А.И. Кибзун, д–р физ-мат. наук,
А.В. Наумов, к–т физ-мат. наук,
С.В. Уланов
(Московский Государственный Авиационный Институт)

Рассматривается задача оптимизации функционирования летного парка авиакомпании. Задача формулируется в форме одноэтапной задачи стохастического программирования с вероятностными ограничениями и булевыми переменными. С помощью доверительного подхода исходная задача сводится к детерминированной задаче целочисленного линейного программирования с булевыми переменными большой размерности, решение которой является гарантирующим для исходной задачи стохастического программирования. Для решения вспомогательной детерминированной задачи предлагается быстродействующий алгоритм, основанный на методе ветвей и границ, который позволяет находить субоптимальное решение исходной задачи.

1. Введение

Существует большое количество работ, в которых при решении различного рода экономических задач используются методы стохастического программирования. Исторически сложилось два направления в стохастическом программировании при моделировании экономических систем. К первому относятся модели, в которых оптимизируется какой-либо средний показатель эффективности работы экономической системы, например, средняя прибыль или средние издержки компании. Как правило, это двухэтапные задачи с критерием в форме математического ожидания (см., например, [1-4]). Второе направление содержит модели, позволяющие получать гарантированный с заданной вероятностью результат. К ним относятся задачи с вероятностными ограничениями, а также двухэтапные и одноэтапные задачи квантильной оптимизации (см., например, [5-8]). Достаточно редко встречаются модели, где критерий в виде математического ожидания и вероятностные ограничения используется совместно. Такая модель рассматривается, например, в [9].

В данной работе рассматривается задача максимизации средней прибыли авиакомпании при наличии ряда вероятностных ограничений при фиксированном временном расписании полетов. Задача осложнена целочисленностью переменных оптимизации. В работе приводится краткое обоснование построенной модели и предлагается алгоритм нахождения субоптимального решения. Предлагаемая модель не претендует на абсолютную универсальность и не является общей моделью для оптимизации всего процесса функционирования авиакомпании. Различные маркетинговые исследования эффективности использования маршрутов, типов самолетов, управления пассажиропотоками и т.д. не учитываются при составлении этой модели, а соответствующие параметры (состав самолетного парка, временное расписание и т.д.) считаются фиксированными. Однако опыт работы авторов с этой моделью позволяет им надеяться, что разработанный алгоритм может быть эффективно использован при решении более общих задач оптимизации деятельности авиакомпании в целом.

2. Постановка задачи

Рассмотрим функционирование летного парка компании, работающей на рынке пассажирских авиаперевозок. Предполагается, что летный парк компании состоит из некоторого числа разнотипных самолетов, с помощью которых компания должна обслужить заданные рейсы. Аэропорт, где расположен главный офис компании, а также все ее ремонтные службы, называется базовым. Все рейсы совершаются по схеме: Базовый аэропорт-Аэропорт назначения-Базовый аэропорт. Расписание рейсов имеет циклический характер, то есть через некоторый промежуток времени все рейсы совершаются заново. Продолжительность одного цикла называется базовым периодом (обычно это неделя). В один и тот же аэропорт в течение базового периода может быть совершено несколько рейсов. Время вылета каждого рейса фиксировано. Все рейсы характеризуются временем вылета, расчетным временем выполнения, продолжительностью полета, ценой билета и расходами, связанными с выполнением рейса. Предполагается, что на каждый рейс приходит случайное количество пассажиров. Летный парк компании состоит из самолетов различной вместимости, каждый из которых характеризуется собственными эксплуатационными расходами. Кроме вместимости каждый самолет характеризуется себестоимостью, расходами на ремонт, изношенностью, а также принадлежностью (собственный самолет или взятый в лизинг). После каждого рейса в течение некоторого времени (так называемое "время послеполетного обслуживания") самолеты проходят технический контроль на предмет выявления и, по возможности, устранения произошедших во время выполнения рейса поломок. Продолжительность такого обслуживания также зависит от конкретного самолета. Поломки бывают двух типов: влияющие на дальнейшую возможность эксплуатации воздушного судна (крупные поломки) и не влияющие (мелкие поломки). Мелкие поломки могут либо устраняться в течение времени послеполетного обслуживания, либо накапливаться. Накопившиеся мелкие поломки устраняются в процессе плановых ремонтов самолетов, предусмотренных условиями эксплуатации воздушных судов. Расписание плановых ремонтов и время их продолжительности известно заранее. Если же число накопившихся мелких поломок велико, то служба технического контроля авиакомпании ставит самолет на внеплановый ремонт. Время и продолжительность внеплановых ремонтов становится известно за неделю до их проведения. При крупных поломках самолет снимается на время проведения ремонта со своих последующих рейсов, которые выполняются либо арендованным у другой компании самолетом, либо самолетами собственного парка после вынужденного пересчета летного расписания (распределения самолетов по рейсам). Продолжительность ремонта зависит от произошедшей поломки и заранее неизвестна. Каждый рейс отправляется с некоторой временной задержкой, которая может быть вызвана различными причинами: плохой работой служб аэропорта (например, затянувшимся досмотром пассажиров) или же технической неисправностью самолета. Кроме того, задержка может произойти вследствие позднего прибытия самолета в аэропорт из-за продолжительной задержки на одном из предыдущих рейсов. Продолжительность каждой задержки может колебаться от нескольких секунд до нескольких часов. Летное расписание необходимо составить таким образом, чтобы авиакомпания получала бы максимальную прибыль. Так как через каждую неделю все рейсы повторяются, то достаточно найти расписание только на одну неделю. При этом также следует стремиться к уменьшению числа и продолжительности задержек, возникших из-за поломок самолетов и задержек, связанных с поздним прибытием самолета в аэропорт (на другие виды задержек летное расписание никакого влияния не оказывает). Требование ликвидации задержек возникают, в частности, из-за их отрицательного воздействия на престиж авиакомпании, в результате падения которого уменьшается и прибыль.

