Лекція 2.2.

Тема 2. ***Елементи теорії границь***

План

1. Границя функції. Основні властивості границь функцій. Односторонні границі. Типи невизначеностей.
2. Важливі границі функцій.
3. Порівняння двох нескінченно малих величин. Основні еквівалентності нескінченно малих величин.

1. Границя функції. Основні властивості границь функцій. Односторонні границі. Типи невизначеностей

Нехай D — деяка множина чисел. Якщо задано закон, за яким кожному числу x з множини D ставиться у відповідність єдине визначене число y, то будемо говорити, що на множині D задана функція, яку називають f. Число y — це значення функції f в точці x, що позначається формулою $y = f(x)$.

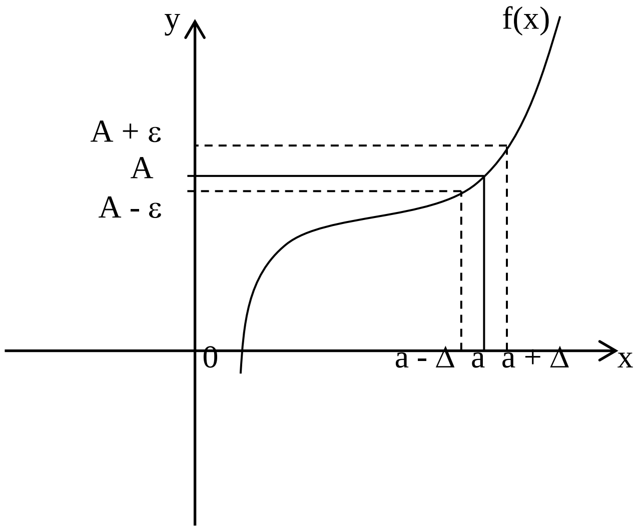
Число x називається аргументом функції, множина D — областю визначення функції, а всі значення y утворюють множину E, яка називається множиною значень або областю зміни функції.

Функція f називається зростаючою (спадною) на множині G, якщо для будь-який чисел x_1 і x_2 з множини G, таких що $x_1 < x_2$, виконується умова $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Нехай ε — деяке додатне число. **ε-околом** точки x_0 називається множина всіх точок x, які належать проміжку $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, окрім самої точки x_0.

$$0 < |x - x_0| < \varepsilon.$$

Число ε називається **радіусом околу**.



Нехай функція $f(x)$ визначена у деякому околі точки $x = a$ (у самій точці $x = a$ функція може бути і не визначена).

Означення. Число A називається **границею** функції $f(x)$ при $x \to a$, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ існує таке число $\Delta>0$, що для всіх x таких, що

$$0 < |x - a| < \Delta$$

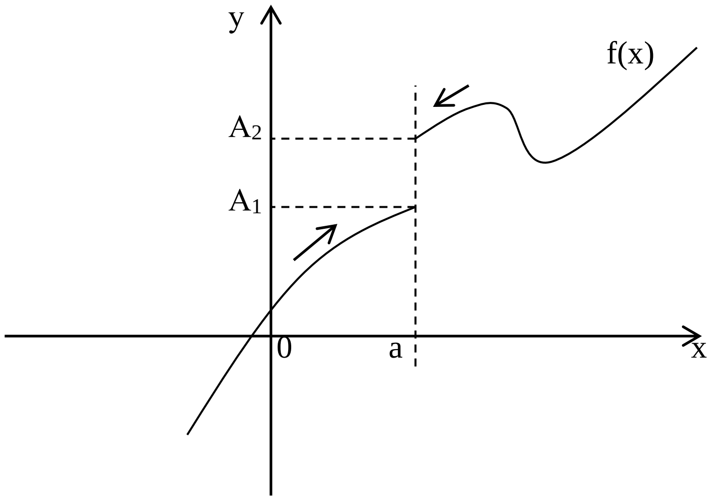
справедлива нерівність $$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Означення може бути записане в іншому вигляді:

Якщо $a - \Delta < x < a + \Delta$, $x \neq a$, то справедлива нерівність $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

Запис границі функції в точці: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Означення. Якщо $f(x) \to A_1$ при $x \to a$ тільки при $x < a$, то $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A_1$ - називається **границею** функції $f(x)$ в точці $x = a$ зліва, а якщо $f(x) \to A_2$ при $x \to a$ тільки при $x>a$, то $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A_2$ називається **границею** функції $f(x)$ в точці $x = a$ **справа**.



Дане означення стосується випадку, коли функція $f(x)$ не визначена в самій точці $x = a$, але визначена в деякому як завгодно малому околі цієї точки.

Границі A_1 і A_2 називаються **односторонніми границями** функції $f(x)$ в точці $x = a$.

