ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE

Segnali e sistemi a tempo continuo e a tempo discreto

Un segnale può essere definito come una funzione o una grandezza che contiene informazione, in generale riguardo allo stato o al comportamento di un sistema fisico. Anche se i segnali possono essere rappresentati in molti modi, l'informazione è sempre contenuta nelle variazioni di una o più grandezze in qualche dominio. Per esempio, il segnale può essere costituito dall'insieme delle variazioni di una grandezza nel tempo o nello spazio.

Matematicamente i segnali sono rappresentati come funzioni di una o più variabili indipendenti. Per esempio, un segnale vocale può essere rappresentato matematicamente come una funzione del tempo ed una fotografia può essere rappresentata come una luminosità funzione di due variabili spaziali.

In molte applicazioni, il tempo è considerato come la variabile indipendente della rappresentazione matematica di un segnale, anche se in realtà tale variabile indipendente può non essere il tempo.

Segnali e sistemi a tempo continuo e a tempo discreto

La variabile indipendente della rappresentazione matematica di un segnale può essere continua o discreta.

Segnali a tempo continuo sono segnali definiti su un insieme temporale continuo e perciò sono rappresentati da funzioni di variabile continua.

Segnali a tempo discreto sono quelli definiti su un insieme discreto di tempi e quindi la variabile indipendente assume solo valori discreti; in altri termini, i segnali a tempo discreto sono rappresentati come sequenze di numeri.

Ad esempio, segnali come il parlato o le immagini possono avere una rappresentazione in termini di variabile continua oppure di variabile discreta e, se valgono certe condizioni, queste rappresentazioni sono del tutto equivalenti.

ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE

Segnali e sistemi a tempo continuo e a tempo discreto

Oltre al fatto che le variabili indipendenti possano essere continue o discrete, anche il valore del segnale può essere continuo o discreto.
Segnali numerici sono quelli per cui sia il tempo che l'ampiezza sono discreti.
I segnali a tempo continuo e ad ampiezza continua sono a volte chiamati segnali analogici.

In quasi tutti i settori della scienza e della tecnologia occorre elaborare i segnali per facilitare l'estrazione di informazione. Perciò lo sviluppo di tecniche e sistemi di elaborazione dei segnali è di grande importanza. Di solito queste tecniche assumono la forma di una trasformazione del segnale in un altro segnale che, per qualche motivo, risulta più vantaggioso dell'originale. Per esempio:

- si possono cercare trasformazioni che separano due o più segnali che sono stati combinati in qualche modo;
- si può desiderare di rendere più evidente qualche componente o qualche parametro di un segnale;
- si può desiderare la stima di uno o più parametri di un segnale.

ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE
Segnali e sistemi a tempo continuo e a tempo discreto

I sistemi di elaborazione dei segnali possono essere classificati allo stesso modo dei segnali.
Sistemi a tempo continuo sono sistemi per cui sia l'ingresso che l'uscita sono segnali a tempo continuo.
Sistemi a tempo discreto sono quelli per cui l'ingresso e l'uscita sono segnali a tempo discreto.

Analogamente, sistemi analogici sono sistemi per cui l'ingresso e l'uscita sono segnali analogici e sistemi numerici sono quelli per cui l'ingresso e l'uscita sono segnali numerici.

I concetti di sistema a tempo continuo e sistema a tempo discreto sono validi anche per i sistemi dinamici (a tempo continuo e a tempo discreto), i quali sono modelli matematici che vengono studiati in differenti settori, come ad esempio quello dell'automatica.

Segnali a tempo continuo – Impulso e altri segnali canonici

Nello studio dei sistemi dinamici a tempo continuo, si fa spesso riferimento alle seguenti funzioni reali appartenenti alla classe dei *segnali canonici*:

$$\operatorname{sca}(t) = \begin{cases} 0 \ , \ t < 0 \\ 1 \ , \ t \geq 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{ram}(t) = \begin{cases} 0 \ , \ t < 0 \\ t \ , \ t \geq 0 \end{cases}$$

