МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет «Львівська політехніка»
Навчально-науковий інститут
підприємництва та перспективних технологій

Кафедра фундаментальної підготовки

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання практичних занять та індивідуальних робіт
з дисципліни **“Дискретна математика”**

для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня “молодший спеціаліст”
спеціальності 5.05010101 **“Обслуговування програмних систем і комплексів”**
денної форми навчання

Затверджено на засіданні кафедри ФП
Протокол №7 від 5 червня 2014 р.

Львів 2014

Рекомендовано до друку Науково-методичною радою Навчально-наукового інституту підприємництва та перспективних технологій Національного університету «Львівська політехніка» (протокол № 6 від 20 червня 2014р.).

„Дискретна математика”: методичні вказівки до виконання практичних занять та індивідуальних робіт для студентів денної форми навчання ОКР «молодший спеціаліст» спеціальності 5.05010101 «Обслуговування програмних систем і комплексів» / Укладачі: Л.Л. Джавала, к.ф.-м.н., О.В. Костюк, к.ф.-м.н. – Львів: Навчально-науковий Інститут підприємництва та перспективних технологій Національного університету «Львівська політехніка», 2014. – с. 55.

Укладачі	Джавала Л.Л., к.ф.-м.н., доц. Костюк О.В., к.ф.-м.н., асист.
Відповідальний за випуск	Слюсарчук Ю.М., заступник завідувача кафедри фундаментальної підготовки, к.ф.-м.н., доц.
Рецензенти	Пелешко Д.Д., професор кафедри інформаційних систем і технологій НН ІППТ НУ «Львівська політехніка», д.т.н.

Вступ

Неможливо уявити сучасного інженера-математика чи програміста, що займається прикладними дослідженнями, який би не володів основними принципами та методами дискретної математики.

Дискретна математика, або дискретний аналіз - область математики, що займається дослідженням структур і завдань на кінцевих множинах. Тому як синонім іноді використовується термін «кінцева математика». Можна вважати загальноприйнятим поділ математики на неперервну і дискретну. Остання являє собою важливий напрям, що має характерні для нього предмет досліджень, методи та завдання. Специфіка задач дискретної математики в першу чергу припускає відмову від основних понять класичної математики - межі і неперервності. Тому для задач дискретної математики звичайні засоби класичного аналізу є допоміжними.

Дискретна і безперервна математика взаємно доповнюють один одного. Поняття і методи однією часто використовуються в іншій. Один і той же об’єкт може розглядатися з двох точок зору і в залежності від цього вибирається неперервна або дискретна математика.

При дослідженні, аналізі та вирішенні управлінських проблем, моделюванні об’єктів дослідження та аналізу широко використовуються дискретні методи формалізованого уявлення, що є предметом розгляду дискретної математики. До них належать методи, засновані на теоретико-множинних уявленнях, графи, алгоритми, математична логіка та ін.

«Дискретна» математика розвивалась у зв’язку з вивченням законів та правил людського мислення, тому й застосовується вона у таких областях техніки, які так чи інакше пов’язані із моделюванням мислення, і в першу чергу в обчислювальній техніці та програмуванні.

Мислення реалізує себе в першу чергу через мовлення (мову). Тому ядром дискретної математики є математична теорія мов (або теорія формальних мов). Слово «формальна» підкреслює, що вивчаються в основному штучні мови, спеціально створені для якихось цілей: мови програмування, мови математики. Теорія формальних мов є базою для теорії кодування, «криптології», що вивчає методи захисту інформації, теорії алгоритмів та у певному сенсі математичної логіки. В прикладному аспекті ця теорія служить основою розробки математичного забезпечення обчислювальних машин. Теорія формальних мов опирається на теорію графів.

Дискретна математика пропонує: універсальні засоби (мови) формалізованого подання; способи коректної переробки інформації, представленої на цих мовах; можливості та умови переходу з однієї мови опису явищ на інший із збереженням змістовної цінності моделей.

Сьогодні дискретна математика є важливою ланкою математичної освіти. Уміння проводити аналіз, композицію і декомпозицію інформаційних комплексів та інформаційних процесів - обов’язкова кваліфікаційна вимога до фахівців напряму підготовки «Комп’ютерні науки».

1. Мета та завдання дисципліни.

1.1. Мета викладання дисципліни

Курс дискретної математики спрямований на те, щоб студенти отримали знання дискретних структур і вміння застосовувати сучасні методи дискретної математики під час здійснення аналізу, синтезу та проектування інформаційних систем різної природи. Студенти повинні опанувати значний обсяг математичних фактів та способів їх застосування.

Основні знання, що їх повинні набути студенти, стосуються таких розділів: основи математичної логіки, комбінаторний аналіз, теорія множин та відношень, теорія графів, автоматів та мов. З кожного розділу розглядаються можливі застосування, в основному до проблем прикладної математики та інформатики.

1.2. Завдання вивчення дисципліни

Завданням вивчення дисципліни "Дискретна математика" є вивчення таких головних положень дискретної математики:

- теорія множин та відношень;
- комбінаторний аналіз;
- математична логіка, логіка висловлювань, логіка предикатів;
- алгебри;
- основні означення та теореми теорії графів;
- алгоритми на графах;
- дерева та їх застосування;
- основи теорії кодування;
- теорія формальних граматик;
- теорія скінченних автоматів.

1.3. Компетенції, якими треба оволодіти студентові:

- формулювати основні положення математичної логіки та застосовувати їх у доведеннях теорем;
- виконувати основні операції над множинами, використовуючи комп'ютерне подання множин;
- працювати з графами, зокрема, використовувати основні алгоритми на графах;
- працювати з деревами;
- використовувати апарат відношень;
- використовувати теорії кодування, формальних граматик та скінченних автоматів.

2. Зміст дисципліни.

2.1. Змістовий блок 1.

Теорія множин, відношень та математична логіка:

1. Теорія множин.
2. Комбінаторний аналіз.
3. Теорія відношень.
4. Математична логіка. Логіка висловлювань. Логіка предикатів.
5. Алгебри.

2.2. Змістовий блок 2.

Теорія графів, автоматів та мов:

6. Теорія графів. Дерева.
7. Основи теорії кодування.
8. Теорія формальних граматик.
9. Теорія скінченних автоматів.

Теорія множин.

Мислення людини побудоване так, що ми уявляємо собі світ з окремих «об'єктів». Виділення об'єктів із їх сукупностей – природній спосіб організації нашого мислення, тому він і є в основі основного інструменту опису точного знання – математики.

Поняття множини належить до фундаментальних не означуваних понять математики. Можна сказати, що ***множина*** – це будь-яка визначена сукупність об'єктів. Об'єкти, з яких складається множина називаються її елементами. Елементи множини відрізняються один він одного.

Прикладами множин можуть бути: множина натуральних чисел $N = \{1, 2, 3, \cdots\}$, множина цілих чисел $Z = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$, множина п'яти простих чисел $P = \{2, 3, 5, 7, 11\}$, множина букв українського алфавіту чи множина сторінок деякої книжки.

Множини як об'єкти можуть бути елементами інших множин. Множину, елементами якої є множини, зазвичай називають класом або сім'єю.

Множину, яка не містить елементів називають порожньою. Часто в конкретних міркуваннях елементи всіх множин беруть із деякої достатньо широкої сукупності (різного в кожному окремому випадку), яку називають універсальною множиною.

Щоб задати множину, необхідно визначити які елементи до неї належать. Це можна зробити різними способами:

- перечислити елементи $A = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k\}$;
- за допомогою характеристичного предикату $A = \{x \mid P(x)\}$;
- деякою процедурою, що створює деякі об'єкти $A = \{x \mid x = f\}$.

Наприклад.

1. $A_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
2. $A_5 = \{n \mid n \in N \ i \ n < 6\}$;
3. $A_5 = \{n \mid for \ n \ from \, 1 \, to \, 5 \ yield \ n\}$.

Операції квантування. У математичних текстах вислови, що часто повторюються замінюють на деякі логічні символи. Зокрема замість слів «для будь-якого», «для кожного», «для всіх» використовують знак $\forall$, а замість слів «існує», «знайдеться» - знак $\exists$. Ці знаки називають відповідно кванторами загальності та існування. Знак $\exists!$ називають квантором єдиності і читають «існує єдиний».

Парадокс Рассела. Задання множин характеристичним предикатом може приводити до суперечностей. Прикладом може бути $Y = \{X \mid X \notin X\}$ - множина всіх множин, що не містять себе у якості елемента. Якщо множина Y існує, то ми маємо мати змогу відповісти на запитання чи $Y \in Y$?

1. Якщо $Y \in Y \Rightarrow Y \notin Y$.
2. Якщо $Y \notin Y \Rightarrow Y \in Y$.

Отримали суперечність (яка відома як парадокс Рассела). Отже така множина не існує. В побудові множин, звичайно, необхідно уникати можливостей створення таких парадоксів. Наприклад, щоб не допустити утворення множини Y варто обмежити використання характеристичних предикатів виду $P(x) = x \in A \, i \, Q(x)$, де A - відома множина (універсум). Зазвичай при цьому використовують визначення $\{x \in A | Q(x)\}$. Для Y універсум не вказано, тому Y не є множиною. Інший спосіб – теорія типів. Об'єкти мають тип 0, множини мають тип 1, множини множин – тип 2 і т.д. Y не має типу, тому множиною не буде. Або ж характеристичний предикат $P(x)$ задається у вигляді обчислюваної функції (алгоритму). Спосіб обчислення значення предикату $X \in X$ не задається, і тому Y не є множиною. Такий спосіб лежить в основі конструктивізму – напряму в математиці, в межах якого розглядаються тільки такі об'єкти, для яких відомі процедури (алгоритми) їх створення. В конструктивній математиці виключаються з розгляду деякі поняття і методи класичної математики, щоб оберегтись від парадоксів.

Операції над множинами.

Одного поняття множини не достатньо. Необхідно визначити способи конструювання нових множин із вже існуючих, тобто визначити операції над множинами.

Множина A міститься в множині B (або множина B включає множину A), якщо кожен елемент A є елементом B.

$$A \subset B \equiv x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Тоді A називається ***підмножиною*** B. Якщо $A \subset B$ і $A \neq B$, то A називається ***власною підмножиною*** B.

Зауваження.

1. $\forall M \quad M \subset M$.
2. $\forall M \quad \varnothing \subset M$.

Дві множини рівні, якщо вони є підмножинами одна одній.

$$A = B \equiv A \subset B \; i \; B \subset A.$$

Потужність множини M позначають $|M|$. Для скінченних множин потужність – це число елементів.

Наприклад. $|\varnothing| = 0$, але $|\{\varnothing\}| = 1$.

Якщо $|A| = |B|$, то множини A і B називають ***рівнопотужними***.

1. ***Об'єднання множин:***
   $A \cup B \equiv \{x \mid x \in A \; або \; x \in B\}.$
2. ***Перетин множин:***
   $A \cap B \equiv \{x \mid x \in A \; i \; x \in B\}.$
3. ***Різниця множин:***
   $A \setminus B \equiv \{x \mid x \in A \; i \; x \notin B\}.$
4. ***Симетрична різниця:***
   $A \Delta B \equiv (A \cup B) \setminus (A \cap B) \equiv \{x \mid (x \in A \; i \; x \notin B) \; або \; (x \notin A \; i \; x \in B)\}.$
5. ***Доповнення:***
   $\overline{A} \equiv \{x \mid x \notin A\}.$
6. ***Універсальна множина*** U ***:***
   $\overline{A} = U \setminus A.$
7. ***Узагальнення операцій об'єднання та перетину:***
   $\bigcup_{i \in I} A_i \equiv \{x \mid \exists i \in I \quad x \in A_i\}.$
   $\bigcap_{i \in I} A_i \equiv \{x \mid \forall i \in I \quad x \in A_i\}.$

Алгебра підмножин.

Множину всіх підмножин множини M називають ***булеаном*** і позначають 2^M :

$$2^M \equiv \{A \mid A \subset M\}.$$

Для скінченної множини $\left|2^M\right| = 2^{|M|}$ (Доведення здійснюється за методом індукції).

Множина всіх підмножин множини U (універсуму) з визначеними операціями перетину, об'єднання, різниці та доповнення утворює ***алгебру підмножин*** множини U.

Властивості операцій над множинами.

Розглянемо множину U, тоді для $\forall \; A, B, C \subset U$ виконується:

1. ***Ідемпотентність:***
   $A \cup A = A$; $A \cap A = A$.
2. ***Комутативність:***
   $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.

3. ***Асоціативність:***
   $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$; $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.
4. ***Дистрибутивність:***
   $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$; $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
5. ***Поглинання:***
   $(A\cup B)\cap A=A$; $(A\cap B)\cup A=A$.
6. ***Властивість нуля:***
   $A\cup\varnothing=A$; $A\cap\varnothing=\varnothing$.
7. ***Властивість одиниці:***
   $A\cup U=U$; $A\cap U=A$.
8. ***Інволютивність:***
   $\overline{\overline{A}}=A$.
9. ***Закони де Моргана:***
   $\neg(A\cup B)=\overline{A}\cap\overline{B}$; $\neg(A\cap B)=\overline{A}\cup\overline{B}$.
10. ***Властивість доповнення:***
   $A\cup\overline{A}=U$; $A\cap\overline{A}=\varnothing$.
11. ***Вираз для різниці:***
   $A\setminus B=A\cap\overline{B}$.

Доведення можна здійснювати за допомогою діаграм Ейлера для лівої та правої частин рівностей або проведенням формальних міркувань для кожної рівності.

Практичне заняття 1.1.
Теорія множин

Завдання для аудиторної роботи 1.1.

