CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

Spazi di probabilità – Fenomeni deterministici e casuali

Se una pallina cade siamo in grado di dire istante per istante quale sarà la sua posizione e, più in generale, dato un sistema meccanico è sempre possibile teoricamente, se si conoscono le condizioni iniziali, risolvere le equazioni del moto e dire quale sarà lo stato del sistema ad un assegnato tempo *t*.

Se invece viene lanciata una moneta non c'è modo di prevedere su quale faccia cadrà, il che si esprime dicendo che questo esperimento è aleatorio (o casuale). Ciò però non significa che in un esperimento casuale non si possa dire niente del risultato (esito): se si estrae una pallina da un'urna contenente 999 palline bianche e 1 rossa, è chiaro che ci si aspetta di ottenere come risultato una pallina bianca e che si considera l'estrazione della pallina rossa come un fatto piuttosto eccezionale.

Esempio: un'urna contiene sei palline numerate da 1 a 6 (identiche). Una pallina viene estratta a caso e se ne guarda il numero. I possibili risultati di questa operazione sono i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6. Dire qual è la probabilità di ottenere 1, ad esempio, significa dare una valutazione di quanto facilmente il risultato possa essere 1. Talvolta però si è interessati alla probabilità di eventi più complessi, come la probabilità di ottenere un numero dispari oppure un numero minore o uguale a 4.

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ
Spazi di probabilità – Fenomeni deterministici e casuali

Se indichiamo con

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

l'insieme dei possibili risultati, possiamo far corrispondere ad ogni evento un sottoinsieme di Ω. Ad esempio l'evento «esce un numero dispari» corrisponderà al sottoinsieme $\{1, 3, 5\}$ mentre l'evento «esce un numero minore o uguale a 4» corrisponderà al sottoinsieme $\{1, 2, 3, 4\}$.

Questa identificazione tra eventi e sottoinsiemi di Ω permette di trasportare agli eventi le operazioni di unione ($\cup$), intersezione ($\cap$) e passaggio al complementare.

Il significato intuitivo di queste operazioni riferite agli eventi è: se A e B sono sottoinsiemi di Ω corrispondenti a due eventi, allora

- $A \cap B$ corrisponderà all'evento: «i due eventi associati ad A e B si verificano entrambi»;
- $A \cup B$ corrisponderà all'evento: «uno almeno dei due eventi si verifica»;
- A^C corrisponderà all'evento: «l'evento associato ad A non si verifica».

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

Spazi di probabilità – Fenomeni deterministici e casuali

In questa identificazione, Ω sarà «l'evento certo», cioè quello che si verifica certamente, mentre $\emptyset$ sarà «l'evento impossibile», quello che certamente non si verifica.

Una valutazione di probabilità sarà un'applicazione P che ad ogni evento (ovvero ad ogni sottoinsieme di Ω) associa un numero reale e vorremo che questo numero sia tanto più grande quanto più l'evento è probabile. Sarà ragionevole richiedere che P goda di un certo numero di proprietà, ad esempio che se A e B sono eventi disgiunti ($A \cap B = \emptyset$) allora

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ
Spazi di probabilità – Spazio di probabilità

Come visto nell'esempio mostrato sulle slide precedenti, nello studio di un fenomeno casuale siamo sempre in presenza di

a) un insieme Ω (l'insieme dei possibili risultati);

b) una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di Ω tale che

- b1) se $A, B \in \mathcal{A}$ allora $A \cup B \in \mathcal{A}$;
- b2) se $A, B \in \mathcal{A}$ allora $A \cap B \in \mathcal{A}$;
- b3) se $A \in \mathcal{A}$ allora $A^C \in \mathcal{A}$.

Da b1) si ricava che se $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ allora $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ e analogamente da b2) se $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ allora la loro intersezione è ancora in $\mathcal{A}$.

