкой с помощью предложения п. 2, и мы оставляем его читателю.

Вернемся теперь к унитарным пространствам L. Комплексное неравенство Коши - Буняковского-Шварца имеет следующий вид:

Предложение.

Для любых $l_1, l_2 \in L$

$$|(l_1, l_2)|^2 \leqslant |l_1|^2 \, |l_2|^2$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы l_1, l_2 пропорциональнып.

Доказательство. Как в п. 2§5, для любых вещественных t имеем

$$|tl_1 + l_2|^2 = t^2 \, |l_1|^2 + 2t \operatorname{Re}(l_1, l_2) + |l_2|^2 \geqslant 0.$$

Случай $l_1 = 0$ тривиален. Считая, что $l_1 \neq 0$, выводим отсюда. что $(\operatorname{Re}(l_1, l_2))^2 \leqslant |l_1|^2 \, |l_2|^2$.

Но если $(l_1, l_2) = |(l_1, l_2)| \, e^{i\varphi}, \quad \varphi \in \mathbf{R}$, то $\operatorname{Re}(e^{-i\varphi} l_1, l_2) = |(l_1, l_2)|$. Поэтому

$$|(l_1, l_2)|^2 \leqslant \left|e^{-i\varphi} l_1\right|^2 |l_2|^2 = |l_1|^2 \, |l_2|^2 \, .$$

Строгое равенство здесь достигается тогда и только тогда, когда $|t_0 e^{-i\varphi} l_1 + l_2| = 0$ для подходящего $t_0 \in \mathbf{R}$, что завершает доказательство.

В точности так же, как в евклидовом случае, отсюда выводятся следствия:

Следствие (неравенство треугольника). Для любых $l_1, l_2, l_3 \in \in L$

$$|l_1 + l_2| \leqslant |l_1| + |l_2| \, ,$$
$$|l_1 - l_3| \leqslant |l_1 - l_2| + |l_2 - l_3| \, .$$

Следствие. Унитарная длина вектора | l| является нормой на L в смысле определения в $n.4\$10.$ 1.

(Здесь несколько изменяется проверка свойства $|al| = |a||l|$:

$$|al| = (al, al)^{1/2} = (a\bar{a}(l, l))^{1/2} = |a||l|.)$$

Углы. Пусть $l_1, l_2 \in L$ - ненулевые векторы. В снлу предложения п. 4

$$0 \leqslant \frac{|(l_1, l_2)|}{|l_1| \, |l_2|} \leqslant 1.$$

Поэтому существует единственный угол $\varphi, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$, для которого

$$\cos\varphi = \frac{|(l_1, l_2)|}{|l_1| \, |l_2!}.$$

Однако в важнейших естественнонаучных моделях, использующи: унитарные пространства, эга же величина $\frac{|(l_1, l_2)|}{|l_1||l_2|}$ (точнее, ее квадрат) интерпретируется не как косинус угла, а как вероятность. Опишем вкратце постулаты квантовой механики, включающие такую трактовку.

Пространство состояний квантовой системы. В квантовой механике постулируется, что с такими физическими системами, как электрон, атом водорода и т. П., можно связать (неоднозначно!) математическую модель, состоящую из следующих данHblX.

а) Унитарное пространство $\mathscr{H}$, называемое пространством состояний системы. Такие пространства, рассматриваемые в стандартных учебниках, по больней части являются бесконечномер. ными гильбертовымн пространствами, которые реализуются как пространства функций на моделях «физического» пространства или пространства-времени. Конечномерные пространства $\mathscr{E}$ возникатот, грубо говоря, как прострапства внутренних степеней свободы системы, если она рассматривается как локализованная нли если ее движением в физическом пространстве можно так или нначе пренебречь. Таково двумерное унитарпое пространство «спиновых состояний» электрона, к которому мы еце вернемся.

б) Лучи, т. е. одномерные комплексные подпространства в $\mathscr{H}$, называются (чистыми) состояниями системы.

Вся информация о состоянии системы в фиксированный момент времени определяется заданием пуча $L \subset \mathscr{H}$ или ненулевого вектора $\psi \in L$, который называется нногда ψ-функцией, отвечаюшей этому состоянию, или вектором состояния.

Фундаментальный постулат о том, что ψ-функции образуют комплексное линейное пространство, называется riрunципом суперпозиции, а линейная комбинацня $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\psi_i, \quad a_j \in \mathbf{C}$, описывает суперпозицин состояний $\psi_1, \ldots, \psi_n$. Заметнм, то, поскольку физический смысл имеют только лучи $\mathbf{C}\psi_i$, а не сами векторы ψ_3, коэффициентам a_j также нельзя приписать однозначно определенного смысла. Однако, если выбирать ψ_j нормированными, $|\psi_i|^2 = 1$, и линейно независимыми, а также нормировать $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j\psi_j$, то произвол в выборе вектора ψ, в своем луче сводится к умножениям на числа $e^{i\varphi}$, , которые называются фазовыми множителяли; такоз же будет произвол в выборе коэффйциентов a_j, которые мы сможем тогда сделать вещественными и неотрицательными, что вместе с условием нормировки $\left|\sum\limits_{j=1}^{n} a_j\psi_j\right| = -1$ позволяет определить их однозначно.

Сильно идеализированные предположения о связн этой схемы с реальностью состоят в том, что у нас имеются физические при боры $A_{\Downarrow}$ («печки»), способные приготовлять много экземпляров нашей системы в мгновенных состояниях ψ (точнее, С ψ) для различных $\psi \in \mathscr{H}$. Сверх того, имеются физические приборы B_{y} («фильтры»), на вход которых подаются системы в состоянии ψ, на выходе обнаруживаются они же в некотором (возможно, другом) состоянии χ, или же не обнаруживается ничего (система «не проходит» через фильтр B).

Второй основной (после принципа суперпозиции) постулат квантовой механики состонт в том, что:

система, приготовленная в состоянии ф $\mathscr{H}$, может быть сразу же после этого обнаружена в состоянии $\chi \in \mathscr{H}$ с вероятностью

$$\frac{|(\psi,\chi)|^2}{|\psi|^2|\chi|^2} = \cos^2\theta,\ \text{zде}\ \theta -\ \text{угол между}\ \psi u\chi.$$

В дальнейшем, по мере введения дополнительных геометрических понятий, мы уточним математическое описание «печек» и «фнльтров». Сверх того, мы объясним, что пронзойдет, если приготовленную в состоянии ψ систему ввести в фильтр не сразу, а по истечении времени t: оказывается, что в промежутке состояние ψ, а вместе с ним и скалярное произведение (ψ, χ) будет меняться, и это изменение также прекрасно описывается в терминах линейной алгебры.

Если ψ, χ нормированы, то указанная выше вероятность равна $|(\psi, \chi)|^2$, а само скалярное пронзведение (ψ, χ), являющееся комплексным числом, называется амплитудой вероятности (перехода от ψkχ). Заметим, что физики вслед за Дираком обычно рассматривают скалярные пронзведения, антилинейные по первому аргументу, и записывают наше (ψ, χ) в виде $\langle\chi|\psi\ \ >$, так что начальное и конечное состояние системы расположены справа калево. Скобки $<>$ по английски называются «bracket». Соответственно, Дирак называет символ $|\psi\rangle$ «кет-вектором», а символ $\langle\chi|$ -

соответствующим «бра-вектором». С математической точки зрения, $|\psi >$ есть элемент $\mathscr{H}$, а $< \psi \mid$ - соответствующий ему элемент пространства антилинейных функционалов $\bar{f}^*$, и $\langle \chi | \psi \rangle$ есть значение χ на ψ.

Если ψ, χ ортогональны, т. е. $(\downarrow, \chi) = 0$, то систему, приготовленную в состоянин $\downarrow$, нельзя будет (сразу же после прнготовления) обнаружить в состоянин χ, т. е. она пе пройдет через фильтр B_χ (наоборот, через фнльтр B_ψ она пройдет с достоверностью). Во всех остальных случаях ненулевая вероятность перехода от ψ к χ имется.

Элементы любого ортонормированного базиса $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ образуют набор базисньх состояний системы. Предположим, что у нас есть фильтры $B_{\Psi_1}, \ldots, B_{\Psi_n}$. Многократно пропуская через них системы, приготовленные в состоянии $\vartheta_i = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \psi_i, \quad 0 \leqslant a_i \leqslant 1$ (вектор счнтается нормированным), мы обнаружим фi с вероятностью a_i^2. Таким образом, коэффнциенты этой линейной комбинацин могут быть измерены экспернментально, однако в принципиально статистическом опыте. Это одна из причин, по которым квантовомеханические измерения требуют обработки большого статистического материала. Вирочем, часто системы в состоянии ψ идут в фильтр «потоком»и на выходе вероятности a_i^2 получаются в виде интенсивностей, чего-то вроде «спектральных линий»; ти ннтенсивности сами по себе уже являются результатом статистического усреднения. В дальнейшем мы уточним связь этой схемы с теорией спектров линейных операторов.

Правила Фейнмана. Пусть в $\mathscr{C}$ выбран ортонормированный базис $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$. Для любого вектора состояния $\psi \in \mathscr{H}$ имеем

$$\psi = \sum_{i=1}^{n} (\psi, \psi_i)\, \psi_i$$

откуда

$$(\psi, \chi) = \sum_{i=1}^{n} (\psi, \psi_i)\, (\psi_i, \chi)$$

Аналогично, $(\psi, \psi_t) = \sum\limits_{j=1} (\psi, \psi_j)\, (\psi_i, \psi_i)$; подставляя эту формулу в предыдущую, получим

$$(\psi, \chi) = \sum_{i_1, i_2 = 1}^{n} (\psi, \psi_{i_1})\, (\psi_{i_1}, \psi_{i_2})\, (\psi_{i_2}, \chi)$$

и вообще для любого $m \geqslant 1$

$$(\psi, \chi) = \sum_{i_1, \ldots, i_m = 1}^{n} (\psi, \psi_{i_1})\, (\psi_{i_1}, \psi_{i_2}) \ldots (\psi_{i_m}, \chi)\,.$$

Эти простые формулы линейной алгебры можно интерпретировать, по Фейнману, как законы «комплексной теории вероятностей», относящиеся к амплитудам вместо вероятностей. Именно, будем рассматривать последовательности типа $(\psi, \psi_{i_1}, \psi_{i_2}, \ldots, \psi_{i_m}, x)$ как «классические траектории» системы, последовательно пробегающей состояния в скобках, а число $(\psi, \psi_{i_1})\, (\psi_{i_1}, \psi_{i_2}) \ldots (\psi_{i_m}, \chi)$ - как амплитуду вероятности перехода из ψ в χ вдоль соответствующей классической траектории. Эта амплитудя является произведением амплитуд переходов вдоль последовательных ur резков траектории.

Тогда приведенная выше формула для (ψ, χ) означает, что та амплитуда перехода есть сумма амплитуд перехода от $\psi \kappa \chi$ по всевозможным классическим траекториям («одинаковой длины»).

Бесконечномерный и более рафинированный вариант этого замечания, в котором основную роль играют пространственно-временные (или энергетически-импульсные) наблюдаемые, Р. Фейнман положил в основу своей полуэвристической техники выражения амплитуд через «континуальные интегралы по классическим траекториям». Пространство траекторий является бесконечномерным функциональным пространством, и математикам до сих пор не удалось построить общую теорию, в которой были бы оправданы все замечательные вычисления физиков.

Расстояния. Расстояние между подмножествами в унитарном пространстве L можно определить точно так же, как в евклидовом:

$$d(U, V) = \inf \{|l_1 - l_2||l_1 \in U, l_2 \in V\}.$$

Расстояние от вектора l до подпространства L_0 также равно длине ортогональной проекции l на $L_0^{\frac{1}{}}$. Доказательство ничем не отличается от евклидова случая. В частности, если $\{e_1, \ldots, e_m\}$ - ортонормированный базис L_0, то

$$d(l, L_0) = \left| l - \sum_{i=1}^{m} (l, e_i)\, e_i \right|,$$

как в евклидовом случае, и

$$\left| \sum_{i=1}^{m} (l, e_i)\, e_i \right|^2 = \sum_{i=1}^{m} |(l, e_i)|^2 \leqslant |l|^2$$

по теореме Пифагора. 11. Приложение к пространствам функций. ак в §5 и 4, мы можем вывести неравенства для комплекснозначных функций:

$$\left| \int_a^b f(x)\bar{g}(x) dx \right|^2 \leqslant \int_a^b |f(x)|^2 dx \int_a^b |g(x)|^2 dx$$

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

а также для их коэффициентов Фурье. Рассматривая функция на отрезке $[0, 2\pi]$ и полагая

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-\ln x} dx,$$

получаем, что в пространстве со скалярным произведением $2\pi \int\limits_0 f(x)\bar{g}(x)dx$ сумма

$$f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx}$$

является ортогональной проекцией f на, пространство многочленов Фурье «степени $\leqslant N$ и минимизирует среднеквадратичное отклонение f от этого пространства. В частности,

$$\sum_{n=-N}^{N} |a_n|^2 \leqslant \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx,$$

так что ряд $\sum\limits_{n=\infty}^{\infty} |a_n|^2$ сходится.

15.7.7 7. Orthogonal and Unitary Operators

Пусть L - линейное пространство со скалярным произведением g. Мнжество всех изометрий $f : L \to L$, т. е. обратимых линейных операторов с условием

$$g(f(l_1), f(l_2)) = g(l_1, l_2)$$

для всех $l_1, l_2 \in L$, очевидно, образует группу. Если L - евклидово пространство, такие операторы называются ортогональными, а если L унитарно, то унитарными. Симплектические изометрии будут рассмотрены позже.

Предложение.

Пусть L-конечномерное линейное пространство с невырожденным скалярным произведением (,), симметричным или эрмитовым. Для того чтобы оператор $f : L \to L$ был изометрией, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось любое из следующих условий:

а) $(f(l), f(l)) = (l, l)$ для всех $l \in L$ (здесь предполагается, что характеристика поля скаляров отлична от двух);

б) пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ - базис в L с матрицей Грама G, A - матрица оператора f в этом базисе. Тогда

$$A^t G A = G, \text{ или } A^t G \bar{A} = G;$$

в) f переводит некоторый ортонормированный базис в ортонормированньй базис;

г) если сигнатура скалярного произведения равна (p, q), то матрица оператора f в любом ортонормированном базисе $\{e_1, \ldots \ \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_{p+q}\} \quad c \quad (e_i, e_i) = +1$ npu $i \leqslant pu$ $(e_i, e_i) = -1$ при $p + 1 \leqslant i \leqslant p + q$ удовлетворяет условию

uлu

$$A^t \begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & -E_q \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & -E_q \end{pmatrix}$$

$$A^t \begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & -E_q \end{pmatrix} \bar{A} = \begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & -E_q \end{pmatrix}$$

в симметричном и эрмитовом случае соответственно.

Доказ ательство. а) В симметричном случае это утверждение следует из п. 9 3: если f сохраняет квадратичную форму $(l, l) = q(l)$, то f сохраняет и ее поляризацию

$$(l, m) = \frac{1}{2}[q(l + m) - q(l) - q(m)].$$

В эрмитовом случае имеем аналогично

$$\operatorname{Re}(l, \cdot m) = \frac{1}{2}[q(l + m) - q(l) - q(m)]$$

и предложение п. 2§6 показывает, что (l, m) однозначно восстанавливается по $\operatorname{Re}(l, m)$ по формуле

$$(l, m) = \operatorname{Re}(l, m) - i \operatorname{Re}(il, m)$$

и потому f сохраняет (l, m).

б) Если f-изометрия, то матрицы Грама базисов $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и $\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ совпадают. Но последняя матрица Грама равна $A^t G A$ в симметричном и $A^t G \bar{A}$ в эрмитовом случае. Наоборот, если f переводит базис $\{e_i, \ldots, e_n\}$ в $\{e_1', \ldots, e_n'\}$ и матрицы Грама базисов $\{e_i\}$ и $\{e_i'\}$ совпадают, то f-изометрия в силу формул координатной записи скалярного произведения из п. 2§2. дущих.

в), г). Эти утверждения являются частными случаями преды-

Из предложения п. 2 следует, что ортогональные (соответственно унитарные) операторы - это операторы, которые в одном (и потому в любом) ортонормированном базисе задаются ортого- нальными (соответственно унитарными) матрицами, т. е. матрицами U, которые удовлетворяют соотношениям

$$UU^t = E_n \text{ или } U\bar{U}^t = E_n.$$

Множества таких матриц размера $n \times n$ были введены впервые в \$4 ч. 1 ; они обозначались $\mathrm{O}(n)$ и $\mathrm{U}(n)$ соответственно. Аналогично, матрицы изометрий в ортонормированных базисах сигнатур (p, q), удовлетворяющие условиям г) предложения 2, обозначаются $\mathrm{O}(p, q)$ и $\mathrm{U}(p, q)$; при $p, q \neq 0$ они называются иногда псевдоортогональными и псевдоунитарными соответственно. В этом параграфе мы будем заниматься только группами $\mathrm{O}(n)$ и $\mathrm{U}(n)$. Фундаментальная для, физики группа Лоренца $\mathrm{O}(1, 3)$ булет изучена в \$10.

Группы U(1), O(1) и **O**)**2**).   следует, что

$$\mathrm{U}(1) = \{a \in \mathbf{C} \| a \mid = 1\} = \left\{ e^{i\eta} | \varphi \in \mathbf{R} \right\},$$

$$\mathrm{O}(1) = \{\pm 1\} = \mathrm{U}(1) \cap \mathbf{R}.$$

Далее, если $U \in \mathrm{O}(n)$, то $UU^t = E_n$, откуда $(\det U)^2 = 1$ и $\det U = \pm 1$. Если $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$-ортогональная матрица с определителем -1, то $\begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix}$ - ортогональная матрица с определителем 1, приналлежащая SO(2). Матрицы нз SO(2) имеют вид

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | ad - bc = a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1, ac + bd = 0 \right\}.$$

Очевидно, любую такую матрицу можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \varphi \in [0, 2\pi),$$

т. е. она задает евклидов поворот на угол φ. Отображение

$$U(1) \to \mathrm{SO}(2) : \overset{i\varphi\mapsto}{\to} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

является изоморфизмом. Его геометрический смысл объясняется следующим замечанием: овеществление одномерного унитарного пространства $(\mathbf{C}^1, |z|^2)$ есть двумерное евклидово пространство $(\mathbf{R}^2, x_1^2 + x_2^2)$ а овеществление унитарного преобразования $z \longmapsto e^{i\varphi} z$ задается матрицей поворога на угол φ.

В§9 мы построим значительно менее тривиальный эпиморфизм $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ с ядром $\{\pm 1\}$.

Повороты $\begin{pmatrix} \cos\varphi - \sin\phi & \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ на угол $\varphi \neq 0, \pi$ не имеют собственных векторов в $\mathbf{R}^2$ и потому не диагонализируемы. Наоборот, все матрицы $U \in \mathrm{O}(2)$ с $\det U = -1$ диагонализируемы. Точнее говоря, характеристический многочлен матрицы

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi - \sin\varphi \\ -\sin\varphi - \cos\varphi \end{pmatrix}$$

равен $t^2 - 1$ и имеет корни \pm 1. Легко проверить непосредственно, что соответствующие этим корням собственные подпространства ортогональны; ниже это будет доказано в гораздо большей общности. Поэтому любой оператор из O(2)с $\det U = -1$ является отражением относительно некоторой прямой: он действует тождественно на этой прямой и меняет знак векторов, ортогональных к ней.

Пользуясь этой информацией, мы можем теперь установить структуру обших ортогональных и унитарных операторов.

Теорема.

а) Для того чтобы оператор f в унитарном пространстве был унитарным, необходимо и достаточно, чтобы он диагонализировался в ортонормированном базисе и имел спектр, расположенный на единичной окружности в $\mathbf{C}$.

б) Для того чтобы оператор f в евклидовом пространстве был ортогональным, необходимо и достаточно, чтобы его матрица в подходящем ортонормированном базисе имела вид

$$\begin{pmatrix} A(\varphi_1) & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & 0 & \\ & & A(\varphi_m) & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & 0 & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & -1 \end{pmatrix}, \quad A(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

где на пустьх местах стоят нули.

в) Собственные векторы ортогонального или унитарного оператора, отвечающие разным собственмым значениям, ортогональны.

Доказательство. а) Достаточность утверждения очевидна: если $U = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), |\lambda_i|^2 = 1$, то $U\bar{U}^t = E_n$, так что U - матрища унитарного оператора. Наоборот, пусть f - унитарный оператор, λ-его собственное значение, L_λ - соответствуюшее собственное подпространство. По предложению п. 2§3 имеем $L = L_\lambda \oplus L_\lambda^\perp$. Подпространство L_λ одномерно, $\dot{f}$-инвариантно, и огранннчение f на L_λ является одномерным унитарным оператором, поэтому $\lambda \in U(1)$, т. е. $|\lambda|^2 = 1$. Если мы покажем, что подпространство $L_\lambda^{\frac{1}{\lambda}}$ также f-инвариантно, то индукцней по $\dim L$ отсюда можно будет вывести, что L разлагается в прямую сумму i-инвариантных попарно ортогональных одномерных подпрострапств, что докажет требуемое. В самом деле, если $l_0 \in L_\lambda, l_0 \neq 0$ и $(l_0, l) = 0$, то

$$(l_0, f(l)) = \left(f\left(\lambda^{-1} l_0\right), f(l)\right) = \left(\lambda^{-1} l_0, l\right) = \lambda^{-1}(l_0, l) = 0,$$

так что $f(l) \in L_\lambda \frac{1}{\lambda}$.

б) В ортогональном случае рассуждения аналогичны: непосредственно проверяется достаточность условия и затем проводится индукция по $\dim L$. Случаи $\dim L = 1, 2$ разобраны в предыдущем пункте. Если $\dim L \geqslant 3$ и f имеет вешественное собственное значение λ, нужно снова положить $L = L_\lambda \oplus L_\lambda \frac{1}{\lambda}$ и рассуждать, как выше (заметим, что здесь обязательно $\lambda = \pm 1$). Наконец, если f не имеет вещественных собственных значений, то следует выбрать двумерное f-инвариантное подпространство $L_0 \subset L$, которое существует по предложению п. 16§12 ч. 1. На нем матрица ограничения f в любом ортонормированном базисе будет иметь вид $A(\varphi)$ в силу предыдущего пункта. Поэтому остается провериг, что подпространство L_0^+также f-инвариантно. Действительно, если $(l_0, l) = 0$ для всех $l_0 \in L_0$, то

$$(l_0, f(l)) = \left(f\left(f^{-1}(l_0)\right), f(l)\right) = \left(f^{-1}(l_0), l\right) = 0,$$

ибо $f^{-1}(l_0) \in L_0$ лля всех $l_0 \in L_0$. Это завершает доказательство.

в) Пусть $f(l_i) = \lambda_i l_i, i = 1, 2$. Тогда

$$(l_1, l_2) = (f(l_1), f(l_2)) = \lambda_1 \bar{\lambda}_2 (l_1, l_2).$$

Так как $|\lambda_i|^2 = 1$, прн $\lambda_1 \neq \lambda_2$ имеем $\lambda_1 \bar{\lambda}_2 \neq 1$. Следовательно, $(l_1, l_2) = 0$. Это рассуждение применимо одновременно к унитарному и ортогональному случаю. Доказательство окончено.

Следствие ("теорема Эйлера»). В трехмерном евклидовом пространстве любое ортогональное отображение f, не меняющее ориентацию (т. е. элемент группы SO(3)), является вращением относительно некоторой оси.

Доказ ате льство. Так как характеристический многочлен f имеет степень 3, у него обязательно есть вещественный корень. Если он единственный, то он должен быть равен 1, ибо $\det f = 1$. Если есть больше одного вещественного корня, то все корни вещественные, и возможны комбинации $(1, 1, 1)$ или $(1, -1, -1)$. В любом случае собственное значение 1 имеется. Соответствующее собственное подпространство является осью вращения, а в ортогональной к нему плоскости индуцируется элемечт SO(2), т.е. вращение на некоторый угол.

15.7.8 8. Self-adjoint Operators

В первой части мы видели, что простейший и нанболее важный класс линейных операторов образуют диагонализируемые операторы. Оказывается, что в евклидовых и унитарных пространствах совершенно особую роль играют операторы с вещественным спектром, диагонализируемые в некотором ортонормированном базисе. Иными словами, эти операторы осуществляют вещественные растяжения пространства вдоль системы попарно ортогональных направлений.

Пусть $\{e_1, \ldots ; , e_n\}$ - ортонормированный базис в L и $f : L \to L$ - оператор, для которого $f(e_i) = \lambda_i e_i, \lambda_i \in \mathbf{R}, i = 1, \ldots, n$. Нетрудно убедиться, что он обладает следующим простым свойством:

$$(f(l_1), l_2) = (l_1, f(l_2)) \text{ для всех } l_1, l_2 \in L.$$

Действительно,

$$\left(f\left(\sum x_i e_i\right), \sum y_j e_j\right) = \sum \lambda_i x_i y_i \text{ или } \sum \lambda_i x_i \bar{y}_i,$$
$$\left(\sum x_i e_i, f\left(\sum y_j e_j\right)\right) = \sum \lambda_i x_i y_i \text{ или } \sum \lambda_i x_i \vec{y}_i$$

(в унитарном случае вещественность λ_i использовалась во второй формуле). Операторы со свойством (1) называются самосопряженными, и мы установили, что операторы с вещественным спектром, диагонализируемье в ортонормированном базисе, самосопряжены. Вскоре мы докажем и обратное утверждение, но сначала исследуем свойство самосопряженности более систематично.

Сопряженные операторы в пространствах с билинейной формой. В первой части курса мы показали, что для любого линейного отображения $f : L \to M$ существует единственное линейное отображение $f^* : M^* \to L^*$, для которого

$$(f^*(m^*), l) = (m^*, f(l))$$

где $m^* \in M^*, l \in L$ и где скобки означаjют канонические билинейные отображения $L^* \times L \to \mathscr{K}, M^* \times M \to \mathscr{K}$.

В частности, при $M = L$ оператору $f : L \to L$ отвечает оператор $f^* : L^* \to L^*$. Предположим теперь, что на L имеется невырожденная билинейная форма $g : L \times L \to \mathscr{K}$, определяющая изоморфизм $\tilde{g} : L \to L^*$. Тогда, отождествив L^* с L посредством $\tilde{g}^{-1}$, мы можем рассмотреть f^*, точнее $\tilde{g}^{-1} \circ f^* \circ \tilde{g}$, как оператор на L. Мы по-прежнему будем обозначать его f^* (точнее было бы писать, например, f_a^* но f^* в старом смысле в этом параграфе больше не будет фигурировать). Очевидно, новый оператор f^* однозначно определяется формулой

$$g(f^*(l), m) = g(l, f(m)).$$

Он по-прежнему называется сопряженным с f (относительно скалярного произведения g).

В полугоралинейном случае $\tilde{g}$ определяет изоморфизм L с $\bar{L}^*$, а не с L^*. Поэтому на L с помощью этого изоморфизма следует переносить оператор $\tilde{\bar{f}} : *\bar{L}^* \to L^*$, который определяется как $\bar{f}^*(m) = \overline{f^*(m)}$. Перенесенный оператор $\tilde{g}^{-1} \circ \bar{f}^* \circ \tilde{g} : L \to L$ линеен. Следовало бы обозначить его f^+, но мы сохраним более традиционne обозначение f^*. Тогда и в полуторалинейном случае будет справедлива формула

$$g(f^*(l), m) = g(l, f(m)).$$

Операция $f \longmapsto f^*$ линейна, если g билинейна, и антилинейна, если g полуторалинейна.

Операторы $f : L \to L$ со свойством $f^* = f$ в евклидовых и конечномерных унитарных пространствах называются самосопряженными, в евклидовом случае - также симметричными, а в унитарном - эрмитовыми. Эта терминология объясняется следующим простым замечанием.

Предложение.

Если оператор $f : L \to L$ в ортонормированном базисе задается матрицей A, то оператор f* задается в этом же базисе матрицей A^t (евклидов случай) или $\bar{A}^t$ (унитарный слуuа).

В частности, оператор самосопрянен тогда и только тогда, когда его матрица в ортонормированном базисе симметрична или эрмитова.

Доказательство. Обозначая скалярное произведение в L скобками, а векторы - столбцами их координат в ортонормированном базисе, имеем

$$(f(\vec{x}), y) = (A\vec{x})^t y = \left(\vec{x}^t A^t\right)\vec{y} = \vec{x}^t\left(A^t\vec{y}\right) = (\vec{x}, f^*(\vec{y}))$$

(евклидов случай). Отсюда и следует, что матрица f^* равна A^t. Унитарный случай разбирается аналогично.

Самосопряженные операторы и скалярные произведения. Пусть L - пространство с симметричным или эрмитовым скалярным пронзведением (,). $f : L \to L$ мы можем определить новое скалярное произведение $(,)_f$ на L, положив

$$(l_1, l_2)_f = (f(l_1), l_2).$$

Предположим, что L невырождено, так что мы можем пользоваться понятием сопряженного оператора. Тогда

$$(l_2, l_1)_f = (f(l_2), l_1) = (l_2, f^*(l_1)) = (f^*(l_1), l_2) = (l_1, l_2)_{f^*}$$

в евклидовом случае, и аналогично

$$\overline{(l_2, l_1)_f} = \overline{(f(l_2), l_1)} = \overline{(l_2, f^*(l_1))} = (f^*(l_1), l_2) = (l_1, l_2)_{f^*}$$

в унитарном. Следовательно, если оператор f самосопряокен, то построенная по нему новая метрика $(l_1, l_2)_f$ будет по-прежнему симметричной или рмитовой. Верно и обратное, как нетрудно убедиться прямо или с помощью предложения п. 3.

Таким образом, мы установили биекцию между множествами самосопряженных операторов, с одной стороны, н симметричных скалярных произведений в пространстве, где одно певырожденное скалярное произведение задано, - с другой. В евклидовом и унитарном случае после выбора ортонормированного базиса соответствне легко описывается на матричном языке: матрица Грама $(,)_f$ транспонирована к матрице отображения f. Теперь мы докажем основную теорему о самосопряженных операторах, параллельную теореме п. 4$7 об ортогональных и унитарных операторах и тесно с ней связанную.

Теорема.

а) Для того чтобы оператор f в конечномерном евклидовом или унитарном пространстве был самосопряжен, необходимо и достаточно, чтобь он диагонализировался в ортонормированном базисе и имел вещественный спектр.

б) Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие разныл собственным значениям, ортогональны.

Доказательство. а) Достаточность мы провернли в начале этого параграфа Вещественность спектра в уиитарном случае устанавливается просто: пусть λ - собственное значение оператора $f, l \in L$ - соответсгвующий собственный вектор. Тогда

$$\lambda(l, l) = (f(l), l) = (l, f(l)) = \bar{\lambda}(l, l),$$

откуда $\lambda = \bar{\lambda}$, ибо $(l, l) \neq 0$. Ортогональный случай сводится к унитарному следующим приемом: рассмотрим комплексифицированное пространство L^{C} и введем на нем полуторалинейное скаляр. ное произведение по формуле

$$(l_1 + il_2, l_3 + i_4) = (l_1, l_3) + (l_2, l_4) + i(l_2, l_3) - i(l_1, l_4).$$

Легкая прямая проверка показывает, что L^C превращается в унитарное пространство, а f^c - в эрмитов оператор на нем. Спектр оператора fc совпадает со спектром оператора f, ибо в любом R-базисе L, являющемся в то же время C-базисом L^{C}, f и f^c задаются одинаковыми матрицамн. Поэтому спектр оператора f веществен.

Дальше оба случая можно рассматривать параллельно и провести нндукцию по $\dim L$. Случай $\dim L = 1$ тривиален. При $\dim L > 1$ выберем собственное значение λ и отвечающее ему соб. ственное полпространство L_0, затем положим $L_1 = L_+$. По предложению п. 2§3 имеем $L = L_0 \oplus L_1$. Подпространство L_1 инвариантно относительно f, потому что если $l_0 \equiv L_0, l_0 \neq 0$ и $l \in L_1$, т. е. $(l_0, l) = 0$, то

$$(l_0, f(l)) = (f(l_0), l) = \lambda(l_0, l) = 0,$$

так что $f(l) \in L$. По индуктивному предположению ограничение f на L_1 диагонализируется в ортонормированном базисе L_1. Добавив к нему вектор $l_0 \in L_0, |l_0| = 1$, получим требуемый базис в L.

б) Пусть $f(l_1) = \lambda_1 l_1, f(l_2) = \lambda_2 l_2$. Тогда
$$\lambda_1(l_1, l_2) = (f(l_1), l_2) = (l_1, f(l_2)) = \lambda_2(l_1, l_2),$$
откуда следует, что если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $(l_1, l_2) = 0$.

Следствие. Любая вещественная симметричная или комплексная эрмитова матрица имеет вещественный спектр и диагонализируема.

Доказательство. Построим по матрице A самосопряженый оператор в координатном пространстве $\mathbf{R}^n$ или $\mathbf{C}^n$ с канони- ческой евклидовой или унитарной метрикой и применим теорему n. 5. Нз нее видіо даже больне: матрицу X такую, что $X^{-i}AX$ диагональна, можно найти в $\mathrm{O}(n)$ или в $\mathrm{U}(n)$ соответственно.

Следствие. Отображение exp: $\mathrm{u}(n) \rightarrow \mathrm{U}(n)$ сюръективно.

Доказ ательство. Алгебра Ли $u(n)$ состонт из антиэрмитовых матриц (см. \$4 ч. 1), а любая антиэрмитова матрица имеет вид iA, где A - эрмитова матрица. Чтобы решить относительно A уравнение $\exp(iA) = U$, где $U \in \mathrm{U}(n)$, реализуем U как унитарный оператор f в эрмитовом координатном пространстве $\mathbf{C}^n$. После этого по теореме п. 4\$7 найдем в $\mathbf{C}^n$ новый ортонормированный базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$, в котором матрица оператора f имеет вид $\operatorname{diag}\left(e^{i\emptyset_1}, \ldots, e^{i\varphi_n}\right)$, зададим в этом базисе оператор g матрицей $\operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ и обозначим через A матрицу оператора g в исходном базисе. Очевидно, $\exp(ig) = f$ и $\exp(iA) = U$.

Следствие. а) Пусть g_1, g_2-две ортогональные или рмитовы формы в конечномерном пространстве L, и одна из них, скажем g_1, положительно определена. Тогда в пространстве L существует базис, матрица Грама которого относительно g_1 единична, а относительно g_2 диагональна и веще́ственна.

б) Пусть g_1, g_2 - две вещественные симметричные или комплексные эрмитово симметричные формы относительно переменных $x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n, u g_1$ положительно определена. Тогда с помощью невырожденной линейной замены переленных (общей для $\vec{x} u(\vec{y})$ эти две формы можно привести квиду
$$g_1(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i; g_2(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_l y_i, \lambda_i \in \mathbf{R},$$
или
$$g_1(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i; g_2(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \bar{y}_i, \quad \lambda_i \in \mathbf{R}$$

Доказательство. Очевидно, обе формулировки эквивалентны. Чтобы доказать их, рассмотрим (L, g_1) как ортогональное или унитарное пространство, переобозначим $g_1(l_1, l_2)$ через (l_1, l_2) и представим $g_2(l_1, l_2)$ в виде $(l_1, l_2)_{\mathrm{f}}$, где $f: L \rightarrow L$ - некоторый самосопряженный оператор, как это было сделано в п. 4. После этого найдем ортонормированный базис в L, в котором f диагонализируется. По замечанию в конце п. 4 этот базис будет удовлетворять требованиям следствия (точнее, утверждения а)).

Ортогональные проекторы. Пусть L - линейное пространство над $\mathscr{K}$ и пусть дано его разложение в прямую сумму: $L = L_1 \oplus L_2$. ак было показано в ч. 1, оно определяет лва проектора $p_i : L \to L$ таких, что $\operatorname{Im} p_i = L_i, \mathrm{id}_L = p_1 + p_2, p_1p_2 = p_2p_1 = 0$, $p_i^2 = p_i$. Собственные значения проекторов равны 0 ил! 1.

Если L-евклидово или унитарное пространство и $L_2 = L_1{}^{\frac{1}{1}}$, тп соответствующие ортогональные проекторы диагонализируются в ортонормированном базисе L - объедннепи таких базисов L_1 и L_2 - и потому самосопряжены. Наоборот, любой самосопряженньй проектор р есть оператор ортогонального проектирования на подпространство. Действительно, Ker p и $\operatorname{Im} p$ натянуты на собственные векторы p, отвечающие собственным значениям 0 и 1 соответственно, так что $\operatorname{Ker} p$ и $\operatorname{Im} p$ ортогональны по теореме г. 5 и $L = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$.

Далее, если самосопряженный оператор f диагонализируется в ортонормированном базисе $\{e_i\}, f(e_i) = \lambda_i e_i$, и p_i-ортогональный проектор L на подпространство, натянутое на e_i, то

$$f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i$$

Эта формула называется спектральным разложением оператора f. Можно считать, что λ_i пробегает только попарно различные собственные значения, а p_i есть оператор ортогонального проектирования на полное корневое подпространство $L(\lambda_i)$; формула (2) останется верной.

Теорема п. 5 обобшается также на ограниченные по норме (и, с осложнениями, на неограниченные) самосопряженные операторы в бесконечномерных гильбертовых пространствах. Однако это обобщение требует очень нетривиального изменения некоторых основных понятий. Главные проблемы связаны со структурой спектра: в конечномерном случае λ является собственным значением f тогда и только тогда, когда оператор λ id $-f$ необратим, тогда как в бесконечномерном случае множество точек необратимости оператора λ id $-f$ может быть больше множества собственных значений f: для неизолированных в спектре точек λ_0 собственных векторов, вообше говоря, нет. С другой стороны, именно множество точек необратимости оператора $\lambda \mathrm{id} - f$ служит правильным обобшением спектра в бесконечномерном случае. Эта нехватка собственных векторов требует изменения многих формулировок. Основной результат является обобщением формулы (2), где, однако, суммированне заменяется интегрированием.

Мы ограничимся описанием нескольких важных принципов на примерах, где эти затруднения не возникают.

Формально сопряженные дифференциальные операторы. Рассмотрим какое-нибудь пространство вещественных функций на отрезке $[a, b]$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Предположим, что оператор $\frac{d}{dx}$ переводит его в себя. Согласно формуле интегрирования по частям

$$\left(\frac{df}{dx}, g\right) + \left(f, \frac{dg}{dx}\right) = fg|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Поэтому, если пространство состоит только из функций, принимающих на концах интервала одинаковые значения, то

$$\left(\frac{df}{dx}, g\right) = \left(f, -\frac{dg}{dx}\right)$$

т.е. на таком пространстве оператор $-\frac{d}{dx}$ сопряжен с оператором $\frac{d}{dx}$.

Используя формулу интегрирования по частям несколько раз или пользуясь формальным операторным соотношением $(f \circ \ldots \circ f_n)^* = f_n^* \circ \ldots \circ f_1^*$, получаем, что на таких пространствах

$$\left[\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\frac{d^i}{dx^i}\right]^* = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{d^i}{dx^i} \circ a_l(x),$$

где запись $\frac{d^b}{dx^i} \circ a_i(x)$ для оператора означает, что, применяя его к функции $f(x)$, мы сначала умножаем ее на $a_i(x)$ и затем дифференцируем i раз по x. Формула (3) определяет операцию (формального) сопряжения дифференциальных операторов: $D \to D^*$. Оператор D называется (формально) самосопряженным, если $D = D^*$. Слово «формальный» здесь напоминает о том, что в определении не указано явно пространство, на котором D реализуется как линейный оператор.

Если скалярное произведение определяется с помощью вега $G(x)$:

$$(f, g)_G = \int\limits_a^b G(x) f(x) g(x) dx,$$

то очевидные вычисления показывают, что вместо D^* следует рассматривать оператор $G^{-1} \circ D^* \circ G$ (считая, что G не обращается в нуль); именно он является кандидатом на роль сопряженного оператора к D относительно $(f, g)_\sigma$.

Покажем, что ортогональные системы функций, рассмотренные в §4, состоят из собственных функций самосопряженных дифференциальных операторов.

а) Вещественные иногочлены Фурье степени $\leqslant N$. Оператор $-\frac{d^2}{dx^2}$, формально самосопряженный, переводит это пространство в себя и самосопряжен на нем. Кроме того, его собственные значения равны 0 (кратность 1) и $-1^2, -2^2, \ldots, -N^2$ (кратность 2). Соответствующие собственные векторы суть 1 и $\{\cos nx, \sin nx\}, 1 \leqslant n \leqslant N$.

б) Многонлены Лежандра. Оператор

$$\left(x^2 - 1\right) \frac{d^2}{dx^2} + 2x \frac{d}{dx} = \frac{d}{dx} \cdot \left[\left(x^2 - 1\right) \frac{d}{dx}\right]$$

формально самосопряжен и переводит пространство многочленов степени $\leqslant N$ в себя. Имеет место очевидное тождество

$$\left(x^2 - 1\right) \frac{d}{dx} \left(x^2 - 1\right)^n = 2nx \left(x^2 - 1\right)^n,$$

откуда по формуле Лейбница, примененной к обеим частям,

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left[\left(x^2 - 1\right) \frac{d}{dx} \left(x^2 - 1\right)^n\right] =$$

$$= \left(x^2 - 1\right) \frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}} \left(x^2 - 1\right)^n + 2(n+1)x \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left(x^2 - 1\right)^n +$$

$+n(n+1) \frac{d^n}{dx^n} \left(x^2 - 1\right)^n = 2nx \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left(x^2 - 1\right)^n + 2n(n+1) \frac{d^n}{dx^n} \left(x^2 - 1\right)^n$.

Разделив последнее равенство на $2^n n$! и вспомнив определение многочленов Лежандра, получим отсюда

$$\left[\left(x^2 - 1\right) \frac{d^2}{dx^2} + 2x \frac{d}{dx}\right] P_n(x) = n(n+1) P_n(x).$$

Таким образом, оператор $\left(x^2 - 1\right) \frac{d^2}{dx^2} + 2x \frac{d}{dx}$ на пространстве многочленов степени $\leqslant N$ диагонализируется в ортогональном базисе из многочленов Лежандра и имеет простой вещественный спектр. Стало быть, он самосопряжен.

Разумеется, самосопряженность на этом пространстве можно было бы проверить и непосредственным интегрированием по частям: член типа $fg|_{-1}^1$ пропадет здесь из-за множителя $x^2 - 1$ в коэффициентах оператора. Тогда из результатов этого пункта и теоремы п. 4 получается другое доказательство попарной ортогональности многочленов Лежандра.

Мы оставляем читателю часть проверок и интерпретацию в терминах линейной алгебры соответствующих фактов для многочленов Эрмита и Чебышева (помнить о весовых множителях $G(x)$!).

в) Многочлен Эрмита $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2}\right)$ есть собственный вектор с собственным значением $-2n$ оператора

$$K = \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx}.$$

Функция $e^{-x^2/2}H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$ является собственным вектором оператора

$$H = \frac{d^2}{dx^2} - x^2$$

с собственным значением - $(2n+1)$.

Первое. утвержление проверяется прямой индукиией по n, ксторую мы опускаем. Для доказательства второго утверждения рас- смотрим вспомогательный оператор

$$M = \frac{d}{dx} - x$$

Легко проверить, что

$$[H, M] = HM - MH = -2\left(\frac{d}{dx} - x\right) = -2M.$$

Отсюда следует, что если f есть собственная функция оператора H с собственным значением λ, то Mf есть собственная функция оператора H с собственным значением $\lambda - 2$:

$$HMf = [H, M]f + MHf = -2Mf + \lambda Mf = (\lambda - 2)Mf.$$

Поскольку $H\left(e^{-x^2/2}\right) = -e^{-x^2/2}$, мы получаем, что $M''\left(e^{-x^2/2}\right)$ есть собственная функция для H с собственным значением $-(2n+1)$ при всех $n \geqslant 0$. С другой стороны, прямая проверка показывает, что

$$e^{x^2/2}M\left(e^{-x^2/2}f(x)\right) = e^{x^2}\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}f(x)\right),$$

откуда вытекает, что

$$e^{-x^2/2}H_n(x) = (-1)^n M^n\left(e^{x^2/2}\right),$$

что завершает доказательство второго утверждения.

г) Многочлен Чебышева

$$T_n(x) = \frac{(-2)^n n!}{(2n)!}\sqrt{1-x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(1-x^2\right)^{n-\frac{1}{2}}$$

есть собственный вектор с собственным значением $-n^2$ оператора

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2}{dx^2} - x\frac{d}{dx}.$$

Нормальные операторы. Как унитарные, так и самосопряженные операторы в унитарном пространстве являются частным случаем нормальных операторов, которые можно описать двумя равносильными свойствами:

а) Это операторы, диагонализируемые в ортонормированном базисе.

б) Это операторы, коммутирующие со своим сопряженным оператором.

Проверим равносльльность.

Если $\{e_i\}$-ортонормированный базис с $f(e_i) = \lambda e_i$, то $f^*(e_i) = \bar{\lambda}_i e_i$, так что $[f, f^*] = 0$, и из а) следует б).

Для доказательства обратной импликации выберем собственное значение λ оператора f и положим

$$L_\lambda = \{l \in L | f(l) = \lambda l\}.$$

Проверим, что $\Gamma^*(L_\lambda) \subset L_\lambda$. В самом деле, если $l \in L$, то

$$i\left(f^*(l)\right) = i^*(j(l)) = i^*(\lambda l) = \lambda j^*(l),$$

поскольку $ff^* = f^*f$. Отсюда вытекает, что пространство $L\frac{1}{\lambda}f$-инвариантно: если $(l, l_0) = 0$ для всех $l_0 \in L$, то

$$(f(l), l_0) = \left(l, f^*(l_0)\right) = 0.$$

Такое же рассуждение показывает, что $L\frac{1}{\lambda}f^*$-инвариантно. Ограничения f и f^* на $L_{\frac{1}{\lambda}}$, очевидно, коммутируют. Применяя индукцию по размерности L, мы можем считать, что на $L_\lambda\frac{1}{\lambda}f$ диагонализируется в ортонормированном базисе. Так как то же верно для L_λ, это завершает доказательство.

УПРАЖНЕНИЯ

Пусть $f : L \to L$ - оператор в унитарном пространстве. Доказать, чго если $|(f(l), l)| \leqslant c|l|^2$ для всех $l \in I$. и некоторого $c > 0$, то
для всех $l, m \in L$.

$$|(f(l), m)| + |(l, f(m))| \leqslant 2c|l||m|$$

Пусть $f : L \to L$ - самосопряженный оператор. Доказать, что

$$|(f(l), l)| \leqslant |f||l|^2$$

для всех $l \in L$, где $|f|$ - индуцированная норма f, и если $c < |f|$, то существует вектор $l \in L$с

$$|(f(l), l)| > c|l|^2.$$

Самосопряженный оператор f назызается пеотрицатльным, $f \geqslant 0$, если $(f(l), l) \geqslant 0$ для всех l. Доказать, что это условие равносильно неотрицательности всех точек спектра f.

Доказать, что отношение $f \geqslant g : f - g \geqslant 0$ является отнонением порядка на множестве самосопряженных операторов.

Доказать, что пронзведение двух коммутирующих неотрицательных самосопряженных операторов неотрицательно.

Доказать, что из каждого неотрицательного самосопряженного оператора можно извлечь единственный неотрицательный квадратный корегь.

Вычислить явно поправку второго приближелия k соблтвениому вектору и собственному значенню оператора $H_0 + \varepsilon H_1$

Пусть f - самосопряженный оператор, $\omega \in$ C, $\operatorname{Im} \omega \neq 0$. Доказать, что оператор

$$g = (\hat{f} - \bar{\omega}\mathrm{id})(f - \omega\mathrm{id})^{-1}$$

унитарен, его спектр не содержит единицы и

$$f = (\omega g - \bar{\omega} \text{ id })(g - id)^{-1}.$$

Наоборот, пусть g-унитарный оператор, спектр которого не содержит единицы. Доказать, что оператор
самосопряжен и

$$f=(\omega g-\bar{\omega}\mathrm{id})(g-\mathrm{id})^{-1}$$

$$g=(f-\overline{0}\mathrm{id})(f-\omega\mathrm{id})^{-1}.$$

(Описанные здесь отображения, которые связывают самосопряжениые и унитарные операторы, называются преобразованиями эли. В одномерном случае они отвечают отображению $a\longmapsto\frac{a-\bar{\omega}}{a-w}$, которое переводит вещественную ось в единичную окружность.)

Пусть $f:L\to L$—-любой пинейный оператор в унитарном гространстве. Доказать, что f^*f - неотрицательный самосопряженитй опералор и что ои потожителен тогда и только тогда, когда f обратим. 11. Пусть f обратим и $r_1^2=ff^*, r_2^2=f^*f$. где r_1,r_2 - положительные самосопряженныс операторы. Доказать, что

$$f=r_1u_1=u_2r_2$$

где u_1,u_2 унитарны. (Эти представлення называются полярными разложениями линейного оператора f, где u_1,u_2 - соответственно правый и левый фазовые множители f. В одномерном случае получается представление ненулевых комплексиых чисел в виде $re^{i\varphi}$.)

Доказать, что полярные разложения $f=r_1u_1=u_2r_2$ единственны.

Доказать, что пслярные разложения существуют также для необратимых операторов f, но однозначно определяются лишь r_1,r_2, а не унитарные сомножители.

15.7.9 9. Self-adjoint Operators in Quantum Mechanics

(может, пару разделов сделаю, тут не только про них теория. странно, что название не говорит о том, что будет раскрыто. потом поменяю)

Мы продолжаем здесь обсуждение основных постулатов квантовой механики, начатое в п. 8 \$.

Пусть $\mathscr{X}$ - унитарное пространство состояний некоторой квантовой системы. Для характеризации конкретных состояний в физике пользуются возможностью определить на них («измерить») значения некоторых физических величин таких, как энергия, спин, координата, импульс и т. п. Если единица измерения каждой такой величины, а также начало отсчета («нуль») выбраны, то возможные значения являются вещественными числами (это по существу определение скалярных величин), и мы всегда будем считать это условие выполненным.

Третий (после принципа суперпозиции и интерпретации скалярных произведений как амплитуд вероятности) постулат квантовой механики состоит в следующем.

Каждой скалярной физической величине, значения которой можно измерять на состояниях системы с пространством состояний, можно поставить в соответствие самосопряженный оператор $f:\mathscr{H}\to\mathscr{H}$ со следующими свойствами:

а) Спектр оператора f есть полное множество значений величины, которое можно получить, производя измерения этой величины на разных состояниях системы.

б) Если $\psi\in\mathscr{H}$ - собстттвенный вектор оператора f с собственным значением λ, то при измерении этой величины на состоянии ψ с достоверностью получится значение λ.

в) Более общо, измеряя величину f на состоянии $\psi, |\psi| = 1$, мог можем получить значение λ из спектра оператора f вероятностью, равной квадрату нормы ортогональной проекции ч на полное собственное подпространство $\mathscr{H}(\lambda)$, отвечающее λ.

Так как в силу теоремы п. 4$8$\mathscr{C}$ разлагается в ортогональную прямую сумму $\bigoplus_{i=1}^{m} \mathscr{B}\left(\lambda_i\right), \lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, мы можем разложить ψ в соответствуюшую сумму проекций $\psi_i \in \mathscr{H}\left(\lambda_i\right), i = 1, \ldots \ldots, m$. Теорема Пифагора

$$1 = |\psi|^2 = \sum_{i=1}^{m} |\psi_i|^2$$

интерпретируется тогла как утвержление о том, что, пронзводя измеренння f на любом состоянии ψ, мы с вероятностью 1 получим хоть какое-нибудь из возможных значений %.

Физические величины, о которых мы говорили выше, и соответствующие им самосопряженные операторы также называют наблюдаемьим. Постулат о наблюдаемых иногда трактуется более широко и счнтается, что любому самосопряженному оператору отвечаст некоторая физическая наблюдаемая.

В бесконечномерных пространстьах $\mathscr{H}$ эти постулаты несколько менлітся. В частности, вместо б) и в) следует рассматривать вероятносте того, что при измерении? в состоянии ? значения попадут в некоторый интервал $(a, b) \subset \mathbf{R}$. Этому интервалу также можно поставить в соответствие подпространство $\mathscr{H}_{(a,b)} \subset \mathscr{H}$ образ ортогонального ироектора $p_{(a,b)}$ на $\bigoplus_{\lambda_l \in (a,b)} \mathscr{H}\left(\lambda_l\right)$ в конечномерном случае, - и искомая вероятность равна

$$\left|p_{(a,b)}\psi\right|^2 = \left(\psi, p_{(a,b)}\psi\right).$$

Кроме того, в бесконечномерном случае операторы наблюдаемых могут оказаться опрелеленными лишь на некотором подпространстве $\mathscr{H}\mathscr{C}_0 \subset \mathscr{H}$b.

Связь этой терминологии с понятиями, введенными в п. 8$6, такова. Ф ильтр B_χ - это прибор, который измеряет наблюдаемую, отвечаюиую ортогональному проектору на подпространство, порожденное %. Ей прнписывдется значенне 1, если система прошла через фильтр, и 0 в противном случае. Печка A_ψ - это комбинация прнбора, произвопяшего систему, вообще говоря, в разных состояниях, и фильтра B_4, пропускаюшего затем лишь системы в состоянин ф. Рецепт вычисления вероятностей, данный в п. 8$6, очевидно, согласуется с реептом, данным в свойствах б), в) выше

На этом примере вндно, что прибор, измеряющий некоторую наблюлаемую, скажем B, в состоянии ψ, вообще говоря, меняет это состояние: с вероятностью. $|(\psi, \chi)|^2$ он превращает его в χ, а с вероятностью $1 - |(\psi, \chi)|^2$ «уничтожает» систему. Поэтому термин «измерение» в применении к такому акту взаимодействия системы с прибором может привести k совершенно неадекватным интуитивным представлениям. лассическая физика основана на предположении о том, что акт измерения можно в принципе произвести, сколь угодно мало повлияв на состояние системы, подвергшейся измерению. Тем не менее термин «измерение» общепринят в физических текстах, и мы сочли необходимым ввести его здесь, начав ранее с менее обычных, но интуитивно более удобных «печек»и «фильтров».

Средние значения и принцип неопределенности. Пусть f - некоторая наблюдаемая, $\{\lambda_i\}$ - ее спектр, $\mathscr{H} = \bigoplus_i \mathscr{H}\left(\lambda_i\right)$ - соответствующее ортогональное разложение. ак было сказано, на соотоянин $\psi, |\psi| = 1, f$ прннимает значенне λ_i с вероятностью $(\psi p_i \psi)$, где p_i - ортогональный проектор на $\mathscr{H}\left(\lambda_i\right)$. Поэтому среднее значение $\widehat{|}$ { на состоянии $\downarrow$, взятое по многим измерениям, можно вычислить так:

$$\widehat{f_\psi} = \sum_i \lambda_i \left(\psi, p_i \psi\right) = \sum_i \left(\psi, \lambda_i p_i \psi\right) = (\psi, f(\psi))$$

(повтюряем, что $|\psi| = 1$).

Наша величина $(\psi, f(\chi))$ в обозначениях Дирака выглядит так: $\langle \chi | f | \psi \rangle$. Часть этого символа $f|\psi\rangle$ есть результат действия оператора | на кет-вектор $|\psi >$, а $< \chi | f$ - результат цействия сопряженного оператора на бра-вектор $< \chi |$.

Вернемся к средним значениям. Если операторы f, g самосопряжены, то оператор fg, вообще говоря, не является самосопряженным:

$$(fg)^* = g^*f^* = gf \neq fg,$$

если f, g не коммутируют. Однако $f^2, f-\lambda(\lambda\in\mathbf{R})$ и коммутатор $\frac{1}{i}[f,g]=\frac{1}{i}(fg-gf)$ по-прежнему самосопряжены.

Среднее значение $\left[\left(f-\widehat{\hat{f}_\psi}\right)^2\right]\hat{\psi}$ наблюдаемой $\left(f-\widehat{f_\downarrow}\right)^2$ в состоянии ψ есть среднеквадратичное отклонение значений f от их среднего значения, или дисперсия (разброс) значений f. Положим

$$\widehat{\Delta} f_\psi = \sqrt{\left[\left(f-\widehat{f_\psi}\right)^2\right]_\psi^2}$$

Предложение (принцип неопределенности Гейзенберга). Для любых самосопряженных операторов f, g в унитарном пространстве

$$\widehat{\Delta f}_\psi \cdot \widehat{\Delta g}_\psi \geqslant \frac{1}{2}|([f,g]\psi,\psi)|.$$

Доказательство. Пользуясь очевидной формулой

$$\left[f-\widehat{f}_\psi, g-\widehat{g}_\psi\right]=[f,g],$$

самосопряженностью операторов f, g и неравенством Коши - Буняковского - Шварца, находим $\left(f_1=f-\widehat{f_\psi}, g_1=g-\widehat{g_\psi}\right)$

$|([f,g]\psi,\psi)| = |((f_1g_1-g_1f_1)\,\psi,\psi)| = |(g_1\psi,f_1\psi)-(f_1\psi,g_1\psi)| = |2\operatorname{Im}(g_1\psi,f_1\psi)| \leqslant 2\,|(g_1\psi,f_1\psi)| \leqslant$

$$\leqslant 2\sqrt{\left(\hat{f}_1\psi,f_1\psi\right)}\sqrt{(g_1\psi,g_1\psi)}=2\widehat{\Delta f}_\psi\widehat{\Delta g}_\psi.$$

Это показывает, что средний разброс значений некоммутирующих наблюдаемых f, g, вообше говоря, не может быть одновременно сделан как угодно малым. Говорят еще, что некоммутирующие наблюдаемые не измеримы одновременно; к этой формулировке следует относиться с теми же предосторожностями, что и к термину «нзмерение».

Особую роль играет применение неравенства Гейзенберга к случаю канонически сопряженных пар наблюдаемых, которье по

$$\widehat{\Delta f}_\downarrow \cdot \widehat{\Delta g}_\Psi \geqslant \frac{1}{2}$$

каково бы ни было состояние ψ. Заметим, что в конечномерных пространствах таких пар нет, ибо $\operatorname{Tr}[f,g]=0$, $\operatorname{Tr}\mathrm{id}=\dim\mathscr{H}$. Однако в бесконечномернх пространствах они существуют. лассический пример:

$$\frac{1}{i}\left[x,\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right]=\mathrm{id}$$

Эти операторы появляются в квантовых моделях физических систем, которые на классическом языке называются «частица, двнжущаяся в одномерном потенциальном поле».

Опишем эти и некоторые другие наблюдаемые подробнее.

а) Наблюдаемая координать. Это оператор умножения на x в пространстве комплексных функций на $\mathbf{R}$ (нли некоторых подмножествах R) со скалярным произведением $\int f(x)\bar{g}(x)dx$. Подразумевается квантовая система: «частица, движушаяся по прямой, во внешнем поле».

б) Наблюдаемая импульса. Это оператор $\frac{1}{i}\frac{d}{dx}$ в аналогичных пространствах функций. (При нем обычно пишут множителем постоянную Планка $\hbar$; это относится к выбору системы единиц, на котором мы не останавливаемся.)

в) Наблюдаемая энергии квантового осциллятора. Это-оператор $\frac{1}{2}\left[-\frac{d^2}{dx^2}+x^2\right]$, снова в подходяших единицах.

г) Наблюдаемая проекции спина для системы «частица со спином 1/2». Это любой самосопряженный оператор с собственными значениями $\pm 1/2$ на двумерном унитарном пространстве. Дальнейшие подробности о нем будут даны позже.

В примерах а) - в) мы намеренно не уточняли, в каких унитарных пространствах действуют наши операторы. Они существенно бесконечномерны и строятся и изучаются средствами функционального анализа.)примере г) мы скажем кое-что еще ниже.

Наблюдаемая энергии и эволюция системы во времени. В описание любой квантовой системы вместе с ее пространством состояний ℓ вхолит заданне фундаментальной наблюдаемой $H:\mathscr{H}\to\mathscr{H}$, которая называется наблюдаемой энергии, или оператором Гамильтона, или гамильтонианом.

В ее терминах формулируется последний из основных постулатов квантовой механики.

Если в момент времени 0 система находилась в состоянии ψ u за промежуток времени t развивалась как изолированная система, в частности, над ней не производились измерения, то в мо- мент времени t она будет находиться в состоянии exp $(-iHt)(\psi)$, $2\partial e$

$$\exp(-iHt)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-iH)^n t^n}{n!}:\mathscr{H}\to\mathscr{H}$$

(см. \$11 ч. 1).

Оператор $\exp(-iHt)=U(t)$ унитарен. Однопараметрическая группа унитарных операторов $\{U(t)|t\in\mathbf{R}\}$ целиком определяет эволюцию изолированной системы.

Физическая размерность (энергия) Х(время) называется «действием». Многие эксперименты позволяют определить универсальную еднницу действия - знаменитую постоянную Планка $\hbar=1,055\cdot 10^{-34}$ Дж.с. В нашей формуле подразумевается, что Ht измеряется в единицах $\hbar$, и чаще ее пишут в виде exp $\left(\frac{Ht}{i\hbar}\right)\psi$. Мы будем опускать $\hbar$ для сокращения записи.

Заметим еще, что, поскольку оператор e^{-iHt} линеен, он переводит лучи в $\mathscr{H}$ в лучи и в самом деле действует на состояния системы, а не просто на векторы ψ.

Закон эволюции можно записать в дифференциальной форме:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-iHt}\psi\right)=-iH\left(e^{-iHt}\psi\right)$$

или, полагая $\psi(t)=e^{-iHt}\psi$,

$$\frac{d\psi}{dt}=-iH\psi\left(\frac{1}{i\hbar}H\psi,\text{ если помнить о единицах }\right).$$

Последнее уравнение называется уравнением Шрёдингера. Впервые оно было написано для случая, когда ψ реализованы как функции в физическом пространстве и H представлен дифференциальным оператором относительно координат.

В следующих комментариях мы, как обычно, ограничимся в основном конечномерными пространствами состояний $\mathscr{H}$.

Энергетический спектр и стационарные состояния системы. Энергетический спектр системы - это спектр ее гамильтониана H. Стационарные состояния-это состояния, которые не меняются со временем. Отвечающие им лучи должны быть инвариантны относительно оператора e^{ith}, т. е. быть одномерными собственными подпространствами этого оператора. Но эти подпространства те же, что и для оператора H. Собственному значению E_j гамильтониана, или нергетическому уровню системы, отвечает собственное значение $e^{itE_j}=\cos tE_l+i\sin tE_j$ олератора эволюции, меняющееся со временем.

Если H имеет простой спектр, то пространство $\mathscr{H}$ снабжено каноническим ортонормированным базисом, состоящим из векторов стационарных состояний (они определены с точностью до фазовых множителей $e^{i\varphi}$). Если кратность нергетического уровня E больне единипы, этот уjовень и соответствующие состояния называются вырожденными, а кратность E-степенью вырождения. Все состояния, отвечающие нижнему уровню, т. е. наименьшему собственному значению H, называются основными состояниями системы; основное состояние единственно, если нижний уровень невырожден. Этот термин связан с представлением о том, что квантовая система никогда не может рассматриваться как полностью изолированная от внешнего мира: с некоторой вероятиостью она может излучить или получить порцию энергии. В некоторых условиях гораздо вероятнее, что энергия будет потеряна, чем приобретена, и система будет иметь тенденцию «свалиться» в свое нижнее состояние и в дальнейшем в нем оставаться. Поэтому неосновные состояния называются иногда возбужденными.

В примере г) п. 4 был написан гамильтониан квантового осциллятора: $\frac{1}{2}\left[-\frac{d^2}{dx^2}+x^2\right]$. В разделе в) п. 10§8 было показано, что функции $e^{-x^2/2}H_n(x)$ образуют систему стационарных состояний гармонического осциллятора с уровнями: энергии $E_n = n+\frac{1}{2}$. $n=1,2,3,\ldots$ (Более подробный анализ показывает, что энергия измеряется здесь в единицах $\hbar\omega$, где константа ω отвечает частоте колебаний соответствующего классического осциллятора.) Разумным образом определив унитарное пространство, в котором следует работать, можно показать, что это полная система стационарных состояний. При $n>0$ осциллятор может излучить порцию энергии $E_n-E_m=(n-m)\hbar\omega$ и перейти из состояния ψ_n в состояние ψ_m. В применении К квантовой теории электромагнитного поля об этом говорят как об «излучении $n-m$ фотонов частоты ω. Обратный процесс будет поглощением $n-m$ фотонов; при этом осциллятор перейдет в более высокое (возбужденное) состояние. Важно, что энергия может быть получена или передана лишь целыми кратными ω.

В основном состоянии осциллятор имеет ненулевую энергию $\frac{1}{2}\hbar\omega$, которая, однако, никак не может быть передана-более низких энергетических состояний осциллятор.не имеет. Электромагпитное поле в квантовых моделях рассматривается как суперпозиция бесконечно многих осцилляторов (отвечающих, в частности, разным частотам ω). В основном состоянин - вакууме - оказывается поэтому, что поле имеет бесконечную энергию, хотя с классической точки зрения оно является нулевым - раз от него нельзя отнять энергию, оно не может ни на цто воздействовать! Эго простейшая модель глубоких трудностей современной квантовой теории поля. Ни математическнй аппарат, ни физическая интерпретация квантовой теории поля не лостигли какой-либо степени законченности. Это открытая и увлекательная наука.

Формулы теории возмущений.

В аппарате квантовой механики важную роль играют ситуации, когда гамильтониан H системы может рассматриваться как сумма $H_0+\varepsilon H_1$, где H_0 - «невозмупенный» гамнльтониан, а H_1 - малая добавка, «возмупепне». С физический точки зрения возмущение часто обусловливает взанмодействие системы с «внешним миром» (например, внешпим магнитным полем) или омпонент системы между собой (тогда H_0 отвечает илеализированому случаю системы, состоящей из свободных, невзаимодействующих компонент). С математнческой точки зрения такое представление оправдано, когда спектральный анализ невозмущенного гамильтониана H_0 проще, чем H, и спектральные характеристики H удобно представлять рядами по степеням ε, первыс члены которых определяются через H_0. Мы ограничимся следующими нанболее употребительными формулами и качественными замечаниями к ним.

а) Поправки первого порядка.

Пусть $H_0e_0=\lambda_0e_0, |e_0|=1$. По пытаемся найти собственный вектор и собственное значение $H_0+\varepsilon H_1$, близкие к e_0 и λ_0 соответственно, с точностью до членов второго порядка малости по ε, T. е. решнть уравнение

$$\left(H_0+\varepsilon H_1\right)\left(e_0+\varepsilon e_1\right)=\left(\lambda_0+\varepsilon\lambda_1\right)\left(e_0+\varepsilon e_1\right)+o\left(\varepsilon^2\right).$$

Приравнивая коэффициенты при ε, получаем

$$\left(H_0-\lambda_0\right)e_1=\left(\lambda_1-H_1\right)e_0.$$

Неизвестные здесь - это число λ_1 и вектор e_1. Их можно найти по очереди с помощью следующего приема. Рассмотрим скалярное произведение обеих частей последнего равенства на e_0. Слева будет нуль в силу самосопряженности $H-\lambda_0$:

$$((H_0-\lambda_0)\,e_1,e_0)=(e_1,(H_0-\lambda_0)\,e_0)=0.$$

Гоэтому $((\lambda_1-H_1)\,e_0,e_0)=0$ и в силу нормированности $e_.$

$$\lambda_1=(H_1e_0,e_0)\,.$$

Это поправка первого порядка к собственному значению λ_j: «сдвиг энергетического уровня» $\varepsilon\lambda_1$ равен $(\varepsilon H_1e_0,e_0)$, т. е. по результатам п. 12 совпадает со средним значением «энергии возмущения» εH_1 на состоянии e_0.

Для определения e_1 теперь нам нужно обратить оператор $H_0-\lambda_0$. Разумеется, он необратим, ибо λ_0 - собственное значение H_0; но правая часть уравнения, $(\lambda_1-H_1)\,\varepsilon_0$, ортогональна κe_0. Поэтому достаточно, чтобы $H_0-\lambda_0$ был обратим на ортогональном дополнении к e_0, которое мы обозначим $e_0^{\perp}$. Это условие (в конечномерном случае), очевидно, равносильно тому, чтобц кратность собственного значения λ_0 у H_0 была равна единице т. е. невырожденности энергетического уровня λ_0.

Если это так, то

$$e_1=\left(\left.(H_0-\lambda_0)\right|_{e_0{}^1}\right)^{-1}(\lambda_1-H_1)\,e_6$$

что дает поправку первого порядка к собственному вектору.

Выберем ортонормированный базис $\left\{e_0=e^{(0)},e^{(1)},\ldots,e^{(n)}\right\}$, в котором H_0 днагонален с собственными зиачниями $\lambda_0=\lambda^{(0)},\ \lambda^{(1)},\ldots,\lambda^{(n)}$. В базисе $\left\{e^{(1)},\ldots,e^{(n)}\right\}$ пространства $e_0^{\perp}$ имеем

$$(\lambda_1-H_1)\,e_0=\sum_{i=1}^{n}\left((\lambda_1-H_1)\,e_0,e^{(i)}\right)e^{(i)}=-\sum_{i=1}^{n}\left(H_1e_0,e^{(i)}\right)e^{(i)},$$

откуда

$$e_1=\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(H_1e_0,e^{(i)}\right)}{\lambda_0-\lambda^{(i)}}e^{(i)}$$

Интуитивно ясно, что эта поправка первого порядка может быть хорошим приближением, если энергия возмущения мала по сравнению с расстоянием от уровня λ_0 до соседнего: ε должно компенсировать знаменатели $\lambda_n-\lambda^{(i)}$. Физики так обычно и считают.

б) Поправки высиих порядков.

По аналогии с разобранным случаем покажем, что когда собственное значение λ_0 невырождено, можно индуктивно найти поправку $(i+1)$-го порядка к (λ_0,e_0), считая, что поправки порядков $\leqslant i$ уже найдены. Пусть $i\geqslant 1$. Мы решаем уравнение

$$(H_0+\varepsilon H_1)\left(\sum_{k=1}^{i+1}\varepsilon^ke_k\right)=\left(\sum_{l=1}^{i+1}\varepsilon^l\lambda_l\right)\left(\sum_{j=1}^{i+1}\varepsilon^le_j\right)+o\left(\varepsilon^{i+2}\right)$$

относительно e_{i+1},λ_{i+1} Приравнивая коэффишиенты при ε^{i+1}, получаем

$$(H_0-\lambda_0)\,e_{i+1}=(\lambda_1-H_1)\,e_i+\sum_{i=2}^{\prime}\lambda_le_{i+1-l}+\lambda_{i+1}e_0.$$

Как выше, левая часть ортогональна e_0, откуда

$$\lambda_{i+1}=((H_1-\lambda_1)\,e_l,e_0)-\sum_{l=2^2}^{i}\lambda_l\,(e_{i+1-l},e_0)\,,$$

$$e_{i+1}=\left(\left.(H_0-\lambda_0)\right|_{e_0^{\perp}}\right)^{-1}\left[(\lambda_1-H_1)\,e_i+\sum_{l=2}^{i+1}\lambda_le_{i+1-l}\right].$$

Таким образом, все поправки сушествуют и единственны.

в) Ряды теории возмущений.

Формальные ряды по степеням

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \varepsilon^l, \sum_{i=0}^{\infty} e_i \varepsilon^i$$

где λ_i и e_i находятся по выписанным рекуррентным формулам, называются рядами теории возмущений. Можно доказать, что в конечномерном случае они сходятся при достаточно малых ε. В бесконечномерном случае они могут расходиться; тем не менее несколько первых членов часто приводят к предсказаниям, хорошо согласующимся с экепериментом. Физическая роль рядов теории возмушений в квантовой теории поля очень велика. Их математическое исследование приводит к многим интересным и важным задачам.

г) Кратные собственные значения и геометрия.

В наших предыдущих вычисления запрет на кратное собственное значение λ_0 проистекал из желания обратить $H_1 - \lambda$, на e_0^1 и формально выражался в появлении разностей $\lambda_0 - \lambda^{(i)}$ в знаменателях. Можно получить формулы и в общем случае, нацлежашим образом изменив рассуждения, но мы ограничимся разбором геометрических эффектов кратности. Они видны на типичном случае $H_0 = \mathrm{id}$: все собственные значения равны единице. Малое изменение H_0 приводит к следующим эффектам.

Собственные значения становятся разными, если это изменение достаточно общее: этот эффект в физике называется «расщеплением уровней», или «снятием вырождения». Например, одна спектральная линия может расщепиться на две или больше либо при увеличении разрешения прибора, либо при помещении системы во внешнее поле. Математическая модель в обоих случаях будет состоять в учете малой поправки к H_0, ранее неучтенной (впрочем, иногда и в изменении исходного пространства состояний).

Теперь обдумаем, что может происходить с собственными векторами. В полностью вырожденном случае H_0 диагонализируется в любом ортобазисе. Малое изменение H_0, снимающее вырождение, означает выбор ортобазиса, вдоль осей которого происходят растяжения, и коэффициентов этих растяжений. Коэффициенты должны мало отличаться от исходного λ_0, но сами оси могут идти в любых направлениях. Таким образом, вблизи вырожденного собственного значения его собственные направления начинают зависеть от возмущения очень сильно. Два сколь угодно малых возмущения единичного оператора с простым спектром могут диагонализироваться в двух фиксированных и жестко повернутых друг от друга ортобазисах. Это показывает внутреннюю причину появления разностей $\lambda_0 - \lambda^{(i)}$ в знаменателях.

15.7.10 10. Geometry of Quadratic Forms and Eigenvalues of Self-adjoint Operators

Этот параграф посвящен изучению геометрии графиков квадратичных форм q на вещественном линейном пространстве, т. е. множеств вида $x_{n+1} = q(x_1, \ldots, x_n)$ в $\mathbf{R}^{n+1}$, и описанию некоторых приложений. Одна из важнейших причин, по которой эти классические результаты вызывают живой интерес и в наши дни, состоит в том, что квадратичные формы дают следующее (после линейного) приближение k любой дважды дифференцируемой функции и потому являются ключом к пониманию геометрии «искривления» любой гладкой многомерной поверхности.

В §3 и 8 мы уже доказали общне теоремы о классификации квадратичных форм с помощью любых лннейных или только ортогональных преобразований, поэтому здесь мы начнем с прояснения нх геометрических следствий. Вудем считать, что мы работаем в евклидовом пространстве со стандартной метрикой $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Забве- нне евклидовой структуры означает лишь введение более грубого отношения эквивалентносги между графиками. План геометрического исследования состоит в том, чтобы разобраться с малыми размерностями, где форму графика можно представить себе наглядно, и затем посмотреть на маломерные сечения многомерных графиков в разных направлениях. Читателю рекомендуется рисовать картинки, иллюстрирующие наш текст. Мы считаем ось x_{n+1} направленной вверх, а пространство $\mathbf{R}^n$ расположенным горизонтально.