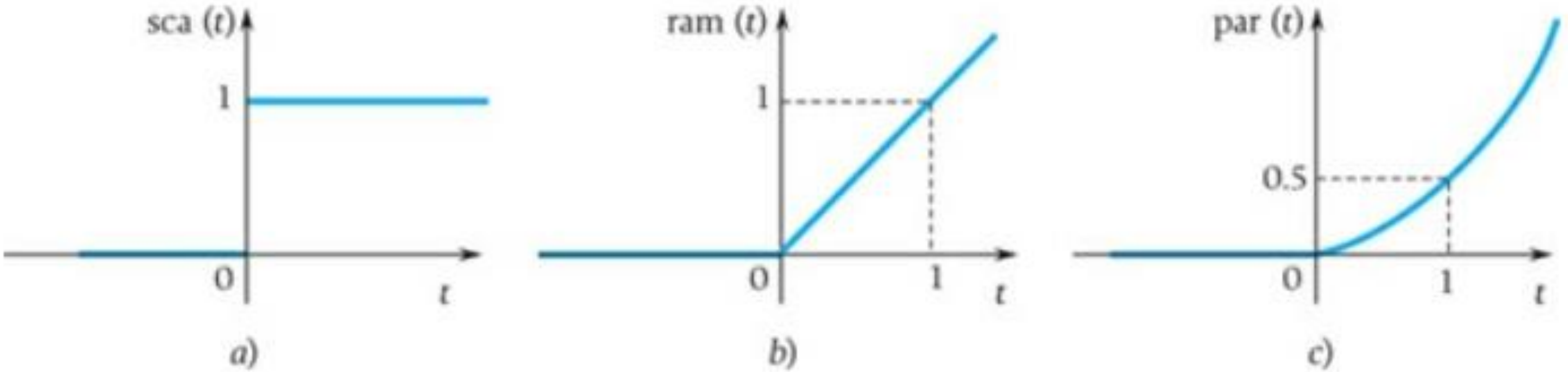
$$\operatorname{par}(t) = \begin{cases} 0 \ , \ t < 0 \\ t^2/2 \ , \ t \geq 0 \end{cases}$$

Essi sono detti rispettivamente *scalino*, *rampa* e *parabola*. Essi sono rappresentati nella figura riportata nella prossima slide. Si ha che:

$$\int_{-\infty}^{t} \operatorname{sca}(\tau)\, d\tau = \operatorname{ram}(t) \quad , \quad \int_{-\infty}^{t} \operatorname{ram}(\tau)\, d\tau = \operatorname{par}(t)$$

ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE

Segnali a tempo continuo – Impulso e altri segnali canonici



Principali segnali canonici a tempo continuo: a) scalino; b) rampa; c) parabola.

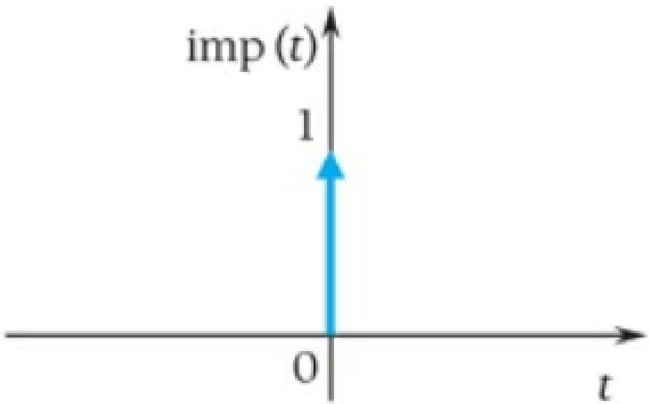
La rampa è la derivata della parabola, mentre lo scalino è la derivata della rampa per $t \neq 0$. Altri segnali canonici si possono ottenere per successive integrazioni della parabola. Non esiste invece alcuna funzione, definita in senso classico come corrispondenza tra due insiemi, che abbia come integrale lo scalino. Una tale funzione, detta *impulso di Dirac*, o semplicemente *impulso*, e denotata con il simbolo $imp(t)$, si può definire solo in senso generalizzato facendo riferimento alla teoria delle distribuzioni. L'impulso può essere definito mediante le relazioni:

Segnali a tempo continuo – Impulso e altri segnali canonici

$$\mathrm{imp}(t) = 0 \quad , \quad t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{imp}(t)\, dt = 1$$

nella seconda delle quali l'integrale può essere limitato a un qualunque intervallo contenente il punto $t = 0$. In via puramente intuitiva, si può ritenere che l'impulso sia un segnale di durata estremamente breve e ampiezza estremamente elevata («infinita»).



