Тема 3. Диференціальне числення функції однієї змінної

Лекція 3.1.

План

1. Похідна та диференціал функції. Фізичний та механічний зміст похідної.
2. Табличні похідні.
3. Основні правила диференціювання.

1. *Похідна та диференціал функції. Фізичний та механічний зміст похідної*

Нехай функція $y=f(x)$ визначена на деякому проміжку $X=(a,b)$ (скінченому чи нескінченному). Виберемо довільну точку $x_0 \in X$ і надамо аргументові приросту Δx, таким чином, що точка $x_1 = x_0 + \Delta x$ також належить проміжку X (рис.1).

Величину $\Delta x = x_1 - x_0$ називають **приростом аргументу.** Тоді відповідним **приростом функції** є величина $\Delta y = \Delta f(x_0) =$ $= f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$.

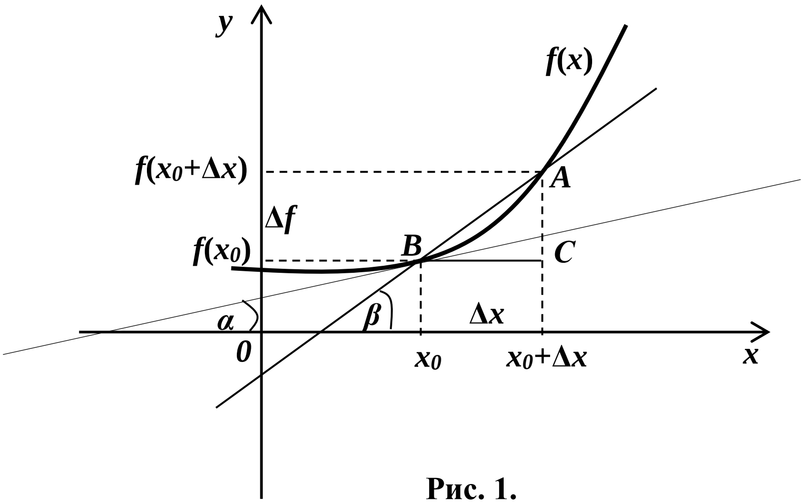


Рис. 1.

<u>*Означення.*</u> **Похідною** функції $f(x)$ в точці $x=x_0$ називається границя відношення приросту функції у цій точці до приросту аргументу, якщо він існує.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Похідну позначають:

$$f'(x_0),\ y'(x_0),\ y',\ f'_x,\ \frac{df(x_0)}{dx},\ \frac{dy}{dx}.$$

Задача про дотичну.

Нехай задано неперервну функцію $y=f(x)$, що має похідну на даному проміжку. Записати рівняння дотичної до графіка функції у точці $x=x_0$.

<u>*Означення.*</u> **Дотичною** до графіка функції $y=f(x)$ у точці $B(x_0; f(x_0))$ називають граничне положення січної AB, коли точка A прямує до точки B по графіку функції $y=f(x)$.

Запишемо рівняння дотичної до графіка функції в точці $B(x_0; f(x_0))$. Надамо аргументові приросту Δx і перейдемо по кривій $y=f(x)$ із точки $B(x_0; f(x_0))$ у точку $A(x_0+\Delta x; f(x_0+\Delta x))$. Проведемо січну AB (рис.1.).

Рівняння прямої, що проходить через точку B, має вигляд $y - f(x_0) = k(x - x_0)$.

Кутовий коефіцієнт $k = tg\beta$, де β - кут нахилу січної AB. Розглянемо трикутник ACB, у якому $BC = \Delta x$, $AC = \Delta f = \Delta y$ і $tg\beta = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Нехай $\Delta x \to 0$. Тоді $A \to B$, січна AB прямує до дотичної, проведеної до графіка функції в точці B, і $\beta \to \alpha$. Тоді кутовий коефіцієнт дотичної

$$k = tg\alpha = \lim_{\beta \to \alpha} tg\beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Отже, *геометричний зміст похідної:* похідна $f'(x_0)$ функції $y = f(x)$ у точці x_0 чисельно дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $(x_0; f(x_0))$.

Рівняння дотичної має вигляд

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

<u>*Означення.*</u> **Нормаллю до графіка функції** $y = f(x)$ у точці називають пряму, яка перпендикулярна до дотичної і проходить через точку дотику.