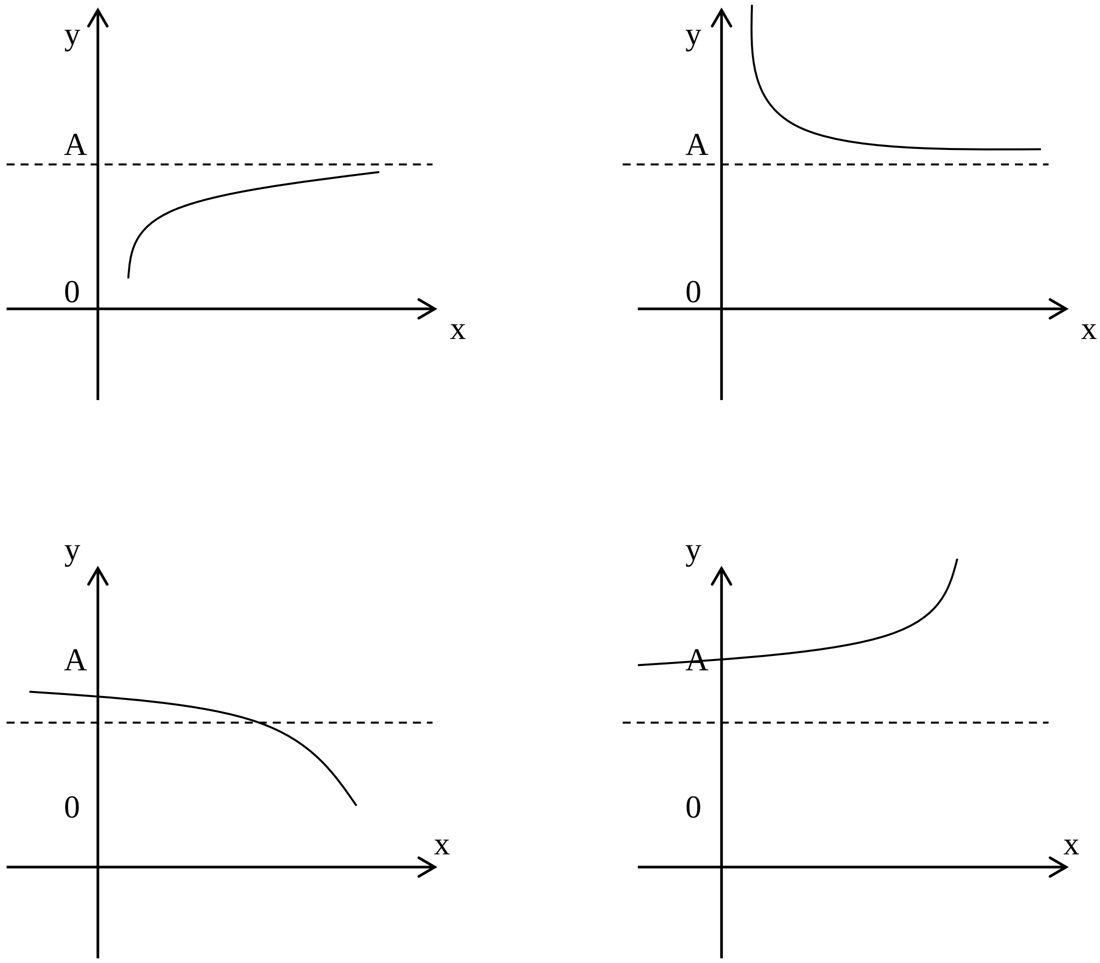
Означення. Число A називається **границею** функції $f(x)$ при $x \to \infty$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує таке число $M>0$, що для всіх x, $|x|>M$ виконується нерівність

$$|A - f(x)| < \varepsilon.$$

При цьому припускається, що функція $f(x)$ визначена в околі нескінченності.

Записують: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

Графічно це можна представити:



Аналогічно можна визначити границі $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ для будь-якого $x>M$ і $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$ для будь-якого $x<M$.

Основні теореми про границі.

<u>**Теорема 1.**</u> $\lim\limits_{x \to a} C = C$, де $C = const$.

Наступні теореми справедливі у припущенні, що функції $f(x)$ і $g(x)$ мають скінченні границі при $x \to a$.

<u>**Теорема 2.**</u> $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

<u>**Теорема 3.**</u> $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

<u>**Наслідок.**</u> $\lim\limits_{x \to a} C \cdot f(x) = C \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

<u>**Теорема 4.**</u> $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ при $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$.

<u>**Теорема 5.**</u> Якщо $f(x)>0$ поблизу точки $x = a$ і $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, то $A>0$.

Аналогічно визначається знак границі при $f(x) < 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq 0$.

Теорема 6. Якщо $g(x) \le f(x) \le u(x)$ поблизу точки $x = a$ і $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} u(x) = A$, то і $\lim\limits_{x\to a} = A$.

Означення. Функція $f(x)$ називається **обмеженою** поблизу точки $x = a$, якщо існує таке число $M>0$, що $|f(x)|<M$ поблизу точки $x = a$.

