PROP A DIP $\Rightarrow$ A DFU (PAG. 42)

DEM FALTABA VER: A DIP $\Rightarrow$ 1) = TODO $a \in A$ $(a \neq 0, a \notin A^*)$ ES PRODUCTO DE IRREDUCIBLES.

OBSERVEMOS QUE A DIP $\Rightarrow$ A NOETHERIANO

(TODO IDEAL DE A ES PRINCIPAL $\Rightarrow$
TODO IDEAL DE A ES FINITAMENTE GENERADO)

SEA $a \in A$, $a \neq 0$, $a \notin A^*$.

AFIRMO: EXISTE $p \in A$ IRREDUCIBLE / $p \mid a$.

SEA $\mathcal{C}$ EL CONJUNTO DE IDEALES (PRINCIPALES, A ES DIP) PROPIOS DE A QUE CONTIENEN A $\langle a \rangle$.

$\mathcal{C} \neq \emptyset$ PORQUE $\langle a \rangle \in \mathcal{C}$.

A NOETHERIANO $\Rightarrow$ $\exists \langle p \rangle \in \mathcal{C}$ MAXIMAL.

COMO $\langle p \rangle \supset \langle a \rangle$, VALE $p \mid a$.

COMO $\langle p \rangle \in \mathcal{C}$ ES MAXIMAL, VALE QUE p ES IRREDUCIBLE:

SI $d \mid p$, $d \notin A^*$ $\Rightarrow$ $\langle d \rangle \supset \langle p \rangle \supset \langle a \rangle$ $\Rightarrow$ $\langle d \rangle \in \mathcal{C}$ $\Rightarrow$ $\langle d \rangle = \langle p \rangle$

$\Rightarrow$ $d \sim p$ $\Rightarrow$ p IRREDUCIBLE.

ENTONCES TENEMOS $a = p \cdot a_1$ CON $a_1 \in A$.

SI $a_1 \in A^*$, LISTO (a ES PRODUCTO DE IRREDUCIBLES)

SI $a_1 \notin A^*$, APLICAMOS LO ANTERIOR CON a_1 $\Rightarrow$

$a_1 = p_1 \cdot a_2$, $a_2 \in A$, p_1 IRREDUCIBLE $(\Rightarrow a = p \cdot p_1 \cdot a_2)$, $\langle a \rangle \subsetneq \langle a_1 \rangle \subsetneq \langle a_2 \rangle$

ITERANDO OBTENEMOS $\langle a \rangle \subsetneq \langle a_1 \rangle \subsetneq \cdots \subsetneq \langle a_n \rangle$.

EN ALGÚN PASO DEBE SER $a_n \in A^*$ ($\Rightarrow$ a ES PRODUCTO DE n IRREDUCIBLES)

CASO CONTRARIO TENDRÍAMOS UNA CADENA DE IDEALES CRECIENTE NO ESTACIONARIA ✓

Scanned with CamSca

MÓDULOS DE TORSIÓN SOBRE UN DIP

SEAN A UN ANILLO, M UN A-MÓDULO, $a \in A$.

DENOTAMOS $M(a) = \{ m \in M \,/\, a^n . m = 0 \text{ PARA ALGÚN } n \in \mathbb{N} \}$.

$\Rightarrow M(a) \subset t(M)$ PARA $a \neq 0$.

SEA A UN DIP. DENOTAMOS (COMO EN PÁG. 42)

$\mathcal{P} \subset A$ UN CONJUNTO DE REPRESENTANTES DE LAS CLASES DE ELEMENTOS IRREDUCIBLES.

PROP SEA A UN DIP, SEA M UN A-MÓDULO DE TORSIÓN. ENTONCES $M = \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} M(p)$.

DEM SEA $m \in M$.

$An(m) = \{ a \in A / a.m = 0 \}$ ES IDEAL $\neq 0 \Rightarrow$

$\exists a \in A, a \neq 0, An(m) = \langle a \rangle$.

$a = u . \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{n_p}$, $(n_p)_{p \in \mathcal{P}}$ CON SOPORTE FINITO S ($n_p \in \mathbb{N}$)

SEA $a_p = \dfrac{a}{p^{n_p}} = u . \prod_{\substack{q \in \mathcal{P} \\ q \neq p}} q^{n_q}$ $\quad (p \in S)$

COMO LOS a_p $(p \in \mathcal{P})$ SON COPRIMOS (NINGÚN PRIMO DIVIDE A TODOS)

$\langle a_p, p \in \mathcal{P} \rangle = 1 \Rightarrow \exists\, b_p \ (p \in \mathcal{P}) \,/\, \sum_{p \in S} a_p . b_p = 1$

$$\Rightarrow m = \sum_{p \in S} a_p . b_p . m$$

$p^{n_p} . a_p = a \Rightarrow p^{n_p} . a_p . m = a . m = 0 \Rightarrow a_p . m \in M(p)$

$$\Rightarrow m = \sum_{p \in S} b_p . (a_p . m) \in \sum_{p \in S} M(p) \subset \sum_{p \in \mathcal{P}} M(p)$$

$$\Rightarrow M = \sum_{p \in \mathcal{P}} M(p).$$

Scanned with CamSca

VEAMOS QUE LA SUMA ES DIRECTA:

SEA $\sum_{i=1}^{N} m_i = 0$, $m_i \in M(p_i)$, $p_i^{m_i} \cdot m_i = 0$

$(p_i \in \mathcal{P}, m_i \in \mathbb{N})$

QVQ $m_i = 0 \quad \forall i$.

