Тема 6. Невизначений інтеграл

Лекція 6.1. Первісна. Невизначений інтеграл, властивості. Таблиця основних формул. Найпростіші способи інтегрування. Заміна змінної у невизначеному інтегралі. Внесення виразу під знак диференціалу. Інтегрування частинами у невизначеному інтегралі.

Первісна. Невизначений інтеграл, властивості

Означення. Функція $F(x)$ називається **первісною** функції f(x) на відрізку [a, b], якщо у будь-якій точці цього відрізка справедливою є рівність:

$$F'(x) = f(x).$$

Відмітимо, що первісних для однієї і тієї ж функції може бути нескінченно багато. Усі вони можуть відрізнятися одна від одної на деяке стале число, яке позначимо C.

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Означення. Невизначеним інтнгралом функції $f(x)$ називається сукупність первісних функцій, які визначені співвідношенням:

$F(x) + C.$

Записується інтеграл у такому вигляді: $\int f(x)dx = F(x) + C.$

Умовою існування невизначеного інтегралу на деякому відрізку є неперервність функції на цьому відрізку.

Властивості

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x).$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$
3. $\int dF(x) = F(x) + C.$
4. $\int (u+v-w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx;$ де u, v, w – деякі функції від x.
5. $\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx.$

Приклад:

$$\int (x^2 - 2\sin x + 1)dx = \int x^2 dx - 2\int \sin x dx + \int dx = \frac{1}{3}x^3 + 2\cos x + x + C.$$

2. Таблиця основних формул

Інтеграл		Значення	Інтеграл		Значення
1	$\int tgx dx$	-ln│cosx│+C	9	$\int e^x dx$	$e^x + C$
2	$\int ctgx dx$	ln│sinx│+ C	10	$\int \cos x dx$	sinx + C

3	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a}+C$	11	$\int \sin x dx$	-cosx + C
4	$\int \frac{dx}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a} arctg \frac{x}{a}+C$	12	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	tgx + C
5	$\int \frac{dx}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x+a}{x-a}\right\|+C$	13	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$	-ctgx + C
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln\left\|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right\|+C$	14	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a}$ + C
7	$\int x^{\alpha} dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \alpha \neq -1$	15	$\int \frac{1}{\cos x} dx$	$\ln\left\|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\|+C$
8	$\int \frac{dx}{x}$	$\ln\|x\|+C$	16	$\int \frac{1}{\sin x} dx$	$\ln\left\|tg\frac{x}{2}\right\|+C$

3. Найпростіші способи інтегрування. Заміна змінної у невизначеному інтегралі. Внесення виразу під знак диференціалу

Метод безпосереднього інтегрування полягає у безпосередньому обчисленні інтегралів за допомогою основних властивостей невизначеного інтеграла і таблиці інтегралів.

Метод заміни змінною (спосіб підстановки)

Теорема. Якщо необхідно знайти інтеграл $\int f(x)dx$, але складно відшукати первісну, то за допомогою заміни $x = \varphi(t)$ і $dx = \varphi'(t)dt$ отримуємо:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Приклад. Знайти невизначений інтеграл $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$.

Зробимо заміну $t = sinx$, $dt = cosxdt$.

Отримуємо: $\int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2} x + C.$

4. Інтегрування частинами у невизначеному інтегралі

Спосіб ґрунтується на використанні формули похідної добутку функцій:

$$(uv)' = u'v + v'u,$$

де u і v – деякі функції від x.

В диференціальній формі: $d(uv) = udv + vdu$.

Проінтегрувавши останню формулу, отримуємо: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$, а враховуючи властивості невизначеного інтегралу:

$$uv = \int udv + \int vdu \qquad \text{або} \qquad \int udv = uv - \int vdu.$$

Отримуємо формулу інтегрування за частинами.

<u>Приклад.</u> $\int x^2 \sin x dx = \left\{ \begin{matrix} u = x^2; & dv = \sin x dx; \\ du = 2x dx; & v = -\cos x \end{matrix} \right\} = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x dx =$

$= \left\{ \begin{matrix} u = x; & dv = \cos x dx; \\ du = dx; & v = \sin x \end{matrix} \right\} = -x^2 \cos x + 2\left[x \sin x - \int \sin x dx \right] =$

$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C.$