EJERCICIO

SEA $p \in \mathbb{N}$ PRIMO. DEMOSTRAR QUE LA SUCESIÓN EXACTA

$$0 \to \mathbb{Z}_p \xrightarrow{i} \mathbb{Z}_{p^2} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_p \to 0$$

NO SE PARTE.

π = PROYECCIÓN CANÓNICA.

i = INDUCIDO POR $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto p \cdot x$.

GENERALIZAR A

$$0 \to \mathbb{Z}_{p^r} \to \mathbb{Z}_{p^{r+s}} \to \mathbb{Z}_{p^s} \to 0 \quad , r, s \in \mathbb{N}.$$

EJERCICIO

DEMOSTRAR QUE SI M_3 ES A-MÓDULO LIBRE ENTONCES TODA SUCESIÓN EXACTA DE A-MÓDULOS

$$0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$$

SE PARTE.

EJERCICIO

SEAN $p, q \in \mathbb{N}$ PRIMOS DISTINTOS.
DEMOSTRAR QUE LA SUCESIÓN EXACTA

$$0 \to \mathbb{Z}_p \xrightarrow{i} \mathbb{Z}_{pq} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_q \to 0$$

SE PARTE.

π = PROYECCIÓN CANÓNICA.

i = INDUCIDO POR $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto q \cdot x$

ANILLOS Y MÓDULOS NOETHERIANOS,
" " ARTINIANOS.

SEA $(X, \leq)$ UN CONJUNTO ORDENADO

($\leq$ ES RELACIÓN EN X, REFLEXIVA: $x \leq x$, $\forall x \in X$
TRANSITIVA: $x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$
ANTISIMÉTRICA: $x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y$)

UN ELEMENTO $x \in X$ ES MAXIMAL SI $x \leq y \Rightarrow x = y$ $(y \in X)$.

PROP SON EQUIVALENTES:

a) TODA SUCESIÓN $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ DE ELEMENTOS DE X CRECIENTE ($x_n \leq x_{n+1}$, $\forall n$) ES ESTACIONARIA

(O SEA, $\exists m \ / \ x_n = x_m$, $\forall n \geq m$)

b) TODO SUBCONJUNTO $Y \subset X$, $Y \neq \emptyset$, TIENE UN ELEMENTO MAXIMAL ($(Y, \leq)$ CON $\leq$ EN X RESTRINGIDO A Y)

O SEA, $\exists y \in Y \ / \ y \leq y'$, $y' \in Y \Rightarrow y = y'$.

DEM

b) $\Rightarrow$ a) CONSIDERAR $Y = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$

a) $\Rightarrow$ b) SUP. $\exists Y$ SIN ELEMENTO MAXIMAL.

$Y \neq \emptyset \rightarrow$ SEA $y_1 \in Y$ UN ELEMENTO $\Rightarrow y_1$ NO ES MAXIMAL

$\Rightarrow \exists y_2 \in Y$, $y_1 \leq y_2$, $y_1 \neq y_2$. (ESCRIBIMOS $y_1 < y_2$)

y_2 TAMPOCO ES MAXIMAL $\Rightarrow \exists y_3 \in Y \ / \ y_2 < y_3$

$\Rightarrow \exists$ SUCESIÓN $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $y_n \in Y$, $y_n < y_{n+1}$ $\forall n$

ESTA SUCESIÓN NO ES ESTACIONARIA $\Rightarrow \Leftarrow$ ✓

INDUCCIÓN

SEA A UN ANILLO, SEA M UN A-MÓDULO (IZQ.)
DENOTAMOS $\sigma(M)$ EL CONJUNTO DE SUBMÓDULOS (IZQ.)
DE M. EN $\sigma(M)$ TENEMOS LA RELACIÓN DE ORDEN
DADA POR INCLUSIÓN: $S \leq T$ SI $S \subset T$
(ESCRIBIMOS $S \lneq T$ CUANDO $S \subset T$ Y $S \neq T$)
$S < T$

DEF M ES NOETHERIANO SI PARA TODO $\mathcal{C} \subset \sigma(M)$
EXISTE UN ELEMENTO MAXIMAL $S \in \mathcal{C}$.

