DEF SEA A UN ANILLO. DECIMOS QUE A TIENE NOCIÓN DE RANGO (A IZQUIERDA) SI VALE QUE PARA TODO A-MÓDULO (IZQ.) LIBRE, TODAS LAS BASES TIENEN EL MISMO CARDINAL ($\underset{\text{DEF.}\ (1)}{=}$ RANGO DEL MÓDULO LIBRE)

PROP SEA A UN ANILLO CONMUTATIVO. ENTONCES A TIENE NOCIÓN DE RANGO.

DEM VER PRÁCTICA.

OBS EXISTEN ANILLOS NO CONMUTATIVOS A TALES QUE $A^2 \cong A$ COMO A-MÓDULOS A IZQ. ($\Rightarrow$ A NO TIENE NOCIÓN DE RANGO). **DEM:** VER PRÁCTICA.

SEA A UN DOMINIO, CON CUERPO DE FRACCIONES K.

RECORDAR: $K = S^{-1}A = A_0$, $S = A - \{0\}$

SEA M UN A-MÓDULO Y SEA $M_0 = S^{-1}M$

COMO $S^{-1}M$ ES $S^{-1}A$-MÓDULO, O SEA, K-MÓDULO

$\Rightarrow$ $S^{-1}M$ ES K-MÓDULO LIBRE (K-ESPACIO VECTORIAL)

$\Rightarrow$ TENEMOS $\dim_K(S^{-1}M)$ (FINITA O NO)

DEFINIMOS $rg_A(M) \overset{(2)}{=} \dim_K(S^{-1}M)$ $\big($= RANGO DE M$\big)$.

SI M ES A-MÓDULO FINITAMENTE GENERADO $\Rightarrow$

$S^{-1}M$ K- " " "

$\Rightarrow$ $rg_A(M)$ ES FINITO.

EJERCICIO SI M ES LIBRE CON BASE $m_1, \dots, m_r$ ENTONCES $\frac{m_1}{1}, \dots, \frac{m_r}{1}$ ES BASE DE $S^{-1}M$.

POR LO TANTO, LAS DOS DEFINICIONES (1), (2) DE $rg_A(M)$ COINCIDEN.

NOTAR QUE $rg_A(M)$ (DEF. (2)) ES VÁLIDA PARA TODO M, NO NECESARIAMENTE LIBRE.

MÓDULOS DEFINIDOS POR GENERADORES Y RELACIONES.

IDEA: QUIERO CONSTRUIR UN A-MÓDULO M GENERADO POR DOS ELEMENTOS $m_1, m_2 \in M$ QUE SATISFACEN LA RELACIÓN $5m_1 = 6m_2$.

TOMO $M = A^2 / \langle 5e_1 - 6e_2 \rangle = A^2 / \langle (5,6) \rangle$

$e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$, $m_1 = \overline{e_1}$, $m_2 = \overline{e_2}$ ✓

<u>DEF</u> SEA A UN ANILLO, SEA M UN A-MÓDULO, SEA $(m_j)_{j \in J}$ UNA FAMILIA DE GENERADORES DE M, $M = \langle \{m_j, j \in J\} \rangle$. UNA <u>RELACIÓN</u> ENTRE LOS ELEMENTOS m_j $(j \in J)$ ES UN $r \in A^{(J)}$, $r = (r_j)_{j \in J}$, TAL QUE

$$\sum_{j \in J} r_j . m_j = 0 \in M$$

(ES UNA RELACIÓN DE DEPENDENCIA LINEAL ENTRE LOS m_j CON $j \in J$)

<u>DEF</u> SEA A UN ANILLO Y SEAN I, J CONJUNTOS. PARA CADA $i \in I$ SEA DADO $r_i \in A^{(J)}$, $r_i = (r_{ij})_{j \in J}$, $i \in I$.

