CATEGORÍAS, FUNCTORES, TRANSFORMACIONES NATURALES (INTRODUCCIÓN)

REFS.: JACOBSON, LANG, ALUFFI. (MAC LANE, CATEGORIES FOR THE WORKING MATHEMATICIAN)

DEF SEAN A y B ANILLOS (CONMUTATIVOS).

UN FUNCTOR COVARIANTE DE A-MÓDULOS EN B-MÓDULOS

CONSISTE DE ASIGNAR:

- A CADA A-MÓDULO M UN B-MÓDULO $F(M)$,
- A CADA MORFISMO $f: M \to N$ DE A-MÓDULOS, UN MORFISMO $F(f): F(M) \to F(N)$ DE B-MÓDULOS

DE MODO QUE SE VERIFIQUE:

- PARA $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ VALE $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

O SEA,
$$\begin{tikzcd} F(M) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[rr, bend right, "F(g\circ f)"'] & F(N) \arrow[r, "F(g)"] & F(P) \end{tikzcd}$$
CONMUTA.

- PARA $M \xrightarrow{id_M} M$ VALE $F(id_M) = id_{F(M)}$

EJS

a) $M \longmapsto t(M) =$ TORSIÓN DE M

DEFINE UN FUNCTOR COVARIANTE DE A-MÓDULOS EN A-MÓDULOS

b) $M \longmapsto M \oplus M$

"

c) SEA N A-MÓDULO FIJO.

$M \longmapsto Hom_A(N, M)$

DEFINE UN FUNCTOR COVARIANTE DE A-MÓDULOS EN A-MÓDULOS

PARA $M_1 \xrightarrow{f} M_2$ TENEMOS $Hom_A(N, M_1) \to Hom_A(N, M_2)$

DEFINIDA POR $N \xrightarrow{g} M_1 \xrightarrow{f} M_2$ $\quad g \longmapsto f \circ g$

CATEGORÍAS, FUNCTORES, TRANSFORMACIONES NATURALES.

REFS.: JACOBSON, LANG, ALUFFI.

DEF SEAN A Y B ANILLOS CONMUTATIVOS.
UN FUNCTOR COVARIANTE F DE A-MÓDULOS EN B-MÓDULOS CONSISTE DE ASIGNAR

- A CADA A-MÓDULO M UN B-MÓDULO $F(M)$,
- A CADA MORFISMO $M \xrightarrow{f} N$ DE A-MÓDULOS, UN MORFISMO $F(M) \xrightarrow{F(f)} F(N)$ DE B-MÓDULOS,

DE MODO QUE SE VERIFIQUE:

- PARA $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ VALE $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

  O SEA, EL DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd} F(M) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[rr, bend right, "F(g \circ f)"'] & F(N) \arrow[r, "F(g)"] & F(P) \end{tikzcd}$$

  CONMUTA.

- PARA $M \xrightarrow{id_M} M$ VALE $F(id_M) = id_{F(M)}$

EJS

a) SEA A ANILLO. PARA M A-MOD. SEA $F(M) = t(M) =$ TORSIÓN DE M.
PARA $M \xrightarrow{f} N$ MORFISMO, VALE $f(t(M)) \subset t(N)$
$\Rightarrow$ F ES FUNCTOR COVARIANTE DE A-MOD EN A-MOD.

b) SEA A ANILLO. PARA M A-MOD SEA $F(M) = M \oplus M$
PARA $M \xrightarrow{f} N$ MORFISMO, SEA $M \oplus M \xrightarrow{F(f)} N \oplus N$, $F(f) = f \oplus f$
$\Rightarrow$ F ES FUNCTOR COVARIANTE DE A-MOD EN A-MOD

c) SEA A ANILLO, SEA M' UN A-MÓDULO FIJO.
DEFINO $F(M) = \mathrm{Hom}_A(M', M)$ PARA CADA A-MOD. M.
PARA $M \xrightarrow{f} N$ MORFISMO DE A-MOD SEA
$F(f) : F(M) = \mathrm{Hom}_A(M', M) \longrightarrow F(N) = \mathrm{Hom}_A(M', N)$ DEFINIDO POR
$F(f)(\varphi) = f \circ \varphi$, $\quad M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{f} N$
$\Rightarrow$ F ES FUNCTOR COVARIANTE DE A-MOD EN A-MOD (VERIFICAR)

DEF SEAN A y B ANILLOS CONMUTATIVOS.

UN FUNCTOR CONTRAVARIANTE F DE A-MÓDULOS EN B-MÓDULOS CONSISTE DE ASIGNAR

- A CADA A-MÓDULO M UN B-MÓDULO $F(M)$,
- A CADA MORFISMO $M \xrightarrow{f} N$ DE A-MÓDULOS UN MORFISMO $F(N) \xrightarrow{F(f)} F(M)$ DE B-MÓDULOS,

DE MODO QUE SE VERIFIQUE

- PARA $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ VALE $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$

O SEA, EL DIAGRAMA

$$\begin{tikzcd} F(P) \arrow[r, "F(g)"] \arrow[rr, bend right, "F(g\circ f)"'] & F(N) \arrow[r, "F(f)"] & F(M) \end{tikzcd}$$

CONMUTA.