Impulso di Dirac.

$$\frac{d\,(\mathrm{sca}(t))}{dt} = \mathrm{imp}(t)$$

Segnali a tempo continuo – Trasformata di Laplace

Sia data una funzione complessa f della variabile reale t; sia poi $s = \sigma + j\omega \in C$ una variabile complessa con parte reale σ e coefficiente dell'unità immaginaria j pari a ω. Se la funzione

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st} dt$$

esiste almeno per qualche valore di s, essa si dice *trasformata di Laplace* di $f(t)$. Di solito si denota la trasformata con la stessa lettera, però maiuscola, che indica la funzione del tempo trasformanda e si usa scrivere

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

La definizione di $F(s)$ richiede che $f(t)$ sia definita almeno per $t \geq 0$; essa può essere usata pure per funzioni definite per $t < 0$, ma i corrispondenti valori di f non concorrono comunque a determinare la trasformata: tipicamente, ma non necessariamente, si assume $f(t) = 0$ per $t < 0$.

ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE

Segnali a tempo continuo – Trasformata di Laplace

Quanto detto in precedenza e i risultati che seguono si estendono in modo naturale a funzioni f vettoriali.

L'operazione di *trasformazione di Laplace* ha quindi successo quando esistono valori di s tali che l'integrale considerato nell'equazione che definisce $F(s)$ converga. Non verrà approfondita la problematica della convergenza e, anzi, si assumerà tacitamente che esistano tutte le trasformate di cui si avrà occasione di discutere.

Di particolare importanza sono le *trasformate razionali*, cioè quelle in cui

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

con $N(s)$ e $D(s)$ polinomi primi tra loro. Le radici dell'equazione $N(s) = 0$ si dicono *zeri* e quelle dell'equazione $D(s) = 0$ si dicono *poli*: nell'insieme, poli e zeri si chiamano *singolarità*. Quando f è reale i coefficienti dei polinomi N e D sono reali; è chiaro peraltro che $F(s)$ è ben definita per tutti i valori di s diversi dai poli.

Si consideri la trasformata razionale:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \dots + \beta_0}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_0}$$

dove i coefficienti β_i e α_j sono numeri reali, $m < n$ (funzione strettamente propria), $\beta_m \neq 0$ e $\alpha_n \neq 0$.

Esempio: se $m = 1$, $n = 2$, $\beta_0 = 2$, $\beta_1 = 1$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\beta_1 s + \beta_0}{\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0} = \frac{s + 2}{s^2 + 2s + 1}$$

Radici dell'equazione $N(s) = 0$ (zeri): $s = -2$
Radici dell'equazione $D(s) = 0$ (poli): $s = -1;\ s = -1$

Si consideri la trasformata razionale:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \dots + \beta_0}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_0}$$

dove i coefficienti β_i e α_j sono numeri reali, $m < n$ (funzione strettamente propria), $\beta_m \neq 0$ e $\alpha_n \neq 0$.

Esempio: se $m = 0$, $n = 2$, $\beta_0 = 2$, $\alpha_0 = 25$, $\alpha_1 = 6$, $\alpha_2 = 1$

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\beta_0}{\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0} = \frac{2}{s^2 + 6s + 25}$$

Non ci sono zeri.
Radici dell'equazione $D(s) = 0$ (poli): $s = -3 - 4j$; $s = -3 + 4j$

Si consideri la trasformata razionale:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \ldots + \beta_0}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \ldots + \alpha_0}$$

dove i coefficienti β_i e α_j sono numeri reali, $m < n$ (funzione strettamente propria), $\beta_m \neq 0$ e $\alpha_n \neq 0$.

Esempio: se $m = 0$, $n = 1$, $\beta_0 = 2$, $\alpha_0 = 25$, $\alpha_1 = 6$

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\beta_0}{\alpha_1 s + \alpha_0} = \frac{2}{6s + 25}$$

Non ci sono zeri.

Radici dell'equazione $D(s) = 0$ (poli): $s = -\frac{25}{6}$

La funzione trasformanda può essere ricavata dalla sua trasformata mediante la formula di antitrasformazione

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s)\, e^{st} ds$$

dove σ è un qualunque numero reale che deve appartenere a un determinato intervallo.

L'equazione appena riportata è molto importante da un punto di vista concettuale perché insieme all'equazione

$$F(s) = \int_{0}^{+\infty} f(t)\, e^{-st} dt$$

afferma l'esistenza di una corrispondenza biunivoca tra una funzione del tempo trasformabile $f(t)$, $t \geq 0$, e la sua trasformata funzione di variabile complessa $F(s)$: in altri termini, queste due funzioni hanno lo stesso contenuto informativo, cioè non sono altro che due modi diversi di rappresentare la stessa entità.

