DEF M ES UN A-MÓDULO FINITAMENTE GENERADO si existe $X \subset M$ subconjunto finito tal que X genera M.

DEF Se dice que M es un A-módulo cíclico si existe $m \in M$ tal que $X = \{m\}$ genera M

(todo elemento de M es $= a.m$ para algún $a \in A$)

EJ Si $I \subset A$ es un ideal entonces $M = A/I$ es A-módulo cíclico, generado por $\overline{1}$.

PROP Recíprocamente, si M es A-módulo cíclico entonces existe $I \subset A$ ideal / $M \cong A/I$.

DEM Sea $m \in M$ / $M = \langle m \rangle$. Consideramos el morfismo de A-módulos $\varphi : A \to M$ tal que $\varphi(a) = a.m$. Como $M = \langle m \rangle$, φ es epi.

Sea $I = \ker \varphi = \{a \in A / a.m = 0\}$. Entonces

$$A/_{\ker \varphi} \cong \operatorname{im} \varphi = M \quad \checkmark$$

OBS M cíclico $\Rightarrow$ M finitamente generado

La recíproca es falsa. P. ej. $A = k[x,y]$, k cuerpo.

$M = \langle x, y \rangle$ = ideal generado por x, y

es A-módulo fin. gen., pero no es cíclico

(no es ideal principal). Más general: cualquier ideal finitamente generado, no principal.

PRODUCTO DIRECTO, SUMA DIRECTA

SEA A UN ANILLO CONMUTATIVO, SEA I UN CONJUNTO Y M_i A-MÓDULO PARA CADA $i \in I$.

CONSIDERAMOS EL CONJUNTO PRODUCTO CARTESIANO

$$M = \underset{i \in I}{\times} M_i$$

UN ELEMENTO $m \in M$ ES UNA FAMILIA $m = (m_i)_{i \in I}$ CON $m_i \in M_i$, $\forall i \in I$.

M TIENE ESTRUCTURA DE A-MÓDULO:

$$(m_i)_{i \in I} + (m'_i)_{i \in I} = (m_i + m'_i)_{i \in I}$$

$$a \cdot (m_i)_{i \in I} = (a \cdot m_i)_{i \in I}, \quad a \in A.$$

(VERIFICAR AXIOMAS)

PARA $m = (m_i)_{i \in I}$ DENOTAMOS $sop(m) = \{ i \in I \, / \, m_i \neq 0 \}$ (SOPORTE DE m)

DEFINIMOS $\bigoplus_{i \in I} M_i = \{ m \in \underset{i \in I}{\times} M_i \, / \, sop(m) \text{ ES CONJUNTO FINITO} \}$

SEA $p_j : \underset{i \in I}{\times} M_i \to M_j$ (PARA $j \in I$) LA <u>PROYECCIÓN</u> <u>CANÓNICA</u> DEFINIDA POR $p_j (m_i)_{i \in I} = m_j$

SEA $u_j : M_j \longrightarrow \underset{i \in I}{\times} M_i$ (PARA $j \in I$) LA <u>INCLUSIÓN</u> <u>CANÓNICA</u> DEFINIDA POR

$$(u_j(m_j))_i = \begin{cases} 0 & \text{PARA } i \neq j \\ m_j & \text{PARA } i = j \end{cases}, \quad \forall m_j \in M_j.$$

<u>OBS</u> u_j, p_j SON MORFISMOS DE A-MÓDULOS.

$p_j \circ u_j = id_{M_j}$ ($\Rightarrow$ u_j ES SECCIÓN, p_j ES RETRACCIÓN)

DENOTAMOS $p_j|_{\bigoplus_{i \in I} M_i} = p_j : \bigoplus_{i \in I} M_i \to M_j$, $u_j : M_j \to \bigoplus_{i \in I} M_i$

EJ I FINITO $\Rightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i = \bigtimes_{i\in I} M_i$

EJ $M_i = A, \forall i \in I \Rightarrow$

$$\bigtimes_{i\in I} M_i = A^I = \{ f : I \to A \} = \{ (f_i)_{i\in I},\ f_i \in A \}$$

$$\bigoplus_{i\in I} M_i = A^{(I)} = \{ (f_i)_{i\in I},\ f_i \in A,\ \text{sop FINITO} \}$$

PROP (PROPIEDAD UNIVERSAL DE $\bigtimes_{i\in I} M_i$)

SEA N A-MÓDULO, SEAN $f_j : N \to M_j$ $(j \in I)$ MORFISMOS DE A-MÓDULOS. ENTONCES $\exists!\ f : N \to \bigtimes_{i\in I} M_i$ TAL QUE $p_j \circ f = f_j$, $\forall j \in I$

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_j"'] & \bigtimes_{i\in I} M_i \arrow[d, "p_j"] \\ & M_j \end{tikzcd}$$

DENOTAMOS

$$f = \bigtimes_{i\in I} f_i$$

DEM DEFINIMOS f MEDIANTE $(f(m))_j = f_j(m)$

VERIFICAR:
- f ES MORFISMO DE A-MÓDULOS
- $p_j \circ f = f_j$, $\forall j \in I$
- SI $g : N \to \bigtimes_{i\in I} M_i$ SATISFACE $p_j \circ g = f_j$, $\forall j \in I$ ENTONCES $g = f$.

