

# Gravitational Lensing of Binary Systems

## Bachelor's Thesis

Yury Holubeu \*

February 1, 2025

## Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theory</b>	<b>5</b>
2.1	Lensing equation using path integral approach	5
2.2	Simple model of a binary lens	7
2.3	Other binary models	10
2.3.1	Система “double generic peak”	10
2.3.2	Система “double degenerate peak”	10
2.3.3	Система “double elliptic umbilic”	11
2.4	Applications of binary models in observations	12
<b>A</b>	<b>Appendix</b>	<b>13</b>
A.1	Wave equation in a curved space-time	13
A.2	Singular lenses: some examples	14
A.3	Useful Mathematics and Programming	19
A.3.1	Элементы особенностей дифференцируемых отображений	19
A.3.2	Континуальный интеграл	21
A.3.3	Pickard-Lefshits method in a nutshell	21
A.3.4	Algorithms and Programming Codes	24

---

\*<https://yuriholubeu.github.io/>, yuri.holubev@gmail.com

## Abstract

The effects of wave optics in gravitational lensing for some simple models binary gravitational lenses are studied. In the geometrical optics approximation, lensing results can be predicted based on the theory of Lagrangian maps. To study the effects of wave optics, the amplification factor of the gravitational lens is calculated, which is determined by an oscillating double integral over real variables with an integrand, containing a complex fluctuating phase. According to the Picard-Lefshitz theory, such an integral is equivalent to the sum of integrals over special manifolds in a complex space, the so-called Lefshitz thimbles, each of which has a fixed complex phase factor. In this work, the amplification factor for binary gravitational lenses was evaluated using numerical integration over Lefschetz thimbles. For considered models of gravitational lenses intensity plots were obtained with different values of parameters.

TODO:

add more intuition about basic concepts here!!! explain better what goes on there!

# 1 Introduction

Метод гравитационного линзирования позволяет получить информацию о гравирующих объектах по картине искажения лучей света в их гравитационном поле. С помощью гравитационного линзирования можно измерять гравитационный потенциал вне зависимости от того, какое вещество его создает. В частности, в результате анализа искажения образов удаленных галактик вследствие гравитационного линзирования был сделан вывод о существовании темной материи.

В 1936 г. А. Эйнштейн сделал оценку линзирующего действия звезды при отклонении света в ее гравитационном поле и пришел к выводу, что "нет никакой надежды наблюдать это явление напрямую" [19]. Тем не менее, первая гравитационная линза была открыта 1979 году Уолшем, Каррсвеллом и Вейманом [18]. С тех пор теория гравитационного линзирования стала быстро развиваться.

В своем расчете Эйнштейн рассматривал звезду как точечную массу. В настоящее время существуют разные модели гравитационных линз. Рассматривается гравитационное линзирование не только отдельными звездами, но и галактиками и скоплениями галактик. При этом модель линзы выбирается в соответствии с наблюдательными данными.

Для конкретной модели линзы результаты линзирования могут быть предсказаны на основе теории лагранжевых особенностей, развитой в работах В.И. Арнольда [21]. Можно предсказать число и вид изображений линзируемого объекта.

С другой стороны, анализируя данные астрономических наблюдений, можно делать выводы о распределении линзирующей материи и ее массе. При интерпретации результатов гравитационного линзирования можно пользоваться геометрической оптикой, что соответствует пределу бесконечной частоты. Однако, приближение геометрической оптики не работает вблизи сингулярности отображения линз (каустики), где это приближение дает бесконечную яркость для точечного источника. Этую проблему можно обойти, применяя волновую оптику.

При расчете интенсивности излучения в задачах гравитационного линзирования, а также в других задачах волновой оптики и квантовой механики, приходиться иметь дело с интегралами от быстро осциллирующих функций. Согласно теории Пикара-Лефшеца интеграл по вещественным переменным с подынтегральной функцией, содержащей комплексную флюктуирующую фазу, эквивалентен сумме интегралов по специальным многообразиям в комплексном пространстве ("наперстки Лефшеца"), каждый из которых имеет фиксированный комплексный фазовый множитель [24].

Интерес к теории Пикара-Лефшеца возрос после статьи Е. Виттена [25] о новом подходе к вычислению интеграла по путям в квантовой механике. Обсуждаются, например, приложения этой теории к вычислению лоренцевых континуальных интегралов в задачах квантовой теории поля [?] и квантовой космологии [12].

В данной работе метод Пикара-Лефшеца используется в приложении к задаче гравитационного линзирования. Для того чтобы найти фактор усиления гравитационной линзы, вычисляется сильно осциллирующий двукратный интеграл типа интеграла Френеля-Кирхгофа [26]. Рассматриваются несколько моделей гравитационных линз. Для каждой модели численно находятся наперстки Лефшеца, после чего вычисляется фактор усиления и строятся распределения интенсивности, возникшие в результате гравитационного линзирования.

Работа во многом опирается на статьи Дж. Фельбрюгге и Н. Турока с соавторами [13], [12], идея которых публиковалась достаточно давно в [23]. Также большое влияние на работу оказала статья Т. Накамуры и др. [2]. Предмет изучался также по [9], были рассмотрены некоторые экспериментальные статьи, такие как [11], [8].

Была сделана попытка дополнить недавнее исследование этих авторов, посвященное

линзированию в бинарных системах [1], а также развить, разработанные ими вычислительные методы [см. <https://p-lpi.github.io/glwo.html>]. Их программный код, предоставленный на сайте [см. <https://p-lpi.github.io/>], лег в основу кода, численно моделирующего дифракционных картин линзирования в представленной бакалаврской работе. Физическая теория, используемая в работе, обсуждается, например, в [3], [? ], математическая - в книге Арнольда В. И. и др. [24].

## 2 Theory

НУЖНО ДОБАВИТЬ ГОРАЗДО БОЛЕЕ ЛУЧШЕЕ ПОЯСНЕНИЕ ОСНОВ. ПОКА НЕПОНЯТНО ВООБЩЕ, КАК РАБОТАЕТ ФИЗИКА ЗА ФОРМУЛАМИ!

В данной главе вкратце приведены ключевые выкладки теории линзирования, которая используется для моделирования в последней части, а также разобраны минимальные примеры для иллюстрации. Поскольку волновая оптика является более фундаментальной, чем геометрическая оптика, начнем построение теории гравитационных линз на основе именно ее и без привязки ко второй.

### 2.1 Lensing equation using path integral approach

#### Formalism of lensing

Einstein's theory of gravity underlies our understanding of the cosmos, and describes many remarkable phenomena including black holes, gravitational waves and gravitational lensing. Each is of great interest in its own right and has the potential to reveal new physics. In this Letter, we re-examine gravitational lensing in wave optics [? ? ? ]. Despite its ubiquity and universality, it has not yet been observed. Two recent developments have excited renewed attention [? ? ? ? ]. Gravitational microlensing studies have revealed thousands of lenses including many exoplanets [? ? ]. Fast Radio Bursts (FRBs) and pulsars are being detected in increasing numbers [? ]. These coherent, pointlike sources could allow us to observe interference effects in gravitational lensing for the first time.

The gravitational lensing of light from a distant source by a point mass  $M$  is characterized by the Einstein angle,  $\theta_E = \sqrt{2R_S/d}$ , with  $R_S = 2GM/c^2$  the Schwarzschild radius and  $d$  the lens-observer distance [? ]. A ray optics description applies for wavelengths  $\lambda$  much smaller than any relevant scale. Consider two initially parallel light rays. Their separation at the lens,  $d\theta_E$ , may be treated as that of a Young's double slit experiment. The fringe separation  $\lambda/\theta_E$  is of order the classical deflection  $d\theta_E$ , for  $\lambda \sim R_S$ . Equally,  $\lambda$  is then of order the path difference  $\sim R_S$ . For lens masses from planets to stars,  $R_S$  ranges from millimeters to kilometers so one might hope to observe wave optics effects with radio telescopes at these wavelengths.

To observe the interference fringes, the observational aperture must be *smaller* than the fringe separation  $\lambda/\theta_E$ . This is the condition that the two lensed images are *not* resolved. The situation is like Young's experiment, where one cannot both see the interference fringes and tell which slit the photon passed through. Remarkably, in the lensing of coherent point sources, like pulsars and FRBs, such effects operate over galactic, or even cosmological, scales.

Interference patterns like those relevant here are surprisingly hard to compute. The required Fresnel-Kirchhoff integrals are highly oscillatory and their convergence is delicate. This difficulty has thwarted detailed calculations in all but the simplest case, of lensing by a single, isolated point mass [? ]. Unfortunately, that case is too simple, lacking the intricate caustic structure of generic examples. Nor is it typical observationally, since most stars and planets occur in bound systems. Recently, we have overcome this barrier by developing an efficient generalization of stationary phase methods, exploiting Picard-Lefschetz theory [? ]. The idea is to flow the original, real integration contour onto a set of complex "Lefschetz thimbles," each associated to a saddle point. Cauchy's theorem ensures the original integral is equivalent to a sum of absolutely convergent integrals. In Ref. [? ] we considered lensing phases meromorphic in the lens plane coordinates. Here, we generalize this to include logarithmic singularities. Whilst our main focus is on theoretical aspects, at the end we comment briefly on observational prospects.

The gravitational lensing of coherent, monochromatic radiation with angular frequency  $\omega$  may be treated quantum mechanically, as a path integral for a photon of fixed energy  $E = \hbar\omega$ .

Consider a perturbed spacetime, with  $ds^2 = -(1+2U(\mathbf{r}))dt^2 + (1-2U(\mathbf{r}))d\mathbf{r}^2$ ,  $U(\mathbf{r})$  being the gravitational potential (in units where  $c=1$ ). The worldline action for a particle of mass  $m$  is  $-m \int ds$ . For fixed initial energy  $E$  we must add a boundary term  $+E(t_f - t_i)$ , with  $t_i$  and  $t_f$  the initial and final times [? ]. The canonical momentum  $\mathbf{p}$  obeys  $\mathbf{p}^2/(1-2U) + m^2 = E^2/(1+2U)$ . Taking  $m \rightarrow 0$ , to first order in  $U$  the action becomes

$$\mathcal{S} = \int \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r} \approx E \int |d\mathbf{r}| (1 - 2U(\mathbf{r})). \quad (1)$$

The quantum amplitude we seek is an integral over all paths from the source to the observer, weighted by  $e^{i\mathcal{S}/\hbar}$ . For small angles, and where the particle's deflection occurs over a relatively small region, one can use the thin lens approximation. To first order, there are two contributions to (1). First, the Euclidean length of the lensed path (see Fig. 1) exceeds that of a straight line from source to observer by  $\approx \frac{1}{2}|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_{ls}|^2 r_{lo} r_{os} / (r_{os} - r_{lo})$ . Second, the line integral of the potential  $\int dr U(\mathbf{r})$ , with  $U = -GM_i/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|$  for a mass  $M_i$  at  $\mathbf{r}_i$  is, for small  $|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_i|$ , approximated by  $2GM_i \ln |\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_i|$ , up to a constant. Expressing angles in terms of the Einstein angle,  $\boldsymbol{\theta} \equiv \theta_E \mathbf{x}$  and  $\boldsymbol{\theta}_{ls} \equiv \theta_E \mathbf{y}$ , with  $\theta_E \equiv \sqrt{4GM(r_{os} - r_{lo})/(r_{lo}r_{os})}$  and  $M$  the total mass, the path integral amplitude, normalized to unity in the absence of a lens, becomes

$$\Psi[\mathbf{y}] = \frac{\Omega}{2\pi i} \int_{\mathbf{x}} e^{i\Omega(\frac{1}{2}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2 + \varphi(\mathbf{x}))}. \quad (2)$$

Here,  $\Omega \equiv 4GM\omega$ ,  $\varphi(\mathbf{x}) \equiv -\sum_i f_i \log |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|$ ,  $f_i$  is the mass fraction and  $\mathbf{x}_i$  the location of each lensing mass and  $\int_{\mathbf{x}} \equiv \int d^2\mathbf{x}$  is the integral over the lens. Even a weak gravitational potential can have a large, nonperturbative effect, represented by nontrivial saddles in (2), since the lensing effect accumulates over large distances. Above, the angular positions of the lens masses were assumed fixed. If, instead, they drift together across the sky,  $\mathbf{x}_i \rightarrow \mathbf{x}_i + \mu t$ , the amplitude is translated:  $\Psi[\mathbf{y}] \rightarrow \Psi[\mathbf{y} - \mu t]$ .

