VEAMOS QUE LA SUMA ES DIRECTA:

SEA $\sum_{i=1}^{N} m_i = 0$, $m_i \in M(p_i)$, $p_i^{m_i} \cdot m_i = 0$
$(p_i \in \mathcal{P}, m_i \in \mathbb{N})$

QUQ $m_i = 0 \quad \forall i$.

SEA $q_i = \prod_{\substack{j \neq i \\ 1 \leq j \leq N}} p_j^{m_j}$ $\Rightarrow \langle p_i^{m_i}, q_i \rangle = \langle 1 \rangle$

$\Rightarrow \exists r_i, s_i \in A \;/\; 1 = r_i \cdot p_i^{m_i} + s_i \cdot q_i$

$p_i^{m_i} \cdot m_i = 0 \quad \forall i \Rightarrow q_i \cdot m_j = 0 \quad \forall j \neq i$

ADEMÁS, $\sum_i m_i = 0 \Rightarrow m_i = -\sum_{j \neq i} m_j \quad \forall i$

$\Rightarrow q_i \cdot m_i = 0$

$\Rightarrow m_i = 1 \cdot m_i = r_i\, p_i^{m_i} \cdot m_i + s_i \cdot q_i \cdot m_i = 0$ ✓

<u>DEF</u> A DIP, M A-MODULO, $p \in \mathcal{P}$.
SE DICE QUE M ES <u>p-PRIMARIO</u> SI $M = M(p)$
O SEA, $\forall m \in M, \exists n \in \mathbb{N} \;/\; p^n \cdot m = 0$

SI M ES A-MODULO, $M(p)$ SE DENOMINA
LA <u>COMPONENTE</u> <u>p-PRIMARIA</u> DE M.

PROP DICE QUE UN MODULO DE TORSIÓN SOBRE A DIP
ES SUMA DIRECTA DE SUS COMPONENTES p-PRIMARIAS $(p \in \mathcal{P})$.

<u>EJ</u> $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}_{p^\infty}$ (VER PRÁCTICA)

<u>EJ</u> SEA A UN DFU, PARA $a \in A$, $a \neq 0$, $a = u \cdot \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{m_p}$ $(u \in A^*)$
VALE $A/\langle a \rangle (p) \cong A/\langle p^{m_p} \rangle$

<u>DEM</u> ESCRIBAMOS $a = p^{m_p} \cdot b$, $p \nmid b$. SEA $f: A \to A/\langle a \rangle$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\cdot b"'] & A/\langle a \rangle \\ & A \arrow[u, "\pi"'] \end{tikzcd}$$

DONDE $\cdot b$ = MULTIPLICACIÓN POR b
π = PROYECCIÓN CANÓNICA

$\Rightarrow \ker f = \langle p^{m_p} \rangle$ (VERIFICAR) ✓
$\operatorname{im} f = A/\langle a \rangle (p)$

$\Rightarrow$ SI A ES DIP, $a \in A$, $a \neq 0$, $a = u \cdot \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{n_p}$

$$A/\langle a \rangle \cong \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} A/\langle p^{n_p} \rangle$$

DEM A DIP $\Rightarrow$ A DFU $\Rightarrow$ $A/\langle a \rangle (p) \cong A/\langle p^{n_p} \rangle$, $p \in \mathcal{P}$.

$\Rightarrow$ ✓

PROP.
PAG. 89

MATRICES SEA A ANILLO CONMUTATIVO.

SEAN I, J CONJUNTOS. UNA MATRIZ TIPO $I \times J$ CON COEFICIENTES EN A ES UNA FUNCIÓN $\alpha: I \times J \to A$

SE DENOTA $\alpha_{ij} = \alpha(i,j)$, $\alpha = (\alpha_{ij})_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$

SI $I = [r] = \{1, 2, \dots, r\}$, $J = [s] = \{1, \dots, s\}$

DECIMOS QUE α ES UNA MATRIZ DE TIPO $r \times s$

$A^{I \times J} = \{$MATRICES TIPO $I \times J\}$, $A^{r \times s} = A^{[r] \times [s]}$

SI $\alpha \in A^{r \times s}$, $I \subset [r]$, $J \subset [s]$, DENOTAMOS

$\alpha_{I,J} = \alpha|_{I \times J}$, O SEA, $\alpha_{I,J} = (\alpha_{ij})_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$

