Тема 4. Дослідження функцій за допомогою похідних

Лекція 4.1.

План

1. Диференціал функції. Теореми про диференційовані функції.
2. Правило Лопіталя.
3. Теореми Роля, Лагранжа, Коші та їх застосування.
4. Формули Тейлора та Маклорена.
5. Розклади елементарних функцій.

1. Диференціал функції. Теореми про диференційовані функції

Означення. **Диференціалом** функції $f(x)$ в точці x називається головна лінійна частина приросту функції.

Теорема. Щоб функція $y = f(x)$ була диференційована в точці x_0, необхідно і достатньо, щоб вона мала в цій точці скінченну похідну і $f'(x_0) = A$.

Теорема без доведення.

Теорема. Якщо функція диференційована в точці x_0, то вона й неперервна в цій точці.

Теорема без доведення.

2. Правило Лопіталя

До невизначеностей прийнято відносити наступні співвідношення:

$$\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; \infty \cdot 0; \infty^0; 1^\infty; \infty - \infty.$$

Теорема (правило Лопіталя).

Якщо функції f(x) і g(x) диференційовані в околі точки x_0, неперервні в точці x_0, $g'(x)$ відмінна від нуля в околі точки x_0 і $f(x_0) = g(x_0) = 0$, то границя відношення функцій при $x \to x_0$ дорівнює границі відношення їх похідних, якщо ця границя (скінченна чи нескінченна) існує.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Теорема без доведення.

✱Приклад. *Знайти границю* $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$.

При підстановці $x = 1$ у вираз, що стоїть під значком границі, отримуємо невизначеність вигляду $\dfrac{0}{0}$. Щоб позбутися цієї невизначеності скористаємося теоремою Лопіталя, оскільки функції чисельника і знаменника задовольняють умовам теореми.

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x}; \qquad g'(x) = e^x;$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 1}\frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x} = \frac{2+1}{e} = \frac{3}{e}.$$

⁕Приклад. *Знайти границю* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi - 2arctgx}{e^{\frac{3}{x}}-1}$.

$$f'(x) = -\frac{2}{1+x^2}; \qquad g'(x) = e^{\frac{3}{x}}\cdot\frac{-3}{x^2};$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[-\frac{2x^2}{(1+x^2)e^{\frac{3}{x}}(-3)}\right] = \frac{-2}{(0+1)\cdot 1\cdot(-3)} = \frac{2}{3}.$$

Зауваження. Якщо при відшуканні границі функції після застосування правила Лопіталя ми знову стикаємося із невизначеністю, то правило Лопіталя можна використати другий, третій, … раз, поки не буде отримано результат. Застосовувати теорему Лопіталя можна застосовувати кілька разів при умові, що умови теореми виконуються кожного разу.

⁕Приклад. *Знайти границю* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$.

$$f'(x) = e^{\frac{x}{2}}(1+\frac{1}{2}x); \qquad g'(x) = 1+e^x;$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{x}{4}e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4+x); \qquad g''(x) = e^x;$$

$$\lim_{x\to\infty} = \frac{\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4+x)}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{4}(4+x)}{e^{\frac{x}{2}}};$$

$$f'''(x) = \frac{1}{4}; \qquad g'''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}; \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2e^{\frac{x}{2}}} = 0.$$

⁕Приклад. *Знайти границю* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

$$f'(x) = e^x + e^{-x} - 2; \qquad g'(x) = 1 - \cos x;$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{1-\cos x} = \dfrac{1+1-2}{1-1} = \dfrac{0}{0}$ - знову отримуємо невизначеність. Застосуємо правило Лопіталя ще раз.

$f''(x)=e^{x}-e^{-x}$; $g''(x)=\sin x$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}=\dfrac{1-1}{0}=\dfrac{0}{0}$ - застосуємо правило Лопіталя ще раз.

$f'''(x)=e^{x}+e^{-x}$; $g'''(x)=\cos x$;

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{\cos x}=\dfrac{2}{1}=2.$

Невизначеності вигляду 0^0; 1^∞; ∞^0 можна розкрити за допомогою логарифмування. Такі невизначеності зустрічаються при знаходженні границь функцій вигляду $y=[f(x)]^{g(x)}$, $f(x)>0$ в околі точки x_0 при $x\to x_0$. Для знаходження границі такої функції достатньо знайти границю функції $\ln y=g(x)\ln f(x)$.

❋Приклад. *Знайти границю* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{x}$.

Тут $y = x^x$, $\ln y = x\ln x$.

