ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS
QUE PLANEAMOS ESTUDIAR

- GRUPOS
- ANILLOS
- MÓDULOS SOBRE UN ANILLO

---

$X$ CONJUNTO

DEF: LEY DE COMPOSICIÓN INTERNA EN $X$ (= OPERACIÓN EN $X$)

ES UNA FUNCIÓN $*: X \times X \to X$

NOTACIÓN: $*(x_1, x_2) = x_1 * x_2$

$*$ ES ASOCIATIVA SI $(x_1 * x_2) * x_3 = x_1 * (x_2 * x_3)$, $\forall x_1, x_2, x_3 \in X$

CONMUTATIVA: $x_1 * x_2 = x_2 * x_1$, $\forall x_1, x_2 \in X$

ELEMENTO NEUTRO: $e \in X \;/\; e * x = x * e = x, \; \forall x \in X$.

PROP $*$ TIENE A LO SUMO UN ELEMENTO NEUTRO.

DEM $e, e' \in X$ NEUTROS $\Rightarrow e * x = x * e' = x, \; \forall x \in X$

$$\left.\begin{array}{l} x = e \Rightarrow e = e * e' \\ x = e' \Rightarrow e' = e * e' \end{array}\right\} \Rightarrow e = e'.$$

DEF $(X, *)$ semigrupo SI $*$ ES ASOCIATIVA

" monoide SI " $+ \; \exists \; e$ NEUTRO

$(X, *)$ monoide

DEF $x \in X$ ES INVERSIBLE (= UNIDAD) SI $\exists y \in X \;/\; y * x = x * y = e$

PROP UN TAL $y$ ES ÚNICO (SI EXISTE), DENOTADO $x'$ (= INVERSO DE $x$)

DEM SUP. $z * x = e = \cancel{\phantom{xx}}\; x * y$

$(z * x) * y = z * (x * y) \Rightarrow e * y = z * e \Rightarrow y = z$.

(VER DEFS IZQUIERDA/DERECHA)

**PROP** $(x')' = x$ , $(x * y)' = y' * x'$

**DEF** $(X, *)$ ES UN **GRUPO** SI TODO $x \in X$ ES INVERSIBLE

: monoide

**EJ** SEA $(X, *)$ : monoide . SEA $U(X) = \{x \in X \,/\, x \text{ INVERSIBLE}\}$

ENTONCES $(U(X), *)$ ES UN GRUPO. $\quad \overset{\shortparallel}{U(X,*)}$

**EJ** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

- $(\mathbb{N}, +)$ : monoide CONMUTATIVO
- $(\mathbb{N} - \{0\}, \cdot)$ " "
- $(\mathbb{Z}, +)$ GRUPO CONMUTATIVO
- $V$ ESPACIO VECTORIAL SOBRE CUERPO $k$

$\Rightarrow \text{End}_k(V) = \{f : V \to V \,/\, f \text{ LINEAL}\}$

$(\text{End}_k(V), \circ)$ SEMIGRUPO $\quad \circ =$ COMPOSICIÓN

$U(\text{End}_k(V)) = \{f : V \to V \,/\, f \text{ ISO. LINEAL}\} := GL(V)$ GRUPO GENERAL LINEAL de $V$

**OBS** $(\text{End}_k(V), +)$ GRUPO CONMUTATIVO

- $X$ CONJUNTO, $X^X = \{f : X \to X\}$

$(X^X, \circ)$ : monoide

$U(X^X) = \{f : X \to X \text{ BIYECTIVA}\} := S(X)$ GRUPO SIMÉTRICO DE $X$

NOTACIÓN: $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, $S(X) = S_n$

$f : X \to X$ SE DENOTA $\begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ f(1) & f(2) & \ldots & f(n) \end{bmatrix}$ ó $[f(1)\ f(2) \ldots f(n)]$

**DEF** $(X,*)$ CONJUNTO CON OPERACIÓN.

$S \subset X$ SUBCONJUNTO SE DICE **ESTABLE POR $*$** SI:

$s_1 * s_2 \in S, \ \forall s_1, s_2 \in S \qquad (S*S \subset S)$

$\Rightarrow \ *: S \times S \to S$ OPERACIÓN EN $S$ $\quad \left( *|_{S\times S} : S\times S \to S \right)$

$(X,*)$ MONOIDE $\Rightarrow (S,*)$ MONOIDE (SUBMONOIDE DE $X$)

$(X,*)$ SEMIGRUPO, $e \in S \Rightarrow (S,*)$ SEMIGRUPO (SUBSEMIGRUPO)

" GRUPO " $\Rightarrow$ " GRUPO (SUBGRUPO DE $X$)

S cerrado por inversos

**PROP** $I$ CONJUNTO, $S_i \subset X$ $(i \in I)$, $S_i$ SUB-? $\forall i$

$$\Rightarrow \bigcap_{i\in I} S_i = S \text{ ES SUB-?}$$

**DEF** $(X,*)$ SEMIGRUPO, $Y \subset X$ SUBCONJUNTO

$\{Y\} := \bigcap \{ S \subset X \ / \ S \text{ SUBSEMIGRUPO}, \ S \supset Y \}$

ES UN SUBSEMIGRUPO DE $X$, **DENOMINADO SEMIGRUPO GENERADO POR $Y$**

VALE: $- \ Y \subset \{Y\}$ $\qquad$ + cambiar semigrupo-monoide

$\qquad - $ SI $T \subset X$ SEMIGRUPO, $Y \subset T \Rightarrow \{Y\} \subset T$

(ES EL MENOR SUBSEMIGRUPO DE $X$ QUE CONTIENE $Y$)

**DEF** **$Y \subset X$ GENERA $X$** SI $\{Y\} = X$

**PROP** $\{Y\}$ CONSISTE DE TODOS LOS PRODUCTOS FINITOS DE ELEMENTOS DE $Y$

DEM: EX

**DEF** $(X,*)$ GRUPO, $Y \subset X$ SUBCONJUNTO

$\langle Y \rangle = \bigcap \{ S \subset X \ / \ S \text{ SUBGRUPO}, \ S \supset Y \}$

ES UN SUBGRUPO DE $X$, **SUBGRUPO GENERADO POR $Y$**

ES EL MENOR SUBGRUPO DE $X$ QUE CONTIENE $Y$.

**PROP** $\langle Y \rangle = \{ Y \cup Y' \}, \quad Y' = \{ y', \ y \in Y \}$

**DEF** $Y \subset X$ GENERA $X$ SI $\langle Y \rangle = X$.
(COMO GRUPO)

EJ

- $(G, *)$ GRUPO SE DICE CÍCLICO SI $\exists g \in G \ / \ G = \langle g \rangle$
  $(\Leftrightarrow \ G = \{g^n, \ n \in \mathbb{Z}\}, \ g^n = \underbrace{g * \cdots * g}_{n \text{ VECES}})$
  $g$ SE DICE GENERADOR DE $G$

  $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$
  $g = 1$ $\qquad g = \overline{1}$

- $SL(V) = \{ f \in GL(V) \ / \ \det f = 1 \}$ GRUPO ESPECIAL LINEAL
  SUBGRUPO DE $GL(V)$
- OTROS EJEMPLOS DE SUBGRUPOS DE $GL(V)$ EN PRÁCTICA.
- SUBGRUPOS DE $S_m$: $A_m = \{ \sigma \in S_m \ / \ sg(\sigma) = 1 \}$
  ...

