SEA $a \in k^{n\times n}$, $a = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$

DENOTAMOS $\tilde{a}: k^n \to k^n$ LA TRANSFORMACIÓN LINEAL DEFINIDA POR a $\Rightarrow$ $[\tilde{a}]_C = a$, $C = \{e_1, \dots, e_n\}$ BASE CANÓNICA.

$$\tilde{a}(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\Big)e_i \,, \quad \text{PARA } (x_1,\dots,x_n)\in k^n.$$

EN PARTICULAR, $\tilde{a}(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$ = COLUMNA j DE a.

TENEMOS EL $k[t]$-MÓDULO $k^n_{\tilde{a}}$.

<u>PROP</u> LA SIGUIENTE SUCESIÓN DE $k[t]$-MÓDULOS ES EXACTA:

$$0 \to k[t]^n \xrightarrow{\overline{\chi}_a} k[t]^n \xrightarrow{\rho} k^n_{\tilde{a}} \to 0$$

DONDE $\overline{\chi}_a$ ES MULTIPLICACIÓN POR LA MATRIZ CARACTERÍSTICA DE a, $a - t.I_n \in k[t]^{n\times n}$, Y ρ ESTÁ DEFINIDO POR $\rho(e_i) = e_i$, $i=1,\dots,n$

(O SEA, $\rho(p_1,\dots,p_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i \underset{\tilde{a}}{\cdot} e_i = \sum_{i=1}^{n} p_i(a).e_i$),
PARA $p_i \in k[t]$, $i=1,\dots,n$)

$\Rightarrow$ $a - t.I_n$ DEFINE UNA PRESENTACIÓN DE $k^n_{\tilde{a}}$.

<u>DEM</u> $\tilde{a}(e_j) = \sum_i a_{ij}e_i \iff t.e_j = \sum_i a_{ij}e_i$, $\forall j$

<u>OBS</u> $\{e_1,\dots,e_n\}$ SON GENERADORES DE $k^n_{\tilde{a}}$, Y SATISFACEN LAS RELACIONES $\sum_i (a_{ij} - t.\delta_{ij})e_i = 0$, $j=1,\dots,n$. (*)

VEAMOS QUE LA SUCESIÓN ES EXACTA:

$\bar{\chi}_a$ MONO: TENEMOS $\det \bar{\chi}_a = \chi_a \neq 0 \in k[t]$

DONDE χ_a = POLINOMIO CARACTERÍSTICO DE a.

PENSAR $k[t] \subset K = k(t)$,

$$\begin{tikzcd} k[t]^n \arrow[r, "\bar{\chi}_a"] \arrow[d, hook] & k[t]^n \arrow[d, hook] \\ K^n \arrow[r, "\bar{\chi}_a"'] & K^n \end{tikzcd}$$

✓

ρ EPI: $\{e_1, \dots, e_n\}$ GENERA k^n SOBRE k $\Rightarrow$

" " $k^n_{\tilde{a}}$ " $k[t]$. ✓

$\operatorname{im} \bar{\chi}_a \subset \ker \rho$ (O SEA, $\rho \circ \bar{\chi}_a = 0$):

$$\bar{\chi}_a(p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} (a - t.I_n)_{ij} \cdot p_j \Big) e_i, \quad p_j \in k[t].$$

$$\Rightarrow \bar{\chi}_a(e_j) = \sum_i (a - t.I_n)_{ij}\, e_i = \sum_i a_{ij}.e_i - t.e_j$$

$$\Rightarrow \rho(\bar{\chi}_a(e_j)) = \rho\Big(\sum a_{ij}.e_i - t.e_j\Big) \underset{(*)}{=} 0 \quad ✓$$

$\operatorname{im} \bar{\chi}_a = \ker \rho$:

TENEMOS, POR EL PUNTO ANTERIOR,

$$M = \frac{k[t]^n}{\operatorname{im} \chi_a} \xrightarrow{\bar{\rho}} k^n_{\tilde{a}}$$

MORFISMO DE $k[t]$-MÓDULOS.

QVQ: $\bar{\rho}$ ES INYECTIVA, COMO MORFISMO DE $k[t]$-MODULOS, O EQUIVALENTEMENTE, COMO MORFISMO DE k-MODULOS.

DENOTAMOS $\bar{e}_i \in M$ LA CLASE DE $e_i \in k[t]^n$.