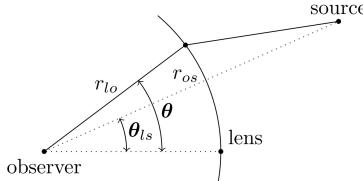


Figure 1: Geometry of interfering paths.

Imagine restricting the integral over the lens to an area  $A$ , *i.e.*, masking the area outside  $A$ . The integrated intensity,  $\int_{\mathbf{y}} |\Psi[\mathbf{y}]|^2 = A$ , independent of  $\varphi(\mathbf{x})$ . This is *unitarity*, which ensures that lensing preserves the total energy flux.

At large  $\Omega$ , ray optics applies. Multiplying (2) by its complex conjugate, with  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'$ , and setting  $\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}' + \mathbf{x})$ ,  $\Delta = \frac{1}{2}(\mathbf{x}' - \mathbf{x})$  gives

$$\frac{\Omega^2}{4\pi^2} \int_{\mathbf{u}, \Delta} e^{-i\Omega(\varphi(\mathbf{u}+\Delta) - \varphi(\mathbf{u}-\Delta) + 2\Delta \cdot (\mathbf{u}-\mathbf{y}))} \quad (3)$$

for the intensity  $I$ . Taylor expanding the exponent in  $\Delta$  and rescaling  $\Delta \rightarrow \Delta/\Omega$  leaves the linear,  $\Omega$ -independent term dominant at large  $\Omega$ . Relabelling  $\mathbf{u}$  as  $\mathbf{x}$ , we obtain

$$I(\mathbf{y}) \approx \int_{\mathbf{x}} \delta(\nabla \varphi(\mathbf{x}) + \mathbf{x} - \mathbf{y}) = \sum_s \frac{1}{|D(\mathbf{x}_s(\mathbf{y}))|}, \quad (4)$$

where  $D(\mathbf{x}) = \det(\delta_{ij} + \partial_i \partial_j \varphi(\mathbf{x}))$ ,  $i, j = 1, 2$ , and derivatives are taken wrt the indicated argument. The sum runs over solutions  $\mathbf{x}_s(\mathbf{y})$  to

$$\nabla \varphi(\mathbf{x}) + \mathbf{x} - \mathbf{y} = 0, \quad (5)$$

i.e., the saddle point equation for the amplitude (2). Although we derived (4) in an approximation, for large  $\Omega$ , it respects unitarity as is seen by integrating the left hand side over all  $\mathbf{y}$ .

To leading order in  $\varphi$ , (5) gives  $\mathbf{x} \approx \mathbf{y}$ . Then  $D(\mathbf{y}) \approx 1 + \nabla^2 \varphi(\mathbf{y})$  and Eq. (4) yields a Poisson-like equation  $-\nabla^2 \varphi(\mathbf{y}) \approx I(\mathbf{y}) - 1$ . Hence, in the high frequency, weak lensing regime one can directly retrieve the lensing phase from the intensity. For gravitational lensing, there is a further simplification. Namely, if  $I(\mathbf{y}) - 1$  is approximated by a sum of delta functions, chosen to match its multipole moments, the solution for  $\varphi$ , being a sum of logarithms, will closely approximate the exact, nonlinear solution. In the large  $\Omega$  limit, equations (4) and (5) form the basis of an iterative retrieval algorithm for  $\varphi$ . Later, we shall discuss how  $\Omega$  may also be retrieved.

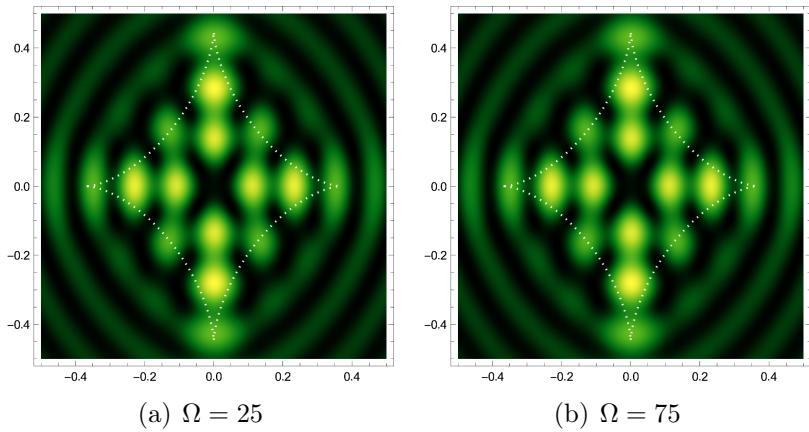


Figure 2: Single lens with shear  $\gamma = 0.2$ . Caustic curve shown dotted in white.

For a single gravitational lens,  $\varphi(\mathbf{x}) = -\ln x$  and  $D(\mathbf{x}) = 1 - 1/x^4$ . Eq. (5) has two solutions,  $\mathbf{x}_{\pm} = \frac{\mathbf{y}}{2y}(y \pm \sqrt{4+y^2})$ , corresponding to two classical rays. One passes through  $\mathbf{x}_+$ , on the same side as the source and outside the Einstein ring  $x = 1$ . This ray dominates the intensity in the weak lensing regime. The other ray passes through  $\mathbf{x}_- = -\mathbf{x}_+/x_+^2$ , on the opposite side of the lens and inside the Einstein ring. Inserting these into (4), we obtain  $I = (2+y^2)/(y\sqrt{4+y^2})$ . In wave optics, (2) yields  $I = \frac{\pi\Omega}{1-e^{-\pi\Omega}} |{}_1F_1(i\Omega/2, 1; i\Omega y^2/2)|^2$ , with  ${}_1F_1$  a confluent hypergeometric function, which approaches the ray optics result at large  $\Omega$  [?].

As a step towards greater realism, we add a background, shear potential so  $\varphi(\mathbf{x}) = -\ln |\mathbf{x}| - \frac{1}{2}\gamma(x_1^2 - x_2^2)$  [?]. The additional term could, for example, represent the tidal force from a second mass. There are four saddle point solutions to (5), with two or four being real depending on whether  $\mathbf{y}$  is outside or inside the caustic curve (the locus in  $\mathbf{y}$  where  $D(\mathbf{x})$  vanishes). We perform the lensing integral (2) by passing to polar coordinates  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = r(\cos \theta, \sin \theta)$ . Only the radial integral is subtle because it involves an infinite number of oscillations. We flow the  $r$  contour onto the relevant Lefschetz thimbles, and then integrate over  $r$  and  $\theta$  numerically. Typical intensity maps are shown in Fig. 2.

### The meaning of the plots

I'll state it again!!! a very important thing!!! big emphasis on this!

## 2.2 Simple model of a binary lens

For a binary lens, we take  $\varphi(\mathbf{x}) = -f_1 \log |\mathbf{x} + \mathbf{r}| - f_2 \log |\mathbf{x} - \mathbf{r}|$ , with  $f_1 + f_2 = 1$ ,  $f_1 > f_2$  and  $\mathbf{r} = (a, 0)$ . As an example, we take  $f_1 = 2f_2$ ,  $a = \frac{1}{2}$ . The caustic curve  $\mathcal{C}$  is shown in white in Fig. ??(a). For each  $\mathbf{y}$ , Eq. (5) has five roots for  $\mathbf{x}$ . All are real for  $\mathbf{y}$  inside  $\mathcal{C}$ . As  $\mathbf{y}$  approaches  $\mathcal{C}$  from within, we encounter a *fold* singularity, where two saddles merge, or a *cusp* singularity, where three saddles merge. At these singularities, the ray optics intensity diverges. As  $\mathbf{y}$  passes outside  $\mathcal{C}$ , the intensity drops, very sharply at a fold and as a “whisker” with  $I \propto (\Delta y)^{-1}$  beyond a cusp. The leftmost and rightmost cusps are the brightest.

Простейший случай бинарной системы - это случай двух масс, расположенных на расстоянии друг от друга. Удивительно, что хотя одна масса давала несложные графики интенсивности, для двух масс получаются достаточно интересные картины, на которых здесь остановимся.

### Модель бинарной линзы из двух масс

Амплитуда фактора усиления интенсивности  $\Psi(\beta; \nu)$ , зависящая от параметров  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$  и  $\nu$ , имеющая вид интеграла по приведенным координатам  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,

$$\Psi(\beta; \nu) = \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu((\mathbf{x}-\beta)^2 + \varphi(\mathbf{x}))} d\mathbf{x},$$

в случае системы двух масс имеет фазовое слагаемое вида

$$\varphi(\mathbf{x}) = -f_1 \log |\mathbf{x} - \mathbf{r}| - f_2 \log |\mathbf{x} + \mathbf{r}|,$$

при параметрах  $f_1 + f_2 = 1$ , соответствующим приведенным массам. Здесь  $r = (a_1, a_2)$  - расстояние от центра плоскости до линзирующих масс.

Рассмотрим случай нахождения одной в координатах  $(a, 0)$ , и другой в  $(-a, 0)$ , а также их массовом соотношении  $f_1 = 2f_2$ . Потенциал примет упрощенный вид:

$$\varphi(\mathbf{x}) = -f_1 \log \sqrt{(x_1 - a)^2 + x_2^2} - f_2 \log \sqrt{(x_1 + a)^2 + x_2^2},$$

В таком случае каждого  $\beta$ , имеется пять корней  $x$ , все они вещественные для  $\beta$  внутри  $\mathcal{C}$ .

