Тема 6. Невизначений інтеграл

Лекція 6.3. Інтегрування раціональних функцій. Інтегрування деяких ірраціональних функцій. Інтегрування диференціального бінома. Інтегрування виразів, що містять тригонометричні функції.

Інтегрування раціональних функцій

Розглянемо інтегрування дробів типів:

III. $\dfrac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$; IV. $\dfrac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}$,

m, n – натуральні числа ($m \geq 2$, $n \geq 2$) і $b^2 - 4ac < 0$.

Для того, щоб проінтегрувати раціональний дріб, його необхідно розкласти на елементарні дроби.

Інтеграл дробу виду III може бути представлений у вигляді:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} = \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| +$$

$$+\frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

<u>Приклад.</u>

$$\int \frac{7x-2}{3x^2-5x+4}dx = \int \frac{84x-24}{36x^2-60x+48}dx = \int \frac{84x-24}{(6x-5)^2+23}dx = \left\{\begin{matrix} u=6x-5; & du=6dx; \\ x=\frac{u+5}{6}; & \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{14u+70-24}{u^2+23}du = \frac{7}{3}\int \frac{udu}{u^2+23} + \frac{23}{3}\int \frac{du}{u^2+23} = \frac{7}{6}\ln(u^2+23) + \frac{23}{3\sqrt{23}}arctg\frac{u}{\sqrt{23}}+C =$$

$$= \frac{7}{6}\ln\left|36x^2-60x+48\right| + \frac{\sqrt{23}}{3}arctg\frac{6x-5}{\sqrt{23}}+C.$$

Розглянемо методи інтегрування дробів типу IV .

Розглянемо частинний випадок при $M = 0$, $N = 1$.

Тоді інтеграл виду $\int \dfrac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ можна шляхом виділення у знаменнику повного квадрату представити у вигляді $\int \dfrac{du}{(u^2+s)^n}$. Зробимо певні перетворення:

$$\int \frac{du}{(u^2+s)^n} = \frac{1}{s}\int \frac{s+u^2-u^2}{(u^2+s)^n}du = \frac{1}{s}\int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}} - \frac{1}{s}\int \frac{u^2du}{(u^2+s)^n}.$$

Другий інтеграл, який входить у останню рівність про інтегруємо за частинами.

Позначимо: $$\left\{\begin{array}{l} dv_1 = \dfrac{udu}{(u^2+s)^n}; \quad u_1 = u; \quad du_1 = du; \\ v_1 = \int \dfrac{udu}{(u^2+s)^n} = -\dfrac{1}{2(n-1)(u^2+s)^{n-1}}; \end{array}\right\}$$

$$\int \frac{u^2 du}{(u^2+s)^n} = -\frac{u}{(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2}\int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}.$$

Для початкового інтегралу отримаємо:

$$\int \frac{du}{(u^2+s)^n} = \frac{1}{s}\int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}} + \frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} - \frac{1}{s(2n-2)}\int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}},$$

$$\int \frac{du}{(u^2+s)^n} = \frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} + \frac{2n-3}{s(2n-2)}\int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}.$$

Отримана формула називається **рекурентною.** Якщо її застосувати n-1 разів, то отримаємо табличний інтеграл $\int \dfrac{du}{u^2+s}$.

Повернемося до інтегралу від елементарного дробу виду IV у загальному випадку.

$$\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}dx = (4a)^n \int \frac{Mx+N}{\left[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)\right]^n}dx = \left\{\begin{array}{l} u = 2ax+b; \quad du = 2adx; \\ x = \dfrac{u-b}{2a}; \quad s = 4ac-b^2; \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{(4a)^n}{2a}\int \frac{\dfrac{M(u-b)}{2a}+N}{(u^2+s)^n}du = \frac{(4a)^n}{2a}\left[\frac{M}{2a}\int \frac{udu}{(u^2+s)^n} + \frac{2aN-Mb}{2a}\int \frac{du}{(u^2+s)^n}\right].$$

В отриманій рівності перший інтеграл за допомогою підстановки $t = = u^2 + s$ зводиться до табличного $\int \dfrac{dt}{t^n}$, а до другого інтегралу застосовується розглянута рекурентна формула.

