Тема 9. Диференціальні рівняння першого та вищих порядків. Системи звичайних диференціальних рівнянь

Лекція 9.1. Задачі, які приводять до диференціальних рівнянь. Основні поняття теорії диференціальних рівнянь. Задача Коші для диференціального порядку I-го порядку. Теорема існування і єдиності розв'язку задачі Коші. Поняття загального і частинного розв'язків. Рівняння з відокремлюваними змінними. Однорідні диференціальні рівняння і звідні до них.

1. Задачі, які приводять до диференціальних рівнянь

Розв'язання різноманітних геометричних, фізичних та інженерних задач часто приводят до рівнянь, які зв'язують незалежні змінні, які характезують ту чи іншу задачу, з будь-якою функцією цих змінних і похідними цієї функції різних порядків.

В якості прикладу можна розглянути найпростіший випадок рівноприскореного руху матеріальної точки.

Відомо, що переміщення матеріальної точки при рівноприскореному русі є функцією часу і виражається за формулою:

$$S = V_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

В свою чергу, прискорення a є похідною по часу t від швидкості V, яка також є похідною по часу t від переміщення S. Тобто

$$V = \frac{dS}{dt}; \qquad a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2};$$

Тоді отримуємо: $S = f(t) = V_0 t + \frac{f''(t)\cdot t}{2}$ - рівняння зв'язує функцію *f(t)* з незалежною змінною t і похідною другого порядку функції *f(t).*

2. Основні поняття теорії диференціальних рівнянь

Рівняння, яке пов'язує незалежну зміну, невідому функцію і її похідні або диференціали різних порядків, називається диференціальним рівнянням.

Рівняння, що містять похідні за однією незалежною змінною, називаються звичайними диференціальними рівняннями. Рівняння, що містять похідні шуканої функції по кількох змінних, називаються рівняннями у повних диференціалах.

Означення. Звичайним диференціальним рівнянням (ЗДР) називається рівняння виду

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \qquad (1)$$

Означення. Найвищий порядок похідної невідомої функції $y = f(x)$, яка входить у диференціальне рівняння, називається порядком диференціального рівняння.

Рівняння першого порядку має вигляд

$$F(x, y, y') = 0. \qquad (2)$$

Рівняння записане у диференціальній формі має вигляд

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0, \qquad (3)$$

де $P(x,y), Q(x,y)$ - відомі функції.

Розв'язати диференціальне рівняння – означає знайти таку функцію $y=\varphi(x)$, яка при підстановці її і її похідних у диференціальне рівняння перетворює це рівняння у тотожність.

Графік розв'язку диференціального рівняння на площині xOy називається диференціальною кривою цього рівняння.

Якщо рівняння (2) можна записати у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \qquad (4)$$

то цей вигляд називають рівнянням першого порядку, розв'язаним відносно похідної.

3. Задача Коші для диференціального порядку I-го порядку. Теорема існування і єдиності розв'язку задачі Коші

Задача Коші. *Теорема (про існування та єдність розв'язку).* Нехай функція $f(x,y)$ і її частинна похідна $f'_y(x,y)$ визначені та неперервні у відкритій області площини xOy і точка (x_0, y_0) належить цій площині. Тоді існує єдиний розв'язок $y=\varphi(x)$ рівняння (4), який задовольняє умову

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0, \text{ тобто } \varphi(x_0) = y_0. \qquad (6)$$

Умову (6), при якій розв'язок $y=\varphi(x)$ набуває наперед задане значення y_0 у заданій точці x_0, називають початковою умовою розв'язку і записують так:

$$y(x_0) = y_0. \qquad (7)$$

Задача знаходження розв'язку рівняння (4), який задовольняє початкову умову (7), називається *задачею Коші*.

4. Поняття загального і частинного розв'язків

Означення. Функція $y=\varphi(x,C)$, яка залежить від аргументу x і довільної сталої C та перетворює диференціальне рівняння у тотожність, називається загальним розв'язком цього диференціального рівняння.

Процес знаходження розв'язків диференціального рівняння називається інтегруванням диференціального рівняння.

Означення. Частинним розв'язком рівняння (4) називається функція $y=\varphi(x,C_0)$, яка утворюється із загального розв'язку $y=\varphi(x,C)$ при певному значенні сталої $C=C_0$.

Рівняння

$$\Phi(x,y) = 0 \qquad (5)$$

визначає розв'язок рівняння (4) у неявній формі, якщо воно визначає y як неявну функцію від x: $y=\varphi(x)$, яка є розв'язком рівняння (4). При цьому вираз (5) називають інтегралом рівняння (4).