**PROP** TODO $\sigma \in S_m$ SE PUEDE EXPRESAR COMO PRODUCTO DE TRASPOSICIONES $\tau_{ij} = (ij)$, NO NEC. DE MODO ÚNICO.
LA PARIDAD DEL NÚMERO DE TRASPOSICIONES EN DICHA EXPRESIÓN NO DEPENDE DE LA EXPRESIÓN, Y SE DENOMINA PARIDAD O SIGNATURA DE $\sigma = sg(\sigma)$. $\quad sg : S_m \to \{\pm 1\}$
MORFISMO DE GRUPOS

**PROP** TODO $\sigma \in S_m$ ES PRODUCTO DE CICLOS DISJUNTOS, DE MODO ÚNICO (SALVO ORDEN DE LOS CICLOS).
VER PRÁCTICA.

**DEF** SEAN $(X, *)$, $(Y, \Delta)$ CONJUNTOS CON LEY DE OPERACIÓN INTERNA.

UNA FUNCIÓN $f: X \to Y$ SE DICE QUE ES UN HOMOMORFISMO (O MORFISMO) SI $f(x_1 * x_2) = f(x_1) \Delta f(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in X$

O SEA, EL SIGUIENTE DIAGRAMA ES CONMUTATIVO:

$$\begin{tikzcd} X \times X \arrow[r, "*"] \arrow[d, "f \times f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \times Y \arrow[r, "\Delta"'] & Y \end{tikzcd} \qquad (f \times f)(x_1, x_2) = (f(x_1), f(x_2))$$

MORFISMO DE SEMIGRUPOS: SE PIDE ADEMÁS $f(e_X) = e_Y$

CASO DE GRUPOS: $f(x') = f(x)'$ ES AUTOMÁTICO (VERIFICAR)

**DEF** $f: (X, *) \to (Y, \Delta)$

MONOMORFISMO (= MONO) SI $f$ ES INYECTIVA

EPIMORFISMO (= EPI) SI $f$ ES SOBREYECTIVA

SECCIÓN SI $\exists\, g: (Y, \Delta) \to (X, *)$ / $g \circ f = id_X$

RETRACCIÓN SI " / $f \circ g = id_Y$

ISOMORFISMO SI " / $g \circ f = id_X$, $f \circ g = id_Y$

**PROP** $f$ ISO $\iff$ $f$ MORFISMO BIYECTIVO

$\iff$ $f$ SECCIÓN Y RETRACCIÓN

**DEM** EJERCICIO

**OBS** SECCIÓN $\Rightarrow$ MONO

$\not\Leftarrow$ (EJEMPLOS?)

RETRACCIÓN $\Rightarrow$ EPI

$\not\Leftarrow$ (EJEMPLOS?)

PROP SEA $f:(X,*)\to(Y,\Delta)$ MORFISMO DE GRUPOS

1) $\ker f := f^{-1}(e_Y)$ ES SUBGRUPO DE $X$

2) $\operatorname{im} f = f(X)$ ES SUBGRUPO DE $Y$

3) $f$ EPI $\iff \operatorname{im} f = Y$

4) $f$ MONO $\iff \ker f = \{e_X\}$

DEM

1) $x_1, x_2 \in \ker f \Rightarrow f(x_1)=e_Y,\ f(x_2)=e_Y \Rightarrow$
$f(x_1 * x_2) = f(x_1)\,\Delta\, f(x_2) = e_Y \,\Delta\, e_Y = e_Y \Rightarrow$
$x_1 * x_2 \in \ker f$ ✓
...

PRODUCTO Y COPRODUCTO

$J$ CONJUNTO
PARA CADA $j\in J$, $X_j$ ES UN CONJUNTO
DECIMOS QUE $\{X_j\}_{j\in J}$ ES UNA FAMILIA DE CONJUNTOS PARAMETRIZADA POR EL CONJUNTO (DE ÍNDICES) $J$.

$$\prod_{j\in J} X_j = \{ f: J \to \bigcup_{j\in J} X_j \ /\ f(j)\in X_j,\ \forall j\in J\}$$

$f \in \prod_{j\in J} X_j$ SE ESCRIBE $f=\{f_j\}_{j\in J}$ DONDE $f_j\in X_j$.

EJ SI $X_j = X\ \forall j\in J$, $\prod_{j\in J} X_j = X^J = \{f: J\to X\}$

SUP. $(X_j, *_j)$, $*_j$ OPERACIÓN EN $X_j$

DEFINIMOS $* = \prod_{j\in J} *_j$ OPERACIÓN EN $\prod_{j\in J} X_j$:

$$(f*g)_j = f_j *_j g_j\ ,\ \forall j\in J$$

EJ $(f_1,f_2)*(g_1,g_2) = (f_1 *_1 g_1, f_2 *_2 g_2)$
$J=\{1,2\}$

SI $e_j$ NEUTRO PARA $*_j$ $\Rightarrow$ $\bar{e} = (e_j)_{j\in J}$ NEUTRO PARA $*$

$(X, *_j)$ MONOIDE (RESP. SEMIGRUPO, RESP. GRUPO) $\Rightarrow$

$(X, *)$ " " "

$f \in \prod_{j\in J} X_j$ , $sop(f) = SOPORTE(f) = \{ j \in J \mid f_j \neq e_j \}$

<u>DEF</u> $\bigoplus_{j\in J} X_j = \{ f \in \prod_{j\in J} X_j \mid sop(f)$ ES UN CONJUNTO FINITO $\}$

CASO $X_j = X \ \forall j$, $\bigoplus_{j\in J} X_j = X^{(J)}$ (NOTACIÓN)

$X^{(J)} = \{ f: J \to X \mid sop(f)$ finito $\}$

$f(j) = e \ \forall j$ SALVO FINITOS $j$'s. $e$ = NEUTRO DE $X$.

<u>OBS</u> $sop(f*g) \subset sop(f) \cup sop(g)$

$\Rightarrow$ $\bigoplus_j X_j \subset \prod_j X_j$ ES ESTABLE POR $*$ , $\bar{e} \in \bigoplus X_j$

$sop(\bar{e}) = \emptyset$

$\Rightarrow$ MONOIDE, SEMIGRUPO, GRUPO

$*_j$ CONMUTATIVA $\forall j$ $\Rightarrow$ $*$ CONMUTATIVA.

