Тема 9. Диференціальні рівняння першого та вищих порядків. Системи звичайних диференціальних рівнянь

Лекція 9.2. Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку. Диференціальні рівняння Бернуллі. Диференціальні рівняння в повних диференціалах.

Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку

Рівняння, лінійне відносно невідомої функції та її похідної,

$$a(x)y' + b(x)y + c(x) = 0, \qquad (1)$$

називається лінійним диференціальним рівнянням першого порядку.

Якщо $a(x) \neq 0,$ то рівняння (5) може набути вигляду:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \qquad (2)$$

де $P(x) = \dfrac{b(x)}{a(x)}$ і $Q(x) = \dfrac{-c(x)}{a(x)}$ – задані неперервні функції від *x*. Якщо функція $Q(x) \equiv 0$, то рівняння (6) має вигляд:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0, \qquad (3)$$

і називається лінійним однорідним рівнянням, у протилежному випадку $Q(x) \neq 0$ рівняння називається лінійним неоднорідним рівнянням.

Лінійне однорідне диференціальне є рівнянням з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dy}{y} = -P(x)\,dx; \;\; \ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|C|;$$

$$y = C e^{-\int P(x)dx}. \qquad (4)$$

Вираз (4) є загальним розв’язком рівняння (3). Щоб знайти загальний розв’язок рівняння (2), застосуємо так званий метод Бернуллі, який полягає в тому, що розв’язок цього рівняння шукають у вигляді добутку

$$y = u(x) \cdot v(x), \qquad (5)$$

де $u = u(x),\; v = v(x)$ - невідомі функції *x*, причому одна з цих функцій довільна (але не рівна тотожно нулеві).

Знаходячи похідну $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$ і підставляючи значення y та y' у рівняння (5), дістанемо

$$u' \cdot v + u(v' + P(x) \cdot v) = Q(x).$$

Користуючись довільністю у виборі функції $v(x)$, доберемо її так, щоб

$$v' + p(x) \cdot v = 0; \qquad (6)$$

тоді

$$u' \cdot v = Q(x). \qquad (7)$$

Розв’яжемо це рівняння. Відокремлюючи в рівнянні (6) змінні та інтегруючи, знайдемо його загальний розв’язок:

$$\frac{dv}{dx} = -P(x) \cdot v; \qquad \frac{dv}{v} = -P(x)dx;$$

$\ln|v| = -\int P(x)dx + \ln|C_1|; \;\; v = C_1 e^{-\int P(x)dx}; \;\; C_1 \neq 0.$

Візьмемо за v який-небудь частинний розв'язок рівняння (7), наприклад,

$$v = e^{-\int P(x)dx}. \qquad (8)$$

Знаючи функцію v, з рівняння (7) знаходимо функцію u:

$$du = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx;$$

$$u = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C. \qquad (9)$$

Підставляючи функції (8) і (9) у рівняння (9), знаходимо загальний розв'язок рівняння (2)

$$y = uv = u = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right).$$

Диференціальні рівняння Бернуллі

Диференціальне рівняння виду $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}$, де $\alpha \neq 0{,}1$, називається рівнянням Бернуллі.

Припускаючи, що $y \neq 0$, розділимо обидві частини рівняння Бернуллі на y^{α}. В результаті отримаємо:

$$y^{-\alpha}\frac{dy}{dx} + P \cdot y^{-\alpha+1} = Q. \qquad (10)$$

Введемо нову функцію $z(x) = (y(x))^{-\alpha+1}$. Тоді $\frac{dz}{dx} = (-\alpha+1)y^{-\alpha}\frac{dy}{dx}$. Домножимо рівняння (10) на $(-\alpha+1)$ і перейдемо в ньому до функції *z(x)*: $\frac{dz}{dx} + (-\alpha+1)Pz = (-\alpha+1)Q$, тобто для функції *z(x)* отримали лінійне неоднорідне рівняння 1-го порядку. Це рівняння можна розв'язати методом Бернуллі. Підставимо в його загальний розв'язок замість *z(x)* вираз $y^{-\alpha+1}$, отримаємо загальний інтеграл Бернуллі, який легко розв'язується відносно *y*. При $\alpha < 0$ додається розв'язок *y(x)=0*.

<u>Приклад.</u> а) Розв'язати лінійне диференціальне рівняння $x^2y' + y = ax^2e^{\frac{1}{x}}$.

