**PROP** SEA $A$ UN ANILLO CONMUTATIVO.
SEAN $I, J$ CONJUNTOS, $(M_i)_{i\in I}$, $(N_j)_{j\in J}$ FAMILIAS DE $A$-MÓDULOS. ENTONCES TENEMOS ISOMORFISMOS CANÓNICOS RECÍPROCOS $\left(\begin{array}{l}\lambda\circ\mu = id, \\ \mu\circ\lambda = id\end{array}\right)$

$$Hom_A\Big(\bigoplus_{i\in I} M_i, \bigtimes_{j\in J} N_j\Big) \underset{\lambda}{\overset{\mu}{\rightleftarrows}} \bigtimes_{\substack{i\in I\\ j\in J}} Hom_A(M_i, N_j)$$

DEFINIDOS POR:

$$\begin{tikzcd} \bigoplus M_i \arrow[r, "f"] & \bigtimes N_j \arrow[d, "p_j"] \\ M_i \arrow[u, "u_i"] \arrow[r] & N_j \end{tikzcd}$$

$$\mu(f) = (\mu_{ij}(f))_{\substack{i\in I\\ j\in J}}, \quad \mu_{ij}(f) = p_j\circ f\circ u_i$$

PARA $f : \bigoplus_{i\in I} M_i \to \bigtimes_{j\in J} N_j$, $\mu(f) =$ "MATRIZ EN BLOQUES ASOCIADA A $f$"

$$\lambda(g) = \bigtimes_{j\in J}\bigoplus_{i\in I} g_{ij}, \quad \text{PARA } g = (g_{ij})_{\substack{i\in I\\ j\in J}}, \quad g_{ij} : M_i \to N_j$$

$\lambda(g) =$ "MORFISMO ASOCIADO A LA MATRIZ EN BLOQUES $g$"

**DEM** ES CLARO DE LAS PROPIEDADES UNIVERSALES QUE $\mu$ Y $\lambda$ SON MORFISMOS DE $A$-MÓDULOS.
SEGÚN LAS DEFINICIONES DE $\bigtimes_{j\in J}$ Y $\bigoplus_{i\in I}$ DE MORFISMOS DADAS, TENEMOS $\lambda(g)\big((m_i)_{i\in I}\big) = \Big(\sum_{i\in I} g_{ij}(m_i)\Big)_{j\in J}$ $*$

VEAMOS QUE $\mu\circ\lambda = id$ Y $\lambda\circ\mu = id$:

SEA $g = (g_{ij})_{\substack{i\in I\\ j\in J}}$, $g_{ij} : M_i \to N_j$

$$(\mu\circ\lambda)(g) = \mu(\lambda(g)) = (\mu_{ij}(\lambda(g)))_{ij} = (p_j\circ\lambda(g)\circ u_i)_{ij} \overset{?}{=} (g_{ij})_{ij}$$

?: SEA $m_i \in M_i$, $(p_j\circ\lambda(g)\circ u_i)(m_i) = p_j(\lambda(g)(u_i(m_i))) =$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{POR DEF. } *}}{=} p_j\big(g_{ij}(m_i)\big)_{j\in J} = g_{ij}(m_i) \quad \checkmark$$

SEA $m = (m_i)_{i\in I} = \sum_{i\in I} u_i(m_i) = \sum_{i\in Sop(m)} u_i(m_i) \in \bigoplus_{i\in I} M_i$

SEA $f : \bigoplus_{i\in I} M_i \to \bigtimes_{j\in J} N_j$. QVQ: $\lambda\circ\mu(f)(m) = f(m)$

$$\lambda\circ\mu(f)(m) = \lambda(\mu(f))(m) = \lambda(p_j\circ f\circ u_i)_{ij}(m) \underset{*}{=} \Big(\sum_{i\in I}(p_j\circ f\circ u_i)(m_i)\Big)_{j\in J}$$

$$= \boxed{\Big(p_j\Big(\sum_{i\in I} f(u_i(m_i))\Big)\Big)_{j\in J}} = \Big(p_j\, f\Big(\sum_{i\in I} u_i(m_i)\Big)\Big)_{j\in J} = (p_j(f(m)))_{j\in J} = f(m) \quad \checkmark$$

EJ $\mathrm{Hom}_A(A^{(I)}, A^J) \cong A^{I\times J}$

(USANDO $\mathrm{Hom}_A(A,A) \cong A$)

EJERCICIO: $\mathrm{Hom}_A(A,M) \cong M$, $\forall$ A-MODULO $M$.

