Тема 8. Кратні інтеграли

Лекція 8.1. Означення подвійного інтеграла, властивості. Двохкратний повторний інтеграл. Зміна порядку інтегрування у повторному інтегралі. Обчислення подвійних інтегралів. Заміна змінної в подвійному інтегралі. Подвійний інтеграл в полярних координатах. Обчислення потрійного інтегралу. Застосування кратних інтегралів.

1.1.1. Задачі, які приводять до поняття подвійного інтегралу. Основні означення

Задача про обчислення об'єму циліндричного тіла. Розглянемо тіло, яке розміщено у першому квадранті і обмежене зверху поверхнею $z = f(x,y)$, знизу – замкненою обмеженою областю D площини XOY, з боків – циліндричною поверхнею, напрямна якої збігається з межею області D, а твірні паралельні осі OZ (рис. 1.1.). Таке тіло називають циліндричним тілом. Нехай функція $z = f(x,y)$ неперервна в області D.

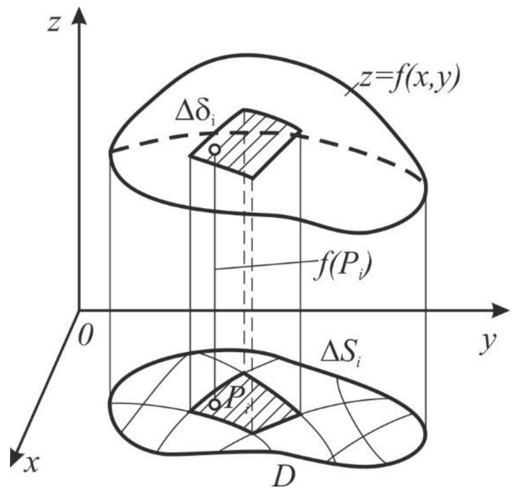

Рис. 1.1

Здійснимо правильне розбиття області D на n комірок D_i з площею Δs_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$.

Довільне розбиття області називається правильним, якщо: 1) кожна комірка має міру (площу); 2) комірки можуть мати між собою лише спільні межові точки і лінії і не можуть мати спільних внутрішніх точок; 3) кожна точка області належить принаймні до однієї комірки; 4) будь-яку область, обмежену замкненою кривою, можна покрити скінченним числом комірок таким чином, що площа області буде дорівнювати сумі площ комірок [1].

У кожній комірці виберемо точку p_i (рис. 1.2. [2]), знайдемо значення функції $f(p_i)$ у ній і позначимо найменше і найбільше значення $f(x,y)$ у комірці Δs_i відповідно через m_i і M_i. Добуток $f(p_i)\Delta s_i$ – об'єм циліндричного стовпчика, а таких стовпчиків є n. Отже, сума таких об'ємів наближено дорівнює об'єму циліндричного тіла:

$$V \approx V_n = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta s_i .$$

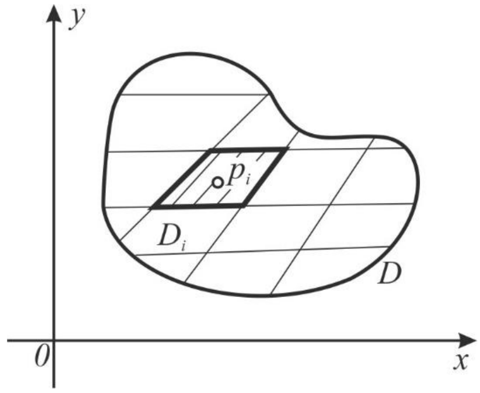

Рис. 1.2

Знайдемо суми $\underline{V}_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta s_i$, $\overline{V}_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta s_i$,

$$\underline{V}_n \le V_n \le \overline{V}_n .$$

Границі $\lim\limits_{\lambda\to 0} \underline{V}_n$ і $\lim\limits_{\lambda\to 0} \overline{V}_n$ існують [1] і рівні між собою, причому

$$\lim_{\lambda\to 0} \underline{V}_n = \lim_{\lambda\to 0} \overline{V}_n = V ,$$

де λ – ранг розбиття області ($\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d(D_i)$ – найбільший з діаметрів областей D_i), V – об'єм тіла.

Таким чином,

$$\lim_{\lambda \to 0} V_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(p_i) \Delta s_i \text{ і } \lim_{\lambda \to 0} V_n = V.$$

<u>Задача про масу пластини.</u> Нехай маємо плоску неоднорідну матеріальну пластину, формою якої є область D (рис. 1.2.). В області D задано неперервну функцію $\gamma = \gamma(x, y)$, яка визначає густину пластини у точці (x, y). Знайдемо масу m пластини. Для цього довільним способом розіб'ємо область D на частини D_i, які не мають спільних внутрішніх точок, і площі яких дорівнюють Δs_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. У кожній області D_i візьмемо будь-яку точку p_i і знайдемо густину у цій точці $\gamma(p_i)$. Розміри області D_i достатньо малі, тому густина у кожній точці $(x, y) \in D_i$ мало відрізнятиметься від значення $\gamma(p_i)$. Тоді добуток $\gamma(p_i) \Delta s_i$ наближено визначає масу m_n тієї частини пластини, яка займає область D_i. Тоді точне значення маси [1]:

$$m = \lim_{\lambda \to 0} m_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma(p_i) \Delta s_i,$$

де $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d(D_i)$ – найбільший з діаметрів областей D_i.

<u>Інтеграл по області.</u> Нехай дано вимірну область D і функцію $u = f(X)$, визначену у кожній точці області. Розіб'ємо область довільним чином на n комірок D_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, позначивши ранг розбиття області через λ, міру області – через μ, міру комірки – через $\Delta \mu_i$.

Виберемо у комірці D_i довільну точку p_i. Обчислимо $u_i = f(p_i)$ і побудуємо добуток $f(p_i) \Delta \mu_i$. Складемо суму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(p_i) \Delta \mu_i$, яка називається інтегральною сумою для функції $f(X)$ по області D. Якщо ця інтегральна сума має скінченну границю $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(p_i) \Delta \mu_i$, яка не залежить від способу розбиття області D на комірки $\Delta \mu_i$ і від способу вибору точок p_i у комірках, то цю границю називають **інтегралом по області [1]** і позначають

$$I = \int_D f(X) d\mu.$$

Таким чином,

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(p_i) \Delta \mu_i = \int_D f(X) d\mu. \tag{1.1}$$

Якщо для функції $f(X)$ границя (1.1) існує, то $f(X)$ називається **інтегрованою в *D* – області**.

Означення. Нехай $X \in D$, де D – область, розміщена на площині і обмежена простою кривою, а функція $u = f(x, y)$. Тоді інтеграл по області називається **подвійним.** Тут в (1.1)

$$\Delta\mu_i = \Delta s_i, \quad d\mu = ds = dxdy,$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta\mu_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta s_i = \iint_D f(x, y)ds,$$

$$\iint_D f(x, y)ds = \iint_D f(x, y)dxdy. \qquad (1.2)$$

Враховуючи означення подвійного інтеграла, можемо записати формули для відшукання об’єму циліндричного тіла та маси пластини:

$$V = \iint_D f(x, y)\, ds,$$

$$m = \iint_D \gamma(x, y)\, ds.$$

1.1.2. Властивості подвійного інтеграла

1. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\iint_D Cf(x, y)\, dxdy = C\iint_D f(x, y)\, dxdy, \quad \text{де} \quad C = const.$$

2. Інтеграл від скінченої алгебраїчної суми функцій дорівнює сумі інтегралів від цих функцій:

$$\iint_D \sum_{i=1}^{n} f(x, y)dxdy = \sum_{i=1}^{n} \iint_D f(x, y)dxdy.$$

3. Якщо в області D функція $f(x, y) \geq 0$, то

$$\iint_D f(x, y)dxdy \geq 0.$$

4. Якщо функції $f(x, y)$ і $\varphi(x, y)$ визначені в одній і тій самій області D і $f(x, y) \leq \varphi(x, y)$ для усіх $(x, y) \in D$, то справджується нерівність

$$\iint_D f(x, y)dxdy \leq \iint_D \varphi(x, y)dxdy.$$

Зокрема:

$$\left|\iint_D f(x, y)dxdy\right| \leq \iint_D |f(x, y)|dxdy.$$

5. Якщо область інтегрування функції $f(x, y)$ розбити на області D_1 і D_2, які не мають спільних внутрішніх точок, то

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint_{D_2} f(x, y)dxdy.$$

6. Якщо функція неперервна в обмеженій замкненій області D, яка має площу S, то

$$mS \leq \iint_D f(x, y)dxdy \leq MS,$$

де m і M – відповідно найменше і найбільше значення підінтегральної функції в області D.

7. Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в замкненій обмеженій області D, яка має площу S, то в цій області існує така точка $f(x_0,y_0)$, що

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(x_0,y_0)S,$$

зокрема

$\dfrac{1}{S}\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(x_0,y_0)$ – середнє значення функції $f(x,y)$ в області D.

1.1.3. Обчислення подвійного інтеграла

Випадок прямокутної області [3]. Нехай областю інтегрування є прямокутник $R:\ a \le x \le b,\quad c \le y \le d$, де a, b, c, d – довільні дійсні числа, і нехай також функція $f(x,y)$ задана і неперервна у зазначеному прямокутнику. Тоді вона є неперервною і за кожною змінною x і y. Отже, існують визначені інтеграли

$$F(x) = \int\limits_c^d f(x,y)dy \quad \text{і} \quad \Phi(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx.$$

Припустимо, що функції $F(x)$ і $\Phi(y)$ є інтегрованими відповідно на відрізках $[a;b]$, $[c;d]$, тобто існують інтеграли

$$\int\limits_a^b F(x)dx = \int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx, \qquad \int\limits_c^d \Phi(y)dy = \int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right)dy. \tag{1.3}$$

Інтеграли виду (1.3) називають повторними інтегралами.

Теорема 1. *Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в прямокутнику R, то існують повторні інтеграли (1.3) і виконуються рівності:*

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx, \tag{1.4}$$

$$\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right)dy. \tag{1.5}$$

Випадок криволінійної області.

Нехай областю інтегрування є криволінійна квадровна область D [1, 3]. Розглянемо окремі випадки, коли область D обмежена контуром або першого, або другого роду.

Означення. Контуром першого (рис. 1.3 [2]) (другого (рис. 1.4)) роду називають такий контур, який з прямими, паралельними осі OY (осі OX), має не більше двох спільних точок (крім, можливо, двох крайніх прямих).

