Тема 5. Функції декількох змінних

Лекція 5.1. *Функції 2, 3-ох змінних. Частинні похідні та диференціали функції декількох змінних. Повний диференціал. Похідні та диференціали вищих порядків*

1. Поняття функції багатьох змінних

<u>n-вимірний координатний простір</u>

Означення. Елементом X n-вимірного простору E_n називається впорядкована сукупність n чисел $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$, яку позначають $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Простір E_n являє собою сукупність таких елементів.

Елементи простору E_n можна розглядати як точки з координатами $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$ або як вектори з координатами $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$.

Означення. Відстанню $\rho(x, y)$ між точками $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $Y = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в E_n називають число

$$\rho(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\,. \qquad (1)$$

Означення. Простір E_n, в якому відстань між його елементами визначається формулою (1), називається *n-вимірним евклідовим простором.*

Якщо через θ позначити точку з нульовими координатами, тобто $\theta = (0,0,\ldots,0)$ (початок координат), то

$$\rho(X, \theta) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2}\,.$$

Властивості відстані:

1. $\rho(X, Y) \geq 0$, до того ж $\rho(X, Y) = 0$ лише для $X = Y$.
2. $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$.
3. $\rho(X, Z) \leq \rho(X, Y) + \rho(Y, Z)$ (нерівність трикутника).

Нехай маємо деяку множину D точок n-вимірного евклідового простору E_n.

Означення. Точка $M=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-вимірного евклідового простору E_n називається *внутрішньою точкою* множини D, якщо вона належить цій множині разом з деяким малим її околом.

Означення. Множина D точок n-вимірного евклідового простору E_n називається *відкритою* множиною, якщо кожна її точка внутрішня.

Означення. Точка $X_0=\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ n-вимірного евклідового простору E_n називається *точкою скупчення* множини D, якщо в будь-якому її околі міститься принаймні одна точка з множини D, відмінна від X_0.

Означення. Межовими точками відкритої множини D n-вимірного евклідового простору E_n називаються такі точки скупчення цієї множини, які їй не належать. Множину всіх межових точок множини D називають межею. Відкриту множину разом з її межею називають *замкненою* множиною. Якщо існує круг скінченого радіуса, який цілком містить область D, то вона називається *обмеженою*.

Означення. Множина D точок площини називається *зв'язною*, якщо будь-які її дві точки можна сполучити неперервною лінією. Яка цілком належить множині D.

<u>Функція. Графік функції</u>

За аналогією з функцією змінної $y=f(x)$ можна розглянути функцію, яка залежатиме від кількох незалежних змінних $(x_1, \ldots, x_n)$. У загальному випадку

$$z=f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Означення. Якщо змінна величина z залежить від n незалежних змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то її називають *функцією цих змінних*, а функціональну залежність позначають так:

$z=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, або $z=f(M)$, де точка $M \in D$.

Незалежні змінні x називають аргументами, а залежну змінну z – функцією.

Означення. Сукупність усіх числових значень, які можуть приймати аргументи $x_1, x_2, \ldots, x_n$ і при яких функція $z=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ приймає певні дійсні значення, називають *областю визначення функції* і позначають D або $D(f)$.

Якщо функція визначена для усіх $x_1, x_2, \ldots, x_n$ з деякої області D та її межі dD, тоді кажуть, що функція визначена у замкненій області $D = D \cup dD$.

Множину значень z позначають $E(f)$ або E.

Означення 11. Графіком функції $z = f(x,y)$ є деяка поверхня, яка проектується на площину Oxy в область визначення (рис.1).

Часто використовується перетин поверхні $z = f(x,y)$ площиною $z = const$. Криві лінії, які задовольняють умову $f(x,y) = C = const$, називаються *лініями рівня (ізолініями).*

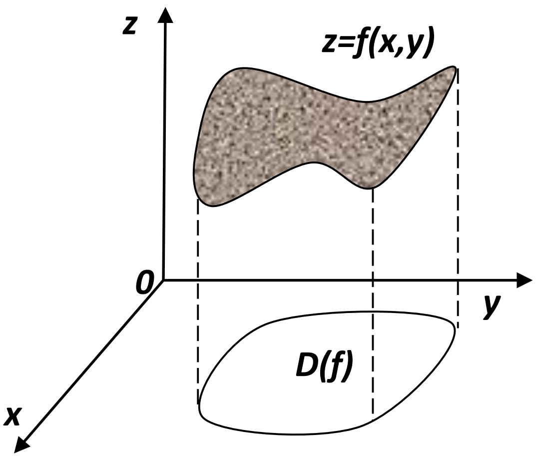

Рис.1.

