Тема 9. Диференціальні рівняння першого та вищих порядків. Системи звичайних диференціальних рівнянь

Лекція 9.3. Поняття диференціальних рівнянь вищих порядків. Задача Коші. Теорема існування і єдиності розв’язку задачі Коші. Диференціальні рівняння вищих порядків які допускають пониження порядку. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків. Лінійні однорідні диференціальні рівняння з постійними коефіцієнтами n-го порядку. Властивості розв’язків. Лінійно залежні і лінійно незалежні системи функцій. Визначник Вронського.

ЗДР вищих порядків. Методи пониження порядку. Лінійні однорідні ЗДР вищих порядків. Визначник Вронського

ЗДР вищих порядків

Означення. Диференціальним рівнянням n-го порядку називається рівняння виду:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0. \qquad (1)$$

У окремих випадках, це рівняння можна розв’язати відносно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}). \qquad (2)$$

Як і диференціальні рівняння першого порядку, рівняння вищих порядків мають нескінченну кількість розв’язків.

Означення. Розв’язок $y = \varphi(x)$ задовольняє початковим умовам $x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$, якщо $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = y'_0$, ... , $\varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Означення. Знаходження розв’язку рівняння (1), яке задовольняє початковим умовам $x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$, називається розв’зком задачі Коші.

<u>Теорема Коші.</u> Якщо функція *(n-1)* змінних виду $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ у деякій області *D (n-1)*-вимірного простору неперервна і має неперервні частинні похідні по $y, y', ..., y^{(n-1)}$, то якою б не була точка $(x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)})$ у цій області, існує єдиний розв’язок $y = \varphi(x)$ рівняння $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$, визначеному у деякому інтервалі, який містить точку x_0, який задовольняє початковим умовам $x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$.

Диференціальні рівняння вищих порядків, розв’язки яких можуть бути знайдені аналітично, можна розділити на декілька типів.

Методи пониження порядку

Пониження порядку диференціального рівняння – основний метод розв’язку рівнянь вищих порядків. Цей метод дає можливість відносно легко знаходити розв’язки, проте, його можна застосувати не до усіх рівнянь.

<u>Рівняння виду $y^{(n)} = f(x)$.</u> Якщо *f(x)* – функція неперервна на деякому інтервалі $a < x < b$, то розв’язок може бути знайдено послідовним інтегруванням.

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1;$$

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2 = \int dx\int f(x)dx + C_1x + C_2;$$

……………………………………………………………

$$y = \int dx\int dx \ldots \int f(x)dx + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_n. \quad (3)$$

***Рівняння, які не містять явно шуканої функції та її похідних порядку k–1* включительно.**

Це рівняння виду:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0. \quad (4)$$

В рівняннях такого типу можливе пониження порядку на k одиниць. Для цього робиться заміна змінної:

$$y^{(k)} = z; \quad y^{(k+1)} = z'; \quad \ldots \quad y^{(n)} = z^{(n-k)}.$$

Тоді отримуємо рівняння:

$$F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0. \quad (5)$$

Припустимо, що отримане диференціальне рівняння про інтегроване і сукупність його розв’язків виражається співвідношенням:

$$z = \psi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}).$$

Зробимо зворотну заміну:

$$y^{(k)} = \psi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}).$$

Інтегруючи отримане співвідношення послідовно k разів, отримаємо:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \quad (6)$$

<u>Рівняння, які неміcтять явно незалежної змінної.</u>

Це рівняння виду

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0. \quad (7)$$

Порядок таких рівнянь може бути понижений на одиницю за допомогою заміни змінних

$$y' = p;$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p;$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dy''}{dy}p = \frac{d\left(\frac{dp}{dy}p\right)}{dy}p = \frac{d^2p}{dy^2}p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p; \text{ і так далі.}$$

Підставляючи ці значення у початкове рівняння, отримуємо:

$$F_1\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \ldots, \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0.$$

Якщо це рівняння про інтегрувати, і $\Phi(y, p, C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0$ - сукупність його рішень, то для розв'язку даного диференціального рівняння залишається розв'язати рівняння першого порядку:

$$\Phi(y, y', C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0.$$

Лінійні однорідні ЗДР вищих порядків. Визначник Вронського

Означення. Лінійним диференціальним рівнянням n – го порядку називається будь-яке рівняння першої степені відносно y і її похідних $y', y'', ..., y^{(n)}$ виду:

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = f(x), \quad (8)$$

де $p_0, p_1, ..., p_n$ – функції від x або сталі величини, причому $p_0 \neq 0$.

Ліву частину цього рівняння позначимо $L(y)$.

