ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE

Problemi e sistemi di controllo – Ruolo della modellistica matematica

In base alla discussione e agli esempi menzionati nelle slide precedenti, risulta chiaro che i contesti nei quali i problemi di controllo si possono porre sono svariatissimi, sia nell'ingegneria tradizionale, sia al di fuori di essa, così come diverse possono essere le tecnologie di realizzazione dei controllori. Perciò è naturale chiedersi se e come sia possibile trattare in maniera unitaria una casistica così differenziata, che spazia dalla fisica, alla chimica, all'elettronica, fino all'economia e addirittura alle scienze sociali. In altri termini è lecito domandarsi se si possa istituire e su che cosa si possa fondare una *scienza del controllo*. Lo strumento chiave per rispondere affermativamente a tali quesiti sta nell'uso estensivo dei *modelli matematici*, le cui proprietà generali sono studiate dalla *teoria dei sistemi*.

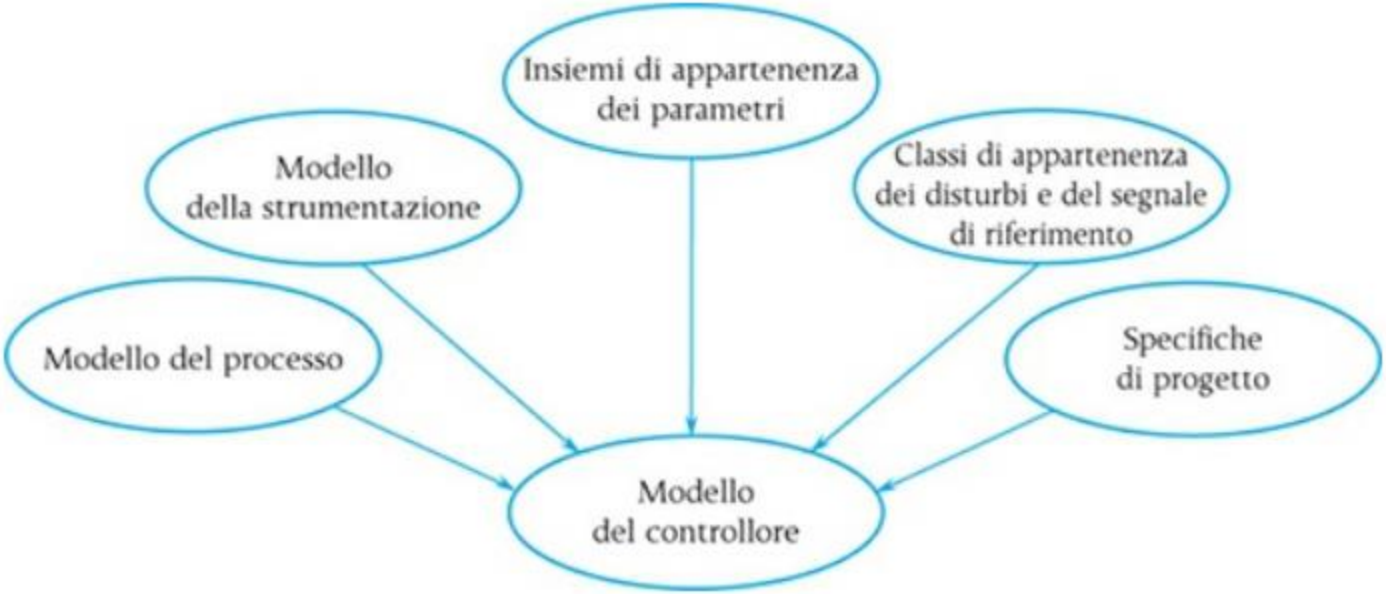
Per affrontare in modo razionale un problema di controllo è molto conveniente darne innanzitutto una riformulazione in termini puramente matematici. È necessario anche disporre di una descrizione matematica degli elementi che compaiono nel sistema di controllo. Per il processo, i trasduttori e gli attuatori si devono quindi ricavare opportuni modelli matematici, costituiti da insiemi di relazioni che li descrivano: essi, sostanzialmente, sono sistemi di equazioni algebriche, differenziali,

Problemi e sistemi di controllo – Ruolo della modellistica matematica

o alle differenze, definite sulle variabili di interconnessione dei singoli componenti. Procedendo in questa maniera, i problemi di controllo, posti originariamente «nel mondo della realtà», vengono quindi riformulati «nel mondo della matematica», dove è facile riconoscere profonde similitudini formali tra problemi corrispondenti a realtà molto diverse tra loro. Si può allora istituire una *teoria del controllo*, detta anche *automatica*, che serve ad affrontare in termini matematici astratti tutti questi problemi, per pervenire alla determinazione dei modelli dei controllori. Successivamente, si procederà alla realizzazione dei controllori, cioè alla scelta e messa a punto dei componenti, per esempio elettronici, che svolgano proprio le funzioni previste dai modelli.

ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE

Problemi e sistemi di controllo – Ruolo della modellistica matematica



Problema di sintesi.

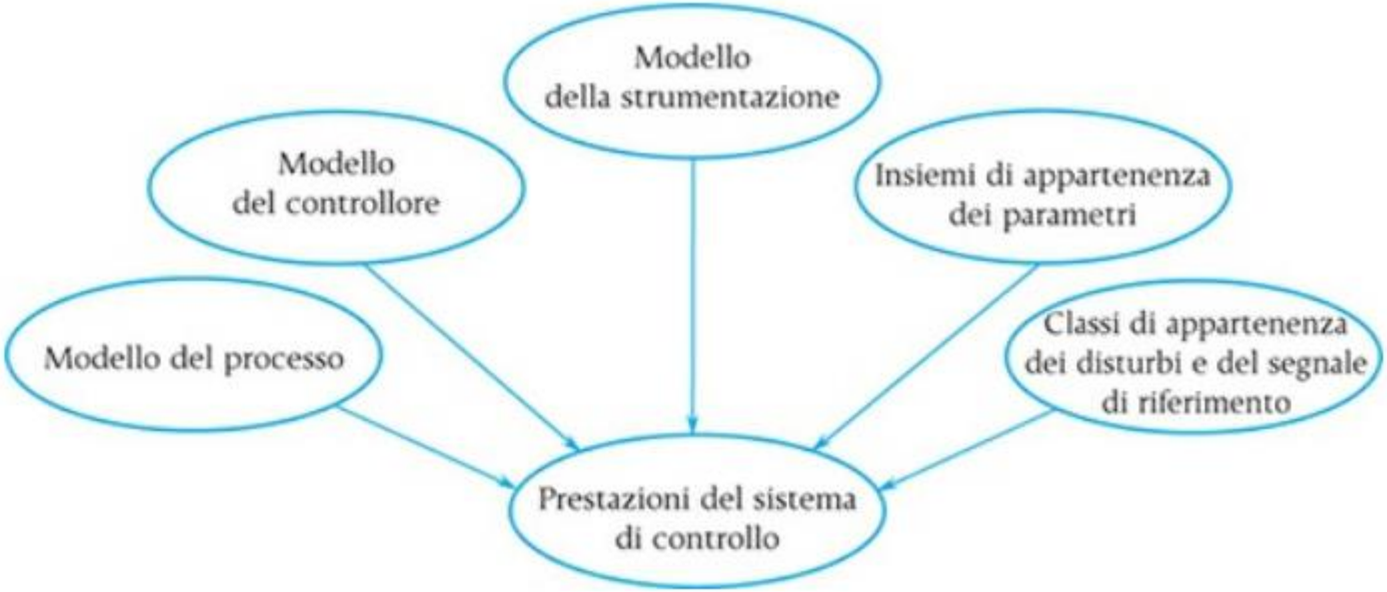
Si può dire che la soluzione di un problema di controllo consta di tre passi:

1) la riformulazione matematica del problema di controllo;
2) la determinazione del modello matematico del controllore;
3) la realizzazione del controllore.

Il secondo passo, denominato *problema di sintesi*, o *di progetto*, prescinde quindi in larga misura dalla «realtà fisica» del problema, che viene invece confinata nel primo e nel terzo (si veda la figura).

ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE

Problemi e sistemi di controllo – Ruolo della modellistica matematica



Problema di analisi.

Un *problema di analisi* nasce quando si vogliano accertare le prestazioni di un sistema di controllo completamente specificato anche per quanto riguarda il modello del controllore (si veda la figura). Ciò è praticamente indispensabile al termine di un progetto, prima di procedere alla realizzazione e all'installazione sull'impianto, per verificare che siano soddisfatte tutte le esigenze delle quali magari non si è potuto tenere conto esplicitamente. È pure molto utile durante le fasi intermedie di un progetto svolto mediante tecniche di tipo *trial-and-error*, cioè per

Problemi e sistemi di controllo – Ruolo della modellistica matematica

Problema di analisi.

successivi tentativi guidati proprio dai risultati dell'applicazione di metodi di pura analisi.

Tra le tecniche di analisi merita una segnalazione particolare la *simulazione*, che consiste nello studiare l'evoluzione temporale delle variabili del sistema di controllo risolvendo le equazioni che governano il suo comportamento, ottenute aggregando i modelli matematici dei singoli componenti. Questa operazione non può essere fatta manualmente se non in casi particolarmente semplici;

ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE

Problemi e sistemi di controllo – Ruolo della modellistica matematica

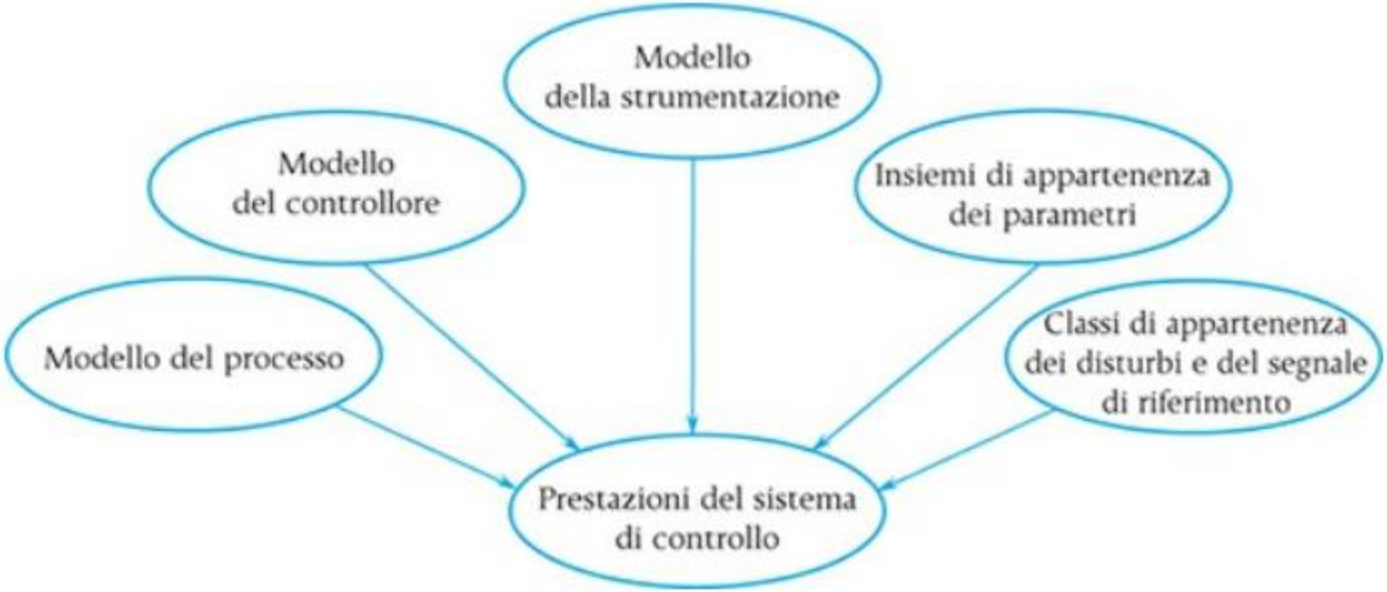
Problema di analisi.

invece, viene effettuata con l'ausilio di calcolatori digitali, capaci di affrontare il problema sfruttando le potenti tecniche del calcolo numerico: si parla perciò di *simulazione digitale*.

Vale la pena di osservare che in passato si ricorreva alla *simulazione analogica*. Essa consisteva nel realizzare un circuito elettronico il cui modello, pur di stabilire opportune corrispondenze tra le variabili, era identico a quello del sistema di controllo da studiare. Dall'andamento delle variabili elettriche si

ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE

Problemi e sistemi di controllo – Ruolo della modellistica matematica



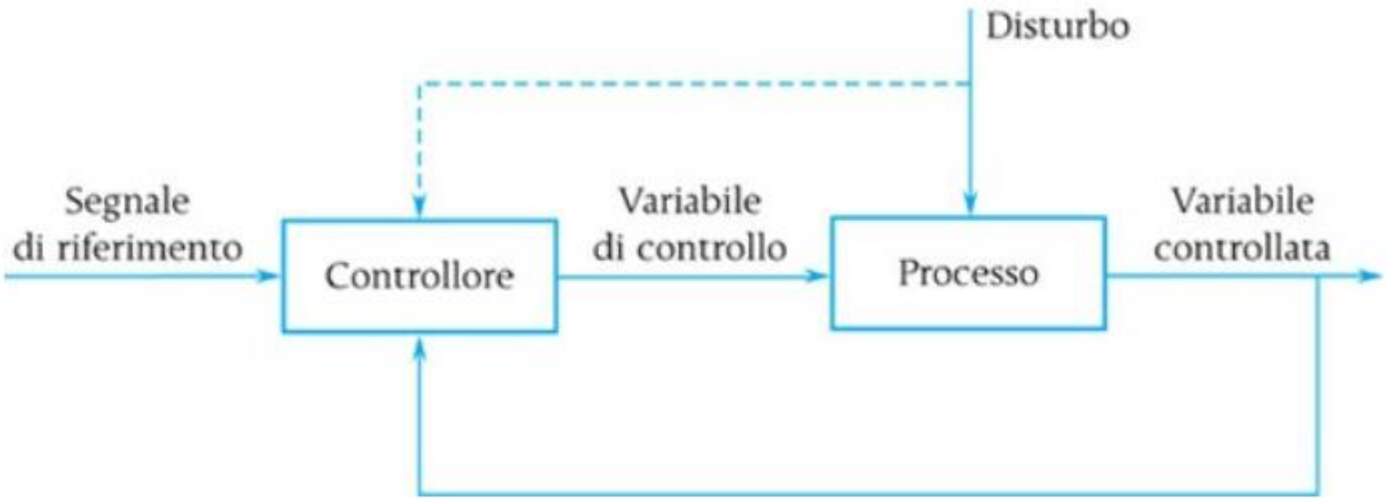
Problema di analisi.

risaliva quindi a quello delle variabili di interesse reale.

Gli elaboratori digitali odierni consentono di utilizzare nella simulazione modelli matematici molto dettagliati, e quindi complessi. Altre tecniche di analisi sono utilizzabili solo su modelli semplificati, mentre modelli ancora più semplici sono richiesti di solito dai metodi di sintesi. È quindi normale l'uso di più modelli della stessa realtà nelle varie fasi dello studio di un sistema di controllo.

Problemi e sistemi di controllo – Controllo, supervisione e automazione

I sistemi di controllo sono spesso corredati da una sorta di controllore di secondo livello che effettua operazioni di *supervisione*. Pertanto, partendo dallo schema in anello chiuso

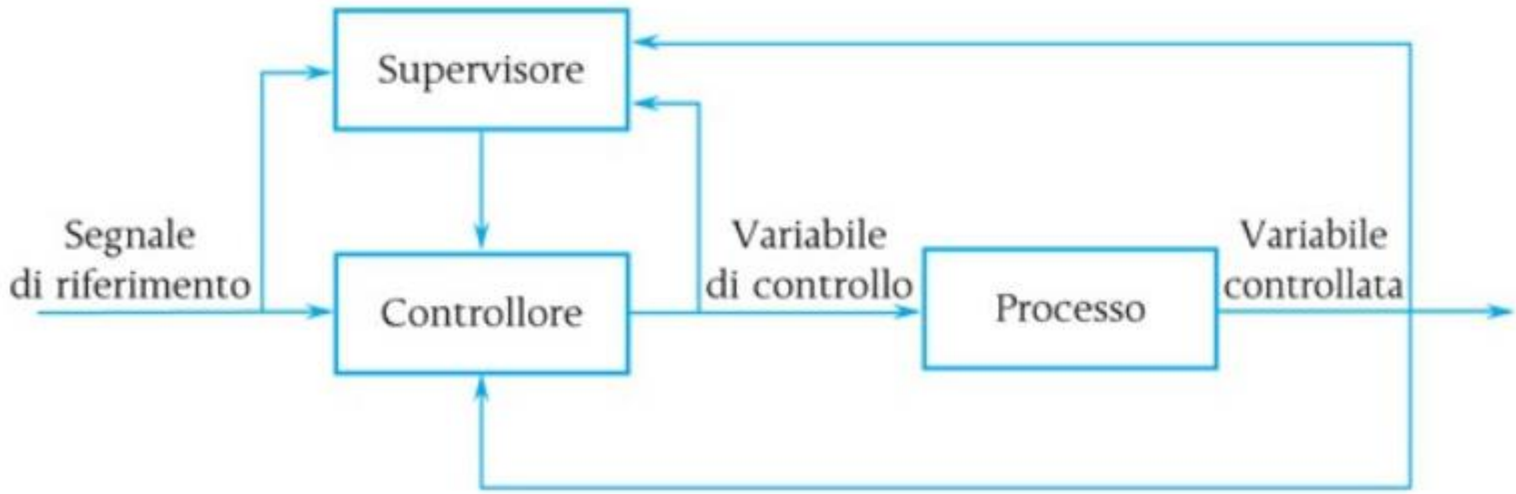


Sistema di controllo in anello chiuso.

eliminando il disturbo per motivi di semplicità si ottiene quanto rappresentato nella figura riportata nella slide seguente.

ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE

Problemi e sistemi di controllo – Controllo, supervisione e automazione



Sistema di controllo in anello chiuso con supervisione.

Parecchi e di vario genere sono i compiti svolti dal supervisore, realizzato sempre con tecnologia (elettronica) digitale. Tra questi vale la pena di segnalare innanzitutto l'elaborazione dei dati raccolti sulla variabile di controllo e su quella controllata al fine di aggiornare continuamente il modello del processo. Su questa base esso può di tanto in tanto modificare, o se si preferisce «riprogettare», il controllore di primo livello in modo automatico: si ottiene così un *controllore adattativo*. Un'altra funzione importante del supervisore consiste nella *diagnostica*, cioè nel rilevare la presenza di guasti al processo, al controllore o alla strumentazione, e gestire le situazioni di emergenza.

In realtà, almeno una parte di questi compiti piuttosto avanzati è svolta comunemente con qualche contributo da parte di operatori, ai quali il supervisore si limita a presentare i dati raccolti, magari preelaborati in modo che essi possano prendere più facilmente le decisioni del caso. Il colloquio operatore-supervisore avviene mediante le *interfacce uomo-macchina*, poste nelle *sale controllo* e costituite da schermi, allarmi, tastiere e quant'altro è necessario affinché l'operatore possa rendersi conto con la massima facilità e tempestività di quale sia la situazione del sistema di controllo, prendere le migliori decisioni del caso e comunicarle alle apparecchiature di controllo.

In un impianto industriale di grandi dimensioni i sistemi di controllo possono essere centinaia. Singoli gruppi di essi possono essere affidati a singoli supervisori i quali a loro volta sono gestiti da ulteriori elementi di coordinamento, connessi a un'unica sala controllo. Si ottiene così un *sistema di controllo a molti livelli*, in cui i livelli più elevati hanno anche la funzione di scegliere i segnali di riferimento per i livelli inferiori, su basi che, oltre che tecniche, sono anche di natura economica globale.