Розв'язування

Спочатку приведемо дане рівняння до стандартного вигляду: $y' + \frac{1}{x^2}y = ae^{\frac{1}{x}}$.

Застосуємо формулу $y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right)$, де $P = \frac{1}{x^2}; \;\; Q = ae^{\frac{1}{x}}$; тоді

$$y = e^{-\int \frac{1}{x^2}dx}\left(\int a e^{\frac{1}{x}} e^{\int \frac{1}{x^2}dx} dx + C\right);$$

$$y = e^{\frac{1}{x}}\left(\int a e^{\frac{1}{x}} e^{-\frac{1}{x}} dx + C\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(\int a dx + C\right);$$

$$y = e^{\frac{1}{x}}(ax + C)$$ – загальний розв'язок.

б) Розв'язати рівняння Бернуллі $xy' + y = xy^2 \ln x$.

Розв'язування

Розділивши рівняння на xy^2: $\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = \ln x$.

Покладемо $z = \frac{1}{y}$; $z' = -\frac{y'}{y^2}$.

$$-z' + \frac{1}{x} z = \ln x; \qquad z' - \frac{1}{x} z = -\ln x.$$

Вважатимемо $P = -\frac{1}{x}$, $Q = -\ln x$.

$$z = e^{\int \frac{dx}{x}}\left(\int -\ln x e^{-\int \frac{dx}{x}} dx + C\right); \qquad z = e^{\ln x}\left(\int -\ln x e^{-\ln x} dx + C\right);$$

$$z = x\left(\int -\ln x \cdot \frac{dx}{x} + C\right); \qquad z = x\left(-\int \ln x d(\ln x) + C\right);$$

$$z = x\left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C\right).$$

Виконуючи зворотну підстановку, отримуємо:

$$\frac{1}{y} = x\left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C\right).$$

в) Розв'язати лінійне диференціальне рівняння $y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin 2x}{x}$.

Розв'язування

У цьому рівнянні $p(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$.

Нехай $y = uv$, тоді $y' = u'v + uv'$. маємо

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{\sin 2x}{x}; \qquad u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{\sin 2x}{x}.$$

Доберемо функцію v так, щоб $v' + \frac{v}{x} = 0$; тоді $u'v = \frac{\sin 2x}{x}$. Інтегруючи перше з цих рівнянь, дістаємо

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}; \qquad \ln|v| = -\ln|x|; \qquad v = \frac{1}{x}.$$

Підставивши значення v у друге рівняння, дістанемо

$$u'\frac{1}{x} = \frac{\sin 2x}{x}; \qquad du = \sin 2x dx; \qquad u = -\frac{\cos 2x}{2} + C,$$

після чого знайдемо загальний розв'язок

$$y = uv = \frac{1}{x}\left(C - \frac{1}{2}\cos 2x\right).$$

Диференціальні рівняння в повних диференціалах

Якщо у рівнянні

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \qquad (11)$$

ліва частина є повним диференціалом деякої функції *U(x,y)*, то рівняння називається рівнянням у повних диференціалах. Це рівняння можна переписати у вигляді *du (x,y)=0*, отже, його загальний інтеграл: *u(x,y)=C*, де *C* – довільна стала.

Для того, щоб рівняння (11) було рівнянням у повних диференціалах, необхідно і достатньо, щоб виконувалась тотожність $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ (12).

Якщо для рівняння (12) умова (12) виконується, то невідома функція $u(x, y)$ задовольнятиме рівності

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \qquad (13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y). \qquad (14)$$

Виберемо одну із останніх рівностей, наприклад (13). Інтегруючи рівність (13) по x. Визначимо функцію $u(x, y)$ з точністю до довільної диференційованої функції $\varphi(y)$:

$$u(x, y) = \int P(x, y)dx = F(x, y) + \varphi(y), \qquad (15)$$

де $F(x, y)$- первісна функції $P(x, y)$ по x. Диференціюючи рівняння (15) по y і враховуючи (14), дістанемо рівняння для знаходження функції $\varphi(y)$:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} + \frac{d\varphi}{dy} = Q(x, y).$$

Аналогічні дії виконувалися б і при виборі рівності (14), враховуючи, що інтегрування відбувалося б по y.

