Ejercicios para entregar

Maria Dorda
Yuri Kunik

Ejercicio 18:

Enunciado:

Dada una familia de grupos abelianos $\{G_n\}_{n\geq 2}$, construir un CW-complejo simplemente conexo X tal que $H_n(X) = G_n \; \forall n \geq 2$.

Demostración

Por el teorema de estructura, sabemos que todo grupo abeliano finitamente generado, G, es de la forma

$$G = \mathbb{Z}^n \bigoplus_{i=1}^{t} \mathbb{Z}_{q_i},$$

con q_i una potencia de algún primo. Si podemos un CW-complejo que tenga como homología cada uno de los sumandos, podemos conseguir un espacio que tenga al grupo G como H_n tomando la wedge sum.
Vamos a dividir el problema en 2 casos:

1. CW-complejo con $H_n = \mathbb{Z}_m$:
   Tomamos S^n como CW-complejo y le adjuntamos una $n+1$-celda e^{n+1} mediante la función de adjunción $\varphi : S^n \to S^n$ con grado m. Llamando a este espacio X_m el complejo de cadenas celular $C_*(X_m)$ es:

$$\dots \xrightarrow{d_{n+2}} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_{n+1}} \mathbb{Z} \xrightarrow{d_n} 0 \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Por la fórmula para el morfismo de borde, sabemos que :

$$d_{n+1}(e^{n+1}) = deg(\varphi)e^n = me^n.$$

Tomando homología tenemos:

$$H_n(X_m) = \frac{ker(d_n)}{Im(d_{n+1})} = \frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}_m}$$

$$H_k(X_m) = 0 \forall k \geq 2, k \neq n$$

2. CW-comlpejo con $H_n = \mathbb{Z}$:
   Tomamos S^n como CW-complejo y sin adjuntar nada más tenemos que:

$$H_k(S^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \text{ y } k \geq 2 \\ \mathbb{Z} & k = n \end{cases}$$

Ahora, dado un grupo G abeliano finitamente generado y un $k \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\begin{aligned} G &= \mathbb{Z}^n \bigoplus_{i=1}^{t} \mathbb{Z}_{q_i} \\ &= H_k(S^k)^n \bigoplus_{i}^{t} H_k(X_{q_i}) \\ &= H_k(\vee_{i=1}^n S^k \bigvee_{i}^{t} X_{q_i}) \\ &= H_k(X_G) \end{aligned}.$$

Para finalizar, en el caso de tener una cadena de grupos abelianos finitamente generados, $\{G_n\}_{n\geq 2}$, tomamos $X = \vee_{n=2} X_{G_n}$.

□

Ejercicio 19:

Enunciado:

Sea $n \in \mathbb{Z}$. Probar que existe una única función ϕ que le asigna a cada CW-complejo finito un entero tal que

1. $\phi(X)$ = $\phi(Y)$ si X e Y son homeomorfos.
2. $\phi(X) = \phi(A) + \phi(X/A)$ si A es subcomplejo de X.
3. $\phi(S^0) = n$

   Probar además que tal función debe cumplir que $\phi(X) = \phi(Y)$ si $X \simeq Y$.

Demostración

Existencia

$$\phi(X) = n(\chi(X) - 1)$$

Es claro que cumple a) y c). Para b), sea X un CW-complejo y A un subcomplejo de X. X/A tiene estructura de CW-complejo con n-celdas pegadas por $q \circ \varphi_\alpha$ y $(X/A)^{(0)} = X^{(0)}/A^{(0)}$. De esta construcción se ve que la cantidad de n-celdas de X/A es la cantidad de n-celdas de X menos las de A salvo en $n = 0$ donde tenemos una extra que corresponde a la clase de equivalencia de $[A]$. Con esto

$$
\begin{aligned}
\phi(X/A) &= n(\chi(X/A)-1)\\
&= n\left(\sum_m \#\text{m-celdas de X/A} - 1\right)\\
&= n\left(\sum_m \#\text{m-celdas de } X - \#\text{m-celdas de } A + 1 - 1\right)\\
&= n\left(\sum_m \#\text{m-celdas de } X - 1\right) - n\left(\sum_m \#\text{m-celdas de } A - 1\right)\\
&= \phi(X) - \phi(A).
\end{aligned}
$$

