ANILLOS Y MÓDULOS DE FRACCIONES

SEA A UN ANILLO CONMUTATIVO

DEF UN SUBCONJUNTO $S \subset A$ ES MULTIPLICATIVO SI

- $1 \in S$,
- $s_1, s_2 \in S \Rightarrow s_1 . s_2 \in S$

SEA ~~A~~ M UN A-MÓDULO, SEA $S \subset A$ MULTIPLICATIVO

VAMOS A CONSTRUIR UN NUEVO A-MÓDULO CUYOS ELEMENTOS SON FRACCIONES $\frac{m}{s}$ CON $m \in M$, $s \in S$:

EN $M \times S$ DEFINIMOS LA RELACIÓN

$$(m, s) \sim (m', s') \iff \exists\, s'' \in S \,/\, s''.(s'm - s m') = 0$$

VERIFICAR: $\sim$ ES RELACIÓN DE EQUIVALENCIA

$M \times S/\sim$ SE DENOTA $S^{-1}M$

LA CLASE DE (m, s) SE DENOTA $\frac{m}{s}$

ENTONCES: $\frac{m}{s} = \frac{m'}{s'} \iff \exists\, s'' \in S \,/\, s''.(s'm - s m') = 0$

$M \times S \xrightarrow{\pi} S^{-1}M$, $\pi(m, s) = \frac{m}{s}$ PROYECCIÓN AL COCIENTE

PARA $m \in M$ DEFINIMOS $\varphi_S(m) = \frac{m}{1}$

O SEA

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "m \mapsto (m,1)"] \arrow[rr, bend right, "\varphi_S"'] & M \times S \arrow[r, "\pi"] & S^{-1}M \end{tikzcd}$$

$+$ EN $S^{-1}M$: $\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} = \frac{s'.m + s.m'}{s.s'}$

VERIFICAR: $+$ BIEN DEFINIDA

$(S^{-1}M, +)$ GRUPO ABELIANO, $0 = \frac{0}{1} = \varphi_S(0)$

ACCIÓN DE A EN $S^{-1}M$: $a . \frac{m}{s} = \frac{a.m}{s}$

$\Rightarrow S^{-1}M$ ES A-MÓDULO

CASO $M = A$ TENGO $S^{-1}A$

- EN $S^{-1}A$: $\frac{a}{s} . \frac{a'}{s'} = \frac{a.a'}{s.s'}$

BIEN DEFINIDA, $(S^{-1}A, +, \cdot)$ ES ANILLO CONMUTATIVO.

$\varphi_S : A \to S^{-1}A$ ES MORFISMO DE ANILLOS

VALE: $s \in S \Rightarrow \frac{s}{1} \in S^{-1}A$ ES INVERSIBLE, $\frac{1}{s}$

$S^{-1}M$ ES $S^{-1}A$-MÓDULO:

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{m}{s'} = \frac{a \cdot m}{s \cdot s'}$$

EJEMPLOS

1) SEA A UN DOMINIO $\Rightarrow S = A - \{0\}$ ES MULTIPLICATIVO

DENOTAMOS $S^{-1}A = K(A)$ = CUERPO DE FRACCIONES DE A

$$K(A) = \left\{ \frac{a}{b},\ a \in A,\ b \in A,\ b \neq 0 \right\}$$

$a \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a} \Rightarrow$ ES CUERPO

EJ: $K(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$

$$K(k[t]) = k(t) = \left\{ \frac{p(t)}{q(t)},\ p(t) \in k[t],\ q(t) \in k[t] \right\}, \quad q(t) \neq 0$$

2) MÁS GENERALMENTE, SI $P \subset A$ ES IDEAL PRIMO

$\Rightarrow S = A - P$ ES MULTIPLICATIVO.

DENOTAMOS $S^{-1}A = A_P = \left\{ \frac{a}{b},\ a, b \in A,\ b \notin P \right\}$

SI M ES UN A-MÓDULO, DENOTAMOS

$S^{-1}M = M_P$, ES A_P-MÓDULO.

EJ $A = \mathbb{Z}$, $P = \langle p \rangle$, $\mathbb{Z}_{\langle p \rangle} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \,/\, p \nmid b \right\} \subset \mathbb{Q}$

3) $A = k[x_1, \dots, x_n]$, $P = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ (IDEAL MAXIMAL, $\Rightarrow$ PRIMO)

$$k[x_1, \dots, x_n]_P = \left\{ \frac{f}{g},\ f, g \in k[x_1, \dots, x_n],\ g(0) \neq 0 \right\}$$

= ANILLO DE FUNCIONES RACIONALES DEFINIDAS EN EL PUNTO $(0, \dots, 0) \in k^n$.