3. Математическая модель функционирования летного парка компании

В разработанной математической модели детерминированными являются следующие параметры:

K – общее число самолетов компании;

L – число рейсов, совершаемых за базовый период времени (число вылетов из базового аэропорта). Все рейсы нумеруются в порядке их вылета из базового аэропорта;

w – базовый период времени (неделя);

c_{ik} – себестоимость полета k-го самолета на i-ом рейсе, $k = \overline{1, K}, i = \overline{1, L}$;

τ_i – время вылета i-го рейса из базового аэропорта, $i = \overline{1, L}$;

z_k – количество посадочных мест в k-м самолете (вместимость), $k = \overline{1, K}$;

ρ_i – средняя цена билета (средний тариф) на одного пассажира на i-м рейсе, $i = \overline{1, L}$;

Для расчета себестоимостей выполнения рейсов разработана модель, позволяющая ранжировать все самолеты по эффективности использования, учитывая такие факторы, как частота крупных поломок самолета, стоимость его технического обслуживания, стоимость аренды, лизинговых выплат и т.д. Для описания этой модели введем дополнительно следующие обозначения:

t_i^0 – продолжительность полета на i-м рейсе, $i = \overline{1, L}$;

$\tilde{t}_{ik}$ – расчетное время выполнения k-м самолетом i-го рейса $k = \overline{1, K}, i = \overline{1, L}$;

c_k^0 – часть себестоимости транспортного средства за рассматриваемый базовый период времени, не зависящая от эффективности его эксплуатации, $k = \overline{1, K}$ (стоимость собственного самолета, лизинговые и арендные составляющие для самолета, взятого в лизинг, и т.п.);

c_{ik}^1 – расходы на использование k-го самолета на i-м рейсе, не зависящие от продолжительности полета, $k = \overline{1, K}, i = \overline{1, L}$ (сборы в аэропорту и т.п.);

c_{ik}^2 – расходы на использование k-го самолета на i-ом рейсе, зависящие от продолжительности полета, $k = \overline{1, K}, i = \overline{1, L}$ (топливо, часть арендных или лизинговых выплат для самолета, взятого в лизинг, бортпитание, з/п экипажа и т.п.);

c_k^3 – средняя стоимость ремонта, приходящаяся на час полета для k-го самолета, $k = \overline{1, K}$;

c_i^4 – стоимость аренды самолета другой компании на i-й рейс при отсутствии своих свободных исправных самолетов в базовом аэропорту, $i = \overline{1, L}$;

c_k^5 – средняя стоимость часа ремонта k-го самолета, $k = \overline{1, K}$;

q_k – вероятность того, что k-й самолет окажется неисправным к моменту начала текущего рейса, $k = \overline{1, K}$;

p_k – вероятность того, что k-й самолет будет иметь крупную поломку после очередного рейса, $k = \overline{1, K}$;

Кроме детерминированных величин в разработанную модель вошли случайные факторы, оказывающие влияние на работу компании. К ним относятся: время задержки самолета при выполнении рейса, неисправность самолета, крупная поломка самолета, время ремонта самолета после поломки, а также пассажиропоток. После обработки располагаемой статистической информации были приняты следующие предположения о распределениях этих случайных величин.

