Тема 3. Диференціальне числення функції однієї змінної

Лекція 3.1.

План

1. Похідна складеної функції.
2. Похідні функцій, заданих неявно і параметрично.
3. Похідні та диференціали вищих порядків.
4. Застосування диференціалу.

1. *Похідна складеної функції*

Теорема. Нехай $y = f(x)$; $u = g(x)$, причому область значень функції *u* входить в область визначення функції *f*.

Тоді $y' = f'(u)\cdot u'$.

Доведення.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x};$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

(з врахуванням того, що якщо $\Delta x\to 0$, то $\Delta u\to 0$, оскільки $u = g(x)$ – неперервна функція).

Тоді $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$.

Теорема доведена.

Логарифмічне диференціювання.

Розглянемо функцію $y = ln|x| = \begin{cases} ln\,x, & при \quad x > 0, \\ ln(-x), & при \quad x < 0. \end{cases}$

Тоді $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, оскільки $(ln\,x)' = \frac{1}{x}$; $\quad (ln(-x))' = \frac{(-x)'}{x} = \frac{1}{x}$.

Враховуючи отриманий результат, можна записати $\left(ln|f(x)|\right)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

Відношення $\frac{f'(x)}{f(x)}$ називається **логарифмічною похідною** функції $f(x)$.

Спосіб **логарифмічного диференціювання** полягає в тому, що спочатку знаходять логарифмічну похідну функції, а потім похідну самої функції за формулою

$$f'(x) = \left(ln|f(x)|\right)'\cdot f(x).$$

Похідна показникові-степеневої функції.

Функція називається показниковою, якщо незалежна змінна входить у показник степеня, і степеневою, якщо змінна є основою. Якщо ж і основа і показник степеня залежать від змінної, то така функція називається показниково-степеневою.

Розглянемо функції $u = f(x)$ і $v = g(x)$, які мають похідні у точці x, $f(x)>0$. Знайдемо похідну функції $y = u^v$. Логарифмуючи дану функцію, отримаємо:

$\ln y = v \ln u$;

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v\frac{u'}{u};$$

$$y' = u^v\left(v\frac{u'}{u} + v' \ln u\right);$$

$$\left(u^v\right)' = vu^{v-1}u' + u^v v' \ln u.$$

⁕ Приклад. *Знайти похідну функції* $f(x) = (x^2 + 6x)^{x\sin x}$.

Використовуючи отриману вищу формулу, одержимо: $u = x^2 + 6x$; $\quad v = x\sin x$.

Похідні цих функцій: $u' = 2x + 6$; $\quad v' = \sin x + x\cos x$.

Отже:

$$f'(x) = x\sin x \cdot (x^2 + 6x)^{x\sin x - 1} \cdot (2x + 6) + (x^2 + 6x)^{x\sin x}(\sin x + x\cos x)\ln(x^2 + 6x).$$

Похідні обернених функцій.

Ставиться задача: знайти похідну функції $y = f(x)$ при умові, що обернена до неї функція $x = g(y)$ має похідну, відмінну від нуля у відповідній точці.

Для розв'язання цієї задачі про диференціюємо функцію $x = g(y)$ по x:

$1 = g'(y)y'$;

оскільки $g'(y) \neq 0$, то $\quad y' = \dfrac{1}{g'(y)}$;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}},$$

тобто похідна оберненої функції обернена за величиною до похідної даної функції.

⁕ Приклад. *Знайти формулу для похідної функції arcctg*.

Функція *arcctg* є оберненою функцією до функції *ctg*, тобто її похідна може бути знайдена наступним чином:

$y = ctgx$; $\qquad x = arcctgy$.

Відомо, що $y' = (ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

За отриманою вище формулою отримаємо:

$$y' = \frac{1}{d(arcctgy)/dx}; \qquad \frac{d(arcctgy)}{dy} = -\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

Оскільки $-\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + ctg^2 x = -(1 + y^2)$, то можна записати кінцеву формулу для похідної арккотангенса:

$$(arcctgy)' = -\frac{1}{1+y^2}.$$

Таким чином отримані усі формули для похідних арксинуса, арккосинуса та інших обернених функцій, наведених у таблиці похідних.

Диференціал складної функції.

Нехай $y = f(x)$, $x = g(t)$, тобто функція y – складна функція.

Тоді $dy = f'(x)g'(t)dt = f'(x)dx$.

Така форма запису диференціала dy називається інваріантною формою запису диференціалу.

Якщо ж x – незалежна змінна, то $dx = \Delta x$, але якщо x залежить від параметра t, то $\Delta x \neq dx$.

Отже, форма запису $dy = f'(x)\Delta x$ не є інваріантною.

❋Приклад. *Знайти похідну функції* $y = x\cos x \sin x + \frac{1}{2}\cos^2 x$.