DEFINIMOS $M = A^{(J)} / \langle \sum_{j \in J} r_{ij} e_j , i \in I \rangle = A^{(J)} / \langle r_i, i \in I \rangle$

PARA CADA $j \in J$, DENOTAMOS $m_j = \overline{e_j} = \pi(e_j)$

DONDE $\pi : A^{(J)} \to M$ ES LA PROYECCIÓN CANÓNICA.

ES CLARO QUE:
- $(m_j)_{j \in J}$ GENERA M (PORQUE $(e_j)_{j \in J}$ GENERA $A^{(J)}$)
- $\forall i \in I$, $r_i \in A^{(J)}$ ES UNA RELACIÓN ENTRE LOS m_j $(j \in J)$, VALE DECIR, SE SATISFACE

$$\sum_{j \in J} r_{ij} m_j = 0 , \quad \forall i \in I$$

DECIMOS QUE M ES EL MÓDULO DADO POR GENERADORES m_j $(j \in J)$ Y RELACIONES r_i $(i \in I)$, $r_i \in A^{(J)}$

PROP (PROPIEDAD UNIVERSAL)

SEAN DADOS A, I, J, $r_i \in A^{(J)}$ PARA $i \in I$, COMO ANTES.
SEA N UN A-MÓDULO CON GENERADORES $(m_j')_{j \in J}$
QUE SATISFACEN LAS RELACIONES r_i, $\forall i \in I$.
ENTONCES EXISTE UN ÚNICO MORFISMO $f: M \to N$
DE A-MÓDULOS TAL QUE $f(m_j) = m_j'$, $\forall j \in J$.

DEM COMO $(e_j)_{j \in J}$ ES BASE DE $A^{(J)}$, SEA
$g: A^{(J)} \to N$ EL ÚNICO MORFISMO TAL QUE
$g(e_j) = m_j$, $\forall j \in J$.
COMO LOS m_j SATISFACEN LAS RELACIONES r_i, $\forall i \in I$,
$g\langle \sum_{j \in J} r_{ij} e_j, i \in I \rangle = 0 \Rightarrow \exists! \bar{g}: M \to N$ MORFISMO
TAL QUE
$$\begin{tikzcd} A^{(J)} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"'] & N \\ M \arrow[ur, "\bar{g}"'] & \end{tikzcd}$$
CONMUTA

$\Leftrightarrow \bar{g}(m_j) = \bar{g}\pi(e_j) = g(e_j) = m_j$ ✓

OBS $r_i \in A^{(J)}$, $r_i = (r_{ij})_{j \in J}$, $i \in I$ DEFINE
$$A^{(I)} \xrightarrow{r} A^{(J)}, \quad r(e_i) = r_i, \ \forall i \in I$$

$\Rightarrow$ $\underline{M = \operatorname{coker}(r)}$

$\Rightarrow$ TENEMOS UNA SUCESIÓN EXACTA
$$A^{(I)} \xrightarrow{r} A^{(J)} \xrightarrow{\pi} M \to 0$$

O SEA,
- π EPI
- $\operatorname{im} r = \ker \pi$

$\Rightarrow M \cong A^{(J)} / \operatorname{im} r$,

PRESENTACIÓN DE M

DEF A ANILLO, $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$
MORFISMOS DE A-MÓDULOS.
SE LLAMA SUCESIÓN EXACTA CORTA
SI $\operatorname{im}(f) = \ker(g)$.

$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \xrightarrow{h} M_4$ SUCESIÓN EXACTA
SI $M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$ Y
$M_2 \xrightarrow{g} M_3 \xrightarrow{h} M_4$ SON EXACTAS
$\Leftrightarrow \operatorname{im}(f) = \ker g$ Y
$\operatorname{im}(g) = \ker h$

EJ SEA $I = J$, $r_i = a_i e_i$ $\forall i \in I$, CON $a_i \in A$.