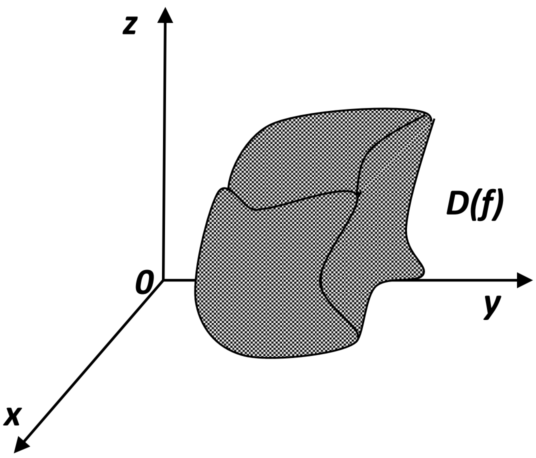

Рис.2.

Областю визначення деякої функції $D(f)$ є множина точок тривимірного простору, а множина значень – множина дійсних чисел (рис. 2).

Функцію багатьох змінних можна задавати аналітично, таблично, графічно, за допомогою ліній рівня, мовно і за допомогою комп'ютерної програми.

❋ Приклад. *Знайти область визначення* $D(f)$ *даної функції* $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1}$.

Оскільки областю визначення функції f є множина $D(f) = \left\{ (x,y) \in R^2 : \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1 \ge 0 \right\}$, то для її відшукання розв'язуємо нерівність

$$\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}-1\geq 0;$$

$$2x>\sqrt{x^2+y^2} \quad i \quad (x,y)\neq(0;0);$$

$$4x^2\geq x^2+y^2, \quad x\geq 0 \quad i \quad (x,y)\neq(0;0);$$

$$\sqrt{3}x\geq|y|, \quad x\geq 0 \quad i \quad (x,y)\neq(0;0).$$

Отже, $D(f)=\{(x,y):|y|\leq\sqrt{3}x, \quad x\geq 0\}$.

Множиною граничних точок є $D'(f)=D(f)\cup\{(0;0)\}$, внутрішніх точок – $D^0(f)=\{(x,y):|y|\leq\sqrt{3}x, \quad x\geq 0\}$, межових точок – $\partial D(f)=\{(x,y):|y|=\sqrt{3}x, \quad x\geq 0\}$. Ізольованих точок множина $D(f)$ не має.

Множина $D(f)$ не є замкненою, а, отже, і досконалою, оскільки точка $(0;0)\in D'(f)$, але $(0;0)\notin D(f)$. Множина $D(f)$ є відкритою, оскільки точки $(x,y)\in D(f): y=\sqrt{3}x, \ x\geq 0$, не є внутрішніми для $D(f)$.

❋ Приклад. *Визначити, чи є зв'язною множина значень даної функції* $f(x,y)=\dfrac{y}{x-y}$ *на множині* $E=D(f)$.

Оскільки $E=D(f)=\{(x,y)\in R^2: x\neq y\}$, то ця множина не є зв'язною, бо вона складається з двох півплощин, що визначаються прямою $y=x$. Тому не можна скористатися твердженням про зв'язність множини $f(E)$. Разом з тим $E=E_1\cup E_2$, де $E_1=\{(x,y)\in E: x>y\}$, а $E_2=\{(x,y)\in E: x<y\}$, причому E_1 та E_2 – зв'язні множини. На прямій $x-y=1$, яка лежить у множині E_1, функція f набуває значення $f(x,y)=y\in(-\infty;+\infty)$. Тому $f(E)=(-\infty;+\infty)$ і, отже, є зв'язною множиною.