Definizione: una famiglia $\mathcal{A}$ di parti di un insieme Ω si dice una σ-algebra (o tribù) se

- *i)* $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$.
- *ii)* Se $A \in \mathcal{A}$ allora $A^C \in \mathcal{A}$.
- *iii)* Se $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ allora
  - *iiia)* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$
  - *iiib)* $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

Spazi di probabilità – Spazio di probabilità

Definizione: sia Ω un insieme, $\mathcal{A}$ una σ-algebra di parti di Ω. Una probabilità P è un'applicazione P: $\mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ ($\mathbb{R}^+$ comprende lo 0) tale che

1) P(Ω) = 1.
2) Se $\{A_n\}_n$ è una successione di elementi di $\mathcal{A}$ a due a due disgiunti, allora (σ-additività)

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

Definizione: chiameremo spazio di probabilità una terna (Ω, $\mathcal{A}$, P) dove

Ω è un insieme;

$\mathcal{A}$ è una σ-algebra di parti di Ω;

P è una probabilità su $\mathcal{A}$.

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ
Spazi di probabilità – Spazio di probabilità

Gli spazi di probabilità sono dei modelli matematici di fenomeni non deterministici. Affrontando un problema concreto il primo passo consisterà nella costruzione di uno spazio di probabilità adeguato. Questa prima operazione (modellizzazione) viene effettuata basandosi su considerazioni empiriche e soggettive, tenendo conto della natura del problema. Ciò significa che in generale, dato un fenomeno aleatorio, non c'è uno spazio di probabilità privilegiato che lo descriva ed è anzi possibile che persone diverse scelgano di studiarlo mediante spazi di probabilità differenti.

Ad esempio, nel caso dell'esempio dell'urna è ragionevole, sulla base della discussione fatta, considerare lo spazio di probabilità dato da

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ (tutte le parti di Ω)

Resta da determinare la probabilità P. Ma per la natura del problema, se nell'estrazione non c'è modo di distinguere le palline, è ragionevole supporre che i possibili risultati si verifichino tutti con uguale probabilità, cioè che sia

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = p$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

Spazi di probabilità – Spazio di probabilità

Il numero p risulta quindi determinato dalla relazione

$1=P(\{\Omega\}) = P(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} \cup \{5\} \cup \{6\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) +$
$+ P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\})=6p$

cioè $p = \frac{1}{6}$. Siamo ora in grado di calcolare la probabilità di tutti gli eventi. Ad esempio, se $A=\{1, 3, 5\}$ allora A si può scrivere come unione disgiunta $\{1\} \cup \{3\} \cup \cup\{5\}$ e dunque

$$P(A) = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) = \frac{1}{2}$$

e più in generale per un evento $A \subset \Omega$ sarà

$$P(A) = \frac{\#A}{6} = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

dove con il simbolo $\#A$ indichiamo la cardinalità dell'insieme A .

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

Spazi di probabilità – Spazi di probabilità uniformi

Una situazione nella quale è facile costruire uno spazio di probabilità ragionevole che descriva un dato fenomeno aleatorio si presenta quando, per la natura del problema (come nell'esempio dell'urna), si può supporre che tutti i possibili risultati abbiano la stessa probabilità di verificarsi.

Sia Ω un insieme di cardinalità finita. Una distribuzione di probabilità uniforme su Ω è una probabilità P tale che $P(\{\omega\}) = p$, dove $\omega \in \Omega$ e p è un numero che non dipende da ω. Dalla relazione

$$1 = P(\{\Omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = p \cdot \#\Omega$$

si ricava che $P(\{\omega\}) = p = \frac{1}{\#\Omega}$. Segue che se poniamo per ogni $A \subset \Omega$

$$P(A) = p \cdot \#A = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

allora P è una probabilità su $\mathcal{P}(\Omega)$ ed è anzi l'unica che assegna a tutti gli eventi della forma $\{\omega\}$ la stessa probabilità.

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

Spazi di probabilità – Spazi di probabilità uniformi

$$\mathrm{P}(A) = p \cdot \#A = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

In questa relazione ritroviamo una definizione popolare di probabilità: la probabilità di un evento è il rapporto tra il numero di casi favorevoli ($\#A$) e il numero di casi possibili ($\#\Omega$). Attenzione però: questa relazione vale solo quando la natura del fenomeno è tale che si possa supporre che tutti i possibili risultati siano equiprobabili.

