TEO (HILBERT)

A ANILLO NOETHERIANO $\Rightarrow$ $A[X]$ ES NOETHERIANO

DEM DESPUÉS

COR

1) A NOETHERIANO $\Rightarrow$ $A[X_1,\dots,X_n]$ NOETHERIANO.
EN PARTICULAR, k CUERPO $\Rightarrow$ $k[X_1,\dots,X_n]$ NOETHERIANO

2) A NOETHERIANO, $I\subset A[X_1,\dots,X_n]$ IDEAL
$\Rightarrow$ $A[X_1,\dots,X_n]/I$ ANILLO NOETHERIANO.

DEM

1) $A[X_1,\dots,X_n]\cong A[X_1,\dots,X_{n-1}][X_n]$
+ INDUCCIÓN.

2) POR COR. PAG. 82.

TEO A ARTINIANO $\Rightarrow$ A NOETHERIANO

DEM VER ATIYAH-MACDONALD, COMMUTATIVE ALGEBRA.

MÁS PRECISAMENTE: VALE,

A ARTINIANO $\Leftrightarrow$ A NOETHERIANO y $\dim(A)=0$

DEF $\dim(A)=\sup\{m\in\mathbb{N} \,/\, \exists$ CADENA $P_0\subsetneq P_1\subsetneq\cdots\subsetneq P_m\}$
CON $P_i\subset A$ IDEAL PRIMO

$\dim(A)=0$ $\Leftrightarrow$ TODO PRIMO EN A ES MAXIMAL.

EJS DE ANILLOS ARTINIANOS.

1) A DOMINIO ARTINIANO $\Leftrightarrow$ A CUERPO

DEM ($\Leftarrow$) ✓
($\Rightarrow$) SEA $a\in A$, $a\neq 0$. QVQ a ES INVERSIBLE.
$I_n=\langle a^n\rangle$, $n\in\mathbb{N}$ $\quad I_n\supset I_{n+1}$
$\Rightarrow \exists n \,/\, \langle a^n\rangle=\langle a^{n+1}\rangle \Rightarrow a^n=\alpha.a^{n+1}$, $\alpha\in A$
$\Rightarrow 1=\alpha.a$ ✓

2) k CUERPO, A k-ALGEBRA CON $\dim_k A<\infty$
$\Rightarrow$ A ES ARTINIANO.

EJ $A=k[X]/\langle X^n\rangle \Rightarrow \dim_k A=n$

EJ $A=k[x,y]/\langle x,y\rangle^n$, $\langle x,y\rangle^n=\langle x^n,x^{n-1}y,\dots,xy^{n-1},y^n\rangle$

3) A_i ARTINIANO, $i=1,\dots,r$ $\Rightarrow$ $A=\displaystyle\prod_{i=1}^{r}A_i$ ES ARTINIANO

TEO (HILBERT) A NOETHERIANO $\Rightarrow$ $A[X]$ NOETHERIANO

DEM SEA $J \subset A[X]$ IDEAL, QVQ J ES FINITAMENTE GENERADO.

PARA $m \in \mathbb{N}$, SEA $J_m = \{a \in A \,/\, \exists f \in J,\ f = a x^m + a_{m-1} \cdot x^{m-1} + \dots\}$

$J_m \subset A$ ES IDEAL (CLARO).

$J_m \subset J_{m+1}$: $a \in J_m \Rightarrow \exists f \in I,\ f = a x^m + \dots$

$\Rightarrow x f \in I,\ x f = a x^{m+1} + \dots \Rightarrow a \in J_{m+1}$.

A NOETHERIANO $\Rightarrow$ $(J_m)_{m \in \mathbb{N}}$ ES ESTACIONARIA.

SEA $N \in \mathbb{N}$ / $J_m = J_N \ \forall m \geq N$.

A NOETHERIANO $\Rightarrow$ CADA J_m ES FINITAMENTE GENERADO

$\Rightarrow J_m = \langle a_m^1, \dots, a_m^{r(m)} \rangle$

Y EXISTEN $f_m^1, \dots, f_m^{r(m)} \in J$ / $f_m^i = a_m^i x^m + \dots$

AFIRMO: $J = \langle f_m^j,\ 1 \leq j \leq r(m),\ 0 \leq m \leq N \rangle$

SEA $f \in J$, $gr(f) = d$, $f = a_d \cdot x^d + \dots + a_0$.

INDUCCIÓN EN d.

$d = 0 \Rightarrow f = a_0 \in J_0 \Rightarrow f \in \langle f_0^j,\ 1 \leq j \leq r(0) \rangle$ ✓

PASO INDUCTIVO: SUP. ENUNCIADO $\forall g \in J,\ gr(g) < d$.

SI $d \leq N$, COMO $a_d \in J_d$, TENEMOS $a_d = \sum_{j=1}^{r(d)} b_j a_d^j$ CON $b_j \in A$.

$\Rightarrow gr\left(f - \sum_{j=1}^{r(d)} b_j f_d^j\right) < d \Rightarrow f - \sum_j b_j f_d^j \in \langle f_m^j \rangle$

$\Rightarrow f \in \langle f_m^j \rangle$ ✓

SI $d > N \Rightarrow a_d \in J_d = J_N \Rightarrow a_d = \sum_{j=1}^{r(N)} b_j a_N^j$

$\Rightarrow gr\left(f - x^{d-N} \cdot \sum_{j=1}^{r(N)} b_j f_N^j\right) < d$

$\Rightarrow f \in \langle f_m^j \rangle$ ✓

OBS CON DEMOSTRACIÓN SIMILAR, VALE:

- A NOETHERIANO $\Rightarrow$ $A[[X_1,\dots,X_n]]$ NOETHERIANO.
- C_n = SUBANILLO DE $\mathbb{C}[[X_1,\dots,X_n]]$ DE SERIES CON RADIO DE CONVERGENCIA POSITIVO, ES NOETHERIANO.

COMENTARIO SOBRE INVARIANTES:

$GL(n,K)$ ACTÚA EN $K[X_1,\dots,X_n]$ (K CUERPO):

PARA $g \in GL(n,K)$, $P \in K[X_1,\dots,X_n]$, $g \cdot P = P \circ g$

$K^n \xrightarrow{g} K^n \xrightarrow{P} K$

$\Rightarrow$ $\forall$ SUBGRUPO $G < GL(n,K)$, G ACTÚA EN $K[X_1,\dots,X_n]$.

SEA $k[X_1,\dots,X_n]^G = \{ P \in k[X_1,\dots,X_n] \,/\, g \cdot P = P, \ \forall g \in G \}$

EL ANILLO DE POLINOMIOS G-INVARIANTES.

TIENE INTERÉS DETERMINAR SI $k[X_1,\dots,X_n]^G$ ES FINITAMENTE GENERADO COMO k-ÁLGEBRA.

LA NOCIÓN DE ANILLO NOETHERIANO ES RELEVANTE.

REF.: DIEUDONNE-CARRELL, INVARIANT THEORY, OLD AND NEW.