<u>EJ</u> SEA $M = \bigoplus_{i=1}^{r} A/\langle d_i \rangle$. ENTONCES M TIENE

LA PRESENTACIÓN
$$A^r \xrightarrow{\psi} A^r \xrightarrow{\varphi} M \to 0$$

DONDE $\varphi = \bigoplus_{i=1}^{r} \pi_i$, $\pi_i : A \to A/\langle d_i \rangle$ PROYECCIÓN CANÓNICA

Y $[\psi] = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \dots, d_r)$

SEA A UN ANILLO. SEA $\alpha \in A^{r \times s}$

$\Rightarrow$ $\tilde{\alpha} : A^s \to A^r$ MORFISMO DE MÓDULOS LIBRES INDUCIDO POR α, $\tilde{\alpha}(x) = \alpha . x$, $x \in A^s = A^{s \times 1}$

$\Rightarrow$ TENEMOS EL A-MÓDULO $M = \operatorname{coker} \tilde{\alpha} = A^r / \operatorname{im}(\tilde{\alpha})$

$\Rightarrow$ $A^s \xrightarrow{\tilde{\alpha}} A^r \xrightarrow{\pi} M \to 0$

ES UNA PRESENTACIÓN DE M.

<u>DEF</u> PARA $\alpha, \beta \in A^{r \times s}$, DECIMOS QUE α ES EQUIVALENTE a β, ESCRITO $\alpha \equiv \beta$, SI EXISTEN $\mu \in (A^{r \times r})^* = GL(r, A)$, $\nu \in (A^{s \times s})^*$

TALES QUE $\beta = \mu . \alpha . \nu$

<u>PROP</u> $\alpha \equiv \beta \Rightarrow \operatorname{coker}(\tilde{\alpha}) \cong \operatorname{coker}(\tilde{\beta})$

<u>DEM</u>
$$\begin{tikzcd}
A^s \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] & A^r \arrow[r, "\pi"] & \operatorname{coker}(\tilde{\alpha}) \arrow[r] & 0 \\
A^s \arrow[u, "\tilde{\nu}"] \arrow[r, "\tilde{\beta}"'] & A^r \arrow[u, "\tilde{\mu}^{-1} = f"'] \arrow[r, "\pi"] & \operatorname{coker}(\tilde{\beta}) \arrow[u, "\bar{f}"'] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$
$\bar{f}$ <u>iso</u>

$\beta = \mu \alpha \nu \Rightarrow \mu^{-1} . \beta = \alpha . \nu \Rightarrow \tilde{\mu}^{-1} \circ \tilde{\beta} = \tilde{\alpha} \circ \tilde{\nu}$

<u>TEO 3</u> SEA A UN DIP. SEA $\alpha \in A^{r \times s}$.

a) ENTONCES EXISTE $\beta \in A^{r \times s}$ TAL QUE β ES DIAGONAL ($\beta_{ij} = 0$ si $i \neq j$) Y $\alpha \equiv \beta = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_N)$

VAMOS A DEMOSTRAR TEO3, TEO1, TEO 2 EN ESTE ORDEN.

b) $\beta = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_N) \equiv \beta' = \operatorname{diag}(d'_1, \dots, d'_N)$ CON $d'_1 | d'_2$, $d'_2 | d'_3$, ... $d'_{N-1} | d'_N$.

MÓDULOS FINITAMENTE GENERADOS SOBRE $k[t]$ (k CUERPO), FORMAS NORMALES DE MATRICES $\in k^{n\times n}$.

SEA k UN CUERPO, SEA $(V,+,\cdot)$ UN k-ESPACIO VECTORIAL. PARA CADA $\sigma: V \to V$ k-LINEAL, DEFINIMOS UN $k[t]$-MÓDULO V_σ DEL MODO SIGUIENTE.

EN EL GRUPO ABELIANO $(V,+)$ DEFINIMOS UNA ACCIÓN DEL ANILLO $k[t]$

$$k[t] \times V \xrightarrow{\cdot_\sigma} V$$

$$P \cdot_\sigma v = P(\sigma)(v)$$

DONDE SI $P = \sum_{i=0}^{d} P_i\, t^i \in k[t]$, DENOTAMOS

$$P(\sigma) = \sum_{i=0}^{d} P_i\, \sigma^i \in \mathrm{End}_k(V)$$

$$\Rightarrow \quad P \cdot_\sigma v = P(\sigma)(v) = \sum_{i=0}^{d} P_i\, \sigma^i(v) \in V$$

$\Rightarrow$ $V_\sigma = (V, +, \cdot_\sigma)$ SATISFACE LOS AXIOMAS DE $k[t]$-MÓDULO (VERIFICAR)

<u>NOTA</u> DADO $\sigma \in \mathrm{End}_k(V)$, EXISTE UN ÚNICO MORFISMO DE ANILLOS (k-ALGEBRAS)

$$k[t] \xrightarrow{\varepsilon_\sigma} \mathrm{End}_k(V)$$

TAL QUE $\varepsilon_\sigma(t) = \sigma$ (ε_σ = ESPECIALIZACIÓN EN σ): $\varepsilon_\sigma(P) = P(\sigma)$.

