SUCESIONES EXACTAS DE A-MÓDULOS

CONSIDERAMOS SUCESIONES DE MORFISMOS DE A-MÓDULOS DE LA FORMA

(*) $\quad M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1}$

M_i ES A-MÓDULO, f_i ES MORFISMO DE A-MÓDULOS

n = LONGITUD DE LA SUCESIÓN.

DEF (*) ES UN COMPLEJO DE A-MÓDULOS SI

$\operatorname{im}(f_i) \subset \ker(f_{i+1})$, $i=1,\dots,n-1$.

EQUIVALENTEMENTE: $f_{i+1} \circ f_i = 0$, $i=1,\dots,n-1$.

DEF (*) ES UN COMPLEJO EXACTO (= SUCESIÓN EXACTA) SI $\operatorname{im}(f_i) = \ker(f_{i+1})$, $i=1,\dots,n-1$.

DECIMOS QUE (*) ES EXACTA EN M_i SI

$$\operatorname{im}(f_{i-1}) = \ker(f_i)$$

$\Rightarrow$ ((*) EXACTA $\Leftrightarrow$ EXACTA EN M_i, $\forall i = 2,\dots,n$)

EJS

1) $0 \to M \xrightarrow{f} N$ EXACTA $\Leftrightarrow$ f ES MONO.

2) $M \xrightarrow{f} N \to 0$ EXACTA $\Leftrightarrow$ f ES EPI

3) $0 \to M \xrightarrow{f} N \to 0$ EXACTA $\Leftrightarrow$ f ES ISO.

4) M A-MÓDULO, $S \subset M$ SUBMÓDULO $\Rightarrow$

$0 \to S \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/S \to 0$ ES EXACTA

5) SI $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$ ES EXACTA

ENTONCES $M_2/f(M_1) \xrightarrow{\bar{g}} M_3$ ES ISO.

6) SEA $M \xrightarrow{f} N$ UN MORFISMO DE A-MÓDULOS.

ENTONCES $0 \to \ker(f) \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\pi} \operatorname{coker}(f) \to 0$ ES EXACTA.

$$(\operatorname{coker}(f) = N/\operatorname{im}(f))$$

OBS EN 5), $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$

ES EXACTA $\iff$
- f MONO
- g EPI
- $im(f) = ker(g)$

SE LA DENOMINA "SUCESIÓN EXACTA CORTA".

EJEMPLOS DE SUCESIONES EXACTAS CORTAS:

1) SEAN M_1, M_2 A-MÓDULOS. DENOTAMOS:

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[dr, "\mu_1"] & & & M_1 \\ & M_1 \oplus M_2 = M_1 \times M_2 \arrow[urr, "p_1"] \arrow[drr] & & \\ M_2 \arrow[ur, "\mu_2"'] & & & M_2 \end{tikzcd}$$

$\mu_1(x) = (x,0)$

$\mu_2(y) = (0,y)$

$p_1(x_1,x_2) = x_1$

$p_2(x_1,x_2) = x_2$

$\Rightarrow$ $im(\mu_1) = \{(x,0),\ x \in M_1\} = ker(p_2)$

$im(\mu_2) = \{(0,y),\ y \in M_2\} = ker(p_1)$

$\Rightarrow$ $0 \to M_1 \xrightarrow{\mu_1} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{p_2} M_2 \to 0$ SON EXACTAS.

$0 \to M_2 \xrightarrow{\mu_2} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{p_1} M_1 \to 0$

$\Rightarrow$ $M_1 \oplus M_2 / \mu_1(M_1) \xrightarrow{\overline{p_2}} M_2$ ISO, $\left(M_1 \oplus M_2 / M_1 \cong M_2 \right)$

$M_1 \oplus M_2 / \mu_2(M_2) \xrightarrow{\overline{p_1}} M_1$ ISO. $\left(M_1 \oplus M_2 / M_2 \cong M_1 \right)$

2) M A-MÓDULO, $S \subset T \subset M$ SUBMÓDULOS

$\Rightarrow$ $0 \to T/S \xrightarrow{f} M/S \xrightarrow{g} M/T \to 0$ ES EXACTA

DONDE f, g ESTAN DEFINIDAS POR

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi"'] & M \arrow[d, "\pi"] \\ T/S \arrow[r, "f = \overline{i}"'] & M/S \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "id"] \arrow[d, "\pi"'] & M \arrow[d, "\pi"] \\ M/S \arrow[r, "g = \overline{id}"'] & M/T \end{tikzcd}$$

i = INCLUSION

POR LO TANTO, $M/S \,/\, f(T/S) \xrightarrow{\overline{g}} M/T$ ES ISO.

3) M A-MÓDULO, $S \subset M$, $T \subset M$ SUBMÓDULOS.