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = L(y).$$

Означення. Якщо $f(x) = 0$, то рівняння $L(y) = 0$ називається лінійним однородним рівнянням, якщо $f(x) \neq 0$, то рівняння $L(y) = f(x)$ називається лінійним неоднорідним рівнянням, якщо усі коефіцієнти $p_0, p_1, p_2, ... p_n$ – сталі числа, то рівняння $L(y) = f(x)$ називається линійним диференціальним рівнянням вищого порядку із сталими коефіцієнтами.

Розглянемо рівняння виду

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = 0.$$

Означення. Вираз $p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = L(y)$ називається **лінійним диференціальним оператором.**

Лінійний диференціальний оператор має властивості:

1) $L(Cy) = CL(y)$;

2) $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$.

Розв'язки лінійного однорідного рівняння мають такі властивості:

1) Якщо функція y_1 є розв'язком рівняння, то функція Cy_1, де C – стале число, також є його розв'язком.

2) Якщо функції y_1 і y_2 є розв'язками рівняння, то $y_1 + y_2$ також є його розв'язком.

Означення. Фундаментальною системою розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння n –го порядку на інтервалі (a, b) називається будь-яка система n лінійно незалежних на цьому інтервалі розв'язків рівняння.

Означення. Якщо з функцій y_i скласти визначник n – го порядку

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}, \quad (9)$$

то цей визначник називається визначником **Вронського.**

<u>**Теорема.**</u> Якщо функції $y_1, y_2, ..., y_n$ лінійно залежні, то складений з них визначник Вронського дорівнює нулеві.

Теорема. Якщо функції $y_1, y_2, ..., y_n$ лінійно незалежні, то складений з них визначник Вронського не дорівнює нулеві в жодній точці інтервало, який розглядається.

Теорема. Для того, щоб система розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння $y_1, y_2, ..., y_n$ була фундаментальною необхідно і достатньо, щоб складений для них визначник Вронського не дорівнював нулеві.

Теорема. Якщо $y_1, y_2, ..., y_n$ - фундаментальна система розв'язків на інтервалі (a, b), то загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння є лінійною комбінацією цих розв'язків:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n,$$

де C_i – сталі коефіцієнти.

Відшукання загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння зводиться до знаходження його фундаментальної системи розв'язків.

Теорема. Якщо задано рівняння виду $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ та відомий один ненульовий розв'язок $y = y_1$, то загальний розв'язок може бути знайдений за формулою:

$$y = C_2 y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p_1(x)dx} dx + C_1 y_1. \qquad (10)$$

Розв'язок диференціального рівняння виду

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0 \qquad (11)$$

будемо шукати у вигляді $y = e^{kx}$, де $k = const$.

Так як $y' = ke^{kx}; \quad y'' = k^2 e^{kx}; \quad ... \quad y^{(n)} = k^n e^{kx}$, то

$$L(e^{kx}) = e^{kx}(k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n).$$

При цьому многочлен $F(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n$ називається **характеристичним многочленом** диференціального рівняння.

Для того, щоб функція $y = e^{kx}$ була розв'язком диференціального рівняння (11), необхідно і достатньо, щоб

$$L(e^{kx}) = 0; \text{ тобто } e^{kx} F(k) = 0.$$

Оскільки $e^{kx} \neq 0$, то $F(k) = 0$ - це рівняння називається **характеристичним рівнянням**.

Характеристичне рівняння $k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n = 0$ має n коренів. Кожному кореню характеристичного рівняння k_i відповідає розв'язок диференціального рівняння.

В залежності від коефіцієнтів k характеристичне рівняння може мати або n різних дійсних коренів, або серед дійсних коренів можуть бути кратні корені, можуть бути комплексно – спряжені корені, як різні, так і кратні.

Сформулюємо загальне правило відшукання розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння із сталими коефіцієнтами:

1) Складаємо характеристичне рівняння і знаходимо його корені.

2) Знаходимо частинні розв'язки диференціального рівняння, причому:

а) кожному дійсному кореню відповідає розв'язок e^{kx};

б) кожному дійсному кореню кратності m ставиться у відповідність m розв'язків: e^{kx}; xe^{kx}; ... $x^{m-1}e^{kx}$.

в) кожній парі комплексно–сопряжених коренів $\alpha \pm i\beta$ характеристичного рівняння ставиться у відповідність два розв'язки:

$e^{\alpha x}\cos\beta x$ і $e^{\alpha x}\sin\beta x$.

г) кожній парі m – кратних комплексно–сопряжених коренів $\alpha \pm i\beta$ характеристичного рівняння ставиться у відповідність $2m$ розв'язків:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad xe^{\alpha x}\cos\beta x, \quad \ldots \quad x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad xe^{\alpha x}\sin\beta x, \quad \ldots x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

3) Складаємо лінійну комбінацію знайдених розв'язків.

Ця лінійна комбінація і буде загальним розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами.