Лекція 2.1.

Тема 2. ***Елементи теорії границь***

План

1. Верхня і нижня межа множини. Числові послідовності.
2. Границя послідовності.
3. Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності. Властивості нескінченно малих та нескінченно великих послідовностей.

Верхня і нижня межа множини. Числові послідовності

Означення. Якщо кожному натуральному числу n поставлено у відповідність число x_n, то говорять, що задано послідовність

$$x_1, x_2, \ldots, x_n = \{x_n\}.$$

Загальний елемент послідовності є функцією від n.

$$x_n = f(n).$$

Таким чином послідовність може розглядатися як функція.

Для послідовностей можна визначити наступні операції:

1) Множення послідовності на число m: $m\{x_n\} = \{mx_n\}$, т.е. $mx_1, mx_2, \ldots$
2) Додавання (віднімання) послідовностей: $\{x_n\} \pm \{y_n\} = \{x_n \pm y_n\}$.
3) Добуток послідовностей: $\{x_n\}\cdot\{y_n\} = \{x_n \cdot y_n\}$.
4) Частка послідовностей: $\dfrac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ при $\{y_n\} \neq 0$.

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ називається **обмеженою**, якщо існує таке число $M>0$, що для будь-якого n справедлива нерівність:

$$|x_n| < M.$$

тобто усі члени послідовності належать проміжку $(-M; M)$.

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ називається обмеженою зверху, якщо для будь-якого n існує таке число M, що

$$x_n \leq M.$$

Означення. Послідовність $\{x_n\}$ називається обмеженою знизу, якщо для будь-якого n існує таке число M, що

$$x_n \geq M.$$

Границя послідовності

Означення. Число a називається **границею** послідовності $\{x_n\}$, якщо для будь-якого додатного $\varepsilon>0$ існує такий номер N, що для всіх $n > N$ виконується умова:

$$|a - x_n| < \varepsilon.$$

Це записується: $\lim x_n = a$.

У цьому випадку говорять, що послідовність $\{x_n\}$ збігається до a при $n \to \infty$.

Якщо відкинути будь-яке число членів послідовності, то отримуються нові послідовності, при цьому якщо збігається одна з них, то збігається і інша.

<u>Теорема.</u> Послідовність не може мати більш, ніж одну границю.

<u>Теорема.</u> Якщо $x_n \to a$, то $|x_n| \to |a|$.

<u>Теорема.</u> Якщо $x_n \to a$, то послідовність $\{x_n\}$ обмежена.

Означення. 1) Якщо $x_{n+1} > x_n$ для всіх n, то послідовність зростаюча.

2) Якщо $x_{n+1} \geq x_n$ для всіх n, то послідовність неспадна.

3) Якщо $x_{n+1} < x_n$ для всіх n, то послідовність спадна.

4) Якщо $x_{n+1} \leq x_n$ для всіх n, то послідовність незростаюча

Всі ці послідовності називаються **монотоними.** Зростаючі і спадні послідовності називаються **строго монотоними**.

<u>Теорема.</u> Монотонна обмежена послідовність має границю.

Означення. Число A називається границею числової послідовності $\{x_n\}$, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$, знайдеться натуральний номер N такий, що для усіх чисел $n \geq N$ виконуватиметься нерівність

$$|x_n - A| < \varepsilon .$$

Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності. Властивості нескінченно малих та нескінченно великих послідовностей

Послідовність a_n називається нескінченно малою, тоді, коли її границя дорівнює нулеві.

a_n – нескінченно мала $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, тобто для будь-якого $\varepsilon>0$ існує N, таке що для будь-якого $n>N$ виконується нерівність

$|a_n|<\varepsilon$.

<u>Теорема.</u> Сума нескінченно малих величин є нескінченно мала мала величина.

α_n, β_n – нескінченно малі величини $\Rightarrow$ $\alpha_n+\beta_n$ – нескінченно мала величина.

<u>Теорема.</u> Добуток нескінченно малих величини є нескінченно мала величина. Произведение бесконечно малого есть бесконечно малое.

α_n, β_n – нескінченно малі величини $\Rightarrow$ $\alpha_n\beta_n$ – нескінченно мала величина.

<u>Теорема.</u> Добуток обмеженої послідовності на нескінченно малу послідовність є нескінченно мала послідовність.

a_n – обмежена послідовність;

α_n – нескінченно мала послідовність $\Rightarrow$ $a_n\alpha_n$ – нескінченно мала послідовність.

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a \Leftrightarrow a_n=a+\alpha_n$

Послідовність a_n має скінченну границю a тоді і тільки тоді, коли вона представлена у вигляді $a_n=a+\alpha_n$, де α_n – нескінченно мала величина.

Теореми про границі числових послідовностей

1) <u>Теорема про границю суми</u>:

Нехай $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a$ і $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=b \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} (a_n+\beta_n)=a+b$.

2) <u>Теорема про добуток границь</u>:

Нехай $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a$ і $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=b \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_nb_n=ab$.

3) <u>Теорема про границю частки:</u>

Нехай $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a$ і $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=b$, $b\neq0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n/b_n=a/b$.

Нескінченно великі послідовності

<u>**Означення.**</u>

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty$, якщо $\forall\varepsilon>0\ \exists N:\forall n>N \Rightarrow a_n>\varepsilon$, де ε – як завгодно мале число.

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=-\infty$, якщо $\forall\varepsilon>0\ \exists N:\forall n>N \Rightarrow a_n<-\varepsilon$.

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N:\forall n>N \Rightarrow |a_n|>\varepsilon$.

Послідовності, які мають скінченну границю називають збіжними. Інакше послідовність називається розбіжною.

Будь-яка нескінченно велика величина не обмежена. Протилежне твердження невірне.

<u>**Теорема .**</u>

Нехай $\exists\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a<\infty \Rightarrow a_n$ – обмежена.

<u>**Теорема.**</u>

Якщо $\exists\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a<\infty$, то a- єдине.

<u>**Теорема.**</u>

1) a_n - нескінченно велика величина $\Rightarrow 1/a_n$ – нескінченно мала величина;

2) α_n – нескінченно мала величина, $\alpha_n\neq0$ $(\forall n>N_0) \Rightarrow 1/\alpha_n$ – нескінченно велика величина;

3) α_n – нескінченно мала величина $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n=0$.