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ
Spazi di probabilità – Proprietà

Vediamo ora alcune proprietà generali di uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

In base alla definizione data di σ-algebra, se $A \in \mathcal{A}$ allora $A^C \in \mathcal{A}$ e si ha

$$A \cup A^C = \Omega$$

Dunque se $B \in \mathcal{A}$ abbiamo

$$B = B \cap (A \cup A^C) = (B \cap A) \cup (B \cap A^C)$$

Inoltre gli eventi $B \cap A$ e $B \cap A^C$ sono disgiunti. Quindi

Proprietà 1: $$P(B) = P((B \cap A) \cup (B \cap A^C)) = P(B \cap A) + P(B \cap A^C)$$

Dalla Proprietà 1 (scegliendo $B = \Omega$), segue che se $A \in \mathcal{A}$ allora

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ
Spazi di probabilità – Proprietà

Dalla Proprietà 1 segue che se $A \subset B$ allora $P(A) \leq P(B)$. Dalla Proprietà 1 si ha infatti che

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A^C) = P(A) + P(B \cap A^C) \geq P(A)$$

Vogliamo calcolare ora la probabilità dell'unione di più eventi (non necessariamente disgiunti). Se A e B sono due eventi allora

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap A^C)$$

perché A e $B \cap A^C$ sono disgiunti e la loro unione è $A \cup B$. Infatti

$$A \cup (B \cap A^C) = (A \cup B) \cap (A \cup A^C) = (A \cup B) \cap \boldsymbol{\Omega} = A \cup B$$

D'altra parte, per la Proprietà 1 si ha che $P(B \cap A^C) = P(B) - P(B \cap A)$ e quindi

Proprietà 2: $\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ
Spazi di probabilità – Probabilità condizionata

Sia $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ uno spazio di probabilità.

Definizione: siano $A, B \in \mathcal{A}$ con $\mathrm{P}(A) > 0$. Si chiama probabilità condizionata di B rispetto ad A la quantità

$$\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

Intuitivamente la probabilità condizionata $\mathrm{P}(B \mid A)$ è la probabilità che B si verifichi sapendo che A si è verificato (è detta anche probabilità a posteriori).

Esempio: si giocano alla roulette i numeri 3, 13, 22. Poiché i possibili risultati sono 37 (i numeri da 0 a 36) ed è naturale considerare la distribuzione uniforme, la probabilità di vincere è 3/37. Se però veniamo a sapere che il gioco è truccato in modo che esca un numero dispari, qual è ora la probabilità di vincere?
Data la definizione di probabilità condizionata, possiamo porre
$B = \{3, 13, 22\}$ e $A = \{1, 3, 5, \ldots, 35\}$

$$\mathrm{P}(B \mid A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{2/37}{18/37} = \frac{1}{9}$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ
Spazi di probabilità – Probabilità condizionata

Esempio: una popolazione si compone per il 40% di fumatori (F) e per il 60% di non fumatori (N). Si sa che il 25% dei fumatori ed il 7% dei non fumatori sono affetti da una forma di malattia respiratoria cronica (M). Qual è la probabilità che un individuo scelto a caso sia affetto dalla malattia?

Se $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ è uno spazio di probabilità che descrive questa situazione, $\mathcal{A}$ dovrà contenere gli eventi

F : l'individuo prescelto è fumatore

N : l'individuo prescelto è non fumatore

M : l'individuo prescelto è affetto dalla malattia

Inoltre dovrà essere

$$\mathrm{P}(F) = 0.4 \qquad \mathrm{P}(N) = 0.6$$

$$\mathrm{P}(M \mid F) = 0.25 \qquad \mathrm{P}(M \mid N) = 0.07$$

Quindi $\mathrm{P}(M) = \mathrm{P}(M \cap F) + \mathrm{P}(M \cap N) = \mathrm{P}(F)\,\mathrm{P}(M \mid F) + \mathrm{P}(N)\,\mathrm{P}(M \mid N) = 0.142$