POR OTRA PARTE, V TIENE ESTRUCTURA NATURAL DE MÓDULO (IZQ.) SOBRE EL ANILLO $\mathrm{End}_k(V)$.

V_σ SE OBTIENE POR RESTRICCIÓN DE ESCALARES DE $\mathrm{End}_k(V)$ A $k[t]$ VÍA ε_σ.

<u>OBS</u> AL REVÉS, SI V TIENE UNA ESTRUCTURA DE $k[t]$-MÓDULO, EXISTE $\sigma \in \mathrm{End}_k(V)$ TAL QUE $V = V_\sigma$. EN EFECTO, TOMAR σ = MULTIPLICACIÓN POR t.

SI $\sigma \in k^{n\times n}$ DENOTAMOS $\sigma : k^n \to k^n$, $x \mapsto \sigma . x$

$\Rightarrow$ TENEMOS EL $k[t]$-MÓDULO k^n_σ.

PROP k^n_σ ES UN $k[t]$-MÓDULO FINITAMENTE GENERADO, DE TORSIÓN.

DEM DENOTEMOS $\{e_1, \dots, e_n\}$ LA BASE CANÓNICA DE k^n.

$\{e_1, \dots, e_n\}$ GENERAN k^n SOBRE k $\Rightarrow$

" " " $k[t]$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ k^n_σ ES FINITAMENTE GENERADO.

EL CONJUNTO $\{\sigma^0 = I_n, \sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^m, \dots\} \subset k^{n\times n}$

NO ES LINEALMENTE INDEPENDIENTE YA QUE $\dim_k (k^{n\times n}) = n^2 < \infty$

$\Rightarrow \exists\, P \in k[t] \,/\, P(\sigma) = 0$ $\Rightarrow$ $P \cdot_\sigma v = 0$, $\forall v \in k^n$
$P \neq 0$

$\Rightarrow$ $P \cdot_\sigma k^n_\sigma = 0$ $\Rightarrow$ k^n_σ ES DE TORSIÓN ✓

OBS MÁS PRECISAMENTE VIMOS QUE $\exists\, P \in k[t]$, $P \neq 0$, $P \cdot_\sigma k^n_\sigma = 0$

DEF PARA $\sigma \in k^{n\times n}$, $\{P \in k[t] \,/\, P(\sigma) = 0\}$ ES UN IDEAL $\neq 0$.

COMO $k[t]$ ES PRINCIPAL, SEA m_σ EL GENERADOR MÓNICO DE ESTE IDEAL. m_σ SE LLAMA POLINOMIO MINIMAL DE σ.

OBS $\{P \in k[t] \,/\, P(\sigma) = 0\} = \mathrm{An}(k^n_\sigma) = \langle m_\sigma \rangle$

DENOTAMOS $\chi_\sigma \in k[t]$ EL POLINOMIO CARACTERÍSTICO DE σ DEFINIDO POR $\chi_\sigma(t) = \det(\sigma - t . I_n)$

EL TEOREMA DE CAYLEY-HAMILTON AFIRMA QUE $\chi_\sigma(\sigma) = 0$.

ENTONCES $m_\sigma \mid \chi_\sigma$.

SEA V UN k-ESPACIO VECTORIAL, $\sigma \in \mathrm{End}_k(V)$, V_σ COMO ANTES.

PROP SEA $S \subset V$ UN SUBESPACIO VECTORIAL.
SON EQUIVALENTES:

a) S ES σ-ESTABLE ($\sigma(S) \subset S$),

b) S ES $k[t]$-SUBMÓDULO DE V_σ.

DEM EJERCICIO.

OBS SI $X \subset V$ ES UN SUBCONJUNTO, DENOTAMOS COMO DE COSTUMBRE, $\langle X \rangle \subset V_\sigma$ EL $k[t]$-SUBMÓDULO GENERADO POR X:

$$\langle X \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{N} P_i . x_i \,,\ N \in \mathbb{N},\ P_i \in k[t],\ x_i \in X \right\}$$

EN PARTICULAR TENEMOS LOS SUBMÓDULOS CÍCLICOS, GENERADOS POR UN ELEMENTO $v \in V$ ($X = \{v\}$)

$$\langle v \rangle = \{ P.v,\ P \in k[t] \} \qquad (\text{DENOTAMOS } P_\sigma v = P.v)$$

$\Rightarrow \langle v \rangle =$ SUBESPACIO VECTORIAL GENERADO POR $\{v, \sigma(v), \sigma^2(v), \dots, \sigma^j(v), \dots\}$

RECORDAR: SI M ES UN A-MÓDULO, $m \in M$ UN ELEMENTO, ENTONCES $\langle m \rangle \cong A/I$, DONDE $I = An(m) = \{a \in A / a.m = 0\}$

EN EFECTO: $A \xrightarrow{\varphi} M$, $\varphi(a) = a.m$

$\ker \varphi = An(m)$, $im(\varphi) = \langle m \rangle$ $\Rightarrow$ $A/_{An(m)} \xrightarrow{\bar{\varphi}} \langle m \rangle$ ISO.