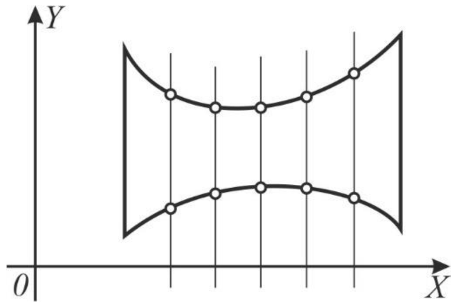

Рис. 1.3

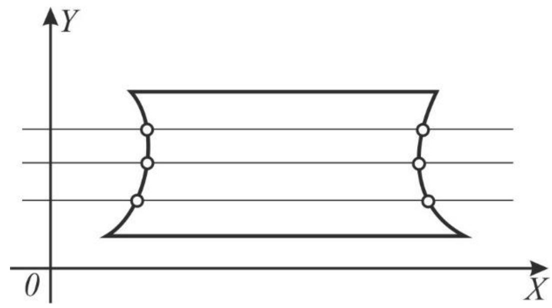

Рис. 1.4

Існують контури, які належать як до першого, так і до другого роду (рис. 1.5), а також контури, які не належать ні до першого, ні до другого роду (рис. 1.6).

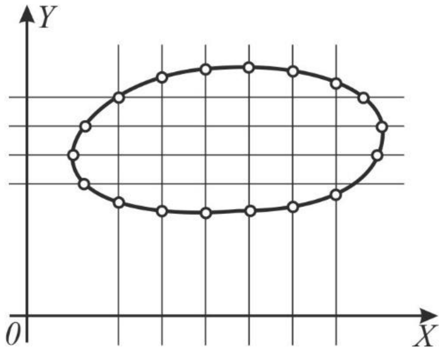

Рис. 1.5

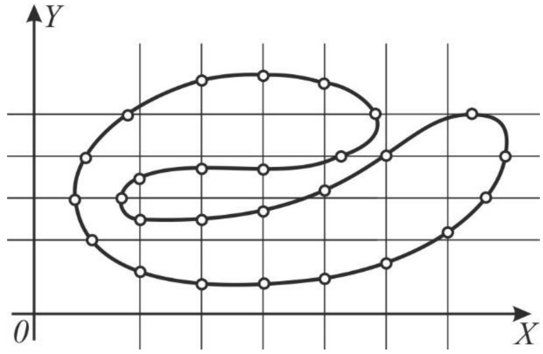

Рис. 1.6

Нехай областю інтегрування є квадровна область, обмежена контуром першого роду (рис. 1.7 [3]).

Припустимо, що криві $\overset{\frown}{AB}$ і $\overset{\frown}{CD}$ задано відповідно рівняннями в декартовій системі координат

$$y=\varphi(x), \quad y=\psi(x), \quad a\le x\le b,$$

де $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – неперервні функції на відрізку $[a;b]$.

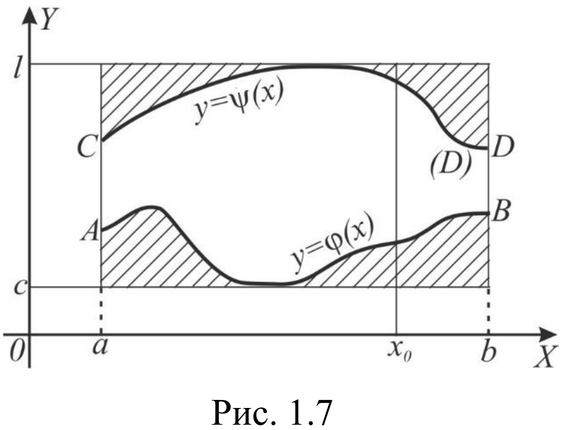

Рис. 1.7

Теорема 2. Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в квадровній області D, то для кожного значення $x\in[a;b]$ існує повторний інтеграл

$$\int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right)dx,$$

і виконується рівність

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right)dx. \qquad (1.6)$$

Теорема 3. Нехай D – квадровна область, обмежена контуром другого роду (рис. 1.8 [3]). Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в області D, то для кожного фіксованого значення $y \in [c;d]$ існує повторний інтеграл

$$\int_c^d \left(\int_{\omega(y)}^{\rho(y)} f(x,y)dx \right) dy,$$

і виконується рівність

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{\omega(y)}^{\rho(y)} f(x,y)dx \right) dy. \qquad (1.7)$$

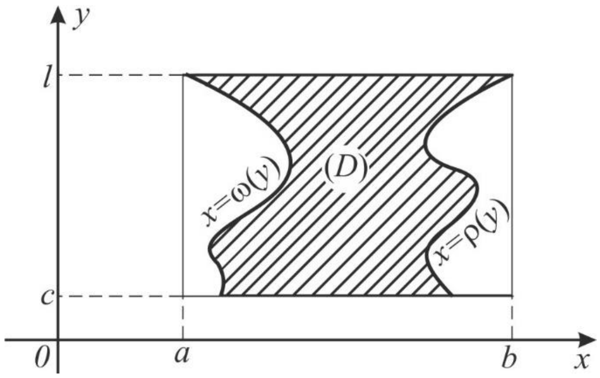

Рис. 1.8

Припустимо, що область D обмежена контуром, який належить як до першого, так і до другого роду (рис. 1.9). Якщо в області D функція $f(x,y)$ неперервна, тоді одночасно справджуватимуться формули (1.6) і (1.7)

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\omega(y)}^{\rho(y)} f(x,y)dx \right) dy,$$

тобто в цьому випадку результат не залежить від порядку інтегрування.

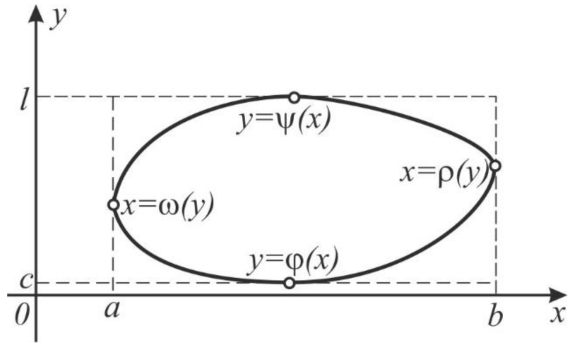

Рис. 1.9

1.1.4. Заміна змінних у подвійному інтегралі. Перехід до полярних координат

<u>**Заміна змінних у подвійному інтегралі.**</u> Нехай функція $f(x,y)$ неперервна в деякій замкненій області D, тоді існує інтеграл [1]

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy.$$

Припустимо, що за допомогою формул

$$x = x(u,\upsilon), \quad y = y(u,\upsilon) \qquad (1.8)$$

ми переходимо в інтегралі I до нових змінних u та υ. Вважатимемо, що з формул (1.8) однозначно можна визначити u та υ:

$$u = u(x,y), \quad \upsilon = \upsilon(x,y). \qquad (1.9)$$

Згідно з формулою (1.9), кожній точці $M(x;y) \in D$ ставиться у відповідність деяка точка $M^*(u;\upsilon)$ на координатній площині з прямокутними координатами u і υ. Нехай множина всіх точок $M^*(u;\upsilon)$ утворює обмежену замкнену область D^*. Формули (1.8) називають формулами перетворення координат, а формули (1.9) – формулами оберненого перетворення.

Теорема. Якщо перетворення (1.9) переводить замкнену обмежену область D в замкнену обмежену область D^* і є взаємно однозначним, і якщо функції (1.8) мають в області D^* неперервні частинні похідні першого порядку і відмінний від нуля визначник

$$J(u,\upsilon)=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial \upsilon} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial \upsilon} \end{vmatrix}, \qquad (1.10)$$

а функція $f(x,y)$ неперервна в області D, то справедлива така формула заміни змінних:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D^*} f(x(u,\upsilon),y(u,\upsilon))|J(u,\upsilon)|dud\upsilon. \qquad (1.11)$$

Функціональний визначник (1.10) називають визначником Якобі або якобіаном.

<u>**Перехід до полярних координат.**</u> Нехай у подвійному інтегралі $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ треба перейти до полярних координат ρ і θ за формулами:

$$x=\rho\cos\theta, \quad y=\rho\sin\theta.$$

Розіб'ємо область D на частини координатними лініями $\rho=const$ і $\theta=const$ (рис. 1.10 [3]).

Обчислимо площу $\Delta\sigma$ заштрихованої частини. Цю площу можна розглядати як різницю площ двох кругових секторів ODC і OAB. Тоді

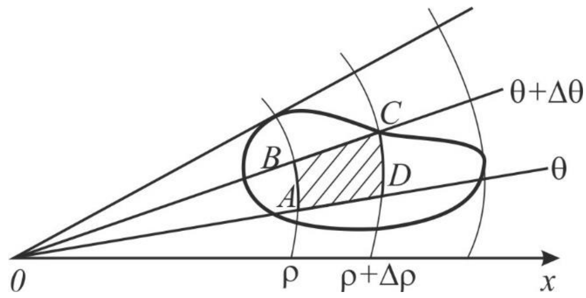

Рис. 1.10

0

$$\Delta\sigma=\frac{1}{2}(\rho+\Delta\rho)^2\Delta\theta-\frac{1}{2}\rho^2\Delta\theta=\rho\,\Delta\rho\,\Delta\theta+\frac{1}{2}\Delta\rho\,\Delta\rho\,\Delta\theta$$

Отже, диференціал площі $d\sigma$: $d\sigma=\rho\,d\rho\,d\theta$.

Таким чином, остаточно маємо

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,d\rho\,d\theta. \qquad (1.12)$$

Нехай область D лежить між прямими $\theta=\alpha$ і $\theta=\beta$ та між колами $\rho=a$ і $\rho=b$ (рис. 1.11 [3]). Припустимо, що рівняння кривої $BA_1\,A$ в полярній системі координат є $\rho=\rho_1(\theta)$, а рівняння кривої $BB_1\,A$ є $\rho=\rho_2(\theta)$. Тоді для кожного $\theta\in[\alpha,\beta]$ змінна ρ в області D змінюватиметься в межах $\rho_1(\theta)\le\rho\le\rho_2(\theta)$.

Отже,

$$\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,d\rho\,d\theta=\int\limits_\alpha^\beta\left(\int\limits_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,d\rho\right)d\theta. \qquad (1.13)$$

.