Proprietà 1

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ
Spazi di probabilità – Probabilità condizionata

Siano $A_1, \ldots, A_n$ eventi disgiunti tali che $A_1 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$ (il che si esprime anche dicendo che $A_1, \ldots, A_n$ costituisce una partizione di Ω). Vale allora la formula di Bayes

$$\mathrm{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A_i)\,\mathrm{P}(B \mid A_i)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(A_i)\,\mathrm{P}(B \mid A_i)}{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k)\,\mathrm{P}(B \mid A_k)}$$

Tale formula è verificata perché

$$\mathrm{P}(A_i \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A_i \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$$

$$\mathrm{P}(A_i \cap B) = \mathrm{P}(A_i)\,\mathrm{P}(B \mid A_i)$$

e inoltre, poiché gli eventi $A_1 \cap B, \ldots, A_n \cap B$ sono disgiunti e la loro unione è B,

$$\mathrm{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k \cap B) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k)\,\mathrm{P}(B \mid A_k)$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ
Spazi di probabilità – Probabilità condizionata

Continuazione dell’esempio: qual è la probabilità che una persona affetta dalla malattia respiratoria sia un fumatore?

La formula di Bayes applicata alla partizione *F*, *N* dà immediatamente

$$\mathrm{P}(F \mid M) = \frac{\mathrm{P}(M \mid F)\,\mathrm{P}(F)}{\mathrm{P}(M)} = 0.704$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ
Variabili aleatorie

Nei problemi di calcolo delle probabilità si è spesso condotti a considerare delle quantità che sono funzioni del risultato di un fenomeno casuale.

Definizione: dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ si dice variabile aleatoria un' applicazione $X: \Omega \to \mathbb{R}$ tale che per ogni $t \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{\omega; X(\omega) \leq t\}$ sia in $\mathcal{A}$.

Una variabile aleatoria (v.a.) è dunque una funzione di ω tale che si possa calcolare $\mathrm{P}\{\omega;\ X(\omega) \leq t\}$, cioè tale che abbia un senso calcolare la probabilità che X prenda valori più piccoli di t.

Più in generale è fondamentale per le v.a. il calcolo di probabilità del tipo $\mathrm{P}\{\omega; X(\omega) \in B\}$ dove B è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Siamo dunque condotti a studiare l' applicazione

$$B \to \mathrm{P}\{\omega; X(\omega) \in B\}$$

che ad ogni sottoinsieme $B \subset \mathbb{R}$ associa la probabilità che X prenda valori appartenenti a B.

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

Variabili aleatorie

Per semplicità di notazione nel seguito si scriverà $\{X \leq t\}$ invece di $\{\omega; X(\omega) \leq t\}$ e $\{X \in B\}$ invece di $\{\omega; X(\omega) \in B\}$.

Nello studio delle v.a. si possono considerare separatamente due casi: quello in cui la v.a. X può prendere al più una infinità numerabile di valori (esempio: ammontare del capitale dopo un numero definito di partite alla roulette) e quello in cui i valori possibili sono tutto $\mathbb{R}$ o un suo intervallo (esempio: studio del primo istante in cui un componente elettronico smette di funzionare).

Nel primo caso si parla di v.a. discrete mentre nel secondo caso si parla di v.a. continue.

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ
Variabili aleatorie continue

Il fatto che $\{X \leq t\}$ sia un evento implica che ha senso calcolare la probabilità $P\{X \leq t\}$. Si può definire la funzione di ripartizione (detta anche funzione di distribuzione)

$$F(t) = P\{X \leq t\}$$

Quindi se si conosce la funzione di ripartizione di una v.a. allora si conosce anche la quantità

$$P\{a < X \leq b\} = P\{X \leq b\} - P\{X \leq a\} = F(b) - F(a)$$

Proprietà della funzione di ripartizione di una v.a. :

1) Per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha $0 \leq F(t) \leq 1$.
2) La funzione F è una funzione non decrescente.
3) $\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0, \lim_{t \to +\infty} F(t) = 1$
4) F è continua a destra.