DEF M ES ARTINIANO SI PARA TODO $\mathcal{C} \subset \sigma(M)$
EXISTE UN ELEMENTO MINIMAL $S \in \mathcal{C}$
$(T \subset S,\ T \in \mathcal{C} \Rightarrow T = S)$
(MINIMAL = MAXIMAL RESPECTO AL ORDEN INVERSO)

APLICANDO LA PROP. CON $X = \sigma(M)$ SE TIENE:
M ES NOETHERIANO (RESP. ARTINIANO) SI Y SÓLO SI
TODA CADENA CRECIENTE $S_1 \subset S_2 \subset \cdots \subset S_n \subset \cdots$
DE SUBMÓDULOS DE M ES ESTACIONARIA
(RESP. TODA CADENA DECRECIENTE $S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_n \supset \cdots$
DE SUBMÓDULOS DE M ES ESTACIONARIA)

DEF EL ANILLO A ES NOETHERIANO (RESP. ARTINIANO)
SI LO ES COMO A-MÓDULO
$\Leftrightarrow$ TODA CADENA CRECIENTE (RESP. DECRECIENTE)
DE IDEALES DE A ES ESTACIONARIA.

EJEMPLOS

1) SI M TIENE SÓLO UN NÚMERO FINITO DE SUBMÓDULOS (P. EJ. M UN GRUPO ABELIANO FINITO, O M SIMPLE) ENTONCES M ES NOETHERIANO Y ARTINIANO.

2) $\mathbb{Z}$ ES NOETHERIANO, DEBIDO A QUE TODO IDEAL ES PRINCIPAL, Y TODO ELEMENTO TIENE FINITOS DIVISORES.
$\mathbb{Z}$ NO ES ARTINIANO, LA CADENA $I_i = (2^i) \supset I_{i+1}$ NO ES ESTACIONARIA.
SIMILAR PARA $A = k[x]$, k CUERPO.

3) $A = k[x_1, x_2, \ldots] = k[x_i]_{i \in \mathbb{N}}$
NO ES NOETHERIANO NI ARTINIANO:
$\langle x_1 \rangle \subset \langle x_1, x_2 \rangle \subset \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \subset \cdots$
$\langle x_1 \rangle \supset \langle x_1^2 \rangle \supset \langle x_1^3 \rangle \supset \cdots$

4) SEA V UN k-ESPACIO VECTORIAL, $\dim_k V < \infty$.
ENTONCES V ES NOETHERIANO Y ARTINIANO:
PARA $S \subset V$ CONSIDERAR $\dim_k S$.

5) SI $\dim_k V = \infty$ ENTONCES V NO ES NOETHERIANO NI ARTINIANO: SEA $\{v_i, i \in \mathbb{N}\}$ UN CONJUNTO LINEALMENTE INDEPENDIENTE. SEAN
$S_n = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, $S_n \subsetneq S_{n+1}$
$T_n = \langle v_i \rangle_{i \geq n}$, $T_n \supsetneq T_{n+1}$

6) (OPCIONAL) SEA $U \subset \mathbb{C}$ UN ABIERTO $\neq \emptyset$.
SEA $A = \{ f : U \to \mathbb{C},\ f \text{ HOLOMORFA} \}$
ENTONCES A NO ES NOETHERIANO
(EJERCICIO)

(P.EJ. $U = \mathbb{C}$, $U = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$)

PROP SEA M UN A-MÓDULO NOETHERIANO (RESP. ARTINIANO) ENTONCES:

1) TODO SUBMÓDULO $S \subset M$ ES NOETH. (RESP. ART.)
2) $\forall f: M \to N$ EPI $\Rightarrow$ N ES NOETH. (RESP. ART.)

DEM

1) RESULTA DE QUE $\sigma(S) \subset \sigma(M)$.
2) SEA $\mathcal{C} \subset \sigma(N) \Rightarrow f^{-1}\mathcal{C} = \{f^{-1}(A), A \in \mathcal{C}\}$

TIENE ELEMENTO MAXIMAL $S = f^{-1}(T) \in f^{-1}(\mathcal{C})$, $T \in \mathcal{C}$

$\Rightarrow f(S) = T \in \mathcal{C}$ ES MAXIMAL. (VERIFICAR)

(SIMILAR PARA MINIMAL)

COR A NOETH. (RESP. ART.), $I \subset A$ IDEAL $\Rightarrow$ A/I NOETH. (RESP. ART.)