(FILAS $\in I$, COLUMNAS $\in J$)

DEF PARA $\alpha \in A^{r \times r}$, $\det(\alpha) = \sum_{\sigma \in S_r} sg(\sigma) \prod_{i=1}^{r} \alpha_{i\,\sigma(i)} \in A$

TIENE LAS PROPIEDADES CONOCIDAS DEL CASO $A =$ CUERPO, CON LAS MISMAS DEMOSTRACIONES⊙, QUE TAMBIÉN SE PUEDEN HACER USANDO POTENCIAS EXTERIORES (VER DESPUÉS), P.EJ. $\det(\alpha \cdot \beta) = \det(\alpha) \cdot \det(\beta)$

⊙ VER LANG, P.EJ.

DEF PARA $\alpha \in A^{r \times r}$ SEA $\alpha^* \in A^{r \times r}$ DEFINIDA POR

$\alpha^*_{ij} = (-1)^{i+j} \det \alpha(i,j)$

DONDE $\alpha(i,j) = \alpha_{I,J}$ CON $I = [r] - \{i\}$, $J = [r] - \{j\}$

"COFACTOR DE (i,j) EN α"

PROP $\alpha \cdot \alpha^* = \alpha^* \cdot \alpha = \det(\alpha) \cdot I_r$, $\forall \alpha \in A^{r \times r}$

DONDE $(I_r)_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ MATRIZ IDENTIDAD $r \times r$

DEM EJERCICIO

PROP $\alpha \in A^{n \times n}$

α ES INVERSIBLE EN $A^{n\times n} \iff \det(\alpha)$ ES INVERSIBLE EN A.

DEM

$(\Rightarrow)$ SEA $\beta \in A^{n\times n} \,/\, \alpha.\beta = \beta.\alpha = I_n$

$\Rightarrow \det(\alpha.\beta) = \det(I_n) \Rightarrow \det(\alpha).\det(\beta) = 1$

$\Rightarrow \det(\alpha)$ INVERSIBLE. ✓

$(\Leftarrow)$ SEA $\beta = \dfrac{\alpha^*}{\det(\alpha)} = \det(\alpha)^{-1}.\alpha^*$

$\underset{\text{PROP}}{\Rightarrow} \beta.\alpha = \alpha.\beta = I_n$ ✓

PARA DEMOSTRAR TEO 3 VAMOS A REALIZAR EN $\alpha \in A^{n\times n}$ OPERACIONES ELEMENTALES DE FILAS (Y DE COLUMNAS). DICHAS OPERACIONES COINCIDEN CON MULTIPLICAR α A IZQUIERDA (A DERECHA) POR LAS SIGUIENTES MATRICES ELEMENTALES, QUE SON INVERSIBLES. A TRAVÉS DE UNA SUCESIÓN FINITA DE ESTAS OPERACIONES VAMOS A LLEVAR α A UNA β DIAGONAL.

OPERACIONES ELEMENTALES:

① PERMUTAR FILAS (RESP. COLUMNAS)

PARA $\sigma \in S_n$, α_σ DEFINIDA POR (RESP α^σ)

$[n]\times[n] \xrightarrow{\sigma \times id} [n]\times[n] \xrightarrow{\alpha} A$ (PERMUTAR FILAS)

$[n]\times[n] \xrightarrow{id \times \sigma} [n]\times[n] \xrightarrow{\alpha} A$ (PERMUTAR COLUMNAS)

VERIFICAR: $\det(\alpha_\sigma) = \det(\alpha^\sigma) = sg(\sigma).\det(\alpha)$

$p_{ij} = (I_n)_{(ij)}$ = MATRIZ OBTENIDA DE I_n TRASPONIENDO FILAS i y j

$\Rightarrow \det(p_{ij}) = -1 \Rightarrow p_{ij} \in (A^{n\times n})^*$

α_σ SE OBTIENE MULTIPLICANDO α (A IZQ) POR UNA SUCESIÓN FINITA DE p_{ij}'s, YA QUE σ ES PRODUCTO DE TRASPOSICIONES.