<u>Приклад:</u>

$$\int \frac{3x+5}{(x^2-4x+7)^2}dx = \int \frac{3x+5}{((x-2)^2+3)^2}dx = \left\{\begin{array}{l} u = x-2; \quad du = dx; \\ x = u+2; \end{array}\right\} = \int \frac{3u+6+5}{(u^2+3)^2}du =$$

$$= 3\int \frac{udu}{(u^2+3)^2} + 11\int \frac{du}{(u^2+3)^2} = \left\{\begin{array}{l} t = u^2+3; \\ dt = 2udu; \end{array}\right\} = \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2} + 11\left[\frac{u}{3\cdot 2(u^2+3)} + \frac{1}{3\cdot 2}\int \frac{du}{u^2+3}\right] =$$

$$= -\frac{3}{2t} + \frac{11u}{6(u^2+3)} + \frac{11}{6\sqrt{3}}arctg\frac{u}{\sqrt{3}} + C = -\frac{3}{2(x^2-4x+7)} + \frac{11(x-2)}{6(x^2-4x+7)} + \frac{11}{6\sqrt{3}}arctg\frac{x-2}{\sqrt{3}} + C.$$

При інтегруванні використовують розкладання раціональних дробів на елементарні дроби. Для знаходження величин A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i застосовують метод невизначених коефіцієнтів, суть якого полягає у тому, що для того, щоб два многочлени були тотожні рівні, необхідно і достатньо, щоб були рівними коефіцієнти при однакових степенях x.

Приклад.

$$\int \frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x^2-6x+8)(x^2+4)}dx,$$

$(x^2-6x+8)(x^2+4)=(x-2)(x-4)(x^2+4)$, то

$$\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-4}+\frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

Зводячи дроби до спільного знаменника та прирівнюючи відповідні чисельники отримаємо:

$$A(x-4)(x^2+4)+B(x-2)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2-6x+8)=9x^3-30x^2+28x-88$$

$$(A+B+C)x^3+(-4A-2B-6C+D)x^2+(4A+4B+8C-6D)x+(-16A-8B+8D)=$$
$$=9x^3-30x^2+28x-88.$$

$$\begin{cases} A+B+C=9 \\ -4A-2B-6C+D=-30 \\ 4A+4B+8C-6D=28 \\ -16A-8B+8D=-88 \end{cases} \qquad \begin{cases} C=9-A-B \\ D=-30+4A+2B+54-6A-6B \\ 2A+2B+4C-3D=14 \\ 2A+B-D=11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 2A+2B+36-4A-4B-72+6A+12B=14 \\ 2A+B-24+2A+4B=11 \end{cases} \qquad \begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ 4A+5B=35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ 50-10B+5B=35 \end{cases} \qquad \begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ B=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=5 \\ B=3 \\ C=1 \\ D=2 \end{cases}$$

Отже:

$$\int\frac{5}{x-2}dx+\int\frac{3}{x-4}dx+\int\frac{x+2}{x^2+4}dx=5\ln|x-2|+3\ln|x-4|+\int\frac{x}{x^2+4}dx+\int\frac{2}{x^2+4}dx=$$
$$=5\ln|x-2|+3\ln|x-4|+\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+arctg\frac{x}{2}+C.$$

Інтегрування деяких ірраціональних функцій

Інтеграл виду $\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ *,де n- натуральне число.*

За допомогою підстановки $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$ функція раціоналізується.