SEA $\boxed{q_i = \prod_{\substack{j \neq i \\ 1 \leq j \leq N}} p_j^{m_j}}$ $\Rightarrow \langle p_i^{m_i}, q_i \rangle = 1$

$\Rightarrow \exists r_i, s_i \in A \; / \; 1 = r_i \cdot p_i^{m_i} + s_i \cdot q_i$

$p_i^{m_i} \cdot m_i = 0 \quad \forall i \quad \Rightarrow \quad q_i \cdot m_j = 0 \quad \forall j \neq i$

ADEMÁS, $\sum_i m_i = 0 \quad \Rightarrow \quad m_i = -\sum_{j \neq i} m_j \quad \forall i$

$\Rightarrow \quad q_i \cdot m_i = 0$

$\Rightarrow \quad m_i = 1 \cdot m_i = r_i \, p_i^{m_i} \cdot m_i + s_i \cdot q_i \cdot m_i = 0$ ✓

DEF A DIP, M A-MODULO, $p \in \mathcal{P}$.
SE DICE QUE M ES p-PRIMARIO SI $M = M(p)$
O SEA, $\forall m \in M$, $\exists n \in \mathbb{N} \; / \; p^n \cdot m = 0$

SI M ES A-MODULO, $M(p)$ SE DENOMINA
LA COMPONENTE p-PRIMARIA DE M.

PROP DICE QUE UN MODULO DE TORSIÓN SOBRE A DIP
ES SUMA DIRECTA DE SUS COMPONENTES p-PRIMARIAS $(p \in \mathcal{P})$.

EJ $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \bigoplus_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}_{p^\infty}$ (VER PRÁCTICA)

Scanned with CamScanner

TEOREMA DE ESTRUCTURA DE MODULOS FINITAMENTE GENERADOS SOBRE UN DIP.

TEO 1 SEA A UN DIP. SEA M UN A-MODULO FINITAMENTE GENERADO. ENTONCES EXISTEN $m \in \mathbb{N}$ Y $d_1, d_2, \dots, d_m \in A$ TALES QUE

a) $M \cong A/\langle d_1 \rangle \oplus A/\langle d_2 \rangle \oplus \dots \oplus A/\langle d_m \rangle$

b) $d_1 | d_2,\ d_2 | d_3,\ \dots,\ d_{m-1} | d_m$

(O SEA, $\langle d_1 \rangle \supset \langle d_2 \rangle \supset \dots \supset \langle d_m \rangle$)

TEO 2 (UNICIDAD EN TEO 1) SEA A UN DIP.

SEAN $(m; d_1, \dots, d_m)$, $(m', d_1', \dots, d_{m'}')$

$m, m' \in \mathbb{N}$, $d_i, d_i' \in A$, $\langle d_1 \rangle \supset \dots \supset \langle d_m \rangle$

$\langle d_1' \rangle \supset \dots \supset \langle d_{m'}' \rangle$

SUP. $d_i, d_i' \notin A^*$.

SI $M = \bigoplus_{i=1}^{m} A/\langle d_i \rangle \cong M' = \bigoplus_{i=1}^{m'} A/\langle d_i' \rangle$

ENTONCES $m = m'$ Y $\langle d_i \rangle = \langle d_i' \rangle$ $\forall i = 1, \dots, m$ $(d_i \sim d_i')$

OBS A DIP, M A-MOD. FINITAMENTE GENERADO.

$\Rightarrow M \cong \bigoplus_{i=1}^{m} A/\langle d_i \rangle$, $\langle d_1 \rangle \supset \dots \supset \langle d_m \rangle$ $(d_i \notin A^*)$

ESTOS $d_i \in A$ (ÚNICOS, SALVO ASOCIADOS) SE LLAMAN LOS DIVISORES ELEMENTALES DE M

Scanned with CamSca

PARA DEMOSTRAR TEO1, TEO2 VAMOS A TRABAJAR CON PRESENTACIONES DE M (O SEA, CON MATRICES).

PROP SEA A UN ANILLO NOETHERIANO. ENTONCES TODO A-MODULO FINITAMENTE GENERADO ES FINITAMENTE PRESENTADO.

DEM SEA M A-MOD. FIN. GEN.