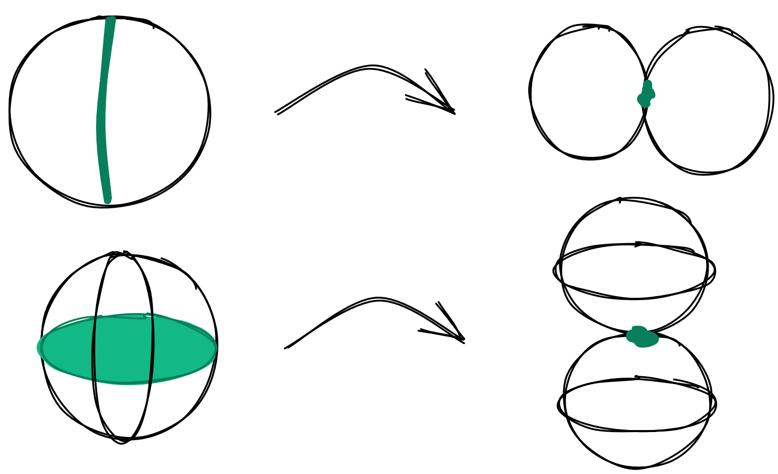
Unicidad

Sea φ una función que cumpla los items del enunciado. Veamos que φ tiene que separar los wedges finitos en sumas:

$$
\begin{aligned}
\varphi(A \vee B) &= \varphi(A) + \varphi((A \vee B)/A)\\
&= \varphi(A) + \varphi(B).
\end{aligned}
$$

En la última igualdad usamos que φ se preserva por homeomorfismos. Vamos a ver que la φ coincide con ϕ en las esferas (los CW-complejos más simples). Entonces $\varphi(S^0) = n$, para $\varphi(S^1) = \varphi(S^0) + \varphi(S^1/S^0) = n + \varphi(S^1 \vee S^1) = n + 2\varphi(S^1)$. Con esto podemos concluir que, $\varphi(S^1) = -n$. Inductivamente, usando que $\varphi(S^n/S^{n-1}) = \varphi(S^n \vee S^n)$, obtenemos

$$
\varphi(S^k) = \begin{cases} n & \text{k es par} \\ -n & \text{k es impar} \end{cases}
$$



Tomando un CW-complejo arbitrario. Si las 0-celdas son $\{x_i\}_{i=1}^m$ entonces

$$
\begin{aligned}
\varphi(\{x_i\}_{i\geq 1}) &= \varphi(S^0) + \varphi(\{x_i\}_{i\geq 1}/S^0)\\
&= n + \varphi(\{x_i\}_{i\geq 2})\\
&= n + \varphi(S^0) + \varphi(\{x_i\}_{i\geq 2}/S^0)\\
&= 2n + \varphi(\{x_i\}_{i\geq 3})\\
&= \vdots\\
&= (m-1)n.
\end{aligned}
$$

Si $X^{(l)} = X$,

$$
\begin{aligned}
\varphi(X^{(l)}) &= \varphi(X^{(l)}/X^{(l-1)}) + \varphi(X^{(l-1)})\\
&= \varphi(\bigvee_{m\leq \# l-\text{celdas}} S^l) + \varphi(X^{(l-1)})\\
&= (-1)^l \#\{l\text{-celdas}\}n + \varphi(X^{(l-1)}/X^{(l-2)}) + \varphi(X^{(l-2)})\\
&= (-1)^l \#\{l\text{-celdas}\}n + (-1)^{l-1}\#\{l-1\text{-celdas}\}n + \varphi(X^{(l-2)})\\
&= \sum_{i=1}^{l}(-1)^i \#\{l\text{-celdas}\}n + \varphi(X^0)\\
&= \sum_{i=1}^{l}(-1)^i \#\{l\text{-celdas}\}n + (\#\{0\text{-celdas}\} - 1)n\\
&= \phi(X).
\end{aligned}
$$

Que la ϕ sea preservada por equivalencias homotópicas viene de que χ cumple esto.

Ejercicio 21:

Enunciado:

Probar que toda función continua $f : S^n \to S^n$ es homotópica a una que tiene algún punto fijo.

Demostración:

Supongamos que f no tiene puntos fijos (caso contrario ya estamos). En la teórica vimos que si dos funciones $f,\ g$ no coinciden en ningún punto, entonces $f \approx A \circ g$. Tomando a g como la identidad, al f no tener puntos fijos, $f(x) \neq id(x)\ \forall x$ entonces $f \approx A \circ id = A$. Basta ver que tenemos una función g con algún punto fijo, homotópica a A. Llamemos a la rotación por un ángulo θ,

$$
r(\theta) = \begin{pmatrix}
\cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & \dots & 0\\
-\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & \dots & 0\\
0 & 0 & 1 & & 0\\
\vdots & & & \ddots & \vdots\\
0 & \dots & \dots & & 1
\end{pmatrix}.
$$

Moviendo el ángulo entre 0 y π obtenemos una homotopía para las funciones A y $r(\pi) \circ A$. Con esto ya estamos dado que $r(\pi) \circ A(1, 0 \ldots, 0) = r(\pi)(-1, 0, \ldots, 0) = (1, 0, \ldots, 0)$.

$\square$