ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE

Funzione di trasferimento – Rappresentazioni e parametri

Molto spesso è conveniente rappresentare la funzione di trasferimento di un sistema SISO in una delle due seguenti forme fattorizzate

$$G(s) = \frac{\rho \prod_i (s + z_i) \prod_i (s^2 + 2\zeta_i \alpha_{ni} s + \alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (s + p_i) \prod_i (s^2 + 2\xi_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)}$$

$$G(s) = \frac{\mu \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_i (1 + 2\zeta_i s/\alpha_{ni} + s^2/\alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (1 + T_i s) \prod_i (1 + 2\xi_i s/\omega_{ni} + s^2/\omega_{ni}^2)}$$

Malgrado le equazioni riportate comprendano il caso in cui non tutte le singolarità siano reali, in esse non appaiono coefficienti complessi. Infatti, ogni coppia di singolarità complesse coniugate dà luogo a un termine di secondo grado.

Funzione di trasferimento – Rappresentazioni e parametri

Molto spesso è conveniente rappresentare la funzione di trasferimento di un sistema SISO in una delle due seguenti forme fattorizzate

$$G(s) = \frac{\rho \prod_i (s+z_i) \prod_i (s^2 + 2\zeta_i \alpha_{ni} s + \alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (s+p_i) \prod_i (s^2 + 2\xi_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)}$$

$$G(s) = \frac{\mu \prod_i (1+\tau_i s) \prod_i (1 + 2\zeta_i s/\alpha_{ni} + s^2/\alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (1+T_i s) \prod_i (1 + 2\xi_i s/\omega_{ni} + s^2/\omega_{ni}^2)}$$

I parametri che compaiono nelle equazioni riportate vengono così chiamati:

- lo scalare ρ è detto *costante di trasferimento*;
- l'intero g, che può assumere valori positivi e negativi o essere nullo, è detto *tipo*;
- gli scalari $z_i \neq 0$ e $p_i \neq 0$ sono gli *zeri* e i *poli* reali non nulli cambiati di segno;
- gli scalari $\alpha_{ni} > 0$ e $\omega_{ni} > 0$ sono le *pulsazioni naturali* delle coppie di zeri e poli complessi coniugati;
- gli scalari ζ_i e ξ_i, in modulo minori di 1, sono gli *smorzamenti* degli zeri e dei poli complessi coniugati;

ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE
Funzione di trasferimento – Rappresentazioni e parametri

Molto spesso è conveniente rappresentare la funzione di trasferimento di un sistema SISO in una delle due seguenti forme fattorizzate

$$G(s) = \frac{\rho \prod_i (s + z_i) \prod_i (s^2 + 2\zeta_i \alpha_{ni} s + \alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (s + p_i) \prod_i (s^2 + 2\xi_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)}$$

$$G(s) = \frac{\mu \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_i (1 + 2\zeta_i s/\alpha_{ni} + s^2/\alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (1 + T_i s) \prod_i (1 + 2\xi_i s/\omega_{ni} + s^2/\omega_{ni}^2)}$$

I parametri che compaiono nelle equazioni riportate vengono così chiamati:

- lo scalare μ è detto *guadagno*;
- gli scalari $\tau_i \neq 0$ e $T_i \neq 0$ sono le *costanti di tempo*.

Con semplici calcoli si può facilmente determinare il legame tra i parametri delle due rappresentazioni. In particolare risulta

$$\mu = \frac{\rho \prod_i z_i \prod_i \alpha_{ni}^2}{\prod_i p_i \prod_i \omega_{ni}^2}, \quad \rho = \frac{\mu \prod_i \tau_i \prod_i \omega_{ni}^2}{\prod_i T_i \prod_i \alpha_{ni}^2}, \quad \tau_i = \frac{1}{z_i}, \quad T_i = \frac{1}{p_i}$$

Guadagno – Sia dato un sistema descritto dalla funzione di trasferimento $G(s)$, posta nella forma

$$G(s) = \frac{\mu \prod_i (1+\tau_i s) \prod_i (1 + 2\zeta_i s/\alpha_{ni} + s^2/\alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (1+T_i s) \prod_i (1 + 2\xi_i s/\omega_{ni} + s^2/\omega_{ni}^2)}$$

e asintoticamente stabile ($g \leq 0$, $T_i > 0$ e $\xi_i > 0$).
Si consideri inoltre il caso particolare $g = 0$. Supponendo che il sistema sia sottoposto a un ingresso costante $\bar{u}$, modellizzabile come un segnale a scalino con trasformata di Laplace $U(s) = \frac{\bar{u}}{s}$, l'uscita tende a un valore di regime $\bar{y}$ determinabile mediante il teorema del valore finale come

$$\bar{y} = \lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{s \to 0} sG(s)\frac{\bar{u}}{s} = \lim_{s \to 0} s\left(C(sI - A)^{-1}B + D\right)\frac{\bar{u}}{s} =$$
$$= G(0)\bar{u} = \left(-CA^{-1}B + D\right)\bar{u}$$

Teorema del valore finale

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

Funzione di trasferimento – Rappresentazioni e parametri

e per la

$$G(s) = \frac{\mu \prod_i (1+\tau_i s) \prod_i (1 + 2\zeta_i s/\alpha_{ni} + s^2/\alpha_{ni}^2)}{s^g \prod_i (1+T_i s) \prod_i (1 + 2\xi_i s/\omega_{ni} + s^2/\omega_{ni}^2)}$$

come

$$\bar{y} = \lim_{s\to 0} s \frac{\mu \prod_i (1+\tau_i s) \prod_i (1 + 2\zeta_i s/\alpha_{ni} + s^2/\alpha_{ni}^2)}{\prod_i (1+T_i s) \prod_i (1 + 2\xi_i s/\omega_{ni} + s^2/\omega_{ni}^2)} \frac{\bar{u}}{s} = \mu \bar{u}$$

Confrontando le

$$\bar{y} = \lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sG(s)\frac{\bar{u}}{s} = \lim_{s\to 0} s\left(C(sI-A)^{-1}B + D\right)\frac{\bar{u}}{s} =$$

$$= G(0)\bar{u} = \left(-CA^{-1}B + D\right)\bar{u}$$

$$\bar{y} = \lim_{s\to 0} s \frac{\mu \prod_i (1+\tau_i s) \prod_i (1 + 2\zeta_i s/\alpha_{ni} + s^2/\alpha_{ni}^2)}{\prod_i (1+T_i s) \prod_i (1 + 2\xi_i s/\omega_{ni} + s^2/\omega_{ni}^2)} \frac{\bar{u}}{s} = \mu \bar{u}$$

risulta

$$\mu = G(0) = -CA^{-1}B + D$$

La costante

$$\mu = \bar{y}/\bar{u}$$

rappresenta il rapporto tra il valore di regime dell'uscita del sistema e il valore dell'ingresso costante che l'ha prodotta. Questa osservazione motiva la denominazione di guadagno attribuita a μ.

Costanti di tempo – Per la loro definizione

$$\mu = \frac{\rho \prod_i z_i \prod_i \alpha_{ni}^2}{\prod_i p_i \prod_i \omega_{ni}^2}\ ,\ \rho = \frac{\mu \prod_i \tau_i \prod_i \omega_{ni}^2}{\prod_i T_i \prod_i \alpha_{ni}^2}\ ,\tau_i = \frac{1}{z_i}\ ,\ T_i = \frac{1}{p_i}$$

le costanti di tempo coincidono con il reciproco cambiato di segno dei poli e degli zeri non nulli. Le costanti di tempo al denominatore sono legate alla velocità con cui si esauriscono i transitori del sistema: maggiore è il valore di una costante di tempo, più lentamente si esaurirà il contributo al movimento dell'uscita dato dal polo corrispondente.

ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE
Funzione di trasferimento – Risposta allo scalino

A partire dalla conoscenza della funzione di trasferimento, possono essere esaminate in dettaglio le caratteristiche della risposta allo scalino di sistemi SISO, in special modo di quelli asintoticamente stabili.
Lo scalino d'ingresso sarà ipotizzato di ampiezza unitaria, in quanto, per linearità, la risposta a uno scalino di ampiezza $\bar{u}$ si ricava da quella allo scalino unitario moltiplicandola per $\bar{u}$.