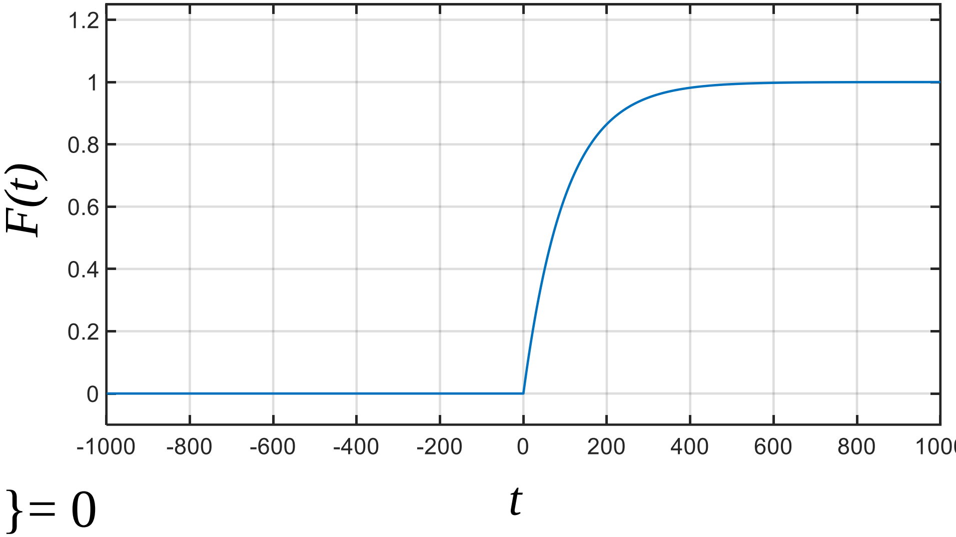
CALCOLO DELLE PROBABILITÀ
Variabili aleatorie continue

Una v.a. X è continua se la sua funzione di ripartizione F è una funzione continua ovvero, che è lo stesso, se vale

$$\mathrm{P}\{X = x\} = 0 \text{ qualunque sia } x \in \mathbb{R}$$

Per una v.a. X continua, le seguenti quantità sono uguali

$$\mathrm{P}\{a < X < b\}$$
$$\mathrm{P}\{a \le X < b\}$$
$$\mathrm{P}\{a < X \le b\}$$
$$\mathrm{P}\{a \le X \le b\}$$



Infatti, ad esempio

$$\mathrm{P}\{a \le X < b\} - \mathrm{P}\{a < X < b\} = \mathrm{P}\{X = a\} = 0$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ
Variabili aleatorie continue

Definizione: una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice una densità se e solo se $f \geq 0$, f è integrabile su $\mathbb{R}$ e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

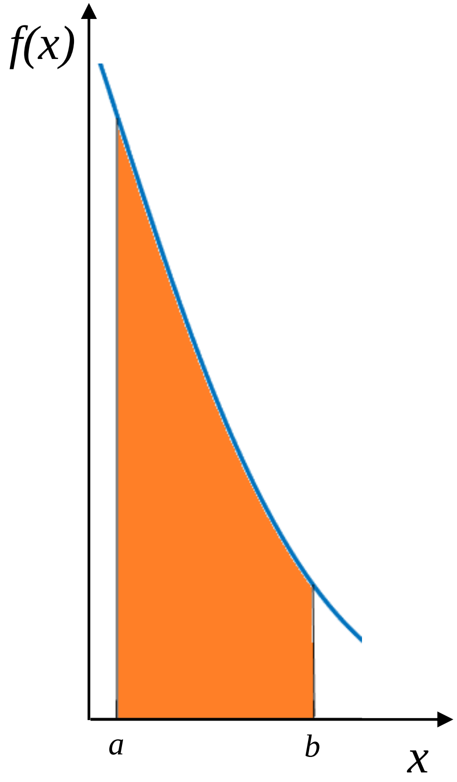
Sia X una v.a. continua, F la sua funzione di ripartizione e sia f una densità. Diremo che X ha densità f se

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

ovvero, che è equivalente, se

$$\mathrm{P}\{a \leq X \leq b\} = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(t)dt$$

Considerando l'espressione precedente, il calcolo della probabilità di eventi del tipo $\{a \leq X \leq b\}$ si riconduce al calcolo di un integrale.