$$\mathrm{Hom}_A(A,M) \longrightarrow M$$
$$\varphi \longmapsto \varphi(1)$$

SUMA DIRECTA INTERNA

DEF SEA $M$ UN A-MÓDULO, SEA $(M_i)_{i\in I}$ UNA FAMILIA DE SUBMÓDULOS $M_i \subset M$. DECIMOS QUE $M$ ES SUMA DIRECTA DE LOS $M_i$ $(i\in I)$, ESCRITO $M \equiv \bigoplus_{i\in I} M_i$, SI $\alpha = \bigoplus_{i\in I}\alpha_i : \bigoplus_{i\in I} M_i \to M$ ES ISOMORFISMO, DONDE $\alpha_i : M_i \to M$ ES LA INCLUSIÓN.

PROP SON EQUIVALENTES:

1) $M \equiv \bigoplus_{i\in I} M_i$

2) TODO $m\in M$ SE ESCRIBE, DE MODO ÚNICO, COMO $m = \sum_{i\in F} m_i$ CON $F\subset I$ FINITO, $m_i \in M_i$ $\forall i\in F$.

3) TODO $m\in M$ SE ESCRIBE COMO EN 2). ADEMÁS, $\sum_{i\in F} m_i = 0$, $m_i\in M_i \Rightarrow m_i = 0$ $\forall i\in F$

4) $M = \sum_{i\in I} M_i$ Y $M_i \cap \sum_{j\neq i} M_j = 0$, $\forall i\in I$

DEM EJERCICIO

EJ SEA $(M_i)_{i\in I}$ UNA FAMILIA DE A-MÓDULOS

SEA $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$, $\mu_i : M_i \to M$ LAS INCLUSIONES CANÓNICAS.

ENTONCES $M \equiv \bigoplus_{i\in I} \mu_i(M_i)$.

DEF SEA $M$ UN A-MÓDULO, SEAN $S, T \subset M$ SUBMÓDULOS
SE DICE QUE $S$ Y $T$ SON SUPLEMENTARIOS SI
$M \equiv S \oplus T$ ($\underset{\text{PROP}}{\Leftrightarrow}$ $M = S+T$, $S \cap T = 0$)

DEF $S \subset M$ ES UN SUMANDO DIRECTO SI EXISTE $T \subset M$
TAL QUE $M \equiv S \oplus T$.

EJ SEA $A$ UN CUERPO, SEA $M$ UN A-MÓDULO
(DE DIMENSIÓN FINITA). ENTONCES TODO SUBESPACIO
VECTORIAL $S \subset M$ ES UN SUMANDO DIRECTO.

EJ $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}$, $S = 2\mathbb{Z}$ NO ES SUMANDO DIRECTO.
NINGÚN SUBMÓDULO PROPIO ES SUMANDO DIRECTO.

EJ $A = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}^2$, $S = 0 \times \mathbb{Z}$ ES SUMANDO DIRECTO
$S = \mathbb{Z}.(2,2) = \langle (2,2) \rangle$ NO LO ES. $S = \mathbb{Z}.(a,b)$ ?

OBS SI $M \equiv S \oplus T$, $\forall m \in M$, $\exists!\, s \in S$, $t \in T$ / $m = s+t$
$\Rightarrow \pi_S : M \to S$, $\pi_S(m) = s$ $\Rightarrow \pi_S \circ \pi_S = \pi_S$
($\pi_S \in Hom_A(M,M)$ ES IDEMPOTENTE)

$im(\pi_S) = S$, $ker(\pi_S) = T$ $\Rightarrow M/_T \xrightarrow{\cong} S$.

COR $M \equiv S \oplus T$, $M \equiv S \oplus T'$ $\Rightarrow T \cong T'$ ($\cong M/S$)

DEF $M$ ES INDESCOMPONIBLE SI SUS ÚNICOS
SUMANDOS DIRECTOS SON $0$ Y $M$.

DEF $M$ ES SIMPLE SI SUS ÚNICOS SUBMÓDULOS SON
$0$ Y $M$. EJ. $p \in \mathbb{Z}$ PRIMO $\Rightarrow \mathbb{Z}_p$ ES $\mathbb{Z}$-MÓDULO SIMPLE.

OBS $M$ SIMPLE $\Rightarrow$ $M$ INDESCOMPONIBLE
$\not\Leftarrow$ EJ. $p$ PRIMO, $M = \mathbb{Z}_{p^2}$ ES
INDESCOMPONIBLE, NO SIMPLE.

EJ $K^n$ COMO MÓDULO IZQ. SOBRE $A = K^{n \times n}$ ($K$ CUERPO)
ES SIMPLE.