Одномерный случай. График кривой $x_2 = \lambda x_1^2$ в $\mathbf{R}$ имеет три основных формы: «чаша» (выпуклость вниз) при $\lambda > 0$, «купол» (выпуклость вверх) при $\lambda < 0$ и горизонтальная прямая при $\lambda = 0$. Относительно линейной классифнкации, допускающей произвольное изменение масштаба вдоль оси x_1, эти три случая исчерпывают все возможности: можно считать, что $\lambda = \pm 1$ или 0. При ортогональной классификации λ является инвариантом: $|\lambda|$ определяет крутизну стенок чаши или купола, она тем больше, чем больше $|\lambda|$. Другая характеризащия $|\lambda|$ состоит в том, что $\frac{1}{2|\lambda|}$ есть радиус кривизны графика на дне или в вершине $(0, 0)$. Действительно, уравнение окружности радиуса R, касаюшейся оси x_1 в начале, имеет вид $x_1^2 + (x_2 - R)^2 = R^2$, и вблизи нуля нмеем $x_2 \approx \frac{x_1^2}{2R}$.

Двумерный случай. Чтобы разобраться в нем, перейдем к ортонормированному базису в $\mathbf{R}^2$, в котором q приводится к сумме квадратов с некоторыми коэффициентами: $q(y_1, y_2) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda, y_2^2$. Прямые, натянутые на элементы этого базнса, называются главнысми осями формы q; они, вообще говоря, повернуты относительно исходных осей. Числа λ_1 и λ_2 определены однозначно, будучи собственными значениями самосопряженного оператора A, для которого $q(\vec{x}) = \vec{x}^t \overrightarrow{Ax}$ (в старых координатах). При $\lambda_1 \neq \lambda_2$ сами оси также определены однозначно, но при $\lambda_1 = \lambda_2$ их можно выбирать произвольно (лишь бы они были ортогональны). Для каждого из коэффициентов λ_1, λ_2 есть три основные возможности ($\lambda_i > 0,\ \lambda_l < 0, \lambda_i = 0$), но соображения симметрии позволяют ограничиться четырьмя основными случаями (из которых только первые два невырождены).

а) $x_3 = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2, \lambda_1, \lambda_2 > 0$. График является ллиптическим параболоидом, имеющим форму чаши. Прилагательное «эллиптический» объясняется тем, что проекцин горизонтальных сечений $\lambda_1 y_1^2 + +\lambda_2 y_2' = c$ при $c > 0$ суть эллипсы с полуосями $\sqrt{c\lambda_l^{-1}}$, направленными вдольглавных осей формы q (при $\lambda_1 = \lambda_2$-окружности). (Эти проекции являются линиями уровня функции q.) Существительное «параболоид» объясняется тем, что сечения графика вертикальными плоскостями $ay_1 + by_2 = 0$ суть параболы (при $\lambda_1 = \lambda_2$ график является параболондом вращения). Случай $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ - это та же чаша, но опрокинутая.

б) $x_3 = \lambda_1 y_1^2 - \lambda_2 y_2^2, \lambda_1, \lambda_2 > 0$. Графнк является гиперболинеским параболоидом. Линии уровня q суть гиперболы, непустые для всех значеннй x_3, так что график уходит и выше, и ниже плоскости $x_3 = 0$; сечения вертикальными плоскостями - по-прежнему параболы. Линия уровня $x_3 = 0$– это «вырожденная гипербола», сводящаяся k своим асимитотам, двум прямым $\sqrt{\lambda_1} y_1 \pm \sqrt{\lambda_2 y_2} = 0$. Эти прямые в $\mathbf{R}^2$ называются «аcumnтотииескими направлениями» формы q. Если рассматривать q как (неопределенную) метрику в $\mathbf{R}^2$, то асимптотические прямые состоят из всех векторов длины нуль. Асимптотические прямые делят $\mathbf{R}^2$ на четыре сектора. Линии уровня $q = x_3$ при $x_3 > 0$ лежкат в паре протнвоположных секторов; когда $x_3 \to +0$ сверху, они «прижимаются» к асимптотам, превращаются в них при $x_3 = 0$ и при $x_3 < 0$, «пройдя насквозь», оказываются в другой паре противоположных секторов. Вергикальные сечения графика плоскостями, проходящими через асимптотические прямые, суть сами эти прямые, «распрямившиеся параболы».

Случай $-\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2, \lambda_1, \lambda_2 > 0$, получается из разобранного заменой знака x_3.

в) $x_3 = \lambda y_1^2, \lambda > 0$. Поскольку от y_2 функция не зависит, сечения графика вертикальными плоскостями $y_2 = \text{const}$ имеют один и тот же вид: весь график заметается параболой $x_3 = \lambda y_1^2$ в плоскости (y_1, x_3) при ее цвижении вдоль оси y_2 и называется параболическим цилиндром. Линии уровня суть пары прямых $y_1 = \pm\sqrt{x_3 \lambda^{-1}}$; при $x_3 = 0$ они склеиваются в одну прямую; весь график лежит над плоскостью $x_3 = 0$.

Случай $x_3 = \lambda y_1^2, \lambda < 0$ получается «опрокидыванием».

г) $x_3 = 0$. Это - плоскость.

Общий случай. Теперь мы в состоянии понять геометрию графика $x_{n+1} = q(x_1, \ldots, x_n)$ при произвольных значениях n.

Перейдем к главным осям в $\mathbf{R}^n$, т. е. к ортонормированному базису, в котором $q(y_1, \ldots, y_n) = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i y_i^2, \lambda_1 \ldots \lambda_m \neq 0$. Как выше, они определяются однозначно, если $m = n$ и $\lambda_i \neq \lambda_f$ при $i \neq j$ или если $m = n-1$ и $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. От координат $y_{m+1}, \ldots, y_n$ форма q не зависит, поэтому весь график получается из графика $\sum\limits_{i=1}^{m}$

$\{e_{m+1}, \ldots, e_n\}$. Иными словами, вдоль этого подпространства график «цилиндричен». Нетрудно убедиться, что оно является как раз ядром билинейной формы, полярной Кq, и тривиально тогда и только тогда, когда q невырождена.

Пусть q невырождена, т. е. $m = n$. Можно считать, что $\lambda_1, \ldots \ldots, \lambda_r > 0, \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_{r+s} < 0$, т. е. (r, s) - сигнатура формы q. Если форма q положительно определена, т. е. $r = n, s = 0$, то график имеет внд n-мерной чаши: все его сечения вертикальными плоскостями суть параболы, а все линии уровня $q = c > 0$ суть эллипсоиды с полуосями $\sqrt{c\lambda_i^{-1}}$, направленными вдоль главных осей. Уравнение такого эллипсоида имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\sqrt{c\lambda_i^{-1}}} \right)^2 = 1,$$

т. е. он получается из единичного шара растяжениями вдоль ортогональных направлений. В частности, он ограничен: целиком лежит в прямоугольном параллелепипеде $|x_i| \leqslant \sqrt{c\lambda_i^{-1}}, \quad i = 1, \ldots, n$. Ниже мы убедимся, что изучение вариации длин полуосей разных сечений эллипсоида (тоже эллипсоидов) дает полезную информацию о собственных значениях самосопряженных операторов.

При $r = 0, s = n$ получается купол. В обоих случаях график называется (n-мерным) эллиптическим параболоидом.

Промежуточные случаи $rs \neq 0$ приводят к многомерным гилерболическим паработондам разных сигнатур. Ключом к их геометрии является снова структура конуса асимптотических направлений C в $\mathbf{R}^n$, т. е. нулевого уровня формы $q(y_1, \ldots, y_n) = 0$.

Конусом он называется потому, что заметается свонми образующими: прямая, содержашая один вектор из C, целиком лежит в нем. Чтобы составить себе представление о базе этого конуса, рассмотрим его пересечение, скажем, с линейным многообразием $y_n = 1$:

$$-\lambda_n^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i y_i^2 = 1$$

Видно, что база является множеством уровня квадратичной формы от $n-1$ переменной. Простейший случай получается, когда она положительно определена: тогда это множество уровня есть эллипсоид, в частности, оно ограничено, и наш конус похож на «школьные» трехмерные конусы. Этот случай отвечает сигнатуре $(n-1, 1)$ или $(1, n-1)$; при $n = 4$ пространство (R^4, q) есть знаменитое пространство Минковского, которое будет подробно изучено ниже. Для других сигнатур C устроен заметно сложнее, ибо его база «уходит на бесконечность». Сечения графика q вертикальными плоскостями, проходящими через образующие C, совпадают с этими образующими. Для любых других плоскостей получаются либо «чаши», либо «купола»-асимптотические направления разделяют эти два случая. Поэтому конус C делит пространство $\mathbf{R}^n \backslash C$ на две части, сплошь заметаемые прямыми, вдоль которых q соответственно положнтельна пли отрицательна. Одна из этих областей называется совокупностью внутренних пол конуса C, другая - его внешностью. Геометрический смысл сигнатуры (r, s) грубо, но наглядно можно описать следующей фравой: график формы q по r мапрамлениям уходит вверх, а по s-вниз. Хотя мы работали все время с вещественными квадратичными формамн, те же результаты применимы к комплексным эрмитовым формам. Действительно, овеществление $\mathbf{C}^n$ есть $\mathbf{R}^{2n}$, и овеществление эрмитовой формы $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i\gamma} x_i \bar{x}_i, a_{ij} = \bar{a}_{ii}$, есть вещественная квадратичная форма. При овеществлении все размерности удваиваются: в частности, комплексная сигнатура (r, s) превращается в вещественную сигнатуру $(2r, 2s)$.

Опишем теперь вкратце и без доказательств два приложения этой теории в механике и топологии.

Колебания. Представнм себе сначала шарик, который может кататься в плоскости $\mathbf{R}^2$ под действием силы тяжести по желобу формы $x_2 = \lambda x_i$. Точка $(0, 0)$ во всех случаях является одним из возможных движений шарнка-положением равновесия. При $\lambda > 0$ это положение устойчиво: небольшое начальное отклонение шарика по положению или скорости приведет к его колебаниям около дна чаши. При $\lambda < 0$ оно неустойчиво: шарик свалится вдоль одной из двух ветвей параболы. При $\lambda = 0$ оно безразлично относительно отклонений по положению, но не по скорости: шарик может оставаться в любой точке прямой $x_2 = 0$ либо равномерно двигаться в любую сторону с начальным импульсом.

Оказывается, что математическое опнсание большого класса механических систсм вблизи их положеннй равновесия хорошо моделируется качественно многомерным обобщением этой картинки: движением шарика вблизи начала коорлинат по многомерной поверхности $x_{n+1} = q\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ под действием силы тяжести. Если q положитсльно определена, любое «малое» движение будет близко к суперпозиции малых колебаний вдоль главных осей формы q. Вдоль нулевого пространства формы возможен уход на бесконечность с постоянной скоростью. Вдоль направлений, где q отрицательна, возможно сваливание вниз. Наличне как нулевого пространства, так и отрицательной компоненты сигнатуры свидетельствует о неустойчивости положения равновесия " сомнительности приближения «малых колебаний». Важно, однако, что когда это равновесие устойчиво, малые изменения формы чаши, по кото рой катается шарик (или, более технически, потенциала нашей системы), не нарушают этой устойчивости.

Чтобы понять это, вернемся к сделанному в начале параграфа замеганию о приближенном представлени любой (скажем, трижды дифференцируемой) вешественной функцин $f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$. Вблизи нуля она имеет вид

$$f\left(x_1, \ldots, x_n\right) = f(0, \ldots, 0) + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i,i=1}^{n} b_{ij} x_i x_i + o\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)$$

где

$$a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0, \ldots, 0), \quad b_{ij} == \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0, \ldots, 0)$$

Вычтя из f ее значение в нуле и линейную часть, получаем, что остаток квацратичен с точностью до членов более высокого порядка малости. Это вычитание означает, что мы рассматриваем отклонение графика { ол касательной гиперплоскости к этому графику в нуле. Обозначив эту касательную плоскость через $\mathbf{R}^n$, обнаруживаем, что поведение f вблизи нуля определяется квадратичной формой сматрицей $\left(\frac{\partial^2 \hat{j}}{\partial x_i \partial x_j}(0, \ldots, 0)\right)$. по крайней мере,

когда та форла невирождена, - иначе нужно учитывать члены более высокого порядка малости. (Например, график $x_2 = x_1^3$ слева уходит вниз, а справа - вверх; графики квадратичных функций так себя не ведут Двумерный график $x_3 = x_1^2 + x_2^3$ - это «обезьянье седло», в одном криволинейном секторе $x_1^2 + x_2^3 < 0$ уходящее вниз - «для хвоста».)

Точка, в которой дифференциал $df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ обращается в нуль (т. е. $\frac{\partial l}{\partial x_i} = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$), называется критической тоикой функцин f (в наших примерах это было начало координат). Она называется невырожденной, если в ней квадратичная форма $\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j$ невырождена. Предшествующее обсуждение можно резюмировать в одной фразе: вблизи невырождегной критической точки график функции расположен относительно касательной сиперплоскости, как график ее квадратичной части. После этого можно доказать, что малое изменение функции (вместе с ее первыми и вторыми производиыми) может лишь слегка сдвинуть положение невырожденной критической точки, но не меняет сигнатуры соответствующей квадратичной формы и потому общего поведения графика (в малом).

Можно также доказать, что вблизи невырожденной критической точки можно сделать такую гладкую и гладко обратимую (хотя, вообще говоря, нелннейную) замену координат $y_i = y_i(x_1, \ldots, x_n), i = 1, \ldots, n$, что в новых координатах f будет задаваться в точности квадратичной функцией:

$$f(y_1, \ldots, y_n) = f(0,.,0) + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} y_i y_j.$$

Строгое изложение теории малых колебаний читатель сможет найти в книге В. Н. Арнольда «Математические методы классической механики» (М.: Наука, 1974, гл. 5).

Теория Морса. Представим себе в $(n+1)$-мерном евклидовом простраистве $\mathrm{R}^{n+1} n$-мерную гладкую ограниченную гиперповерхность V, вроде яйца или баранки (тора) в $\mathbf{R}^3$. Рассмотрим сечения V гиперплоскостями $x_{n+1} = \text{const}$. Предположим, что имеется только конечное число значений $c_1, \ldots, c_m$ таких, что гиперплоскости $x_{n+1} = c_i$ касаются V и притом в единственной точке $v_i \in V$. Вблизи этих точек касания V можно приоллизить графиком квадратичной формы $x_{n+1} = c_i + q_i(x_1 - x_1(v_i), \ldots \quad \ldots, x_n - x_n(v_i))$, если только V находится в достаточно обшем положении (например, бублик не должен лежать горизонтально). Оказывается, что важнейшие топологические свойства V, - в частности, так называемый гомотопический тип V-вполне определяются набором сигнатур фори q_i, т. е. указанием того, по скольким направлениям V вблизи v_i уходит вниз и по скольким вверх. Самое замечательное то, что, хотя информация о сигнатурах q_i чисто локальна, восстанавливаемый по ней гомотопический тип V есть глобальная характеристика формы V. Например, если имеются только две критические точки c_1 и c_2 с сигнатурами $(n, 0)$ и $(0, n)$, то V топологически устроена как n-мерная сфера.

Подробности читатель сможет найти в книге Дж. Милнора «Теория Морса» (М.: Мир, 1965).

Самосопряженные операторы и многомерные квадрики. Пусть теперь L - конечномерное евклидово или унитарное пространство, $f : L \to L$ - - амосопряженный оператор. Нас интсресуют свойства его спектра. Расположим собственные значения f в порядке убывания с учетом кратностей: $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ и выберем соответствующий ортонормированный базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Вернемся к точке зрения п. 4\$8, согласно которой задание f равносильно заданию новой симметричной или эрмитовой формы $(f(l_1), l_2)$ или же квадратичной формы $q_f(l) = (f(l), l)$ (в унитарном случае она квадратична на овеществленном пространстве). В базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$ она приобретает вид

$$q_f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \text{ или } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x_i|^2$$

и, таким образом, направления $\mathbf{R} e_i$ (или $\mathbf{C} e_i$) суть главнье оси q_f.

Простейшее экстремальное свойство собственных значений λ_i выражается следующим фактом.

Предложение.

Пусть $S = \{l \in L || l \mid = 1\}$-едининная сфера пространства L. Тогда

$$\lambda_1 = \max_{l \in S} q_f(l), \quad \lambda_n = \min_{l \in S} q_f(l).$$

Доказ ательство. Поскольку $|x_i|^2 \geqslant 0$ и $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$, очевидно

$$\lambda_n \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x_i|^2 \leqslant \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right).$$

На еднничной сфере левая часть есть λ_n, а правая λ_1. Эти значения достигаются на векторах $(0,\ldots,0,1)$ и $(1,0,\ldots,0)$ соответственно (координаты берутся в базисе $\{e_1,\ldots,e_n\}$, диагонализирующем f). 9. Следствие. Пусть L_k^-−линейная оболочка семейства $\{e_1,\ldots,e_k\}$, L_k^+−линейная оболочка семейства $\{e_k,\ldots,e_n\}$. Tozda

$$\lambda_k=\max\left\{q_f(l)|l\in S\cap L_k^+\right\}=\min\left\{q_f(l)|l\in S\cap L_k^-\right\}.$$

Доказательство. Действительно, в очевидных координатах ограничение q_f на L_k^+имеет вид $\sum\limits_{i=k}^{n}\lambda_l\left|x_i\right|^2$, а ограничение на $L_{\bar{k}}^-$−вид $\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_l\left|x_i\right|^2$

Следующее важное усиление этого результата, в котором вместо L_k^+рассматриваются любые линейные подпространства в L коразмерности $k-1$, называется теоремой Фишера-Куранта. Она дает «минимаксную» характеристику собственных значений дифференциальных операторов.

Теорема.

Для любого подпространства $L'\subset L$ коразмерности $k-1$ справедливы неравенства:

$$\lambda_k\leqslant\max\left\{q_f(l)|l\in S\cap L'\right\},\lambda_{n-k+1}\geqslant\min\left\{q_f(l)|l\in S\cap L'\right\}.$$

9ти оценки точны для некоторых L' (например, $L_k^+uL_{n-k+1}^-$соответственно), так что $\lambda_k=\min_{L'}\max\left\{q_f(l)|l\in S\cap L'\right\},\lambda_{n-k+1}=\max_{L'}\min\left\{q_f(l)|l\in S\cap L'\right\}$.

Доказ ательство. Поскольку

$$\dim L'+\dim L_k^-=(n-k+1)+k=n+1,$$

а $\dim\left(L'+L_{\vec{k}}\right)\leqslant\dim L=n$, из теоремы п. 3§5 ч. 1 следует, что $\dim\left(L'\cap L_k^-\right)\geqslant 1$. Возьмем вектор $l_{i,}\in L'\cap L_k\cap S$. Согласно следствию $9\lambda_k=\min\left\{q_f(l)|l\in S\cap L_k^-\right\}$, так что $\lambda_k\leqslant q_f\left(l_0\right)$ и тем более $\lambda_k\leqslant\max\left\{q_f(l)\right\}l\in S\cap L'\}$. Второе неравенство теоремы проще всего получить, применив первое неравенство к оператору - f и заметив, что знаки и порядок собственных значений при этом обращаются.

Следствие. Пусть $\dim L/L_0=1$ u p-оператор ортогонального проектирования $L\to L_0$. Обозначим через $\lambda_1'\geqslant\lambda_2'\geqslant\ldots\geqslant\lambda_{n-1}'$ собственные значения самосопряженного оператора pq: $L_0\to L_0$. Tozda

$$\lambda_1\geqslant\lambda_1'\geqslant\lambda_2\geqslant\lambda_2'\geqslant\ldots\geqslant\lambda_{n-1}'\geqslant\lambda_n$$

т. е. собственные значения операторов f и pf перемежаются.

Доказательство. Ограничение формы q_f на L_0 совпадает с $q_{pf}:(f(l),l)=(pf(l),l)$, если $l\in L_0$. Поэтому

$$\lambda_k'=\max\left\{q_{pf}(l)|l\in S\cap L'\right\}=\max\left\{q_f(l)|l\in S\cap L'\right\}$$

для подходяшего подпространства $L'\subset L_0$, имеющего коразмерность $k-1$ в L_0. Значит, в L оно имеет коразмерность k, откуда $\lambda_{k+1}\leqslant\lambda_k'$. Записав это неравенство для $-f$ вместо f, получим $-\lambda_k\leqslant-\lambda_k'$, т. е. $\lambda_k'\leqslant\lambda_k$. Это завершает доказательство.

Мы предоставляем читателю возможность убедиться в том, что следствие п. 11 имеет следующий простой геометрический смысл. Будем считать, что $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\ldots\geqslant\lambda_n>0$ и вместо функции $q_f(l)$ на S рассмотрим эллипсоид $\varepsilon: q_f(l)=1$. Тогда его сечение ε_0 подпространством L_0 также представляет собой эллипсоид, длины полуосей которого перемежаются с длинами полуосей эллипсоида 8. Вообразите себе, например, эллипсоид ε в $\mathbf{R}^3$ и его сечение плоскостью ε_0. Большая полуось ε_0 не превосходит большой полуоси ε («очевидно»), но не меньше, чем средняя полуось ε. Малая полуось ε_0 не меньше малой полуоси ε («очевидно»), но не больше средней полуоси. Контрольный вопрос: как получить в сеченни окружнность?

15.7.11 11. Three-dimensional Euclidean Space

Трехмерное евклидово пространство $\mathscr{E}$ является основной моделью физнческого пространства Ньютона и Галилея. Четырехмерное пространство Минковского $\mathscr{M}$, снабженное симметричной метрикой сигнатуры $(r_+, r_-) = (1, 3)$, является моделью пространства-времени релятивистской физики. Уже поэтому они заслуживают более пристального изучения. С математической точкіи зрения они также имеют особые свойства, существенные для понимания устройства мира, в котором мы живем: связь вращений в $\mathscr{E}$ с кватернионами и существование векторного произведения; геометрия векторов нулевой длины в $\mathscr{M}$.

Эти специальные свойства весьма удобно излагать на языке связи геометрии $\mathscr{E}$ и $\mathscr{M}$ с геометрией вспомогательного двумерного унитарного пространства , называемого пространсством спиноров. Эта связь имеет также глубокий физический смысл, ставший ясным лишь после появления квантовой механики. Мы избрали именно такое изложение.

Итак, фиксируем двумерное унитарное пространство $\mathscr{H}$. Обозначим через $\mathscr{E}$ вещественное линейное пространство самосопряженных операторов в с нулевым следом. аждый оператор $f \in \mathscr{E}$ имеет два вещественных собственных значения; они отличаются только знаком, ибо след, равный их сумме, обращается в нуль. Положим

$|f| = \sqrt{|\det f|}$ - положительное собственное значение f.

Предложение.

$\mathscr{E}$ с нормой | являвтся трехмерным евклидовым пространством.

Доказ ательство. В ортонормированном базисе операторы f представлены эрмитовымн матрицами вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & -a \end{pmatrix}, a \in \mathbf{R}, b \in \mathrm{C},$$

т. е. линейными комбинациями

$$\operatorname{Re} b \cdot \sigma_1 + \operatorname{Im} b \cdot \sigma_2 + a\sigma_3,$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ - матрицы Паули (см. упражнение 5 к \$4 ч. 1):

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Так как $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ линейно независимы над $\mathbf{R}, \dim_{\mathbf{R}} \mathscr{E} = 3$.

Положим теперь

$$(f, g) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(fg).$$

Это билинейное симметричное скалярное произведение, и если собственные значения f равны $\pm\lambda$, то

$$|f|^2 = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}\left(f^2\right) = \frac{1}{2}\left(\lambda^2 + \lambda^2\right) = |\det f|.$$

Очевидно, $\lambda^2 = 0$ тогда и только тогда, когда $f = 0$. Это завершает доказательство.

Назовем направлением в $\mathscr{E}$ множество векторов вида

$$\mathbf{R}_+ f = \{af | a > 0\},$$

где f-ненулевой вектор из $\mathscr{E}$. Иными словами, направление это полупрямая в $\mathscr{E}$. Направление, противоположное к $\mathbf{R}_+ f$, (??)- это $\mathbf{R}_+(-f)$.

Предложение.

Инеется взаимно однозначное соответствие между маправлениями в $\mathscr{E}$ и разложениями в прямую сумму дзух ортогональных одномерных подпространств $\mathscr{C}_+ \oplus \mathscr{H}_-$. Именно, направлению $\mathbf{R}_+ f$ отвечают $\mathscr{H}_+$- собственное подпространство $\mathscr{H}$ для положстельного собственного значения f, $\mathscr{H}_-$ то же для отрицательного собственного значения.

Доказ а те льство. $\mathscr{H}_+$и $\mathscr{H}_-$ортогональны по теореме п. 4 §7. Замена f на $af, a > 0$, не меняет $\mathscr{H}_+$н $\mathscr{C}_-$. Наоборот, если ортогональне разложение $\mathscr{C} = \mathscr{H}_+ \oplus \mathscr{H}_-$задано, то множество операторов $f \in \mathscr{E}$, растягивающих $\mathscr{H}$ в $\lambda > 0$ раз вдоль $\mathscr{H}_+$и в $-\lambda < 0$ раз вдоль $\mathscr{H}_-$, образует направление в $\mathscr{E}$.

Физическая интерпретация. Отождествим $\mathscr{E}$ с физнческим пространством, например, посредством выбора ортогональных координат в $\mathscr{E}$ и в пространстве. Отождествим $\mathscr{H}$ с пространством внутренних состояний квантовой системы «частица со спином 1/2, локализованная вблизи начала координат» (например, электрон). Выбрав направление $\mathbf{R}_+ f \subset \mathscr{E}$, включим магнитное поле в физическом пространстве вдоль этого направления. В этом поле система будет иметь два стационарных состояния, которые как раз и суть $\mathscr{H}_+$и $\mathscr{H}_-$.

Если направление $\mathbf{R}_+ f$ отвечает, скажем, верхней вертикальной полуоси избранной координатной системы в физическом пространстве («ось z $\gg$), то состояние $\mathscr{H}+$ называется состоянием «с проекцией спина $+1/2$ на ось z $\gg$ (или «спин вверх»), а $\mathscr{C}_-$ - соответственно состоянием «с проекцией спина $-1/2$ (или «спин вниз»), Такая традиционная терминология является реликтом доквантовых представлений о том, что наблюдаемая спнна отвечает классической наблюдаемой «момент количества движения»- характеристике внутреннего вращения системы и потому может быть сама представлена вектором в $\mathscr{E}$, который поэтому имеет проекции на оси координат в $\mathscr{E}$. Это совершенно неверно: состояния системы суть лучи в $\mathscr{H}$, а не векторы в $\mathscr{E}$. Расхождение с классикой становится еще более очевидным при рассмотрении систем со спином $s/2, s > 1$, для которых $\dim \mathscr{H} = s + 1$. Точное утверждение дается именно предложением п. 4.

Мы дали идеализированное описание классического эксперимента Штерна - Герлаха (1922). Вместо электронов в нем использовались ионы серебра, проходившие между полюсами электромагнита. Из-за неоднородности магнитного поля ионы, вышедшие в состояниях, близких к $\mathscr{C}_+$и $\mathscr{H}$ - соответственно, пространственно разделялись на два пучка, что и позволило макроскопически отождествить эти состояния. Серебро испарялось в электрической печке, а магнитное поле между полюсами играло роль объединения двух фильтров, пропускающих раздельно состояния $\mathscr{H}_+$и $\mathscr{H}_-$.

Продолжим теперь изучение евклидова пространства $\mathscr{E}$.

Предложение.

$(f, g) = 0$ тогда и только тогда, когда $fg+ +gf = 0$.

Доказательство. Имеем

$$(f, g) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(fg) = \frac{1}{4} \operatorname{Tr}(fg + gf) = \frac{1}{4} \operatorname{Tr} \left[(f+g)^2 - f^2 - g^2\right].$$

Но f^2 имеет единственное собственное значение $|f|^2$, поэтому все квадраты операторов из $\mathscr{E}$ являются скалярными, значит и $fg + gf$ - скалярный оператор, и он равен нулю тогда и только тогда, когда его след равен нулю.

Ортонормированные базисы в $\mathscr{E}$. Из доказательства предложения п. 5 ясно, что операторы $\{e_1, e_2, e_3\}$ образуют ортонормированный базис тогда и только тогда, когда

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = \mathrm{id}; e_i e_j + e_j e_i = 0, i \neq j.$$

В частности, если в выбран ортонормированный базис, то операторы, заданные в нем матрицами Паули $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, образуют ортонормированный базис в $\mathscr{E}$:

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 0, i \neq j.$$

Теперь мы можем объяснить математический смысл матриц Паули, доказав обратное утверждение.

Предложение.

Для каждого ортонормированного базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ пространства $\mathscr{E}$ существует ортонормированный базис $\{h_1, h_2\}$ пространства $\mathscr{H}$, обладающий тем свойством, что

$$A_{e_1} = \sigma_1, A_{e_2} = \sigma_2 \text{ или } -\sigma_2, A_{e_3} = \sigma_3,$$

где A_e-матрица оператора e в базисе $\{h_1, h_2\}$. Он определен с точностью до умножения на комплексное число, по модулю равное единице. Д ок а з ате льст в о. Собственные значения e_i суть \pm 1. Пусть $\mathscr{H} = \mathscr{C}_+ \oplus \mathscr{H}_-$, где e_3 действует на $\mathscr{H}_+$тождественно, а на $\mathscr{H}_-$- изменением знака. Выберем сначала векторы $h_1' \in \mathscr{H}_+$, $h_2' \in \mathscr{H}_-, |h_1'| = |h_2'| = 1$. Они определены с точностью до умножения на $e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}$; матрица e_3 в базисе $\{h_1', h_2'\}$ есть σ_3.

Далее,

$$e_1(h_1') = e_1 e_3(h_1') = -e_3 e_1(h_1'),$$

так что $e_1(h_1')$ есть ненулевой собственный вектор для e_3 с собственным значением -1. Поэтому $e_1(h_1') = \alpha h_2'$. Аналогично $e_1(h_2') = \beta h_1'$. Матрица e_1 в базисе $\{h_1', h_2'\}$ эрмитова, поэтому $\alpha = \bar{\beta}$. Наконец, $e_1^2 = \mathrm{id}$, поэтому $\alpha\beta = 1 = |\alpha|^2 = |\beta|^2$. Заменив $\{h_1', h_2'\}$ на $\{h_1, h_2\} = \{x h_1', y h_2'\}$, где $|x| = |y| = 1$, чтобы превратить матрицу e_1 в новом базисе в σ_1, получим

$$\begin{aligned} e_1(h_1) &= x e_1(h_1') = x\alpha h_2' = \alpha x y^{-1} h_2, \\ e_1(h_2) &= y e_1(h_2') = y\beta h_1' = \beta y x^{-1} h_1. \end{aligned}$$

Поэтому x, y должны удовлетворять еще условию $xy^{-1} = \alpha^{-1}$; тогда автоматически $\alpha x y^{-1} = \beta y x^{-1} = 1$. Можно положить, например, $x = 1, y = \alpha$.

Итак, в базисе $\{h_1, h_2\}$ имеем $A_{\varepsilon_s} = \sigma_3, A_{e_1} = \sigma_1$, и этот базис определен с точностью до умножения на скаляр, по модулю равный единице. Те же рассуждения, что для e_1, показывают, что в таком базисе A_{e_2} имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \bar{\gamma} & 0 \end{pmatrix}$, где $|\gamma|^2 = 1$. Кроме того, условие ортогональности $e_1 e_2 + e_2 e_1 = 0$ дает

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \bar{\gamma} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \bar{\gamma} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

т. е. $\gamma + \bar{\gamma} = 0$, откуда $\gamma = i$, либо $\gamma = -i$. Поэтому $A_{e_2} = \sigma_2$ или $A_{e2} = -\sigma_2$.

Следствие. Пространство $\mathscr{E}$ снабжено отмеченной ориентацией: ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ принадлежит к классу, отвечающему этой ориентации, тогда и только тогда, когда существует ортонормированный базис $\{h_1, h_2\}$ в $\mathscr{H}$, в котором $A_{e_a} = \sigma_a$, $a = 1, 2, 3$.

Доказательство. Мы должны проверить, что если $\{e_a\}$ в базисе $\{h_b\}$ и $\{\boldsymbol{e}_a'\}$ в базизе $\{h_b'\}$ задаются в точности матрицами Паули, то определитель матрицы перехода от $\{e_a\}$ к $\{e_a'\}$ положителен, или что имеется непрерывное движение, переводящее $\{e_a\}$ в $\{e_a'\}$. Мы постронм такое движение, показав, что $\{h_b\}$ переводится в $\{h_b'\}$ унитарным непрерывным движением: сушествует такая система унитарных операторов $f_t : \mathscr{C} \to \mathscr{H}$, зависяшая от параметра $t \in [0, 1]$, что $f_0 = \mathrm{id}, f_1(h_b) = h_b'$ и $\{f_t(h_1), f_t(h_2)\}$ образуют ортонормированный базнс //д дтя всех t, Тогда, обозначив через $\{g_t(e_1), g_t(e_2), g_t(e_3)\}$ ортонормированный базис $\mathscr{E}$, задающийся матрицами Паули в базисе $\{f_t(h_1), f_t(h_2)\}$, мы построим нужное нам движение в $\mathscr{E}$.

Пусть $\{h_1', h_2'\} = \{h_1, h_2\}$. Поскольку оба базиса ортонормированы, матрица перехода U должна быть унитарна. По следствию п. 7$8 ее можно представить в виде $\exp(iA)$, где A-эрмитова матрица. Тогда для всех $t \in A$ матрица tA эрмитова, а оператор $\exp(itA)$ унитарен, и мы можем положить

$$f_t\{h_1, h_2\} = \{h_1, h_2\} \exp(itA), 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Это завершает доказательство.

Операторы $\sigma_1/2, \sigma_2/2, \sigma_3/2$ в $\mathscr{H}$ называются наблюдаемыми проекций спина на соответствующие оси в $\mathscr{E}$: эту терминологию объясняет квантовомеханическая интерпретация из п. 5. Множитель 1/2 введен для того, чтобы их собственные значения были равны $\pm 1/2$.

Векторное произведение. Пусть $\{e_1, e_2, e_3\}$-ортонормированный базис в $\mathscr{E}$, принадлежащнй отмеченной ориентации. Векторное произведение в $\mathscr{E}$ определяется классической формулой $(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3) \times (y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3) =$

$$= (x_2 y_3 - x_3 y_2)\, e_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3)\, e_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\, e_3.$$

Замена базиса на другой, ориентированный так же, не меняет векторное произведение; если же новый базис ориентирован противоположно, то у него меняется знак.

Инвариантную конструкцию векторного произведения нетрудно дать в наших терминах. Вспомним, что антиэрмитовы операторы в $\mathscr{H}$ с нулевым следом образуют алгебру Ли su(2) (см. $4 ч. 1). Пространство $\mathscr{E}$ можно отождествить с этой алгеброй Ли, разделив каждый оператор из $\mathscr{E}$ на i. Поэтому на $\frac{1}{i}\mathscr{E}$ имеется структура алгебры Ли. Имеем

$$\left[\frac{1}{i}\sigma_a, \frac{1}{i}\sigma_b\right] = 2\varepsilon_{abc}\frac{1}{i}\sigma_c,$$

где $\varepsilon_{123} = 1$ и ε_{abc} кососимметричен по всем индексам, или

Поэтому

$$[\sigma_a, \sigma_b] = 2i\varepsilon_{abc}\sigma_c.$$

$$\left[\sum_{a=1}^{3} x_a \sigma_a, \sum_{b=1}^{3} y_b \sigma_b\right] = 2i \left(\sum_{a=1}^{3} x_a \sigma_a\right) \times \left(\sum_{b=1}^{3} x_b \sigma_b\right),$$

так что векторное произведение с точностью до тривиального множителя есть просто коммутатор операторов. Это позволяет без вычислений установить классические тождества

$$\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x};$$
$$\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) + \vec{z} \times (\vec{x} \times \vec{y}) + \vec{y} \times (\vec{z} \times \vec{x}) = 0.$$

Есть еще один способ ввести векторное произведение, одновременно связав его со скалярным произведением и кватернионами.

Кватернионы. Как и коммутирование, умножение операторов из $\mathscr{E}$, вообще говоря, выводит нас за пределы $\mathscr{E}$: одновременно нарушается эрмитовость и условие обращения следа в нуль. На самом деле произведение операторов из $\mathscr{E}$ лежит в Rid $+i\mathscr{E}$, причем «вещественная часть» есть как раз скалярное произведение, а «мнимая»-векторное. Действительно,

$$\sigma_a \sigma_b = i\varepsilon_{abc}\sigma_c \text{ при } a \neq b, \{a, b, c\} = \{1, 2, 3\},$$
$$\sigma_a^2 = \sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a = 1, 2, 3,$$

ТаК чТо

$$\left(\sum_{a=1}^{3} x_a \sigma_a\right)\left(\sum_{b=1}^{3} y_b \sigma_b\right) = \left(\sum_{a=1}^{3} x_a y_a\right)\sigma_0 + i\left(\sum_{a=1}^{3} x_a \sigma_a\right) \times \left(\sum_{b=1}^{3} y_b \sigma_b\right),$$

или, как пишут физики,

$$(\vec{x} \cdot \vec{\sigma})(\vec{y} \cdot \vec{\sigma}) = (\vec{x} \cdot \vec{y})\sigma_0 + i\overrightarrow{(x)} \times \vec{y}\Big) \cdot \vec{\sigma}, \vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3).$$

Отсюда видно, что вещественное пространство операторов Rid $+i\mathscr{E}$ замкнуто относительно умножения. Его базис составляют в классических обозначениях элементы

$$\mathbf{1} = \sigma_0, \mathbf{i} = -i\sigma_1, \mathbf{j} = -i\sigma_2, \mathbf{k} = -i\sigma_3$$

с таблицей умножения

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -\mathbf{1}, \quad \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k},$$
$$\mathrm{ki} = -\mathrm{ik} = \mathrm{j}; \quad \mathrm{jk} = -\mathrm{kj} = \mathrm{l},$$

Иными словами, мы получаем тело кватернцонов в одном из традиционных матричных представлений (ср. «Введение в алгебру», гл. 9, §4).

Гомоморфизм $\mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathrm{SO}(3)$. Фиксируем ортонормированный базис $\{h_1, h_2\}$ в $\mathscr{C}$ и соответствующий ему ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ в $\mathscr{E}$, для которого $A_{e_i} = \sigma_i$. Любой унитарный оператор $U : \mathscr{H} \rightarrow \mathscr{H}$ переводит $\{h_1, h_2\}$ в $\{h_1', h_2'\}$, этому последнему базису отвечает базис $\{e_1', e_2', e_3'\}$, и имеется ортогональный оператор $s(U) : \mathscr{E} \rightarrow \mathscr{E}$, который переводит $\{e_i\}$ в $\{e_i'\}$. По следствию п. $8 s(U) \in \mathrm{SO}(3)$, ибо определитель $s(U)$ положителен.

Реализовав $\mathscr{E}$ матрнцами в базисе $\{h_1, h_2\}$, мы можем представить действие $s(U)$ на $\mathscr{E}$ простой формулой:

$$s(U)(A) = UAU^{-1}$$

для любых $A \in \mathscr{E}$. Действительно, это частный случай общей формулы замены матрицы оператора при замене базиса. Мы можем теперь доказать следующий важный результат, 12. Теорема. Отображение s, ограниченное на $\mathrm{SU}(2)$, определяет сюрдективный гомоморфизм групп $\mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathrm{SO}(3)$ с ядром $\{\pm E_2\}$

Дока а ательство Из формулы $s(U)(A) = UAU - 1$ сразу видно, что $s(E) = \mathrm{id}$ и $s(UV) = s(U)s(V)$, так что s является гомоморфизмом групп. Его сюръективность проверяется так.

Выберем элемент $g \in \mathrm{SO}(3)$ и пусть g переводит базис $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ в $\mathscr{E}$ в новый базис $(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')$. Построим по нему базис $\{h_1', h_2'\}$ в $\mathscr{G}$, в котором операторы σ_i' задаются матрицами σ_i. По предложению п. $7 \{h_1', h_2'\}$ существует с точностью до того, что матрица σ_2', возможно, равна $-\sigma_2$, а не σ_2. На самом деле эта возможность исключена по следствию п. 8, ибо $g \in \mathrm{SO}(3)$ сохраняет ориентацию $\mathscr{E}$. Оператор U, переводящий $\{h_1, h_2\}$ в $\{h_1', h_2'\}$, удовлетворяет уловию $s(U) = g$. Правда, он может принадлежать лишь $\mathrm{U}(2)$, а не $\mathrm{SU}(2)$. Если $\det U = e^{i\varphi}$, то $e^{-i\varphi/2}U \in \mathrm{SU}(2)$. Матрица $e^{-i\varphi/2}U$ переводит $\{h_1, h_2\}$ в $\left\{e^{-i\varphi/2}h_1', e^{-i\oplus/2}h_2'\right\}$, а этому базису в $\mathscr{H}$ по-прежнему отвечает базис $\{\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'\}$ в $\mathscr{E}$. Следовательно, также $s\left(e^{-i\varphi/2}U\right) = g$, н мы получаем, что $s : \mathrm{SU}(2) \rightarrow \mathrm{SO}(3)$ сюръективен.

Ядро гомоморфизма $s : \mathrm{U}(2) \rightarrow \mathrm{SO}(3)$ состоит только из скалярных операторов $\{e^{i\varphi}\mathrm{id}\}$: это следует из предложения п. 7, согласно которому базис $\{h_1', h_2'\}$ восстанавливается по $\{e_1', e_2', e_3'\}$ как раз с точностью до умножения на $e^{i\varphi}$. Пересечение группы $\{e^{i\varphi}\mathrm{id}\}$ с SU (2) равно в точности $\{\pm\mathrm{id}\}$, что и завершает доказательство.

Смысл построенного гомоморфизма выясняется в топологии: группа $\mathrm{SU}(2)$ односвязна, т. е. любую замкнутую крнвую на ней можно непрерывным движением стянуть в точку, тогда как для $\mathrm{SO}(3)$ это неверно. Таким образом, $\mathrm{SU}(2)$ является универсальным накрытием группы $\mathrm{SO}(3)$.

Мы воспользуемся доказанной теоремой для того, чтобы разобраться в структуре группы $\mathrm{SO}(3)$, играя на том, что $\mathrm{SU}(2)$ устроена проще. Здесь уместно процитировать Р. Фейнмана:

«Не правда ли, странно, что, живя в трех измерениях, мы все же с трудом воспринимаем, что произойдет, если сперва повернуться так, а потом еще как-нибудь. Вероятно, если бы мы были птицами или рыбами и если бы мы на собственном опыте знали, что бывает, когда все время крутишь разные сальто в пространстве, нам было бы легче воспринимать подобные вещи». (Ф ейн м ан *P*., Л е й тон Р. С энд с *M*. Фейнмановские лекции по физике, вып. 8, гл. 4. - М.: Мир, 1978, с. 101).

Структура $\mathrm{SU}(2)$. Прежде всего, элементы $\mathrm{SU}(2)$ суть 2×2-матрицы с комплексными элементами, для которых $U^t = \mathbb{O}$ и $\det U = 1$. Отсюда сразу же следует, что

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{array} \right) ||a\Big|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

Множество пар $\left\{ (a, b)||a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$ в $\mathbf{C}^2$ превращается В сферу единичного радиуса в овеществлении $\mathbf{C}^2$, т. е. $\mathbf{R}^4$:

$$(\mathrm{Re}\, a)^2 + (\mathrm{Im}\, a)^2 + (\mathrm{Re}\, b)^2 + (\mathrm{Im}\, b)^2 = 1.$$

Итак, группа SU(2) топологически устроена как трехмерная сфера в четырехмерном евклидовом пространстве.

Теперь напишем некоторую систему образующих группы SU(2), вдохновляясь следствием п. 7§8, согласно которому отображение exp: $\mathbf{u}(2) \to \mathrm{U}(2)$ сюръективно. Непосредственное вычисление экспоненты от трех образующих пространства su(2) дает:

$$\exp\left(\frac{1}{2}it\sigma_1\right) = \begin{pmatrix} \cos\frac{t}{2} & i\sin\frac{t}{2} \\ i\sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2} \end{pmatrix},$$

$$\exp\left(\frac{1}{2}it\sigma_2\right) = \begin{pmatrix} \cos\frac{t}{2} & \sin\frac{t}{2} \\ -\sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2} \end{pmatrix},$$

$$\exp\left(\frac{1}{2}it\sigma_3\right) = \begin{pmatrix} e^{it/2} & 0 \\ 0 & e^{-it/2} \end{pmatrix}.$$

Любой элемент $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}(2)$, для которого $ab \neq 0$, можно представить в виде $\exp\left(\frac{1}{2}i\varphi\sigma_3\right)\exp\left(\frac{1}{2}i\theta\sigma_1\right)\exp\left(\frac{1}{2}i\psi\sigma_3\right) =$

$$= \begin{vmatrix} \cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}} & i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\varphi-\psi}{2}} \\ i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\psi-\varphi}{2}} & \cos\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi+\psi}{2}} \end{vmatrix},$$

где $0 \leqslant \varphi < 2\pi, 0 < \theta < \pi, -2\pi \leqslant \psi < 2\pi$. Для этого цостаточно положить $|a| = \cos\frac{\theta}{2}, \arg a = \frac{\varphi+\psi}{2}, \arg b = \frac{\varphi-\psi+\pi}{2}$. (Элементы SU(2) с $b = 0$, очевидно, имеют вид $\exp\left(\frac{1}{2}i\varphi\sigma_3\right)$; мы оставляем читателю возможность разобраться с элементами, для которых $a = 0$.)

Углы φ, θ, ψ называются углами Эйлера в группе SU(2).

Структура SO(3). Мы отождествили SU(2) топологически с трехмерной сферой. При гомоморфизме s : $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$ в одну точику SO (3) переходят пары элементов $\pm U \in \mathrm{SU}(2)$. На сфере они образуют концы одного из диаметров. Поэтому SO(3) топологически есть результат склеивания трехмерной сферы по парам противоположных точек. С другой стороны, пары противоположных точек сферы находятся во взаимно однозначном соответствии с прямыми в четырехмерном вещественном пространстве, соединяющими точки пары. Множество таких прямых называется трех- мерным вещественным проективным пространством и обозначается иногда RP^3; позже мы изучим проективные пространства подробнее. Таким образом, SO(3) топологически эквивалентна RP^3.

Посмотрим теперь, во что гомоморфизм s переводит образующие SU(2), описанные в предыдущем пункте. В стандартном базисе $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ пространства $\mathscr{E}$ имеем

$$\exp\left(\frac{1}{2}it\sigma_1\right)\sigma_1\exp\left(-\frac{1}{2}it\sigma_1\right) = \sigma_1,$$

$$\exp\left(\frac{1}{2}it\sigma_1\right)\sigma_2\exp\left(-\frac{1}{2}it\sigma_1\right) = (\cos t)\sigma_2 - (\sin t)\sigma_3,$$

$$\exp\left(\frac{1}{2}it\sigma_1\right)\sigma_3\exp\left(-\frac{1}{2}it\sigma_1\right) = (\sin t)\sigma_2 + (\cos t)\sigma_3.$$

Поэтому

$$s\left(\exp\left(\frac{1}{2}it\sigma_1\right)\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

является вращением $\mathscr{E}$ на угол t вокруг оси $\mathbf{R}\sigma_1$. Совершенно аналогично проверяется, что $s\left(\exp\left(\frac{1}{2}it\sigma_k\right)\right)$ есть вращение $\mathscr{E}$ на угол t вокруг оси σ_k также для $k = 2, 3$. В частности, любое вращение из SO(3) разлагается в произведение трех вращений относительно $\sigma_3, \sigma_1, \sigma_3$ на углы Эйлера ψ, θ, φ, причем ψ можно считать меняющимся от 0 до 2π.

УПРАЖНЕНИЯ

Доказать тождества

$$(\vec{x}\times\vec{y},\vec{z}) = (\vec{x},\vec{y}\times\vec{z}),$$
$$(\vec{x}\times\vec{y})\times\vec{z} - \vec{x}\times(\vec{y}\times\vec{z}) = (\vec{x},\vec{y})\vec{z} - \vec{x}(\vec{y},\vec{z}).$$

(Указание. Воспользоваться ассоциативностью умноженя в алгебре кватернноНОВ.)

В трехмерном евклидовом пространстве выделены цве оси z и z', образующие между собой угол φ. Пучок электронов с проекцней спнна $+1/2$ на ось z подается на фильтр, пропускающий лишь электроны с проекцией спина $+1/2$ на ось z'. Показать, что доля прошедших через него электронов будет равна $\cos^2\frac{\varphi}{2}$.

15.7.12 12. Minkowski Space

(!!! this should be rewritten!!!!! authors didn't think much about field theory, so some statements are not good)

Пространством Минковского $\mathscr{M}$ называется четырехмерное вещественное линейное пространство с невырожденной симметричной метрикой сигнатуры $(1,3)$ (иногда работают с сигнатурой $(3,1)$). Прежде чем приступить к математическому изучению этого пространства, укажем основные принципы его физической интерпретации, лежащне в основе специальной теории относительности Эйнштейна. а) Точки. Точка (или вектор) пространства $\mathscr{M}$ есть идеализация физического события, локализованного в пространстве и времени, типа «вспышки», «излучения фотона атомом», «столкновения двух элементарных частиц» и т. п. Начало координат $\mathscr{M}$ следует представлять себе как событие, происходящее «здесь и сейчас» для некоторого наблюдателя; оно фиксирует одновременно начало отсчета времени и начало отсчета пространственных координат.

б) Единицы измерения. В классической физнке длины и времена измеряются в разных единицах. Поскольку $\mathscr{M}$ есть модель пространства-времени, в специальной теории относительности должен быть способ пересчета пространственных единиц во временные и наоборот. Принятый способ эквивалентен принципу «постоянства скорости света с»: он состоит в том, что выбранной единице времени t_0 ставится в соответствие единица длины $l_0 = ct_0$ - расстояние, проходимое светом за время t_0 (например, «световая секунда»). Одна из единиц l_0 или t_0 считается далее выбранной раз навсегда; после того как вторая зафиксирована условием $l_0 = ct_0$, скорость света в этих единицах становится равной 1.

в) Пространственно-временной интервал. Если $l_1, l_2 \in \mathscr{M}$ - две точки пространства Минковского, скалярное произведение $(l_1 - l_2,\ \ l_1 - l_2)$ называется квадратом пространственно-временного интервала между ними. Этот квадрат может быть положительным, нулевым или отрицательным; в физических терминах соответственно временизодобным, светоподобным или пространственноподобным. (Некоторое объяснение этих терминов будет дано ниже.) Если $l_2 = 0$, эти же термины применяются к вектору l_1 в зависимости от знака (l_1, l_1).

г) Мировые линии инерциальных наблюдателей. Если на прямой $L \subset \mathscr{M}$ хоть один вектор временизодобен, то и все векторы временизодобны. Такие прямые называются мировыми линиями инерциальных наблюдателей. Хорошим приближением к отрезку такой линии может служить множество событий, происходящих в космическом корабле, который движется свободно (с выключенными двигателями) вдали от небесных тел (учет их тяготения требует изменения математической схемы описания пространствавремени и перехода к «искривленным» моделям общей теории относительности). Заметим, что мы ввели пока в рассмотрение только мировые линии, исходящие из начала координат. Инерциальный наблюдатель, не бывший «здесь и сейчас», движется по некоторому сдвигу $l + L$ временизодобной прямой L. Пусть l_1, l_2 - две точки на мировой линин инерциального наблюдателя. Тогда $(l_1 - l_2, l_1 - l_2) > 0$, и интервал $|l_1 - l_2| = (l_1 - l_2, l_1 - l_2)^{1/2}$ есть собственное время того наблюдателя, протекшее между событиями l_1, l_2 и измеренное по показаниям движущихся вместе с ним часов. Мировая линия инерциального наблюдателя есть его собственная «река времени».

Физический факт направленности времени (из прошлого в будущее) математически выражается заданием ориентации каждой времениподобной прямой, так что длина $|l|$ времениподобного вектора может быть снабжена знаком, отличающим векторы, направленные в будущее и в прошлое. Ниже мы увидим, что имеет смысл представление о согласованности этих ориентаций, т. е. о существовании общего направления времени - но не самих времен! - для разных инерциальных наблюдателей.

д) Физическое пространство инерциального наблюдателя. Линейное подмногообразие

$$\mathscr{B}_l = l + L^{\perp} \subset \mathscr{M}$$

интерпретируется как множество точек «мгновенного физического пространства» для инерциального наблюдателя, находящегося в точке l своей мировой линии L. Ортогональное дополнение берется, разумеется, относительно метрики Минковского в $\mathscr{M}$. Нетрудно убедиться, что $\mathscr{M} = L \oplus L^{\perp}$ и что на $L^{\perp}$ индуцируется структура трехмерного евклидова пространства (только с отрицательно определенной метрикой вместо обычной положительно определенной). Все события, отвечающие точкам $L\ \perp$, интерпретируются наблюдателем как происходящие «сейчас»; для другого наблюдателя они не будут одновременными, ибо $L_1^{\perp} \nRightarrow L_2^{\frac{1}{2}}$ при $L_1 \neq L_2$.

е) Ннерциальные системы координат. Пусть L - времениподобная прямая с ориентацией, e_0 - положительно ориентированный вектор на ней длины единица, $\{e_1, e_2, e_3\}$-ортонормированный базис в $L^{\perp} : (e_i, e_i) = -1$ для $i = 1, 2, 3$. Система координат в $\mathscr{M}$, отвечающая базису $\{e_0, \ldots, e_3\}$, называется инерцциалной системой. В ней

$$\left(\sum_{i=0}^{3} x_i e_i, \sum_{i=0}^{3} y_i e_i \right) = x_0 y_0 - \sum_{i=1}^{3} x_i y_i.$$

Поскольку $x_0 = ct_0$, где t_0 - собственное время, пространственновременной интервал от начала до точки $\sum\limits_{i=0}^{3} x_i e_i$ равен $\left(c^2 t_0^2 - \sum\limits_{i=1}^{3} x_i^2 \right)^{1/2}$.

Каждая инерциальная система координат в $\mathscr{M}$ определяет отождествление $\mathscr{M}$ с коордннатным пространством Минковского $\left(\mathbf{R}^4, x_0^2 - \sum\limits_{i=1}^{3} x_i^2 \right)$. Нзометрии $\mathscr{M}$ (или координатного пространства) образуют группу Лоренца; изометрии, сохраняющие ориентацию во времени, - ее ортохронную подгруппу.

ж) Световой конус. Множество точек $l \in \mathscr{M}$ с $(l, l) = 0$ называется световым конусом C (начала координат). В любой инерциальной системе координат C задается уравнением

$$x_0^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2$$

При $x_0 > 0$ точка (x_0, x_1, x_2, x_3) на световом конусе отделена от положения наблюдателя $(x_0, 0, 0, 0)$ пространственноподобным интервалом с квадратом $-\sum\limits_{i=1}^{3} x_i^2 = -x_0^2$, т. е. находится на расстоянии, которое за время x_0 пройдет ввант света, выпущенный жз начала координат в начальный момент времени. (При $x_0 < 0$ множество таких точек отвечает вспышкам, которые произошли в момент собственного времени x_0 и могли наблюдаться в точке начала отсчета: «приходящее излучение».) Соответственно «нулевые прямые», пеликом лежащие в C, - это мировые линии частиц, испущенных из начала координат и летящих со скоростью света, например, фотонов. Чнтатель может увидеть базу «приходящей полы» светового конуса, выглянув в окно, - это небесная сфера.

Прямые в $\mathscr{M}$, состоящие из векторов с отрицательным квадратом длины, не имеют физической интерпретации. Они должны были бы отвечать мировым линиям частиц, летящих быстрее света, "гипотетических «тахионов», не обнаруженных экспериментально.

Перейдем теперь к математическому изучению $\mathscr{M}$.

Реализация $\mathscr{M}$ как пространства метрик. Как в \$9, фиксируем двумерное комплексное пространство $\mathscr{G}$ и рассмотрим на нем множество $\mathscr{M}$ ярмитово симметричных скалярных произведений. Оно является вещественным линейным пространством. Если выбран базис $\{h_1, h_2\}$ в $\mathscr{H}$, то матрицы Грама этих метрик будут всевозможными эрмитовыми 2×2 матрицами. Поставим в соответствие метрике $l \in \mathscr{M}$ определитель ее матрицы Грама G, который будем обозначать $\det\, l$. Переход к. базису $\{h'_1, h'_2\} = \{h_2, h_2\} V$ приведет к замене G на $G' = V^t G \bar{V}$, $\det G' = |\det V|^2 \det G$. В частности, если $V \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$, то $\det G = \det G'$. Поэтому вычисление $\det l$ в любом из базнсов $\mathscr{H}$, лежащих в одном классе относительно действия $\mathrm{SL}(2, \mathrm{C})$, приведет к одному и тому же результату. Впредь мы фиксируем такой класс базисов, и все det будем вычислять относительно него. Замена класса только умножает det на положительный скаляр.

Предложение.

а) $\mathscr{M}$ является четырехмерным вецественным пространством.

б) На$\mathscr{M}$ имеется единственная симметричная метрика. (l, m), для которой $(l, l) = \det l$. Ее сигнатура равна $(1, 3)$, так что $\mathscr{M}$ представляет собой пространство Минковского.

Доказательство. а) Пространство эрмитовых 2×2-матрнц имеет базис $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2; \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, где $\sigma_i, i \geqslant 1$, - матрицы Паули. Поэтому $\dim \mathscr{M} = 4$.

б) Покажем, что в матричной реализацин $\mathscr{M}$ функция $\det\, l$ представляет собой квадратичную форму, полярнзация которой имеет вид

$$(l, m) = \frac{1}{2} (\operatorname{Tr} l \operatorname{Tr} m - \operatorname{Tr} lm)$$

явно симметричный и билинейный. В самом деле, если λ, μ - собственные значения l, то $\det l = \lambda\mu, \operatorname{Tr} l = \lambda + \mu, \operatorname{Tr} l^2 = \lambda^2 + \mu^2$, так чТО

$$\lambda\mu = \det l = \frac{1}{2}\left((\lambda + \mu)^2 - \lambda^2 - \mu^2\right) = \frac{1}{2}\left((\operatorname{Tr} l)^2 - \operatorname{Tr} l^2\right) = (l, l).$$

Теперь очевидно, что $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ является ортонормированным базисом $\mathscr{M}$ с матрицей Грама $\operatorname{diag}(1, -1, -1, -1)$, так что сигнатура нашей метрики равна $(1, 3)$. Это завершает доказательство.

Следствие. Пусть $L \subset \mathscr{M}$ - времениподобная прямая. Тогда $L^\perp$ с метрикой- (l, m) является трехмерным евклидовым пространством, $u\mathscr{M} = L \oplus L^\perp$.

Доказательство. Утверждение $\mathscr{M} = L \oplus L^\perp$ следует из предложения п. 2§3, ибо времениподобные прямые, очевидно, невырождены. Так как сигнатура метрики Минковского на $\mathscr{M}$ есть $(1, 3)$, а на $L^\perp - (1, 0)$, на $L^\perp$ она должна быть $(0, 3)$, что завершает доказательство.

Перейдем теперь к изучению геометрического смысла скалярных произведений. Неопределенность метрики Минковского приводит к замечательным отличиям от евклидовой ситуации, которые имеют важный физический смысл. Самые яркие факты связаны с тем, что неравенство Коши - Буняковского - Шварца для времениподобных векторов оказывается обращенным в другую сторону.

Предложение.

Пусть $(l_1, l_1) > 0, (l_2, l_2) > 0, l_i \equiv \mathscr{M}$. Тогда

$$(l_1, l_2)^2 \geqslant (l_1, l_1)(l_2, l_2).$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда l_1, l_2 линейно зависимы.

Доказательство. Прежде всего проверим, что квадратный трехчлен $(tl_1 + l_2, tl_1 + l_2)$ всегда нмеет вещественный корень t_0. В матричной реализации $\mathscr{A}$ условие $(l_2, l_2) > 0$ означает, что $\det l_2 > 0$, т. е. что l_2 имеет вещественные характеристические корни одного знака, скажем, ε_2(+1 или -1). Аналогично, пусть ε_1 - знак собственных значений

l_1. Тогда при $t \to -(\varepsilon_1\varepsilon_2)\infty$ матрица $tl_1 + l_2$ нмеет собственные значения, примерно пропорциональные собственным значениям l_1 (нбо. $l_1 + t^{-1}l_2$ стремится $\mathrm{k}l_1$), и их знак будет $-\varepsilon_2$, а при $t = 0$ матрица $0l_1 + l_2 = l_2$ имеет собственные значения знака ε_2. Следовательно, при изменении t от 0 до $-(\varepsilon_1\varepsilon_2)\infty$ собственные значения $tl_1 + l_2$ проходят через нуль, и $\det(tl_1 + l_2)$ обращается в нуль. Значит, дискриминант этого трехчлена неотрицателен, так что

$$(l_1, l_2)^2 \geqslant (l_1, l_1)(l_2, l_2)$$

Если он равен нулю, то некоторое значение $t_0 \in \mathrm{R}$ является двукратным корнем, и матрица $t_0 l_1 + l_2$, имея два нулевых собственных значения и будучи диагонализируемой (она эрмитова!), равна нулю. Поэтому l_1 и l_2 линейно зависимы.

Следствие («неравенство треугольника в обратную сторону»). Если l_1, l_2 вреленидодобна $u(l_1, l_2) \geqslant 0$, то $l_1 + l_2$ временидодобен u

$$|l_1 + l_2| \geqslant |l_1| + |l_2|$$

(где $|l| = (l, l)^{1/2}$), и равенство достигается тогда и только тогда, когда l_1, l_2 линейно зависимь.

Док аз ательство.

$$|l_1 + l_2|^2 = |l_1|^2 + 2(l_1, l_2) + |l_2|^2 \geqslant$$
$$\geqslant |l_1|^2 + 2|l_1||l_2| + |l_2|^2 = (|l_1| + |l_2|)^2.$$

Равенство достигается лишь при $(l_1, l_2) = |l_1||l_2|$.

Дадим теперь физические интерпретации этих фактов.

«Парадокс близнецов». Временидодобные векторы l_1, l_2 с $(l_1, l_2) \geqslant 0$ назовем одинаково временно ориентированными. Из предложения п. 5 видно, что для них $(l_1, l_2) > 0$. Вообразим двух близнецов-наблюдателей: один инерциален и движется по своей мировой линни от точки 0 до точки $l_1 + l_2$, другой доходит до той же точки от начала отсчета, двигаясь сначала инерциально от 0 до l_1 и затем от l_1 до $l_1 + l_2$: вблизи нуля и вблизи l_1 он включает двигатели своего космического корабля, чтобы сначала улететь от брата, а затем снова вернутбіся к нему. Согласно следствию п. 6 собственное время, протекшее для путешествующего брата, будет строго меньше времени, протекшего по часам домоседа.

Множитель Лоренца. Если l_1 и l_2 временидодобны и одинаково временно ориентированы, то по предложению п. $5\frac{(l_1,l_2)}{|l_1||l_2|} \geqslant \geqslant 1$, и мы не можем интерпретировать эту величину как косинус угла. Чтобы понять, что она собой представляет, снова прибегнем к физической интерпретации.

Пусть $|l_1| = 1, |l_2| = 1$; в частности; инерциальный наблюдатель l_1 прожил единицу собственного времени с момента начала отсчета. В точке i_1 физическое пространство одновременных событий для него есть $l_1 + (\mathbf{R}l_1)^{\perp}$. Мировая линия наблюдателя $\mathbf{R}l_2$ пересекает это пространство в точке xl_2, где x находится из условия

$$(xl_2 - l_1, l_1) = 0,$$

т. е. $x = (l_1, l_2)^{-1}$. Расстояние от l_1 до xl_2 пространственноподобно: для наблюдателя $\mathbf{R}l_1$ - это расстояние, на которое $\mathbf{R}l_2$ удалился от него за единицу времени, т. е. относительная скорость $\mathbf{R}l_2$. Она равна (учесть, что у метрики в $(\mathbf{R}l_1)^{\perp}$ следует изменить Знак!)

$$v = [-(xl_2 - l_1, xl_2 - l_1)]^{1/2} = [-(xl_2 - l_1, xl_2)]^{1/2} =$$
$$= \left[-x^2(l_2, l_2) + x(l_1, l_2)\right]^{1/2} = \left[-(l_1, l_2)^{-2} + 1\right]^{1/2},$$

откуда

$$(l_1, l_2) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}.$$

то знаменитый мноитель Лоренциа; часто его пишут в виде $\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$, явно указывая, что скорости измеряются по отношению к скорости света. В частности,

$$x = \frac{1}{(l_1, l_2)} = \sqrt{1-v^2}.$$

т. е. в момент собственного времени единица для первого наблюдателя второй наблюдатель находится в его физическом пространстве, когда часы второго наблюдателя показывают $\sqrt{1-v^2}$. Это-количественное выражение эффекта «сокращения времени» для движущегося наблюдателя, качественно описанное в предыдущем пункте.

Евклидовы углы. В пространстве $(\mathbf{R}l_0)^{\perp}$, где l_0 - временителодобный вектор, геометрия евклидова, и там скалярное произведение имеет обычный смысл. Пусть l_1, l_2 - еще два временитодобных вектора с той же ориентацией. Мы можем спроектировать их на $(\mathbf{R}l_0)^{\perp}$ и вычислить косинус угла между проекциями. Предоставляем читателю самостоятельно убеднться в том, что для наблюдателя $\mathbf{R}l_0$ это-угол между направлениями отлета от него наблюдателей $\mathbf{R}l_1$ и $\mathbf{R}l_2$ в его физическом пространстве. Абсолютного значения этот угол не имеет; другой наблюдатель $\mathbf{R}l_0'$ увидит его другим.

Четыре ориентации пространства Минковского. Пусть $\{e_i\}$, $\{e_i'\}, i = 0, \ldots, 3$, - два ортонормированных базнса в $\mathscr{M}$: $(e_0, e_0) = (e_i', e_0') = 1, (e_i, e_i) = (e_i', e_i') = -1$ при $i = 1, \ldots, 3$. По аналогии с прежними определениями назовем их одинаково ориентированными, если один переводится в другой непрерывной системой изометрий $f_t : \mathscr{M} \to \mathscr{M}, 0 \leqslant t \leqslant 1, f_0 = \mathrm{id}, f_1(e_i) = e_i'$. Два условия одинаковой ориентированности, очевидно, необходимы:

а) $(e_0, e_0') > 0$. Действительно, $(e_0, f_t(e_0))^2 \geqslant 1$ по предложению п. 5, так что знак $(e_0, f_t(e_0))$ не может меняться при изменении t, а $(e_0, f_0(e_0)) = 1$. Выше мы назвали e_0 и e_0' с таким свойством одинаково временно ориентированными.

б) Определитель отображения ортогональной проекции $\sum\limits_{i=1}^{3} \mathbf{R}\boldsymbol{e}_i \;\to\;\to\; \sum\limits_{i=1}^{3} \mathrm{R}e_i'$, записанного в базисах $\{e_i\}$ или $\{e_i'\}$, положителен.

Действительно, проекция $\sum\limits_{i=1}^{3} \mathbf{R}e_i \to \sum\limits_{i=1}^{3} \mathbf{R}f_t(e_i)$ невырождена ни прн каком значении t: иначе пространственноподобный вектор из $\sum\limits_{i=1}^{3} \mathbf{R}e_i$ был бы ортогонален $\sum\limits_{i=1}^{3} \mathbf{R}f_t(e_i') = (f_t(e_0'))^{\perp}$, т. е. пропорционален $f_t\left(c_{ij}'\right)$ - времениподобному вектору; это невозможно. Значит, определители этих проекций при всех t имеют одинаковый знак, а при $t = 0$ он положителен.

Мокно сказать, что пары базисов со свойством б) одинаково пространственно ориентированы.

Наоборот, если два ортонормированных базиса в $\mathscr{M}$ имеют одинаковую пространственную и временную ориентацию, то они одинаково орнентированы, т. е. переводятся друг в друга непрерывной системой изометрнй f_t. Чтобы постронть ее, положим прежде всего $f_t(e_0) = \frac{te_0' + (1-t)e_0}{\left|te_0' + (1-t)e_0\right|}$. Из условия $(e_0, e_0') \geqslant 1$ следует, что $f_t(e_0)$ времениподобен и имеет квадрат длины единица при всех $0 \leqslant t \leqslant 1$. Далее, в качестве $f_t(e_1, e_2, e_3)$ выберем ортонормированный базис в $f_t(e_0)^{\perp}$, получающийся из проекции $\{e_1, e_2, e_3\}$ на $f_t(e_0)^{\perp}$ процессом ортогонализации Грама - Шмидта; очевидно, он непрерывно зависит от t. Ясно, что $f_1(e_0) = e_0'$, а $\{f_1(e_1), f_1(e_2), f_1(e_3)\}$ и $\{e_1', e_2', e_3'\}$ суть одинаково ориентированные ортонормированные базисы в $(e_0')^{\perp}$. Их можно перевести друг в друга непрерывным семейством чисто евклидовых вращений $(e_0')^{\perp}$, оставляющих e_0' неподвижным. Это завершает доказательство.

Обозначим через Λ грynny Лоренца, т. е. группу изометрий пространства $\mathscr{M}$, или $O(1,3)$. Пусть далее $\Lambda_+^{\uparrow}$-подгруппа Λ, сохраняющая ориентацию некоторого ортонормированного базиса; $\Lambda\uparrow$ - подмножество Λ, меняющее его пространственную, но не временную ориентацию; $\Lambda_+^{\downarrow}$ - подмножество Λ, меняющее его временную, но не пространственную ориентацию; $\Lambda\downarrow$ - подмножество Λ, меняющее его временную и пространственную ориентации. Нетрудно убедиться, что от выбора исходного базиса эти подмножества не зависят. Мы доказали следующий результат:

Теорема.

Группа Лоренца Λ состоит из четьрех связных компонент: $\Lambda=\Lambda_+^{\uparrow}\cup\Lambda_-^{\uparrow}U\Lambda_+^{\downarrow}U\Lambda_-^{\downarrow}$.

Тождественное отображение лежит, очевидно, в $\Lambda_+^{\uparrow}$. Аналогом теоремы I. 12§11 является следуюций результат.

Теорема Реализуем $\mathscr{M}$ как пространство матриц Грама эрмитовых метрик в в базисе $\{h_1,h_2\}$. Для любой матриць $V\in\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ поставим в соответствие матрице $l\in\mathscr{M}$ новую матрицу

$$s(V)l=V^t\bar{V}.$$

Отображение s определяет сюртективный гомоморфизм $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ на $\Lambda_+^{\uparrow}$ с ядром $\{\pm E_2\}$.

Д ок аз ате льство. Очевидно, что $s(V)l$ линейно по l и сохраняет квадраты длин: $\det\left(V^tl\bar{V}\right)=\det l$. Поэтому $s(V)\in\Lambda$. Так как группа $\mathrm{SL}(2,\mathrm{C})$ связна, любой ее элемент можно непрерывно деформировать в единичный, оставаясь внутри $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$, - преобразование Лоренца $s(V)$ можно непрерывно деформировать в тождественное, так что $s(V)\in\Lambda_+^{\uparrow}$. Поскольку $s(\mathrm{id})=\mathrm{id}$ и $s\left(V_1V_2\right)=s\left(V_1\right)s\left(V_2\right)$, s является гомоморфизмом групп. Если $V^tl\vec{\bar{\nabla}}=l$ для всех $l\in\mathscr{M}$, то, в частности, $V^t\sigma_i\bar{\nabla}=\sigma_l$, где $\sigma_0=E_2$, $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ - матрицы Паули. Условие $V^t\bar{V}=E_2$ означает, что V унитарна; после этого условия $V^t\sigma_i\bar{V}=V^t\sigma_i\left(V^t\right)^{-1}=\sigma_i$ означает, что $V=\pm E_2$: это было доказано в п. 12§11. Таким образом, $\operatorname{Ker} s=\{\pm E_2\}$. Осталось установить, что s сюръективен. Пусть $f:\mathscr{M}\rightarrow\mathscr{M}$ - преобразование Лоренца из $\Lambda_+^{\uparrow}$, переводящее ортонормированный базис $\{e_i\}$ в $\{e_i'\}$. Метрики на $\mathscr{H}$, отвечающие e_0 и e_0', определены, ибо собственные значения как e_0, так и e_0' имеют одинаковый знак, потому что $\det\,e_0=\det e_0'=1$. Из $(e_0,e_0')>0$ следует, что эти метрики одновременно положительно или отрицательно определены. Действительно, выше мы убедились, что соединяющий их отрезок $te_0'+(1-te_0),0\leqslant t\leqslant 1$, целиком состоит из времениподобных векторов. Отсюда уже вытекает существование такой матрицы $V\in\mathrm{SL}(2,\mathrm{C})$, что $s(V)$ переводит e_0 в e_0', т. е. $e_0'=V^te_0V$, где e_0 и e_0' отождествлены с их матрицами Грама. Действительно, V - это матрица изометрии $(\mathscr{H},e_0)$ с $(\mathscr{H},e_0')$; априори ее определитель может быть равен -1, но это противоречило бы возможности соединить V с E_2 в $\mathrm{SL}(2,\mathrm{C})$ с помощью деформации V_q, где $e_0'=\left(V_q\right)^tf_q\left(e_0\right)V_q, f_q$ - соответствующая деформация в $\Lambda_+^{\uparrow}$.

Итак, $s(V)$ переводит e_0 в e_0'. Дальше остается показать, что евклидов поворот $\{s(V)e_1,s(V)e_2,s(V)e_3\}$ в $\{e_1',e_2',e_3'\}$ можно осуществить с помощью $s(U)$, где $U\in\mathrm{SL}(2,\mathrm{C})$ и $s(U)$ оставляет e_0 на месте. Можно считать, что e_0' представлен матрицей σ_0 в базисе $\{h_1,h_2\}$. Тогда мы должны выбрать U унитарной с условием $U\left(s(V)e_i\right)U^{-1}=e_i'$ для $i=1,2,3$. Это можно сделать по теореме п. 12§11, ибо базисы $\{s(V)e_i\}$ и $\{e_i'\},i=1,2,3$, в $(e_0')^{\perp}$ ортонормированы и одинаково ориентированы. Доказательство окончено.