J FINITO $\Rightarrow$ $\bigoplus = \prod$

RELACIÓN DE EQUIVALENCIA COMPATIBLE CON OPERACIÓN:

$X$ CONJUNTO

RELACIÓN EN $X$ : SUBCONJUNTO $R \subset X \times X$

$R$ REFLEXIVA: $(x,x) \in R, \ \forall x \in X$.

$R$ SIMÉTRICA: $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$

$R$ TRANSITIVA: $(x,y) \in R, (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

$R$ DE EQUIVALENCIA: REFL + SIM + TRANS

NOTACIÓN: $(x,y) \in R$ : $xRy$

PARA $x \in X$, $R(x) = \{y \in X \ / \ xRy\}$
= CLASE DE EQUIVALENCIA DE $x$

$xRy \Leftrightarrow R(x) = R(y)$

$X/R$ = CONJUNTO DE CLASES DE EQUIVALENCIA
= CONJUNTO COCIENTE DE $X$ POR $R$

$\pi : X \longrightarrow X/R \qquad \pi(x) = R(x) \in X/R$

APLICACIÓN COCIENTE = PROYECCIÓN CANÓNICA

- $\pi$ ES SOBREYECTIVA
- $\pi^{-1}\pi(x) = R(x), \ \forall x \in X$
- LOS CONJUNTOS $\pi^{-1}(c)$ CON $c \in X/R$ FORMAN UNA PARTICIÓN DE $X$:
  - $X = \bigcup_{c \in X/R} \pi^{-1}(c)$
  - $\pi^{-1}(c) \cap \pi^{-1}(c') = \emptyset, \ c \neq c'$

$\exists$ BIYECCIÓN $\left\{ \begin{array}{c} \text{RELACIONES DE} \\ \text{EQUIVALENCIA} \\ \text{EN } X \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{PARTICIONES} \\ \text{DE } X \end{array} \right\}$

$X$ CONJUNTO, $*: X \times X \to X$ OPERACIÓN BINARIA EN $X$

$R \subset X \times X$ RELACIÓN DE EQUIVALENCIA

**DEF** R ES COMPATIBLE CON $*$ A IZQUIERDA (RESP. DERECHA, RESP. --)

SI (PARA $x, y, z \in X$), $x R y \Rightarrow z*x \, R \, z*y$

(RESP. $x*z \, R \, y*z$, RESP. AMBAS)

**PROP** SI $R$ ES COMPATIBLE CON $*$, EN EL CONJUNTO COCIENTE $X/R$ EXISTE UNA ÚNICA OPERACIÓN $\bar{*}$ TAL QUE $\pi: X \to X/R$ ES MORFISMO ($\pi(x*y) = \pi(x) \bar{*} \pi(y)$, $\forall x, y \in X$)

**DEM** SEAN $c, d \in X/R$ CLASES DE EQUIVALENCIA.

ELEGIMOS $x, y \in X$ TALES QUE $c = R(x)$, $d = R(y)$

(O SEA, $c = \pi(x)$, $d = \pi(y)$). DEFINIMOS

$$c \bar{*} d = \pi(x*y) = R(x*y) \qquad (\cdot)$$

BUENA DEFINICIÓN: SEAN $x', y' \in X$ / $R(x) = R(x')$, $R(y) = R(y')$

QUIERO VER: $R(x*y) = R(x'*y')$.

$R(x) = R(x') \Rightarrow x R x' \Rightarrow x*y \, R \, x'*y$ (COMP. A DER.)

$R(y) = R(y') \Rightarrow y R y' \Rightarrow x'*y \, R \, x'*y'$ (COMP. A IZQ.)

$\Rightarrow x*y \, R \, x'*y' \Rightarrow R(x*y) = R(x'*y')$

$\Rightarrow \bar{*}: X/R \times X/R \to X/R$ BIEN DEFINIDA, Y MORFISMO:

$(\cdot)$ $\pi(x) \bar{*} \pi(y) = \pi(x*y)$

UNICIDAD: CLARO DE $(\cdot)$

**PROP** $*$ ASOCIATIVA $\Rightarrow \bar{*}$ ASOCIATIVA

$e$ NEUTRO PARA $* \Rightarrow R(e) = \pi(e)$ NEUTRO PARA $\bar{*}$

$x$ INVERSIBLE $\Rightarrow R(x)$ INVERSIBLE

($x*y = e \Rightarrow R(x) \bar{*} R(y) = R(e)$, $\pi(x) \bar{*} \pi(y) = \pi(e)$)

$*$ CONMUTATIVA $\Rightarrow \bar{*}$ CONMUTATIVA

SEA $(G,\cdot)$ UN GRUPO, $H \subset G$ SUBGRUPO

H DEFINE DOS RELACIONES DE EQUIVALENCIA EN G, UNA COMPATIBLE A IZQ., LA OTRA COMPATIBLE A DER.:

$x R y$ SI $\exists h \in H \,/\, x = h y \quad (\Leftrightarrow x \cdot y^{-1} \in H)$

$x S y$ SI $\exists h \in H \,/\, x = y h \quad (\Leftrightarrow y^{-1} \cdot x \in H)$

R COMPATIBLE A DERECHA:

$x R y \Rightarrow x = h y \ (h \in H) \Rightarrow x \cdot z = (h \cdot y) \cdot z = h \cdot (y \cdot z)$

$\Rightarrow x \cdot z \, R \, y \cdot z, \ \forall z \in G$

S COMPATIBLE A IZQUIERDA: SIMILAR.

<u>PROP</u> $(G,\cdot)$ GRUPO, R (RESP. S) RELACIÓN DE EQUIVALENCIA EN G COMPATIBLE A DERECHA (RESP. IZQUIERDA) CON $\cdot$ ENTONCES EXISTE UN SUBGRUPO (ÚNICO) $H \subset G$ TAL QUE R (RESP. S) ESTÁ DEFINIDA POR H COMO ANTES.

<u>DEM</u> EJERCICIO    <u>SUG</u>: TOMAR $H = R(e)$ (RESP. $S(e)$)

<u>PROP</u> $(G,\cdot)$ GRUPO, $H \subset$ SUBGRUPO, R, S COMO ANTES. SON EQUIVALENTES:

1) $g \cdot H = H \cdot g, \ \forall g \in G$ (H ES <u>SUBGRUPO NORMAL</u>)
   (PARA $A, B \subset G$, $A \cdot B = \{a \cdot b, a \in A, b \in B\}$)

2) $R = S$

3) R ES COMPATIBLE A IZQ. ($\Leftrightarrow$ R ES COMPATIBLE)

4) S ES COMPATIBLE A DER. ($\Leftrightarrow$ S ES COMPATIBLE)

<u>OBS</u> 1) DICE $\forall h_1 \in H, \exists h_2 \in H \,/\, g \cdot h_1 = h_2 \cdot g$

TAMBIÉN: $g \cdot H \cdot g^{-1} = H, \ \forall g \in G$.