Тоді $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln y=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x\ln x=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left\{\begin{matrix}\textit{правило}\\ \textit{Лопіталя}\end{matrix}\right\}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{1/x}{-1/x^{2}}=-\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x=0.$

Отже, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln y=\ln\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}y=0; \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}y=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}x^{x}=1.$

❋Приклад. *Знайти границю* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{2}}{e^{2x}}$.

$f'(x)=2x$; $g'(x)=2e^{2x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^{2x}}=\dfrac{\infty}{\infty}$; - отримали невизначеність. Застосуємо правило Лопіталя ще раз.

$f''(x)=2$; $g'(x)=4e^{2x}$; $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2e^{2x}}=\dfrac{1}{\infty}=0$.

3. Теореми Роля, Лагранжа, Коші та їх застосування

<u>Теорема Ролля.</u>

Якщо функція f(x) неперервна на відрізку [a, b], диференційована на інтервалі (a, b) і значення функції на кінцях відрізка рівні f(a) = f(b), то на інтервалі (a, b) існує точка ε, a < ε < b, в якій похідна функції f(x) дорівнює нулеві, f′(ε) = 0.

Геометричний зміст теореми Ролля полягає в тому, що при виконанні умов теореми на інтервалі (*a, b*) існує точка *ε* така, що у даній точці кривої *y*=*f*(*x*) дотична паралельна до осі *Ox*. Таких точок на інтервалі може бути і декілька, але теорема стверджує про існування принаймні однієї такої точки.

Теорема без доведення.

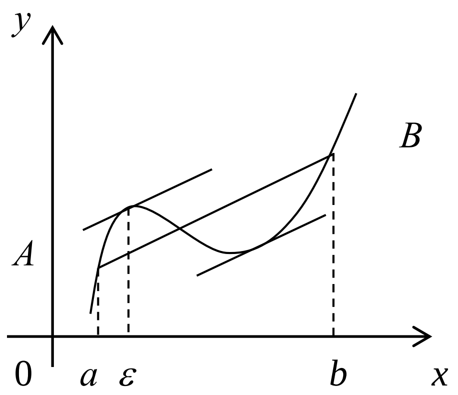
Наслідки теореми Ролля:

1) Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ задовольняє теоремі Ролля, причому $f(a)= f(b) = 0$, то існує принаймні одна точка ε, $a < \varepsilon < b$, така, що $f'(\varepsilon) = 0$. Тобто між двома нулями функції знайдеться хоча б одна точка, в якій похідна функції дорівнює нулеві.
2) Якщо на інтервалі (a, b) функція $f(x)$ має похідну $(n$-1)-го порядку і n разів перетворюється в нуль, то існує принаймні одна точка інтервалу, в якому похідна $(n - 1)$-го порядку дорівнює нулеві.

Теорема Лагранжа.

Якщо функція f(x) неперервна на відрізку [a, b] і диференційована на інтервалі (a, b), то на цьому інтервалі знайдеться хоча б одна точка ε, a < ε < b, така,що $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\varepsilon)$.

Відношення $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ дорівнює кутовому коефіцієнту січної AB.



Якщо функція $f(x)$ задовольняє умовам теореми, то на інтервалі (a, b) існує точка ε така, що у відповідній точці кривої $y = f(x)$ дотична є паралельною до січної, яка з'єднує точки A і B. Таких точок може бути і декілька, але одна існує точно.

Теорема без доведення.

Означення. Вираз $f(a) - f(b) = f'(\varepsilon)(b - a)$ називається **формулою Лагранжа** або **формулою кінцевих приростів.**

Інколи формулу Лагранжа записують у вигляді:

$$\Delta y = f'(x + \theta \Delta x)\Delta x,$$

де $0 < \theta < 1$, $\Delta x = b - a$, $\Delta y = f(b) - f(a)$.

Теорема Коші.

Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на відрізку $[a, b]$ і диференційовані на інтервалі (a, b) і $g'(x) \neq 0$ на інтервалі (a, b), то існує хоча б одна точка ε, $a < \varepsilon < b$, така, що

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\varepsilon)}{g'(\varepsilon)}.$$

Теорема без доведення.

Теорема Лагранжа є частинним випадком (при $g(x) = x$) теореми Коші.

4.Формули Тейлора і Маклорена

Теорема Тейлора.

1) *Нехай функція $f(x)$ має в точці $x = x_0$ і деякому її околі похідні порядку до $(n+1)$ включно. (Тобто і всі попередні до порядку n функції і їх похідні неперервні і диференційовані в цьому околі).*

2) Нехай x – будь-яке значення з цього околу, але $x \neq x_0$.