Якщо рівняння (10) не є рівнянням у повних диференціалах та існує функція *μ = μ(x,y)*, така, що після домножування на неї обох частин рівняння отримується рівняння $(P(x, y)dx + Q(x, y)dy) \cdot \mu = 0$ у повних диференціалах, тобто $(P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy) \cdot \mu\, du$, то функція *μ(x,y)* називається інтегрувальним множником рівняння.

Якщо знайдено інтегрувальний множник μ, то інтегрування даного рівняння зводиться до перемножування обох частин цього рівняння на нього і знаходження загального інтеграла отриманого рівняння у повних диференціалах.

Якщо μ є неперервно диференційована функція від x і y, то $\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} \equiv \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$.

Звідси випливає, що інтегрувальний множник μ задовольняє наступне рівняння з частинними похідними 1-го порядку:

$$Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \qquad (16).$$

Якщо завчасно відомо, що $\mu = \mu(\omega)$, де ω – задана функція від x і y, то рівняння (16) зводиться до звичайного лінійного рівняння з невідомою функцією μ від незалежної змінної ω:

$$\frac{d\mu}{d\omega} = \Psi(\omega)\mu \qquad (17),$$

де $\Psi(\omega) \equiv \dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q\dfrac{\partial \omega}{\partial x} - P\dfrac{\partial \omega}{\partial y}}$, тобто дріб є функцією тільки від ω.

Розв'язуючи рівняння (17), знаходимо інтегрувальний множник

$$\mu = e^{\int \Psi(\omega)d\omega}, \qquad c = 1.$$

В частинному рівнянні $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ має інтегрувальний множник, який залежить тільки від x ($\omega = x$) або тільки від y ($\omega = y$), якщо виконуються відповідно наступні умови:

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} \equiv \Psi(x), \quad \mu = e^{\int \Psi(x)dx}$$

або

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{-M} \equiv \Psi(y), \quad \mu = e^{\int \Psi(y)dy}.$$

<u>Приклад.</u> а) Розв'язати рівняння в повних диференціалах $(3x^2 + 10xy)dx + (5x^2 - 1)dy = 0$.

Розв'язування

Перевіримо умову тотальності: $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial(3x^2 + 10xy)}{\partial y} = 10x;$

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial(5x^2 - 1)}{\partial x} = 10x.$$

Умова тотальності виконується, відповідно, вихідне диференціальне рівняння є рівнянням у повних диференціалах.

Визначаємо функцію u.

$$u = \int P(x,y)dx + \varphi(y) = \int (3x^2 + 10xy)dx + \varphi(y) = x^3 + 5x^2 y + \varphi(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 5x^2 + \varphi'(y) = Q(x, y) = 5x^2 - 1;$$

$$\varphi'(y) = -1; \quad \varphi(y) = \int(-1)dy = -y + C_1..$$

Отже, $u = x^3 + 5x^2 y - y + C_1$.

Знаходимо загальний інтеграл вихідного диференціального рівняння:

$$u = x^3 + 5x^2 y - y + C_1 = C_2;.$$

$$x^3 + 5x^2 y - y = C.$$

б) Розв'язати рівняння $\left(x^2 y^2 - 1\right)dx + 2x^3 y\, dy = 0$.

Розв'язування

Маємо

$$P(x, y) = x^2 y^2 - 1, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 2x^2 y;$$

$$Q(x, y) = 2x^3 y, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 6x^2 y.$$

Оскільки $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, то задане рівняння не є рівнянням у повних диференціалах. Проте $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = -\frac{4x^2 y}{2x^3 y} = -\frac{2}{x}$, тому рівняння має інтегрувальний множник, який залежить лише від x. Складаємо рівняння $\frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ і розв'язуємо його:

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = -\frac{2}{x}; \qquad \ln \mu = -2\ln|x| + \ln|C|; \qquad \mu = \frac{C}{x^2}, \quad C \neq 0.$$

Візьмемо інтегрувальним множником функцію $\mu = \frac{1}{x^2}$ і помножимо обидві частини початкового рівняння на цей множник. Отримаємо рівняння у повних диференціалах

$$\left(y^2 - \frac{1}{x^2}\right)dx + 2xydy = 0.$$

Розв'язуючи це рівняння (див. п. (а)), знайдемо, що загальний інтеграл заданого рівняння має вигляд

$$xy^2 + \frac{1}{x} = C.$$