Тема 6. Невизначений інтеграл

Лекція 6.2. Інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен. Розклад дробово-раціональних функцій на найпростіші дроби. Інтегрування простих дробів.

Означення. **Елементарними** називаються дроби наступних чотирьох типів:

I. $\dfrac{1}{ax+b}$; III. $\dfrac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$;

II. $\dfrac{1}{(ax+b)^m}$; IV. $\dfrac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}$,

m, *n* – натуральні числа ($m \geq 2$, $n \geq 2$) і $b^2 - 4ac < 0$.

Для того, щоб проінтегрувати раціональний дріб необхідно розкласти його на елементарні дроби.

Теорема: Якщо $R(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$ - правильний раціональний дріб, знаменник *P(x)* який є добутком лінійних та квадратичних множників, то цей дріб може бути розкладений на елементарні:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \ldots + \frac{B_1}{(x-b)} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} +$$
$$+ \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda} + \ldots + \frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s} + \frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2} + \ldots + \frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu}$$

де A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i – деякі сталі величини.

Перші два типи інтегралів від елементарних дробів зводяться до табличних підстановкою $t = ax + b$.

I. $$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a}\ln|t| + C = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$$

II. $$\int \frac{dx}{(ax+b)^m} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^m} = -\frac{1}{a(m-1)t^{m-1}} + C = -\frac{1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}} + C.$$

Інтеграл виду III може бути представлений у вигляді:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} = \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot$$

$$\cdot\, arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C$$

Приклад.

$$\int \frac{7x-2}{3x^2-5x+4}dx = \int \frac{84x-24}{36x^2-60x+48}dx = \int \frac{84x-24}{(6x-5)^2+23}dx = \begin{Bmatrix} u=6x-5; & du=6dx; \\ x=\dfrac{u+5}{6}; & \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{14u+70-24}{u^2+23}du = \frac{7}{3}\int \frac{udu}{u^2+23} + \frac{23}{3}\int \frac{du}{u^2+23} = \frac{7}{6}\ln(u^2+23) + \frac{23}{3\sqrt{23}}arctg\frac{u}{\sqrt{23}} + C =$$

$$= \frac{7}{6}\ln\left|36x^2-60x+48\right| + \frac{\sqrt{23}}{3}arctg\frac{6x-5}{\sqrt{23}} + C.$$

Якщо у тричлена $ax^2 + bx + c$ вираз $b^2 - 4ac > 0$, то дріб за означенням не є елементарним, однак, його можна інтегрувати вказаним вище способолм.

Приклад.

$$\int \frac{5x-3}{x^2+6x-40}dx = \int \frac{5x-3}{(x+3)^2-49}dx = \begin{Bmatrix} u=x+3; & du=dx; \\ x=u-3; & \end{Bmatrix} = \int \frac{5u-15-3}{u^2-49}du = 5\int \frac{udu}{u^2-49} -$$

$$-18\int \frac{du}{u^2-49} = \frac{5}{2}\ln\left|u^2-49\right| - \frac{18}{14}\ln\left|\frac{u-7}{u+7}\right| + C = \frac{5}{2}\ln\left|x^2+6x-40\right| - \frac{9}{7}\ln\left|\frac{x-4}{x+10}\right| + C.$$

Приклад.

$$\int \frac{3x+4}{\sqrt{7-x^2+6x}}dx = \int \frac{3x+4}{\sqrt{16-(x-3)^2}}dx = \begin{Bmatrix} u=x-3; & du=dx; \\ x=u+3; & \end{Bmatrix} = \int \frac{3u+9+4}{\sqrt{16-u^2}}du = 3\int \frac{udu}{\sqrt{16-u^2}} +$$

$$+13\int \frac{du}{\sqrt{16-u^2}} = -3\sqrt{16-u^2} + 13\arcsin\frac{u}{4} + C = -3\sqrt{7-x^2-6x} + 13\arcsin\frac{x-3}{4} + C.$$

Розглянемо методи інтегрування дробів типу IV.

Спочатку розглянемо частинний випадок при $M = 0$, $N = 1$.

