ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE

Sistemi lineari e stazionari a tempo continuo – Stabilità (cenni)

La nozione di *stabilità* considera le conseguenze sul movimento di un sistema di un'incertezza sul valore iniziale del suo stato, nell'ipotesi che gli ingressi siano fissi e noti. In particolare, essa sostanzialmente richiede che «piccole» perturbazioni dello stato iniziale rispetto a un valore di riferimento provochino solo «piccole» perturbazioni del movimento dello stato, eventualmente destinate ad annullarsi su tempi lunghi.

La stabilità è una proprietà di grande interesse, perché lo stato iniziale di un sistema di solito non è né noto, né misurabile. Inoltre, può accadere che sul sistema intervengano perturbazioni di breve durata, anche se di intensità elevata, e quando ciò accade è molto difficile studiare il comportamento del sistema durante l'azione delle perturbazioni stesse, mentre è relativamente facile farlo a partire dall'istante in cui esse scompaiono se si sanno trattare incertezze sullo stato, che, in quell'istante, sarà ignoto.

Sistemi lineari e stazionari a tempo continuo – Stabilità (cenni)

Per un sistema lineare stazionario la determinazione delle proprietà di stabilità si può effettuare in modo semplice, perché esse di fatto sono relative all'intero sistema e dipendono dal solo movimento libero. Per di più anche il calcolo del movimento libero può essere evitato. Infatti, è possibile dare condizioni necessarie e sufficienti di stabilità asintotica e condizioni solo sufficienti di instabilità riferite esclusivamente agli autovalori del sistema. In termini di soli autovalori non si possono quindi individuare le caratteristiche di stabilità proprio in tutti i casi, ma i risultati disponibili sono comunque utilissimi, soprattutto in vista del fatto che la proprietà di stabilità asintotica è quella di gran lunga più interessante nelle applicazioni.

Teorema 1 – Un sistema lineare stazionario è stabile se e solo se tutti i movimenti liberi dello stato sono limitati; è asintoticamente stabile se e solo se tutti i movimenti liberi dello stato tendono a zero per $t \to +\infty$; è instabile se e solo se almeno un movimento libero dello stato non è limitato.

Ricordando che

$$x_l(t) = e^{A(t-t_0)} x_{t_0}$$

e considerando il Teorema 1, si può concludere che le proprietà di stabilità dipendono dunque esclusivamente dalle caratteristiche della matrice della dinamica A.

Esempio 1 – Dall'equazione (si vedano le slide precedenti)

$$x(t) = e^{-t/RC} x_0 + \frac{U\omega RC}{1+\omega^2 R^2 C^2} e^{-t/RC} + \frac{U}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}} \sin(\omega t - \gamma)$$

si ricava che il movimento libero dello stato è

$$x_l(t) = e^{-t/RC} x(0)$$

che, qualunque sia $x(0)$, è limitato per $t \geq 0$ e si annulla per $t \to +\infty$. Quindi il sistema considerato (circuito elettrico) è asintoticamente stabile.

Sistemi lineari e stazionari a tempo continuo – Stabilità (cenni)

Teorema 2 – Il sistema lineare e stazionario

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

è asintoticamente stabile se e solo se tutti i suoi autovalori hanno parte reale negativa.

Teorema 3 – Il sistema lineare e stazionario

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

è instabile se almeno uno dei suoi autovalori ha parte reale positiva.

Esempio 2 – Il Teorema 2 consente di confermare immediatamente la conclusione già raggiunta che il circuito elettrico dell'Esempio 1 è asintoticamente stabile: il suo unico autovalore $-1/RC$ è infatti reale e negativo.

Concentrandosi ora sulla proprietà di stabilità asintotica, si osservi che, per il Teorema 2, l'accertamento della sua presenza non richiede più la soluzione di un'equazione differenziale per il calcolo del movimento libero, ma solo la soluzione di un'equazione algebrica per il calcolo degli autovalori. Si è così ottenuta una notevole semplificazione. Si ricorda che le n soluzioni dell'*equazione caratteristica*

$$\varphi(\lambda) = 0$$

ottenuta uguagliando a zero il *polinomio caratteristico*

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n$$

si dicono autovalori di A.