ENTONCES $0 \to S \cap T \xrightarrow{f} S \oplus T \xrightarrow{g} S+T \to 0$ ES EXACTA,

DONDE $f(x) = (x, -x) \in S \oplus T$

$g(s, t) = s + t \in S+T$, PARA $s \in S$, $t \in T$.

VERIFICAR LA EXACTITUD.

4) SEA M UN A-MÓDULO. COMO HABÍAMOS VISTO,

UNA PRESENTACIÓN DE M ES UNA SUCESIÓN EXACTA

$$A^{(I)} \xrightarrow{r} A^{(J)} \xrightarrow{\pi} M \to 0$$

DEF SEAN $M_\cdot = (M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \to \cdots \to M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1})$

$N_\cdot = (N_1 \xrightarrow{g_1} N_2 \to \cdots \to N_n \xrightarrow{g_n} N_{n+1})$

DOS SUCESIONES DE A-MÓDULOS.

UN MORFISMO DE SUCESIONES $h_\cdot : M_\cdot \to N_\cdot$

ES UNA SUCESIÓN DE MORFISMOS $h_\cdot = (h_1, \ldots, h_{n+1})$

$h_i : M_i \to N_i$ MORFISMO DE A-MOD. $(i = 1, \ldots, n+1)$ TAL QUE

TODOS LOS CUADRADOS

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "h_i"'] & M_{i+1} \arrow[d, "h_{i+1}"] \\ N_i \arrow[r, "g_i"'] & N_{i+1} \end{tikzcd}$$

CONMUTAN, $i = 1, \ldots, n$.

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"'] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "h_2"] & \cdots \arrow[r] & M_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "h_n"] & M_{n+1} \arrow[d, "h_{n+1}"] \\ N_1 \arrow[r, "g_1"'] & N_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & N_n \arrow[r, "g_n"'] & N_{n+1} \end{tikzcd}$$

P. EJ. MORFISMO DE SUCESIONES CORTAS

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"'] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & M_3 \arrow[d, "h_3"] \\ N_1 \arrow[r, "g_1"'] & N_2 \arrow[r, "g_2"'] & N_3 \end{tikzcd}$$

DEF $h_\cdot$ MONO (RESP. EPI, RESP. ISO) SI

h_i MONO (RESP. EPI, RESP. ISO), $\forall i$.

DEF Decimos que la sucesión exacta corta

$M_\cdot \qquad 0 \to M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \to 0$

de A-módulos se parte (o se escinde) si existe un isomorfismo $h_\cdot = (id_{M_1}, h, id_{M_3})$ de sucesiones exactas cortas

$$\odot \quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "id"'] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h"'] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "id"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "\mu_1"'] & M_1 \oplus M_3 \arrow[r, "p_2"'] & M_3 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

PROP Sea $M_\cdot = (0 \to M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3 \to 0)$ una sucesión exacta corta de A-módulos. Son equivalentes:

a) El monomorfismo f_1 es una sección.

b) El epimorfismo f_2 es una retracción.

c) $M_\cdot$ se parte.

d) $\ker(f_2) = \operatorname{im}(f_1) \subset M_2$ es un sumando directo.

DEM Veamos c) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ d) $\Rightarrow$ a) $\Rightarrow$ c)

Vamos a trabajar con el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} & M_2 \arrow[dl, shift left, "f_1'"'] \arrow[dr, shift left, "f_2"] \arrow[dd, "h"] & \\ M_1 \arrow[ur, shift left, "f_1"'] \arrow[dr, shift left, "\mu_1"'] & & M_3 \arrow[ul, shift left, "f_2'"'] \arrow[dl, shift left, "\mu_2"] \\ & M_1 \oplus M_3 \arrow[ul, shift left, "p_1"'] \arrow[ur, shift left, "p_2"] & \end{tikzcd}$$

$M_2 \xrightarrow{h} M_1 \oplus M_3$ viene dada por $h = (h_1, h_2)$

con $h_1 : M_2 \to M_1 \quad (h_1 = p_1 \circ h)$

$h_2 : M_2 \to M_3 \quad (h_2 = p_2 \circ h)$

c) $\Rightarrow$ b) SEA h COMO EN $\odot$, $h = (h_1, h_2)$

$\Rightarrow h \circ f_1 = \mu_1$. TOMO $f_2' = h^{-1} \circ \mu_2$

$p_2 \circ h = f_2$ ENTONCES $f_2 \circ f_2' = id_{M_3}$

$\Rightarrow f_2$ RETRACCIÓN.