У формулі (1.13) межі по ρ змінні, а межі по θ сталі. Якщо межі по θ зробити змінними, а межі по ρ сталими, то отримаємо:

$$\iint\limits_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\, d\rho\, d\theta =$$

$$= \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\theta_1(\rho)}^{\theta_2(\rho)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\, d\theta \right) d\rho. \qquad (1.14)$$

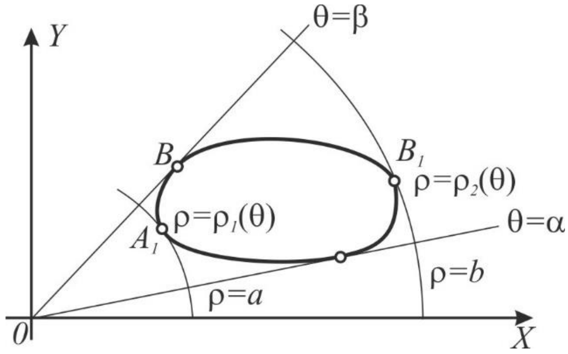

Рис. 1.11

1.1.5. Задачі, які приводять до поняття потрійного інтеграла

Задача про обчислення маси тіла. Нехай X належить певній тривимірній області υ [3], а $u = f(x, y, z)$. Тепер покладемо в (1.1)

$$\Delta\mu_i = \Delta\upsilon_i, \quad d\mu = d\upsilon = dxdydz,$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta\mu_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta\upsilon_i = \iiint\limits_{\upsilon} f(x,y,z)\, d\upsilon,$$

$$\iiint\limits_{\upsilon} f(x,y,z)\, d\upsilon = \iiint\limits_{\upsilon} f(x,y,z)\, dxdydz. \qquad (1.15)$$

Інтеграли (1.15) називають потрійними. Розглянемо фізичний зміст інтеграла.

Нехай $\gamma = \gamma(x, y, z)$, де $\gamma = \gamma(x, y, z) \ge 0$, є неперервною функцією і є змінною густиною деякого матеріального тіла об'єму V. Розіб'ємо тіло на комірки об'єму ΔV_i, виберемо в них довільно точки p_i, знайдемо найменше і найбільше значення функції в комірках m_i і M_i. Побудуємо суми

$$\underline{m}_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\upsilon_i, \quad \overline{m}_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\upsilon_i, \quad m_n = \sum_{i=1}^{n} \gamma(p_i)\Delta\upsilon_i, \quad \underline{m}_n \le m_n \le \overline{m}_n.$$

Границі $\lim\limits_{\lambda\to 0}\underline{m}_n$ і $\lim\limits_{\lambda\to 0}\overline{m}_n$ існують [1]. Тоді існує і $\lim\limits_{\lambda\to 0} m_n = m$, де m – маса тіла V ,

$$m = \lim_{\lambda\to 0}\underline{m}_n = \lim_{\lambda\to 0}\overline{m}_n = \lim_{\lambda\to 0} m_n.$$

Проте

$$\lim_{\lambda\to 0} m_n = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\gamma(p_i)\Delta\upsilon_i = \iiint\limits_{\upsilon}\gamma(x,y,z)d\upsilon,$$

тоді

$$m = \iiint\limits_{\upsilon}\gamma(x,y,z)\, d\upsilon. \qquad (1.16)$$

Таким чином, доведено, що коли $\gamma(x, y, z)$ неперервна в області свого визначення, то існує потрійний інтеграл. Якщо $\gamma(x, y, z) \ge 0$ і є густиною, то потрійний інтеграл дорівнює масі тіла об'єму V . Коли у формулі (1.16) покласти $\gamma(x, y, z) = 1$, то маса тіла чисельно дорівнюватиме об'єму тіла

$$V = \iiint\limits_{\upsilon} d\upsilon = \iiint\limits_{\upsilon} dxdydz. \quad (1.17)$$

1.1.6. Властивості потрійного інтеграла

1. Існування і величина потрійного інтеграла не залежать від тих значень функції, яких вона набуває вздовж скінченого числа поверхонь нульового об'єму.

2. Якщо область $\upsilon = \upsilon_1 + \upsilon_2$, то

$$\iiint\limits_{\upsilon} f(x,y,z)\,d\upsilon = \iiint\limits_{\upsilon_1} f(x,y,z)\,d\upsilon + \iiint\limits_{\upsilon_2} f(x,y,z)\,d\upsilon.$$

3. Якщо $k = const$, то

$$\iiint\limits_{\upsilon} kf(x,y,z)\,d\upsilon = k\iiint\limits_{\upsilon_1} f(x,y,z)\,d\upsilon.$$

4. Якщо в області інтегрування $f(x,y,z) \geq 0$, то

$$\iiint\limits_{\upsilon} f(x,y,z)\,d\upsilon \geq 0.$$

5. Якщо функції $f(x,y,z)$ і $\varphi(x,y,z)$ визначені в одній і тій самій області υ і $f(x,y,z) \geq \varphi(x,y,z)$, то

$$\iiint\limits_{\upsilon} f(x,y,z)\,d\upsilon \geq \iiint\limits_{\upsilon} \varphi(x,y,z)\,d\upsilon.$$

6. $\iiint\limits_{\upsilon} [f_1(x,y,z) \pm f_2(x,y,z)]\,d\upsilon = \iiint\limits_{\upsilon} f_1(x,y,z)\,d\upsilon \pm \iiint\limits_{\upsilon} f_2(x,y,z)\,d\upsilon.$

7. Нехай m і M – найменше і найбільше значення неперервної функції в області G. Тоді виконуються нерівності

$$m\upsilon \leq \iiint\limits_{\upsilon} f(x,y,z)\,d\upsilon \leq M\upsilon,$$

тобто справджується (Теорема про середнє значення):

$$\iiint\limits_{\upsilon} f(x,y,z)\,d\upsilon = f(x_0,y_0,z_0)\upsilon,$$

де (x_0, y_0, z_0) – певна внутрішня точка області υ.

1.1.7. Обчислення потрійного інтеграла

Нехай область D обмежена знизу і зверху поверхнями $z = z_1(x,y)$ і $z = z_2(x,y)$, а з боків циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі OZ. Позначимо проекцію області υ на площину XOY через D (рис. 1.12 [2]) і вважатимемо, що функції $z_1(x,y)$ і $z_2(x,y)$ неперервні в D. Якщо при цьому область D є правильною, то область υ називають правильною у напрямі осі OZ. Припустимо, що кожна пряма, яка проходить через кожну внутрішню точку $(x,y,0) \in D$ паралельно осі OZ, перетинає межу області υ у точках M і N. Точку M назвемо точкою входу в область υ, а точку N – точкою виходу з області υ, а їхні аплікати позначимо відповідно через $z_{\text{вх}}$ і $z_{\text{вих.}}$. Тоді $z_{\text{вх}}= z_1(x, y)$, $z_{\text{вих.}}= z_2(x, y)$ і для будь-якої неперервної області υ функції $f(x, y, z)$ надається формула

$$\iiint\limits_{\upsilon} f(x, y, z)\, d\upsilon = \iint\limits_{D} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz. \qquad (1.18)$$

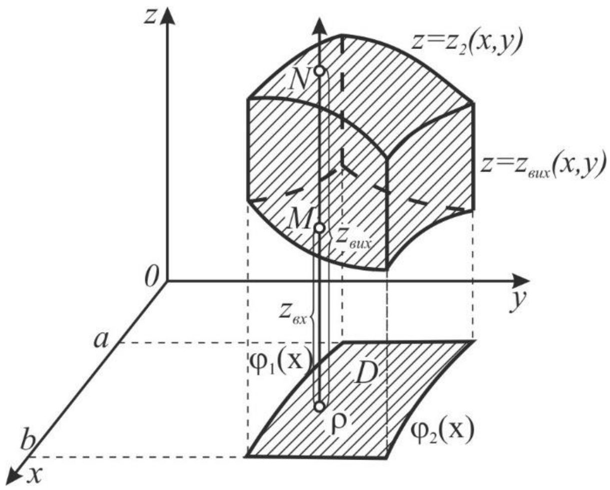

Рис. 1.12

1. Якщо область D обмежена кривими $y = \varphi_1(x)$ і $y = \varphi_2(x)$ $(a \le b)$, де $\varphi_1(x)$ і $\varphi_2(x)$ – неперервні функції, тобто $\upsilon = \{z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y), \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), \quad a \le x \le b\}$, то отримаємо формулу

$$\iiint\limits_{\upsilon} f(x, y, z)\, d\upsilon = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz. \qquad (1.19)$$

2. Якщо область υ правильна в напрямі осі OX:

$\upsilon = \{x_1(y, z) \le x \le x_2(y, z), \psi_1(y) \le z \le \psi_2(y), \quad c \le y \le d\}$,

$x_1(y, z), x_2(y, z), \psi_1(y), \psi_1(y)$ – неперервні функції, то

$$\iiint\limits_{\upsilon} f(x, y, z)\, d\upsilon = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dz \int\limits_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x, y, z)\, dx. \qquad (1.20)$$

3. Якщо областю інтегрування є паралелепіпед:

$\upsilon = \{a \le x \le b, c \le y \le d, \quad k \le z \le l\}$, то

$$\iiint\limits_{\upsilon} f(x, y, z)\, d\upsilon = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{k}^{l} f(x, y, z)\, dz. \qquad (1.21)$$

1.1.8. Заміна змінних у потрійному інтегралі

Якщо обмежена замкнена область υ взаємно однозначно відображається на область υ^* за допомогою неперервно диференційованих функцій $x = x(u, \upsilon, w)$, $y = y(u, \upsilon, w)$, $z = z(u, \upsilon, w)$, якобіан J в області υ^* не дорівнює нулю [1]:

$$J(u, \upsilon, z) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial \upsilon} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial \upsilon} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial \upsilon} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \ne 0,$$

і $f(x, y, z)$ – неперервна в υ, то справедлива формула

$$\iiint\limits_{\upsilon} f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint\limits_{\upsilon^*} f\left(x(u, \upsilon, w), y(u, \upsilon, w), z(u, \upsilon, w)\right) \left|J(u, \upsilon, w)\right| dud\upsilon dw. \qquad (1.22)$$

1.1.9. Перехід до циліндричних та сферичних координат

Циліндричні координати. Як відомо, прямокутні координати через циліндричні виражаються формулами [1]

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, & 0 \le \rho < +\infty, \\ y = \rho\sin\varphi, & 0 \le \varphi < 2\pi, \\ z = z, & -\infty < z < +\infty. \end{cases}$$

Якщо взяти $\rho = u, \quad \varphi = \upsilon, \quad z = w$, то, скориставшись якобіаном, знайдемо

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

Тоді

$$\iiint\limits_{\upsilon} f(x, y, z)\,dxdydz = \iiint\limits_{\upsilon^*} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,\rho d\rho d\varphi dz. \quad (1.23)$$

Сферичні координати. Перехід від прямокутних координат до сферичних здійснюється згідно з рівностями [1]

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, & 0 \le r < +\infty, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, & 0 \le \varphi < 2\pi, \\ z = r\cos\theta, & 0 \le \theta < \pi. \end{cases}$$

Якщо взяти $r = u, \quad \varphi = \upsilon, \quad \theta = w$, то, скориставшись якобіаном, знайдемо

$$J = r^2 \sin\theta.$$

Тоді

$$\iiint\limits_{\upsilon} f(x, y, z)\,dxdydz = \iiint\limits_{\upsilon^*} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\,r^2|\sin\theta|\,drd\varphi d\theta. \quad (1.24)$$

1.1.10. Застосування подвійних та потрійних інтегралів

Застосування інтегралів до задач геометрії.