Так как  $\beta$  подходит к  $\mathcal{C}$  изнутри, мы имеем особенность типа *fold*, где две точки экстремума перекрываются, или особенность типа *cusp*, когда пересекаются три точки.

На таких особенностях интенсивность от лучевой оптики расходится.

Если  $\beta$  находится вне каустической кривой  $\mathcal{C}$ , интенсивность падает очень быстро с  $I \propto (\Delta\beta)^{-1}$ .

Самые левые и самые правые точки каустики самые яркие.

Применяя описанные выше методы, приведем интенсивность в такой простейшей модели. Видим, что в отличие от одиночной линзы, в геометрическом подходе присутствуют немалые области, в которых число изображений больше обычного. Волновая картина, то есть картина при низких частотах, позволяет видеть, что если отдалить центры друг от друга, то мы получим результирующую картину, как будто нет волнового дополнительного влияния обоих масс на свет, за счет их близкого расположения.

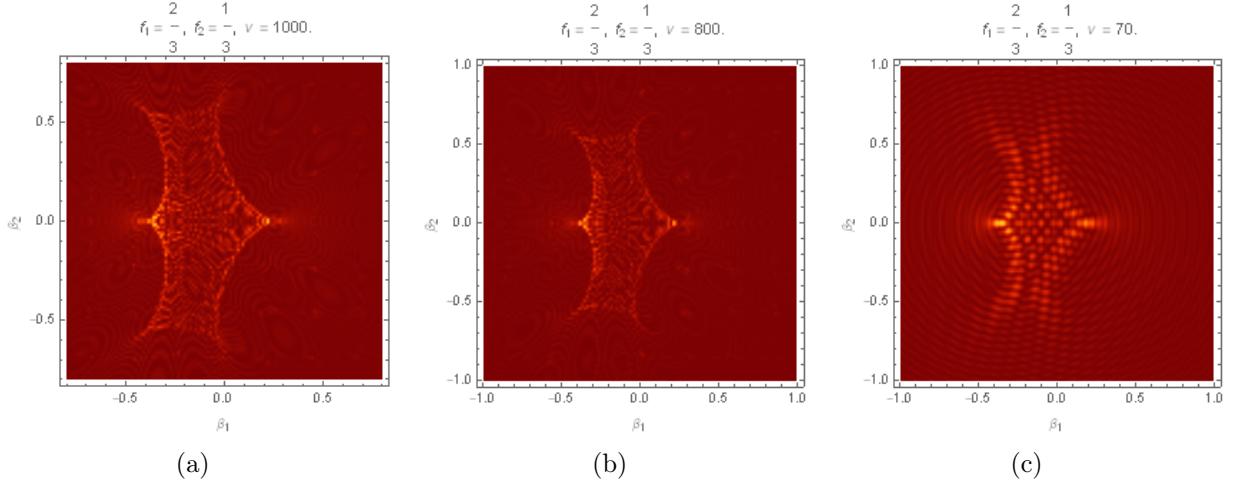


Figure 3: Интенсивность системы из двух масс с соотношением  $f_1 = \frac{2}{3}, f_2 = \frac{1}{3}$  для разных частот. ??  $\nu = 1000$ , ??  $\nu = 800$ , ??  $\nu = 70$ .

Видим, что при больших частотах формируется каустика, а при малых - интерференционная картина, соответствующая волновому описанию линзирования.

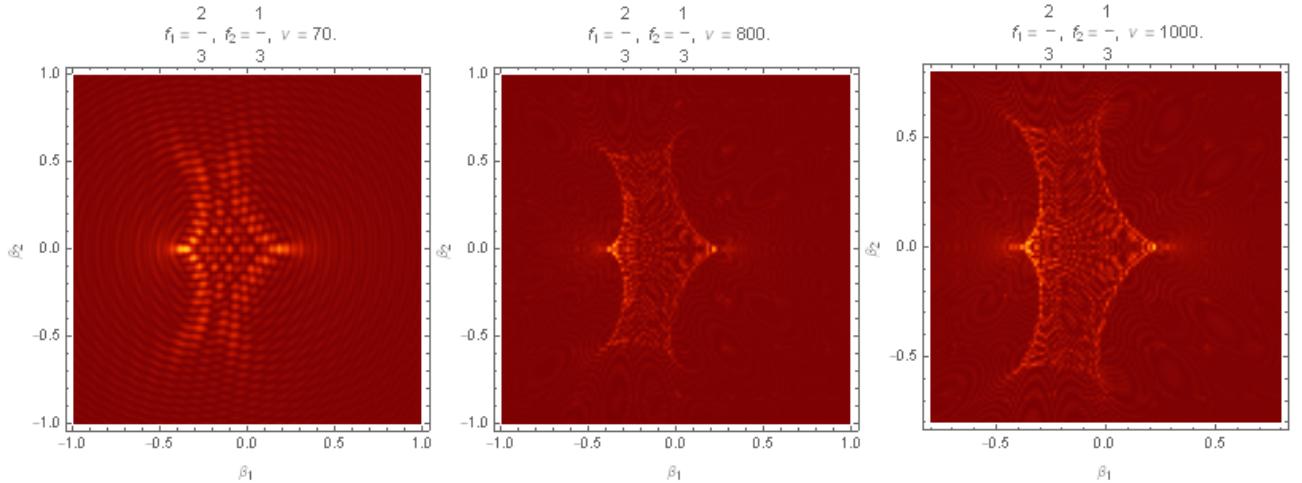


Figure 4

For a wave optics treatment, we use elliptic polar coordinates with foci at  $\pm \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{x}(\tau, \sigma) = a(\cosh \tau \cos \sigma, \sinh \tau \sin \sigma)$ , with  $0 < \tau < \infty$  and  $0 < \sigma \leq 2\pi$ . At each  $\sigma$ , we flow the  $\tau$  contour onto the relevant Picard-Lefschetz thimbles, before integrating over  $\tau$  and  $\sigma$  numerically. It is convenient to extend the  $\tau$  integral to the real line before analytic continuation. It becomes

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\Omega\left(\frac{1}{2}(x(\tau,\sigma)-y)^2 + \varphi(\tau,\sigma)\right) + \ln J(\sigma,\tau)}, \quad (6)$$

with  $\varphi(\tau, \sigma) = -f_1 \log(aC_+) - f_2 \log(aC_-)$ ,  $C_{\pm} = \cosh \tau \pm \cos \sigma$ ,  $J(\tau, \sigma) = \frac{a^2}{2}(\cosh 2\tau - \cos 2\sigma)$ . At real  $\sigma$ , the integrand is periodic in  $\text{Im}(\tau)$  with period  $2\pi$ , with five complex saddle points in the strip  $-\pi \leq \text{Im}[\tau] < \pi$ . For each  $\sigma$ , there are branch points at  $\tau = \pm i\sigma$ ,  $\pm i(\sigma - \pi)$  and  $\pm i(\sigma - 2\pi)$ , where the exponent in (6) diverges. We take the branch cuts to run away from the origin. When the integrand is analytically continued, the integral has two wedges of convergence, which asymptote to  $\tau = -\infty - i\frac{\pi}{4}$  and  $\tau = +\infty + i\frac{\pi}{4}$ . The relevant Picard-Lefschetz thimbles are found by flowing the  $\tau$  contour. The final intensity is shown in Fig. ??.

Near the leftmost and rightmost cusps, the pattern resembles that for a point lens in a shear field. For further details and a selection of intensity maps, see [? ].

The lensing amplitude (2) has the following remarkable mathematical property. It may be viewed as a unitary transformation  $(\Omega/2\pi i) \int_{\mathbf{x}} e^{i\frac{1}{2}\Omega(\mathbf{y}-\mathbf{x})^2}$  of the phase  $e^{i\Omega\varphi(\mathbf{x})}$ . The inverse transformation is  $i \int_{\mathbf{y}} e^{-i\frac{1}{2}\Omega(\mathbf{z}-\mathbf{y})^2}$ . Applying the latter to  $\Psi[\mathbf{y}]$  yields  $e^{i\Omega\varphi(\mathbf{z})}$ , with an exactly uniform intensity for *any*  $\varphi(\mathbf{z})$ . Hence  $\Omega$  may be directly recovered from the lensing amplitude. Consider a single point lens first. Perform the inverse transformation at  $\Omega' = \Omega + \Delta$ , with  $\Delta > 0$ . One obtains the single lens pattern scaled by  $\sqrt{\Delta/\Omega}$ . As  $\Delta \downarrow 0$ , the intensity  $I$  approaches unity everywhere except for a spike at the origin. For  $\Delta < 0$ , one conversely obtains a *hole* in the intensity, effectively due to a negative mass lens, whose size shrinks to zero as  $\Delta \uparrow 0$ . Applied to a multiple point lens, one obtains the corresponding spikes and holes, which disappear at  $\Delta = 0$ . In principle, lens masses and positions can be recovered with extreme accuracy [? ].

Finally, let us turn to observational prospects (see also [? ? ? ? ]). Optical telescopes currently detect around 2000 gravitational microlensing events annually, due to stars in our galaxy. The optical depth (fraction of the sky lensed) by these stars is around  $10^{-6}$ . With large numbers of radio sources - potentially,  $10^4$  or more FRB's per day and up to  $10^5$  pulsars, gravitational lensing events may be seen. In handy units  $\theta_E \approx 1 \text{ mas} (M/M_\odot)^{\frac{1}{2}} (8 \text{ kpc}/d)^{\frac{1}{2}}$  and  $\Omega \approx 1.2 \times 10^5 (M/M_\odot) (\nu/\text{GHz})$ , from which the fringe separation angle  $\theta_F = \pi \theta_E / \Omega \approx 0.03 \mu\text{as} (M_\odot/M)^{\frac{1}{2}} (8 \text{ kpc}/d)^{\frac{1}{2}} (\text{GHz}/\nu)$ . For typical lensing stars in the galactic bulge,  $M \sim 0.3 M_\odot$  and  $d \sim 8 \text{ kpc}$ . Typical angular speeds are  $\mu \sim 5 \text{ mas/yr}$  so microlensing events have timescales of months [? ], with exoplanets seen as "bumps" on the light curves of their stars [? ? ]. Diffraction fringes would cross a radio telescope in a time  $\theta_F/\mu \sim$  minutes to days. FRB's have so far only been detected at low frequencies, where telescopes have wider fields of view. However, they have fairly flat spectra up to 8 GHz [? ]. If they can be localized using outrigger telescopes at GHz frequencies, a set of higher frequency telescopes pointed at them simultaneously could together observe fringes spaced by  $\approx 300(100\text{GHz}/\nu)$  km on the Earth's surface. The  $\nu$ -dependence would be a key signature of wave optical gravitational lensing.

**о том, насколько полезна эта система (??)**

(??? почитаю день экспериментальные статьи)

## 2.3 Other binary models

В этой главе используем модели выше для создания к бинарных системам. Делается это просто с помощью добавления обоих линзирующих объектов, расположенных в разных приведенных координатах. Результаты вычисляются в точности теми же методами, которые использовались выше. Таким образом, можно сколько угодно запросто моделировать такие системы, что и показано в этом разделе.