Рівняння нормалі до графіка функції у точці має вигляд

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Фізичний зміст похідної функції $f(t)$, де t – час, а $f(t)$ – закон руху (зміна координат) – миттєва швидкість руху.

Механічний зміст похідної: похідна функції $y = f(x)$ це швидкість зміни змінної y при даному значенні змінної x.

Односторонні похідні

<u>*Означення.*</u> Правою (лівою) похідною функції $f(x)$ у точці $x=x_0$ називається праве (ліве) значення границі відношення $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при умові, що це відношення існує.

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta f}{\Delta x}; \qquad f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Якщо функція $f(x)$ має похідну в деякій точці $x=x_0$, то вона має в цій точці односторонні похідні. Зворотнє твердження невірне.

<u>***Теорема.***</u> (Необхідна умова існування похідної) Якщо функція $f(x)$ має похідну в точці x_0, то вона неперервна в цій точці.

Диференціал функції

Нехай функція $y = f(x)$ має похідну у точці x: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$.

Тоді можна записати: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, де $\alpha \to 0$, при $\Delta x \to 0$.

Отже: $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Величина $\alpha\Delta$x – величина нескінченно мала вищого порядку, ніж $f'(x)\Delta x$, тобто $f'(x)\Delta x$ – головна частина приросту Δy.

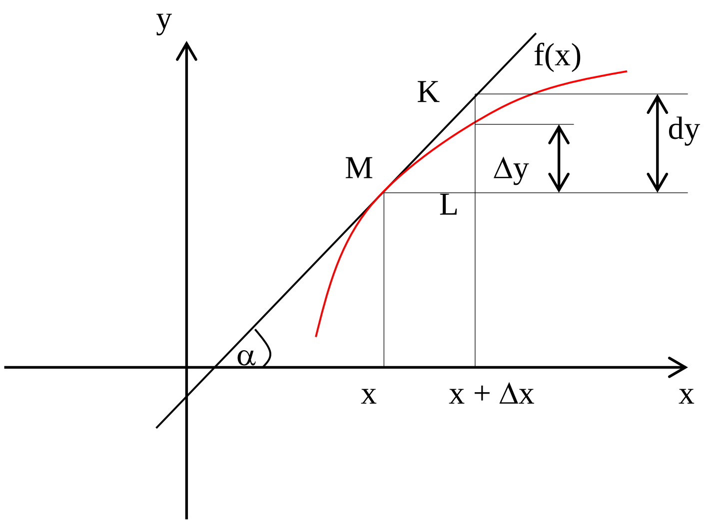
Означення. **Диференціалом** функції $f(x)$ в точці x називається головна лінійна частина приросту функції.

Позначається диференціал dy або $df(x)$.

З означення випливає, що $dy = f'(x)\Delta x$ або $dy = f'(x)dx$.

Можливий також запис: $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

Геометричний зміст диференціалу.



З трикутника ΔMKL: $KL = dy = tg\alpha\cdot\Delta x = y'\cdot\Delta x$.

Отже, диференціал функції $f(x)$ в точці x дорівнює приросту ординати дотичної до графіка цієї функції у даній точці.

Властивості диференціала.

Якщо $u = f(x)$ і $v = g(x)$ - функції, диференційовані в точці x, то з означення диференціала випливають наступні властивості:

1) $d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv$.
2) $d(uv) = (uv)'dx = (u'v + v'u)dx = vdu + udv$.
3) $d(Cu) = Cdu$.
4) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$.

2. *Табличні похідні*

Похідні основних елементарних функцій.

1) $C' = 0$;

2) $(x^m)' = mx^{m-1}$;

3) $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

9) $(\sin x)' = \cos x$;

10) $(\cos x)' = -\sin x$;

11) $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

4) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$;

5) $\left(e^x\right)' = e^x$;

6) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$;

7) $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$;

8) $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$;

12) $\left(ctgx\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

13) $\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

14) $\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

15) $\left(arctgx\right)' = \frac{1}{1+x^2}$;

16) $\left(arcctgx\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

3. *Основні правила диференціювання*

Позначимо $f(x)=u$, $g(x)=v$ – функції, диференційовані в точці x.

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

2) $(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$;

3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, якщо $v \neq 0$.

Ці правила доводять на основі теорем про границі.