ANILLOS

DEF UN ANILLO ES UN CONJUNTO A PROVISTO DE DOS OPERACIONES BINARIAS $+$ Y $\cdot$ EN A, TALES QUE

1) $(A,+)$ ES GRUPO CONMUTATIVO
(SE DENOTA 0 EL ELEMENTO NEUTRO, Y $-a$ EL INVERSO DE CADA $a \in A$)

2) $(A,\cdot)$ ES MONOIDE
(SE DENOTA 1 EL ELEMENTO NEUTRO)

3) DISTRIBUTIVIDAD DE $\cdot$ RESPECTO A $+$

$$x\cdot(y+z) = (x\cdot y) + (x\cdot z), \quad (y+z)\cdot x = (y\cdot x) + (z\cdot x)$$

$\forall x,y,z \in A$. $\qquad$ $\underline{(A,+,\cdot) \text{ ANILLO}}$

SE DICE QUE ES UN ANILLO CONMUTATIVO SI $\cdot$ ES CONMUTATIVA.

DEF SI A Y B SON ANILLOS, UN MORFISMO DE ANILLOS ES UNA FUNCIÓN $f: A \to B$ TAL QUE

a) $f(x+y) = f(x) + f(y), \ \forall x,y \in A$

b) $f(x\cdot y) = f(x)\cdot f(y)$, "

c) $f(1) = 1$

OBS a) $\Rightarrow$ $f(0)=0$ y $f(-x) = -f(x), \ \forall x \in A$.

PROP COMPOSICIÓN DE MORFISMOS DE ANILLOS $A \to B \to C$ ES MORFISMO DE ANILLOS.

OBS HACE FALTA c) : $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (ANILLO PRODUCTO)

$f(x) = (x, 0)$

SATISFACE a) y b), PERO NO c), YA QUE $f(1) = (1,0) \neq (1,1)$

MÁS DETALLE: SEAN $(A, *)$, $(B, *)$ MONOIDES, Y SEA

$f: A \to B \,/\, f(a_1 * a_2) = f(a_1) * f(a_2) \quad \forall a_1, a_2 \in A$.

VALE $f(1) = 1$?
- EN GENERAL, NO.
- VALE SI $(B, *)$ ES GRUPO.

DEM $1 * 1 = 1 \Rightarrow f(1) * f(1) = f(1*1) = f(1)$

$\Rightarrow b = f(1)$ SATISFACE LA ECUACIÓN $b * b = b$

(b ES IDEMPOTENTE)

SI $(B, *)$ ES GRUPO, SEA $b' =$ INVERSO DE b

$\Rightarrow b' * (b * b) = b' * b = 1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow f(1) = 1$.

EN GENERAL, B PUEDE TENER IDEMPOTENTES $\neq 1$, SI B NO ES GRUPO.

P. EJ. $(B, *) = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \cdot)$ $\quad b = (1,0)$ SATISFACE $b \cdot b = b$

EN a), $f: (A, +) \to (B, +) =$ GRUPO $\overset{(\cdot)}{\Rightarrow} f(0) = 0$

EN b), $f: (A, \cdot) \to (B, \cdot)$, NO NECESARIAMENTE $f(1) = 1$ (c))

$(\cdot)$ $\quad 0 + 0 = 0 \Rightarrow \underbrace{f(0) + f(0)}_{} = f(0+0) = \underbrace{f(0)}_{-f(0)} \Rightarrow f(0) = 0$

DEF SEA A UN ANILLO, SEA $X \subset A$ UN SUBCONJUNTO.
SE DICE QUE X ES SUBANILLO DE A SI

- X ES CERRADO POR $+$ $\quad (x, y \in X \Rightarrow x+y \in X)$
- " $\cdot$
- $1 \in X$ $\qquad$ - $x \in X \Rightarrow -x \in X$

$\Rightarrow (X, +, \cdot)$ TIENE ESTRUCTURA DE ANILLO

DEF SEA A UN ANILLO, SEA $X \subset A$ UN SUBCONJUNTO.
SE DICE QUE X ES UN IDEAL A IZQUIERDA DE A
(RESP. IDEAL A DERECHA, RESP. IDEAL) SI

- X ES CERRADO POR $+$, $0 \in X$.
- $\forall a \in A, \forall x \in X$ VALE $a.x \in X$
  (RESP. $x.a \in A$, RESP. $a.x \in \cancel{A}$ Y $x.a \in X$)

PROP SEA $f: A \to B$ UN MORFISMO DE ANILLOS.
ENTONCES: a) $\ker(f) = f^{-1}(0) \subset A$ ES UN IDEAL
b) $\operatorname{im}(f) \subset B$ ES UN SUBANILLO.

EJEMPLOS

1) $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ SON ANILLOS CONMUTATIVOS
(SE RECUERDA SU CONSTRUCCIÓN EN PRÁCTICA 2)

2) A ANILLO $\to$ $A[[t]]$ = ANILLO DE SERIES FORMALES CON COEFICIENTES EN A

$(A^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ $\quad$ + SUMA EN CADA COORDENADA:

$f, g: \mathbb{N} \to A$ $\qquad (f+g)(n) = f(n) + g(n)$

- $\cdot$ DE CAUCHY O DE CONVOLUCIÓN:

$$(f \cdot g)(n) = \sum_{i=0}^{n} f(i) . g(n-i)$$

NOTACIÓN: $t = (0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$ $\qquad t^i(j) = 1 \quad j = i$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 0 \quad j \neq i$

$\Rightarrow$ "$f = \sum_{i=0}^{\infty} f(i)\, t^i$" $\qquad$ VER PRÁCTICA

$A[t] = \{ f \in A[\![t]\!] \mid sop(f) \text{ finito} \}$

SUBANILLO DE $A[\![t]\!]$ $\Rightarrow$ ES ANILLO. $\left(sop(f) = \{ m \in \mathbb{N} \mid f(m) \neq 0 \} \right)$

3) A ANILLO, $m \in \mathbb{N}$. DENOTAMOS $[m] = \{ j \in \mathbb{N},\ 1 \leq j \leq m \}$

$$A^{m \times m} = A^{[m] \times [m]} = \{ f : [m] \times [m] \to A \}$$

$$[m] \times [m] = \{ (i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq m \}$$

$A^{m \times m}$ = MATRICES $m \times m$ CON COEFICIENTES EN A.

NOTACIÓN: PARA $f : [m] \times [m] \to A$

$$f = (f(i,j))_{1 \leq i,j \leq m} = (f_{ij})_{1 \leq i,j \leq m}$$

PARA $f, g \in A^{m \times m}$

$$(f+g)_{ij} = f_{ij} + g_{ij}, \quad \forall i,j$$

$$(f \cdot g)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} f_{ik} \cdot g_{kj}, \quad \forall i,j$$

$\Rightarrow (A^{m \times m}, +, \cdot)$ ANILLO (NO-CONMUTATIVO, SI $m > 1$.)

4) ITERAR, COMBINAR, OPERACIONES ANTERIORES

$A[t][u]$, $A[\![t]\!][u]$, $A[t][\![u]\!]$, $A[\![t]\!]^{m \times m}$, ETC.

5) $A[t,u]$, $A[\![t,u]\!]$, $A[\![t_1, \ldots, t_r]\!]$, VER PRACTICA.

- Γ MONOIDE, A ANILLO $\Rightarrow$ $A[\Gamma] \subset A[\![\Gamma]\!] = \{ \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma \cdot \gamma,\ a_\gamma \in A \}$

$\Gamma = (\mathbb{N}^r, +) \Rightarrow A[t_1, \ldots, t_r] \subset A[\![t_1, \ldots, t_r]\!]$ • VER PRACTICA (Γ CON HIPÓTESIS)

6) ANILLO DE CUATERNIONES

$\mathbb{H} = (\mathbb{R}^4, +, \cdot)$

- $+$ HABITUAL EN $\mathbb{R}^4$
- DETERMINADO POR LA TABLA DE MULTIPLICAR $e_i \cdot e_j$

e_1, e_2, e_3, e_4 BASE CANÓNICA

(VER AXIOMAS DE ANILLO.)