### 2.3.1 Система “double generic peak”

потом исследую, пойму сперва, зачем??

**Модель “double generic peak”**

**Интенсивность модели “double generic peak”**

### 2.3.2 Система “double degenerate peak”

потом исследую, пойму сперва, зачем??

**Модель “double degenerate peak”**

**Интенсивность модели “double degenerate peak”**

### 2.3.3 Система “double elliptic umbilic”

Возможна ситуация, когда оба линзирующих объектов - плазма, распределенная по типу "elliptic umbilic", находятся на близком расстоянии друг от друга.

В этом случае следует решать задачу линзировании бинарной системой типа elliptic umbilic, чем мы и займемся в этом разделе.

**Модель “double elliptic umbilic”**

Запишем амплитуду фактора усиления интенсивности  $\Psi(\beta; \nu)$ , зависящую от параметров  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$  и  $\nu$ , имеющая вид интеграла по приведенным координатам  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ ,

$$\Psi(\beta; \nu) = \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu((\mathbf{x}-\beta)^2 + \varphi(\mathbf{x}))} d\mathbf{x}$$

при метрике, созданной астрофизической плазмой, состоящей из двух частей, каждая из которых сама по себе искажает пространство-время по типу "elliptic umbilic".

Пусть центры одной находятся в приведенных координатах на плоскости линзы,  $\mathbf{r}_1 = (a_1, a_2)$ , а второй - в противоположных:  $\mathbf{r}_2 = (-a_1, -a_2)$ . Тогда фаза в осциллирующем интеграле примет вид:

$$\varphi(\mathbf{x}) = f_1 \frac{\alpha((x_1 - a_1)^3 - 3(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)^2)}{1 + (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} + f_2 \frac{\alpha((x_1 + a_1)^3 - 3(x_1 + a_1)(x_2 + a_2)^2)}{1 + (x_1 + a_1)^2 + (x_2 + a_2)^2}$$

где коэффициенты  $f_1 + f_2 = 1$ .

Для примера разместим центры на координатной оси от центра:  $\mathbf{r}_1 = (a, 0)$ ,  $\mathbf{r}_2 = (-a, 0)$ . Фаза в осциллирующем интеграле примет более простой вид:

$$\varphi(\mathbf{x}) = f_1 \frac{\alpha((x_1 + a)^3 - 3(x_1 + a)x_2^2)}{1 + (x_1 + a)^2 + x_2^2} + f_2 \frac{\alpha((x_1 - a)^3 - 3(x_1 - a)x_2^2)}{1 + (x_1 - a)^2 + x_2^2},$$

**Интенсивность модели “double elliptic umbilic”**

Рассмотрим случай с геометрией  $f_1 = 0.4$ ,  $f_2 = 0.6$ , и  $a = 0.5$ . Параметр обоих “elliptic umbilic” положим  $\alpha = 1$ .

Применяя описанные выше методы, нетрудно получить графики интенсивности, которые для  $\alpha = 1$  представлены на рис. 5.

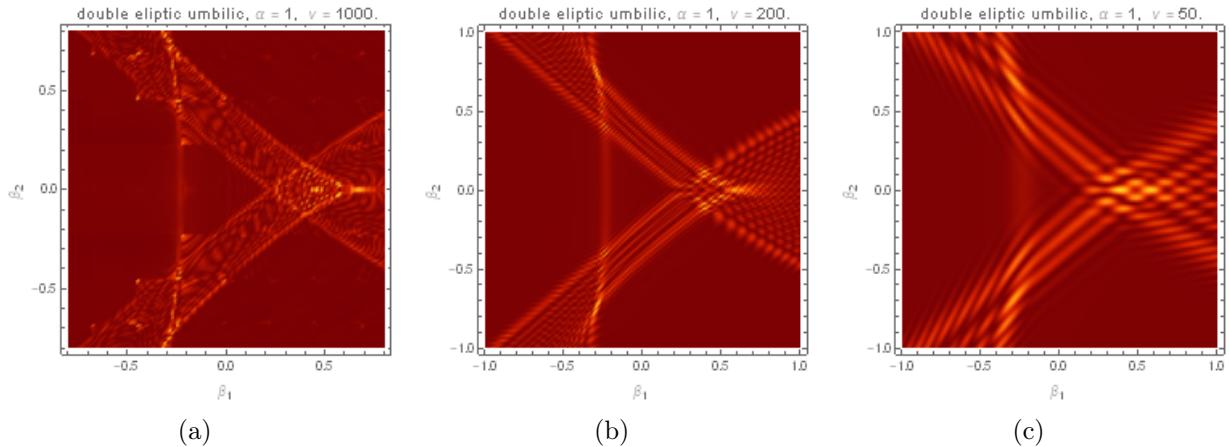


Figure 5: Система “double elliptic umbilic” при  $\alpha = 1$  для разных частот. (a)  $\nu = 1000$ , (b)  $\nu = 200$ , (c)  $\nu = 50$ .

В соответствии с теорией волнового линзирования, видим, что при увеличении частоты, наблюдается каустика, а при уменьшении - волновая дифракционная рябь, которую как раз позволяют наши вычислительные методы изобразить. Как и для случая двух масс, каустический график далеко не такой, какой был в случае линзирования каждой фазой по отдельности.

Несколько другая ситуация становится, если увеличить параметр до  $\alpha = 2$ , ее представим на рис. 6. Здесь при уменьшении частоты каустический изогнутый треугольник дополняется еще одним. В приделе низких частот появляется знакомая волновая рябь.

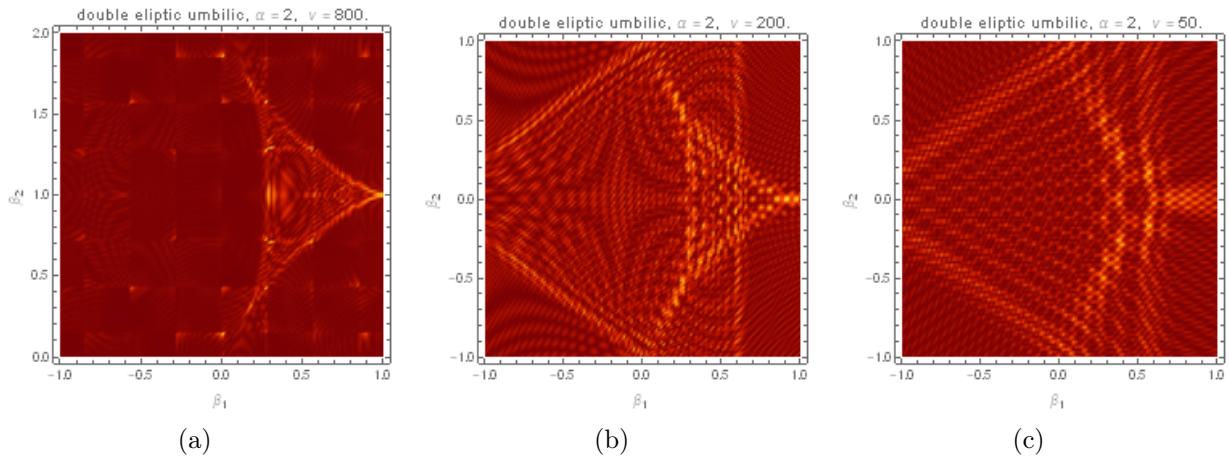


Figure 6: Бинарная система “double elliptic umbilic” при  $\alpha = 2$  для разных частот. (a)  $\nu = 800$ , (b)  $\nu = 200$ , (c)  $\nu = 50$ .

## 2.4 Applications of binary models in observations

read experimental article and summarize, how they choose a model to fit their data!!! 2-3 pages about it!

# A Appendix

## A.1 Wave equation in a curved space-time

### The wave equation

Задачи оптики и гравитационного линзирования формулируются для электромагнитного поля, however, first for simplicity we will consider the case of massless scalar field, which action can be written as

$$S = - \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} g^{\beta\nu} \partial_\beta \phi \partial_\nu \phi + V(\phi), \right] \quad (7)$$

Варьируя по полю  $\phi$ , найдем уравнение движения

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\alpha}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = (\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \phi_{,\beta})_{,\alpha} + \frac{\partial V}{\partial \phi} \sqrt{-g} = 0. \quad (8)$$

Определив оператор Лапласа-Бельтрами

$$\Delta_{LB} = \nabla_\alpha \nabla^\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \right), \quad (9)$$

перепишем уравнение (8) в явно ковариантном виде,

$$\Delta_{LB} \phi + \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = 0. \quad (10)$$

В случае нулевого потенциала получаем волновое уравнение:

$$\Delta_{LB} \phi(x) = 0. \quad (11)$$

### Метрика Шварцшильда

Типичный пример искривленной метрики- это сферически симметричная метрика Шварцшильда, которая описывает искривленное пространство вне объекта массы  $M$ , например, черной дыры. Она имеет вид

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (12)$$

в сферических координатах  $d\Omega^2 = (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$ ,  $r_g = \frac{2GM}{c^2}$  – это так называемый радиус Шварцшильда, или гравитационный радиус,  $M$ – масса, создающая гравитационное поле,  $G$ – гравитационная постоянная,  $c$ – скорость света. Здесь и далее используется сигнатура метрики  $(- +++)$ .

Введем гравитационный потенциал  $U(\mathbf{r})$ , тогда  $-g_{00} \equiv 1 - 2U(\mathbf{r})$ . На больших расстояниях от тела потенциал  $U$  равен своему ньютоновскому значению. Для точечной массы  $U(\mathbf{r}) = -GM/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|$ .

Рассмотрим малые возмущения метрики Минковского линзирующим объектом, то есть  $U(\mathbf{r}) \ll 1$ . Тогда метрика имеет вид

$$ds^2 = -(1 + 2U)dt^2 + (1 - 2U)d\mathbf{r}^2. \quad (13)$$

Будем решать волновое уравнение (14) для метрики (13) с точностью до первого порядка по  $U(\mathbf{r})$ .

## Волновое уравнение в терминах фактора усиления амплитуды

Рассмотрим монохроматическую волну частоты  $\omega$ . Волновое уравнение для амплитуды волны  $\phi(\vec{r}, t) = \tilde{\phi}(\vec{r})e^{-i\omega t}$ , имеет вид:

$$(\nabla^2 + \omega^2) \tilde{\phi} = 4\omega^2 U \tilde{\phi} \quad (14)$$

Для задач гравитационного линзирования, удобно записать его в терминах фактора усиления волны  $F(\vec{r}) = \tilde{\phi}(\vec{r})/\tilde{\phi}_0(r)$ , где  $\tilde{\phi}_0(r) = Ae^{i\omega r}/r$  есть волна, распространяющаяся без линзирующего объекта. Для фактора усиления волновое уравнение примет вид:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + 2i\omega \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \nabla_\theta^2 F = 4\omega^2 UF.$$

Здесь  $\nabla_\theta^2 = \partial^2/\partial\theta^2 + \theta^{-1}\partial/\partial\theta + \theta^{-2}\partial^2/\partial\varphi^2$ . - это угловая часть оператора Лапласа в сферических координатах.