❋ Приклад. *Визначити лінії рівня функції* $z=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Дана функція двох змінних визначена скрізь на площині Oxy, крім точки $O(0;0)$. Покладемо $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=C$, де $|C|\leq 1$. Тоді $x^2=C^2(x^2+y^2)\Rightarrow(1-C^2)x^2=C^2y^2$. Звідси,

$$\left(1-C^2\right)x^2 - C^2y^2 = 0 \Rightarrow \left(\sqrt{1-C^2}\,x - Cy\right)\left(\sqrt{1-C^2}\,x + Cy\right) = 0.$$

Отже, лініями рівня є два сімейства прямих:

$\sqrt{1-C^2}\,x - Cy = 0$ і $\sqrt{1-C^2}\,x + Cy = 0,$

що проходять через початок координат, за виключенням самого початку координат.

Границя функції багатьох змінних

Нехай точка $X_0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ є точкою скупчення для області визначення $D(f)$ функції $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – довільна точка множини $D(f)$.

Означення. *Околом* радіуса r точки $X_0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ називають сукупність усіх точок $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ простору E_n, відстань яких до точки X_0 менше або дорівнює r, тобто виконується співвідношення

$$\sqrt{\left(x_1 - x_1^0\right)^2 + \left(x_2 - x_2^0\right)^2 + \ldots + \left(x_n - x_n^0\right)^2} \le r.$$

Означення. Число a називають *границею функції* $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точці X_0, або границею функції для $x_1 \to x_1^0$, $x_2 \to x_2^0$, ... , $x_n \to x_n^0$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що з виконання нерівностей

$$0 < \left|x_1 - x_1^0\right| < \delta,$$

$$0 < \left|x_2 - x_2^0\right| < \delta,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$0 < \left|x_n - x_n^0\right| < \delta$$

випливає виконання нерівності

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - a| < \varepsilon.$$

Це записується так:

$$\lim_{X \to X_0} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to x_2^0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_n \to x_n^0}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a,$$

або

$$\lim_{X \to X_0} f(X) = a.$$

Означення. Число a називають *границею функції* $f(M)$ в точці X_0, якщо для будь-якого малого $\varepsilon > 0$ існує число $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що із виконання нерівності

$$0 < \rho(X, X_0) < \delta$$

випливає справедливість нерівності

$$|f(X) - a| < \varepsilon,$$

що записують

$$\lim_{\rho(X, X_0) \to 0} f(X) = a.$$

Означення (за Гейне). Число a називають *границею функції* $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в точці $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, якщо для будь-якої послідовності $\{X^{(k)}\}$ точок $X^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$, що збігається до точки X_0 $(X^{(k)} \neq X_0,\ \ k = 1, 2, \ldots, n)$, послідовність відповідних значень функції $\{f(X^{(k)})\}$, тобто $f(x_1^{(k)})$, $f(x_2^{(k)})$, ..., $f(x_n^{(k)})$, завжди збігається до числа a, що записують

$$\lim_{X \to X_0} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a.$$

<u>Теорема.</u> Якщо $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $u = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ і $\lim\limits_{X \to X_0} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a$, $\lim\limits_{X \to X_0} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b$, то:

1) $\lim\limits_{X \to X_0} (z \pm u) = a \pm b;$

2) $\lim\limits_{X \to X_0} (z \cdot u) = a \cdot b;$

3) $\lim\limits_{X\to X_0}\dfrac{z}{u}=\dfrac{a}{b}$ (якщо $b\neq 0$).

✱ Приклад. *Для даної функції* $f(x,y)=0$ *і* $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y-1}$, *якщо* $y\neq 1$ *та точки* $(0;1)$ *визначити, чи існують границя функції в точці та повторні границі.*

Нехай $y=1$. Тоді $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=0$. Якщо $y\neq 1$, то $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{y-1}=0$, оскільки множник $x\to 0$, а множник $\sin\dfrac{1}{y-1}$ обмежений. Отже, $\lim\limits_{y\to 1}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)=0$. Якщо $x=0$, то $\lim\limits_{y\to 1} f(x,y)=0$, а якщо $x\neq 0$, то $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y-1}$ не має границі при $y\to 1$. Тому повторна границя $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 1} f(x,y)\right)$ не існує. Разом з тим $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} x\varphi(x,y)=0$, оскільки множник $x\to 0$, а функція

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{y-1}, & \textit{якщо } y\neq 1,\\ 0, & \textit{якщо } y=1,\end{cases}$$

є обмеженою.