Перетворимо дану функцію за допомогою тригонометричних формул: $y = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos^2 x$.

$$y' = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}x2\cos 2x + \frac{1}{2}2\cos x(-\sin x) = \frac{1}{2}\sin 2x + x\cos 2x - \sin x\cos x = x\cos 2x.$$

❋Приклад. *Знайти похідну функції* $y = \frac{x^2 e^{x^2}}{x^2+1}$.

$$y' = \frac{(2xe^{x^2} + x^2 2xe^{x^2})(x^2+1) - (2x)x^2 e^{x^2}}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3 e^{x^2} + 2x^5 e^{x^2} + 2xe^{x^2} + 2x^3 e^{x^2} - 2x^3 e^{x^2}}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2xe^{x^2}(x^4+1+x^2)}{(x^2+1)^2}.$$

2. *Похідні функцій, заданих неявно і параметрично*

Похідна функції, заданої неявно

Нехай неявна функція $y(x)$ задана рівнянням

$F(x, y) = 0$.

Щоб про диференціювати неявно задану функцію, необхідно взяти похідну по x від обох частин рівності, вважаючи y функцією від x, і одержане рівняння розв'язати відносно y'. Похідна неявної функції виражається через незалежну змінну x і саму функцію y.

Приклад. Знайти похідну y', якщо $x^2 + y^2 - 2y + 3x = 1.$

Розв'язування

Маємо

$$2x + 2yy' - 2y' + 3 = 0,$$

$$y'(2y-2) = -2x - 3, \quad y' = \frac{2x+3}{2-2y}.$$

Похідна функції, заданої параметрично

Нехай функція $y = f(x)$ задана параметрично:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \le t \le \beta.$$

Припустимо, що функція $\varphi(t)$ на інтервалі $(\alpha;\beta)$ задовольняє умови теореми про похідну оберненої функції, а функція $\psi(t)$ на цьому ж інтервалі має похідну $\psi'(t)$. Тоді існує обернена функція $t = \Phi(x)$, яка має похідну і яку знаходимо за формулою

$$t'_x = \frac{1}{x'_t} \quad \text{або} \quad \Phi'(x) = \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Функцію $y = f(x)$ можна розглядати як складену функцію $y = \psi(t) = \psi(\Phi(x))$ з проміжним аргументом $t = \Phi(x)$, тому отримаємо

$$y'_x = y'_t t'_x = \psi'(t)\Phi'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Таким чином, похідну функції, заданої параметрично, знаходять за формулою:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Приклад. Знайти y'_x, якщо $x = a\cos t, \quad y = a\sin t$.

Розв'язування

Оскільки $x'_t = -a\sin t, \quad y'_x = a\cos t$, то отримаємо

$$y'_x = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -ctg\, t.$$

3. *Похідні та диференціали вищих порядків*

Нехай функція f(x) – диференційована на деякому інтервалі. Тоді, диференціюючи її, отримаємо першу похідну

$$y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

Якщо знайти похідну функції $f'(x)$, отримаємо **другу похідну** функції $f(x)$.

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2},$$

тобто $y'' = (y')'$ або $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$.

Цей процес можна продовжувати і далі, знаходячи похідні степеня n.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right).$$

Загальні правила знаходження похідних вищих порядків.

Якщо функції $u = f(x)$ і $v = g(x)$ диференційовані, то:

1) $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$;
2) $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$;
3)
$$(u \cdot v)^{(n)} = vu^{(n)} + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots[n-(k-1)]}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \ldots$$
$$\ldots + uv^{(n)}.$$

Цей вираз називається **формулою Лейбніца.**

За формулою $d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$ може бути знайдено диференціал n-го порядку.

7. Застосування диференціалу

Диференціал функції $y = f(x)$ залежить від Δx і є головною частиною приросту Δx.

Можна скористатися формулою: $dy = f'(x)dx$.

Тоді абсолютна похибка: $|\Delta y - dy|$.

Відносна похибка: $\left|\dfrac{\Delta y - dy}{dy}\right|$.

<u>Приклад.</u> Обчислити наближено $arctg\,1{,}05$.

Розв'язування

Нехай $f(x) = arctg\ x$, тоді маємо

$$arctg(x + \Delta x) \approx arctg\ x + (arctg\ x)'\,\Delta x;$$

$$arctg(x + \Delta x) \approx arctg\ x + \frac{\Delta x}{1 + x^2}.$$

Якщо

$$x = 1, \quad \Delta x = 0{,}5, \quad arctg\,1{,}05 \approx arctg 1 + \frac{0{,}5}{2} = \frac{\pi}{4} + 0{,}025 \approx 0{,}811.$$

??? Контрольні питання

1. Що називається похідною функції $y = f(x)$?
2. Як знайти похідну, виходячи з її означення?
3. Записати рівняння дотичної та нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$.
4. Дати означення правої і лівої похідних.
5. Дати означення диференційованої функції в точці і на проміжку.
6. Сформулювати правила диференціювання суми, різниці, добутку, частки двох функцій.
7. Сформулювати правило диференціювання складеної функції.
8. Сформулювати правило диференціювання оберненої функції.
9. Сформулювати правило диференціювання параметрично заданої функції.
10. Як диференціювати неявно задану функцію?
11. В чому полягає логарифмічне диференціювання?
12. Записати формули диференціювання всіх основних елементарних функцій.
13. Що називається диференціалом функції?
14. Назвати властивості диференціала.
15. Яка похідна називається похідною другого порядку?
16. Які похідні називаються похідними *n*-го порядку?
17. Як знаходять похідні 2-, 3-, *n*-го порядків від функцій, заданих явно, неявно, параметрично?
18. Що називається диференціалом *n*-го порядку?
19. Як знайти диференціали вищих порядків функції $y = f(x)$?