Тоді між точками x і x_0 знайдеться така точка ε, що справедливою буде формула:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

- цей вираз називається **формулою Тейлора**, а вираз:

$$\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}=R_{n+1}(x)$$

називається **кінцевим членом у формі Лагранжа**.

Формула Маклорена.

Формулою Маклорена називається формула Тейлора при $x_0 = 0$:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x),$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}; \qquad 0<\theta<1$$

Представлення деяких елементарних функцій за формулою Тейлора.

Функція $f(x) = e^x$.

Знаходимо: $f(x) = e^x$, $f(0) = 1$;

$f'(x) = e^x$, $f'(0) = 1$;

……………………

$f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$.

Тоді: $e^x = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}, \qquad 0<\theta<1.$

✱Приклад. *Знайти значення числа e.*

В отриманій вище формулі покладемо $x = 1$.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{(n+1)!} e^{\theta}.$$

Для 8 членів розкладу: e = 2,71827876984127003.

Для 10 членів розкладу: e = 2,71828180114638451.

Для 100 членів розкладу: e = 2,71828182845904553.

5. Розклади елементарних функцій

Функція $f(x) = \sin x$.

Отримуємо $f(x) = \sin x$; $f(0) = 0$;

$f'(x) = \cos x = \sin(x + \pi/2)$; $f'(0) = 1$;

$f''(x) = -\sin x = \sin(x + 2\pi/2)$; $f''(0) = 0$;

$f'''(x) = -\cos x = \sin(x + 3\pi/2)$; $f'''(0)=-1$;

…………………………………………

$f^{(n)}(x) = \sin(x + \pi n/2)$; $f^{(n)}(0) = \sin(\pi n/2)$;

$f^{(n+1)}(x) = \sin(x + (n + 1)\pi/2)$; $f^{(n+1)}(\varepsilon) = \sin(\varepsilon + (n + 1)\pi/2)$;

Отже:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x),$$

$$R_{2n}(x) = \frac{f^{(2n+1)}(\varepsilon)}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \pm \frac{\cos\varepsilon}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Функція $f(x) = \cos x$.

Для функції $\cos x$, застосувавши аналогічні перетворення, отримаємо:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x),$$

$$R_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\varepsilon)}{(2n+2)!} x^{2n+2} = \pm \frac{\cos\varepsilon}{(2n+2)!} x^{2n+2}.$$

Функція $f(x) = (1 + x)^{\alpha}$. (α - дійсне число).

$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$; $f'(0) = \alpha$;

$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$; $f''(0) = \alpha(\alpha-1)$;

……………………………………………………..

$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}$; $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)$

Тоді:

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2 \cdot 1} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + R_{n+1}(x),$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}; \qquad 0 < \theta < 1.$$

Якщо в отриманій формулі прийняти $\alpha = n$, де n - натуральне число і $f^{(n+1)}(x)=0$, то $R_{n+1} = 0$, тоді

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + x^n .$$

Отримали формулу, відому як **біном Ньютона**.

✱Приклад. *Обчислити значення* $\sin 20^0$.

Переведемо кут 20^0 в радіани: $20^0 = \pi/9$.

Застосуємо розклад в ряд Тейлора, обмежившись трьома першими членами розкладу:

$$\sin 20^0 = \sin\frac{\pi}{9} \cong \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^5 = 0{,}348889 - 0{,}007078 + 0{,}000043 = 0{,}341854$$

Функція $f(x) = \ln(1 + x)$.

Отримуємо: $f(x) = \ln(1 + x)$; $f(0) = 0$;

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$; $f'(0) = 1$;

$f''(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$; $f''(0) = -1$;

$f'''(x) = \dfrac{-1\cdot(-2)}{(1+x)^3}$; $f'''(0) = 2$;

....

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$; $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!$.

Отже, $\ln(1+x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1\cdot 2}{3!}x^3 - \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n + R_{n+1}(x)$;

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + R_{n+1}(x),$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)!}\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)^{n+1}.$$

✱Приклад. *Обчислити* ln1,5.

ln1,5 = 0,405465108108164381,

$$\ln 1{,}5 = \ln(1+0{,}5) \approx 0{,}5 - \frac{0{,}5^2}{2} + \frac{0{,}5^3}{3} - \frac{0{,}5^4}{4} + \frac{0{,}5^5}{5} - \frac{0{,}5^6}{6} + \frac{0{,}5^7}{7} = 0{,}4058035 .$$