1. Визначити і зобразити на малюнках множини $A\cup B, A\cap B, A\oplus B, A\setminus B, B\setminus A,$ якщо:
   а) $A=\{x\in R: x^2+5x-6<0\}$, $B=\{x\in R: |x|<4\}$.
   б) $A=\{x\in R: 2<|x-4|\le 3\}$, $B=\{x\in R: 3|x|<4\}$.
   в) $A=\{x\in R: x^2+7x-18>0\}$, $B=\{x\in R: |x|\le 5\}$.

2. Задано множини *A, B, C.* Відомо, що кожна з цих множин містить по 15 елементів, кожна пара цих множин – по 5 спільні елементи, 2 елементи належать усім трьом множинам. Скільки елементів містить об’єднання цих трьох множин $A\cup B\cup C$.

3. В магазині протягом тижня було куплено 74 системні блоки, 72 монітори та 35 принтерів. Відомо, що 69 покупців придбали і системний блок, і монітор, 22 – і системний блок, і принтер, стільки ж – і монітор, і принтер. Відомо теж, що 21 покупець придбав усі три речі. Скільки покупців здійснило покупку? Скільки з них купили лише принтер?

4. Знайти множини *A* та *B*, якщо $A\setminus B=\{5,2,7,10\}$, $B\setminus A=\{1,4\}$ і $A\cap B=\{6,3,9\}$.

5. Довести рівність $A\setminus B=A\cap\overline{B}$.

6. Довести рівність $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$.

7. Довести рівність $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.

8. Довести рівність $\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}$.

9. Довести рівність $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$.

Домашнє завдання 1.1.

1. Визначити і зобразити на малюнках множини $A \cup B, A \cap B, A \oplus B, A \setminus B, B \setminus A$, якщо:
   а) $A = \{x \in R : x^2 + 6x - 16 < 0\}, \quad B = \{x \in R : |x| < 5\}$.
   б) $A = \{x \in R : 1 < |x - 3| \le 5\}, \quad B = \{x \in R : x^2 - 4 < 0\}$.
   в) $A = \{x \in R : x^2 - 2x - 3 > 0\}, \quad B = \{x \in R : 3|x| \le 7\}$.

2. Секцію з плавання відвідує 11 студентів, з футболу – 7, а з волейболу – 6. Відомо, що троє студентів ходять на плавання і на волейбол, двоє – на плавання і на футбол, а один – на футбол і волейбол. Причому ніхто з них не ходить на всі три секції. 10 студентів, які не відвідують жодної секції, ходять на загальні заняття з фізкультури, а 2 студенти взагалі звільнені від фізкультури за станом здоров'я. Скільки студентів в групі? (*в-дь: 30 студ.*)

3. За день в кав'ярню зайшло 172 відвідувачі. Вони випили 131 чашку кави, з'їли 67 тістечок та 71 порцію морозива. Відомо, що 21 відвідувач замовив і каву, і тістечко, і морозиво, а 11 не замовило нічого. Крім того, відомо, що 61 відвідувач пив каву і їв тістечко, а 46 – пили каву і їли морозиво. Скільки відвідувачів їли і морозиво, і тістечко? Скільки відвідувачів їли лише морозиво?? (*в-дь: 22- і морозиво, і тістечко, 24-лише морозиво*)

4. Перевірити рівність (за допомогою діаграм Ейлера) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

5. Довести рівність $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$.

6. Довести рівність $A \cup (C \setminus B) = ((A \cup C) \setminus B) \cup (A \cap B)$.

Комбінаторний аналіз.

В комбінаторному аналізі вивчають об'єкти зі скінченної множини та їх властивості, підраховують кількість об'єктів з певними властивостями. Методи комбінаторного аналізу мають широке застосування в теорії скінченних автоматів.

Комбінаторика — розділ математики, присвячений розв'язуванню задач вибору та розміщення елементів множини за певними правилами. Підвищення інтересу до комбінаторики викликано бурхливим розвитком обчислювальної техніки і пов'язаним з ним загальним розвитком дискретної математики. Зокрема, багато задач теорії ймовірностей розв'язується за допомогою комбінаторики.

Розглядатимемо лише скінченні множини; через $|A|$ позначається число елементів множини A.

Впорядкованою множиною називають довільну n - елементну множину $A = \{a_{1 \ldots}, a_n\}$, $|A| = n$, де враховано порядок, в якому розміщені її елементи (тобто враховано номери елементів - порядок їх розташування). Якщо цей порядок не враховано, то множину A називають ***невпорядкованою***, позначимо її A_n.

Сформулюємо два універсальних правила, які застосовуються при розв'язанні комбінаторних задач.

Правило суми. Якщо деякий об'єкт a можна вибрати m способами, а об'єкт b - n способами, причому ніякий вибір a не збігається з жодним з виборів b, то один з об'єктів a або b можна вибрати $m+n$ способами.

Правило добутку. Якщо об'єкт a_1 можна вибрати m_1 способами, об'єкт a_2 - m_2 способами, ..., об'єкт a_n - m_n способами, то вибір впорядкованої системи об'єктів $(a_1,\ldots,a_n)$ можна здійснити $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$ способами.

Комбінації. Різні *невпорядковані* k – елементні підмножини множини A_n $(k<n)$ називають ***комбінаціями*** з n елементів по k елементів. Кількість комбінацій позначають C_n^k і обчислюють за формулою $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, де $n!$ називається n - факторіал і визначається за формулою $n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$, крім того, за означенням $0!=1$.

Відмітимо властивість C_n^k, яка часто використовується при розв'язуванні задач:

$$\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n .$$

Зауваження. Дві комбінації вважаються різними, тільки тоді, якщо вони відрізняються елементами.

Розміщення. Різні *впорядковані* k – елементні підмножини множини A_n $(k<n)$ називаються ***розміщеннями*** з n елементів по k елементів. Кількість розміщень позначають A_n^k і обчислюють за формулою: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Зауваження. Два розміщення вважаються різними, якщо вони відрізняються елементами або складені з однакових елементів, які розташовані в різному порядку. Відмінність між комбінаціями і розміщеннями множини A_n по k елементів полягає в тому, що у першому випадку розглядаються *невпорядковані* k – елементні підмножини множини A_n, а у другому випадку - *впорядковані* k – елементні підмножини множини A_n.

Перестановки. ***Перестановкою*** n - *елементної множини* A_n називають розміщення з n елементів по n. Кількість таких перестановок позначають P_n і обчислюють за формулою: $P_n = A_n^n = n!$.

Зауваження. Перестановки вважаються різними, якщо вони відрізняються порядком елементів.

Розміщення з повтореннями. Довільний *впорядкований* рядок довжиною k, утворений з елементів множини A_n, у якому елементи цієї множини можуть *повторюватися* кілька разів, називаються ***розміщеннями з повтореннями*** з n елементів по k елементів. Кількість усіх розміщень з повтореннями позначають $\overline{A}_n^k$ і обчислюють за формулою: $\overline{A}_n^k = n^k$.

Зауваження. Формула допускає також інше комбінаторне тлумачення, а саме: $\overline{A}_n^k$ - це число способів, якими можна розкласти k *різних* предметів по n ящиках.

Перестановки з повтореннями. ***Перестановкою з повтореннями***, яка має заданий склад $n_1,\ n_2,\ldots,\ n_k$ з елементів заданої множини A_n називається *впорядкована* вибірка, що має обсяг $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, складена з елементів цієї множини так, що елемент a_1 повторюється n_1 разів, елемент a_2 повторюється n_2 разів,…, елемент a_k повторюється n_k разів. Кількість усіх різних перестановок з повтореннями, які мають заданий склад ($n_1,\ n_2,\ldots,n_k$), позначають символом $P_n(n_1,\ n_2,\ldots,n_k)$ і обчислюють за формулою: $P_n(n_1,\ n_2,\ldots,n_k) = \dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_n!}$.

Зауваження. Формула має також інше тлумачення, а саме: $P_n(n_1,\ n_2,\ldots,n_k)$ - це число способів, якими можна розкласти n *різних* предметів по k ящиках так, щоб до i-го ящика потрапило n_i *різних* предметів ($i=1,\ldots,k$).

Комбінації з повтореннями. *Невпорядковані* рядки довжиною k, утворені з елементів множини A_n, називаються ***комбінаціями з повтореннями*** з n елементів по k елементів. Кількість усіх комбінацій з повтореннями позначають $\overline{C}_n^k$ і обчислюють за формулою: $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$.

Зауваження. Формула має також інше тлумачення, а саме: $\overline{C}_n^k$ - це число способів, якими можна розкласти k *однакових* предметів по n ящиках.

Практичне заняття 2.1.
Комбінаторний аналіз

Завдання для аудиторної роботи 2.1.

1. Банк випускає кредитні картки, які мають 4 букви англійського алфавіту (всього в англійському алфавіті є 26 букв) та 4 цифри. Скільки можна випустити карток?

2. Скільки різних слів (в тому числі беззмістовних) можна отримати переставляючи букви у слові «алфавіт»?

3. Скількома способами можна вибрати 3 деталі з ящика, в якому міститься 15 деталей?

4. Скількома способами можна розділити групу з 22 студентів на 3 групи так, щоб в першій групі було 3 студенти, в другій – 8, в третій – 11 студентів?

5. У трамваї є 7 пасажирів. Трамвай робить 10 зупинок. Скількома способами можуть вийти пасажири, якщо вони повинні виходити на різних зупинках?

6. Скількома способами можна призначити 5 осіб на 5 різних посад із 12 кандидатів на ці посади?

7. Скількома способами можна розподілити 25 найменувань товару між трьома магазинами, якщо в перший потрібно доставити 8 найменувань, у другий – 10, а в третій – 7 найменувань?

8. Комісія складається з голови, його заступника і ще 5 членів. Скількома способами вони можуть між собою розподілити обов'язки?

9. Начальник служби безпеки банку повинен щоденно розподіляти 10 охоронців по 10 постах. Знайти кількість різних комбінацій розстановки охоронців.

Домашнє завдання 2.1.

1. Скільки чотиризначних чисел можна записати цифрами: 1, 2, 3, 4?

2. Студенти одного з курсів вивчають 10 дисциплін. Скількома способами можна скласти розклад занять на середу, якщо в цей день треба запланувати лекції з 3 різних предметів?

3. Скількома способами можна розподілити 25 найменувань товару між трьома магазинами, якщо в перший потрібно доставити 8 найменувань, у другий – 10, а в третій – 7 найменувань?

4. Комісія складається з голови, його заступника і ще 5 членів. Скількома способами вони можуть між собою розподілити обов'язки?

Теорія відношень.

Якщо a і b деякі об'єкти, то через (a,b) позначають ***впорядковану пару*** цих об'єктів. Рівність впорядкованих пар визначаються таким способом: $(a,b)=(c,d)\equiv a=c\ i\ b=d.$ Взагалі кажучи, $(a,b)\neq(b,a)$.

Зауваження. Впорядковані пари можна розглядати як множини, якщо визначити їх так: $(a,b)=\{a,\{a,b\}\}$.

Прямий добуток множин.

Нехай A і B дві множини. ***Прямим (декартовим) добутком*** двох множин A і B називається множина впорядкованих пар, в якій перший елемент кожної пари належить множині A, а другий - множині B:

$$A\times B\equiv\{(a,b)\mid a\in A\ i\ b\in B\}.$$

Степеню множини A називають її прямий добуток самої на себе:

$$A^n=\underbrace{A\times\cdots\times A}_{n\ раз}.$$

Бінарним відношенням R із множини A в множину B називають підмножину прямого добутку A і B:

$$R\subset A\times B.$$

Для бінарних відношень зазвичай використовується інфіксна форма запису:

$$aRb\equiv(a,b)\in R\subset A\times B.$$

Якщо $A=B$, то кажуть, що R є відношенням на множині A.

Властивості відношень.

Нехай $R\subset A^2$. Тоді відношення R називається:

1. **Рефлексивним**, якщо $\forall a\in A\quad aRa$;
2. **Антирефлексивним**, якщо $\forall a\in A\quad \neg(aRa)$;
3. **Симетричним**, якщо $\forall a,b\in A\quad aRb\Rightarrow bRa$;
4. **Антисиметричним**, якщо $\forall a,b\in A\quad aRb\ i\ bRa\Rightarrow a=b$;
5. **Асиметричним**, якщо $\forall a,b\in A\quad aRb\Rightarrow b\overline{R}a$;
6. **Транзитивним**, якщо $\forall a,b,c\in A\quad aRb\ i\ bRc\Rightarrow aRc$;
7. **Повним** або **лінійним**, якщо $\forall a,b\in A\quad a\neq b\Rightarrow aRb\ або\ bRa$.

Функції.

Нехай f - відношення на множині A ($f\subset A^2$), таке, що

$$\forall a,b,c\quad (a,b)\in f\ i\ (a,c)\in f\Rightarrow b=c.$$

Така властивість називається однозначністю або функціональністю, а саме відношення називають ***функціональним***.

Функціональне відношення із множини A в множину B (позначають $f:A\to B$, або $A\xrightarrow{f}B$) називають ***відображенням***.

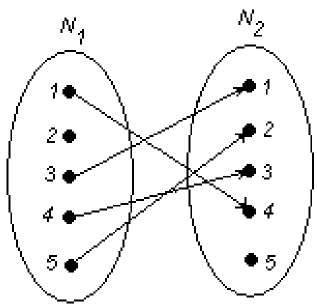
Відображення, область визначення і множина значень якого є числовими множинами, називають ***функцією***.

Записи $(a,b)\in f$ і $b=f(a)$ - еквівалентні.