Valore iniziale e valore finale – Nel caso di sistemi asintoticamente stabili, il calcolo del valore di regime y_∞ (o $\bar{y}$) della variabile di uscita è già stato effettuato in precedenza (si vedano le slide precedenti) per mezzo del teorema del valore finale, giungendo alla conclusione che y_∞ è nullo nel caso $g < 0$, altrimenti è pari al guadagno μ. Analogamente, per un sistema descritto dalla funzione di trasferimento razionale

$$G(s) = \frac{\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \dots + \beta_0}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_0}$$

Funzione di trasferimento – Risposta allo scalino

dove $m \leq n$, $\alpha_n \neq 0$, $\beta_m \neq 0$, il valore iniziale della risposta allo scalino può essere determinato mediante il teorema del valore iniziale, che fornisce

$$y(0) = \lim_{s \to \infty} s \frac{\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \ldots + \beta_0}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \ldots + \alpha_0} \frac{1}{s} = \begin{cases} 0 \quad , & m < n \\ \dfrac{\beta_m}{\alpha_n} \quad , & m = n \end{cases}$$

Teorema del valore iniziale

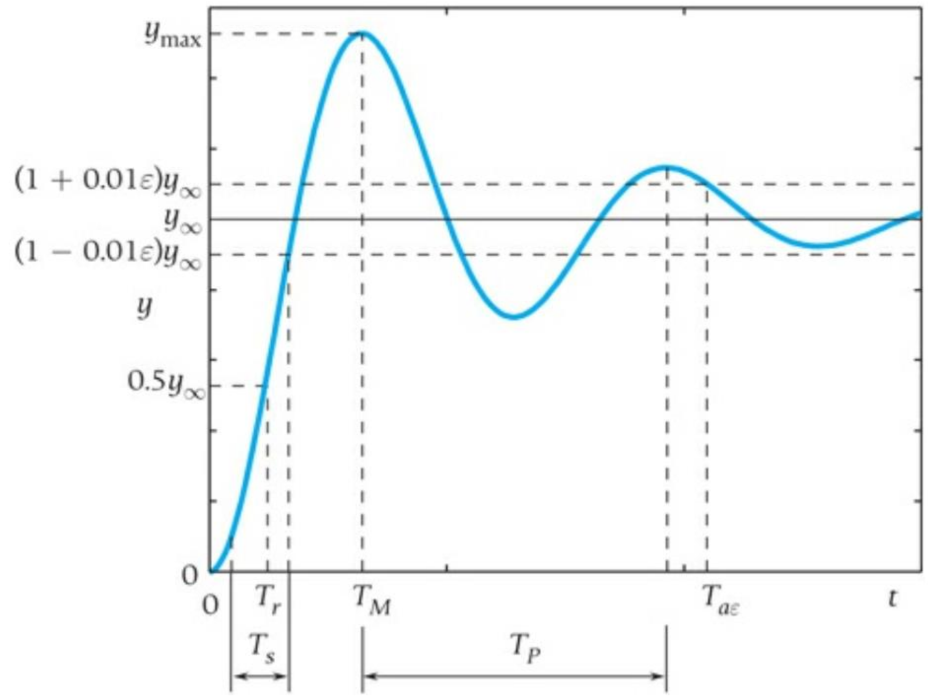
$$f(0) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

Caratteristiche della risposta allo scalino – Per qualificare la risposta dei sistemi asintoticamente stabili, assumendo senza perdita di generalità che il guadagno μ sia positivo, nel seguito si farà riferimento ai seguenti parametri, il cui significato è illustrato nella figura riportata nella slide seguente:

- *valore di regime* y_∞: valore dell'uscita a transitorio esaurito; per quanto detto è pari a μ ($g = 0$) o a zero ($g < 0$);

ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE

Funzione di trasferimento – Risposta allo scalino



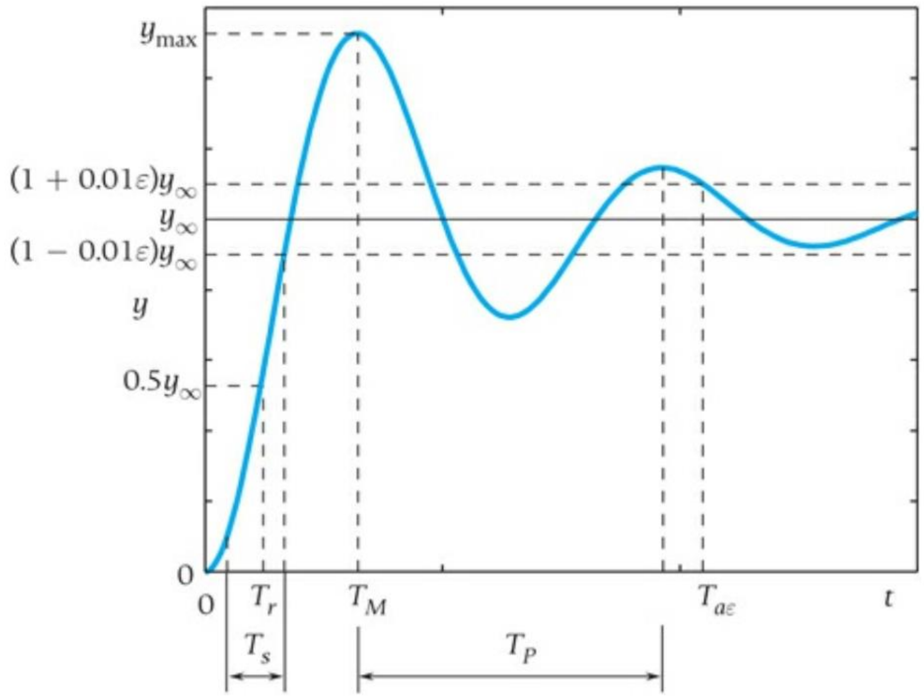
Parametri caratteristici della risposta allo scalino (con ε=10).

- *valore massimo* y_{max}: massimo valore assunto dall’uscita;
- *sovraelongazione massima percentuale* $S\%$: ampiezza, in percentuale, della sovraelongazione massima rispetto al valore di regime, cioè

$$S\% = 100\frac{y_{max} - y_\infty}{y_\infty}$$

ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE

Funzione di trasferimento – Risposta allo scalino

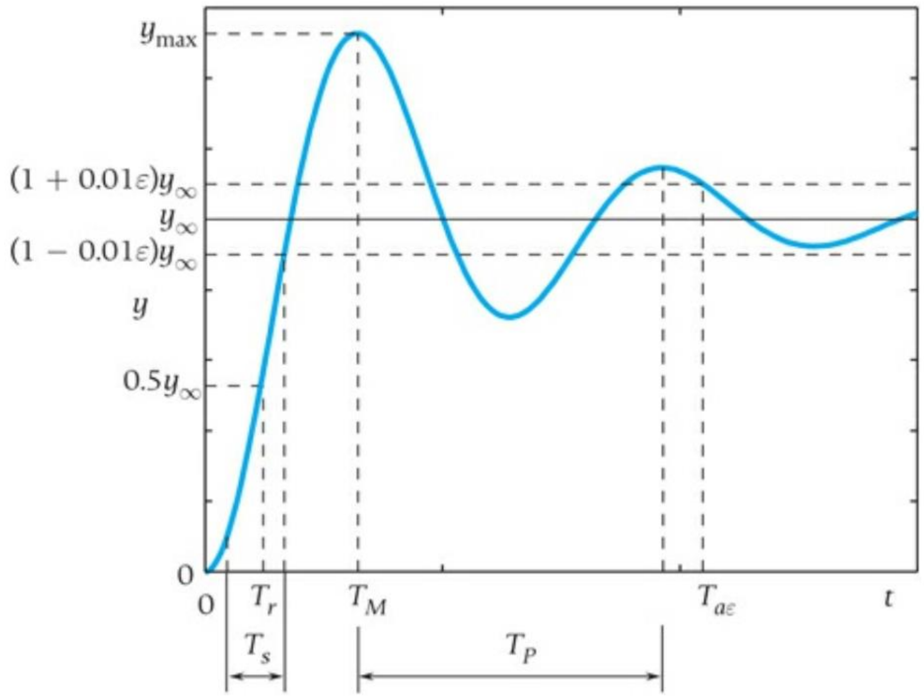


Parametri caratteristici della risposta allo scalino (con ε=10).