Евклидовы повороты и бусты. Пусть e_y,e_j' - два одинаково временно ориентированных времениподобных вектора длины единица, L_0,L_0' - ортогональные дополнения к ним.

Имеется стандартное преобразование Лоренца из $\Lambda_+^{\uparrow}$, переводящее e_0 в e_0', которое в физической литературе называется бустом. При $e_0 = e_0'$ это - тождественное преобразование. При $e_0 \neq e_0'$ оно определяется так: рассмотрим плоскость $(L_0 \cap L_0')^{\perp}$. Она содержит e_0 и e_0'. Сигнатура метрики Минковского на ней равна $(1,1)$. Поэтому существует пара единичных пространственноподобных векторов $e_1, e_1' \in (L_0 \cap L_0')^{\perp}$, ортогональных к e_0 и e_0' соответственно. Буст оставляет на месте все векторы из $L_0 \cap L_0'$ и переводит e_0 в e_0', e_1 в e_1' соответственно. Чтобы вычислить элементы матрицы перехода $\{e_0, e_1\} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \{e_0', e_1'\}$, заметим прежде всего, что $a = (e_0, e_0') = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$, где v-скорость

ных наблюдателей, отвечающих e_0 и e_0'. Далее, матрицы Грама $\{e_0, e_1\}$ и $\{e_v', e_1'\}$ суть $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, поэтому

$$a^2 - b^2 = 1, \quad ac - bd = 0, \quad c^2 - d^2 = -1.$$

Из первого уравнения, зная a, находим $b = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}$. Добавляя сюда условие, что определитель буста $ad - bc$ равен единице, получаем $d = a, c = b$. Окончательно, матрица буста в базисе $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$, где $\{e_2, e_3\}$-ортонормированный базис $(L_0 \cap L_0')^{\perp}$, имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

или в терминах пространственно-временных координат

$$x_0 = \frac{x_0' + vx_1'}{\sqrt{1-v^2}}, \quad x_1 = \frac{vx_0' + x_1'}{\sqrt{1-v^2}}, x_2 = x_2', x_3 = x_3'.$$

Стоящую в левом верхнем углу матрицу можно записать также как матрицу «гиперболического поворота»

найдя θ из условий

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\theta & \operatorname{sh}\theta \\ \operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{ch}\theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \operatorname{sh}\theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2} = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Если исходить из двух одинаково ориентированных ортонормированных базисов $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ и $\{e_0', e_1', e_2', e_3'\}$, то преобразование Лоренца, переводящее один в другой, можно представить в виде произведения буста, переводящего e_0 в e_0', и затем евклидова поворота в $(e_0')^{\perp}$, который переводит образ базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ после буста в базис $\{e_1', e_2', e_3'\}$, оставляя e_0^+на месте.

Пространственные и временные отражения. Любое трехмерное подпространство $L \subset \mathscr{M}$, на котором метрика Минковского (анти) евклидова (т. е. прямая $L^{\perp}$ времениподобна), определяет преобразование Лоренца, тождественное на L и меняющее знак на $L^{\perp}$. Все такие операторы называются отражениями времени.

Любое трехмерное подпространство $L \subset \mathscr{M}$, на котором метрика Минковского имеет сигнатуру $(1,2)$ (т. е. прямая $L^{\perp}$ пространственноподобна), также определяет преобразование Лоренца, тождественное на L и меняющее знак на $L^{\perp}$. Все такие операторы называются пространственными отражениями.

Если фиксировать какое-нибудь отражение времени T и про(транства P, то все элементы из $\Lambda_+^{\downarrow}, \Lambda_-^{\uparrow}, \Lambda_-^{\downarrow}$ будут получаться из элементов $\Lambda_+^{\uparrow}$ умножением на T, P, PT соответственно.

Mathematical Minkowski Space

(see a big articles with it Spacetime algebra as a powerful tool for electromagnetism Justin Dressel, Konstantin Y. Bliokh, Franco Nori.... I'll make just an overview here. I am not sure, if there is a sense to study it at all)

Other, General About Linear Algebra for Minkowski Space

15.7.13 13. Symplectic Spaces

В этом параграфе мы будем рассматривать конечномерные линейные пространства L над полем $\mathscr{H}$ характеристики $\neq 2$, снабженные невырожденным кососимметрическим скалярным произведением [] $:, L \times L \rightarrow \mathscr{K}$, и называть их симплектическими пространствами. Напомним свойства симплектических пространств, которые уже были установлены ранее, в \$3.

Размерность симплектического пространства всегда четна. Если она равна $2r$, то в пространстве существует симплектический базис $\{e_1, \ldots, e_r; e_{r+1}, \ldots, e_{2r}\}$, т. е. базис с матрицей Грама вида

$$\begin{pmatrix} 0 & E_r \\ -E_r & 0 \end{pmatrix}.$$

В частности, все симплектические пространства одинаковой размерности над общим полем скаляров изометричны.

Подпространство $L_1 \subset L$ называется изотропным, если ограничение скалярного произведения [,] нулю. Все одномерные подпространства изотропны.

Предложение.

Пусть L-симплектическое пространство размерности $2r, L_1 \subset L$—-изотропное подпространство размерности r_1. Тогда $r_1 \leqslant r$, и если $r_1 < r$, то L_1 содержится в изотропном подпространстве максимальной возножной размерности r.

Д ок а з а тельств о. Поскольку форма [,] невырождена, она определяет изоморфизм $L \rightarrow L^*$, при котором вектору $l \in L$ ставится в соответствие линейный функционал $l' \rightarrow [l, l']$. Отсюда следует, что для любого подпространства $L_1 \subset L$ имеем $\dim L_{\downarrow}^{+} = \dim L - \dim L_1$ (ср. \$7 ч. 1). Если к тому же L_1 изотропно, то $L_1 \subset L_1^{\perp}$, откуда $r_1 = \dim L_1 \leqslant \dim L_1^{\perp} = \dim L - \dim L_1 = 2r - r_1$, так что $r_1 \leqslant r$.

Рассмотрим теперь ограничение формы [,] на $L_1^{\perp}$. Во всем пространстве L ортогональное дополнение $\mathrm{K} L_1^{\perp}$ имеет размерность $\dim L - \dim L_1^{\perp} = \dim L_1$ по предыдущему рассуждению. С другой стороны, L_1 лежит в этом ортогональном дополнении и потому совпадает с ним. Значит, L_1 есть в точности ядро ограничения [,] на $L_1^{\dagger}$. Но в $L_1^{\frac{1}{1}}$ имеется симплектический базис в том его варианте, который рассматривался в \$3, где допускались вырожденные прстранства:

$$\left\{e_1, \ldots, e_{r-r_1}; e_{r-r_1+1}, \ldots, e_{2(r-r_1)}; e_{2(r-r_1)+1}, \ldots, e_{2r-r_1}\right\}$$

с матрицей Грама

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & E_{r-r_1}|^0 & \\ \hline -E_{r-r_1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Размер единичной клетки есть $\frac{1}{2}\left(\dim L_1^1 - \dim L_1\right) = r - r_1$. Векторы $e_{2(r-rl)+1}, \ldots, e_{2r-r_1}$ порождают ядро формы на $L+1$, т. е. L_1; добавив к ним, например, $e_1, \ldots, e_{r-r_1}$, получим r-мерное изотропное подпространство, содержащее L_1.

Предложение.

Пусть L - симплектическое пространство размерности $2r, L_1 \subset L$ - изотропное подпространство размерности r. Тогда суцествует ругое изотропное подпространство $L_2 \subset L$ размерности r такое, что $L = L_1 \oplus L_2$, и скалярное произведение индуцирует изоморфизм $L_2 \rightarrow L_1^*$.

Доказ ательство. Мы докажем несколько более сильный результат, полезный в приложениях, а именно установим существование подпространства L_2 среди конечного числа изотропных подпространств, связанных с фиксированным симплектическим базисом $\{e_1, \ldots, e_r; e_{r+1}, \ldots, e_{2r}\}$ в L.

Именно, пусть дано разбиение $\{1, \ldots, r\} = I \cup J$ на два непересекающихся подмножества. Тогда r векторов $\{e_i, e_{r+j} | i \in I, j \in J\}$ порождают r-мерное изотропное подпространство в L, называемое координатным (относительно выбранного базиса). Очевндно, их имеется $2r$. Покажем, что L_2 можно найти среди координатных подпространств.

Пусть M натянуто на $\{e_1, \ldots, e_r\}$ и $\dim (L_1 \cap M) = s, 0 \leqslant s \leqslant r$. Существует такое подмножество $I \subset \{1, \ldots, r\}$ из $r-s$ элементов, что $L_1 \cap M$ трансверсально к N, натянутому на $\{e_i | i \in l\}$, т. е. $L_1 \cap M \cap N = \{0\}$. Действительно, множество $\{$базис $L_1 \cap M\} \bigcup$ $\cup \{e_1, \ldots, e_r\}$ порождает M, поэтому базис $L_1 \cap M$ можно дополнить до базиса M с помощью $r-s$ векторов из $\{e_1, \ldots, e_r\}$ по предложению п. 10§2 ч. 1. Номера этих векторов образуют искомое I, ибо $L_1 \cap M + N = M$, так что $L_1 \cap M \cap N = \{0\}$.

Положим теперь $J = \{1, \ldots, r\} \backslash I$ и покажем, что изотропное подпространство L_2, натянутое на $\{e_i, e_{r+j} | i \in I, j \in J\}$, является прямым дополнением к L_1. Достаточно проверить, что $L_1 \cap L_2 = \{0\}$. Действительно, из доказательства предложения п. 2 следует, что $L_1^{\perp} = L_1, L_2^{\frac{1}{2}} = L_2$. Но $L_1 \cap M$ содержится в L_1, N содержится в L_2, так что сумма $M = L_1 \cap M + N$ ортогональна к $L_1 \cap L_2$. Но M изотропно размерности r, поэтому $M^{\perp} = M$, и $L_1 \cap L_2 \subset M$. Значит, окончательно
$$L_1 \cap L_2 = (L_1 \cap M) \cap (L_2 \cap M) = (L_1 \cap M) \cap N = \{0\}.$$

Линейное отображение $L_2 \rightarrow L_1^*$ ставит в соответствне вектору $l \in L_2$ линейную форму $m \longrightarrow [l, m]$ на L_1. Оно является изоморфизмом, ибо $\dim L_2 = \operatorname{dir} L_1^* = r$, а его ядро содержится в ядре формы [,], , , . - шает доказательство.

Следствие. Любые пары взаимно дополнительных изотропнвьх подпространств в L одинаково расположень: если $L = L_1 \oplus L_2 = L_1' \oplus L_2'$, то существует изометрия $f : L \rightarrow L$ такая, что $f(L_1) = L_1', f(L_2) = L_2'$.

Доказательство. Выберем базис $\{e_1, \ldots, e_r\}$ в L_1 и двойственный к нему базис $\{e_{r+1}, \ldots, e_{2r}\}$ в L_2 относительно описан- ного выше отождествления $L_1 \rightarrow L_2$. Очевидно, $\{e_1, \ldots, e_{2r}\}$ есть симплектический базис в L. Аналогично построим симплектический базис $\{e_1', \ldots, e_{2r}'\}$ по разложению $L_1' \oplus L_2'$. Линейное отображение $f : e_i \mapsto e_i', i = 1, \ldots, 2r$, очевидно, является требуемой изометрией.

Из этого следствия и предложений пп. 2,3 следует, что любые изотропные подпространства одинаковой размерности в L переводятся одно в другое подходящей изометрией.

Симплектическая группа. Множество всех изометрий $f : L \rightarrow L$ симплектического пространства образует группу. Множество матриц, представляющих эту группу в симплектическом базисе $\{e_1, \ldots, e_{2r}\}$, называется симплектической группой и обозначается $\mathrm{Sp}(2r, \mathscr{K})$, если $\dim L = 2r$. Условие $A \in \mathrm{Sp}(2r, \mathscr{K})$ равносильно тому, что матрица Грама базиса $\{e_1, \ldots, e_{2r}\}$ A совпадает с $I_{2r} = \begin{pmatrix} 0 & E_r \\ -E_r & 0 \end{pmatrix}$, т. е. что $A^t I_{2r} A = I_{2r}$, так что $\det A = \pm 1$; ниже мы докажем, что $\det A = 1$ (см. п. 11). Поскольку $I_{2r}^2 = -E_{2r}$, это условие можно записать также в виде $A = -I_{2r} \left(A^t\right)^{-1} I_{2r}$. Отсюда вытекает

Іредложение. Характеристический многочлен $P(t) = \det (tE_{2r} - A)$ симплектической матрицы 'A возвратен, т. . $P(t) = t^{2r} P\left(t^{-1}\right)$.

Доказ ательство. Имеем, пользуясь тем, что $\det A = 1$,
$$\begin{aligned} \det (tE_{2r} - A) &= \det \left(tE_{2r} + I_{2r} \left(A^t\right)^{-1} I_{2r}\right) = \det \left(tE_{2r} - \left(A^t\right)^{-1}\right) = \\ &= \det \left(tA^t - E_{2r}\right) = t^{2r} \det \left(t^{-1} E_{2r} - A^t\right) = t^{2r} \det \left(t^{-1} E_{2r} - A\right). \end{aligned}$$

Следствие. Если $\mathscr{K} = \mathbf{R}uA$ - силплектическая матрицуа, то вместе c каждым собственным значением λ у A есть собственные значения $\lambda^{-1}, \bar{\lambda}u\bar{\lambda}^{-1}$.

Доказ ательство. Поскольку A невырождена, $\lambda \neq 0$ $P\left(\lambda^{-1}\right) = \lambda^{-2r}P(\lambda) = 0$. Поскопьку коэффициенты P вещественны, $P\overline{(\lambda)} = \overline{P(\lambda)} = 0$.

Комплексное сопряжение есть симметрия относительно вещественной оси, а отображение $\lambda \leftrightarrow \bar{\lambda}^{-1}$ - симметрия относительно единичной окружшости. Значит, комплексные собственные значения A появляются четверками, симметричными одновременно относительно вещественной оси и единнчной окружности, а вещественные собственные значения - парами.

Пфаффиан. Пусть $\mathscr{K}^{2r}$ - координатное пространство, A - невырожденная кососимметрическая матрица порядка $2r$ над $\mathscr{K}$. Скалярное пронзведение $[\vec{x}, \vec{y}] = \vec{x}^t A \vec{y}$ в $\mathscr{K}^{2r}$ невырождено и кососимметрично. Переходя от исходного базиса к симплектическому, получаем, что для матрицы A найдется такая невырожденная матрица B, что

$$A = B^t \begin{pmatrix} 0 & E_r \\ -E_r & 0 \end{pmatrix} B$$

откуда $\det A = (\det B)^2$. Итак, определитель каждой кососимметрической матрицы являегся точным квадратом. Это наводит на мысль попытаться извлечь из определителя квадратный корень, который был бы универсальным многочленом от элементов A. Это действительно возможкн.

Теорема.

Существует единственный многочлен с цельми коэффициентами $\mathrm{Pf}A$ от элементов кососимметрической матриць А такой, ито $\det A = (\mathrm{Pf}\, A)^2 u \,\mathrm{Pf} \begin{pmatrix} 0 & E_r \\ -E_r & 0 \end{pmatrix} = 1$. Этот многочлен называется пфаффианом и обладает следующим свойством:

$$\mathrm{Pf}\left(B^t A B\right) = \det B \cdot \mathrm{Pf}\, A$$

для любой матрищы B. (В случае $\operatorname{char} \mathscr{K} \neq 0$ коэффициенты Pf «цель» в том смысле, ито лежат в простом подполе поля $\mathscr{K}$, т. е. являются суммами единиц.)

Доказ ате льство. Рассмотрим $r(2r-1)$ независимых переменных над полем $\mathscr{K}$: $\{a_{ij} | 1 \leqslant i < j \leqslant 2r\}$. Обозначим через K поле рациональных функций (отношений многочленов) от a_{ij} с коэффициентами из простого подполя поля $\mathscr{K}$. Положим $A = (a_{ij})$, где $a_{ij} = -a_{ji}$ при $i > j, a_{ii} = 0$, и введем на координатном пространстве $\overset{K^{2r}}{\to}\to$ невырожденное кососимметрическое скалярное произведение $\vec{x}^t A \vec{y}$. Перейдя к симплектическому базису с помощью некоторой матрицы B, получим, как выше, $\det A = (\det B)^2$. Априори $\det B$ является лишь рациональной функцией от a_{ij} с коэффициентами из $\mathbf{Q}$ или простого поля конечной характеристики. Но так как $\det A$ - многочлен с целыми коэффициентами, квадратный корень из него также должен иметь целые коэффициенты (здесь мы пользуемся теоремой об однозначном разложении на множители в кольце многочленов $\mathbf{Z}\left[a_{ij}\right]$ или $\mathbf{F}_p\left[a_{ij}\right]$). Знак $\sqrt{\det A}$, очевидно, однозначно фиксируется требованием, чтобы значение $\sqrt{\det I_{2r}}$ было равно единице.

Последнее равенство из формулировки теоремы устанавливаегся так. Прежде всего, $B^t A B$ кососимметрична вместе с A, так что

$$\mathrm{Pf}^2\left(B^t A B\right) = \det\left(B^t A B\right) = (\det B)^2 \det A = (\det B)^2 \mathrm{Pf}^2 A.$$

ПІоэтому

$$\mathrm{Pf}\left(B^t A B\right) = \pm \det B \,\mathrm{Pf}\, A.$$

Чтобы установить знак, достаточно выяснить его в случае $A = I_{2r}$, $\boldsymbol{B} = E_{2r}$, где он, очевидно, положителен.

Примеры.

$$\operatorname{Pf}\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix} = a_{12}$$

$$\operatorname{Pf}\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{pmatrix} = -a_{12}a_{34} + a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23}.$$

Следствие. Определитель любой симплектической матрици равен гоинщще.
Доказательство. Из условия $A^t I_{2r} A = I_{2r}$ и теоремы п. 9 следует

$$1 = \operatorname{Pf} I_{2r} = \operatorname{Pf}\left(A^t I_{2r} A\right) = \det A \operatorname{Pf} I_{2r},$$

что доказывает требуемое.
Мы пользовались этим фактом при доказательстве предложения п. 6.

Связь ортогональной, унитарной и симплектической групп. Пусть $\mathbf{R}^{2r}$ - координатное пространство с двумя скалярными произведениями: евклидовым $(,\ ,)$ и симплектическим $[,]$:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^t \vec{y};$$
$$[\vec{x}, \vec{y}] = \vec{x}^t I_{2r} \vec{y} = (\vec{x}, I_{2r}\vec{y}).$$

Поскольку $I_{2r}^2 = -E_{2r}$, оператор I_{2r} определяет на $\mathbf{R}^{2r}$ комплексную структуру (см. §12 ч. 1) с комплексным базисом: $\{e_j + ie_{r+j} | j = 1, \ldots, r\}$, относительно которой имеется эрмитово скалярное произведение

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = (\vec{x}, \vec{y}) - i[\vec{x}, \vec{y}]$$

(см. предложение п. 2§6).
В терминах этих структур имеем

$$\mathrm{U}(r) = \mathrm{O}(2r) \cap \mathrm{Sp}(2r) = \mathrm{GL}(r, \mathrm{C}) \cap \mathrm{Sp}(2r) = \mathrm{GL}(r, \mathbf{C}) \cap \mathrm{O}(2r).$$

Мы оставляем читателю проверку в качестве упражнения.

15.7.14 14. Witt's Theorem and Witt's Group

В этом параграфе мы изложим результаты Витта, относящиеся к теории конечномерных ортогональных пространств над произвольными полями. Они уточняют теорему классификации из §3 и могут рассматриваться как далеко идущее обобщение теоремы инерции и понятия о сигнатуре. Начнем с некоторых определений. ак обычно, считаем характеристику поля скаляров не равной двум.

Гиперболической плоскостью называется двумерное пространство L с невырожденным симметричным скалярным произведе. нием $(,),$.

Гиперболияеским пространством называется пространство, разлагающееся в прямую сумму попарно ортогональных гиперболических плоскостей.

Анизотропносм пространством называется пространство, не имеющее (ненулевых) изотропных векторов.

Над вещественным полем анизотропные пространства L имеют сигнатуру $(n, 0)$ нли $(0, n)$, где $n = \dim L$. Мы сейчас покажем, что гиперболические пространства суть обобщения пространств с сигнатурой (m, m).

Лемма. y гиперболической плоскости L всегда существуют базисы $\{e_1', e_2'\}$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ u $\{e_1, e_2\}$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Доказ ательство. Пусть $l \in L, (l, l) = 0$. Если $l_1 \in L$ не пропорционален l, то $(l_1, l) \neq 0$, ибо L невырождена. Можно считать, что $(l_1, l) = 1$. Положнм $e_1 = l, e_2 = l_1 - \frac{(l_1, l_1)}{2} l$. Тогда $(e_1, e_1) = (e_2, e_2) = 0, (e_1, e_2) = 1$. Положим $e_1' = \frac{e_1 + e_2}{2}, e_2' = \frac{e_1 - e_2}{2}$. Тогда $(e_1', e_1') = 1, (e_2', e_2') = -1, (e_1', e_?') = 0$. Лемма доказана

Базис $\{e_1, e_2\}$ мы будем называть гиперболическим. Аналогично, в общем гиперболическом пространстве мы будем называть гиперболическим базис с матрицей Грама, состоящей из диагональных блоков $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Лемма. Пусть $L_0 \subset L$ - изотропное подпространство в невырожденном ортогональном пространстве $L, \{e_1, \ldots, e_m\} -$ в L_0. Тогда существуют такие векторь $e_1', \ldots, e_m' \in L$, что $\{e_1,\ e_1', \ldots, e_m, e_m'\}$ образуют гиперболический базис своей линейной оболочки.

Доказательство. Пусть L_1 - линейная оболочка $\{e_2, \ldots \ \ldots, e_m\}$. Так как L_1 строго меньше L_0, то $L_1^{\perp}$ строго больше $L_0^{\perp}$ в силу невырожденности L. Пусть $e_1'' \in L_1^{\perp} \backslash L_0^{\perp}$. Тогда $(e_1'', e_i) = 0$ при $i \geqslant 2$, но $(e_1'', e_1) \neq 0$. Можно считать, что $(e_1'', e_1) = 1$, так что e_1'' е пропорционален e_1. Как в доказательстве леммы п. 2, положим $e_1' = e_1'' - \frac{(e_1'', e_1'')}{2} e_1$. Тогда $\{e_1, e_1'\}$ образуют гиперболический базис своей линейной оболочки. Ортогональное дополнение к ней невырождено и содержит изотропное подпространство, натянутое на $\{e_2, \ldots, e_m\}$. К этой паре можно применить аналогичное рассуждение, и индукция по m дает требуемое.

Теорема (Витт). Пусть L-мевырожденное конечномерное ортогональное пространство, $L', L'' \subset L - \partial$ его изометричных подпространства. Тогда любая изометрия $f' : L' \rightarrow L''$ может быть продолюена до изометрии $f : L \rightarrow L$, совпадающей cf' на L'.

Д ок а з тельств о, Разберем последовательно несколько случаев.

а) $L' = L'' u$ оба пространства невырождены. Тогда $L = L' \oplus (L')^{\perp}$ и можно положить $f = f' \oplus \mathrm{id}_{(L')^{\perp}}$.

б) $L' \neq L'', \dim L' = \dim L'' = 1$, и оба пространства невырождены. Нзометрию $f' : L' \rightarrow L''$ можно продолжить до изометрни $f'' : L' + L'' \rightarrow L' + L''$, положив $f''(l) = f'(l)$ для $l \in L', f''(l) = (f')^{-1}(l)$ для $l \in L''$. Если $L' + L''$ певырождено, то f'' продолжается до f по предыдущему случаю. Если $L' + L''$ вырождено, то ядро скалярного произведения на $L' + L''$ одномерно. Пусть e_1 порождает это ядро, e_2 порождает L'. В ортогональном дополнении к e_2 в l найдем такой вектор e_1', что базис $\{e_1, e_1'\}$ порождаемой этими векторами плоскости гиперболичен. Это возможно по лемме п. 3. Покажем, что подпространство L_0, натянутое на $\{e_1, e_1', e_2\}$, невырождено, и изометрия $f' : L' \rightarrow L''$ продолжается до изометрии $f : L_0 \rightarrow L_0$. После этого можно будет применить случай а).

Невырожденность следует из того, что $(e_2, e_2) \neq 0$, а матрица Грама векторов $\{e_1, e_1', e_2\}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (e_2, e_2) \end{pmatrix}.$$

Для продолжения f' заметим сначала, что ортогональное дополнение к $f'(e_2)$ в L_0 двумерно, невырождено и содержит изотропный вектор e_1. Поэтому оно является гиперболической плоскостью, так же как и ортогональное дополнение к e_2 в L_0. По лемме п. 2, существует изометрия второй плоскости с первой. Ее прямая сумма с f' является искомым продолжением.

в) $\dim L' = \dim L'' > 1$ u L', L'' невырождены. Проведем индукцию по $\dim L'$. Так как в L' имеется ортогональный базис, существует разложение $L' = L_1' \oplus L_2'$ в ортогональную прямую сумму подпространств ненулевой размерности. Так как f' - изометрия, то $L'' = L_1'' \oplus L_2''$, где $L_i'' = f'(L_i')$, и эта сумма ортогональна. По индуктивному предположению ограничение f' на L_1' продолжается до изометрии $f_1' : L \to L$. Она переводит $(L_1')^{\perp} \supset L_2'$. в $(L_1'')^{\perp} \supset L_2''$. Снова по индуктивному предположению существует изометрия $(L_1')^{\perp}$ с $(L_1'')^{\perp}$, которая на L_2' совпадает с ограничением f'. Дополнив его ограничением f' на L_l', получим требуемое.

г) L' вырождено. Мы сведем этот последний случай к уже разобранному. Пусть $L_0' \subset L'$ - ядро ограничения метрики на L'. Выбрав ортонормированный базис в L', мы можем построить прямое разложение $L' = L_1' \oplus L_0'$, где L_1' невырождено. В ортогональном дополнении к L_1' внутри L мы можем найти подпространство $\bar{L}_0'$ такое, что сумма $\bar{L}_0' \oplus L_1' \oplus L_0$ прямая и пространство $\bar{L}_0' \oplus L_j'$ гиперболично, как в лемме п. 3 ; в частности, $\vec{L}_0' \oplus L_1' \oplus L_0'$ невырождено. Аналогично построим $\bar{L}_0'' \oplus L_1'' \oplus L_0''$, исходя из пространства L''. Очевидно, изометрия $f' : L' \to L''$ продолжается до изометрий этих прямых сумм, ибо все гиперболические пространства одинаковой размерности изометричны. Возможность дальнейшего продолжения этой изометрии следует теперь из случая в). Теорема доказана.

Следствие. Пусть L_1, L_2-изометричные невырожденные пространства и L_1', L_2' - - их изоетричные подпространства. Тогда ортогональные дополнения $(L_1')^{\perp}, (L_2')^{\perp}$ к ним изометричны. 6. Следствие. Пусть L-невырожденное ортогональное пространство. Тогда любое изотропное подпространство L содержится в максимальном изотропном подпространстве, и для двух максимальных изотропных подпространств L', L'' существует изометрия $f : L \to L$, переводящая L' в L''.

Доказательство. Первое утверждение тривиально. Для доказательства второго допустим, пто $\dim L' \leqslant \dim L''$. Любая линейная инъекция $f' : L' \to L''$ является изометрией L' с Im f'. Поэтому она продолжается до изометрии $f : L \to L$. Тогда $L' \subset f^{-1}(L'')$ и $f^{-1}(L'')$ изотропно. Так как L' максимально, $\dim L' = \dim f^{-1}(L'') = \dim L''$.

Следствие. Для любого ортогонального пространства L существует ортогональное прямое разложение $L_0 \oplus L_n \oplus L_t$, где L_0 изотропно, L_h гиперболично и L_d анизотропно. Для любых двух таких разложений существует изометрия $f : L \to L$, переводящая одно из них в другое.

Доказ ательство. Возьмем в качестве L_0 ядро скалярного произведения. Разложим L в прямую сумму $L_0 \oplus L_1$. В L_1 возьмем максимальное изотропное подпространство и вложим его в гиперболическое подпространство удвоенной размерности L_h, как в лемме п. 3. В качестве L_d возьмем ортогональное дополнение к L_h в L_1. Оно не содержит изотропных векторов, иначе такой вектор можно было бы добавить к исходному изотропному подпространству, которое не было бы максимальным. Это доказывает существование разложения требуемого вида.

Наоборот, в любом таком разложении $L_0 \oplus L_h \oplus L_d$ пространство L_0 является ядром. Далее, максимальное изотропное подпространство в L_h одновременно максимально изотропно в $L_h \oplus L_d$, поэтому размерность L_h определена однозначно. Значит, для двух разложений $L_0 \oplus L_h \oplus L_d$ и $L_0 \oplus L_h' \oplus L_d'$ существует изометрия, переводящая L_0 в L_0, L_h в L_h'. Она дополняется изометрией L_d в L_d' по теореме Витта, что завершает доказательство. Назовем L_d анuзотропной частью пространства L; она определена с точностью до изометрии.

Это следствие есть обобщение принципа инерции на произвольные поля скаляров, сводящее классификацию ортогональных пространств к классификации анизотропных пространств или, на языке квадратичных форм, к классификации форм, не представляющих нуля, для которых из $q(l) = 0$ следует, что $l = 0$.

Группа Витта. Пусть $\mathscr{K}$ - поле скаляров. Обозначим через $W(\mathscr{K})$ множество классов анизотропных ортогональных пространств над $\mathscr{K}$ (с точностью до изометрин), дополненное классом нулевого пространства. Введем на $W(\mathscr{H})$ следующую операцию сложения: если L_1, L_2 - два анизотропных пространства, $[L_1]$, $[L_2]$ - их классы в $W(\mathscr{K})$, то $[L_1] + [L_2]$ - класс анизотропной части $L_1 \oplus L_2$ (справа стонт ортогональная внешняя прямая сумма).

Нетрудно убедиться, что определение корректно. Далее, эта операция сложения ассоциативна, и класс нулевого пространства служит нулем в $W(\mathscr{K})$. Более того, имеет место 9. Теорема. а) $W(\mathscr{K})$ с введенной операцией сложсения является абелевой группой, называемой группой Витта поля $\mathscr{K}$.

б) Пусть L_a означает одномерное координатное пространство над $\mathscr{K}$ со скалярным произведением аху, $a \in \mathscr{K} \backslash \{0\}$. Тогда $[L_a]$ зависит только от смежного класса а $(\mathscr{K}^*)^2$, и элементы $[L_a]$ составляют систему образующих группы $W(\mathscr{K})$.

Док аз ат ельство. Нам осталось убедиться, что у каждого элемента $W(\mathscr{H})$ существует обратный. Действительно, пусть L - анизотропное пространство с метрикой, которая в ортогональном базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$ задана формой $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$. Обозначим через L пространство L с метрикой $-\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$ и покажем, что $L \oplus L$ гиперболично, так что $[L] + [\bar{L}] = [0]$ в $W(\mathscr{K})$. Действительно, метрика в $L \oplus L$ задана формой $\sum_{i=1}^{n} a_i \left(x_i^2 - y_i^2\right)$. Но плоскость с метрикой $a\left(x^2 - y^2\right)$, очевидно, гиперболична, ибо форма невырождена, а вектор $(1,1)$ изотропен. То, что $[L_a]$ зависит лишь от $a\left(\mathscr{H}^*\right)^2$, было проверено в п. 7§2. Кроме того, каждое n-мерное ортогональное пространство разлагается в прямую ортогональную сумму одномерных пространств вида L_a. Это завершает доказательство.

15.7.15 15. Clifford Algebras

Алгеброй над полем $\mathscr{K}$ мы будем называть ассоциативное кольцо с единицей A, содержащее поле $\mathscr{K}$ и такое, что $\mathscr{K}$ лежит в центре A, т. е. коммутирует со всеми элементами A. В частности, A является $\mathscr{K}$-линейным пространством.

Рассмотрим конечномерное ортогональное пространство L с метрикой g. В этом параграфе мы построим такую алгебру $C(L)$ и $\mathscr{K}$-линейное вложение $\rho : L \rightarrow C(L)$, что для любого элемента $l \in L$ будет выполнено соотношение

$$\rho(l)^2 = g(l,l) \cdot 1,$$

т. е. скалярный квадрат каждого вектора из L будет реализован как его квадрат в смысле умножения в $C(L)$. Кроме того, элементы $\rho(L)$ будут мультипликативными образуюцими С(L), т. е. любой элемент из $C(L)$ окажется представимым в виде линейной комбинации (некоммутативных) одночленов от элементов $\rho(L)$. Алгебра $C(L)$ (вместе с отображением ρ) с такими свойствами будет называться алгеброй Клиффорда пространства L.

Теорема.

а) Для всякого конечномерного ортогонального пространства L алгебра Клиффорда $C(L)$ существует и имеет размерность 2^n над $\mathscr{K}$, где $n = \dim L$.

б) Пусть б: $L \rightarrow D$-любое $\mathscr{K}$-линейное отображение L в $\mathscr{K}$-алгебру D, для которого $\sigma(l)^2 = g(l,l) \cdot 1$ для всех $l \in L$. Тогда существует единственный гомоморфизм $\mathscr{K}$-алеебр $\tau : C(L) \rightarrow D$ такой, что $\sigma = \tau \circ \rho$. В частности, $C(L)$ определена однозначно с точностью до изоморфизма.

Доказательство. а) Выберем в L ортогональный базис $\left\{e_1, \ldots, e_n\right\}, (e_i, e_i) = a_i$. По определению, в $C(L)$ должны выполняться соотношения

$$\rho\left(e_i\right)^2 = a_l, \rho\left(e_i\right) \rho\left(e_j\right) = -\rho\left(e_j\right) \rho\left(e_i\right), \quad i \neq j.$$

Второе из них следует из того, что $\left[\rho\left(e_i + e_j\right)\right]^2 = \rho\left(e_i\right)^2 + +\rho\left(e_i\right) \rho\left(e_j\right) + \rho\left(e_j\right) \rho\left(e_i\right) + \rho\left(e_j\right)^2 = \rho\left(e_i\right)^2 + \rho\left(e_i\right)^2$. Разложив элементы $l_1, \ldots, l_m \in L$ по базису $\{e_i\}$ и пользуясь тем, что умножение в $L\mathscr{K}$-линейно поо каждому из сомножителей (это следует из того, что $\mathscr{K}$ лежит в центре), мы можем представить любое произведение $\rho(l_1)\ldots\rho(l_m)$ в виде линейной комбинации одночленов относительно $\rho(e_i)$. Заменив $\rho(e_i)^2$ на a_i и $\rho(e_i)\rho(e_f)$ при $i>j$ на $-\rho(e_f)\rho(e_t)$, мы можем привести любой одночлен к виду $a\rho(e_{t_1})\ldots\ldots\rho(e_{i_m})$, где $a\in\mathscr{K}, i_1<i_2<\ldots<i_m$. Дальнейших соотношений между такими выражениями не видно; одночленов $\rho(e_{i_1})\ldots\ldots\rho(e_{i_m})$ имеется 2^m (включая тривиальный одночлен 1 при $m=0$).

План доказательства состоит в том, чтобы сделать строгими эти наводящие соображения, действуя более формально.

С этой целью для каждого подмножества $S\subset\{1,\ldots,n\}$ введем символ e_S (который впоследствии окажется равным $\rho(e_{i_1})\ldots\cdots\rho(e_{i_m})$, если $S=\{i_1,\ldots,i_m\}, i_1<\ldots<i_m)$; положим также $e_\varnothing=1(\varnothing$ - пустое подмножество). Обозначим через $C(L)\mathscr{K}$-линейное пространство с базисом $\{e_s\}$. Определим умножение в $C(L)$ следующим образом. Если $1\leqslant s,t\leqslant n$, положим

$$(s,t)=\left\{\begin{array}{c} 1 \text{ при } \quad s\leqslant t \\ \quad -1 \quad \text{при} \quad s>t. \end{array}\right.$$

Для двух подмножеств $S,T\subset\{1,\ldots,n\}$ положим

$$a(S,T)=\prod_{\substack{s\in S\\ t\in T}}(s,t)\prod_{i\in S\cap T}a_i,$$

где, напомним, $a_i=g(e_i,e_i)$. Пустые произведения считаются равными единице. Наконец, произведение линейных комбинаций $\sum a_Se_S,\quad\sum b_Te_T\in C(L);\quad a_S,b_T\in\mathscr{K}$, определим формулой

$$\left(\sum a_Se_S\right)\left(\sum b_Te_T\right)=\sum a_Sb_Ta(S,T)e_S\nabla r$$

где $S\nabla T=(S\cup T)\backslash(S\cap T)$ - симметрическая разность множеств S,T. Все аксиомы $\mathscr{K}$-алгебры проверяются тривиально, за исключением ассоциативности. Ассоциативность достаточно проверить на элементах базиса, т. е. установить тождество

$$\left(e_Se_T\right)e_R=e_S\left(e_Te_R\right)$$

Поскольку $e_Se_T=a(S,T)e_S\nabla_T$, имеем

$$\begin{gathered}\left(e_Se_T\right)e_R=a(S,T)a(S\nabla T,R)e_{(S\nabla T)\nabla R,}\\ e_S\left(e_Te_R\right)=a(S,T\nabla R)a(T,R)e_{S\nabla(T\nabla R)}.\end{gathered}$$

Нетрудно проверить, что

$$(S\nabla T)\nabla R=S\nabla(T\nabla R)=$$

$=\{(S\cup T\cup R)\backslash[(S\cap T)\cup(S\cap R)\cup(T\cap R)]\}\cup(S\cap T\cap R)$.

Поэтому остается убедиться лишь в совпадении скалярных коэффициентов. Часть $a(S,T)a(S\nabla T,R)$, относящаяся к знакам, имеет вид

$$\prod_{\substack{s\in S\\ t\in T}}(s,t)\prod_{\substack{u\in S\nabla\\ r\in R}}(u,r).$$

Заставив во втором произведении u пробегать сначала все элементы S, а затем все элементы T (при фиксированном r), мы введем сомножители $(u,r)^2, u\in S\cap T$, равные единице, так что этот «знак» можно записать в симметрическом по S,T,R виде

$$\prod_{\substack{s\in S\\ t\in T}}(s,t)\prod_{\substack{u\in S\\ r\in R}}(u,r)\prod_{\substack{u\in T\\ r\in R}}(u,r)$$

Аналогично с тем же результатом преобразуется знак, относящийся к $a(S,T\nabla R)a(T,R)$. Остается разобрать множители, в которые входят скалярные квадраты a_i. Для $a(S,T)a(S\nabla T,R)$ они имеют вид

$$\prod_{i\in S\cap T}a_i\prod_{i\in(S\nabla T\cap\cap R}a_i.$$

Но $(S\nabla T)\cap R=(S\cap R)\nabla(T\cap R)$, а $S\cap T$ с этим множеством не пересекается, и $(S\cap T)\cup[(S\cap R)\nabla(T\cap R)]$ состоит из тех элементов $S\cup T\cup R$, которые содержатся более чем в одном из этих трех множеств. Поэтому наш множитель симметрично зависит от S, T, R. Аналогично с тем же результатом вычисляется нужная нам часть коэффициепта $a(S, T\nabla R)a(T, R)$. Это завершает доказательство ассоциативности алгебз: $C(L)$.

Определим, наконец, $\mathscr{K}$-линейное отображение $\rho : L \to C(L)$ условием $\rho\left(e_i\right) = e_{\{i\}}$. Согласно формулам умножения $e_\varnothing$ является единицей в $C(L)$, и

$$\rho\left(e_i\right)\rho\left(e_j\right) = e_{\{i}e_{\{l\}} = \begin{cases} a_i e_\varnothing & \text{при } i = j, \\ -e_{.j\}}e_{\{i} & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Поэтому $(\rho, C(L))$ ссть алгебра Клиффорда для L.

б) Последнее утверждение доказывается формально. Пусть $\sigma : L \to D$ – $\mathscr{K}$-линейное отображение с $\sigma(l)^2 = g(l,l)\cdot 1$. Супествует единственное $\mathscr{K}$-линейное отображение $: C(L) \to D$, которое на элементах базиса e_S определено формулой

$$\tau\left(e_{\{i_1\ldots i_m\}}\right) = \sigma\left(e_{i_1}\right)\ldots\sigma\left(e_{i_m}\right),$$

$$\tau\left(e_\varnothing\right) = 1_D.$$

Для него $\tau\circ\rho = \sigma$, ибо это так на элементах базиса L. Наконец, τ является гомоморфизмом алгебр. Действительно,

$$\tau\left(e_S e_T\right) = \tau\left(a(S,T)e_{S\nabla T}\right) = a(S,T)\tau\left(e_{S\nabla T}\right),$$

и нетрудно проверить, что $\tau\left(e_S\right)\tau\left(e_T\right)$ можно привести к тому же виду, пользуясь соотношениями

$$\sigma\left(e_i\right)^2 = a_i, \sigma\left(e_i\right)\sigma\left(e_j\right) = -\sigma\left(e_j\right)\sigma\left(e_i\right) \text{ при } i \neq j.$$

Это завершает доказательство.

Примеры. а) Пусть L - двумерная вещественная плоскость с метрикой -(x^2+y^2). Алгебра Клиффорда $C(L)$ имеет базис $(1, e_1, e_2, e_1e_2)$ с мультипликативными соотношениями

$$e_1^2 = e_2^2 = -1, \quad e_1e_2 = -e_2e_1.$$

Нетрудно убедиться, что отображение $C(L) \to H : 1 \mapsto 1, e_1 \mapsto \mathbf{i},\ e_2 \longmapsto \mathrm{j}, e_1e_2 \longmapsto \mathbf{k}$ определяет изоморфизм $C(L)$ с алгеброй кватернионов H.

б) Пусть L-линейное пространство с нулевой метрико. Алгебра $C(L)$ порождена образующими $\{e_1, \ldots, e_n\}$ с соотношениями

$$e_i^2 = 0, e_ie_j = -e_je_i \text{ при } i \neq j.$$

Она называется внешней алгеброй, или алгеброй Грассмана, линейного пространства L. Мы еще вернемся К ней в части 4.

в) Пусть $L = \mathscr{M}^{\mathrm{c}}$ - комплексифицированное пространство Минковского с метрикой $x_0^2 - \sum\limits_{i=1}^{3} x_i^2$ относительно ортонормированного базиса $\{e_i\}$ в $\mathscr{M}$, являюшегося одновременно базисом $\mathscr{M}^{\mathrm{C}}$. Покажем, что алгебра Клиффорда $C\left(\mathscr{M}^{\mathrm{C}}\right)$ изоморфна алгебре комплексных 4×4-матриц. С этой целью рассмотрим матрицы Дирака, записываемые в блочном виде:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Пользуясь свойствами матриц Паули σ_j, нетрудно убедиться, что γ удовлетворяют тем же соотношениям в алгебре матриц $M_4(\mathbf{C})$ что и $\rho\left(e_j\right)$ в алгебре $C\left(\mathscr{M}^{\mathrm{C}}\right)$:

$$\gamma_0^2 = -\gamma_1^2 = -\gamma_2^2 = -\gamma_3^2 = 1$$

(т. е. E_4) ; $\gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = 0$ при $i \neq j$. Значит, С-линейное отображение $\sigma : \mathscr{M}^{\mathrm{C}} \to M_4(\mathbf{C})$ инцуцирует гомоморфизм алгебр $\tau : C\left(\mathscr{M}^{\mathrm{C}}\right) \to \to M_4(\mathbf{C})$, для которого $\tau\cdot\rho\left(e_i\right) = \gamma_i$. Непосредственным вынислением можно проверить, что отображение τ сюрьективно, а так как обе С-алгебры $C\left(\mathscr{M}^{\mathcal{C}}\right)$ и $M_4(\mathrm{C})$ шестнадцатимерны, τ является изоморфизмом.

15.8 Affine and Projective Geometry According to Kostrikin Manin

15.8.1 1. Affine Spaces, Affine Maps and Affine Coordinates

Определение. Аффинным пространством над полем $\mathscr{K}$ называется тройка $(A, L, +)$, состтоящая ия линейного пространства L над полем $\mathscr{K}$, множества A, лементы которого называются тойками, и внешней бинарной операции $A \times L \to A : (a, l) \mapsto a + l$, удовлетворяющей следующим аксиомам:

а) $(a + l) + m = a + (l + m)$ для всех $a \in A; l, m \in L$;

б) $a + 0 = a$ dля всех $a \in A$;

в) для любых двух точек $a, b \in A$ существует единственный вектор $l \in L$ со свойством $b = a + l$.

Пример. Тройка $(L, L, +)$, где L-линейное пространство, а $+$ совпадает со сложением в L, является аффинным пространством. Удобно говорить, что она задает аффинную структуру линейного пространства L. Этот пример типичен; позже мы увидим, что всякое аффинное пространство изоморфно такому.

Термины. Мы часто будем называть аффинным пространством пару (A, L) или даже просто A, опуская указания на $+$. Линейное пространство L называется ассоциированным с аффинным пространством A. Отображение $A \to A : a \mapsto a + l$ называется сдвигом на вектор l; удобно иметь для него специальное обозначение t_l. Мы пишем $a - l$ вместо $t_{-l}(\bar{a})$ или $a + (-l)$.

Предложение.

Отображение $l \mapsto t_l$ определяет инвективный гомоморфизм аддитивной группы пространства L в еруппу перестановок точек аффинного пространства A, т. е. эффективное действие L на A. Это действие транзитивно, т. е. для любой пары точек, $a, b \in A$ существует $l \in Lct_l(a) = b$.

Наоборот, задание транзитивного эффективного действия аддитивной группь L на множестве A определяет на A структуру аффинного пространства с ассоциированным пространством L.

Д оказательство. Из аксиом а) и б) следует, что при любых $l \in L$ и $a \in A$ уравнение $t_l(x) = a$ имеет решение $x = a + (-l)$, так что все t_l сорьективны. Если $t_l(a) = t_l(b)$, то, найдя по аксиоме в) такой вектор $m \in L$, что $b = a + m$, получаем $a + l = (a + m) + l = (a + l) + m$. Но $a + l = (a + l) + 0$, поэтому из условия единственности аксиомы в) следует, что $m = 0$, так что $a = b$. Поэтому все t_l инъективны. Аксиома а) означает, что $t_m \circ t_l = t_{l+m}$, а аксиома б) - что $t_0 = \mathrm{id}_A$. Поэтому отображение $l \mapsto t_l$ является гомоморфизмом аддитивной группы L в группу биекций A с самим собой. Его ядро равно нулю в силу аксиом б) и в).

Наоборот, пусть $L \times A \to A : (l, a) \mapsto a + l$-эффективное транзнтивное действие L на A. Тогда аксиомы а) и б) получаются прямо из определения действия, а аксиома в) - из соединения свойств эффективности и транзитивности.

Замечание. По поводу действия групп (не обязательно абелевых) на множествах см. \$2 главы 7 «Введения в алгебру». Множество, на котором группа действует транзитивно и эффективно, называется лавным однородным пространством над этой труппой.

Отметим, что в аксиомах аффинного пространства не фигурирует явно структура умножения на скаляры в L. Она появляется лишь в определении аффинных отображений и затем барицентрических комбинаций точек A. Но прежде несколько слов о формализме.

Правила вычислений. Тот единственный вектор $l \in L$, для которого $b = a + l$, удобно обозначать $b - a$. Эта операция «внешнего вычитания» $A \times A \to L : (b, a) \mapsto b - a$ обладает следующими свойствами:

а) $(c - b) + (b - a) = c - a$ для всех $a, b, c \in A$; сложение слева - это сложение в L.

Действительно, пусть $c = b + l, b = a + m$; тогда $c = a + (l + m)$, так что $c - a = l + m = (c - b) + (b - a)$.

б) $a - a = 0$ для всех $a \in A$.

$l, m \Subset L$.

в) $(a + l) - (b + m) = (a - b) + (l - m)$ для всех $a, b \in A$,

В самом деле, достаточно проверить, что $(b + m) + (a - b) + +(l - m) = a + l$, или $b + (a - b) = a$, а это -определение $a - b$.

Вообще, употребление знаков \pm для различных операций $L \times L \to L, A \times L \to L, A \times A \to L$ подчиняется следующим формальным правилам. Выражение $\pm a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_m + l_1 + \ldots \ldots + l_n$ для $a_l \in A, l_k \in L$ имеет смысл, если либо m четно и все $\pm a_f$ можно объединить в пары вида $a_i - a_j$, либо m нечетно, н все точки можно объединить в такие пары, кроме одной, входящей со знаком $+$. В первом случае вся сумма лежит в L, во втором В A. Кроме того, она зависит от свонх слагаемых коммутативно и ассоциативно: например, $a_1 - a_2 + l$ можно вычислять как $(a_1 - a_2) + l$ или $(a_1 + l) - a_2$ или $a_1 - (a_2 - l)$; мы позволим себе писать $a + l$, так же как $l + a$.

Доказывать это правило в обшем виде мы не станем. Всякий раз, когда мы будем им пользоваться, читатель без труда разобьет нужную выкладку на серию элементарных шагов, каждый из которых сведется к применению одной аксиомы или формулы а)-в) начала этого пункта.

Заметим, что сумм $a + b$, где $a, b \in A$, вообще говоря, смысла ме имеет, так же как и выражение xa, где $x \in \mathscr{K}$ (исключение: $A = L$). Тем не менее ниже мы придадим однозначный смысл, например, выражкению $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ (но не его слагаемым!).

Интуитивно аффинное пространство $(A, L, +)$ следует представлять себе как линейное пространство L с «забытым» началом координат 0. Оставлена лишь операция сдвига на векторы $L_;$ суммирования сдвигов и умножения вектора сдвига на скаляр.

Аффинные отображения. Пусть $(A_1, L_1), (A_2, L_2)$ - два аффинных пространства над одним и тем же полем $\mathscr{K}$. Аффинно линейным, или просто аффинным, отображением первого во второе называется пара (f, Df), где $f : A_1 \to A_2, Df : L_1 \to L_2$, удовлетворяющая следующим условиям:

а) Df - линейное отображение.

б) Для любых $a_1, a_2 \in A$ имеем

$$f(a_1) - f(a_2) = Df(a_1 - a_2).$$

(Оба выражения лежат в L_2.)

$Df($ или $D(f))$ называется линейной частью аффинного отображения f. Поскольку $a_1 - a_2$ пробегает все векторы L_1, когда a_1, $a_2 \in A_1$, линейная часть Df определяется по f однозначно. Это позволяет обозначать аффинные отображения просто $f : A_1 \to A_2$.

Примеры. а) Любое линейное отображение $f : L_1 \to L_2$ индуцирует аффинно линейное отображение пространств $(L_1, L_1, +) \to \to (L_2, L_2, +)$. Для него $Df = f$.

б) Любой сдвиг $t_l : A \to A$ аффинно линеен и $D(t_1) = \mathrm{id}_L$. Действительно,

$$t_l(a_1) - t_l(a_2) = (a_1 + l) - (a_2 + l) = a_1 - a_2.$$

в) Если $f : A_1 \to A_2$ - аффинно линейное отображение и $l \in L_2$, то отображение $t_l \circ f : A_1 \to A_2$ аффинно линейно, и $D(t_l \circ f) = D(f)$. В самом деле,

$t_l \circ f(a_1) - t_l \circ f(a_2) = (f(a_1) + l) - (f(a_2) + l) = f(a_1) - f(a_2) = Df(a_1 - a_2)$.

г) Аффинно линейная функция $f : A \to \mathscr{K}$ определяется как аффинно линейное отображение A в $(\mathscr{K}^1, \mathscr{K}^1, +)$, где $\mathscr{K}^1$ - одномерное координатное пространство. Таким образом, f принимает значения в $\mathscr{K}$, а Df есть линейный функционал на L. Любая постоянная функция f аффинно линейна: $Df = 0$.

Теорема.

а) Аффинные пространства вместе с аффинными отобраккениями образуют категорию.

б) Отображение, ставящее в соответствие аффинному пространству (A, L) линейное пространство L, а аффинному отображению f: $(A_1, L_1) \to (A_2, L_2)$ линейное отображение $Df : L_1 \to L_2$, является функтором из категории аффинных пространств в категорию линейных пространств.

Дока зательство. Справедливость общекатегорных аксиом (см. \$13 ч. 1) вытекает из следующих фактов.

Тождественное отображение id: $A \to A$ аффинно. Действительно, $a_1 - a_2 = \mathrm{id}_L(a_1 - a_2)$. В частности, $D(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_L$. омпозиция аффинных отображений $A \xrightarrow{\sharp} A \overset{\leftrightarrow}{\to} A$ является аффинным отображением.

В самом деле, пусть $a, b \in A$. Тогда $f_1(a) - f_1(b) = Df_1(a - b)$. и далее

$$f_2 f_1(a) - f_2 f_1(b) = Df_2 [f_1(a) - f_1(b)] = Df_2 \circ Df_1(a - b).$$

Мы доказали требуемое и заодно получили, что $D(f_2 f_1) = Df_2 \circ Df_1$. Вместе с формулой $D(\mathrm{id}_A) = \mathrm{Id}_L$ 9то доказывает утверждение б) теоремы.

Следующий важный результат характеризует изоморфизмы в нашей категории.

Предложение.

Следующие три свойства аффинного отображения f: $A_1 \to A_2$ равносильны:

а) f - изоморфизм;

б) $Df-$ изоморфизм;

в) f-биекция в теоретико-множественном смысле.

Д ок аз атель ство. Согласно общекатегорному определению $f : A_1 \to A_2$ есть изоморфизм тогда и только тогда, когда имеется такое аффинное отображение $g : A_2 \to A_1$, что $gf = \mathrm{id}_{A_1}, fg = \mathrm{id}_{A_2}$. Если оно существует, то $D(fg) = \mathrm{id}_{L_2} = D(f)D(g)$ и $D(gf) = \mathrm{id}_{L_1} = D(g)D(f)$, откуда следует, что $D(f)$ - изоморфизм.

Покажем теперь, что Df - изоморфизм тогда и только тогда, когда f - биекция. Фиксируем точку $a_1 \in A_1$ и положим $a_2 = f(a_1)$. Любой элемент A_i однозначно представляется в виде $a_i + l_l$, $l_t \in L_i, i = 1, 2$. Из основного тождества

$$f(a_1 + l_1) - f(a_1) = Df[(a_1 + l_1) - a_1] = Df(l_1)$$

следует, что $f(a_1 + l_1) = a_2 + Df(l_1)$. Следовательно, f - биекция тогда и только тогда, когда $Df(l_1)$ при $l_1 \in L_1$ пробегает все элементы L_2 по одному разу, т. е. Df является биекцией. Но линейное отображение есть бнекция тогда и только тогда, когда оно обратимо, т. е. является изоморфизмом.

Наконец, покажем, что биективное аффинное отображение является аффинным изоморфизмом. Для этого следует проверить, что обратное к f теоретико-множественное отображение аффинно. Но в обозначениях предыдущего абзаца это отображение определяется формулой

Поэтому

$$f^{-1}(a_2 + l_2) = a_1 + (Df)^{-1}(l_2), \quad l_2 \in L_2.$$

$$f^{-1}(a_2 + l_2) - f^{-1}(a_2 + l_2') = (Df)^{-1}(l_2) - (Df)^{-1}(l_2') = (Df)^{-1}(l_2 - l_2')$$

в силу линейности $(Df)^{-1}$. Итак, f^{-1} аффинно и $D(f^{-1}) = D(f)^{-1}$. Окончательно, мы уетановили импликацин а) $\Rightarrow$) $\Leftrightarrow$ В) $\Rightarrow$ а, откуда и следует предложение.

Конструкция конкретных аффинных отображений чаото основывается на следующем результате. 11. Предложение. Пусть $(A_1, L_1), (A_2, L_2)$ - два аффинных пространства. Для любой пары точек $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$ и любого линейного отображения g: $L_1 \to L_2$ существует единственное аффинное отображение $f : A_1 \to A_2 c f(a_1) = a_2 u Df = g$.

В самом деле, положим

$$f(a_1 + l_1) = a_2 + g(l_1)$$

для $l_1 \in L_1$. Поскольку любая точка A_1 однозначно представляется в виде $a_1 + l_1$, эта формула определяет теоретико-множественное отображение $f : A_1 \to A_2$. Оно аффинное, $f(a_1) = a_2$ и $Df = g$, потому что

$$f(a_1 + l_1) - f(a_1 + l_1') = g(l_1) - g(l_1') = g(l_1 - l_1') = \\ = g\left[(a_1 + l_1) - (a_1 + l_1')\right].$$

Это доказывает существование f. Наоборот, если $\hat{f}$-отображение с требуемыми свойствами, то

$$f(a_1 + l) - f(a_1) = g(l),$$

откуда $f(a_1 + l) = a_2 + g(l)$ для всех $l \in L$.

Важный частный случай предложения п. 11 получаетея, если применить его к $(A, L), (L, L), a \in A, 0 \in L$ и $g = \mathrm{id}\ _L$. Мы получим, что для любой точки $a \in A$ существует единственный аффинный изоморфизм f: $A \to L$, переводящий эту толку в начало координат, с тождественной линейной частью. Это и есть точный смысл представления о том, что аффинное пространство есть «линейное пространство с забытым началом координат».

В частности, аффинные пространства изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны ассоциированные линейные пространства. Последние классифицируются своей размерностью, и мы можем назвать размерностью аффинного пространства размерность соответствующего линейного пространства.

Следствие. Пусть $f_1, f_2 : A_1 \to A_2 - \partial$ аффинных отображения. Их линейные части совпадают тогда и только тогда, когда f_2 есть композиция f_1 со сдвигом на некоторый вектор из L_2, который определяется однозначно.

Доказ а те льство. Достаточность условия была проверена в примере в) п. 8. Для доказательства необходимости выберем любую точку $a \in A_1$ и положим $f_2' = t_{f_2(a) - f_1(a)} \circ f_1$. Очевидно, $f_2'(a) = f_2(a)$ и $D(f_2') = D(f_2)$. По предложению п. $11 f_2' = f_2$. Наоборот, если $f_2 = t_l \circ f_1$, то $l = f_2(a) - f_1(a)$; этот вектор не зависит от $a \in A$ из-за совпадения линейных частей f_1, f_2.

Аффинные координаты. а) Система аффинных координат в аффинном пространстве (A, L) есть пара, состоящая из точки $a_0 \in A$ (начала координат) и базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ассоциированного линейного пространства L. Координаты точки $a \in A$ в этой системе образуют вектор $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathscr{K}^n$, однозначно определяемый условием $a = a_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_l$. Иначе говоря, отождествим A с L посредством отображения с тождественной линейной частью, переводящего a_0 в 0, и возьмем координаты образа точки а в базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$: это и будут $x_1, \ldots, x_n$

Пусть в пространствах A_1, A_2 выбраны системы координат, отождествляющие их с $\mathscr{K}^m, \mathscr{K}^n$ соответственно. Тогда любое аффинно линейное отображение $f : A_1 \to A_2$ можно записать в виде

$$f(\vec{x}) = \overrightarrow{Bx} + \vec{y}$$

где $B \to$ матрица отображения Df в соответствующих базисах L_1, L_2, а $\vec{y}$ - координаты вектора $f(a_0') - a_i''$ в базисе $L_2; a_1'$ - начало координат в A_1, a_0'' - начало координат в A_2. Действительно, отображение $\vec{x} \mapsto \overrightarrow{Bx} + \vec{y}$ аффинно линейно, переводит a_c' в $f(a_0')$ и имеет ту же линейную часть, что и f.

б) Другой вариант данного определения системы координат состоит в том, чтобы заменить векторы $\{e_1, \ldots, e_n\}$ точками $\{a_0 + e_1, \ldots, a_0 + e_n\}$ в A. Положим $a_i = a_0 + e_i, i = 1, \ldots, n$. Координаты точки $a \in A$ находятся тогда из представления $a =$

$a_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \left(a_i - a_0\right)$. Возникает соблазн «привести подобные члены» и написать выражение справа в виде $\left(1 - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) a_v + + \sum\limits_{i=1}^{n} x_i a_i$. Отдельные члены в этой сумме не имеют смысла! Тем не менее оказывается, что суммы такого вида можно рассматривать, и они весьма полезны.

Предложение.

Пусть $a_0, \ldots, a_s$-любые точки аффинного пространства A. Для любых $y_0, \ldots, y_s \in \mathscr{K}$ с условием $\sum\limits_{i=0}^{s} y_i = 1$ определим формальную сумму $\sum\limits_{i=1}^{s} y_i a_i$ выражением вида

$$\sum_{i=0}^{s} y_i a_i = a + \sum_{i=0}^{s} y_i \left(a_l - a\right)$$

де а-любал точка А. Утверждается, что выражение справа не sависит от а. Поэтому точка $\sum\limits_{i=0}^{s} y_i a_i$ определена корректно. Она называется барищентрической комбинацией точек $a_0, \ldots, a_s c$ коэффициентами $y_0, \ldots, y_s$.

Доказательство. Заменим точку a на точку $a + l, l \in L$. Получим

$$a + l + \sum_{i=0}^{s} y_l \left(a_l - a - l\right) = a + \sum_{i=0}^{s} y_l \left(a_l - a\right),$$

ибо $\left(1 - \sum\limits_{i=0}^{s} y_i\right) l = 0$. Мы пользовались здесь правилами, сформулированными в п. 6. Читателю будет полезно провести эту выкладку подробно.

Следствие. Система $\{a_0; a_1 - a_0, \ldots, a_n - a_0\}$, состоящал из точки $a_0 \in A$ и векторов $a_l - a_0$ в L, образует систему аффинных координат в A тогда и только тогда, когда любая точка A однозначно представима в виде барицентрической комбиначии $\sum\limits_{i=0}^{n} x_i a_i, \quad x_i \in \mathscr{H}, \quad \sum\limits_{i=0}^{n} x_i = 1$.

Когда это условие выполнено, система точек $\{a_0, \ldots, a_n\}$ называется барицентрической системой координат в A, а числа $x_0, \ldots \ldots, x_n$ - барицентрическими координатами точки $\sum\limits_{i=0}^{n} x_i a_i$.

Доказательство. Все непосредственно следует из определений, если вычислять $\sum\limits_{i=0}^{n} x_i a_i$ по формуле $a_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \left(a_l - a_0\right)$. Действительно, так как любая точка A однозначно предетавляется в виде $a_0 + l, l \in L$, система $\{a_0, a_1 - a_0, \ldots, a_n - a_0\}$ является аффинной системой координат в A тогда и только тогда, когда всякий вектор $l \in L$ однозначно представляется в виде линейной комбинации $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \left(a_i - a_0\right)$, т. е. если $\{a_1 - a_0, \ldots, a_n - a_0\}$ образуют базис L. По координатам $x_1, \ldots, x_n$.вектора l барнцентрические координаты точки $a_0 + l$ восстанавливаются однозначно в виде $1 - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = x_0, x_1, \ldots, x_n$.

С барицентрическими комбинациями можно во многом обращаться так же, как с обычными линейными комбинациями в линейном пространстве. Например, слагаемые с нулевыми коэффициентами можно выбрасывать. Наиболее полезное вамечание состоит в том, что барицентрическая комбинация нескольких барицентрических комбинаций точек $a_0, \ldots, a_s$ в свою очередь является барицентрической комбинацией этих точек, коэффициенты которой можно вычислять по ожидаемому формальному правилу!

$$x_1 \sum_{i=0}^{s} y_{i1} a_i + x_2 \sum_{i=0}^{s} y_{i2} a_i + \ldots + x_m \sum_{i=0}^{s} y_{im} a_t = \sum_{i=0}^{s} \left(\sum_{k=1}^{m} x_k y_{ik} \right) a_i .$$

Действительно,

$$\sum_{i=0}^{s} \sum_{k=1}^{m} x_k y_{ik} = \sum_{k=1}^{m} x_k \sum_{i=0}^{s} y_{ik} = \sum_{k=1}^{m} x_k = 1,$$

так что последняя комбинация барицентрична. Вычисляя левую и правую части этого равенства по правилу, сформулированному в предложении п. 15, с помощью одной и той же точки $a \in A$ и прнменяя формализм п. 6, легко получим, что они совпадают. Наконец, барицентрические комбинации ведут себя как линейные комбинации относительно аффинных отображений.

Предложение.

а) Пусть $f : A_1 \to A_2$ - аффинное отображение $u a_0, \ldots, a_s \in A_1$. Тогда

$$f\left(\sum_{i=0}^{s} x_i a_i\right) = \sum_{i=0}^{s} x_i f\left(a_i\right)$$

если $\sum\limits_{i=0}^{s} x_i = 1$

б) Пусть $a_0, \ldots, a_n$ задают барицентрическую систему координат в A_1. Тогда для любых точек $b_0, \ldots, b_n \in A_2$ существует единственное аффинное отображение f, переводящее a_i в $b_i, i = 1, \ldots, n$.

Док аз ательство. Выбрав $a \in A_1$, получим

$$f\left(\sum_{i=0}^{s} x_i a_i\right) = f\left(a + \sum_{i=0}^{s} x_i \left(a_i - a\right)\right) = f(a) + Df\left(\sum_{i=0}^{s} x_i \left(a_i - a\right)\right) =$$

$$- f(a) + \sum_{i=0}^{s} x_i Df\left(a_i - a\right) = f(a) + \sum_{i=0}^{s} x_i \left(f\left(a_t\right) - f(a)\right) = \sum_{i=0}^{s} x_i f\left(a_i\right)$$

по предложению п. 15, что доказывает утверждение а).

Если $a_0, \ldots, a_n$ образуют барицентрическую систему координат в A_1, то по следствию п. 16 всякая точка A представляется единственной барицентрической комбинацией $\sum\limits_{i=0}^{n} x_i a_i$. Определим тогда теоретико-множественное отображение $f : A_1 \to A_2$ формулой f $\left(\sum\limits_{i=0}^{n} x_i a_i\right) = \sum\limits_{i=0}^{n} x_i b_i$. В силу а) это единственное возможное определение, и нужно лишь проверить, ито f—-аффинное отображение. Действительно, вычисляя, как в предложении п. 15, получаем

$$f\left(\sum_{i=0}^{n} x_i a_i\right) - f\left(\sum_{i=0}^{n} y_i a_t\right) = \sum_{i=0}^{n} x_i b_i - \sum_{i=0}^{n} y_i b_i = b_0 + \sum_{i=0}^{n} x_i \left(b_i - b_0\right) -$$

$$- \left[b_0 + \sum_{i=0}^{n} y_i \left(b_i - b_0\right)\right] = \sum_{i=0}^{n} \left(x_i - y_i\right)\left(b_i - b_0\right) = Df\left(\sum_{i=0}^{n} x_i a_l - \sum_{i=0}^{n} y_i a_i\right),$$

где $Df : L_1 \to L_2$ - линейное отображение, переводящее $a_i - a_0$ в $b_i - b_0$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Оно существует, ибо $a_1 - a_0, \ldots\ldots, a_n - a_0$ по предположению образуют базис L_1.

Замечания. В аффинном пространстве $\mathbf{R}^n$ барицентрическая комбинация $\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{1}{m} a_i$ представляет положение «центра масс»системы единичных масс, помешенных в точках a_i. Этим объясняется терминология. Если $a_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ (единица на i-м месте), то множество точек с барицентрическими координатами $x_1, \ldots, x_n, 0 \leqslant x_l \leqslant 1$, составляет пересечение линейного много- образия $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$ с положительным октантом (точнее, «2 ^{n}-тантом»). В топологии это множество называется стандартным $(n-1)$-мерным симплексом. Одномерный симплекс-это отрезок прямой, двумерный - треугольник, трехмерный - тетраэдр. Вообще, множество $\left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i a_t \middle| \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad 0 \leqslant x_t \leqslant 1 \right\}$ есть замкнутый симплекс с вершинами $a_1, \ldots, a_n$ в вещественном аффинном пространстве. Он называется вырожденным, если векторы $a_2 - a_1, \ldots, a_n - a_1$ линейно зависимы.

15.8.2 8. Affinity Groups

Пусть A - аффинное пространство над полем $\mathscr{K}$. Множество аффинных биективных отображений $f : A \to A$ в силу предложения п. 10\$1 образует группу, которую мы будем называть аффинной группой и обозначать $\operatorname{Aff} A$.

Ее отображение $D : \operatorname{Aff} A \to \mathrm{GL}(L)$, где $\mathrm{GL}(L)$ - группа линейных автоморфизмов ассоциированного векторного пространства, является гомоморфизмом. Он сорьективен по предложению п. 11 §1 и имеет своим ядром группу сдвигов $\{t_l | l \in L\}$ по следствию п. 13§1. Эта группа сдвигов изоморфна аддитивной группе пространства L по предложению п. 4 \$ 1. Таким образом, $\operatorname{Aff} A$ есть расширение группы GL (L) с помощью аддитивной группы L, которая является нормальным делителем в $\operatorname{Aff} A$.

Это расширение является полупрямым произведением $\mathrm{GL}(L)$ и L. Чтобы убедиться в этом, фиксируем любую точку $a \in A$ и рассмотрим подгруппу $G_a \subset \operatorname{Aff} A$, состоящую из отображений, оставляющих a на месте. По предложению п. 11§1 каждый элемент $f \in G_a$ однозначно определяется своей линейной частью Df, и Df можно выбирать как угодно. Следовательно, D индуцирует изоморфизм G_a с $\mathrm{GL}(L)$. Для любого отображения $\hat{f} \in A$ ff A можно найти единственное отображение $f_a \in Q_a$ с той же линейной частью, и $f = t_l \circ f_a$ для подходящего $l \in L$ по следствию п. 13§1. Фиксировав a, будем записывать $t_l \circ f_a$ в виде пары $[g; l]$, где $g = Df = Df_a \in \mathrm{GL}(L)$. Правила умножения в группе $\operatorname{Aff} A$ на языке таких пар имеют следующий вид.

Предложение.

Нмеем

$$
\begin{gathered}
{[g_1; l_1][g_2; l_2] = [g_1 g_2; g_1(l_2) + l_1],} \\
{[g; l]^{-1} = \left[g^{-1}; -g^{-1}(l)\right].}
\end{gathered}
$$

Дока зательство. Согласно определениям $[g; l]$ переводит точку $a+m \in A$ в $a+g(m)+l$, откуда

$$
\begin{aligned}
& [g_1; l_1][g_2; l_2](a+m) = [g_1; l_1](a+g_1(m)+l_1) = \\
& \quad = a + g_1(g_2(m)+l_2) + l_1 = a + g_1 g_2(m) + g_1(l_2) + l_1 =
\end{aligned}
$$

$= [g_1 g_2; g_1(l_2) + l_1](a+m)$, qто доказывает первую формулу. Вычисляя с ее помощью произведение $[g; l][g^{-1}; -g^{-1}(l)]$, получаем $[\mathrm{id}_L; 0]$; а эта пара представляет тождественный элемент Aif A. то завершает доказательство предложения и показывает, что $\operatorname{Aff} A$ - полупрямое произведение.

Пусть теперь $G \subset \mathrm{GL}(L)$ - некоторая подгруппа. Множество всех элементов $f \in \operatorname{Aff} A$, линейные части которых принадлежат G, очевидно, образуют подгруппу в $\operatorname{Aff} A$ - прообраз

G относительно канонического гомоморфизма Aff $A \to GL(L)$. Мы будем называть ее аффинным расиирением группь G.

Особенно важен случай, когда ассоциированное с A линейное пространство снабжено дополнительной структурой-скалярным произведением, а G представляет собой соответствуюшую группу изометрий. Так строятся две важные в приложениях группы: группа движений аффинного евклидова пространства ($G = \mathrm{O}(n)$) и группа Пуанкаре (L - пространство Минковского, G - группа Лоренца). Изучим подробнее группу движений.

Определение. а) Аффинным евклидовым пространством называется пара, состоящая из аффинного конечномернозо пространства A над полем вещественньх чисел и мвтрики d на нем (в смысле определения n. 1$10 ч. 1), которая обладает следующим свойством: для любых точек $a, b \in A$ расстояние $d(a, b)$ зависит только от $a - b \in L$ u совпадает c длиной вектора $a - b$ в подходящей евклидовой метрике пространства L (не зависящей or a, b).

б) Движением аффинного евклидова пространства А называется произвольное отображение $f : A \to A$, сохраняющее расстояния: $d(f(a), f(b)) = d(a, b)$ для всех $a, b \in A$.

Теорема.

Движения аффинного евклидова пространства A образуют группу, совпадающую с аффинньм расиирением группьь ортогональных изометрий $\mathrm{O}(L)$ ассоциированного с A евклидова пространства L.

Д ок а а тельство. Проверим сначала, что любое аффинное отображение $f : A \to A$ с $Df \in \mathrm{O}(L)$ является движением. В самом деле, согласно определениям

$$d(f(a), f(b)) = |f(a) - f(b)| = |Df(a - b)| = |a - b| = d(a, b);$$

в третьем равенстве мы воспользовались тем, что $Df \Leftarrow O(L)$.

Основная работа связана с доказательством обратного утверждения.

Прежде всего, очевидно, что композиция движений есть движение. Далее, мы уже установили, что сдвиги являются движениями. Пусть $a \Subset A$ - произвольная фиксированная точка, f - движение. Положим $g = t_{a-f(a)} \circ f$. Это движение, оставляюшее точку a на месте. Достаточно доказать, что оно аффинное и что $Dg \in \mathrm{O}(L)$. Отождествим A с L, как в п. 12§1, с помощью отображения с тождественной линейной частью, переводящего a в $0 \in L$. Тогда g превратится в отображение $g : L \to L$ со свойствами $g(0) = 0$ и $|g(l) - g(m)| = |l - m|$ для всех $l, m \in L$, и достаточно установнть что такое отображение лежит в $O(L)$. Проверим прежде всего, что g сохраняет скалярные произведения. Действительно, для любых $l, m \in L$

$$|l|^2 - 2(l, m) + |m|^2 = |l - m|^2 = |g(l) - g(m)|^2 =$$
$$= |g(l)|^2 - 2(g(l), g(m)) + |g(m)|^2,$$

откуда следует требуемое, ибо $|g(l)|^2 = |l|^2, |g(m)|^2 = |m|^2$. Теперь покажем, что g аддитивно: $g(l + m) = g(l) + g(m)$. Положив $l + m = n$ и воспользовавшись предыдушим свойством, имеем $0 = |n - l - m|^2 = |n|^2 + |l|^2 + |m|^2 - 2(n, l) - 2(n, m) + 2(l, m) = |g(n)|^2 + |g(l)|^2 + |g(m)|^2 - 2(g(n), g(l)) - 2(g(n), g(m)) + +2(g(l), g(m)) = |g(n) - g(l) - g(m)|^2$,

откуда $g(n) = g(l) + g(m)$.