Segnali a tempo continuo – Trasformata di Laplace

La formula

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s)\, e^{st} ds$$

è poco usata per effettuare l'antitrasformazione in pratica; per risolvere questo problema possono essere impiegati metodi più semplici. Ad esempio, per le funzioni razionali può essere utilizzato lo sviluppo di Heaviside.

La trasformazione di Laplace gode di parecchie proprietà.

Linearità
Si abbiano due funzioni f e g. Allora $\forall \alpha \in C, \forall \beta \in C$ risulta

$$\mathcal{L}\left[\alpha f(t) + \beta g(t)\right] = \alpha F(s) + \beta G(s)$$

cioè la trasformazione di Laplace è un’operazione lineare.

Traslazione nel dominio del tempo
Per un qualunque $\tau > 0$ si consideri la funzione $\hat{f}(t) = f(t - \tau)$ ottenuta traslando in avanti la funzione $f(t)$, supposta nulla per tempi negativi, di un tempo pari a τ. Si trova

$$\mathcal{L}\left[\hat{f}(t)\right] = \mathcal{L}\left[f(t-\tau)\right] = e^{-\tau s} F(s)$$

La trasformazione di Laplace gode di parecchie proprietà.

Derivazione nel dominio del tempo

Si supponga che la funzione $f(t)$ sia derivabile, nel senso delle funzioni generalizzate, per tutti i $t \geq 0$, o almeno dotata di derivate sinistra (per $t > 0$) e destra. Risulta allora

$$\mathcal{L}\left[\dot{f}(t)\right] = sF(s) - f(0)$$

Tale formula è iterabile e consente quindi il calcolo delle trasformate delle derivate successive di f, ammesso che esistano. Per esempio si ha

$$\mathcal{L}\left[\ddot{f}(t)\right] = s\mathcal{L}\left[\dot{f}(t)\right] - \dot{f}(0) = s^2F(s) - sf(0) - \dot{f}(0)$$

Quindi, se la funzione e le sue derivate sono nulle in $t = 0$, moltiplicare per s nel dominio della variabile complessa equivale a derivare nel dominio del tempo, cioè s si può interpretare come *operatore di derivazione*.

La trasformazione di Laplace gode di parecchie proprietà.

Integrazione nel dominio del tempo

Si supponga che la funzione $f(t)$ sia integrabile tra 0 e $+\infty$. Allora

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

cosicché dividere per s nel dominio della variabile complessa equivale a integrare nel dominio del tempo e $1/s$ si può interpretare come *operatore di integrazione*.

Convoluzione nel dominio del tempo

Date due funzioni f_1 e f_2, il loro *prodotto di convoluzione* è

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-\eta) f_2(\eta)\,d\eta = $$
$$= f_2(t) * f_1(t)$$

ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE

Segnali a tempo continuo – Trasformata di Laplace

Se esse sono nulle per tempi negativi, allora

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t f_1(t-\eta) f_2(\eta)\, d\eta = f_2(t) * f_1(t)$$

e si trova

$$\mathcal{L}\left[f_1(t) * f_2(t)\right] = F_1(s)\, F_2(s)$$

La trasformazione di Laplace gode di parecchie proprietà.

Teorema del valore iniziale

Se una funzione reale f ha trasformata razionale F con grado del denominatore maggiore del grado del numeratore, allora

$$f(0) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

Teorema del valore finale

Se una funzione reale f ha trasformata razionale F con grado del denominatore maggiore o uguale al grado del numeratore e poli nulli o con parte reale negativa, allora

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE

Segnali a tempo continuo – Trasformata di Laplace

Si riportano alcuni esempi di segnali e delle corrispondenti trasformate di Laplace.

$f(t)$	$F(s)$
$\mathrm{imp}(t)$	1
$\mathrm{sca}(t)$	$\frac{1}{s}$
$\mathrm{ram}(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$\mathrm{par}(t)$	$\frac{1}{s^3}$
$e^{\alpha t}\mathrm{sca}(t)$	$\frac{1}{s-\alpha}$
$te^{\alpha t}\mathrm{sca}(t)$	$\frac{1}{(s-\alpha)^2}$

Come menzionato in precedenza, per effettuare l'antitrasformazione solitamente non viene utilizzata la formula

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)\, e^{st} ds$$

Per le funzioni razionali può essere utilizzato lo sviluppo di Heaviside.