$e_i \cdot e_1 = e_i$

$e_1 \cdot e_i = e_i, \ \forall i$

$e_2^2 = e_3^2 = e_4^2 = -e_1$

$e_2 \cdot e_3 = -e_3 \cdot e_2 = e_4$, $e_3 \cdot e_4 = -e_4 \cdot e_3 = e_2$, $e_4 \cdot e_2 = -e_2 \cdot e_4 = e_3$

7) A ANILLO, J CONJUNTO

$A^J = \{ f : J \to A \}$ ES ANILLO, CON + y · PUNTO A PUNTO:

$(f+g)(j) = f(j) + g(j)$, $(f \cdot g)(j) = f(j) \cdot g(j)$ $\forall j \in J$.

EJ $J = \{1, 2\} \to A^2 = A \times A$

EJ $J = (0,1) \subset \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}$

$A^J = \{ f : (0,1) \to \mathbb{R} \}$

SUBANILLOS: f CONTINUA, f $\mathcal{C}^\infty$, ETC.

$D = J = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, |z| < 1 \} \subset \mathbb{C}$, $A = \mathbb{C}$

$A^J = \{ D \xrightarrow{f} \mathbb{C} \}$

SUBANILLOS: f HOLOMORFA, ETC.

ANILLOS DE FUNCIONES.

8) $A_1, \dots, A_r$ ANILLOS $\to$ $A = A_1 \times \dots \times A_r$ ANILLO

(+, · EN CADA COORDENADA)

$(A_j)_{j \in J}$ FAMILIA DE ANILLOS $\to$ $A = \bigtimes_{j \in J} A_j$ ANILLO.

PROP SEA $(A,+,\cdot)$ UN ANILLO, SEA $I \subset A$ UN IDEAL BILÁTERO. EN EL GRUPO $(A/I,+)$ EXISTE UNA ÚNICA ESTRUCTURA DE ANILLO TAL QUE $\pi: A \to A/I$ ES MORFISMO DE ANILLOS.

DEM $(A,+)$ ES GRUPO CONMUTATIVO, $I \subset A$ ES SUBGRUPO NORMAL
$\Rightarrow$ TENEMOS DEFINIDO $(A/I,+)$ GRUPO $\left((a+I)+(b+I)=(a+b)+I\right)$

AFIRMO: LA OPERACIÓN BINARIA $\cdot: A\times A \to A$ ES COMPATIBLE CON LA RELACIÓN DE EQUIVALENCIA R DEFINIDA POR I.

DEM: $xRy \iff x-y \in I$

QVQ: $xRy \Rightarrow x.z \; R \; y.z$, $z.x \; R \; z.y$

$xRy \Rightarrow x-y \in I \underset{I \text{ IDEAL DER.}}{\Rightarrow} (x-y).z \in I \Rightarrow x.z - y.z \in I$
$\Rightarrow x.z \; R \; y.z$ ✓

LA OTRA ES SIMILAR (I IDEAL IZQ.)

$\Rightarrow$ $\cdot$ INDUCE OPERACIÓN BINARIA (LA DENOTO $\cdot$) EN EL CONJUNTO COCIENTE $A/R = A/I = \{a+I\}_{a\in A}$ MEDIANTE $(a+I)\cdot(b+I) = (a.b)+I$

RESULTA: $\pi: A \to A/I$ SATISFACE $\left.\begin{array}{l}\pi(a+b)=\pi(a)+\pi(b)\\ \pi(a.b)=\pi(a).\pi(b)\end{array}\right\}(\cdot)$

<u>NOTACIÓN</u> $\pi(a) = a+I = \bar{a} \in A/I$ = "CLASE DE $a\in A$ MÓDULO I".

$\overline{a+b} = \bar{a}+\bar{b}$, $\overline{a.b} = \bar{a}.\bar{b}$ CON ESTA NOTACIÓN.