✱ Приклад. *Довести, що* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ *не існує.*

Будемо наближатися до точки $(0;0)$ по прямих $y=kx$.

Якщо $y=kx$, то $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x(kx)}{x^2+(kx)^2}=\dfrac{2k}{1+k^2}$.

Отримали, що значення границі залежить від кутового коефіцієнта прямої. Але так як границя функції не повинна залежати від способу наближення точки (x,y) до точки $(0;0)$ (наприклад по прямій $y=2x$ або $y=5x$), то розглядувана границя не існує.

✱ Приклад. *Знайти границю* $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \dfrac{1-\cos(xy)}{|x-2|+|y|}$.

Оскільки

$$f(x,y) = \frac{1-\cos(xy)}{|x-2|+|y|} = \frac{2\sin^2\frac{xy}{2}}{\frac{x^2y^2}{4}} \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \frac{y}{|x-2|+|y|} \cdot y,$$

коли $y \neq 0$, то, враховуючи, що при $(x,y) \to (2,0)$ перший множник прямує до 1, другий – до 2, третій – обмежений, а четвертий прямує до 0, маємо $f(x,y) \to 0$, коли $(x,y) \to (2,0)$ і $y \neq 0$. Якщо $y = 0$, то $f(x,y) = 0$ $\forall x \neq 2$. Отже, $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} f(x,y) = 0$.

2. **Неперервність функції багатьох змінних**

Означення. Функція $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається *неперервною в точці* $X_0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$, якщо границя даної функції в точці X_0 існує і дорівнює значенню функції в точці X_0, тобто

$$\lim_{X \to X_0} f(X) = f(X_0)$$

незалежно від способу прямування точки X до точки X_0.

Означення. Функція $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається *неперервною в* деякій області *n*-вимірного евклідового простору, якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Означення. Якщо в точці $X_0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ функція $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не є неперервною, то вона називається *розривною* в цій точці, а точка X_0 називається *точкою розриву* функції.

Означення. Точки, в яких функція $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ неперервна, називаються *точками неперервності.*

Властивості неперервних функцій двох змінних в замкненій обмеженій області:

1. Якщо функція $z = f(X)$ неперервна в замкненій обмеженій області, то вона обмежена в цій області, тобто існує таке число $C > 0$, що для усіх точок області виконується нерівність $|f(X)| < C$.

2. Якщо функція $z = f(X)$ неперервна в замкненій обмеженій області, то в цій області існують точки, в яких функція набуває найбільшого і найменшого значень.

3. Якщо функція $z = f(X)$ неперервна в замкненій обмеженій області D і $f(X_1) < C < f(X_2)$, де $X_1,\ X_2 \in D$, то існує точка $X_0\left(x_1^0, x_2^0\right)$, в якій $f(X_0) = C$. Зокрема, якщо $f(X_1) < 0$, а $f(X_2) > 0$, то в області D існує точка X_0, в якій $f(X_0) = 0$.

<u>Теорема.</u> Якщо $z_1 = f_1(X)$ і $z_2 = f_2(X)$ неперервні в точці X_0, то:

а) $f_1(X) \pm f_2(X)$ – неперервна в точці X_0,

б) $f_1(X) \cdot f_2(X)$ – неперервна в точці X_0,

в) $\dfrac{f_1(X)}{f_2(X)}$ $(f_2(X) \neq 0)$ – неперервна в точці X_0.

✱ Приклад. *Знайти точки розриву функції* $z = \dfrac{xy+1}{x^2 - y}$.

Функція втратить зміст, якщо знаменник перетвориться в нуль. Але $x^2 - y = 0$ або $y = x^2$ – рівняння параболи. Отже, дана функція має лінією розриву параболу $y = x^2$.

3. Частинні похідні та диференціали першого порядку

Частинні похідні

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M(x; y)$. Надамо змінній x приросту Δx, залишаючи змінну y незмінною, так, щоб точка $M_1(x + \Delta x; y)$ належала заданому околу.