(2) MULTIPLICAR LA FILA j (RESP. COLUMNA j) POR UN $\lambda \in A^*$

= MULTIPLICAR A IZQ. (RESP. DERECHA) POR

$$\mathrm{diag}(1,\dots,1,\underset{\substack{\uparrow \\ \text{LUGAR } j}}{\lambda},1,\dots,1) \in (A^{r\times r})^*$$

(3) REEMPLAZAR FILA i POR FILA $i + \mu \cdot$ FILA j $(j\neq i)$ DONDE $\mu \in A$ (RESP. COLUMNAS)

CORRESPONDE A MULTIPLICAR A IZQ. POR

$$t^{ij}(\mu) = I_r + \mu \cdot e^{ij} \qquad (i\neq j)$$

DONDE $\{e^{ij},\ 1\le i,j\le r\}$ ES LA BASE CANÓNICA DE $A^{r\times r}$,

O SEA, $(e^{ij})_{hk} = \delta_{ih}\cdot\delta_{jk}$

$\Rightarrow \det t^{ij}(\mu) = 1,\ \forall \mu \in A \Rightarrow t^{ij}(\mu) \in (A^{r\times r})^*$

EJ $r=2$, $t^{ij}(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $(i,j)=(1,2)$

DEM DE TEO 3: SEA DADA $\alpha \in A^{r\times s}$.

VAMOS A PROCEDER EN DOS PASOS:

a) EXISTEN MATRICES ELEMENTALES $E_1,\dots,E_n \in A^{r\times r}$, $E_1',\dots,E_m' \in A^{s\times s}$ TALES QUE

$\beta = E_1\dots E_n\cdot\alpha\cdot E_1'\dots E_m'$ ES DIAGONAL, $\beta = \mathrm{diag}(d_1,d_2,\dots,d_R)$

$R = \min\{r,s\}$

b) $\mathrm{diag}(d_1,d_2,\dots,d_R) \equiv \mathrm{diag}(d_1',d_2',\dots,d_R')$

CON $d_1' \mid d_2'$, $d_2' \mid d_3'$, $\dots$, $d_{R-1}' \mid d_R'$.

a) CASO EUCLIDEANO

SUPONGAMOS QUE A ES EUCLIDEANO, CON $\delta : A - \{0\} \to \mathbb{N}$

(P. EJ. $A = \mathbb{Z}$, $A = k[t]$ CON k CUERPO, QUE SON NUESTRAS APLICACIONES PRINCIPALES)

SI $\alpha = 0 \Rightarrow \alpha$ ES DIAGONAL $\Rightarrow$ LISTO.

SI $\alpha \neq 0$, SEA $\delta(\alpha) = \min\{\delta(\alpha_{ij}), \alpha_{ij} \neq 0, \underset{1 \leq j \leq s}{1 \leq i \leq r}, \}$

SEA (i,j) / $\delta(\alpha) = \delta(\alpha_{ij})$

DIVIDO CADA ELEMENTO DE FILA i Y
" " " COLUMNA j POR α_{ij} :

$\alpha_{kj} = \alpha_{ij} \cdot q_{kj} + r_{kj}$ DONDE $r_{kj} = 0$ o $\delta(r_{kj}) < \delta(\alpha_{ij})$
(RESP. COLUMNA)

POR OPERACIÓN ELEMENTAL REEMPLAZO CADA α_{kj} POR r_{kj}
(RESP. COLUMNA)

CASO 1: NUEVA FILA i Y NUEVA COLUMNA j SON NULAS (EXCEPTO EN LUGAR (i,j))

$\Rightarrow$ SIGO CON MATRIZ $(r-1)\times(r-1)$ $\alpha(i,j)$ = COFACTOR DE α_{ij}

PUEDO PERMUTAR PARA LLEVAR (i,j) A $(1,1)$ Y DENOTAR $\alpha_{ij} = d_1$.

CASO 2: VUELVO A CALCULAR $\delta(\alpha)$. ES ESTRICTAMENTE MÁS CHICO QUE EL ANTERIOR.

ITERO. DESPUES DE FINITOS PASOS TENGO QUE LLEGAR A CASO 1.

CASO A PRINCIPAL GENERAL: RESULTA DE UN ALGORITMO SIMILAR. VER GENTILE, ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS II, PÁG. 84.

b) SEA $d = \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_N) \in A^{r \times s}$ (A DIP)

QUEREMOS VER QUE $d \equiv d' = \mathrm{diag}(d_1', \dots, d_N')$

CON $\langle d_1' \rangle \supset \langle d_2' \rangle \supset \dots \supset \langle d_N' \rangle$, y $d_1' = \mathrm{mcd}\{d_1, \dots, d_N\}$.