EN M VALE $t.\bar{e}_j = \sum_i a_{ij} \bar{e}_i \Rightarrow t.\bar{e}_j \in S = k.\langle \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n \rangle$

$\Rightarrow t^r.\bar{e}_j \in S, \ \forall j \Rightarrow p.\bar{e}_j \in S, \ \forall p \in k[t] \Rightarrow M = S$

$\Rightarrow \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ GENERAN M SOBRE k $\Rightarrow \dim_k M \leq n$

ρ EPI $\Rightarrow \bar{\rho}$ EPI $\Rightarrow \bar{\rho}$ ISO $\Rightarrow \bar{\rho}$ MONO ✓

$M \xrightarrow{\bar{\rho}} k^n$, $\dim_k M \leq n = \dim_k k^n$.

<u>COR</u> SI $a - t.I_n \equiv \mathrm{diag}(d_1, d_2, \dots, d_r)$ CON $\langle d_1 \rangle \supset \langle d_2 \rangle \supset \dots \supset \langle d_r \rangle$ ENTONCES $k^n_{\tilde{a}} \cong \bigoplus_{i=1}^{r} k[t]/\langle d_i \rangle$

Y $a \sim \bigoplus_{i=1}^{r} C(d_i)$.

$d_1, d_2, \dots, d_r$ SON LOS DIVISORES ELEMENTALES DE $a \in k^{n\times n}$.
SE OBTIENEN APLICANDO EL ALGORITMO DE DIAGONALIZACIÓN A LA MATRIZ $a - t.I_n \in k[t]^{n\times n}$.

<u>FORMA CANÓNICA DE JORDAN</u>

COMO EN COR 4 (PAG 102), COMBINEMOS $k^n_{\tilde{a}} \cong \bigoplus_{i=1}^{r} k[t]/\langle d_i \rangle$ CON LA DESCOMPOSICIÓN EN COMPONENTES p-PRIMARIAS

$$k[t]/\langle d_i \rangle \cong \bigoplus_{j=1}^{t} k[t]/\langle p_j^{e_{ij}} \rangle$$

$$d_i = \prod_{j=1}^{t} p_j^{e_{ij}}, \quad p_j \text{ IRREDUCIBLES MÓNICOS } \in k[t].$$

$$\Rightarrow k^n_{\tilde{a}} \cong \bigoplus_{j=1}^{t} \underbrace{\left(\bigoplus_{i=1}^{r} k[t]/\langle p_j^{e_{ij}} \rangle \right)}_{\text{COMPONENTE } p_j\text{-PRIMARIA}}$$

$\Rightarrow a \sim J_k(a) =$ FORMA CANÓNICA DE JORDAN SOBRE k DE a

$J_k(a)$ ES UNA MATRIZ EN BLOQUES
QUE VAMOS A DESCRIBIR A CONTINUACIÓN.
(VER GENTILE, ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS II, PAG. 125)

PARA MAYOR CLARIDAD, RETOMEMOS LA NOTACIÓN DE PAG. 108: V k-ESPACIO VECTORIAL, $\sigma \in End_k(V)$, $v \in V$, $\langle v \rangle \subset V_\sigma$ EL $k[t]$-SUBMÓDULO CÍCLICO GENERADO POR v. COMO ANTES, $\frac{k[t]}{\langle m_v \rangle} \xrightarrow{\simeq} \langle v \rangle \subset V_\sigma$

SUPONGAMOS AHORA QUE $m_v = p^e$ CON $p \in k[t]$, $e \in \mathbb{N}$.
$r = gr(m_v) = e \cdot gr(p) = e \cdot s$, $s = gr(p)$.
HABÍAMOS ELEGIDO LA BASE $B_v = \{v, \sigma(v), \dots, \sigma^{r-1}(v)\}$ DE $\langle v \rangle$.
AHORA VAMOS A ELEGIR OTRA BASE DE $\langle v \rangle$.
(UNA BASE "MEJOR", EN EL SENTIDO QUE VA A TENER EN CUENTA QUE $m_v = p^e$ ES UNA POTENCIA)

SUG.: LEER PRIMERO PAG. 116, CASO $s=1$

SEA $p = t^s + a_{s-1} \cdot t^{s-1} + \dots + a_1 \cdot t + a_0$, $a_i \in k$.
TOMAMOS $B'_v = \{ v_{ij} = p^i \cdot \sigma^j(v),\ j = 0, \dots, s-1;\ i = 0, \dots, e-1 \}$