Si consideri il problema dell'antitrasformazione della funzione razionale

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

in cui il grado di $D(s)$ è maggiore del grado di $N(s)$. Si assumerà anche che i coefficienti dei polinomi N e D siano reali, cosicché per ogni zero e polo non reale esisterà il complesso coniugato e la funzione antitrasformata $f(t)$ sarà reale.

Si distinguono due casi: poli distinti e poli multipli.

Poli distinti

In termini generali, l'idea alla base del metodo che si vuole presentare consiste nello sviluppare $F(s)$ nella somma di funzioni la cui antitrasformata è nota e poi, per la proprietà di linearità, ottenere l'antitrasformata come somma delle antitrasformate dei singoli addendi.

Esempio: se

$$F(s) = \frac{s-10}{(s+2)(s+5)}$$

si può scrivere

$$\frac{s-10}{(s+2)(s+5)} \equiv \frac{P_1}{s+2} + \frac{P_2}{s+5}$$

Eliminando i denominatori, si ottiene

$$s - 10 \equiv P_1 (s+5) + P_2 (s+2)$$

che, uguagliando i coefficienti delle potenze di s, produce il sistema di equazioni

$$1 = P_1 + P_2$$
$$-10 = 5P_1 + 2P_2$$

che ha come soluzione

$$P_1 = -4,\ P_2 = 5$$

Quindi, in definitiva

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-10}{(s+2)(s+5)}\right] = \left(-4e^{-2t} + 5e^{-5t}\right)\mathrm{sca}(t)$$

Si distinguono due casi: poli distinti e poli multipli.

Poli multipli

Esempio: se

$$F(s) = \frac{s+18}{s(s+3)^2}$$

si può scrivere

$$\frac{s+18}{s(s+3)^2} \equiv \frac{P_{1,1}}{s} + \frac{P_{2,1}}{s+3} + \frac{P_{2,2}}{(s+3)^2}$$

Eliminando i denominatori, si ottiene

$$s + 18 = P_{1,1}s^2 + 9P_{1,1} + 6P_{1,1}s + P_{2,1}s^2 + 3P_{2,1}s + P_{2,2}s$$

che, uguagliando i coefficienti delle potenze di s, produce il sistema di equazioni

$$P_{1,1} + P_{2,1} = 0$$
$$6P_{1,1} + 3P_{2,1} + P_{2,2} = 1$$
$$9P_{1,1} = 18$$

che ha come soluzione

$$P_{1,1} = 2,\ P_{2,1} = -2,\ P_{2,2} = -5$$

Quindi, in definitiva

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+18}{s(s+3)^2}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s} - \frac{2}{s+3} - \frac{5}{(s+3)^2}\right] =$$
$$= \left(2 - 2e^{-3t} - 5te^{-3t}\right)\mathrm{sca}(t)$$

Segnali a tempo discreto – Impulso e altri segnali canonici discreti

Nello studio dei sistemi dinamici a tempo discreto, si fa spesso riferimento alle seguenti funzioni appartenenti alla classe dei *segnali canonici discreti*:

$$\mathrm{sca}^*(k) = \begin{cases} 0 \ , & k < 0 \\ 1 \ , & k \geq 0 \end{cases}$$