<u>OBS</u> PARA $x \in G$, $R(x) = H \cdot x$    (DE LA DEF DE R Y S)
$S(x) = x \cdot H$

DEM

1) $\Rightarrow$ 2) $x R y \Rightarrow \exists h \in H \,/\, x = h y$. SEA $h' \in H \,/\, hy = y.h'$

$\Rightarrow x = y.h' \Rightarrow x S y \Rightarrow R \subset S$. $S \subset R$ SIMILAR. ✓
(MÁS FACIL: USAR LA OBS.)

2) $\Rightarrow$ 1) SEAN DADOS $g \in G$, $h \in H$. ES CLARO QUE $g.h \, S \, g$.

$\underset{2)}{\Rightarrow} g.h \, R \, g \Rightarrow \exists h' \,/\, g.h = h'.g \Rightarrow g.H \subset H.g$.

SIMILARMENTE $g.H \supset H.g \Rightarrow g.H = H.g$ ✓

2) $\Rightarrow$ 3) $\}$ SABEMOS $S$ ES COMP. A IZQ.
2) $\Rightarrow$ 4) $\}$ " $R$ " DER. $\}$ COMO $R = S$, RESULTA QUE AMBAS SON COMPATIBLES.

3) $\Rightarrow$ 4) SUP. $x S y$, O SEA, $\exists h \in H \,/\, x = y.h$

Q.V.Q. $x.z \, S \, y.z$, $\forall z \in G$, O SEA, $x.z = y.z.h'$, $h' \in H$.

$x = y.h \Rightarrow x^{-1} = h^{-1}.y^{-1} \Rightarrow x^{-1} R \, y^{-1} \underset{3)}{\Rightarrow} z^{-1}.x^{-1} R \, z^{-1}.y^{-1}$, $\forall z \in G$

$\Rightarrow z^{-1}.x^{-1} = k.z^{-1}.y^{-1}$ $(k \in H)$ $\Rightarrow x.z = y.z.k^{-1}$,

COMO BUSCABAMOS, TOMANDO $h' = k^{-1} \in H$. ✓

4) $\Rightarrow$ 1) SEAN $g \in G$, $h \in H$. ES CLARO QUE $g.h \, S \, g$

$\underset{4)}{\Rightarrow} g.h.g^{-1} \, S \, g.g^{-1} = e \Rightarrow g.h.g^{-1} \in H \Rightarrow g.H \subset H.g$.

$(\supset)$ APLICO LO ANTERIOR CON $g^{-1}$ : $g^{-1}.H \subset H.g^{-1}$

$\Rightarrow H \subset g.H.g^{-1} \Rightarrow H.g \subset g.H$ ✓

NOTACIÓN: SI $H$ ES NORMAL, DENOTAMOS $G/R = G/S = G/H$

PROP $(G,\cdot)$ grupo, $H \subset G$ SUBGRUPO NORMAL.
EXISTE UNA ÚNICA OPERACIÓN $\bar{\cdot}$ EN $G/H$ TAL QUE
$\pi : G \to G/H$ ES MORFISMO DE GRUPOS

DEM RESULTA DE LAS PROPS DE PAG. 8.

OBS PARA $(G,\cdot)$ GRUPO, $H \subset G$ SUBGRUPO (NO NEC. NORMAL)
ESTAN DEFINIDOS LOS CONJUNTOS $G/R$ Y $G/S$

$G/R = \{H.x\}_{x \in G} \underset{\text{NOTACION}}{=} H \backslash G$

(+ DESPUÉS)

$G/S = \{x.H\}_{x \in G} \underset{\text{NOTACION}}{=} G/H$

**RESUMEN:** $(G,\cdot)$ GRUPO, $H \subset G$ SUBGRUPO NORMAL ($x\cdot H = H\cdot x$, $\forall x$)

$\Rightarrow$ EN EL CONJUNTO DE CLASES $G/H$ TENEMOS OPERACIÓN $\cdot$

$$(H\cdot x)\cdot(H\cdot y) = H\cdot(x\cdot y) \quad \forall x,y \in G, \quad (G/H,\cdot) \text{ GRUPO}$$

$\pi: G \to G/H$ ES MORFISMO DE GRUPOS

$x \longmapsto H\cdot x$

**OBS** SI $(G,\cdot)$ ES ABELIANO, TODO SUBGRUPO $H \subset G$ ES NORMAL.

**OBS** EN NOTACIÓN ADITIVA $(G,+)$ (USADA A VECES EN EL CASO ABELIANO)

$$(H+x)+(H+y) = H+(x+y)$$

EJ: $(\mathbb{Z},+)$, $H = n\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$

**PROP** (PROPIEDAD UNIVERSAL DEL GRUPO COCIENTE)

$(G,\cdot)$ GRUPO, $H \subset G$ SUBGRUPO NORMAL (NOTACIÓN: $H \trianglelefteq G$)

SEA $(K,\cdot)$ OTRO GRUPO Y $f: G \to K$ MORFISMO DE GRUPOS

SI $f(H) = \{1\}$ (O SEA, $H \subset \ker f$) ENTONCES

$\exists!\ \bar{f}: G/H \to K$ MORFISMO TAL QUE

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & K \\ G/H \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

CONMUTA, O SEA, $f = \bar{f}\circ\pi$.

**DEM** DEFINO $\bar{f}(\pi(x)) = f(x)$, $\forall x \in G$

(O SEA, $\bar{f}(H\cdot x) = f(x)$, $\forall x \in G$)

BUENA DEF: QVQ SI $H\cdot x = H\cdot y$ ENTONCES $f(x) = f(y)$.

$$H\cdot x = H\cdot y \Rightarrow x = h\cdot y \ (h\in H) \Rightarrow f(x) = f(h\cdot y) = f(h)\cdot f(y)$$
$$= 1\cdot f(y) = f(y) \checkmark$$

$\Rightarrow \bar{f}$ BIEN DEFINIDA

$\bar{f}$ MORFISMO: $\bar{f}((H\cdot x)\cdot(H\cdot y)) = \bar{f}(H\cdot xy) = f(x\cdot y) = f(x)\cdot f(y)$
$$= \bar{f}(H\cdot x)\cdot\bar{f}(H\cdot y) \checkmark$$

$\bar{f}$ ÚNICA: LA CONDICIÓN DE CONMUTATIVIDAD DEL DIAGRAMA $\bar{f}(\pi(x)) = f(x)$ DETERMINA A $\bar{f}$ $\checkmark$

PROP $f:(G_1,\cdot)\to(G_2,\cdot)$ MORFISMO DE GRUPOS

$H_1 \triangleleft G_1$, $H_2 \triangleleft G_2$ SUBGRUPOS NORMALES.

SUP. $f(H_1)\subset H_2$. ENTONCES $\exists!\ \bar{f}: G_1/H_1 \to G_2/H_2$ MORFISMO

TAL QUE

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_1"'] & G_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ G_1/H_1 \arrow[r, "\bar{f}"'] & G_2/H_2 \end{tikzcd}$$

CONMUTA.