Funzione di trasferimento – Definizione e proprietà

Un'altra rappresentazione dei sistemi dinamici a tempo continuo lineari e stazionari è chiamata funzione di trasferimento e mette in relazione tra loro le trasformate di Laplace delle variabili di ingresso e di uscita. Si usa dire che mediante questa funzione i sistemi dinamici sono descritti nel dominio della variabile complessa.

Si consideri il sistema con n variabili di stato, m variabili di ingresso e p variabili di uscita

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

e si indichino con $U(s)$, $X(s)$ e $Y(s)$, funzioni della variabile complessa s, le trasformate di Laplace di $u(t)$, $x(t)$ e $y(t)$. Applicando la trasformazione di Laplace ad ambo i membri delle equazioni precedenti e ricordando le sue proprietà, si ottiene

$$sX(s) - x(0) = AX(s) + BU(s)$$
$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

Funzione di trasferimento – Definizione e proprietà

da cui risulta

$$X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s) + (sI - A)^{-1} x(0)$$

$$Y(s) = (C(sI - A)^{-1} B + D) U(s) + C(sI - A)^{-1} x(0)$$

Tali equazioni forniscono le trasformate di Laplace dei movimenti dello stato e dell'uscita. Al loro interno è immediato individuare le componenti libera $(sI - A)^{-1} x(0)$ e forzata $(sI - A)^{-1} BU(s)$ del movimento dello stato e le corrispondenti componenti $C(sI - A)^{-1} x(0)$ e $(C(sI - A)^{-1} B + D) U(s)$ del movimento dell'uscita.

La matrice $p \times m$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D$$

che appare nella

$$Y(s) = (C(sI - A)^{-1} B + D) U(s) + C(sI - A)^{-1} x(0)$$

viene detta *funzione di trasferimento* e, moltiplicata a destra per la trasformata di Laplace dell'ingresso u, fornisce la trasformata di Laplace dell'

ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE

Funzione di trasferimento – Definizione e proprietà

uscita y corrispondente a stato iniziale nullo, cioè dell'uscita forzata. Per condizioni iniziali nulle il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

può quindi essere descritto con la *rappresentazione ingresso-uscita*

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Nota la funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema e nota la trasformata di Laplace $U(s)$ dell'ingresso, è possibile calcolare, mediante antitrasformazione della

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

il movimento forzato y_f dell'uscita che coincide con il movimento y nell'ipotesi di stato iniziale nullo.

La funzione di trasferimento è quindi una *rappresentazione esterna* del sistema, in contrasto con la rappresentazione interna espressa dalla forma in variabili di stato

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

Funzione di trasferimento – Definizione e proprietà

Nel caso particolare di sistemi SISO, dalla

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

segue che la funzione di trasferimento può essere vista come il rapporto tra le trasformate di Laplace dell'uscita forzata e dell'ingresso che l'ha prodotta.
Sempre nel caso di sistemi SISO di ordine n, si consideri il particolare ingresso $u(t) = imp(t)$. Allora, dato che $U(s) = 1$, dalla

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

risulta $Y(s) = G(s)$, cioè la funzione di trasferimento si può interpretare come trasformata di Laplace della risposta all'impulso del sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Questa interpretazione della funzione di trasferimento è immediatamente generalizzabile al caso di sistemi MIMO.

Funzione di trasferimento – Definizione e proprietà

Se il sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

è SISO,

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

è una funzione razionale in *s*, data dal rapporto di due polinomi.

Funzione di trasferimento – Definizione e proprietà

In generale risulta

$$G(s) = \frac{N_G(s)}{D_G(s)} = \frac{\beta_\nu s^\nu + \beta_{\nu-1} s^{\nu-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{\alpha_\nu s^\nu + \alpha_{\nu-1} s^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

dove $\nu \leq n$, $\beta_\nu = 0$ se il sistema è strettamente proprio ($D = 0$) e, senza perdita di generalità, si può assumere $\alpha_\nu = 1$.