Тоді інтеграл виду $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ можна шляхом виділення у знаменнику повного квадрату представити у вигляді $\int \frac{du}{(u^2+s)^n}$. Зробимо наступне перетворення:

$$\int\frac{du}{(u^2+s)^n}=\frac{1}{s}\int\frac{s+u^2-u^2}{(u^2+s)^n}du=\frac{1}{s}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}-\frac{1}{s}\int\frac{u^2du}{(u^2+s)^n}.$$

Другий інтеграл, який входить у цю рівність, будемо брати за частинами.

$$\text{Позначимо: }\left\{\begin{array}{l} dv_1=\dfrac{udu}{(u^2+s)^n};\quad u_1=u;\quad du_1=du; \\ v_1=\displaystyle\int\frac{udu}{(u^2+s)^n}=-\frac{1}{2(n-1)(u^2+s)^{n-1}}; \end{array}\right\}$$

$$\int\frac{u^2du}{(u^2+s)^n}=-\frac{u}{(2n-2)(u^2+s)^{n-1}}+\frac{1}{2n-2}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}.$$

Для вихідного інтеграла отримуємо:

$$\int\frac{du}{(u^2+s)^n}=\frac{1}{s}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}+\frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}}-\frac{1}{s(2n-2)}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}};$$

$$\int\frac{du}{(u^2+s)^n}=\frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}}+\frac{2n-3}{s(2n-2)}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}.$$

Отримана формула називається **рекурентною.** Якщо застосувати її *n-1* разів, то отримаємо табличний інтеграл $\int\frac{du}{u^2+s}$.

Повернемось до інтегралу від елементарного дробу виду IV в загальному випадку.

$$\int\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}dx=(4a)^n\int\frac{Mx+N}{\left[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)\right]^n}dx=\left\{\begin{array}{l} u=2ax+b;\quad du=2adx; \\ x=\dfrac{u-b}{2a};\quad s=4ac-b^2; \end{array}\right\}=$$

$$=\frac{(4a)^n}{2a}\int\frac{\frac{M(u-b)}{2a}+N}{(u^2+s)^n}du=\frac{(4a)^n}{2a}\left[\frac{M}{2a}\int\frac{udu}{(u^2+s)^n}+\frac{2aN-Mb}{2a}\int\frac{du}{(u^2+s)^n}\right]$$

В отриманій рівності перший інтеграл за допомогою підстановки $t = u^2 + s$ зводиться до табличного $\int\frac{dt}{t^n}$, а до другого інтегралу застосовується рекурента формула.

Приклад.

$$\int\frac{3x+5}{(x^2-4x+7)^2}dx=\int\frac{3x+5}{((x-2)^2+3)^2}dx=\left\{\begin{matrix}u=x-2; & du=dx;\\ x=u+2; & \end{matrix}\right\}=\int\frac{3u+6+5}{(u^2+3)^2}du=$$

$$=3\int\frac{udu}{(u^2+3)^2}+11\int\frac{du}{(u^2+3)^2}=\left\{\begin{matrix}t=u^2+3;\\ dt=2udu;\end{matrix}\right\}=\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^2}+11\left[\frac{u}{3\cdot 2(u^2+3)}+\frac{1}{3\cdot 2}\int\frac{du}{u^2+3}\right]=$$

$$=-\frac{3}{2t}+\frac{11u}{6(u^2+3)}+\frac{11}{6\sqrt{3}}arctg\frac{u}{\sqrt{3}}+C=-\frac{3}{2(x^2-4x+7)}+\frac{11(x-2)}{6(x^2-4x+7)}+\frac{11}{6\sqrt{3}}arctg\frac{x-2}{\sqrt{3}}+C.$$

Приклад.

$$\int\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x^2-6x+8)(x^2+4)}dx.$$

Оскільки $(x^2-6x+8)(x^2+4)=(x-2)(x-4)(x^2+4)$, то

$$\frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x-2)(x-4)(x^2+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-4}+\frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