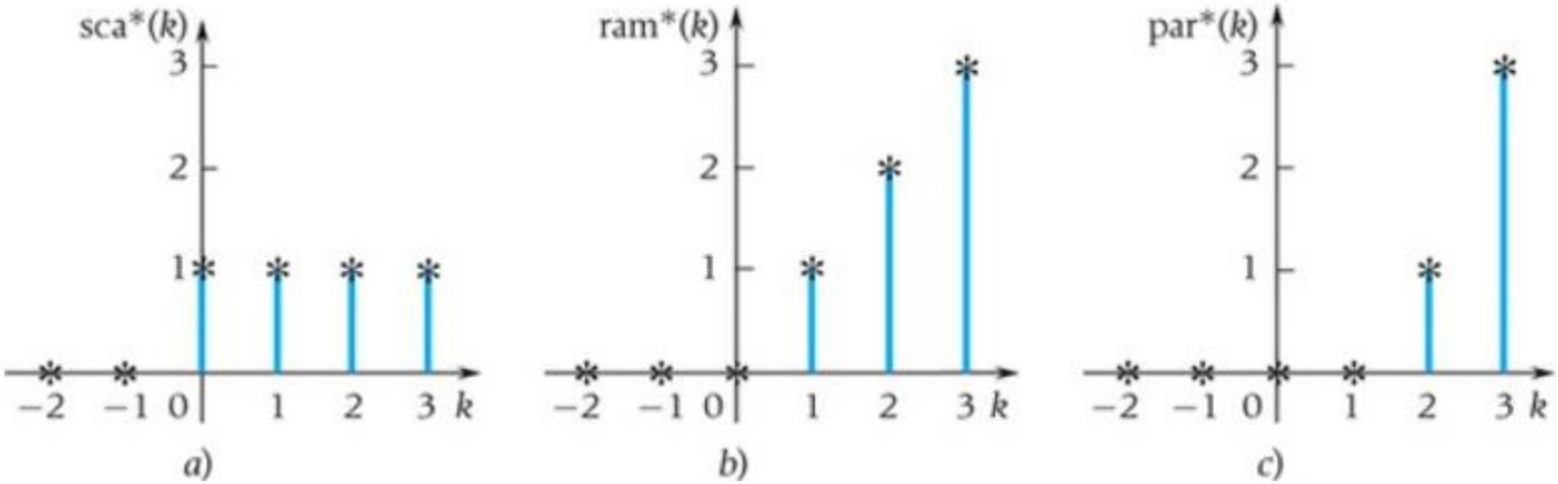
$$\mathrm{ram}^*(k) = \begin{cases} 0 \ , & k < 0 \\ k \ , & k \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{par}^*(k) = \begin{cases} 0 \ , & k < 0 \\ k(k-1)/2 \ , & k \geq 0 \end{cases}$$

Essi sono detti rispettivamente *scalino*, *rampa* e *parabola*. Essi sono rappresentati nella figura riportata nella prossima slide. Si ha che:

$$\sum_{i=-\infty}^{k-1} \mathrm{sca}^*(i) = \mathrm{ram}^*(k) \quad , \quad \sum_{i=-\infty}^{k-1} \mathrm{ram}^*(i) = \mathrm{par}^*(k)$$

Segnali a tempo discreto – Impulso e altri segnali canonici discreti



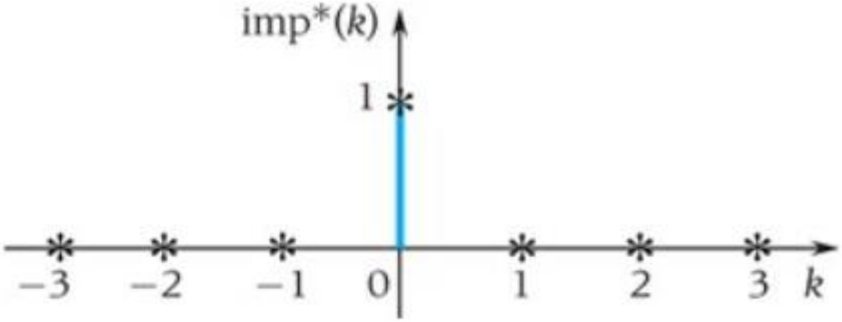
Principali segnali canonici a tempo discreto: a) scalino; b) rampa; c) parabola.

Altri segnali canonici si ottengono per successive iterazioni delle formule riportate nella slide precedente.

Si definisce poi un *impulso discreto*, o semplicemente *impulso*, o anche *simbolo di Kronecker*, come

$$\mathrm{imp}^*(k) = \begin{cases} 0 \ , \ k \neq 0 \\ 1 \ , \ k = 0 \end{cases}$$

Segnali a tempo discreto – Impulso e altri segnali canonici discreti



Impulso.

L'*impulso discreto* è rappresentato nella figura. Esso, a differenza dell'impulso continuo di Dirac, è una funzione definita in senso classico. Si può inoltre scrivere

$$\sum_{i=-\infty}^{k} \mathrm{imp}^*(i) = \mathrm{sca}^*(k)$$

ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE

Segnali a tempo discreto – Trasformata Zeta

Sia data una funzione complessa f della variabile intera k; sia poi $z = \rho e^{j\theta} \in C$ una variabile complessa con modulo $\rho \geq 0$ e fase θ. Se la funzione

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k) z^{-k}$$

esiste almeno per qualche valore di z, essa si dice *trasformata Zeta* di $f(k)$. Di solito si denota la trasformata con la stessa lettera, però maiuscola, che indica la funzione del tempo trasformanda e si usa scrivere

$$F(z) = Z[f(k)]$$

$$f(k) = Z^{-1}[F(z)]$$

La definizione di $F(z)$ richiede che $f(k)$ sia definita almeno per $k \geq 0$; essa può essere usata anche per funzioni definite per $k < 0$, ma i corrispondenti valori di f non concorrono comunque a determinare la trasformata; tipicamente, ma non necessariamente, si assume $f(k) = 0$ per $k < 0$.