CALCOLO DELLE PROBABILITÀ
Variabili aleatorie continue

Si consideri una v.a. continua *X* di densità

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

σ numero reale positivo

μ numero reale

Si dice che una densità di probabilità su $\mathbb{R}$ è normale (o gaussiana) di parametri μ e σ^2 se è della forma riportata nell'espressione precedente.

σ deviazione standard della v.a. *X*

μ valor medio (o valore atteso) della v.a. *X*

σ^2 varianza della v.a. *X*

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

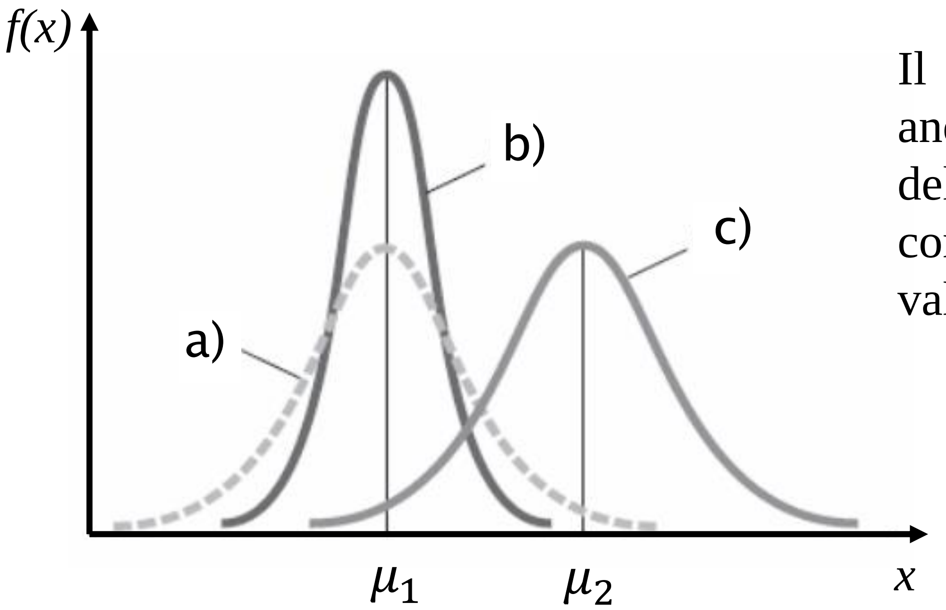
Variabili aleatorie continue

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

σ deviazione standard della v.a.

μ valor medio (o valore atteso) della v.a.

σ^2 varianza della v.a.



Il grafico di una densità normale ha un andamento a campana. μ è il punto di massimo della densità; inoltre a valori di σ^2 piccoli corrispondono campane strette e alte mentre a valori grandi campane aperte e appiattite.

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ
Processi stocastici

Si chiama *processo stocastico* una famiglia $\{X(t)\}_{t\in T}$ di v.a. definite su uno stesso spazio di probabilità, dove t varia in un sottoinsieme $T \subset \mathbb{R}^+$.

I processi stocastici sono modelli matematici di fenomeni aleatori che si evolvono nel tempo. Si possono considerare fenomeni aleatori per i quali un modello matematico adeguato sia un processo stocastico il cui insieme dei tempi T sia continuo oppure fenomeni aleatori per i quali l'insieme dei tempi è discreto, cioè $\mathbb{N}$ o un suo sottoinsieme.

Riferimenti Bibliografici

[1] Baldi, P. (1998). Calcolo delle probabilità e statistica (seconda edizione). McGraw Hill Education. ISBN: 9788838607370