Y_i – случайная величина, имеющая экспоненциальное распределение с параметром λ_i и характеризующая продолжительность задержки самолета на i-м рейсе, произошедшей по вине служб аэропорта, $i = \overline{1, L}$;

V_k – случайная величина, имеющая распределение Бернулли с параметром q_k и характеризующая неисправность k-го самолета к началу рейса, $k = \overline{1, K}$;

T_k – случайная величина, имеющая распределение Бернулли с параметром m_k и характеризующая крупную поломку k-го самолета после рейса, $k = \overline{1, K}$;

W_k – случайная величина, имеющая распределение Вейбулла и характеризующая продолжительность устранения поломки, обнаруженной на k-м самолете, $k = \overline{1, K}$;

$t_{ik} = \tilde{t}_{ik} + Y_i$ – фактическое время выполнения i-го рейса k-м самолетом с учетом случайного времени задержки Y_i, $t \triangleq \{t_{ik}\},\ i = \overline{1, L},\ k = \overline{1, K}$;

X_i^1, X_i^2 – пассажиропоток на i-м рейсе соответственно в аэропортах отправления и назначения, $i = \overline{1, L}$. Заметим, что случайные величины X_i^1, X_i^2 могут существенно различаться по параметрам закона распределения в силу целого ряда факторов, в частности, наличия транзитных потоков пассажиров. Например, из базового аэропорта в порт назначения в среднем может летать меньше пассажиров, чем обратно.

Выдвинутые предположения о законах распределения используемых случайных величин являются результатом обработки большого статистического материала с использованием специальной методики, описание которой не является предметом данной работы. Однако, следует заметить, что предложенные распределения случайных величин V_k и T_k (распределения Бернулли) носят достаточно универсальный характер и могут быть адекватно использованы для описания неисправностей и крупных поломок самолетов любых типов.

Введем матрицу оптимизационных переменных следующего вида:

$$u \triangleq \{u_{ik}\},\ i = \overline{1, L},\ k = \overline{1, K},$$

где элемент u_{ik} матрицы u принимает значения "1", если k-й самолет задействован на i-м рейсе, и "0"в противном случае.

С учетом введенных обозначений прибыль компании может быть представлена следующим образом:

$$R(u) \triangleq D(u) - C(u), \tag{1}$$

где $D(u)$ – доходная часть, $C(u)$ – расходная часть,

$$D(u) \triangleq \sum_{i=1}^{L} \sum_{k=1}^{K} u_{ik} \rho_i (\min\{z_k, X_i^1\} + \min\{z_k, X_i^2\}), \tag{2}$$

$$C(u) \triangleq \sum_{k=1}^{K} c_k^0 + \sum_{i=1}^{L} \sum_{k=1}^{K} u_{ik} (c_{ik}^1 + (c_{ik}^2 + c_k^3) t_i^0) + \sum_{i=1}^{L} \sum_{k=1}^{K} u_{ik} (V_k c_i^4) \tag{3}$$

Поясним значение некоторых величин, входящих в модель расчета себестоимости. Величина c_k^3 позволяет учесть стоимость ремонтных работ для каждого самолета. Случайная величина V_k введена для учета потерь, связанных с невозможностью самолета выполнить свой запланированный рейс из-за крупной поломки. Для выполнения этого рейса приходиться арендовать самолет другой авиакомпании или, пересчитав расписание, использовать самолеты своего летного парка.

Изложенная модель расчета расходной части позволяет частично учесть фактор вероятной поломки самолета и оценить реальную стоимость обслуживания летного парка авиакомпании в течение всего базового периода. Разработка общей модели расходной части является предметом проведенного отдельного исследования, результаты которого здесь не приводятся. Рассматривается фактически подмодель, касающаяся только функционирования летного парка компании и не учитывающая другие виды затрат, связанных, например, с ремонтом зданий и сооружений компании.

В качестве критерия для оптимизации рассматриваемой математической модели предлагается математическое ожидание прибыли компании (средняя прибыль). В результате построения математической модели оптимизация сводится к решению задачи стохастического программирования большой размерности с булевыми переменными. Особенность задачи состоит в максимизации математического ожидания при наличии вероятностных ограничений и дискретности оптимизационных переменных. Однако данная постановка является естественной и адекватной реальности. Итак, окончательно модель функционирования летного парка авиакомпании выглядит следующим образом:

$$u^* \triangleq \arg\max_u \mathbf{M}[R(u)] \tag{4}$$

при детерминированных ограничениях:

$$\sum_{k=1}^{K} u_{ik} = 1, \ u_{ik} \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, L}, \tag{5}$$

$$u_{ik} = 0, \quad i \in I_2, \ k \in K_i, \tag{6}$$

и вероятностных ограничениях:

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{K} u_{ik} z_k \geq X_i^1\right\} \geq \alpha_i^1, \quad i \in I_1, \tag{7}$$

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{K} u_{ik} z_k \geq X_i^2\right\} \geq \alpha_i^2, \quad i \in I_1, \tag{8}$$

$$\mathbf{P}\{G(u,Y) \le 0\} \ge \alpha, \tag{9}$$

где

$$G(u,Y) \triangleq \max_{i=\overline{1,L};k=\overline{1,K}} \max_{j=\overline{1,L}} G_{ijk}(u_{ik},u_{jk},Y_i),$$

$$G_{ijk}(u_{ik},u_{jk},Y_i) \triangleq \begin{cases} (u_{ik}+u_{jk}-1)(\tau_i+\tilde{t}_{ik}+Y_i)-u_{jk}\tau_j & ,\ j>i \\ (u_{ik}+u_{jk}-1)(\tau_i+\tilde{t}_{ik}+Y_i)-u_{jk}(\tau_j+w) & ,\ j\le i. \end{cases}$$

Здесь $\mathbf{P}$ – вероятность соответствующего события;

$\mathbf{M}$ – оператор математического ожидания;

α_i^1, α_i^2 – заданные вероятности выполнения соответствующих ограничений, $i \in I_1$;

I_1 – множество особых (разрабатываемых, перспективных и т.д.) рейсов в неделю, по которым невзирая на расходную часть требуется перевезти максимальное число пассажиров с заданными вероятностями;

I_2 – множество рейсов, на которых не все самолеты из летного парка могут быть задействованы в силу ограниченности своих технических характеристик или ограниченности возможностей аэропорта города назначения;

K_i – множество самолетов, которые не могут быть задействованы на i-м рейсе.

Рассмотрим подробнее поставленную задачу. Целевая функция представляет собой среднюю прибыль компании. Ограничения (7) – (8) отражают требование по ряду рейсов перевезти практически всех потенциальных пассажиров с заданными вероятностями, которые задаются экспертами. Заметим, что ввиду случайности пассажиропотока перевезти абсолютно всех пассажиров невозможно. Ограничения (5) означают, что каждый рейс должен обслуживать один и только один самолет. Ограничения (6) представляют собой запрет использования некоторых самолетов на определенных маршрутах, что связано либо с техническими характеристиками самих самолетов, либо с невозможностями приема этого типа самолетов в аэропорту назначения. Вероятностное ограничение (9) отражает требование о выполнении с заданной вероятностью α всех технических ограничений, связанных со временем послеполетного обслуживания с учетом случайного времени задержки каждого самолета. При этом учитывается также факт цикличности летного расписания, т.е. необходимой временной стыковки летного расписания начала базового временного периода с летным расписанием конца базового временного периода. Условие (9) физически означает, что летное расписание должно быть составлено таким образом, чтобы все самолеты с вероятностью не ниже α успевали возвратиться в базовый аэропорт и пройти послеполетное обслуживание до начала вылета следующего рейса, на котором задействован каждый из них. При этом в данной модели величина t_{ik} включает в себя время в полете на i-м рейсе с учетом времени послеполетного обслуживания и случайной задержки самолета, связанной с работой аэропортных служб. Таким образом, в ограничении (9) не учитываются задержки, произошедшие по причине поломок самолетов, и задержки, связанные с поздним прибытием самолетов в базовый аэропорт. Это связано с тем, что поломки самолетов происходят достаточно редко и попытка учесть их в ограничении (9) приводит к существенному увеличению величины t_{ik}. В результате такой попытки летное расписание получается "перестраховочным"(самолетам после каждого рейса длительное время приходится стоять в базовом аэропорту для компенсации времени редкопроисходящей, но возможной задержки из-за поломки), и летный парк используется крайне неэффективно. Возможные потери авиакомпании, связанные с поломками самолетов, частично учитываются в расходной части (3), что приводит к интенсивному использованию более надежных, с точки зрения возможных поломок, воздушных судов.

По этим же причинам не учитываются и задержки, связанные с поздним прибытием самолетов в базовый аэропорт.

Данная математическая модель может быть использована не только для максимизации прибыли, но и для максимизации доходной части и минимизации расходной части, а также для оптимизации любой свертки двух последних критериев, взятых с соответствующими весами в зависимости от степени их важности.

4. Алгоритм решения задачи

Заметим, что, зная распределения случайных величин X_i^1, X_i^2, математические ожидания величин $\min\{z_k, X_i^1\}, \min\{z_k, X_i^1\}$ можно найти аналитически, а для ограничений (7) – (8) может быть выписан детерминированный эквивалент [10] в виде детерминированных линейных неравенств.