5. Рівняння з відокремлюваними змінними

Рівняння виду

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y), \qquad (8)$$

де $f(x)$, $\varphi(y)$ - задані і неперервні на деякому інтервалі функції, називається диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.

Щоб розв'язати рівняння (8), необхідно відокремити змінні. Для цього поділимо обидві частини рівняння (8) на $\varphi(y)$ ($\varphi(y) \neq 0$) і помножимо на dx, тоді рівняння запишеться у вигляді

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)\,dx. \qquad (9)$$

Диференціальне рівняння виду (9) називається диференціальним рівнянням з відокремленими змінними.

<u>Приклад .</u> Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними:
а) $y' = y^{2/3}$; б) $2xe^{-x^2} + \dfrac{y'}{y} = 0$.

Розв'язування

а) $\dfrac{dy}{dx} = y^{2/3}$;

$y^{-2/3}dy = dx$;

$\int y^{-2/3}dy = \int dx$;

$3y^{1/3} = x + C$;

$27y = (x+C)^3$ – загальний інтеграл;

$y = \dfrac{1}{27}(x+C)^3$ – загальний розв'язок.

б) Перетворимо задане рівняння:

$2xe^{-x^2} + \dfrac{dy}{ydx} = 0$;

$2xe^{-x^2}dx + \dfrac{dy}{y} = 0$;

$\int 2xe^{-x^2}dx + \int \dfrac{dy}{y} = C$;

$-e^{-x^2} + \ln|y| = C$.

Отримали загальний інтеграл даного диференціального рівняння. Якщо з цього співвідношення виразити шукану функцію y, то отримаємо загальний розв'язок.

6. Однорідні диференціальні рівняння і звідні до них

Означення. Однорідним рівнянням називається рівняння виду

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (10)$$

Якщо ж диференціальне рівняння задане у вигляді

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0, \qquad (11)$$

то воно називається однорідним, якщо функції $P(x,y), Q(x,y)$ є однорідними функціями одного і того ж виміру.

Означення. Функція $f(x,y)$ називається однорідною функцією *n*-го виміру відносно змінних x та y, якщо для довільного числа $t \neq 0$ виконується тотожність

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y).$$

Приклад . *Довести, що функція* $f(x,y) = x^2 - 5xy$ - *однорідна функція другого виміру.*

Розв'язування

$$f(tx,ty) = (tx)^2 - 5(tx)(ty) = t^2\left(x^2 - 5xy\right) = t^2 f(x,y).$$

Однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними підстановкою

$$y = ux, \qquad (12)$$

де $u = u(x)$ - невідома функція.

Звідси

$$y' = u + x \cdot u',$$

і рівняння (1) приводиться до вигляду

$$u + x \cdot u' = f(u).$$

Це рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними, оскільки при $f(u) - u \neq 0,\ x \neq 0$

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруючи обидві частини останнього рівняння, отримаємо загальний розв'язок у вигляді

$$x = C\exp\left(\int \frac{du}{f(u) - u}\right).$$

Позначимо

$$\varphi(u) = \exp\left(\int \frac{du}{f(u) - u}\right),$$

тоді, повертаючись до старої функції, можна записати загальний розв'язок рівняння (1) у вигляді

$$x = C\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Крім цього загального розв’язку, рівняння (10) може мати розв’язок виду

$$y = u_0 x,$$

де u_0 - константа, яка є коренем рівняння $f(u) = u$.

Рівняння виду

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right), \qquad (13)$$

де $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ c_1,\ c_2$ - задані сталі, можна звести до однорідного рівняння, якщо $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ за допомогою наступних підстановок

$$x = u + \alpha,\quad y = v + \beta.$$

Внаслідок таких підстановок у лінійних функціях зникнуть вільні члени, тобто виконуватимуться рівності

$$a_i x + b_i y + c_i = a_i u + b_i v, \quad i = 1, 2.$$

Якщо ж $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, то рівняння (13) підстановкою $z = a_1 x + b_1 y + c_1$ зводиться до диференціального рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад. а) Розв’язати однорідне рівняння: $y' = \frac{y}{x}\left(\ln\frac{y}{x} + 1\right)$.

Розв’язування

Введемо допоміжну функцію *u*.

$$u = \frac{y}{x};\quad y = ux;\quad y' = u'x + u.$$

Відмітимо, що введена нами функція *u* завжди додатна, так як в протилежному випадку втрачає зміст вихідне диференціальне рівняння, яке містить $\ln u = \ln\frac{y}{x}$.

