1- Use a decomposição LU para resolver os sistemas,

a.
$$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + \quad x_3 &= 7, \\ 10x_1 \qquad + 20x_3 &= 6, \\ 5x_1 \qquad - \quad x_3 &= 4. \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - \quad x_3 &= 1, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &= 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3. \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 5, \\ -4x_1 + 2x_2 - 6x_3 &= 14, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 8. \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &= 4, \\ x_1 - \quad x_2 + x_3 &= 5. \end{aligned}$$

5. Use Gaussian eliminiation and three-digit chopping arithmetic to solve the following linear systems, and compare the approximations to the actual solution.

a.
$$\begin{aligned} 0.03x_1 + 58.9x_2 &= 59.2, \\ 5.31x_1 - 6.10x_2 &= 47.0. \end{aligned}$$
Actual solution $(10, 1)^t$.

b.
$$\begin{aligned} 58.9x_1 + 0.03x_2 &= 59.2, \\ -6.10x_1 + 5.31x_2 &= 47.0. \end{aligned}$$
Actual solution $(1, 10)^t$.

Use a decomposição de Cholesky para resolver os sistemas lineares,

a.
$$\begin{aligned} 2x_1 - \quad x_2 \qquad\quad &= 3, \\ -x_1 + 2x_2 - \quad x_3 &= -3, \\ - \quad x_2 + 2x_3 &= 1. \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} 4x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 + \quad x_4 &= 0.65, \\ x_1 + 3x_2 - \quad x_3 + \quad x_4 &= 0.05, \\ x_1 - \quad x_2 + 2x_3 \qquad\quad &= 0, \\ x_1 + \quad x_2 \qquad\quad + 2x_4 &= 0.5. \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} 4x_1 + \quad x_2 - \quad x_3 \qquad\quad &= 7, \\ x_1 + 3x_2 - \quad x_3 \qquad\quad &= 8, \\ -x_1 - \quad x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= -4, \\ 2x_3 + 4x_4 &= 6. \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 + \quad x_3 - \quad x_4 &= 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + \quad x_3 \qquad\quad &= 7, \\ x_1 + \quad x_2 + 4x_3 - \quad x_4 &= -1, \\ -x_1 \qquad\quad - \quad x_3 + 3x_4 &= -2. \end{aligned}$$

10. Find α so that $A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ is positive definite.

11. Find α so that $A = \begin{bmatrix} 2 & \alpha & -1 \\ \alpha & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ is positive definite.

25. In a paper by Dom and Burdick [DoB], it is reported that the average wing length that resulted from mating three mutant varieties of fruit flies (*Drosophila melanogaster*) can be expressed in the symmetric matrix form

$$A = \begin{bmatrix} 1.59 & 1.69 & 2.13 \\ 1.69 & 1.31 & 1.72 \\ 2.13 & 1.72 & 1.85 \end{bmatrix},$$

where a_{ij} denotes the average wing length of an offspring resulting from the mating of a male of type i with a female of type j.

a. What physical significance is associated with the symmetry of this matrix?

b. Is this matrix positive definite? If so, prove it; if not, find a nonzero vector $\mathbf{x}$ for which $\mathbf{x}^t A\mathbf{x} \leq 0$.

1. Find the first two iterations of the Jacobi method for the following linear systems, using $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$:

a.
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 1, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 4. \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 &= 9, \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 &= 7, \\ -2x_2 + 10x_3 &= 6. \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} 10x_1 + 5x_2 &= 6, \\ 5x_1 + 10x_2 - 4x_3 &= 25, \\ -4x_2 + 8x_3 - x_4 &= -11, \\ -x_3 + 5x_4 &= -11. \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= -2, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 &= -1, \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 &= 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1. \end{aligned}$$

e.
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &= 6, \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &= 6, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - x_5 &= 6, \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 &= 6, \\ 2x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 &= 6. \end{aligned}$$

22. Em cada caso:

a) verifique se o critério de Sassenfeld é satisfeito;

b) resolva por Gauss-Seidel, se possível:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$$

e

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

23. *a*) Usando o critério de Sassenfeld, verifique para que valores positivos de k se tem garantia de que o método de Gauss-Seidel vai gerar uma seqüência convergente para a solução do sistema:

$$\begin{cases} kx_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ kx_1 + 6x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 3 \end{cases}$$

b) Escolha o menor valor inteiro e positivo para k e faça duas iterações do método de Gauss- Seidel para o sistema obtido.

c) Comente o erro cometido no item (*b*).

29. Considere o sistema linear cuja matriz dos coeficientes é a matriz esparsa

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 20 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

a) Ache a solução por inspeção.

b) Faça mudanças de linhas na matriz original para facilitar a aplicação do método da Eliminação de Gauss. O que você pode concluir, de uma maneira geral?

c) Aplique o método de Gauss-Seidel ao sistema. Comente seu desempenho.

d) Faça uma comparação da utilização de métodos diretos e iterativos na resolução de sistemas lineares esparsos.