Наконец, покажем, что $g(xl) = xg(l)$ для всех $x \in \mathbf{R}, l \in L$. Полагая $m = xl$, имеем

$$0 = |m - xl|^2 = |m|^2 - 2x(m, l) + x^2|l|^2 =$$
$$= |g(m)|^2 - 2x(g(m), g(l)) + x^2|g(l)|^2 = |g(m) - xg(l)|^2.$$

Итак, g-линейное отображение, сохраняющее скалярные произведения, т. е. $g \in \mathrm{O}(L)$. Теорема доказана.

6. Теорема.

Пусть $f : A \to A$ - движение евклидова аффинного пространства с линейной частью Df. Тогда существует такой вектор $l \in L$, что $Df(l) = l$ и $f = t_t^{\circ} g$, где $g : A \to A$ - движение, имеющее неподеинную точку $a \in A$.

Доказательство. Прежде всего, выясним геометрическия смысл этого утверждения. Отождествив A с L посредством аффинного отображения с тождественной линейной qастью, которое переводит a в 0, мы получаем, что f является композицией ортогонального преобразования g и сдвига на вектор l, неподвижный относительно g (ибо $Df = Dg$). Иными словами, это «винтовое движение», если $\det g = 1$, или винтовое движение, скомбинированное с отражением, если $\det g = -1$. В самом деле, g вполне определяется своим ограничением g_0 на $l^1 : g = g_n \oplus \mathrm{id}d_R$, так что g есть вращение вокруг оси $\mathbf{R}l$ (возможно, с отражением).

Приступим теперь к доказательству. Положим $L_2 = \mathrm{Ker}(Df$ - $-\mathrm{id}_L)\,, L_1 = L_2^L$. Имеем $L = L_1 \oplus L_2; L_2$ состоит из Df-инвариантных векторов, пространство L_1 инвариантно относительно $Df - \mathrm{id}_L$ (ибо Df ортогонален), и ограничение $Df - id_L$ на L_1 обратимо.

Выберем сначала произвольную точку $a' \in A$ и положим $g' = t_{a'-f:r'}$ of. Очевидно, $g'(a') = a'$. Положим $f(a') - a' = l_1 + l_2$, где $l_1 \in L_1, l_2 \in L_2$, тогда $f = t_{l_2} \circ t_{l_1} \circ g'$ и $Df(l_2) = l_2$ по определению. Покажем, что $g = t_1, \circ g'$ имеет неподвижную точку $a = a' + m$ для некоторого $m \in L_1$. Имеем

$$t_{t_i} \circ g'(a' + m) = g'(a' + m) + l_1 = a' + Df(m) + l_1.$$

Правая часть равна $a' + m$ тогда и только тогда, когда $(Df - \mathrm{id}_L)\, m + l_1 = 0$. Но, как мы уже отмечали, на L_1 оператор $Df - \mathrm{id}_L$ обратим и $l_1 \in L_1$. Поэтому m существует. Мы получили требуемое разложение $f = t_{l_2} \circ g$ и завершили доказательство.

Движения f со свойством $\det Df = 1$ называются иногда собственными движениями, а остальные (с $\det Df = -1$) - несобственными. Представим более наглядно информацию о движениях ффинных евклидовых пространств размерности $n \leqslant 3$, содержащуюся в теореме п. 6. В следующем пункте сохранены обозначения этой теоремы.

Примеры. а) $n = 1$. Поскольку $\mathrm{O}(1) = \{\pm 1\}$, собственные движения состоят только из сдвигов. Если f несобственное, то $Df = -1$, и из $Df(l) = l$ следует, что $l = 0$. Поэтому всякое несобственное движение прямой имеет неподвижную точку и, стало быть, является отражением относительно этой точки.

б) $n = 2$. Собственное движение f с $Df = \mathrm{id}$ является сдвигом; если $Df \neq \mathrm{id}$ и $\det Df = 1$, то Df, будучи вращением, не имеет неподвижных векторов, так что снова $l = 0$ и f имеет неподвижную точку, относительно которой f является вращением.

Если f - несобственное движение, то Df есть отражение плоскоети относцтельно прямой, а f есть комбинация такого отражения и сдвига вдоль этой прямой. Значит, если несобственное движение плоскости имеет неподвижную точку, то оно имеет целую прямую неподвижных точек и представляет собой отражение относительно этой прямой.

в) $n = 3$. Если $\det Df = 1$, то Df всегда имеет собственное значение единица и неподвижный вектор. Поэтому все собственные движения трехмерного евклидова пространства являются винтовыми движениями вдоль некоторой оси (включая сдвиги, т. е. вырожденные винтовые движения с нулевым поворотом). Это-так называемая теорема Шаля.

Если движение $f = t_l g$ несобственное и $l \neq 0$, то ограничение g на плоскость, ортогональную к l и проходящую через неподвижную точку a, есть несобственное движение этой плоскости. Поэтому оно является отражением относительно прямой в этой плоскости. Обозначим через P плоскость, натянутую на l и на эту прямую. Тогда $t_l g$ есть комбинация отражения относительно плоскости P и сдвига на вектор l, лежащий в P.

Наконец, если $l = 0$, т. е. f несобственное и имеет неподвижную точку, то, отождествляя ее с нулем в L, а f с Df и пользуясь существованием у f собственной прямой L_0 с собственным значением минус единица, получаем геометрическое описание f как композицин вращения в $L_0^{\perp}$ и отражения относительно $L_0^{\perp}$.

Пользуясь полярным разложением линейных операторов, мы можем также разобраться в геометрической структуре любого обратимого аффинного преобразования евклидова аффинного пространства.

Теорема.

Всякое аффиннов преобразование п-мерного евклидова пространства f может быть представлено в виде композиции трех отображсний: а) n растлжений (с положительными коэффи- циентами) вдоль п попарно ортогональных осей, проходящих через некоторую точку $a_0 \in A$; б) движения, оставляющего неподвижним точку a_0; в) свига.

Доказательство. Заменив f его композицией с подходящим сдвигом, как в доказательстве теоремы п. 5, мы можем считать, что уже f имеет неподвижную точку a_0. Отокдествив A с L и a_0 с нулем, мы можем разложить $f = Df$ в композицию положительно определенного симметрического оператора и ортогонального оператора. Приведя первый из них к главным осям и перенеся эти оси в A, получим требуемое.

Заметим в заключение, что в этом параграфе мы широко пользовались линейными подмногообразиями в A (прямыми, плоскостями), определяя их конструктивно как прообразы линейных пространств в L при разных отождествлениях $A \subset L$, зависящих от выбора начала координат. Следующий параграф посвящен более систематическому исследованию связанных с этим понятий.

15.8.3 Affine Subspaces

Определение. Пусть (A, L)-некоторое аффинное пространство. Подмножество $B \subset A$ называется аффинным подпространством в A, если оно пусто или если мнонество

$$M = \{b_1 - b_2 \in L | b_1, b_2 \in B\} \subset L$$

является линейным подпространством в L u $t_m(B) \subset B$ для всех $m \in M$.

Замечания. а) Если выполнены требования определения и B непусто, то пара (B, M) образует аффинное пространство, что оправдывает терминологию (подразумевается, что сдвиг B посредством вектора из M получается ограничением на B этого же сдвига на всем A). В самом деле, просмотр условий в определении п. 1§1 сразу же показывает, что они выполнены для (B, M). В частности, выбрав любую точку $b \in B$, получаем $B = \{b + m | m \in M\}$.

б) Будем называть линейное подпространство $M = \{b_1 - -b_2 \quad | b_1, b_2 \in B\}$ направляющим для аффинного подпространства B. Размерностью B называется размерность M. Очевидно, из $B_\mathrm{i} \subset B_2$ следует, что $M_1 \subset M_2$ и, значит, $\dim B_1 \leqslant \dim B_2$. Назовем два аффинных подпространства одинаковой размерности с обцим направляющим пространством параллельными.

Предложение.

Аффинные подпространства одинаковой размерности $B_1, B_2 \subset A$ параллельны тогда и только тогда, когда существует такой вектор $l \in L$, что $B_2 = t_l(B_1)$. Любые два вектора с таким свойством отличаются на вектор из направляющего пространства для $B_1 u B_2$.

Доказ ательство. Если $B_2 = t_l(B_1)$ и M_2, M_1 - направляющие B_2 и B_1 соответственно, то

$$M_2 = \{a - b | a, b \in B_2\} = \{(a' + l) - (b' + l) | a', b' \in B_1\} = M_1,$$

так что B_1 и B_2 параллельны. Наоборот, пусть M-общее направляющее для B_1 и B_2. Выберем точки $b_1 \in B$ и $b_2 \in B_2$. Имеем $B_1 = \{b_1 + l | l \in M\}, B_2 = \{b_2 + l | l \in M\}$, откуда $B_2 = t_{b_2 - b_1}(B_1)$. Наконец, легко видеть, что $t_{l_1}(B_1) = t_{l_2}(B_2)$ тогда и только тогда, когда $l_1 - l_2 \in M$.

Следствие. Аффинные подпространства в L (с аффинной структурой) - это линейные подмногообразия L в слысле определения п. 1 \6 ч. 1, т. е. сдвиги линейных подпространств.

Следствие. Параллельные аффинные подпространства одинаковой размерности либо не пересекаются, либо совпадают.

Дока з а тельство. Если $b \in B_1 \cap B_2$, то по предыдушему $B_1 = \{b + m | m \in M\} = B_2$, где M - общее направляющее B_1 и B_2.

Аффинные подпространства B_1 и B_2 не обязательно одинаковой размерности называются параллельными, если одно из их направляющих содержится в другом. Слегка изменяя предыдущие доказательства, легко получить следующие факты. Пусть B_1 и B_2 параллельны и $\dim B_1 \leqslant \dim B_2$. Тогда существует такой вектор $l \in L$, что $t_l(B_1) \subset B_2$, и два вектора с этим свойством отличаются на элемент из M_1. Кроме того, либо B_1 и B_2 не пересекаются, либо B_1 содержится в B_2.

Предложение.

Пусть $(B_1, M_1), (B_2, M_2)$ - два аффинных подпространства в A. Тогда $B_1 \cap B_2$ либо пусто, либо является аффинным подпространством с направляющим $M_1 \cap M_2$.

Доказательство. Пусть $B_1 \cap B_2$ непусто и $b \in B_1 \cap B_2$. Тогда $B_1 = \{b + l_1 | l \in M_1\}, B_2 = \{b + l_2 | l \in M_2\}$, откуда $B_1 \cap B_2 = \{b + l | l \in M_1 \cap M_2\}$, что доказывает требуемое. (Следствие п. 5, очевидно, вытекает отсюда.)

Аффинные оболочки. Пусть $S \subset A$-некоторое множество точек в аффинном пространстве A. Наименьшее аффинное подпространство, содержащее S, называется аффинной оболочкой S. Оно существует и совпадает с пересечением всех аффинных подпространств, содержащих S. Мы можем описать аффинную оболочку в терминах барищентрических линейных комбинаций (предложение п. 11§1).

Предложение.

Аффинная оболочка множества S совпадает с множеством барицентрических комбинаций элементов из S:

$$\widetilde{S} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i s_i | \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\},$$

где $\{s_1, \ldots, s_n\} \subset S$ пробегает всевозмонные конечные подмножества S.

Док а з ател л ств о. Покажем преже всего, что барицентрические комбинации образуют аффинное подпространство в A. В самом деле, обозначим через $M \subset L$ линейное подпространство, натянутое на всевозможные векторы $s - t; s, t \in S$. Любые две бариентрические комбинации точек S можно представить в виде $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i s_i, \sum\limits_{i=1}^{n} u_i s_i$ с одним и тем же мпожеством $\{s_1, \ldots, s_n\}$, взяв объединение двух исходных множеств и положив лишние коэффи- циенты равными нулю. Поскольку $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - \sum\limits_{i=1}^{n} y_i = 0$, разность этих комбинаций можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)(s_i - s_1)$$

и потому она лежит в M. Наоборот, любой элемент из M вида $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i (s_i - t_i)$ есть разность точек $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i s_i + \left(1 - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) s_1$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i t_i + + \left(1 - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) s_1$ из S. Поэтому $M = \{b_1 - b_2 | b_1, b_2 \in S\}$. Это же соображение показывает, что $t_m(\tilde{S}) \subset S$ для всех $m \in M$. Следовательно, $\widetilde{S}$ является аффинным подпространством с направляющим пространством M. Ясно, что $S \subset \bar{S}$.

Наоборот, пусть $B \supset S$-любое аффинное подпространство, $\{s_1, \ldots, s_n\} \subset S$. Тогда для любых $x_1, \ldots, x_n \in \mathscr{K}, \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$, имеем

$$\sum_{i=1}^{n} x_i s_i = s_1 + \sum_{i=1}^{n} x_i (s_t - s_1)$$

Поскольку $s_1, \ldots, s_n \in B$, вегтор $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i (s_l - s_1)$ лежит в направляющем пространстве B и потому сдвиг s_1 на него лежит в B. Значит, $S \subset B$ и $\bar{S}$ действительно является наименьшим аффинным подпространством, содержащим S.

Предложение.

Пусть $f : A_1 \to A_2$ - аффинное отображение двух аффинных пространств; $B_1 \subset A_1 u B_2 \subset A_2$ - аффинные подпространства. Тогда $f(B_1) \subset A_2$ u $f^{-1}(B_2) \subset A_1$ являются аффинными подпространствами.

Доказательство. Пусть $B_1 = \{b + l | l \in M_1\}$, где M_1 - направляющее пространство для B_1. Тогда $f(B_1) = \{f(b) + Df(l) | l \in \in M_1\} = \{f(b) + l' | l' \in \operatorname{Im} Df\}$. Следовательно, $f(B_1)$ - аффиннов подпространство с направляющим пространством $\operatorname{Im} Df$.

В частности, $f(A_1)$ есть аффинное подпространство в $A_2, B_2 \cap \bigcap f(A_1)$ есть аффинное подпространство и $f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_2 \cap f(A_1))$. в силу общих теоретико-множественных определений. Заменив A_2 на $f(A_1)$ и B_2 на $B_2 \cap f(A_1)$, мы можем ограничиться случаем, когда f сюръективно. Пусть M_2 - направляющее пространство для B_2. Тогда $B_2 = \{b + m | m \in M_2\}$ и $f^{-1}(B_2) = \{b' + m' | f(b') = b,\ Df(m') \in M_2\}$, Справа можно ограничиться одним значением $b' \in \in f^{-1}(b)$: остальные получатся из него сдвигамн на Ker Df. Отсюда следует, что $f^{-1}(B_2)$ имеет вид $\{b' + m | m \in Df^{-1}(M_2)\}$ и потому является аффинным подпространством с направляющим подпространством $(Df)^{-1}(M_2)$. 11. Следствие. Множество уровня любой аффинно линейной функции является аффинным подпространством.

Док а з ате льство. В самом деле, множества уровня аффинно линейной функции $f : A \to \mathscr{K}^1$ суть прообразы точек в $\mathscr{K}^1$. Но любая точка в аффинном пространстве является аффинным подпространством (с направляющим $\{0\}$).

Предложение.

Пусть $f_1, \ldots, f_n$ - аффинно линейные функчии на аффинном пространстве A. Тогда множество $\{a \in A | f_1(a_1) = = \ldots = f_n(a_n) = 0\}$ является аффинным подпространством в A. Если A конечномерно, то всякое его аффинное подпространство имеет такой вид.

Доказате льство. Указанное множество является конечным пересечением множеств уровня аффинно линейных функций. Поэтому оно аффинное в силу следствия п. 11 и предложения п. 7. Наоборот, пусть $B \subset A$ - аффинное подпространство в конечномерном аффинном пространстве $A, M \subset L$ - соответствующие линейные пространства. Если B пусто, его можно задать уравнением $f = 0$, где f-постоянная функция на A с ненулевым значением (очевидно, любая такая функция аффинно линейна, $\bar{D}\hat{f} = 0$). Иначе, пусть $g_1 = \ldots = g_n = 0$ - система линейных уравнений на L, задающая M; в качестве $g_1, \ldots, g_n$ можно взять, например, базис подпространства $M^2 \subset L^*$. Выберем точку $b \in B$ и построим аффинно линейные функции $f_l : A \to \mathscr{H}^1$ с условиями $f_i(b) = 0, Df_i = g_i, \quad i = 1, \ldots, n$. Очевидно, $f_l(b + l) = g_i(l)$. Поэтому точка $b + l \in A$ обращает в нуль все функции f_l тогда и только тогда, когда $l \in M$, т. е. тогда и только тогда, когда $b + l \in B$. Это завершает доказательство.

Назовем конфигурацией в аффинном пространстве A конечную упорядоченную систему аффинных подпространств $\{B_1, \ldots \quad \ldots, B_n\}$. Две конфигурации $\{B_1, \ldots, B_n\}$ и $\{B_1', \ldots, B_n'\}$ назовем аффинно конгруэнтными, если существует такой аффинный автоморфизм $f \in Aff$, что $f(B_i) = B_i', i = 1, \ldots, n$. Возможны варианты этого понятия, когда f разрешается выбирать лишь из некоторой подгруппы Aff A, например, группы движений, когда A евклидово. В последнем случае будем называть конфигурации метрически конгрунтными. Важные понятия и результаты аффинной геметрии связаны с отысканием инвариантов конфигураций относительно отношения конгруэнтности. Заметим, что оно является аффинным вариантом понятия «одинаковой расположенности», которое мы изучали в $5 ч. 1.

Докажем несколько основных результатов о конгруэнтности.

Пусть A - аффинное пространство размерности n. В соответствии с результатами пп. $8-11$1 назовем конфигурацию $\{a_0, \ldots, a_n\}$ нз $n+1$ точки в A координатной, если ее аффинная оболочка совпадает с A.

Предложение.

а) Любые две координатные конфигурации конгруэнтны и переводятся друг в дрига единотвенным отображением $f \in \operatorname{Aff} A$. б) Координатные конфигурации $\{a_0, \ldots, a_n\} \, u \, \{a_0', \ldots, a_n'\}$ в евклидовом пространстве A метрически конгруэнтны тогда и только тогда, когда $d(a_i, a_j) = d\left(a_i', a_j'\right)$ для любьх $i, j \in 1, \ldots, n$.

Доказательство. а) Положим $e_i = a_i - a_0, e_i' = a_i' - a_0'$. Системы $\{e_i\}$ и $\{e_i'\}$ образуют базисы в L. Пусть $g : L \rightarrow L - \pi$ - нейное отображение, переводящее e_i в e_i'. Построим аффинное отображение $f : A \rightarrow A$ со свойством $Df = g$ и $f(a_0) = a_0'$. Оно существует по утверждению п. 11§1 и лежит в Aff A, ибо g обратимо. Кроме того,

$$f(a_i) = f(a_0) + g(a_i - a_0) = a_0' + e_i' = a_0' + (a_i' - a_0') = a_i'$$

для всех $i = 1, \ldots, n$. Эта же формула показывает, что f единственная, ибо Df должно переводить e_i в e_i' и $f(a_0) = a_0'$.

б) В силу доказанного выше достаточно проверить, что f является движением тогда и только тогда, когда $d(a_i, a_j) = d\left(a_i', a_j'\right)$ для всех i, j. В самом деле, $d(a_i, a_j) = |a_i - a_j| = |e_i - e_j|$, где $e_0 = a_0 - a_0 = 0$, и аналогично $d\left(a_i', a_j'\right) = \left|e_i' - e_j'\right|$. Если f - движение, то Df ортогонально и сохраняет длины векторов, так что условие необходимо. Наоборот, пусть оно выполнено. Тогда $|e_i| = |e_i'|$ для всех $i = 1, \ldots, n$ и далее из равенств $|e_i - e_i|^2 = |e_i'$ - $- e_j'|^2$ получаем, что $(e_i, e_j) = \left(e_i', e_j'\right)$ для всех i, j. Значит, матрицы Грама базисов $\{e_i\}$ и $\{e_i'\}$ совпадают. Но тогда отображение g, переводящее $\{e_i\}$ в $\{e_i'\}$, является изометрией, так что f является движением. Доказательство окончено.

Рассмотрим теперь конфигурации (b, B), состоящие из точки и аффинного подпространства. В евклидовом случае назовем расстоянием от b до B число

$$d(b, B) = \inf\{|l||b + l_1 B\}.$$

Предложение.

а) Конфигурации $(b, B) u \, (b', B')$ аффинно конгруэнтнак тогда и только тогда, когда $\dim B = \dim B' u$ либо одновременно $b \notin B, b' \notin B'$, либо одновременно $b \in B, b' \in B'$.

б) Конфигурачии (b, B) u (b', B') метрически конгрузнтноі тогда и только тогда, когда $\dim B = \dim B' u d(b, B) = d(b', B')$.

Доказ ательство. а) Сформулированные условия, очевидно, необходимы. Пусть они выполнены. Обозначим через M, M' направляющие B, B' соответственно и выберем линейный автоморфизм $g : L \rightarrow L$, для которого $g(M) = M'$. Если $b \in B$ и $b' \in B'$, построим аффинное отображение $f : A \rightarrow A$ с условиями $Df = g$ и $f(b) = b'$. Очевидно, $f(b + l) = b' + g(l)$, так что $f(B) = B'$.

Если $b \notin B$ и $b' \notin B'$, наложим на g дополнительные условия, Выберем по точке $a \in B, a' \in B'$ и потребуем, чтобы g переводил вектор $b - a$ в вектор $b' - a'$. Оба вектора ненулевые и лежат вне M, M' сопветственно, поэтому стандартная конструкция, исходящая из базисов L вида { базис $M, b-a$, дополнение } и { базис $M', b'-a'$, дополнение }, показывает существование g. После этого снова построим аффинное отображение $f: A \to A$ с $Df = g$ и $f(b) = b'$. Проверим, что $f(B) = B$. В самом деле, прежде всего, $f(a) = a'$, потому что

$$f(a) = f(b-(b-a)) = f(b) - g(b-a) = b' - (b'-a') = a'.$$

Далее, $f(a+l) = f(a) + g(l)$, и условие $l \in M$ равносильно условию $g(l) \in M'$, так что $f(B) = B'$.

б) Необходимость условия снова очевидна. Для доказательства достаточности подчиним выборы, сделанные в предыдущем рассуждении, дополнительным требованиям. Прежце всего, отождествим A с L, выбрав начало координат в B. Тогда B отождествится с M, b станет некоторым вектором в L. Пусть a-ортогональная проекция b на M. В линейном варианте мы уже знаем, что $d(b, B) = |b-a|$. Аналогично определим точку a' на M' или в нашем отождествлении на B'. В качестве g возьмем изометрию L, переводящую M в M' и b в b'. Она существует: дополним ортонормированные базисы в M и M' соответственно до ортонормированных базисов в L, содержащих $(b-a)/|b-a|$ и $(b'-a')$ / $||b-a\ |$, и определим g как изометрию, переводящую первый базис во второй. После этого аффинное отображение $f: A \to A$ с $Df = g$ и $f(b) = b'$ будет движением, переводяшим (b, B) в (b', B').

Рассмотрим, наконец, конфигурации, состоящие из двух подпространств B_1, B_2. Полная классификация их с точностью до аффинной конгруэнтности может быть нроведена с помощью соответствующего результата для линейных подпространств, доказанного в II. 5§5 ч. 1. Полная метрическая классификация довольно громоздка: она требует рассмотрения расстояния между B_1 и B_2 и серии углов. Мы ограничимся обсуждением единственного метрического инварианта - расстояния, которое, как обычно, определим формулой

$$d(B_1, B_2) = \inf\{|b_1 - b_2|\, |b_1 \in B_1, b_2 \in B_2\}.$$

Назовем общим перпендикуляром $\kappa B_1, B_2$ такую пару точек $b_1 \in B_1, b_2 \in B_2$, что вектор $b_1 - b_2$ ортогонален к направляющим B_1 и B_2. (Точнее было бы называть общим перпендикуляром отрезок $\{tb_1 + (1-t)b_2 | 0 \leqslant t \leqslant 1\}$.)

Предложение.

а) Общий перпендикуляр $\kappa B_1 u B_2$ всегда существует. Множество общих перпендикуляров биективно пересечению направляющих $B_1 u B_2$.

б) Расстояние межуу B_1 и B_2 равно длине любого общего перпендикуляра $|b_1 - b_2|\, \kappa$ ким.

Док а з ательств о. а) Пусть M_1, M_2-направляющие B_1 и B_2 и пусть $b_1' \in B_1, b_2' \in B_{2^\circ}$ Спроектируем вектор $b_1' - b_2'$ ортогонально на $M_1 + M_2$ и представим проекцию в виде $m_1 + m_2, m_i \in \in M_i$. Положим $b_1 = b_1' - m_1, b_2 = b_2' + m_2$. Очевидно, $b_i \in B_i$ и

$$b_1 - b_2 = b_1' - b_2' - (m_1 + m_2) \in (M_1 + M_2)^\perp.$$

Значит, $\{b_1, b_2\}$ есть общий перпендикуляр к B_1, B_2. Пусть $\{b_1, b_2\}$ и $\{b_1', b_2'\}$ - два общих перпендикуляра.Тогда $b_1 - b_1' \in M_1, b_2 - b_2' \in M_2$ и, кроме того,

$$b_1 - b_2 \in (M_1 + M_2)^\perp, b_1' - b_2' \in (M_1 + M_2)^\perp.$$

Значит, разность $(b_1 - b_1') - (b_2 - b_2')$, лежит одновременно в $M_1 + + M_2$ и $(M_1 + M_2)^\perp$. Поэтому она равна нулю. Следовательно, $b_1 - b_1' = b_2 - b_2' \in M_1 \cap M_2$. Наоборот, если $\{b_1, b_2\}$ - фиксированный общий перпендикуляр и $m \in M_1 \cap M_2$, то $\{b_1 + m, b_2 + m\}$ тоже является общим перпендикуляром. Это завершает доказательство первой части предложения.

б) Пусть $\{b_1, b_2\}$-общий перпендикуляр к B_1, B_2 и $b_1' \in B_1$, $b_2' \in B_2$ - любая другая пара точек. Достаточно доказать, что $|b_1 - b_2| \leqslant |b_1' - b_2'|$. В самом деле,

$$b_1' - b_2' = (b_1 - b_2) + (b_1' - b_1) + (b_2 - b_2').$$

Но $(b_1' - b_1) + (b_2 - b_2') \in M_1 + M_2$, а вектор $b_1 - b_2$ ортогонален $M_1 + M_2$. Значит, по теореме Пифагора

$$\left|b_1' - b_2'\right|^2 = \left|b_1 - b_2\right|^2 + \left|b_1' - b_1 + b_2 - b_2'\right|^2 \geqslant \left|b_1 - b_2\right|^2,$$

что завершает доказательство.

Установим в заключение один полезный результат, характеризующий аффинные подпространства.

Предложение.

Подмножество $S \subset A$ является аффинным подпространством тогда и только тогда, когда вместе с любыми двумя точками $s, t \in S$ оно содержит всю прямую, проходящую через эти точки, т. е. их аффинную оболочку.

Доказ ательство. Прямая, проходяшая через точки s, $t \in S$, - это множество $\{xs + (1 - x)t | x \in \mathscr{K}\}$. Поэтому необходимость условия следует из предложения п. 9. Наоборот, пусть оно выполнено. Поскольку в силу того же предложения аффинная оболочка S состоит из всевозможных барицентрических комбинаций точек S, мы должны проверить, что такие комбинации $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i s_i$ лежат в S. Проведем индукцию по n. При $n = 1, 2$ результат очевиден. Пусть $n > 2$ и для меньших значений n результат доказан. Представим $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i s_i$ в виде

$$y_1 \sum_{i=1}^{n-2} \frac{x_i}{y_1} s_i + y_2 \sum_{i=n-1}^{n} \frac{x_i}{y_2} s_i,$$

где $y_1 = \sum\limits_{i=1}^{n-2} x_i, y_2 = x_{n-1} + x_n$ (мы можем считать, что обе эти суммы не равны нулю, нначе $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i s_i \in S$ по индуктивному предположению). Очевидно,

$$\sum_{i=1}^{n-2} \frac{x_i}{y_1} = \sum_{i=n-1}^{n} \frac{x_i}{y_2} = y_1 + y_2 = 1.$$

Значит, $\sum\limits_{i=1}^{n-2} \frac{x_i}{y_1} s_i$ и $\sum\limits_{i=n-1}^{n} \frac{x_i}{y_2} s_l$ лежат в S, и потому их барицентрическая комбинация с коэффициентами y_1, y_2 лежит в S. Это завершает доказательство.

УПРАЖНЕНИЯ

Назовем i-й медианой системы точек $a_1 \ldots, a_n \in A$ отрезок, соединяющий точку a_l с центром масс остальных точек $\{a_j / j \neq i\}$. Доказать, что все меднаны пересекаются в одной точке - центре масс $a_1, \ldots, a_n$.

Угол между двумя прямыми в евклидовом аффинном пространстве A это угол между их направляющими. Доказать, что две конфигурации из двух прямых в A метрически конгруэнтны тогда и только тогда, когда углы и расстояния между прямыми в обеих конфигурациях совпадают.

Угол между прямой и аффинным подпространством размерности $\geqslant 1$ - это угол между направляющей прямой и ее проекцией на направляюшую подпространства. Пользуясь этим определением, обобщить результат упражнения 2 на конфигурации, состоящие из прямой и подпространства.

15.8.4 4. Convex Polyhedra and Linear Programming

Постановка задачи. Основная задача линейного программирования ставится следующим образом. Дано конечномерное аффинное пространство A над полем вещественных чисел $\mathbf{R}$ и $m+1$ аффинно линейных функций $f_1, \ldots, f_m; f : A \to \mathbf{R}$. Требуется отыскать точку (или точки) $a \in A$, удовлетворяющие условиям $f_1(a) \geqslant 0, \ldots$ $\ldots, f_m(a) \geqslant 0$, для которых функция f принимает наибольшее возможное значение при этих ограничениях.

Вариант, в котором некоторые из неравенств направлены в обратную сторону, $f_l(a) \leqslant 0$, н/или требуется отыскать точки, в которых f принимает наименьшее возможное значение, сводится к предыдущему случаю заменой знака соответствующих функций. Условие $f_i(a) = 0$ равносильно совокупности условий $f_i(a) \geqslant 0$ и $-f_i(a) \geqslant 0$. Все функции f_i можно считать непостоянными.

Мотивировка. Рассмотрим следуюшую математическую модель производства. Пусть имеется предприятие, использующее m видов различных ресурсов и производящее n видов различных продуктов. Ресурсы и продукты измеряются в своих единицах неотрицательными вещественными числами (случай, когда это целые числа, например, количество штук автомобилей, мы не рассматриваем; при больших объемах производства и потребления ресурсов он хорошо аппроксимируется «непрерывной» моделью).

План производства - это вектор $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, указывающий количество $x_f j$-го продукта, которое необходимо произвести. Принимается следующая линейная модель потребления ресурсов: если на производство единицы j-го продукта расходуется количество a_{ij} единиц i-го ресурса, то для выполнения плана $(x_1, \ldots, x_n)$ требуется $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_i$ единиц i-го ресурса. Ресурсы, отпускаемые предприятию, определяются вектором $(b_1, \ldots, b_m)$: дается b_i единиц i-го ресурса. Следовательно, план $(x_1, \ldots, x_n)$ вынолним, только если выполняется система ограничений

$$f_i\left(x_1, \ldots, x_n\right) = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Мы будем всегда считать, что эти неравенства совместны.

Предположим, что предприятие реализует выпущенную им продукцию по цене c_i за еднницу i-го продукта. Тогда прнбыль от реализации произведенного продукта будет равна

$$f\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i.$$

План производства $(x_1, \ldots, x_n)$ называется оптимальным по прибыли, если $f(x)$ достигает наибольшего возможного значения при ограничениях $f_j \geqslant 0, x_i \geqslant 0 (i = 1, \ldots, n)$ (последнее условие означает, что предприятие не добывает производимых им продуктов на стороне - для продажи или для запчастей).

Мы видим, что задача составления оптимального плана является частным случаем задачи, сформулированной в п. 1.

Разумеется, практические приложения линейного программирования связаны с разработкой конкретных алгоритмов отыскания оптимального плана, которые можно применять вручную или на ЭВМ. Мы ограничимся в этом параграфе изложением геометрических аспектов задачи, лежащих, конечно, в основе всех алгоритмов.

Основные геометрические понятия. Фиксируем конечномерное аффинное пространство A над полем R. Буквы f с индексами будут обозначать аффинно линейные функции на A.

Полупространством называется множество точек вида $\{a \in \in A|f(a) \geqslant 0\}$, где f - непостоянная аффинно линейная функция. Многогранником называется пересечение конечного числа полупространств.

Напомним, что подмножество $S \subset A$ выпуклое, если из $a_1, a_2 \in S$ и $0 \leqslant x \leqslant 1$ следует, что $xa_1 + (1-x)a_2 \in S$. Поскольку $f(xa_1 + +(1-x)a_2) = xf(a_1) + (1-x)f(a_2)$, все полупространства выпуклы. Так как пересечение любого семейства выпуклых множеств выпуклое, все многогранники выпуклые. Мы будем говорить, что любая точка $xa_1 + (1-x)a_2, 0 < x < 1$, является внутренней точкой отрезка с концами a_1 и a_2.

Пусть S - выпуклое множество. Выпуклое подмножество $T \subset S$ называется гранью S, если любой отрезок с концами в S, некоторая внутренняя точка которого лежит в T, целиком лежит в T. Все множество S является своею гранью. Грань S, состоящая из одной точки, называется вершиной S. Читателю следует представить себе куб, октаэдр и многогранный угол в трехмерном пространстве, чтобы иметь наглядную картину основной ситуации, важной для линейного программирования. Грани этих фигур в смысле нашего определения - это грани, ребра и вершины школьной геометрии плюс сама фигура. Вершины шара - это все точки его поверхности.

Важнейший результат этого параграфа будет состоять в том, что максимум аффинно линейной функции на ограниченном многограннике (в приложениях этот случай наиболее распространен) достигается на одной из его вершин; последних конечное число. Но прежде нам придется разобраться в структуре многогранников и их граней подробнее.

Лемма. Пересечение семейства граней и грань грани выпуклого множества S является гранью S.

Доказ ательств о. а) Пусть $T = \bigcap T_i, T_i$ - грани S. Любой отрезок с концами в S, внутренняя точка которого принадлежит T_i, целиком лежит в T_i. Значит, если его внутренняя точка лежит в T, то он лежит в T.

б) Пусть $T_1 \subset T \subset S, T$ - грань S. Любой отрезок с концами в S, внутреняя точка которого лежит в T_1, целиком лежит в T, ибо T - грань S, значит, его коншы лежат в T и потому он целиком лежит в T_1, ибо T_1 - грань T.

Лемма. Пусть S - многогранник, заданный неравенствами $f_i \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m$. Тогда для любого i многогранник $S_i = S \cap \{a|f_i(a) = 0\}$ либо пуст, либо является гранью S.

Док а з ательст в. Пусть S_i непуст, $a_1, a_2 \in S$ и внутренняя точка отрезка $xa_1 + (1-x)a_2$ лежит в S_i. Функция $f_i(xa_1 + +(1-x)a_2), 0 \leqslant x \leqslant 1$, линейна по x, обращается в нуль лля некоторого $0 < x_0 < 1$ и, кроме того, неотрицательна при $x = 0$ и $x = 1$. Поэтому она тождественно равна нулю, так что весь отрезок лежит в S_i.

Лемма. Непостоянная аффинно линейная функция f на многограннике $S = \{a|f_i(a) \geqslant 0\}$ не может принимать максимальное значение в точке $a \in S$, для которой все $f_i(a) > 0$.

Доказ ательство. Так как f непостоянна, $Df \neq 0$. Выберем в векторном пространстве L, ассоциированном с A, вектор $l \in L$, для которого $Df(l) \neq 0$. Можно считать, что $Df(l) > 0$, изменив знак l в случае нужды. Если число $\varepsilon > 0$ лостаточно мало и $a \in S$, то $f_i(a + \varepsilon l) > 0$ для всех $i = 1, \ldots, m$: достаточно взять $\varepsilon < \min_i \frac{f_i(a)}{|Df_i(l)|}$. Поэтому $a + \varepsilon l \in S$ пля таких ε. Но $f(a + \varepsilon l) = f(a) + \varepsilon Df(l) > f(a)$, так что $f(a)$ не является максимальным значеннем f.

Теперь мы можем доказать наш основной результат.

Теорема.

Предположим, что аффинно линейная финкция f ограничена сверху на многограннике S. Тогда она принимает свое максимальное значение во всех точках некоторой грани S, являю- щейся также многогранником. Если S ограничен, f принимает свое максимальное значение в некоторой вериине S.

Док аз ате льст тв. Проведем индукцию по размерности A. Случай $\dim A = 0$ очевиден. Пусть $\dim A = n$ и для меньших размерностей теорема доказана. Пусть S задан системой неравенств $f_1 \geqslant 0, \ldots, f_m \geqslant 0$. Так как множество S замкнуто, ограниченная сверху функция f на нем принимает максимальное значение в некоторой точке a. Если $f_1(a) > 0, \ldots, f_m(a) > 0$, то по лемме п. 6 f может быть только константой; в частности свое единственное значение она принимает на всем S. Иначе $f_i(a) = 0$ для некоторого i. Это значит, что f принимает максимальное значение в точке непустого многогранника S_i, который является гранью S и лежит в аффинном подпространстве $\{a | f_i(a) = 0\}$ размерности $n-1$, ибо f_i непостоянна. По индуктивному предположению максимальное значение ограничения f на S_i принимается во всех точках некоторой многогранной грани S_i. По лемме п. 4 она же будет гранью S. Она будет многогранником, ибо к неравенствам, определяющим ее в S_i, с левыми частями, продолженными на все A, следует добавить равенство $f_i = 0$.

Теперь индукцией по размерности аффинной оболочки S покажем, что у любого ограниченного многогранника обязательно есть вершина. В самом деле, для размерности нуль это очевидно. Пусть размерность больше нуля. Мы можем считать, что аффинная оболочка S есть все A. Возьмем любую непостоянную аффинно линейную функцию на A. Она должна принимать на S максимальное значение, ибо S ограничен и замкнут. Стало быть, у S есть непустая грань, во всех точках которой это значение принимается. Она является ограниченным многогранником, аффинная оболочка которого имеет строго меньшую размерность. По индуктивному предположению у нее есть вершина, являющаяся также вершиной S по лемме п. 6.

Окончательно, пусть S ограничен и T-многогранная грань S, на которой исходная функция f принимает свое максимальное значение. Тогда любая вершина T, существование которой доказано, является искомой вершиной S.

15.8.5 5. Affine Quadratic Functions and Quadrics

Определение. Квадратиноой функцией Q на аффинном пространстве (A, L) над полем $\mathscr{K}$ называется отображение $Q : A \rightarrow \mathscr{K}$, для которого существуют такие точка $a_0 \in A$, квадратичная форма $q : L \rightarrow \mathscr{K}$, линейная форма $l : L \rightarrow \mathscr{K}$ и константа $c \in \mathscr{K}$, ито

$$Q(a) = q\left(a - a_0\right) + l\left(a - a_0\right) + c$$

$\partial \wedge$ всех $a \in A$.

Форма q называется квадратичной частью Q, а l-линейной частью Q относительно точки a_0. Очевидно, $c = Q\left(a_0\right)$. Покажем прежде всего, ито от выбора точки a_0 квадратичность Q не зависит. Точнее, пусть g-симметричная билинейная форма на L, являющаяся поляризацией q. Мы, как обычно, считаем, что характеристика $\mathscr{K}$ отлична от двух.

Предложение.

Если $Q(a) = q\left(a - a_0\right) + l\left(a - a_0\right) + c$, то для любой точки $a_0' \in A$ имеем

$$Q(a) = q\left(a - a_0'\right) + l'\left(a - a_0'\right) + c'$$

$2\partial e$

$$l'(m) = l(m) + 2g\left(m, a_0' - a_0\right), \quad c' = Q\left(a_0'\right).$$

Таким образом, переход к другой точкв менлет линейную часть Q и константу.

Доказ а тельство. В самом деле,

$$q\left(a - a_0\right) = q\left(\left(a - a_0'\right) + \left(a_0' - a_0\right)\right) =$$
$$= q\left(a - a_0'\right) + 2g\left(a - a_0', a_0' - a_0\right) + q\left(a_0' - a_0\right),$$
$$l\left(a - a_0\right) = l\left(\left(a - a_0'\right) + \left(a_0' - a_0\right)\right) = l\left(a - a_0'\right) + l\left(a_0' - a_0\right),$$

что доказывает требуемое.

Назовем точку a_0 цеентральной для квадратичной функции Q, если линейная часть Q относительно a_0 равна нулю. Объяснение этого термина состоит в замечании, что точка a_0 центральна тогда и только тогда, когда $Q(a) = Q(a_0 - (a - a_0))$ для всех a: действительно, разность левой и правой части в общем случае равна $2l(a - a_0)$, ибо $q(a - a_0) = q(-(a - a_0))$. Геометрически это значит, нто после отождествления AcL, при котором a_0 переходит в начало координат, функция Q становится симметричной относительно отражения $m \longmapsto -m$.

Назовем центром функции Q множество ее центральных точек.

Теорема.

а) Если квадратичная часть q функции Q невырождена, то центр Q состоит из единственной точки.

б) Если q вырождена, то центр Q либо пуст, либо являетсл аффинным подпространством в A размерности $\dim A - \operatorname{rk} q$ (rk q это ранг q), направляющее подпространство которого совпадает с ядром q.

Доказательство. Начнем с любой точки $a_0 \in A$ и представим Q в виде $q(a - a_0) + l(a - a_0) + c$. Согласно предложению п. 2 точка $a_0' \in A$ будет центральной для Q тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$l(m) = -2g(m, a_0' - a_0)$$

для всех $m = L$. огда a_0' пробегает все точки A, вектор $a_0' - a_0$ пробегает все элементы L, и линейная функция от $m \in L$ вида - $2g(m, a_0' - a_0)$ пробегает все элементы L^*, лежащие в образе канонического отображения g: $L \to L^*$, связанного с формой g.

Если q невырождена, то $\tilde{g}$-изоморфизм. В частности, для функционала $-l/2 \in L^*$ имеется единственный вектор $a_0' - a_0 \in L$ со свойством $g(\cdot, a_0' - a_0) = -\frac{1}{2}l(\cdot)$. Точка a_0' в этом случае и является единственной центральной точкой Q.

Если q вырождена, то возможны два случая. Либо $-l/2$ не лежит в образе $\tilde{g}$; тогда центральных точек нет. Либо $-l/2$ лежит в образе $\tilde{g}$. Тогда для любых двух точек a_0', a_0'' с условием

$$g(\cdot, a_0' - a_0) = g(\cdot, a_0'' - a_0) = -\frac{1}{2}l(\cdot)$$

имеем $a_0' - a_0'' \in \operatorname{Ker} \tilde{g}$, и наоборот, если $g(\cdot, a_0' - a_0) = -\frac{1}{2}l(\cdot)$ и $a_0'' \in a_0' + \operatorname{Ker} \tilde{g}$, то

$$g(\cdot, a_0'' - a_0) = -\frac{1}{2}l(\cdot).$$

Таким образом, центр является аффинным подпространством, а $\operatorname{Ker} \tilde{g}$, т. е. ядро q,-его направляющим. Это завершает доказательство.

Теперь мы можем доказать теорему о приведении квадратичной функции Q к каноническому виду в подходящей аффинной системе координат $\{a_0, e_1, \ldots, e_n\}, \{e_i\}$ - базис $L, a_0 \in A$. Напомним, что точка $a \in A$ в ней представлена вектором $(x_1, \ldots, x_n)$, если $a = a_0 + \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Теорема.

Пусть Q-квадратичная функция на аффинном пространстве A. Тогда существует такая аффинная система координат в A, в которой Q принимает один из следующих видов.

а) Если q невырождена, то $Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 + c$: $\lambda_i, c \in \mathscr{K}$.

б) Если q вырождена ранга t, но центр Q непуст, то

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 + c; \lambda_i, c \in \mathscr{K}.$$

в) Если q вырождена ранаа r и центр Q пуот, то

$$Q\left(x_{1}, \ldots, x_{n}\right)=\sum_{i=1}^{r} \lambda_{i} x_{i}^{2}+x_{r+1}.$$

Д ок аз ательство. Если q невырождена, выберем в качестве a_0 центральную точку Q. Тогда $Q(a)=q\left(a-a_{0}\right)+c$. В качестве $e_1, \ldots, e_n$ выберем базис в L, в котором q приводится к сумме квадратов с коэффициентами. Тот же прием приводит к щели всегда, если центр непуст.

Если центр Q пуст, начнем с произвольной точки a_0 и базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$, в котором квадратичная часть Q имеет вид $\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_{i} x_{i}^{2}$. Пусть линейная часть имеет вид $t=\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_{i} x_{i}$. Мы утвержллем, что $\mu_j \neq 0$ для некоторого $j>r$. Действительно, иначе $l=\sum\limits_{i=1} \mu_{i} x_{i}$, и тогда Q можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_{i} x_{i}^{2}+\sum_{i=1}^{r} \mu_{i} x_{i}+c=\sum_{i=1}^{r} \lambda_{i}\left(x_{i}+\frac{\mu_{i}}{2 \lambda_{i}}\right)^{2}+c^{\prime}.$$

Следовательно, точка $a_{0}-\sum\limits_{i=1}^{r} \frac{\mu_{i}}{2 \lambda_{i}} e_{i}$ будет центральной для Q, что противоречит предположению о пустоте центра.

Но если $\mu_j>0$ для некоторого $j>r$, то система функционалов $\{e^1, \ldots, e^r, l\}$ в L^* линейно независима. Мы можем дополнигь ее до базиса в L^* и в двойственном базисе L получить для Q выражение вида $\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_{i} x_{i}^{2}+x_{r+1}+c$, где x_{r+1} как функция на L есть просто l. Теперь ясно, что имеется точка, в которой Q обращается в нуль, например, $x_1=\ldots=x_r=0, x_{r+1}=-c, x_{r+2}=\ldots=x_n=0$ в этой системе координат. Начав построение с этой точки, мы получим представление Q в виде $\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_{i} x_{i}^{2}+x_{r+1}$.

Дополнения. а) Вопрос о единственности канонического вида сводится к уже решенной задаче о квадратичных формах. Если q невырождена и в некоторой системе координат имеет вид $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_{i} x_{i}^{2}+c$, то точка $(0, \ldots, 0)$ является центром п потому определена однозначно, константа c определена однозначно как значение Q в центре, а произвол в выборе осей и коэффициентов тот же, что для квадратичных форм. В частности, над $\mathbf{R}$ можно считать, что $\lambda_i=\pm 1$, и полным инвариантом является сигнатура. Над С можно считать, что все $\lambda_i=1$.

В вырожденном случае с непустым центром начало координат можно выбирать в центре как угодно, но константа c все равно определяется однозначно, ибо значение Q во всех точках центра постоянно: если a, a_0 лежат в центре, то $l\left(a-a_{0}\right)=0$ и $q\left(a-a_{0}\right)=0$, ибо $a-a_0$ лежит в ядре q. К квадратичной части применимы прежние замечания.

Наконец, в вырожденном случае с пустым центром начало координат можно брать в любой точке, где Q обрашается в нуль; к квадратичной части применимы прежние замечания.

б) Если A-аффинное евклидово пространство, то Q приводится к каноническому виду в ортонормированном базисе. Числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ определены однозначно. Произвол в выборе центра тот же, что и в аффинном случае, произвол в выборе осей тот же, что для квадратичных форм в линейном евклидовом пространстве. 6. Аффинные квадрики. Аффинной квадрикой называется множество $\{a \in A | Q(a)=0\}$, где Q - некоторая квацратичная функция на A. Взгляд на канонические формы Q показывает, что к проблеме исследования типов квалрик применимы все результаты §10 ч. 2.

Рассмотрим вопрос о единственности функции Q, задающей данную аффинную квадрику над полем R. Грежде всего, квадрика может быть аффинным подпространством в A (возможно, пустым): уравнение $\sum\limits_{i=1}^{r} x_{i}^{2}=0$ равноснльно системе уравнений $x_1=\ldots$ $\ldots=x_r=0$. При $r>1$ имеется много непропорциональных друг другу квадратичных функций, задающих ту же квадрику, например $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i^2 = 0$ с любыми $\lambda_i > 0$. Покажем, что для остальных квадрик ответ проше:

Предложение.

Пусть аффинная квадрика X, ке являющаяся аффинным подпространством, задается уравнениями $Q_1 = 0$ и $Q_2 = 0$, где Q_1, Q_2- квадратичные функции. Тогда $Q_1 = \lambda Q_2$ для подходящего скаляра $\lambda \in \mathbf{R}$.

Доказательство. Прежде всего, X не сводится к одной точке. В силу предложения п. 18§3 имеются две точки $a_1, a_2 \in X$, аффинная оболочка которых (прямая) не лежит в X целиком.

Пусть $a_1, a_2 \in X$ и прямая, проходящая через точки a_1, a_2, не лежит в X целиком. Введем в A систему координат $\{a_1; e_1, \ldots, e_n\}$, где $e_n = a_2 - a_1$. Запишем функцию Q_1 в этой системе координат

$$Q_1\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \lambda x_n^2 + l_1'\left(x_1, \ldots, x_{n-1}\right) x_n + l_1''\left(x_1, \ldots, x_{n-1}\right),$$

где l_1', l_1'' - аффинно линейные функции, т. е. многочлены степени $\leqslant 1$ or $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Так как прямая, проходяшая через точки $a_1 = (0, \ldots, 0)$ и $a_2 = (0, \ldots, 0, 1)$, не содержится в X целиком, то $\lambda \neq 0$ и $l_1'(0) - 4\lambda l_1''(0) > 0$. Разделив Q_1 на λ, можно считать, что $\lambda = 1$. Аналогично, можно считать, что как квадратный трехчлен от x_n:

$$Q_2\left(x_1, \ldots, x_n\right) = x_n^2 + l_2'\left(x_1, \ldots, x_{n-1}\right) x_n + l_2''\left(x_1, \ldots, x_{n-1}\right)$$

и $l_2'(0)^2 - 4l_2''(0) > 0$. Мы знаем теперь, что Q_1 и Q_2 имеют одинаковое множество вещественных корней, и хотим доказать, что $Q_1 = Q_2$.

Фиксируем вектор $(c_1, \ldots, c_{n-1}) \in \mathrm{R}^{n-1}$ и рассмотрим векторы $(tc_1, \ldots, tc_{n-1}), t \in \mathbf{R}$. При малых по модулю значениях t дискриминанты по x_n трехчленов $Q_1(tc_1, \ldots, tc_{n-1}, x_n)$ и $Q_2(tc_1, \ldots, tc_{n-1}, x_n)$ остаются положительными, и вещественные корни их, отвечающие точкам пересецения одной и той же прямой с X, совпадают. Значит, $l_1' = l_2'$ и $l_1'' = l_-''$ в таких точках $(tc_1, \ldots, tc_{n-1})$. Поэтому $l_1' = l_2'$ и $l_1'' = l_2''$, ибо аффинно линейные функции, совпадающие на открытом множестве, совпадают. Действительно, их разность обращается в нуль в окрестности начала координат и потому множество ее корней не может быть собственным линейным подпространством. Это завершает доказательство.

15.8.6 6. Projective Spaces

Аффинные пространства получаются из линейных «забвением начала координат». Проективные пространства можно строить из линейных по меньшей мере двумя способами.

а) Добавить k аффинному пространству «бесконечно удаленные точки».

б) Реализовать проективное пространство как множество прямых в линейном пространстве.

Мы выберем в качестве основного определения б): оно яснее показывает однородность проективного пространства.

Определение. Пусть L-линейное пространство над полем $\mathscr{H}$. Множество $P(L)$ прямых (т. е. одномерных линейных подпространств) в L называется проективным пространством, ассочиированным с L, а сами прямые в L называются точками $P(L)$.

Число $\dim L - 1$ называется размерностью $P(L)$ и обозначается $\dim P(L)$. Одномерные и двумерные проективные пространства называются соответственно проективной прямой или проективной плоскостью. Проективное пространство размерности n над лолем $\mathscr{H}$ обозначается также $\mathscr{K} P^n$ или $P^n(\mathscr{K})$, или просто P^n. Смысл соглашения $\dim P(L) = \dim L - 1$ станет сейчас ясен.

Однородные координаты. Выберем базис $\{e_0, \ldots, e_n\}$ в пространстве L. аждая точка $p \in P(L)$ однозначно определяется любым ненулевым вектором на соответствующей прямой в L. Координаты $x_0, \ldots, x_n$ этого вектора называются однородными координатами точки p. Они определены с точностью до умножения на ненулевой скаляр: точка $(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n)$ лежит на той же прямой p и все точки прямой получаются таким образом. Поэтому вектор однородных координат точки p поо традиции обозначается $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n)$.

Таким образом, координатное п-мерное проективное пространство $P\left(\mathscr{K}^{n+1}\right)$ есть множество орбит мультипликативной группы $\mathscr{K}^* = \mathscr{K} \backslash \{0\}$, действующей на множестве ненулевых векторов $\mathscr{H}^{n+1} \backslash \{0\}$ по правилу $\lambda\left(x_0, \ldots, x_n\right) = \left(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n\right); \left(x_0 : x_1 : \ldots : x_n\right)$ есть символ соответствующей орбиты.

Пользуясь однородными координатами, можно хорошо представить себе структуру P^n как множества несколькими разными способами.

а) Аффинное покрытие P^n. Положим

$$U_l = \left\{\left(x_0 : \ldots : x_n\right) | x_i \neq 0\right\}, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Очевидно, $P^n = \bigcup_{i=0}^n U_i$. В классе векторов проективных координат любой точки $p \in U_i$ имеется единственный вектор с l-й координа- той, равной $1 : \left(x_0 : \ldots : x_i : \ldots : x_n\right) = \left(x_0/x_i : \ldots : 1 : \ldots : x_n/x_i\right)$. Опуская эту единицу, получаем, что U_i биективно множеству $\mathscr{K}^n$, которое мы можем интерпретировать как n-мерное линейное или аффинное координатное пространство. Заметим, однако, что пока у нас нет никаких оснований считать, что на U_i имеется какая-то естественная не зависящая от выбора координат линейная или аффинная структура. Позже мы покажем, что инвариантно можно ввести на U_i лишь-целый класс аффинных структур, связанных, впрочем, каноническими изоморфизмами, так что геометрия аффинных конфигураций в любой из них будет одна и та же.

Назовем множество $U_i \cong \mathscr{K}^n$ i-й аффинной картой P^n (в данной системе координат). Точки $\left(y_1^{(i)}, \ldots, y_n^{(i)}\right) \in U_i$ и $\left(y_1^{(j)}, \ldots, y_n^{(j)}\right) \in U_1$ при $i \neq j$ отвечают одной и той же точке P^n, лежащей на пересечении $U_i \cap U_l$, тогда и только тогда, когда, вставив 1 на i-е место в векторе $\left(y_1^{(i)}, \ldots, y_n^{(i)}\right)$ и на j-е место в $\left(y_1^{(i)}, \ldots, y_n^{(i)}\right)$, мы получим пропорциональные векторы.

В частности, $P^1 = U_0 \cup U_1, U_0 \cong U_1 \cong \mathscr{K}$; точка $y \in U_0$ отвечает точке $1/y \in U_1$ при $y \neq 0$; точка $y = 0$ из U_0 не лежит в U_1, а точка $1/y = 0$ из U_1 не лежит в U_0. Естественно считать, что P^t получается из $U_0 \cong \mathscr{K}$ добавлением одной точки с координатой $y = \infty$. Обобщая эту конструкцию, получаем

б) Клеточное разбиение P^n. Положим

$$V_t = \left\{\left(x_0 : \ldots : x_n\right) | x_i = 0 \text{ при } j < i, x_i \neq 0\right\}.$$

Очевидно, $V_0 = U_0$ и $P^n = \bigcup_{i=0}^n V_i$, но на этот раз все V_i попарно не пересекаются. В классе проективных координат любой точки $p \in V_i$ имеется единственный представитель с единицей на i-м месте; опуская эту единицу и предшествующие нули, мы получаем биекцию V_i с $\mathscr{K}^{n-t}$. Окончательно

$$P^n \cong \mathscr{K}^n \cup \mathscr{K}^{n-1} \cup \mathscr{K}^{n-2} \cup \ldots \cup \mathscr{K}^{00} \cong \mathscr{K}^n \cup P^{n-1}.$$

Иными словами, P^n получается добавлением к $U_0 \cong \mathscr{K}^n$ бесконечно удаленного $(n-1)$-мерного проективного пространства, состоящего из точек $\left(0 : x_1 : \ldots : x_n\right)$; в свою очередь, оно получается из аффинного подпространства V_1 добавлением бесконечно удаленного (относительно V_1) проективного пространства P^{n-2} и т. д.

в) Проективные пространства и сферы. В случае $\mathscr{K} = \mathbf{R}$ или С есть удобный способ нормировки однородных координат в P^n, не требующий выбора ненулевой координаты и деления на нее. Именно, любую точку P^n можно представить координатами $(x_0 : \ldots$ $\ldots : x_n)$ с условием $\sum_{i=0}^n \left|x_i\right|^2 = 1$, т. е. точкой на n-мерной (при $\mathscr{K} = \mathbf{R}$) или $(2n+1)$-мерной (при $\mathscr{K} = \mathbf{C}$) евклидовой сфере. Степень оставшейся неоднозначности такова: точка $\left(\lambda x_0 : \ldots : \lambda x_n\right)$ по-прежнему лежит на единичной сфере тогда и только тогда, когда $|\lambda| = 1$, т. е. $\lambda = \pm 1$ при $\mathscr{K} = \mathbf{R}, \lambda = e^{l\varphi}, 0 \leqslant \varphi < 2\pi$ при $\mathscr{K}\mathscr{K} = \mathbf{C}$. Иными словами, n-мерное вещественное проективное пространство RP^n получается из n-мерной сферы S^n отождествлением пар ее диаметрально противоположных точек. В частности, RP1 устроена как окружность, а R P^2 - как лист Мёбиуса, к которому по его границе приклеен круг (рис. 1,2).

Сложнее «увидеть» CP^n: в одну точку CP^n склеивается целый большой круг сферы S^{2n+1}, состоящий из точек $(x_0e^{i\varphi}, \ldots, x_ne^{i\varphi})$ с переменным φ. Из описания $\mathbf{C}P^1$ в случае б) в качестве $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ ясно, что CP^1 можно представлять себе как двумерную сферу Римана, в которой ∞ представлена северным полюсом, как при сте-

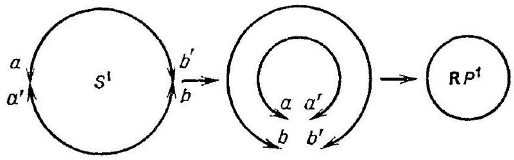


Рис. 1

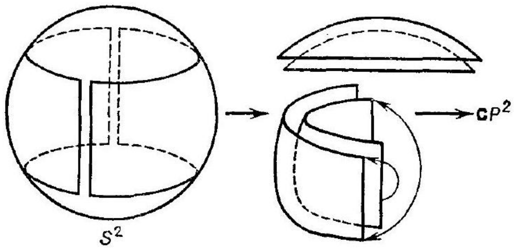


Рис. 2

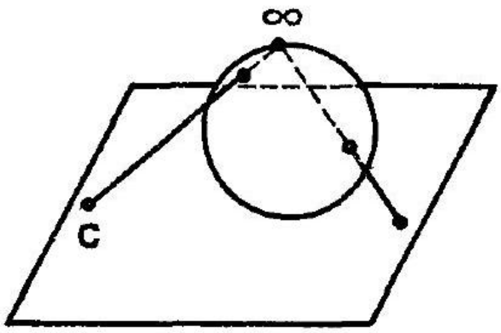


Рис. 3
реографической проекции (рис. 3). Поэтому наше новое представление CP^1 в виде факторпространства S^3 дает замечательное отображение $S^3 \to S^2$, слои которого являются окружностями S^1. Оно называется отображением Хопфа.

В описании этого пункта мы совсем забыли о линейной структуре, исходной для RP^n и CP^n, зато нам стали ясно видны топологические свойства этих пространств, в первую очередь их компактность. (Строго говоря, в определении P^n никакая топология не фигурировала; удобнее всего вводить ее именно с помощью отображений сфер, условившись, что открытые множества в RP^n и CP^n это те, прообразы которых в S^n и S^{2n+1} открыты.) Впредь мы не будем пользоваться топологией и вернемся к изучению линейной геометрии проективных пространств. Не будет, однако, преувеличением сказать, что важность $\mathbf{R}P^n$ и $\mathbf{C}P^n$ в значительной мере объясняется тем, что это естественные компактификации $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{C}^n$, дозволяющие распространить основные черты линейной структуры на бесконечность. Даже над абстрактным полем $\mathscr{K}$, не несущим никакой топологии, эта «компактность» проективных пространств появляется в массе алгебраических вариантов. Типичный пример: на аффинной плоскости две разные прямые, вообще говоря, пересекаются в одной точке, но могут быть и параллельны. Это означает, что точка их пересечения «ушла в бесконечность», и при переходе в проективную плоскость она благополучно обнаруживается: любые две проективные прямые на плоскости пересекаются.

Вернемся теперь к систематическому изучению геометрии P^n

Проективные подпространства. Пусть $M \subset L$ - любое линейное подпространство в L. Тогда $P(M) \subset P(L)$, ибо каждая прямая лежащая в M, является в то же время прямой, лежащей в L.

Множества вида $P(M)$ называются проективными подпространствами в $P(L)$. Очевидно, $P\left(M_1 \cap M_2\right) = P\left(M_1\right) \cap P\left(M_2\right)$, и то же верно для пересечения любого семейства. Следовательно, семейство проективных подпространств замкнуто относительно пересе. чений. Поэтому в множестве проективных подпространств $P(L)$, содержащих данное множество $S \subset P(L)$, имеется наименьшее пересечение всех таких подпространств. Оно называется проективной оболочкой S, обозначается $\bar{S}$ и совпадает с $P(M)$, где $M \longrightarrow$ линейная оболочка всех прямых, отвечающих точкам $s \in S$, в L

При переходе от пар $L \subset M$ к парам $P(L) \subset P(M)$ размерности уменьшаются на единицу, так что коразмерность $\dim L - \dim M$ совпадает с коразмерностью $\dim P(L) - \dim P(M)$. Далее, как мы уже отмечали, $P\left(M_1 \cap M_2\right) = P\left(M_1\right) \cap P\left(M_2\right)$, а $P\left(M_1 + M_2\right)$ совпа. дает с проективной оболочкой $P\left(M_1\right) \cup P\left(M_2\right)$.

Пользуясь этими замечаниями, мы можем написать проективный вариант теоремы п. 3§5 ч. 1. Заметим лишь, что в соответствии с определением в п. 2 размерность пустого проективного пространства следует считать равной -1: этот случай вполне реален, ибо непустые подпространства могут иметь пустое пере. сечение.

Теорема.

Пусть $P_1, P_2 - \partial$ конечномерных проективны подпространства в проективном пространстве P. Тогда

$$\dim P_1 \cap P_2 + \dim \overline{P_1 \cup P_2} = \dim P_1 + \dim P_2 .$$

Примеры. а) P_1, P_2 - две разные точки. Тогда $\dim P_1 \cap P_2 = -1, \dim P_1 = \dim P_2 = 0$, откуда $\dim \overline{P_1 \cup P_2} = 1$, т. е. проективной оболочкой двух точек является прямая. Согласно определению проективной оболочки, она является единственной проективной прямой, проходящей через две точки.

б) Допустим, что $\dim P_1 + \dim P_2 \geqslant \dim P$. Тогда, поскольку $\dim \bar{P}_1 \cup P_2 \leqslant \dim P$, имеем $\dim P_1 \cap P_2 \leqslant 0$. Иными словами, два проективных подпространства, сумма размерностей которых больше или равна размерности объемлющего пространства, имеют непустое пересечение. В частности, В проективной плоскости нет «параллельных» прямых: любые две прямые пересекаются либо в одной точке, либо в двух и тогда (в силу примера а)) совпалают. Аналогично, две проективных плоскости в трехмерном проективном пространстве обязательно пересекаются по прямой или совпадают. Проективная плоскость и прямая в трехмерном пространстве гересекаются по точке или прямая лежит в плоскости.

в) Условие $P_1 \cap P_2 = \varnothing$ в случае $P_l = P\left(M_i\right)$ означает, что $M_1 \cap M_2 = \{0\}$, т. е. что сумма $M_1 + M_2$ прямая.

Задание проективных подпространств уравнениями. Линейная функция $f: L \rightarrow \mathscr{K}$ на линейном пространстве L не определяет никакую функцию на $P(L)$ (кроме случая $f \equiv 0$), ибо всегда есть прямая в L, на которой эта функция непостоянна, и нет возможности фиксировать ее значение в соответствующей точке $P(L)$. Но уравнение $f=0$ определяет линейное подпространство в L и потому проективное подпространство в $P(L)$. Если L конечномерно, то любое подпространство в L и потому любое подпространство в $P(L)$ можно задать системой уравнений

$$f_1 = \ldots = f_m = 0 .$$

В однородных координатах P^n этот эффект проявляется так: система линейных однородных уравнений

$$\sum_{i=0}^n a_{ij} x_i = 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

задает проективное подпространство в P^n, состоящее из точек, однородные координаты которых $(x_0 : \ldots : x_n)$ удовлетворяют этой системе. Умножение всех координат на λ не нарушает обращения в нуль левых частей.

Аффинные подпространства и гиперплоскости. ПІусть $M \subset L$ - линейное подпространство коразмерности единица. Тогда $P(M) \subset \subset P(L)$ имеет коразмерность единица, и мы будем называть такие подпространства гиперплоскостями.

Мы покажем сейчас, как ввести на дополнении A_M к гиперплоскости $P(M)$ структуру аффинного пространства $(A_M, M, +)$. Выберем в L линейное многообразие $M' = m' + M$, не проходящее через начало координат. Оно имеет естественную аффинную структуру: сдвиг на $m \in M$ в M' индуцирован сдвигом на m в L, т. е. состоит в прибавлении m.

С другой стороны, A_M и M' находлтся в биективном соответствии: точка A_M есть прямая, не лежащая в M, и она пересекается с M' в единственной точке, которую и поставим в соответствне исходной точке A_M. Так получаются все точки по одному разу. С помощью этого биективного соответствия аффинную структуру на M' можно перенести на A_M. Однако выбор M' не однозначен, и это приводит к неоднозначности аффинной структуры A_M. Чтобы сравнить две такне структуры, покажем, что тождественное теоретикомножественное отображение A_M в себя является аффинным изоморфизмом этих двух структур.

Предложение.

Пусть $(A_M, M, +') \, u \, (A_M, M, +'') \, - \, \partial$ аффинньe структурь на A_M, построенные c помощцьо описанной конструкции. Тогда тождественное отображение A_M в себл является аффинным изоморфизмом, линейная часть которого есть некоторая гомотетия M.

Д ок азательство. Пусть две структуры отвечают подмногобразиям $m' + M$ и $m'' + M$. Классы $m' + M$ и $m'' + M$ в одномерном факторпространстве L/M пропорциональны. Поэтому можно считать, что $m'' = am', a = \mathscr{K}$. Умножение на a в L переводит $m' + M$ в $m'' + M$ и индуцирует тождественное отображение $P(L)$ в себя и потому A_M в себя. С другой стороны, сдвиг на вектор $m \in M$ в $m' + M$ при гомотетии переходит в сдвиг на вектор $am \in M$ в $m'' + M$. Это и доказывает требуемое.

Следствие. Множество аффинных подпространств в A_M с их отношениями инцидентности, а также множества аффинных отображений A_M в другие аффинные пространства не завислт от произвола в выборе аффинной структуры A_M.

Это оправдывает возможность рассматривать дополнение к любой гиперплоскости в проективном пространстве просто как аффинное пространство без дальнейших уточнений.

Посмотрим теперь, как выглядит проективное пространство $P(M)$ «с точки зрения» аффинного пространства A_M.

Предложение.

Точки $P(M)$ находятся в биективном соответствии с классами параллельных прямых в A. Нными словами, каждая точка $P(M)$ есть «направление ухода на бесконечность» В A_M.

Д оказ ательство. Отождествим A_M с $m' + M$. Класс параллельных прямых в $m' + M$ определяется своей направляющей в M, т. е. точкой в $P(M)$, и это соответствие биективно.

На самом деле можно сказать больше: каждая прямая l в A_M однозначно определяет содержащую ее прямую в $P(L)$ - а именно, ее проективную оболочку $\vec{l}$. Проективная оболочка получается добавлением к l единственной точки, которая как раз лежит в $P(M)$ и является «бесконечно удаленной точкой» этой прямой. Весь класс параллельных прямых в A_M имеет общую бесконечно удаленную точку в $P(M)$. При отождествлении A_M с $m' + M$ оболочка l отвечает всем прямым плоскости в L, проходящей через l и направляющую l, а бесконечно удаленная точка l-это сама направляющая.

Более общо, пусть $A \subset A_M$ - любое аффинное подпространство. Тогда его проективная оболочка $\bar{A}$ в $P(L)$ обладает следующими свойствами:

а) $\bar{A} \backslash A \subset P(M)$: добавляются лишь точки на бесконечности.

б) $\dim A = \dim \bar{A}$.

в) $\bar{A} \backslash A$ есть проективное подпространство в $P(M)$ размерности $\dim A - 1$. (Поэтому $\bar{A}$ называют также проективным замыканием A.)

Отождествление A_M с $m' + M$ сводит проверку этих свойств к прямому применению определений. Действительно, $\bar{A}$ состоит из прямых, лежащих в линейной оболочке $A \subset m' + M$. Эта линейная оболочка натянута на направляюшую L_0 подпространства A и любой вектор из A. Поэтому ее размерность равна $\dim L_0 + 1 = \dim A + 1$, значит, $\dim A = \dim \bar{A}$. Все прямые в этой линейной оболочке пересекаются с $m' + M$, т. е. отвечают точкам A, за исключением прямых, лежащих в направляющей L_0. Последние лежат в $P(M)$ и образуют проективное пространство размерности $\dim L_0 - 1 = \dim A - 1$.

15.8.7 7. Projective Duality and Projective Quadrics

Пусть L - линейное пространство над полем $\mathscr{K}, L^*$ - двойственное k нему пространство линейных функционалов на L. Проективное пространство $P\left(L^*\right)$ называется двойственным к проективному пространству $P(L)$.

Каждая точка $P\left(L^*\right)$ есть прямая $\{\lambda f\}$ в пространстве линейных функционалов на L. Гиперплоскость $f = 0$ в $P(L)$ не зависит от выбора функционала f на этой прямой и однозначно определяет всю прямую. Поэтому можно сказать, что точками двойственного проективного пространства являются гиперплоскости исходного проективного пространства.

Если в L и L^* выбраны двойственные базисы и соответствующие системы однородных координат в $P(L)$ и $P\left(L^*\right)$, это соответствие приобретает простой вид: гиперплоскости с уравнением

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x_i = 0$$

в $P(L)$ отвечает точка с однородными координатами $(a_0 : \ldots : a_n)$ в $P\left(L^*\right)$. Канонический изоморфизм $L \rightarrow L^{**}$ показывает симметрию отношения двойственности между двумя проективными пространствами. Более общо, переводя результаты $7 ч. 1 на проективный язык, мы получим следующее соответствие двойственности между системами проективных подпространств в $P(L)$ и $P\left(L^*\right)$ (мы считаем дальше, что L конечномерно).

а) Подпространству $P(M) \subset P(L)$ отвечает двойственное к нему подпространство $P\left(M^{\perp}\right) \subset P\left(L^*\right)$. При этом

$$\dim P(M) + \dim P\left(M^{\perp}\right) = \dim P(L) - 1.$$

б) Пересечению проективных подпространств отвечает проективная оболочка двойственных к ним, а проективной оболочке пересечение. В частности, отношение инцидентности двух подпространств (т. е. включение одного в другое) переходит в отношение инцидентности.

Это позволяет сформулировать следующий принцип проективной двойственности, являющийся, собственно говоря, метаматематическим, поскольку он представляет собой утверждение о языке проективной геометрин.

Принцип проективной двойственности. Предположим, ито мы доказали теорему о конфигурациях проективных подпространств в проективных пространствах, в формулировке которой фигурируют лишь свойства размерности, инцидентности, пересечения и взятия проективной оболочки. Тогда двойственное утверждение, в котором все термины заменены на двойственные ним по правилам предыдущего пункта, также является теоремой проективной геометрии.

Простой пример: к теореме «две разные плоскости в трехмерном проективном пространстве пересекаются по одной прямой» двойственна теорема «через две разные точки в трехмерном проективном пространстве проходит одна прямая». (В §9 мы познакомимся с гораздо более содержательными теоремами о проективных конфигурациях.)

Проективная двойственность и квадрики. Если линейное пространство L снабжено изоморфизмом $L \rightarrow L^{*}$, то $P\left(L^{*}\right)$ можно отождествить с $P(L)$, и отображение двойственности между проективными подпространствами $P(L)$ и $P\left(L^{*}\right)$ превратится в отображение двойственности между подпространствами в $P(L)$.

Задание изоморфизма $L \rightarrow L^{*}$ равносильно заданию невырожденного скалярного пронзведения $g: L \times L \rightarrow \mathscr{K}$. Рассмотрим подробнее геометрию проективной двойственности, отвечающу: случаю, когда скалярное произведение g симлетрично. Как обычно, будем считать, что характеристика поля $\mathscr{K}$ отлична от двух. Тогда g однозначно восстанавливается по квадратичной форме $q(l)=g(l, l)$.

Уравнение $q(l)=0$ определяет квадрику Q_{0} в L. Ее образ в $P(L)$ мы также будем называть квадрикой, а в применении к теории двойственности - полярной квадрикой. Заметим, что Q_{0} есть конус с центром в начале координат: если $l \in Q_{0}$, то вся прямая $\mathscr{K} l$ лежит в Q_{0}. Отождествляя $P(L)$ с бесконечно удаленными точками L, мы можем отождествить Q с базой конуса Q_{0}.