1. *Площа плоскої фігури.* Якщо в площині OXY задано фігуру, що має форму обмеженої замкненої області D, то площу S такої фігури знаходять за формулою

$$S = \iint\limits_{D} dxdy.$$

(1.25)

2. *Об'єм тіла.*

1) Об'єм циліндричного тіла V, обмеженого зверху неперервною поверхнею $z = f(x, y)$, де $f(x, y) \ge 0$, знизу – замкненою обмеженою областю D площини $z = 0$, з боків – циліндричною поверхнею, напрямна якої збігається з межею області D, а твірні паралельні OZ, дорівнює

$$V = \iint\limits_{D} f(x, y)\,dxdy. \quad (1.26)$$

2) Якщо певне тіло є обмеженою і замкненою областю υ , що має об'єм V, то

$$V = \iiint\limits_{\upsilon} dxdydz. \qquad (1.27)$$

3. *Площа поверхні.* Якщо поверхня σ, задана рівнянням $z = f(x, y)$, проектується на площину OXY в область D і функції $f(x, y)$, $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ неперервні в цій області, то площу Q поверхні σ знаходимо за формулою

$$Q = \iint\limits_{D} \sqrt{1 + \left(f'_x(x, y)\right)^2 + \left(f'_y(x, y)\right)^2}\, dxdy.$$

(1.28)

<u>Застосування інтегралів до задач механіки.</u>

1. *Маса пластини.*

1) Нехай на площині OXY маємо матеріальну пластину, яка має форму обмеженої замкненої області D, в кожній точці якої густина визначається неперервною функцією $\gamma = \gamma(x, y)$. Тоді маса цієї пластини

$$m = \iint\limits_{D} \gamma(x, y) dxdy. \qquad (1.29)$$

2) Нехай υ – обмежена замкнена область тривимірного простору, яку займає певне матеріальне тіло з густиною $\gamma = \gamma(x, y, z)$, де $\gamma(x, y, z)$ – неперервна функція в області υ, тоді:

$$m = \iiint\limits_{\upsilon} \gamma(x, y, z)\, dxdydz. \qquad (1.30)$$

2. *Центр маси. Статичні моменти.*

1) Матеріальна пластина міститься в області D і має змінну густину $\gamma = \gamma(x, y)$, то:

а) статичні моменти

$$M_x = \iint\limits_{D} y\gamma(x, y) dxdy, \qquad M_y = \iint\limits_{D} x\gamma(x, y) dxdy; \qquad (1.31)$$

б) координати центра мас визначають

$$x_c = \frac{\iint\limits_{D} x\gamma(x, y) dxdy}{\iint\limits_{D} \gamma(x, y) dxdy}, \qquad y_c = \frac{\iint\limits_{D} y\gamma(x, y) dxdy}{\iint\limits_{D} \gamma(x, y) dxdy}. \qquad (1.32)$$

2) Матеріальне тіло займає просторову область υ і має змінну густину $\gamma = \gamma(x, y, z)$, тоді:

а) $M_{xy} = \iiint\limits_{\upsilon} z\gamma(x, y, z)\; dxdydz$, – статичний момент відносно координатної площини OXY;

б) $M_{xz} = \iiint\limits_{\upsilon} y\gamma(x, y, z)\, dxdydz$, – статичний момент відносно координатної площини OXZ;

в) $M_{yz} = \iiint\limits_{\upsilon} x\gamma(x, y, z)\, dxdydz$, – статичний момент відносно координатної площини OYZ;

г) $x_C = \dfrac{M_{yz}}{m} = \dfrac{\iiint\limits_{\upsilon} x\gamma(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint\limits_{\upsilon} \gamma(x,y,z)\,dxdydz}$,

$$y_C = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{\iiint\limits_{\upsilon} y\gamma(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint\limits_{\upsilon} \gamma(x,y,z)\,dxdydz},$$

$$z_C = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\iiint\limits_{\upsilon} z\gamma(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint\limits_{\upsilon} \gamma(x,y,z)\,dxdydz}. \quad (1.33)$$

3. Моменти інерції.

1) Для матеріальної пластини в області D моменти інерції відносно координатних осей та початку координат:

$$I_x = \iint\limits_D y^2\gamma(x,y)\,dxdy,$$

$$I_y = \iint\limits_D x^2\gamma(x,y)\,dxdy,$$

$$I_0 = \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\gamma(x,y)\,dxdy. \quad (1.34)$$

2) Для матеріального тіла в області υ моменти інерції відносно координатних площин та початку координат:

$$I_{xy} = \iiint\limits_{\upsilon} z^2\gamma(x,y,z)\,dxdydz,$$

$$I_{yz} = \iiint\limits_{\upsilon} x^2\gamma(x,y,z)\,dxdydz, \quad (1.35)$$

$$I_{xz} = \iiint\limits_{\upsilon} y^2\gamma(x,y,z)\,dxdydz,$$

$$I_0 = \iiint\limits_{\upsilon} \left(x^2+y^2+z^2\right)\gamma(x,y,z)\,dxdydz.$$

1.2. Зразки розв'язування задач

Задача 1. Записати подвійний інтеграл від функції $f(x,y)$ по області D, обмеженої прямою $y=x$ і параболою $y=x^2$, у вигляді повторних інтегралів двома способами (за формулами (1.6) і (1.7)).

🕮 *Розв'язок.* На рис. 1.13 зображено область інтегрування D. Для обчислення подвійного інтегралу по цій області можна скористатися як формулою (1.6), так і формулою (1.7), оскільки границя області D перетинається не більш, ніж у двох точках як прямими, паралельними осі Ox, так і прямими, паралельними осі Oy.

Застосуємо формулу (1.6), тобто внутрішній інтеграл беремо по y, вважаючи x сталою, а зовнішній інтеграл – по x. Область D знаходиться у смузі між прямими $x = 0$ і $x = 1$, отже, $0 \le x \le 1$. Щоб знайти межі зміни для y, вчинимо так: візьмемо на осі Ox довільну точку $x \in (0,1)$ і проведемо через неї пряму, паралельну осі Oy в напрямку цієї осі. Вона перетинає границю області D спочатку в точці C, потім у точці B (рис. 1.13). У точкці C ордината $y = x^2$, в точці B ордината $y = x$, тобто $x^2 \le y \le x$. Таким чином,

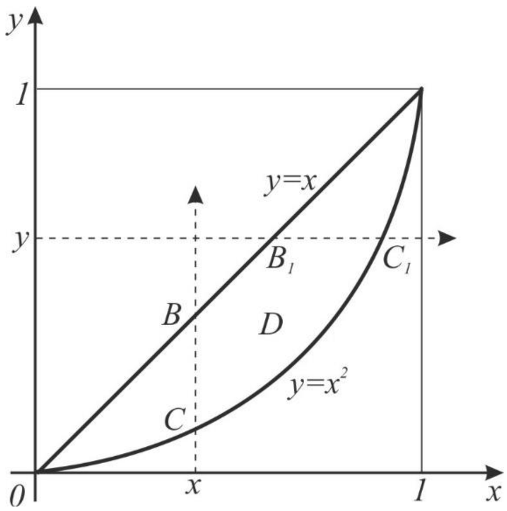

Рис. 1.13

$D = \{(x, y)\colon 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le x\}$. Тоді, за формулою (1.6), маємо:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} f(x,y)dy.$$

Застосуємо до цього подвійного інтеграла формулу (1.7). У цьому випадку внутрішній інтеграл беремо за змінною x, вважаючи y сталою, а зовнішній – за y. Область D знаходиться в смузі між прямими $y = 0$ і $y = 1$, отже, $0 \le y \le 1$. Для того, щоб встановити межі зміни змінної x, візьмемо на осі Oy довільну точку $y \in (0,1)$ і проведемо через неї пряму, паралельну осі Ox в напрямку цієї ж осі. Оскільки точка B_1 входу цієї прямої в область D має абсцису $x = y$, а точка C_1 виходу цієї прямої з області D має абсцису $x = \sqrt{y}$, то змінна x змінюється від y до $\sqrt{y}$. Отже,

$D = \{(x, y)\colon 0 \le y \le 1,\ y \le x \le \sqrt{y}\}$. Таким чином, за формулою (1.7), маємо

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 dy \int_{y}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx.$$

<u>Задача 2.</u> Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 dy \int_{y}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^{1} f(x,y)dx.$$

🕮 *<u>Розв'язок.</u>* На відміну від ***задачі 1***, в цій задачі не дано область інтегрування D, і ми повинні з'ясувати її вигляд за межами інтегрування подвійних інтегралів. Позначимо через D_1 – область інтегрування першого повторного інтеграла, через D_2 – область інтегрування другого повторного інтеграла. Позаяк внутрішні інтеграли беруть по x, то їх межі показують, якими лініями області D_1 і D_2 обмежені справа і зліва. Область D_1 задають нерівностями $0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le \sqrt{y}$, тобто $D_1 = \{(x, y)\colon 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le \sqrt{y}\}$.