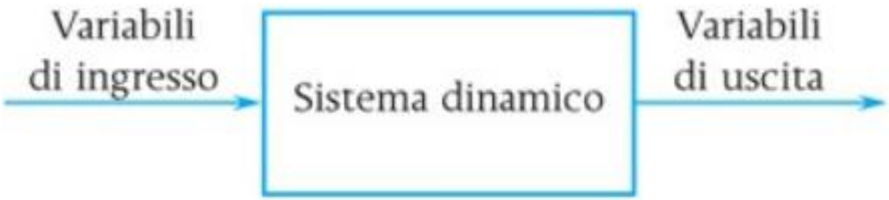
ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE

Problemi e sistemi di controllo – Controllo, supervisione e automazione

Esempio – In un moderno autoveicolo esistono, tra gli altri, i sistemi di controllo automatico della frenatura (servofreno e sistemi antibloccaggio), della sterzata (servosterzo), della trazione (cambio automatico e sistemi antislittamento) e della temperatura all'interno dell'abitacolo. Il pilota allora agisce quale controllore manuale di livello superiore (o supervisore) che assegna gli andamenti desiderati delle variabili controllate agendo, rispettivamente, sul pedale del freno, sul volante, sull'acceleratore e sulla manopola del condizionatore.

Sistemi dinamici a tempo continuo – Concetti fondamentali

Variabili di ingresso, stato e uscita – Un sistema dinamico a tempo continuo (si veda la figura) costituisce un modello matematico di un oggetto fisico il quale interagisce con il mondo circostante tramite due vettori di variabili dipendenti dal tempo, assunto reale e indicato con il simbolo t.
Le une, dette *variabili di ingresso*, rappresentano le azioni che vengono compiute sull'oggetto in esame da agenti esterni che ne influenzano il comportamento. Le altre, dette *variabili di uscita*, rappresentano quanto del comportamento dell'oggetto stesso è, per qualche ragione, di interesse. In altri termini, tra le variabili di ingresso e quelle di uscita vi è un rapporto di causa ed effetto: l'evoluzione delle seconde descrive il modo in cui l'oggetto che si sta modellando risponde alle sollecitazioni impresse con le prime.



Sistema dinamico.

Esempio 1 – Si consideri il circuito elettrico nella figura. Se si assume come variabile di ingresso la tensione v_G ai morsetti del generatore e come variabile di uscita la tensione v_{R_1} ai morsetti del primo resistore, per la legge delle tensioni si ha

$$v_{R_1}(t) = v_G(t) - v_{R_2}(t)$$

D'altra parte la legge del resistore conduce a scrivere

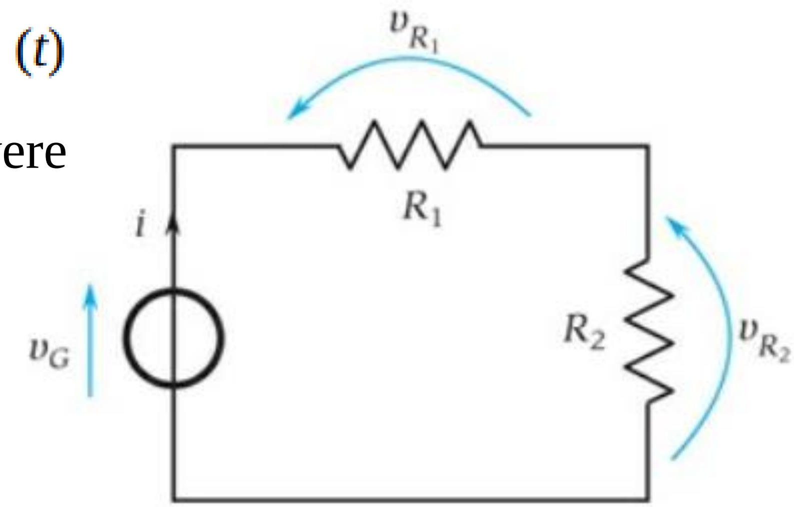
$$v_{R_1}(t) = R_1\, i(t)$$

$$v_{R_2}(t) = R_2 i(t)$$

dove i è la corrente nella maglia.

Eliminando da queste due equazioni le variabili v_{R_2} e i, si trova in definitiva

$$v_{R_1}(t) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_G(t)$$



Circuito elettrico dell'Esempio 1.

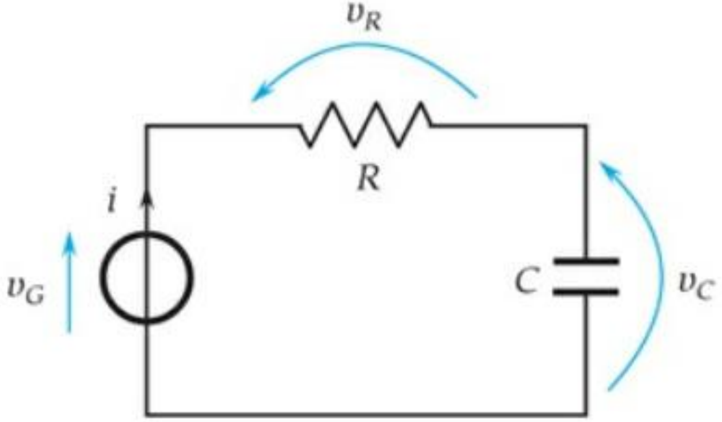
La situazione incontrata nell'esempio precedente è del tutto particolare in quanto l'equazione

$$v_{R_1}(t) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_G(t)$$

implica che la conoscenza del valore assunto in un certo istante di tempo dalla variabile di ingresso basti a determinare il valore assunto nello stesso istante di tempo dalla variabile di uscita. Nella grande maggioranza dei casi di interesse invece non è così, e la conoscenza del valore in un certo istante delle variabili di ingresso non è sufficiente a individuare il valore allo stesso istante delle variabili di uscita.

Esempio 2 – Si consideri il circuito elettrico riportato nella figura. Se si assume come variabile di ingresso la tensione v_G ai morsetti del generatore e come variabile di uscita la tensione v_R ai morsetti del resistore, per la legge delle tensioni si ha

$$v_R(t) = v_G(t) - v_C(t)$$



Circuito elettrico dell'Esempio 2.

Il valore al tempo t dell'uscita v_R, quindi, non dipende solo dal valore dell'ingresso v_G allo stesso istante di tempo, ma anche dalla situazione interna del circuito. Quest'ultima è caratterizzata dall'energia elettrica accumulata nel condensatore, che è funzione della tensione v_C ai morsetti.

Generalizzando quanto risulta dall'esempio appena trattato, si conclude allora che per descrivere compiutamente l'oggetto da modellare è spesso necessario introdurre un terzo vettore di variabili, chiamate *variabili di stato*, che descrivono la sua situazione interna.