Согласно доверительному подходу [10] для нахождения гарантирующего решения задачи (4) – (9), т.е. доставляющего нижнюю оценку для максимального значения средней прибыли, достаточно решить следующую задачу:

$$\hat{u} \triangleq \arg\max_u M_R(u) \tag{10}$$

при ограничениях:

$$\sum_{k=1}^{K} u_{ik} z_k \geq x_{\alpha i}^1, \quad i \in I_1, \tag{11}$$

$$\sum_{k=1}^{K} u_{ik} z_k \geq x_{\alpha i}^2, \quad i \in I_1, \tag{12}$$

$$\sum_{k=1}^{K} u_{ik} = 1,\ u_{ik} \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, L}, \tag{13}$$

$$u_{ik} = 0, \quad k \in K_i,\ i \in I_2, \tag{14}$$

$$\max_{y \in S_\alpha} G(u, y) \leq 0, \tag{15}$$

где $M_R(u) \triangleq \sum_{i=1}^{L} \sum_{k=1}^{K} \tilde{C}_{ik} u_{ik} + C^0$ – математическое ожидание прибыли компании с найденными аналитически коэффициентами C^0 и $\tilde{C}_{ik}$, $i = \overline{1, L}, k = \overline{1, K}$; $x_{\alpha i}^1, x_{\alpha i}^1$ – квантили уровня α_i^1, α_i^2 распределения случайных величин X_i^1, X_i^2, $i \in I_1$; S_α – доверительное множество с вероятностной мерой α для случайного вектора Y (с реализациями $y \in R^L$), составленного из случайных величин $Y_i,\ i=\overline{1,L}$.

Выберем доверительное множество в виде прямоугольника

$$S_\alpha \triangleq \{y\ :\ 0 \le y_i \le y_{\alpha i},\ i=\overline{1,L}\}, \tag{16}$$

где $y_{\alpha i}$ – квантиль уровня α_1 случайной величины Y_i.

Так как Y_i независимы (продолжительность задержки, связанной с плохой работой служб аэропорта и произошедшей на одном рейсе, не зависит от продолжительности задержки того же типа, случившейся на другом рейсе) и $\mathbf{P}\{Y_i \le 0\}$=0, то для того, чтобы доверительное множество имело вероятностную меру α, положим $\alpha_1 = \sqrt[L]{\alpha}$.

Поскольку доверительное множество выбрано в виде прямоугольника, то ограничение (15) можно записать в виде

$$G_{ijk}(u_{ik}, u_{jk}, y_i) \le 0 \text{ для всех } y_i \in [0, y_{\alpha i}],\ j=\overline{1,L},\ k=\overline{1,K},\ i=\overline{1,L}. \tag{17}$$

Рассмотрим зависимость $G_{ijk}(u_{ik}, u_{jk}, y_i)$ от j и k для некоторого фиксированного $i=\overline{1,L}$. Пусть в начале для некоторых j и k выполняется условие u_{ik}=u_{jk}=1. Тогда легко проверить, что максимум $G_{ijk}(u_{ik}, u_{jk}, y_i)$ для данных j и k достигается при y_i=$y_{\alpha 1}$. Для всех оставшихся j и k выполняются условия $u_{ik} \ne 1$ или $u_{ik} \ne u_{ij}$. В этом случае легко проверить, что для таких j и k выполняется $G_{ijk}(u_{ik}, u_{jk}, y_i) \le 0$ при любых $y_i \in [0, y_{\alpha i}]$, в том числе и для $y_i = y_{\alpha i}$. В результате ограничения (17) можно переписать в следующем виде:

$$G_{ijk}(u_{ik}, u_{jk}, y_{\alpha i}) \le 0,\ j=\overline{1,L},\ k=\overline{1,K},\ i=\overline{1,L}. \tag{18}$$

Таким образом, задача (10) – (14), (18) нахождения гарантирующего решения задачи (4) – (9) является задачей линейного программирования большой размерности (при большом значении $K \times L$) с булевыми переменными. Размерность задачи не позволяет напрямую (без модификаций) использовать "классические"методы линейного целочисленного программирования [11].

К сожалению, на практике, как правило, $K \times L$ велико (K>10, L>100). Для таких значений K и L не удалось разработать алгоритм, который находил бы оптимальную стратегию для задачи (10) – (14), (18) за приемлемое время. Однако удалось создать алгоритм, находящий за достаточно малое время допустимую (удовлетворяющую всем ограничениям) стратегию для задачи (10) – (13), (18), при которой значение критериальной функции (10) близко к оптимальному. При малом значении величины $K \times L$ (менее 400) алгоритм находит оптимальную стратегию для задачи (10) – (14), (18).

