DEM. DE TEO 1:

SEA A DIP, SEA M UN A-MÓDULO FINITAMENTE GENERADO.

$\underset{\text{PAG. 92}}{\Rightarrow}$ M ES FINITAMENTE PRESENTADO $\Rightarrow \exists\, \alpha \in A^{r \times s}$

TAL QUE $M \cong \operatorname{coker} \tilde{\alpha}$:

$$A^s \xrightarrow{\tilde{\alpha}} A^r \xrightarrow{\pi} M \to 0$$

$\underset{\text{TEO 3}}{\Rightarrow} \exists\, \beta = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_N)$, $\langle d_1 \rangle \supset \langle d_2 \rangle \supset \dots \supset \langle d_N \rangle$ /

$$\alpha \equiv \beta$$

$\underset{\text{PAG. 93}}{\Rightarrow} \quad M \underset{\text{PROP.}}{\cong} \operatorname{coker} \tilde{\beta} \underset{\text{EJ.}}{\cong} \bigoplus_{i=1}^{N} A/\langle d_i \rangle$ ✓

ANTES DE DEMOSTRAR TEO 2, VEAMOS ALGUNAS CONSECUENCIAS DE TEO 1.

COR 1 CON LA NOTACIÓN DE TEO 1, SEA

$$M \cong \bigoplus_{i=1}^{N} A/\langle d_i \rangle$$

$\langle d_1 \rangle \supset \langle d_2 \rangle \supset \dots \supset \langle d_N \rangle$

SEA m TAL QUE $d_i \neq 0$ PARA $i \leq m$

$d_i = 0$ PARA $i > m$

$$\Rightarrow M \cong A/\langle d_1 \rangle \oplus \dots \oplus A/\langle d_m \rangle \oplus A^{N-m} \quad , \; d_i \neq 0$$

$(m = 0 \Rightarrow M \cong A^N)$

ENTONCES:

$t(M) \cong A/\langle d_1 \rangle \oplus \dots \oplus A/\langle d_m \rangle$ Y

$M/t(M) \cong A^{N-m}$

EN PARTICULAR, $M/t(M)$ ES LIBRE.

COR 2 A DIP, M FIN. GEN.

M ES LIBRE $\iff t(M)=0$.

DEM ($\Rightarrow$) $M \cong A^n \Rightarrow t(M) \cong t(A^n) = 0$ ✓

($\Leftarrow$) $t(M)=0 \underset{\text{COR } 1}{\Longrightarrow} M = M/t(M)$ ES LIBRE. ✓

COR 3 A DIP, $M \subset A^n$ SUBMÓDULO $\Rightarrow$ M ES LIBRE.

DEM A DIP $\Rightarrow$ A NOETHERIANO $\Rightarrow$ TODO $M \subset A^n$ ES FINITAMENTE GENERADO.

ADEMÁS, $M \subset A^m \Rightarrow t(M) \subset t(A^n) = 0 \Rightarrow t(M)=0$

$\underset{\text{COR } 2}{\Longrightarrow}$ M ES LIBRE ✓

A CONTINUACIÓN COMBINAMOS TEO 1 CON LA DESCOMPOSICIÓN p-PRIMARIA (PAG. 90, EJ.)

SEA $M = \bigoplus_{i=1}^{m} A/\langle d_i \rangle \oplus A^{N-m}$, $\langle d_1 \rangle \supset \langle d_2 \rangle \supset \cdots \supset \langle d_m \rangle \underset{\neq}{\supset} \{0\}$

SEA $\mathcal{P}$ UN CONJUNTO DE REPRESENTANTES DE LOS ELEMENTOS IRREDUCIBLES DE A.

DENOTEMOS $\{p_1, p_2, \ldots, p_t\} = \{p \in \mathcal{P} / p \mid d_m\}$

$\supset \{p \in \mathcal{P} / p \mid d_i\}$, $i=1,\ldots,m$.

$\Rightarrow d_i = u_i \cdot \prod_{j=1}^{t} p_j^{e_{ij}}$, $u_i \in A^*$, $e_{ij} \in \mathbb{N}$.

OBS $d_i \mid d_{i+1} \Rightarrow e_{ij} \leq e_{i+1\, j}$, $\forall j$.

POR PAG. 90 TENEMOS

$$A/\langle d_i \rangle \cong \bigoplus_{j=1}^{t} A/\langle p_j^{e_{ij}} \rangle$$

OBTENEMOS:

<u>COR 4</u> $$M \cong \bigoplus_{i=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{t} A/\langle p_j^{e_{ij}} \rangle$$

$$\cong \bigoplus_{j=1}^{t} \bigoplus_{i=1}^{m} A/\langle p_j^{e_{ij}} \rangle$$

CON $e_{ij} \leq e_{i+1\,j}$, $\forall j$.

<u>OBS</u> $M(p_j) = \bigoplus_{i=1}^{m} A/\langle p_j^{e_{ij}} \rangle$ = COMPONENTE p_j-PRIMARIA DE M.

<u>EJ</u> $A = \mathbb{Z}$: ESTRUCTURA DE GRUPOS ABELIANOS FINITAMENTE GENERADOS.

<u>EJ</u> $A = k[t]$ (k CUERPO): FORMAS CANÓNICAS DE MATRICES $\in k^{r \times r}$ BAJO LA RELACIÓN DE SEMEJANZA ($A \sim B \iff \exists P \in Gl_n(k) \,/\, B = P.A.P^{-1}$): DESPUÉS.