VEAMOS EL CASO (CLAVE) $r = s = 2$, $d = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$

AFIRMO: $d \equiv d' = \begin{pmatrix} d_1' & 0 \\ 0 & d_2' \end{pmatrix}$ CON $d_1' = \mathrm{mcd}\{d_1, d_2\}$,

$$d_2' = \frac{d_1 . d_2}{d_1'}$$

DEM: TENEMOS $d_1 = d_1' . e_1$

$d_2 = d_1' . e_2$ CON $e_1, e_2 \in A$

y TAMBIÉN $d_1' = r . d_1 + s . d_2$, $r, s \in A$.

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \underset{\text{FILA 1} \mapsto \text{FILA 1} + \text{FILA 2}}{\equiv} \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} r & -e_2 \\ s & e_1 \end{pmatrix}}_{\det = 1} = \begin{pmatrix} d_1' & 0 \\ d_2 . s & d_2' \end{pmatrix}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} d_1' & 0 \\ 0 & d_2' \end{pmatrix} \checkmark$$

VEAMOS EL CASO $r = s = 3$

ESCRIBO $\mathrm{diag}(d_1, d_2, d_3) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{diag}(d_1, d_2, d_3) \equiv \mathrm{diag}(d_1', d_2', d_3) \equiv \mathrm{diag}(d_1'', d_2', d_3')$$

POR EL CASO ANTERIOR, POSICIONES 1 y 2.
$d_1' = \mathrm{mcd}\{d_1, d_2\} \mid d_2'$

$d_1'' = \mathrm{mcd}\{d_1', d_3\}$
$= \mathrm{mcd}\{d_1, d_2, d_3\}$
$d_1'' \mid d_3'$

POR EL CASO ANTERIOR, POSICIONES 1 y 3.

$$\equiv \mathrm{diag}(d_1'', d_2'', d_3'')$$

POR EL CASO ANTERIOR, POSICIONES 2 y 3.

$d_2'' = \mathrm{mcd}\{d_2', d_3'\} \mid d_3''$

$\Rightarrow d_1'' \mid d_2''$, $d_2'' \mid d_3''$ $\checkmark$

CASO GENERAL, POR INDUCCIÓN EN N:

$$\mathrm{diag}(d_1,d_2,\dots,d_N) \equiv \mathrm{diag}(d_1',d_2',d_3,\dots,d_N) \equiv \mathrm{diag}(d_1'',d_2',d_3',\dots,d_N)$$

$d_1' = \mathrm{mcd}\{d_1,d_2\}$ $\quad$ $d_1'' = \mathrm{mcd}\{d_1',d_3\}$

$d_1' \mid d_2'$ $\quad$ $= \mathrm{mcd}\{d_1,d_2,d_3\}$

$d_1'' \mid d_3'$

$\equiv \mathrm{diag}(D_1,D_2,\dots,D_N)$. POR HIPÓTESIS INDUCTIVA,

$D_1 = \mathrm{mcd}\{d_1,\dots,d_N\}$ $\quad$ $\mathrm{diag}(D_2,\dots,D_N) \equiv \mathrm{diag}(D_2',\dots,D_N')$

$D_1 \mid D_j$, $j=2,\dots,N$ $\quad$ CON $D_2' = \mathrm{mcd}\{D_2,\dots,D_N\}$

$D_2' \mid D_3'$, $D_3' \mid D_4'$, $\dots$, $D_{N-1}' \mid D_N'$.

$$D_1 \mid D_j \ (j=2,\dots,N) \Rightarrow D_1 \mid D_2'$$

$$\equiv \mathrm{diag}(D_1,D_2,\dots,D_N) \equiv \mathrm{diag}(D_1,D_2',\dots,D_N')$$

$$D_1 \mid D_2',\ D_2' \mid D_3',\ \dots,\ D_{N-1}' \mid D_N' \quad \checkmark$$

<u>NOTA</u>: EN ARTIN, GENTILE, JACOBSON SE DEMUESTRA b) USANDO NUEVAMENTE EL ALGORITMO DE a).