PROP SEA $f: M \to N$ UN MORFISMO DE A-MÓDULOS

M ES NOETHERIANO (RESP. ARTINIANO) $\Leftrightarrow$

$\ker(f)$ Y $\operatorname{im}(f)$ SON NOETHERIANOS (RESP. ARTINIANOS)

DEM

($\Rightarrow$) SALE DE LA PROP. ANTERIOR.

($\Leftarrow$) SEA $S_1 \subset S_2 \subset \cdots$ UNA SUCESIÓN CRECIENTE DE SUBMÓDULOS DE M. POR HIPÓTESIS, LAS SUCESIONES

$S_1 \cap \ker(f) \subset S_2 \cap \ker(f) \subset \cdots$

$f(S_1) \subset f(S_2) \subset \cdots$

SE ESTACIONAN. ENTONCES $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ SE ESTACIONA:

SEA $x \in S_{m+1} \Rightarrow f(x) \in f(S_{m+1}) = f(S_m) \Rightarrow f(x) = f(x')$, $x' \in S_m$

$\Rightarrow x - x' \in S_{m+1} \cap \ker(f) \Rightarrow x - x' \in S_m \cap \ker(f)$

$\Rightarrow x - x' \in S_m \Rightarrow x' \in S_m \Rightarrow S_{m+1} = S_m$

PARA $m \geq N$ (N TAL QUE $(S_i \cap \ker f)$ Y $(f(S_i))$ SE ESTACIONAN PARA $i \geq N$)

COR $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ EXACTA

M_2 NOETH. (ART.) $\Leftrightarrow$ M_1 Y M_3 NOETH. (ART.)

PROP SEA M UN A-MÓDULO.

M ES NOETHERIANO $\Leftrightarrow$ TODO SUBMÓDULO $S \subset M$ ES FINITAMENTE GENERADO.

DEM

($\Rightarrow$) SEA $\mathcal{C}$ EL CONJUNTO DE SUBMÓDULOS DE S QUE SON FINITAMENTE GENERADOS.

$\mathcal{C} \neq \phi$ YA QUE $\{0\} \in \mathcal{C}$.

SEA $T \in \mathcal{C}$ UN ELEMENTO MAXIMAL

($\Rightarrow$ $T \subset S$ Y T ES FINITAMENTE GENERADO)

BASTA CON VER QUE $T = S$.

SI FUESE $T \subsetneq S$, SEA $s \in S$, $s \notin T$.

TOMO $T' = T + \langle s \rangle$. ENTONCES $T \subsetneq T' \subset S$

Y T' ES FINITAMENTE GENERADO. ESTO CONTRADICE LA MAXIMALIDAD DE T $\Rightarrow$ $T = S$ ✓

($\Leftarrow$) SEA $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ UNA CADENA CRECIENTE DE SUBMÓDULOS DE M. SEA $S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$.

S ES SUBMÓDULO DE M (VERIFICAR)

$\Rightarrow$ S ES FINITAMENTE GENERADO, $S = \langle s_1, \dots, s_m \rangle$

$s_j \in S \Rightarrow s_j \in S_{i(j)}$ PARA $j = 1, \dots, m$

SEA $N = \max\{i(1), \dots, i(m)\}$. ENTONCES $s_j \in S_N$, $\forall j$

$\Rightarrow S \subset S_N \Rightarrow S_i \subset S_N, \forall i \geq N \Rightarrow S_i = S_N, \forall i \geq N$ ✓

COR SEA A UN ANILLO. ENTONCES

A ES NOETHERIANO (IZQ.) $\Leftrightarrow$ TODO IDEAL (IZQ.) DE A ES FINITAMENTE GENERADO.

PROP. SEA A UN ANILLO. ENTONCES

A ES NOETHERIANO A IZQ. (RESP. ARTINIANO A IZQ.)