4) PARA $a \in A$ SEA $S = \{1, a, a^2, \dots, a^n, \dots\}$

$= \{a^i,\ i \in \mathbb{N}\}$, ES MULTIPLICATIVO

$$S^{-1}A = \left\{ \frac{b}{a^n},\ b \in A,\ n \in \mathbb{N} \right\} = \underbrace{A_{(a)}}_{\text{NOTACIÓN}}$$

EJ $A = \mathbb{Z}$, $a = 5 \Rightarrow \mathbb{Z}_{(5)} = \left\{ \frac{b}{5^n},\ b \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{Q}$

PROP (PROPIEDAD UNIVERSAL DE $S^{-1}A$)

A ANILLO CONMUTATIVO, $S \subset A$ MULTIPLICATIVO

1) $\varphi_S : A \to S^{-1}A$ ES MORFISMO DE ANILLOS TAL QUE $\forall s \in S$, $\varphi_S(s) \in S^{-1}A$ ES INVERSIBLE ($\varphi_S(S) \subset (S^{-1}A)^*$)

2) SI $\psi : A \to B$ ES MORFISMO DE ANILLOS TAL QUE $\psi(S) \subset B^*$ ENTONCES $\exists! \tilde{\psi} : S^{-1}A \to B$ MORFISMO DE ANILLOS / $\psi = \tilde{\psi} \circ \varphi_S$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi_S"'] & B \\ S^{-1}A \arrow[ur, "\tilde{\psi}"'] & \end{tikzcd}$$

DEM 1) $\varphi_S(s) = \frac{s}{1}$ $\quad \frac{s}{1} \cdot \frac{1}{s} = 1$ EN $S^{-1}A$ ✓

2) DEFINO $\tilde{\psi}\left(\frac{a}{s}\right) = \psi(a) \cdot \psi(s)^{-1}$

VERIFICAR:
- BUENA DEFINICIÓN
- $\tilde{\psi}$ MORFISMO DE ANILLOS
- UNICIDAD

OBS $\ker \varphi_S = \{ a \in A \,/\, \exists s \in S,\ s.a = 0 \}$

EN PARTICULAR, A DOMINIO $\Rightarrow$ φ_S MONO.

OBS SIMILARMENTE, PARA M A-MÓDULO

$\varphi_S : M \to S^{-1}M$ $\quad \varphi_S(m) = \frac{m}{1}$

$\ker \varphi_S = \{ m \in M \,/\, \frac{m}{1} = 0 \} = \{ m \in M \,/\, \exists s \in S,\ s.m = 0 \}$

TORSIÓN Y DIVISIBILIDAD

SEA A UN ANILLO CONMUTATIVO.
SEA M UN A-MÓDULO.

DEF $m \in M$ ES UN ELEMENTO DE TORSIÓN
SI EXISTE $a \in A, a \neq 0$, TAL QUE $a.m = 0$

DENOTAMOS $t(M) = \{ m \in M / m \text{ ES DE TORSIÓN} \}$

VERIFICAR: A DOMINIO $\Rightarrow t(M) \subset M$ SUBMÓDULO.

DEF $An(M) = \{ a \in A / a.m = 0, \forall m \in M \}$
$= $ ANULADOR DE M
ES UN IDEAL DE A.

DEF SEA $X \subset M$ UN SUBCONJUNTO.
DECIMOS QUE X ES LINEALMENTE INDEPENDIENTE SI

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{m} a_i . m_i = 0 \\ \text{CON } m \in \mathbb{N}, \\ a_1, \dots, a_m \in A, \\ m_1, \dots, m_m \in X \end{array} \right\} \Rightarrow a_1 = \dots = a_m = 0$$

CASO CONTRARIO: LINEALMENTE DEPENDIENTE

EJ SI $m \in M$ ES DE TORSIÓN ENTONCES $X = \{m\}$ ES UN CONJUNTO LINEALMENTE DEPENDIENTE.

DEF SEA $a \in A$, SEA $m \in M$.
DECIMOS QUE m ES DIVISIBLE POR a SI $m = a.m'$ PARA ALGÚN $m' \in M$.
DECIMOS QUE M ES DIVISIBLE POR a SI m ES DIVISIBLE POR a, $\forall m \in M$.
DECIMOS QUE M ES DIVISIBLE SI M ES DIVISIBLE POR a, $\forall a \in A - \{0\}$.

EJ SI A ES CUERPO, TODO A-MÓDULO (= ESPACIO VECTORIAL) ES DIVISIBLE

EJ $\mathbb{Q}$ ES $\mathbb{Z}$-MÓDULO DIVISIBLE.

SUBMÓDULO GENERADO

SEA A UN ANILLO CONMUTATIVO.
SEA M UN A-MÓDULO.

DEF PARA UN SUBCONJUNTO $X \subset M$ DENOTAMOS

$$\langle X \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_i \cdot m_i \, , \; m \in \mathbb{N}, \; a_1, \dots, a_m \in A, \; m_1, \dots, m_m \in X \right\}$$

PROP $\langle X \rangle \subset M$ ES SUBMODULO, $X \subset \langle X \rangle$.
ADEMÁS, SI $N \subset M$ ES SUBMÓDULO / $X \subset N$
ENTONCES $\langle X \rangle \subset N$.
($\Rightarrow$ $\langle X \rangle =$ ~~MAX~~ MÍNIMO SUBMODULO DE M QUE CONTIENE X)

DEM EJERCICIO

$\langle X \rangle =$ "SUBMODULO DE M GENERADO POR X".

EJ: SE DICE QUE X GENERA M SI $\langle X \rangle = M$.
UN SUBMÓDULO

EJ: SEA I UN CONJUNTO Y SEA $N_i \subset M$ UN SUBMÓDULO PARA CADA $i \in I$. DENOTAMOS $\sum_{i \in I} N_i = \langle \bigcup_{i \in I} N_i \rangle$

$$= \left\{ \sum_{i \in F} m_i \, , \; m_i \in N_i, \; F \subset I \text{ FINITO} \right\}$$

P. EJ. $N_1 + N_2 \subset M$.