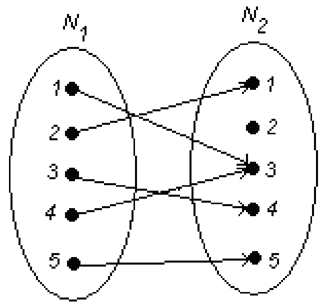
Нехай $f:A\to B$. Тоді f називають:

1. **Ін'єкцією**, якщо $b=f(a_1)$ і $b=f(a_2)\Rightarrow a_1=a_2$ (або $a_1\neq a_2\Rightarrow f(a_1)\neq f(a_2)$);
2. **Сюр'єкцією**, якщо $\forall b\in B\ \exists a\in A \quad b=f(a)$ (прообраз не порожня множина);
3. **Бієкцією**, якщо вона ін'єктивна та сюр'єктивна одночасно.

Наприклад:



Відображення ін'єктивне (різні елементи переходять у різні), не сюр'єктивне (т. $5\in N_2$ не має прообразу), не бієктивне (оскільки не сюр'єктивне).



Відображення не ін'єктивне (оскільки дві точки переходять в одну: $\{1,4\}\in N_1\to 3\in N_2$), не сюр'єктивне (т. $2\in N_2$ не має прообразу), не бієктивне.

Відношення еквівалентності та порядку.

Рефлексивне симетричне транзитивне відношення називається ***відношенням еквівалентності***. Позначатимемо ~.

Підмножина елементів множини M, еквівалентних x, називається ***класом еквівалентності*** для x:

$$[x]_{\approx}\equiv\{y\mid y\in M\ і\ y\sim x\}.$$

Будь-яке відношення еквівалентності на множині M визначає ***розбиття*** множини M, причому серед елементів розбиття немає порожніх, і навпаки, будь-яке розбиття множини M, що не містить порожніх елементів, визначає відношення еквівалентності на множині M.

Якщо R - відношення еквівалентності на множині M, то множина класів еквівалентності називається ***фактормножиною*** множини M за еквівалентністю R і позначається:

$$M/R\equiv\{[x]_R\}_{x\in M}.$$

Антисиметричне транзитивне відношення називається ***відношенням порядку***. Якщо відношення порядку є рефлексивним, то воно називається ***відношенням нестрогого порядку***, якщо антирефлексивним, то – ***відношенням строгого порядку***.

Загальна схема досліджень бінарних відношень.

1. З'ясувати тип досліджуваного відношення (відношення еквівалентності, порядку, функціональне, тощо).
2. Якщо R - відношення еквівалентності, то описати фактор множину.
3. Якщо R - відношення порядку, то встановити чи це відношення часткового чи строгого порядку, повного чи ні.
4. У випадку функціонального відношення необхідно з'ясувати чи воно відображення.
5. Якщо R - відображення, то встановити його сюр'єктивність, ін'єктивність чи бієктивність.

Практичне заняття 3.1.
Теорія відношень

Завдання для аудиторної роботи 3.1.

1. Визначити, які властивості мають такі відношення задані на деякій множині людей. Нехай $(a,b)\in R$, якщо
   а) a вище на зріст, ніж b;
   б) a і b народилися в один день;
   в) a є родичем b;
   г) a дружить з b;
   д) a і b мають спільних батьків;
   е) a і b розмовляють однією мовою.

2. Для відношення R на множині {1, 2, 3, 4} визначити, чи воно рефлексивне, симетричне, антисиметричне, асиметричне, транзитивне. Записати матрицю, яка задає це відношення:
   а) R={(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)};
   б) R={(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)};
   в) R={(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)}.

3. Записати всі упорядковані пари, які утворюють відношення R з множини A={0, 1, 2, 3, 4} в множину B={0, 1, 2, 3}, де $(a, b)\in R$ якщо й лише якщо $a+b=5$. Визначити, які властивості має це відношення.

4. Записати всі упорядковані пари, які утворюють відношення R з множини A={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} в множину B={24, 25, 26}, де $(a, b)\in R$ якщо й лише якщо a дільник b.

5. Дослідити відношення: $R=\{(x,y)\in Z^2 \mid x^2+y^2=100\}$.

6. Дослідити відношення: $R=\{(x,y)\in Z^2 \mid (x=y)\vee(x=-y)\}$.

7. Дослідити відображення: $R=\left\{(x,y)\in[-1,1]\times[-1,1] \mid y=\dfrac{x}{1+x^2}\right\}$.

8. Визначити тип відношення (відношення еквівалентності, відношення порядку), де $a,b\in Z$:
   а) $(a,b)\in R$, якщо остача при ділені a на 3 дорівнює остачі при ділені b на 3.
   б) $(a,b)\in R$, якщо $a\le b$.
   в) $(a,b)\in R$, якщо $a<b$.

9. Нехай $f(x)=\sin x$, $f: X\to Y$. Дослідити відображення на ін'єктивність, сюр'єктивність та бієктивність у кожному з наведених випадків:
   а) $X=R,\quad Y=R.$
   б) $X=\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right],\quad Y=[0;2).$

10. Чи є відображення $f: R\to R$ ін'єкцією, сюр'єкцією, бієкцією, якщо $f(x)=|x+2|$.

Домашнє завдання 3.1.

1. Визначити, які властивості має відношення задане на деякій множині людей. Нехай $(a,b)\in R$, якщо a знайомий з b.

2. Для відношення R={(1, 2), (2, 3), (3, 4)} на множині {1, 2, 3, 4} визначити, чи воно рефлексивне, іррефлексивне, симетричне, антисиметричне, асиметричним, транзитивним.

3. Визначити, чи відношення R на множині цілих чисел рефлексивне, симетричне, антисиметричне, транзитивне, де $(x, y)\in R$ якщо й лише якщо x та y обидва або від'ємні, або невід'ємні.

4. Визначити, чи відношення R на множині цілих чисел рефлексивне, симетричне, антисиметричне, транзитивне, де $(x, y)\in R$ якщо й лише якщо $x = y^2$.

5. Записати всі упорядковані пари, які утворюють відношення R з множини A={0, 1, 2, 3, 4} в множину B={0, 1, 2, 3}, де $(a, b)\in R$ якщо й лише якщо $a+b=4$.

6. Записати всі упорядковані пари, які утворюють відношення R з множини A={0, 1, 2, 3, 4} в множину B={0, 1, 2, 3}, де $(a, b)\in R$ якщо й лише якщо $a>b$.

7. Дослідити відношення: $R=\{(x,y)\in R^2 \mid y=x^2,\quad x\in[-3,2]\cup[3,4]\}$.

8. Дослідити відношення: $R=\{(x,y)\in Z^2 \mid x^2+y^2=16\}$.

9. Дослідити відношення: $R=\{(x,y)\in R^2 \mid |x+y|=1\}$.

10. Нехай $f(x)=\sin x$, $f: X\to Y$. Дослідити відображення на ін'єктивність, сюр'єктивність та бієктивність у кожному з наведених випадків:
    а) $X=R,\quad Y=[-1;1]$.
    б) $X=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right),\quad Y=[-1;1)$.

11. Чи є відображення $f: R\to R$ ін'єкцією, сюр'єкцією, бієкцією, якщо $f(x)=x^3$.

Математична логіка. Логіка висловлювань. Логіка предикатів.

Висловленням називається твердження, про яке можна сказати істинне воно чи хибне, але не одне й інше водночас. Отже, довільному висловленню будемо приписувати одне із значень істинності: *і* – істина (*true*), *х* – хиба (*false*). Висловлення позначають малими латинськими буквами *p, q, r, …,* які називають пропозиційними змінними. Нові висловлення, отримані комбінаціями одного чи більше висловлень за допомогою певних логічних операцій, називають складними. Логічні операції по іншому називають логічними зв'язками.

Синтаксис формул логіки висловлювань – це сукупність правил, які дають змогу будувати формули та розпізнавати правильні формули серед послідовностей символів.

Семантика формул логіки висловлювань – це сукупність правил, за якими формулам надають значення істинності.

1. **Диз'юнкцією** $p \vee q$ двох висловлювань p і q називається висловлення, яке істинне тоді і тільки тоді, коли хоча б одне із заданих висловлень p чи q – істинна.
2. **Кон'юнкцією** $p \wedge q$ двох висловлювань p і q називається висловлення, яке істинне тоді і тільки тоді, коли p та q водночас істинні.
3. **Імплікацією** $p \to q$ двох висловлювань p і q називається висловлення, яке хибне тоді і тільки тоді, коли p – істинна, а q – хибне.
4. **Еквіваленцією** $p \sim q$ (інший запис $p \leftrightarrow q$) двох висловлювань p і q називається висловлення, яке істинна тоді і тільки тоді, коли значення істинності p та q співпадають.
5. **Альтернативним «або»** $p \oplus q$ двох висловлювань p і q називається висловлення, яке істинне тоді і тільки тоді, коли значення істинності p та q різні.
6. **Запереченням** $\neg p$ висловлювання p називається висловлювання, яке істинне, коли p – хибне, і навпаки.

Дані означення зручно зображати за допомогою табличок істинності для всеможливих наборів значень істинності двох висловлювань p та q:

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \to q$	$p \sim q$	$p \oplus q$	$\neg p$
T	T	T	T	T	T	F	F
T	F	T	F	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	T	T
F	F	F	F	T	T	F	T

Зауваження.

1. p, q, r, i, x – формули.
2. якщо φ і ψ – формули, то $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$, $(\neg\varphi)$ – формули.
3. інших формул немає.

Зауваження. Логічні операції над висловлюваннями здійснюються у певному порядку, який називають пріоритетом логічних операцій: $\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$.

Основні рівносильності.

1. $\neg(\neg p) = p$.
2. $p \vee q = q \vee p$.
3. $p \wedge q = q \wedge p$.
4. $p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$.
5. $p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$.
6. $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.
7. $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.
8. $p \wedge p = p$.
9. $p \vee p = p$.
10. $p \wedge \neg p = x$.
11. $p \vee \neg p = i$.
12. $p \wedge i = p$.
13. $p \vee i = i$.
14. $p \wedge x = x$.
15. $p \vee x = p$.
16. $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$.
17. $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$.
18. $p \to q = \neg p \vee q$.
19. $p \leftrightarrow q = (p \to q) \wedge (q \to p)$.
20. $p \to q = \neg q \to \neg p$.

Формулу f логіки висловлювань називають ***виконаною***, якщо існує принаймні одна інтерпретація, в якій значення f дорівнює Т (*true*).

Формулу f логіки висловлювань називають ***тавтологією***, якщо значення f дорівнює Т (*true*) у будь-якій інтерпретації.

Формулу f логіки висловлювань називають ***невиконаною (суперечністю)***, якщо значення f дорівнює F (*false*) у будь-якій інтерпретації.

Формули називають ***рівносильними***, якщо вони приймають однакові значення істинності для всеможливих наборів значень істинності пропозиційних букв.

Для того, щоб показати рівносильність двох формул, необхідно порівняти їх таблички істинності або скористатись основними рівносильностями.

Елементарною диз'юнкцією (кон'юнкцією) називають диз'юнкцію (кон'юнкцію) скінченного числа різних логічних змінних, кожна з яких може мати чи не мати заперечення.

Формула алгебри висловлювань задана у ***диз'юнктивній нормальній формі* (*ДНФ*)**, якщо вона представлена у вигляді диз'юнкції кон'юнкцій елементарних висловлювань (тобто змінних) та їх заперечень.

Формула алгебри висловлювань задана у ***кон'юктивній нормальній формі (КНФ)***, якщо вона представлена у вигляді кон'юнкції диз'юнкцій елементарних висловлювань та їх заперечень.

Розглянемо множину $B=\{0,1\}$. Кортеж $\vec{x}=(x_1, x_2, \cdots x_n)\in B^n = \underbrace{B\times B\times\cdots\times B}_{n\ \text{ðàç}}$ називають булевим вектором. Функцію $f: B^n \to B$ називають булевою функцією від n змінних і позначають $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \cdots x_n)$.

***Досконалою диз'юнктивною нормальною формою* (*ДДНФ*)** функції $f(x_1, x_2, \cdots x_n)$, що містить рівно n змінних, називають її ДНФ із властивостями:

1. Немає однакових доданків.
2. Жоден доданок не містить однакових множників.
3. Жоден доданок не містить пропозиційної змінної разом з її запереченням.
4. Кожен доданок містить змінну x_i або її заперечення $i=1, 2, \cdots n$.

***Досконалою кон'юктивною нормальною формою (ДКНФ*)** функції $f(x_1, x_2, \cdots x_n)$, що містить рівно n змінних, називають її КНФ із властивостями:

1. Немає однакових множників.
2. Жоден множник не містить однакових доданків.
3. Жоден множник не містить пропозиційної змінної разом з її запереченням.
4. Кожен множник містить змінну x_i або її заперечення $i=1, 2, \cdots n$.

Зауваження.

1. $\forall\ f(x_1, x_2, \cdots x_n) \neq 1$ має єдину ДКНФ.
2. $\forall\ f(x_1, x_2, \cdots x_n) \neq 0$ має єдину ДДНФ.

Логіка першого ступеня.

Ми уже зазначали, що існують речення, про які неможна сказати істинні вони чи хибні, тобто вони не є висловлюваннями. Але існують речення із змінними, наприклад, «$x+1=5$», які не є висловлюваннями, але перетворюються в них якщо надати значення цим змінним. Речення зі змінними дуже поширені. Вони містяться як у математичних формулах, так і у комп'ютерних програмах. Змінну називають предметом, а її властивість – предикатом.

Одномісний предикат – це вираз, який містить одну змінну й показує її властивість. Значеннями предиката є логічні значення T і F.