Rappresentazione di stato – Introdotte le variabili necessarie, si può ora passare a descrivere la struttura delle equazioni che le mettono in relazione o, in altri termini, si può dare la definizione di sistema dinamico a tempo continuo. Se si indicano rispettivamente con $u \in R^m$, $x \in R^n$ e $y \in R^p$ i vettori delle variabili di ingresso, stato e uscita, e con f e g due funzioni vettoriali, un *sistema dinamico a tempo continuo* è costituito dalle equazioni

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$
$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

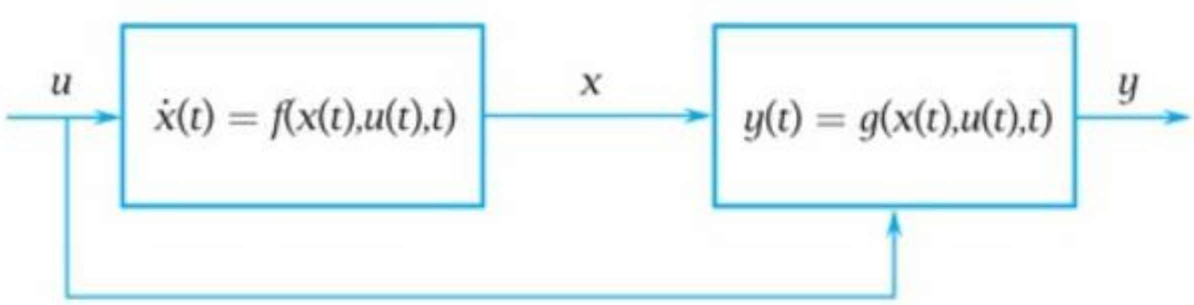
e può essere rappresentato come nella figura. Per brevità si parla anche semplicemente di *sistema*; se invece si vuole sottolineare il fatto che la variabile tempo, da cui dipendono tutte le altre variabili utilizzate, è reale, si dice più propriamente che il sistema dinamico è *a tempo continuo*, o *continuo nel tempo*. L'equazione

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

costituisce l'*equazione di stato*. L'equazione

$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

va sotto il nome di *trasformazione d'uscita*, mentre il numero n delle variabili di stato si dice *ordine* del sistema.



Sistema dinamico a tempo continuo: equazione di stato e trasformazione d'uscita.

Esempio 3 – Per il circuito elettrico dell'Esempio 2, le leggi del condensatore e del resistore portano a scrivere

$$C\dot{v}_C(t) = i(t)$$
$$v_R(t) = Ri(t)$$

dove i è la corrente nella maglia. Allora, ponendo $u = v_G$, $x = v_C$, $y = v_R$ e ricordando l'equazione

$$v_R(t) = v_G(t) - v_C(t)$$

si ottiene

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{RC}(u(t) - x(t))$$
$$y(t) = u(t) - x(t)$$

cioè un sistema dinamico di ordine $n = 1$.

ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE
Sistemi dinamici a tempo continuo – Concetti fondamentali

Il legame tra l'ingresso e l'uscita risulta quindi scisso in due parti e descritto mediante due equazioni vettoriali:

- un'equazione differenziale (l'equazione di stato), che mette in relazione con l'ingresso le variabili che descrivono la situazione interna del sistema;
- un'equazione algebrica (la trasformazione d'uscita), che consente di determinare l'uscita a uno specifico istante di tempo sulla base della conoscenza di tale situazione e dell'ingresso allo stesso istante di tempo.

Sotto opportune condizioni, l'equazione

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

definisce in modo unico l'evoluzione dello stato $x(t)$ per $t > t_0$, in corrispondenza di ogni terna costituita da un istante iniziale t_0, una funzione di ingresso $u(t)$, $t \geq t_0$, e una condizione iniziale $x(t_0) = x_{t_0}$. La funzione $x(t)$, $t \geq t_0$, si dice *movimento dello stato* del sistema. L'equazione

$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

permette invece di determinare l'evoluzione dell'uscita $y(t)$ per $t \geq t_0$, in corrispondenza della funzione di ingresso $u(t)$ e dell'andamento

dello stato $x(t)$ per $t \geq t_0$. La funzione $y(t)$, $t \geq t_0$, va sotto il nome di *movimento dell'uscita*.
La possibilità di determinare i movimenti dei sistemi dinamici è legata alla capacità di risolvere, analiticamente o numericamente, le equazioni differenziali di stato

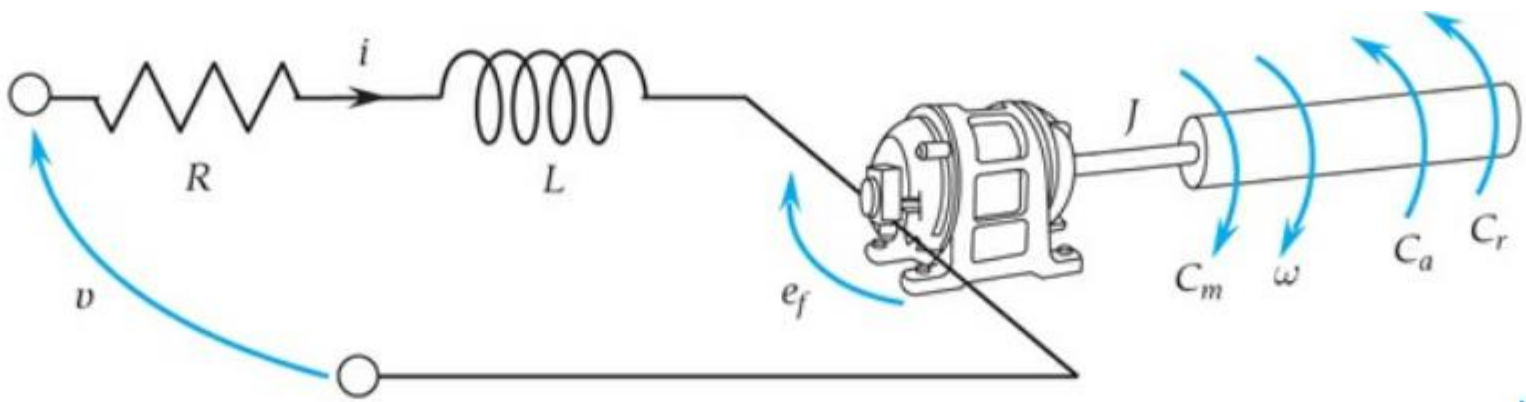
$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

in generale non lineari e a coefficienti variabili nel tempo, che li definiscono. La soluzione di tali equazioni è di solito decisamente complessa. Nel caso particolare in cui esse siano invece lineari e a coefficienti costanti, esiste una formula risolutiva esplicita molto espressiva.
Infine, conviene notare che si usa dire che le equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= g(x(t), u(t), t) \end{aligned}$$