Действительно, в уравнении  $(\nabla^2 + \omega^2) \tilde{\phi} = 4\omega^2 U \tilde{\phi}$  запишем лапласиан явно, а также домножим для получения фактора усиления, волновое уравнение получим в виде:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \omega^2 \right] (F \tilde{\phi}_0) = 4\omega^2 UF \tilde{\phi}_0$$

Сгруппируем, введем оператор  $\nabla_\theta^2$  и упростим, считая углы малыми, получим:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \omega^2 + \frac{1}{r^2} \nabla_\theta^2 \right] (F \tilde{\phi}_0) = 4\omega^2 UF \tilde{\phi}_0$$

Осталось лишь посчитать производные, помня явный вид  $\tilde{\phi}_0(r) = Ae^{i\omega r}/r$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\phi}_0}{\partial r} &= i\omega r^{-1} e^{i\omega r} - r^{-2} e^{i\omega r} = \tilde{\phi}_0(i\omega - r^{-1}) \\ \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_0}{\partial r^2} &= -\omega^2 r^{-1} e^{i\omega r} - 2i\omega r^{-2} e^{i\omega r} + 2r^2 e^{i\omega r} = \tilde{\phi}_0(-\omega^2 - 2i\omega r^{-1} + 2r^{-2}) \\ \frac{\partial}{\partial r} (F \tilde{\phi}_0) &= \tilde{\phi}_0 \left( F(i\omega - r^{-2}) + \frac{\partial F}{\partial r} \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} (F \tilde{\phi}_0) &= \tilde{\phi}_0 \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial \tilde{\phi}_0}{\partial r} + F \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_0}{\partial r^2} = \\ &= \tilde{\phi}_0 \left( F(-\omega^2 - 2i\omega r^{-1} + 2r^{-2}) + 2 \frac{\partial F}{\partial r} (i\omega - r^{-1}) + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \right) \end{aligned}$$

После подстановки этих производных в уравнение выше, многие слагаемые сокращаются и получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + 2i\omega \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \nabla_\theta^2 F = 4\omega^2 UF \quad (15)$$

Именно это уравнение далее и будет решаться в линзировании.

## A.2 Singular lenses: some examples

Here we will show some applications of the discussed methods for a singular lens models.

### Одномерная плазменная линза

Одномерная плазменная линза - простейший и крайне показательный пример одномерного гравитационного линзирования, на котором можно понять идеальные закономерности, проявляющиеся также и в более сложных примерах.

## Модель плазменной линзы

В модели плазменной линзы вычисляется функция  $\Psi(\beta; \nu)$ , зависящая от параметров  $\beta$  и  $\nu$ , имеющую вид интеграла:

$$\Psi(\beta; \nu) = \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i((x-\beta)^2 + \frac{\alpha}{1+x^2})\nu} dx$$

В данной модели дробь в фазе есть рациональное приближение гауссовой экспоненты, что также с некоторой точностью может описывать сгусток плазмы.

## Анализ функции плазменной линзы

Модель плазменной линзы хороша тем, что на ней удобно изучать метод Пикара-Лефшеца, играющий ключевую роль в численном вычислении осциллирующих интегралов.

Плазменная линза сполна была исследована в [1], поэтому здесь только в целях полноты представления о методах и об этой модели воспроизведем ключевые ее свойства.

Несложно программными методами найти седловые точки, построить контура постоянной фазы и области убывания функции, которые приведены ниже на рис. 7. Итоговые графики приведем в качестве иллюстрации только для  $\alpha = 0.5$ , потому что этого достаточно, чтобы понять метод и особенности, в то же время не сместить акцент с бинарных систем, можно увидеть на рисунке ниже.

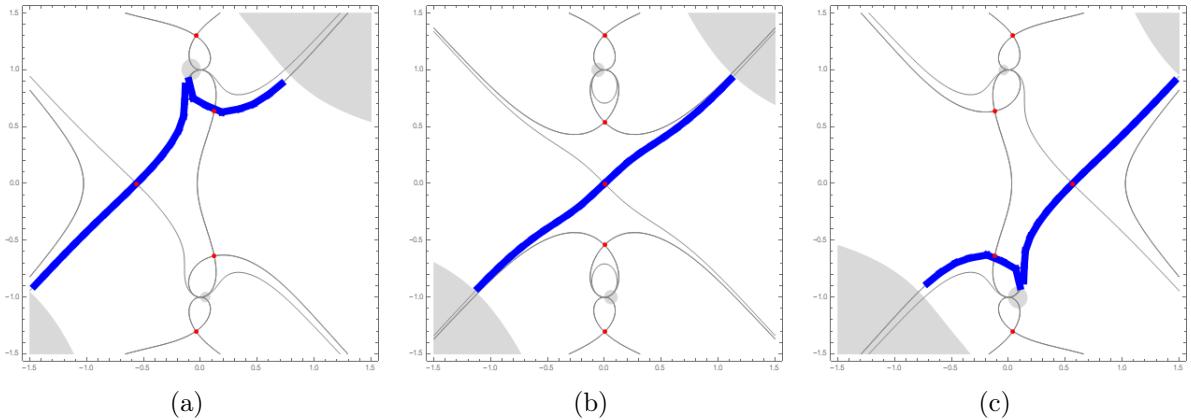


Figure 7: Контуры убывания, наперсток Лефшеца в комплексной плоскости для плазменной линзы для  $\alpha = 0.5$ . Представлены случаи (a)  $\mu = -0.4$ , (b)  $\mu = 0$ , (c)  $\mu = 0.4$ .

Здесь серые линии - контура постоянной фазы, серые области - области, в которых функция крайне мала. Синие контура - те самые наперстки Лефшеца для одномерного случая, именно по ним происходит интегрирование. Разве что алгоритм интегрирования, описанный в теории уменьшает их, учитывая то, что при больших осцилляциях, убывание подэкспоненциальной функции во многих областях слишком быстрое, чтобы их учитывать. Также на (a) и (c) можно наблюдать известное так называемое явление Стокса - изменение вида наперстка Лефшеца при прохождении седловой точки.

## Интенсивность функций 1D плазменной линзы

Приведем характерные графики интенсивности. Для низких частот на рис. 8 представлены три характерных режима, а для высоких частот - имеются схожие, но

более выраженные режимы, изображенные на 9.

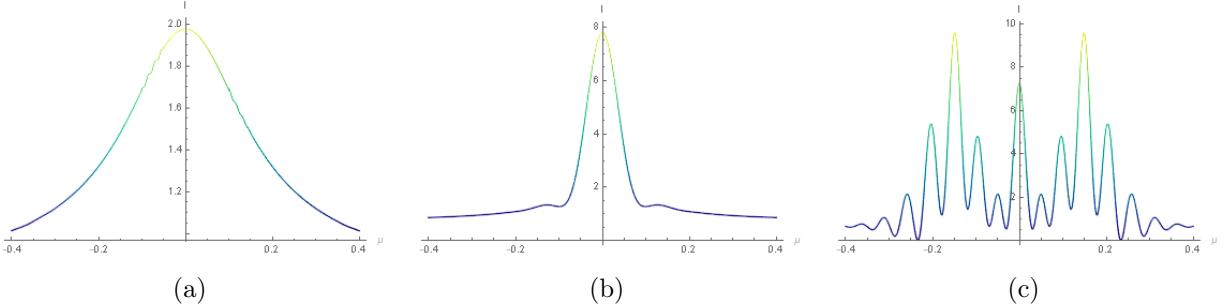


Figure 8: Интенсивность плазменной линзы при  $\nu = 50$ . (a) для  $\alpha = 0.5$ , (b) для  $\alpha = 1$ , (c) для  $\alpha = 2$ .

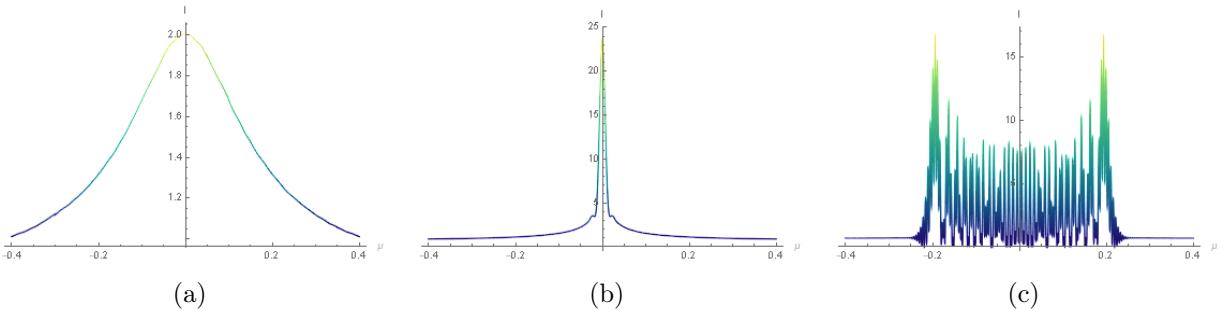


Figure 9: Интенсивность плазменной линзы при  $\nu = 500$ . (a) для  $\alpha = 0.5$ , (b) для  $\alpha = 1$ , (c) для  $\alpha = 2$ .

Для  $\alpha < 1$  имеется пик разной степени вытянутости. При увеличении  $\alpha$  пик становится уже и уже, а после прохождения  $\alpha = 1$  происходит изменение вида графика интенсивности: появляется каустика, изображенная на рис. 9(c).

- При  $\alpha < 1$  имеется только область с одним изображением. Нормализованный профиль интенсивности не колеблется и, кроме того, не зависит от частоты  $\nu$ .

- Для  $\alpha = 1$  линза образует каустику cusp. Она соответствует пику при  $\beta_c = 0$ .

При увеличении частоты  $\nu$ , пик усиливается и становится более и более узким. В эйкональном пределе  $\nu \rightarrow \infty$  нормализованная интенсивность расходится как  $\nu^{1/2}$  в каустике  $\beta_c$ . При  $\alpha > 1$  линза создает область тройного изображения, ограниченную каустиками fold, находящихся на  $(-\beta_c, \beta_c)$ , где  $\beta_c \approx 0.206751$ . Колебания в области одного изображения являются результатом взаимодействия между вещественной и мнимой седловыми точками. При увеличении  $\nu$ , колебания становятся всё сильнее и сильнее, а в краевых точках интенсивность начинает возрастать больше и больше. Такое поведение, согласно последним работам, может быть важно для объяснения природы FRB-ов.

## Двумерная одиночная линза со сдвиговым потенциалом

Перейдем к более полезной на практике модели, к двумерной одиночной линзе со сдвиговым потенциалом. Реальные астрофизические объекты представляют собой часто несколько тел, а, возможно, даже некоторое распределение материи, поэтому отличие метрики от метрики точечной массы очень вероятно. Эта модель является типичным примером, показывающим, что даже небольшие изменения в фазе могут давать принципиально новый вид графиков интенсивности. Простейшая такая модель, рассмотренная в [1] и [2], обсуждается в этом разделе.