Зводячи до спільного знаменника і прирівнюючи відповідні чисельники, отримуємо:

$$A(x-4)(x^2+4)+B(x-2)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2-6x+8)=9x^3-30x^2+28x-88.$$

$$(A+B+C)x^3+(-4A-2B-6C+D)x^2+(4A+4B+8C-6D)x+(-16A-8B+8D)=$$

$$=9x^3-30x^2+28x-88.$$

$$\begin{cases}A+B+C=9;\\ -4A-2B-6C+D=-30;\\ 4A+4B+8C-6D=28;\\ -16A-8B+8D=-88;\end{cases}\qquad \begin{cases}C=9-A-B;\\ D=-30+4A+2B+54-6A-6B;\\ 2A+2B+4C-3D=14;\\ 2A+B-D=11;\end{cases}$$

$$\begin{cases}C=9-A-B;\\ D=24-2A-4B;\\ 2A+2B+36-4A-4B-72+6A+12B=14;\\ 2A+B-24+2A+4B=11;\end{cases}\qquad \begin{cases}C=9-A-B;\\ D=24-2A-4B;\\ 4A+10B=50;\\ 4A+5B=35;\end{cases}$$

$$\begin{cases}C=9-A-B;\\ D=24-2A-4B;\\ 4A+10B=50;\\ 50-10B+5B=35;\end{cases}\qquad \begin{cases}C=9-A-B;\\ D=24-2A-4B;\\ 4A+10B=50;\\ B=3;\end{cases}\qquad \begin{cases}A=5;\\ B=3;\\ C=1;\\ D=2.\end{cases}$$

Отже:

$$\int\frac{5}{x-2}dx+\int\frac{3}{x-4}dx+\int\frac{x+2}{x^2+4}dx=5\ln|x-2|+3\ln|x-4|+\int\frac{x}{x^2+4}dx+\int\frac{2}{x^2+4}dx=$$

$$=5\ln|x-2|+3\ln|x-4|+\frac{1}{2}\ln(x^2+4)+arctg\frac{x}{2}+C.$$

Приклад.

$$\int \frac{6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} dx \ .$$

Оскільки дріб неправильний, то необхідно виділити у ньому цілу частину:

$$\begin{array}{l|l}
6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7 & 3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 \\ \cline{2-2}
-\underline{6x^5 - 8x^4 - 34x^3 + 12x^2} & 2x^2 + 3 \\
\qquad\qquad\quad 9x^3 + 8x^2 - 76x - 7 & \\
\qquad\quad -\underline{9x^3 - 12x^2 - 51x + 18} & \\
\qquad\qquad\qquad\quad 20x^2 - 25x - 25 &
\end{array}$$

$$\int \left[2x^2 + 3 + \frac{20x^2 - 25x - 25}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} \right] dx = \int 2x^2 dx + \int 3dx + 5\int \frac{4x^2 - 5x - 5}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} dx = \frac{2}{3}x^3 + 3x +$$

$$+ 5\int \frac{4x^2 - 5x - 5}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} dx$$

Розкладемо знаменник отриманого дробу на множники. При $x = 3$ знаменник дробу перетворюється в нуль. Тоді:

$$\begin{array}{l|l}
-\,3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 & x - 3 \\ \cline{2-2}
\underline{3x^3 - 9x^2} & 3x^2 + 5x - 2 \\
\qquad -\,5x^2 - 17x & \\
\qquad\quad \underline{5x^2 - 15x} & \\
\qquad\qquad -\,-2x + 6 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{-2x + 6} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Таким чином $3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 = (x - 3)(3x^2 + 5x - 2) = (x - 3)(x + 2)(3x - 1)$.
Тоді

$$\frac{4x^2 - 5x - 5}{(x-3)(x+2)(3x-1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{3x-1}.$$

$$A(x+2)(3x-1) + B(x-3)(3x-1) + C(x-3)(x+2) = 4x^2 - 5x - 5.$$

Для того, щоб уникнути при знаходженні невизначених коефіцієнтів рокриття дужок, групування і розв'язання системи рівнянь застосовується **метод довільних значень**. Його суть полягає в тому, що в отриманий вираз підставляються по черзі декілька довільних значень x. Для спрощення обчислень прийнято в якості довільних значень приймати точки, в яких знаменник дробу дорівнює нулеві, тобто – 3, -2, 1/3. Отримаємо:

$$\begin{cases} 40A = 16; \\ 35B = 21; \\ C = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 2/5; \\ B = 3/5; \\ C = 1. \end{cases}$$

Отримаємо:

$$\int \frac{6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} dx = \frac{2}{3}x^3 + 3x + 3\int \frac{dx}{x+2} + 2\int \frac{dx}{x-3} + 5\int \frac{dx}{3x-1} =$$

$$= \frac{2}{3}x^3 + 3x + 3\ln|x+2| + 2\ln|x-3| + \frac{5}{3}\ln|3x-1| + C.$$