Теорема 7. Якщо функція $f(x)$ має скінченну границю при $x\to a$, то вона обмежена поблизу точки $x = a$.

2. *Важливі границі функцій*

Перша чудова границя. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, $Q(x) = b_0x^m + b_1x_{m-1} + \ldots + b_m$ - многочлени.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^n(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n})}{x^m(b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots. + \frac{b_m}{x^m})} = x^{n-m}\,\frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_m}{x^m}},$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_m}{x^m}} = \frac{a_0}{b_0}.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0, & при \quad n < m, \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & при \quad n = m, \\ \infty, & при \quad n > m. \end{cases}$

Друга чудова границя. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Третя чудова границя. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

Можна записати, також, наступні корисні на практиці співвідношення:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a; \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} = m.$$

3. *Порівняння двох нескінченно малих величин. Основні еквівалентності нескінченно малих величин*

Означення. Функція $f(x)$ називається **нескінченно малою** при $x\to a$, де a може бути числом або однією з величин ∞, $+\infty$ або $-\infty$, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

<u>Теорема.</u> Для того, щоб функція $f(x)$ при $x\to a$ мала границю, яка дорівнює A, необхідно і достатньо, щоб поблизу точки $x = a$ виконувалась умова

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

де $\alpha(x)$ – нескінченно мала при $x \to a$ ($\alpha(x)\to 0$ при $x \to a$).

Властивості нескінченно малих функцій:

1) Сума скінченного числа нескінченно малих функцій при $x\to a$ теж нескінченно мала функція при $x\to a$.

2) Добуток скінченного числа нескінченно малих функцій при $x\to a$ теж нескінченно мала функція при $x\to a$.

3) Добуток нескінченно малої функції на функцію, обмежену поблизу точки $x = a$ є нескінченно малою функцією при $x\to a$.

4) Частка від ділення нескінченно малої функції на функцію, границя якої не дорівнює нулеві є величина нескінченно мала.

Означення. Границя функції $f(x)$ при $x\to a$, де a - число, яке дорівнює нескінченності, якщо для будь-якого числа $M>0$ існує таке число $\Delta>0$, що нерівність

$$|f(x)|>M$$

виконується при всіх x, які задовольняють умову

$$0 < |x - a| < \Delta.$$

Записується це так: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

Якщо в означенні замінити умову $|f(x)|>M$ на $f(x)>M$, то отримаємо:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty,$$

а якщо замінити на $f(x)<M$, то:

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

Означення. Функція називається **нескінченно великою** при $x\to a$, де a – число або одна з величин ∞, $+\infty$ або $-\infty$, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, де А – одна з величин ∞, $+\infty$ або $-\infty$.

<u>Теорема.</u> Якщо $f(x)\to 0$ при $x\to a$ (якщо $x\to\infty$) і не перетворюється в нуль, то

$$y = \frac{1}{f(x)} \to \infty.$$

Нехай $\alpha(x)$, $\beta(x)$ і $\gamma(x)$ – нескінченно малі функції при $x \to a$. Будемо позначати ці функції α, β і γ відповідно. Ці нескінченно малі функції можна порівняти за швидкістю їх спадання, тобто за швидкістю їх прямування до нуля.

Означення. Якщо $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=0$, то функція α називається **нескінченно малою вищого порядку**, ніж функція β.

Означення. Якщо $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=A, \quad A\neq 0, \quad A=const$, то α і β називаються нескінченно малими одного порядку.

Означення. Якщо $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=1,$ то функції α і β називаються **еквівалентними нескінченно малими**. Записують: $\alpha \sim \beta$.

Означення. Нескінченно мала функція α називається **нескінченно малою порядку *k*** відносно нескінченно малої функції β, якщо границя $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta^k}$ скінченна і відмінна від нуля.

Властивості еквівалентних нескінченно малих функцій:

1) $\alpha \sim \alpha$, $\left(\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\alpha}=1\right)$.

2) Якщо $\alpha \sim \beta$ і $\beta \sim \gamma$, то $\alpha \sim \gamma$, $\left(\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\gamma}=\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\gamma}\right)=1\cdot 1=1\right)$.

3) Якщо $\alpha \sim \beta$, то $\beta \sim \alpha$, $\left(\lim\limits_{x\to a}\frac{\beta}{\alpha}=\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}}=1\right)$.

4) Якщо $\alpha \sim \alpha_1$ і $\beta \sim \beta_1$ і $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=k$, то і $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1}=k$ або $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta_1}$.

<u>Наслідок:</u> а) якщо $\alpha \sim \alpha_1$ і $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=k$, то і $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha_1}{\beta}$,

б) якщо $\beta \sim \beta_1$ і $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=k$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta_1}$.

Якщо α і β - нескінченно малі при $x\to a$, причому β - нескінченно мала вищого порядку, ніж α, то $\gamma = \alpha + \beta$ - нескінченно мала, еквівалентна α.