## Описание модели сдвигового потенциала

В формализме гравитационного линзирования в амплитуде интенсивности  $\Psi(\beta; \nu)$ , зависящей от параметров  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$  и  $\nu$ , имеющей вид интеграла по приведенным координатам  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ , в случае сдвигового потенциала амплитуда интенсивности имеет вид:

$$\Psi(\beta; \nu) = \frac{\nu}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i((\mathbf{x}-\beta)^2 - \ln|\mathbf{x}| - \frac{\gamma}{2}(x_1^2 - x_2^2))} d\mathbf{x}.$$

Другими словами, рассматривается случай искажения метрики, такой, что фаза в амплитуде имеет вид

$$\varphi(\mathbf{x}) = -\ln|\mathbf{x}| - \frac{\gamma}{2}(x_1^2 - x_2^2).$$

Этот случай можно рассматривать как упрощенная модель некоторой бинарной системы, где вторая масса, находящаяся на расстоянии  $\gamma^{-1/2}$  от линзы, учитывается как поправка к первоначальной фазе. В геометрическом приближении одиночная линза со сдвиговым потенциалом создает Лагранжево отображение

$$\xi(\mathbf{x}) = \left(1 - \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\right) \mathbf{x} + \gamma(-x_1, x_2),$$

которое отображает точки от плоскости линзы на экран. Критическая кривая в данном случае имеет вид

$$\mathcal{M} = \left\{ r(\cos \theta, \sin \theta) \mid r = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} \sqrt{\sqrt{1-\gamma^2 \sin^2 2\theta} - \gamma \cos 2\theta} \text{ где } \theta \in [0, 2\pi) \right\}$$

и представляет из себя в зависимости от  $\gamma$  эллипс разной степени вытянутости. Отображение Лагранжа  $\xi(\mathcal{M})$  для такой линзы создает кривую, состоящую из четырех изогнутых гладких линий между четырьмя пиковыми точками, то есть формирует искривленный ромб.

## Интенсивность линзы со сдвиговым потенциалом

Используя метод Пикара-Лефшеца, несложно получить графики интенсивности, приведенные на рис. 10. Как мы и привыкли, при увеличении частоты график интенсивности приобретает вид каустики, разделяя пространство графика на две области разного количества изображений. Напомним, что в отсутствии данной добавки, имелись просто интерференционные круги, по виду почти совпадающие с кругами вне каустики.

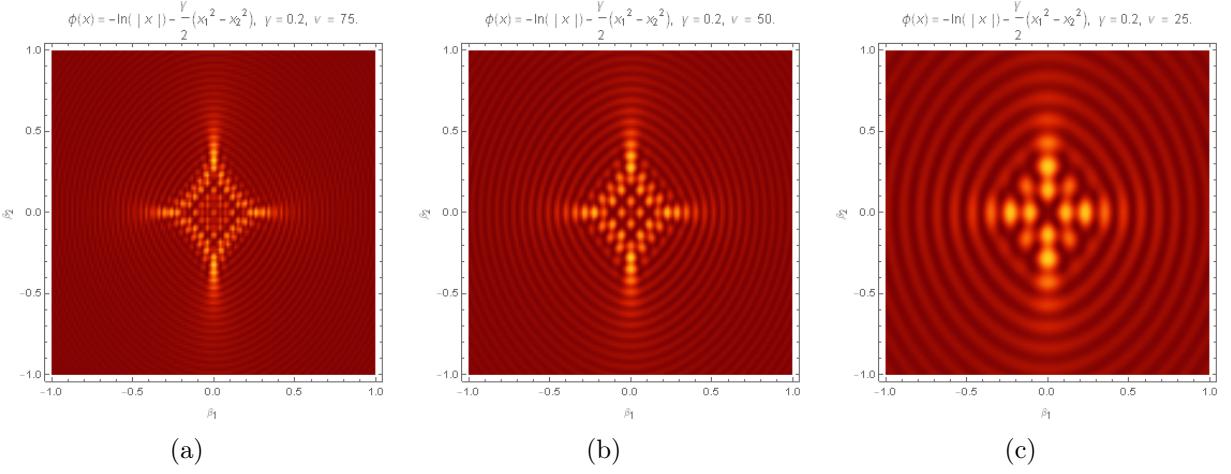


Figure 10: Графики интенсивности для одиночной линзы со сдвиговым гравитирующим потенциалом, при (a)  $\gamma = 0.2, \nu = 75$ , (b)  $\gamma = 0.2, \nu = 50$ , (c)  $\gamma = 0.2, \nu = 25$ .

### Система “generic peak”

Простейшее обобщение одномерной плазменной линзы - система “generic peak”, с которой мы и начнем.

#### Описание модели “generic peak”

В формализме гравитационного линзирования в амплитуда фактора усиления интенсивности  $\Psi(\beta; \nu)$ , зависящей от параметров  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$  и  $\nu$ , имеющей вид интеграла по приведенным координатам  $x = (x_1, x_2)$ , в случае сдвигового потенциала амплитуда интенсивности имеет вид:

$$\Psi(\beta; \nu) = \sqrt{\frac{\nu}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i((x-\beta)^2 + \frac{\alpha}{1+x_1^2+2x_2^2})} dx.$$

Другими словами, рассматривается случай искажения метрики, такой, что фаза в амплитуде имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{\alpha}{1+x_1^2+2x_2^2}.$$

Эта модель - прямое обобщение плазменной линзы на двумерный случай, разве что множитель 2 вставлен для придания некоторой вытянутости, которую можно видеть на графиках.

Каустики появляются в начале координат  $(\beta_1, \beta_2) = (0, 0)$  для параметра  $\alpha = \frac{1}{2}$ , представляя собой особенность типа cusp, соответствующая собственным значениям  $\lambda_1$ . При  $\alpha = 1$  создается новая точка  $A_3$ , обозначая появление собственных значений  $\lambda_2$ .

Для  $1 < \alpha < \frac{64}{49}$  точка  $A_3$  образует линию типа cusp ( $A_2$ ) с двумя выступами ( $A_3$ ) вверху и внизу. При  $\alpha = \frac{64}{49}$  две линии fold сливаются в  $(D_4^+)$  при  $(\beta_1, \beta_2) = (0, \pm 1/\sqrt{14})$ . Для  $\alpha > \frac{64}{49}$  две линии fold продолжают двигаться наружу, где линия, соответствующая  $\lambda_1$ , имеет четыре особенности cusp, в то время как линия сгиба, соответствующая  $\lambda_2$ , не содержит ни одного.

За пределами линий fold имеется область с одним изображением. Внутри - при увеличении  $\alpha$  есть сперва область тройного изображения, а позже появляется и другая, из пяти изображений.

## Графики интенсивности для “generic peak”

Пара типичных графиков интенсивности приведена на рис. 11.

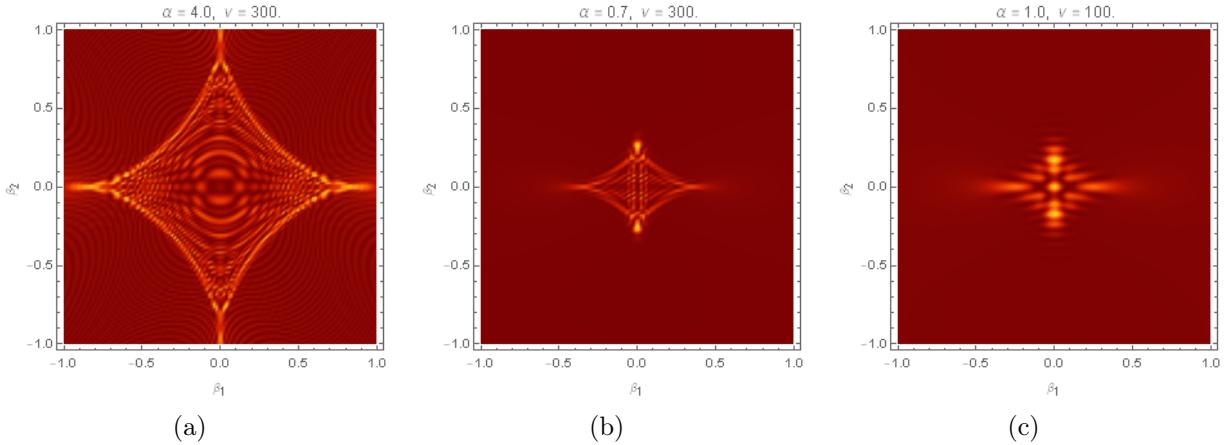


Figure 11: “Generic peak” для: (a)  $\alpha = 4, \nu = 300$ , (b)  $\alpha = 0.7, \nu = 300$ , (c)  $\alpha = 1.0, \nu = 100$ .

## A.3 Useful Mathematics and Programming

### A.3.1 Элементы особенностей дифференцируемых отображений

Типичный анализ гравитационного линзирования приходит к тому, что появляется некоторый осциллирующий интеграл, зависящий от нескольких параметров, график которого представляет некоторую каустику. Теория каустик и их классификация крайне важны для понимания происходящего, однако останавливаться на них возможности нет, поэтому при случае далее просто нужное отображение будем называть, не вдаваясь в классификацию.

### Отображение Лагранжа и интенсивность света после линзирования

Простейшее аналитическое исследование свойств потенциала может быть проведено с помощью так называемого отображения Лагранжа. Отображение Лагранжа  $\xi : X \rightarrow M$  переводит координатного пространства  $x \in X = \mathbb{R}^N$  в точки пространства параметра  $\beta \in M$  согласно уравнению на критические точки

$$\nabla_x \phi(x; \beta)|_{\beta=\xi(x)} = 0.$$

То есть по сути за счет приравнивания к нулю градиента фазы, мы и находим нужную зависимость параметров от координат. Так как в нашем случае  $\nabla_x \phi(x; \beta) = 2(x - \beta) + \nabla \varphi(x)$ , то

$$\beta = \xi(x) = x + \frac{1}{2} \nabla \varphi(x)$$

Отображение Лагранжа  $\xi$  определяет оптические лучи, давая чисто геометрическое описание линзирования. Получается, что каждая точка  $x$  отображается в точку  $\beta$  в пространстве наблюдаемых параметров.

В общем случае, точка  $\beta \in M$  может быть получена из нескольких точек  $x \in X$ , такие области в  $\beta$  называются  $n$ -точечными областями. В многоточечных областях интенсивность больше, чем в малоточечных за счет вкладов каждого пути, ведь на нем

вычисляется гауссов интеграл и в итоге получается нормированная интенсивность:

$$I(\beta; \infty) = \sum_{x \in \xi^{-1}(\beta)} \frac{2}{|\lambda_1(x)| \dots |\lambda_N(x)|}$$

где  $\xi^{-1}$  это прообраз изображения при отображении Лагранжа и  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  это собственные значения деформационного тензора:

$$\mathcal{M}_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\beta})}{\partial x_i \partial x_j} = 2 \frac{\partial \xi_i(\mathbf{x})}{\partial x_j},$$

вычисленного в соответствующих критических точках  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ . Также для обратной величины этого тензора в этой работе используется обозначение  $\gamma$ .

Ниже мы изучим эти многоточечные области в деталях, при конечных  $\nu$ , где происходят интерференционные картины. На границах между областями с разными числом изображений как минимум одно из собственных значений  $\lambda_i$  должно обнулиться. Таким образом, мы видим бесконечный пик на графике, изображающим нормированную интенсивность, из таких пиков и формируется каустика.

По сути отображение Лагранжа  $\xi$  формирует каустику на координатах  $x_c \in X$ , в которых деформационный тензор сингулярен, так как в них определитель обнуляется. В то же время пространство параметров системы  $X$  не наблюдается. В пространстве наблюдаемых параметров  $M$ , каустика на  $x_c$  появляется в точке  $\boldsymbol{\beta}_c = \xi(\mathbf{x}_c)$ .

Для одномерной линзы каустики появляются в изолированных точках, однако в случае более высокой размерности определитель тензора деформации обращается в нуль на многообразии  $X_c = \{x \in X \mid \mathcal{M}(x) = 0\}$ , которое отображается в каустическое множество  $M_c = \xi(X_c)$  в пространстве параметров. Правда, в общем случае  $M_c$ , как правило, не является многообразием, поскольку оно включает каустики более высокого порядка, например, “cusp” и “ласточкин хвост”, в которых многообразие недифференцируемо и, следовательно,  $M_c$  не является локально гомеоморфным евклидову пространству. Именно в таких точках линзирующий интеграл демонстрирует наиболее интересное поведение.

### Пример: определение особенностей для “elliptic umbilic $D_4^-$ ”

Продемонстрируем методы анализа каустик на широко известном примере отображения “elliptic umbilic  $D_4^-$ ”. Рассмотрим интеграл вида

$$\Psi(\boldsymbol{\beta}; \nu) = \frac{\nu}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(x_1^3 - 3x_1x_2^2 - \beta_3(x_1^2 + x_2^2) - \beta_2x_2 - \beta_1x_1)\nu} dx_1 dx_2$$

Аналитическое продолжение экспоненты  $i\phi(x; \beta)\nu$  имеет четыре седловые точки  $\bar{x}_i$ , заданные корнями двух квадратных уравнений

$$\begin{aligned} 3x_1^2 - 3x_2^2 - 2\beta_3x_1 - \beta_1 &= 0 \\ -6x_1x_2 - 2\beta_3x_2 - \beta_2 &= 0 \end{aligned}$$

В зависимости от  $\beta$  две или четыре седловые точки являются реальными. Комплекснозначные седловые точки всегда находятся в сопряженных парах, так как  $\phi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\beta})$  является вещественным значением для реального  $x$ . Решая эти уравнения для  $\beta_1$  и  $\beta_2$  мы получаем лагранжево отображение как функцию  $\beta_3$ ,

$$\xi_{\beta_3}(x_1, x_2) = (3x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1\beta_3, -2x_2(3x_1 + \beta_3), \beta_3).$$

В геометрическом пределе мы формируем поверхность fold и три линии cusp. Поверхность fold в базовое пространство  $X = \mathbb{R}^2$  задается

$$A_2^X(\beta_3) = \left\{ \left( \frac{\beta_3}{3} \cos \theta, \frac{\beta_3}{3} \sin \theta \right) \mid \theta \in [0, 2\pi) \right\},$$

который представляет собой цилиндр с радиусом  $\frac{\beta_3}{3}$ , удовлетворяющий уравнению  $|\mathcal{M}| = 0$ , в котором тензор деформации имеет вид

$$\mathcal{M} = \left[ \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\beta})}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{i,j=1,2} = \begin{pmatrix} 6x_1 - 2\beta_3 & -6x_2 \\ -6x_2 & -6x_1 - 2\beta_3 \end{pmatrix}$$

Три линии cusp являются прямыми линиями и лежат на поверхности fold,

$$A_3^X(\beta_3) = \left\{ \left( \frac{\beta_3}{3}, 0 \right), \left( \frac{\beta_3}{3} \cos \frac{2\pi}{3}, \frac{\beta_3}{3} \sin \frac{2\pi}{3} \right), \left( \frac{\beta_3}{3} \cos \frac{4\pi}{3}, \frac{\beta_3}{3} \sin \frac{4\pi}{3} \right) \right\}$$

в пространстве  $X$ .

В пространстве  $M$  после отображения  $\xi_{\beta_3}$  эллиптическая точка пуповины расположена в начале координат. Поверхность fold задается

$$A_2 = \left\{ \left( \frac{\beta_3^2}{3} \left( \mp 2 \cos \theta + \cos(2\theta), -\frac{2\beta_3^2}{3}(\pm 1 + \cos(\theta)) \sin(\theta), \pm \beta_3 \right) \mid \theta \in [0, 2\pi), \beta_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

где две ветви  $\pm$ , дают две отдельные части, соответствующие двум собственным значениям  $\mathcal{M}$ . Линии особенности cusp задаются

$$A_3 = \left\{ (t^2, 0, t), \left( -t^2/2, \sqrt{3}t^2/2, t \right), \left( -t^2/2, -\sqrt{3}t^2/2, t \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

### A.3.2 Континуальный интеграл

Фундаментальную роль в понимании процесса линзирования играет континуальный интеграл. Обсудим его конструкцию и преобразования вкратце, так как в следующей главе эти же идеи потребуются на первых же страницах.

#### Idea of path integral

(key idea and famous textbook formulas)

#### Path integral in problems of gravitational lensing

(1-2 pages about main methods from Feldbrugge)

### A.3.3 Pickard-Lefshits method in a nutshell

Ключевой во многих концепциях современной физики и этой работе является метод Пикара-Лефшца, позволяющий вычислить и аналитически проанализировать осциллирующие интегралы. Рассмотрим теорию в её самом тривиальном случае, хотя в равной степени она может применяться и в более высоких измерениях и даже, в принципе, в бесконечномерном, то есть в интеграле по траекториям.

## Суть прикладного метода Пикара-Лефшеца

Теория Пикара-Лефшеца имеет дело с осциллирующие интегралами вида

$$I = \int_D dx e^{iS[x]/\hbar}.$$

Здесь  $\hbar$  является просто вещественным параметром, а действие  $S[x]$  - вещественной функцией. Интеграл берется по вещественной области  $D$ , обычно определяемой особенностями подынтегрального выражения. Ставится вопрос о поведении интеграла при малых значениях параметра  $\hbar$ , например, такое становится актуально при переходе к классическим моделям из квантовых: мы устремляем  $\hbar$  к нулю.

Идея состоит в том, чтобы рассмотреть  $S[x]$  как голоморфную функцию  $x \in \mathbb{C}$ , комплексной плоскости. Теорема Коши позволяет нам деформировать контур интегрирования из области  $D$  на вещественной оси  $x$  в область  $\mathcal{C}$  в комплексной  $x$ -плоскости, сохраняя при этом его конечные точки фиксированными. Мы стремимся деформировать  $\mathcal{C}$  в контур “наискорейшего спуска”, проходящий через один или более критические точки  $S[x]$ , т. е. точки, где  $\partial_x S = 0$ . Из уравнений Коши-Римана следует, что действительная часть экспоненты,  $\text{Re}[iS[x]]$ , которая и вносит решающий вклад в подэкспоненциальное выражение, имеет седловую точку в вещественной двумерной  $(\text{Re}[x], \text{Im}[x])$ -плоскости. Нужный нам контур спуска через седловую точку определяется как путь, по которому  $\text{Re}[iS[x]]$  уменьшается как можно быстрее. Ввиду его важности, он приобретает специальное название: наперсток Лефшеца, и обозначается как  $\mathcal{J}_\sigma$ .

## Нисходящий поток и получение контура

Запишем показатель степени  $\mathcal{I} = iS/\hbar$  и его аргумент  $x$  в терминах их действительной и мнимой частей,  $\mathcal{I} = h + iH$  и  $x = u^1 + iu^2$ . Нисходящий поток затем определяется

$$\frac{du^i}{d\lambda} = -g^{ij} \frac{\partial h}{\partial u^j}$$

с параметром  $\lambda$  вдоль потока и  $g_{ij}$  римановой метрикой, введенной в комплексной плоскости. Действительная часть показателя  $h$  называется Морской функцией и убывает на такой поток вдали от критических точек, потому что  $\frac{d}{d\lambda} = \sum_i \frac{\partial h}{\partial u^i} \frac{du^i}{d\lambda} = - \sum_i \left( \frac{\partial h}{\partial u^i} \right)^2 < 0$ ,

с наиболее быстрой скоростью уменьшения в направлении наискорейшего спуска, которая максимизирует величину градиента. Определение последнего требует, чтобы мы ввели метрику. Для простых примеров, которые мы здесь обсуждаем, достаточно тривиальной метрики  $ds^2 = |dx|^2$ . Определяя комплексные координаты как

$$(u, \bar{u}) = ((\text{Re}([x] + i\text{Im}[x])), (\text{Re}[x] - i\text{Im}[x])),$$

метрика становится вида  $g_{uu} = g_{\bar{u}} = 0$ ,  $g_{u\bar{u}} = g_{\bar{u}u} = 1/2$ .

Тогда  $h = (\mathcal{I} + \bar{\mathcal{I}})/2$  и можно записать

$$\frac{du}{d\lambda} = -\frac{\partial \bar{\mathcal{I}}}{\partial \bar{u}}, \quad \frac{d\bar{u}}{d\lambda} = -\frac{\partial \mathcal{I}}{\partial u}.$$

Мнимая часть экспоненты  $H = \text{Im}[iS/\hbar]$  сохраняется вдоль этих потоков, так как

$$\frac{dH}{d\lambda} = \frac{1}{2i} \frac{d(\mathcal{I} - \bar{\mathcal{I}})}{d\lambda} = \frac{1}{2i} \left( \frac{\partial \mathcal{I}}{\partial u} \frac{du}{d\lambda} - \frac{\partial \bar{\mathcal{I}}}{\partial \bar{u}} \frac{d\bar{u}}{d\lambda} \right) = 0.$$

Таким образом, подынтегральное выражение  $e^{iS[x]/\hbar}$ , которое было сильно колеблющимся в исходном интеграле, полностью прекращает колебания при смещениях по этому наперстку, зато монотонно уменьшается, так что интеграл сходится абсолютно и “как можно быстрее”.

Для нисходящего потока, возникающего в седловой точке,  $\lambda$  пробегает значения от  $-\infty$  в седловой точке до положительных значений по мере уменьшения  $\hbar$ . Аналогично, восходящие потоки  $\mathcal{K}_\sigma$  определяются через

$$\frac{du^i}{d\lambda} = +g^{ij} \frac{\partial h}{\partial u^j},$$

при  $H$  также постоянной вдоль этих потоков. Каждая критическая точка имеет восходящий поток.