DEM USO LA PROP. ANTERIOR CON $\pi_1$ Y $g=\pi_2\circ f$

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi_1"'] & G_2/H_2 \\ G_1/H_1 \arrow[ur, dashed, "\exists F"'] & \end{tikzcd}$$

$f(H_1)\subset H_2 \Rightarrow \pi_2\circ f(H_1)\subset \pi_2(H_2)=\{1\} \Rightarrow g(H_1)\subset\{1\}$

$\Rightarrow \exists!$ MORFISMO $G_1/H_1 \xrightarrow{F} G_2/H_2$ / $F\circ\pi_1 = g = \pi_2\circ f$

$\bar{f}=F$ ✓

PROP $f: G\to K$ MORFISMO DE GRUPOS.

a) $H=\ker(f)\subset G$ ES SUBGRUPO NORMAL

b) $\bar{f}: G/_{\ker(f)} \to im(f)$ ES UN ISOMORFISMO.

DEM

a) VEAMOS QUE $x.H.x^{-1}\subset H$, $\forall x\in G$. SEA $h\in H$:

$f(x.h.x^{-1}) = f(x).f(h).f(x^{-1}) = f(x).1.f(x)^{-1} = 1$

$\Rightarrow x.h.x^{-1}\in H$ ✓

b) $f: G\to K$ INDUCE (POR CORESTRICCIÓN) $f: G\to im(f)$ SOBRE

$\underset{\text{PROP}}{\Rightarrow}$ $\bar{f}: G/_{\ker(f)} \to im(f)$

$\left.\begin{array}{l} f \text{ SOBRE} \Rightarrow \bar{f} \text{ SOBRE} \\ \bar{f} \text{ MONO (VERIFICAR)} \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{f}$ BIYECTIVA $\Rightarrow \bar{f}$ ISO ✓

PROP $(G,\cdot)$ GRUPO, $H \subset G$ SUBGRUPO

H ES NORMAL $\Longleftrightarrow \exists\, f: G \to K$ MORFISMO / $H = \ker(f)$

DEM

$(\Longrightarrow)$ TOMO $K = G/H$, $\pi: G \to G/H \Rightarrow H = \ker(\pi)$

$(\Longleftarrow)$ SALE DE a) PROP. P. 12

PROP $f: G_1 \to G_2$ MORFISMO DE GRUPOS.

a) $H_1 \subset G_1$ SUBGRUPO $\Rightarrow f(H_1) \subset G_2$ SUBGRUPO

b) $H_2 \subset G_2$ SUBGRUPO $\to f^{-1}(H_2) \subset G_1$ SUBGRUPO.

DEM EJERCICIO

PROP $(G,\cdot)$ GRUPO, $H \triangleleft G$, $\pi: G \to G/H$

TENEMOS UNA BIYECCIÓN

$$\left\{\begin{matrix}\text{SUBGRUPOS}\\ \text{DE } G/H\end{matrix}\right\} \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} \left\{\begin{matrix}\text{SUBGRUPOS DE } G\\ \text{QUE CONTIENEN } H\end{matrix}\right\}$$

$$K \longmapsto \pi^{-1}(K)$$

$$\pi(L) \longleftarrow\!\shortmid\; L$$

ADEMÁS, SUBGRUPOS NORMALES SE CORRESPONDEN.

DEM $\{1\} \subset K \subset G/H \Rightarrow H = \pi^{-1}(\{1\}) \subset \pi^{-1}(K)$

+ PROP ANTERIOR $\Rightarrow \alpha, \beta$ BIEN DEFINIDAS.

$K \subset G/H$ SUBGRUPO $\underset{\pi \text{ SOBRE}}{\Longrightarrow} \pi(\pi^{-1}(K)) = K \Rightarrow (\beta \circ \alpha)(K) = K$

$H \subset L \subset G$ SUBGRUPO $\overset{\bullet}{\Longrightarrow} \pi^{-1}(\pi(L)) = L \Rightarrow (\alpha \circ \beta)(L) = L$

• $(\supset)$ ✓

$(\subset)$ SEA $x \in \pi^{-1}(\pi(L)) \Rightarrow \pi(x) \in \pi(L) \Rightarrow \pi(x) = \pi(y),\ y \in L$

$\Rightarrow \pi(x \cdot y^{-1}) = 1 \Rightarrow x \cdot y^{-1} \in H \Rightarrow x \in y \cdot H \subset L \Rightarrow x \in L$ ✓

SUBGRUPOS NORMALES: VERIFICAR ✓

(O VER EN LA PROP. ANTERIOR QUE PASA PARA $H_1, H_2$ NORMALES)

PROP $G$ GRUPO, $K \triangleleft G$, $H \triangleleft G$, TALES QUE $K \subset H \subset G$.
ENTONCES SE TIENE UN ISOMORFISMO

$$\left. G/K \middle/ H/K \right. \cong G/H$$

(CON UN ABUSO DE NOTACIÓN, A SER EXPLICADO EN LA DEMO)

DEM DENOTAMOS $G \xrightarrow{id} G$ EL MORFISMO IDENTIDAD

$H \xrightarrow{i} G$ " INCLUSIÓN.

TENEMOS MORFISMOS INDUCIDOS:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi'"'] & G \arrow[d, "\pi"] \\ H/K \arrow[r, "\bar{i}"'] & G/K \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "id"] \arrow[d, "\pi"'] & G \arrow[d, "\pi''"] \\ G/K \arrow[r, "\overline{id}"'] & G/H \end{tikzcd}$$

$$H/K \xrightarrow{\bar{i}} G/K \xrightarrow{\overline{id}} G/H$$

- $\bar{i}$ MONO
- $im(\bar{i}) = \pi(H) \subset G/K$
- ($\Rightarrow$ $H/K \cong \pi(H) \subset G/K$)
- $ker(\overline{id}) = \pi(H)$
- $\overline{id}$ EPI

$\Rightarrow$ $\left. G/K \middle/ \pi(H) \right. \xrightarrow{\overline{\overline{id}}} G/H$ ISO ✓

# CONJUNTO CON ACCIÓN DE GRUPO

$X$ CONJUNTO, $(G, \cdot)$ GRUPO

DEF UNA ACCIÓN DE $G$ EN $X$ ES UNA FUNCIÓN

$$\alpha : G \times X \longrightarrow X$$

TAL QUE, DENOTANDO $\alpha(g,x) = g \cdot x$ $(g \in G, x \in X)$, VALE:

1) $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 \cdot g_2) \cdot x$ , $g_1, g_2 \in G$, $x \in X$

2) $e \cdot x = x$ , $e \in G$ NEUTRO, $x \in X$.