Poli e zeri – Con riferimento a sistemi SISO descritti dalla

$$G(s) = \frac{N_G(s)}{D_G(s)} = \frac{\beta_\nu s^\nu + \beta_{\nu-1} s^{\nu-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{\alpha_\nu s^\nu + \alpha_{\nu-1} s^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

si può utilizzare la terminologia introdotta e dire che $\hat{s}$ è uno *zero* di $G(s)$ se ne annulla il numeratore, cioè se $N_G(\hat{s}) = 0$, mentre è un *polo* di $G(s)$ se ne annulla il denominatore, cioè se $D_G(\hat{s}) = 0$.

I poli sono anche radici dell'equazione $\det(sI - A) = 0$, cioè sono autovalori del sistema. Sia gli zeri sia i poli sono reali o complessi coniugati a coppie, in quanto sono reali i coefficienti α_i e β_i nella formula precedente. Poli e zeri, nel

loro insieme, sono detti *singolarità*.
Nel caso più generale di sistemi MIMO, $\hat{s}$ è un polo di $G(s)$ se annulla il denominatore di almeno una delle funzioni razionali che compongono la funzione di trasferimento, mentre la definizione di zero risulta più complessa e non viene qui fornita.

Esempio – Le equazioni del motore elettrico

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -\frac{R}{L}x_1(t) - \frac{k}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}u_1(t) \\
\dot{x}_2(t) &= \frac{k}{J}x_1(t) - \frac{h}{J}x_2(t) - \frac{1}{J}u_2(t) \\
y_1(t) &= x_1(t) \\
y_2(t) &= x_2(t)
\end{aligned}$$

possono essere poste nella forma

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\
y(t) &= Cx(t) + Du(t)
\end{aligned}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} -R/L & -k/L \\ k/J & -h/J \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1/L & 0 \\ 0 & -1/J \end{bmatrix} \quad , \quad C = I \quad , \quad D = 0$$

La funzione di trasferimento del sistema è

$$G(s) = \frac{1}{\varphi(s)} \begin{bmatrix} \dfrac{s + h/J}{L} & \dfrac{k}{LJ} \\ \dfrac{k}{LJ} & -\dfrac{s + R/L}{J} \end{bmatrix}$$

con

$$\varphi(s) = s^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{h}{J}\right) s + \frac{k^2 + Rh}{LJ}$$

Si noti che tutti gli elementi di $G(s)$ sono funzioni razionali con denominatore coincidente con il polinomio caratteristico di A.

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{m_{22}}{m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}} & \dfrac{-m_{12}}{m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}} \\ \dfrac{-m_{21}}{m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}} & \dfrac{m_{11}}{m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}} \end{bmatrix}$$

Funzione di trasferimento – Definizione e proprietà

Nel calcolo della funzione di trasferimento $G(s)$ data dalla

$$G(s) = \frac{N_G(s)}{D_G(s)} = \frac{\beta_\nu s^\nu + \beta_{\nu-1} s^{\nu-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{\alpha_\nu s^\nu + \alpha_{\nu-1} s^{\nu-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