YA SABEMOS $(A/I,+)$ ES GRUPO (NEUTRO: $\bar{0} = I$)
$-\bar{a} = \overline{-a}$, $a\in A$
$(A/I,\cdot)$ ES MONOIDE (VERIFICAR) (NEUTRO: $\bar{1} = 1+I = \pi(1)$)
DISTRIBUTIVA (VERIFICAR)

$(\cdot)$ π ES MORFISMO DE ANILLOS

UNICIDAD: $(\cdot)$ DETERMINA LAS OPERACIONES $+,\cdot$ EN A/I YA QUE π ES SOBREYECTIVA ✓

DEF SEA A UN ANILLO, SEA $X \subset A$ UN SUBCONJUNTO. DENOTAMOS $A.X$ EL SUBCONJUNTO DE A CUYOS ELEMENTOS SON LAS SUMAS $\sum_{i=1}^{m} a_i . x_i$ CON $m \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_m \in A$, $x_1, \dots, x_m \in X$

SIMILARMENTE, $X.A = \{ \sum_{i=1}^{m} x_i . a_i ,\ m \in \mathbb{N}, a_i \in A, x_i \in X \}$

$A.X.A = \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_i . x_i . b_i ,\ m \in \mathbb{N},\ a_i, b_i \in A,\ x_i \in X \right\}$ $\quad A.\phi = \{0\}$

PROP a) $A.X$ ES IDEAL IZQ. DE A, $X \subset A.X$

b) SI $J \subset A$ ES IDEAL IZQ. TAL QUE $X \subset J$ ENTONCES $A.X \subset J$

SIMILARMENTE CON $X.A$ (IDEAL DER.) Y $A.X.A$ (IDEAL BILÁTERO)

DEM EJERCICIO $\quad$ **OBS** A CONMUTATIVO $\Rightarrow X.A = A.X = A.X.A$

COR $X \subset A \Rightarrow$ TENEMOS EL ANILLO COCIENTE

$$A / A.X.A$$

EJ $A = \mathbb{Z}$, $X = \{n\} \Rightarrow A.X = \{ n.m,\ m \in \mathbb{Z} \} = \mathbb{Z}.n$

$$\cancel{A/A.X} \quad A/A.X = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}.n = \mathbb{Z}_n$$

NOTACIÓN ALTERNATIVA: $X = \{x_1, \dots, x_r\}$, $A.X.A = \langle x_1, \dots, x_r \rangle$

EJ/DEF A ANILLO CONMUTATIVO. UN IDEAL PRINCIPAL EN A ES UN IDEAL ~~(BILÁTERO)~~ GENERADO POR UN ELEMENTO $x \in A$:
$A.x\cancel{.A} = \langle x \rangle = \{ a.x,\ a \in A \}$

EJ/DEF A ANILLO CONMUTATIVO. UN IDEAL FINITAMENTE GENERADO ES UN IDEAL DE LA FORMA $A.X$ CON $X \subset A$ CONJUNTO FINITO. O SEA, $X = \{x_1, \dots, x_r\}$

$$\langle x_1, \dots, x_r \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{r} a_i . x_i ,\ a_i \in A \right\}$$

EJ: $A = k[X_1, \dots, X_m]$ = POLINOMIOS, k CUERPO (O ANILLO CONMUTATIVO)

$X = \{f_1, \dots, f_r\}$ $\quad f_i \in A$

$$I = A.X = \left\{ \sum_{i=1}^{r} a_i . f_i ,\ a_i \in A \right\} = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$$

<u>DEF</u> SEA $(A,+,\cdot)$ UN ANILLO.

UN <u>MÓDULO</u> (A IZQUIERDA) SOBRE A (= A-MÓDULO IZQ.)

ES UN GRUPO CONMUTATIVO $(M,+)$ PROVISTO DE UNA

FUNCIÓN $\mu: A\times M \to M$

(DENOMINADA "LEY DE OPERACIÓN EXTERNA" Y DENOTADA

$\mu(a,m) = a.m$, $\forall a\in A$, $\forall m\in M$) TAL QUE:

1) $a.(m+m') = a.m + a.m'$ $\forall a\in A$, $\forall m, m'\in M$,

2) $(a.b).m = a.(b.m)$, $\forall a,b\in A$, $\forall m\in M$,

3) $(a+b).m = a.m + b.m$, $\forall a,b\in A$, $\forall m\in M$,

4) $1.m = m$, $\forall m\in M$.

