Лекція 1.1.

Тема 1. ***Вступ до аналізу***

План

1. Деякі основні поняття логіки. Логічні символи.
2. Поняття множини. Множини натуральних, цілих, дійсних, раціональних та ірраціональних чисел.
3. Операції над множинами.
4. Поняття функції дійсної змінної та її властивості.
5. Обернена функція.
6. Основні елементарні функції. Елементарна класифікація функцій.

Деякі основні поняття логіки. Логічні символи

Математична логіка – різновид формальної логіки, тобто науки, яка вивчає умовиводи з точки зору їх формальної будови.

Означення. Висловленням називається твердження, до якого можна застосувати поняття істинності чи хибності.

У математичній логіці не розглядається сам зміст висловлень, визначається тільки його істинність чи хибність, що прийнято позначати відповідно T або F.

Істинні і хибні висловлення утворюють відповідні множини. За допомогою висловлень можна складати більш складні, поєднуючи прості висловлення сполученнями «і», «або».

Таким чином, операції з висловленнями можна описувати за допомогою деякого математичного апарату.

Вводяться наступні логічні операції над висловленнями.

1) **Заперечення**. Запереченням висловлення $\overline{P}$ називається висловлення, яке є істинним тільки тоді, коли висловлення P хибне.

Позначається $\neg$P або $\overline{P}$.

2) **Кон'юнкція.** Кон'юнкцією двох висловлень P і Q називається висловлення, істинне тоді і тільки тоді, коли істинні обидва висловлення.

Позначається P&Q або $P \wedge Q$.

3) **Диз'юнкція.** Диз'юнкцією двох висловлень P і Q називається висловлення, хибне тоді і тільки тоді, коли хибні обидва висловлення.

Позначається $P \vee Q$.

4) **Імплікація.** Імплікацією двох висловлень P і Q називається висловлення, хибне тоді і тільки тоді, коли висловлення P істинне, а Q – хибне.

Позначається $P \supset Q$ (або $P \Rightarrow Q$).

5) **Еквіваленція.** Еквіваленцією двох висловлень P і Q називається висловлення, істинне тоді і тільки тоді, коли істинності висловлень співпадають.

Позначається P~Q або $P \Leftrightarrow Q$.

Поняття множини. Множини натуральних, цілих, дійсних, раціональних та ірраціональних чисел

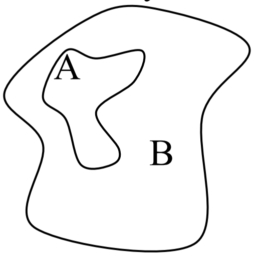
Означення. **Множиною М** називається об'єднання в єдине ціле певних різноманітних об'єктів *a*, які називаються е**лементами** множини.

$$a \in \text{M}$$

Множину можна описати, вказавши яку-небудь властивість, яка характеризує усі елементи множини.

Множина, яка не містить елементів, називається порожньою і позначається $\varnothing$.

<u>Означення.</u> Якщо усі елементи множини A є також елементами множини B, то говорять, що множина A **міститься** у множині B.



A ⊂ B

<u>Означення.</u> Якщо A $\subseteq$ B, то множина A називається **підмножиною** множини B, а якщо при цьому A $\neq$ B, то множина A називається **власною підмножиною** множини B і позначається A $\subset$ B.

Для трьох множин A, B, C справедливі співвідношення.

$$A \subseteq A; \quad A \not\subset A;$$
$$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C;$$
$$A \subseteq B \wedge B \subset C \rightarrow A \subset C.$$

Справедливе співвідношення

$$A = B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

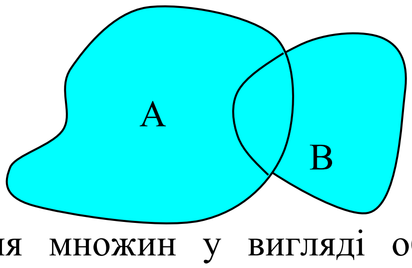
Ряд множин має загальноприйняті позначення:

1) Множина натуральних чисел $N = \{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$.
2) Множина всіх цілих чисел $Z = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$.
   Множина всіх невід’ємних цілих чисел $Z_0 = \{0,1,2,3,\ldots\}$.
3) Множина всіх раціональних чисел $Q = \left\{ \frac{p}{q} \middle| p \in Z,\, q \in N \right\}$.
4) Множина всіх дійсних чисел $R = \{x | x = \pm a, \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\}$.
   Де a - ціле невід’ємне число, а α_i - цифри десяткової системи числення.

Операції над множинами

<u>Означення.</u> Об’єднанням множин A і B називається множина C, елементи якого належать хоча б одній із множин A і B.

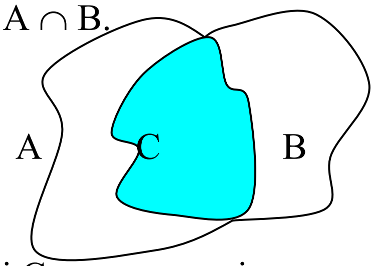
Позначається C = A $\cup$ B.