ORDENADOS DEL MODO SIGUIENTE

$$v, \sigma(v), \dots, \sigma^{s-1}(v),$$
$$p \cdot v, p \cdot \sigma(v), \dots, p \cdot \sigma^{s-1}(v),$$
$$p^2 \cdot v, p^2 \cdot \sigma(v), \dots, p^2 \cdot \sigma^{s-1}(v),$$
$$\dots$$
$$p^{e-1} \cdot v, p^{e-1} \cdot \sigma(v), \dots, p^{e-1} \cdot \sigma^{s-1}(v)$$

<u>OBS</u> $p^i \cdot \sigma^j(v) = p^i \cdot t^j \cdot v = t^j p^i \cdot v \in \langle v \rangle$, $\forall i, j$.
TODO $q \in k[t]$, $gr(q) < r$, SE ESCRIBE
$$q = \sum_{i=0}^{e-1} q_i \cdot p^i \quad \text{CON } q_i = 0 \text{ Ó } gr(q_i) < s$$
$\Rightarrow B'_v$ GENERA $\langle v \rangle$. COMO $\# B'_v = r = s \cdot e = \dim_k \langle v \rangle$
B'_v ES BASE DE $\langle v \rangle$.

ESCRIBAMOS $\boxed{}$ $[\sigma|_{\langle v \rangle}]_{B'_v}$

$$\sigma|_{\langle v \rangle} : \langle v \rangle \to \langle v \rangle$$

$$p = t^s + \sum_{j=0}^{s-1} a_j t^j \Rightarrow p.v = t^s.v + \sum_{j=0}^{s-1} a_j t^j.v$$

$$\Rightarrow \quad t.t^{s-1}.v = t^s.v = p.v - \sum_{j=0}^{s-1} a_j t^j v$$

O SEA, $\sigma(\sigma^{s-1} v) = p.v - \sum_{j=0}^{s-1} a_j \sigma^j v$

$\Rightarrow$ EL EFECTO DE σ EN LOS PRIMEROS s ELEMENTOS DE B_v' ES:

$$\begin{array}{cccccc}
v & \sigma(v) & \sigma^2(v) & \cdots & \sigma^{s-2}(v) & \sigma^{s-1}(v) \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
\sigma(v) & \sigma^2(v) & \sigma^3(v) & & \sigma^{s-1}(v) & p.v - \sum_{j=0}^{s-1} a_j \sigma^j(v)
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
p.v & p.\sigma(v) & p.\sigma^2(v) & \cdots & p.\sigma^{s-2}(v) & p.\sigma^{s-1}(v) \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
p.\sigma(v) & p.\sigma^2(v) & p.\sigma^3(v) & & p.\sigma^{s-1}(v) & p^2.v - \sum_{j=0}^{s-1} a_j p.\sigma^j(v)
\end{array}$$

- $p = t^s + \sum_{j=0}^{s-1} a_j t^j \Rightarrow$ (MULTIPLICANDO POR p^i)

$$p^{i+1} = t^s.p^i + \sum_{j=0}^{s-1} a_j p^i t^j$$

$$\Rightarrow \quad t.t^{s-1} p^i = t^s.p^i = p^{i+1} - \sum_{j=0}^{s-1} a_j p^i t^j$$

$$\Rightarrow \quad \sigma.(p^i.\sigma^{s-1}(v)) = p^{i+1}.v - \sum_{j=0}^{s-1} a_j p^i.\sigma^j(v)$$

$\Rightarrow [\sigma|_{\langle v\rangle}]_{B_v'}$ TIENE LA FORMA

$$J(p,e) = \begin{bmatrix}
\boxed{C(p)} & & & & 0 \\
1 & \boxed{C(p)} & & & \\
 & 1 & \boxed{C(p)} & & \\
 & & 1 & \ddots & \\
0 & & & & \boxed{C(p)}
\end{bmatrix}$$

e BLOQUES $C(p)$ (VER PAG. 109) EN LA DIAGONAL

EJ: SUPONGAMOS $s=1$, $p = t+a_0$, $m_v = (t+a_0)^e$

SEA $\mathcal{B}'_v = \{v, p.v, \dots, p^{e-1}.v\}$ (BASE DE $\langle v \rangle$)

