ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE

Sistemi lineari e stazionari a tempo continuo – Movimento

Si consideri il sistema a tempo continuo lineare, invariante nel tempo e proprio descritto da

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

dove $u \in R^m$, $x \in R^n$ e $y \in R^p$, mentre le matrici A, B, C e D sono reali, costanti e di dimensioni opportune. Si assuma che l'istante iniziale sia t_0, anche se, per quanto affermato in precedenza, lo studio si potrebbe effettuare con riferimento al caso $t_0 = 0$ senza ledere la generalità.

Il movimento dello stato corrispondente all'ingresso $u(t)$, definito per $t \geq t_0$, e allo stato iniziale $x(t_0) = x_{t_0}$ è dato dalla seguente espressione, detta *formula di Lagrange*:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_{t_0} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau \quad , \quad t \geq t_0$$

Il corrispondente movimento dell'uscita è

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_{t_0} + C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau + Du(t) \quad , \quad t \geq t_0$$

Sistemi lineari e stazionari a tempo continuo – Movimento

Nei movimenti

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_{t_0} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau \quad , \quad t \geq t_0$$

$$y(t) = C e^{A(t-t_0)} x_{t_0} + C \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau + D u(t) \quad , \quad t \geq t_0$$

dello stato e dell'uscita del sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

si può individuare un contributo dipendente solo dallo stato iniziale e uno dipendente solo dall'ingresso, dai quali il movimento complessivo si ottiene per semplice somma. Il contributo al movimento dello stato e dell'uscita funzione solo dello stato iniziale, cioè quello che si avrebbe se, a pari stato iniziale, l'ingresso fosse nullo, si chiama *movimento libero*, ed è dato da

$$x_l(t) = e^{A(t-t_0)} x_{t_0}$$

$$y_l(t) = C e^{A(t-t_0)} x_{t_0}$$

mentre il contributo funzione solo dell'ingresso, cioè quello che si avrebbe se, a pari ingresso, lo stato iniziale fosse nullo, si chiama *movimento forzato*, ed è dato da

$$x_f(t) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau$$

$$y_f(t) = C \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau + D u(t)$$

Esempio – Si consideri il sistema

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{RC}\left(u(t) - x(t)\right)$$
$$y(t) = u(t) - x(t)$$

Si può verificare che i movimenti dello stato e dell'uscita del sistema che si ottengono in corrispondenza di $t_0 = 0$, $u(t) = U\sin(\omega t)$, $t \geq 0$, e $x(0) = x_0$ sono

$$x(t) = e^{-t/RC}x_0 + \frac{U\omega RC}{1+\omega^2R^2C^2}e^{-t/RC} + \frac{U}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}\sin(\omega t - \gamma)$$

$$y(t) = -e^{-t/RC}x_0 - \frac{U\omega RC}{1+\omega^2R^2C^2}e^{-t/RC} + \frac{U\omega RC}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}\cos(\omega t - \gamma)$$

dove

$$\gamma = \arctan(\omega RC)$$

Il sistema considerato è lineare, quindi nelle equazioni riportate si individuano i movimenti liberi e quelli forzati: i primi dipendono solo da $x(0) = x_0$ e si ottengono ponendo $U = 0$, cioè $u(t) = 0$; i secondi dipendono solo da u e si ottengono ponendo $x_0 = 0$; sia gli uni sia gli altri sono lineari nelle rispettive cause, cioè, per esempio, raddoppiano al raddoppiare di x_0 e U.

Riferimenti Bibliografici

[1] Bolzern, P., Scattolini, R., Schiavoni, N. (2015). Fondamenti di controlli automatici. McGraw-Hill Education. ISBN: 978-88-386-6882-1