EJ $I = \{1, 2, \dots, r\}$ $\quad M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_r$

$N \xrightarrow{f} M$, $\quad f(m) = (f_1(m), f_2(m), \dots, f_r(m))$, $m \in N$.

PARA $N \xrightarrow{f_i} M_i$, $i = 1, \dots, r$

<u>COR</u> SEAN $f_i : M_i \to N_i$ MORFISMOS DE A-MÓDULOS PARA $i \in I$, ENTONCES $\exists!\ f : \underset{i\in I}{\times} M_i \longrightarrow \underset{i\in I}{\times} N_i$ MORFISMO TAL QUE

$$\begin{array}{ccc} \underset{i\in I}{\times} M_i & \xrightarrow{f} & \underset{i\in I}{\times} N_i \\ {\scriptstyle p_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_i} \\ M_i & \xrightarrow[f_i]{} & N_i \end{array}$$

CONMUTA $\forall i \in I$.

DENOTAMOS $f = \underset{i\in I}{\times} f_i$

<u>DEM</u> PARA CADA $i \in I$ TENEMOS EL MORFISMO

$$\underset{i\in I}{\times} M_i \xrightarrow{p_i} M_i \xrightarrow{f_i} N_i$$

POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DE $\underset{i\in I}{\times} N_i$, $\exists!\ f$.

EXPLICITAMENTE f ESTÁ DEFINIDO POR

$$\left(f\,(m_i)_{i\in I}\right)_j = f_j(m_j), \quad \forall j \in I$$

<u>EJ</u> $I = \{1, \dots, n\}$, $f_i : M_i \to N_i$

$$f : M_1 \times \dots \times M_n \longrightarrow N_1 \times \dots \times N_n$$

$$f(m_1, \dots, m_n) = (f_1(m_1), \dots, f_n(m_n))$$

PROP (PROPIEDAD UNIVERSAL DE $\bigoplus_{i\in I} M_i$)

SEA N UN A-MÓDULO, SEAN $\nu_j : M_j \to N$ $(j \in I)$ MORFISMOS DE A-MÓDULOS. ENTONCES $\exists!\ \nu : \bigoplus_{i\in I} M_i \to N$ TAL QUE $\nu \circ \mu_j = \nu_j$, $\forall j \in I$

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[r, "\nu"] & N \\ M_j \arrow[u, "\mu_j"] \arrow[ur, "\nu_j"'] & \end{tikzcd}$$

DENOTAMOS $\nu = \bigoplus_{j\in I} \nu_j$

DEM DEFINIMOS ν MEDIANTE $\nu\left((m_i)_{i\in I}\right) = \sum_{i\in I} \nu_i(m_i)$

MÁS PRECISAMENTE: $\nu\left((m_i)_{i\in I}\right) = \sum_{i\in S} \nu_i(m_i)$

DONDE $S = \operatorname{sop}(m_i)_{i\in I}$, QUE ES UN CONJUNTO FINITO.

VERIFICAR: ν ES MORFISMO DE A-MÓDULOS

$\nu \circ \mu_j = \nu_j$: $\nu(\mu_j(m_j)) = \nu_j(m_j)$

YA QUE $\operatorname{sop} \mu_j(m_j) = \{j\}$ $\left(\mu_j(m_j)_i \begin{array}{ll} = 0 & \forall i \neq j \\ = m_j & i = j \end{array} \right)$

UNICIDAD DE ν: SEA $\bar{\nu} : \bigoplus_{i\in I} M_i \to N$ / $\bar{\nu} \circ \mu_j = \nu_j$, $\forall j \in I$.

SEA $m = (m_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I} M_i$, SEA $S = \operatorname{sop}(m)$

ENTONCES ES CLARO QUE $m = \sum_{j\in S} \mu_j(m_j)$.

POR LO TANTO, $\bar{\nu}(m) = \sum_{j\in S} \bar{\nu}(\mu_j(m_j)) = \sum_{j\in S} \nu_j(m_j) = \nu(m)$ ✓

COR SEAN $f_i : M_i \to N_i$ MORFISMOS DE A-MÓDULOS, $\forall i \in I$.