- *tempo di massima sovraelongazione* T_M: primo istante in cui $y = y_{\max}$;
- *tempo di salita* T_s: tempo richiesto perché l’uscita passi per la prima volta dal 10% al 90% del suo valore di regime;

ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE

Funzione di trasferimento – Risposta allo scalino

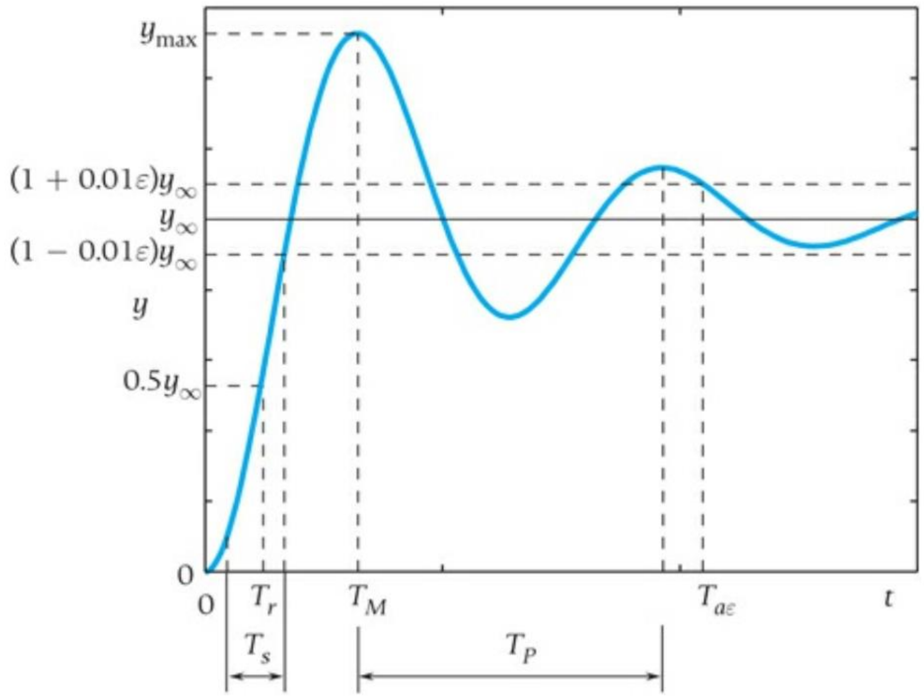


Parametri caratteristici della risposta allo scalino (con ε=10).

- *tempo di ritardo* T_r: tempo necessario perché l'uscita raggiunga la prima volta il valore $0.5y_\infty$;
- *tempo di assestamento* $T_{a\varepsilon}$: tempo necessario perché il modulo della differenza tra l'uscita e il valore di regime y_∞ rimanga definitivamente al di sotto di ε%, cioè l'uscita sia nell'intervallo $[(1-0.01\varepsilon)y_\infty, (1+0.01\varepsilon)\,y_\infty]$. Per

ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE

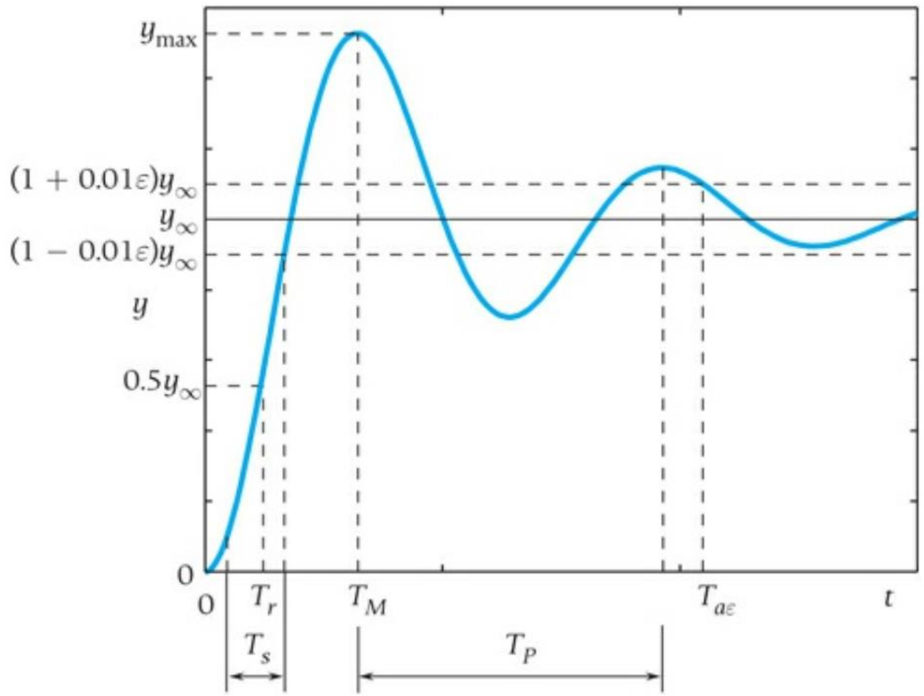
Funzione di trasferimento – Risposta allo scalino



Parametri caratteristici della risposta allo scalino (con ε=10).

esempio con T_{a1} si indicherà il tempo necessario perché l’uscita entri definitivamente nella fascia di ampiezza $\pm 0.01 y_\infty$ attorno al valore di regime y_∞. Si dirà inoltre che $T_{a\varepsilon}$ rappresenta il tempo di assestamento al (100-ε)% ;

ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE
Funzione di trasferimento – Risposta allo scalino



Parametri caratteristici della risposta allo scalino (con ε=10).

- *periodo dell'oscillazione* T_P: intervallo di tempo tra i primi due massimi dell'uscita.

Funzione di trasferimento – Risposta allo scalino

Sistemi del primo ordine – Si consideri un sistema del primo ordine con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{\mu}{1 + Ts}$$

L'andamento dell'uscita nel tempo, determinato antitrasformando la funzione

$$Y(s) = G(s)/s$$

è

$$y(t) = \mu\left(1 - e^{-t/T}\right) \quad , \quad t \geq 0$$

Dalla formula precedente segue che $y(0) = 0$ e, purché il sistema sia asintoticamente stabile ($T > 0$), $y_\infty = \mu$. La formula precedente mostra anche che la risposta è di tipo esponenziale; per $T > 0$ risulta pertanto $y_{max} = y_\infty$ e $S\% = 0$. Inoltre è possibile calcolare esplicitamente il tempo di assestamento

$$T_{a\varepsilon} = T \ln \frac{1}{0.01\varepsilon} = -T \ln(0.01\varepsilon)$$

ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE
Funzione di trasferimento – Risposta allo scalino

e derivare gli altri parametri caratteristici della risposta allo scalino, riportati nella seguente tabella.

y_∞	T_s	T_r	T_{a5}	T_{a1}
μ	$\simeq 2.2T$	$\simeq 0.7T$	$\simeq 3T$	$\simeq 4.6T$

Parametri caratteristici della risposta allo scalino del sistema $G(s) = \dfrac{\mu}{1+Ts}$.

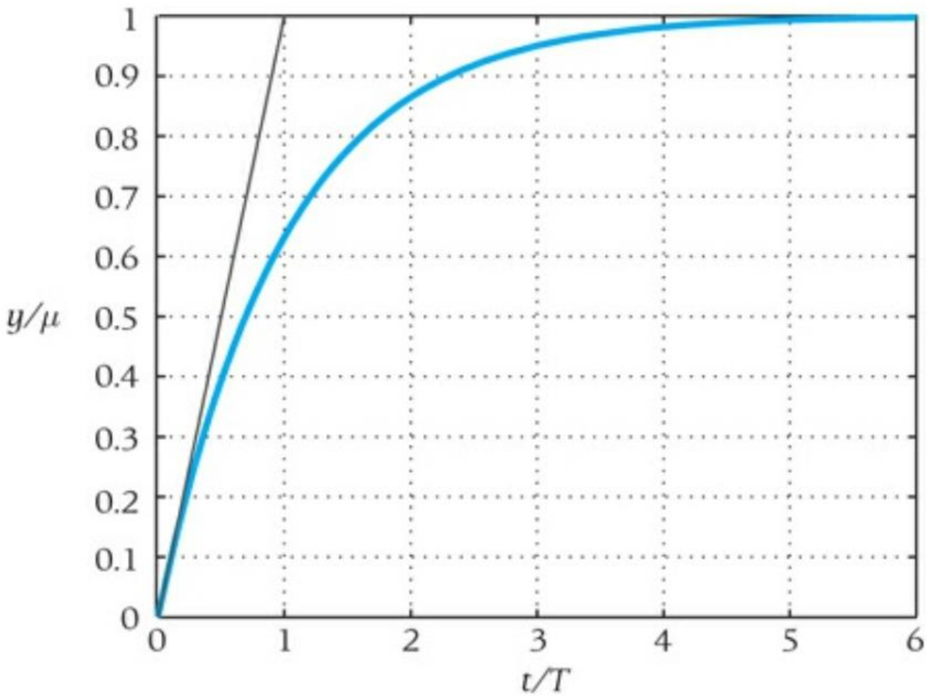
Come atteso, la velocità di risposta del sistema, sempre per $T > 0$, dipende dalla costante di tempo T; a una diminuzione di T, cioè a uno spostamento verso sinistra del polo, corrisponde una diminuzione del tempo di salita, del tempo di ritardo e del tempo di assestamento. In particolare, il transitorio si può ritenere in pratica esaurito per