Запис $\forall x P(x)$ означає, що предикат $P(x)$ істинний для всіх значень x із предметної області.

Запис $\exists x P(x)$ означає, що у предметній області існує принаймні одне x таке, що предикат $P(x)$ істинний.

Атомарні формули (чи атоми) – це символи, використовувані для позначення висловлювань (малі латинські букви з індексами чи без них). Складне висловлювання утворюють із наявних висловлювань лише за допомогою логічних операцій.

Закони логіки першого ступеня.

1. $\overline{\forall x\,P(x)} = \exists x\overline{P(x)}$.
2. $\overline{\exists x\,P(x)} = \forall x\overline{P(x)}$.
3. $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) = \forall x\,P(x) \wedge \forall x Q(x)$.
4. $\exists x(P(x) \vee Q(x)) = \exists x\,P(x) \vee \exists x Q(x)$.
5. $\forall x(P(x) \wedge Q) = \forall x\,P(x) \wedge Q$.
6. $\forall x(P(x) \vee Q) = \forall x\,P(x) \vee Q$.
7. $\exists x(P(x) \wedge Q) = \exists x\,P(x) \wedge Q$.
8. $\exists x(P(x) \vee Q) = \exists x\,P(x) \vee Q$.
9. $\forall x\forall y P(x,y) = \forall y\forall x P(x,y)$.
10. $\exists x\exists y P(x,y) = \exists y\exists x P(x,y)$.

Зауваження. $\forall x\exists y P(x,y) \neq \exists y\forall x P(x,y)$.

Випереджена нормальна форма.

Формула логіки першого ступеня записана у ***випередженій нормальній формі (ВНФ)***, якщо вона має вигляд $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n\ M$, де кожне $Q_i x_i$, $(i = 1,\ldots n)$ це або $\forall x_i$, або $\exists x_i$, а формула M не містить кванторів.

Схема зведення довільної формули логіки першого ступеня до ВНФ.

1. Виключити у формулі логічні зв'язки $\rightarrow$ та $\leftrightarrow$, застосуванням правил: $P \rightarrow Q = \overline{P} \vee Q$ та $P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$.
2. Внести знак заперечення всередину формули, використовуючи: $\overline{\overline{P}} = P$, закони де Моргана: $\overline{P \vee Q} = \overline{P} \wedge \overline{Q}$, $\overline{P \wedge Q} = \overline{P} \vee \overline{Q}$ та закони 1-2: $\overline{\forall x\,P(x)} = \exists x\overline{P(x)}$, $\overline{\exists x\,P(x)} = \forall x\overline{P(x)}$.
3. Винести квантори у префікс, для чого скористатись законами логіки першого ступеня 3-8.

Алгебри.

Змінні, які можуть приймати значення тільки з множини $B = \{0, 1\}$, називають ***логічними*** або ***булевими*** змінними. Значення 0 та 1 називають булевими константами. Функцію виду $f(x_1,\ldots,x_n)$, область значень якої складається з 0 та 1, і яка залежить від змінних $x_1,\ldots,x_n$, що приймають також лише ці два значення називають n-мірною ***булевою функцією*** (інколи логічною або перемикаючою).

Множину всіх булевих функцій позначають P_2. Число різних булевих функцій дорівнює 2^{2^n}. Множину P_2 булевих функцій разом із уведеною на ній системою операцій називають ***алгеброю булевих функцій***.

Розглянемо дві алгебри. Алгебру $(P_2; \neg, \wedge, \vee)$, операціями якої є заперечення, кон'юнкція та диз'юнкція, називають ***алгеброю Буля***. Алгебру $(P_2; \wedge, \oplus)$, операціями якої є кон'юнкція та додавання за $\bmod 2$, називають ***алгеброю Жегалкіна***. Формули алгебри Буля та алгебри Жегалкіна будують із знаків операцій відповідної алгебри, круглих дужок, символі змінних і констант 0 та 1.

Порядок виконання операцій у разі відсутності дужок у булевій алгебрі: заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція. В алгебрі Жегалкіна спочатку виконують операцію кон'юнкції, а потім - додавання за $\bmod 2$. Якщо у формулі використовуються дужки, спочатку повинні виконуватись операції всередині них. У булевій алгебрі роль дужок у разі заперечення складних виразів відіграє сам символ заперечення.

Однією з найважливіших задач є вивчення основних еквівалентностей, які є в алгебрах, що розглядаються. Ці еквівалентності називають законами відповідної алгебри.

Закони алгебри Буля.

$$(xy)z = x(yz) = xyz, \quad (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) = x \vee y \vee z$$
$$xy = yx, \quad x \vee y = y \vee x$$
$$(x \vee y)z = xz \vee yz$$
$$xy \vee z = (x \vee z)(y \vee z)$$
$$\bar{\bar{x}} = x, \quad \neg(xy) = \bar{x} \vee \bar{y}, \quad \neg(x \vee y) = \bar{x}\,\bar{y}$$
$$xx = x, \quad x \vee x = x$$
$$x(x \vee y) = x$$
$$\bar{1} = 0, \quad \bar{0} = 1, \quad 1x = x, \quad 0x = 0, \quad 1 \vee x = 1, \quad 0 \vee x = x$$
$$x \vee \bar{x} = 1$$
$$x\bar{x} = 0$$

Закони алгебри Жегалкіна.

$$(xy)z = x(yz) = xyz, \quad (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z) = x \oplus y \oplus z$$
$$xy = yx, \quad x \oplus y = y \oplus x$$
$$x(y \oplus z)z = xy \oplus xz$$
$$xx = x, \quad x \oplus x = 0$$
$$1x = x, \quad 0x = 0, \quad x \oplus 0 = x$$

Правильність цих еквівалентностей доводять за допомогою таблиць істинності. Наведені еквівалентності залишаються правильними і у разі підстановки замість змінних довільних булевих функцій. Закони алгебр Буля та Жегалкіна дають змогу доводити нові еквівалентності вже без таблиць, на основі тотожних перетворень.

Еквівалентності, що дозволяють перетворити будь-яку формулу булевої алгебри у рівносильну їй формул алгебри Жегалкіна та навпаки:

$$\bar{x} = 1 \oplus x$$
$$x \vee y = x \oplus y \oplus xy$$
$$x \oplus y = \bar{x}y \vee x\bar{y}$$

За допомогою законів алгебр Буля та Жегалкіна можна спрощувати різні формули в цих алгебра.

Практичне заняття 4.1.
Логіка висловлювань

Завдання для аудиторної роботи 4.1.

1. Побудувати таблицю істинності для висловлювання:
   а) $(p \leftrightarrow q) \vee (p \leftrightarrow \bar{q})$.
   б) $(p \to q) \vee (\bar{p} \to q)$.
   в) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\bar{p} \leftrightarrow \bar{q})$.

2. За допомогою таблиці істинності перевірити чи є висловлювання тавтологією:
   а) $((p \to q) \wedge (\bar{p} \to q)) \leftrightarrow q$.
   б) $((p \to q) \wedge (q \to r)) \leftrightarrow (p \to r)$.
   в) $(((\bar{p} \to \bar{q}) \to r) \wedge (\neg(p \to q) \to r)) \vee (p \to q)$.

3. За допомогою таблиці істинності перевірити еквівалентність висловлювань $p \to (q \leftrightarrow r)$ і $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \wedge r)$.

4. За допомогою еквівалентних перетворень довести еквівалентність висловлювань $p \to (q \vee r)$ і $(p \to q) \vee (p \to r)$.

5. За допомогою еквівалентних перетворень довести, що висловлювання є тавтологією:
   а) $((p \to q) \wedge (\overline{p} \to q)) \leftrightarrow q$.
   б) $((p \to \overline{q}) \wedge (p \to q)) \vee p$.

6. На основі властивості імплікації (без використання таблиць істинності та еквівалентних перетворень) довести, що формула є тавтологією:
   а) $(p \wedge q) \to (p \to q)$.
   б) $(\neg(p \to q)) \to p$.
   в) $((p \vee q) \wedge (p \to q) \wedge (q \to r)) \to r$.

Домашнє завдання 4.1.

1. Побудувати таблицю істинності для висловлювання $(p \to \overline{q}) \wedge (p \to q)$.

2. За допомогою таблиці істинності перевірити еквівалентність висловлювань: $(p \to q) \to r$ і $p \to (q \to r)$.

3. За допомогою еквівалентних перетворень довести еквівалентність висловлювань $p \to (q \wedge r)$ і $(p \to q) \wedge (p \to r)$.

4. На основі властивості імплікації (без використання таблиць істинності та еквівалентних перетворень) довести, що формула є тавтологією:
   а) $(p \wedge q) \to p$.
   б) $((p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to s)) \to (r \vee s)$.
   в) $(((p \wedge \overline{q}) \to \overline{p}) \wedge ((q \wedge \overline{r}) \to r)) \to (p \to r)$.

Практичне заняття 4.2.
Нормальні форми логіки висловлювань

Завдання для аудиторної роботи 4.2.

1. Побудувати кон'юнктивну та диз'юнктивну нормальні форми формул:
   а) $(p \to q) \wedge (\overline{p} \to q)$.
   б) $((\overline{p} \vee q) \to r) \wedge (p \to \overline{r})$.
   в) $(p \to \overline{q}) \vee ((\overline{p} \to r) \to q)$.
   г) $\neg(p \vee q) \vee (\overline{p} \wedge \overline{r}) \vee (p \wedge q)$.

2. За допомогою таблиць істинності побудувати досконалі кон'юнктивну та диз'юнктивну нормальні форми формул:
   а) $((\overline{p} \to q) \wedge (p \to q)) \to q$.

б) $((p \vee q) \wedge (q \to \bar{r})) \leftrightarrow (p \to r)$.

в) $(((\bar{p} \to q) \vee r) \wedge (\neg(p \to q) \to r)) \vee (p \to q)$.

3. Скласти контактно-релейні схеми для функцій, спочатку спростивши їх:

   а) $(q \wedge r) \vee (\bar{q} \wedge (p \leftrightarrow r)) \vee (p \wedge (q \leftrightarrow r))$.

   б) $(\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r}) \vee (p \wedge q) \vee r \wedge (p \leftrightarrow q)$.

   в) $(p \to (q \to p)) \to (q \to \bar{p})$.

Домашнє завдання 4.2.

1. Побудувати кон'юнктивну та диз'юнктивну нормальні форми формул:

   а) $p \wedge (q \wedge r) \to (p \wedge q)$.

   б) $(p \vee q \wedge \bar{r}) \wedge (p \vee r)$.

   в) $(p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge r)$.

2. За допомогою таблиць істинності побудувати досконалу кон'юнктивну та диз'юнктивну нормальні форми формули $((p \vee q) \wedge (\bar{p} \to q) \wedge (q \to r)) \to r$.

3. Скласти контактно-релейну схему для функції $(p \leftrightarrow q \leftrightarrow r) \vee p \wedge (q \leftrightarrow \bar{r})$, спочатку спростивши її.

Практичне заняття 4.3.
Логіка першого ступеня

Завдання для аудиторної роботи 4.3.

1. Визначити чи є наступні висловлення істинними і записати їх заперечення:

   а) $\forall x \forall y: x + y = 5$.

   б) $\exists x \forall y: x + y = 5$.

   в) $\forall x \exists y: x + y = 5$.

   г) $\forall x \forall y: x < y \Rightarrow x^2 < y^2$.

   д) $\forall x : x^2 > x \Leftrightarrow x > 1 \wedge x < 0$.

2. Нехай предикат $Q(x, y)$ означає „$x + y = x - y$", а предметна область кожної змінної – множина цілих чисел. З'ясуйте, які із поданих висловлювань мають значення Хиба:

   а) $Q(2, 0)$; б) $\forall y\, Q(1, y)$; в) $\forall x \exists y\, Q(x, y)$; г) $\exists y \forall x\, Q(x, y)$.

3. Нехай предикат $P(x, y)$ означає $x \geq y$, а предметна область для кожної змінної – множина цілих чисел. Визначити значення $\forall x \exists y\, P(x, 1)$.

4. Побудувати випереджену нормальну форму таких формул:

   а) $\forall x\, \forall y\, (\exists z (P(x, z) \wedge P(x, y)) \to \exists u Q(x, y, u))$.

   б) $(\forall y\, B(x, y)) \to (\exists x\, A(x, y) \vee \exists x\, C(x, y))$.

Домашнє завдання 4.3.

1. Визначити чи є наступні висловлення істинними і записати їх заперечення:
   а) $\forall x \forall y: x < y \Rightarrow x^3 < y^3$.
   б) $\forall x : x^2 > x \Leftrightarrow x > 1 \vee x < 0$.

2. Нехай предикат $P(x, y)$ означає $x < y$, а предметна область для кожної змінної – множина цілих чисел. Визначити значення $\exists x\, P(x,1)$.

3. Нехай предикат $P(x, y)$ означає $x \geq y$, а предметна область для кожної змінної – множина цілих чисел. Визначити значення $\forall x \exists y\, P(x,1)$.

4. Побудувати випереджену нормальну форму такої формули:
   а) $\forall x\, \exists y\, (\forall z(P(x,z) \wedge P(y,z)) \to \exists u Q(x,y,u))$.
   б) $\forall x\, \exists y\, (\forall z(P(x,z) \wedge P(y,z)) \to (\exists u Q(x,u) \vee \exists y R(y,u)))$.

Практичне заняття 4.4.
Алгебри

Завдання для аудиторної роботи 4.4.

1. Задано формулу у алгебрі Буля. Побудувати рівносильну формулу у алгебрі Жегалкіна:
   а) $\bar{x} \vee y$.
   б) $\overline{xy \vee \bar{z}}$.
   в) $xy \vee \bar{x}z$.
   г) $(x \vee y)(\bar{x} \vee z)$.