Відповідно, область D_2 задають нерівностями $1 \le y \le e,\ \ln y \le x \le 1$, тобто $D_2 = \{(x, y)\colon 1 \le y \le e,\ \ln y \le x \le 1\}$. Очевидно, $D = D_1 \cup D_2$ (рис.1.14). Область D розміщена у вертикальній смузі між прямими $x = 0$, $x = 1$ і між лініями $y = x^2$, y

$= e^x$. Це означає, що $D = \{(x, y){:}\ 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le e^x\}$. Тоді, за формулою (1.6), отримуємо

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{e^x} f(x,y)\,dy$$

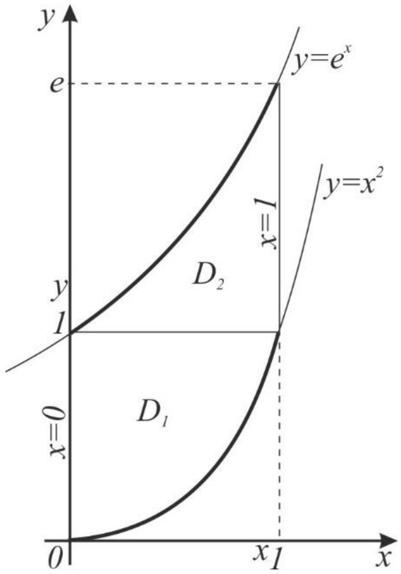

Рис. 1.14

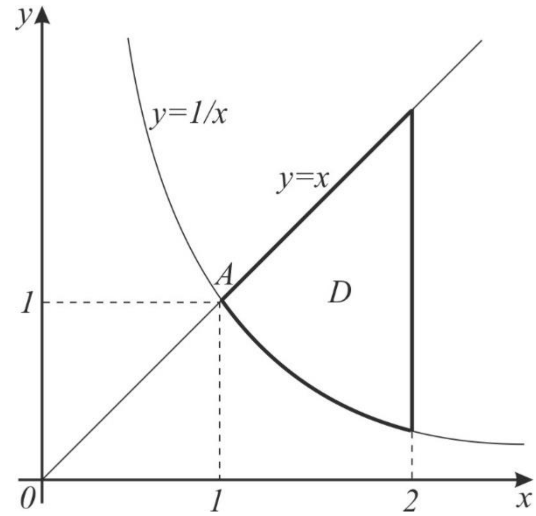

Рис. 1.15

.

<u>Задача 3.</u> Обчислити $I = \int\limits_0^5 dx \int\limits_0^{5-x} \sqrt{4+x+y}\,dy$.

<u>*Розв'язок.*</u>

$$\int\limits_0^5 dx \int\limits_0^{5-x} \sqrt{4+x+y}\,dy = \int\limits_0^5 dx \int\limits_0^{5-x} \sqrt{4+x+y}\,d(4+x+y) = \int\limits_0^5 dx \left.\frac{2(4+x+y)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^{5-x} =$$

$$= \frac{2}{3}\int\limits_0^5 \left(9^{\frac{3}{2}} - (4+x)^{\frac{3}{2}}\right)dx = \frac{2}{3}\left[27x - \frac{2(4+x)^{\frac{5}{2}}}{5}\right]\Bigg|_0^5 = \frac{2}{3}\left[27\cdot 5 - \frac{2}{5}\cdot 9^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{5}\cdot 4^{\frac{5}{2}}\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\left[135 - \frac{2}{5}\cdot 3^5 + \frac{2}{5}\cdot 32\right] = \frac{2}{3}\left[135 - \frac{27\cdot 18}{5} + \frac{64}{5}\right] = \frac{2}{3}\cdot\frac{675+64-486}{5} = \frac{506}{15}.$$

<u>Задача 4.</u> Обчислити $I = \int\limits_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx \int\limits_0^a y\,dy$.

<u>*Розв'язок.*</u>

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx \int\limits_0^a y\,dy = \int\limits_0^{2\pi} \cos^2 x \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^a dx = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{a^2}{4}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{a^2}{2} \cdot \pi.$$

<u>Задача 5.</u> Обчислити: $I=\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,dxdy$, де D обмежена прямими $y=x$ і $x=2$ та гіперболою $xy=1$.

🕮 *<u>Розв'язок.</u>* Область інтегрування зображено на рис. 1.15. Розв'язуючи систему, яка складається з рівнянь прямої $y=x$ і гіперболи $xy=1$, отримаємо координати точки їх перетину $A(1,1)$. Для обчислення інтеграла по області D зручно скористатися формулою (1.6). Межі зовнішнього інтеграла по x – це абсциси найлівішої і найправішої точок області D, тобто 1 і 2. При $1 \le x \le 2$, y буде змінюватися від $1/x$ до x. Отже,

$D = \{ (x; y)\colon 1 \le x \le 2,\ 1/x \le y \le x \}$. Тоді

$$I = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}dy = \int_1^2 x^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{dy}{y^2} = \int_1^2 x^2 dx \left(\frac{-1}{y} \right)\Bigg|_{\frac{1}{x}}^{x} = \int_1^2 x^2 dx \left(-\frac{1}{x} + x \right) = \int_1^2 \left(x^3 - x \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_1^2 = \frac{9}{4}.$$

Якщо застосувати формулу (1.7), то обчислення будуть більш громіздкими.

<u>Задача 6.</u> Обчислити $I = \iint\limits_D y^2 \cos\frac{xy}{2}\,dxdy$ де D – область, обмежена лініями $x=0$, $y = \sqrt{2\pi}$, $y = 2x$.

🕮 *<u>Розв'язок.</u>* Знайдемо абсцису точки перетину прямих $y=2x$ і $y=\sqrt{2\pi}$: $\sqrt{2\pi} = 2x \Rightarrow x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Область інтегрування D зображена на рисунку 1.16.

$D = \{(x; y)\colon 0 \le y \le \sqrt{2\pi},\ 0 \le x \le y/2\}$

За формулою (1.7) маємо

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}} y^2 dy \int_0^{\frac{y}{2}} \cos\frac{xy}{2} dx = \int_0^{\sqrt{2\pi}} y^2 \frac{2}{y} \sin\frac{xy}{2}\Bigg|_0^{\frac{y}{2}} dy =$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{2\pi}} y \sin\frac{y^2}{4} dy = 4\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin\frac{y^2}{4}\, d\left(\frac{y^2}{4}\right) =$$

$$= -4\cos\frac{y^2}{4}\Bigg|_0^{\sqrt{2\pi}} = -4\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) = 4.$$

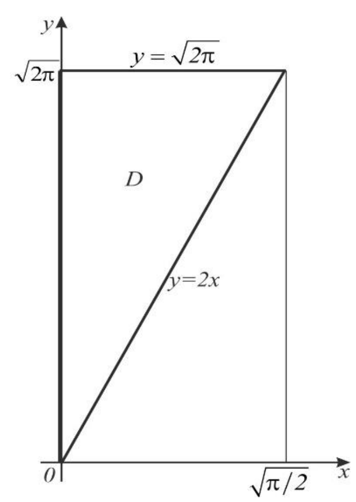

Рис. 1.16

Задача 7. Обчислити: $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, де D – область, обмежена лініями x=0, y=0, x+y =3.

📖 *Розв'язок.* Пропонуємо студентові самостійно побудувати область інтегрування. Вона має вигляд $D = \{(x;\ y): 0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 3 - x\}$. Отже, за формулою (1.6) отримуємо

$$\iint\limits_D (x+y)dxdy = \int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{3-x} (x+y)dy = \int\limits_0^3 \left(x\int\limits_0^{3-x} dy + \int\limits_0^{3-x} ydy \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^3 \left(x(3-x) + \frac{(3-x)^2}{2} \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^3 \left(3x - x^2 + \frac{9}{2} - 3x + \frac{x^2}{2} \right) dx = \left(\frac{9}{2}x - \frac{x^3}{6} \right)\Bigg|_0^3 = \frac{27}{2} - \frac{27}{6} = \frac{18}{2} = 9.$$

У деяких випадках, коли область інтегрування D є кругом, або частиною круга, або коли підінтегральна функція містить в собі двочлен виду x^2+y^2, обчислення подвійного інтеграла спрощується у разі переходу до полярних координат (див. формули (1.12) – (1.14)). При цьому двочлен x^2+y^2 перетворюється в r^2.

Задача 8. Обчислити $\iint\limits_S \sqrt{4 - x^2 - y^2}\,dxdy$, де S=$\{(x,y)$: $x^2+y^2 \le 4$, $y \ge 0\}$.

📖 *Розв'язок.* Представимо рівняння кола $x^2+y^2=4$ в полярних координатах. Маємо: $x^2+y^2 = 4 \Leftrightarrow \rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta = 4 \Leftrightarrow \rho^2 = 4 \Rightarrow \rho = 2$.

Розставимо межі інтегрування в повторному інтегралі. Областю інтегрування є півкруг (рис. 1.17, *а*). Всі точки цього півкруга будуть охоплені, якщо кут θ повертати від $\theta = 0$ до $\theta = \pi$. Значить, за будь-якого $0 \le \theta \le \pi$, полярний радіус ρ буде змінюватися від 0 до 2. Таким чином,

$S = \{(\rho,\ \theta): 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \rho \le 2\}$. Отже, за формулою (1.13) отримаємо

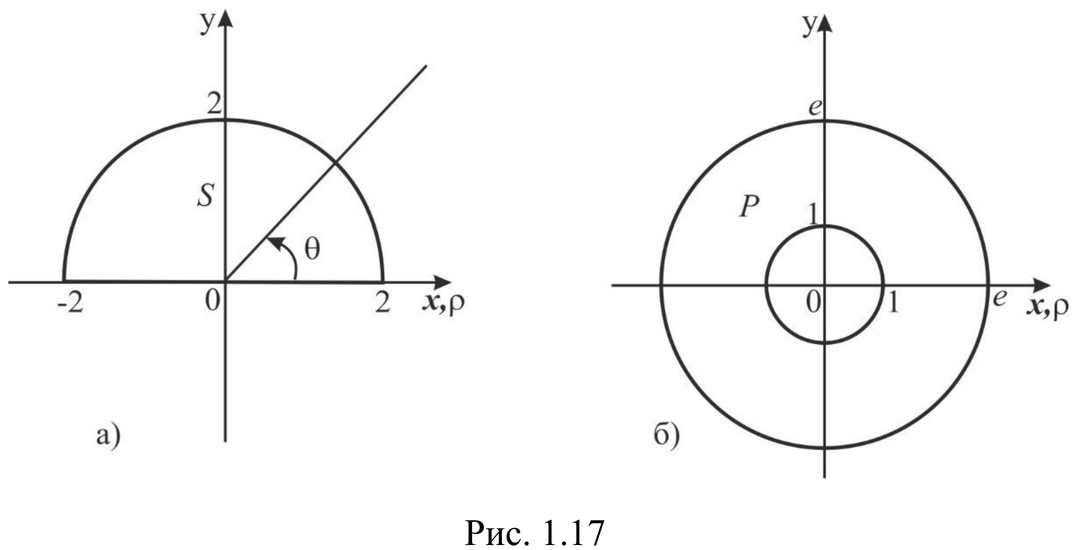

Рис. 1.17

$$\iint\limits_S \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy=\int\limits_0^\pi d\theta\int\limits_0^2 \sqrt{4-\rho^2}\,\rho\,d\rho=\int\limits_0^\pi d\theta\int\limits_0^2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(4-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(4-\rho^2\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi d\theta\frac{2\left(4-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^2=-\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi\left(0-\frac{16}{3}\right)d\theta=\frac{8}{3}\theta\Big|_0^\pi=\frac{8}{3}\pi.$$

<u>Задача 9.</u> Обчислити $\iint\limits_P \frac{\ln\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}dxdy$, де P – кільце між колами радіусів e і 1 з центром у початку координат [6].