- PARA $M \xrightarrow{id_M} M$ VALE $F(id_M) = id_{F(M)}$.

EJS

1) SEA A ANILLO, SEA M' UN A-MÓDULO FIJO.
DEFINIMOS $F(M) = Hom_A(M, M')$ PARA CADA A-MOD. M.
PARA $M \xrightarrow{f} N$ MORFISMO DE A-MOD. SEA
$F(f): F(N) = Hom_A(N, M') \longrightarrow F(M) = Hom_A(M, M')$
DEFINIDO POR $F(f)(\varphi) = \varphi \circ f$, $\quad M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\varphi} M'$

$\Rightarrow$ F ES FUNCTOR CONTRAVARIANTE DE A-MOD EN A-MOD.

CASO PARTICULAR: $M' = A$

DENOTAMOS $M^* = Hom_A(M, A)$

$$\left(\begin{array}{l} F_{M'}(M) = Hom_A(M, M') \\ F_A(M) = Hom_A(M, A) \\ \qquad = M^* \end{array} \right)$$

---

2) SEA A UN ANILLO, SEA $I \subset A$ IDEAL, DENOTAMOS $B = A/I$
PARA CADA A-MOD. M SEA $F(M) = M/_{I.M}$ (ES B-MÓDULO)
SI $M \xrightarrow{f} N$ ES MORFISMO DE A-MOD.
$\Rightarrow f(I.M) \subset I.N \Rightarrow$ DEFINO $F(f) = \bar{f} : M/_{I.M} \to N/_{I.N}$

$\Rightarrow$ F ES FUNCTOR COVARIANTE DE A-MOD EN B-MOD.
F = "REDUCCIÓN MÓDULO I"

e) SEA A UN ANILLO, SEA $S \subset A$ CONJUNTO MULTIPLICATIVO, DENOTAMOS $B = S^{-1}A$.
PARA CADA A-MOD. M SEA $F(M) = S^{-1}M$
PARA $M \xrightarrow{f} N$ MORFISMO DE A-MOD.
TENEMOS $S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}N$ $\quad S^{-1}f\left(\frac{m}{s}\right) = \frac{f(m)}{s}$, $s \in S$, $m \in M$.
$F(f) = S^{-1}f$ MORFISMO DE B-MOD.
$\Rightarrow$ F ES FUNCTOR COVARIANTE DE A-MOD EN B-MOD. (VERIFICAR)

GENERALIZACIÓN: DE FUNCTORES DE A-MOD EN B-MOD A FUNCTORES ENTRE CATEGORÍAS ARBITRARIAS.

<u>DEF</u> UNA <u>CATEGORÍA</u> $\mathscr{C}$ CONSISTE DE UNA COLECCIÓN DE OBJETOS $OB(\mathscr{C})$ (MÁS TÉCNICAMENTE UNA CLASE, VER JACOBSON)
Y PARA CADA $A, B \in OB(\mathscr{C})$ UN CONJUNTO $MOR(A,B)$.
LOS ELEMENTOS DE $MOR(A,B)$ SE DENOMINAN <u>MORFISMOS DE A EN B</u> (O TAMBIÉN: <u>FLECHAS DE A EN B</u>),
DE MODO QUE:
PARA $A, B, C \in OB(\mathscr{C})$ ES DADA UNA FUNCIÓN (DENOMINADA <u>LEY DE COMPOSICIÓN</u> DE FLECHAS)

$$MOR(A,B) \times MOR(B,C) \longrightarrow MOR(A,C) \qquad (f,g) \longmapsto g \circ f$$

QUE SATISFACE LOS SIGUIENTES AXIOMAS:

CAT 1: LOS CONJUNTOS $MOR(A,B)$, $MOR(A',B')$ SON DISJUNTOS, SALVO SI $A = A'$ Y $B = B'$.

CAT 2: PARA CADA $A \in OB(\mathscr{C})$ ~~EXCLUADO~~ EXISTE $id_A \in MOR(A,A)$ TAL QUE $\forall B \in OB(\mathscr{C})$, $\forall f \in MOR(A,B)$ VALE $f \circ id_A = f$
" , $\forall g \in MOR(B,A)$ $\quad id_A \circ g = g$

CAT 3: PARA $A, B, C, D \in OB(\mathscr{C})$, Y PARA $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$
VALE $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

(SI $f \in MOR(A,B)$ ESCRIBIMOS $A \xrightarrow{f} B$)

EJS

$\mathcal{C}onj$ = CATEGORÍA DE CONJUNTOS

$\mathcal{G}rupos$ = CATEGORÍA DE GRUPOS

$\mathcal{A}b$ = CATEGORÍA DE GRUPOS ABELIANOS

$\mathcal{A}nillos$ = CATEGORÍA DE ANILLOS

A-MOD = CATEGORÍA DE A-MÓDULOS IZQ. (A ANILLO FIJO)

MOD-A = " " DER.