2. Задано формулу у алгебрі Жегалкіна. Побудувати рівносильну формулу у алгебрі Буля:
   а) $x \oplus xy \oplus xyz$.
   б) $(x \oplus 1)(y \oplus 1)(xy \oplus 1)$.

Домашнє завдання 4.4.

1. Задано формулу у алгебрі Буля. Побудувати рівносильну формулу у алгебрі Жегалкіна $(\bar{x} \vee \bar{z})(x \vee \bar{y}) \vee xyz$.

2. Задано формулу у алгебрі Жегалкіна. Побудувати рівносильну формулу у алгебрі Буля $(x \oplus y)(x \oplus z)$.

Теорія графів. Дерева.

Теорія графів є істотною частиною математичного апарату інформатики та кібернетики. Термін «граф» уперше з'явився в книзі угорського математика Д. Кеніга 1936 року, хоча перші задачі теорії графів пов'язані ще з іменем Л. Ейлера (XVIII ст.)

Простим графом називають пару $G(V,E)$, де V – не порожня скінченна множина елементів, які називаються вершинами, E – множина невпорядкованих пар різних елементів з V. Елементи множини E називають ребрами.

У простому графі пару вершин може з'єднувати не більше ніж одне ребро. У деяких випадках потрібно розглядати графи, у яких дві вершини можна з'єднати більше ніж одним ребром. Тоді виникає поняття мультографа.

Мультиграфом називають пару $G(V,E)$, де V - не порожня скінченна множина елементів, які називаються вершинами, E - сім'я невпорядкованих пар різних елементів з V. Термін сім'я означає, що елементи множини E (ребра) можуть повторюватись. Ребра, які з'єднують одну й ту ж вершину, називають кратними (або паралельними) ребрами.

Інколи потрібно розглядати граф, у якому вершина з'єднана сама із собою, тоді таке ребро називають петлею, а сам граф – псевдо графом.

Псевдографом називають пару $G(V,E)$, де V - не порожня скінченна множина елементів, які називаються вершинами, E - сім'я невпорядкованих пар не обов'язково різних елементів з V.

Ці три типи графів називають неорієнтованими.

Для орієнтованих графів розглядають множину E - як множину (сім'ю) впорядкованих пар різних (не обов'язково різних) елементів з V. Елементи множини E, у випадку орієнтованого графа, називають дугами.

Простий граф називають ***регулярним***, якщо всі його вершини мають однаковий степінь.

Доповнювальним графом $\overline{G}$ називають граф, у якого та сама множина вершин, дві вершини в $\overline{G}$ з'єднані ребром тоді і лише тоді, коли вони не з'єднані ребром в графі G.

Простий граф G називають ***самодоповнювальним***, якщо G та $\overline{G}$ - ізоморфні.

Степінь вершини в неорієнтованому графі – це кількість інцидентних їй ребер, причому петлю враховують двічі. У неорієнтованому графі сума степенів усіх вершин дорівнює подвоєній кількості ребер $\sum\limits_{v\in V}\deg(v)=2m$, де m - кількість ребер графу.

Для орієнтованих графів існує поняття півстепенів входу (позначають $\deg^{-}(v)$) та півстепенів виходу (позначають $\deg^{+}(v)$). Причому сума півстепенів входу усіх вершин дорівнює сумі півстепенів виходу й дорівнює кількості ребер.

Способи задання графів.

Найзрозуміліший і корисний для людини спосіб задання графів – рисунок на площині у вигляді точок і ліній, які ці точки з'єднують. Проте цей спосіб абсолютно непридатний, якщо хочемо розв'язувати задачі з графами автоматизовано (за допомогою комп'ютера).

Матрицею інцидентності графа $G(V,E)$ називають булеву $m\times n$ - матрицю M з елементами m_{ij} $(i=1,\ldots n;\ j=1,\ldots m)$, де $m_{ij}=\begin{cases}1, & v_i \text{ і } e_j - \textit{інцидентні}\\ 0, & \textit{у протилежному випадку}\end{cases}$.

Зауваження. Матрицю, кожний елемент якої рівний 0 або 1 називають ***булевою***.

Якщо задано мультиграф, то можуть бути однакові стовпці, що відповідають кратним ребрам. У випадку псевдографу для петлі відповідний елемент матриці рівний 2 (у цьому випадку матриця не є булевою).

Матриця інцидентності для орієнтованого графу теж не є булевою і визначається таким чином: $m_{ij}=\begin{cases}1, & \textit{якщо дуга } e_j \textit{ виходить з } v_i\\ -1, & \textit{якщо дуга } e_j \textit{ входить у } v_i\\ 2, & \textit{якщо } e_j \textit{ петля у } v_i\\ 0, & \textit{в інших випадках}\end{cases}$.

Матрицею суміжності графа $G(V,E)$ називають булеву квадратну $n\times n$ - матрицю A з елементами a_{ij} $(i=1,\ldots n;\ j=1,\ldots n)$, де $a_{ij}=\begin{cases}1, & \{v_i,v_j\}\in E\\ 0, & \{v_i,v_j\}\notin E\end{cases}$.

Для неорієнтованого графу $a_{ij} = a_{ji}$, тобто матриця симетрична і $a_{ii} = 0$ якщо немає петель. У випадку мультиграфу матриця не буде булевою, де a_{ij} - кількість ребер, що з'єднують v_i та v_j. Якщо у вершині v_i - петля, то $a_{ii} = 1$.

Матриця суміжності для орієнтованого графу визначається аналогічно як для не орієнтованого графу, але вона не буде симетричною.

Крім того розглядають способи задання графа списком ребер (списком пар) та списками суміжності у вигляді таблиць відповідностей між вершинами графу, що з'єднані ребрами.

Ізоморфізм графів.

Графи, які описують одні і ті ж об'єкти з певними між ними зв'язками, але на площині зображені не обов'язково однаково, називають ізоморфними.

Тобто, прості графи $G_1(V_1, E_1)$ та $G_2(V_2, E_2)$ – ***ізоморфні***, якщо існує бієкція $\varphi : V_1 \to V_2$, така що $\{u, v\} \in E_1 \Leftrightarrow \{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E_2$, $u, v \in V_1$.

В загальному випадку, доведення ізоморфізму досить складна задача, проте часто не важко показати, що два графи не ізоморфні. Це буде, якщо порушені властивості, які інваріантні щодо ізоморфізму, наприклад, кількості вершин, кількості ребер, кількості вершин певного степеня.

Ізоморфізм крім суміжності вершин, зберігає і кратності ребер, петлі та напрями дуг для мультиграфів та псевдографів.

Шляхи та цикли.

Шляхом довжини r із вершини u до вершини v в неорієнтованому графі називають послідовність r ребер, що їх з'єднують, причому ребро враховується стільки разів, скільки воно входить у шлях. ***Циклом*** у неорієнтованому графі називають шлях, що з'єднує вершину саму з собою. Шлях або цикл називають ***простим***, якщо він не містить ребер, які повторюються.

Ейлерів цикл у зв'язному мультиграфі – це цикл, який проходить через кожне ребро графа точно один раз.

Гамільтонів цикл у зв'язному мультиграфі – це цикл, який проходить через кожну вершину графа точно один раз (вершин не менше трьох).

Зауваження.

1 Зв'язний мультиграф має ейлерів цикл тоді й лише тоді, коли усі вершини графа мають парний степінь.

2 Якщо для кожної вершини v зв'язного простого графа з $n \geq 3$ вершинами виконується нерівність $\deg(v) \geq n/2$, то цей граф має гамільтонів цикл.

Планарні графи.

В багатьох випадках не має значення як зображати граф на площині, оскільки ізоморфні графи несуть одну і ту ж інформацію. Проте бувають ситуації, коли потрібно вияснити чи можна нарисувати граф так, щоб його зображення задовольняло певним вимогам. Наприклад, в радіоелектроніці в процесі виготовлення мікросхем (друкованим способом електричні ланцюги наносять на плоску поверхню ізоляційного матеріалу) провідники не ізольовані, тому вони не повинні перетинатися.

Плоским називають граф, зображений на площині так, що жодні два його ребра геометрично ніде не перетинаються, окрім інцидентних їм вершин. Граф, ізоморфний плоскому графу називають ***планарним***.

Плоский граф розбиває площину на області, одна з яких необмежена. Ці області називають ***гранями***.

Зауваження.

Нехай зв'язний плоский мультиграф має n вершин, m ребер і r граней. Тоді $n + r = m + 2$.

Розфарбування графів.

Розфарбуванням простого графу називають таке приписування кольорів (або натуральних чисел) його вершинам, що ніякі дві суміжні вершини не можуть бути одного кольору.

Найменшу можливу кількість кольорів у розфарбуванні графу називають ***хроматичним числом*** і позначають $\chi(G)$.

Дерева.

Деревом називають зв'язний граф, який не містить простих циклів. Дерево з n вершинами має $n-1$ ребер.

Дерево називають m***-арним***, якщо кожна його внутрішня вершина має не більше ніж m синів.

Дерево називають ***повним*** m***-арним,*** якщо кожна його внутрішня вершина має точно m синів.

Повне m-арне дерево називають ***завершеним***, якщо усі його листки на одному рівні.

Зауваження.

1 Повне m-арне дерево з i внутрішніми вершинами містить $n = mi + 1$ вершин.

2 Нехай m-арне дерево має висоту h. Тоді в ньому не більше ніж m^h листків.

Обхід бінарного дерева у ***прямому порядку***, або зверху вниз: R, A, B (корінь відвідують до обходу піддерев).

Обхід бінарного дерева у ***внутрішньому порядку***, або зліва направо: A, R, B.

Обхід бінарного дерева у ***зворотному порядку***, або знизу вверх: A, B, R (корінь відвідують після обходу піддерев).

Префіксний (або польський) запис виразу – це результат обходу дерева, яке зіставлене арифметичному чи логічному виразу, у прямому порядку (тобто зверху вниз).

Постфіксний (або зворотний польський) запис виразу – це: результат обходу дерева, яке зіставлене арифметичному чи логічному виразу, у зворотному порядку (тобто знизу вверх).

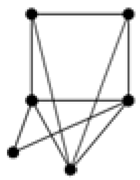
Каркасом, або з'єднувальним деревом графа G називають підграф графа G, який являє собою дерево та містить усі його вершини. Для того щоб отримати каркас, можна використати процедуру вилучення ребер, що належать простим циклам. В такому разі потрібно вилучити $\gamma(G)$ ребер (цю кількість ребер називають цикломатичним числом, яке характеризує ступінь зв'язності графу).

Цикломатичне число графа G, який має n вершин та m ребер, дорівнює $\gamma(G) = m - n + 1$.

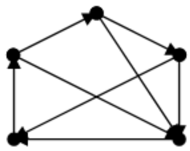
Практичне заняття 5.1.
Теорія графів

Завдання для аудиторної роботи 5.1.

1. Знайти кількість вершин, ребер та степені кожної вершини графів, зображених на рисунку:



а)



б)

2. Скільки вершин та ребер мають графи K_n, K_{nm}, C_n, W_n.

   (Підказка: правильна відповідь є однією із нижче поданих варіантів:

   а) n *вершин і* $0{,}5n(n-1)$ *ребер.* *б)* $n+m$ *вершин і* nm *ребер.*

   в) $n+1$ *вершину і* $2n$ *ребер.* *г)* 2^n *вершин і* $n2^{n-1}$ *ребер.* *д)* n *вершин та* n *ребер.)*

3. Скільки ребер має граф, у якого вершини мають такі степені: 4, 3, 3, 2, 2? Зобразити його.

4. Чи існує простий граф з вершинами степенів а)-в)? Якщо так, то зобразити його.

   а) 3, 3, 3, 3, 2.

   б) 3, 4, 3, 4, 3.

   в) 1, 2, 3, 5, 5.

5. Скільки вершин має регулярний граф степеня 4 з 10 ребрами?

6. Зобразити графи $\overline{K}_{3,4}$ та $\overline{K}_{1,5}$.

7. Нехай G – простий граф. Простий граф G має 15 ребер, граф $\overline{G}$ має 13 ребер. Знайти кількість вершин графа G.

Домашнє завдання 5.1.

1. Знайти кількість вершин, ребер та степені кожної вершини графів, зображених на рисунку:

а) б)

2. Зобразити простий граф з 15 вершинами, кожна з яких має степінь 5.

3. Чи існує простий граф з вершинами степенів а)-в)? Якщо так, то зобразити його.
   а) 1, 2, 3, 4, 4.
   б) 0, 1, 2, 2, 3.
   в) 1, 1, 1, 1, 1.

4. Нехай G – простий граф. Простий граф G має 10 ребер, граф $\overline{G}$ має 11 ребер. Знайти кількість вершин графа G.

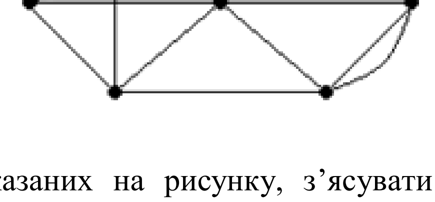
Практичне заняття 5.2.
Теорія графів (продовження)

Завдання для аудиторної роботи 5.2.

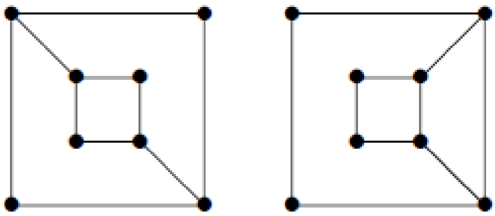
1. Знайти кількість шляхів довжини n між двома різними вершинами графа K_4, якщо n дорівнює 2; 3; 4.