($\Rightarrow$ $r = (r_{ij})$ ES UNA MATRIZ DIAGONAL $r_{ij} = a_i \cdot \delta_{ij}$)

$$\Rightarrow M = A^{(I)} \Big/ \langle a_i e_i, i \in I \rangle = \bigoplus_{i \in I} \langle e_i \rangle \Big/ \bigoplus_{i \in I} \langle a_i e_i \rangle$$

$$\cong \bigoplus_{i \in I} \langle e_i \rangle \Big/ \langle a_i e_i \rangle \cong \bigoplus_{i \in I} A \Big/ A . a_i$$

OBS UN MÓDULO M PUEDE TENER VARIAS PRESENTACIONES DISTINTAS. P. EJ. SEA $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}_6$ $\overline{1}$ SATISFACE LA RELACIÓN $6 . \overline{1} = 0$ $\overline{1}$ ES GENERADOR, Y $\{\overline{2}, \overline{3}\}$ ES OTRO CONJUNTO DE GENERADORES, CON LAS RELACIONES $3 . \overline{2} = 0$, $2 . \overline{3} = 0$

OBTENEMOS LAS PRESENTACIONES

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{r} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_6 \to 0 \qquad 1 \overset{r}{\longmapsto} 6.1 \qquad (r(m) = 6m)$$
$$1 \overset{\pi}{\longmapsto} \overline{1} \qquad m \in \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{r} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_6 \to 0$$
$$e_1 \longmapsto \overline{2}$$
$$e_2 \longmapsto \overline{3}$$

$$e_1 \longmapsto 3e_1$$
$$e_2 \longmapsto 2e_1$$

DEF SEAN A UN ANILLO, M UN A-MÓDULO, $X \subset M$. DECIMOS QUE X ES UN CONJUNTO QUE GENERA M. DECIMOS QUE X ES UN CONJUNTO DE GENERADORES MINIMAL SI

$$\langle X - \{x\} \rangle \subsetneq M, \quad \forall x \in X.$$

OBS UN A-MÓDULO PUEDE TENER CONJUNTOS DE GENERADORES MINIMALES CON DIFERENTE CARDINAL. P. EJ. $M = \mathbb{Z}_6$, $X = \{\overline{1}\}$, $Y = \{\overline{2}, \overline{3}\}$

OBS SI A ES CUERPO Y M A-ESPACIO VECTORIAL ENTONCES CONJUNTO DE GENERADORES MINIMAL $=$ BASE (Y TODAS TIENEN MISMO CARDINAL)

<u>DEF</u> SEA A UN ANILLO, SEA M UN A-MÓDULO.
UNA <u>PRESENTACIÓN</u> <u>FINITA</u> DE M ES UNA PRESENTACIÓN

$$A^{(I)} \xrightarrow{r} A^{(J)} \xrightarrow{\pi} M \to 0 \qquad r = (r_{ij})_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$$

$r_{ij} \in A$

TAL QUE LOS CONJUNTOS I, J SON FINITOS.

DECIMOS QUE M ES <u>FINITAMENTE</u> <u>PRESENTABLE</u> SI EXISTE UNA PRESENTACIÓN FINITA DE M.

VALE DECIR: EXISTEN GENERADORES $x_1, \dots, x_n$ DE M
$(J = \{1, \dots, n\})$
Y EXISTEN RELACIONES $r_1, \dots, r_m$ ENTRE $x_1, \dots, x_n$
$(I = \{1, \dots, m\})$ $\quad r_i = (r_{ij})_{1 \leq j \leq n}$, $1 \leq i \leq m$, $r_{ij} \in A$.

TAL QUE M ES EL A-MÓDULO CON GENERADORES $x_1, \dots, x_n$ Y RELACIONES $r_1, \dots, r_m$

(O SEA, $A^m \xrightarrow{r} A^n$, $M = A^n / \mathrm{im}(r) = \mathrm{coker}(r)$)

<u>OBS</u> DICHO DE OTRO MODO: $r = (r_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$

S = SUBMÓDULO DE A^n GENERADO POR LAS FILAS DE r
$= \mathrm{im}\, r$

ENTONCES $M = A^n / S$

GENERADORES DE M SON $\overline{e_i}$, $e_i \in A^n$, $i = 1, \dots, n$