В разработанном субоптимальном алгоритме используется идея метода ветвей и границ [11, сс. 583-588], которая состоит в неявном переборе всех допустимых комбинаций переменных оптимизации. Алгоритм состоит в решении последовательности детерминированных вспомогательных задач типа (10) – (14), (18), но меньшей размерности.

Опишем подробнее субоптимальный алгоритм, позволяющий получать хорошую допустимую стратегию для задачи (10) – (14), (18).

Идея алгоритма состоит в следующем. Сначала решается задача составления оптимального летного расписания для первых l_m последовательно расположенных рейсов. Самолет, задействованный на первом рейсе, запоминается. Затем решается задача составления оптимального летного расписания для первых l_m+1 последовательно расположенных рейсов с учетом использования на первом рейсе запомненного самолета. Самолет, задействованный на втором рейсе, запоминается. Снова решается задача составления оптимального летного расписания для первых l_m+2 последовательно расположенных рейсов с учетом использования на первых двух рейсах самолетов, запомненных ранее. И так далее, пока не будут заполнены все рейсы.

1. На первом шаге алгоритма (m=1) для матрицы $\tilde{u}$ полагается $\tilde{u}_{ik}$=0, $i = \overline{1,L}$, $k = \overline{1,K}$;

2. На каждом m-м шаге алгоритма задается глубина просмотра l_m;

3. Формируется множество индексов для m-го шага:
$J_m \triangleq \Big\{m, m+1, \ldots, \min\{L, l_m\}\Big\} \bigcup \Big\{1, 2, \ldots, \max\{0, m+l_m-L\}\Big\}$.
Данное множество соответствует рейсам, для которых на m-м шаге формируется летное расписание;

4. Решается задача формирования оптимального летного расписания для l_m рейсов из множества J_m с учетом уже задействованных на первых $m-1$ рейсах самолетов:

$$\sum_{i \in I_m} \sum_{k=1}^{K} \tilde{C}_{ik} u_{ik} \longrightarrow \max_{\tilde{u} \in U_m}, \tag{19}$$

где множество U_m определяется следующими ограничениями:

$$\sum_{k=1}^{K} u_{ik} z_k \geq x^1_{\alpha i}, \quad i \in I_1 \bigcap J_m, \tag{20}$$

$$\sum_{k=1}^{K} u_{ik} z_k \geq x^2_{\alpha i}, \quad i \in I_1 \bigcap J_m, \tag{21}$$

$$\sum_{k=1}^{K} u_{ik} = 1,\ u_{ik} \in \{0,1\},\ i \in J_m; \tag{22}$$

$$u_{ik} = 0,\ i \in I_2 \bigcap J_m,\ k \in K_i \tag{23}$$

$$\begin{gathered} u_{ik} = 0, \text{ если } i \notin I_m \text{ и } \tilde{u}_{ik} = 0, \\ u_{ik} = 1, \text{ если } \tilde{u}_{ik} = 1, \end{gathered} \tag{24}$$

$$G_{ijk}(u_{ik}, u_{jk}, y_{\alpha i}) \leq 0,\ j = \overline{1,L},\ k = \overline{1,K},\ i = \overline{1,L}. \tag{25}$$

5. Если номер текущего шага $m<L-l_m$, то полагаем, что $\tilde{u}_{mk}:=1$ для $u_{mk}=1$; иначе $\tilde{u}_{ik}:=1$ для $u_{ik}=1$, где $i \in J_m$, переход к п. 7;
6. $m:=m+1$, переход к п. 2;
7. Конец работы алгоритма.

   Матрица $\tilde{u}$ принимается в качестве субоптимального решения задачи. При этом критерий равен $\tilde{R}=\sum\limits_{i=1}^{L}\sum\limits_{k=1}^{K}\tilde{C}_{ik}\tilde{u}_{ik}+C^0$.

Время работы изложенного алгоритма и близость решения к оптимальному зависят от настроечных параметров l_m. При увеличении параметра l_m летное расписание, получаемое с помощью алгоритма, становится ближе (в смысле критерия) к оптимальному, однако при этом время работы алгоритма существенно увеличивается. Если взять $l_m=L$, то алгоритм находит точное решение задачи (10) – (13). Но при больших L и K время его работы в этом случае становится очень велико, что не позволяет применять на практике слишком большие значения l_m. Оптимальные (с точки зрения соотношения "время работы- точность решения") значения l_m для каждой задачи свои и существенно зависят от числа самолетов K.