<u>OBS</u> SE TIENE ENTONCES $\tilde{\mu}: A \to \mathrm{End}(M)$

$$\tilde{\mu}(a)(m) = \mu(a,m) = a.m$$

$\tilde{\mu}$ MORFISMO DE ANILLOS,

DONDE $\mathrm{End}(M) = \{f: M\to M,\ f \text{ MORFISMO PARA } +\}$

CON $+$ DE MORFISMOS, $\cdot$ = COMPOSICIÓN DE MORFISMOS.

<u>OBS</u> MÓDULO A DERECHA: SE REEMPLAZA 2) POR

2') $(a.b).m = b.(a.m)$

(O, ESCRIBIENDO $\mu(a,m) = m.a$, VALE $m.(a.b) = (m.a).b$)

SI A ES CONMUTATIVO, A-MOD. IZQ. = A-MOD. DER.

EJEMPLOS

1) $J \subset A$ IDEAL IZQ. / DER. $\Rightarrow$ J ES A-MÓDULO IZQ. / DER.

2) SI A ES UN CUERPO, UN A-MÓDULO ES LO MISMO QUE UN A-ESPACIO VECTORIAL

3) SI $A = \mathbb{Z}$, UN $\mathbb{Z}$-MÓDULO ES LO MISMO QUE UN GRUPO ABELIANO $(M,+)$. EN EFECTO, LA ACCIÓN POR ESCALAR $\mu: \mathbb{Z} \times M \to M$ ESTA DETERMINADA POR $+$ MEDIANTE $m.x = \underbrace{x + \cdots + x}_{m \text{ VECES}}$, PARA $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, $x \in M$

$m.x = (-x) + \cdots + (-x)$ PARA $m \in \mathbb{Z}_{<0}$.

4) k CUERPO, G GRUPO FINITO, $A = k[G]$
UN A-MÓDULO (IZQ.) EQUIVALE A UNA REPRESENTACIÓN LINEAL (SOBRE k) DE G. (VER PRÁCTICA)

5) k CUERPO, $A = k[t]$, V k-ESP. VECT.
UNA ESTRUCTURA DE A-MÓDULO EN V EQUIVALE A UN ENDOMORFISMO k-LINEAL $f: V \to V$ ($\Leftrightarrow$ MATRIZ) (VER PRÁCTICA)

6) $J \subset A$ IDEAL A IZQUIERDA $\Rightarrow$ EL GRUPO ABELIANO $(A/J, +)$ TIENE ESTRUCTURA DE A-MOD. IZQ. VÍA
$a.(b+J) = a.b + J$ (VERIFICAR) ?

7) M_1, M_2 A-MÓDULOS $\Rightarrow$ $M = M_1 \times M_2$ A-MÓDULO
$(m_1, m_2) + (m_1', m_2') = (m_1 + m_1', m_2 + m_2')$
$a.(m_1, m_2) = (a.m_1, a.m_2)$
SIMILARMENTE, M_i A-MÓDULOS $(i = 1, \ldots, r)$
$\Rightarrow M = \bigtimes_{i=1}^{r} M_i$ ES A-MÓDULO

8) A ES A-MÓDULO (CASO $J = A$ EN 1))
$\Rightarrow A^r = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{r \text{ VECES}}$ ES A-MÓDULO
7)

DEF SEA A UN ANILLO, SEAN M, N A-MÓDULOS (IZQ.)
UNA FUNCIÓN $f: M \to N$ ES MORFISMO DE A-MÓDULOS (IZQ.)
SI $f(m+m') = f(m) + f(m')$, $\forall m, m' \in M$
$f(a.m) = a.f(m)$, $\forall a \in A$, $\forall m \in M$.