EN EFECTO, $f_2 \circ f_2' = f_2 \circ h^{-1} \circ \mu_2 = p_2 \circ \mu_2 = id_{M_3}$.

b) $\Rightarrow$ d) SABEMOS $\exists f_2' : M_3 \to M_2 \;/\; f_2 \circ f_2' = id_{M_3}$

SEA $p = f_2' \circ f_2$,
$$\begin{tikzcd} M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[rr, bend right, "p"'] & M_3 \arrow[r, "f_2'"] & M_2 \end{tikzcd}$$

AFIRMO: $p^2 = p$ (p ES UN PROYECTOR)

$\ker p = \ker f_2$

$p^2 = (f_2' \circ f_2) \circ (f_2' \circ f_2) = f_2' \circ (f_2 \circ f_2') \circ f_2 = f_2' \circ id_{M_3} \circ f_2 = p$ ✓

$f_2 \circ f_2' = id_{M_3} \Rightarrow f_2'$ MONO $\Rightarrow \ker p = \ker (f_2' \circ f_2) = \ker f_2$ ✓

EL $\ker$ DE UN PROYECTOR ES SUMANDO DIRECTO (LO VIMOS)

$\Rightarrow \ker f_2$ ES SUMANDO DIRECTO, $\overline{f_1}$ = CO-RESTRICCIÓN DE f_1.

d) $\Rightarrow$ a) COMO $M_1 \xrightarrow{f_1} M_2$ ES MONO, $M_1 \xrightarrow{\overline{f_1}} f_1(M_1)$ ES ISO,

DENOTEMOS $f_1(M_1) \xrightarrow{\overline{f_1}^{-1}} M_1$ SU INVERSA.

SI $im(f_1) = f_1(M_1) \subset M_2$ ES SUMANDO DIRECTO,

EXISTE $T \subset M_2 \;/\; M_2 = f_1(M_1) \oplus T$.

SEA $\pi_T : M_2 \to f_1(M_1)$ EL PROYECTOR CON $\ker \pi_T = T$

TENEMOS EL DIAGRAMA
$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[dr, "\overline{f_1}"'] & M_2 = f_1(M_1) \oplus T \arrow[d, "\pi_T"] \\ & f_1(M_1) \end{tikzcd}$$

$\pi_T \circ f_1 = \overline{f_1}$

$\Rightarrow \overline{f_1}^{-1} \circ \pi_T \circ f_1 = \overline{f_1}^{-1} \circ \overline{f_1} = id_{M_1}$.

$\Rightarrow f_1' \circ f_1 = id_{M_1}$, CON $f_1' = \overline{f_1}^{-1} \circ \pi_T \Rightarrow f_1$ ES SECCIÓN.

a) ⇒ c) SEA $M_2 \xrightarrow{f_1'} M_1$ / $f_1' \circ f_1 = id_{M_1}$.

TOMO $h = u_1 \circ f_1' + u_2 \circ f_2 = (f_1', f_2)$

O SEA, $h(x) = (f_1'(x), f_2(x)) \in M_1 \oplus M_3$, $\forall x \in M_2$.

Q.V.Q. h SATISFACE ⊙, O SEA:

1) $h \circ f_1 = u_1$

2) $p_2 \circ h = f_2$

3) h ES ISO.

1) $h \circ f_1(m_1) = (f_1'(f_1(m_1)), f_2(f_1(m_1)))$

$= (m_1, 0) = u_1(m_1)$, PORQUE $f_1' \circ f_1 = id_{M_1}$,

$f_2 \circ f_1 = 0$ ✓

2) $h = (f_1', f_2) \Rightarrow p_2 \circ h = f_2$ ✓

3) $h(m_2) = 0 \Rightarrow (f_1'(m_2), f_2(m_2)) = (0,0) \Rightarrow f_2(m_2) = 0$ Y $f_1'(m_2) = 0$.

$\Rightarrow \exists m_1 \in M_1 / m_2 = f_1(m_1)$.

$f_1'(m_2) = f_1'(f_1(m_1)) = m_1 \Rightarrow m_1 = 0 \Rightarrow m_2 = 0 \Rightarrow h$ MONO.

h EPI: DADOS $m_1 \in M_1$, $m_3 \in M_3$, BUSCO $m_2 \in M_2$ /

$f_1'(m_2) = m_1$

$f_2(m_2) = m_3$

COMO f_2 ES EPI, EXISTE $m_2 \in M_2$ / $f_2(m_2) = m_3$.

$f_2 \circ f_1 = 0 \Rightarrow f_2(m_2 + f_1(\overline{m_1})) = m_3$, $\forall \overline{m_1} \in M_1$

VOY A ELEGIR UN $\overline{m_1} \in M_1$ TAL QUE $m_2 + f_1(\overline{m_1})$ SATISFAGA

LA OTRA ECUACIÓN $f_1'(m_2 + f_1(\overline{m_1})) = m_1$

$\Leftrightarrow f_1'(m_2) + \overline{m_1} = m_1$ (PORQUE $f_1'(f_1(\overline{m_1})) = \overline{m_1}$)

BASTA CON TOMAR $\overline{m_1} = m_1 - f_1'(m_2)$

$\Rightarrow h(m_2 + f_1(m_1) - f_1(f_1'(m_2))) = (m_1, m_3)$

$\Rightarrow h$ EPI $\Rightarrow h$ ISO.