(ACCIÓN A IZQUIERDA)

DEF UNA REPRESENTACIÓN DE $G$ EN $X$
ES UN MORFISMO DE GRUPOS

$$\rho : G \longrightarrow S(X)$$

$G$-CONJUNTO: CONJUNTO PROVISTO DE UNA ACCIÓN DE $G$

PROP DAR UNA ACCIÓN DE $G$ EN $X$ ES EQUIVALENTE A DAR UNA REPRESENTACIÓN DE $G$ EN $X$.

DEM DADA $\rho$, DEFINIMOS $\alpha(g,x) = \rho(g)(x)$

DADA $\alpha$, " $\rho(g)(x) = \alpha(g,x)$

VERIFICAR AXIOMAS.

OBS $\rho(G) \subset S(X)$ SUBGRUPO
"GRUPO DE TRANSFORMACIONES $X \to X$"

EJEMPLOS

1) $G$ GRUPO, ACTÚA SOBRE $X = G$, DE VARIAS MANERAS

a) TRASLACIÓN A IZQ. $\rho(g)(x) = g \cdot x$

b) " DER. $\rho(g)(x) = x \cdot g^{-1}$

c) CONJUGACIÓN $\rho(g)(x) = g \cdot x \cdot g^{-1}$

2) $V$ ESP. VECT. / $k$ $\Rightarrow$ $GL(V)$ ACTÚA EN $V$

3) $\rho : \mathbb{R} \longrightarrow GL(2,\mathbb{R}) \subset S(\mathbb{R}^2)$ $\quad \rho(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$

ES UNA REPRESENTACIÓN DE $G = (\mathbb{R}, +)$ EN $\mathbb{R}^2$ (O COMO GRUPO DE TRANSFORMACIONES DE $\mathbb{R}^2$)

4) $G$ ACTÚA EN $X$ $\Rightarrow$ $G$ ACTÚA EN $P(X)$

4) G ACTÚA EN $X \Rightarrow$ G ACTÚA EN $\mathcal{P}(X)$

$\mathcal{P}(X)$ = CONJUNTO DE PARTES DE $X$

EN EFECTO, SI $\alpha: G \times X \to X$ ACCIÓN

$\Rightarrow \tilde{\alpha}: G \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, $\tilde{\alpha}(g, A) = g(A)$, $A \subset X$

EJ: $G = GL(\mathbb{R}^2)$ ACTÚA EN $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ ACTÚA EN $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$
(KLEIN: PROGRAMA DE ERLANGEN)

DEF SI $V$ ES UN $k$-ESPACIO VECTORIAL Y $G$ ES UN GRUPO, UNA REPRESENTACIÓN LINEAL DE $G$ EN $V$ ES UN MORFISMO DE GRUPOS $\rho: G \longrightarrow GL(V)$.

EQUIVALE A DAR UNA ACCIÓN $\alpha: G \times V \to V$, $\alpha(g, v) = g.v$ TAL QUE $v \mapsto g.v$ ES $k$-LINEAL, $\forall g \in G$.

DEF SEA $\rho: G \to S(X)$ UNA REPRESENTACIÓN DEL GRUPO $G$ EN EL CONJUNTO $X$.
SEA $Y \subset X$ UN SUBCONJUNTO. LA ÓRBITA DE $Y$ ES EL CONJUNTO $G.Y = \{g.y,\ g \in G,\ y \in Y\}$

EL ESTABILIZADOR DE $Y$ ES $G_Y = \{g \in G \,/\, g.Y \subset Y\}$
ES UN SUBGRUPO DE $G$.
PARA $x \in X$, $G_x = \{g \in G / g(x) = x\}$ = ESTABILIZADOR DE $x$.

DEF $\rho$ ES FIEL SI ES INYECTIVA $(\rho(g) = id_X \Leftrightarrow g = 1 \in G)$

$\rho$ ES TRANSITIVA SI $\forall x \in X, \exists g \in G \,/\, y = g.x$
$\forall y \in X$

DEF (RELACIÓN DE EQUIVALENCIA DEFINIDA POR UNA ACCIÓN). SEA $\rho: G \to S(X)$

DEFINO $R \subset X \times X$ : $x R y \Leftrightarrow \exists g \in G \,/\, y = g.x$

VERIFICAR: $R$ ES DE EQUIVALENCIA.
CLASES DE EQUIVALENCIA = ÓRBITAS $G.x$, $x \in X$

COR $X$ ES UNIÓN DISJUNTA DE ÓRBITAS.

NOTACIÓN $X/R$ = CONJUNTO COCIENTE
= " DE ÓRBITAS

**DEF** SEAN $X, Y$ CONJUNTOS, SEA $G$ UN GRUPO Y SEAN $\alpha: G\times X \to X$, $\beta: G\times Y \to Y$ ACCIONES (O SEA, $X, Y$ SON $G$-CONJUNTOS)
SEA $f: X \to Y$ UNA FUNCIÓN.
DECIMOS QUE $f$ ES <u>MORFISMO DE $G$-CONJUNTOS</u> (= $f$ ES $G$-EQUIVARIANTE) SI:

$$f(g\cdot x) = g\cdot f(x), \quad \forall g\in G, \forall x \in X.$$

O SEA, EL SIGUIENTE DIAGRAMA ES CONMUTATIVO:

$$\begin{tikzcd} G\times X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "id_G\times f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ G\times Y \arrow[r, "\beta"'] & Y \end{tikzcd}$$

$f$ ES ISOMORFISMO (DE $G$-CONJUNTOS) SI $\exists g: Y \to X$ (MORFISMO DE $G$-CONJUNTOS) / $f\circ g = id_Y$, $g\circ f = id_X$

**PROP** $f$ ISO $\Leftrightarrow$ $f$ MORFISMO BIYECTIVO.

**DEM** EJERCICIO

**EJERCICIO** SEA $G$ UN GRUPO, SEA $H\subset G$ UN SUBGRUPO (NO NEC. NORMAL). EN EL CONJUNTO COCIENTE $X = G/\sim = G/H = \{g\cdot H\}_{g\in G}$
DEFINIMOS UNA ACCIÓN (IZQ.) DE $G$:

$$\alpha(g_1, g_2 H) = (g_1\cdot g_2)\cdot H \quad , \forall g_1, g_2 \in G$$

PAG. 10

VERIFICAR:

a) $\alpha$ ESTA BIEN DEFINIDA Y ES UNA ACCIÓN.

b) ES UNA ACCIÓN TRANSITIVA

c) EL ESTABILIZADOR DE la clase H $\in X$ ES $H\subset G$.
calcular estabilizador de otras clases g.H

SE DICE QUE $X = G/H$ ES EL <u>ESPACIO HOMOGÉNEO</u> DEFINIDO POR EL SUBGRUPO $H\subset G$.

PROP SEA $X$ UN $G$-CONJUNTO.
SUP. LA ACCIÓN ES TRANSITIVA (DECIMOS QUE $X$ ES UN ESPACIO HOMOGÉNEO RESPECTO A $G$, O $G$-HOMOGÉNEO)
ENTONCES EXISTEN UN SUBGRUPO $H \subset G$ Y UN ISOMORFISMO DE $G$-CONJUNTOS $X \cong G/H$.