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^n; \qquad x=\frac{t^n-b}{a-ct^n}; \qquad dx=\left(\frac{t^n-b}{a-ct^n}\right)' dt;$$

Тоді $\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx=\int R\left(\frac{t^n-b}{a-ct^n},t\right)\left(\frac{t^n-b}{a-ct^n}\right)' dt=\int r(t)dt.$

Приклад.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}=\left\{\sqrt[4]{1-2x}=t; \quad dt=\frac{-2dx}{4\left(\sqrt[4]{1-2x}\right)^3}=\frac{-dx}{2t^3};\right\}=\int\frac{-2t^3dt}{t^2-t}=-2\int\frac{t^2dt}{t-1}=$$

$$=-2\int\left(t+\frac{t}{t-1}\right)dt=-2\int tdt-2\int\frac{t}{t-1}dt=-t^2-2\int\left(1+\frac{1}{t-1}\right)dt=-t^2-2t-2\ln|t-1|+C=$$

$$=-\sqrt{1-2x}-2\sqrt[4]{1-2x}-2\ln\left|\sqrt[4]{1-2x}-1\right|+C.$$

Якщо до складу ірраціональної функції входять корені різних степенів, то в якості нової змінної доречно взяти корінь, у якого степінь дорівнює найменшому спільному степеню коренів, які входять у функцію.

Приклад.

$$\int\frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)\left(1+\sqrt[6]{x-1}\right)}dx=\left\{\begin{matrix}\sqrt[12]{x-1}=t; \quad x-1=t^{12}; \\ dx=12t^{11}dt;\end{matrix}\right\}=\int\frac{(t^4+t^3)12t^{11}dt}{t^{12}(1+t^2)}=12\int\frac{t^3+t^2}{t^2+1}dt=$$

$$=12\left(\int\frac{t^3}{t^2+1}dt+\int\frac{t^2}{t^2+1}dt\right)=12\left(\int\left(t-\frac{t}{t^2+1}\right)dt+\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt\right)=12\int tdt-12\int\frac{tdt}{t^2+1}+12\int dt-$$

$$-12\int\frac{dt}{1+t^2}=6t^2+12t-6\ln(t^2+1)-12arctgt+C=6\sqrt[6]{x-1}+12\sqrt[12]{x-1}-6\ln(\sqrt[6]{x-1}+1)-$$

$$-12arctg\sqrt[12]{x-1}+C.$$

3. Інтегрування диференціального бінома

<u>**Означення:**</u> **Біномінальним диференціалом** називається вираз

$$x^m(a+bx^n)^p dx$$

де m, n, і p – раціональні числа.

Інтеграл від біномінального диференціалу може бути виражений через елементарні функції в трьох випадках:

1) Якщо p – ціле число, то інтеграл раціоналізується за допомогою підстановки $t=\sqrt[\lambda]{x}$, де λ - спільний знаменник m і n.

2) Якщо $\frac{m+1}{n}$ - ціле число, то інтеграл раціоналізується за допомогою підстановки $t=\sqrt[s]{a+bx^n}$, де s – знаменник числа p.

3) Якщо $\frac{m+1}{n}+p$ - ціле число, то використовується підстановка

$t=\sqrt[s]{\frac{a+bx^n}{x^n}}$, де s – знаменник числа p.

Інтегрування виразів, що містять тригонометричні функції

Інтеграл виду $\int R(\sin x, \cos x)dx$.

Тут R – позначення деякої раціональної функції від змінних sin$x$ і cos$x$.

Інтеграли цього виду обчислюються за допомогою підстановки $t = tg\frac{x}{2}$, яка називається універсальною. Ця підстановка дозволяє перетворити тригонометричні функції у раціональні.

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

Тоді $x = 2arctgt$; $\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$;

Таким чином: $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int r(t)dt.$

<u>Приклад.</u>

$$\int\frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = 2\int\frac{dt}{8t + 3 - 3t^2 + 5 + 5t^2} = 2\int\frac{dt}{2t^2 + 8t + 8} =$$

$$= \int\frac{dt}{t^2 + 4t + 4} = \int\frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{tg\frac{x}{2} + 2} + C.$$

Інтеграл виду $\int R(\sin x, \cos x)dx$, *якщо функція R є непарною відносно cosx.*

При відшуканні таких інтегралів використовується підстановка $t = sinx$.