2. Визначити довжину найкоротшого циклу в графі $K_{2,5}$, який проходить через кожне ребро принаймні один раз.

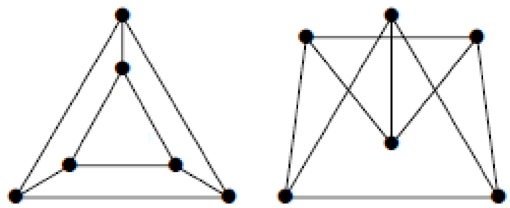
3. Знайти число вершинної зв’язності графу та число реберної зв’язності.



4. Для кожної пари графів, вказаних на рисунку, з’ясувати чи вони ізоморфні. Вказати ізоморфне відображення, або довести, що його не існує.



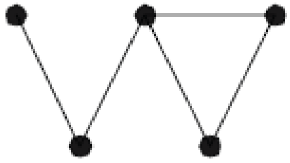
а)



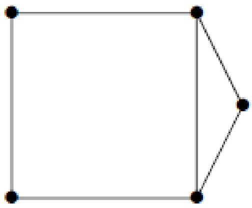
б)

5. Нехай G – простий граф. Знайти простий граф H з п’ятьма вершинами такий, що H та $\overline{H}$ – ізоморфні.

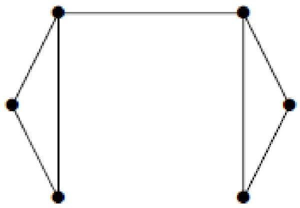
6. Чи є граф, зображений на рисунку, самодоповнювальним?



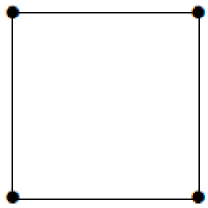
7. Які із вказаних на рисунку графів мають Ейлеровий цикл? Які з вказаних графів мають Гамільтонів цикл?



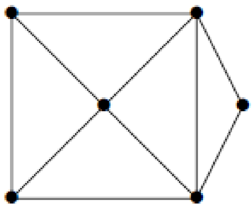
а)



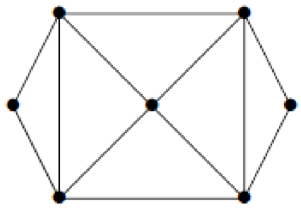
б)



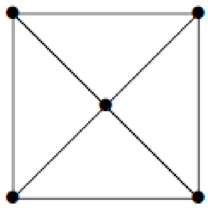
в)



г)



д)



е)

8. За яких значень m та n граф $K_{m,n}$ має ейлерів цикл, але не має гамільтонового циклу?

9. Чи можна обійти парк та його околиці A, B, C, D, E, F так щоб при цьому довелося перелізти через кожну огорожу рівно один раз. Побудувати відповідний граф.

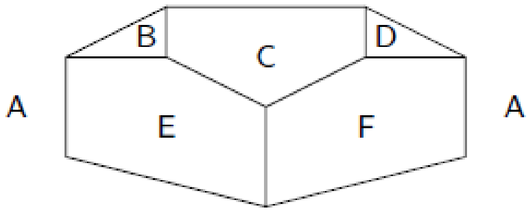
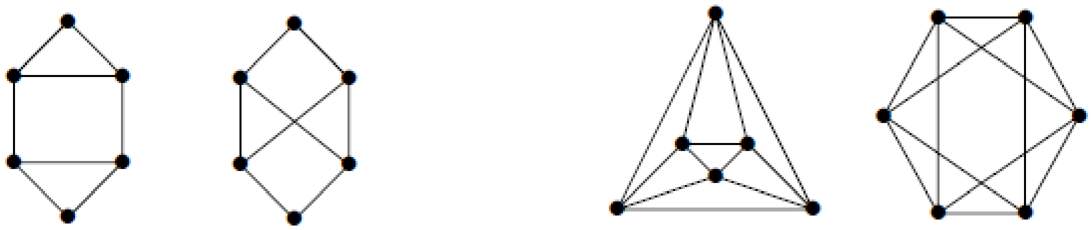


Схема парку

Домашнє завдання 5.2.

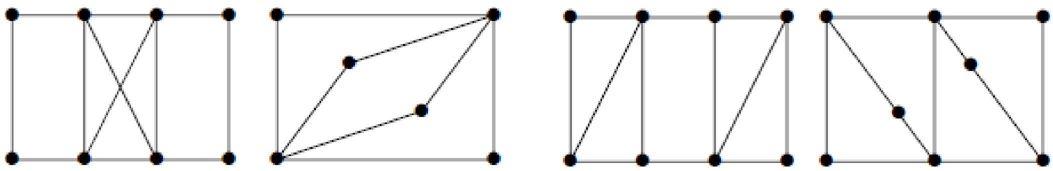
1. Знайти кількість шляхів довжини n між двома несуміжними вершинами графа $K_{3,3}$, якщо n дорівнює 2; 3; 4.

2. Для кожної пари графів, вказаних на рисунку, з'ясувати чи вони ізоморфні. Вказати ізоморфне відображення, або довести, що його не існує.



а) б)

3. Які із вказаних на рисунку графів мають Ейлеровий цикл? Які з вказаних графів мають Гамільтонів цикл?



а) б)

4. За яких значень m та n граф $K_{m,n}$ має гамільтонів цикл, але не має ейлерового циклу?

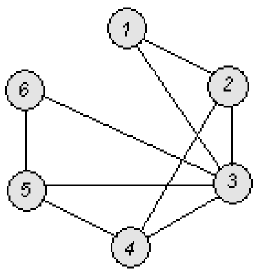
Практичне заняття 5.3.
Теорія графів. Дерева

Завдання для аудиторної роботи 5.3.

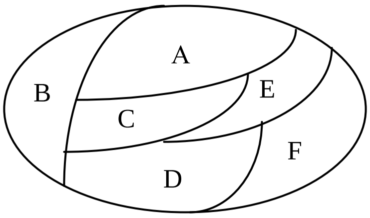
1. Зв'язний плоский граф регулярний і має 30 ребер та 20 граней. Знайдіть степінь вершин цього графа.

2. Зв'язний планарний граф має 9 вершин, кожна степеня 6. Скільки граней має цей граф?

3. Визначити хроматичне число графів K_5, C_5, W_6, $K_{2,3}$.
4. Визначити хроматичне число графа G, зображеного на малюнку:



5. Побудувати граф, який відповідає заданій карті і визначити найменшу кількість кольорів для його розфарбування.



6. Визначити скільки каналів щонайменше потрібно для 5 телевізійних станцій, віддалі між якими задані таблицею. Взяти до уваги, що дві станції не можуть працювати на одному каналі, якщо віддаль між ними є меншою, ніж 200 км.

Телевізійні станції	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
1	-	320	120	150	270
2	320	-	240	400	130
3	120	240	-	250	180
4	150	400	250	-	210
5	270	130	180	210	-

7. Скільки вершин має повне 5-арне дерево зі 100 внутрішніми вершинами?

8. Побудувати завершене бінарне дерево з висотою 4.

Домашнє завдання 5.4.

1. Зв’язний планарний граф має 15 ребер і 7 граней. Скільки вершин має цей граф?

2. Визначити хроматичне число графів C_6, W_5.

3. Визначити скільки каналів щонайменше потрібно для 5 телевізійних станцій, віддалі між якими задані таблицею. Взяти до уваги, що дві станції не можуть працювати на одному каналі, якщо віддаль між ними є меншою, ніж 250 км.

Телевізійні станції	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
1	-	310	120	150	260
2	310	-	260	400	130
3	120	260	-	250	180
4	150	400	250	-	210
5	260	130	180	210	-

4. Скільки листків має повне 3-арне дерево з 100 вершинами?

5. Скільки ребер має дерево з 100 вершинами?

6. У турнірі беруть участь 1000 гравців. Скільки ігор потрібно зіграти для визначення переможця, якщо турнір проводиться за олімпійською схемою (той, хто програв, вибуває)?

Практичне заняття 5.4.
Дерева

Завдання для аудиторної роботи 5.4.

1. Побудувати кореневе дерево, які відповідає виразу $x+((xy+x)/y)$. Записати цей вираз у префіксній та постфіксній формах.

2. Обчислити значення виразу, записаному в префіксній формі: $+ - \uparrow 3\ 2 \uparrow 2\ 3\ /\ 6\ -4\ 2$.

3. Обчислити значення виразу, записаному в постфіксній формі: $5\ 2\ 1\ -\ -\ 3\ 1\ 4\ +\ +\ *$.

4. Зобразити впорядковане кореневе дерево, яке відповідає виразу, записаному в префіксній формі +*++ – 5 3 2 1 4. Записати його в постфіксній формі.

5. Побудувати впорядковане кореневе дерево, обхід якого зверху вниз дає послідовність *a, b, f, c, g, h, i, d, e, j, k, l,* причому вершина *a* має чотирьох синів, *c* - трьох, *j* - двох, *b* та *e* - по одному, а решта вершин є листками.

6. Побудувати бінарне дерево пошуку для слів banana, peach, pear, apple, coconut, mango, papaya.

7. Скільки порівнянь необхідно, щоб знайти або додати кожне із наступних слів у дерево пошуку із попередньої задачі: pear, banana, plum, orange.

8. Побудувати каркаси для кожного із заданих графів та знайти цикломатичні числа графів: K_5, $K_{4,4}$, C_5.

9. Зробити прогноз результату гри, побудувавши дерево прийняття рішень, за даною статистикою попередніх ігор.

Суперник у турнірній таблиці	Матч відбувається	Лідери команди	Падає дощ	Перемога
Вище	Вдома	Грають	Так	Ні
Вище	Вдома	Грають	Ні	Так
Вище	Вдома	Пропускають	Ні	Так
Нижче	Вдома	Пропускають	Ні	Так
Нижче	У гостях	Пропускають	Ні	Ні
Нижче	Вдома	Пропускають	Так	Так
Вище	У гостях	Грають	Так	Ні
Нижче	У гостях	Грають	Ні	???

Домашнє завдання 5.5.

1. Побудувати кореневе дерево, які відповідає виразу $(x+xy)+(x/y)$. Записати цей вираз у префіксній та постфіксній формах.

2. Обчислити значення виразу, записаному в префіксній формі: $*\ +\ 3\ +\ 3 \uparrow 3\ +\ 3\ 3\ 3$.

3. Обчислити значення виразу, записаному в постфіксній формі: $3\ 2 * 2 \uparrow 5\ 3 - 8\ 4 / * -$.

4. Зобразити впорядковане кореневе дерево, яке відповідає виразу, записаному в префіксній формі $\uparrow + 2\ 3 - 5\ 1$. Записати його в постфіксній формі.

5. Побудувати каркаси для кожного із заданих графів та знайти цикломатичні числа графів: $K_{1,6}$, W_5.

Основи теорії кодування.

Інформація – це об'єктивно існуючий зміст, який характеризує стан і поведінку певної системи загалом або її окремих елементів та зменшує ступінь невизначеності у процесі його пізнання і переробки. Інформація протилежна невизначеності.

Кодування це перехід від одного способу задання інформації до іншого, який дає змогу відновлювати початкову інформацію. Теорія кодування започаткована в 40-х рр. XX століття після робіт Клода Шеннона.

При кодуванні кожному повідомленню з деякої множини, що називається ***ансамблем повідомлень***, ставиться у відповідність зумовлена ***кодова комбінація*** - набір символів (елементів, знаків). Множина повідомлень називається ***алфавітом повідомлень***, або ***первинним алфавітом***, а множина символів (елементів, знаків) називається ***алфавітом джерела***, або ***вторинним алфавітом***. Побудована відповідно до певної схеми кодування множина кодових комбінацій називається ***кодом***. Залежно від алфавіту, що використовується для побудови кодових комбінацій, розрізняють ***двійкові (бінарні) коди***, алфавіт яких складається з двох символів: **0** і **1** і ***недвійкові (багатопозиційні, q-коди***, алфавіт яких містить більшу кількість символів.

За функціональним призначенням коди поділяють на ***безнадмірні (некоригувальні, первинні, прості)*** і ***надмірні (коригувальні, завадостійкі)***. Перша група кодів призначена для ***економного кодування інформації – стиснення***. Друга використовується для виявлення та/чи виправлення помилок, що виникають у процесі передачі даних ***каналом зв'язку із завадами.*** Прикладами можуть бути ***коди Хемінга***.

Коди можуть бути ***рівномірними*** і ***нерівномірними*** - з постійною і змінною кількістю розрядів.

Матричне кодування використовує кодуючу матрицю $E_{m\times n}$, елементи якої $e_{ij} = \{0, 1\}$ (m – перших стовпців матриці є часто одиничними векторами для однозначного декодування). Схема кодування: множення вектору $a = a_0\, a_1 \ldots a_n$ (вихідне повідомлення, $a_i = \{0, 1\}$) на фіксовану кодуючу матрицю $b = a \cdot E$. Кодові слова розглядають як вектори $1\times n$.

Поліноміальне кодування. Повідомлення $a = a_0\, a_1 \ldots a_n$ ототожнюють із многочленом $a(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$. Схема кодування: множення отриманого многочлену (вихідне повідомлення) на фіксований многочлен $g(x)$. Результат $b = b_0\, b_1 \ldots b_{n-k}$ - код повідомлення a.

Зауваження: Від результату будь-якої арифметичної операції береться остача від її ділення на 2.