Monoides

Semigrupos

$\mathcal{C}^0$: $OB(\mathcal{C}^0) = \{(n, \mathcal{U}) \,/\, n \in \mathbb{N},\ \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \text{ ABIERTO}\}$

$MOR((n,\mathcal{U}),(m,\mathcal{V})) = \{$ FUNCIONES CONTINUAS $\mathcal{U} \to \mathcal{V}\}$

$\mathcal{C}^\infty$: SIMILAR

$ab(\mathbb{R}^n)$ = CATEGORÍA DE ABIERTOS DE $\mathbb{R}^n$

$OB = \{$ ABIERTOS $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n\}$

$mor(\mathcal{U},\mathcal{V}) = \{i_{\mathcal{U},\mathcal{V}}\}$ SI $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$, $i_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$ = INCLUSIÓN

$= \phi$ SI $\mathcal{U} \not\subset \mathcal{V}$

DEF SEAN $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ CATEGORÍAS.
UN FUNCTOR COVARIANTE F DE $\mathcal{C}$ EN $\mathcal{D}$ CONSISTE DE ASIGNAR

- A CADA $A \in OB(\mathcal{C})$ UN $F(A) \in OB(\mathcal{D})$
- A CADA $f \in mor_{\mathcal{C}}(A,B)$ UN $F(A) \in mor_{\mathcal{D}}(F(A),F(B))$

DE MODO QUE SE VERIFIQUE

- PARA $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ EN $\mathcal{C}$ VALE $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$
- PARA $A \in OB(\mathcal{C})$, $F(id_A) = id_{F(A)}$

$\boxed{F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}}$

DEF FUNCTOR CONTRAVARIANTE F DE $\mathcal{C}$ EN $\mathcal{D}$: SIMILAR

$\boxed{F : \mathcal{C} \to \mathcal{D} \text{ CONTRAVARIANTE}}$

EJS

a) F: grupos $\longrightarrow \mathcal{Ab}$ "FUNCTOR ABELIANIZACIÓN":

PARA G GRUPO, SEA $F(G) = G/_{[G,G]}$ (ES GRUPO ABELIANO)

SI $G \xrightarrow{f} G'$ MORFISMO DE GRUPOS $\Rightarrow f[G,G] \subset [G',G']$

$\Rightarrow f$ INDUCE $G/_{[G,G]} \xrightarrow{\bar{f}} G'/_{[G',G']}$, $F(f) = \bar{f}$

F ES FUNCTOR COVARIANTE (VERIFICAR)

b) COMPOSICIÓN DE FUNCTORES

EJ: $F(M) = M^{**}$ PARA M A-MOD.

c) F: A-MOD $\longrightarrow \mathcal{Ab} = \mathbb{Z}$-MOD

$F(M) = (M,+)$ = GRUPO ABELIANO SUBYACENTE

OLVIDARSE DE LA ACCIÓN $A \times M \to M$

"FUNCTOR DE OLVIDO"

d) SEA $A \xrightarrow{\varphi} B$ UN MORFISMO DE ANILLOS.

SI M ES B-MOD IZQ. ENTONCES M TIENE ESTRUCTURA DE A-MOD IZQ VIA: $a.m = \varphi(a).m$, $a \in A$, $m \in M$.

DENOTAMOS M_A ESTE A-MOD. SI $M \xrightarrow{f} N$ DE B-MOD ENTONCES f ES MORFISMO DE A-MÓDULOS

$F(M) = M_A$

F: B-MOD $\longrightarrow$ A-MOD

ES FUNCTOR COVARIANTE

F SE LLAMA "RESTRICCIÓN DE ESCALARES" VIA φ.

EJ $\mathbb{Q} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$ LA INCLUSIÓN.

M $\mathbb{R}$-ESPACIO VECTORIAL $\Rightarrow M_{\mathbb{Q}}$ $\mathbb{Q}$-ESPACIO VECTORIAL

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ INCLUSIÓN

M $\mathbb{C}$-ESPACIO VECTORIAL $\Rightarrow M_{\mathbb{R}}$ $\mathbb{R}$-ESPACIO VECTORIAL.

OBS $\dim_{\mathbb{Q}} M_{\mathbb{Q}} = +\infty$ EN GENERAL

$\dim_{\mathbb{R}} M_{\mathbb{R}} = 2 \dim_{\mathbb{C}} M$ (SI $<\infty$)