📖 *<u>Розв'язок.</u>* На рисунку 1.17, *б* зображено область P: $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=e^2$ – рівняння заданих кіл в декартових координатах, а в полярній системі ці кола задаються формулами $\rho = 1$ і $\rho = e$. Отже, $P=\{(\rho,\theta)$: $0 \le \theta \le 2\pi$, $1 \le \rho \le e\}$. Тоді за формулами переходу до полярних координат отримаємо

$$\iint\limits_P \frac{\ln\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}dxdy=\int\limits_0^{2\pi} d\theta\int\limits_1^e \frac{\ln\rho^2}{\rho^2}\cdot\rho\,d\rho=\int\limits_0^{2\pi} d\theta\int\limits_1^e 2\cdot\ln\rho\,d(\ln\rho)=$$

$$=2\int\limits_0^{2\pi} d\theta\frac{\ln^2\rho}{2}\Bigg|_1^e=2\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{2}d\theta=\theta\Big|_0^{2\pi}=2\pi.$$

<u>Задача 10.</u> Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y^2 = 4x + 4$, $y=$ $= 2 - x$.

📖 *<u>Розв'язок.</u>* Цю фігуру зображено на рис. 1.18, *а*. Розв'язуючи систему рівнянь $y^2 = 4x + 4$, $y = 2 - x$, знайдемо точки перетину ліній: $(2 - x)^2= =4x+ + 4$ $\Leftrightarrow 4 - 4x+ x^2 = 4x+4 \Leftrightarrow x^2-8x = 0$, $x_1=0$, $x_2=8$, $y_1=2$, $y_2=-6$.

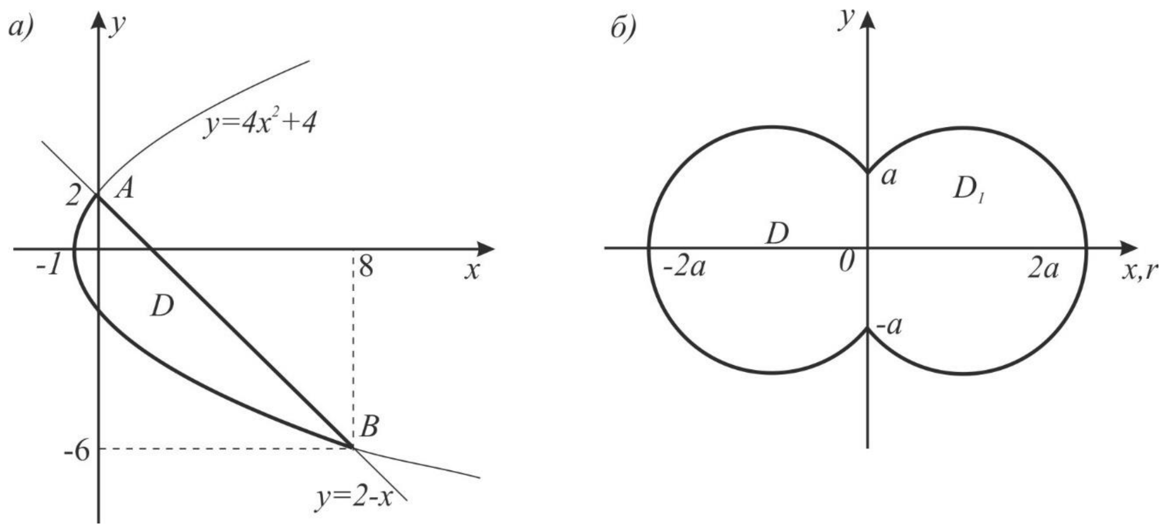

Рис. 1.18

Тобто, лінії перетинаються в точках $A(0;2)$, B (8;6). Тоді $D = \{(x, y)$: $-6 \le y \le 2$, $(y^2 - 4)/4 \le x \le 2 - y\}$ і маємо

$$S(D)=\int_{-6}^{2}dy\int_{\frac{(y^2-4)}{4}}^{2-y}dx=\int_{-6}^{2}x\Big|_{\frac{(y^2-4)}{4}}^{2-y}dy=\int_{-6}^{2}\left(2-y-\frac{y^2-4}{4}\right)dy=\int_{-6}^{2}\left(3-y-\frac{y^2}{4}\right)dy=$$

$$=\left(3y-\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{12}y^3\right)\Bigg|_{-6}^{2}=\frac{64}{3}.$$

Задача 11. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $(x^2+y^2)^2=a^2(4x^2+y^2)$, $a>0$ [6].

📖 *Розв'язок.* Очевидно, що крива симетрична відносно осі Ox, осі Oy і початку координат. Перейдемо до полярних координат:

$$\rho^4=a^2\rho^2\left(4\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)\Rightarrow\rho^2=a^2\left(3\cos^2\theta+1\right)\Rightarrow\rho=a\sqrt{3\cos^2\theta+1}.$$

Побудуємо графік кривої (рис. 1.18, *б*). Завдяки симетрії, вся площа $S=4S_1$, де $S_1=S(D_1)$, $D_1=\{(\rho,\theta)\colon 0\le\theta\le\pi/2,\ 0\le\rho\le a\sqrt{3\cos^2\theta+1}\}$. Отже,

$$S(D)=4\iint_{D_1}dxdy=4\iint_{D_1}\rho\,d\rho\,d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\sqrt{3\cos^2\theta+1}}\rho\,d\rho=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{a\sqrt{3\cos^2\theta+1}}=$$

$$=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(3\cos^2\theta+1\right)d\theta=2a^2\cdot3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta+2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos2\theta\right)d\theta+$$

$$+2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta=5a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta+3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos2\theta\,d\theta=5a^2\,\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{3a^2}{2}\sin2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{5}{2}\pi a^2.$$

☝ *Перш ніж перейти до прикладів на обчислення об'ємів, зазначимо, що для обчислення об'єму якого-небудь тіла корисно зробити просторовий рисунок, який створював би уявлення про форму цього тіла. Якщо ж такий рисунок не вдається побудувати, то можна обмежитися хоча б рисунком, який зображає тільки область інтегрування на площині xOy. Однак і в цьому випадку необхідно уявити собі, хоча би у найзагальніших рисах, те тіло, об'єм якого потрібно знайти.*

Задача 12. Обчислити об'єм тіла, обмеженого параболоїдом обертання $z=x^2+y^2$, координатними площинами і площиною $x+y=1$ [6].

📖 *Розв'язок.* Поверхня параболоїда обертання $z=x^2+y^2$ отримується обертанням навколо осі Oz параболи $z=x^2$. Рівняння $x+y=1$ у просторі визначає площину, паралельну осі Oz, яка проходить через пряму $x+y=1$ в площині xOy. На рис. 1.19, *а* зображено тіло, об'єм якого потрібно обчислити. Це тіло зверху обмежене увігнутою поверхнею параболоїда $z=x^2+y^2$, знизу – площиною xOy, спереду – площиною $x+y=1$, зліва – площиною xOy ($y=0$), ззаду – площиною yOz ($x=0$). Оскільки це тіло циліндричне, то для обчислення його об'єму можна використати формулу (1.26):

$$V=\iint_D\left(x^2+y^2\right)\,dxdy,$$

де $D=\{(x,y)\colon 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\}$ – прямокутний трикутник. Отже,

$$V=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(x^2+y^2\right)\,dy=\int_0^1\left(x^2y+\frac{1}{3}y^3\right)\Bigg|_0^{1-x}dx=\int_0^1\left(x^2(1-x)+\frac{1}{3}(1-x)^3\right)dx=\frac{1}{6}.$$

<u>Задача 13.</u> Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=2-x-y$, $y=x^2$, $y=x$, $z=0$.

📖 *<u>Розв'язок.</u>* Поверхня $y=x^2$ – це параболічний циліндр з твірною, паралельною осі Oz, і напрямною параболою $y=x^2$ в площині xOy. Похила площина $z=2-x-y$ відтинає на осях координат рівні відрізки (по дві одиниці довжини). Площина $y=x$ проходить через вісь Oz і пряму $y=x$ в площині xOy. $z=0$ – рівняння площини xOy. Тіло, обмежене цими поверхнями, зображене на рисунку 1.19, *б*. Оскільки це тіло циліндричне і $z=2-x-y$, то для обчислення його об'єму можна використати формулу (1.26)

$$V=\iint_D(2-x-y)\,dxdy,$$

де $D=\{(x,y)\colon 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le x\}$. Отже,

$$V=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}(2-x-y)dy=\int_0^1\left(2y-xy-\frac{1}{2}y^2\right)\Bigg|_{x^2}^{x}dx=\int_0^1\left(2x-\frac{7}{2}x^2+x^3+\frac{1}{2}x^4\right)dx=\frac{11}{60}.$$

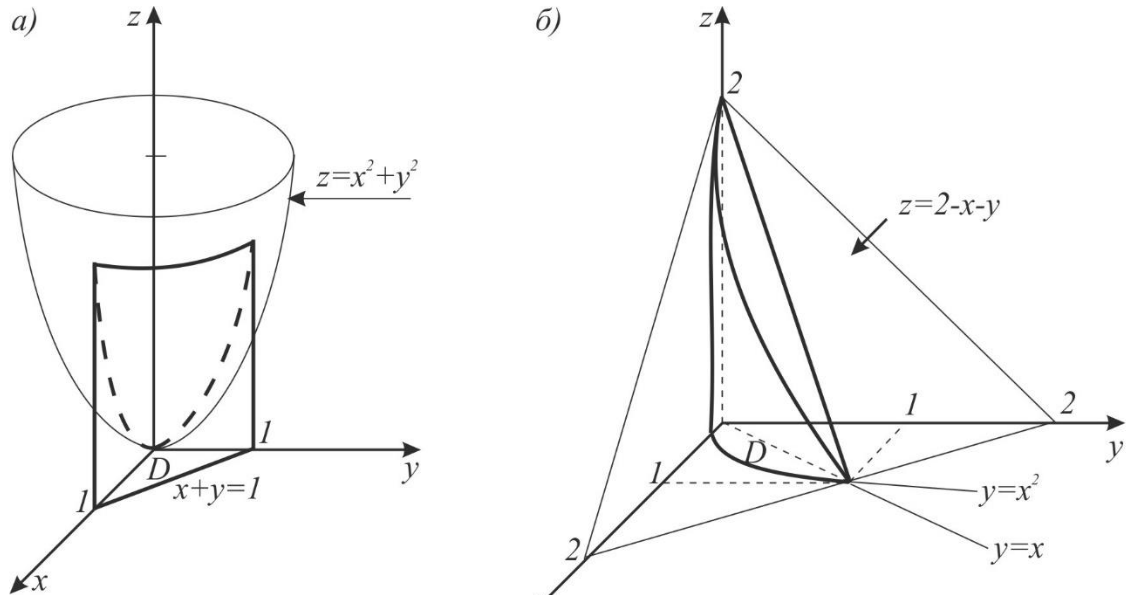

Рис. 1.19

☝ *Студенту рекомендується самостійно розібратися, як отримуються межі інтегрування у внутрішньому і зовнішньому інтегралах.*

<u>Задача 14.</u> Обчислити об'єм тіла, обмеженого гіперболічним параболоїдом $z=xy$ і площинами $x+y=a$, $z=0$.