PROP $f: M \to N$, $g: N \to P$ MORFISMOS DE A-MÓDULOS
$\Rightarrow g \circ f : M \to P$ ES MORFISMO DE A-MÓDULOS.
DEM EJERCICIO

PROP $Hom_A(M,N) = \{ f: M \to N \text{ MORFISMO DE } A\text{-MÓD.} \}$
TIENE ESTRUCTURA DE A-MÓDULO, MEDIANTE
$(f+g)(m) = f(m) + g(m)$, $\forall m \in M$ $\quad (f, g \in Hom_A(M,N))$
$(a.f)(m) = a.f(m)$, $\forall a \in A$, $\forall m \in M$.
DEM EJERCICIO

COR $Hom_A(M,M) = End_A(M)$ ES A-MÓDULO, Y ES ANILLO (PRODUCTO = COMPOSICIÓN)

EJ $J \subset A$ IDEAL (IZQ.) $\Rightarrow \pi: A \to A/J$ PROYECCIÓN CANÓNICA ES MORFISMO DE A-MÓD. (IZQ.)

EJ SEA A ANILLO CONMUTATIVO, SEA $\alpha \in A^{m \times n}$ MATRIZ.
ENTONCES α DEFINE $\tilde{\alpha} \in Hom_A(A^n, A^m)$ MEDIANTE:
$\tilde{\alpha}(a)_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} . a_j$ PARA $a = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$

$$\begin{array}{cc} & n \\ m & \boxed{\alpha} \end{array} \cdot \begin{array}{cc} 1 & \\ \boxed{a} & n \end{array}$$

VERIFICAR $\tilde{\alpha}$ ES MORFISMO.
QUÉ PASA SI A NO ES CONMUTATIVO.

DEF SEA M UN A-MÓDULO (IZQ.), SEA $\emptyset \neq M' \subset M$
UN SUBCONJUNTO NO-VACÍO. SE DICE QUE M' ES
SUB-MÓDULO (IZQ.) DE M SI $M'+M' \subset M'$ (CERRADO POR $+$)
$A.M' \subset M'$ (CERRADO POR μ)

VER SUB-MÓDULOS EN EJEMPLOS 1) – 8).

PROP $f: M \to N$ MORFISMO DE A-MÓDULOS. ENTONCES
$\ker(f) = f^{-1}(0) \subset M$ ES SUB-MÓDULO. (MÁS GENERAL: $L \subset N$ SUBMÓDULO $\Rightarrow f^{-1}(L) \subset M$ ES SUBMÓDULO)
$im(f) \subset N$ ES SUB-MÓDULO.
DEM: EJERCICIO

PROP SEA A UN ANILLO, M UN A-MÓD (IZQ.), $M' \subset M$ UN SUB-MÓDULO. ENTONCES EN EL GRUPO ABELIANO $(M/_{M'}, +)$ EXISTE UNA ÚNICA ESTRUCTURA DE A-MÓDULO TAL QUE $\pi: M \to M/M'$ ES MORFISMO DE A-MÓDULOS.

DEM $M' \subset M$ SUBMÓDULO $\Rightarrow$ $(M', +)$ SUBGRUPO (NORMAL) DE $(M, +)$ $\Rightarrow$ TENEMOS EL GRUPO COCIENTE $(M/M', +)$

$(m_1 + M') + (m_2 + M') = m_1 + m_2 + M'$

DEF. DE ACCIÓN DE A EN M/M':

DEFINO $a \cdot \pi(m) = \pi(a.m)$ PARA $a \in A$, $\pi(m) \in M/M'$

BUENA DEFINICIÓN: VEAMOS QUE SI $\pi(m_1) = \pi(m_2)$

ENTONCES $\pi(a.m_1) = \pi(a.m_2)$, $\forall a \in A$:

$\pi(m_1) = \pi(m_2) \Rightarrow m_1 - m_2 \in M' \Rightarrow a.(m_1 - m_2) \in M'$ (PORQUE M' ES SUBMÓDULO) $\Rightarrow a.m_1 - a.m_2 \in M'$

$\Rightarrow \pi(a.m_1) = \pi(a.m_2)$ ✓

VERIFICAR AXIOMAS DE MÓDULO EN M/M'.