ENTONCES $\exists!\ f : \bigoplus_{i \in I} M_i \to \bigoplus_{i \in I} N_i$ MORFISMO DE A-MÓDULOS

TAL QUE

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i\in I} M_i & \xrightarrow{f} & \bigoplus_{i\in I} N_i \\ u_i \uparrow & & \uparrow u_i \\ M_i & \xrightarrow{f_i} & N_i \end{array}$$

CONMUTA $\forall i \in I$

DENOTAMOS $f = \bigoplus_{i \in I} f_i$

DEM PARA CADA $i \in I$ TENEMOS EL MORFISMO

$$M_i \xrightarrow{f_i} N_i \xrightarrow{u_i} \bigoplus_{i\in I} N_i$$

POR LA PROPIEDAD UNIVERSAL DE $\bigoplus_{i \in I} M_i$, $\exists!\ f$

EXPLICITAMENTE f ESTÁ DEFINIDO POR

$$f\left((m_i)_{i\in I}\right) = \sum_{i \in S} u_i(f_i(m_i))$$

$$S = \operatorname{sop}(m_i)_{i \in I}$$

EJERCICIO PARA $M_i \xrightarrow{f_i} N_i \xrightarrow{g_i} P_i$ $(i \in I)$ VALE

$$\prod_{i\in I} M_i \xrightarrow{\prod f_i} \prod_{i\in I} N_i \xrightarrow{\prod g_i} \prod_{i\in I} P_i$$

$$\left(\prod_{i\in I} g_i\right) \circ \left(\prod_{i\in I} f_i\right) = \prod_{i\in I} (g_i \circ f_i)$$

Y SIMILARMENTE PARA $\bigoplus$.

EJERCICIO SEAN $S_i \subset M_i$ SUBMÓDULOS, $\forall i \in I$.

SE TIENEN ISOMORFISMOS (CANÓNICOS)

$$\prod_{i\in I} M_i \Big/ \prod_{i\in I} S_i \cong \prod_{i \in I} (M_i/S_i)$$

$$\bigoplus_{i\in I} M_i \Big/ \bigoplus_{i\in I} S_i \cong \bigoplus_{i \in I} (M_i/S_i)$$

PROP SEAN I, J CONJUNTOS. SEA A ANILLO CONMUTATIVO, M_i, N_j A-MÓDULOS, PARA $i \in I$, $j \in J$.
EXISTE UN ISOMORFISMO (CANÓNICO) DE A-MÓDULOS

$$\mathrm{Hom}_A\Big(\bigoplus_{i\in I} M_i, \prod_{j\in J} N_j\Big) \xrightarrow[\sim]{\mu} \prod_{\substack{i\in I\\ j\in J}} \mathrm{Hom}_A(M_i, N_j)$$

DEM SEA $f: \bigoplus_{i\in I} M_i \to \prod_{j\in J} N_j$ UN MORFISMO DE A-MÓDULOS

ASOCIAMOS a f UN $\mu_{ij}(f): M_i \to N_j$ MORFISMO:

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[r, "f"] & \prod_{j\in J} N_j \arrow[d, "p_j"] \\ M_i \arrow[u, "u_i"] \arrow[r] & N_j \end{tikzcd}$$

$$\mu_{ij}(f) = p_j \circ f \circ u_i$$

DEFINIMOS $\mu(f) = (\mu_{ij}(f))_{\substack{i\in I\\ j\in J}}$ = "MATRIZ EN BLOQUES ASOCIADA A f"

ES CLARO QUE μ ES MORFISMO DE A-MÓDULOS.

VAMOS A DEFINIR LA INVERSA DE μ:

$$\prod_{\substack{i\in I\\ j\in J}} \mathrm{Hom}_A(M_i, N_j) \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Hom}_A\Big(\bigoplus_{i\in I} M_i, \prod_{j\in J} N_j\Big)$$

SEA $g = (g_{ij})_{\substack{i\in I\\ j\in J}}$, $M_i \xrightarrow{g_{ij}} N_j$ DEFINIMOS

$\lambda(g): \bigoplus_{i\in I} M_i \to \prod_{j\in J} N_j$ MEDIANTE $\Big(\lambda(g)\,(m_i)_{i\in I}\Big)_j \overset{(\cdot)}{=} \sum_{i\in I} g_{ij}(m_i) \in N_j$

VERIFICAR: $\mu \circ \lambda = id$, $\lambda \circ \mu = id$

USAR LAS PROPIEDADES UNIVERSALES, O CÁLCULO DIRECTO.

EJ $M_i = A$ $\forall i \in I$, $N_j = A$ $\forall j \in J$ $\Rightarrow$

$$\mathrm{Hom}_A(A^{(I)}, A^J) \cong A^{I\times J}$$

$(\cdot)$
$\lambda(g) = \bigoplus_{i\in I} \prod_{j\in J} g_{ij}$