Геометричне зображення множин у вигляді області на площині називається **діаграмою Ейлера – Венна**.

<u>Означення.</u> Перетином множин A і B називається множина C, елементи якого належать кожній із множин A і B.

Позначається $C = A \cap B$.

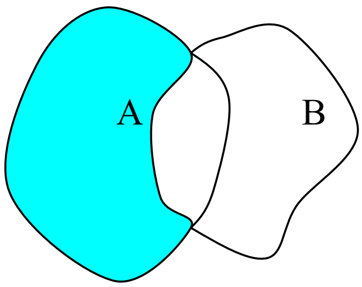


Для множин A, B і C справедливі властивості:

$$A \cap A = A \cup A = A; \qquad A \cup B = B \cup A; \qquad A \cap B = B \cap A;$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C); \qquad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$
$$A \cup (A \cap B) = A; \qquad A \cap (A \cup B) = A;$$
$$A \cup \varnothing = A; \qquad A \cap \varnothing = \varnothing.$$

<u>Означення.</u> Різницею множин A і B називається множина, яка складається з елементів множини A, які не належать множині B.

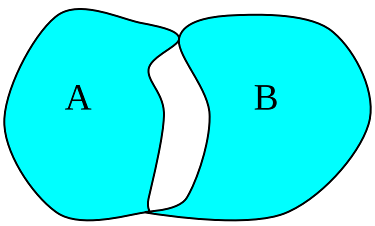
Позначається $C = A \setminus B$.



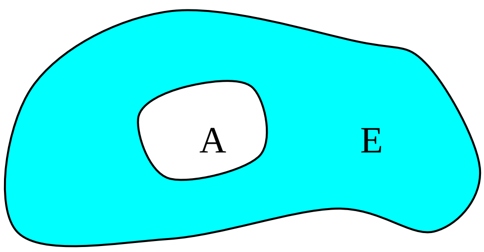
<u>Означення.</u> Симетричною різницею множин A і B називається множина C, елементи якої належать в точності одній із множин A або B.

Позначається $A \Delta B$.

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



<u>Означення.</u> C_E називається **доповненням** множини A відносно множини E, якщо $A \subseteq E$ і $C_E = E \setminus A$.



Для множин A, B і C справедливі співвідношення:

$$A \setminus B \subseteq A; \qquad A \setminus A = \varnothing; \qquad A \setminus (A \setminus B) = A \cap B;$$
$$A \Delta B = B \Delta A; \qquad A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B);$$
$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C); \qquad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C);$$

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C); \qquad (A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C);$$
$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C); \qquad (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C);$$
$$(A \,\Delta\, B) \,\Delta\, C = A \,\Delta\, (B \,\Delta\, C); \qquad A \cap (B \,\Delta\, C) = (A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C);$$
$$A \cup C_E A = E; \quad A \cap C_E A = \varnothing; \quad C_E E = \varnothing; \quad C_E \varnothing = E; \quad C_E C_E A = A;$$
$$C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B; \qquad C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B.$$

Поняття функції дійсної змінної та її властивості

Нехай D — деяка множина чисел. Якщо задано закон, за яким кожному числу x з множини D ставиться у відповідність єдине визначене число y, то будемо говорити, що на множині D задана функція, яку називають f. Число y — це значення функції f в точці x, що позначається формулою $y = f(x)$.

Число x називається аргументом функції, множина D — областю визначення функції, а всі значення y утворюють множину E, яка називається множиною значень або областю зміни функції.

Функція f називається зростаючою (спадною) на множині G, якщо для будь-який чисел x_1 і x_2 з множини G, таких що $x_1 < x_2$, виконується умова $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Нехай ε — деяке додатне число. **ε-околом** точки x_0 називається множина всіх точок x, які належать проміжку $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, окрім самої точки x_0.

$$0 < |x - x_0| < \varepsilon.$$

Число ε називається **радіусом околу**.

Змінна y називається функцією від іншої змінної x, якщо кожному значенню x з деякої множини за певним правилом або законом ставиться у відповідність одне або декілька значень змінної y.

При цьому змінна x називається змінною, або аргументом, а змінна y - залежною змінною, або функцією.

Множина значень, яких набуває змінна x, називається областю визначення функції, а множина значень, яких набуває змінна y , називається областю значень функції.

Обернена функція

Нехай задана функція $y = f(x)$ з областю визначення X і множиною значень Y.

Функція $x = \varphi(y)$ є **оберненою** до функції $y = f(x)$, якщо:

1) областю визначення функції φ є множина значень функції f ;
2) множина значень функції φ є областю визначення функції f ;
3) кожному значенню змінної $y \in Y$ відповідає єдине значення змінної $x \in X$.

Основні елементарні функції. Елементарна класифікація функцій

Основними елементарними функціями називаються такі:

1. Степенева функція $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$. Область значення і графік цієї функції залежать від значення α.
2. Показникова функція $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

3. Логарифмічна функція $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.
4. Тригонометричні функції: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$.
5. Обернені тригонометричні функції $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$.