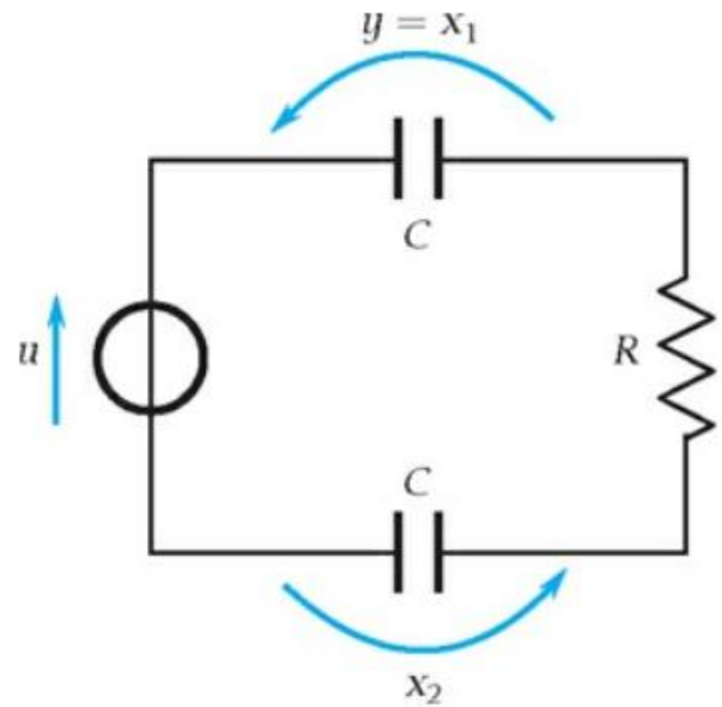
la cancellazione di radici in comune tra i polinomi a numeratore e denominatore fa sì che il numero ν dei poli possa essere inferiore a quello n degli autovalori. Poiché $G(s)$ è una rappresentazione esterna, descrive cioè il legame tra l'ingresso e l'uscita del sistema, si può intuitivamente ipotizzare che gli autovalori che non coincidono con i poli di $G(s)$ siano associati a parti «nascoste» del sistema che non influenzano tale legame, come mostrato nell'esempio seguente.

Esempio – Nel circuito elettrico della figura la variabile di ingresso u è la tensione ai morsetti del generatore, mentre la variabile di uscita y è la tensione ai morsetti di uno dei due condensatori. Prendendo come variabili di stato x_1 e x_2 le tensioni ai morsetti dei due condensatori, si può scrivere

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{1}{RC}(x_1(t) + x_2(t) - u(t))$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{1}{RC}(x_1(t) + x_2(t) - u(t))$$

$$y(t) = x_1(t)$$



Circuito elettrico dell'esempio.

Il circuito elettrico considerato è quindi descritto dal sistema lineare e invariante

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE

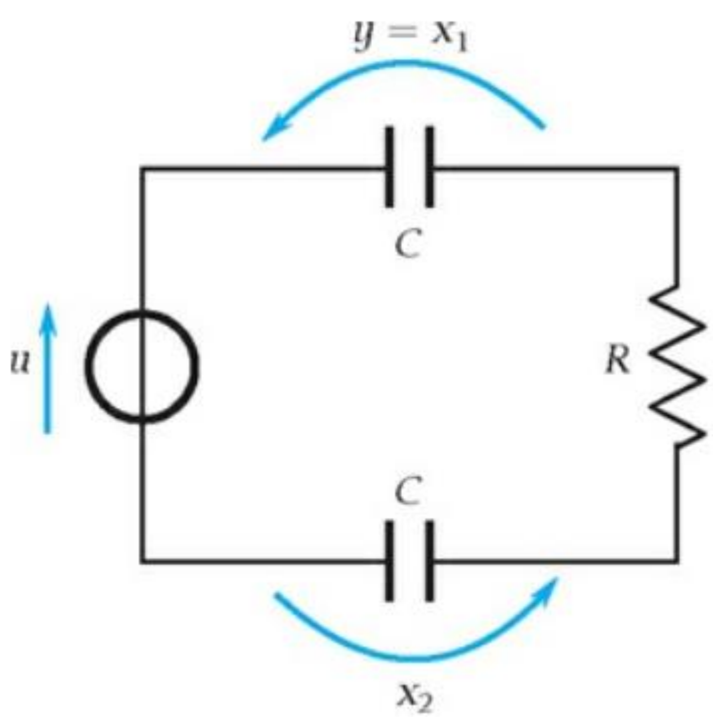
Funzione di trasferimento – Definizione e proprietà

in cui

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC} \\ -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{RC} \end{bmatrix} \quad ,$$

$$C = [\,1 \;\; 0\,] \quad , \quad D = 0$$

con autovalori $s = 0$ e $s = -2/RC$.