Согласно общей теории g и q определяют отображение двойственности множества проективных подпространств $P(L)$ в себя; гиперплоскость в $P(L)$, двойственная точке $p \in P(L)$, называется полярной κp (относительно q или Q). Чтобы разобраться в геометрическом устройстве этого отображения, выведем сначала уравнение полярной гиперплоскости в однородных координатах. Мы можем работать сначала в L. Пусть уравнение Q_{0} имеет вид

$$
q\left(x_{0}, \ldots, x_{n}\right)=\sum_{i, j=0}^{n} a_{i j} x_{i} x_{j}=0, \quad a_{i j}=a_{i i}
$$

Точке $\left(x_{0}^{0}, \ldots, x_{n}^{0}\right)$ в L при изоморфизме $L \rightarrow L^{*}$, связанном с q, отвечает линейная функция $\sum_{i, j=0}^{n} a_{i j} x_{i}^{\uparrow} x_{j}$ от $\left(x_{0}, \ldots, x_{n}\right) \in L$. Поэтому уравнение полярной гиперплоскости имеет вид

$$
\sum_{i.}^{n} a_{i j} x_{l}^{0} x_{j}=0
$$

В частности, если $\left(x_{0}^{0}: \ldots: x_{n}^{0}\right) \in Q$, то полярная виперплоскость к данной точке содерэнит ату точку. Более того, в этом случае е уравнение можно переписать в виде

$$
\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial q}{\partial x_{i}}\left(x_{0}^{0}, \ldots, x_{n}^{0}\right)\left(x_{j}-x_{j}^{j}\right)=\sum_{i, j=0}^{n} a_{i j} x_{i}^{0}\left(x_{j}-x_{j}^{0}\right)=0 .
$$

В элементарной аналитической геометрии (над $\mathbf{R}$) такое уравнение определяет касательную гиперплоскость к Q_{0} в ее точке $\left(x_{0}^{0}, \ldots, x_{n}^{0}\right)$. Это мотивирует общее определение:

Определение. Касательной гиперплоскостью к невырожденной квадрике $Q \subset P(L)$ в точке $p \in Q$ называется гиперплоскость, полярная р относительно квадратичной формы q, задающей Q.

Пользуясь общими свойствами проективной двойственности, мы можем теперь немедленно восстановить геометрически значительную часть отображения двойственности и получить серию красивых и неочевидных геометрических теорем, образцы которых мы приведем. Ниже Q - (невырожденная) квадрика в P^{2} или P^{3}.

а) Пусть $Q \subset P^2, p_1, p_2$ - две точки на квадрике, p_3 - точка пересечения касательных к Q в p_1 и p_2. Согласно общему принципу

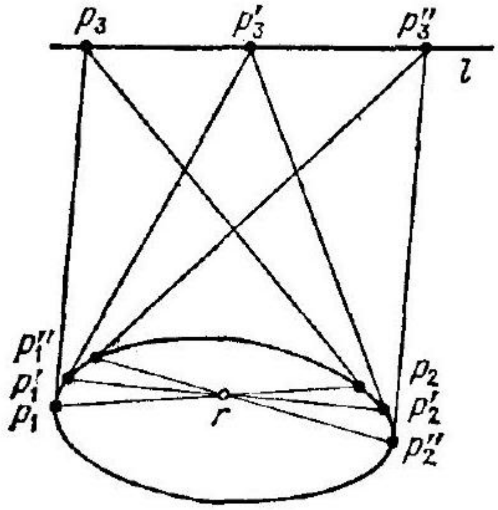


Рис. 4 двойственности точка p_3 отвечает тогда прямой $\overline{p_1p_2}$, проходящей через p_1 и p_2, т. е. проективной оболочке p_1 и p_2.

Заставим точку p_3 меняться вдоль прямой l; проведем из каждой точки прямой две касательные κQ и соединим пары точек касания. Тогда все получающиеся «хорды» Q пересекутся в одной точке r, которая отвечает l в силу двойственности. Еще раз заметим, что для доказательства мы не нуждаемся ни в каких вычислениях: это следует просто из того, что по общему принципу двойственности проективная оболочка точек $p_3, p_3', p_3'', \dots$ полярна к нересечению двойственных к ним прямых, которые и суть соответствующие хорды.

Один момент, однако, заслуживает специального упоминания. Попарные пересечения касательных к точкам Q могут не заметать всю плоскость. Например для эллипса в $\mathbf{R}P^2$, как на рис. 4 (у нас нарисован, конечно, лишь кусочек аффинной карты в $\mathbf{R}P^2$), мы получим лишь внещность эллипса. ак же узнать, какие прямые отвечают внутренним точкам эллипса? Рис. 4 подсказывает ответ: в силу симметрии двойственности следует провести через внутреннюю точку r пучок хорд к Q, затем построить точки пересечения касательных к Q в противоположных концах этих хорд; они и заметут двойственную к точке r прямую l.

Однако, таким образом, описание отображения двойственности становится неоднородным. У нас оказываются два рецепта для построения прямой l, полярной к точке r. 1) Если точка r лежит вне эллипса Q (или на нем), проведите две касательные из r к Q (или одну) и соедините точки касания прямой l (или возьмите касательную l).

Если точка r лежит внутри эллипса Q, проведите все прямые через r, постройте точки пересечения касательных к двум точкам пересечения прямых через r с Q. Их геометрическое место и будет прямой, двойственной к r.

Оказывается, все дело в том, что основное поле $\mathbf{R}$ здесь не является алгебраически замкнутым. Если бы мы работали в $\mathbf{C}P^2$, годились бы оба рецепта, и притом для всех точек $r \in \mathbf{C}P^2$. Вещественная прямая l, лежащая целиком вне вещественного эллипса Q, на самом деле все равно пересекается с ним, но в двух комплексно сопряженных точках, и две комплексно сопряженные касательные к Q в этих точках пересекаются уже в вещественной точке r, лежащей внутри Q. Из вещественной точки r, лежащей внутри Q, все равно можно провести две комплексно сопряженные касательные к Q, через точки касания которых проходит вещественная прямая - это и есть l.

В этом смысле вещественная проективная геометрия $\mathrm{R}P^2$ является лишь кусочком геометрии $\mathrm{C}P^2$, и по-настоящему простая и симметричная теория двойственности имеет место в $\mathbf{C}P^2$, а $\mathbf{R}P^2$ отражает лишь ее вещественную часть.

лассическая проективная геометрия была в значительной мере посвящена выяснению деталей этого красивого мира конфигураций, состоящих из квадрик, хорд и касательных и «невидимых» комплексных точек касания и пересечения. На самом деле вся квадрика может не иметь вещественных точек, как например $x_0^2+x_1^2+x_2^2=0$. Тем не менее видимая часть двойственности разыгрывается на R P^2.

б) Дадим еще одну иллюстрацию в трехмерном случае: рассмотрим проективную невырожденную квадрику Q в трехмерном проективном пространстве и проведем из точки r вне Q касательные плоскости к Q. Тогда все точки касания лежат в одной плоскости, а именно в плоскости, двойственной к r. Причина снова та же: пересечению касательных плоскостей двойственна проективная оболочка точек касания, и если все касательные плоскости пересекаются в точности по r (это нужно и можно доказать в случае, когда Q имеет достаточно много точек), то эта проективная оболочка должна быть двумерна.

Комментарии по поводу комплексных точек касания и пересечения те же, что и в двумерном случае.

Строгое определение вместилища недостающих точек проективного пространства и квадрики в случае $\mathscr{K}=\mathbf{R}$ опирается на понятие комплексификации (см. \$12 ч. 1).

а) Комплексификацией проективного пространства $P(L)$ над R называется проективное пространство $P\left(L^{\mathrm{C}}\right)$ над C. Каноническое вложение $L\subset L^{\mathrm{C}}$ позволяет сопоставить каждой $\mathbf{R}$-прямой в L ее комплексификацию-C-прямую в L^{C}, что определяет вложение $P(L)\subset P\left(L^{\mathrm{C}}\right)$. Точки $P\left(L^{\mathrm{C}}\right)$ суть «комплексные точки» вещественного проективного пространства $P(L)$.

б) Изоморфизм $L\to L^{*}$, определяемый скалярным произведеннем g на L, индуцирует комплексифицированный изоморфизм $L^{\mathrm{C}}\to\left(L^{\mathrm{C}}\right)^{*}$. Он определяется симметричным скалярным произведением g^{c} на L^{C}, которое задает нам квадрику Q^{C} и проективную двойственность в $P\left(L^{\mathbf{C}}\right)$. На $L^{\mathbf{C}}$ и $P\left(L^{\mathrm{C}}\right)$ действует операция комплексного сопряжения, индуцированная антилинейным изоморфизмом $L^{\mathrm{C}}\to\bar{L}^{\mathrm{C}}$, тождественным на $L\subset L^{\mathrm{c}}$. Точки $P(L)$ - это точки $P\left(L^{\mathbf{C}}\right)$, инвариантные относительно комплексного сопряжения; они называются вещественными. Более общо, проективные подпространства в $P\left(L^{\mathbf{C}}\right)$, переводящиеся в себя при комплексном сопряжении, находятся в биекции с проективными подпространствами в $P(L)$. Назовем такие подпространства вещественными. Тогда два отображения, устанавливающие взаимнообратные биекции, можно описать так:

(вещественное проективное подпространство в $P\left(L^{\mathrm{C}}\right)$) $\to$ (множество его вещественных точек в $P(L)$);

(проективное подпространство в $P(L)$) $\to$ (его комплексификация в $P\left(L^{\mathbf{C}}\right)$).

в) Отображение двойственности в $P(L)$, определенное с помощью g, получается из отображения двойственности в $P\left(L^{\mathrm{C}}\right)$, определенного с помощью g^{c}, посредством ограничения последнего на систему вещественных подпрос'гранств в $P\left(L^{\mathrm{C}}\right)$, отождествленную с системой подпространств в $P(L)$, как в разделе б).

Проверки всех этих утверждений, еслiи учесть результаты \$12 ч. 1, проводятся непосредственно, а в вешественной системе координат L^{c}, пришедшей из L, совсем тавтологичны. Единственная содержательная сторона ситуации, проиллюстрированная выше на примерах, состоит в возможности проявленння вещественных точек на невидимых комплексных конфигурациях вроде лежащей внутри эллипса точки пересечения двух невещественных касательных к двум комплексно сопряженным точкам этого эллипса.

В случае основного поля $\mathscr{K}$, отличного от $\mathbf{R}$, нужно воспользоваться общим функтором расширения основного поля (например, до алгебраического замыкания $\mathscr{K}$) вместо комплексификации. Ситуация, однако, несколько усложняется тем, что вместо одного отображения комплексного сопряжения придется привлекать всю группу Галуа для выделения объектов, определенных над исходным полем (вещественных в случае $\mathscr{K}=$ R).

15.8.8 8. Projective Groups and Projections

Пусть L, M - два линейных пространства, $f: L\to M$ - линейное отображение. Если $\operatorname{Ker} f=\{0\}$, то f переводит любую прямую из L в однозначно определенную прямую в M и, значит, индуцирует отображение $P(f): P(L)\to P(M)$, называемое проективизацией f.

В частности, если f - нзоморфнзм, $P(f)$ называется проективным изоморфизмом. При $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$ положение дел сложнее: прямые, лежащие в $\operatorname{Ker} f$, т. е. составляющие проективное подпространство $P(\operatorname{Ker} f) \subset P(L)$, переходят в нуль, который не определяет никакой точки в $P(M)$. Поэтому проективизация $P(f)$ определена лишь на дополнении $U_f = P(L) \backslash P(\operatorname{Ker} f)$. Оба этих случая важны, но ведут в разных направлениях, и мы исследуем их отдельно. Наиболее существенные геометрические черты ситуации выявляются уже при $L = M$.

Проективная группа. Пусть $M = L, f$ пробегает группу линейных автоморфизмов пространства L. Следующие утверждения очевидны: а) $P\left(\mathrm{id}_L\right) = \mathrm{id}_{P(L)}$;

$P(fg) = P(f)P(g)$.

В частности, все отображения $P(f)$ биективны и $P\left(f^{-1}\right) = P(f)^{-1}$. Поэтому $P(f)$ пробегает группу отображений $P(L)$ в себя, которая называется проективной еруппой пространства $P(L)$ и обозначается PGL (L), отображение $P : \mathrm{GL}(L) \rightarrow \mathrm{PGL}(L), \quad f \rightarrow P(f)$ является сюръективным гомоморфизмом групп.

Каждое отображение $P(f)$ переводит проективные подпространства $P(L)$ в проективные подпространства, сохраняя размерность и все отношения инцидентности.

Вместо PGL $(\mathscr{K}^{n+1})$ пишут PGL (n).

Предложение.

Ядро канонического отображения $P : \mathrm{GL}(L) \rightarrow \rightarrow$ PGL (L) состоит в точности из гомотетий. Поэтому PGL (L) изоморфна факторгруппе GL $(L)/\mathscr{K}^*$, где $\mathscr{K}^* = \{a \mathrm{id}_L | a \in \mathscr{K} \backslash \{0\}\}$.

Док а з ательство. По определенню $\operatorname{Ker} P = \left\{f \mathrm{GL}(L)\right\} \; P(f) = \mathrm{id}_{P(L)}\}$. Любая гомотетия переводит каждую прямую из L в себя, поэтому $\mathscr{K}^* \subset \operatorname{Ker} P$. Наоборот, всякий элемент $\operatorname{Ker} P$ переводит любую прямую в себя и потому диагонализируем в любом базисе L. Но тогда все его собственные значения должны совпадать. В самом деле, пусть $f\left(e_1\right) = \lambda_1 e_1, f\left(e_2\right) = \lambda_2 e_2$, где e_1, e_2 линейно независимы. Тогда из условия $f\left(e_1 + e_2\right) = \mu\left(e_1 + e_2\right) = \lambda_1 e_1 + +\lambda_2 e_2$ следует, что $\lambda_1 = \mu = \lambda_2$. Значит, f - гомотетия, что доказывает требуемое.

Отображения $\boldsymbol{P}(f)$ в координатах. Если линейное отображение $f : L \rightarrow L$ в координатах задается матрицей A:

$$f\left(x_0, \ldots, x_n\right) = A \cdot \left[x_0, \ldots, x_n\right]$$

(произведение матрицы A на столбец $\left[x_0, \ldots, x_n\right]$), то $P(f)$ в соответствующих однородных координатах задается той же матрицей A или любой пропорциональной ей:

$$P(f)\left(x_0 : \ldots : x_n\right) \subset (\lambda A) \cdot \left[x_0, \ldots, x_n\right], \quad \lambda \in : \mathscr{K}^*.$$

Если ограничиться рассмотрением точек с $x_0 \neq$, проективные координаты которых можно выбирать в виде $\left(1 : y_1 : \ldots : y_n\right)$, и так же записывать координаты образа точки, мы придем к дробно- линейным формулам:

$$P(f)\left(1 : y_1 : \ldots : y_n\right) = \left(1 : y_1' : \ldots : y_n'\right) = = \left(a_{00} + \sum_{i=1}^n a_{i0} y_i : a_{01} + \sum_{i=1}^n a_{i1} y_i : \ldots : a_{0n} + \sum_{i=1}^n a_{ln} y_i\right) =$$

$$= \left(1 : \frac{a_{01} + \sum_{i=1}^n a_{i1} y_i}{a_{00} + \sum_{i=1}^n a_{i0} y_i} : \ldots : \frac{a_{0n} + \sum_{i=1}^n a_{in} y_i}{a_{00} + \sum_{i=1}^n a_{i0} y_i}\right).$$

(Аналогичный вид, разумеется, имеет $P(f)$ на множестве точек, где $x_i \neq 0, i$ любое.) Эти выражения теряют смысл там, где знаменатель обращается в нуль, т. е. в тех точках дополнения к гиперплоскости $x_0 = 0$, которые $P(f)$ переводит в эту гиперплоскость.

Если таких точек нет, то в терминах аффинных координат $(y_1, \ldots, y_n)$ на $P(L) \setminus \{x_0 = 0\}$ мы получаем аффинное отображение. Инвариантное объяснение этого дает следующий результат.

Предложение.

Пусть $M \subset L$ - подпространство коразмерности единица, $P(M) \subset P(L)$ - соответствующая гиперплоскость, A_M - дополнение к ней с аффинной структурой, описанной в \$. Поставим в соответствие любому проективному автоморфизму $P(f)$: $P(L) \to P(L)$ с условием $f(M) \subset M$ его ограничение на A_M. Получим изоморфизм подгрупп $\mathrm{PGL}(L)$, переводящей $P(M)$ в себя, с Aff A_M. Линейная часть ограничения $P(f)$ на A_M пропорциональна ограничению f на M.

Доказ ательство. Введем аффинную структуру на A_M, отождествив A_M с линейным многообразием $m' + M \subset L$: каждой точке A_M ставится в соответствие пересечение соответствующей прямой в L с $m' + M$. Если $f(M) \subset M$, то в классе f с одним и тем же $P(f)$ можно выбрать единственное отображение f_0, для которого $f_0 \left(m' + M\right) = m' + M$. Ограничения всех таких отображений f_0 образуют группу аффинных преобразований $m'+M$, поскольку $m'+M$ есть аффинное подпространство в L с его аффинной структурой, а $f_0 : L \to L$ линейно и потому аффинно. Линейная часть такого f_0, очевидно, совпадает с ограничением f_0 на M. Для всякой линейной части можно найти соответствующее f_0, и при фиксированной линейной части можно найти f_0, переводящее любую точку $m' + M$ в любую другую: чтобы увидеть это, достаточно выбрать базис в L, состояший из базиса в M и вектора m', после чего воспользоваться формулами п. 3. Наконец, если f тождественно действует на $m' + M$ и M, то $P(f) = \mathrm{id}_{P(L)}$, ибо f переводит каждую прямую в L в себя. Это завершает доказательство.

Действие проективной группы на проективных конфигурациях. Назовем проективной конфигурацией конечную упорядоченную систему проективных подпространств в $P(L)$. Будем говорить, что две конфигурации проективно конгруэнтны тогда и только тогда, когда одну можно перевести в другую проективным преоб- разованием $P(L)$ в себя. Очевидно, для этого необходимо и достаточно, чтобы соответствующие конфигурации линейных подпространств в L были одинаково расположены в смысле \$5 ч. 1. Поэтому мы можем сразу же перевести доказанные там результаты на проективный язык и получить следующие факты.

а) Группа PGL (L) транзитивно действует на множестве проективных подпространств фиксированной размерности в $P(L)$, т. е. все такие подпространства конгруэнтны (см. п. 1\$5 ч. 1).

б) Группа PGL (L) транзитивно действует на множестве упорядоченных пар проективных подпространств в $P(L)$ с фиксированными размерностями членов пары и их пересечений, т. е. все такие пары конгруэнтны (см. п. 5\$5 ч. 1).

в) Группа PGL (L) транзитивно действует на множестве упорядоченных n-ок проективных подпространств $(P_1, \ldots, P_n)$ с фиксированными размерностями $\dim P_i$, которые обладают следующим свойством: для каждого i подпространство P_i не пересекается с проективной оболочкой $(P_1, \ldots, P_{i-1}, P_{i+1}, \ldots, P_n)$, т. е. наименьшим проективным подпространством, содержащим эту систему.

Действительно, пусть $P_i = P\left(L_i\right), L_i \subset L$. Проективная оболочка $(P_1, \ldots, P_{i-1}, P_{i+1}, \ldots, P_n)$, как нетрудно убедиться, совпадает с $P\left(L_1 + \ldots + L_{i-1} + L_{i+1} + \ldots + L_n\right)$, а условие пустоты ее пересечения с $P\left(L_i\right)$ означает, что $L_i \cap \sum\limits_{j \neq i}^{n} L_j = \{0\}$. В силу условия а) теоремы п. 8\$5 ч. 1 сумма $L_l \oplus \ldots \oplus L_n$ прямая, и $\mathrm{GL}(L)$ транзитивно действует на таких n-ках подпространств (выбрать базис в L, дополняющий объединение базисов всех L_i, и воспользоваться тем, что GL (L) транзитивна на базисах L).

В качестве частного случая ($\dim P_i = 0$ для всех i) получаем следующий результат: все наборы n точек в $P(L)$, обладающие тем свойством, что никакая точка не лежит в проективной оболочке остальных, проективно конгруэнтны.

г) Группа PGL (L) транзитивно действует на множестве проективных флагов $P_1 \subset P_2 \subset \ldots \subset P_n$ в $P(L)$ фиксированной длины n с фиксированными размерностями $\dim P_i$.

Действительно, любой такой флаг является образом флага $L_1 \subset \subset L_2 \subset \ldots$ в L; выберем базис в L, первые $\dim P_i + 1$ элементов которого порождают подпространство L_i для каждого i, и снова воспользуемся транзитивностью действия $\mathrm{GL}(L)$ на базисах.

Кроме этих результатов, являющихся прямым следствием соответствующих теорем для линейных пространств, разберем один интересный новый случай, в котором впервые появляется нетривиальный инвариант относительно проективной конгруэнтности: классическое «двойное отношение четверки точек на проективной прямой». Большую часть рассуждений можно провести в случае произвольной размерности, и мы начнем с общего определения.

Определение. Система точек $p_1, \ldots, p_N$ в -мерном проективном пространстве P находится в общем положении, если для всех $m \leqslant \min\{N, n+1\}$ и всех подмножеств $S \subset \{1, \ldots, N\}$ мощности m проективная оболочка точек $\{p_i | i \subseteq S\}$ имеет размерность $m-1$.

Нас особенно будут интересовать случаи $N = n+1, n+2,\ n+3$.

а) $n+1$ точек в общем положении. Поскольку никакая точка системы не лежит в проективной оболочке остальных (иначе проективная оболочка всей системы имела бы размерность $n-1$, а не n), такие конфигурации уже были рассмотрены в разделе в) п. 6; в частности, проективная группа на них транзитивна. Сейчас мы хотим обратить внимание на то, что проективное преобразование, переводящее одну систему $n+1$ точек в общем положении в другую, не определено однозначно.

Действительно, если $e_1, \ldots, e_{n+1}$ - ненулевые векторы, лежащие в $p_1, \ldots, p_{n+1}$ соответственно, то $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ есть базис L (где $P = P(L)$) и группа проективных преобразований, оставляющих на месте все точки p_l, состоит в точности из преобразований вида $P(f)$, где f диагональны в базисе $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$. Эта оставшаяся степень свободы позволяет доказать транзитивность действия PGL (L) на системах $n+2$ точек в общем положенин.

б) $n+2$ точки в общем положении. Если точки $\{p_1, \ldots, p_{n+2}\}$ находятся в общем положении, то точки $\{p_1, \ldots, p_{n+1}\}$ также находятся в общем положении. ак в предыдущем абзаце, выберем базис $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}, e_i \in p_i$. Он определяет систему однородных координат в P. Пусть $(x_1 : \ldots : x_{n+1})$ - координаты точки p_{n+2} в этом базисе. Ни одна из координат x_i не -равна нулю, иначе вектор $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ на прямой p_{n+2} линейно выражался бы через векторы $e_l, 1 \leqslant j \leqslant n+1, j \neq i$, откуда следует, что проективная оболочка $n+1$ точки $\{p_i | i \neq j\}$ имела бы размерность $n-1$, а не n. Но преобразование $P(f)$ с $f = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})$ (в базисе $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$) переводит $(x_1 : \ldots : x_{n+1})$ в точку $(\lambda_1 x_1 : \ldots : \lambda_{n+1} x_{n+1})$, а $p_1, \ldots, p_{n+1}$ оставляет на месте. Отсюда следует, что любую точку $(x_1 : \ldots : x_{n+1})$ (все $x_i \neq 0$) можко перевести в любую другую $(y_1 : \ldots : y_{n+1})$ (все $y_l \neq 0$) единственным проективным преобразованием, оставляющим $p_1, \ldots, p_n$ на месте.

Итак, мы установили, что все упорядоченные системы $n+2$ точек в общем положении в P, где $\dim P = n$, конгруэнтны и, более того, образуют главное однородное пространство над группой $\mathrm{PGL}(L)$.

Принимая «пассивную» точку зрения вместо «активной», мы можем сказать, что для любой упорядоченной системы точек $\{p_1, \ldots, p_{n+2}\}$ существует единственная система однородных координат в P, в которой координаты $p_1, \ldots, p_{n+2}$ имеют следующий вид:

$$p_i = (1 : 0 : \ldots : 0), p_2 = (0 : 1 : 0 : \ldots : 0), \ldots, p_{n+1} = (0 : \ldots : 0 : 1,$$
$$p_{n+2} = (1 : \ldots : 1).$$

Можно назвать эту систему приспособленной К $\{p_1, \ldots, p_{n+2}\}$.

в) $n+3$ точки в обием положении. Такие конфигурации уже не все конгруэнтны: если $\{p_1, \ldots, p_{n+3}\}$ и $\left\{p_1', \ldots, p_{n+3}'\right\}$ даны, мы можем найти единственное проективное отображение, переводящее p_i в p_i' для всех $1 \leqslant i \leqslant n+2$, но p_{n+3} попадает или не попадает в p_{n+3}' в зависимости от ситуации.

Нетрудно описать проективные инварианты системы из $n+3$ точек. Выберем систему однородных координат в P, в которой первые $n+2$ точки имеют координаты, описанные в случае 6). В ней точка p_{n+3} имеет координаты $(x_1 : \ldots : x_{n+1})$, определенные однозначно с точностью до пропорциональности. Любой проективный автоморфизм P, примененный одновременно к конфигурации $\{p_1, \ldots, p_{n+3}\}$ и к приспособленной к ней системе координат, переведет эту конфигурацию в другую, а систему координат - в приспособленную систему координат новой конфигурации. Поэтому координаты $(x_1 : \ldots : x_{n+1})$ последней точки останутся теми же самыми.

Все предыдущие рассуждения с очевидными видоизменениями переносятся также на случай, когда у нас имеются два n-мерных проективных пространства P и P', конфигурации $\{p_1, \ldots, p_N\} \subset P$ и $\{p'_1, \ldots, p'_N\} \subset P'$, и мы интересуемся проективными изоморфизмами $P \to P'$, переводящими первую конфигурацию во вторую. Резюмируем результаты обсуждения в следующей теореме:

Теорема.

а) Пусть P, P' – n-мерные проективнысе пространства, $\{p_1, \ldots, p_{n+2}\} \subset P u \left\{p'_1, \ldots, p'_{n+2}\right\} \subset P'$ - две системы точек в общем положении. Тогда существует единственный проективныи изоморфизм $P \to P'$, переводящий первую конфигурацию во вторую.

б) Аналогичный результат верен для систем $n+3$ точек в общем положении тогда и только тогда, когда координаты $(n+3)$-й точки в системе, приспособленной κ первым $n+2$ точкам, для обеих конфигураций совпадают (конечно, с точностью до скалярного множителя).

Двойное отношение. Применим теорему п. 8 к случаю $n = 1$. Мы получим, прежде всего, что если на двух проективных прямых заданы упорядоченные тройки попарно разных точек (это и есть здесь условие общности положения), то существует единственный проективный изоморфизм прямых, переводящий одну тройку в другую.

Далее, пусть задана четверка попарно разных точек $\{p_1, p_2, p_3, \ \ p_4\} \subset P^1$ с координатами $(1:0), (0:1), (1:1)$ и $(x_1 : x_2)$ в приспособленной системе. Тогда $x_2 \neq 0$. Положим
$$[p_2, p_3, p_1, p_4] = x_1 x_2^{-1}.$$

Это число называется двойным отношением четверки точек $\{p_i\}$. Необычный порядок объясняется желанием сохранить согласованность с классическим определением: в аффинной карте, где $p_2 = \infty$, $p_3 = 0, p_1 = 1$, координаты точек в квадратных скобках располагаются так: $[0, 1, \infty, x]$, где x и есть двойное отношение этой четверки.

Сам термин «двойное отношение» происходит из следуюшей явной формулы для вычисления инварианта $[x_1, x_2, x_3, x_4]$, где $x_i \in \mathscr{K}'$ на сей раз понимаются как координаты точек p_i в произвольной аффинной карте P^1. Согласно результатам п. 4 группа PGL(1) в этой карте представлена дробно-линейными преобразованиями вида $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}, ad - bc \neq 0$. Такое преобразование, переводящее (x_1, x_2, x_3) в $(0, 1, \infty)$, имеет вид
$$x \mapsto \frac{x_1 - x}{x_3 - x} : \frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_2}.$$

Подставляя сюда $x = x_4$, находим
$$[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{x_1 - x_4}{x_3 - x_4} : \frac{x_1 - x_2}{x_3 - x_2}.$$

Еще одна классическая конструкция, связанная с утверждением а) теоремы п. 8 для $n = 1$, описывает представление симметрической группы S_3 дробно-линейными преобразованиями. Согласно этой теореме любая перестановка $\{p_1, p_2, p_3\} \longmapsto \{p_{\sigma(1)}, p_{\sigma(2)}, p_{\sigma(3)}\}$ трех точек на проективной прямой индуцирована единственным проективным преобразованием этой прямой.

В аффинной карте, где $\{p_1, p_2, p_3\} = \{0, 1, \infty\}$, эти проективные преобразования представлены дробно-линейными преобразованиями
$$x \mapsto \left\{x, \frac{1}{x}, 1 - x, \frac{1}{1-x}, \frac{x-1}{x}, \frac{x}{x-1}\right\}.$$

Перейдем теперь к изучению проекций.

Пусть линейное пространство L представлено в виде прямой суммы двух своих подпространств размерности $\geqslant 1: L=L_1 \oplus L_2$. Положим $P=P(L), P_i=P\left(L_i\right)$.

Как было показано в п. 1, лннейная проекция $f: L \rightarrow L_2, f\left(l_1+l_2\right)=l_2, l_i \in L_i$, индуцирует отображение

$$P(f): P \backslash P_1 \rightarrow P_2,$$

которое мы будем называть проекцией из центра P_1 на P_2. Чтобы описать всю ситуацию в чисто проективных терминах, заметим следующее.

а) $\operatorname{dim} P_1+\operatorname{dim} P_2=\operatorname{dim} P-1$ и $P_1 \cap P_2=\varnothing$. Наоборот, любая конфигурация $\left(P_1, P_2\right)$ с такими свойствами происходит из едннственного прямого разложения $L=L_1 \oplus L_2$.

б) Если $a \in P_2$, то $P(f) a=a$; если $\alpha \in P \backslash\left(P_1 \cup P_2\right)$, то $P(f) a$ определяется как точка пересечения с P_2 единственной проективной прямой в P, пересекающейся с P_1 и P_2 и проходящей через a.

Действительно, случай $a \in P_2$ очевиден. Если $a \notin P_1 \cup P_2$, то на языке пространства L нужный нам результат формулируется так: через любую прямую $L_0 \subset L$, не лежашую в L_1 и L_2, проходит единственная плоскость, пересекающаяся с L_1 и L_2 по прямым, и ее пересечение с L_2 совпадает с ее проекцией на L_2. В самом деле, одна плоскость с этим свойством есть: она натянута на проекции L_0 на L_1 и L_2 соответственно. Существование двух таких плоскостей влекло бы существование двух разных разложений ненулевого вектора $l_0 \in L_0$ в сумму двух векторов из L_1 и L_2 соответственно, что невозможно, ибо $L=L_1 \oplus L_2$.

Поскольку описанная проективная конструкция отображения $P \rightarrow P \backslash P_1$ поднимается до линейной, мы сразу же получаем, что для любого подпространства $P^{\prime} \subset P \backslash P_1$ ограничение проекции $P^{\prime} \rightarrow P_1$ является проективным отображением, т. е. имеет вид $P(g)$, где g - некоторое линейное отображенне соответствующих векторных пространств.

В важном частном случае, когда P_1 - точка, P_2 - гиперплоскость, отображение проекции из центра P_1 на P_2 переводит точку a в ее образ на P_2, видимый наблюдателем из P_1. Поэтому отношение между некоторой фигурой и ее проекцией в таком случае называют еще перспективным. Интуитивно менее очевндна, например, проекция из прямой на прямую в P^3 (рис. 5,6).

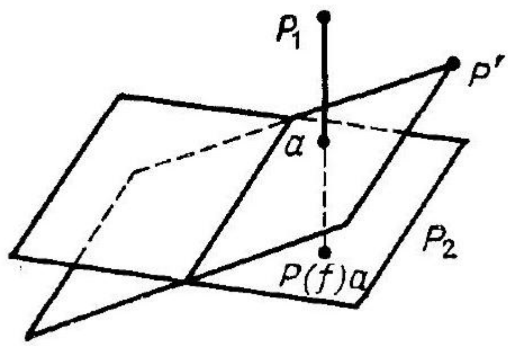


Рис. 5

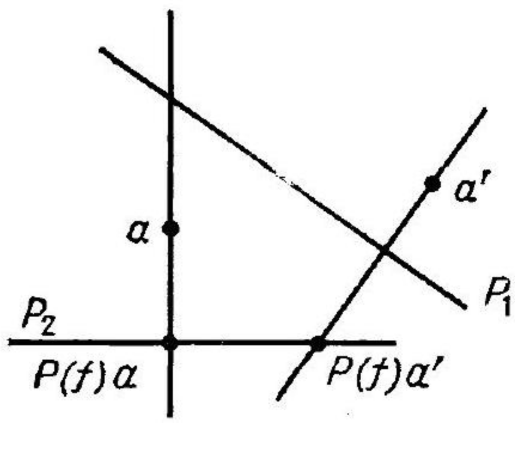


Рис. 6

Важное свойство проекций, которое следует иметь в виду, состонт в следующем: если $P' \subset P \backslash P_1$, то проекция из центра P_1 определяет проективный изоморфизм P' и его образа в P_2. Действительно, на языке линейных пространств это означает, что проекция $f : L_1 \oplus L_2 \to L_2$ индуцирует изоморфизм M с $f(M)$, где $M \subset L$ - любое подпространство с $L_1 \cap M = \{0\}$. Это так, ибо $L_1 = \operatorname{Ker} f$.

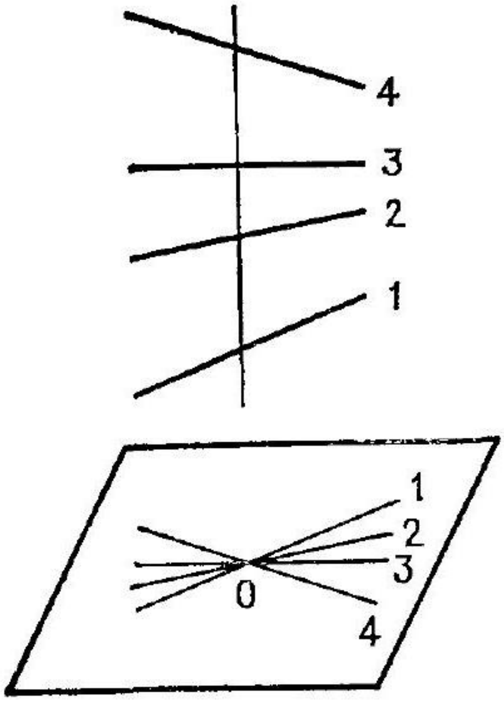
Поведение проекции вблизи центра. Ограничимся дальше рассмотрением проекций из точки $p_1 = a \in P$ и попытаемся понять, что происходит с точками, находящимися вблизи центра. В случае $\mathscr{K}^p = \mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$, когда действительно можно говорить о близости точек, картина такова: в точке a нарушается непрерывность проекции, ибо точки b, как угодно близкие ka, но подходящне к a «с разных сторон», проектируются в далеко отстоящие друг от друга точки p_2. Именно это свойство проекции лежит в основе ее приложений к разного типа вопросам о «разрешении особенностей». Если в P лежит некая «фигура» (алгебранческое многообразие, векторное поле), имеющая вблизи точки необычное строение, то, проектируя ее из точки a, мы можем растянуть окрестность этой точки и увидеть, что в ней пронхотют. в увеличенном масштабе, причем коэффициент увеличения при приближении к безгранично растет. Хотя эти приложения относятся к существенно нелинейным ситуациям (тривиализируясь в линейных моделях), стонт разобраться в структуре проекции вблизи ее центра несколько подробнее, насколько это можно сделать, оставаясь в рамках линейной геометрии.

Введем в $P(L)$ проективную систему координат, в которой центром проекции является точка $(0, \ldots, 0, 1)$, а $P_2 = P^{n-1}$ состоит из точек $(x_0 : x_1 : \ldots : x_{n-1} : 0)$; чтобы добиться этого, следует выбрать в L базис, являющийся объединением базисов в L_1 и L_2 (поскольку центр - точка, $\dim L_1 = 1$).

Нетрудно видеть, что тогда точка $(x_0 : \ldots : x_n)$ проектируется в $(x_0 : \ldots : x_{n-1} : 0)$. Дополнение A к P_2 снабжено аффинной системой координат

$$(y_0, \ldots, y_{n-1}) = (x_0/x_n, \ldots, x_{n-1}/x_n)$$

с началом O в центре проекции. Рассмотрим прямое произведение $A \times P_2 = A \times P^{n-1}$ и в нем график Γ_0 отображения проекции, ко-



Puc. 7 торое, напомним, определено только на $A \backslash \{0\}$. Этот график состоит из пар точек с координатами

$$((x_0/x_n, \ldots, x_{n-1}/x_n), (x_0 : \ldots : x_{n-1})),$$

где не все $x_0, \ldots, x_{n-1}$ равны нулю одновременно. Увеличим график Γ_0, добавив к нему над точкой $O \in A$ множесгво $\{0\} \times P^{n-1} \subset A \times P^{n-1}$,

$$\Gamma = \Gamma_0 \cup \{0\} \times P^{n-1},$$

в соответствии с геометрической интуицией, согласно которой при проекции из 0 центр «переходит во все пространство P^{n-1}».

Множество Γ обладает рядом хороших свойств.

а) Γ состоит в точности из пар точек

$$((y_0, \ldots, y_{n-1}), (x_0 : \ldots : x_{n-1})),$$

удовлетворяющих системе алгебраических уравнений

$$y_i x_j - y_j x_i = 0; \quad i, j = 0, \ldots, n-1.$$

Действительно, эти уравнения означают, что все миноры матрицы $\begin{pmatrix} x_0 & \ldots & x_{n-1} \\ y_0 & \ldots & y_{n-1} \end{pmatrix}$ равны нулю, так что ее ранг равен единице (ибо первая строчка ненулевая) н, значит, вторая строка пропорциональна первой. Если коэффициент пропорциональности не равен нулю, мы получаем точку из Γ_0, а если равен, то из $\{0\} \times P^{n-1}$.

б) Отображение $\Gamma \to A : ((y_0, \ldots, y_{n-1}), (x_0 : \ldots : x_{n-1})) \to (y_0, \ldots \ \ldots, y_{n-1})$ является биекцией всюду, кроме слоя над точкой $\{0\}$. Иными словами, Γ получается из A «вклеиванием» целого проективного пространства P^{n-1} вместо одной точки. Говорят, что Γ получается из A «раздутием» (blowing up) точки, или σ-процессом с центром в точке O. Прообраз в Γ каждой прямой в A, проходящей через точку O, пересекает вклеенное проективное пространство P^{n-1} также по одной точке, но своей для каждой прямой. В случае $\mathcal{K} = \mathrm{R}, n = 2$ можно представлять себе аффинную карту вклеенного проективного пространства P_1 как ось винта мясорубки Γ, делающего полоборота на протяжении своей бесконечной длины (рис. 7).

Реальное применение проекции к исследованию особенности в точке $O \in A$ связано с переносом интересуюшей нас фигуры с A на Γ и рассмотрению геометрии ее прообраза вблизи вклеенного пространства P^{n-1}. При этом, например, прообраз алгебраического многообразия будет алгебраичен благодаря тому, что Γ задается алгебраическими уравнениями.

15.8.9 9. Desargues and Pappus Configurations and Classical Projective Geometry

лассическая синтетическая проективная геометрия была в значительной мере посвящена изучению семейства подпространств в проективном пространстве с отношением инцидентности; свойства этого отношения можно положить в основу аксиоматики. и прийти затем к современному определению пространств $P(L)$ и поля скаляров $\mathcal{K}$ так, что L и $\mathcal{K}$ появятся как производные структуры. В таком построении большую роль играют две конфигурации Дезарга и Паппа. Мы введем и изучим их в рамках наших определений и затем вкратце опишем их роль в синтетической теории.

Конфигурация Дезарга. Пусть S - семейство точек в проективном пространстве. Символом $\overline{S}$ мы будем обозначать его проективную оболочку. Рассмотрим в трехмерном проективном пространстве упорядоченную шестерку точек $(p_1, p_2, p_3; q_1, q_2, q_3)$. Шредполагается, что точки попарно разные и что $\overline{p_1p_2p_3}$ и $\overline{q_1q_2q_3}$ суть плоскости. Далее, пгусть прямые $\overline{p_1q_1}, \overline{p_2q_2}$ и $\overline{p_3q_3}$ пересекаются в одной точке r, отличной от p_i и q_j. Иными словами, «треугольники» $p_1p_2p_3$ и $q_1q_2q_3$ «перспективны», и каждый из них есть проекция другого из центра r, если они лежат в разных плоскостях. Тогда для любой пары различных индексов $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3\}$ прямые $\overline{p_ip_i}$ и $\overline{q_iq_j}$ не совпадают, иначе мы имели бы $p_i = q_t$, ибо p_i и q_t суть точки пересечения этих прямых с прямой p_iq_l. Кроме того, прямые $\overline{p_ip_j}$ и $\overline{q_iq_j}$ лежат в общей плоскости $\overline{rp_ip_j}$. Поэтому они пересекаются в точке, которую мы обозначим s_k, где $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$: это точка пересечения продолжений пары соответствующих сторон треугольников $p_1p_2p_3$ и $q_1q_2q_3$.

Теорема Дезарга, которую мы докажем в следующем пункте, утверждает, что три точки s_1, s_2, s_3 лежат на одной прямой. Конфигурация, состоящая из десяти точек p_l, q_j, s_k, r и десяти соединяющих их прямых, показанных на рис. 8, называется конфигурацией Дезарга. Каждая ее прямая содержит ровно три ее точки, и через каждую ее точку проходят ровно три ее прямые. Читателю предлагается самостоятельно убедиться в том, что она по существу симметрична (в том смысле, что группа перестановок ее точек и

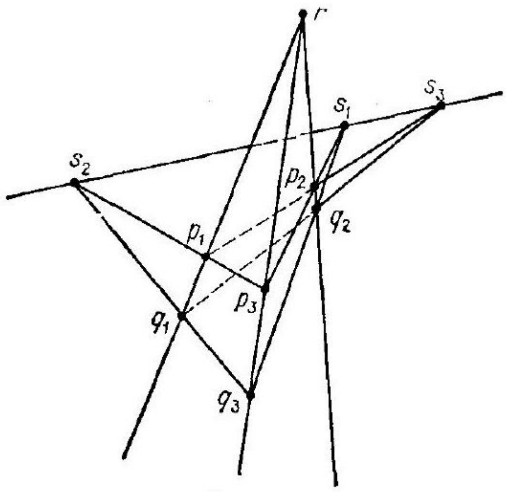


Рис. 8 прямых, сохраняющая отношения инцидентности, транзитивна как на точках, так и на прямых).

Теорема Дезарга, B описанных выше условиях точки s_1, s_2, s_3 лежат на одной прямой.

Доказ ательство. Мы раз. берем два случая в зависимости от того, совпадают плоскости $p_1p_2p_3$ и $q_1q_2q_3$ или нет.

а) $\overline{p_1p_2p_3} \neq \overline{q_1q_2q_3}$ («пространственная теорема Дезарга». В этом случае плоскости $\overline{p_1p_2p_3}$ и $\overline{q_1q_2q_3}$ пересекаются по прямо, и нетрудно убедиться, что s_1, s_2, s_3 лежат на ней. Действительно, гочка s_1, например, лежит на прямых $\overline{p_2p_3}$ и $\overline{q_2q_3}$, которые в свою очередь лежат в плоскостях $\overline{p_1p_2p_3}$ и $\overline{q_1q_2q_3}$ и, значит, в их пересеченин.

б) $\overline{p_1p_2p_3} = \overline{q_1q_2q_3}$ («Плоская теорема-Дезарга»). В этом случае выберем в пространстве точку r', не лежащую в плоскости $\overline{p_1p_2p_3}$, и соединим ее прямыми с точками r, p_l, p_l. В плоскости $\overline{r'p_1q_1}$ лежит прямая $\overline{p_1q_1}$ и, значит, точка r. Проведем в ней через r прямую, не проходящую через точки r' и p_1, и обозначим ее пересетения с прямыми $\overline{r'p_1}, \overline{r'q_1}$, через p_1', q_1' соответственно. Тройки $(p_1',\ p_2, p_3)$ и (q_1', q_2, q_3) лежат уже в разных плоскостях - иначе содержащая их общая плоскость содержала бы прямые $\overline{p_2p_3}$ и $\overline{q_2q_3}$ и потому совпадала бы с $\overline{p_1p_2p_3}$, но это невозможно, ибо p_1', q_1' в этой начальной плоскости не лежат. Кроме того, прямые $\overline{p_1'q_1'}, \overline{p_2q_2}$ и $\overline{p_3q_3}$ проходят через точку r. В силу пространственной теоремы Дезарга точки $\overline{p_{12}'} \cap \bar{q}_1'q_2, \overline{p_1'p_3} \cap \overline{q_1'q_3}$ и $\overline{p_2p_3} \cap \overline{q_2q_3}$ лежат на одной прямой. Но если спроектировать эти точки из r' на плоскость $\overline{p_1p_2p_3}$, то получатся как раз s_3, s_2, s_1 соответственно, потому что r проектирует (p_1', p_2, p_3) в (p_1, p_2, p_3) и (q_1', q_2, q_3) в (q_1, q_2, q_3) и, значит, стороны каждого из этих треугольников в соответствующие стороны исходных треугольников.

Это завершает доказательство.

Конфигурация Паппа. Рассмотрим в проективной плоскости две разные прямые и две тройки лежащих на них попарно разных точек p_1, p_2, p_3 и q_1, q_2, q_3. Для любой пары различных индексов $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3\}$ построим точку $s_k = \overline{p_iq_j} \cap \overline{q_ip_j}$, где $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.

Теорема Паппа. Точки s_1, s_2, s_3 лежат на одной прямой.

Доказ ательство. Проведем прямую через точки s_3, s_2 и обозначим через s_4 ее пересечение с прямой $\overline{p_1 q_1}$. Наша цель состоит в доказательстве того, что s_1 лежит на ней.

Построим два проективных отображения $f_1, f_2 : \overline{p_1 p_2 p_3} \to \overline{q_1 q_2 q_3}$.

Первое из них, f_1, будет композицией проекции $\overline{p_1 p_2 p_3}$ на $\overline{s_2 s_3}$ из точки q_1 с проекцией $\overline{s_3 s_2}$ на $\overline{q_1 q_2 q_3}$ из точки p_1. Очевидно, $f_1(p_i) = q_i$ для всех $i = 1, 2, 3$, и, кроме того, $f_1(t_1) = t_2$, где $t_1 = \overline{p_1 p_2 p_3} \cap \overline{q_1 q_2 q_3}, t_2 = \overline{s_4 s_3 s_2} \cap \overline{q_1 q_2 q_3}$ (рис. 9).

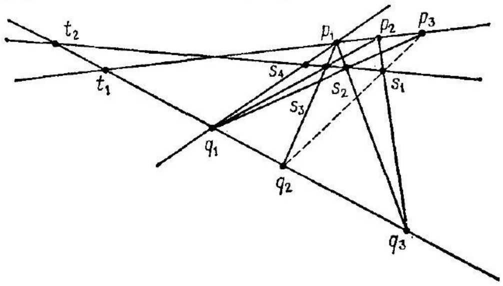


Рис. 9

Второе из них, f_2, будет композицией проекции $\overline{p_1 p_2 p_3}$ на $\overline{s_3 s_2}$ из точки q_2 с проекцией $\overline{s_3 s_2}$ на $\overline{q_1 q_2 q_3}$ из точки p_2. Эта композиция переводит p_1 в q_1, p_2 в q_2 и t_1 в t_2.

Поскольку f_1 и f_2 одинаково действуют на тройках точек $(t_1,\ p_1, p_2)$, они должны совпадать. В частности, $f_1(p_3) = f_2(p_3)$. Но $f_1(p_3) = q_3$. Значит, $f_2(p_3) = q_3$. Это утверждение геометрически означает следующее: если обозначить через s_1' пересечение $\overline{q_2 p_3 s_3 s_2}$, то прямая $\overline{p_2 q_3}$ проходит через s_1'. Но тогда $s_1' = \overline{q_2 p_3} \cap \overline{p_2 q_3} = s_1$. Значит, s_1 лежит на $\overline{s_2 s_3}$, что и требовалось доказать.

Классические аксиомы трехмерного проективного пространства и проективной плоскости. Классическое трехмерное проективное пространство определяется как множество, элементы которого называются точками, снабженное двумя системами подмножеств, элементы которых называются соответственно прямыми и плоскостями. При этом должны выполняться следующие аксиомы.

T_1. Две разные точки принадлежат единственной прямой.

T_2. Три разные точки, не лежашие на одной прямой, принадлежат единственной плоскости.

T_3. Прямая и плоскость имеют общую точку.

T_4. Пересечение двух плоскостей содержит прямую.

T_5. Существуют четыре точки, не лежащие в одной плоскости и такие, что любые три из них не лежат на одной прямой.

T_6. Каждая прямая состоит не менее чем из трех точек. Классическая проективная плоскость определяется как множество, элементы которого называются точками, снабженное системой подмножеств, элементы которой называются прямыми. При этом должны выполняться следующие аксиомы.

Π_1. Две разные точки принадлежат единственной прямой.

Π_2. Пересечение двух прямых непусто.

Π_3. Существуют три точки, не лежащие на одной прямой.

Π_4. Каждая прямая состоит не менее чем из трех точек.

Множества $P(L)$, где L - линейное пространство над полем $\mathscr{K}$ размерности 4 или 3, вместе с системами проективных плоскостей и прямых в них, как они были введены выше, удовлетворяют аксиомам $\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_6$ и $\Pi_1 - \Pi_4$ соответственно, что немедленно следует из стандартных свойств линейных пространств, доказанных в ч. 1. Однако не всякое классическое проективное пространство или плоскость изоморфно (в очевидном смысле слова) одному из наших пространств $P(L)$. Следуюшая фундаментальная конструкция дает много новых примеров.

Линейные и проективные пространства над телами. Телом (или не обязательно коммутативным полем) называется ассоциативное кольцо K, множество ненулевых элементов которого образуют группу по умножению (не обязательно коммутативную). Все поля являются телами, но обратное неверно. Например, кольцо класснческих кватернионов является телом, но не полем.

Аддитивная группа L вместе с бинарным законом умножения $KXL \to L : (a, l) \mapsto al$ называется (левым) линейным пространством над телом K, если выполнены условня определения п. 2$1 ч. 1. Значительная часть теории линейных пространств над полями почти без изменений переносится на линейные пространства над телами. В частности, это относится к теории размерности и базиса и теории подпространств, включая теорему о размерности пересечения. Это позволяет построить по каждому телу K и линейному пространству L над ним проективное пространство $P(L)$, состоящее из прямых в L, и систему его проективных подпространств $P(M)$, где $M \subset L$ пробегает линейные подпространства разных размерностей. Когда $\dim_K L = 4$ или 3, эти объекты удовлетворяют всем аксиомам $\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_6$ и $\Pi_1 - \Pi_4$ соответственно.

Роль теоремы Дезарга. Оказывается, однако, что существуют классические проективные плоскости, не изоморфные даже никакой плоскости вида $P(L)$, где L-трехмерное линейное пространство над каким-нибудь телом. Причина этого состоит в том, что в проективных плоскостях вида $P(L)$ теорема Дезарга по-прежнему верна, тогда как существугт недезарговы плоскости, где она не выполняется. Сформулируем без доказательства следующий результат:

Теорема.

Три свойства классической проективной плоскости равносильнь:

а) В ней выполняется плоская теорема Дезарга.

б) Ее можно вложить в классическое проективное пространство. в) Существует линейное трехмерное пространство L над некоторьм телом K, определенным однояначно с точностью до изоморфизма, такое, что наша плоскость изоморфна $P(L)$.

Импликация б) $\Rightarrow$ а) устанавливается прямой проверкой того, что доказательство пгространственной теоремы Дезарга использует лишь аксиомы $\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_6$. Импликация в) $\Rightarrow$ б) следует из того, что L можно вложить в четырехмерное линейное пространство над тем же телом.

Наконец, импликация а) $\Rightarrow$ в), являющаяся самым тонким моментом доказательства, устанавливается прямой конструкцией тела по дезарговой проективной плоскости. Именно, сначала с помощью геометрической конструкции проекций из центра вводится понятие проективного отображения проективных прямых в плоскости. Далее, доказывается, что для двух упорядоченных троек точек, лежащих на двух прямых, существует единственное проективное отображение одной прямой в другую. Наконец, фиксируется прямая D с тройкой точек p_0, p_1, p_2, множество K определяется как $D\setminus\{p_2\}$ с нулем p_0 и елиницей p_1, и законы сложения и умножения в K вводятся геометрически с помощью проективных преобразований. В проверках аксиом тела существенно используется теорема Дезарга, в этом контексте возникаюшая как аксиома Дезарга П 5.

Роль теоремы Паппа. Даже в дезарговых плоскостях теорема Паппа может не выполняться. Назвав соответствующее утверждение аксиомой Паппа Π_6, мы можем сформулировать следующую теорему, которую мы также приведем без доказательства:

Теорема.

а) Если в классической проективной плоскости выполнена аксиома Паппа, то плоскость является дезарговой.

б) Дезаргова классическая плоскость удовлетворлет аксиоме Паппа тогда и только тогда, когда связанное с ней тело комлiутативно, т. е. эта плоскость изоморфна $P(L)$, где L - трехмерное линейное пространство над полем.

Дальнейшие подробности и опушенные нами доказательства читатель может найти в книге: Х ар тсх орн Р. Основы проективной геометрии. - М.: Мир, 1970.

15.8.10 10. Kähler Metric

Если L - унитарное линейное пространство нал $\mathbf{C}$, то на проективном пространстве $P(L)$ можно ввести спешиальную метрику, называемую кэлеровой в честь открывшего ее важные обоб. щения Э. Кэлера. Сама эта метрика была ввелена в прошлом веке Фубини и Штуди. Она играет особенно важную роль в комплексной алгебраической геометрии и неявно также в квантовой механике, потому что такие пространства $P(L)$, как было объяснено в ч. 2. являются пространствами состояний квантовомеханических систем.

Эта метрика инвариантна относительно тех проективных преобразований $P(L)$, которые имеют вид $P(f)$, где f-унитарное отображение L в себя. Вводится она следующим образом. Пусть $p_1, p_2 \in P(L)$. Точкам p_1, p_2 отвечают два больших круга на еди- ничной сфере $S \subset L$, как показано в разделе в) п. 3§6. Тогда кэлерово расстояние $d\left(p_1, p_2\right)$ равно расстоянию между этими кругами в евклидовой сферической метрике S, т. е. длине кратчайшей дуги большого круга на S, соединяющей две точки на прообразах p_1 и p_2.

Основная цель этого параграфа-доказательство следующих двух формул для $d\left(p_1, p_2\right)$.

Теорема.

а) Пусть $l_1, l_2 \in L, |l_1| = |l_2| = 1; p_1, p_2 \in P(L)$ - прямые $\mathbf{C} l_1 u \mathbf{C} l_2$. Тогда
$$d\left(p_1, p_2\right) = \arccos\left|\left(l_1, l_2\right)\right|,$$

где $\left(l_1, l_2\right)$-скалярное произведение в L.

б) Пусть в L выбран ортонормированный базис, относительно которого в $P(L)$ определена однороднал система координат. Пусть две близкие точки $p_1, p_2 \in P(L)$ заданы своими координатами $\left(y_1, \ldots, y_n\right)$ u $\left(y_1 + dy_1, \ldots, y_n + dy_n\right)$ в афринной карте U_0 (см. раздел а) n. 3§6). Тогда квадрат расстояния между ними с точностью до третьего порядка малости по dy равен
$$\frac{\sum_{i=1}^n \left|dy_i\right|^2}{1 + \sum_{i=1}^n \left|y_i\right|^2} - \frac{\left|\sum_{i=1}^n y_i \overline{dy_i}\right|^2}{\left(1 + \sum_{i=1}^n \left|y_i\right|^2\right)^2}.$$

Док аз ательство. а) В евклидовом пространстве расстояние между двумя точками на единичной сфере равно длине той дуги соединяющего их большого круга, которая лежит между 0 и л, т. е. евклидову углу, или арккосинусу евклидова скалярного произведения радиусов. Евклидова структура на L, отвечающая исходной унитарной структуре, задается скалярным произведением $\operatorname{Re}\left(l_1, l_2\right)$. Поскольку мы должны найти минимальное расстояние между точками больших кругов $\left(e^{i\varphi} l_1\right), \left(e^{i\psi} l_2\right)$, а арккосинусубывающая функция, нужно подобрать φ и ψ так, чтобы при данных l_1, l_2 величнна $\operatorname{Re}\left(e^{i\varphi} l_1, e^{i\psi} l_2\right)$ приняла наибольшее возможное значение. Но она не превосходит $\left|\left(l_1, l_2\right)\right|$ и при подходящих φ, ψ достигает этого значения: если $\varphi = -\arg\left(l_1, l_2\right)$, то $\left(e^{i\oplus l_1}, l_2\right) = \left|\left(l_1, l_2\right)\right|$. Поэтому окончательно
$$d\left(p_1, p_2\right) = \arccos\left|\left(l_1, l_2\right)\right|.$$

б) Положим
$$R = \left(1 + \sum_{i=1}^n \left|y_i\right|^2\right)^{1/2}, \quad R + dR = \left(1 + \sum_{i=1}^n \left|y_i + dy_i\right|^2\right)^{1/2}.$$

Тогда прообразами точек $\left(y_1, \ldots, y_n\right)$ и $\left(y_1 + dy_1, \ldots, y_n + dy_n\right)$ на S будут точки

$l_1 = \left(\frac{1}{R}, \frac{y_1}{R}, \dots, \frac{y_n}{R}\right), \quad l_2 = \left(\frac{1}{R+dR}, \frac{y_1+dy_1}{R+dR}, \dots, \frac{y_n+dy_n}{R+dR}\right)$. Поэтому

$$(l_1, l_2) = \frac{1}{R(R+dR)}\left(1 + \sum_{i=1}^{n} y_i\left(\bar{y}_i + \overline{dy}_i\right)\right) = \frac{R^2 + \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \overline{dy}_i}{R(R+dR)}$$

И

$$|(l_1, l_2)|^2 = \frac{R^4 + R^2 \sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i \bar{d}y_i + \bar{y}_i dy_i\right) + \left|\sum\limits_{i=1}^{n} y_i \overline{dy}_i\right|^2}{R^2(R+dR)^2}.$$

Далее,

$$(R+dR)^2 = 1 + \sum_{i=1}^{n} |y_i + dy_i|^2 = R^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(y_i\overline{dy_i} + \bar{y}_i dy_i + |dy_i|^2\right).$$

Поэтому с точностью до третьего порядка малости по dy_i

$$|(l_1, l_2)|^2 = 1 - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} |dy_i|^2}{R^2} + \frac{\left|\sum\limits_{i=1}^{n} y_i \overline{dy_i}\right|^2}{R^4} + \dots$$

С другой стороны, если $\varphi = \arccos |(l_1, l_2)|$, то с точностью до φ^4 при малых имеем

$$|(l_1, l_2)|^2 = (\cos\varphi)^2 = \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} + \dots\right)^2 = 1 - \varphi^2 + \dots$$

Сравнение этих формул завершает доказательство.

15.8.11 11. Algebraic Manifolds and Hilbert Polynomials

Пусть $P(L)$ – n-мерное проективное пространство над полем $\mathscr{K}$ с фиксированной системой однородных координат. Мы уже многократно встречались с проективными подпространствами в $P(L)$ и квадриками, которые определяются соответственно системами уравнений

$$\sum_{i=0}^{n} a_{ik} x_i = 0, \quad k = 1, \dots, m,$$

или

$$\sum_{i,f=0}^{n} a_{ij} x_i x_j = 0, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Более общо, рассмотрим произвольный однородный многочлен, или форму, степени $m \geqslant 1$:

$$F\left(x_0, \dots, x_n\right) = \sum_{i_0+\dots+i_n=m} a_{i_0\dots i_n} x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n}.$$

Хотя она не определяет функции на $P(L)$, множество точек с однородными координатами $(x_0 : \dots : x_n)$, для которых $F = 0$, опреде- лено однозначно. Оно называется алгебраической гиперповерхностью (степени m), заданной уравнением $F = 0$.

Более общо, множество точек в $P(L)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$F_1 = F_2 = \dots = F_k = 0$$

где F_i - формы (возможно, разных степеней), называется алебраическим многообразием, определенным этой системой уравнений.

Изучение алгебраических многообразий в проективном пространстве составляет одну из основных целей алгебраической геометрии. Разумеется, общее алгебраическое многообразие является существенно нелинейным объектом, поэтому, как и в других геометрических дисциплинах, важное место в технике алгебраической геометрии занимают методы линеаризации нелинейных задач.

В этом параграфе мы введем один такой метод, восходящий k Гильберту и дающий с минимумом предварительной подготовки важную информацию об алгебраическом многообразии $V \subset P(L)$. Его идея состоит в том, чтобы поставить в соответствие алгебраическому многообразию V счетную серию линейных пространств $\{I_m(V)\}$ и изучить их размерность как функцию от m. Именно, пусть $I_m(V)$ - пространство форм степени m, обращающихся в нуль на V.

Покажем, что существует многочлен $Q_V(m)$ с рациональными коэффициентами такой, что $\dim I_m(V) = Q_V(m)$ для всех достаточно больших m. Коэффициенты многочлена Q_V являются важнейшими инвариантами V. На самом деле мы установим заметно более общий результат, но для его формулировки и доказательства нам придется ввести несколько новых понятий.

Градуированные линейные пространства. Фиксируем раз навсегда основное поле скаляров $\mathscr{K}$. Градуированным линейным пространством над $\mathscr{K}$ будем называть линейное пространство L вместе с фиксированным его разложением в прямую сумму подпространств: $L = \bigoplus_{i=0}^{\infty} L_i$. Эта сумма бесконечна, но каждый отдельный элемент $l \in L$ однозначно представляегся в виде конечной суммы: $l = \sum\limits_{i=0}^{\infty} l_i, \quad l_i \in L_i$, в том смысле, что все l_i, кроме конечного числа их, равны 0. Вектор l_i называется однородной компонентой l степени i; если $l \in L_i$, то l называется однородным элементом степени i.

Пример: кольцо многочленов $A^{(n)}$ от независимых переменных $x_0, \ldots, x_n$ разлагается как лнненое пространство в прямую сумму ∞

Заметим, что если интерпретировать x_i как координатные функции на линейном пространстве L, а элементы $A^{(n)}$ как полиномиальные функции на этом пространстве, то линейные обратимые замены координат сохраняют однородность и степень.

Другой пример: $I = \bigoplus_{m=0}^{\infty} I_m(V), \quad$ где V - некоторое алгебраическое многообразие. Очевидно, $I \subset A^{(n)}$ и $I_m(V) = A_m^{(n)} \cap I$.

Более общо, градуированное подпространство M градуированного пространства $L = \bigoplus_{i=0}^{\infty} L_i$ - это линейное подпространство, обладающее следующим свойством: $M = \bigoplus_{i=0}^{\infty} (M \cap L_i)$. Очевидное равносильное условие: все однородные компоненты любого элемента M сами являются элементами M.

Если $M \subset L$ - пара, состоящая из градуированного пространства и его градуированного подпространства, то факторпространство L/M также обладает естественной градуировкой. Именно, рассмотрим естественное линейное отображение

$$\bigoplus_{i=0}^{\infty} L_i/M_i \to L/M : \sum_{i=1}^{\infty} (l_i + M_i) \mapsto \left(\sum_{i=0}^{\infty} l_l \right) + M$$

(суммы справа конечны). Оно сюръективно, потому что любой лемент $\sum\limits_{i=0}^{\infty} l_i, l_i \in L$, есть образ элемента $\sum\limits_{i=0}^{\infty} (l_i + M_i)$. Оно инъективно, ибо если

$$\sum_{i=1,}^{\infty} l_i + M = M, \text{ то } \sum_{i=0}^{\infty} l_i \in M \quad \text{ и } l \in M \quad \text{ в силу}$$

однородности M. Поэтому это отображение - изоморфизм, и мы можем определить градуировку L/M, положив $(L/M)_i = L_i/M_i$.

Семейство градуированных подпространств в L замкнуто относительно пересечений и сумм, и все обычные изоморфизмы линейной алгебры имеют очевидные градуированные варианты.

Градуированные кольца. Пусть A-градуированное линейное пространство над $\mathscr{K}$, являющееся в то же время коммутативной $\mathscr{K}$-алгеброй с единицей, умножение в которой подчинено условию

$$A_iA_j \subset A_{i+j}.$$

Тогда A называется градуированным кольцом (точнее, градуированной $\mathscr{K}$-алгеброй). Так как $\mathscr{K}A_i \subset A_i$, имеем $\mathscr{K} \subset A_0$. Важнейший пример - кольца многочленов $A^{(n)}$; в них, конечно, $A_0^{(n)} = \mathscr{K}$.

Градуированные идеалы. Идеалом I в произвольном коммутативном кольце A называется подмножеество, образующее аддитивную подгруппу A и замкнутое относительно умножения на элемеиты A: если $f \in I$ и $a \in A$, то $af \in I$. Градуированным идеалом в градуированном кольце A называется идеал, который как $\mathscr{K}'$-нодиространство A градуирован, т. е. $I = \bigoplus_{m=4}^{\infty} I_m$, $I_m = l \cap A_m$. Основной пример: идеалы $I_m(V)$ алгебраических многообразий в кольцах многочленов $A^{(n)}$. Стандартная конструкция идеалов такова: пусть $S \subset A$ - любое подмножество элементов. Тогда множество всех конечных линейных комбинаций $\left\{\sum\limits_{s_i \in S} a_l s_i | a_i \in A\right\}$ является идеалом в A, порожденным множеством S. Множество S называется системой образующих этого идеала. Если идеал имеет конечное число образующих, то он называется конечно порожденным. В градуированном случае достаточно рассматривать множества S, состоящие только из однородных элементов; порожденные ими идеалы тогда автоматически градуированы. Действительно, однородная компонента степени j любой линейной комбинации $\sum a_i s_i$ также будет линейной комбинацией $\sum a_i^{(k_i)} s_i$, где $a_i^{(k_i)}$ - однородная компонента a_i степени $k_i = j - \deg s_i$ ($\deg s_i -$ степень s_i). Поэтому она лежит в идеале, порожденном S. Если градуированный идеал конечно порожден, то у него есть конечная система однородных образующих: она состоит из однородных компонент элементов исходной системы.

Для упрощения доказательств следует обобщить понятие градуированного идеала и рассмотреть также градуированные модули. Это - последнее из списка нужных нам понятий.

Градуированные модули. Модуль M над коммутативным кольцом A, или A-модуль, - это аддитивная группа, снабженная операцией $A \times M \to M : (a, m) \mapsto am$, которая ассоциативна ($(ab)m = a(bm)$ для всех $a, b \in A, \dot{m} \in M$) и дистрибутивна по обоим аргументам:

$$(a + b)m = am + bm, \quad a(m + n) = am + an.$$

роме того, мы требуем, чтобы $1m = m$ для всех $m \in M$, где 1 - единица в A.

Если A-поле, то M-просто линейное пространство над A; можно сказать, что понятие модуля является обобщением понятия линейного пространства на случай, когда скаляры образуют лишь кольцо (см. Введение в алгебру, гл. $9, \S 3$).

Если A-градуированная $\mathscr{K}$-алгебра, то градуированным A-модулем M мы назовем A-модуль, являющийся градуированным линейным пространством над $\mathscr{K}, M = \bigoplus_{i=0}^{\infty} M_i$, и такой, что

$$A_iM_j \subset M_{l+j}$$

для всех $i, j \geqslant 0$. Примеры:

а) A является градуированным A-модулем.

б) Любой градуированный идеал в A является градуированным A-модулем.

Если M - градуированный A-модуль, то любое градуированное подпространство $N \subset M$, замкнутое относительно умножения на элементы A, само является градуированным A-модулем- подмодулем M. По любой системе однородных элементов $S \subset M$ можно построить порожденный ею градуированный подмодуль, состояший из всех конечных линейных комбинаций $\sum a_i s_i, a_i \in A, s_i \in S$. Если он совпадает с M, то S называется однородной системой образующих M. Модуль, имеющий конечную систему образующих, называется конечно порожденным. Если градуированный модуль имеет какую-нибудь конечную систему образующих, то он имеет и конечную систему однородных образующих: однородные компоненты лементов исходной системы.

Рассмотрение всевозможных модулей, а не только идеалов, в нашей задаче дает большую своболу действий. Умножение на элементы $a \in A$ в фактормодуле вводится формулой

$$a(m+N) = am + N.$$

В градуированном случае градуировка на M/N определяется прежней формулой $(M/N)_i = M_i/N_i$. Корректность определения проверяется тривиально.

Элементы теории прямых сумм, подмодулей и фактормодулей формально не отличаются от соответствующих результатов для линейных пространств.

Теперь мы можем приступить к доказательству основных результатов этого параграфа.

Теорема.

Пусть M - произвольный конечно порожденный модуль над кольцом многочленов $A^{(n)} = \mathscr{K}[x_0, \ldots, x_n]$ от конечного числа переменных. Тогда любой подмодуль $N \subset M$ конечно порожден.

Д ок а з тельство. Мы разобьем его на несколько шагов. Стандартная термннология: модуль, каждый подмодуль которого конечно порожден, называется нётеровым (в честь Эмми Нётер).

а) Модуль нётеров тогда и только тогда, когда любая бесконечная цепочка возрастающих подмодулей $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ в стабилизируется: суцествует такое a_0, что $M_a = M_{a+1}$ для всех $a \geqslant a_0$.

В самом деле, пусть M нётеров. Положим $N = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$. Пусть $n_1, \ldots, n_k$ - конечная система образующих в N. Для каждого $1 \leqslant j \leqslant k$ сушествует $i(j)$ такой, что $n_j \in M_{i(j)}$. Положим $a_0 = \max\{i(j) | j = 1, \ldots, k\}$. Тогда M_a содержит $n_1, \ldots, n_k$ для всех $a \geqslant a_0$ и потому $M_a = N$.

Наоборот, пусть любая возрастающая цепочка подмодулей в M обрывается. Будем строить систему образующих подмодуля $N \subset M$ индуктивно: в качестве $n_1 \in N$ возьмем любой элемент; если $n_1, \ldots, n_i \in N$ уже построены, обозначим через $M_i \subset N$ порожденный ими подмодуль и при $N \neq M_i$ выберем n_{l+1} из $N \backslash M_i$. Этот процесс оборвется через конечное число шагов, иначе цепочка $M_1 \subset \ldots \subset M_i \subset \ldots$ не стабилизировалась бы.

б) Если подмодуль $N \subset M$ нётеров и фактормодуль M/N нётеров, то M нётеров; верно и обратное. Действительно, пусть $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ - цепочка подмодулей в M. Пусть a_0 таково, что обе цепочки $M_1 \cap N \subset M_2 \cap N \subset \ldots$ и $(M_1 + N)/N \subset (M_2 + N)/N \subset \ldots$ стабилизируются при $a \geqslant a_0$. Тогда и цепочка $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ стабилизируется при $a \geqslant a_0$.

Обратное утверждение очевидно.

в) Прямая сумма конечного числа нётеровых модулей нётерова. Действительно, пусть $M = \bigoplus_{i=0}^{n} M_i$, M_i нётеровы. Проведем индукцию по n. Случай $n = 1$ очевиден. При $n \geqslant 2$ модуль M содержит подмодуль, изоморфный M_n, с фактором, изоморфным $n-1$ $\bigoplus_{i=0} M_i$. Оба этих модуля нётеровы, так что M нётеров в силу б).

г) Кольцо $A^{(n)}$ нётерово как модуль над самим собой. Иными словами, любой идеал в $A^{(n)}$ конечно порожден.

Это - основной частный случай теоремы, установленный впервые Гильбертом. Доказывается он индукцией по n. Случай $n = -1$, т. е $A^{(-1)} = \mathscr{K}$, очевиден. В самом деле, любой идеал I в поле $\mathscr{K}$ совпадает либо с $\{0\}$, либо с $\mathscr{K}$: если $a \in I, a \neq 0$, то $b = (ba^{-1})\, a \in I$ для всех $b \in \mathscr{K}$. Индуктивный шаг основан на рассмотрении $A^{(n)}$ как $A^{(n-1)}[x_n]$. Пусть $I^{(n)} \subset A^{(n)}$ - идеал. Представим каждый элемент из $I^{(n)}$ как многочлен по степеням x_n с коэффициентами из $A^{(n-1)}$. Множество всех старших коэффициентов таких многочленов есть идеал $I^{(n-1)}$ в $A^{(n-1)}$. По предположению индукции он имеет конечное число образующих $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$. каждой образующей φ_i подберем элемент $f_i = \varphi_i x_n^{d_i} + \ldots$ из $I^{(n)}$, где многоточием обозначены члены низших степеней по x_n. Положим $d = \max_{1 \leq t \leq m} \{d_i\}$. Многочлены $f_1, \ldots, f_m$ порождают в $A^{(n)}$ некоторый идеал $I \subset I^{(n)}$.

Пусть теперь $f = \varphi x^s +$ (члены низших степеней)-любой элемент из $I^{(n)}$. По определению $\varphi \in I^{(n-1)}$, так что $\varphi = \alpha_1 \varphi_1 + \ldots \ldots + \alpha_m \varphi_m$. Если $s \geqslant d$, то многочлен $f - \sum \alpha_i f_i x^{s-d_i}$ принадлежит $I^{(n)}$ и его степень $< s$. Действуя аналогичным образом, получим в результате выраженне $f = g + h$, где $h \in I$, а g - многочлен из $I^{(n)}$ степени, меньшей d.

Все многочлены из $I^{(n)}$ степени $< d$ образуют подмодуль J в $A^{(n-1)}$-модуле, порожденном конечной системой $\left\{1, x_n, \ldots, x_n^{d-1}\right\}$. В соответствии с предположением индукцип о нётеровости $A^{(n-1)}$ и с утверждением в) подмодуль J конечно порожден.

Мы доказали, что $I^{(n)} = I + J$ - сумма двух конечно порождениых модулей. Поэтому идеал $I^{(n)}$ конечно порожден.

Теперь мы можем без труда завершить доказательство теоремы. Пусть модуль M над $A^{(n)}$ имеет конечное число образующих $m_1, \ldots \ldots m_\star$. Тогда имеется сюръективный гомоморфизм $A^{(n)}$-модулей

$$\underbrace{A^{(n)} \oplus \ldots \oplus A^{(n)}}_{k \text{ pas}} \to M : (f_1, \ldots, f_k) \mapsto \sum_{i=1}^{k} f_l m_l.$$

Модуль $A^{(n)} \oplus \ldots \oplus A^{(n)}$ нётеров в силу г) и в). Следовательно (см. б)), его фактормодуль M нётеров.

Следствие. Любая бесконечная система уравнений $F_i = 0$, $i \in S$, где F_i - многочлены в $A^{(n)}$, эквивалентна некоторой своей конечной подсистеме.

