Тема 9. Диференціальні рівняння першого та вищих порядків. Системи звичайних диференціальних рівнянь

Лекція 9.4. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння з постійними коефіцієнтами. Лінійно неоднорідні диференціальні рівняння з постійними коефіцієнтами і спеціальною правою частиною. Системи звичайних диференціальних рівнянь

Неоднорідні диференціальні рівняння. вищих порядків

Розглянемо рівняння виду $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x)$.

З врахуванням позначень $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = L(x)$ можна записати:

$$L(x) = f(x).$$

При цьому будемо вважати, що коефіцієнти та права частина цього рівняння неперервні на деякому інтервалі (скінченому чи нескінченому).

Теорема. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x)$ у деякій області є сумою будь-якого його розв'язку і загального розв'язку відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння.

Для розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння необхідно знайти загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння і один частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Метод варіації сталих

Спочатку знаходимо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння у вигляді:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n = \sum_{i=1}^{n} C_iy_i;$$

Потім, припускаючи, що коефіцієнти C_i є функціями від x, шукаємо розв'язок неоднорідного рівняння:

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i.$$

Для знаходження функцій $C_i(x)$ необхідно розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

Метод варіації довільних сталих може бути застосований для відшукання розв'язків будь-якого лінійного неоднорідного рівняння. Але, оскільки знаходження фундаментальної системи розв'язків відповідного однорідного рівняння може бути достатньо складною задачею, то цей метод, в основному, застосовується для неоднорідних рівнянь із постійними коефіцієнтами.

Метод невизначених коефіцієнтів

У деяких випадках частинний розв'язок можна представити у вигляді, який залежатиме від правої частини неоднорідного рівняння.

Розрізняють наступні випадки:

I. Права частина лінійного неоднорідного диференціального рівняння має вигляд:

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x},$$

де $P(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m$ - многочлен степеня m.

Тоді частинний розв'язок шукатиметься у вигляді:

$$y = x^r e^{\alpha x} Q(x).$$

Тут $Q(x)$- многочлен того ж степеня, що й $P(x)$, але з невизначеними коефіцієнтами, а r – число, яке показує скільки разів число α є коренем характеристичного рівняння для відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння.

II. Права частина лінійного неоднорідного диференціального рівняння має вигляд:

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x\right].$$

Тут $P_1(x)$ і $P_2(x)$ – многочлени степенів m_1 і m_2 відповідно.

Тоді частинний розв'язок неоднорідного рівняння буде мати вигляд:

$$y = x^r e^{\alpha x}\left[Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x\right],$$

де число r показує скільки разів число $\alpha + i\beta$ є коренем характеристичного рівняння для відповідного однорідного рівняння, а $Q_1(x)$ і $Q_2(x)$ – многочлени степеня не вище m, де m – більший із степенів m_1 і m_2.

Відмітимо, що якщо права частина рівняння є комбінацією виразів розглянутого вище виду, то розв'язок знаходиться як комбінація розв'язків допоміжних рівнянь, кожне з яких має праву частину, яка відповідає виразу, що входить у комбінацію.

Тобто, якщо рівняння має вигляд: $L(y) = f_1(x) + f_2(x)$, то частинний розв'язок цього рівняння буде $y = y_1 + y_2$, де y_1 і y_2 – частинні розв'язки допоміжних рівнянь $L(y) = f_1(x)$ і $L(y) = f_2(x)$.

Системи звичайних диференціальних рівнянь

Означення. Сукупність співвідношень виду:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0, \\ F_2(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0, \end{cases}$$

де x – незалежна змінна, $y_1, y_2, ..., y_n$ – шукані функції, називається системою диференціальних рівнянь першого порядку.

Означення. Система диференціальних рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідних від невідомих функцій називається нормальною системою диференціальних рівнянь.

Така система має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n). \end{cases} \qquad (1)$$

<u>Теорема.</u> (Теорема Коші). Якщо у деякій області (n-1) – вимірного простору функції $f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, $f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, … $f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ неперервні і мають неперервні частинні похідні по $y_1, y_2, ..., y_n$, то для будь-якої точки $(x_0 . y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0})$ цієї області існує єдиний розв'язок

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \quad ... \quad y_n = \varphi_n(x)$$

системи диференціальних рівнянь виду (1), визначений у деякому околі точки x_0 і задовольняє початковим умовам $x_0 . y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0}$.

Означення. Загальним розв'язком системи диференціальних рівнянь виду (1) буде сукупність функцій $y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, $y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, … $y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, які при підстановці у систему (1) перетворюють її у тотожність.

При розгляді систем диференціальних рівнянь обмежимося випадком системи трьох рівнянь ($n = 3$).

Означення. Нормальна система диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами називається лінійною однорідною, якщо її можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = a_{11}y + a_{12}z + a_{13}u, \\ \frac{dz}{dx} = a_{21}y + a_{22}z + a_{23}u, \\ \frac{du}{dx} = a_{31}y + a_{32}z + a_{33}u. \end{cases} \qquad (2)$$

Розв'язки системи (2) мають властивості:

1) Якщо y, z, u – розв'язки системи, то Cy, Cz, Cu , де $C = const$ – теж є розв'язками цієї системи.

2) Якщо y_1, z_1, u_1 і y_2, z_2, u_2 – розв'язки системи, то $y_1 + y_2, z_1 + z_2, u_1 + u_2$ – теж є розв'язками системи.

Розв'язки системи шукатимемо у вигляді: $y = \alpha e^{kx}; \quad z = \beta e^{kx}; \quad u = \gamma e^{kx}, \quad \alpha, \beta, \gamma, k = const.$

Підставляючи ці значення у систему (2) і переносячи всі члени в одну сторону і скоротивши на e^{kx}, отримаємо:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0, \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta + a_{23}\gamma = 0, \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33} - k)\gamma = 0. \end{cases}$$

Для того, щоб отримана система мала ненульовий розв'язок необхідно і достатньо, щоб визначник системи дорівнював нулеві, тобтто:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0.$$

У результаті обчислення визначника отримуємо рівняння третього степеня відносно k. Це рівняння називається характеристичним рівнянням **і** має три кореня k_1, k_2, k_3. Кожному з цих коренів відповідає ненульовий розв'язок системи (2):

$$y_1 = \alpha_1 e^{k_1 x}, \qquad z_1 = \beta_1 e^{k_1 x}, \qquad u_1 = \gamma_1 e^{k_1 x},$$
$$y_2 = \alpha_2 e^{k_2 x}, \qquad z_2 = \beta_2 e^{k_2 x}, \qquad u_2 = \gamma_2 e^{k_2 x},$$
$$y_3 = \alpha_3 e^{k_3 x}, \qquad z_3 = \beta_3 e^{k_3 x}, \qquad u_3 = \gamma_3 e^{k_3 x}.$$

Лінійна комбінація цих розв'язків з довільними коефіцієнтами буде розв'язком системи (2):

$$y = C_1\alpha_1 e^{k_1 x} + C_2\alpha_2 e^{k_2 x} + C_3\alpha_3 e^{k_3 x};$$
$$z = C_1\beta_1 e^{k_1 x} + C_2\beta_2 e^{k_2 x} + C_3\beta_3 e^{k_3 x};$$
$$u = C_1\gamma_1 e^{k_1 x} + C_2\gamma_2 e^{k_2 x} + C_3\gamma_3 e^{k_3 x}.$$