$$t \simeq (4 \div 5)T$$

Funzione di trasferimento – Risposta allo scalino

L'andamento dell'uscita normalizzata y/μ è riportato nella figura in funzione del tempo normalizzato t/T. È possibile verificare che la tangente a y in $t = 0$ raggiunge il valore asintotico μ dopo un tempo pari a T. È infine possibile verificare che risulta

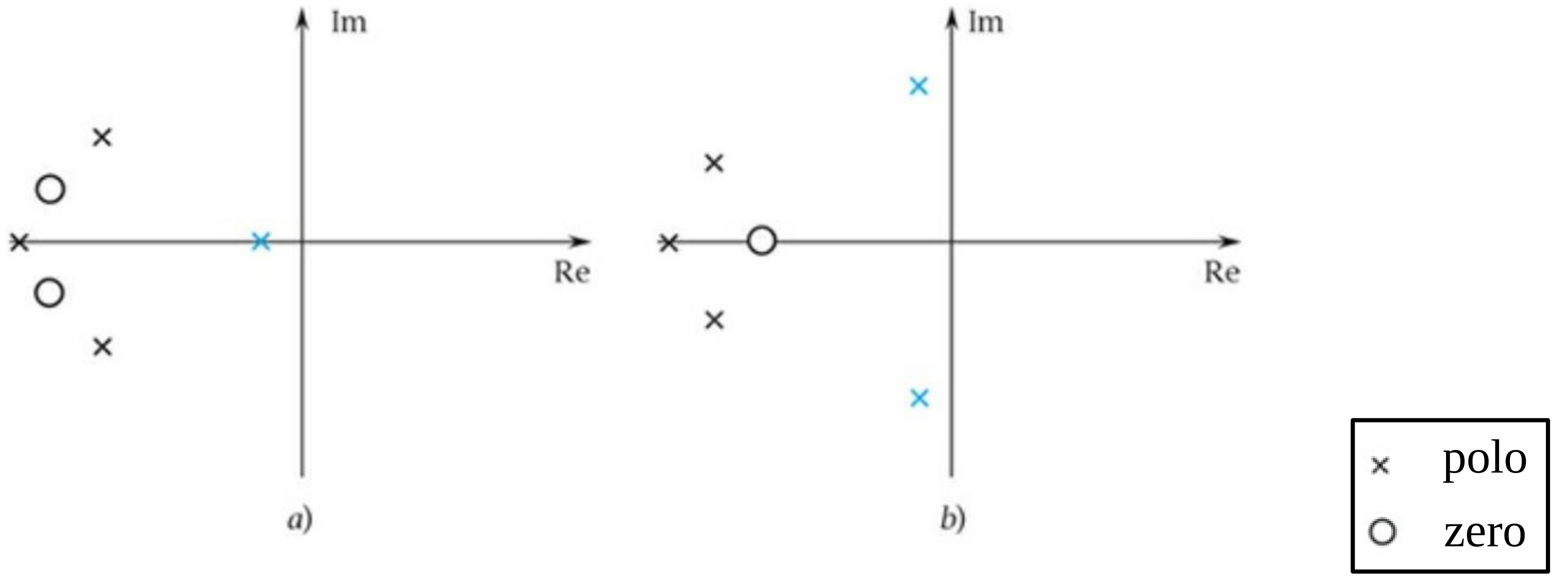
$$y(T) \simeq 0.63 y_\infty$$



Risposta allo scalino del sistema $G(s) = \frac{\mu}{1 + Ts}$
e tangente nell'origine.

Funzione di trasferimento – Risposta allo scalino

Poli dominanti – Data una funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema asintoticamente stabile, una volta cancellate eventuali coppie di poli e zeri prossimi tra loro nel piano complesso, vengono chiamati *poli dominanti* i poli, reali o complessi, nettamente più vicini all'origine rispetto agli altri poli, come esemplificato nella figura. La risposta allo scalino di un sistema con poli dominanti può essere approssimata con quella di un sistema la cui funzione di trasferimento possiede soltanto questi poli e un guadagno pari a quello del sistema di partenza.



Polo dominante reale (a) e poli dominanti complessi coniugati (b).

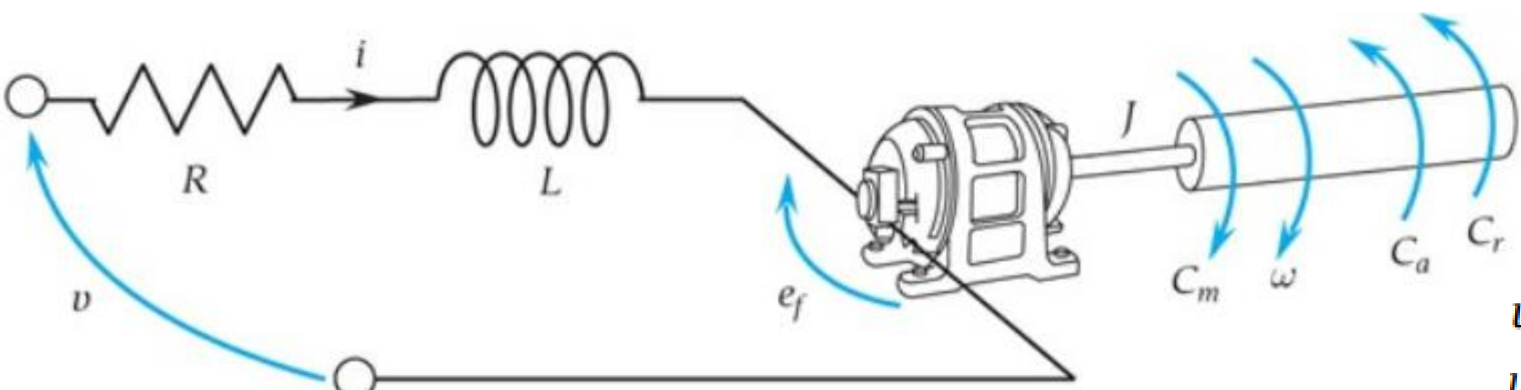
ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE
Funzione di trasferimento – Risposta allo scalino

Poli dominanti – Esempio: si consideri il motore a corrente continua (si vedano le slide precedenti). Si considerino, nelle rispettive unità di misura, i seguenti valori dei parametri caratteristici del motore a corrente continua:

$$R = 0.46 \quad L = 0.001 \quad h = 0.0008 \quad k = 0.25 \quad J = 0.012$$

Dalla

$$G(s) = \frac{1}{\varphi(s)} \begin{bmatrix} \frac{s + h/J}{L} & \frac{k}{LJ} \\ \frac{k}{LJ} & -\frac{s + R/L}{J} \end{bmatrix} \qquad \varphi(s) = s^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{h}{J}\right) s + \frac{k^2 + Rh}{LJ}$$



$$u_1 = v \qquad y_1 = i$$
$$u_2 = C_r \qquad y_2 = w$$

Motore elettrico dell’esempio.

ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE
Funzione di trasferimento – Risposta allo scalino

la funzione di trasferimento tra la tensione nel circuito d'armatura ($u_1 = v$) e la velocità di rotazione ($y_2 = w$) è

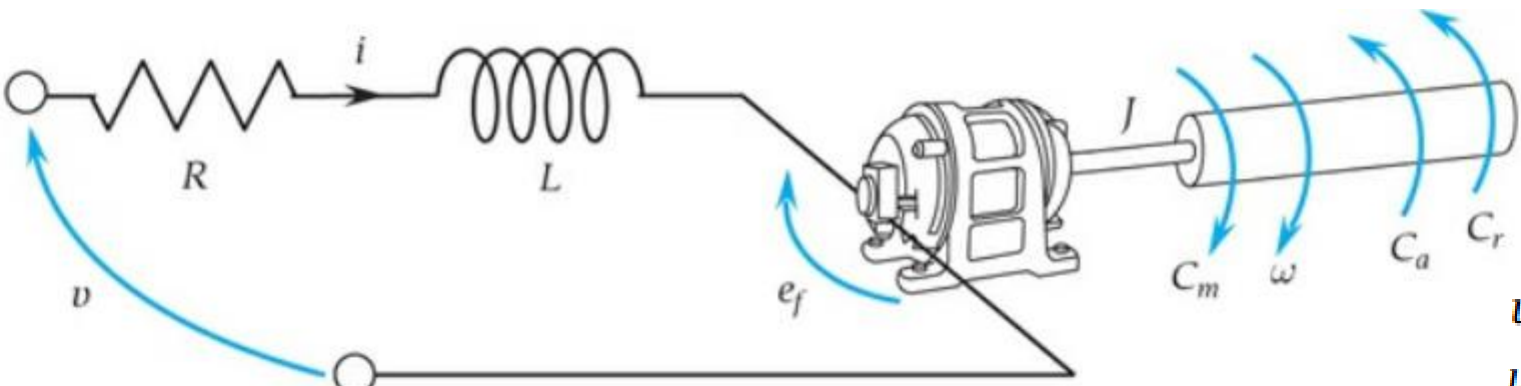
$$G(s) = \frac{3.98}{(1 + 0.0856s)(1 + 0.0022s)}$$

in cui una costante di tempo è nettamente maggiore dell'altra. Il polo dominante è quindi in

$$s = -1/0.0856 = -11.68$$

e l'approssimazione a polo dominante è

$$G_a(s) = \frac{3.98}{1 + 0.0856s}$$



$u_1 = v \quad y_1 = i$

$u_2 = C_r \quad y_2 = w$

Motore elettrico dell'esempio.

Funzione di trasferimento – Risposta allo scalino

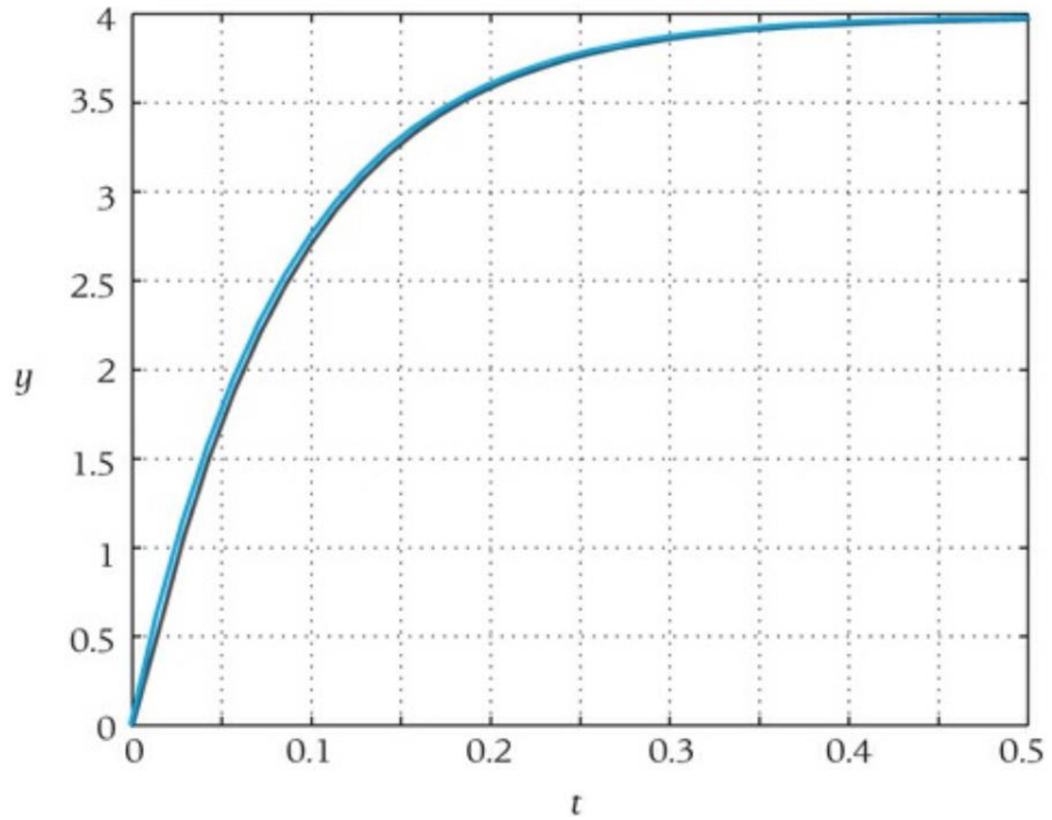
Le risposte allo scalino associate ai sistemi

$$G(s) = \frac{3.98}{(1 + 0.0856s)(1 + 0.0022s)} \qquad G_a(s) = \frac{3.98}{1 + 0.0856s}$$

sono riportate nella figura, che mostra come in fase di modellizzazione sia possibile trascurare la costante di tempo elettrica

$$L/R = 0.0022$$

ottenendo comunque un modello accurato.



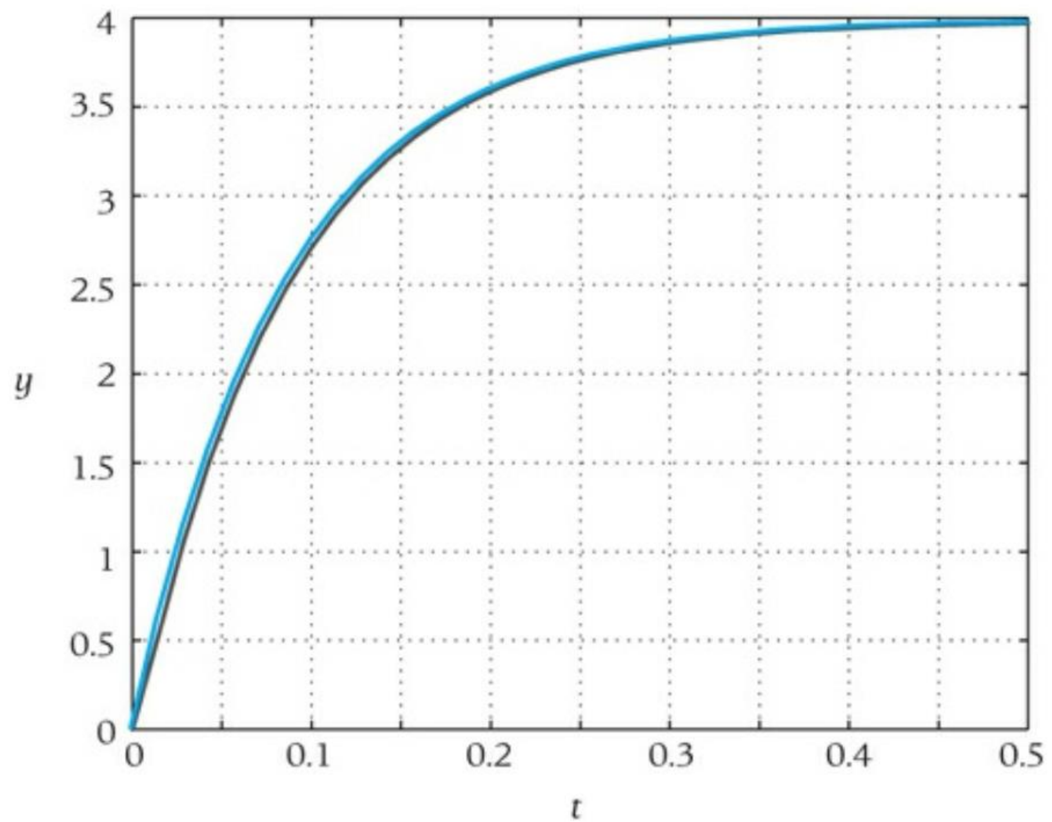
Risposta allo scalino del sistema $G(s)$ (linea nera) e del modello $G_a(s)$ (linea in colore).

ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE

Funzione di trasferimento – Risposta allo scalino

Questo esempio mostra come spesso la presenza di uno o più poli dominanti sia dovuta al fatto che nel sistema in esame vi è un fenomeno che influisce maggiormente rispetto ad altri nella caratterizzazione del comportamento dinamico del sistema stesso.

Nel caso specifico, la dinamica relativa alla rotazione dell’albero motore ha certamente un rilievo maggiore rispetto alla dinamica elettrica, che si esaurisce molto più velocemente della prima.



Risposta allo scalino del sistema $G(s)$ (linea nera) e del modello $G_a(s)$ (linea in colore).

ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE

Schemi a blocchi – Introduzione

Nello studio dei sistemi dinamici lineari e stazionari costituiti da più sottosistemi variamente collegati tra loro risulta spesso conveniente l'uso di una rappresentazione grafica basata sui cosiddetti *schemi a blocchi*. Questo tipo di descrizione, oltre a mettere in luce con chiarezza le interazioni tra i diversi sottosistemi, rende agevole il calcolo della funzione di trasferimento tra una data variabile di ingresso e una data variabile di uscita del sistema complessivo.

ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE

Schemi a blocchi – Componenti di uno schema a blocchi

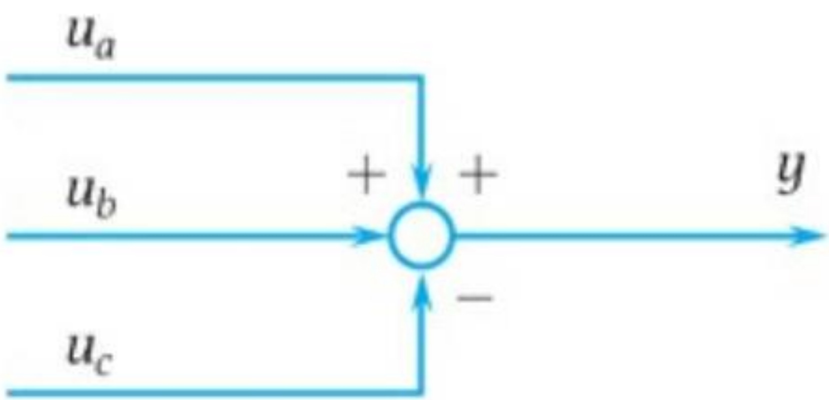
Nella simbologia degli schemi a blocchi una variabile è rappresentata da una *freccia* etichettata con il nome della variabile stessa e un sistema è rappresentato da un *blocco*, cioè da un rettangolo al cui interno è indicata la funzione di trasferimento, dotato di una freccia entrante e una uscente che corrispondono rispettivamente all'ingresso e all'uscita. Pertanto un sistema con ingresso u, uscita y e funzione di trasferimento $G(s)$ viene rappresentato come mostrato nella figura.

Rappresentazione di un sistema dinamico.

Schemi a blocchi – Componenti di uno schema a blocchi

Negli schemi a blocchi compaiono anche due altri elementi: il *nodo sommatore* e il *punto di diramazione*. Il nodo sommatore è costituito da un cerchio con una freccia uscente e alcune frecce entranti, ognuna caratterizzata da un segno (+ oppure −): esso indica che la variabile associata alla freccia uscente è la somma algebrica, secondo quanto specificato dai segni, delle variabili associate alle frecce entranti. Per esempio la figura rappresenta la relazione

$$y(t) = u_a(t) + u_b(t) - u_c(t)$$



Nodo sommatore.

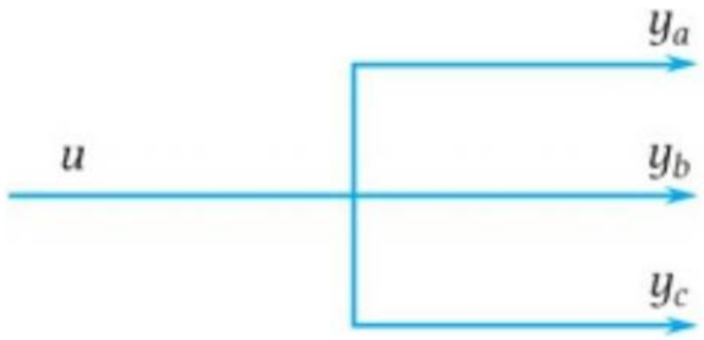
ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE

Schemi a blocchi – Componenti di uno schema a blocchi

Invece, il punto di diramazione si adopera quando si vuole descrivere il fatto che due o più variabili, rappresentate da frecce uscenti, costituiscono la replica dell’unica variabile a monte del punto. Così, il fatto che le variabili y_a, y_b e y_c costituiscano una replica della variabile u, cioè

$$y_a(t) = y_b(t) = y_c(t) = u(t)$$

si rappresenta come nella figura.



Punto di diramazione.

ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE

Schemi a blocchi – Componenti di uno schema a blocchi

D'ora in poi si assumerà che tutte le variabili che appaiono in uno schema a blocchi siano scalari e, coerentemente, che tutti i sottosistemi rappresentati siano SISO. Ciò non esclude che sia possibile descrivere in questo modo anche sistemi MIMO. Per esempio si consideri il sistema con due ingressi e due uscite, cioè con

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \quad , \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$$

definito dalla relazione

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

con

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}$$

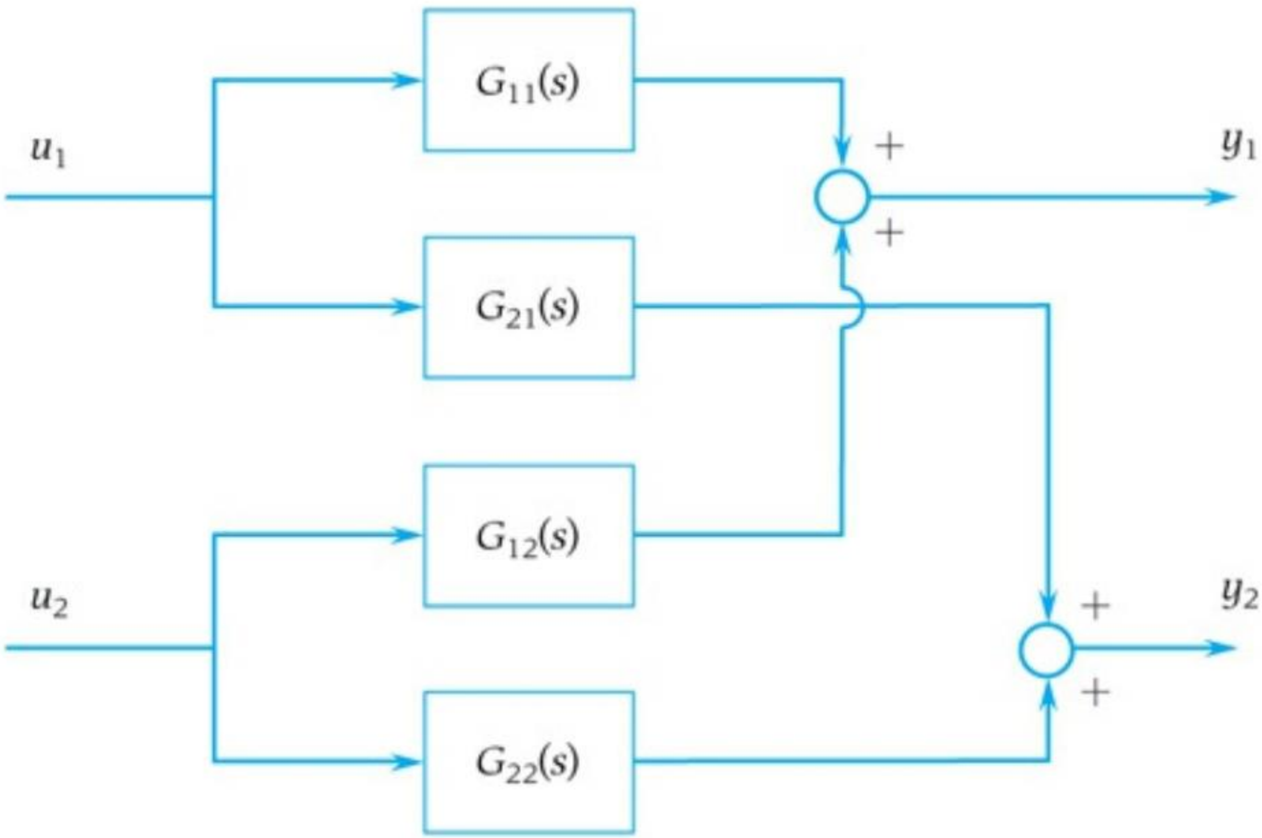
Poiché il legame tra le variabili è descritto in modo equivalente dalle equazioni

$$Y_1(s) = G_{11}(s)U_1(s) + G_{12}(s)U_2(s)$$

$$Y_2(s) = G_{21}(s)U_1(s) + G_{22}(s)U_2(s)$$

Schemi a blocchi – Componenti di uno schema a blocchi

il sistema si può rappresentare mediante lo schema a blocchi della figura, in cui tutte le variabili che compaiono sono scalari.