DEM ELIJO UN $x_0 \in X$. TOMO $H = G_{x_0}$ = ESTABILIZADOR DE $x_0$.
DEFINO $f: G/H \to X$ POR $f(g \cdot H) = g \cdot x_0$

VERIFICAR: $(\Rightarrow f(H) = x_0)$

- $f$ BIEN DEFINIDA
- $f$ MORFISMO DE $G$-CONJUNTOS
- $f$ BIYECTIVA

- SUP $g_1 \cdot H = g_2 \cdot H \Rightarrow \underset{h_1 \in H}{g_2 = g_1 \cdot h_1} \Rightarrow g_2 \cdot x_0 = (g_1 \cdot h_1) \cdot x_0 =$
$= g_1 \cdot (h_1 \cdot x_0) = g_1 \cdot x_0$
PORQUE $h_1 \cdot x_0 = x_0$

- $f(g_1 \cdot g_2 H) = f((g_1 \cdot g_2) H) = (g_1 \cdot g_2) \cdot x_0 = g_1 \cdot (g_2 \cdot x_0)$
$= g_1 \cdot f(g_2 \cdot H)$

- $f(g_1 H) = f(g_2 H) \Rightarrow g_1 \cdot x_0 = g_2 \cdot x_0 \Rightarrow \overset{(g_2^{-1} \cdot g_1) \cdot x_0 = x_0}{\cancel{(g_1 \cdot g_2^{-1}) \cdot x_0 = x_0}}$
$\Rightarrow \overset{g_2^{-1} g_1 \in H}{\cancel{g_1 g_2^{-1}} \in H} \Rightarrow g_1 \cdot H = g_2 \cdot H \Rightarrow f$ INYECTIVA

SEA $y \in X$. COMO LA ACCIÓN ES TRANSITIVA, $\exists g' \in G \,/\, y = g' \cdot x_0$
$\Rightarrow f(g' \cdot H) = g' \cdot x_0 = y \Rightarrow f$ SOBREYECTIVA ✓

OBS SI ELIJO $\bar{x}_0$ EN LUGAR DE $x_0$, $\bar{H} = G_{\bar{x}_0} \subset G$
PUEDE SER DISTINTO DE $H$.
PERO $H$ Y $\bar{H}$ SON GRUPOS CONJUGADOS (VERIFICAR)

EJ (DESCOMPOSICIÓN EN CICLOS DE $\sigma \in S_n$)

$S_n = S(X)$, $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

$\sigma \in S_n$.

$\exists N \in \mathbb{N} / \sigma^N = 1$ : $\{\sigma^N, N \in \mathbb{N}\} \subset S_n$ FINITO

$\Rightarrow \exists M, N / \sigma^N = \sigma^M \Rightarrow \sigma^{M-N} = 1$ ✓

SEA $d = ord(\sigma) = \min\{N \in \mathbb{N} / \sigma^N = 1\}$.

$G = \langle\sigma\rangle = \{1, \sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{d-1}\}$

$S_n$ ACTÚA EN $X$ $\Rightarrow$ $G$ ACTÚA EN $X$

$\Rightarrow$ $X$ = UNIÓN DISJUNTA DE $G$-ÓRBITAS

$$X = \coprod_{i=1}^{e} G.x_i \qquad x_i \in X.$$

ACCIÓN DE $\sigma$ (O DE $G$) EN CADA $G.x_i$:

$x_i \longmapsto \sigma(x_i) \longmapsto \sigma^2(x_i) \longmapsto \dots \to \sigma^{d_i-1}(x_i)$, $\sigma^{d_i}(x_i) = x_i$.

ES UN $d_i$-CICLO.

ACCIÓN DE $\sigma$ EN $X$ DETERMINADA POR ACCIÓN EN CADA CONJUNTO $G.x_i$ DE ESTA PARTICIÓN DE $X$

$\Rightarrow$ CICLOS DISJUNTOS. (CONMUTAN)

OBS ALGUNOS DE ESTOS CICLOS PUEDEN TENER LONGITUD $d_i = 1$ (CORRESPONDEN A $x_i \in X / \sigma(x_i) = x_i$, PUNTOS FIJOS DE $\sigma$)

EJ: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} = (124)(35)$

EJ: $(124)(78) = (124)(78)(5)(6)(3)$

PROP (TEOREMA DE LAGRANGE)
SEA $G$ UN GRUPO FINITO, SEA $H \subset G$ UN SUBGRUPO.
ENTONCES $|G| = |H| \cdot |G/H|$
DONDE $|\ |$ DENOTA NÚMERO DE ELEMENTOS (=CARDINAL)
Y $G/H$ ES EL CONJUNTO DE CLASES $g \cdot H$ $(g \in G)$ (PÁG. 9)

DEM $G$ ES UNIÓN DISJUNTA DE DICHAS CLASES.
BASTA CON VER QUE TODAS LAS CLASES TIENEN EL MISMO CARDINAL $= |H|$. DEFINIMOS UNA BIYECCIÓN
$H \xrightarrow{\varphi} g \cdot H$ MEDIANTE $\varphi(h) = g \cdot h$

$\varphi$ SOBRE: UN ELEMENTO $g \cdot h \in g \cdot H$ VERIFICA $g \cdot h = \varphi(h)$ ✓
$\varphi$ INYECTIVA: $\varphi(h) = \varphi(h') \Rightarrow g \cdot h = g \cdot h' \in G \Rightarrow h = h'$ ✓
(MULTIPLICAR POR $g^{-1}$ A IZQUIERDA)

OBS SIMILARMENTE $|G| = |H| \cdot |H \backslash G|$

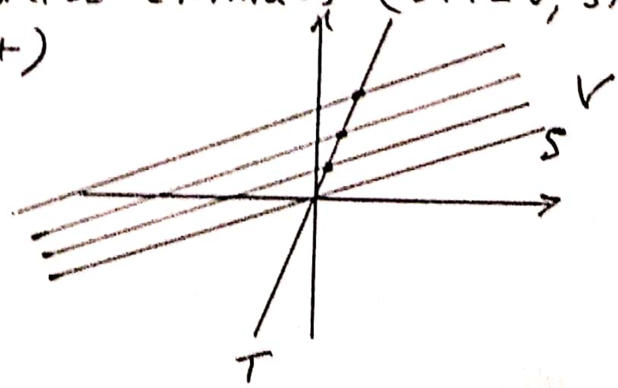
PROP $G$ GRUPO, $H \subset G$, $K \subset G$ SUBGRUPOS.

a) SI $H \triangleleft G$ ($H$ NORMAL EN $G$) ENTONCES
$H \cap K$ ES SUBGRUPO NORMAL DE $K$,
Y $H \cdot K = \{h \cdot k,\ h \in H,\ k \in K\}$ ES SUBGRUPO DE $G$.

b) SE TIENE UN ISOMORFISMO $\dfrac{K}{H \cap K} \xrightarrow{\cong} \dfrac{H \cdot K}{H}$

DEM EJERCICIO
SUG: b) PASAR AL COCIENTE LA INCLUSIÓN $i: K \longrightarrow H \cdot K$
VER QUE $\bar{i}$ ES BIYECTIVA.