📖 *Розв'язок.* Задане тіло зображено на рис. 1.20, *а*. На рис. 1.20, *б* зображено проекцію цього тіла на площину xOy.

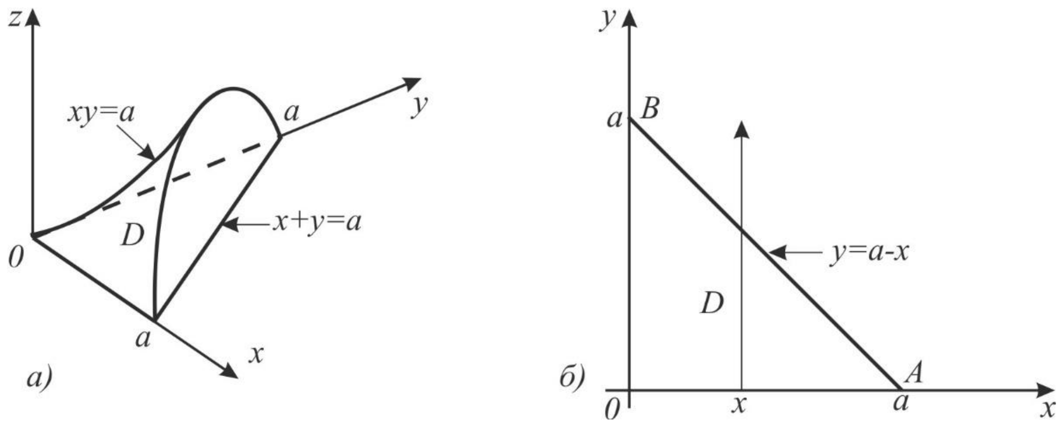

Рис. 1.20

$$V=\iint_D xydxdy=\int_0^a xdx\int_0^{a-x} ydy=\int_0^a xdx\frac{1}{2}y^2\Big|_0^{a-x}=\frac{1}{2}\int_0^a x(a-x)^2dx=\frac{a^4}{24}.$$

Задача 15. Обчислити $I=\int_0^1 dx\int_0^x dy\int_0^y xyzdz$.

📖 *Розв'язок.*

$$I=\int_0^1 xdx\int_0^x ydy\int_0^y zdz=\int_0^1 xdx\int_0^x y\frac{z^2}{2}\Big|_0^y dy=\frac{1}{2}\int_0^1 xdx\int_0^x y^3dy=\frac{1}{2}\int_0^1 x\frac{y^4}{4}\Big|_0^x dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^1 x^5dx=\frac{x^6}{48}\Big|_0^1=\frac{1}{48}.$$

Задача 16. Обчислити $I=\iiint_D 2y^2ze^{xyz}dxdydz$, якщо D: $x=1$; $y=1$; $z=1$; $x=0$; $y=0$; $z=0$.

📖 *Розв'язок.* Областю інтегрування D є одиничний куб, троє ребер якого лежать на координатних осях.

$$I=\iiint_D 2y^2ze^{xyz}dxdydz=2\int_0^1 y^2dy\int_0^1 zdz\int_0^1 e^{xyz}dx=2\int_0^1 y^2dy\int_0^1 zdz\frac{1}{yz}e^{xyz}\Big|_0^1=$$

(☝ пропонуємо подумати, чому потрійний інтеграл зручніше представити у вигляді повторного саме в цьому порядку).

$$= 2\int_0^1 ydy\int_0^1 dz\left(e^{yz}-1\right) = 2\int_0^1 ydy\left(\frac{1}{y}e^{yz}-z\right)\Bigg|_0^1 = 2\int_0^1 y\left(\frac{1}{y}e^{y}-1-\frac{1}{y}+0\right)dy =$$

$$= 2\int_0^1 \left(e^{y}-y-1\right)dy = 2\left(e^{y}-\frac{y^2}{2}-y\right)\Bigg|_0^1 = 2\left(e-\frac{1}{2}-1-1\right) = 2e-5.$$

<u>Задача 17.</u> Обчислити об'єм тіла, обмеженого сферою $x^2+y^2+z^2=4$ і параболоїдом $3z = x^2+y^2$ [6].

🕮 *<u>Розв'язок.</u>* Нехай Ω – задане в задачі тіло. На рис. 1.21, *а* зображено тіло Ω_1 – частина тіла Ω, яка знаходиться в першому октанті. Очевидно, що $V(\Omega) = 4V(\Omega_1)$. Знайдемо проекцію лінії перетину сфери і параболоїда на площину xOy. Для цього достатньо з системи рівнянь $z^2=4-(x^2+y^2)$, $z^2=(x^2+y^2)/9$ виключити змінну z. Як наслідок отримаємо $\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{9} = 4-\left(x^2+y^2\right)$, або $\left(x^2+y^2\right)^2+9\left(x^2+y^2\right)-36=0$. Звідки $x^2+y^2=-12$ і $x^2+y^2=3$. Отже, рівнянням проекції буде коло $x^2+y^2=3$. За формулою (1.27) маємо

$$V(\Omega)=V(\Omega_1) = 4\iiint\limits_{\Omega_1} dxdydz.$$

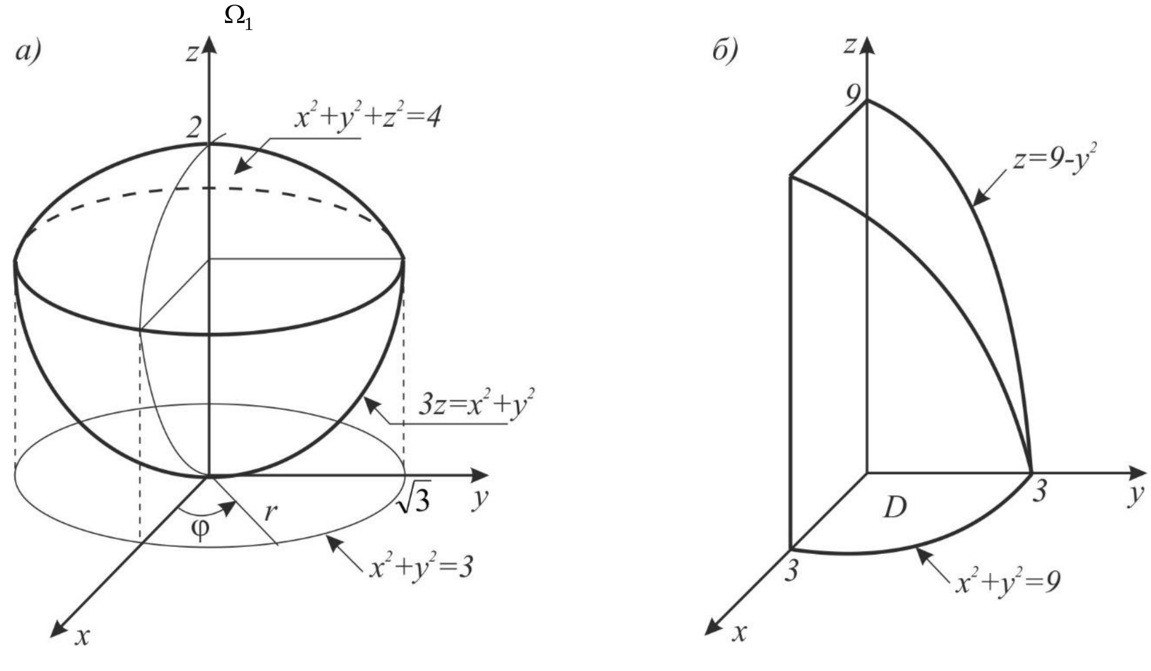

Рис. 1.21

Оскільки проекція цього тіла Ω на площину xOy є круг $x^2+y^2 \le 3$, то доцільно перейти до циліндричних координат. Після перетворень рівняння кола $x^2 + y^2 = 3$, параболоїда $3z = x^2+y^2$ і сфери $x^2+y^2+ z^2=4$, відповідно, набувають вигляду $r=\sqrt{3}$, $z=\frac{1}{3}r^2$, $z=\sqrt{4-r^2}$. З рис. 1.21, *а* видно, що в області інтегрування Ω_1 кут φ змінюється від 0 до $\frac{\pi}{2}$, r – від 0 до $\sqrt{3}$, а z – від $\frac{r^2}{3}$ до $\sqrt{4-r^2}$. Тому

$$V(\Omega)=4\iiint\limits_{\Omega_1} dxdydz=4\iiint\limits_{\Omega_1} rdrd\varphi\, dz=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{3}}rdr\int\limits_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}}dz=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{3}}r\left(\sqrt{4-r^2}-\frac{1}{3}r^2\right)dr=$$

$$=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{3}\left(4-r^2\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{12}r^4\right]\Bigg|_0^{\sqrt{3}}d\varphi=\frac{19}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{19}{6}\pi.$$

Задача 18. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=0$, $z=9-y^2$; $x^2+y^2=9$.