Підставляємо у вихідне рівняння:

$$u'x + u = u(\ln u + 1);\quad u'x + u = u\ln u + u;\quad u'x = u\ln u.$$

Розділюємо змінні: $\frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x};\quad \int\frac{du}{u\ln u} = \int\frac{dx}{x}.$

Інтегруючи, отримуємо: $\ln|\ln u| = \ln|x| + C;\quad \ln u = Cx;\quad u = e^{Cx}.$

Переходячи від допоміжної функції назад до функції *y*, отримуємо загальний розв’язок:

$$y = xe^{Cx}.$$

б) Розв’язати рівняння $(x - 2y + 3)dy + (2x + y - 1)dx = 0.$

Розв’язування

Отримуємо $(x - 2y + 3)\frac{dy}{dx} = -2x - y + 1;\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y + 1}{x - 2y + 3}.$

Знаходимо значення визначника $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4+1=5\neq 0$.

Розв’язуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} -2x-y+1=0 \\ x-2y+3=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y=1-2x \\ x-2+4x+3=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x=-1/5 \\ y=7/5 \end{cases}.$$

Застосовуємо підстановку $x=u-1/5; \quad y=v+7/5;$ у вихідне рівняння:

$$(u-1/5-2v-14/5+3)dv+(2u-2/5+v+7/5-1)du=0;$$

$$(u-2v)dv+(2u+v)du=0;$$

$$\frac{dv}{du}=\frac{2u+v}{2v-u}=\frac{2+v/u}{2v/u-1}.$$

Замінюємо змінну $\frac{v}{u}=t; \quad v=ut; \quad v'=t'u+t;$ при підстановці у вираз, записаний вище, маємо:

$$t'u+t=\frac{2+t}{2t-1}.$$

Розділяємо змінні: $\frac{dt}{du}u=\frac{2+t}{2t-1}-t=\frac{2+t-2t^2+t}{2t-1}=\frac{2(1+t-t^2)}{2t-1};$

$$\frac{du}{u}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-2t}{1+t-t^2}dt; \qquad \int\frac{du}{u}=-\frac{1}{2}\int\frac{(1-2t)dt}{1+t-t^2};$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1+t-t^2\right|=\ln|u|+\ln C_1;$$

$$\ln\left|1+t-t^2\right|=-2\ln|C_1u|;$$

$$\ln\left|1+t-t^2\right|=\ln\left|\frac{C_2}{u^2}\right|; \quad 1+t-t^2=\frac{C_2}{u^2}.$$

Переходимо тепер до початкової функції y і змінної x.

$$t=\frac{v}{u}=\frac{y-7/5}{x+1/5}=\frac{5y-7}{5x+1}; \quad u=x+1/5;$$

$$1+\frac{5y-7}{5x+1}-\left(\frac{5y-7}{5x+1}\right)^2=\frac{25C_2}{(5x+1)^2};$$

$$(5x+1)^2+(5y-7)(5x+1)-(5y-7)^2=25C_2;$$

$$25x^2+10x+1+25xy+5y-35x-7-25y^2+70y-49=25C_2;$$

$$25x^2-25x+25xy+75y-25y^2=25C_2+49-1+7;$$

$$x^2-x+xy+3y-y^2=C_2+\frac{55}{25}=C.$$

Отже, вираз $x^2-x+xy+3y-y^2=C$ є загальним інтегралом вихідного диференціального рівняння.

в) Розв’язати рівняння $2(x+y)dy+(3x+3y-1)dx=0.$

Розв’язування

Отримуємо $2(x+y)\frac{dy}{dx}=-3x-3y+1;\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{-3x-3y+1}{2x+2y}=-\frac{3x+3y-1}{2x+2y}.$

Знаходимо значення визначника $\begin{vmatrix}-3 & -3\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-6+6=0.$

Застосовуємо підстановку $3x+3y=t.$

$\frac{dy}{dx}=\frac{t'}{3}-1.$

Підставляємо цей вираз у вихідне рівняння:

$\frac{t'}{3}-1=-\frac{3(t-1)}{2t};\quad 2t(t'-3)=-9t+9;\quad 2tt'=6t-9t+9;\quad 2tt'=-3t+9.$

Розділяємо змінні: $\frac{2t}{-3t+9}dt=dx;\qquad \frac{t}{t-3}dt=-\frac{3}{2}dx;$

$\int\left(1+\frac{3}{t-3}\right)dt=-\frac{3}{2}\int dx;$

$t+3\ln|t-3|=-\frac{3}{2}x+C_1.$

Далі повертаємося до початкової функції y і змінної x.

$2x+2y+2\ln|3(x+y-1)|=-x+C_2;$

$3x+2y+2\ln 3+2\ln|x+y-1|=C_2;$

$3x+2y+2\ln|x+y-1|=C.$

Таким чином, ми отримали загальний інтеграл вихідного диференціального рівняння.