Quanto detto in precedenza e i risultati che seguono si estendono in modo naturale a funzioni f vettoriali.

L'operazione di *trasformazione Zeta* ha quindi successo quando esistono valori di z tali che la serie considerata converga. Non verrà approfondita la problematica della convergenza e, anzi, si assumerà tacitamente che esistano tutte le trasformate di cui si avrà occasione di discutere.

Di particolare importanza sono le *trasformate razionali*, cioè quelle in cui

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

con $N(z)$ e $D(z)$ polinomi primi tra loro. Le radici dell'equazione $N(z) = 0$ si dicono *zeri* e quelle dell'equazione $D(z) = 0$ si dicono *poli*: nell'insieme, poli e zeri si chiamano *singolarità*. Quando f è reale i coefficienti dei polinomi N e D sono reali; è chiaro peraltro che $F(z)$ è ben definita per tutti i valori di z diversi dai poli.

La funzione trasformanda può essere ricavata dalla sua trasformata mediante la formula di antitrasformazione

$$f(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint F(z)\, z^{k-1} dz$$

L'equazione appena riportata è molto importante da un punto di vista concettuale perché insieme all'equazione

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)\, z^{-k}$$

afferma l'esistenza di una corrispondenza biunivoca tra una funzione del tempo trasformabile $f(k)$, $k \geq 0$, e la sua trasformata funzione di variabile complessa $F(z)$: in altri termini, queste due funzioni hanno lo stesso contenuto informativo, cioè non sono altro che due modi diversi di rappresentare la stessa entità.

La formula

$$f(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint F(z)\, z^{k-1} dz$$

è poco usata per effettuare l'antitrasformazione in pratica; per risolvere questo problema possono essere impiegati metodi più semplici. Ad esempio, per le funzioni razionali può essere utilizzato lo sviluppo di Heaviside.

Segnali a tempo discreto – Trasformata Zeta

La trasformazione Zeta gode di parecchie proprietà.

Linearità

Si abbiano due funzioni f e g. Allora $\forall \alpha \in C, \forall \beta \in C$ risulta

$$Z[\alpha f(k) + \beta g(k)] = \alpha F(z) + \beta G(z)$$

cioè la trasformazione Zeta è un'operazione lineare.

Ritardo

Si consideri la funzione $\hat{f}(k) = f(k-1)$ ottenuta traslando in avanti di un istante di tempo la funzione $f(k)$, supposta nulla per tempi negativi. Si trova

$$\mathcal{Z}\left[\hat{f}(k)\right] = \mathcal{Z}[f(k-1)] = \frac{1}{z}F(z)$$

cosicché dividere per z nel dominio della variabile complessa equivale a ritardare di un passo nel dominio del tempo e $1/z$ si può interpretare come *operatore di ritardo unitario*. La formula può essere generalizzata al caso di ritardi maggiori.

La trasformazione Zeta gode di parecchie proprietà.

Anticipo

Si consideri la funzione $\hat{f}(k) = f(k+1)$ ottenuta traslando indietro di un istante di tempo la funzione $f(k)$. Si trova

$$\mathcal{Z}\left[\hat{f}(k)\right] = \mathcal{Z}\left[f(k+1)\right] = zF(z) - zf(0)$$

Quindi, se la funzione è nulla in $k = 0$, moltiplicare per z nel dominio della variabile complessa equivale ad anticipare di un passo nel dominio del tempo, cioè z si può interpretare come *operatore di anticipo unitario*. La formula può essere generalizzata al caso di anticipi maggiori.

Segnali a tempo discreto – Trasformata Zeta

La trasformazione Zeta gode di parecchie proprietà.

Teorema del valore iniziale

Il valore iniziale di una funzione f è

$$f(0) = \lim_{z \to \infty} F(z)$$

Teorema del valore finale

Se una funzione reale f ha trasformata razionale F con grado del denominatore maggiore o uguale al grado del numeratore e poli in $z = 1$ o con modulo minore di 1, allora

$$\lim_{k \to +\infty} f(k) = \lim_{z \to 1} (z-1) F(z)$$

Segnali a tempo discreto – Trasformata Zeta

Si riportano alcuni esempi di segnali e delle corrispondenti trasformate Zeta.