Док а з а тел вст во. Пусть I - идеал, порожденный всеми F_i. Он имеет конецную систему образующих $\{G_l\}$. Рассмотрим такое конечное подмножество $S_0 \subset S$, что все G_j линейно выражаготся через $F_i, i \in S_0$. Тогда система уравнений $F_i = 0, i \in S_0$, эквивалентна исходной, т. е. имеет то же самое множество решений.

Многочлены Гильберта и ряд Пуанкаре градуированного модуля. Пусть теперь M - градуированный конечно порожденный модуль над кольцом $A^{(n)}$. Тогда все линейные пространства $M_k \subset M$ конечномерны над $\mathscr{K}$. Действительно, если $\{a_i\}$-однородный $\mathscr{K}$-базис $A_0^{(n)} + \ldots + A_k^{(n)}$ и $\{m_j\}$ - конечная система образующих M, то M_k как линейное пространство порождено конечным числом элементов $a_i m_j$с $\deg a_i + \deg m_j = k$.

Положим $d_k(M) = \dim M_k$. Формалыный степенной ряд от переменной t

$$H_M(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(M) t^k$$

называется рядом Пуанкаре модуля M.

Теорема.

а) В условиях предыдущего пункта существует такой многочлен $f(t)$ с цельми коэффициентами, что

$$H_M(t) = \frac{f(t)}{(1-t)^{n+1}}.$$

б) В тех же условиях существует такой многочлен $P(k)c$ рациональными коэффициентами и такое число N, что

$$d_k(M) = P(k) \text{ для всех } k \geqslant N.$$

Док а з тельство. Выведем сначала второе утверждение из первого. Положим $f(t) = \sum_{i=v}^{N} a_i t^t$ и приравняем коэффициенты при t^k в правой и левой частях тождества

$$H_M(t) = f(t)(1-t)^{-(n+1)}.$$

Получим, учитывая, что $(1-t)^{-(n+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\begin{array}{c} n+k \\ n \end{array} \right) t^k$:

$$d_k(M) = \sum_{i=0}^{\min(k,N)} a_i \left(n + {k \atop n} - i \right).$$

При $k \geqslant N$ выражение справа есть многочлен от k с рациональными коэффициентами. Теперь индукцией по n докажем утверждение а). Удобно положить $A^{(-1)} = \mathscr{K} = A_0^{(-1)}; A_i^{(-1)} = \{0\}$ для $i \geqslant 1$. Конечно порожденный градуированный модуль над $A^{(-1)}$ - это просто конечномерное векторное пространство над $\mathscr{K}$, представленное в виде прямой суммы $\sum\limits_{k=1}^{N} M_k$. Его ряд Пуанкаре есть многочлен $\sum\limits_{k=0}^{N} \dim M_k t^k$, так что результат тривиально верен.

Пусть тепсрь он доказан для $A^{(n-1)}, n \geqslant 0$; установим его для $A^{(n)}$. Пусть M - конечно порожденный градуированный модуль над $A^{(n)}$. Положим

$$K = \{m \in M | x_n m = 0\}, \quad C = M/x_nM.$$

Очевидно, K и x_nM суть градуированные подмодули M; поэтому C также имеет структуру градуированного $A^{(n)}$-модуля. Но умножение на x_n аннулирует как K, так и C. Поэтому, если мы рассмотрим K и C как модули над подкольцом $A^{(n-1)} = \mathscr{H}[x_0, \ldots, x_{n-1}] \subset \subset A^{(n)} = \mathscr{K}[x_0, \ldots, x_n]$, то любая система образующих для них над $A^{(n)}$ будет в то же время системой образующих над $A^{(n-1)}$. По теореме п. $6K$ конечно порожден над $A^{(n)}$ как подмодуль конечно порожденного модуля. С другой стороны, C конечно порожден над $A^{(n)}$, потому что если $m_1, \ldots, m_p$ порождают M, то $m_1 + x_nM, \ldots$ $\ldots, m_p + x_nM$ порождают C. Следовательно, K и C конечно порождены над $A^{(n-1)}$, и к ним применимо индуктивное предположение. Из точных последовательностей линейных пространств над $\mathscr{K}$:

$$0 \longrightarrow K_m \longrightarrow M_m \overset{x_n}{\to} M_{m+1} \longrightarrow C_{m+1} \longrightarrow 0, m \geqslant 0,$$

следует, что

$$\dim M_{m+1} - \dim M_m = \dim C_{m+1} - \dim K_m.$$

Умножив это равенство на t^{m+1} и просуммировав по m от 0 до ∞, получим

$$H_M(t) - \dim M_0 - tH_M(t) = H_C(t) - \dim C_0 - tH_K(t),$$

или по индуктивному предположению для K и C

$$(1-t)H_M(t) = \dim M_0 - \dim C_0 + \frac{f_C(t)}{(1-t)^n} - \frac{tf_K(t)}{(1-t)^n},$$

где $f_C(t)$ и $f_K(t)$ - многочлены с целыми коэффициентами. Очевидно, отсюда следует требуемое.

Размерность и степень алгебраического многообразия. Пусть теперь. $V \subset p^n$ - некоторое алгебраическое многообразие, которому отвечает идеал $I(V)$. Рассмотрим многочлен Гильберта $P_V(k)$ фактормодуля $A^{(n)}/I(V)$:

$$P_V(k) = \dim A_k^{(n)}/I_k(V) \text{ для всех } k \geqslant k_0.$$

Нетрудно видеть, что $P_{P^n}(k) = \left(n + {k \atop n} \right)$, так что $\deg P_{P^n}(k) = n$. Поэтому $\deg P_V \leqslant n$. Чнсло $d = \deg P_V$ называется размер- ностью многообразия V. Представим старший член $P_V(k)$ в виде $e\frac{k^d}{d!}$ Можно доказать, что e - целое число, которое называется степенью многообразия V. Размерность и степень-важнейшие характеристики «величины» алгебраического многообразия. Можно дать их чисто геометрическое определение: если поле $\mathscr{E}$ алгебраически замкнуто, то d-мерное многообразие степени e пересекается с «достаточно общим» проективным пространством $P^{n-d}C \subset P^n$ дополнительной размерности в точности по e разным точкам. Мы не будем доказывать эту теорему.

Заметим в заключение, что после открытия Гильберта около полувека оставался нерешенным вопрос, как следует интерпретировать значения многочлена Гильберта $P_V(k)$ для тех целых значений k, при которых $P_V(k) \neq \dim l_k(V)$ (в частности отрицательных k). Он был решен лишь в пятидесятых годах с созданием теории когомологий когерентных пучков, когда выяснилось, что при любом k значение $P_V(k)$ есть ıтернированная сумма размерностей некоторых пространств когомологий многообразия V. Аналогичная интерпретация была дана многочленам Гильберта любых конечно порожденных градуированных модулей.

УПРАЖЕНИЯ

Доказать, что многочлен Гильберта проективного пространства P^n не зависит от размерности m проективного пространства P^m, в которое P^n вложено: $P^n \subset P^m$.

Вычислить многочлен Гильберта модуля $A^{(n)}/FA^{(n)}$, где F-форма степени e.

15.9 Kostrikin Manin Polylinein Algebra

15.9.1 1. Tensor Product of Linear Spaces

Последняя часть нашей книги посвящена систематическому изучению полилинейных конструкций ликейной алгебры. Основой алгебраического аппарата служит понятие тензорного произведения, которое вводится в этом параграфе и подробно изучается дальше. К сожалению, главные приложения этого формализма лежат за пределами собственно линейной алгебры: они относятся к дифференциальной геометрии, теории представлений групп и квантовой механике. Мы лишь вкратце коснемся их в последних параграфах.

Конструкция. Рассмотрим конечное семейство векторных пространств $L_1, \ldots, L_p$ над одним и тем же полем скаляров $\mathscr{K}$. Напомним, что отображение $L_1 \times \ldots \times L_p \rightarrow L$, где L - еще одно пространство над $\mathscr{K}$, называется полилинейным, если оно линейно по каждому из аргументов $l_i \in L_i, i=1, \ldots, p$, при фиксированных остальных.

Наша ближайшая цель - построить универсальное полилинейное отображение пространств $L_1, \ldots, L_p$. Его образ будет называться тензорным пронзведением этих пространств. Точный смысл утверждения об универсальности объяснен ниже, в формулировке теоремы п. 3. Конструкция состоит из трех шагов.

а) Пространство $\mathscr{M}$. Это множество всех финитных функций на $L_1 \times \ldots \times L_p$ со значениями в $\mathscr{K}$, т. е. теоретико-множественных отображений $L_1 \times \ldots \times L_p \rightarrow \mathscr{K}$, равных нулю во всех точках множества $L_1 \times \ldots \times L_p$, кроме конечного числа. Оно образует линейное пространство над $\mathscr{K}$ с обычными операциями поточечного сложения и умножения на скаляр. Его базисом являются дельтафункции $\delta\left(l_1, \ldots, l_p\right)$, равные 1 в единственной точке $\left(l_l, \ldots, l_p\right) \in L_1 \times \ldots \times L_p$ и нулю в остальных. Опуская знак δ, мы можем считать, что $\mathscr{M}$ состоит из формальных конечных линейных комбинаций семейств $\left(l_1, \ldots, l_p\right) \in L_1 \times \ldots \times L_p$:

$$\mathscr{M}=\left\{\sum a_{l_1 \ldots l_p}\left(l_1, \ldots, l_p\right) \mid a_{l_1} \ldots l_p \in \mathscr{K}\right\} .$$

Заметим, что если поле $\mathscr{H}$ бесконечно и хотя бы одно из пространств L_b не нульмерно, то $\mathscr{M}$ - бесконечномерное пространство. б) Подпространство $\mathscr{M}_0$. По определению оно порождено всеми векторами из $\mathscr{M}$ вида

$$\begin{gathered}\left(l_1, \ldots, l_i^{\prime}+l_l^{\prime \prime}, \ldots, l_p\right)-\left(l_1, \ldots, l_j^{\prime}, \ldots, l_p\right)-\left(l_1, \ldots, l_j^{\prime \prime}, \ldots, l_p\right), \\ \left(l_1, \ldots, a l_j, \ldots, l_p\right)-a\left(l_1, \ldots, l_j, \ldots, l_p\right), \quad a \in \mathscr{K} .\end{gathered}$$

в) Тензорное произведение $L_1 \otimes \ldots \otimes L_p$. По определению

$$L_1 \otimes \ldots \otimes L_p = \mathscr{M} / \mathscr{M}_0,$$
$$l_1 \otimes \ldots \otimes l_p = (l_1, \ldots, l_p) + \mathscr{M}_0 \in L_1 \otimes \ldots \otimes L_p,$$
$$t : L_1 \times \ldots \times L_p \to L_1 \otimes \ldots \otimes L_p, \quad t\,(l_1, \ldots, l_p) = l_1 \otimes \ldots \otimes l_p.$$

Здесь $\mathscr{M}/\mathscr{M}_0$ - факторпространство в обычном смысле слова. Элементы $L_1 \otimes \ldots \otimes L_p$ называются тензорами, $l_1 \otimes \ldots \otimes l_p$ - разложимыми тензорами. Поскольку семейства $(l_1, \ldots, l_p)$ составляют базис $\mathscr{M}$, разложимые тензоры $l_1 \otimes \ldots \otimes l_p$ порождают все тензорное произведение $L_1 \otimes \ldots \otimes L_p$, но отнюдь не являются базисом: между ними есть много линейных зависимостей.

Основное свойство тензорных произведений описано в следующей теореме:

Теорема.

а) Каноническое отображение

$$t : L_1 \times \ldots \times L_p \to L_1 \otimes \ldots \otimes L_p, (l_1, \ldots, l_p) \mapsto l_1 \otimes \ldots \otimes l_p,$$

является полилинейным.

б) Полилинейное отображение t универсально в следующем смысле слова: для любого линейного пространства M над полем $\mathscr{K}$ и любого полилинейного отображения $s : L_1 \times \ldots \times L_p \to M$су ществует единственное линейное отображение $f : L_1 \otimes \ldots \otimes L_n \to M$ такое, ито $s = f \circ t$. Мы будем кратко говорить, что s проводится через f.

Доказательство. а) Мы должны проверить следующие формулы:

$$\begin{aligned} &l_1 \otimes \ldots \otimes \left(l_i' + l_j''\right) \otimes \ldots \otimes l_p = \\ &\quad = l_1 \otimes \ldots \otimes l_i' \otimes \ldots \otimes l_p + l_1 \otimes \ldots \otimes l_i'' \otimes \ldots \otimes l_\Gamma, \\ &l_1 \otimes \ldots \otimes (a l_j) \otimes \ldots \otimes l_p = a\,(l_1 \otimes \ldots \otimes l_i \otimes \ldots \otimes l_p) \end{aligned}$$

т. е., например, для первой формулы

$$\begin{aligned} (l_1, \ldots, l_i' + l_l'', \ldots, l_p) + \mathscr{M}_0 = {} & [(l_1, \ldots, l_l', \ldots, l_p) + \mathscr{M}_0] + \\ & + \left[\left(l_1, \ldots, l_j'', \ldots, l_p\right) + \mathscr{M}_0\right]. \end{aligned}$$

Вспоминая определение факторпространства (п. 2 и 3§6 ч. 1), и систему образующих подпространства $\mathscr{M}_0$, описанную на шаге б) в п. 2 этого параграфа, немедленно получаем эти равенства из определений.

б) Если f вообще существует, то условие $s = f \circ t$ однозначно определяет значения f на разложимых тензорах:

$$f\,(l_1 \otimes \ldots \otimes l_p) = f \circ t\,(l_1, \ldots, l_p) = s\,(l_1, \ldots, l_p)\,.$$

Поскольку последние порождают $L_1 \otimes \ldots \otimes L_p$, отображение f единственно.

Для доказательства существования f рассмотрим линейное отображение $g : \mathscr{M} \to M$, которое на базисных элементах $\mathscr{M}$ определено формулой

$$g\,(l_1, \ldots, l_p) = s\,(l_1, \ldots, l_p)$$

Т. е.

$$g \left(\sum a_{l_1 \ldots l_p}\,(l_1, \ldots, l_p)\right) = \sum a_{l_1} \ldots l_p s\,(l_1, \ldots, l_p)\,.$$

Нетрудно убедиться, что $\mathscr{M}_0 \subset \operatorname{Ker} g$. Действительно,

$$\begin{aligned} &g\left[\left(l_1, \ldots, l_j' + l_l'', \ldots, l_p\right) - \left(l_1, \ldots, l_j', \ldots, l_p\right) - (l_1, \ldots, l_l'', \ldots, l_p)\right] = \\ &\quad = s\left(l_1, \ldots, l_i' + l_f'', \ldots, l_p\right) - s\left(l_1, \ldots, l_f', \ldots, l_p\right) - \\ &\quad - s\,(l_1, \ldots, l_l'', \ldots, l_p) = 0 \end{aligned}$$

в силу полилинейности s. Аналогично проверяется, что g аннулирует образующие $\mathscr{M}_0$ второго типа, связанные с умножением одной из компонент на скаляр.

Отсюда вытекает, что g индуцирует линейное отображение

$$f : \mathscr{M}/\mathscr{M}_0 = L_1 \otimes \ldots \otimes L_p \to M$$

(см. предложение п. 8$6 ч. 1), для которого

$$f\,(l_1 \otimes \ldots \otimes l_p) = s\,(l_1, \ldots, l_p)\,.$$

Это завершает доказательство.

Теперь мы приведем несколько непосредственных следствий этой теоремы и первые приложения нашей конструкции.

Пусть $\mathscr{L}\left(L_1, \ldots, L_p; M\right)$ - множество полилинейных отображений $L_1 \times \ldots \times L_p$ в M. В теореме п. 3 мы построили отображение множеств

$$\mathscr{L}\left(L_1, \ldots, L_p; M\right) \rightarrow \mathscr{L}\left(L_1 \otimes \ldots \otimes L_p; M\right),$$

ставящее в соответствие полилинейному отображению s линейное отображение f со свойством $s=f \circ t$. Но левая и правая части являются линейными пространствами над $\mathscr{K}$ (как пространства функций со значениями в векторном пространстве M: сложение и умножение на скаляр производится поточечно). Из конструкции очевидно, что наше отображение является линейным. Более того, оно является изоморфизмом линейных пространств. Действительно, сюръективность следует из того, что для любого линейного отображения $f: L_1 \otimes \ldots \otimes L_p \rightarrow M$ отображение $s=f \circ t$ полилинейно в силу утверждения а) теоремы п. 3. Инъективность следует из того, что если $s \neq 0$, то $f \circ t \neq 0$ и потому $f \neq 0$. Окончательно, мы получили каноническое отождествление линейных пространств

$$\mathscr{L}\left(L_1, \ldots, L_p: M\right)=\mathscr{L}\left(L_1 \otimes \ldots \otimes L_p; M\right).$$

Таким образом, конструкция тензорного произведения пространств сводит изучение полилинейных отображений к изучению линейных отображений путем введения новой операции на категории линейных пространств.

Размерность и базисы. а) Если хоть одно из пространсте $L_1, \ldots, L_p$ нулевое, то их тензорное произведение является нулевым.

В самом деле, пусть, скажем, $L_j=0$. Любое полилинейное отображение $f: L_1 \times \ldots \times L_p \rightarrow M$ при фиксированных $l_i \Subset L_i$, $i \neq j$, линейно на L_l; но единственное линейное отображение нулевого пространства само нулевое. Значит, $f=0$ при всех значениях аргументов. В частности, универсальное полилинейное отображение $t: L_1 \times \ldots \times L_p \rightarrow L_1 \otimes \ldots \otimes L_p$ является нулевым. Но его образ порождает все тензорное произведение. Поэтому последнее нульмерно. б) $\operatorname{dim}\left(L_1 \otimes \ldots \quad \otimes L_p\right)=\operatorname{dim} L_1 \ldots \operatorname{dim} L_p$

Если хоть одно из пространств нулевое, это следует из предыдущего результата. В противном случае будем рассуждать так: размерность $L_1 \otimes \ldots \otimes L_p$ совпадает с размерностью двойственного пространства $\mathscr{L}\left(L_1 \otimes \ldots \otimes L_p, \mathscr{K}\right)$. В п. 4 мы отождествили его с пространством полилинейных отображений $\mathscr{L}\left(L_1 \times \ldots \quad \ldots X L_p, \mathscr{K}\right)$. Выберем в пространствах L_i базисы $\left\{e_1^{(i)}, \ldots, e_{n_i}^{(i)}\right\}$. Всякому полилинейному отображению

$$f: L_1 \times \ldots \times L_p \rightarrow \mathscr{K}$$

поставим в соответствие набор из $n_1 \ldots n_p$ скаляров

$$f\left(e_{i_1}^{(1)}, \ldots, e_{i_p}^{(p)}\right), \quad 1 \leqslant i_j \leqslant n_i, 1 \leqslant j \leqslant p.$$

В снлу свойства полилинейности этот набор однозначно определяет f:

$$f\left(\sum_{i_1=1}^{n_1} x_{i_1}^{(1)} e_{i_1}^{(1)}, \ldots, \sum_{i_p=1}^{p} x_{i_p}^{(p)} e_{i_p}^{(p)}\right)=\sum_{\left(t_p \ldots i_p\right)} x_{i_1}^{(1)} \ldots x_{i_p}^{(p_i} f\left(e_{i_1}^{(1)}, \ldots, e_p^{(p)}\right).$$

Кроме того, он может быть произвольным: правая часть последпей формулы определяет полилинейное отображение векторов $\left(\vec{x}^{(1)}, \ldots \ldots, \vec{x}(p)\right)$ при любых значениях коэффициентов. Это означает, что пространство полилинейных отображений $L_1 \times \ldots \times L_p \rightarrow \mathscr{H}$ имеет размерность $n_1 \ldots n_p=\operatorname{dim} L_1 \ldots \operatorname{dim} L_p$, что завершает доказательство.

в) Тензорный базис $L_1 \otimes \ldots \otimes L_p$. Предшествующее рассуждение позволяет установить также, что тензорные пропзведения $\left\{e_{i_1}^{(1)} \otimes \ldots \otimes e_i^{(p)}\right\}$ образуют базис пространства $L_1 \otimes \ldots \otimes L_p$ (считаем, что все пространства L_i имеют размерность $\geqslant 1$ и, для простоты, конечномерны). В самом деле, эти тензорные произведения порожлают $L_1 \otimes \ldots \otimes L_p$, нбо через них линейно выражаются все разложимые тензоры. Кроме того, их количество в тогности равно размерности $L_1 \otimes \ldots \otimes L_p$. 6. Тензорные произведения пространств функций. Пусть $S_1, \ldots \ldots, S_p$ - конечные множества, $F\left(S_i\right)$ - пространство функций на S_i со значениями в $\mathscr{K}$. Тогда имеется каноническое отождествление

$$F\left(S_1 \times \ldots \times S_p\right) = F\left(S_1\right) \otimes \ldots \otimes F\left(S_p\right),$$

которое ставит в соответствие функции $\delta_{(s_1,\ldots,s_p)}$ элемент $\delta_{s_1} \otimes \ldots \cdots \otimes \delta_{s_p}$ (см. п. 7§1 ч. 1). Поскольку оба этих семейства образуют базис своих пространств, это действвнтельно изоморфизм. Если $f_i \in F\left(S_i\right)$, то

$$f_1 \otimes \ldots \otimes f_p = \left(\sum_{s_1 \in S_1} f_1\left(s_1\right)\delta_{s_1}\right) \otimes \ldots \otimes \left(\sum_{s_p \in S_p} f_p\left(s_p\right)\delta_{s_p}\right)$$

перейдет при этом изоморфизме в функцию

$$\left(s_1, \ldots, s_p\right) \mapsto f_1\left(s_1\right) \ldots f_p\left(s_p\right),$$

т. е. разложимые тензоры отвечаюг «разделяющимся переменным».

Если $S_1 = \ldots = S_p = S$, то тензорное произведение функций на S соответствует обынному пронзведению их значений «в независимых точках S.

Именно в таком контексте тензорные произведения чаще всего появляются в функциональном анализе и физике. Однако алгебраическое определение тензорного произведения подвергается в функциональном анализе существенным изменениям, связанным с учетом топологии пространств; в частности, его обычно приходится пополнять по разным топологиям.

Подъем поля скаляров. Пусть L-линейное пространство над полем $\mathbf{R}, L^{\mathbf{C}}$ - его комплексификация (см. \$12 ч. 1), Поскольку поле $\mathbf{C}$ можно рассматривать как линейное пространство над $\mathbf{R}$ (с базисом 1, i), мы можем построить линейное пространство $\mathbf{C} \otimes L$, порожденное базисом $1 \otimes e_1, \ldots, 1 \otimes e_n, i \otimes e_1, \ldots \ldots, i \otimes e_n$, над $\mathbf{R}$, где $\{e_1, \ldots, e_n\}$ - базис L. Ясно, что $\mathbf{R}$ - линейное отображение

$$\mathrm{C} \otimes L \rightarrow L^{\mathrm{C}}: \quad 1 \otimes e_i \mapsto e_i, \quad i \otimes e_i \mapsto ie_j$$

определяет изоморфизм $\mathrm{C} \otimes L \mathrm{c} L^{\mathrm{C}}$.

Более общо, пусть $\mathscr{K} \subset k$ - поле и его подполе, L - линейное пространство над $\mathscr{K}$. Рассмотрев сначала K как линейное пространство над $\mathscr{K}$, постронм тензорное произведение $K \otimes L$. После этого введем на нем структуру линейного пространства над K, определив умножение на скаляры $a \in K$ формулой

$$a(b \otimes l) = ab \otimes l; \quad a, b \in K, \quad l \in L.$$

Чтобы проверить корректность этого определения, построим пространство $\mathscr{M}$, свободно порожденное элементами KXL, и его подпространство $\mathscr{H}_{0,\text{как в}}$ п. 2, так что $K \otimes L = \mathscr{M}/\mathscr{A}_0$. Опрепелим умножение на скаляры из K в $\mathscr{M}$, положив на базисных элементах

$$a(b, l) = (ab, l); \quad a, b \in K, \quad l \in L,$$

и распространив это правило на остальные элементы KXL по $\mathscr{K}$-линейности. Непосредственная проверка показывает, что $\mathscr{M}$ превращается в K-линейное пространство, а $\mathscr{M}_0$ - в его подпространство, так что $\mathscr{M}/\mathscr{M}_0 = K \otimes L$ также становится линейным пространством над K. Это и есть общая конструкция подъема поля скаляров, упомянутая в п. 15§11 ч. 1.

Важный частный случай: при $K = \mathscr{K}$ линейное пространство $\mathscr{K} \otimes L$ над $\mathscr{K}$ канонически изоморфно L. Этот изоморфизм переводит $a \otimes l$ в al.

15.9.2 2. Canonical Isomorphisms and Linear Maps of Tensor Products

Тензорное умножение обладает некоторыми алгебраическими свойствами операций, называемых умножениями в других контекстах, например, ассоциативностью. Однако в формулировке этих свойств имеется своя специфика из-за того, что тензорное умножение есть операция над объектами категории. Например, пространства $\left(L_1 \otimes L_2\right) \otimes L_3$ и $L_1 \otimes$

$(L_2 \otimes L_3)$ не совпадают, как явствует из сравнения их конструкции: они линь связаны канонически определенныл изоморфизмом.

В этом параграфе мы опишем ряд таких «элементарных» изоморфизмов, очень полезных при работе с тензорными пронзведениями. Предупредим читателя, однако, что мы вынуждены будем ограничиться лишь введением в теорию канонических изоморфизмов. Главный вопрос, систематическое исследование которого мы опустим, состоит в их совместности. Предположим, например, что у нас есть два естественных изоморфизма между некоторыми тензорными пронзведениями, поразному скомпонованных из нескольких «элементарных» естественных изоморфизмов. Обязательно ли эти изоморфизмы совпадут? Можно проводить непосредственную проверку в каждом конкретном частном случае или попытаться построить общую теорию, которая оказывается довольно громоздкой.

Аналогнчные задачи возникают в связи с естественными отображениями, которые не являются изоморфизмами, например такими, как симметризация или свертка.

Ассоциативность. Пусть $L_1, \ldots, L_p$ - линейные пространства над $\mathscr{K}$. Мы хотим построить канонические изоморфизмы между пространствами вида $(L_1 \otimes L_2)(\ldots \otimes L_p)$, получающимися в результате тензорного умножения $L_1, \ldots, L_p$ группами в разном порядке, который устанавливается расстановкой скобок. Самый удобный способ, автоматически обеспечивающий совместимость, состоит в том, чтобы построить для каждой расстановки скобок линейное отображение $L_1 \otimes \ldots \otimes L_p \to (L_1 \otimes L_2)(\ldots \otimes L_p)$ с помощью универсального свойства из утверждения б) п. 3$1 и проверить, что оно является изоморфизмом.

Мы подробно рассмотрим конструкцию $L_1 \otimes L_2 \otimes L_3 \to (L_1 \otimes L_2) \otimes \otimes L_3$; общий случай совершенно аналогичен. Отображение $L_1 \times L_2 \to L_1 \otimes L_2 : (l_1, l_2) \to l_1 \otimes l_2$ билинейно. Поэтому отображение $L_1 \times L_2 \times L_3 \to (L_1 \otimes L_2) \otimes L_3 : (l_1, l_2, l_3) \mapsto \mapsto (l_1 \otimes l_2) \otimes l_3$ трилинейно. Значит, его можно провести через единственное линейное отображение $L_1 \otimes L_2 \otimes L_3 \to (L_1 \otimes L_2) \otimes L_3$. По самой конструкции последнее отображение переводит $l_1 \otimes l_2 \otimes l_3$ в $(l_1 \otimes l_2) \otimes l_3$. Выбрав в пространствах L_1, L_2, L_3 базисы и воспользовавшись результатом п. 5$1, получаем, что это отображение переводит базис в базис и поэтому является изоморфизмом.

Окончательно: произведение $(L_1 \otimes L_2)(\ldots \otimes L_p)$ с любой расстановкой скобок можно отождествить $c L_1 \otimes L_2 \otimes \ldots \otimes L_p$, просто опустив все скобки; на элементах $(l_1 \otimes l_2)(\ldots \otimes l_p)$ это отождествление действует по тому же правилу. Поэтому мы позволим себе писать $(l_1 \otimes l_2) \otimes l_3 = l_1 \otimes l_2 \otimes l_3 = l_1 \otimes (l_2 \otimes l_3)$ и т. п.

Коммутативность. Пусть σ - любая перестановка чисел $1, \ldots, p$. Определим систему изоморфизмов

$$f_\sigma : L_1 \otimes \ldots \otimes L_p \to L_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes L_{\sigma(p)}$$

со свойством $f_{\sigma r} = f_\sigma \circ f_\tau$ для любых σ, τ. Для этого заметим, что отображение

$$L_1 \times \ldots \times L_p \to L_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes L_{\sigma(p)} : (l_1, \ldots, l_p) \mapsto l_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes l_{\sigma(p)}$$

полилинейно. Поэтому оно проводится через отображение f_σ: $L_1 \otimes \ldots \otimes L_p \to L_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes L_{\sigma(p)}$ в силу утверждения б) теоремы п. 3§1. На произведениях векторов оно действует очевидным образом, переставляя сомножители, и рассмотрение его действия на тензорном произведении базисов $L_1, \ldots, L_p$ показывает, что это изоморфизм. Свойство $f_{\sigma\tau} = f_\sigma \circ f_\tau$ очевидно.

Таким образом, мы определили действие симметрической группы S_p на $L_1 \otimes \ldots \otimes L_p$. В случае, когда все пространства L_i разные, можно пользоваться изоморфизмами $\dot{f}_\sigma$ для однозначного отождествления $L_1 \otimes \ldots \otimes L_p$ с $L_{\alpha(1)} \otimes \ldots \otimes L_{\sigma(p)}$. В этом смысле тензорное умножение коммутативно. Однако записывать это отождествление в виде равенства, не указывая явно f_σ (как мы делали для ассоциативности), опасно, если среди пространств $L_1, \ldots L_{\mathrm{p}}$ есть одинаковые.

Двойственность. Имеется канонический изоморфизм

$$L_1^* \otimes \ldots \otimes L_p^* \to (L_1 \otimes \ldots \otimes L_p)^* .$$

Чтобы построить его, поставим в соответствие каждому элементу $(f_1, \ldots, f_p) \in L_1^* \times \ldots \times L_p^*$ полилинейную функцию $f_1(l_1) \ldots f_p(l_p)$ от $(l_1, \ldots, l_p) \in L_1 \times \ldots \times L_p$. В силу утверждения б) теоремы п. 3 это отображение проводится через отображение $L_1^* \otimes \ldots \otimes L_p^* \to$ (пространство полилинейных функций на $L_1 \times \ldots \times L_p$). Последнее пространство в силу конструкцин п. 4\$1 отождествляется с пространством $\mathscr{Q}(L_1 \otimes \ldots \otimes L_p, \mathscr{K}) = (L_1 \otimes \ldots \otimes L_p)*$. Таким образом, мы построили искомое отображение. Чтобы показать, что оно является изоморфизмом, заметим, что размерности пространств $(L_1 \otimes \ldots \otimes L_p)^*$ и $L_1^* \otimes \ldots \otimes L_p^*$ совпадают (мы ограничиваеися конечномерными L_i). Поэтому достаточно проверить, что наше отображение сюръективно. Но в его образе содержатся функіии $f_1(l_1) \ldots f_p(l_p)$, где f_i пробегают некоторый базис L_i^*, и, как в п. 5 §1, нетрудно убедиться, что они образуют базис $\mathscr{L}(L_1, \ldots, L_p; \mathscr{K}) = (L_1 \otimes \ldots \otimes L_p)^*$.

Отождествление $(L_1 \otimes \ldots \otimes L_p)^*$ с $L_1^* \otimes \ldots \otimes L_p^*$ с помощью описанного изоморфизма обысно безобидно.

Изоморфизм $\mathscr{L}(\boldsymbol{L}, \boldsymbol{M})$ с $\boldsymbol{L}^* \otimes \boldsymbol{M}$. Рассмотрим билинейное отображение

$$L^* \times M \to \mathscr{L}(L, M) : (f, m) \mapsto [l \mapsto f(l)m],$$

где $f \in L^*, l \in L, m \in M$. Как билинейность выражения $f(i)m$ по f и m, так и его линейность по l очевидны. В силу многократно использованного свойства универсальности ему отвечает линейное отображение

$$L^* \otimes M \to \mathscr{L}(L, M).$$

Выберем в L, M базисы $\{l_1, \ldots, l_a\}, \{m_1, \ldots, m_b\}$ и в L^* - двойственный базис $\{l^1, \ldots, l^a\}$. Элемент $l^i \otimes m_j$ тензорного произведения базисов L^*, M переходит в линейное отображение, которое переводит вектор $l_k \in L$ в $l^i(l_k) m_j = \delta_{i\iota} m_j$. Матрица этого линейного отображения размера $b \times a$ имеет единицу на месте (ji) и нули на остальных местах. Поскольку такие матрицы образуют базис $\mathscr{L}(L, M)$, построенное отображение переводит базис в базис и является изоморфизмом.

Рассмотрим важный частный случай: $L = M$. Здесь

$$\mathscr{L}(L, L) = L^* \otimes L.$$

Пространство эндоморфизмов $\mathscr{L}(L, L)$ содержит выделенный элемент: тождественное отображение id_L. Его образ в $L^* \otimes L$, как відно из предыдущих рассуждений, равен

$$\sum_{i=\cdots, i}^{q} l^k \otimes l_k,$$

где $\{l_k\}, \{l^k\}$ - пара двойственных базисов в L и L^*. Таким образом, формула для этого элемегта имеет одинаковый вид во всех парах двойственных базисов.

Кроме того, пространство эндоморфизмов $\mathscr{L}(L, L)$ снабжено каноническим линейным функционалом следа $\mathrm{Tr} : \mathscr{L}(L, L) \to \mathscr{H}$. Из прежних рассуждений следует, что след отображения, которое поставлено в соответствие элементу $l^i \otimes l_l$, равен δ_{ij} (посмотрите на матрицу), так что общему элемен'ту теизорного произведения $L^* \otimes L$ стазится в соответствие число

$$\sum_{i,j=1}^{a} a_i^j l^i \otimes l_i \mapsto \sum_{i=1}^{a} x_i^i$$

Этот линейный функционал $L^* \otimes L \to \mathscr{K}$ называется сверткой. Позже мы дадим определение свертки в более общем контексте.

Изоморфизм $\mathscr{L}(L \otimes M, N)$ с $\mathscr{L}(L, \mathscr{L}(M, N))$. Пространство $\mathscr{L}(L \otimes M, N)$ изоморфно пространству билинейных отображений $L \times M \to N$. аждое такое билинейное отображение $f : (l, m) \to \to f(l, m)$ при фиксированном первом аргументе l представляет собой линейное отображение $M \to N$; от l это отображение зависит линейно. Таким образом, получаем каноническое линейное отображение

$$\mathscr{L}(L \otimes M, N) = \mathscr{L}(L, M; N) \to \mathscr{L}(L, \mathscr{L}(M, N)).$$

Рассуждение с базисами в L, M, N, аналогичное проведенному в предыдушем пункте, показывает, что оно является изоморфизмом (как всюду, пространства предполагаются конечномерными).

(Это отождествление является важным примером общекатегорного понятия «функторов, сопряженных по ану».)

Тензорное произведение линейных отображений. Пусть $L_1, \ldots \ldots, L_p; M_1, \ldots, M_p$ - два семейства линейных пространств, $f_i : L_i \to M_i$ - линейные отображения. Тогда можно построить линейное отображение

$$f_1 \otimes \ldots \otimes f_p : L_1 \otimes \ldots \otimes L_p \to M_1 \otimes \ldots \otimes M_p,$$

называемое тензорным произведением f_t и однозначно характеризуемое простым свойством

$$\left(f_1 \otimes \ldots \otimes f_p\right)\left(l_1 \otimes \ldots \otimes l_p\right) = f_1\left(l_1\right) \otimes \ldots \otimes f_p\left(l_p\right)$$

для всех $l_i \in L_i$. Его существование доказывается все тем же стандартным применением утверждения б) теоремы п. 3§1, если заметить, что отображение

$$L_1 \times \ldots \times L_p \to M_1 \otimes \ldots \otimes M_p : \left(l_1, \ldots, l_p\right) \mapsto f_1\left(l_1\right) \otimes \ldots \otimes f_p\left(l_p\right)$$

полилинейно.
Если все f_i суть изоморфизмы, то и $f_1 \otimes \ldots \otimes f_p$ является изоморфизмом.

Свертка и подъем индексов. С помощью этой конструкции мы можем дать обшее определение свертки «по паре или нескольким парам индексов». Пусть у нас имеется тензорное произведение $L_1 \otimes \ldots \otimes L_p$, причем для некоторых двух индексов $i, j \in \{1, \ldots, p\}$ имеем $L_i = L^*, L_i = L$. Свертка по индексам i, j есть линейное отображенне

$$L_1 \otimes \ldots \otimes L_p \to \bigotimes_{\substack{k=1,1 \\ k \neq i,1}}^{p} L_k,$$

которое получается как композиция следующих линейных отображений:

а) Отображение f_σ, где σ-перестановка индексов $\{1, \ldots, p\}$, переводящая i в $1, j$ в 2 и сохраняющая порядок остальных ин-

$$f_\sigma : L_1 \otimes \ldots \otimes L_p \to L_i \otimes L_j \otimes \left(\bigotimes_{\substack{k=1,j \\ k \neq i.1}}^{p} L_k\right) = L^* \otimes L \otimes \left(\bigotimes_{\substack{k=1 \\ k \neq i.j}}^{p} L_k\right).$$

б) Свертка первых двух множителей, тензорно умноженная на тождественное отображение остальных:

$$L^* \otimes L \otimes \left(\bigotimes_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{p} L_k\right) \to \mathscr{K} \otimes \left(\bigotimes_{\substack{k=1,1 \\ k \neq i,j}}^{p} L_k\right)$$

в) Отождествление

$$\mathscr{K} \otimes \left(\bigotimes_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{p} L_k \right) \Im \bigotimes_{\substack{k=1 \\ k \neq i,j}}^{p} L_k$$

Если имеется несколько пар индексов $(i_1, j_1), \ldots, (i_r, j_r)$ таких, что $L_i = M_k^*, \quad L_j = M_k$, то эту конструкцию можно повторить несколько раз в применении ко всем парам последовательно. Результирующее линейное отображение называется сверткой по этим парам индексов. Оно зависит от самих пар, но не от порядка проведения сверток по ним. Может оказаться, что $\{1, \ldots, p\} = \{i_1, j_1, \ldots, i_r, j_r\}$. Тогда получится полнал свертка.

Снова рассмотрим тензорное пронзведение $L_1 \otimes \ldots \otimes L_\rho$ и предположим, что для i-го пространства задан изоморфизм $g : L_i \to L_i^*$ (в приложениях он чаще всего строится с помощью невырожденной симметричной билинейной формы на L_i). Тогда линейное отображение

$$\mathrm{id} \otimes \ldots \otimes g \otimes \ldots \otimes \mathrm{id} \colon \begin{array}{l} L_1 \otimes \ldots \otimes L_i \otimes \ldots \otimes L_p \to \\ \qquad\qquad \to L_1 \otimes \ldots \otimes L_i^* \otimes \ldots \otimes L_p \end{array}$$

называется «опусканием i-го индекса», обратное к нему - «подъемом i-го индекса». Объяснение термина будет дано в следующем параграфе.

Обе конструкции, свертки и подъема/опускания индекса, чаще всего применяются в случае $L_i = L$ или L^*, когда на L задана ортогональная структура. Возникает масса линейных отображений, связывающих пространства $L^{*\otimes p} \otimes L^{\otimes q}$, которые строятся как композиции поднятия и опускания индексов и сверток. Эти отображения играют большую роль в римановой геометрии, где с их помощью (и с помощью аналитических операций типа дифференцирования) строятся важнейшие дифференциально-геометрические инварианты.

Тензорное умножение как точный функтор. Фиксируем линейное пространство M и рассмотрим отображение категории конечномерных линейных пространств в себя: $L \longmapsto L \otimes M$ на объектах, $\mathfrak{f} \otimes \mathrm{id}_M$ на морфизмах. Из определений легко усмотреть, что $\mathrm{Id}_L \mapsto \mathrm{id} L \otimes M$ н

$$f \circ g \mapsto f \circ g \otimes \mathrm{id}_M = (f \otimes \mathrm{id}_M) \circ (g \otimes \mathrm{id}_M).$$

Поэтому данное отображение является функтором, который называется функтором тензорного умножения на M.

Покажем, что если последовательность $0 \longrightarrow L_1 \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} L_2 \longrightarrow 0$ точна, то и последовательность

$$0 \to L_1 \otimes M \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}_M} L \otimes M \xrightarrow{g \otimes \mathrm{Id}_M} L_2 \otimes M \to 0$$

точна. Это свойство называется точностью функтора тензорного умнозсения. Как и точность функтора $\mathscr{L}$, оно нарушается в категориях модулей, и это нарушение служит важным объектом изучения в гомологической алгебре: ср. обсуждение в \$14 ч. 1.

Проще всего проверить точность, выбрав в L_1, L, L_2 базисы, приспособленные к f, g таким образом, что $\{e_1, \ldots, e_a\}$-базис L_1, $\left\{f(e_1), \ldots, f(e_a); e'_{a+1}, \ldots, e'_{a+b}\right\}$-базис L; $\left\{g\left(e'_{a+1}\right), \ldots, g\left(e'_{a+b}\right)\right\}$ - базис L_2. Выбрав еще базис $\{e''_1, \ldots, e''_c\}$ пространства M, получим, что тензорные произведения базисов

$$\left\{e_i \otimes e''_{ij}, \left\{f(e_i) \otimes e''_j, e'_k \otimes e''_j\right\}, \left\{g(e'_k) \otimes e''_j\right\}\right.$$

приспособлены к $f \otimes \mathrm{id}_M, g \otimes \mathrm{id}_M$ в том же смысле слова.

15.9.3 3. Linear Space Tensor Algebra

Пусть L - некоторое конечномерное линейное пространство над полем $\mathscr{K}$. Любой элемент тензорного произведения

$$T_p^q(L) = \underbrace{L^* \otimes \ldots \otimes L^*}_{p} \otimes \underbrace{L \otimes \ldots \otimes L}_{q}$$

называется тензором на L типа (p, q) и валентности (или ранга) $p + q$. Говорят также, что он является смешанным тензором, p раз ковариантным и q раз контравариантным. Первые две части книги фактически были посвящены изучению следующих тензоров малого ранга.

а) Удобо положить $T_0^9(L) = \mathscr{K}$, т. е. называть скаляры тензорами ранга 0.

б) $T_1^0(L) = L^*$, т. е. тенворы типа $(1, 0)$ суть линейные функционалы на L. Тензоры типа $(0, 1)$ суть просто векторы из L.

в) $T_1^1(L) = L^* \otimes L$. В п. 5\$2 мы отождествили $L^* \otimes L$ с піространством $\mathscr{L}(L, L)$. Следовательно, тензоры типа $(1, 1)$ «суть» лннейные операторы на L.

г) $T_2^0(L) = L^* \otimes L^*$. В п. 4\$2 мы отокдествили $L^* \otimes L^*$ с $(L \otimes L)^*$, нли с бнлинейными отображениями $L \times L \to \mathscr{K}$. Таким образом, тензоры типа $(2, 0)$ «суть» скалярные произведения на L. В п. 5§2 мы отождествили $L^* \otimes L^*$ с $\mathscr{L}(I^{**}, L^*) \simeq \mathscr{L}(L, L^*)$. При этом отождествлении скалярному произведению на L ставится в соответствие линейное отображение $L \to L^*$, которое отвечает рассмотрению этого скалярного произведения как функции от одного из свонх аргументов при фнксированном втором. Таким образом, наши тензорные конструкции \$2 обобщают конструкции части 2.

д) Приведем еще один прнмер: структурный тензор $\mathscr{K}$-алгебры. Здесь мы будем понимать под $\mathscr{K}$-алгеброй линейное пространство L вместе с билинейной операцией умножения $L \times L \to L : (l, m) \to \to lm$, не обязательно коммутативной нли даже ассоциативной, так что, например, алгебры Ли подходят под это определение.

Согласно утверждению б) теоремы п. 3\$1 умиожение можно определить также как линейное отображение $L \otimes L \to L$. В п. 5 §2 мы отождествили пространство $\mathscr{L}(L \otimes L, L)$ с $(L \otimes L)^* \otimes L$ или, пользуясь еще п. 4\$2 и ассоциативностью, с $L^* \otimes L^* \otimes L$. Следовательно, задать на пространстве L структуру $\mathscr{K}$-алгебры это все равно, что задать на нем тензор типа $(2, 1)$, называемый структурным тензором этой алгебры.

Тензорное умножение. В соответствии с п. 4 & мы можем отождествить пространство $T_p^q(L)$ с $\left(L^{\otimes p} \otimes (L^*)^{\otimes q}\right)^*$ и затем с пространством полилинейных отображений
$f : \underbrace{L \times \ldots \times L}_{p} \times \underbrace{L^* \times \ldots \times L^*}_{q} \to \mathscr{H}$.

Два таких полилинейных отображения типа (p, q) и (p', q') можно тензорно перемножить, получив в результате полилинейное отображение типа $(p + p', q + q')$:

$$(f \otimes g)\left(l_1, \ldots, l_p; l_1', \ldots, l_{p'}'; l_1^*, \ldots, l_q^*; l_1'^*, \ldots, l_{q'}'^*\right) =$$
$$= f\left(l_1, \ldots, l_p; l_1'^*, \ldots, l_q'^*\right) g\left(l_1', \ldots, l_{p'}'; l_1'^*, \ldots, l_{q'}'^*\right)$$

где $l_i, l_j' \in L, l_i^*, l_i'^* \in L^*$. Из этого определения сразу же видна билинейность тензорного умножения по его аргументам:

$$(af_1 + bf_2) \otimes = a(f_1 \otimes g) + b(f_2 \otimes g);$$
$$f \otimes (ag_1 + bg_2) = a(f \otimes g_1) + b(f \otimes g_2),$$

а также его ассопиативность:

$$(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h).$$

Однако оно не коммутативно: $f \otimes g$, вообще говоря, не совпадает с $g \otimes f$.

Если не переходить к интерпретации тензоров как полилинейных отображений, то тензорное умноженце можно определить с помощью операций перестановки п. 3\$2, с учетом ассоциативности, как отображение

$$f_0 : \underbrace{L^* \otimes \cdots \otimes L^*}_{\rho} \otimes \underbrace{L \otimes \ldots \otimes}_{q} L \otimes \underbrace{L^* \otimes \ldots L^*}_{p'} \otimes \underbrace{L \otimes \ldots \otimes L}_{q'} \to\to \underbrace{L^* \otimes \ldots L^*}_{p+p'} \otimes \underbrace{L \otimes L'}_{q+q'}$$

тде σ переставляет третью группу из p' индексов на места после первой группы из p индексов, сохраняя их относительный порядок и относнтельный лорядок остальных индексов. В этом варианте билинейность тензорного умножения столь же очевидна, а его ассоцнативность превращается в некоторое тождество между подстановками, которое читателю легче увидеть самому, чем следить за длинными, но банальными объяснениями.

Тензорная алгебра пространства L. Положим

$$T(L)=\bigoplus_{p,q=1}^{\infty} T_p^q(L)$$

(прямая сумма линейных пространств). Это бесконечномерное пространство вместе с операцией тензорного умножения в нем, определенной в предыдущем пункте, называется тензорной алгеброй пространства L.

Заметим, что над полем комплексных чисел бывает важно рассматривать расширенную тензорную алгебру, являющуюся прямой суммой пространств $L^{\otimes p} \otimes L^{*} \otimes q \otimes \bar{L}^{\otimes p'} \otimes \bar{L}^{*} \otimes q'$. Например, полуторалинейная форма на L как тензор лежит в $L^{*} \otimes L^{*}$. По недостатку места мы не будем систематически изучать эту конструкцию.

15.9.4 4. Classical Designations

В классическом тензорном анализе тензорный формализм описывается в координатных обозначениях. Ими и сейчас широко пользуются в физической и геометрической литературе, и этому языку следует отдать должное: он компактен и гибок. В этом параграфе мы введем его и покажем, как выражаюося на нем различные конструкции, опнсанные выше.

Базисы и координаты. Пусть L - конечномерное линейное пространство. Выберем в нем базис $\{e_1,\ldots,e_n\}$ и будем задавать векторы L их координатами $(a^1,\ldots,a^n)$ в этом базисе: $\sum\limits_{i=1}^{n} a^i e_i$.

В L^* выберем двойственный базис $\{e^1,\ldots,e^n\}, (e^i,e_j)=\delta^i_j=0$ при $i\neq j; 1$ при $i=j$, и векторы из L^* будем задавать координатами $(b_1,\ldots,b_n): \sum\limits_{j=1}^{n} b_j e^j$. Расположение индексов в обоих случаях выбирается так, чтобы в суммировании участвовали пары одинаковых индексов, один из которых находится наверху, другой внизу.

В $L^{*\otimes p}\otimes L^{\otimes q}$ построим тензорное пронзведение рассмотренных оазисов

$$\left\{e^{i_1}\otimes\ldots\otimes e^{i_p}\otimes e_{j_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_q}|1\leqslant i_k\leqslant n, 1\leqslant j_l\leqslant n\right\}.$$

Любой тензор $T\in T_p^q(L)$ задается в нем своими координатами $T^{j_1\cdots i_q}_{i_1\ldots i_p}$

$$T=\sum T^{j_1\ldots i_p}_{i_1\ldots i_p} e^{l_1}\otimes\ldots\otimes e^{t_p}\otimes e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_q}.$$

Заметим, что суммирование здесь снова распространено на пары одинаковых индексов, один из которых верхний, другой - нижний. Это настолько характерная черта классического формализма, что зачастую принимается соглашение опускать знак суммы во всех случаях, когда подразумевается такое суммирование.

В частности, при этом соглашении векторы из L записываются в виде $a^j e_j$, а функционалы в виде $b_i e^i$. Скалярное произведение между L^* и L, т. е. значение функционала $b_i e^t$ на векторе $a' e_l$, запишется $a^i b_i$ или $b_i a^i$.

Более того, можно пойти еще дальше по этому пути экономии и не писать сами векторы e_i и e^i. Тогда элементы L записываются в виде a^i, элементы L^* - в виде b_i, а обший тензор $T\in T_p^q(L)$ - в виде $T^{l_1\ldots q_q}_{i_1\ldots i_p}$. Иными словами, в классической записи тензора T явно указаны: координаты, или компоненты T в тензорном базисе $L^{*\otimes p}\otimes L^{\otimes q}$, пронумерованные как элементы тензорного базиса; номера являются сложными индексами; ковариантная часть индекса $(i_1,\ldots,i_p)$ пишется внизу, а контравариантная $(j_1,\ldots,j_q)$ - наверху;

подразумевается: выбор исходного базиса $\{e_1,\ldots,e_n\}$ в L, по которому строится двойственный базис $\{e^1,\ldots,e^n\}$ в L^* и затем тензорные базисы во всех пространствах $T_p^q(L)$.

Иногда удобно рассматривать тензоры, лежащие в пространствах, где сомножители L и L^* расположены в ином порядке, чем принятый нами, например, $L \otimes L^*$ вместо $L^* \otimes L$, или $L \otimes L^* \otimes \otimes L \otimes L$. Указание на это делается с помощью «блочного расположения» сложных индексов у координат тензора. Например, тензор $T \in L \otimes L^*$ можно задавать компонентами, которые обозначаются T_i', а $T \in L \otimes L^* \otimes L \otimes L$ - компонентами $T_{i_1}{}^{i_1}{}_{i_2} i_{33}$.

Некоторые важные тензоры. К ним относятся:

а) Метрический тензор g_{ij}. Согласно нашим обозначениям он лежит в $T_2^0(L)$ и в силу г) п. 1§3 может представлять скалярное произведение на L. Его значение на паре векторов a^i, b^j равно $\sum g_{ij} a^i b^i$ или просто $g_{ij} a^i b^i$. Таким образом, компоненты метрического тензора - это элементы матрицы Грама исходного базиса L относительно соответствующего скалярного произведения.

б) Матрица A_j^i. Это - элемент $T_1^1(L)$, т. е., в силу в) п. 1§3, линейное отображение L в себя. Оно переводит вектор a' в вектор с i-й координатой $\sum A_j^i a^j$ или просто $A_j^i a^j$. Тензор валентности $p+q$ можно представлять себе в виде «p+q-мерной матрицы», обычные матрицы плоские. в) Тензор Кронекера δ_j^i. Это элемент $T_1^1(L)$, представляющий тождественное отображение L в себя.

г) Структурный тензор алгебры. Согласно д) п. 1 \$ ои лежит в $T_2^1(L)$ и потому записывается покомпонентно в виде γ_{ij}^k. Он задает билинейное умножение в L по формуле

$$a^i \cdot b^i = c^k = \gamma_{ij}^k a^i b^l.$$

Полная запись: $\left(\sum_i a^i e_i\right)\left(\sum_j b^i e_j\right) = \sum_k \left(\sum_{i,j} \gamma_{ij}^k a^i b^j\right) e_{k^*}$

Преобразование компонент тензора при замене базиса в L. Пусть A_j^i - матрица замены базиса в $L: e_k' = A_k^i e_i; B_j^i$ - матрица перехода от базиса $\left\{e^k\right\}$, двойственного $\{e_k\}$, к базису $\left\{e'^k\right\}$, двойственному $\{e_k'\}$. Нетрудно убедиться, что $B = (A^t)^{-1}$: эту матрицу называют контраградиентной к A.

Координаты a'^j в базнсе $\left\{e_j'\right\}$ вектора, первоначально заданного координатами a^i в базисе $\{e_i\}$, будут $B_k^j a^k$.

Аналогично, координаты b_i в базисе $\{e'^i\}$ функционала (или «ковектора»), первоначально заданного координатами b_i в базисе $\{e^i\}$, будут $A_j^k b_k$.

Чтобы найти координаты $T'^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p}$ в штрихованном тензорном базисе тензора, первоначально заданного координатами $T^{j_1 \ldots l}_{i_1 \ldots i_p}$, достаточно теперь заметить, что они преобразуются так же, как координаты тензорного произведения q-векторов и p-ковекторов, Т. е.

$$T'^{j_1 \ldots l_q}_{i_1 \ldots i_p} = A_{i_1}^{l_1} \ldots A_{i_p}^{l_p} B_{k_1}^{l_1} \ldots B_{k_q}^{l_q} T^{k_1 \ldots k_q}_{l_1 \ldots l_p}$$

Не забывайте, что справа подразумевается суммирование по парам одинаковых индексов.

В классическом изложении эту формулу кладут в основу определения тензоров.

Именно, тензором типа (p, q) на п-мерном пространстве называют отображение T, которое каждому базису L ставит в соответсгвие семейство из n^{p+q} компонент-скаляров $T_{i_1}^{j_1} \ldots i_p$, причем тапое, ито при замене базиса посредством жатриць. замена компонент тензора происходит по выписанным выше формулам.

Тензорные конструкции в координатах.

а) Линейные комбинациии тензоров одинакового типа. Здесь формулы очевидны:

$$(aT+bT')^{l_1\cdots i_q}_{i_1\cdots i_p} = aT^{j_1\ldots i_q}_{i_1\ldots i_p} + bT^{j_1\ldots i_q}_{i_1\ldots i_p}$$

б) Темзорнов улножение. Согласно определению в п. 2§3

$$(T\otimes T')^{i_1 i'}_{i_1\ldots i_p i_1 i'_1\ldots i'_{p'}} = T^{f_1\ldots i_q}_{i_1\ldots i_p} T'_1 i'_1 \ldots i'_{q'_{p'}}$$

В частности, разложимый тензор имеет компоненты $T_i, \ldots T_{10} T^{i1} \ldots \ldots T^j q$.

в) Перестановки. Пусть σ - перестановка индексов $1,\ldots,p,\tau$ - перестановка индексов $1,\ldots,q; f_{\sigma,\tau}: T^q_p(L)\to T^q_p(L)$ - линейное отображение, отвечающее этим перестановкам, как в п. 3§2, Тогда для любого $T\in T^q_p(L)$ имеем

$$[f_{\sigma,\tau}(T)]^{i_1\cdots i_q}_{i_1\ldots i_p} = T_{i^{j^{-1}(1)}_{\sigma^{-1}(1)}\cdots i^{i^{-1}(p)}_{\tau^{-1}(q)}}$$

г) Свертка. Пусть $a\in\{1,\ldots,p\}, b\in\{1,\ldots,q\}$. ак в п. 8 §2, имеется отображение $T^q_p(L)\to T^{q-1}_{p-1}(L)$, «уничтожающее» a-й множитель L^* и b-й множитель L с помощью отображения свертки $L^*\otimes L\to\mathscr{K}$, которое является обычным скалярным произведением векторов и функционалов: $(b_i)\otimes(\alpha^j)\mapsto b_i a^i$. Поэтому, обозначая через T' тензор T, свернутый по паре индексов (a-й нижний, b-й верхний), получаем

$$T'^{j_1\cdots j_{b-1} i_{b+1}\cdots j_q}_{i_1\cdots i_{a-1} i_{a+1}\cdots i_p} = T^{i_1\cdots i_{b-1}{}^{k j_{b+1}\cdots i_q}}_{i_1\cdots i_{a-1} k i_{a+1}\cdots i_p}$$

(справа суммирование по k). Итерируя эту конструкцию, получим определение свертки по нескольким парам индексов.

Мы уже убедились, что многие формулы тензорной алгебры пишутся в терминах тензорного умножения и последующей свертки по одной или нескольким парам индексов. Повторим их для закрепления:

$$g_{ij}a^i b^i - \text{ свертка } \left((g_{ij})\otimes\left(a^k\right)\otimes\left(b^i\right)\right).$$

Скалярное произведение:

$$b_i a^i - \text{ свертка } \left((b_i)\otimes\left(a^i\right)\right).$$

Копрдинаты тензора в новом базисе, или, с «активной точки зрения», образ тензора при линейном преобразованин основного пространства:

$$T'^{i_1\ldots i_q}_{i_1\ldots i_p} - \text{ свертка } ((A\otimes\ldots\otimes A)\otimes(B\otimes\ldots\otimes B)\otimes T).$$

Умножение в алгебре:

$$a^i\cdot b^i - \text{ свертка } ((\text{структурный тензор}) \otimes\left(a^i\right)\otimes\left(b^i\right).$$

Еще один пример - умножение матриц:

$$\left(A^i_j\right)\left(B^j_k\right) = \left(A^i_j B^j_k\right) - \text{ свертка } \left(A^l_j\otimes B^j_k\right).$$

Еще раз напомним, что для полного определения свертки следует указать, по каким индексам она производится; в приведенных примерах это либо очевидно, либо ясно из приведенных ранее полных формул.

В общем, можно сказать, что операция свертки в классическом языке тензорной алгебры играет такую же унифицирующую роль, как операция умножения матриц в языке линейной алгебры. В $4 ч. I мы подчеркивали, что георетико-множественные операции разной природы единообразно описываются с помощью матричного умножения. тензорной алгебре и свертке, скомбинированной с тензорным умножением, это замечание применимо в еше большей мере.

д) Подъем и опускание индексов. Согласно определению в разделе в) п. 8$2 подъем a-го индекса и опускание b-го индекса это линейные отображения

$$T^q_p(L)\to T^{q+1}_{p-1}(L),\quad T^q_p(L)\to T^{q-1}_{p+q}(L),$$

которые индуцируются некоторыми изоморфизмами $g: L^*\to L$ или $g^{-1}: L\to L^*$: следует «заменить» в произведении $L^{*\otimes p}\otimes L^{\otimes q}a-$ множитель L^* на L или соответственно b-й множитель L на L^*.

В соответствии с соглашениями в конце п. 2 этого параграфа компоненты полученных тензоров следует записывать в виде

$$T_{i_1\ldots i_{a-1}}{}^{i_a}{}_{i_{a+1}\ldots i_p} j_1\cdots i_q, T_{i_1\ldots i_p} i_1\cdots j_{b-1} j_b l_{b+1}\cdots i_q.$$

Если условиться применять после отображения подьема (спуска) индекса отображение перестановки, перегоняющее новый сомножитель L направо, а L^* налево, пока он не станет соседствовать со старыми сомножителями, то можно сохранить прежний вид записи компонент.

Как мы уже упоминали, изоморфизмы $g : L^* \to L$ и $g^{-1} : L \to L^*$ в прнложениях чаще всего происходят из симметричной невырожденной билинейной формы g_{ij} на L. Поскольку она сама является тензором, операции подъема и опускания индексов можно применять и к ней. Опишем этот формализм подробнее.

Форма g_{ij} ставит в соответствие вектору a^i линйный функционал

$$b^i \mapsto \sum g_{ij} a^i b^j$$

Координаты этого функционала в двойственном базисе L^* суть $g_{ij}a^i$ (суммирование по i), или ввиду симметрии $g_{ij}a^j$. Иными словами, опускание (единственного) верхнего индекса тензора а с помощью метрического тензора g_{ij} приводит к тензору

$$a_i = g_{ij} a^j.$$

Отсюда сразу же получается общая формула для опускания любого числа индексов у разложимого тензора и затем по линейности у любого тензора:

$$T_{i_1 \dots i_p j_1 \dots i_r}^{t_{r+1} \cdots j_q} = g_{j_1 j_1'} \dots g_{j_r i_r} T_{i_1 \dots i_p} j_1' \cdots i_r' i_{r+1} \cdots l_a.$$

В частности, мы можем воспользоваться ею для вычислепия тензора g^{ij}, получаюшегося из g_{ij} подъемом индексов. Действительно,

$$g_{il} = g_{ik} g_{il} g^{il}$$

Прочтем здесь правую часть как формулу для (i, j)-го элемента матрицы, получающейся умножением матрицы (g_{ik}) на матрицу $\left(\sum_i g_{jl} g^{kl}\right)$. Так как слева также стоит матрица (g_{ik}), очевидно,

$$g_{jl} g^{kl} = \delta_j^k$$

т. е. матрица $\left(g^{kl}\right)$ обратна к матрице (g_{ij}) (учесть симметричность). Это же вычисление показывает, что g_i^l есть тензор Кронекера.

Поэтому общая формула для подъема индексов имеет вид

$$T_{i_1 \dots i_b}{}^{i_{b+1}} \dots i_p t_1 \dots f_q = g^{l_{b+1} l_{b+1}'} \dots g^{i_p t_p'} T_{i_1 \dots i_p}{}^{i_1 \dots j_q}.$$

Если мы хотим опустить (соответственно поднять) другие наборы индексов, формулы очевидным образом видоизменяются.

15.9.5 5. Symmetric Tensors

Пусть L - фиксированное линейное пространство и $T_0^q(L) = L^{\otimes q}, q \geqslant 1$. В п. 3§2 мы показали, что каждлй перестановке σ из группы S_q перестановок чисел $1, \dots, q$ можно поставить в соответствие линейное отображение $f_\sigma : T_0^q(L) \to T_0^q(L)$, которое действует на разложимых тензорах по формуле

$$f_\sigma \left(l_1 \otimes \dots \otimes l_q\right) = l_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes l_{\sigma(q)}.$$

Назовем тензор $T \in T_0^q(L)$ симметричным, если $f_\sigma(T) = T$ для всех $\sigma \in S_q$. Очевидно, симметричные тензоры образуют линейное подпространство в $T_0^q(L)$. Все скаляры удобно считать симметричными тензорами. При отождествлении из г) п. 1§3 симметрнчные тензоры из $T_0^2\left(L^*\right)$ отвечают симметричным билинейным формам на L.

Обозначим через $S^q(L)$ подпространство симметричных тензоров в $T_0^q(L)$. Мы построим сейчас проектор $S : T_{11}^q(L) \to T_{14}^q(L)$, образ которого будет совпадать с $S^q(L)$, предполагая, что характеристика основного поля равна нулю или хотя бы не делит $q!$. Он называется отображением симметризации. В классических обозначениях вместо $S(T)$ пишут $T^{(i_1 \cdots i_q)}$.

Предложение.

Положим

$$S=\frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in S_q} f_\sigma : T_0^q(L)\to T_0^q(L).$$

Тогда $S^2=Su\operatorname{Im}S=S^q(L)$.

Д ок аз ательство. Очевидно, результат симметризации всякого тензора симметричен, так что $\operatorname{Im}S\subset S^q(L)$. Наоборот, на симметричных тензорах симметрнзашия является тождественной операцией, так что если $T\in S^q(L)$, то $T=S(T)$. Это показывает одновременно, что $\operatorname{lm}S=S^q(L)$ и что $S^2=S$. 3. Пусть $\{e_1,\ldots,e_n\}$ - базис пространства L. Тогда разложимые тензоры $e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_q}$ образуют базис $T_0^q(L)$, а их симметризации $S\left(e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_q}\right)$ порождают $S^q(L)$. Введем обозначение

$$S\left(e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_q}\right)=e_{i_1}\ldots e_{i_q}.$$

Формальное произведение $e_{i_1}\ldots e_{i_q}$ не меняется при перестановке индексов, и можно условиться выбирать в качестве канонической записи таких симметричных тензоров запись $e_1^{a_1}\ldots e_n^{a_n}$, где $a_i\geqslant 0,\ a_1+\ldots+a_n=q$; здесь число a_i показывает, сколько раз вектор e_i фигурирует в $e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_q}$.

Предложение.

Тензоры $e_1^{a_1}\ldots e_n^{a_n}\in S^q(L), a_1+\ldots+a_n=q$, образуют базис в пространстве $S^q(L)$, которое, таким образом, можно отождествить c пространством однородных многочленов степени q от элементов базиса L.

Д ок а з а тельство. Мы должны лишь проверить, что тензоры $e_1^{a_1}\ldots e_n^{a_n}$ линейно независимы в $T_0^7(L)$. Если

$$\sum c_{a_1\ldots a_n}e_1^{a_1}\ldots e_n^{a_n}=0,$$

ТО

$$S(\sum c_{a_1}\ldots a_n\underbrace{e_1\otimes\ldots\otimes e_1}_{a_1}\otimes\ldots\otimes\underbrace{e_n\otimes\underbrace{\quad}_{n}\ldots e_n}_{a_n})=0.$$

Собирая в левой части подобные члены, нетрудно убедиться, тто коэффициентами при элементах тензорного базиса пространства $T_0^q(L)$ окажутся скаляры $c_{a_1}\ldots a_n$, умноженные на целые числа, состоящие из произведений простых чисел $\leqslant q$. Поскольку характеристика $\mathscr{K}$ по предположению больне $q!$, из равенства нулю этих коэффициентов следует, что все $c_{a_1}\ldots a_n$ равны нулю.

Следствие. $\dim S^q(L)=\binom{n+q-1}{q}$.

Положим $S(L)=\bigoplus_{q=1}^{\infty}S^q(L)$. В силу предложения п. $4S(L)$ можно отождествить с пространством всех многочленов от элементов базиса L. На этом пространстве имеется структура алгебры, умножением в которой является обычное умножение многочленов. Однако сразу, возможно, не ясно, не зависит ли это умножение от выбора исходного базиса. Поэтому мы введем его нnвариантно. Поскольку ниже приходится рассматривать все $S^q(L)$ одновременно, мы считаем, что характеристика $\mathscr{K}$ равна нулю.

Предложение.

Введем на пространстве $S(L)$ билинейное умножение по формуле
$$T_1 T_2 = S\left(T_1 \otimes T_2\right), \quad f \in S^p(L), \quad g \in S^q(L).$$

Оно превращает $S(L)$ в коммутативную ассоциативную алеебру над полем $\mathscr{K}$. В представлении симметринных теiьзоров в виде многочленов от лементов базиса L это умножение совпадает с умножением многочленов.

Доказ ательство. Проверим сначала, что для любых тензоров $T_1 \in T_0^p(L), T_2 \in T_0^q(L)$ имеет место формула
$$S\left(S\left(T_1\right) \otimes T_2\right) = S\left(T_1 \otimes S\left(T_2\right)\right) = S\left(T_1 \otimes T_2\right).$$

В самом деле,
$$S\left(T_1\right) \otimes T_2 = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} f_\sigma\left(T_1\right) \otimes T_2$$

откуда
$$S\left(S\left(T_1\right) \otimes T_2\right) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} S\left(f_\sigma\left(T_1\right) \otimes T_2\right).$$

Но $S\left(f_\sigma\left(T_1\right) \otimes T_2\right) = S\left(T_1 \otimes T_2\right)$ для любых $\sigma \in S_p$. Это очевидно для разложимых тензоров T_1, T_2 и следует для остальных по линей ности. Поэтому сумма справа состоит из p ! слагаемых $S\left(T_1 \otimes T_2\right)$, так что
$$S\left(S\left(T_1\right) \otimes T_2\right) = S\left(T_1 \otimes T_2\right)$$

Аналогично устанавливается второе равенство.

Отсюда легко вывести, что на симметричных тензорах операция $\left(T_1, T_2\right) \mapsto S\left(T_1 \otimes T_2\right) = T_1 T_2$ ассоциативна. Действительно,
$$\left(T_1 T_2\right) T_3 = S\left(S\left(T_1 \otimes T_2\right) \otimes T_3\right) = S\left(T_1 \otimes T_2 \otimes T_3\right)$$
и аналогично
$$T_1\left(T_2 T_3\right) = S\left(T_1 \otimes S\left(T_2 \otimes T_3\right)\right) = S\left(T_1 \otimes T_2 \otimes T_3\right).$$

Кроме того, она коммутативна: формула $S\left(T_1 \otimes T_2\right) = S\left(T_2 \otimes T_1\right)$ очевидна для разложимых тензоров и следует для остальных по линейности.

Из этих утверждений следует, что
$$\left(e_1^{a_1} \ldots e_n^{a_n}\right)\left(e_1^{b_1} \ldots e_n^{b_n}\right) = e_1^{a_1+b_1} \ldots e_n^{a_n+b_n},$$
что завершает доказательство.

Построенная выше алгебра $S(L)$ называется симметрической алгеброй пространства L.

Элементы алгебры $S\left(L^*\right)$ можно рассматривать как полиномиальные функции на пространстве L со значениями в поле $\mathscr{K}$: элементу $f \in L^*$ ставится в соответствие он сам как функционал на L, а произведению элементов в $S\left(L^*\right)$ и их линейной комбинации -произведение и линейная комбннация соответствующих функций. Не вполне очевидно, что разные элементы $S\left(L^*\right)$ различаются также как функции на L, M оставляем этот вопрос читателю в качестве упражнения. Для симметрических алгебр над конечными полями, которые мы введем ниже, это уже не так: например, функция $x^p - x$ тождественно равна пулю в поле $\mathscr{K}$ из p элементов. 9. Второе определение симметрической алгебры. В принятом нами определении симметрической алгебры с помощью оператора S используется деление на факториалы. Это невозможно над полями конечной характеристики и в теории модулей над кольцами, где формализм тензорной алгебры также существует и весьма полезен. Поэтому мы вкратце опишем другое определение симметрической алгебры пространства L, в котором она реализуется не как подпространство, а как факторпространство $T_0(L) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} T_0^p(L)$.

Для этого рассмотрим двусторонний идеал I в тензорной алгебре $T_0(L)$, порожденный всеми элементами вида
$$T - f_\sigma(T), T \in T_0^p(L), \sigma \in S_p, \quad p = 1, 2, 3, \ldots$$

Он состоит из всевозможных сумм таких тензоров, слева и справа тензорно умноженных на любые элементы $T_0(L)$. Нетрудно видеть, что $I = \bigoplus_{i=1}^{\infty} I^p$, где $I^p = I \cap T_0^p(L)$, т. е. этот ндеал градуирован.

Положим

$$\widetilde{S}(L) = T_0(L)/I$$

как факторпространство. То же рассуждение, что в \$11 ч. 3, показывает, что

$$\widetilde{S}(L) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \widetilde{S}^p(L), \widetilde{S}^p(L) = T_0^p(L)/I^p$$

Благодаря тому, что I - идеал, в $S(L)$ можно ввести умножение по формуле

$$(T_1 + I)(T_2 + I) = T_1 \otimes T_2 + I.$$

Оно бнлинейно и ассоциативно, так как это верно для тензорного умножения. Кроме того, оно коммутативно, ибо если T_1, T_2 разложимы, то $T_2 \otimes T_1 = f_\sigma (T_1 \otimes T_2)$ для подходящей перестановки σ и, значит, $T_1 \otimes T_2 - T_2 \otimes T_1 \in I$. Таким образом, $\widetilde{S}(L)$ есть коммутативная ассоциативная $\mathscr{K}$-алгебра. Можно показать, что естественное отображение $L \rightarrow \mathcal{S}(L) : l \longmapsto l + I$ является вложением и что в терминах любого базиса пространства L элементы $\widetilde{S}(L)$ однозначно представляются как многочлены от этого базиса. Элементы $S^p(L)$ отвечают однородным многочленам степени p.

Если характеристика $\mathscr{K}$ равна нулю, то сквозное отображение

$$S(L) \rightarrow T_0(L) \rightarrow \widetilde{S}(L)$$

является изоморфизмом алгебр, сохраняющим градуировку. Поскольку $S(L)$ существует в более общей ситуации, для алгебраических нужд симметрическую алгебру удобно вводить именно таким способом.

15.9.6 6. Skew-symmetric Tensors and External Algebra of Linear Space

В той же ситуации, что и в II. 1§5, назовем тензор $T \in \in T_0^q(L)$ кососимметричным (или антисимметричным), если $f_\sigma(T) = \varepsilon(\sigma)T$, где $\varepsilon(\sigma)$ - знак перестановки σ, для всех $\sigma \in S_q$. Очевидно, кососимметричные тензоры образуют линейное подпространство в $T_0^q(L)$. Все скаляры удобно считать одновременно кососимметричными и симметричными тензорами. При отождествлении из г) п. 1§3 кососимметричные тензоры из $T_0^2(L^*)$ отвечают симплектическим билинейным формам на L.

Обозначим через $\Lambda^q(L)$ подпространство кососимметрических тензоров в $T_0^q(L)$. По аналогии с \$5 построим линейный проектор $A : T_0^q(L) \rightarrow T_0^q(L)$, образ которого совпадает с $\Lambda^q(L)$. Как и там, мы предполагаем пока, что характеристика поля скаляров не делит q!. Проектор A будет называться антисимметризацией или альтернированием. В классических обозначениях вместо $A(T)$ пншут $T^{[i_1 \cdots i_q]}$.

Предложение.

Положим

$$A = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_q} \varepsilon(\sigma) f_\sigma : T_0^q(L) \rightarrow T_0^q(L).$$

Тогда $A^2 = A u \operatorname{Im} A = \Lambda^q(L)$.