Schema a blocchi di un sistema MIMO.

ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE
Schemi a blocchi – Regole di elaborazione

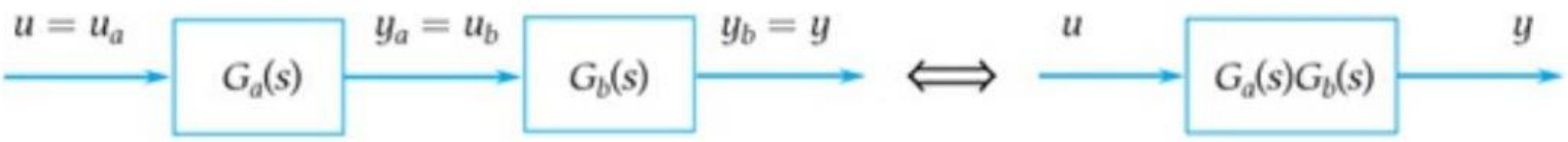
È spesso utile saper calcolare, a partire da uno schema a blocchi, la funzione di trasferimento tra una variabile di ingresso e una determinata uscita. A tale riguardo è conveniente cominciare a trattare i casi più semplici di due soli blocchi collegati in serie, in parallelo e in retroazione.

Sistemi in serie – Due sistemi descritti dalle equazioni

$$Y_a(s) = G_a(s)U_a(s)$$

$$Y_b(s) = G_b(s)U_b(s)$$

si dicono interconnessi *in serie* (o *in cascata*) quando l'uscita y_a del primo coincide con l'ingresso u_b del secondo (si veda la figura).



Sistemi in serie.

ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE

Schemi a blocchi – Regole di elaborazione

Considerando

$$u(t) = u_a(t)$$
$$y(t) = y_b(t)$$

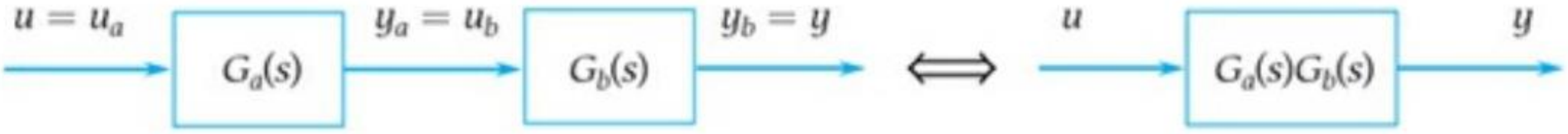
come l'ingresso e l'uscita del sistema complessivo, è immediato ricavare che

$$Y(s) = G_b(s)Y_a(s) = G_b(s)G_a(s)U(s)$$

Dunque la funzione di trasferimento complessiva risulta

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_a(s)G_b(s)$$

ovvero è pari al prodotto delle funzioni di trasferimento dei singoli sottosistemi. La regola espressa dall'ultima equazione è ovviamente generalizzabile al caso in cui i sistemi connessi in serie siano in numero maggiore di due.



Sistemi in serie.

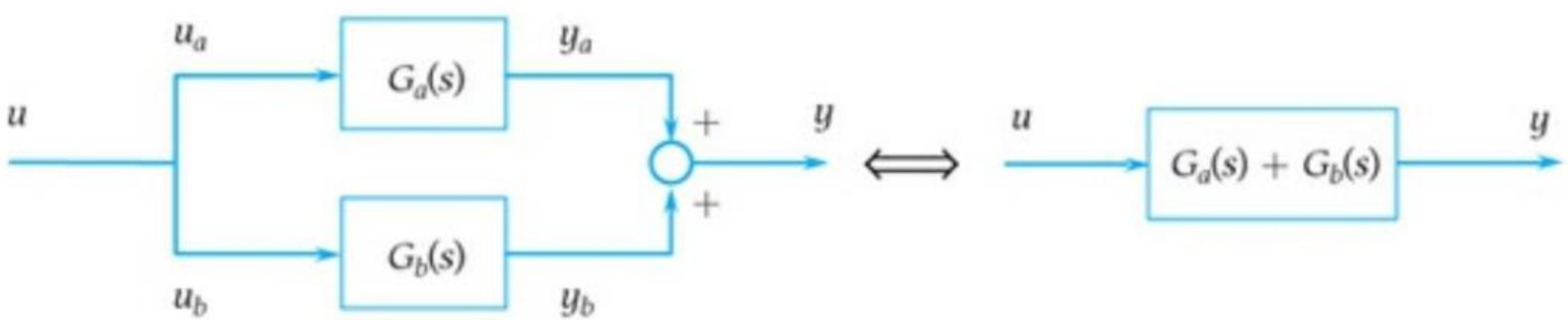
Sistemi in parallelo – I sistemi

$$Y_a(s) = G_a(s)U_a(s)$$

$$Y_b(s) = G_b(s)U_b(s)$$

si dicono connessi *in parallelo* (si veda la figura) se hanno lo stesso ingresso, che si assume anche come ingresso del sistema complessivo, mentre le loro uscite si sommano per generare l'uscita del sistema complessivo. Poiché è immediato verificare che

$$Y(s) = Y_a(s) + Y_b(s) = G_a(s)U_a(s) + G_b(s)U_b(s) = (G_a(s) + G_b(s))U(s)$$

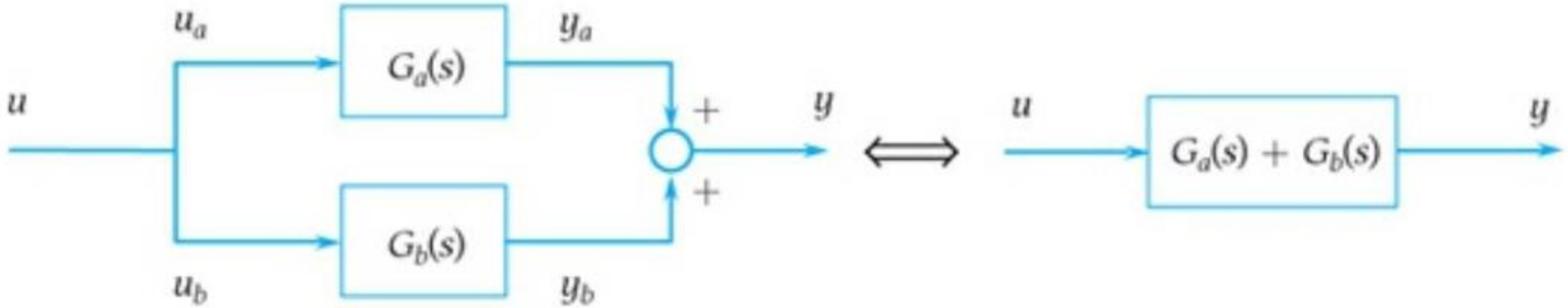


Sistemi in parallelo.

la funzione di trasferimento complessiva risulta

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = G_a(s) + G_b(s)$$

ovvero è pari alla somma delle funzioni di trasferimento dei singoli sottosistemi. È ovvio che, nel caso in cui i segni associati alle variabili y_a e y_b entranti nel nodo sommatore della figura non siano entrambi positivi, la formula precedente va opportunamente modificata considerando la somma algebrica delle funzioni di trasferimento invece della semplice somma aritmetica. Altrettanto banale è la generalizzazione del risultato trovato al caso in cui i sistemi connessi in parallelo siano più di due.



Sistemi in parallelo.