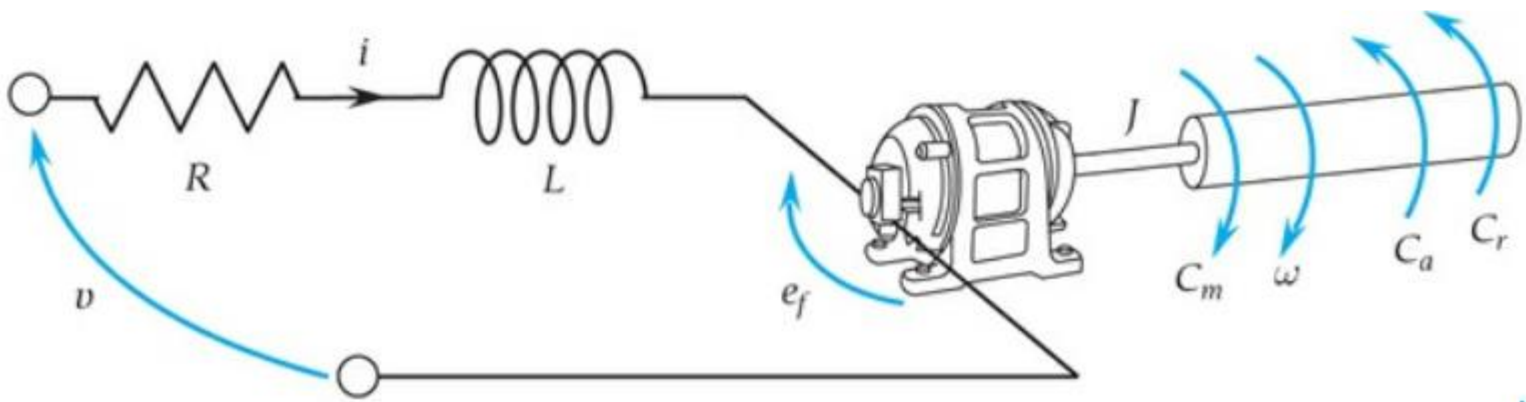
costituiscono una *rappresentazione di stato*, o *ingresso-stato-uscita*, o *interna* di un sistema dinamico a tempo continuo.

Esempio 4 – Un motore elettrico a corrente continua con eccitazione indipendente può essere schematizzato come nella figura, dove v e i rappresentano rispettivamente la tensione e la corrente nel circuito d'armatura collocato nel rotore, R ed L sono i valori di resistenza e induttanza dello stesso circuito ed e_f è la cosiddetta forza elettromotrice, che corrisponde alla tensione generata sul circuito di armatura per effetto dell'interazione con il circuito di eccitazione, disposto sullo statore. Se quest'ultimo circuito è alimentato da una tensione di eccitazione costante, si può ritenere che la forza elettromotrice sia proporzionale alla velocità di rotazione ω, ovvero $e_f = k\omega$, dove $k > 0$ è un'opportuna costante. D'altra parte, in assenza di



Motore elettrico dell'Esempio 4.

perdite energetiche nel motore, la coppia generata risulta $C_m = ki$. Questa coppia motrice, insieme alla coppia resistente C_r dovuta al carico meccanico e all'eventuale coppia di attrito C_a che si assumerà proporzionale alla velocità (ovvero $C_a = h\omega$, dove $h \geq 0$ è il coefficiente di attrito), sono responsabili della rotazione dell'albero motore, di momento di inerzia J.



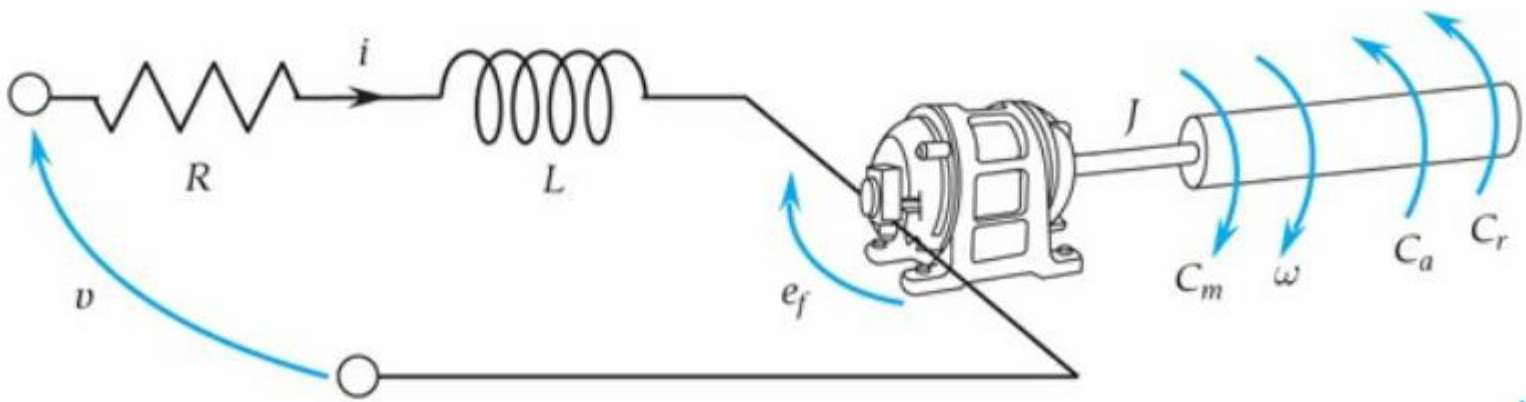
Motore elettrico dell'Esempio 4.

Utilizzando le convenzioni di segno indicate nella figura, la «parte elettrica» del motore è quindi descritta dalle equazioni

$$v(t) - e_f(t) = Ri(t) + L\dot{i}(t)$$
$$e_f(t) = kw(t)$$

mentre la «parte meccanica» è descritta da

$$J\dot{w}(t) = C_m(t) - C_r(t) - hw(t)$$
$$C_m(t) = ki(t)$$



Motore elettrico dell'Esempio 4.

Scegliendo $x_1 = y_1 = i$ e $x_2 = y_2 = w$ come variabili di stato e di uscita e denotando con $u_1 = \upsilon$ e $u_2 = C_r$ le due variabili di ingresso, il sistema è rappresentabile mediante le equazioni

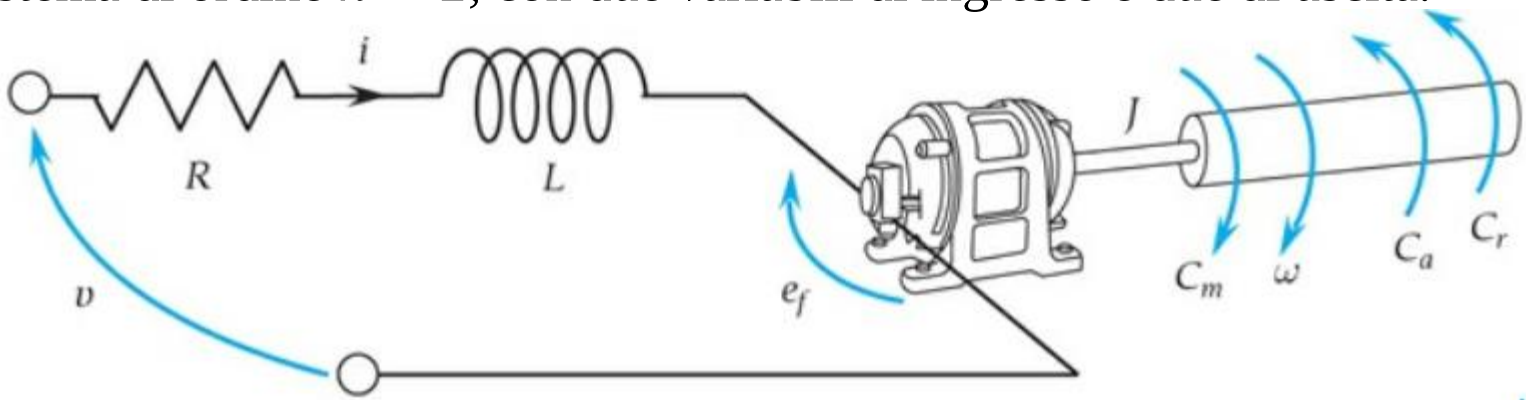
$$\dot{x}_1(t) = -\frac{R}{L}x_1(t) - \frac{k}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}u_1(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \frac{k}{J}x_1(t) - \frac{h}{J}x_2(t) - \frac{1}{J}u_2(t)$$

$$y_1(t) = x_1(t)$$

$$y_2(t) = x_2(t)$$

È quindi un sistema di ordine $n = 2$, con due variabili di ingresso e due di uscita.

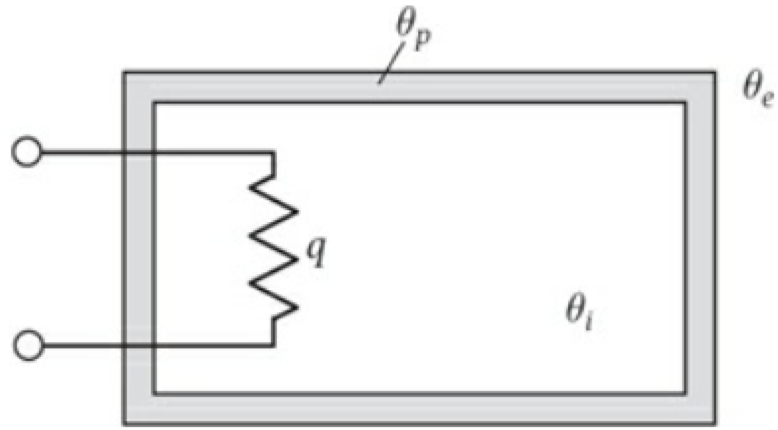


Motore elettrico dell'Esempio 4.

Esempio 5 – Per il forno rappresentato schematicamente nella figura, la temperatura interna θ_i rappresenta la variabile di uscita, mentre la temperatura esterna θ_e e la potenza q fornita all'ambiente sono le variabili di ingresso. Detti C_f la capacità termica del forno e k_{ie} il coefficiente di scambio tra l'interno e l'esterno del forno, per il principio di conservazione dell'energia si ha

$$C_f \dot{\theta}_i(t) = k_{ie}\left(\theta_e(t) - \theta_i(t)\right) + q(t)$$

Il processo è quindi descritto da un sistema dinamico del primo ordine con variabile di stato θ_i. Un modello più dettagliato si può scrivere se si trattano in maniera separata

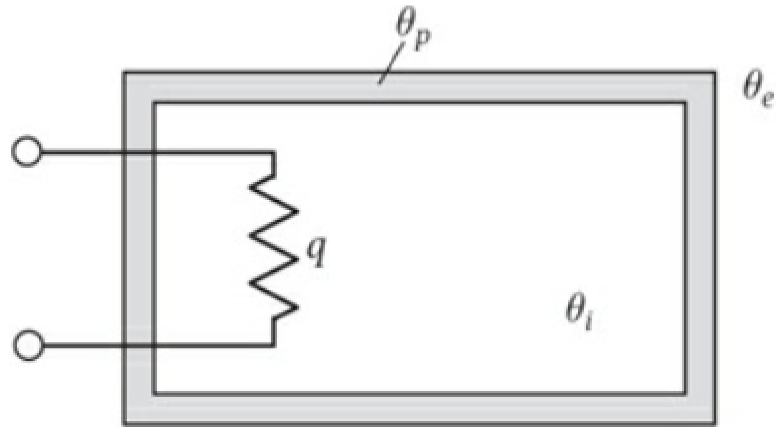


Forno dell'Esempio 5.

gli accumuli energetici nel fluido all'interno del forno e nella parete. Denotando con C_i la capacità termica del fluido, con C_p quella della parete a temperatura θ_p, con k_{ip} il coefficiente di scambio tra fluido e parete e con k_{pe} quello tra parete ed esterno si ha allora

$$C_i\dot{\theta}_i(t) = k_{ip}\left(\theta_p(t) - \theta_i(t)\right) + q(t)$$
$$C_p\dot{\theta}_p(t) = k_{pe}\left(\theta_e(t) - \theta_p(t)\right) - k_{ip}\left(\theta_p(t) - \theta_i(t)\right)$$

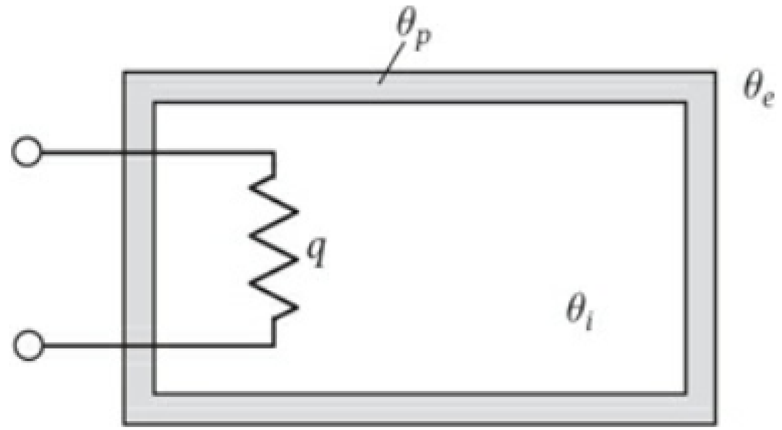
Ponendo $u_1 = q$, $u_2 = \theta_e$, $x_1 = \theta_i$, $x_2 = \theta_p$ e $y = \theta_i$ si ottengono le equazioni



Forno dell'Esempio 5.

$$\dot{x}_1(t) = \frac{k_{ip}}{C_i}\left(x_2(t) - x_1(t)\right) + \frac{1}{C_i}u_1(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = \frac{k_{pe}}{C_p}\left(u_2(t) - x_2(t)\right) - \frac{k_{ip}}{C_p}\left(x_2(t) - x_1(t)\right)$$
$$y(t) = x_1(t)$$

che costituiscono un sistema dinamico di ordine $n = 2$.