Есть также некоторый случай, который не представляет собой проблему, однако о нем следует упомянуть. Может так быть, что контур наискорейшего спуска из одной седловой точки  $p_\sigma$  попадет на вторую седловую точку  $p'_\sigma$ , при  $\lambda \rightarrow \infty$ , так что он совпадает с крутой подъем контура от  $p'_\sigma$ . Такая ситуация в целом маловероятна, но она может возникнуть в результате симметрии. Это может быть, если на контуре, соединяющим две точке функция Морса отлична, а мнимая часть  $H$  постоянна. Такой случай не представляет проблему и метод Пикара-Лефшеца учитывает его.

## Контура и интеграл по ним

Итак, наша цель состоит в том, чтобы деформировать исходный интеграл в такой, который вычисляется по сумме наперстков Лефшеца, которые можно пронумеровать с помощью  $\sigma$ , новая область примет вид

$$\mathcal{C} = \sum_{\sigma} n_{\sigma} \mathcal{J}_{\sigma},$$

где целые числа  $n_{\sigma}$  могут принимать значения 0 или  $\pm 1$  при смене ориентации контура по каждому наперстку. Из этих уравнений следует, что  $n_{\sigma} = \text{Int}(\mathcal{C}, \mathcal{K}_{\sigma}) = \text{Int}(D, \mathcal{K}_{\sigma})$ , где  $\mathcal{K}$  - контур наискорейшего подъема, а  $\text{Int}$  - номер пересечения.

Так как пересечение - число топологическое, при деформации контура  $\mathcal{C}$  обратно на вещественную область  $D$ , оно постоянно.

Таким образом, необходимым и достаточным условием для того, чтобы данный наперсток  $\mathcal{J}_{\sigma}$  был нужным, является то, что самый крутой подъем из критической точки  $p_{\sigma}$  пересекает исходную, вещественную область интеграции  $D$ . В единичной комплексной размерности это работает так, что исходный интеграл вдоль вещественной оси  $x$  деформируется в ряд контуров.

При соответствующем выборе ориентации соседние наперстки заканчиваются и начинаются на особенностях функции Морса  $h$ , так что нет никаких препятствий для деформации объединенного контура обратно на вещественную ось  $x$ . Общий контур, представляющий из себя сумму по наперсткам, пробегает все сингулярности  $h$  в направлении, определяемом самым большим потоком. В итоге наши преобразования контура записываются в виде:

$$I = \int_D dx e^{iS[x]/\hbar} = \int_{\mathcal{C}} dx e^{iS[x]/\hbar} = \sum_{\sigma} n_{\sigma} \int_{\mathcal{J}_{\sigma}} dx e^{iS[x]/\hbar},$$

также для удобства анализа выделить функцию Морса и записать

$$I = \sum_{\sigma} n_{\sigma} e^{iH(p_{\sigma})} \int_{\mathcal{J}_{\sigma}} e^h dx \approx \sum_{\sigma} n_{\sigma} e^{iS(p_{\sigma})/\hbar} [A_{\sigma} + \mathcal{O}(\hbar)]$$

где  $A_\sigma$  есть лидирующий порядок гауссового интеграла в критической точке  $p_\sigma$ . Последующие члены могут быть получены с помощью теории возмущений по  $\hbar$ .

Дополнительное описание поведения и свойства интеграла можно найти в [12], нам для применения этого метода достаточно понимать, что если определить длину вдоль кривой как  $l = \int |dx|$ , то условие на сходимость интеграла имеет вид:  $h(x(l)) < -\ln(l) + A$ , для некоторой константы  $A$ , при  $l \rightarrow \infty$ , что является довольно слабым требованием, поэтому этот метод имеет большое распространение.

### A.3.4 Algorithms and Programming Codes

(I'll add later code with little comments) see [github Feldbrugge](#)

#### Алгоритм для 1d интеграла

Ключевой алгоритм, по которому работает код представлен ниже.

**Требуется:** Разбивка изначальной области интегрирования на отрезки  $[a, b] X = \mathbb{R}$  сеткой  $p_i = a + i\Delta x$  с шагом  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$  для некоторого  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ .

**while** Вариация мнимой части  $H$  в точках  $p_i$  более чем  $T_1$  **do**

Перенести точки:  $p_i \mapsto p_i - \nabla h(p_i) \Delta t$

**if**  $h$ -функция в точках  $p_i$  менее  $T_2$ , удалить эти точки

**end if**

**if** Длина отрезка  $(p_i, p_{i+1})$  превышает  $T_3$  **then**

Разделить отрезок на двое:  $(p_i, \frac{p_i+p_{i+1}}{2}), (\frac{p_i+p_{i+1}}{2}, p_{i+1})$ .

**end if**

**end while**

Здесь требуются параметры  $a, b, T_1, T_2, T_3 \in \mathbb{R}$ , и  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ .

#### Алгоритм для 2d интеграла

Алгоритм вычисления двумерных интегралов крайне схож с одномерным, чего не сказать о его программной реализации. Также сложность его исполнения заметно возрастает, как и сложность визуализации итоговых наперстков. Приведем вкратце этот алгоритм, чтобы убедиться, что идеально всё аналогично.

**Требуется:** Подмножество исходной области интегрирования  $X$  представить квадратной сеткой, состоящей из клеток  $V_i$ , с точками  $p_{i,1}, p_{i,2}, \dots$

**while** Вариация мнимой части  $H$  в точках  $p_{i,j}$  превосходит пороговое значение  $T_1$  **do**

Перенести точки по алгоритму:  $p_{i,j} \mapsto p_{i,j} - \nabla h(p_{i,j}) \Delta t$

**if**  $h$ -функция в точке  $p_i$  менее чем  $T_2$  **then**

Удалить соответствующую клетку

**end if**

**if** Размер клетки  $V_i$  превосходит  $T_3$  **then**

Разделить клетку на подклетки

**end if**

**end while**

Параметры тут абсолютно такие же:  $a, b, T_1, T_2, T_3 \in \mathbb{R}$ , и  $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ .

## References

- [1] Job Feldbrugge, Neil Turok: *Gravitational lensing of binary systems in wave optics*.
- [2] Takahiro T. Nakamura, Shuji Deguchi: *Wave optics in gravitational lensing*.
- [3] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.: *Теория поля*.
- [4] Grillo, Gianfranco and Cordes, James: *Wave asymptotics and their application to astrophysical plasma lensing*, 2018.
- [5] Mao, Shude: *Astrophysical applications of gravitational microlensing*. Research in Astronomy and Astrophysics, 12(8):947–972, aug 2012. <https://doi.org/10.1088/1674-4527/12/8/005>.
- [6] Behtash, Alireza, Dunne, Gerald V, Schäfer, Thomas, Sulejmanpasic, Tin, and Unsal, Mithat: *Toward picard-lefschetz theory of path integrals, complex saddles and resurgence*. arXiv preprint arXiv:1510.03435, 2015.
- [7] Tomita, Kenji, Premadi, Premana, and Nakamura, Takahiro T.: *Various approaches to cosmological gravitational lensing in inhomogeneous models*. Progress of Theoretical Physics Supplement, 133:85–113, 1999, ISSN 0375-9687. <http://dx.doi.org/10.1143/PTPS.133.85>.
- [8] Herrera-Martín, Antonio, Albrow, M. D., Udalski, A., Gould, A., Ryu, Y. H., Yee, J. C., Chung, S. J., Han, C., and al. et.: *OGLE-2018-BLG-0677lb: A super-earth near the galactic bulge*. The Astronomical Journal, 159(6):256, may 2020. <https://doi.org/10.3847/1538-3881/ab893e>.
- [9] С., Вайнберг: *Космология*. Либроком.
- [10] Courbin, Frederic, Saha, Prasenjit, and Schechter, Paul L: *Quasar lensing*. In *Gravitational Lensing: An Astrophysical Tool*, pages 1–54. Springer, 2002.
- [11] Jung, Youn Kil, Hwang, Kyu Ha, and Ryu, Yoon Hyun et. al.: *Two microlensing binaries composed of planetary-mass companions and very-low-mass primaries*. The Astronomical Journal, 156(5):208, 2018.
- [12] Feldbrugge, Job, Lehnert, Jean Luc, and Turok, Neil: *Lorentzian Quantum Cosmology*. Phys. Rev. D, 95(10):103508, 2017.
- [13] Job Feldbrugge, Ue Li Pen and Turok, Neil: *Oscillatory path integrals for radio astronomy*.
- [14] Kayser, Rainer, Schramm, Thomas, and Nieser, Lars: *Gravitational lenses*. Gravitational Lenses, 406, 1992.
- [15] Dominik, M.: *Theory and practice of microlensing light curves around fold singularities*. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 353(1):69–86, Sep 2004, ISSN 1365-2966. <http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2004.08046.x>.
- [16] Refsdal, S and Surdej, J: *Gravitational lenses*. Reports on Progress in Physics, 57(2):117–185, feb 1994. <https://doi.org/10.1088/0034-4885/57/2/001>.
- [17] Chang, K. and Refsdal, S.: *Flux variations of QSO 0957+561 A, B and image splitting by stars near the light path*. Nature, 282:561–564, 1979.

- [18] Walsh, Dennis, Carswell, Robert F, and Weymann, Ray J: *0957+ 561 a, b: twin quasistar objects or gravitational lens?* Nature, 279(5712):381–384, 1979.
- [19] Einstein, Albert: *Lens-Like Action of a Star by the Deviation of Light in the Gravitational Field*. Science, 84:506–507, 1936.
- [20] Arnold, V. I., Shandarin, S. F., and Zeldovich, Ya. B.: *The large scale structure of the universe i. general properties. one-and two-dimensional models.* Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics, 20(1-2):111–130, 1982. <https://doi.org/10.1080/03091928208209001>.
- [21] Arnold, Vladimir I: *Singularities of systems of rays.* Russian Mathematical Surveys, 38(2):87–176, apr 1983. <https://doi.org/10.1070/rm1983v038n02abeh003471>.
- [22] Kubas, D., Cassan, A., Beaulieu, J. P., Coutures, C., Dominik, M., Albrow, M. D., Brillant, S., Caldwell, J. A. R., Dominis, D., Donatowicz, J., and al. et: *Full characterization of binary-lens event ogle-2002-blz-069 from planet observations.* Astronomy & Astrophysics, 435(3):941–948, May 2005, ISSN 1432-0746. <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361:20042624>.
- [23] Berry, Michael V and Upstill, Colin: *Iv catastrophe optics: morphologies of caustics and their diffraction patterns.* In *Progress in optics*, volume 18, pages 257–346. Elsevier, 1980.
- [24] Arnold, V. I., Varchenko, A. N., and Gusein-Zade, S. M.: *Singularities of Differentiable Maps: Volume II Monodromy and Asymptotic Integrals*, volume 83. Springer Science and Business Media, 2012.
- [25] Witten, Edward: *A new look at the path integral of quantum mechanics*, 2010.
- [26] Born, Max and Wolf, Emil: *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light.* Elsevier, 2013.