Elasticidad precio de la demanda

Yuri Plasencia

January 28, 2021

¿Que motiva a las empresas?

Maximizar las ganancias, en ocasiones

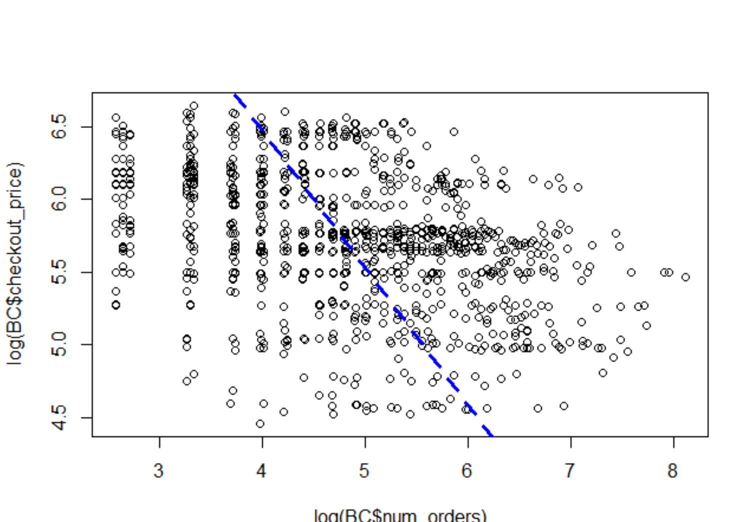
$$\{Q\} \quad = \quad \arg\max \pi = \mathrm{p}Q - C(Q) \tag{1}$$

En otras, se decide fijar precios

$$\{p\} \quad = \quad \arg\max \pi = \mathrm{p}Q(p) - C(Q(p)) \tag{2}$$

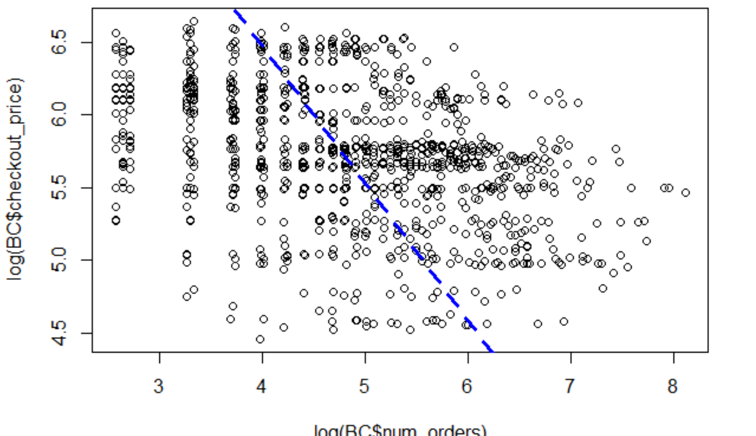
La curva de demanda

Cuando un bien es normal (la mayoría de los bienes son normales), la curva de demanda tiene la siguiente pendiente



Fuente:

https://www.kaggle.com/kannanaikkal/food-demand-forecasting



La curva de demanda

Observamos una relación inversa entre cantidad y precio.

$$Q_i \quad = \quad a - b \times p_i, \tag{3}$$

donde $b > 0$

Lo razonable es pensar que la demanda depende de características individuales

$$Q_i \quad = \quad a - b \times p_i + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + ... + \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i, \tag{4}$$

Elastcidad

Es la variación porcentual de la demanda dado la variación en 1% del precio.

$$\eta_j = \frac{\delta\% Q_{ij}}{\delta\% p_{ij}} \approx \frac{\partial Q_{ij}}{\partial p_{ij}} \frac{p_{ij}}{Q_{ij}} \tag{5}$$

Para bienes normales, $\eta_j \leq 0$

$$\eta_j = \begin{cases} -\infty & \text{Perfectamente elástica} \\ -\infty < \eta_j < -1 & \text{Elástica} \\ \eta_j = -1 & \text{Elasticidad unitaria} \\ -1 < \eta_j < 0 & \text{Inelástica} \\ \eta_j = 0 & \text{Perfectamente inelástica} \end{cases} \tag{6}$$

Estimación

De la ecuación 4, podemos repensar nuestra ecuación, y asumir una relación no lineal entre el precio y la demanda

$$
\begin{aligned}
\log(Q_i) &= a - b \times \log(p_i) + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \ldots + \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i \\
Q_i &= e^a e^{-b\log(p_i)} e^{\beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \ldots + \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i} \\
Q_i &= e^a p^{-b} e^{\beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \ldots + \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i} \\
\frac{\partial Q_i}{\partial p_i} &= e^a - bp^{-b-1} e^{\beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \ldots + \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i} \qquad (7)
\end{aligned}
$$

La elasticidad es:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial Q_i}{\partial p_i}\frac{p_i}{Q_i} &= -be^a p^{-b-1} e^{\beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \ldots + \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i} \frac{p_i}{Q_i} \\
&= -b \qquad (8)
\end{aligned}
$$

Estimación

Podemos estimar la elasticidad con un modelo lineal.

$$\log(Q_i) \quad = \quad a - b \times \log(p_i) + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + ... + \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i \tag{9}$$

Donde,

$$\eta \quad = \quad \frac{\partial Q_i}{\partial p_i} \frac{p_i}{Q_i} = -b \tag{10}$$

Test de Hipótesis Bajo Normalidad

Consideremos primero el k-ésimo coeficiente

$$H_0 : \beta_k = \bar{\beta}_k \tag{11}$$

Deseamos testear contra la hipótesis nula $H_1 : \beta_k \neq \bar{\beta}_k$, a un nivel de significancia de α. Imponiendo la restricción de la hipótesis nula, obtenemos

$$(\beta_k - \bar{\beta}_k)| \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 (X'X)^{-1}_{kk}) \tag{12}$$

donde $(X'X)^{-1}_{kk}$ es el elemento (k,k) de $(X'X)^{-1}$. Si definimos el ratio z_k por $\beta_k - \bar{\beta}_k$ dividido por su desviación estándar

$$z_k \equiv \frac{\beta_k - \bar{\beta}_k}{\sqrt{\sigma^2 (X'X)^{-1}_{kk}}}, \tag{13}$$

$z_k \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Test de Hipótesis Bajo Normalidad

Bajo la hipótesis nula $H_0 : \beta_k = \bar{\beta}_k$, el ratio t definido como

$$t_k \equiv \frac{\beta_k - \bar{\beta}_k}{SE(\beta_k)} \equiv \frac{\beta_k - \bar{\beta}_k}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 (\mathrm{X}'\mathrm{X})^{-1}_{kk}}} \tag{14}$$

se distribuye como t con $(n - K)$ grados de libertad (t_{n-K}).

Test de Hipótesis Bajo Normalidad

Bajo la hipótesis nula $H_0 : \mathrm{R}\boldsymbol{\beta} = \mathrm{r}$, donde la dimensión de R es $dim(\mathrm{r})\mathrm{x}K$ con $rank(\mathrm{R}) = dim(\mathrm{r})$, el **ratio F** es definido como

$$\begin{aligned} F &\equiv \frac{(\mathrm{R}\boldsymbol{\beta} - \mathrm{r})'[\mathrm{R}(\mathrm{X}'\mathrm{X})^{-1}\mathrm{R}']^{-1}(\mathrm{R}\boldsymbol{\beta} - \mathrm{r})/dim(\mathrm{r})}{\hat{\sigma}^2} \\ &= (\mathrm{R}\boldsymbol{\beta} - \mathrm{r})'[\mathrm{R}\widehat{Var(\boldsymbol{\beta}|}\mathrm{X})\mathrm{R}']^{-1}(\mathrm{R}\boldsymbol{\beta} - \mathrm{r})/dim(\mathrm{r}) \end{aligned} \tag{15}$$

el cual se distribuye como $F(dim(\mathrm{r}), n - K)$.

Usos: Estimación CLV

El valor presente de los beneficios que genera un cliente en el tiempo(el $i-$ésimo cliente) se define como

$$\begin{aligned} \pi_i &= IngresosTotales - CostosTotales \\ \pi_i &= p_i Q_i - cQ_i \end{aligned} \tag{16}$$

Donde

$$p_i^* = \arg\max_{p_i^*} \pi_i(p, Q) \tag{17}$$

Usos: Estimación CLV

Si la base de datos tiene n clientes o registros, la optimización es

$$
\begin{aligned}
\pi &= \sum_{i=1}^{n} Q_i^e \times [p_i^* - c] \\
\pi &= \sum_{i=1}^{n} \left\{ Q_i^0 \left[1 + \left(\frac{p_i^*}{p_i^0} - 1 \right) \eta_i \right] \right\} \times \{ p_i^* - c) \}
\end{aligned}
$$

Usos: Estimación CLV

El objetivo es maximizar el beneficio (π), encontramos el vector de precios que maximiza el π:

$$p^* = \arg\max_{p^*} \pi \tag{18}$$

Donde: $p^* = \begin{pmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ \vdots \\ p_n^* \end{pmatrix}$ es el vector de precios óptimos.

Yuri Plasencia, MSc(C)

Lima,Perú +51 961855268

yuplasencia@gmail.com