ELIJAMOS $m_1, \dots, m_r \in M$ GENERADORES, $M = \langle m_1, \dots, m_r \rangle$

$\Rightarrow$ TENEMOS UN EPI

$$A^r \xrightarrow{\varphi} M \to 0$$

$\varphi(e_i) = m_i$, $\{e_i\}$ BASE CANONICA DE A^r

$\left(\Rightarrow \varphi(a_1, \dots, a_r) = \sum_{i=1}^{r} a_i m_i\right)$

SEA $S = \ker \varphi \subset A^r$

A NOETH $\Rightarrow$ S ES FINITAMENTE GENERADO

ELIJAMOS $\sigma_1, \dots, \sigma_s \in S$ GENERADORES

$\Rightarrow$ TENEMOS UN EPI

$$A^s \xrightarrow{\psi} S \to 0$$

$$\psi(b_1, \dots, b_s) = \sum_{i=1}^{s} b_i \cdot \sigma_i$$

$\Rightarrow$ OBTENEMOS LA PRESENTACIÓN

$$A^s \xrightarrow{\psi} A^r \xrightarrow{\varphi} M \to 0$$

NOTAR • $\operatorname{im} \psi = S = \ker \varphi$

- ψ ESTA DEFINIDA POR UNA MATRIZ $[\psi] \in A^{r \times s}$ (σ_j = j-ESIMA COLUMNA DE $[\psi]$, $j = 1, \dots, s$)
- CADA σ_j ES UNA RELACIÓN DE DEPENDENCIA LINEAL ENTRE LOS $m_1, \dots, m_r$ $(\varphi(\sigma_j) = 0)$

$$\sigma_j = \sum_{i=1}^{r} \sigma_{ij} \cdot e_i = (\sigma_{1j}, \dots, \sigma_{rj})$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{r} \sigma_{ij} \cdot m_i = 0, \quad j = 1, \dots, s$$

Scanned with CamScanner

EJ SEA $M = \bigoplus_{i=1}^{r} A/\langle d_i \rangle$. ENTONCES M TIENE

LA PRESENTACIÓN

$$A^r \xrightarrow{\psi} A^r \xrightarrow{\varphi} M \to 0$$

DONDE $\varphi = \bigoplus_{i=1}^{r} \pi_i$, $\pi_i : A \to A/\langle d_i \rangle$ PROYECCIÓN CANÓNICA

Y $[\psi] = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \dots, d_r)$

SEA A UN ANILLO. SEA $\alpha \in A^{r \times s}$

$\Rightarrow$ $\tilde{\alpha} : A^s \to A^r$ MORFISMO DE MÓDULOS LIBRES INDUCIDO POR α, $\tilde{\alpha}(x) = \alpha \cdot x$, $x \in A^s = A^{s \times 1}$

$\Rightarrow$ TENEMOS EL A-MÓDULO $M = \operatorname{coker} \tilde{\alpha} = A^r / \operatorname{im}(\tilde{\alpha})$

$\Rightarrow$ $$A^s \xrightarrow{\tilde{\alpha}} A^r \xrightarrow{\pi} M \to 0$$

ES UNA PRESENTACIÓN DE M.

DEF PARA $\alpha, \beta \in A^{r \times s}$, DECIMOS QUE α ES EQUIVALENTE a β, ESCRITO $\alpha \equiv \beta$, SI EXISTEN $\mu \in (A^{r \times r})^* = GL(r, A)$, $\nu \in (A^{s \times s})^*$

TALES QUE $\beta = \mu . \alpha . \nu$

PROP $\alpha \equiv \beta \Rightarrow \operatorname{coker}(\tilde{\alpha}) \cong \operatorname{coker}(\tilde{\beta})$

DEM

$$\begin{tikzcd}
A^s \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] & A^r \arrow[r, "\pi"] & \operatorname{coker}(\tilde{\alpha}) \arrow[r] & 0 \\
A^s \arrow[u, "\tilde{\nu}"] \arrow[r, "\tilde{\beta}"'] & A^r \arrow[u, "\tilde{\mu}^{-1} = f"'] \arrow[r, "\pi"] & \operatorname{coker}(\tilde{\beta}) \arrow[u, "\bar{f}"'] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$\bar{f}$ iso

$\beta = \mu \alpha \nu \Rightarrow \mu^{-1} . \beta = \alpha . \nu \Rightarrow \tilde{\mu}^{-1} \circ \tilde{\beta} = \tilde{\alpha} \circ \tilde{\nu}$

TEO 3 SEA A UN DIP. SEA $\alpha \in A^{r \times s}$.

ENTONCES EXISTE $\beta \in A^{r \times s}$ TAL QUE

β ES DIAGONAL ($\beta_{ij} = 0$ si $i \neq j$) y $\alpha \equiv \beta$.

VAMOS A DEMOSTRAR TEO3, TEO1, TEO2 EN ESTE ORDEN.

Scanned with CamScanner