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int\frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}\cos x dx.$$

Функція $\frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}$ може містити *cosx* тільки в парних степенях

$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(\sin x)\cos x dx = \int r(t)dt.$

<u>Приклад.</u>

$$\int\frac{\cos^7 x dx}{\sin^4 x} = \left\{\begin{matrix}\sin x = t \\ dt = \cos x dx \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x\end{matrix}\right\} = \int\frac{(1-t^2)^3}{t^4}dt = \int\frac{1 - 3t^2 + 3t^4 - t^6}{t^4}dt = \int\frac{dt}{t^4} - 3\int\frac{dt}{t^2} +$$

$$+ 3\int dt - \int t^2 dt = -\frac{1}{3t^3} + \frac{3}{t} + 3t - \frac{1}{3}t^3 = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{3}{\sin x} + 3\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Інтеграл виду $\int R(\sin x, \cos x)dx$, *якщо функція R є непарною відносно sinx.*

При відшуканні таких інтегралів використовується підстановка $t = cosx$.

Тоді $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(\cos x)\sin x dx = -\int r(t)dt.$

Приклад.

$$\int\frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx=\begin{Bmatrix}\cos x=t\\ dt=-\sin x dx\end{Bmatrix}=-\int\frac{1-t^2}{2+t}dt=\int\frac{t^2+4t+4-4t-5}{t+2}dt=\int\left[\frac{(t+2)^2-4t-5}{t+2}\right]dt=$$

$$=\int\left[t+2-\frac{4t}{t+2}-\frac{5}{t+2}\right]dt=\int tdt+\int 2dt-4\int\frac{tdt}{t+2}-5\int\frac{dt}{t+2}=\frac{t^2}{2}+2t-5\ln|t+2|-4\int\frac{t}{t+2}dt=$$

$$=\begin{Bmatrix}\dfrac{t}{t+2}=\dfrac{A}{t+2}+B\\ A+Bt+2=t\\ B=1,\quad A=-2\\ \dfrac{t}{t+2}=\dfrac{-2}{t+2}+1\end{Bmatrix}=\frac{t^2}{2}+2t-5\ln|t+2|+8\int\frac{dt}{t+2}-4\int dt=\frac{t^2}{2}+2t-5\ln|t+2|+8\ln|t+2|-4t=$$

$$=\frac{t^2}{2}-2t+3\ln|t+2|+C=\frac{\cos^2 x}{2}-2\cos x+3\ln(\cos x+2)+C.$$

Інтеграл виду $\int R(\sin x,\cos x)dx$*, якщо функція R є парною відносно sinx і cosx.*

При відшуканні таких інтегралів використовується підстановка $t = tgx$.

Тоді $\int R(\sin x,\cos x)dx=\int r(t)dt$.

Приклад.

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x+6\sin x\cos x-16\cos^2 x}=\int\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{tg^2x+6tgx-16}dx=\begin{Bmatrix}tgx=t;\\ \dfrac{1}{\cos^2 x}dx=d(tgx)=dt\end{Bmatrix}=$$

$$=\int\frac{dt}{t^2+6t-16}=\int\frac{dt}{(t+3)^2-25}=\frac{1}{10}\ln\left|\frac{tgx+3-5}{tgx+3+5}\right|+C=\frac{1}{10}\ln\left|\frac{tgx-2}{tgx+8}\right|+C.$$

Інтеграл добутку синусів і косинусів різних аргументів.

В залежності від типу добутку застосовується одна з трьох формул:

$$\int\cos mx\cos nxdx=\int\frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\right]dx=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n}+\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]$$

$$\int\sin mx\cos nxdx=\int\frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\right]dx=\frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(m+n)x}{m+n}-\frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right]$$

$$\int\sin mx\sin nxdx=\int\frac{1}{2}\left[-\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\right]dx=\frac{1}{2}\left[-\frac{\sin(m+n)}{m+n}+\frac{\sin(m-n)}{m-n}\right]$$

Приклад.

$$\int\sin 7x\sin 2xdx=\frac{1}{2}\int\cos 5xdx-\frac{1}{2}\int\cos 9xdx=\frac{1}{10}\sin 5x-\frac{1}{18}\sin 9x+C.$$

Інколи при інтегруванні тригонометричних функцій використовуються тригонометричні формули пониження порядку.