Причина увеличения времени счета алгоритма при увеличении l_m заключается в зависимости размерности задачи линейного целочисленного программирования с булевыми переменными (19) – (25), решаемой в пункте 4 алгоритма, от величины l_m.

Решение задачи (19) – (25) основывается на идее (применительно к специфике рассматриваемой задачи) метода ветвей и границ. Проводится неявный перебор всех возможных допустимых комбинаций оптимизационных переменных с выбором наилучшей. Причем явно перебирается только небольшая часть всех комбинаций, что существенно сокращает время счета по сравнению с явным полным перебором.

Для описания алгоритма решения задачи (19) – (25) введем следующие обозначения:

$\tilde{u}^{ij}$ – матрица размерности $L\times K$, у которой все элементы равны нулю, кроме j-го элемента i-й строки, равному единице;

J – некоторое множество индексов (рейсов);

$\tilde{Q}(J)$ – множество матриц размерности $L\times K$, причем каждая матрица $\tilde{q}(J)\in\tilde{Q}(J)$ состоит из нулей и единиц, а элементы $\tilde{q}(J)$ удовлетворяют ограничениям: $\sum\limits_{j=1}^{K}\tilde{q}_{ij}(J)=1$, если $i\in J$, остальные равны нулю;

Назовем $\tilde{u}^{ij}$ допустимой матрицей для некоторой матрицы $\tilde{q}(J)\in\tilde{Q}(J)$, если $i\notin J$ и ни одно из ограничений (20),(21),(23) – (25) не нарушается при подстановке в них вместо матрицы u матрицы $\tilde{u}^{ij}+\tilde{q}(J)$;

$\tilde{U}^q(J)$ – множество всех допустимых матриц для некоторой матрицы $\tilde{q}(J)\in\tilde{Q}(J)$;

$C_i^* \triangleq \max\limits_{k \in F_i} \tilde{C}_{ik}$ – наибольший возможный вклад в критерий индекса (рейса) i для некоторой $\tilde{q}(J) \in \tilde{Q}(J)$, где $F_i \triangleq \{k : \tilde{u}^{ik} \in \tilde{U}^q(J)\}$;

Описание алгоритма решения задачи (19) – (25) приведем для шага $m = 1$:

1. Положим $S = -\infty$; $i = 1$; $r = 0$; $J = \emptyset$;
2. $S' = \sum\limits_{i \in I_m \setminus J} \tilde{C}_i^* + \sum\limits_{i=1}^{L} \sum\limits_{k=1}^{K} \tilde{C}_{ik} \tilde{q}_{ik}(J)$ – оценка сверху величины значения критерия задачи для $\tilde{q}(J)$;
3. Если $S' \leq S$, то перейти к п. 4;
   иначе перейти к п. 7;
4. $J := J \setminus \{r\}$;
   $\tilde{q}(J) := \tilde{q}(J) - \tilde{u}^{ir}$;
5. Выбираем $\tilde{u}^{ij} \in \tilde{U}^q(J)$ такое, что $j = \min\{l : l > r\}$.
   Если выбрать не удается, то перейти к п.6;
   иначе $r := j$, $J := J + \{r\}$,
   $\tilde{q}(J) := \tilde{q}(J) + \tilde{u}^{ir}$, переход к п. 2;
6. Если $i > 1$, то $i := i - 1$, переход к п. 4;
   иначе переход к п. 9;
7. Если $i \leq l_m$, то $i := i + 1$, $r := 0$, переход к п. 5;
   иначе перейти к п. 8;
8. Полагаем $S = S'$, $u^* = \tilde{q}(J)$, переход к п. 4;
9. Конец работы алгоритма;
   u^*, S – решение задачи.

Изложенный алгоритм позволяет находить точное решение задачи (19) – (25). Необходимо добавить, что кроме величины l_m на время нахождения решения оказывает влияние количество ограничений (20), (21), (23). Чем из большего количества элементов состоят множества I_1 и I_2, тем быстрее работает алгоритм.

Уменьшить время счета может позволить более точная (чем в п. 2 алгоритма) оценка сверху величины S. Точность предложенной оценки уменьшается с увеличением величины l_m. Увеличить точность можно, например, за счет применения симплекс-метода для получения оценки S при отказе от целочисленности оптимизационных переменных. Более точная оценка S также позволит увеличить величины l_m при сохранении времени счета. Увеличение же l_m приведет к нахождению решения задачи (10) – (13), более близкого к оптимальному.

После получения летного расписания необходимо провести уточнение значения прибыли компании при найденном летном расписании. Необходимость в уточнении возникает из-за того, что такие случайные факторы, как крупные поломки самолетов и продолжительность их устранения, не учитывались напрямую при составлении летного расписания (иначе оно было бы слишком перестраховочным), а учитывались косвенно, путем добавления некоторых штрафных коэффициентов в расходную часть. Уточнение получаемой прибыли можно получить с помощью статистической имитации функционирования летного парка компании при уже найденном летном расписании. В процессе имитации после каждого рейса моделируется случайная величина, характеризующая крупную поломку самолета, а также случайное время ее устранения. Если в результате поломки самолет не может совершить свой очередной рейс, то расписание пересчитывается, либо арендуется самолет другой компании для выполнения рейса. При проведении статистической имитации функционирования летного парка компании кроме значений средней прибыли, получаемой компанией, можно также получить дополнительные характеристики эффективности работы компании.

5. Тестовый пример

Приведем результаты численного эксперимента по составлению субоптимального летного расписания с помощью разработанного алгоритма при различных значениях параметра l_m. В первой таблице показан рост значения критерия и времени счета при увеличении l_m в случае небольшой размерности. Во второй таблице представлена работа алгоритма при реальных исходных данных, предоставленных авиакомпанией. Причем на нижней строчке представленной таблицы – значение критерия, полученного на основе действовавшего на тот момент летного расписания. Численный эксперимент проводился на ЭВМ, оснащенной процессором Pentium-II 233 Мгц.

Тестовый пример: число рейсов L=77, число самолетов K=7

Глубина просмотра l_m	Прибыль, у.е.	Время счета, мин.
2	расписание не найдено	0,005
4	408876	0,007
5	423286	0,008
7	423931	0,009
8	429461	0,01
10	436382	0,017
20	436382	0,83
77	436382	758

Тестовый пример: L=177, K=15

Глубина просмотра l_m	Прибыль, у.е.	Время счета, мин.
13	901429	3
15	912420	10
17	918905	40
19	919663	202
действовавшее расписание	841123	—

Приведенные данные показывают, что при увеличении глубины просмотра резко увеличивается время счета, а значение критерия возрастает незначительно. В первом примере точное решение находится уже при $l_m = 10$. Во втором примере точное решение не найдено, однако характер увеличенмя прибыли позволяет предположить, что при оптимальном управлении значение критерия будет лишь ненамного отличаться от субоптимального решения, найденного при $l_m = 19$ (в пределах $0,5\%$). Эти, а также многие другие примеры демонстрируют, что с помощью разработанного алгоритма для задач с небольшой и средней размерностью можно находить точные решения, а для задач с большой размерностью алгоритм позволяет найти за короткое время субоптимальные решения с высокой точностью.

Список литературы

[1] *Kao E.P.C., Queyranne M.* Budgeting costs of nursing in a hospital. // Management Sciense, 1985, v.31, No5, pp. 608-621.

[2] *Dupacova J.* Water resources system modeling using stochastic programming with recource //Recent Results in Stochastic Programming. ed. P. Kall and A. Prekopa, Springer-Verlag, N.Y. 1980 pp. 121-134.

[3] *Dantzing G.* Aircraft allocation problem, in Linear Programming and Extensions Prinection University Press, 1963, pp. 572-597.

[4] *Birge J.R.* Exhaustible resource models with uncertain returns from exploration investment //Numerical techniques for stochastic optimization, ed. Yu Ermoliev, R.J.-B. Wets, Springer-Verlag, N.Y. 1980, pp. 481-488.

[5] *Кибзун А.И., Наумов А.В.* Гарантирующий алгоритм решения задачи квантильной оптимизации // Космические исследования 1995, No2, сс. 160-165.

[6] *Кибзун А.И., Наумов А.В.* Двухэтапные задачи квантильного линейного программирования //Автоматика и телемеханика, 1995, No1, сс. 83-93.

[7] *Наумов А.В.* Двухэтапная задача квантильной оптимизации бюджета госпиталя //Теория и системы управления 1996, No2, сс. 87-90.

[8] *Precopa A., Szantai T.* Flood control reservoir system design using stochastic programming //Mathematical Programming Study, 1978, 9 pp. 138-151.

[9] *Guldmann J.-M.* Supply, storage and service reliability decisions by gas distribution utilities: a chance-constrained approach, Management Science, 1983, 29(8) pp. 884-906.

[10] *Kibzun A.I. and Yu. S. Kan.* Stochastic Programming Problems with Probability and Quantile Functions. John Wiley, New York, 1996.

[11] *Схрейвер А.* Теория линейного и целочисленного программирования. – М.: Мир, 1991. Т.2