Означення. Величина

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

називається *частинним приростом функції* $f(x, y)$ *по змінній x.*

Аналогічно вводиться *частинний приріст* $\Delta_y z$ *функції по змінній* y:

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y).$$

Означення. Якщо існує границя

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

то вона називається *частинною похідною першого порядку функції* $f(x, y)$ *в точці* $M(x, y)$ *по змінній* x *і позначається* одним із таких символів

$$z'_x,\quad f'_x,\quad \frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial x};$$

$f'_x(x_0, y_0)$, $\quad f'_x\big|_{M_0}$ – частинні похідні по *x* в точці $M_0(x_0; y_0)$.

Аналогічно *частинна похідна першого порядку функції* $f(x, y)$ *по змінній* y визначається як

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

і позначається одним із символів:

$$z'_y,\quad f'_y,\quad \frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Згідно з означенням, при знаходженні частинної похідної z'_x обчислюють звичайну похідну функції однієї змінної *x*, вважаючи змінну y сталою, а при знаходженні похідної z'_y сталою вважається змінна *x*.

❋ Приклад. *Знайти частинні похідні функції* $y = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\left(x^2 + y^2\right)'_x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\left(x^2 + y^2\right)'_y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

❋ Приклад. *Знайти частинні похідні функції* $w = x^{\frac{y}{z}}$.

Функція $w = x^{\frac{y}{z}}$ визначена на множині $D = \{(x, y, z) : x > 0, \quad z \neq 0\}$.

$$w'_x = \frac{y}{z} x^{\frac{y}{z} - 1}, \quad (x, y, z) \in D;$$

$$w'_y = x^{\frac{y}{z}} \ln x \left(\frac{y}{z}\right)'_y = \frac{1}{z} x^{\frac{y}{z}} \ln x, \quad (x, y, z) \in D;$$

$$w'_z = x^{\frac{y}{z}} \ln x \left(\frac{y}{z}\right)'_z = -\frac{y}{z^2} x^{\frac{y}{z}} \ln x, \quad (x, y, z) \in D.$$

❋ Приклад. *Потік пасажирів z виражається функцією $z = \frac{x^2}{y}$, де x – число мешканців, y – відстань між містами. Знайти частинні похідні функції і пояснити їх зміст.*

Похідна $z'_x = \frac{2x}{y}$ показує, що при одній і тій же відстані між містами збільшення потоку пасажирів пропорційне подвоєному числу мешканців. Похідна $z'_y = -\frac{x^2}{y^2}$ показує, що при одній і тій же чисельності мешканців збільшення потоку пасажирів обернено пропорційне квадрату відстані між містами.

Диференційована функція

Означення. Операція знаходження похідної z'_x називається *диференціюванням функції z по аргументу x*, а точка $(x_0; y_0)$ – точкою диференціювання. Операція знаходження похідної z'_y називається *диференціюванням функції z по аргументу y*.

Означення. Функція $z = f(x, y)$ називається *диференційованою в точці* $(x_0; y_0)$, якщо повний приріст даної функції в цій точці

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

можна представити у вигляді

$$\Delta z = A(x_0, y_0)\Delta x + B(x_0, y_0)\Delta y + \alpha(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

де $A(x_0, y_0), B(x_0, y_0)$ – дійсні числа, а функції $\alpha(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y)$, $\beta(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y)$ такі, що

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y) = 0, \quad \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \beta(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y) = 0.$$

Означення. Функція $z = f(x, y)$ називається *диференційованою в області* D, якщо вона диференційована в кожній точці (x, y) цієї області.

Теорема 1. Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційована в точці $(x_0; y_0)$, то вона *неперервна в цій точці.*

Теорема 2. Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційована в точці $(x_0; y_0)$, то в цій точці існують частинні похідні за змінними x та y, до того ж

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = A(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = B(x_0, y_0).$$

Теорема 3. Якщо функція $z = f(x, y)$ має частинні похідні в околі точки $(x_0; y_0)$, які неперервні в цій точці, то функція $f(x, y)$ диференційована в точці $(x_0; y_0)$.