Доказательство. Прежде всего проверим, что результат альтернирования всякого тензора кососимметричен. Действительно, поскольку f_σ и $\varepsilon(\sigma)$ мультипликативны по σ и $\varepsilon(\sigma)^2 = 1$, нмеем

$$f_\sigma(AT) = f_\sigma\left(\frac{1}{q!}\sum_{\tau\in S_q}\varepsilon(\tau)f_\tau(T)\right) = \frac{1}{q!}\sum_{\tau\in S_q}\varepsilon(\tau)f_{\sigma\tau}(T) =$$
$$= \varepsilon(\sigma)\frac{1}{q!}\sum_{\tau\in S_q}\varepsilon(\sigma\tau)f_{\sigma\tau}(T) = \varepsilon(\sigma)AT.$$

Далее, A является проектором, потому что

$$A^2 = \frac{1}{(q!)^2}\sum_{\sigma,\tau\in S_q}\varepsilon(\sigma\tau)f_{\sigma\tau} = \frac{1}{q!}\sum_{\rho\in S_q}\varepsilon(\rho)f_\rho = A.$$

Действительно, любой элемент $\rho \in S_q$ ровно q ! способами можно представить в вйде произведения $\sigma\tau : \sigma$ выберем любым, τ находим из равенства $\tau = \sigma^{-1}\rho$.

Отсюда, как в предложении п. 1§5, следует, что $\operatorname{Im} A = \Lambda^q(L)$.

Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ - базис пространства L. Тогда разложимые тензоры $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_q}$ образуют базис $T_0^q(L)$, а их антисимметризации $A\left(e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_q}\right)$ порождают $\Lambda^q(L)$. Введем обозначение

$$A\left(e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_q}\right) = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_q}$$

(значок $\wedge$ называется символом «внешнего умножения»). Заметим теперь, что в отличие от симметрического случая перестановка любых двух векторов в $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_q}$ меняет знак этого произведения, ибо этот тензор антисимметричен. Отсюда следуют два вывода:

а) $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_q} = 0$, если $i_a = i_b$ для некоторых a, b, при условии, что $\operatorname{char} \mathscr{K} \neq 2$.

б) Пространство $\Lambda^q(L)$ порождено тензорами вида $e_{i_1} \wedge \ldots \ldots \wedge e_{i_q}$, где $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_q \leqslant n$. Отсюда, в частности, сразу же следует, что $\Lambda^m(L) = 0$ при $m > n = \dim L$.

Следующий результат параллелен предложению п. 4\$5.

Предложение.

Тензорь $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{l_q} \in \Lambda^q(L)$ npu $q \leqslant n$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_q \leqslant n$ образуют базис пространства $\Lambda^q(L)$. Доказательство. Нужно только проверить, что эти тензоры линейно независимы в $T_0^q(L)$. Если

$$\sum c_{i_1}\ldots i_q e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_q} = 0$$

ro

$$A\left(\sum e_{i_1}\ldots t_q e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{l_p}\right) = 0.$$

Но так как среди индексов $i_1, \ldots, i_q$ нет одинаковых и они расположены в порядке возрастания, в результате их перестановок мы получим в сумме слева линейную комбинацию различных элементов тензорного базиса $T_0^q(L)$ с коэффицнентами вида $\pm\frac{1}{q!}c_{i_1}\ldots i_q$. Эта сумма может быть равна нулю, только если все $c_{i_1}\cdots i_{q_n}$ нулевые.

Следствие. $\dim \Lambda^q(L) = \left(\begin{array}{l} n \\ q \end{array}\right), \dim \bigoplus_{q=0}^n \Lambda^q(L) = 2^n$.

Положим $\Lambda(L) = \bigoplus_{q=0}^n \Lambda^q(L)$. По аналогии с симметрическим случаем введем на пространстве антисимметрических тензоров операцию внешнего умножения й покажем, что она превращает $\Lambda(L)$ в ассоциативную алгебру, называемую внешней алгеброй, или алгеброй Грассмана, пространства L.

Предложение.

Билинейная операция

$$T_1 \wedge T_2 = A\left(T_1 \otimes T_2\right); T_1 \in \Lambda^p(L), T_2 \in \Lambda^q(L),$$

на $\Lambda(L)$ ассоциативна, $T_1 \wedge T_2 \notin L^{p+q}(L), uT_2 \wedge T_1 = (-1)^{pq} T_1 \wedge T_2$ (это свойство иногда называют кососкоммутативностью).

В частности, подпространство $\Lambda^+(L) = \bigoplus_{q=0}^{[n/2]} \Lambda^{2q}(L)$ являетсл центральной подалгеброй $\Lambda(L)$.

Доказательство. По аналогии с симметричным случаем проверим сначала, что для всех $T_1 \in T_0^p(L), T_2 \in T_0^q(L)$ имеют ме- сто формулы

$$A\left(A\left(T_1\right) \otimes T_2\right) = A\left(T_1 \otimes A\left(T_2\right)\right) = A\left(T_1 \otimes T_2\right).$$

В самом деле,

$$A\left(T_1\right) \otimes T_2 = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) f_\sigma\left(T_1\right) \otimes T_2,$$

откуда

$$A\left(A\left(T_1\right) \otimes T_2\right) = \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) A\left(f_\sigma\left(T_1\right) \otimes T_2\right).$$

Рассмотрим вложение $S_p \rightarrow S_{p+q}, \sigma \mapsto \tilde{\sigma}$, где

$$\tilde{\sigma}(i) = \begin{cases} \sigma(i) & \text{при } 1 \leqslant i \leqslant p, \\ i & \text{при } i > p. \end{cases}$$

Очевидно, $f_\sigma\left(T_1\right) \otimes T_2 = f_{\tilde{\sigma}}\left(T_1 \otimes T_2\right)$, кроме того, A и $f_{\tilde{\sigma}}$ коммутирует, так что

$$A f_{\tilde{\sigma}}\left(T_1 \otimes T_2\right) = f_{\tilde{\sigma}} A\left(T_1 \otimes T_2\right) = \varepsilon(\tilde{\sigma}) A\left(T_1 \otimes T_2\right) = \varepsilon(\boldsymbol{\sigma}) A\left(T_1 \otimes T_2\right).$$

Поэтому

$$A\left(A\left(T_1\right) \otimes T_2\right) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon^2(\sigma) A\left(T_1 \otimes T_2\right) = A\left(T_1 \otimes T_2\right).$$

Аналогично доказывается второе равенство. Теперь ассоциативность внешнего умножения можно проверить так же, как в симметричном случае:

$$\left(T_1 \wedge T_2\right) \wedge T_3 = A\left(A\left(T_1 \otimes T_2\right) \otimes T_3\right) = A\left(T_1 \otimes T_2 \otimes T_3\right),$$

$$T_1 \wedge \left(T_2 \wedge T_3\right) = A\left(T_1 \otimes A\left(T_2 \otimes T_3\right)\right) = A\left(T_1 \otimes T_2 \otimes T_3\right).$$

Равенство $A\left(T_1 \otimes T_2\right) = (-1)^{pq} A\left(T_2 \otimes T_1\right)$ при $T_1 \in T_0^p(L), T_2 \in T_0^q(L)$ следует из того, что $T_2 \otimes T_1 = f_\sigma\left(T_1 \otimes T_2\right)$, где σ-перестановка, являющаяся произведением pq транспозиций: сомножители T_2 следует по очереди переводить левее T_1, меняя их местами с левыми соседями из T_1.

Второе определение внешней алгебры. ак и в симметрическом случае, принятое нами определение внешней алгебры страдает тем недостатком, что оно требует деления на факториалы. Второе определение, избавленное от этого недостатка и реализующее $\Lambda(L)$ как факторпространство, а не подпространство $T_0(L)$, строится в полной аналогии с симметричным случаем.

Рассмотрим двусторонний идеал J в алгебре $T_0(L)$, порожденный всеми элементами вида

$$T - \varepsilon(\sigma) f_\sigma(T), \quad T \in T_0^p(L), \quad \sigma \in S_p, \quad p = 1, 2, 3, \ldots$$

Нетрудно убедиться, что $J = \bigoplus_{p=0}^{\infty} J^p$, где $J^p = J \cap T_0^p(L)$, т. е. это градуированный идеал. Положим $\tilde{\Lambda}(L) = T_0(L)/J$ как факторгiространство. Тогда

$$\bar{\Lambda}(L) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \tilde{\Lambda}^p(L), \quad \bar{\Lambda}^p(L) = T_0^p(L)/J^p.$$

Поскольку J - идеал, в $\check{\Lambda}(L)$ можно ввести умножение по формуле

$$\left(T_1 + J\right) \wedge \left(T_2 + J\right) = T_1 \otimes T_2 + J.$$

Оно билинейно и ассоциативно, так как это верно для тензорного умножения. роме того, оно кососкоммутативно, ибо для $T_1 \in T_v^p(L)$, $T_2 \in T_0^q(L)$ имеем $T_1 \otimes T_2 - (-1)^{pq} T_2 \otimes T_1 \in J$.

Нетрудно убедиться, что построенная таким образом алгебра изоморфна алгебре Клиффорда пространства L с нулевым скаяярным произведением, введенной в \$15 ч. 2. Действительно, отображение $\sigma : L \to \Lambda(L), \sigma(l) = l + J$, удовлетворяет условию $\sigma(l)^2 = \sigma(l) \wedge \sigma(l) = 0$ для всех l, ибо $\sigma(l) \wedge \sigma(l) = -\sigma(l) \wedge \sigma(l)$. Поэтому по теореме п. 2§15 ч. 2, существует единый гомоморфизм $\mathscr{K}$-алгебр $C(L) \to \tilde{\Lambda}(L)$ такой, что σ совпадает с композицией $L \xrightarrow{\rho} C(L) \to \tilde{\Lambda}(L)$, где ρ - каноническое отображение. Поскольку L порождает $T_0(L)$ как алгебру, $\sigma(L)$ порождает $\tilde{\Lambda}(L)$, так что $C(L) \to \grave{\Lambda}(L)$ сюръективен. Мы знаем, что $\dim C(L) = 2^n$. Поэтому для проверки того, что это изоморфизм, достаточно убедиться, что $\dim \hat{\Lambda}(L) = 2^n$. Это можно сделать, установив, что базис $\widehat{\Lambda}^q(L)$ образует элементы вида $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_q}, 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_q \leqslant n$, где $\{e_1, \ldots, e_n\}$ - базис L. Эту проверку мы опустим.

Как и в симметричном случае, если характеристика $\mathscr{K}$ равна нулю, сквозное отображение

$$\Lambda(L) \to T_0(L) \to \tilde{\Lambda}(L)$$

также является изоморфизмом алгебр, сохраняющим градуировку. Поскольку $\widetilde{\Lambda}(L)$ определена в более общей ситуации, для алгебраических нужд внешнюю алгебру вводят именно таким способом. В приложениях к дифференциальной геометрии или анализу, где $\mathscr{K}^p = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, можно пользоваться нашим исходным определением.

Внешнее умножение и определители. Пусть $L - n$-мерное пространство. Согласно следствию П. 5 пространство $\Lambda^n(L)$ одномерно: это максимальная ненулевая внешняя степень L.

Согласно п. 7 \2 любой эндоморфизм $f : L \to L$ индуцирует ндоморфизмы тензорных степеней

$$f^{\otimes p} = f \underbrace{\otimes \ldots \otimes f}_{p} : T_0^p(L) \to T_0^p(L).$$

Легко убедиться, что $f^{\otimes p}$ коммутирует с оператором альтернирования A и потому переводит $\Lambda^p(L)$ в $\Lambda^p(L)$. Ограничение $f^{\otimes p}$ на $\Lambda^p(L)$ естественно обозначить $f^{\wedge p}$. В частности, при $p = n$ отображение $f^{\wedge p} : \Lambda^n(L) \to \Lambda^n(L)$ должно быть умножением на скаляр $d(f)$, ибо $\Lambda^n(L)$ одномерно.

Теорема.

В описанных обозначениях $d(f) = \det f$.

Д ок а з ательство. Выберем базис $e_1, \ldots, e_n$ пространства L и зададим f матрицей в этом базисе:

$$f\left(e_f\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^i e_i$$

Внешнее произведение $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$ является базисом $\Lambda^n(L)$, и число $d(f)$ находится из равенства

Но

$$f^{\wedge n}\left(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n\right) = d(\mathfrak{f}) e_1 \wedge \ldots \wedge e_n.$$

$$f^{\wedge n}\left(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n\right) = A\left(f\left(e_1\right) \otimes \ldots \otimes f\left(e_n\right)\right) = f\left(e_1\right) \wedge \ldots \wedge f\left(e_n\right) =$$
$$= \left(\sum_{i_1=1}^{n} a_1^{i_1} e_{i_t}\right) \wedge \ldots \wedge \left(\sum_{i_n=1}^{n} a_n^{i_n} e_{i_n}\right).$$

Согласно таблице умножения во внешней алгебре

$$a_1^{i_1}e_{i_1}\wedge a_2^{i_2}e_{i_2}\wedge\ldots\wedge a_n^{i_n}e_{i_n}=$$
$$=\begin{cases}\varepsilon(\sigma)a_1^{i_1}\ldots a_n^{i_n n}e_1\wedge\ldots\wedge e_n, \text{ если } \{i_1,\ldots,i_n\}=\{1,\ldots,n\},\\ 0 \text{ в остальных случаях,}\end{cases}$$

где σ-перестановка, переводящая i_k в $k, 1 \leqslant k \leqslant n$. Поэгому полная сумма коэффицнентов $\varepsilon(\sigma)a_1^{i_1}\ldots a_n^{i_n}$ совпадает со стандартной формулой для определителя $\det\left(a_i^i\right)$, что завершает доказательство.

Следствие. Векторы $e_1^{\prime},\ldots,e_n^{\prime}\in L$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда $e_1^{\prime}\wedge\ldots\wedge e_n^{\prime}=0$.

Действительно, пусть $f:L\rightarrow L-$ эндоморфизм, переводящий e_i в $e_i^{\prime}$, где $\{e_1,\ldots,e_n\}$ - некоторый базис L. Тогда линейная зависимость $\{e_i^{\prime}\}$ равносильна тому, что $\det f=0$, т. е. $e_1^{\prime}\wedge\ldots\wedge e_n^{\prime}=0$.

Разложимые p-векторы. Элементы $T\in\Lambda^p(L)$ принято называть p-векторами. Назовем p-вектор T разложимым, если существуют такие векторы $e_1,\ldots,e_p\in L$, что $T=e_1\wedge\ldots\wedge e_p$. Для любого p-вектора T назовем его аннуллтором множество

$$\mathrm{Ann}\ T=\{e\in L|e\wedge T=0\}.$$

Очевидно, Ann T является подпространством в L.

Теорема.

Пусть T_1, T_2-разложсимые p-вектор и q-вектор соответственно, L_1, L_2 - их аннуляторы. Тогда а) $L_1\supset L_2$ в том и только в том случае, когда T_1 делится на T_2, т. е. $T_1=T\wedge T_2$ для некоторого $T\in\Lambda^{p-q}(L)$.

б) $L_1\cap L_2=\{0\}$ в том и только в том случае, когда $T_1\wedge T_2\neq 0$.

в) $Ec\Omega uL_1\cap L_2=\{0\}$, rо $L_1+L_2=\mathrm{Ann}\left(T_1\wedge T_2\right)$.

Доказ ательство. а) Если $x\wedge T_2=0$, то $x\wedge\left(T\wedge T_2\right)=\pm T\wedge\left(x\wedge T_2\right)=0$, так что из делимости T_1 на T_2 следует, что $L_2\subset L_1$.

Для доказательства обратного утверждения вычислим аннулятор p-вектора $e_1\wedge\ldots\wedge e_p$. Если $e_1,\ldots,e_p$ линейно зависимы, то один из векторов e_l, скажем e_1, линейно выражается через остальные, и тогда

$$e_1\wedge\ldots\wedge e_p=\left(\sum_{i=2}^n a^{\prime}e_l\right)\wedge e_2\wedge\ldots\wedge e_n=0.$$

Будем считать, что $e_1\wedge\ldots\wedge e_p$ отличен от нуля, и покажем, что тогда $\mathrm{Ann}\left(e_1\wedge\ldots\wedge e_p\right)$ совпадает с линейной оболочкой векторов $e_1,\ldots,e_p$. Ясно, что эта линейная оболочка содержится в аннуляторе, ибо

$$e_f\wedge\left(e_1\wedge\ldots\wedge e_p\right)=$$
$$=\pm\left(e_l\wedge e_j\right)\wedge\left(e_1\wedge\ldots\wedge e_{j-1}\wedge e_{j+1}\wedge\ldots\wedge e_p\right)=0.$$

Дополним линейно независимую систему векторов $\{e_1,\ldots,e_p\}$ до базнса $\{e_1,\ldots,e_p,e_{p+1},\ldots,e_n\}$ пространства L и покажем, что если $\sum\limits_{i=1}^n a^le_t\in\mathrm{Ann}\left(e_1\wedge\ldots\wedge e_p\right)$, то $a^l=0$ прн $i>p$. В самом деле,

$$\left(\sum_{i=1}^n a^ie_l\right)\wedge\left(e_1\wedge\ldots\wedge e_p\right)=\sum_{i=p+1}^n a^ie_l\wedge e_2\wedge\ldots\wedge e_p,$$

и $(p+1)$-векторы $e_i\wedge e_1\wedge\ldots\wedge e_p, p+1\leqslant i\leqslant n$, линейно независимы.

Пусть теперь $L_1\supset L_2, T_1=e_1\wedge\ldots\wedge e_p,\quad T_2\leqslant e_1^{\prime}\wedge\ldots\wedge e_q^{\prime}$. Так как линейная оболочка $\left\{e_1^{\prime},\ldots,e_q^{\prime}\right\}$ содержится в линейной оболочке $\{e_1,\ldots,e_p\}$, мы можем выбрать в ней базис вида $\left\{e_1', \ldots, e_q', e_{q+1}', \ldots, e_p'\right\}$ и выразить e_f линейно через этот базис. Для T_1 получится выражение $e_1' \wedge \ldots \wedge e_q' \wedge e_{q+1}' \wedge \ldots \wedge e_p'$, где a-определитель перехода от штрихованного базиса к нештрихованному. Поэтому T_1 делится на T_2.

б), в). Если $(e_1 \wedge \ldots \wedge e_p) \wedge \left(e_1' \wedge \ldots \wedge e_q'\right) \neq 0$, то векторы $\left\{e_1, \ldots, e_p, e_1', \ldots, e_q'\right\}$ линейно независимы. Следовательно, линейные оболочки $\{e_1, \ldots, e_p\}$ и $\left\{e_1', \ldots, e_q'\right\}$, т. е. аннуляторы T_1 и T_2 пересекаются лишь по нулю. Это рассуждение, очевидно, обратимо. Характеризация аннулятора разложимого p-вектора, данная в доказательстве утверждения а), доказывает последнее утверждение теоремы. 14. Следствие. Рассмотрим отображение

Ann: $\left(\begin{array}{l}\text{разложимье ненулевые} \\ \text{с точнекторы} \\ \text{точто до умножения на скаляр}\end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow$ (р-мерные подпространства в L).

Оно является биекцией.

Доказательство. Ясно, что если два ненулевых разложимых вектора пропорциональны, то их аннуляторы совпадают. Поэтому описанное отображение определено корректно. Любое p-мерное подпространство $L_1 \subset L$ лежит в образе отображения, ибо если $\{e_1, \ldots, e_p\}$-базис L_1, то $L_1 = \operatorname{Ann}(e_1 \wedge \ldots \wedge e_p)$. Наконец, это отображение инъективно в силу утверждения а) теоремы п. 13: если Ann $T_1 = A$ nn T_2, то $T_1 = T \wedge T_2$ и T является О-вектором, т. е. скаляром.

Многообразия Грассмана, Многообразием Грассмана, или грассманцаном $\operatorname{Gr}(p, L)$, называется множество всех p-мерных линейных подпространств пространства L. В случае $p = 1$ получается подробно изученное нами проективное пространство $P(L)$. Следствие п. 14 позволяет нам для любого p реализовать $\operatorname{Gr}(p, L)$ как подмножество в проективном пространстве $P\left(\Lambda^p(L)\right)$.

В самом деле, отображение, обратное к Ann, дает вложение

$$\operatorname{Ann}^{-1} : \operatorname{Gr}(p, L) \rightarrow P\left(\Lambda^p(L)\right).$$

Выпишем его в более явном виде. Выберем базис $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ в L и рассмотрим линейную оболочку p векторов

$$\sum_{i=1}^n a_j^i e_i; \quad j = 1, \ldots, p.$$

Базис $\Lambda^p(L)$ образуют $\binom{n}{p}$ p-векторов $\left\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p} \mid 1 \leqslant i_1 < \ldots \quad \ldots < i_p \leqslant n\right\}$. Отображение An^{-1} ставит в соответствие нашей линейной оболочке прямую в $\Lambda^p(L)$, порожденную p-вектором

$$\left(\sum_{i_1=1}^n a_1^{i_1} e_{i_1}\right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{i_p=1}^n a_p^{t_p} e_{i_p}\right).$$

Однородными координатами соответствующей точки в $P\left(\Lambda^p(L)\right)$ являются коэффициенты разложения этого p-вектора по $\left\{\boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \ \wedge \ldots \wedge e_{i_p}\right\}$

$$\bigwedge_{i=1}^p \left(\sum_{i=1}^n a_i^l e_i\right) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n} \Delta^{i_1 \cdots i_p} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}.$$

В точности такое же вычисление, как в доказательстве теоремы п. 10, показывает, что $\Delta^{i_1 \cdots i_p}$ совпадает с минором матрицы $\left(a_f^i\right)$, образованным строками с номерами $i_1, \ldots, i_p$. Хоть один из этих миноров отличен от нуля в точности тогда, когда ранг матрицы $\left(a_i^i\right)$ имеет наибольшее возможное значение p, т. е. когда линейная оболочка наших p-векторов действительно p-мерна. Вектор $\left(\ldots : \Delta^{t_1 \ldots t_p} : \ldots\right)$ называется вектором грассмановых координат p-мерного подпространства, натянутого на

$$\sum_{i=1}^n a_j^i e_i, \quad j = 1, \ldots, p.$$

Из этой конструкции ясно, что для характеризации образа $\mathrm{Gr}(p, L)$ в $P\left(\Lambda^p(L)\right)$ нам нужно иметь критерии разложимости p-векторов. Поэтому мы займемся сейчас этой задачей.

Теорема.

а) Ненулевой p-вектор T разложим тогда и только тогда, когда $\dim A\,\mathrm{nn}\,T = p$; для остальных ненулевых p-векторов $\dim$ Ann $T < p$.

б) Воберем базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в пространстве L и представим любой p-вектор T коэффициентами его разложения по базису $\left\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p} | 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n\right\}$ в $\Lambda^p(L)$:

$$T = \sum T^{i_1} \cdots i_{pe_{i_1}} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}.$$

Тогда существует такая система полиномиальных уравнений от $T^{i_1 \cdots i_p}$ с цельми коэффициентами, зависящая только от и p, ито разложимость T равносильна тому, что $\{T^{i_1} \cdots i_p\}$ есть решение той системы.

Доказательство. То, что $\dim AnnT = p$ для разложимых p-векторов, мы знаем из доказательства теоремы п. 10.

Пусть $\dim \mathrm{Ann}T = r$ и $\mathrm{Ann}\,T$ порождено векторами $e_1, \ldots, e_r$. Дополним их до базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в L и положим

$$T = \sum T^{i_1 \cdots i_{pe_{i_1}}} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}.$$

Условие $e_i \wedge T = 0$ для всех $i = 1, \ldots, r$ означает, что $T^{i_1 \cdots l_p} = 0$, если только $\{1, \ldots, r\} \not\subset \{i_1, \ldots, i_p\}$. Огсюда сразу же следует, что если $T \neq 0$, то $r \leqslant p$ и что T делится на $e_1 \wedge \ldots \wedge e_r$. Поэтому при $r = p$-вектор T пропорционален $e_1 \wedge \ldots \wedge e_r$ и, значит, разложим.

б) Воспользовавшись этим критерием, мы можем теперь записать условие разложимости T в виде требования, чтобы следуюшая линейная система уравнений относительно неизвестных $x^1, \ldots \ldots, x^n \in \mathscr{K}^n$ имела p-мерное пространство решений:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x^i e_i\right) \wedge \left(\sum T^{i_1 \ldots i_p} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}\right) = 0.$$

В ней n неизвестных и $\left(\begin{array}{c} n \\ p+1 \end{array}\right)$ уравнений. Ее матрица состоит из целочисленных линейных комбинаций $T^{t_1 \cdots i_p}$. Ранг этой матрицы всегда $\geqslant n - p$, ибо $\dim AnnT \leqslant p$. Поэтому условие разложимости равносильно тому, чтобы ранг был $\leqslant n - p$, т. е. обращению в нуль всех ее миноров $(n - p + 1)$-го порядка. Это и есть искомая система уравиений на грассмановы координаты разложимого тензора. Рассмотрим несколько примеров и частных случаев.

Предложение.

Любой $(n-1)$-вектор T разложим.

Док аз а тельство. Очевидно, $x \wedge T = f(x) e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$, где $f(x)$ - линейная функция на $L; \{e_1, \ldots, e_n\}$ - фиксированный базис L. Значит, $\dim AnnT = \dim \mathrm{Ker}\, f \geqslant n - 1$. Но если $T \neq 0$, то $f \neq 0$, так что $\dim \mathrm{Ker}\, f = n - 1$. В силу утверждения а) теоремы п. $16T$ разложим.

В терминах грассмановых многообразий это означает, что имеется биекция

$$(\text{гиперплоскости в } L) \rightarrow P\left(\Lambda^{n-1} L\right).$$

Но гиперплоскости в L - это точки $P\left(L^*\right)$. Поэтому

$$P\left(L^*\right) \simeq P\left(\Lambda^{n-1}(L)\right)$$

(канонический изоморфизм). Ниже мы обобщим этот результат.

Предложение.

Ненулевой бивектор $T \in \Lambda^2(L)$ разложим тогда и только тогда, когда $T \wedge T = 0$.

Дока з ательство. Необходимость очевидна. Для доказательства достаточности проведем индукцию по n, начиная с тривиального случая $n = 2$. Пусть $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$-базис L. Разложив T по $e_i \wedge e_j$, мы можем представить T в виде $T = e_{n+1} \wedge T_1 + +T_2$, где T_1 и T_2 разлагаются по $e_i, e_i \wedge e_i, 1 \leqslant i, j \leqslant n$. Из условия $T \wedge T = 0$ следует, что

$$T_2 \wedge T_2 + 2e_{n+1} \wedge T_1 \wedge T_2 = 0,$$

ибо $(e_{n+1} \wedge T_1) \wedge (e_{n+1} \wedge T_1) = 0$ и T_2 лежит в центре $\Lambda(L)$. Но $T_2 \wedge T_2$ не может содержать членов с e_{n+1}, поэтому

$$T_2 \wedge T_2 = e_{n+1} \wedge T_1 \wedge T_2 = 0.$$

Поскольку $T_2 \wedge T_2 = 0$, по индуктивному предположению T_2 разложим. Так как $T_1 \wedge T_2$ не содержит членов с e_{n+1}, имеем $T_1 \wedge T_2 = 0$. Значит, T_1 лежит в двумерном аннуляторе T_2, и $T_2 = T_1' \wedge T_1$. Поэтому

$$T = e_{n+1} \wedge T_1 + T_1' \wedge T_1 = (e_{n+1} + T_1') \wedge T_1,$$

что и завершает доказательство.

Этот результат снова дает информацию о грассмановых многообразиях, на этот раз о $\mathrm{Gr}(2, L)$:

Следствие. Каноническое отображение $\mathrm{Gr}(2, L) \to P\left(\Lambda^2(L)\right)$ отождествляет при $n \geqslant 3$ грассманиан плоскостей в L с пересечением квадрик в $P\left(\Lambda^2(L)\right)$.

Доказ ательство. Плоскости в L отвечают прямым разложимых 2-векторов $\Lambda^2(L)$. Условие разложимости 2-вектора $\sum\limits_{i_1<i_2} T^{i_1 i_2} e_{i_1} \wedge e_{i_2}$ согласно предложению п. 18 имеет вид

Т. е.

$$\left(\sum_{i_1<i_2} T^{i_1 i_2} e_{i_1} \wedge e_{i_2}\right) \wedge \left(\sum_{i_1<j_2} T^{h_1 f_2} e_{l_1} \wedge e_{J_2}\right) = 0,$$

$$\sum T^{i_1 i_2} T_1^{f_1 i_2} \mathcal{E}\left(i_1, i_2, j_1, j_2\right) = 0,$$

где каждая сумма слева отвечает одной четверке индексов $1 \leqslant \leqslant k_1 < k_2 < k_3 < k_4 \leqslant n$ и $\varepsilon\left(i_1, i_2, j_1, j_2\right)$ есть знак перестановки множества $\{i_1, i_2, j_1, j_2\} = \{k_1, k_2, k_3, k_4\}$, размешающей эту четверку в порядке возрастания.

В частности, при $n = 4$ получается одно уравнение:

$$T^{12} T^{34} - T^{13} T^{24} + T^{14} T^{23} = 0.$$

Иными словами, $\mathrm{Gr}\left(2, \mathscr{K}^4\right)$ есть четырехмерная квадрика в $P\left(\Lambda^2\left(\mathscr{K}^4\right)\right) = P\left(\mathscr{K}^6\right)$. Она называется квадрикой Плгккера.

Внешнее умножение и двойственность. Пусть $\dim L = n$. Согласно следствию п. 5 и известной симметрии биномиальных коэффициентов

$$\dim \Lambda^p(L) = \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} = \dim \Lambda^{n-p}(L)$$

для всех $1 \leqslant p \leqslant n$. Это наводит на мысль, что между $\Lambda^p(L)$ и $\Lambda^{n-p}(L)$ должен существовать либо канонический изоморфизм, либо каноническая двойственность. С точностью до небольшой детали верно второе.

Рассмотрим операцию внешнего умножения

$$\Lambda^p(L) \times \Lambda^{n-p}(L) \to \Lambda^n(L) : (T_1, T_2) \to T_1 \wedge T_2.$$

Поскольку она билинейна, она определяет линейное отображение

$$\Lambda^p(L) \to \mathscr{L}\left(\Lambda^{n-p} L, \Lambda^n L\right) \cong \left(\Lambda^{n-p}(L)\right)^* \otimes \Lambda^n L$$

(последний изоморфизм - частный случай описанного в п. 5$2). Ядро этого отображения нулевое. Действительно, пусть $\{e_1, \ldots \ldots, e_n\}$ - базис L. Положим $T_1 \wedge T_2 =$

$(T_1, T_2)\, e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$, где $T_1 \in \Lambda^p(L)$, $T_2 \in \Lambda^{n-p}(L)$. Очевидно, (T_1, T_2)-бнлинейное скалярное произведение между $\Lambda^p(L)$ и $\Lambda^{n-p}(L)$. Построим в $\Lambda^p(L)$ и $\Lambda^{n-p}(L)$ базисы из разложимых p-векторов и $(n-p)$-векторов $\left\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}\right\}, \left\{e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_{n-p}}\right\}$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n, 1 \leqslant \leqslant j_1 < \ldots < j_{n-p} \leqslant n$. Отождествим $\Lambda^p(L)$ и $\Lambda^{n-p}(L)$ с помощью линейного отображения, которое ставит в соответствие p-вектору $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$ $(n-p)$-вектор $e_{f_1} \wedge \ldots \wedge e_{J_{n-p}}$, для которого $\{i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_{n-p}\} = \{1, \ldots n\}$. Тогда (T_1, T_2) будет скалярным произведением на $\Lambda^p(L)$ с диагональной матрицей Грама вида $\operatorname{diag}(\pm 1, \ldots, \pm 1)$. Оно невырождено, в частности, его левое ядро равно нулю.

Итак, мы построили канонические изоморфизмы

$$\Lambda^p(L) \to \left(\Lambda^{n-p}(L)\right)^* \otimes \Lambda^n(L).$$

При $\rho = n-1$ получаем $\Lambda^{n-1}(L) \to L^* \otimes \Lambda^n(L)$, что и объясняет изоморфизм $P\left(\Lambda^{n-1}(L)\right) \to P\left(L^*\right)$ из п. 18: тензорное умножение L^* на одномерное пространство $\Lambda^n(L)$ «не меняет» множество прямых.

В следующем параграфе мы продолжим изучение связи внешiнего умножения с двойственностью, введя в рассмотрение внешнюю алгебру $\Lambda\left(L^*\right)$.

15.9.7 6 Front-end Forms

Пусть L - конечномерное линейное пространство над полем $\mathscr{K}, L^*$ - двойственное к нему пространство.

Элементы p-й внешней степени $\Lambda^p\left(L^*\right)$ называются внешними р-формами на пространстве L. В частности, внешние 1-формыэто просто линейные функционалы на L. Для произвольного p можно установить два варианта этого результата:

Теорема.

Пространство $\Lambda^p\left(L^*\right)$ канонически изоморфно:

а) $(\Lambda^p(L))^*$, т. е. пространству линейных функционалов на р-векторах;

б) пространству кососимметрических р-линейных отображений $F: L \underbrace{X \ldots X}_{p} L \to \mathscr{K}$,

т. е. отображений со свойством

$$F\left(l_{\sigma(1)}, \ldots, l_{\sigma(p)}\right) = \varepsilon(\sigma) F\left(l_1, \ldots, l_p\right)$$

$\partial \wedge r$ всех $\sigma \in S_p$

Доказательство. Согласно принятому нами определению

$$\Lambda^p\left(L^*\right) \subset L^* \otimes \ldots \otimes L^* = T_0^p\left(L^*\right).$$

В п. 4§2 мы отождествили $T_0^p\left(L^*\right)$ с пространством всех p-линейных функций на L^*. При этом отождествлении внешние формы становятся кососимметрическими p-линейными отображениями L. В самом деле, достаточно проверить это на разложимых формах. Для них имем

$$\left(f_1 \wedge \ldots \wedge f_p\right)\left(l_1, \ldots, l_p\right) = A\left(f_1 \otimes \ldots \otimes f_p\right)\left(l_1, \ldots, l_p\right) =$$
$$= \frac{1}{pl} \sum_{\tau \in S_p} \varepsilon(\tau) f_{\tau(1)}\left(l_1\right) \ldots f_{\tau(p)}\left(l_p\right).$$

Поэтому

$$\left(f_1 \wedge \ldots \wedge f_p\right)\left(l_{\sigma(1)}, \ldots, l_{\sigma(p)}\right) = \frac{1}{p!} \sum_{\tau \in S_p} \varepsilon(\tau) f_{\tau(1)}\left(l_{\sigma(1)}\right) \ldots f_{\tau(p)}\left(l_{\sigma(p)}\right) =$$
$$= \frac{1}{p!} \sum_{\tau \in S_p} \varepsilon(\tau\sigma) f_{\tau\sigma(1)}\left(l_{\sigma(1)}\right) \ldots f_{\tau\sigma(p)}\left(l_{\sigma(p)}\right) =$$
$$= \varepsilon(\sigma)\left(f_1 \wedge \ldots \wedge f_p\right)\left(l_1, \ldots, l_p\right)$$

Поэтому мы построили линейное вложение $\Lambda^p\left(L^*\right) \to$ (кососимметрические p-линейные формы на L). Чтобы проверить, что оно является изоморфизмом, достаточно установить совпадение размерности правой части с $\dim \Lambda^p(L^*) = \binom{n}{p}$. Но если в L выбран базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$, то любая кососимметрическая p-линейная форма F на L однозначно определяется своими значениями $F\left(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}\right)$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n$, и их можно выбирать любыми. Поэтому размерность пространства таких форм равна $\binom{n}{p}$. Это доказывает утверждение б) теоремы. Для доказательства утвержления а) отождествим $L^* \underbrace{\otimes}_{\mathrm{p}} \ldots L^*$ с $(L \otimes \ldots \otimes L)^*$ снова с помощью конструкции п. 4§2 и ограничим каждый элемент $\Lambda^p(L^*)$ (как линейную фуницию на $L \otimes \ldots \otimes L$) на подпространство p-векторов $\Lambda^p(L)$. Мы получим линейное отображение $\Lambda^p(L^*) \rightarrow (\Lambda^p(L))^*$. Поскольку размерности пространства слева и справа совпадают, достаточно проверить, что оно сюръективно. Пространство линейных функционалов на $\Lambda^p(L)$ порождено функционалами вида $\frac{1}{p!}\delta_I$, где

$$I = \{i_1, \ldots, i_p\} \subset \{1, \ldots, n\}, \delta_I\left(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{t_p}\right) = 1,$$
$$\delta_I\left(e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_p}\right) = 0,$$

если $\{j_1, \ldots, j_p\} \neq 1$. Мы утверждаем, что такой функционал является образом p-формы $e^{l_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_p} \in \Lambda^p(L^*)$, где, как обычно, $\left\{e^l\right\}$ означает базис, двойственный к $\{e_i\}$. Действительно, значение $e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}$ на $e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{f_p}$ равно

$$A\left(e^{i_1} \otimes \ldots \otimes e^{i_p}\right)\left(A\left(e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{l_p}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{(p!)^2} \sum_{\sigma, \tau \in S_p} \varepsilon(\sigma\tau) e^{i_{\sigma(1)}}\left(e_{i_{\tau(1)}}\right) \ldots e^{i_{\sigma(p)}}\left(e_{J_{\tau(p)}}\right).$$

Справа отличны от нуля лишь те слагаемые, для которых $i_{\sigma(1)} = \dot{j}_{\tau(1)}, \ldots, \dot{i}_{\sigma(p)} = j_{\tau(p)}$, так что вся сумма равна нулю, если $\{i_1, \ldots, i_p\} \neq \{j_1, \ldots, j_p\}$. Если же эти множества совпадают, то вся сумма равна

$$\frac{1}{(p!)^2} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma)^2 = \frac{1}{p!},$$

когда $\{i_1, \ldots, i_p\} = \{j_1, \ldots, j_p\}$ упорядочены по возрастанию. Поэтому $e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_p}$ как функционал на $\Lambda^p(L)$ равен $\frac{1}{p!}\delta_l$, что завершает доказательство.

Замечания. а) Принятый нами способ отождествления $\Lambda^p(L^*)$ с $(\Lambda^p(L))^*$ отвечает бнлинейному отображению

$$\Lambda^p(L^*) \times \Lambda^p(L) \rightarrow \mathscr{K},$$

которое на произвольных парах разложимых p-векторов можно представить в виде

$$\left(f^1 \wedge \cdots \wedge f^p, l_1 \wedge \cdots \wedge l_p\right) = \frac{1}{p!} \det\left(f^l\left(l_j\right)\right),$$

$f^t \in L^*, l_j \in L$. Действительно, обе стороны полилинейны и кососимметричны в отдельности по f^i и l_j; кроме того, они совпадают для

$$\left(f^1, \ldots, f^p\right) = \left(e^{i_1}, \ldots, e^{i_p}\right), (l_1, \ldots, l_p) = \left(e_{l_1}, \ldots, e_{J_p}\right),$$

как было проверено в предыдущем доказательстве. Иногда в этом скалярном произведении отбрасывают множитель $\frac{1}{p!}$.

б) Одно из отождествлений, установленных в теореме, иногда принимают в качестве определения внешней степени. Например, $\Lambda^p(L)$ часто, особенно в дифференцнальной геометрии, вводят как пространство кососимметрических p-линейных функционалов на L^*. Общность этой конструкции - промежуточная между общностью первого и второго определений внешней степени из §6: поскольку она не требует деления на факториалы, она годится для линейных пространств над полями конечной характеристики, а также для свободных модулей над коммутативными кольцами. Но при переходе к общим модулям лишняя дуализация мешает, и второе определение становится предпочтительным.

Результат, аналогичный теореме п. 2, справедлив также для симметрических степеней, и наше предшествующее замечание относится и к ним. В частности, $S^p(L)$

можно определить как пространство симметричных p-линейных функционалов на L^* для пространств над любыми полями и свободных модулей над коммутативными кольцами. В самом общем случае, однако, правильное определение $S^p(L)$ - это определение из п. $9, \S 5$.

Внутреннее произведение. Внутренним произведением называется билинейное отображение

$$L \times \Lambda^p\left(L^*\right) \rightarrow \Lambda^{p-1}\left(L^*\right):(l, F) \mapsto i(l) F,$$

которое определяется следующим образом. Рассмотрим $F \in \Lambda^p\left(L^*\right)$ как кососимметричную p-линейную форму на L, и аналогично $i(l) F$. Тогда по огіределению

$$i(l) F\left(l_1, \ldots, l_{p-1}\right)=F\left(l, l_1, \ldots, l_{p-1}\right).$$

Очевидно, правая часть $(p-1)$-линейна и кососимметрична как функция от $l_1, \ldots, l_{p-1}$, а также бнлинейна как функция от F, l, так что определение корректно. При $p=0$ удобно считать, что $i(l) F=0$. Вместо $i(l) F$ пишут также $l \lrcorner F$.

15.9.8 7 Tensor Fields

В этом параграфе мы кратко опишем типичные дифференциально-геометрическне ситуации, в которых используется тензорная алгебра.

Рассмотрим некоторую область $U \subset \mathbf{R}^n$ в координатном вешественном пространстве и кольцо C бесконечно дифференцируемых функций с вещественными значениями на U. В частности, координатные функции $x^i, i=1, \ldots, n$, принадлежат C.

Определение. Касательным вектором $X_a \kappa U$ в точке $a \in U$ назьваетсл любое линейное отобранение $X_a: C \rightarrow \mathbf{R}$, удовлетворяю щее условиям:

$X_a f=0$, если f постоянна в некоторой окрестности a;

$$X_a(f g)=X_a f \cdot g(a)+f(a) \cdot X_a g.$$

Если X_a, Y_a-два касательных вектора в точке a, то любая их вещественная линейная комбинация также является касательным вектором в этой точке:

$$\begin{gathered}\left(c X_a+d Y_a\right)(f g)=c X_a(f g)+d Y_a(f g)= \\ =c X_a f \cdot g(a)+c f(a) X_a g+d Y_a f \cdot g(a)+d f(a) Y_a g= \\ =\left(c X_a+d Y_a\right) f \cdot g(a)+f(a)\left(c X_a+d Y_a\right) g.\end{gathered}$$

Поэтому касательные векторы образуют линейное пространство, которое обозначается T_a и называется касательным пространством к U в точке a. Значение $X_a f$ называется производной функции f по направлению вектора X_a. Можно доказать, что пространство T_a n-мерно.

Определение. Векторныц полем в области U называется такое семейство касательных векторов $X=\left\{X_a \in T_a \mid a \in U\right\}$, ито для любой функции $f \in C$ функция на U

также принадлежит C.

$$a \mapsto X_a f$$

Обозначим эту функцию через $X f$. Очевидно, касательное пюле оиределяет линейное отображение $X: C \rightarrow C$, нулевое на постоянных функциях и такое, что $X(f g)=X f \cdot g+$ $f \cdot X g$ для всех $f, g \in C$. Такие отображения называются дифференцированиями кольца C в себя.

Наоборот, каждому дифференцированию $X: C \rightarrow C$ и точке $a \in U$ отвечает касательный вектор X_a в этой точке: $X_a f=(X f)(a)$. Это устанавливает биекцию между векторными полями на U и дифференцированиями кольца C.

Сумма векторных полей $X+Y$, определенная формулой $(X+Y)f = Xf+Yf$ для всех $f \in C$, является векторным полем. Произведение fX, определяемое формулой $(fX)g = f(Xg)$, где X - векторное поле, $f, g \in C$, является векторным полем. В частности, любая линейная комбинация векторных полей $\sum\limits_{i=1}^{m} f^i X_i, f^i \in C$, является векторным полем.

Пример. Пусть $\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad i = 1, \ldots, n,$ - классические операторы частных производных. Все они являются векторными полями на U. Имеет место следующий фундаментальный результат, который мы приведем без доказательства:

Теорема.

Всякое векторное поле X в связной области $U \subset \mathbf{R}^n$ однозначно представляется в виде $\sum\limits_{i=1}^{n} f^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, где $x^1, \ldots, x^n - \kappa$ - ординатнье функции на $\mathbf{R}^n$.

На алгебраическом языке это означает, что множество всех векторных полей. T в связной области U является свободным модулем ранга n над коммутативным ассоциативным кольцом C бесконечно дифференцируемых функций на U. Свободные модули конечного ранга над коммутативными кольцами образуюл категорию, по своим свойствам чрезвычайно близкую k категории конечномерных пространств над полем. Для них, в частности, проходит вся теория двойственности и все конструкции тензорной алгебры из этой части курса.

Другой вариант, не требующий переноса тензорной алгебры на кольца и модули, но взамен предполагающий развитие некоторой геометрической техники, состоит в том, чтобы рассматривать каждое векторное поле X как семейство векторов $\{X_a | a \in U\}$, лежащих в семействе конечномерных пространств $\{T_a\}$. Тогда все нужные нам операции тензорной алгебры можно строить «поточечно», определив, скажем, $X \otimes Y$ как $\{X_a \otimes Y_a \mid a \in U\}$.

Оба варианта построения тензорной алгебры совершенно эквивалентны; в приводимых ниже определениях мы будем исходить из первого.

Обозначим через T^*C-модуль C-линейных отображений

$$T^* = \mathscr{L}_C(T, C).$$

Он состоит из отображений $\omega : S \to C$ со свойством

$$\omega\left(\sum_{i=1}^{m} f^i X_l\right) = \sum_{i=1}^{m} f^i \omega\left(X_l\right)$$

для всех $X_i \in T, f^i \in C$. Сложение и умножение на элементы про изводится по стандартным формулам. C-модуль T^* часто обозначается Ω^1 или $\Omega^1(U)$ и называется модулем (дифференциальных) 1-форм в области U.

Каждая функция $f \in C$ определяет элемент $df \in \Omega^1$ по формуле

$$(df)(X) = Xf, \quad X \in T.$$

Он называется дифференциалом функции f. В частности, мы можем построить дифференциалы координатных функций $dx^l, \ldots, dx^n \in \in \Omega^1$. Из теоремы п. 5 легко следует

Предложение.

Любая 1-форма $\omega \in \Omega^1$ однозначно представляется в виде линейной комбинации $\sum_{i=1}^{n} f_i dx^l$.

Элементы тензорного произведения

С-модулей $T \underbrace{\otimes \ldots \otimes}_{p} T^* \otimes T \underbrace{\otimes \ldots \otimes}_{q} T$ называются тензорными полями типа (p,q), или p раз ковариантными и q раз контравариантными тензорными полями в области U. В дифференциальной геометрии, впрочем, слово «поля» часто опускают и называют тензорные поля просто тензорами.

Из теоремы п. 5 и предложения п. 8 следует, что всякий тензор типа (p,q) однозначно задается своими компонентами $T^{f_1\ldots f_q}_{i_1\ldots i_p}$ по формуле

$$T = \sum T^{l_1\ldots i_q}_{i_1\ldots i_p} dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^i p \otimes \frac{\partial}{\partial x^{l_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_q}},$$

где l_k, f_l независимо пробегают значения от 1 до n. В классических обозначениях опускаются все символы в правой части, кроме компонент $T^{f_1\ldots j_q}_{i_1\ldots i_p}$: этот знак и служит обозначением тензора. Подчеркнем еще раз, что здесь $T^{J_1\ldots i_q}_{i_1\ldots i_p}$ суть не числа, а вещественные бесконечно днфференцируемые функции на U.

10.Замена координат. Первый вклад анализа в изучение тензорных полей состоит в возможности делать нелинейные замены координатных функций в U: переходить от $x^1,\ldots,x^n$ к $y^1,\ldots,y^n$, где $y^i = y^i(x^1,\ldots,x^n)$ - бесконечно дифференцируемые функции такие, что обратные функции $x^j = x^l(y^1,\ldots,y^n)$ определены и бесконечно дифференцируемы. Дело в том, что компоненты векторных полей и 1-форм при этом все равно преобразуются по классическим формулам линейно, только с коэффнциентами, изменяющимися от точки к точке: согласно формуле дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{\partial}{\partial x^l} = \frac{\partial y^k}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^k}$$

(справа подразумевается суммирование по k), а также

$$dx^j = \frac{\partial x^j}{\partial y^k} dy^k$$

(то же соглашение). Поэтому тензор $T^{f_1\ldots t_q}_{t_1\ldots i_p}$ в новых коордннатах нмеет компоненты

$$(T')^{i_1'\cdots i_q'}_{i_1'\cdots i_q'} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{i_1'}}\cdots\frac{\partial x^{i_p}}{\partial y^{i_q'}}\frac{\partial y^{i_1'}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial y^{i_q'}}{\partial x^{i_q'}} T^{I_1\cdots i_p}_{i_1\cdots i_p}$$

(там индексы изначально криво в пдф были, подумать нужно, чтобы их написать верноы)

(то же соглашение с суммированием справа).

Все алгебраические конструкции и языковые соглапения \$4 можно теперь перенести на тензорные поля. .

Мы закончим этот параграф несколькими примерами тензорных полей, играющих особенно важную роль в геометрии и физике.

Метрический тензор. Этот тензор, обозначаемый g_{ij} или,

в более полной записи, $\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx^i \otimes dx^l$, предполагается симметричным и невырожденным в каждой точке $a \in U$, т. е. $\det(g_i(a)) \neq \neq 0$. Он задает ортогональную структуру в каждом касательном пространстве T_a, и пары (U, g_{ij}) (а также обобщения на случай многообразий, «склеенных» из нескольких областей U) составляют основной объект изучения римановой геометрии, а в случае $n = 4$ и метрики сигнатуры $(1,3)$ - общей теории относительности.

Метрика используется для измерения длин дифференцируемых кривых $\{x^1(t), \ldots, x^n(t) | t_0 \leqslant t \leqslant t_1\}$: длина задается формулой $\int\limits_{t_0}^{h_1} \sqrt{g_{ij}\left(x^k(t)\right) \frac{\partial x^i}{\partial t} \frac{\partial x^j}{\partial t}} dt$, а также для поднятия и опускания индексов тензорных полей.

Внешние формы и форма объема. Элементы из $\Lambda^p\left(\Omega^1\right)$, т. е. кососимметрические тензоры типа $(p,0)$, называются внешними p-формами в U, а внешние n-формы называются формами объема. то название объясняется возможностью определить «криволинейные интегралы» $\int\limits_V f\left(x_1, \ldots, x_n\right) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ по любой подобласти U, обладающие свойствами меры. В случае $f = 1$ значение такого интеграла есть евклидов объем области V, свойства которого мы описали в \$5 ч. 2.

При $p < n$ можно определить интеграл от любой формы $\omega \in \in \Lambda^p\left(\Omega^1\right)$ по «р-мерным дифференцируемым гиперповерхностям» в U. Все модули внешних форм связаны замечательными операторами «внешнего дифференциала» $d^p : \Lambda^p \rightarrow \Lambda^{p+1}$, который в координатах задается формулой

$d^p\left(\sum f_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}\right) = \sum \frac{\partial f}{\partial x^{i_{p+1}}} dx^{i_{p+1}} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \cdots \wedge dx^i p.$

Эти операторы удовлетворяют условию $d^{p+1} \circ d^p = 0$ и входят в формулировку обобщенной теоремы Стокса, связывающей интеграл по p-мерной гиперповерхности с границей V с интегралом по ее границе ∂V:

$$\int\limits_{V^p} d\omega^{p-1} = \int\limits_{\partial V^p} \omega^{p-1}$$

Особую роль играют внешние 2-формы ω^2, удовлетворяющие условию $d\omega^2 = 0$. В их терминах инвариантно формулируется аппарат гамильтоновой техники.

15.9.9 9. Tensor Products in Quantum Mechanics

Объединение систем. Роль тензорных произведений в квантовой механике объясняется следующим фундаментальным положением, которое продолжает серию постулатов, сформулированных в п. 8\$6 и пп. $1-6$\$9 ч. 2.

Пусть $\mathscr{H}_1, \ldots, \mathscr{H}_n$ - пространства состояний нескольких квантовых систем. Тогда пространство состояний системы, получающейся в результате их объединения, является некоторым подпространством $\mathscr{H} \subset \mathscr{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathscr{H}_n$.

Строго говоря, в бесконечномерном случае вместо тензорного произведения справа должно стоять пополненное тензорное произведеие гильбертовых пространств, но мы пренебрежем этой тонкостью, работая, как обычно, с конечномерными модулями. Какое именно подпространство в $\mathscr{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathscr{H}_n$ отвечает объединенной системе, приходится решать на основе дальнейших правил, к которым мы обратимся ниже. Здесь же мы рассмотрим случай $\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathscr{C}_n$ и попытаемся объяснить, как уже первый постулат квантовой механики - принцип суперпозиции - приводит к совершенно неклассическим связям между системами. Для этого яснее представим себе, каковы могут быть состояния объединенной системы. Пусть $\psi_i \in \mathscr{H}_i$ - некоторые состояния подсистем. Тогда разложимый тензор $\psi_1 \otimes \ldots \otimes \psi_n$ является одним из возможных состояний объединенной системы, и мы можем считать, что оно отвечает случаю, когда каждая из подсистем находится в своем состоянин ψ_i. Но такие разложимые состояния далеко не исчерпывают всех векторов в $\mathscr{C}_1 \otimes \ldots \otimes \mathscr{H}_n$: допустимы их произвольные линейные комбинации. огда объединенная система находится в одном из таких неразложимых состояний, представление о ее подсистемах теряет смысл, ибо они и их состояния не могут быть однозначно выделены. Иными словами, в подавляющем большинстве состояний объединенной системы подсистемы существуют лишь «виртуально».

Важно подчеркнуть, что этот вывод никак не использует представлений о взаимодействин подсистем в классическом смысле слова, подразумеваюшем обмен энергией между ними. Эйнштейн, Розен и Подольский предложили мысленный эксперимент, в котором две подсистемы объединенной системы после ее распада оказываются сильно разделены пространственно, и наблюдение над одной подсистемой позволяет мгновенно «перевести в определенное состояние» вторую подсистему, хотя классическое взаимодействие между ними требует конечного времени. Это следствие постулатов суперпозиции и тензорного произведения резко противоречит классической интуцци. Тем не менее их принятие привело к огромному количеетву теоретических схем, правильно объясняющих действительность, и приходится доверять им и вырабатывать новую интуицию.

Заметим попутно, что описание взаимодействия требует введения гамильтониана объединенной системы. В простейшем случае он имеет «свободный» вид

$$H_1 \otimes \mathrm{id} \otimes \ldots \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes H_2 \otimes \ldots \otimes \mathrm{id} + \ldots + \mathrm{id} \otimes \ldots \otimes H_n,$$

где $H_i : \mathscr{H}_i \to \mathscr{H}_i$ - гамильтониан i-й системы, id - тождественные отображения. В этом случае говорят, что системы не взаимодействуют. Некоторое объяснение этому состоит в замечании, что если объединенная система имеет такой гамильтониан и в начальный момент времени находится в разложимом состоянии $\psi_1 \otimes \ldots \otimes \psi_n$, то в любой момент времени t она будет находиться в разложимом состоянии $e^{-itH_1}(\psi_1) \otimes \ldots \otimes e^{-itH_n}(\psi_n)$, т. е. ее подсистемы будут развиваться независимо друг от друга. В обшем случае гамильтониан представляет собой сумму свободной части и оператора, который отвечает за взаимодействие. 2. Неразличимость. Имеются два фундаментальных случая, когда пространство состояний объединенной системы не совпадает с полным пространством $\mathscr{C}_1 \otimes \ldots \otimes \mathscr{H}_n$. В обоих случаях объединяемые системы тождественны, или неразличимы, скажем, являются элементарными частицами одного типа; в частности, $\mathscr{H}_1 = \ldots \ldots = \mathscr{H}_n = \mathscr{H}$.

а) Бозоны. По определению, система с пространством состояний $\mathscr{C}$ называется бозоном, если пространство состояний объединения n систем есть n-я симметрическая степень $S^n(\mathscr{H})$.

Согласно эксперименту бозонами являются фотоны и альфачастицы (ядра гелия).

б) Фермионы. По определению, система с пространством состояний $\mathscr{H}$ называется фермионом, если пространство состояний объединения n таких систем есть n-я внешняя степень $\Lambda^n(\mathscr{H})$.

Согласно эксперименту фермионами являются электроны, протоны, нейтроны.

Числа заполнения и принцип Паули. Пусть $\{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$ - базис пространства состояний бозонной или фермнонной системы. Тогда элементы симметризованного (или антисимметризованного) тензорного базиса в $S^n(\mathscr{C})$ (или $\Lambda^n(\mathscr{C})$) физики записывают в виде

$$|a_1, \ldots, a_m\rangle = \begin{cases} S\, \underbrace{S\,(\psi_1 \otimes \ldots \otimes \psi_1}_{a_1} \otimes \ldots \otimes \underbrace{\psi_m \otimes \ldots \otimes \psi_m)}_{a_m} \text{ в } S^n(\mathscr{C}), \\ \underbrace{A\,(\underbrace{\psi_1 \otimes \ldots}_{a_m} \ldots \psi_1 \otimes \ldots \otimes \underbrace{\psi_m \otimes \ldots \otimes \psi_m)}_{m}}_{a_1} \text{ в } \Lambda^n(\mathscr{C}). \end{cases}$$

В обоих случаях $a_1 + \ldots + a_m = n$, но для бозонов числа a_i могут принимать любые целые неотрицательные значения, а для фермионов - только 0 или 1: иначе соответствующие антисимметризации равны нулю и не определяют квантовое состояние.

Числа a_i называются «числами заполнения» соответствующего состояния. Подразумевается, что в состоянии $|a_1, \ldots, a_m\rangle$ объединенной системы можно условно считать, что a_i подсистем находятся в состоянии ψ_i. Поскольку, однако ни в фермионном, ни в бозонном случае объединенная система вообше не может находиться в состоянии, описываемом разложимым тензором $\psi_1 \otimes \ldots \ldots \otimes \psi_m$, кроме случая, когда все ψ_i одинаковы (для бозонов), это означает, что даже в базисных состояниях $|a_1, \ldots, a_m\rangle$ нельзя сказать, «которая» из подсистем находится, скажем, в состоянии $\psi_{\mathrm{i}.}$ Подсистемы являются неразличимыми.

Условие $a_i = 0$ или 1 в фермионном случае интерпретируется как утверждение о том, что две подсистемы не могут находиться в одинаковом состоянии. Это знаменитый «принцип запрета» Паули.

Когда число n очень велико, ряд физически важных утверждений о пространствах $S^n(\mathscr{H})$ и $\Lambda^n()$ делается в вероятностных терминах, скажем, в терминах доли состояний $|a_1, \ldots, a_n\rangle$ с теми или иными условиями относительно чисел заполнения. Поэтому часто говорят, что бозоны и фермжоны подчиняются разным стагистикам - соответственно Бозе - Эйнштейна или Ферми.

Случай переменного числа частиц. В процессе эволюции квантовой системы составляющие ее «элементарные подсистемы», нли частицы, могут рождаться или уничтожаться. Для описания таких эффектов в бозонном и фермионном случае используются соответственно пространства состояния $\bigoplus_{i=1}^{\infty} S^i(\mathscr{H})$ (точнее, пополнение этого пространства) или $\bigoplus_{i=0}^{\infty} \Lambda^i(\mathscr{C})$, т. е. полная симметрическая или внешняя алгебра одночастичного пространства $\mathscr{C}$.

Оператор, умножающий векторы из $S^n(\mathscr{C})$ (соответственно, из $\Lambda^n(\mathscr{H})$) на $n(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$, называется оператором числа частиц. Его ядро - подпространство $C = S^0(\mathscr{H})$ или $\Lambda^0(\mathscr{H})$ - называется вакуумным состоянием: в нем частиц нет.

Совершенно фундаментальную роль играют также специальные операторы рождения и уничтожения частиц. Оператор $a - (\psi_0)$ уничтожения бозона в состоянии $\psi_0 \in \mathscr{H}$ действует на состояние $S\left(\psi_1 \otimes \ldots \otimes \psi_n\right)$ по формуле

$a^-\left(\psi_0\right) S\left(\psi_1 \otimes \ldots \otimes \psi_n\right) = \sqrt{n+1} \cdot \frac{1}{n!} \sum\limits_{\sigma \in S_n} \left(\psi_0, \psi_{\sigma(1)}\right) \otimes \psi_{\sigma(2)} \otimes \ldots$

$\ldots \otimes \psi_{\sigma(n)}$

где $\left(\psi_0, \psi_{\sigma(1)}\right)$ - скалярное произведение в $\mathscr{C}$. Оператор $a^+\left(\psi_0\right)$ рождения бозона в состоянии $\psi_0 \in \mathscr{H}$ определяется как сопряженный к $a^-\left(\psi_0\right)$ в смысле эрмитовой геометрии. Аналогичные формулы можно написать в фермионном случае. Роль этих стандартных операторов тензорной алгебры объясняется тем, что в их терминах удобно записывать операторы важных наблюдаемых, в первую очередь гамильтонианы.

УП Р А Ж и Ния

В следующей серин упражнений изложены основные факты теории тензорного ранга, важной для оценок сложности вычислений. Основы этой теории заложил Ф. Штрассен.

Пусть $L_1, \ldots, L_n$ - конечномерные линейные пространства над полем $\mathscr{K}$, $t \doteq L_1 \otimes \ldots \otimes L_n, t \neq 0$. Рангом $\operatorname{tk} t$ тензора t называется такое наименьшее число r, что для подходящих векторов $l_i^{(j)} \in L_l, j = 1, \ldots, r$,

$$t = \sum_{l=1}^{r} l_1^{(j)} \otimes \ldots \otimes l_n^{(j)}.$$

Очевидно, при $n = 1$ имеем $\operatorname{rk} t = 1$ для любого $t \neq 0$.

Пусть $t \in L_1^* \otimes L_2 = \mathscr{L}\left(L_1, L_2\right)$ (см. п. 5§2). Доказать, что

$$\operatorname{rk} t = \operatorname{dim} \operatorname{Im} t, \quad t : L_1 \rightarrow L_2.$$

Вывести отсюда следующие факты: поля;

а) при $n = 2$ ранг t остается инвариантным при расширении основного б) при $n = 2$ множество $\{t | \operatorname{rk} t \leqslant r\}$ задается кснечной системой уравнений $P_j, (t^i, \cdots i_n) = 0$, где $P_{j,r}$- многочлены от координат.

Оба этих факта перестают быть верными для случая $n = 3$, который представляет основной интерес в теории сложности вычислений; см. ниже упражнения $4 - 9$.

Пусть $L = \bigoplus_{i,j=1}^{2} \mathbf{C} a_{ij}$ - пространство комплексных матриц размера 2×2. Доказать, что

$$\operatorname{rk}\left(\sum_{i,j,k=1}^{2} a_{ij} \otimes a_{jk} \otimes a_{ki}\right) = 7.$$

Указание. Воспользоваться упражнением 12 к \$4 ч. 1. Это же указание относится к следующей задаче.

Доказать, что

$$\operatorname{rk}\left(\sum_{i,j,k=1}^{N} a_{ij} \otimes a_{jk} \otimes a_{kl}\right) \leqslant cN^{\log_2 7}$$

для подходящей константы c. (Здесь $L = \bigoplus_{i,j=1}^{N} \mathbf{C} a_{ij}$; интересующий нас тензор есть $\operatorname{tr} A \otimes A \otimes A, A = (a_{ii})$ - общая матрица N-го порядка.)

Пусть L - некоторая конечномерная $\mathscr{K}$-алгебра, $L \underset{\mathscr{K}}{\otimes} L \to L : a \otimes b \longmapsto ab-$

ее закон умножения. Рассмотрим этот закон как тензор $t \in L^* \otimes L^* \otimes L$. (Его координаты - структурные константы алгебры.) Вычнслить $\operatorname{rk} t$ для случая $\mathscr{K} = \mathbf{R}, L = \mathbf{C}$.

В обозначениях предыдущей задачи пусть $L = \mathscr{K}^{2n}$, умножение покоординатное:
Вычнслить $\operatorname{rk} t$.

$$(a_1, \ldots, a_n)(b_1, \ldots, b_n) = (a_1 b_1, \ldots, a_n b_n).$$

Пользуясь результатами упражнений 4 и 5, убедитесь, что ранг тензора структурных констант алгебры $\mathbf{C}$ над $\mathbf{R}$ падает при расширении основного поля до C.
Указание, $\mathbf{C} \underset{\mathbf{R}}{\otimes} \mathbf{C}$ изоморфна $\mathbf{C}^2$ как $\mathbf{C}$-алгебра.

Пусть $L = \mathrm{C} e_1 \oplus \mathbf{C} e_2$. Доказать, что тензор

$$t = e_1 \otimes e_1 \otimes e_1 + e_1 \otimes e_2 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 \otimes e_2$$

нмеет ранг 3.

Доказать, что тензор t из предыдушего упражнения является пределом некоторой последовательности тензоров ранга 2.
Указание.
$t + \varepsilon e_2 \otimes e_2 \otimes e_2 = \frac{1}{\varepsilon}\left[e_1 \otimes e_1 \otimes (-e_2 + \varepsilon e_1) + (e_1 + \varepsilon e_2) \otimes (e_1 + \varepsilon e_2) \otimes e_2\right].$

Вывести из упражнений 7 и 8, что множество тензоров ранга $\leqslant 2$ в $L \otimes L \otimes L$ не задается системой уравнений вида

$$P_i\left(t^{i_1 i_2 i_3}\right) = 0$$

где P_j - мпогочлены.

Назовем предельным рангом brk(t) тенsора t такое наименьшее число s, что t можно представить в вnде предела последовательности тензоров ранга $\leqslant s$. Доказать, что для общей матрицы A порядка 3×3

$$\operatorname{brk}(\operatorname{tr} A \otimes A \otimes A) \leqslant 21.$$

15.10 Other Methods from Kostrikin Manin

15.10.1 13. Category Language

Определение категории. атегория C состоит из следующих данных:

а) Класс (или множество) ObC, элементы которого называются объектами категории.

б) Класс (или множество) Mor C, элементы которого называются морфизмами категорин, или стрелками.

в) Для каждой упорядоченной пары объектов $X, Y \in \mathrm{Ob} C$ задано множество $\mathrm{Hom}_C(X, Y) \subset \mathrm{Mor}\, C$, элементы которого называются морфизмами из X в Y и обозначаются $X \rightarrow Y$ или $f: X \rightarrow Y$ или $X \xrightarrow{f} Y$.

г) Для каждой упорядоченной тройки объектов $X, Y, Z \in \mathrm{Ob} C$ задано отображение

$$\mathrm{Hom}_C(X, Y) \times \mathrm{Hom}_C(Y, Z) \rightarrow \mathrm{Hom}_C(X, Z),$$

сопоставляющее паре морфизмов (f, g) морфизм $g f$, или $g \circ f$, называемый их композицией, или произведением.

Эти данные должны удовлетворять следующим условиям:

д) $\mathrm{Mor}\, C$ есть несвязное объединение $U\, \mathrm{Hom}_C(X, Y)$ по всем упорядоченным парам $X, Y \in \mathrm{Ob} C$. Иными словами, для каждого морфизма f однозначно определены объекты X, Y такие, что $f \in \mathrm{Hom}\, C(X, Y)$: начало X и конеч Y стрелки f.

е) Композиция морфизмов ассоциативна.

ж) Для каждого объекта X существует тождественный морфизм $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_C(X, X)$ такой, что $\mathrm{id}_X \circ f=f \circ \mathrm{id}_X=f$ всякий раз, когда эти композиции определены. Нетрудно видеть, что такой морфизм единствен: если id_X' - другой морфизм с тем же свойством, то $\mathrm{id}_X'=\mathrm{id}_X' \circ \mathrm{id}_X=\mathrm{id}_X$.

Морфизм $f: X \rightarrow Y$ называется изоморфизмом, если существует такой морфизм $g: Y \rightarrow X$, ито $g f=\mathrm{id}_X, f g=\mathrm{id}_Y$.

Примеры. а) Категория множеств Set. Ее объекты-множества, морфизмы - отображения множеств.

б) Категория $\mathscr{L}$ in $\mathscr{K}$ линейных пространств над полем $\mathscr{K}$. Ее объекты - линейные пространства, морфизмы - линейные отображения.

в) Категория грynn.

г) Категория абелевых групп.

Различия между классом и множеством обсуждаются в аксиоматической теории множеств и связаны с необходимостью избежать знаменитого парадокса Рассела. Не всякое собирание объектов воедино образует множество, ибо понятие «множество всех множеств, не содержащих самих себя в качестве элемента», противоречиво. В аксиоматике Гёделя - Бернайса такие собрания множеств называются классами. Техника теорий категорий требует собираний объектов, лежащих в опасной близости к таким парадоксальным ситуациям. Мы, однако, будем пренебрегать этими тонкостями. 3. Диаграммы. Поскольку в аксиоматике категорий ничего не говорится о теоретико-множественной структуре объектов, мы не можем в обшем случае работать с «элементами» этих объектов. Все основные общекатегорные конструкции и их приложения k конкретным категориям формулируются пренмущественно в терминах морфизмов и их композиции. Удобный язык для таких формулировок - это язык диаграмм. Например, вместо того чтобы говорить, что у нас имеются четыре объекта

X, Y, U, V, четыре морфизма $f \in \mathrm{Hom}_C(X, Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_C(Y, V)$, $h \in \mathrm{Hom}_C(X, U)$ и $d \in \mathrm{Hom}_C(U, V)$, причем $gf = dh$, говорят, что задан коммутативныцй квадрат

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ U \arrow[r, "d"] & V \end{tikzcd}$$

«Коммутативность» здесь - это равенство $gf = dh$, которое означает, что «два пути вдоль стрелок» от X к V приводят к одному и тому же результату. Более общо, диаграмма - это ориентированный граф, вершины которого являются объектами C, а ребраморфизмами, например

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\ U \arrow[r] & V \arrow[r] & W \end{tikzcd}$$

Диаграмма называется коммутативной, если любые пути вдоль стрелок в ней с общими началом и концом отвечают одинаковым морфизмам.

В категории линейных пространств, а также в категории абелевых групп особенно важен класс диаграмм, называемых комплексами. Комплекс имеет вид последовательности объектов и стрелок

$$\ldots X \to Y \to U \to V \to \ldots$$

конечной или бесконечной, которая удовлетворяет следующему условию: композиция любых двух соседних стрелок является нулевым морфизмом. Заметим, что понятие нулевого морфизма не является общекатегорным: оно специфично для линейных пространств и абелевых групп и для специального класса категорий так называемых аддитивных категорий. Часто объекты, входящие в комплекс, и морфизмы нумеруются некоторым отрезком целых чисел:

$$\ldots \to X_{-1} \overset{f_{-1}}{\to} X_0 \overset{f_0}{\to} X_1 \overset{f_1}{\to} X_2 \overset{f_2}{\to} \ldots$$

Такой комплекс линейных пространств (или абелевых групл) называется точным в члене X_i, если $\mathrm{Im}\, f_{i-1} = \mathrm{Ker}\, f_i$ (заметим, что в определении комплекса условие $f_i \circ f_{i-1} = 0$ означает только, что $\mathrm{Im}\, f_{i-1} \subset \mathrm{Ker}\, f_i$). Комплекс, точный во всех членах, называется точным, или ацикличным, или точной последовательностью.

Вот три простейших примера:

а) Последовательность $0 \to L \overset{i}{\to} M$ всегда является комплексом; она точна в члене L тогда и только тогда, когда Ker i - образ нулевого пространства 0. Иными словами, точность здесь означает, что i - инъекция.

б) Последовательность $M \xrightarrow{j} N \to 0$ всегда является комплексом; точность его в члене N означает, что $\mathrm{Im}\, j = N$, т. е. что j - сюръекция.

в) Комплекс $0 \to L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{l} N \to 0$ точен, если i-инъекция, j-сюръекиия и $\mathrm{Im}\, i = \mathrm{Ker}\, j$. Отождествив L с образом i-подпространством в M, мы можем поэтому отождествить N с факторпространством M/L, так что такие «точные тройки» являются категорными представителями троек $(L \subset M, M/L)$.

Естественные конструкции и функторы. В математике весьма важны конструкции, которые можно применять к объектам некоторой категории так, что при этом снова получаются объекты категории (другой или той же самой). Если эти конструкции являются однозначными (не зависят от произвольных выборов) и универсально применимыми, то часто оказывается, что они переносятся и на морфизмы. Аксиоматизация ряда примеров привела к важному понятию функтора, впрочем, естественному и с чисто категорной точки зрения.

Определение функтора. Пусть C, D-две категории. Функтором F из категории C в категорию D называется задание двух. отображений (обычно обозначаемых также F): $\mathrm{Ob}C \to \mathrm{Ob}D$, $\mathrm{Mor}\ C \to \mathrm{Mor}\ D$, которые удовлетворяют следующим условиям:

а) если $f \in \mathrm{Hom}_C(X, Y)$, то $F(f) \in \mathrm{Hom}_D(F(X), F(Y))$;

б) $F(gf) = F(g)F(f)$ всякий раз, когда композиция gf определена, и $F\left(\mathrm{id}_X\right) = \mathrm{id}_{F(X)}$ для всех $X \in \mathrm{Ob}C$.

Функторы, которые мы определили, часто называют ковариантными функторами. Определяют также контравариантные функторы, «обращающие стрелки»: для них условия а) и б) заменяются условиями

а$'$) если $f \in \mathrm{Hom}_C(X, Y)$, то $F(f) \in \mathrm{Hom}_D(F(Y), F(X))$;

6') $F(gf) = F(f)F(g)$ и $F\left(\mathrm{id}_X\right) = \mathrm{id}_{F(X)}$.

Можно избежать этого различения, если ввести конструкцию, ставящую в соответствие каждой категории C дуальную категорию C° по правилу: $\mathrm{Ob}C = \mathrm{Ob}C^\circ, \mathrm{Mor}\, C = \mathrm{Mor}\, C^\circ$ и $\mathrm{Hom}_C(X, Y) = \mathrm{Hom}_{C^\circ}(Y, X)$, причем композиция gf морфизмов в C отвечает композиции fg этих же морфизмов в C°, взятых в обратном порядке. Удобно обозначать через X°, f° объекты и морфизмы в C°, отвечающие объектам и морфизмам X, f в C. Тогда коммутативная диаграмма в C

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "gf"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

отвечает коммутативной диаграмме в C°,

$$\begin{tikzcd} X^\circ & & Y^\circ \arrow[ll, "f^\circ"'] \\ & Z^\circ \arrow[ul, "f^\circ g^\circ"] \arrow[ur, "g^\circ"'] & \end{tikzcd}$$

(овариантный) функтор $F : C \to D^\circ$ можно отождествить с контравариантным функтором $F : C \to D$ в смысле данного выше определения.