Поліномний код з кодуючим многочленом $g(x)$ степеня k є матричним кодом з кодуючою матрицею G розмірності $m\times(m+k)$:

$$G = \begin{pmatrix} g_0 & g_1 & g_2 & \cdots & g_k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_0 & g_1 & \cdots & g_{k-1} & g_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & g_0 & \cdots & g_{k-2} & g_{k-1} & g_k & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & g_k \end{pmatrix}.$$

До ***оптимальних методів статистичного кодування*** повідомлень належать алгоритми ***Шеннона-Фано*** і ***Хаффмана***. Ці алгоритми є найпростішими методами стиснення інформації і належать до так званих ***кодів без пам'яті,*** що не враховують значення попередніх символів.

Метод Шеннона-Фано. Значення дискретних випадкових величин розміщуються у порядку спадання ймовірностей. Потім уся сукупність розділяється на дві приблизно рівні за сумою ймовірностей частини: до коду першої частини додається 0, а до коду другої - 1. Кожна з частин за тим самим принципом знову розділяється (якщо це можливо) на дві частини і т.д.

Метод Хаффмана. Код будується за допомогою бінарного дерева. Ймовірності дискретних випадкових величин розміщуються у спадному порядку і приписуються листю кодового дерева. Величина, що приписується вузлу дерева, називається його **вагою**. Два листи або вузли з найменшими значеннями ваги утворюють батьківський вузол, вага якого дорівнює сумарній вазі вузлів, що його складають. Надалі цей вузол враховується нарівні з вершинами, що залишилися, а листя або вузли, що його утворили, більше не розглядаються. Після побудови кореня кожна визначена гілка, що виходить з батьківського вузла, позначається 0 (як правило, якщо це ліва гілка) або 1 (права гілка). Коди значень дискретних випадкових величин – це послідовності 0 і 1, що утворюються, на шляху від кореня кодового дерева до листа із заданою імовірністю.

Практичне заняття 6.1.
Основи теорії кодування

Завдання для аудиторної роботи 6.1.

1. Для розподілу ймовірностей появи букв P={0,6; 0,1; 0,09; 0,08; 0,07; 0,06} побудувати код методом Фано.

2. Для розподілу ймовірностей появи букв P={0,4; 0,4; 0,1; 0,03; 0,03; 0,02; 0,02} побудувати код методом Фано.

3. Для розподілу ймовірностей появи букв P={0,25; 0,25; 0,15; 0,15; 0,1; 0,05; 0,05} побудувати код методом Фано.

4. Для розподілу ймовірностей появи букв P={0,3; 0,2; 0,1; 0,15; 0,1; 0,1; 0,04; 0,01} побудувати код методом Хаффмана.

5. Для розподілу ймовірностей появи букв P={0,3; 0,2; 0,2; 0,1; 0,1; 0,05; 0,05} побудувати код методом Хаффмана.

6. Для розподілу ймовірностей появи букв P={0,25; 0,2; 0,15; 0,15; 0,15; 0,1} побудувати код методом Хаффмана.

7. Нехай задано матрицю $H=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Закодувати повідомлення 001 за допомогою цієї матриці.

8. Закодувати повідомлення 1001 за допомогою **шумозахисного коду Хемінга** для n=7 (використовуючи матрицю з попереднього прикладу), вибравши як контрольні ті розряди, у яких номери є степенями двійки, тобто 1, 2, 4, 8, … , 2^{s-1}.

   Зауваження. Для знаходження значень контрольних розрядів, використати умову:
   $x_1\begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \\ \dots \\ h_{s1} \end{pmatrix} \oplus x_2\begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{22} \\ \dots \\ h_{s2} \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus x_n\begin{pmatrix} h_{1n} \\ h_{2n} \\ \dots \\ h_{sn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$, де h_{ij} – коефіцієнти матриці H.

9. Нехай задано многочлен $g(x)=1+x^2+x^3$. За допомогою нього закодувати повідомлення 01011. (***Зауваження:*** *Від результату будь-якої арифметичної операції береться остача від її ділення на 2*).

10. Нехай задано многочлен $g(x)=1+x+x^3$. За допомогою нього закодувати повідомлення 101.

11. Записати матрицю, що відповідає $(3,6)$ - коду з кодуючим многочленом $g(x)=1+x+x^3$.

Домашнє завдання 6.1.

1. Для розподілу ймовірностей появи букв P={0,3; 0,2; 0,2; 0,1; 0,1; 0,05; 0,05} побудувати код методом Фано.

2. Для розподілу ймовірностей появи букв P={0,25; 0,2; 0,15; 0,15; 0,15; 0,1} побудувати код методом Фано.

3. Для розподілу ймовірностей появи букв P={0,6; 0,1; 0,09; 0,08; 0,07; 0,06} побудувати код методом Хаффмана.

4. Для розподілу ймовірностей появи букв P={0,4; 0,4; 0,1; 0,03; 0,03; 0,02; 0,02} побудувати код методом Хаффмана.

5. Нехай задано матрицю $H=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Закодувати повідомлення 1001 за допомогою цієї матриці.

6. Нехай задано многочлен $g(x)=x^7+x^5+x+1$. За допомогою нього закодувати повідомлення 0100.

Теорія формальних граматик та скінченних автоматів.

Формальна граматика або просто граматика в теорії формальних мов – спосіб опису формальної мови, тобто виділення деякої підмножини з множини всіх слів деякого скінченного алфавіту. Розрізняють породжують і розпізнають (або аналітичні) граматики – перші ставлять правила, за допомогою яких можна побудувати будь-яке слово мови, а другі дозволяють по даному слову визначити, входить воно в мову чи ні. Формальні граматики були введені американським вченим, математиком та філософом, Н.Хомським в 50-тих роках XX сторіччя.

Введемо деякі поняття. ***Буква*** (або символ) – простий неподільний знак. ***Алфавіт*** (позначатимемо V) – множина букв. ***Ланцюжки*** над алфавітом V – впорядковані сукупності букв алфавіту V (за аналогією з лінгвістикою, ланцюжки іноді називають словами). Множину усіх ланцюжків над алфавітом V називають ***замиканням*** V і позначають V*. Головна операція над ланцюжками – ***конкатенація***. Множину ланцюжків називають ***мовою*** (позначатимемо L).

Правила, які визначають множину речень, утворюють ***синтаксис*** мови. Опис множини смислів і відповідності між реченнями і смислами – ***семантика*** мови. Семантика мови залежить від характеру об'єктів, які описує мова, і засоби їх вивчення різні для різних мов. Семантика мови математики – формальні теорії. Спроби точного опису семантики природних мов стосуються, передусім, робіт з машинного перекладу.

Синтаксис значно менше залежить від призначення мови. Виявилось можливим сформулювати поняття і методи дослідження синтаксису, які не залежать від змісту мови. За останніх 50 років розвинувся спеціальний математичний апарат – ***теорія формальних породжувальних граматик***.

Ця теорія дуже важлива теоретично і ефективна у застосуваннях, зокрема у мовах програмування, штучному інтелекті, машинному перекладі тощо.

Найцікавіші мови нескінченні і тому не можуть бути виписані явно. У таких випадках потрібно придумати способи породження мови. Як таку породжувальну систему розглядають ***граматику*** G.

Дві основні задачі формальної теорії мов:

1. Як за заданою граматикою G (і пов'язаною з нею мовою L) породжувати речення $\alpha : \alpha \in L$?
2. Як за заданими $L \in V^*$ та $\alpha \in V^*$ з'ясувати чи $\alpha \in L$? (для цього потрібно знати як граматика G породжує L).

Формальна породжувальна граматика G – це формальна система, визначена четвіркою об'єктів $G = (V, T, S, P)$, де V – скінченна не порожня множина, яку називають алфавітом; T – її підмножина, елементи множини T називають термінальними (основними) символами (позначають малими латинськими буквами); S – початковий символ ($S \in V$); P – скінченна множина продукцій (або правил перетворення) вигляду $\xi \to \eta$, де ξ та η - ланцюжки в алфавіті V. Множину $V \setminus T$ позначають N, її елементи називають нетермінальними (допоміжними) елементами (позначають великими латинськими буквами); λ – порожній ланцюжок.

Типи граматик (Ієрархія Хомські). Продукція граматики дає змогу заміняти одну послідовність символів іншою. Граматики класифікують за типами продукцій. Розглянемо ***класифікацію***, яку запропонував ***Н.Хомські***:

Типи граматик	**Обмеження на продукції**
0	Немає обмежень
1 *(контекстно залежна)*	$\lvert\xi\rvert \le \lvert\eta\rvert$, або $\eta = \lambda$
2 *(контекстно вільна)*	$\xi = A$, де A – нетермінальний символ
3 *(регулярна)*	$\xi = A$, причому $\eta = aB$, або $\eta = a$, де A, B – нетермінальні символи, a – термінальний символ, або $S \to \lambda$

Скінченні автомати.

Скінченні автомати і такі тісно пов'язані з ними конструкції, як, наприклад, регулярні граматики та регулярні вирази, належать до найважливіших понять інформатики. Різні варіанти скінченних автоматів використовують для опису й аналізу технічних пристроїв, різних систем і процесів, програм і алгоритмів. Розглянемо скінченні автомати як абстрактні моделі найпростіших пристроїв опрацювання даних.

Скінченним автоматом називають систему $M = (S, I, O, f, g, s_0)$, у якій S, I, O – скінченні множини, $f: S \times I \to S$ та $g: S \times I \to O$ – функції визначені на декартовому добутку $S \times I$, S – множина станів, I – вхідний алфавіт, O – вихідний алфавіт, f – ***функція переходів***, g – ***функція виходів***, виділений елемент $s_0 \in S$ – початковий стан.

Рівність $f(s_i, x) = s_j$ означає, що в разі входу x автомат, який перебуває в стані s_i, переходить у стан s_j, а рівність $g(s_i, x) = y$ означає, що в цьому разі на виході буде y.

Оскільки функції $f: S \times I \to S$ та $g: S \times I \to O$ визначені на скінченних множинах, то їх можна задавати таблицями. Дві таблиці зводять в одну і називають ***таблицею станів*** або автоматичною таблицею.

Ще один поширений і наочний спосіб задання автомата – орієнтований мультиграф, який називають ***діаграмою станів***. Вершини графа відповідають станам.

Якщо $f(s_i, x_j) = s_k$ та $g(s_i, x_j) = y_r$, то із вершини s_i у вершину s_k веде дуга, на якій записані через кому x_j та y_r. Якщо є кратні дуги, їх можна замінити однією, на якій записати всі пари ***вхідний символ - вихідний символ***.

Одне з найважливіших застосувань скінченних автоматів є подання (розпізнавання) мов. Це застосування має фундаментальне значення у дослідженні та побудові компіляторів для мов програмування. Є типи автоматів, спеціально призначених для подання мов. Замість виходів ці автомати мають множину заключних станів.

Ланцюжок допускається автоматом, якщо він переводить автомат з початкового стану в один із заключних станів.

Скінченним автоматом без виходу називають систему $M = (S, I, f, s_0, F)$, у якій S – скінченна множина станів, I – скінченний вхідний алфавіт, $f: S \times I \to S$ – **функція переходів**, $s_0 \in S$ – початковий стан, $F \subset S$ – множина заключних (або сприймальних) станів (зображають подвійними кружечками).

Машина Тьюрінга – математичне поняття, введене для формального уточнення інтуїтивного поняття алгоритму. Названа на честь англійського математика Алана Тьюрінга, який запропонував це поняття у 1936. Аналогічну конструкцію машини згодом і незалежно від Тьюрінга ввів американський математик Еміль Пост.

Основна ідея, що лежить в основі машини Тьюрінга, дуже проста. Машина Тьюрінга – це абстрактна машина (автомат), що працює зі стрічкою, що складається із окремих комірок, в яких записано символи. Машина також має голівку для запису та читання символів із комірок і яка може рухатись вздовж стрічки. На кожному кроці машина зчитує символ із комірки, на яку вказує голівка та, на основі зчитаного символу та внутрішнього стану, робиться наступний крок. При цьому, машина може змінити свій стан, записати інший символ в комірку або пересунути голівку на одну комірку ліворуч або праворуч.

У кожної машини Тьюрінга є стрічка, потенційно нескінченна в обидві сторони. Є скінченна множина символів стрічки $S_0, \cdots, S_n$, що називається алфавітом машини. У кожен момент часу кожна комірка може бути зайнята не більш ніж одним символом. Машина має деяку скінченну множину внутрішніх станів $g_0, g_1, \cdots, g_n$. У кожен даний момент часу машина знаходиться лише в одному із цих станів.

Нарешті, є голівка, яка у кожен даний момент часу знаходиться на одній із комірок стрічки. Машина діє не безупинно, а лише у дискретні моменти часу. Якщо у якийсь момент t голівка сприймає комірку (тобто знаходиться на комірці), що містить символ S_i, і машина знаходиться у внутрішньому стані g_j, то дія машини визначена однією із чотирьох дій: голівка затирає символ S_i і записує у тій же комірці новий символ S_k, голівка пересувається в сусідню ліву комірку, голівка пересувається в сусідню праву комірку, машина зупиняється.

Практичне заняття 7.1.
Теорія формальних граматик

Завдання для аудиторної роботи 7.1.

1. Нехай G – граматика з V={S, A, a, b, c}, T={a, b, c}, S – початковий символ і множина продукцій P={S→abS, S→bcS, S→bA, S→aaA, A→cbb}. Знайти мову L(G), яка породжується заданою граматикою.

2. Нехай G – граматика з V={S, A, B, a, b, c}, T={a, b, c}, S – початковий символ і множина продукцій P={S→abS, S→bcB, S→bbA, B→aA, A→cb}. Знайти мову L(G), яка породжується заданою граматикою.