DEF $M$ ES SEMISIMPLE SI EXISTE UN CONJUNTO $I$ Y SUBMÓDULOS $S_i \subset M$ PARA $i \in I$ TAL QUE $S_i$ ES SIMPLE $\forall i$ Y $M \equiv \bigoplus_{i \in I} S_i$.

(MÁS SOBRE ESTE CONCEPTO DESPUÉS)

EJ $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{Z}$ PRIMOS $\Rightarrow M = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_{p_i}$ ES SEMISIMPLE.

MÓDULOS LIBRES

SEA $A$ UN ANILLO CONMUTATIVO, SEA $M$ UN $A$-MÓDULO.

RECORDAR (PAG. 50): UNA BASE DE $M$ ES UN SUBCONJUNTO $X \subset M$ / $X$ ES LINEALMENTE INDEPENDIENTE, $X$ GENERA $M$

$\Leftrightarrow M \equiv \bigoplus_{x \in X} \langle x \rangle$ , $\langle x \rangle = A.x$

EJ SEA $I$ UN CONJUNTO, SEA $M = A^{(I)}$

PARA CADA $i \in I$ SEA $e_i \in A^{(I)}$, $(e_i)_j = \delta_{ij}$, $j \in I$.

$X = \{e_i, i \in I\}$ ES BASE DE $A^{(I)}$:

SI $m = (m_i)_{i \in I} \in A^{(I)}$, $m = \sum_{i \in S} m_i . e_i$ , $S = sop(m)$

DECIMOS QUE $\{e_i, i \in I\}$ ES LA BASE CANÓNICA DE $A^{(I)}$.

EJ SEA $M$ UN $A$-MÓDULO LIBRE, SEA $S \subset M$ SUBMÓDULO. ES $S$ LIBRE ?

EJ $M = A$, $S \subset A$ IDEAL, $S$ LIBRE $\Leftrightarrow S$ PRINCIPAL

($\Leftarrow$) $S = \langle a \rangle \Rightarrow \{a\}$ ES BASE DE $S$ (SUP. $A$ DOMINIO)

($\Rightarrow$) DOS ELEMENTOS $a, b \in A$ SON L.D. YA QUE TENEMOS LA RELACIÓN $a.b - b.a = 0$

ENTONCES, SI $S$ NO ES PRINCIPAL, NO PUEDE SER LIBRE.

PROP SEA $M$ UN $A$-MÓDULO LIBRE.
SEA $X \subset M$ UNA BASE.
ENTONCES, PARA CADA $A$-MÓDULO $N$, LA FUNCIÓN

$$\mathrm{Hom}_A(M,N) \xrightarrow{\rho} \mathrm{Hom}_{CONJ}(X,N) = N^X$$
$$f \longmapsto f|_X$$

ES BIYECTIVA.

DEM TODO $m \in M$ SE ESCRIBE, DE MODO ÚNICO, COMO $m = \sum_{x \in X} a_x \cdot x$, $sop(a_x)_{x\in X}$ FINITO, $a_x \in A$.

Dada $g: X \to N$ SEA $f: M \to N$ DEFINIDA POR

$f(m) = \sum_{x\in X} a_x \cdot g(x)$ PARA $m \in M$.

$f$ ESTÁ BIEN DEFINIDA Y ES MORFISMO DE $A$-MÓDULOS.
SI $m \in X$ ENTONCES $f(m) = g(m)$ $\Rightarrow f|_X = g$
$\Rightarrow \rho$ ES SORREYECTIVA.
$\rho$ ES INYECTIVA: $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$, $f_1|_X = f_2|_X$
$\Rightarrow f_1(m) = \sum_{x\in X} a_x \cdot f_1(x)$, $f_2(m) = \sum_{x\in X} a_x \cdot f_2(x)$
$\Rightarrow f_1(m) = f_2(m)$, $\forall m \in M \Rightarrow f_1 = f_2$ ✓

PROP SEA $M$ UN $A$-MÓDULO LIBRE.
ENTONCES $\exists I \,/\, M \cong A^{(I)}$

DEM SEA $X \subset M$ UNA BASE. EN LA PROP. ANTERIOR CON $N = A^{(X)}$ TENEMOS $f: M \to N$ MORFISMO / $f(x) = e_x$ $\forall x \in X$
COMO $f$ MANDA UNA BASE DE $M$ EN BASE DE $N$, RESULTA $f$ ISO (VERIFICAR) ✓

<u>PROP</u> $A^{(I)} \cong A^{(J)} \iff I \cong J$