Примеры. а) Пусть $\mathscr{H}$-поле, $\mathscr{L}$ in $\mathscr{K}$ - категория линейных пространств над $\mathscr{K}$, Set - категория множеств. В \$1 мы объяснили, как любому множеству $S \in$ Ob Set поставить в соответствие линейное пространство $F(S) \in \mathrm{Ob}\mathscr{L}$ in функций на S со значениями в $\mathscr{K}$. Поскольку это естественная конструкция, следует ожидать, что она может быть продолжена до функтора. Так оно и есть. Функтор оказывается контравариантным: морфизму $f : S \to T$ он ставит в соответствие 'линейное отображение $F(f)$: $F(T) \to F(S)$, чаще обозначаемое f^* и называемое подъемом, или обратным образом, на функциях:

$$f^*(\varphi) = \varphi \circ f, \quad \text{где} \quad f : S \to T, \quad \varphi : T \to \mathscr{K}.$$

Иными словами, $f^*(\varphi)$ - это функция на S, значения которой постоянны вдоль «слоев» $f^{-1}(t)$ отображения f и равны $\varphi(t)$ на таком слое. Хорошее упражнение для читателя - проверить, что мы действительно построили функтор.

б) Отображение двойственности: $\mathscr{L}$ in $\varkappa \to \mathscr{L}$ in $\varkappa$, на объектах задаваемое формулой $L \longmapsto L^* = \mathscr{L}(L, \mathscr{K})$, а на морфизмах формулой $f \mapsto f^*$, является контравариантным функтором из категории $\mathscr{L}in_x$ в себя. По существу, это доказано в §7.

в) Операции комплексификации и овеществления, изученные в \$12, определяют функторы $\mathscr{L}$ in $_\mathrm{R} \to \mathscr{L}$ in $_\mathrm{C}$ и $\mathscr{L}$ in $_\mathrm{C} \to \mathscr{L}$ in $_\mathrm{R}$ соответственно. То же относится к более общим конструкциям подъема и спуска поля скаляров, кратко описанным в 12.

г) Для любой категории C и любого объекта $X \in \mathrm{Ob}C$ определены два функтора из C в категорию множеств: ковариантный $h_x : C \to \mathrm{Set}$ и контравариантный $h^X : C \to \mathrm{Set}\ ^\circ$.

Вот их определения: $h_X(Y) = \mathrm{Hom}_C(X,Y), h_Y(f : Y \to Z)$ есть отображение $h_X(Y) = \mathrm{Hom}_C(X,Y) \to h_X(Z) = \mathrm{Hom}_C(X,Z)$, которое ставит в соответствие морфизму $X \to Y$ его композицию с морфизмом $f : Y \to Z$. Аналогично, $h^X(Y) = \mathrm{Hom}_C(Y,X)$ и $h^X(f : Y \to Z)$ есть отображение $h^x(Z) = \mathrm{Hom}_c(Z,X) \to h^x(Y) = \mathrm{Hom}_C(Y,X)$, которое ставит в соответствие морфизму $Z \to X$ его композицию с морфизмом $f : Y \to Z$.

Проверьте, что h_X и h^X действительно являются функторами. Их называют функторами, представляющими объект X категории.

Заметим, что если $C = \mathscr{L}$ in торами со значениями также в $\mathscr{L}$ inx, а не в Set.

Композиция функторов. Если $C_1 \xrightarrow{F} C_2 \xrightarrow{G} C_3$ - три категории и два функтора между ними, то композиция $GF : C_1 \to C_3$ определяется как теоретико-множественная композиция отображений на объектах и морфизмах. Тривиально проверяется, что она является функтором.

Можно ввести «категорию категорий», объектами которой являются категории, а морфизмами - функторы!

Более важной, однако, является следуюшая ступень этой высокой лестницы абстракций: категория функторов. Мы ограничимся объяснением, что такое морфизмы функторов.

Естественные преобразования естественных конструкций, или функторные морфизмы. Пусть $F, G : C \to D$ - два функтора с общими началом и концом. Функторным морфизмом $\varphi : F \to G$ называется класс морфизмов объектов $\varphi(X) : F(X) \to G(X)$ в категории D, по одному для каждого объекта X категории C, обладающий тем свойством, что для каждого морфизма $f : X \to Y$ в категории С квадрат

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\varphi(X)"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\varphi(Y)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

коммутативен. Функторный морфизм называется изоморфизмом, если все $\varphi(X)$ суть изоморфизмы.

Пример: пусть $**$: $\mathcal{L}\rangle\backslash_{\mathcal{K}} \to \mathcal{L}\rangle\backslash_{\mathcal{K}}$ - "функтор двойного сопряжения»: $L \longmapsto L^{**}, f \longmapsto f^{**}$. В §7 мы построили для каждого линейного пространства L каноническое линейное отображение $\varepsilon_L : L \mapsto L^{**}$. Оно определяет функторный морфизм $\varepsilon_M : \mathrm{Id} \to **$, где Id - тождественный функтор на $\mathscr{L}$ in каждому линейному пространству само это пространство и каждому линейному отображению - само это отображение. Действительно, согласно определению, мы должны проверить коммутативность всевозможных квадратов вида

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\varepsilon_L"] \arrow[d, "f"'] & L^{**} \arrow[d, "f^{**}"] \\ M \arrow[r, "\varepsilon_M"] & M^{**} \end{tikzcd}$$

Для конечномерных пространств L, M это устанавливается с помощью утверждения д) теоремы п. 5§7. Проверку в общем случае предоставляем читателю.

УПРАЖНЕНИЯ

Пусть Seto - категория, объектами которой яэляются множества, а морфизмами - такие отображения множеств $f : S \to T$, что для любой точки $t \in T$ слой $f^{-1}(t)$ конечен. Показать, что следующие данные определяют ковариантный функтор $F_0 : \mathrm{Set}_0 \to \mathscr{L}_{\mathrm{in}}\,\mathfrak{K}_{\mathrm{K}}$:

а) $F_0(S) = F(S)$: функции на S со значениями в $\mathscr{K}$;

б) для любого морфизма $f : S \to T$ и функции $\varphi : S \to \mathscr{K}$ функция $F_0(f)(\varphi) = f{*}(\varphi) \in F(T)$ определяется так:

$$f_*(\varphi)(t) = \sum_{s \in f^{-1}(t)} \varphi(s)$$

(«ннтегрирование по слоям»).

Доказать, что спуск поля скаляров с K до $\mathscr{K}$ (см. \$12) определяет функтор $\mathscr{L}_{\mathrm{in}} \to \mathscr{L}_{\mathfrak{K}}$ in. $_{\mathfrak{K}}$

15.10.2 14. Categorical Properties of Linear Spaces

В этом параграфе собраны некоторые утверждения о категории всех линейных пространств $\mathscr{L}$ in $_{\mathscr{K}}$ или конечномерных линейных пространств $\mathscr{L}$ in $f_{\mathscr{K}}$ над данным полем $\mathscr{K}$. По большей части они являются переформулировкой на категорном языке утверждений, которые мы уже доказали раньше. Их выбор обусловлен следующим своеобразным критерием: это как раз те свойства категорни $\mathscr{L}$ in близких категорий, как категория модулей над общими кольцами (например, над Z, т. е. категория абелевых групп) или даже категория бесконечномерных топологических пространств. Детальное изучение этих нарушений для категории модулей составляет основной предмет гомологической алгебры, а в функциональном анализе часто приводит к поиску новых определений, которые позволяют восстановить «хорошие» свойства $\mathscr{L}inf_x$ (таково понятие ядерных топологических пространств).

Теорема о продолжении отображений.

а) Пусть P, M, N-линейные пространства, P конечномерно, $j : M \to N$ - сюръективное линейное отображение. Тогда любое линейное отображение $g : P \to N$ можно поднять до такого линейного отображения $h : P \to M$, что $g = jh$. Иными словами, диаграмму с точной строкой

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "g"] & \\ M \arrow[r, "j"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

можно вложить в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "g"] \arrow[dl, "h"'] & \\ M \arrow[r, "j"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

б) Пусть P, L, M - линейнье пространства, M конечномерно, $i : L \rightarrow M$ - - инбективное линейное отображение. Тогда любое линейное отображение $g : L \rightarrow P$ можно продолжить до линейного отображения $h : M \rightarrow \check{P}$ так, что $g =$ hi. Иными словами, диаграмму с точной нижней строкой

$$\begin{tikzcd} & P & \\ M & L \arrow[l, "i"'] \arrow[u, "g"] & 0 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

можно вложить в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & P & \\ M \arrow[ur, "h"] & L \arrow[l, "i"'] \arrow[u, "g"] & 0 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Доказательство. а) Выберем базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в P, положим $e_i' = g(e_i) \in N$. В силу сорьективности j сушествуют векторы $e_i'' \in M$ такие, что $j(e_i'') = e_i', i = 1, \ldots, n$. По предложению п. 3§3, существует единственное линейное отображение $h : P \rightarrow M$ такое, что $h(e_i) = e_i'', i = 1, \ldots, n$. По конструкции $jh(e_i) = j(e_l'') = e_i' = g(e_i)$. Так как $\{e_i\}$ образуют базис P, имеем $jh = g$.

б) Выберем базис $\{e_1', \ldots, e_m'\}$ пространства L и продолжим $e_k = i(e_k'), \quad 1 \leqslant k \leqslant m$, до базиса $\{e_1, \ldots, e_m; e_{m+1}, \ldots, e_n\}$ пространства M. Положим $h(e_i) = g(e_i')$ при $1 \leqslant i \leqslant m, h(e_j) = 0$ при $m + 1 \leqslant j \leqslant n$. Такое отображение существует по тому же предложению п. 3§3. Можно также прямо применить предложение п. 8§6. Теорема доказана.

В категории модулей объекты P, удовлетворяющие условию а) теоремы (при всех M, N), называются проективными, а объекты, удовлетворяющие условию б), - инективными. Мы доказали, что в категории конечномерных линейных прострапств все объекты проективны и инъективны.

Теорема о точности функтора $\mathscr{L}$. Пусть $0 \rightarrow L \xrightarrow{l} M \xrightarrow{1} N \rightarrow \rightarrow 0$ - точная тройка конечномерных линейных пространств, $\check{P}$ любое конечномерное пространство над тем же полем. Тогда $\mathscr{L}$ как функтор отдельно по первому и второму араументу индуцирует точные тройки линейных пространств: а) $0 \rightarrow \mathscr{L}(P, L) \xrightarrow{i_1} \mathscr{L}(P, M) \xrightarrow{j_1} \mathscr{L}(P, N) \rightarrow 0$, б) $0 \leftarrow \mathscr{L}(L, P) \xleftarrow{i_2} \mathscr{L}(M, P) \xleftarrow{t_2} \mathscr{L}(N, P) \leftarrow 0$.

Дока зательство. а) Напомним (см. пример г) п. 6\$13), что i_1 ставит в соответствие морфизму $P \rightarrow L$ его композицию с $i : L \rightarrow M$, а j_1 ставит в соответствие морфизму $P \rightarrow M$ его композицию с $j : M \rightarrow N$. Отображение i_1 инъективно, потому что i - инъекция, так что если композиция $P \rightarrow L \longrightarrow M$ нулевая, то $P \rightarrow L$ - нулевой морфизм. Отображение j_1 сюръективно в силу утверждения а) теоремы п. 2: любой морфизм g : $P \rightarrow N$ можно подиять до морфизма $P \rightarrow M$, композиция которого с j дает исходный морфизм. Композиция $j_2 i_1$ нулевая: она переводит стрелку $P \rightarrow L$ в стрелку $P \rightarrow N$, которая является композицией $P \rightarrow L \xrightarrow{i} \xrightarrow{i} M \xrightarrow{J} N$, но $ji = 0$.

Мы проверили, таким образом, что последовательность а) является комплексом, и остается установить ее точность в среднем члене, . е. $\operatorname{Ker} j_1 = \operatorname{Im} i_1$. Мы уже знаем, что $\operatorname{Ker} j_1 \supset \operatorname{Im} i_1$. Для доказательства обратного включения заметим, что если стрелка $P \rightarrow M$ лежит в ядре j_1, то композиция этой стрелки с $j : M \rightarrow N$ равна нулю, а потому образ P в M лежит в ядре j. Но ядро j совпадает с образом $i(L) \subset M$ в силу точности исходной тройки. Значит, P отображается в подпространство $i(L)$, и потому стрелку $P \rightarrow M$ можно поднять до стрелки $P \rightarrow L$, композиция которой сi даст исходную стрелку. Это и означает, что последняя лежит в образе i_1.

б) Здесь рассуждения совершенно аналогичны, или, точнее, двойственны. Отображение i_2 сюръективно в силу утверждения б) теоремы п. 2. Отображение $\dot{j}_2$

инъективно, потому что если композиция $M \xrightarrow{l} N \rightarrow P$ равна нулю, то и стрелка $N \rightarrow P$ нулевая, так как j сюръективно. Композиция $i_2 j_2$ равна нулю, ибо композиция $L \rightarrow M \xrightarrow{P} N \rightarrow P$ нулевая для любой последней стрелки. Поэтому остается доказать, что $\operatorname{Ker} i_2 \subset \operatorname{Im} j_2$ (обратное включение только что проверено). Но стрелка $M \xrightarrow{f}$ P лежит в ядре i_2, если коммпозиция $\underline{L} \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} P$ нулевая. Значит, $L = \operatorname{Ker} j$ лежит в ядре f. Определим отображение $\bar{f} : N \rightarrow P$ формулой $\bar{f}(n) = f\left(j^{-1}(n)\right)$, где $i^{-1}(n) \in M$ - любой прообраз n. От выбора этого прообраза ничего не зависит, ибо $\operatorname{Ker} j \subset \operatorname{Ker} f$. Легко проверить, что $\bar{f}$ линейно и что $j_2(f) = f$; в самом деле, $\underline{i}_2(\mathfrak{f})$ есть компгозиция $M \xrightarrow{l} N \xrightarrow{f} P$, которая переводит $m \in M$ в $f\bar{j}(m) = f\left(j^{-1}(j(m))\right) = f(m)$. Теорема доказана.

Категорная характеризация размерности. Пусть G - некоторая абелева группа, записываемая аддитивно, $\chi : \operatorname{Ob} \mathscr{L}$ in $f_{\mathscr{K}} \rightarrow G$ - пронзвольная функция, определенная на конечномерных линейных пространствах и удовлетворяющая двум условиям:

а) если L и M изоморфны, то $\chi(L) = \chi(M)$;

б) для любой точной тройки пространств $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ имеем $\chi(M) = \chi(L) + \chi(N)$ (такие функции называются аддитивными).

Имеет место

Теорема.

Для любой аддитивной функции χ имеем

$$\chi(L) = \dim_{\mathscr{K}} L \cdot \chi\left(\mathscr{K}^1\right),$$

где L - произвольное конечномерное пространство.

Доказ ательст в о. Проведем индукцию по размерности L. Если L одномерно, то L изоморфно $\mathscr{K}^1$, так что $\chi(L) = \chi\left(\mathscr{K}^1\right) = \dim_{\mathscr{K}} L \cdot \chi\left(\mathscr{K}^1\right)$. Пусть теорема доказана для всех L размерности n. Если размерность L равна $n+1$, выберем одномерное подпространство $L_0 \subset L$ и рассмотрим точную тройку

$$0 \rightarrow L_0 \xrightarrow{i} L \xrightarrow{i} L/L_0 \rightarrow 0$$

где i-вложение L_0, а $j(l) = l + L_0 \in L/L_0$. В силу аддитивности χ и индуктивного предположения

$$\begin{aligned} \chi(L) = \chi\left(L_0\right) + \chi\left(L/L_0\right) = \chi\left(\mathscr{K}^1\right) + \dim \mathscr{K}\left(L/L_0\right) \chi\left(\mathscr{K}^1\right) = \\ = \chi\left(\mathscr{K}^1\right) + n\chi\left(\mathscr{K}^1\right) = (n+1)\chi\left(\mathscr{K}^1\right) = \dim_{\mathscr{K}} L \cdot \chi\left(\mathscr{K}^1\right). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Этот результат является самым началом большой алгебраической теории, которая сейчас активно развивается, - так называемой K-теории, лежащей на стыке топологии и алгебры.

УПРАЖН Ения

Пусть $K : 0 \xrightarrow{d_0} L_1 \xrightarrow{d_1} L_2 \xrightarrow{d_2} \ldots \xrightarrow{d_{n-1}} L_n \xrightarrow{d_n} 0$ - комплекс конечномерных линейных пространств. Факторпространство $H^i(K) = \operatorname{Ker} d_i / \operatorname{Im} d_{i-1}$ называется i-м пространством когомологй этого комплекса. Число $\chi(K) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i \dim L_i$ называется эйлеровой характеристикой комплекса. Доказать, что

$$\chi(K) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i \dim H^i(K)$$

«Лемма о змее».

Пусть дана коммутативная диаграмма линейных пространств

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[r, "d_2"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "d_1'"] & M' \arrow[r, "d_2'"] & N' &
\end{tikzcd}$$

с гочными строками. Показать, что существует точная последовательность пространств

$$\text{Ker } t \to \text{ Ker } g \to \text{ Ker } h \xrightarrow{\delta} \text{ Coker } f \to \text{ Coker } g \to \text{ Coker } h,$$

в которой все стрелки, кроме δ, индуцированы d_1, d_2, d_1', d_2' соответственно, а связывающий гомоморфизм δ (называемый гакже кограничным оператором) огределяется так: чтобы определить $\delta(n)$ для $n \in \operatorname{Ker} h$, следует найти $m \in M$ с $n = d_2(m)$, построить $g(m) \in M'$, найтн $l' \equiv L'$ с $d_1'(l') = g(m)$ и положить $\delta(n) = l' + \operatorname{Im} f \in$ Coker f. В частности, следует проверить существование $\delta(n)$ и его независимость от произвола в промежуточных выборах.

Пусть $K : \ldots \to L_i \xrightarrow{d_l} L_{i+1} \to \ldots$ и $K' : \ldots \to L_i' \xrightarrow{d_i'} L_{i+1}' \to \ldots$ - два комплекса. Морфизмом $f : K \to K'$ называется такой набор линейных отображений $f_i : L_i \to L_i'$, что все квадраты

$$\begin{tikzcd}
L_i \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "f_i"'] & L_{i+1} \arrow[d, "f_{i+1}"] \\
L_i' \arrow[r, "d_i'"] & L_{i+1}'
\end{tikzcd}$$

коммутативны. Показать, что комплексы и их морфизмы образуют категорию.

Показать, что отображение $K \to H^i(K)$ продолжается до функтора из категорнй комплексов в категорик линейных пространств.

Пусть $0 \to K \xrightarrow{f} K' \xrightarrow{g} K'' \to 0$ - точная тройка комплексов и их морфизмов. По определению, это означает, что для каждого i тройки линейных пространств

$$0 \to L_i \xrightarrow{f_i} L_i' \xrightarrow{g_l} L_i'' \to 0$$

точны. Пусть H^i - соответствующие пространства когомологий. Пользуясь леммой о змее, построить последовательность пространств когомологий

$$\ldots \to H^i(K) \to H^i(K') \to H^i(K'') \xrightarrow{\delta} H^{i+1}(K) \to \ldots$$

и показать, что она является точной.

16 Applications in Other Mathematics

16.1 Linear Algebra in Differential Equations

(важная заготовка)

(на 30.07.22 все еще я слишком плохо знаю как диффуры, так и линал, чтобы их связать, вообще почти не взяты этим темы еще. забью пока, что сделать еще?)

16.1.1 Derivative of Exponent

(по костр 2)

Theory

Пусть $P(t) = (p_{ij}(t))$ - матрица, коэффициенты которой $p_{ij}(t)$ являются дифференцируемыми функциями от вещественной переменной t. Полагая по определению

$$\frac{d}{dt}P(t) := \left\| \frac{dp_{ij}(t)}{dt} \right\|$$

и называя $P'(t) = dP/dt$ производной матрицы P, будем, очевидно, иметь обычное правило дифференцирования произведения матриц

$$\frac{d}{dt}(PQ) = \frac{dP}{dt}Q + P\frac{dQ}{dt}$$

Вообще говоря,

$$P'(t)P(t) \neq P(t)P'(t),$$

как показывает пример матрицы $\left\| \begin{smallmatrix} 0 & t \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} \right\|$. Например,

$$\frac{dP^2}{dt} \neq 2P\frac{dP}{dt}.$$

Однако в интересующем нас частном случае матрица и её производная перестановочны.

Теорем а 1. Пусть A - матрица с постоянными коэффициентами (вещественньми или комплексными), $F(t) = \exp(tA)$. Тогда

$$\frac{d}{dt}F(t) = A \cdot F(t).$$

Доказательство. По своему определению матрицы $F(t)$ и A перестановочны, т.е. в правой части доказываемого соотношения (1) можно было бы поставить $F(t)A$. Обозначим через Δt малое приращение переменной t. По теореме 4 из §1 имеем

$$F(t + \Delta t) = F(t)F(\Delta t),$$

поэтому

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Delta t}[F(t + \Delta t) - F(t)] = \\ &= \frac{1}{\Delta t}[F(\Delta t) - E] \cdot F(t) = \frac{1}{\Delta t}\left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}(\Delta t A)^i - E\right] \cdot F(t) = \\ &= \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!}(\Delta t)^{i-1}A^i\right] \cdot F(t). \end{aligned}$$

Из соображений непрерывности степенных рядов мы приходим к выводу, что

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left[A + \frac{1}{2!}(\Delta t)A^2 + \frac{1}{3!}(\Delta t)^2 A^3 + \ldots \right] = A.$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt}F(t) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[F(t+\Delta t) - F(t)] = A \cdot F(t).$$

16.1.2 Differential Equations

Theory

Пусть теперь

$$\begin{aligned}
&z_1' = a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + \ldots + a_{1n}z_n \\
&z_2' = a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + \ldots + a_{2n}z_n \\
&\cdots \ldots \ldots \ldots \\
&z_n' = a_{n1}z_1 + a_{n2}z_2 + \ldots + a_{nn}z_n
\end{aligned}$$

- однородная система линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, записываемая коротко в виде $\frac{d\mathbf{z}}{dt} = A\mathbf{z}$. 3 десь $\mathbf{z} = [z_1, z_2, \ldots, z_n]$ - вектор-столбец; его компоненты $z_i = z_i(t), 1 \leqslant i \leqslant n$, - неизвестные дифференцируемые функции от t, рассматриваемые на каком-то интервале $r_1 < t < r_2$ и удовлетворяющие начальным условиям $z_i(0) = z_i^0$.

Обшая теория дифференциальных уравнений [1)] гарантирует существование и единственность $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$. Более того, из (2) и (2′) видно, что решения, отвечающие различным начальным условиям, образуют векторное пространство, а так называемые фундаментальные решения составляют базис этого пространства.

Обратившись вновь к соотношению (1), мы замечаем что оно допускает следующую интерпретацию: каждый столбец $\mathbf{z}_j = [f_{1j}, \ldots \;\ldots, f_{nj}]$ матрицы $F(t) = (f_{ij}(t))$ суть решение системы (2), удовлетворяющее начальному условию $\mathbf{z}_j(0) = [0, \ldots, 1, \ldots, 0]$ с 1 на $j -$ М месте (поскольку $F(0) = E$). Так как начальные условия при $j = 1, \ldots, n$ линейно независимы, а все другие являются их линейными комбинациями, то n столбцов матрицы $F(t)$ исчерпывают всё множество фундаментальных решений системы (2). Пространство решений оказывается n-мерным.

Более общая система линейных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = A\mathbf{z} + \mathbf{b}$$

Где

$$A = (a_{ij}), \quad \mathrm{z} = [z_1, \ldots, z_n], \quad \mathbf{b} = [b_1, \ldots, b_n].$$

Как и в случае алгебраических уравнений, возможно, что система (3) несовместна. Если это не так и z_0 - какое-то частное решение, то общим решением системы (3) будет $\widetilde{\mathbf{z}} = \mathbf{z} + \mathrm{z}_0$, где $\mathbf{z}$ - общее решение однородной системы (2), ассоциированной с (3).

16.1.3 Linear Differential Equation of Order n (????)

Theory

Имеется в виду уравнение

$$z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}z^{(1)} + a_n z = 0,$$

где по-прежнему $z = z(t)$ - неизвестная функция независимой переменной t, а коэффициенты $a_1, \ldots, a_n$ - вещественные или комплексные числа. Не касаясь общей теоремы о существовании и единственности решения $z(t)$, удовлетворяющего начальным условиям

$$z(0)=z^0, \quad z^{(1)}(0)=z_1^0, \quad \ldots, \quad z^{(n-1)}(0)=z_{n-1}^0,$$

заметим, что линейность уравнения (4) относительно z и её производных имеет следствием линейность пространства решений. Сами же решения можно найти путём сведения (4) к специальной системе (2). Именно, положив

$$z_1=z, \quad z_2=z^{(1)}, \quad z_3=z^{(2)}, \quad \ldots, \quad z_{n-1}=z^{(n-2)}, \quad z_n=z^{(n-1)},$$

мы придём к системе $(2')$ с матрицей специального вида

$$A=\left\| \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-3} & \cdots & -a_1 \end{array} \right\|$$

Далее используем тот же приём, что и в п. 2. Но к уравнению (4) можно подойти с другой стороны. Перейдём к линейным операторам, действующим на пространстве бесконечно дифференцируемых функций. Пусть $\mathcal{D}_t$ - оператор дифференцирования по t и

$$\chi\left(\mathcal{D}_t\right)={\mathcal{D}_t}^n+a_1{\mathcal{D}_t}^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\mathcal{D}_t+a_n\mathcal{E}$$

- линейный оператор, позволяющий переписать (4) в виде

$$\chi\left(\mathcal{D}_t\right) z=0.$$

Многочлен $\chi(t)$ называется характеристическим многочленом дифференциального уравнения $(4')$. В этой терминологии есть определённый смысл. Так, попробовав искать решение в виде $z=e^{\lambda t}$, мы приходим к соотношению

$$\chi(\lambda)e^{\lambda t}=\chi\left(\mathcal{D}_t\right)e^{\lambda t}=0,$$

из которого следует, что

$$e^{\lambda t}-\text{ решение уравнения } (4') \Longleftrightarrow \chi(\lambda)=0.$$

Теорема 2. Пусть $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ - совокупность всех попарно разяичных корней характеристического многочлена $\chi(t)$ уравнения $(4')$, причём корень λ_i имеет кратность k_i, так что $k_1+\ldots+k_m==n$. Тогда фуккиии

$$t^k e^{\lambda_j t}, \quad 1\leqslant j\leqslant m, \quad 0\leqslant k\leqslant k_j-1,$$

составляют фундаментальную систему решений.

Доказательство мы не будем приводить, отсылая читателя к упомянутому учебнику Л.С. Понтрягина. В частном случае простых корней (все $k_j=1$) рассуждения совсем несложные, но наличие кратных корней вынуждает использовать ЖНФ (см. гл. 2).

Наша задача заключалась лишь в том, чтобы проиллюстрировать методы линейной алгебры в теории дифференциальных уравнений простейшего типа.

16.2 Linear Algebra in Differential Geometry

16.2.1 Introduction to Lobachevsky Geometry

(все про это с позиции линала)

Пространство Лобачевского

Движения пространства Лобачевского

Метрика Лобачевского

Плоскость Лобачевского

16.2.2 Introduction to Algebraic Manifolds

(это вроде совсем не линал, на всякий случай раздел.)

Теория по (??)

Рассмотрим проектривное пространство, на нем мы уже вводили (где??) квадрики $\sum_{i=0}^{n} a_{ik}x_i = 0, \quad k = 1, \dots, m, \ \sum_{l,j=0}^{n} a_{ij}x_i x_j = 0, \quad a_{ij} = a_{jl}$

если обобщить этот метод, то есть задать множество точек однородным многочленом

$$F(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i_0+\ldots+i_n=m} a_{i_0\ldots i} x_0^{i_0} \cdots x_n^{l_n} = 0 \tag{16.1}$$

то это и будет *алгебраической гиперповерхностью.*

если у нас в общем случае несколько таких многочленов, пусть и разных степеней, то такое множество называется *алгебраическим многообразием.*

16.3 Groups and Geometries (!!!??)

[4]

16.3.1 Affinity Group

16.3.2 Movements of Euclidean Space

16.3.3 Isometry Group

16.3.4 Linear Geometry Corresponding to the Group

16.3.5 Affine Transformations of Euclidean Space

16.3.6 Convex Sets

16.4 Linear Algebra in Algebraic Equations

(пока хз и вообще не до этого.)

16.5 Linear Algebra in Functional Analysis

где там линал?
эээ...

16.6 Convex Polyhedra and Linear Programming (??!!)

(по [4], пока не до этого.)

16.6.1 Key Point

Формулировка задачи

Мотивировка

Основные геометрические понятия

16.6.2 Other Articles in This Report

16.7 Other Applications

(мб потом акцентирую приложения именно тензорной)

16.7.1 Applications to Differential Geometry

кстати, актуально. в другом месте это конечно подробнее будет, но тут тоже нельзя молчать

здесь подумаем про риманову кривизну

повествование начнем с [?],

16.7.2 Group Theory Applications

см шапиро в основном

но также у берштейна хорошо написано

вообще да, тема характеров - такой закаулок теории групп и алгебры, на котором хочется отдельно останавиться. (как вообще формулируется вопрос? типа есть представления, у них характер вроде как инвариантен, так что мы решили находить их как характеристику представлений)

17 Physics

17.1 Quantum Mechanics as Linear Algebra

(see note on QM for now)

17.1.1 Construction of Quantum Mechanics

(write this, that we are finding an eigenvalues of a Hamiltonian)

17.1.2 Radiation and Selection Rules

О неприводимых тензорных операторах (!?!?)

(that mathematical theory....)

О теореме Вигнера-Экхарта (!?!?!??!)

17.2 Statistical Physics as Linear Algebra

17.2.1 Construction of Statistical Physics

(write this, that we are finding an eigenvalues of a Hamiltonian)
(also about spin models)

17.2.2 Properties of Traces and Operators for Statistical Physics

(write this. I have practiced with this already)

17.3 Condensed Matter as Linear Algebra

17.3.1 General Ideas of Condensed Matter

(that we have Hamlitonaians and we diagonalize it. write it in cond matter first good!)

17.3.2 Useful Diagonalization Methods for Condensed Matter

(write it in cond matter first good!)

17.3.3 Methods for 4x4 Matrices in Superconductivity

(write them, see my thesis. I'll do it later!)

17.4 Classical Mechanics as Linear Algebra

(тут очень много всего может быть, напишу потом, отдельные темы Грантмахера и механики. пока не такой уровень, линал бы пройти еще раз!)

17.5 Field Theory as Linear Algebra

17.5.1 About Minkowski's Space

попробуем повторить то же, что сделано в теории поля, но с алгебраическим подходом.

мотивация

конструкция

Определение 17.1. *пространство минковского???*

и какие теоремы про это есть?

Определение 17.2. *изометрии пространства минковского образуют группу - группу Лоренца*

17.5.2 lorentz Group

Теорема 5. *группа лоренца состоит из 4х связных компонент*

17.6 Multipole Expansion of the Radiation Field

17.6.1 Radiation Field Itself

Consider any isolated source of gravitational radiation. Throughout its local wave zone $r_0 < r < r_I$, by virtue of definitions (3.3) and (3.4) of r_0 and r_I, we can treat the waves as linearized metric perturbations propagating on a flat background. To characterize this flat background we introduce Minkowskii coordinates t, x, y, z with the source at rest at the origin ("asymptotic rest frame of source"; cf. Chap. 19 of MTW); and we introduce the corresponding spherical coordinates [Eqs. (1.1)]. In this coordinate system the transverse, traceless part of the metric perturbation-which characterizes the radiation completely (Secs. 35.435.7 of MTW) has the form

$$h_{jk}^{\mathrm{T}} = r^{-1} A_{jk}(t-r, \theta, \phi).$$

Here A_{jk} is a transverse, traceless function which, in the local wave zone, varies rapidly (length scale x) in the radial direction but slowly in the transverse directions

$$A_{jk,r} \sim A_{jk}/x \gg A_{jk,\theta} \sim A_{jk,\phi}.$$

[Recall the definition, Eqs. (1.13), of the comma.]

We shall resolve the angular dependence of the wave amplitude A_{jk} into tensor spherical harmonics. The best set of harmonics to use is the pure-spin set since it has well defined transversality and helicity properties [Eqs. (2.34) and (2.35)]. Because A_{jk} is transverse and traceless, it can contain only the TT harmonics $\mathbf{T}^{E2,lm}$ and $\mathbf{T}^{B2,}tm$; hence, the radiation field must have the form [Mathews (1962)]

$$h_{jk}^{TT} = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left[r^{-1(l)} I^{lm}(t-r) T_{jk}^{E2,lm} + r^{-1(l)} S^{lm}(t-r) T_{jk}^{B2,lm} \right].$$

The expansion coefficients $I^{1m}(t-r)$ will be called the "mass multipole moments" of the radiation field, and $S^{1m}(t-r)$ will be called the "current multipole moments." The quantities ${}^{(l)}I^{lm}$ and ${}^{(t)}S^{lm}$ are the l th time derivatives of these moments; i.e., we use the notation

$$^{(t)}G(u) \equiv \left(\frac{d}{du}\right)^t G(u).$$

The mass moments generate the electric-parity part of the field, $\pi = (-1)^x$; the current moments generate the magnetic-parity part. The fact that h_{jk}^{TT} must be real, together with the complex-conjugate property (2.36b) of the TT harmonics, implies that the mass and current moments must satisfy

$$I^{lm*} = (-1)^m I^{l-m}, \quad S^{lm*} = (-1)^m S^{l-m}.$$

In comparing this radiation field with the properties of the source (Sec. V and Part Two), STF notation will be useful. In STF notation, the mass and current l - pole moments of the radiation are real, STF-l functions of $t-r$:

$$_{A_l}(t-r) = \frac{l!}{4}\left(\frac{2(l-1)l}{(l+1)(l+2)}\right)^{1/2} \sum_{m=-l}^{l} I^{lm}(t-r) y_{A'l}^{lm},$$

$$\mathcal{S}_{A_l}(t-r) = -\frac{(l+1)!}{8l}\left(\frac{2(l-1)l}{(l+1)(l+2)}\right)^{1/2} \sum_{m=-l}^{l} S^{lm}(t-r)\mathcal{Y}_{A_l}^{lm}$$

[The l-dependent coefficients are chosen to make g_{A_l} and S_{A_l} have simple links to the theory of the source in the slow-motion limit; see Eqs. (5.19) and (5.28), below.] Relations (4.6) can be inverted by comparing with Eqs. (2.13):

$$I^{lm} = \frac{16\pi}{(2l+1)!!}\left(\frac{(l+1)(l+2)}{2(l-1)l}\right)^{1/2} g_{A_l}\mathcal{Y}_{A_l}^{lm*}$$

$$S^{lm} = -\frac{32\pi l}{(l+1)(2l+1)!!}\left(\frac{(l+1)(l+2)}{2(l-1)l}\right)^{1/2} \mathcal{S}_{A_l}Y_{A_l}^{lm*}.$$

By comparing Eqs. (4.6), (4.3), (2.39e), and (2.39f) we obtain the STF multipole expansion of the radiation field [Sachs (1961), Pirani (1964)]

$$h_{jk}^{\mathrm{TT}} = \left[\sum_{l=2}^{\infty}\left(\frac{4}{l!}\right) r^{-1(l)g_{jkA_{l-2}}(t-r)N_{A_{l-2}}} \right.$$
$$\left. + \sum_{l=2}^{\infty}\left(\frac{8l}{(l+1)!}\right) r^{-1}\epsilon_{pq(j}(l)g_{k)pA_{l-2}}(t-r)n_q N_{A_{l-2}}\right]^{\mathrm{TT}}.$$

Note that this is the radiation-zone form of the most general outgoing-wave transverse-traceless solution of the flat-space wave equation $\Box h_{jk}^{TT} = 0$ [Eqs. (2.51c)]. Note also that the mass-quadrupole part of the field has the familiar form

$$\left(h_{jk}^{\mathrm{TT}}\right)_{\text{mass quadrupole}} = \left[2v^{-1\cdot}{}_{jk}(t-r)\right]^{\mathrm{TT}}$$

[Eqs. (25) and (26) of Einstein (1918); Eq. (36.20) of MTW].

Expressions (4.3) and (4.8) for the radiation field contain only multipoles of quadrupole order and higher ($l \geqslant 2$). This is because for $l=0$ and 1 the TT tensor spherical harmonics $T_{jk}^{E2,}, lm$ and $T_{jk}^{B2,lm}$ are nonexistent. One can verify their nonexistence either from the STF formulas (2.39e) and (2.39f), where the Y's must have at least two indices; or from (i) Eq. (2.30d), where $T^{2l-2,lm}$ obviously does not exist when $l=0$ or 1 and where the other terms in $\mathbf{T}^{E^2,lm}$ vanish for $l=1$, and (ii) the relation $\mathbf{T}^{B2,lm} = \left[\mathbf{n} \times \mathbf{T}^{E2,lm}\right]^{\mathrm{S}}$ [Eq. (2.30f)].

If the radiation field is known, one can project out its multipole moments using the following integrals over the sphere of constant $t-r$:

$$
\begin{aligned}
{}^{(l)}I^{lm} &= r\int h_{jk}^{\mathrm{TT}} T_{jk}^{E2,lm*} d\Omega, \\
{}^{(l)}S^{lm} &= r\int h_{jk}^{T\ \mathrm{T}} T^{B2,lm*} d\Omega; \\
(l)g_{A_l} &= \left[\frac{l(l-1)(2l+1)!!}{2(l+1)(l+2)}\frac{r}{4\pi}\int h_{a_1a_2}^{\mathrm{TT}} n_{a_3}\cdots n_{a_l} d\Omega\right]^{\mathrm{STF}} \\
(l)\mathcal{S}_{A_l} &= \left[\frac{(l-1)(2l+1)!!}{4(l+2)}\frac{r}{4\pi}\int \epsilon_{a_1jk} n_j h_{k\alpha_2}^{\mathrm{TT}} n_{a_3}\cdots n_{a_l} d\Omega\right]^{\mathrm{STF}}_{(4.11\ \ \mathrm{b})}.
\end{aligned}
$$

See Eqs. (4.3) and (2.36a); also Eqs. (2.39e), (2.39f), and (4.7).

It is trivial to generalize this multipole expansion to any other metric theory of gravity if one knows the "E(2) classification" of the theory [Eardley et al. (1973)]. One need only include in the expansion of h_{jk}^{grav} wave (or of $R_{j0k0} = -\frac{1}{2}\partial_t^2 h_{jk}^{\text{grav wave}}$) those pure-spin tensor harmonics which belong to the spin states of that E (2) class. For example, in Brans-Dicke theory (class N_3) one must include the harmonics $T^{T0,lm}$ (transverse, spin 0 state), $\mathbf{T}^{E^2,lm}$ (TT, electric-parity, spin 2 state), and $\mathrm{T}^{B2,lm}$ (TT, magnetic-parity, spin 2 state).

17.6.2 Energy in the Waves

The energy and linear momentum carried off by the radiation field (4.3), (4.8) are most easily evaluated using the Isaacson (1968) stress-energy tensor for gravitational waves

$$T_{\alpha\beta}^{\mathrm{GW}} = (1/32\pi)\left\langle h_{jk,,\alpha}^{\mathrm{TT}} h_{jk_\beta\beta}^{\mathrm{TT}}\right\rangle$$

(cf. MTW, Secs. 35.7 and 35.15). Here the brackets \langle\rangle denote an average over several wavelengths. The power radiated into a unit solid angle about the radial, n, direction is

$$\frac{dE}{d\Omega dt} \equiv -r^2 n_j T_{j0}^{\mathrm{GW}} = +r^2 T_{00}^{\mathrm{GW}},$$

which-by using Eqs. (4.3), (4.8). and (1.11)_works out to be

$$
\begin{aligned}
\frac{dE}{d\Omega dt} = \sum_{l=2}^{\infty}\sum_{l'=2}^{\infty}\sum_{m,m'}\frac{1}{32\pi}\Big\langle {}^{(l+1)}I^{lm(l'+1)}I^{l'm'}T_{jk}^{E2,lm}T_{jk}^{E2,l'm'} \\
+{}^{(l+1)}S^{lm(l'+1)}S^{l'm'}T_{jk}^{B2,lm}T_{jk}^{B2,},l'm' + 2^{(l+1)}I^{lm(l'+1)}S^{l'm'}T_{jk}^{E2,lm}T_{jk}^{B2,l'm'}\Big\rangle,
\end{aligned}
$$

$$\frac{dE}{d\Omega dt} = \sum_{l=2}^{\infty}\sum_{l'=2}^{\infty}\frac{1}{4\pi l!l'!}{}^{(l+1)}g_{A_l}{}^{(l'+1)}g_{B_{l'}}N_{A_l}N_{Bl'} - 4^{(l+1)}g_{jA}{}^{(t'+1)}g_{jBl'-1}N_{Al-1}N_B + t^{(-1} + 2^{(l+1)}g_{jkA}\left(l'+1\right)g_{jk}$$

$$+\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{l'=2}^{\infty}\frac{ll'}{4\pi(l+1)!\,(l'+1)!}\Big(4^{(l+1)}s_{A_l}{}^{(l'+1)}s_{B_l}{}^{N_A}A_lN_Bl^t - 88^{(l+1)}s_{jA_{l-1}}{}^{(l'+1)}s_{jB_ll'-1}N_{A_{l-1}}N_{Bl'-1}$$

$$+4^{(l+1)}S_{jkAl-2}{}^{(l'+1)}S_{jkBl'-2}N_{A_{l-2}}N_{B_{l'-2}} - 4\epsilon_{cpj}\epsilon_{dqk}\left(l^{(l+1)}S_{cdA_{l-2}}\left(l'^{+1}\right)S_{jkB}l_{l'-2}n_pnq_{f^2}N_{A_{l-2}}N_Bl_{l'-2}\right\rangle$$

$$+\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{l'=2}^{\infty}\frac{8l'}{4\pi l!\,(l'+1)!}\Big\langle -\epsilon_{jkp}^{(l+1)}g_{jA_{l-1}}\left(l'+1\right)g_{kBl'-1}n_pN_{A_{l-1}}N_{B_{l'-1}} + \epsilon_{jkp}\Big(l^{(+1)}g_{jiA_{l-2}}\Big(l'^{+1}S_{kiBl'-2}n_tN_{A_{l-2}}N$$

Вывод формулы Эйнштейна для энергии гравитационных волн

The total power radiated is the integral of this energy flux over a sphere lying in the local wave zone:

$$\frac{dE}{dt} = \int \frac{dE}{d\Omega dt} d\Omega.$$

Expression (4.14) is easily integrated using the orthonormality of the pure-spin tensor harmonics [Eq. (2.36a)] and the complex-conjugate behavior (2.36b), (4.5):

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{32\pi} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left\langle \left| {}^{(l+1)}I^{Im} \right|^2 + \left| {}^{(l+1)}S^{Im} \right|^2 \right\rangle .$$

This result is due to Mathews (1962).

[beware, however, his peculiar notation, e.g., $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + (32\pi G)^{1/2} h_{\mu\nu}$].

The analogous STF expression can be found either by inserting Eq. (4.14) into Eq. (4.15) and integrating with the help of Eqs. (2.5) and (2.6); or by taking the claimed answer (4.16) and transforming back to Eq. (4.16) with the help of Eqs. (4.6) and (2.26a). The result is

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{l=2}^{\infty} \frac{(l+1)(l+2)}{(l-1)l} \frac{1}{l!(2l+1)!!} \left\langle {}^{(l+1)}\mathcal{J}_{A_l} {}^{(l+1)}\mathcal{J}_{A_l} \right\rangle$$

$$+ \sum_{l=2}^{\infty} \frac{4l(l+2)}{(l-1)} \frac{1}{(l+1)!(2l+1)!!} \left\langle {}^{(}l+1)\mathrm{S}_{A_l} {}^{(l+1)}\mathrm{S}_{A_l} \right\rangle$$

The mass quadrupole part agrees with Einstein's (1918) formula (30), after correction of his factor -2 error:

$$\frac{dE}{dt}_{\text{mass quadrupole}} = \frac{1}{5} \left\langle \dddot{\mathcal{J}}_{jk} \dddot{\mathcal{J}}_{jk} \right\rangle ;$$

[cf. Eq. (36.23) of MTW]. The mass octupole and current quadrupole parts agree with Papapetrou's (1962, 1971) formulas - after one invokes Eqs. (5.19) below and changes notation.

Об 1/5 или 1/45? (???)

(?? чего у Ландау 1/45?)

Об обсчете Эйнштейна в его оригинальной статье (???)

(чет тут Торн пишет про это, потом напишу)

17.6.3 Linear Momentum in the Waves

The waves from our source carry linear momentum out radially; and, as with any locally plane-fronted radiation field, the magnitude of their momentum flux is the same as that of their energy flux

$$\frac{dP_j}{d\Omega dt} \equiv r^2 n_k T^{GW}_{kj} = r^2 n_j \frac{dE}{d\Omega dt}$$

[cf. Eq. (35.77j) of MTW]. The total rate at which the source feeds momentum into the radiation field

$$\frac{dP_j}{dt} = \int \frac{dP_j}{d\Omega dt} d\Omega$$

can be calculated by inserting (4.14) into (4.18) and (4.19) and then using group-theoretic methods (Racah recoupling, etc.) to bring the integrand into doable form; the result is

$$\frac{dP_j}{dt} = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m} \frac{1}{32\pi(l+1)} \left(\frac{2(l-1)(l+3)}{(2l+1)(2l+3)} \right)^{1/2} \langle^{)l+1)} I^{lm*} \{$$

$$[[(l-m+1)(l-m+2)]^{1/2(l+2)} I^{l+1} m^{m-1} \xi_j^{-1}$$

$$+[2(l-m+1)(l+m+1)]^{1/2(l+2)} I^{l+1} m \xi_j^0 + [(l+m+1)(l+m+2)]^{1/2(l+2)} I^{l+1m+1} \xi_j^1 \} \rangle$$

$$+ \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m} \frac{1}{32\pi(l+1)} \left(\frac{2(l-1)(l+3)}{(2l+1)(2l+3)} \right)^{1/2} \langle)l+1) S^{lm*} \{ [(l-m+1)(l-m+2)]^{1/2(l+2)} S^{l+1} m^{-1}$$

$$+[2(l-m+1)(l+m+1)]^{1/2(l+2)} S^{l+1} \xi_j^0 + [(l+m+1)(l+m+2)]^{1/2(l+2)} S^{l+1m+1} \xi_j^1 \} \rangle$$

$$+m^{(1+1)} S^{lm} \xi_j^0 - \left[\frac{1}{2}(l-m)(l+m+1) \right]^{1/2(l+1)} S^{lm+1} \xi_j^1 \Bigg\} \Bigg\rangle .$$

$$+ \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m} \frac{-i}{8\pi l(l+1)} \left\langle (l+1) I^{lm*\{[\frac{1}{2}(l+m)(l-m+1)} \ )]^{1/2(l+1)} S^{lm-1} \xi_j^{-1} \right.$$

$$+m^{(l+1)} S^{lm} \xi_j^0 - \left[\frac{1}{2}(l-m)(l+m+1) \right]^{1/2(l+1)} S^{lm+1} \xi_j^1 \Bigg\} \Bigg\rangle .$$

Alternatively, one can insert Eq. (4.14') into Eqs. (4.18) and (4.19), and then integrate with the help of Eqs. (2.5) and (2.6). The result is

$$\frac{dP_j}{dt} = \sum_{l=2}^{\infty} \left\{ \frac{2(l+2)(l+3)}{l(l+1)!(2l+3)!!} \langle (l+2) g_{jA_l}{}^{(l+1)} g_{A_l} \rangle + \frac{8(l+3)}{(l+1)!(2l+3)!!} \left\langle {}^{(l+2)} \mathcal{S}_{jA_l}{}^{(l+1)\mathcal{S}_{A_l}} \right\rangle \right.$$

$$+ \frac{8(l+2)}{(l-1)(l+1)!(2l+1)!!} \left\langle \epsilon_{jpq}{}^{(l+1)g_{pA_{l-1}}(l+1)\mathcal{S}_{qA_{l-1}}} \right\rangle \}.$$

[1] Einstein (1918) makes a factor 2 error in going from Eq. (9) to (16); and, as a result, his Eqs. (27) and (30) for the energy in the waves are a factor 2 too small.

$$\frac{dE}{d\Omega dt} = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{l'=2}^{\infty} \frac{1}{4\pi l! l'!} \langle^{(l+1)} g_{A_l}{}^{(l'+1)} g_{B_{l'}} N_{A_l} N_{B_{l'}} - 4\, {}^{(l+1)} g_{jA_{l-1}}{}^{(l'+1)} g_{jB_{l'-1}} N_{A_{l-1}} N_{B_{l'-1}} + 2\, {}^{(l+1)} g_{jkA_{l-2}}{}^{(l'+1)} g_{jkB_{l'-2}} N_{A_{l-2}} N_{B_{l'-2}} \rangle$$

$$+ \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{l'=2}^{\infty} \frac{ll'}{4\pi(l+1)!(l'+1)!} \langle 4\, {}^{(l+1)} \mathcal{S}_{A_l}{}^{(l'+1)} \mathcal{S}_{B_{l'}} N_{A_l} N_{B_{l'}} - 8\, {}^{(l+1)} \mathcal{S}_{jA_{l-1}}{}^{(l'+1)} \mathcal{S}_{jB_{l'-1}} N_{A_{l-1}} N_{B_{l'-1}}$$

$$+ 4\, {}^{(l+1)} \mathcal{S}_{jkA_{l-2}}{}^{(l'+1)} \mathcal{S}_{jkB_{l'-2}} N_{A_{l-2}} N_{B_{l'-2}} - 4 \epsilon_{cpj} \epsilon_{dqk}{}^{(l+1)} \mathcal{S}_{cdA_{l-2}}{}^{(l'+1)} \mathcal{S}_{jkB_{l'-2}} n_p n_q N_{A_{l-2}} N_{B_{l'-2}} \rangle$$

$$+ \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{l'=2}^{\infty} \frac{8l'}{4\pi l!(l'+1)!} \langle - \epsilon_{jkp}{}^{(l+1)} g_{jA_{l-1}}{}^{(l'+1)} \mathcal{S}_{kB_{l'-1}} n_p N_{A_{l-1}} N_{B_{l'-1}} + \epsilon_{jkp}{}^{(l+1)} g_{jiA_{l-2}}{}^{(l'+1)} \mathcal{S}_{kiB_{l'-2}} n_p N_{A_{l-2}} N_{B_{l'-2}} \rangle.$$

$$+ \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m} \frac{-i}{8\pi l(l+1)} \langle^{(l+1)} I^{lm*} \{ [\tfrac{1}{2}(l+m)(l-m+1)]^{1/2}\, {}^{(l+1)} S^{lm-1} \xi_j^{-1}$$

Once one has derived either Eq. (4.20) or (4.20'), then one can obtain the other from it with the aid of Eqs. (4.6), (4.7), and (2.26). A general expression for dP_j/dt, presumably equivalent to these but in rather different notation, was derived by Campbell and Morgan (1971). Papapetrou (1962, 1971) derived the leading terms (those involving mass quadrupole, current quadrupole, and mass octupole)-but also in rather different notation.

17.6.4 Angular Momentum in the Waves

The dependence of the wave field h_{jk}^{TT} on angle causes its wave fronts to be not quite precisely spherical-aand thereby enables the waves to carry off angular momentum. One might hope that the angular momentum loss could be calculated by integrating $\epsilon_{jab} x_a T_{b0}^{\mathrm{GW}}$ over a sphere surrounding the source. Unfortunately, such a procedure fails - for this reason: The averaging process that underlies Eq. (4.12) for $T_{\alpha\beta}^{\mathrm{GW}}$ treats as zero the "tiny corrections" which die out as $1/r^3$. However, it is precisely the $1/v^3$ part that carries off the angular momentum. I was vaguely aware of this fact when writing the relevant sections of MTW, but was not sufficiently certain to spell it out explicitly. Subsequently Bryce DeWitt (1971) derived a simple, correct expression for the flux of angular momentum. An alternative derivation, which I have carried out as a check, begins with the fact [MTW Eq. (20.26)] that

$$\begin{aligned}\frac{dS_j}{dt} &= -\frac{dS_j^{\text{source}}}{dt} \equiv -\frac{1}{2}\epsilon_{jab}\frac{dJ_{ab}^{\text{source}}}{dt} \\ &= \int \epsilon_{jab} x_a t_{bc}^{LL} n_c r^2 d\Omega.\end{aligned}$$

Here $t_{\alpha\beta}^{LL}$ is the Landau-Lifshitz pseudotensor and S_j^{source} is the intrinsic angular momentum of the source. By expressing t_{bc}^{LL} in terms of the metric perturbation, and by then averaging $\epsilon_{ja} x_a t_{bc}^{LL} n_c$ over several wavelengths, one ultimately winds up with the simple DeWitt formula
$\frac{dS_j}{dt} = \frac{1}{16\pi}\int \epsilon_{jpq} x_p \left\langle \left(h_{qa}^{\mathrm{TT}} h_{ab,0}^{\mathrm{TT}}\right)_{,b} - \frac{1}{2} h_{ab,a}^{\mathrm{TT}} h_{ab,0}^{\mathrm{TT}} \right\rangle r^2 d\Omega$

An equivalent formula, obtained from Eq. (4.22) by integration by parts, is
$\frac{dS_j}{dt} = \frac{1}{16\pi}\int \left\langle \epsilon_{jpq} h_{pa}^{\mathrm{TT}} h_{aq,0}^{\mathrm{TT}} - \frac{1}{2}\epsilon_{jpq} x_p h_{ab,q}^{\mathrm{TT}} h_{ab,0}^{\mathrm{TT}} \right\rangle r^2 d\Omega.$

A word of interpretation is needed. This equation is correct only if the integral is evaluated in the asymptotic rest frame of the source. (Similarly for all previous formulae in this section.) As the source's linear momentum changes [Eq. (4.20)], its asymptotic rest frame gradually changes; and one must gradually change the reference frame in which one evaluates Eq. (4.22) (and all previous integrals).

Return to Eq. (4.22). An exceedingly long and tedious calculation, using techniques similar to those for evaluating the energy and momentum integrals, brings Eq. (4.22) into the forms

$$\begin{aligned}\frac{dS_j}{dt} =& \frac{i}{32\pi}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m}\left\langle)l) I^{lm*}\left\{\left[\frac{1}{2}(l+m)(l-m+1)\right]^{1/2(l+1)} I^{lm-1}\xi_j^{-1}\right.\right. \\ & \left.\left. + m^{(l+1)} I^{lm}\xi_j^0 - \left[\frac{1}{2}(l-m)(l+m+1)\right]^{1/2(l+1) I^l m+1} \xi_j^1\right\}\right\rangle \\ & + \frac{i}{32\pi}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m}\left\langle {}^{)l)} S^{lm*}\left\{\left[\frac{1}{2}(l+m)(l-m+1)\right]^{1/2(l+1)} S^{lm-1}\xi_j^{-1}\right.\right. \\ & \left.\left. + m^{(l+1)} S^{lm}\xi_j^0 - \left[\frac{1}{2}(l-m)(l+m+1)\right]^{1/2(l+1)} S^{lm+1}\xi_j^1\right\}\right\rangle \\ \frac{dS_j}{dt} =& \sum_{l=2}^{\infty}\frac{(l+1)(l+2)}{(l-1)l!(2l+1)!!}\left\langle \epsilon_{jpq}{}^{(l)} g_{pA_{l-1}}{}^{(l+1)g_{qA_{l-1}}}\right\rangle\Big\rangle \\ & + \sum_{l=2}^{\infty}\frac{4l^2(l+2)}{(l-1)(l+1)!(2l+1)!!}\left\langle \epsilon_{jpq}{}^{(l)} S_{pA_{l-1}(l+1)} S_{qA_{l-1}}\right\rangle\end{aligned}$$

As far as I know, general expressions such as these have not been given before; but the leading term (mass quadrupole) was given by Peters (1964), [2] and the next two terms (current quadrupole and mass octupole) were given by Cooperstock and Booth (1969).

17.6.5 E. Discussion

Of what use are the above formulas? I view them as tools to be used in studying the generation of gravitational waves from explicit sources: Given a source, one identifies the local wave zone. Using any technique one can dream up (and this is the tough part of the analysis!), one calculates the time-changing multipole moments of the source. One then plugs into the above for mulas to get the radiation field and the rate it carries off energy, momentum, and intrinsic angular momentum.

As an alternative application, one can calculate the radiation field of a given source (the tough task; above formulas not necessarily useful); one can use Eq. (4.10) or (4.11) to resolve it into multipole pieces; and one can then use the other formulas above to read off the energy, momentum, and angular momentum radiated.

Once the radiation field h_{ij}^{TT} is known in the local wave zone, one can propagate it on outwards to Earth using the propagation equation of the shortwave formalism [MTW, Sec. 35.14 and exercise 35.15; Thorne (1977) last section]. For typical situations the dominant parts of the waveforms (4.3) and (4.8) will remain highly accurate all the way to Earth, except for uninteresting phase shifts caused by background curvature and the waves' self-energy.

Part VI
Appendix

A General Introduction

A.1 Other Motivation to Linear Algebra

(это потом пропишу, уже более-менее понимаю, нет времени писать пока.)

A.1.1 About the Benefits of Linear Algebra

Ответим четко на вопрос, что же дает нам линейная алгебра и зачем её учить?

(по ходу идеи сюда и буду вписывать, вообще, раньше интересовался этим, какие-то соображения интересные были)

Общее развитие как математика

Доказательства в линале часто идут в формате "раз переформулируем утверждение, еще раз переформулируем, и вот - уже и понятно, откуда это следует"

Так что это отличная разминка по математике. Этот же общий подход очень много пользы принесет в на самом деле не очевиных задачах.

(раскрою эту мысль глубже)

A.1.2 Motivation to Sections of Linear Algebra

Мотивация изучать тензорную алгебру

(пропишу её потом, уже понимаю.)

A.2 The Mindset of a Professional in Linear Algebra

A.2.1 Summary of Attachments

(стану умным - опишу нормально)

О приложении к квантовой механике (??)

(вроде там функан, тем не менее, линал нужен, опишу, как)

A.2.2 A Look at Linear Algebra

(мб назову раздел лучше)

Мы просто всегда работаем или с матрицами и строгами/столбцами или с функциями, там все понятно, а потом задаемся вопросами о четких определениях и экзотических случаях, когда простые утверждения не работают, так и изучаем большую часть линала

Потому что чаще всего просто не нужно знать всякие детали. Большинство вообще свойств и лемм основ линейной алгебры просто очевидные. А для приложений нужно просто знать конструкции в 1-4 формулы и все. Это же и знают большинство людей, они один раз прослушали все, ну и не больше, особо в деталях они не роются и живут достаточно неплохо, может быть, даже исследованиям занимаются.

Думаю, такой подход и лучше всего, потому что иначе можно долго глючить на основах, при этом само понимание все равно будет сводится к тому, что ты представляешь обычные векторы-столбцы и все.

Часто в приложениях нужны лишь специфические конструкции, для них не так уж нужны основы линала, но для полной уверенности в предмете можно и основы пройти, это совсем не сложно

Так я это и вижу.

Физику без повода про линейную алгебру лучше не думать, трата времени

Потому что мало что получит физик. Иногда вопросы о тензорах возникают, тогда вот и есть повод ее доучить. Или еще о много чем.

Но так вот засиживаться без таких возникших вопросов - точно мало что даст. Лучше уж отдохнуть просто.

О непростоте и неочевидности линейной алгебры (?)

(тоже что тут не нужно недооценивать ее, раскрою эту мысль. уже понимаю, тем не менее, давно в этом ошибался, так что лучше раскрыть эту мысль.)

О важности основ линейной алгебры

В бакалавре я их быстро пробегал, потому что думал, что они очевидны и не нужны, после бакалавра стал сидеть и переделывать, потому что сам четко я не мог все выдавать.

(тут раскрою, почему и насколько основы линала важны и зачем эти главы прорабатывать. по факту они у меня самые первые в части про теорию, и неправильно было бы перескакивать их! потом напишу.)

о представлении о линейной алгебре вне контекста матриц

(очень важный взгляд, опишу тут его, сперва овладеть бы им.)

о необходимости рассматривать произвольные поля

A.2.3 On Solving Problems in Linear Algebra

О элементарных задачах на матрицы

О тренировочных задачах на матрицы с многими параметрами

Если в матрице много нулей, то собственные значения могут найтись покомпонентно. Вообще может не нужно использовать матричную формул.

A.2.4 On the Study of Linear Algebra

(мб назову раздел лучше)

Учебники по ней не очень

Кострикин - вода и какие-то бесполезные утверждения. Всё переписывать придется. (раскрою потом это)

A.3 Acknowledgements

Currently, no one except me has worked on the sections of this note (with the exception of sections taken from books).

A.4 Literature

A.4.1 Main Literature

Basic Educational Literature

Ершов Лекции по линейной алгебре old.mipt.ru/education/chair/mathematics/study/uchebniki/РҲСЃСЇР«Рў_РЊ_РЊРѲ(2).pdf

Много задач, много примеров, хороший конспект, большАя часть этой записи - это его конспект.

Веклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учеб. для вузов. - 10-е изд., испр. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 304 с. - ISBN 5-9221-0304-0.

Известный физтеховский учебник, не думаю, что имеет смысл другой вообще открывать для минимального уровня.

[?] Кострикин А. И. Введение в алгебру часть 2

пока основная книга, много хороших конструкций, но в ней только основы. но итак хватит работы только по ней.

Books With Many Solved Problems

Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре

Основной задачник, из которого я и прорешивал задачи.

А. А. Арутюнов, А. В. Ершов Дополнительные задачи по линейной алгебре

Вроде есть интересных много задач, потом добавлю их. Но маловероятно, что эти задачи понадобятся, так что смотреть их есть смысл, только если базовые задачи решены и основы усвоены.

A.4.2 In-depth and Complementary Literature

Углубленная

[?] Вавилов Н. Не совсем наивная линейная алгебра: модули и линейные отображения

очень хорошо написана углубленная живая теория и всего 128 страниц. как сделаю основное - начну её. потом мб другие книги Вавилова почитаю.

[5] Кострикин А. И. Манин Ю. М. Линейная алгебра и геометрия

самая интересная и прикладная книга, так что ее в начало ставлю записи.

Karim M. Abadir, Jan R. Magnus Matrix Algebra

Шикарный справочник по свойствам матриц, много свойств. Однако, не уверен, что полезно будет в нем рыться, скорее всего если задача будет решаться методами, которые можно найти в учебниках и статьях, а не какой-то невиданной специалистами в этой области спецификой из этой книги. Поэтому не до неё.

Дополнительная

Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра

просто учебник, запросто берется, потом добавлю его везде в запись. Пока лень смотреть, потому что итак много где все написано.

[?] И. Л. Бухбиндер Релятивистская Симметрия

[?] Алгебры Клиффорда и спиноры Широков Д. С

[?] Яковлев Функциональные пространства.

О численных методах

(мб много теории тут будет, посмотрим.)

[?] Е. Н. Аристова, Н. А. Завьялова, А. И. Лобанов "Практические занятия по вычислительной математике"

Математическая литература в помощь

[?] кострикин 3

[3] Винберг "Алгебра"

мб допишу, но в основном она в записе по алгебре написано.

[?] Хамфрис алгебра и алгебра ли

Очень маловероятно, что открою, и только по потребности

Про матрицы

Грантмахер теория матриц

помню, никак не дойду до неё.

Про тензорную алгебру

(тут много книг и методичек будет)

Про спиноры

(? это алгебра или линейная алгебра, так и не понял)

[?] Лекции курса Р.С. Авдеева и А.И. Буфетова «Спиноры»

спиноры важно изучить, вообще, они часть именно общей алгебры, однако и в линейной про них пару слов сказать нужно

A.4.3 Articles About Different Methods and Properties

Статьи о матрицах

[2] Kenneth S. Miller On the Inverse of the Sum of Matrices

Очень скорее всего полезная теорема тут доказана, вообще, такое в учебниках должно быть.

[1] H. V. Henderson and S. R. Searle On Deriving the Inverse of a Sum of Matrices

Тоже скорее всего какая-то полезная формула выведена.

A.4.4 About Applications to Mathematics

О приложениях к дискретному анализу

(потом если нужно будет, займусь ими)

Райгородский А. М. Линейно-алгебраический метод в комбинаторике

тоже отдельные темы от райгора, которые хорошо бы поднять. потом подниму. помню, что они крутые и они есть, много таких отдельных теорем. отдельная заморочка на пару недель - понять эти теоремы. так что не до них сейчас.

Juri Matousek Tirty-tree miniatures mathematical and algoritmic applications of linear algebra

интересная книга, и там правда некоторые конструкции очень интересны. Займусь ей позже, когда захочу создать связки линала с другой математикой. вообще, связки тут хорошие, сперва просто линал и дискретную математику подтянуть нужно, потом её добавлять в структуру.

Про связи с аналитической геометрией

[?] Euler's fixed point theorem: The axis of a rotation Bob Palais and Richard Palais
Про теорему эйлера разные мелочи, мб потом допишу их.

О вычислительных методах линейной алгебры

(так как вычматы прошел, про них тоже некоторая теория будет. потом доделаю.)
[?]

A.4.5 On Applications to Physics

Книги с вообще приложениями

[?] Катанаев М. О. Геометрические методы в математической физике
а хрен его знает

О приложениях к механике

(их пропишу тоже потом, так что тут книги про это)

Статьи о различных теоремах и методах в физике

F. Nicacio Williamson theorem in classical, quantum, and statistical physics
Прикольная статья, мб немного полезная теорема, когда-то доучу.

A.5 General Linear Algebra

что вообще в нем происходит?

A.5.1 Structural Overview

появление линейной алгебры

(пока оставленный вопрос, не до него.)

Обзор разделов линейной алгебры

(тут про каждый раздел потом будет)

вкратце, какие матрицы есть

есть симметричные матрицы $A = A^*$, есть нормальные матрицы $A^*A = AA^*$

можно узнавать сразу, как оценивать собственные значение с помощью кругами Гирхголина или что-то такое. (????)

Обзор задач

(какие вообще есть, как решать их. обзор многих глав ниже.)

A.5.2 Overview of Physical Applications of Linear Algebra

какие есть и почему они возникают?

A.5.3 Overview of Non-physical Applications of Linear Algebra

A.6 Links With Other Sciences

Обсудим связи с разделами
(потом раскрою)

A.6.1 With Functional Analysis

(тоже распространенный вопрос, как же эти предметы связаны. отвечу подробно)

A.7 Description of Record

Описание записи в целом

(в конце напишу)

Обозначения

(тут их много может быть, потому что линал вводит нас во многие разделы математики!)
На протяжении всего курса нам приходилось иметь дело с такими общими математическими понятиями, как векторное пространство V над $\mathfrak{K}$, сопряжённое (или двойственное, дуальное) к V пространство V^* линейных форм, пространство $\mathcal{L}_2(V, \mathfrak{K})$ билинейных форм на V, пространство $\mathcal{L}(V) := \mathcal{L}(V, V)$ (часто обозначаемое End V или $\mathrm{Hom}(V, V)$) линейных операторов на V и т.п.

О теории для численных методов

(эти разделы тоже будут, потому что вычматы все-таки прошел я.)

приложения

какие вообще приложения я разбирал?

A.8 Questions and Topics of Linear Algebra for Talking

(всякое есть интересное, будет нечего делать - соберу)

A.8.1 Ideological Questions of Linear Algebra

(пока не такой уровень, потом мб пойму, особенно если Вавилова почитаю.)

A.8.2 Interesting Problems of Linear Algebra

(выберу потом)

A.8.3 Common False Beliefs in Linear Algebra

(полно всякого, однажды, может, напишу)
(see stack exchange for example https://mathoverflow.net/questions/23478/examples-of-common-false-beliefs-in-mathematics/27269#27269)
Some false beliefs in linear algebra:

* If two operators or matrices A, B commute, then they are simultaneously diagonalisable. (Of course, this overlooks the obvious necessary condition that each of A, B must first be individually diagonalisable. Part of the problem is that this is not an issue in the Hermitian case, which is usually the case one is most frequently exposed to.)

* The operator norm of a matrix is the same as the magnitude of the most extreme eigenvalue. (Again, true in the Hermitian or normal case, but in the general case one has to either replace "operator norm" with "spectral radius", or else replace "eigenvalue" with "singular value".)

* The singular values of a matrix are the absolute values of the eigenvalues of the matrix. (Closely related to the previous false belief.)

* If a matrix has distinct eigenvalues, then one can find an orthonormal eigenbasis. (The orthonormality is only possible when the matrix is, well, normal.)

* A matrix is diagonalisable if and only if it has distinct eigenvalues. (Only the "if" part is true. The identity matrix and zero matrix are blatant counterexamples, but this false belief is remarkably persistent nonetheless.)

* If $\mathcal{L} : X \to Y$ is a bounded linear transformation that is surjective (i.e. $\mathcal{L}u = f$ is always solvable for any data f in Y), and X and Y are Banach spaces then it has a bounded linear right inverse. (This is subtle. Zorn's lemma gives a linear right inverse; the open mapping theorem gives a bounded right inverse. But getting a right inverse that is simultaneously bounded and linear is not always possible!)

B Some math to help

B.1 Elements of General Algebra

мб потом понадобятся, я хз

B.2 Elements of Group Theory

мб потом понадобятся, я хз

C Bibliography

References

[1] H. V. Henderson and S. R. Searle. On deriving the inverse of a sum of matrices. *SIAM Review*, 23(1):53–60, 1981.

[2] Kenneth S. Miller. On the inverse of the sum of matrices. *Mathematics Magazine*, 54(2):67–72, 1981.

[3] Э. Винберг. *Курс алгебры.* Litres, 2017.

[4] А. И. Кострикин. Введение в алгебру. Линейная алгебра. *М.: Физматлит*, 2001.

[5] Манин Ю. И. Кострикин, А. И. *Линейная алгебра и геометрия.* "Наука", 1986.

Литература from Arutunov, Ershov

[1] Алания Л. А. и др. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / под редакцией Ю.М. Смирнова / Изд. 2-е, перераб. и доп. - М.: Логос, 2005.-376 с.
[2] АржанцеВ И. В. И ДР. Сборник задач по алгебре /под редакцией А.И. Кострикина /- М.: МЦНМО, 2009.-408 с.
[3] Арнольд В. И. Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. - М.: МЦНМО, 2002.-40 с.
[4] Арнольд В. И. Математические методы классической механики: учебное пособие. Изд. 5-е, стереотипное.- М.: Эдиториал УРСС, 2003.-416 с.
[5] Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - Новое изд., исправл.- М.: МЦНМО, 2012.-344 с.
[6] Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., ЧуБаров И. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: учебн. пособие / под ред. Д.В. Беклемишева 2-е изд., перераб. - М.: Физматлит, 2012.-796 с.
[7] Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учеб. для вузов. - 12-е изд., испр. - М.: Физматлит, 2009. - 312 с.
[8] Беклемишев Д. В Решение задач из курса аналитической геометрии и линейной алгебры. - М.: Физматлит, 2014. 192 с.
[9] Беклемишев Д. В. Дополнительные главы линейной алгебры. - М.: Наука. Главная редакция физикоматематической литературы, 1983. – 336 с.
[10] Бесов О. В. Лекции по математическому анализу. - М.: Физматлит, 2014. - 480 с.
[11] БуРЦев А. А. Элементы математической кибернетики и дискретной математики: учеб. пособие. - М.: МФТИ, 2012. -160 с.
[12] ВинБерг Э. Б. Курс алгебры. - 2-е изд., стереотип.- М.: МЦНМО, 2013.-592 с.
[13] Виньерг Э. Б., Демидов Е. Е., Шварцман О. В. Задачи по алгебре. - М.: МЦНМО, 1997.-56 с.
[14] ГАйфуллин А. А., Пенской А. В., Смирнов С. В. Задачи по линейной алгебре и геометрии.- М.: МЦНМО, 2014. -152 с.
[15] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. - М.: Наука, 1966.576 с.
[16] Городенцев А. Л. Алгебра. Учебник для студентовматематиков. Часть 1.- М.: МЦНМО, 2013.-488 с.
[17] ЕРШов А. В. Категории и функторы: учебное пособие. Электронный адрес: window.edu.ru/resource/165/77165
[18] Ершов А. В. Функторные морфизмы: учебное пособие. Электронный адрес: window.edu.ru/resource/166/77166
[19] Зорич В. А. Математический анализ. Часть II. - 6-е изд., дополн. - М.: МЦНМО, 2012.-818 с.
[20] Игнатьев М. В. Квантовая комбинаторика. // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 18 М.: МЦНМО, 2014. С. 66-111.
[21] КАссель К. Квантовые группы - М.: ФАЗИС, 1999.-698 с.

[22] Кириллов А. А. Что такое число? - М.: Физматлит, 1993.-80 с.
[23] Кириллов А. А. Элементы теории представлений. - М.: Наука, 1978.-343 с.
[24] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа - М.: Наука, 1976 – 543 с.
[25] Кострикин А. И. Введение в алгебру. Ч. I. Основы алгебры. - Новое издание. - М.: МЦНМО, 2009.-272 с.
[26] Кострикин А. И. Введение в алгебру. Ч. II. Линейная алгебра. - Новое издание. - М.: МЦНМО, 2009.-368 с.
[27] Кострикин А. И. Введение в алгебру. Ч. III. Основные структуры алгебры. - Новое издание. - М.: МЦНМО, 2009.-272 с.
[28] Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980.-320 с.
[29] Ландо С. К. Введение в дискретную математику.- М.: МЦНМО, 2012.-265 с.
[30] Ландо С. К. Лекции о производящих функциях.- 2-е изд., испр.- М.: МЦНМО, 2004.-144 с.
[31] Петрович А. Ю. Лекции по математическому анализу. Ч.2. Многомерный анализ, интегралы и ряды. М.: МФТИ, 2012. - 268 с.
[32] Понтрягин Л. С. Обобщения чисел.- М.: Наука, 1986. 120 с. (Библиотечка "Квант", выпуск 54).
[33] Прасолов В. В. Задачи и теоремы линейной алгебры.Новое изд., перераб.- М.: МЦНМО, 2015. - 576 с.
[34] Прасолов В. В., Шварцман О. В. Азбука римановых поверхностей.- М.: МЦНМО, 2014.- 148 с.
[35] Сасскинд Л., Фридман А. Квантовая механика. Теоретический минимум.- СПб.: Питер, 2015. - 400 с. - (Серия «New Science»).
[36] ХАРрис Дж. Алгебраическая геометрия. Начальный курс.- М.: МЦНМО, 2006. - 400 с.
[37] Шафаревич И. Р. Основные понятия алгебры.- Ижевск, Ижевская республиканская типография, 1999.-348 с.
[38] Wildon Mark A short proof of the existence of Jordan Normal Form.www.math.vt.edu/people/renardym/class_home/Jordan.pdf