ES CLARO QUE π ES MORFISMO, Y COMO VIMOS ANTES, QUE π MORFISMO IMPLICA QUE LA ACCIÓN DE A EN M/M' ES ÚNICA.

PROP A ANILLO, M A-MÓD, $M' \subset M$ SUBMÓDULO (IZQ.)

TENEMOS UNA BIYECCIÓN

$$\left\{\begin{array}{c}\text{A-SUBMÓDULOS DE } M\\ \text{QUE CONTIENEN } M'\end{array}\right\} \underset{\alpha}{\overset{\beta}{\rightleftarrows}} \left\{\begin{array}{c}\text{A-SUBMÓDULOS}\\ \text{DE } M/M'\end{array}\right\}$$

$K \subset M/M'$ SUBMÓDULO $\longmapsto \alpha(K) = \pi^{-1}(K) \subset M$ SUBMÓDULO $\supset M'$

$M' \subset L \subset M$ SUBMÓDULO $\longmapsto \beta(L) \subset M/M'$ SUBMÓDULO

POR PROP. PAG. 32

YA VIMOS EN PAG. 13 QUE $\alpha \circ \beta = id$, $\beta \circ \alpha = id$ ✓

PROP (PROPIEDAD UNIVERSAL DE M/M')

a) $\pi : M \to M/M'$ VERIFICA $\pi(M') = \{0\}$ ($M' \subset \ker \pi$)

b) SEA $f: M \to N$ MORFISMO DE A-MOD. / $f(M') = \{0\}$.
ENTONCES $\exists!\ \bar{f} : M/M' \to N$ MORFISMO / $f = \bar{f} \circ \pi$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & N \\ M/M' \arrow[ur, dashed, "\exists!\ \bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

DEM a) SI $m' \in M'$, $\pi(m') = m' + M' = M' = \pi(0) = 0$.

b) $f : M \to N$ MORFISMO DE A-MOD $\Rightarrow$

f ES MORFISMO DE GRUPOS ABELIANOS $(M,+)$, $(N,+)$

$f(M') = \{0\} \underset{\text{PAG. 11}}{\Rightarrow} \exists!\ \bar{f} : M/M' \to N$ MORFISMO DE GRUPOS ABELIANOS, $f = \bar{f} \circ \pi$

$\bar{f}$ ESTABA DEFINIDA POR $\bar{f}(\pi(m)) = f(m)$.

BASTA CON VER QUE ESTA $\bar{f}$ ES MORFISMO DE A-MÓDULOS:

$$\bar{f}(a.\pi(m)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ACCIÓN DE} \\ \text{A EN } M/M'}}{=} \bar{f}(\pi(a.m)) = f(am) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ MORFISMO} \\ \text{DE A-MOD.}}}{=} a.f(m) = a.\bar{f}(\pi(m))$$

PROP A ANILLO, $f: M \to N$ MORFISMO DE A-MOD.
$M' \subset M$, $N' \subset N$ SUBMÓDULOS / $f(M') \subset N'$.
ENTONCES $\exists!\ \bar{f} : M/M' \to N/N'$ MORFISMO DE A-MOD. /
EL DIAGRAMA SIGUIENTE CONMUTA

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_1"'] & N \arrow[d, "\pi_2"] \\ M/M' \arrow[r, "\bar{f}"'] & N/N' \end{tikzcd}$$

O SEA, $\pi_2 \circ f = \bar{f} \circ \pi_1$.

DEM COMO EN LA PROP. ANTERIOR, $\exists!\ \bar{f}$ DE GRUPOS ABELIANOS, DEFINIDA POR $\bar{f}(\pi_1(m)) = \pi_2(f(m))$, $\forall m \in M$ (VER PAG. 12).
BASTA CON VER QUE ESTA $\bar{f}$ ES MORFISMO DE A-MÓDULOS

$$\bar{f}(a.\pi_1(m)) = \bar{f}(\pi_1(am)) = \pi_2 f(am) = a\,\pi_2 f(m) = a.\bar{f}(\pi_1(m))$$