Forno dell'Esempio 5.

ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE

Sistemi dinamici a tempo continuo – Classificazione

Classificazione – I sistemi dinamici descritti dalle equazioni

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$
$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

possono essere classificati in vari modi sulla base delle proprietà delle funzioni f e g.

Sistemi monovariabili e *multivariabili (SISO* e *MIMO)* – Si dicono *monovariabili* (o *SISO*, dall'inglese *Single Input Single Output*) i sistemi dotati di una sola variabile di ingresso e di una sola variabile di uscita, cioè quelli per cui $m = p = 1$; si dicono *multivariabili* (o *MIMO*, dall'inglese *Multiple Input Multiple Output*) gli altri.
Il circuito elettrico dell'Esempio 3 è un sistema monovariabile; invece il motore dell'Esempio 4 e il forno dell'Esempio 5 sono sistemi multivariabili perché dotati di due variabili di ingresso (il primo di essi ha anche due variabili di uscita).

Sistemi propri, *strettamente propri* e *non dinamici* – Se la funzione g non dipende dall'ingresso, cioè se la trasformazione d'uscita

$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

Sistemi dinamici a tempo continuo – Classificazione

si può scrivere nella forma

$$y(t) = g(x(t), t)$$

allora il sistema si dice *strettamente proprio*, o anche *puramente dinamico*, perché l'uscita dipende dall'ingresso non direttamente, ma solo attraverso lo stato. Invece in generale il sistema si dice *proprio*.
Il circuito elettrico dell'Esempio 3 è un sistema proprio, ma non strettamente; il motore dell'Esempio 4 e il forno dell'Esempio 5 sono invece sistemi strettamente propri.
Si osservi pure che un caso particolare di sistema non strettamente proprio è quello di sistema *non dinamico*, o *statico*, per descrivere il cui comportamento non è necessario introdurre alcuna variabile di stato. In questo caso il legame ingresso-uscita è istantaneo e descritto dalla sola equazione

$$y(t) = g(u(t), t)$$

Di questo tipo è il circuito elettrico dell'Esempio 1. Il sistema è non dinamico perché i resistori dissipano energia, ma non ne accumulano.

ELEMENTI DI SENSORISTICA E ATTUAZIONE

Sistemi dinamici a tempo continuo – Classificazione

Sistemi invarianti e *varianti nel tempo* – Si parla di sistema *invariante nel tempo*, o anche *stazionario*, nel caso in cui le funzioni f e g non dipendano esplicitamente dal tempo, cioè risulti

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

$$y(t) = g(x(t), u(t))$$

mentre, se anche una sola delle funzioni f e g dipende esplicitamente da t, il sistema si dice *variante nel tempo*. Tutti gli esempi introdotti finora sono relativi a sistemi stazionari.

È importante osservare che il movimento (dello stato e dell'uscita) di un sistema stazionario, cioè la sua risposta a una qualunque sollecitazione, costituita da uno stato iniziale e da una funzione di ingresso, non dipende dall'istante di applicazione della sollecitazione stessa. In altre parole, la stessa sollecitazione inviata in due istanti diversi t_1 e t_2 al medesimo sistema produce due movimenti che differiscono solo per una traslazione temporale pari alla differenza tra t_2 e t_1. Pertanto, nello studio di questi sistemi è possibile assumere un qualunque valore del tempo come istante iniziale: la scelta più tipica è $t_0 = 0$.

Sistemi dinamici a tempo continuo – Classificazione

Sistemi lineari e *non lineari* – Quando le funzioni f e g sono lineari in x e u, cioè quando sia $\dot{x}(t)$ sia $y(t)$ sono combinazioni lineari delle varie componenti dei vettori $x(t)$ e $u(t)$, allora il sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t)\\ y(t) &= g(x(t), u(t), t)\end{aligned}$$

si può scrivere nella forma

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t)\\ y(t) &= C(t)\,x(t) + D(t)\,u(t)\end{aligned}$$

dove le matrici $A(t) \in R^{n\times n}$, $B(t) \in R^{n\times m}$, $C(t) \in R^{p\times n}$ e $D(t) \in R^{p\times m}$ sono in generale funzioni del tempo. In questo caso il sistema dinamico si dice *lineare*, mentre, se le equazioni del sistema non assumono la forma sopra riportata, si parla di sistema *non lineare*. La matrice $A(t)$ viene detta *matrice della dinamica*.
Il circuito elettrico dell’Esempio 3 è lineare e, in particolare, risulta

$$A = -1/RC,\; B = 1/RC,\; C = -1 \text{ e } D = 1$$

Il motore dell'Esempio 4 è lineare con

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{k}{L} \\ \frac{k}{J} & -\frac{h}{J} \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J} \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il forno dell'Esempio 5 è anch'esso lineare e per il modello

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \frac{k_{ip}}{C_i}\left(x_2(t) - x_1(t)\right) + \frac{1}{C_i} u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{k_{pe}}{C_p}\left(u_2(t) - x_2(t)\right) - \frac{k_{ip}}{C_p}\left(x_2(t) - x_1(t)\right) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

si ha

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{k_{ip}}{C_i} & \frac{k_{ip}}{C_i} \\ \frac{k_{ip}}{C_p} & -\frac{k_{ip} + k_{pe}}{C_p} \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} \frac{1}{C_i} & 0 \\ 0 & \frac{k_{pe}}{C_p} \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sistemi dinamici a tempo continuo – Classificazione

Un caso particolare di interesse – La linearità è una proprietà di grande importanza per un sistema, specie quando è associata all'invarianza nel tempo, come accade per i sistemi degli Esempi 3, 4 e 5. Un sistema che gode di queste due proprietà è descritto dalle equazioni

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

dove A, B, C e D sono matrici costanti. In questo caso il sistema è retto da un'equazione di stato e una trasformazione d'uscita lineari e a coefficienti costanti, ed è definito solo dagli elementi che compaiono nelle matrici in gioco. Queste particolarità fanno sì che lo studio dei sistemi lineari e invarianti nel tempo possa essere molto approfondito e semplice.

Riferimenti Bibliografici

[1] Bolzern, P., Scattolini, R., Schiavoni, N. (2015). Fondamenti di controlli automatici. McGraw-Hill Education. ISBN: 978-88-386-6882-1