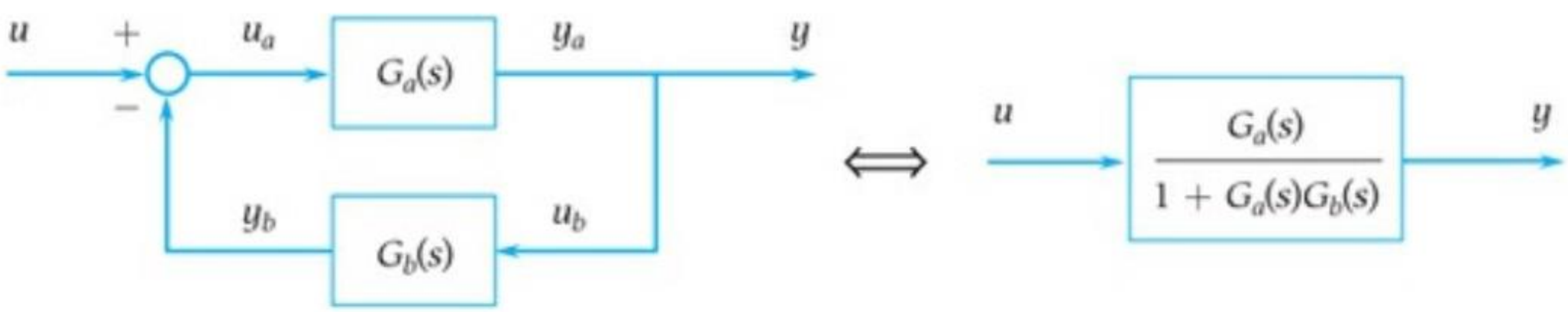
Sistemi in retroazione – Quando i sistemi

$$Y_a(s) = G_a(s)U_a(s)$$

$$Y_b(s) = G_b(s)U_b(s)$$

sono collegati come nella figura essi si dicono connessi in *retroazione* e costituiscono un sistema *in anello chiuso* o *retroazionato*. Si ricava

$$Y(s) = G_a(s)(U(s) - Y_b(s)) = G_a(s)(U(s) - G_b(s)Y(s))$$



Sistemi in retroazione negativa.

ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE
Schemi a blocchi – Regole di elaborazione

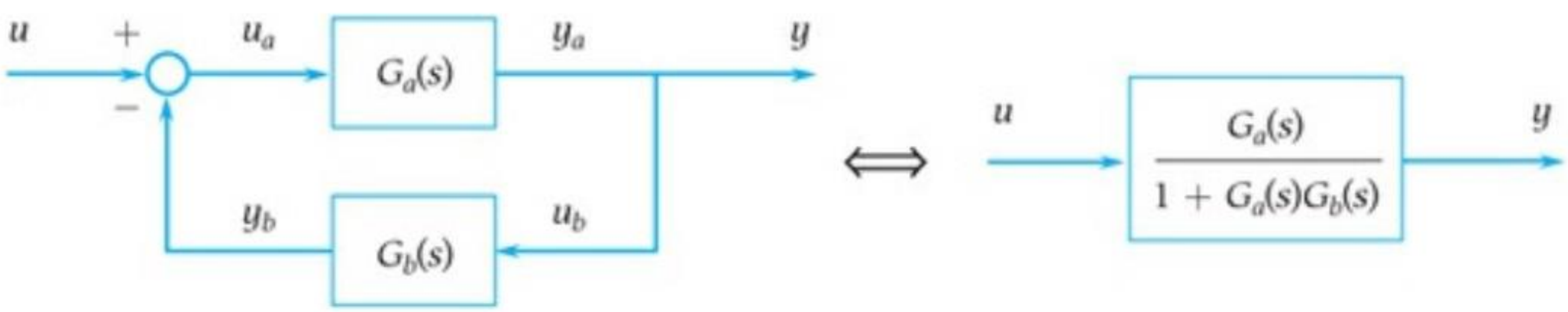
La funzione di trasferimento complessiva pertanto risulta

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_a(s)}{1 + G_a(s)G_b(s)}$$

ovvero è pari al rapporto tra la funzione di trasferimento del sottosistema che appare lungo la linea di andata tra u e y e la somma tra 1 e la cosiddetta *funzione di trasferimento d'anello*

$$L(s) = G_a(s)G_b(s)$$

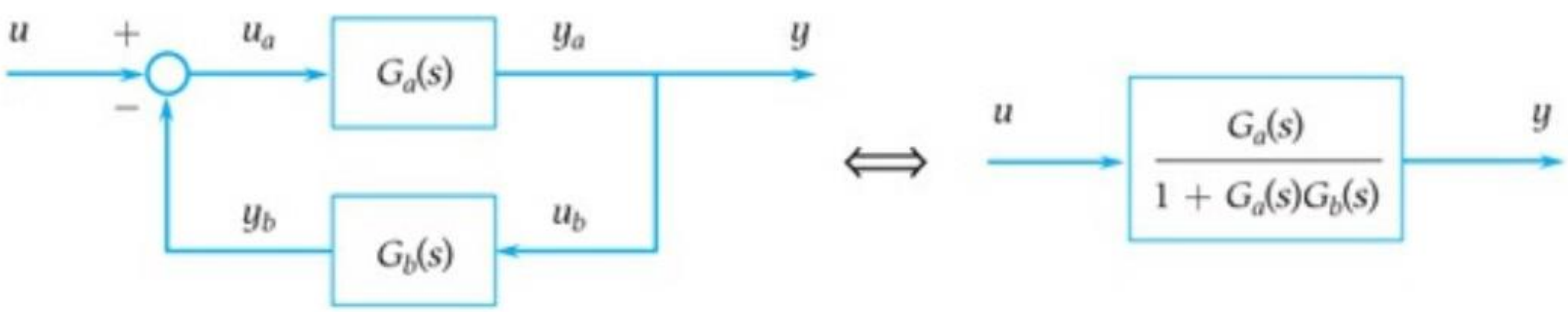
definita come prodotto delle funzioni di trasferimento dei due sottosistemi presenti lungo l'anello della figura.



Sistemi in retroazione negativa.

Schemi a blocchi – Regole di elaborazione

La configurazione descritta nella figura, di grande importanza nelle applicazioni, viene indicata con il termine di *retroazione negativa*, e quest'ultimo aggettivo fa riferimento al fatto che la variabile y_b entra nel nodo sommatore della figura con il segno meno.



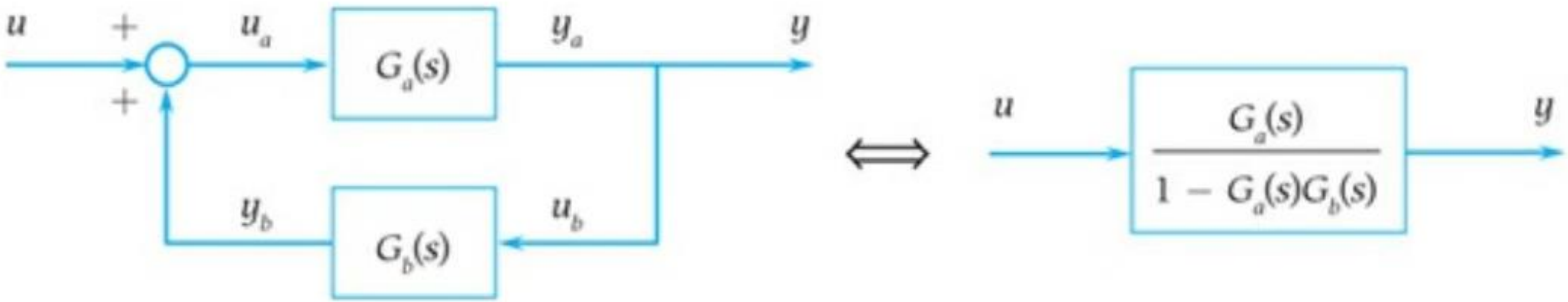
Sistemi in retroazione negativa.

ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE
Schemi a blocchi – Regole di elaborazione

Nel caso della connessione in *retroazione positiva*, rappresentata nella figura, è facile verificare che la funzione di trasferimento del sistema è

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_a(s)}{1 - G_a(s)G_b(s)}$$

pari al rapporto tra la funzione di trasferimento del sottosistema in andata tra u e y e la differenza tra 1 e la funzione di trasferimento d'anello.



Sistemi in retroazione positiva.

Riferimenti Bibliografici

[1] Bolzern, P., Scattolini, R., Schiavoni, N. (2015). Fondamenti di controlli automatici. McGraw-Hill Education. ISBN: 978-88-386-6882-1