PROP $f: M \to N$ MORFISMO DE A-MÓDULOS

ENTONCES $\bar{f}: M/_{\ker f} \to N$ ESTABLECE UN ISOMORFISMO

DE A-MÓDULOS $M/_{\ker(f)} \xrightarrow{\cong} im(f)$

DEM TENEMOS

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & N \\ M/\ker(f) \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

π SOBRE $\Rightarrow im(\bar{f}) = im(f) \Rightarrow \bar{\bar{f}}: M/_{\ker(f)} \to im(f)$

ES SOBRE (DENOTO $\bar{\bar{f}}$ LA CO-RESTRICCIÓN DE $\bar{f}$ A SU IMAGEN)

$\bar{f}$ INYECTIVA : $0 = \bar{f}(\pi(m)) = f(m) \Rightarrow m \in \ker(f) \Rightarrow \pi(m) = 0$

$\Rightarrow \bar{\bar{f}}$ BIYECTIVA $\Rightarrow \bar{\bar{f}}$ ISO DE A-MÓDULOS ✓

PROP A ANILLO, M A-MÓDULO, $M_1 \subset M_2 \subset M$ SUBMÓDULOS.
ENTONCES $\left. M/M_1 \middle/ M_2/M_1 \right. \cong M/M_2$

DEM VER PAG. 14

$$\begin{tikzcd} M_2 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi'"'] & M \arrow[d, "\pi"] \\ M_2/M_1 \arrow[r, "\bar{i}"'] & M/M_1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "id"] \arrow[d, "\pi"'] & M \arrow[d, "\pi''"] \\ M/M_1 \arrow[r, "\overline{id}"'] & M/M_2 \end{tikzcd}$$

$M_2/M_1 \xrightarrow{\bar{i}} M/M_1 \xrightarrow{\overline{id}} M/M_2$ MORFISMOS DE A-MÓDULOS

SABEMOS DE PAG 14 (O VERIFICAR NUEVAMENTE):

- $\bar{i}$ INYECTIVA (MONOMORFISMO, DE A-MÓDULOS)
- $\ker(\overline{id}) = im(\bar{i})$
- $\overline{id}$ SOBRE (EPIMORFISMO, DE A-MÓDULOS)

$\Rightarrow \left. M/M_1 \middle/ \bar{i}(M_2/M_1) \right. \xrightarrow{\bar{\overline{id}}} M/M_2$ ✓

PROP A ANILLO, M A-MÓDULO, $M_1 \subset M$, $M_2 \subset M$ SUBMÓDULOS.
EXISTE UN ISOMORFISMO (CANÓNICO)

$$\frac{M_1}{M_1 \cap M_2} \xrightarrow{\cong} \frac{M_1 + M_2}{M_2}$$

$$M_1 + M_2 = \{ m_1 + m_2,\ m_1 \in M_1,\ m_2 \in M_2 \}$$

DEM DENOTAMOS $M_1 \xrightarrow{i} M_1 + M_2$ LA INCLUSIÓN.
ES CLARO QUE $i(M_1 \cap M_2) \subset M_2$. ENTONCES TENEMOS

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{i} & M_1 + M_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ M_1/M_1 \cap M_2 & \xrightarrow[\bar{i}]{} & M_1 + M_2/M_2 \end{array} \qquad \pi_2 \circ i = \bar{i} \circ \pi_1$$

$\bar{i}$ MONO: $\underset{m_1 \in M_1}{\bar{i}(\pi_1(m_1)) = 0} \Rightarrow \pi_2 \circ i(m_1) = 0 \Rightarrow \pi_2(m_1) = 0$

$\Rightarrow m_1 \in M_2 \Rightarrow m_1 \in M_1 \cap M_2 \Rightarrow \pi_1(m_1) = 0$ ✓

$\bar{i}$ EPI: SEA $\pi_2(m_1 + m_2) \in M_1 + M_2/M_2$

$\pi_2(m_1 + m_2) = \pi_2(m_1) = \pi_2\, i(m_1) = \bar{i}(\pi_1(m_1))$ ✓

↑ PORQUE $m_2 \in M_2$

$\Rightarrow \bar{i}$ ISO ✓