$v_i = p^i . v = (\sigma + a_0)^i(v)$, $0 \leq i \leq e-1$

$\sigma(v_0) = \sigma(v) = (\sigma+a_0)(v) - a_0.v = -a_0 . v_0 + v_1$

$\sigma(v_1) = (\sigma+a_0)(v_1) - a_0.v_1 = -a_0.v_1 + v_2$

$\vdots$

$\sigma(v_j) = -a_0 v_j + v_{j+1}$

$\vdots$

$\sigma(v_{e-1}) = (\sigma+a_0) v_{e-1} - a_0 v_{e-1} = -a_0 v_{e-1}$

YA QUE $(\sigma+a_0) v_{e-1} = (\sigma+a_0)^e v = 0$

($\Rightarrow$ v_{e-1} ES AUTO-VECTOR DE σ, CON AUTOVALOR $-a_0$)

$$\Rightarrow \quad [\,\sigma|_{\langle v\rangle}\,]_{\mathcal{B}'_v} = \begin{bmatrix} -a_0 & & & & 0 \\ 1 & -a_0 & & & \\ & 1 & -a_0 & & \\ & 0 & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -a_0 \end{bmatrix} = J(t+a_0, e)$$

P.EJ. SI $e=3$,

$$J(t+a_0, 3) = \begin{bmatrix} -a_0 & 0 & 0 \\ 1 & -a_0 & 0 \\ 0 & 1 & -a_0 \end{bmatrix}$$

EJ SUPONGAMOS $s=2$, $p=t^2+a_1t+a_0$

$m_v = p^e$

$$\Rightarrow \quad C(p)=\begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$J(p,4)=\left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 0 & -a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -a_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a_1 \end{array}\right]$$

EN CONCLUSIÓN, DE LA DESCOMPOSICIÓN EN SUMA DIRECTA DE MÓDULOS CÍCLICOS p-PRIMARIOS DE PAG. 113:

$$k^n_{\tilde{a}} \cong \bigoplus_{j=1}^{t} \bigoplus_{i=1}^{r} k[t] \big/ \langle p_j^{e_{ij}} \rangle$$

OBTENEMOS QUE

Forma de Jordan sobre k: $$a \sim \bigoplus_{j=1}^{t} \bigoplus_{i=1}^{r} J(p_j, e_{ij}) = J_k(a)$$

ADEMÁS, POR TEO. 2, ESTA DESCOMPOSICIÓN ES ÚNICA. (SALVO ORDEN DE LOS p_j)

<u>OBS</u> SI $k = \mathbb{C}$, CON NOTACIÓN DE PAG. 113, $p_j = t - \lambda_j$ $j = 1, \dots, t$ ($\lambda_i \neq \lambda_j$ PARA $i \neq j$) $\Rightarrow$

$$a \sim \bigoplus_{j=1}^{t} \bigoplus_{i=1}^{r} J(t-\lambda_j, e_{ij})$$

DONDE $J(t-\lambda_j, e_{ij})$ ES COMO EN PAG. 116
ESTA ES LA DESCOMPOSICIÓN DE JORDAN CLÁSICA.

SI $k = \mathbb{R}$, PODEMOS TENER EN $J_{\mathbb{R}}(a)$ BLOQUES DEL TIPO ANTERIOR $J(t-\lambda_j, e_{ij})$, Y TAMBIÉN BLOQUES CORRESPONDIENTES A IRREDUCIBLES DE GRADO 2, $J(t^2+a_1t+a_0, e)$ CON $a_1^2-4a_0<0$, COMO EN PAG. 117.
SI $k = \mathbb{Q}$ PODEMOS TENER BLOQUES $J(p, e)$ CON $p \in \mathbb{Q}[t]$ IRREDUCIBLE DE GRADO ARBITRARIO.

<u>OBS</u> PARA $a \in \mathbb{Q}^{n\times n}$, PUEDE OCURRIR QUE $J_{\mathbb{Q}}(a)$, $J_{\mathbb{R}}(a)$, $J_{\mathbb{C}}(a)$ SEAN DIFERENTES, YA QUE SE OBTIENEN FACTORIZANDO LOS DIVISORES ELEMENTALES $d_i \in \mathbb{Q}[t]$ DE a EN $\mathbb{Q}[t]$, $\mathbb{R}[t]$ O $\mathbb{C}[t]$.