Повний диференціал функції

Означення. Повним диференціалом dz функції двох змінних $z = f(x, y)$ в точці $(x_0; y_0)$ називають *головну частину повного приросту функції* в даній точці, яка лінійно залежить від приростів незалежних змінних Δx і Δy, тобто

$$dz = df(x_0, y_0) = A(x_0, y_0)\Delta x + B(x_0, y_0)\Delta y.$$

Повний диференціал dz функції $z = f(x, y)$ в точці $(x_0; y_0)$, де dx і dy – диференціали незалежних змінних, $dx = \Delta x, \quad dy = \Delta y$ має вигляд:

$$dz = df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy$$

або

$$dz = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy .$$

❋ Приклад. *Знайти повний диференціал функції* $z = 3x^2y^3 - 2x^2y - y.$

Знаходимо спочатку усі частинні похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy^3 - 4xy;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 9x^2y^2 - 2x^2 - 1.$$

Тоді повний диференціал дорівнює

$$dz = 2xy\left(3y^2 - 2\right)dx + \left(9x^2y^2 - 2x^2 - 1\right)dy.$$

❋ Приклад. *Знайти повний приріст і повний диференціал функції* $z = x^2y + 2y^2 + x - y$ *в точці* $(1;2)$, *якщо* $\Delta x = \Delta y = 0{,}1.$

Оскільки $z'_x = 2xy + 1, \quad z'_y = x^2 + 4y - 1,$

то $z'_x(1;2) = 5, \quad z'_y(1;2) = 8,$ а $z(1;2) = 9.$

Повний приріст і повний диференціал функції в точці $(1;2)$ обчислюватимемо за формулами:

$$\Delta z(1;2) = z(1+\Delta x, 2+\Delta y) - z(1;2) = (1+\Delta x)^2(2+\Delta y) + 2(2+\Delta y)^2 + 1 + \Delta x - 2 - \Delta y - 9,$$
$$dz(1;2) = 5\Delta x + 8\Delta y.$$

Тоді різниця $\Delta z(1;2) - dz(1;2) = 2\Delta x\Delta y + 2\Delta x^2 + \Delta x^2\Delta y + 2\Delta y^2$ являє собою похибку, яка виникає від заміни повного приросту Δz функції її повним диференціалом dz. Маємо:

$$\Delta z(1;2) = (1+0{,}1)^2(2+0{,}1) + 2(2+0{,}1)^2 + 1 + 0{,}1 - 2 - 0{,}1 - 9 = 1{,}361,$$

$$dz(1;2) = 5 \cdot 0{,}1 + 8 \cdot 0{,}1 = 1{,}3,$$

$$\Delta z(1;2) - dz(1;2) = 0{,}061.$$

❋ Приклад. *Дано функцію* $z = 2x^2 + y^2x - 1$ *і точки* $A(1;2)$ *і* $B(0{,}97;2{,}02)$. *Обчислити: 1) точне значення* $z(B)$ *функції в точці* B*; 2) наближене значення* $z(\overline{B})$ *функції в точці* B, *виходячи із значення її в точці* A, *замінивши приріст* Δz *при переході від точки* A *до точки* B *диференціалом* dz*; 3) відносну похибку, яка виникає при заміні* Δz *на* dz.

За умовою $x = 1$, $y = 2$, $x + \Delta x = 0{,}97$, $y + \Delta y = 2{,}02$, тому $\Delta x = -0{,}03$, $\Delta y = 0{,}02$.

1) Знаходимо точне значення функції в точці B:

$$z(B) = 2 \cdot (0{,}97)^2 + (2{,}02)^2 \cdot 0{,}97 - 1 = 4{,}839788.$$

(*Якщо* A *і* a *– точне і наближене значення деякої величини, то абсолютна* Δ *і відносна* δ *похибки визначаються за формулами:* $\Delta = |A - a|$; $\delta = \dfrac{\Delta}{a} \cdot 100\%$.)

2) $dz = \left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_A \Delta x + \left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_A \Delta y = \left.\left(4x + y^2\right)\right|_A \Delta x + \left.2xy\right|_A \Delta y = -0{,}16;$

$z(A) = 5;$

$z(\overline{B}) = \left. f(x, y)\right|_A + dz = 4{,}84.$

3) Обчислимо відносну похибку:

$$\delta = \frac{|z(B) - z(\overline{B})|}{z(\overline{B})} \cdot 100\% = \frac{0{,}000212}{4{,}84} \cdot 100\% = 0{,}004\%.$$

Частинні похідні вищих порядків

Частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ називають *частинними похідними першого порядку.* Вони є функціями змінних x і y, отже, їх можна диференціювати.