📖 *Розв'язок.* Нехай Ω – задане в задачі тіло. На рис. 1.21, *б* зображено тіло Ω_1 – частина тіла Ω, яке знаходиться у першому октанті. Очевидно, задане в задачі тіло симетричне відносно площин xOz, yOz і тому $V(\Omega)=4V(\Omega_1)$. За формулою (1.27) маємо $V(\Omega)=4\iiint\limits_{\Omega_1}dxdydz$. Проекція цієї частини тіла Ω_1 на площину xOy є частиною круга $x^2+y^2\le 9$, яка знаходиться в першій чверті (на рис. 1.21, *б* – це чверть круга D). Тобто,

$$V(\Omega)=4\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^{\sqrt{9-x^2}}dy\int\limits_0^{9-y^2}dz=4\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^{\sqrt{9-x^2}}z\Big|_0^{9-y^2}dy=4\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^{\sqrt{9-x^2}}\left(9-y^2\right)dy=$$

$$=4\int\limits_0^3\left(9\sqrt{9-x^2}-\frac{\left(\sqrt{9-x^2}\right)^3}{3}\right)dx.$$

Зробимо заміну $x=3\sin t$, $dx=3\cos t dt$. При $x=0$, $t=0$, при $x=3$, $t=\frac{\pi}{2}$.

$$V(\Omega)=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(9\sqrt{9-\sin^2 t}-\frac{\left(\sqrt{9-\sin^2 t}\right)^3}{3}\right)3\cos tdt=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(27\cos t-9\cos^3 t\right)3\cos tdt=$$

$$=108\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(3\cos t-\cos^3 t\right)\cos tdt=324\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt-108\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 tdt=162\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 2t\right)dt-$$

$$-27\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos 2t+\cos^2 2t\right)dt=162\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}dt+162\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2tdt-27\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}dt-54\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2tdt-$$

$$-27\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 2t\,dt = 162t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{162}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 27t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{54}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{27}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\cos 4t\right)dt =$$

$$= 81\pi - \frac{27}{2}\pi - \frac{27}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt - \frac{27}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4t\,dt = 81\pi - \frac{27}{2}\pi - \frac{27}{2}t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{27}{8}\sin 4t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{243}{4}\pi.$$

<u>Задача 19.</u> Знайти масу матеріальної пластини D [6], обмеженої кривими $ay = x^2,\ x + y = 2a,\ a > 0$, з густиною розподілу маси $\mu(x, y) = 1$.

📖 *<u>Розв'язок.</u>* Масу цієї однорідної пластини визначають за формулою $m = \iint\limits_D dxdy$, де область D зображено на рис. 1.22.

Отже, маємо

$$m = \int_{-2a}^{a}dx\int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x}dy = \int_{-2a}^{a}\left(2a - x - \frac{x^2}{a}\right)dx =$$

$$= \left(2ax - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3a}\right)\Bigg|_{-2a}^{a} = \frac{9}{2}a^2.$$

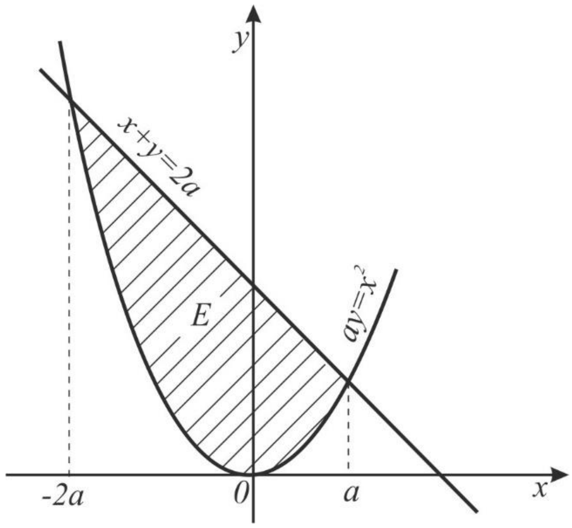

Рис. 1.22

<u>Задача 20.</u> Знайти масу матеріального тіла V, обмеженого поверхнею $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, з густиною розподілу маси $\mu(x, y, z) = 2\left(R - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$.

📖 *<u>Розв'язок.</u>* За відомою формулою $m = 8\iiint\limits_V 2\left(R - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)dxdydz$, де $D = \left\{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 \le R,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0\right\}$. Для обчислення цього потрійного інтеграла зручно скористатися сферичними координатами $x = r\sin\theta\cos\varphi,\ \ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ \ z = r\cos\theta,\ \ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ \ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ \ 0 \le r \le R.$

Тоді

$$m = 8\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta\int_0^{R}r^2(R - r)dr = 16\varphi\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{r^3R}{3} - \frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^{R} =$$

$$= 16\frac{\pi}{2}\left(\frac{R^4}{3} - \frac{R^4}{4}\right) = \frac{2}{3}\pi R^4.$$

Задача 21. Знайти координати центра мас однорідної матеріальної пластини D [6], обмеженої кривими $y^2 = 4x+4,\ y^2 = -2x+4$.

📖 *Розв'язок.* Потрібно знайти координати центра мас фігури, зображеної на рис. 1.23. Оскільки маємо однорідну матеріальну пластинку, симетричну відносно осі Ox, то $y_c = 0$,

$$x_c = \frac{\iint\limits_D x\,dxdy}{\iint\limits_D dxdy},$$

де $D = \left\{(x,y): -2 \le y \le 2,\quad \frac{1}{4}\left(y^2-4\right) \le x \le \frac{1}{2}\left(4-y^2\right)\right\}$.

Обчислимо інтеграли, які входять до складу цієї формули:

$$\iint\limits_D dxdy = \int_{-2}^{2} dy \int_{\frac{1}{4}\left(y^2-4\right)}^{\frac{1}{2}\left(4-y^2\right)} dx = \int_{-2}^{2}\left(\frac{4-y^2}{2} - \frac{y^2-4}{4}\right)dy =$$

$$= \int_{-2}^{2}\left(3 - \frac{3}{4}y^2\right)dy = \left.\left(3y - \frac{1}{4}y^3\right)\right|_{-2}^{2} = 8,$$

$$\iint\limits_D x\,dxdy = \int_{-2}^{2} dy \int_{\frac{1}{4}\left(y^2-4\right)}^{\frac{1}{2}\left(4-y^2\right)} x\,dx = \int_{-2}^{2}\left(\frac{\left(4-y^2\right)^2}{4} - \frac{\left(y^2-4\right)^2}{16}\right)dy =$$

$$= \int_{-2}^{2}\left(3 - \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{16}y^4\right)dy =$$

$$= \left.\left(3y - \frac{1}{2}y^3 + \frac{3y^5}{80}\right)\right|_{-2}^{2} = \frac{16}{5}.$$

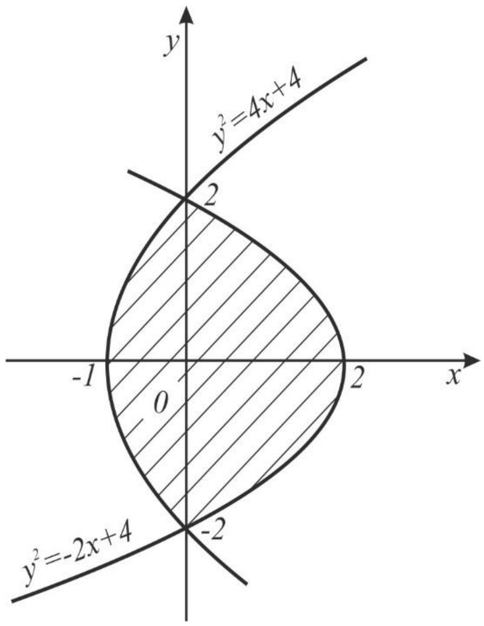

Рис. 1.23

Отже, центр мас цієї матеріальної пластинки міститься у точці $\left(\frac{2}{5};0\right)$.

Задача 22. Знайти статичні моменти відносно координатних осей фігури D, обмеженої кривими $y=2x^3$ і $y^2=2x$, якщо $\rho(x,y)$ в кожній точці дорівнює одиниці [2].

📖 *Розв'язок.* Область, статичні моменти якої треба знайти, зображено на рис. 1.24. Скориставшись формулами (1.31), маємо

$$M_x=\iint_D ydxdy=\int_0^{\frac{1}{\sqrt[5]{4}}}dx\int_{2x^3}^{\sqrt{x}}ydy=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt[5]{4}}}y^2\Big|_{2x^3}^{\sqrt{x}}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt[5]{4}}}\left(x-4x^6\right)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{4}{7}x^7\right]\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt[5]{4}}}=\frac{3}{7\sqrt[5]{16}};$$

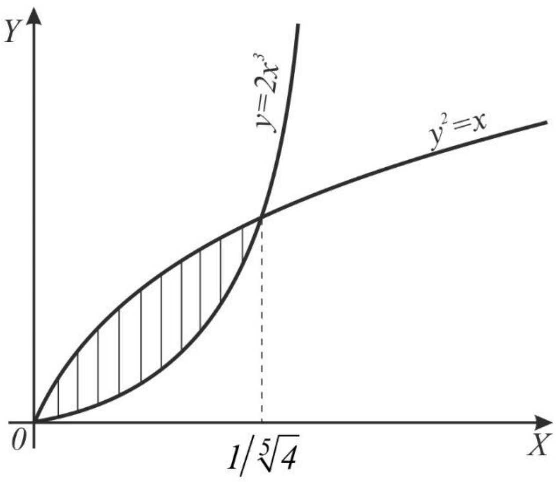

Рис. 1.24.

$$M_y=\iint_D xdxdy=\int_0^{\frac{1}{\sqrt[5]{4}}}xdx\int_{2x^3}^{\sqrt{x}}dy=\int_0^{\frac{1}{\sqrt[5]{4}}}x\left(\sqrt{x}-2x^3\right)dx=\frac{1}{10}.$$

Задача 23. Обчислити моменти інерції однорідної фігури D відносно осі Ox, якщо D обмежена кардіоїдою $\rho=a(1+\cos\theta)$.

📖 *Розв'язок.* Момент інерції однорідної матеріальної фігури відносно осі Ox обчислюють за формулою $I_x=\iint_D y^2dxdy$, де D = $\{(\rho,\theta): 0\le\rho\le a(1+\cos\theta),\quad 0\le\theta\le 2\pi\}$.

Перейдемо до полярних координат $x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta$. Тоді

$$I_x=\iint_D\rho^3\sin^2\theta\,d\rho\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta\int_0^{a(1+\cos\theta)}\rho^3d\rho=\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cdot\frac{1}{4}\rho^4\Big|_0^{a(1+\cos\theta)}d\theta=$$

$$=\frac{1}{4}a^4\int_0^{2\pi}\sin^2\theta(1+\cos\theta)^4\,d\theta=\frac{1}{4}a^4\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\left(1+4\cos\theta+6\cos^2\theta+4\cos^3\theta+\cos^4\theta\right)d\theta=$$

$$=\frac{21}{32}\pi\,a^4.$$