Circuito elettrico dell'esempio.

Funzione di trasferimento – Definizione e proprietà

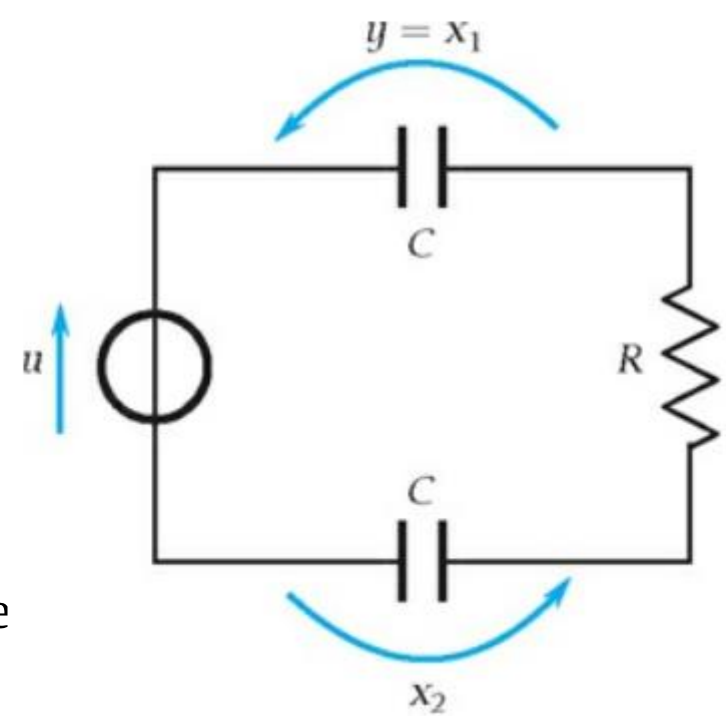
Dalla definizione

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{m_{22}}{m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}} & \frac{-m_{12}}{m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}} \\ \frac{-m_{21}}{m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}} & \frac{m_{11}}{m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}} \end{bmatrix}$$

la funzione di trasferimento di questo sistema è

$$G(s) = [1 \;\; 0] \begin{bmatrix} s + \frac{1}{RC} & \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{RC} & s + \frac{1}{RC} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{RC} \end{bmatrix} = \frac{1/RC}{s + 2/RC}$$



Circuito elettrico dell'esempio.

che mostra come l'autovalore in $s = 0$ non sia un polo del sistema, ma appartenga alla sua parte «nascosta». Si noti che dalla semplice analisi della funzione di trasferimento si potrebbe erroneamente concludere che il sistema è del primo ordine ($\nu = 1$) e asintoticamente stabile, in quanto l'unico polo è reale negativo poiché i parametri R e C sono positivi.

ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE
Funzione di trasferimento – Definizione e proprietà

L'esempio mostra che le eventuali parti nascoste, non rappresentate dalla funzione di trasferimento, possono essere associate anche ad autovalori con parte reale non negativa. Per valutare se un sistema è asintoticamente stabile a partire dalla conoscenza della sua funzione di trasferimento è quindi necessario riferirsi a uno dei seguenti casi:

- quando nel calcolo della funzione di trasferimento $G(s)$ non avvengono semplificazioni, il suo denominatore coincide con il polinomio caratteristico, l'insieme dei poli coincide con quello degli autovalori e la conoscenza dei poli è sufficiente per accertare la proprietà di stabilità del sistema;
- se vi sono cancellazioni, la semplice conoscenza dei poli di $G(s)$ non consente di trarre alcuna conclusione sulla stabilità del sistema; potrebbe infatti accadere che uno o più autovalori non appartenenti all'insieme dei poli non abbiano parte reale negativa (si veda l'esempio).

Riferimenti Bibliografici

[1] Bolzern, P., Scattolini, R., Schiavoni, N. (2015). Fondamenti di controlli automatici. McGraw-Hill Education. ISBN: 978-88-386-6882-1