Означення. Частинними похідними другого порядку називають частинні похідні від частинних похідних першого порядку.

Другі частинні похідні функції $z = z(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Інші позначення $z''_{xx} = f''_{xx}$, $z''_{xy} = f''_{xy}, \ldots$

Цей процес можна продовжити, тобто визначити частинні похідні третього, четвертого і т.д. порядків.

Деякі з частинних похідних третього порядку:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right), \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right), \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right).$$

Похідні, в яких диференціювання здійснюється за різними змінними, називаються мішаними.

Теорема. Якщо функція $z = f(x, y)$ має частинні похідні другого порядку $f''_{xy}(x, y)$ і $f''_{yx}(x, y)$ в деякому околі точки $(x_0; y_0)$, які є неперервними в цій точці, то

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Частинні похідні і повний диференціал функції багатьох змінних

Нехай дано функцію $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, визначену в деякій області D.

За означенням

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i}, \quad i = \overline{1, n},$$

де $\Delta_{x_i} u$ – частинний приріст функції u за змінною x_i.

Означення. Частинний диференціал функції u за змінною x_i визначається формулою:

$$\partial_{x_i} u = \frac{\partial u}{\partial x_i} \Delta x_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Означення. Повним диференціалом функції багатьох змінних називається сума всіх частинних диференціалів, що записуються так:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i$$

($dx_i = \Delta x_i$, бо x_i – незалежні змінні).

❋ Приклад. *Знайти частинні похідні другого порядку функції* $z=\cos x^5y^2$.

Спочатку знаходимо частинні похідні першого порядку

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\sin x^5y^2\left(x^5y^2\right)'_x=-\sin x^5y^2\cdot 5x^4y^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\sin x^5y^2\left(x^5y^2\right)'_y=-\sin x^5y^2\cdot 2x^5y.$$

Тоді

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(-\sin x^5y^2\cdot 5x^4y^2\right)'_x=\left(-5x^4y^2\right)'_x\cdot\sin x^5y^2-5x^4y^2\left(\sin x^5y^2\right)'_x=$$

$$=-20x^3y^2\sin x^5y^2-5x^4y^2\cos x^5y^2\cdot\left(x^5y^2\right)'_x=-20x^3y^2\sin x^5y^2-25x^8y^4\cos x^5y^2.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(-\sin x^5y^2\cdot 2x^5y\right)'_y=\left(-2x^5y\right)'_y\cdot\sin x^5y^2-2x^5y\left(\sin x^5y^2\right)'_y=$$

$$=-2x^5\sin x^5y^2-2x^5y\cdot\cos x^5y^2\cdot\left(x^5y^2\right)'_y=-2x^5\sin x^5y^2-4x^{10}y^2\cos x^5y^2.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(-\sin x^5y^2\cdot 5x^4y^2\right)'_y=\left(-5x^4y^2\right)'_y\cdot\sin x^5y^2-5x^4y^2\left(\sin x^5y^2\right)'_y=$$

$$=-10x^4y\sin x^5y^2-5x^4y^2\cdot\cos x^5y^2\cdot\left(x^5y^2\right)'_y=-10x^4y\sin x^5y^2-10x^9y^3\cos x^5y^2.$$

❋ Приклад. *Знайти другий диференціал складної функції* $u=f\left(x^2+y^2+z^2\right)$.

Нехай $w=x^2+y^2+z^2$. Тоді

$$du=f'(w)dw=f'(w)(2x\Delta x+2y\Delta y+2z\Delta z),$$

$$d^2u=d\left(2f'(w)(x\Delta x+y\Delta y+z\Delta z)\right)=$$
$$=2\left((x\Delta x+y\Delta y+z\Delta z)df'(w)+f'(w)d(x\Delta x+y\Delta y+z\Delta z)\right)=$$

$$=2\left(2(x\Delta x+y\Delta y+z\Delta z)^2f''(w)+f'(w)\left(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2\right)\right)=f'(w)d^2w+f''(w)dw^2.$$