DEM. DE TEO 2

SEAN $M = \bigoplus_{i=1}^{m} A/\langle d_i\rangle \oplus A^r$, $\langle d_1\rangle \supset \langle d_2\rangle \supset \cdots \supset \langle d_m\rangle$

$M' = \bigoplus_{j=1}^{m'} A/\langle d'_j\rangle \oplus A^{r'}$, $\langle d'_1\rangle \supset \langle d'_2\rangle \supset \cdots \supset \langle d'_{m'}\rangle$

$d_i \neq 0,\ d_i \notin A^*$

$d'_j \neq 0,\ d'_j \in A^*$

Y SEA $f: M \to M'$ UN ISOMORFISMO.

QUEREMOS VER: $r = r'$, $m = m'$, $\langle d_i\rangle = \langle d'_i\rangle \ \forall i$.

COMO $f(t(M)) = t(M')$ $\Rightarrow$ $f: \bigoplus_{i=1}^{m} A/\langle d_i\rangle \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{j=1}^{m'} A/\langle d'_j\rangle$

TAMBIÉN, $\bar{f}: M/_{t(M)} \xrightarrow{\cong} M'/_{t(M')}$

$\Rightarrow$ $\bar{f}: A^r \to A^{r'}$ ISO $\Rightarrow$ (RANGO) $\boxed{r = r'}$

ADEMÁS, PARA CADA $p \in \mathcal{P}$, $f(M(p)) = M'(p)$

$\Rightarrow$ $\bigoplus_{i=1}^{m} A/\langle d_i\rangle(p) \cong \bigoplus_{j=1}^{m'} A/\langle d'_j\rangle(p)$

COMO EN PAG. 101, SEA $e_i = v_p(d_i)$ $(p^{e_i} \mid d_i,\ p^{e_i+1} \nmid d_i)$

$e'_j = v_p(d'_j)$

$\Rightarrow$ $\bigoplus_{i=1}^{m} A/_{\langle p^{e_i}\rangle} \xrightarrow{f} \bigoplus_{j=1}^{m'} A/_{\langle p^{e'_j}\rangle}$, f ISO

$1 \leq e_1 \leq e_2 \leq \cdots \leq e_m$ $\qquad$ $1 \leq e'_1 \leq e'_2 \leq \cdots \leq e'_{m'}$

QVQ: $m = m'$, $e_i = e'_i$ $\forall i$.

PARA M A-MÓDULO Y $p \in A$
TENEMOS UNA CADENA DE SUBMÓDULOS

$$M \supset p \cdot M \supset p^2 M \supset p^3 M \supset \cdots$$

Y LOS COCIENTES SUCESIVOS $p^e M / p^{e+1} M$.

COMO $p \cdot \left(p^e M / p^{e+1} M \right) = 0$,

$p^e M / p^{e+1} M$ TIENE ESTRUCTURA DE $A/\langle p \rangle$ -MÓDULO.

SI $f: M \to N$ ES UN ISO, $f(p^e M) = p^e N$

$$\Rightarrow \bar{f}: \frac{p^e M}{p^{e+1} M} \to \frac{p^e N}{p^{e+1} N} \quad \text{ES ISO}$$

DE A-MÓDULOS, Y DE $A/\langle p \rangle$ -MÓDULOS (VERIFICAR)

CALCULEMOS $\frac{p^e M}{p^{e+1} M}$ PARA $M = A/\langle p^{e_i} \rangle$:

$e \geq e_i$: $\Rightarrow p^e M = 0 \Rightarrow p^e M / p^{e+1} M = 0$

$e < e_i$: $\Rightarrow p^e M = p^e \cdot A/\langle p^{e_i} \rangle = \langle p^e \rangle / \langle p^{e_i} \rangle$

$$p^{e+1} M = \langle p^{e+1} \rangle / \langle p^{e_i} \rangle$$

$$\Rightarrow \frac{p^e M}{p^{e+1} M} = \frac{\langle p^e \rangle / \langle p^{e_i} \rangle}{\langle p^{e+1} \rangle / \langle p^{e_i} \rangle} \cong \langle p^e \rangle / \langle p^{e+1} \rangle$$

$$\cong A/\langle p \rangle \quad \text{(VERIFICAR)}$$

ENTONCES PARA $M = \bigoplus_{i=1}^{m} A/\langle p^{e_i} \rangle$ OBTENEMOS, PARA CADA e,

$$\frac{p^e M}{p^{e+1} M} \cong \bigoplus_{\substack{i / \\ e_i > e}} A/\langle p \rangle = \left(A/\langle p \rangle \right)^{m(e)}$$

$$m(e) = \# \{ i \,/\, e_i > e \}$$

SIMILARMENTE PARA M'

$$\frac{p^e M'}{p^{e+1} M'} \cong (A/\langle p \rangle)^{m'(e)} \quad , \quad m'(e) = \#\{j \,/\, e'_j > e\}$$

$$\odot \Rightarrow (A/\langle p \rangle)^{m(e)} \cong (A/\langle p \rangle)^{m'(e)}$$

$$\Rightarrow \text{(RANGO)} \quad m(e) = m'(e), \ \forall e \geq 0$$

$$\Rightarrow m = m', \ e_i = e'_i \ \forall i \quad \text{(VERIFICAR)} \quad \checkmark$$

VALE EL SIGUIENTE RESULTADO MÁS GENERAL:

TEO 2+ SEA A UN ANILLO CONMUTATIVO.

SEAN $A \supsetneq I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_m$ IDEALES DE A.

$A \supsetneq I'_1 \supset I'_2 \supset \cdots \supset I'_{m'}$

SEAN $M = \bigoplus_{i=1}^{m} A/I_i$, $\quad M' = \bigoplus_{j=1}^{m'} A/I'_j$

SI EXISTE UN ISOMORFISMO $f: M \to M'$

ENTONCES $m = m'$, $I_i = I'_i$, $\forall i$.

DEM