EJ SEA $V$ UN $k$-ESPACIO VECTORIAL DE $\dim = n < \infty$.
SEAN $S, T \subset V$ SUBESPACIOS COMPLEMENTARIOS ($S + T = V$, $S \cap T = 0$)
CONSIDERAMOS EL GRUPO $(V, +)$
ENTONCES $V/S \cong T$




CADA •
ES REPRESENTANTE DE UNA CLASE $\in V/S$, DETERMINADO POR $T$.

DEF (CONJUGACIÓN, AUTOMORFISMO INTERIOR)

$G$ GRUPO, $g \in G$

$\gamma_g : G \to G$, $\gamma_g(x) = g.x.g^{-1}$, PARA $x \in G$

$\gamma_g$ MORFISMO DE GRUPOS: $\gamma_g(x_1.x_2) = g.(x_1.x_2)g^{-1}$

$= g x_1 g^{-1}. g x_2 g^{-1} = \gamma_g(x_1).\gamma_g(x_2)$

SEA $ISO(G) = \{\alpha : G \to G \,/\, \alpha \text{ ISO DE GRUPOS}\} = AUT(G)$

$(ISO(G), \circ)$ GRUPO

$\gamma : G \to ISO(G)$ MORFISMO DE GRUPOS

$\gamma_{g_1} \circ \gamma_{g_2} = \gamma_{g_1.g_2}$ (VERIFICAR)

DEF $im(\gamma) = INT(G) =$ ISOMORFISMOS INTERIORES DE $G$

$ker(\gamma) = \{g \in G \,/\, g.x = x.g, \forall x \in G\} = C(G)$

CENTRALIZADOR DE $G$.

$\Rightarrow \quad G/C(G) \cong INT(G)$

---

PRODUCTO, PRODUCTO SEMI-DIRECTO.

$G_1, G_2$ GRUPOS $\Rightarrow G = G_1 \times G_2$ TIENE ESTRUCTURA DE GRUPO DEFINIDA POR $(g_1, g_2).(g_1', g_2') = (g_1.g_1', g_2.g_2')$

PROP $G$ GRUPO, $H_1 \triangleleft G$, $H_2 \triangleleft G$.

SUP. $H_1 \cap H_2 = \{1\}$, $H_1.H_2 = G$

ENTONCES $G \cong H_1 \times H_2$

DEM EJERCICIO.

DEF $G$ GRUPO, $H_1 < G$, $H_2 < G$ SUBGRUPOS

DECIMOS QUE $G$ ES PRODUCTO SEMIDIRECTO DE $H_1$ POR $H_2$, ESCRITO $G = H_1 \times_{SD} H_2$ SI SE VERIFICA:

- $H_1$ ES SUBGRUPO NORMAL DE $G$
- $H_1 \cap H_2 = \{1\}$
- $H_1.H_2 = G$

EJ (VER O'BRIEN) $S_3 = H_1 \underset{SD}{\times} H_2$ $\quad H_1 \cong \mathbb{Z}_3$, $H_2 \cong \mathbb{Z}_2$

CONSTRUCCIÓN DE PRODUCTOS SEMI-DIRECTOS:

SEAN $K$ Y $Q$ DOS GRUPOS.

SEA $\varphi : Q \longrightarrow AUT(K)$ UN MORFISMO DE GRUPOS

TOMAMOS $G = K \times Q$ CON LA OPERACIÓN BINARIA $*$

DEFINIDA POR $(k, q) * (k', q') = (k \cdot \varphi(q)(k'), q \cdot q')$

SE VERIFICA:

- $(G, *)$ ES GRUPO (NEUTRO $(1,1)$), NOTACIÓN $G = K \underset{\varphi}{\times} Q$
- $H_1 = K \times \{1\}$, $H_2 = \{1\} \times Q$ SON SUBGRUPOS (ISOMORFOS A $K$ Y $Q$ RESP.)
- $H_1 \triangleleft G$ Y $G = H_1 \underset{SD}{\times} H_2$

PROP SEA $G$ GRUPO, $H_1, H_2 \subset G$ SUBGRUPOS / $G = H_1 \underset{SD}{\times} H_2$

ENTONCES: a) $G/_{H_1} \cong H_2$

b) EXISTE UN MORFISMO DE GRUPOS $\varphi : H_2 \longrightarrow AUT(H_1)$

TAL QUE $G = H_1 \underset{\varphi}{\times} H_2$

DEM EJERCICIO (O VER O'BRIEN)

SUG PARA CADA $q \in H_2$, $\gamma_q : G \to G$ SATISFACE

$\gamma_q(H_1) = H_1$ (PORQUE $H_1$ ES NORMAL).

ESTO DEFINE $\varphi : H_2 \longrightarrow AUT(H_1)$.

EJ1 EL GRUPO DE TRANSFORMACIONES AFINES $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

ES ISOMORFO A $\mathbb{R}^n \underset{\varphi}{\times} GL(\mathbb{R}^n)$ $\quad \varphi : GL(\mathbb{R}^n) \to AUT(\mathbb{R}^n)$

EJ2 DETERMINAR LOS PRODUCTOS SEMI-DIRECTOS

$\mathbb{Z}_n \underset{\varphi}{\times} \mathbb{Z}_m$ $\quad \varphi : \mathbb{Z}_m \to U(\mathbb{Z}_n)$

# TIPOS DE GRUPOS, TÓPICOS

GRUPOS FINITOS CONMUTATIVOS:
LOS VAMOS A CLASIFICAR (PRODUCTOS FINITOS DE $\mathbb{Z}_n$'S)

GRUPOS FINITOS NO-CONMUTATIVOS:

TÓPICOS: TEO. SYLOW (SI $\exists t$)
TEO. JORDAN-HÖLDER (SI $\exists t$, O ALG. III)
REPRESENTACIONES LINEALES
GRUPOS SIMPLES ($\exists$ TEO. DE CLASIFICACIÓN) "TABLA PERIÓDICA"
EXTENSIONES, GRUPO DE BRAUER (COMBINAR GRUPOS SIMPLES) "QUÍMICA"

GRUPOS INFINITOS:

- CONMUTATIVOS O NO-CONMUTATIVOS
- DISCRETOS O CONTINUOS (GRUPOS DE LIE)

$\mathbb{Z}$, $SL(\mathbb{Z}^n) = \{a \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det a = \pm 1\}$, $SL(\mathbb{R}^n)$, $GL(\mathbb{R}^n)$, $GL(\mathbb{C}^n)$

VAMOS A VER MAS EJEMPLOS.