$\Longleftrightarrow$

TODO A-MODULO IZQ. M FINITAMENTE GENERADO ES NOETHERIANO (RESP. ARTINIANO)

DEM

($\Longleftarrow$) TOMAR $M = A$.

($\Longrightarrow$) SEA M FINITAMENTE GENERADO, $M = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$

$\Rightarrow$ TENEMOS UN EPI $f : A^n \to M$

(DEFINIDO POR $f(e_i) = x_i$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ BASE CANÓNICA DE A^n,

O SEA, $f(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$)

QVQ M ES NOETHERIANO.

POR PROP. PAG. 82, BASTA CON VER QUE A^n ES NOETHERIANO.

LO VEMOS POR INDUCCIÓN EN n. TENEMOS LA SUCESIÓN EXACTA $0 \to A^{n-1} \xrightarrow{i} A^n \xrightarrow{\pi} A \to 0$

$i(a_1, \dots, a_{n-1}) = (a_1, \dots, a_{n-1}, 0)$, $\pi(a_1, \dots, a_n) = a_n$

POR HIPÓTESIS, A ES NOETHERIANO.

POR HIPÓTESIS INDUCTIVA, A^{n-1} ES NOETHERIANO.

RESULTA DE PAG. 82 QUE A^n ES NOETHERIANO ✓

PARA ARTINIANO ES SIMILAR.

TEO (HILBERT)

A ANILLO NOETHERIANO $\Rightarrow$ $A[X]$ ES NOETHERIANO

DEM DESPUÉS

COR

1) A NOETHERIANO $\Rightarrow$ $A[X_1,\dots,X_n]$ NOETHERIANO.
EN PARTICULAR, k CUERPO $\Rightarrow$ $k[X_1,\dots,X_n]$ NOETHERIANO

2) A NOETHERIANO, $I \subset A[X_1,\dots,X_n]$ IDEAL
$\Rightarrow$ $A[X_1,\dots,X_n]/I$ ANILLO NOETHERIANO.

DEM

1) $A[X_1,\dots,X_n] \cong A[X_1,\dots,X_{n-1}][X_n]$
+ INDUCCIÓN.

2) POR COR. PAG. 82.

TEO A ARTINIANO $\Rightarrow$ A NOETHERIANO

DEM VER ATIYAH-MACDONALD, COMMUTATIVE ALGEBRA.

MÁS PRECISAMENTE: VALE,

A ARTINIANO $\Leftrightarrow$ A NOETHERIANO Y $\dim(A)=0$

DEF $\dim(A) = \sup\{ n\in\mathbb{N} \,/\, \exists$ CADENA $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n \}$
CON $P_i \subset A$ IDEAL PRIMO

$\dim(A)=0 \Leftrightarrow$ TODO PRIMO EN A ES MAXIMAL.

EJS. DE ANILLOS ARTINIANOS.

1) A DOMINIO ARTINIANO $\Leftrightarrow$ A CUERPO

DEM ($\Leftarrow$) ✓
($\Rightarrow$) SEA $a\in A$, $a\neq 0$. QVQ a ES INVERSIBLE.
$I_n = \langle a^n\rangle$, $n\in\mathbb{N}$ $\quad I_n \supset I_{n+1}$
$\Rightarrow \exists n \,/\, \langle a^n\rangle = \langle a^{n+1}\rangle \Rightarrow a^n = \alpha . a^{n+1}$, $\alpha\in A$
$\Rightarrow 1 = \alpha . a$ ✓

2) k CUERPO, A k-ALGEBRA CON $\dim_k A < \infty$
$\Rightarrow$ A ES ARTINIANO.
EJ $A = k[X]/\langle X^n\rangle \Rightarrow \dim_k A = n$
EJ $A = k[X,Y]/\langle X,Y\rangle^n$, $\langle X,Y\rangle^n = \langle X^n, X^{n-1}Y, \dots, XY^{n-1}, Y^n\rangle$

3) A_i ARTINIANO, $i=1,\dots,r$ $\Rightarrow$ $A = \prod_{i=1}^{r} A_i$ ES ARTINIANO

TED (HILRENT)

OEM