$f(k)$	$F(z)$
$\mathrm{imp}^*(k)$	1
$\mathrm{sca}^*(k)$	$\dfrac{z}{z-1}$
$\mathrm{ram}^*(k)$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
$\mathrm{par}^*(k)$	$\dfrac{z}{(z-1)^3}$
$a^k\,\mathrm{sca}^*(k)$	$\dfrac{z}{z-a}$
$a^k\,\mathrm{ram}^*(k)$	$\dfrac{az}{(z-a)^2}$

Come menzionato in precedenza, per effettuare l'antitrasformazione solitamente non viene utilizzata la formula

$$f(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint F(z)\, z^{k-1} dz$$

Per le funzioni razionali può essere utilizzato lo sviluppo di Heaviside.

Si consideri il problema dell'antitrasformazione della funzione razionale

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

in cui il grado di $D(z)$ non è minore del grado di $N(z)$. Si assumerà anche che i coefficienti dei polinomi N e D siano reali, cosicché per ogni zero e polo non reale esisterà il complesso coniugato e la funzione antitrasformata $f(k)$ sarà reale.

In termini generali, l'idea alla base del metodo che si vuole presentare consiste nello sviluppare $F(z)$ nella somma di funzioni la cui antitrasformata è nota e poi, per la proprietà di linearità, ottenere l'antitrasformata come somma delle antitrasformate dei singoli addendi. La tecnica da seguire è pertanto del tutto analoga a quella illustrata a proposito dell'antitrasformazione delle trasformate di Laplace. Tuttavia, la tabella riportata nella slide 36 mostra come le trasformate di interesse abbiano tutte un fattore z al numeratore. Allora, per fare in modo che i singoli termini dello sviluppo assumano proprio tale forma, conviene applicare il classico sviluppo di Heaviside alla funzione $F(z)/z$ invece che alla funzione $F(z)$. In alternativa, si può procedere in maniera tradizionale e poi antitrasformare ricordando l'equazione

$$\mathcal{Z}\left[\hat{f}(k)\right] = \mathcal{Z}\left[f(k-1)\right] = \frac{1}{z}F(z)$$

La procedura sarà illustrata con esclusivo riferimento al caso in cui i poli di $F(z)$ siano tutti distinti tra loro e non nulli.

Esempio: se

$$F(z) = \frac{z-10}{(z+2)(z+5)} \qquad \frac{F(z)}{z}$$

si può scrivere

$$\frac{z-10}{z(z+2)(z+5)} \equiv \frac{P_0}{z} + \frac{P_1}{z+2} + \frac{P_2}{z+5}$$

Eliminando i denominatori, si ottiene

$$z - 10 = P_0 z^2 + 10P_0 + 7P_0 z + P_1 z^2 + 5P_1 z + P_2 z^2 + 2P_2 z$$

che, uguagliando i coefficienti delle potenze di z, produce il sistema di equazioni

$$\begin{gathered} P_0 + P_1 + P_2 = 0 \\ 7P_0 + 5P_1 + 2P_2 = 1 \\ 10P_0 = -10 \end{gathered}$$

che ha come soluzione

$$P_0 = -1,\ P_1 = 2,\ P_2 = -1$$

Utilizzando

$$f(k) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = \mathcal{Z}^{-1}\left[P_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i z}{z + p_i}\right] =$$
$$= P_0\,\mathrm{imp}^*(k) + \left(\sum_{i=1}^{n} P_i(-p_i)^k\right)\mathrm{sca}^*(k)$$

si ottiene

$$f(k) = \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z-10}{(z+2)(z+5)}\right] = -\,\mathrm{imp}^*(k) + \left(2(-2)^k - (-5)^k\right)\mathrm{sca}^*(k)$$

Riferimenti Bibliografici

[1] Oppenheim, A.V., Schafer, R.W. (2010). Elaborazione numerica dei segnali. FrancoAngeli Editore. ISBN-10: 8820430061

[2] Bolzern, P., Scattolini, R., Schiavoni, N. (2015). Fondamenti di controlli automatici. McGraw-Hill Education. ISBN: 978-88-386-6882-1

[3] Corradini, M.L., Orlando, G. (2005). Controllo digitale di sistemi dinamici. FrancoAngeli Editore. ISBN: 9788846464262