EN NUESTRO CASO ACTUAL, $A = k[t]$, $M = V_\sigma$, $v \in V = V_\sigma$

DENOTEMOS $m_v \in k[t]$ EL GENERADOR MÓNICO DE $An(v)$

$$An(v) = \{ P \in k[t] / P(\sigma)(v) = 0 \} = \langle m_v \rangle$$

$m_v =$ POLINOMIO MINIMAL DE v

OBS $m_v \mid m_\sigma$ YA QUE $m_\sigma \in An(v)$, $\forall v \in V$.

TENEMOS ENTONCES $\quad k[t]/_{\langle m_v \rangle} \xrightarrow{\cong} \langle v \rangle \subset V_\sigma$

$\Rightarrow$ SI $r = gr(m_v)$ ENTONCES $\{v, \sigma(v), \dots, \sigma^{r-1}(v)\} = B_v$ ES BASE DE $\langle v \rangle$

COMO $\langle v \rangle \subset V$ ES σ- ESTABLE, TENEMOS

$$\sigma|_{\langle v \rangle} : \langle v \rangle \to \langle v \rangle \qquad (k\text{-LINEAL})$$

DENOTEMOS $m_v(t) = t^r + a_{r-1} \cdot t^{r-1} + \cdots + a_0$, $a_i \in k$.

PROP. LA MATRIZ DE $\sigma|_{\langle v \rangle}$ EN LA BASE B_v ES:

$$C(m_v) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{r-1} \end{bmatrix}$$

QUE SE DENOMINA "MATRIZ COMPAÑERA" DEL POLINOMIO $m_v \in k[t]$.

DEM $v \mapsto \sigma(v) \mapsto \sigma^2(v) \mapsto \cdots \mapsto \sigma^{r-1}(v) \mapsto \sigma^r(v) = \sum_{i=0}^{r-1} -a_i \sigma^i(v)$

APLIQUEMOS TEO I A V_σ:

$\exists\, d_1, d_2, \dots, d_N \in k[t] \ / \ d_1 | d_2, d_2 | d_3, \dots, d_{N-1} | d_N$

$$V_\sigma \cong \bigoplus_{i=1}^{N} k[t]/\langle d_i \rangle$$

(COMO V_σ ES DE TORSIÓN, VALE $d_i \neq 0 \ \forall i$)

EQUIVALENTEMENTE, $V_\sigma = \bigoplus_{i=1}^{N} \langle v_i \rangle$, $m_{v_i} = d_i \ \forall i$
PARA CIERTOS $v_1, \dots, v_N \in V$.

COMO ANTES, SEA $B_{v_i} = \{v_i, \sigma(v_i), \dots, \sigma^{n_i - 1}(v_i)\}$, $n_i = \deg d_i$

BASE DEL SUBMÓDULO CÍCLICO $\langle v_i \rangle$.

SEA $B = \bigcup_{i=1}^{N} B_{v_i} \Rightarrow B$ ES BASE DE V Y

LA MATRIZ DE σ EN LA BASE B ES

$$[\sigma]_B = \bigoplus_{i=1}^{N} C(d_i) \quad (*)$$

(MATRIZ EN BLOQUES, CON $C(d_i)$ A LO LARGO DE LA DIAGONAL)
= FORMA NORMAL RACIONAL DE σ

SEA $V = k^n$, SEA $\sigma : k^n \to k^n$.

DENOTEMOS $a = [\sigma]_C$ LA MATRIZ DE σ EN LA BASE CANÓNICA C.

POR LO ANTERIOR, EXISTE OTRA BASE B TAL QUE $[\sigma]_B = b$
ES COMO EN $(*)$. COMO a Y b REPRESENTAN LA MISMA
TRANSFORMACIÓN LINEAL σ, VALE $a \sim b$ $\quad (a = p \cdot b \cdot p^{-1},\ \det p \neq 0)$

$\Rightarrow$ <u>$\forall a \in k^{n \times n}$, $\exists\, b$ EN BLOQUES COMO EN $(*)$ / $a \sim b$.</u>

b ES LA <u>FORMA NORMAL RACIONAL</u> DE a.

(FORMA NORMAL DE JORDAN: DESPUÉS)

$d_1, \dots, d_N$ SE LLAMAN <u>DIVISORES ELEMENTALES</u> DE σ (O DE $a \in k^{n \times n}$)

PARA CALCULARLOS SE DIAGONALIZA LA <u>MATRIZ CARACTERÍSTICA DE a</u>

$$a - t \cdot I_n \in k[t]^{n \times n}$$

COMO VEREMOS A CONTINUACIÓN.