3. Нехай G=(V, T, S, P) – задана граматика, де V={S, 0, 1} – алфавіт, T = {0,1} – термінальні символи, S – початковий символ, P = {S→01S, S→0S, S→010, S→10, S→λ} – множина продукцій. Знайти мову L(G), породжену цією граматикою.

4. Побудувати граматику, яка породжує мову $\{0^n 1^{2n} | \ n= 0, 1, 2, \ldots\}$.

Домашнє завдання 7.1.

1. Нехай G – граматика з V={S, A, B, a, b, c}, T={a, b, c}, S – початковий символ і множина продукцій P={S→bS, S→acA, S→bA, S→aacB, A→cab, B→acb}. Знайти мову L(G), яка породжується заданою граматикою.

2. Нехай G=(V, T, S, P) – задана граматика, де V={S, 0, 1} – алфавіт, T = {0, 1} – термінальні символи, S – початковий символ, P = {S→110S, S→0S, S→λ} – множина продукцій. Знайти мову L(G), породжену цією граматикою.

3. Побудувати граматику, яка породжує мову $\{1^n 0^n 1^n | \ n= 0, 1, 2, \ldots\}$.

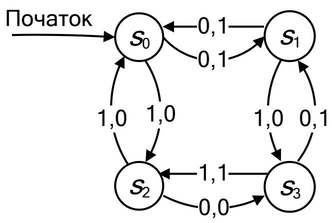
Практичне заняття 7.2.
Теорія скінченних автоматів

Завдання для аудиторної роботи 7.2.

1. Побудувати діаграму станів для скінченного автомата з виходом, заданого таблицею станів.

Стан	f		g	
	Вхід		Вхід	
	0	1	0	1
s_0	s_1	s_0	0	0
s_1	s_2	s_0	1	1
s_2	s_0	s_3	0	1
s_3	s_0	s_2	1	0

2. За діаграмою станів скінченного автомата з виходом побудувати таблицю станів.



3. Побудувати детермінований скінченний автомат, який розпізнає мову {1, 00}.

4. Побудувати недетермінований скінченний автомат, який розпізнає мову {1, 00}.

5. Побудувати детермінований скінченний автомат, який розпізнає мову $\{1^n, n= 2, 3,\ldots\}$.

6. Побудувати машину Тьюрінга, яка обчислює числову функцію $f(x_1, x_2, x_3) = x_2$.

7. Побудувати машину Тьюрінга, яка обчислює числову функцію $f(x) = x + 2$.

8. Знайти мову, яку розпізнає наведений скінченний автомат без виходу; заключний стан – s_2.

Стан	F	
	Вхід	
	0	1
s_0	s_2	s_1
s_1	s_2	s_1
s_2	s_2	s_2

9. Знайти мову, яку розпізнає наведений скінченний автомат без виходу; заключні стани – s_0 та s_1.

Стан	F	
	Вхід	
	0	1
s_0	s_1	s_2
s_1	s_2	s_1
s_2	s_2	s_2

10. Задано програму машини Тьюрінга $q_1 1 \to 1 П q_1$, $q_1 0 \to 0 H q_0$, $q_1 \Lambda \to \Lambda П q 1$ і слова α =1111111; β =0110111; γ =111101; δ =001101. До яких з цих слів застосовна ця машина?

11. Задано програму машини Тьюрінга $q_1 1 \to 1 П q_1$, $q_1 0 \to 0 H q_0$, $q_1 \Lambda \to \Lambda П q_1$ і слова α =1111111; β =11111Λ0; γ =1Λ1101; δ =0Λ01101. До яких з цих слів застосовна ця машина?

Домашнє завдання 7.2.

1. Побудувати детермінований скінченний автомат, який розпізнає мову $\{0\}$.

2. Побудувати недетермінований скінченний автомат, який розпізнає мову $\{0\}$.

3. Побудувати недетермінований скінченний автомат, який розпізнає мову $\{1^n, n = 2, 3, \ldots\}$.

4. Побудувати машину Тьюрінга, яка обчислює числову функцію $f(x_1, x_2) = x_2 + 1$.

5. Знайти мову, яку розпізнає наведений скінченний автомат без виходу; заключний стан – s_2.

Стан	F	
	Вхід	
	0	1
s_0	s_0	s_1
s_1	s_1	s_2
s_2	s_2	s_2

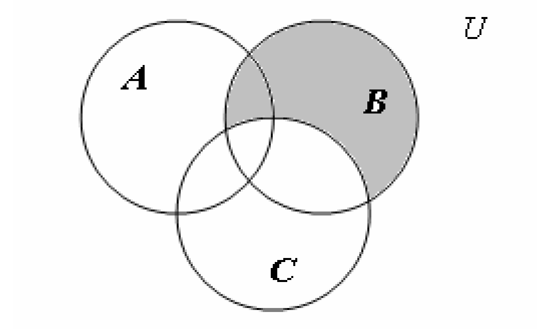
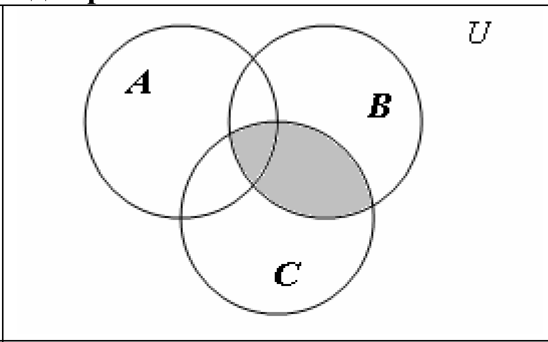
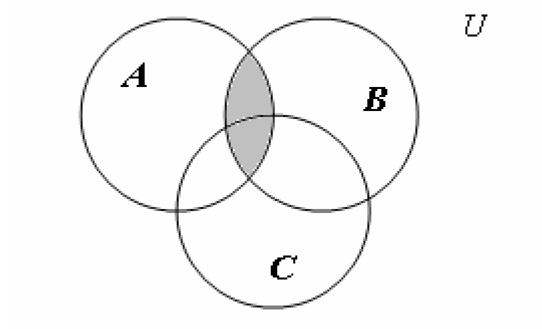
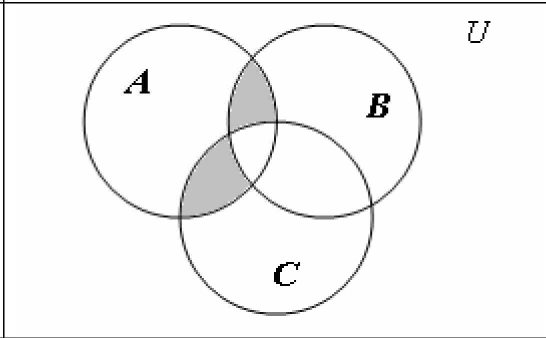
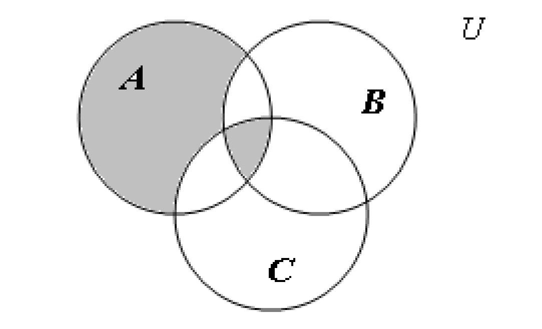
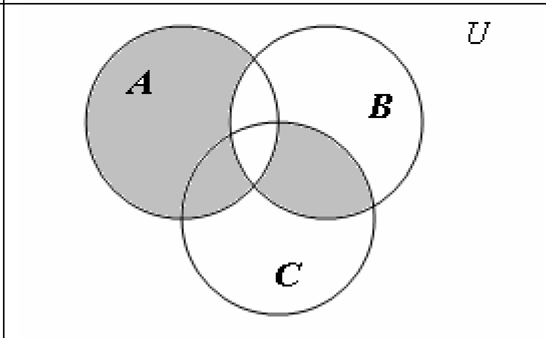
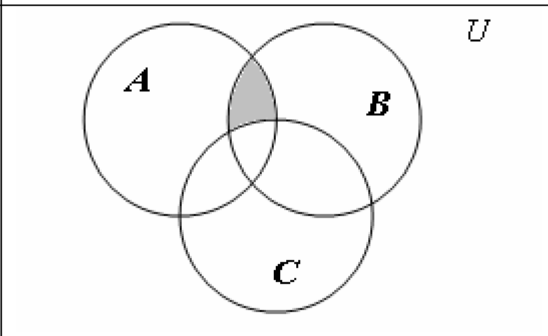
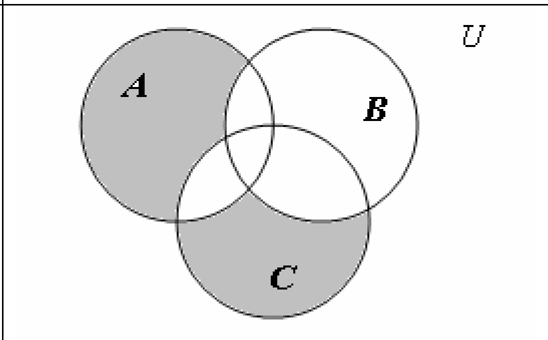
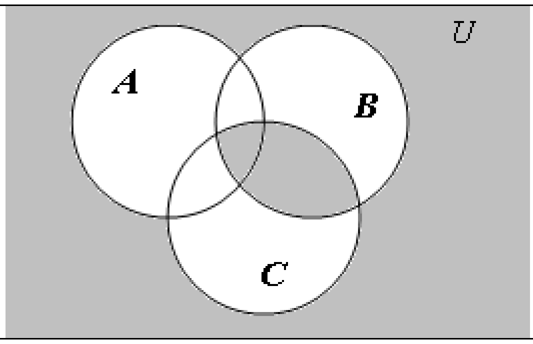
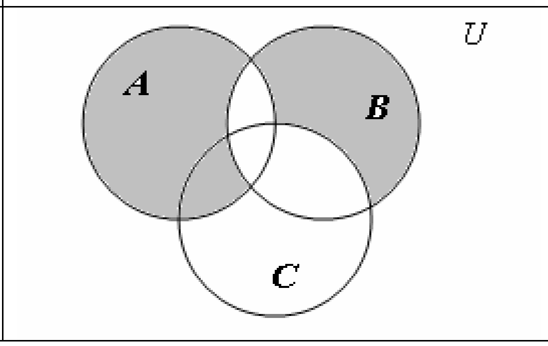
6. Задано програму машини Тьюрінга $q_1 0 \to 0 П q_1$, $q_1 1 \to 1 H q_0$, $q_1 \Lambda \to \Lambda П q 1$ і слова α =0000001; β =0110111; γ =111101; δ =111111. До яких з цих слів застосовна ця машина?

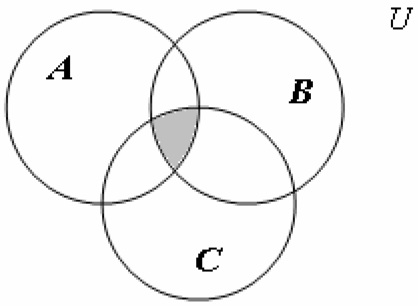
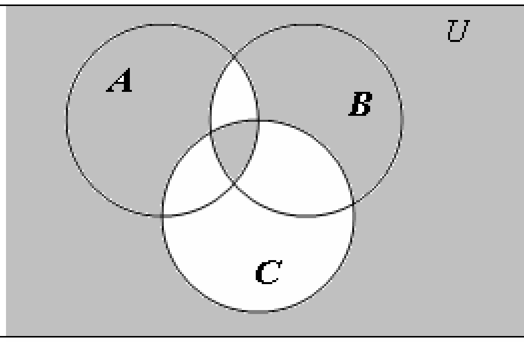
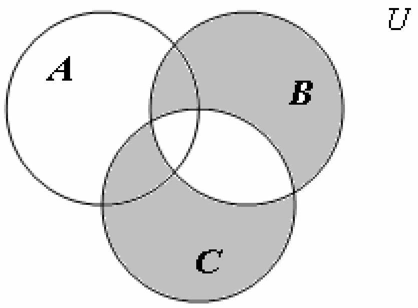
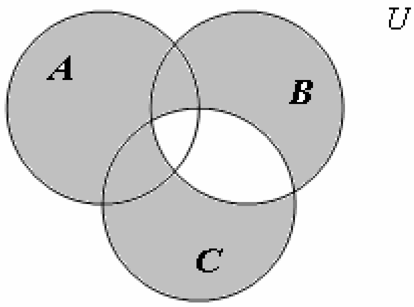
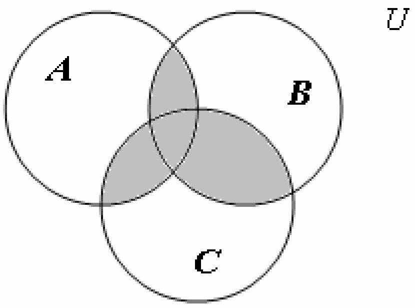
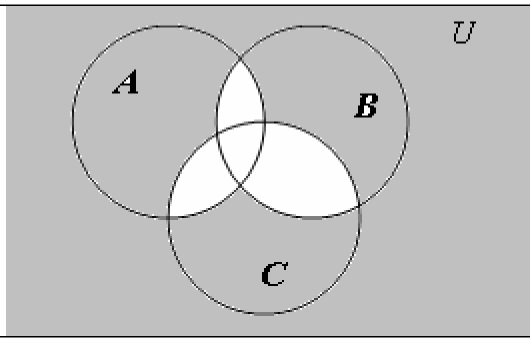
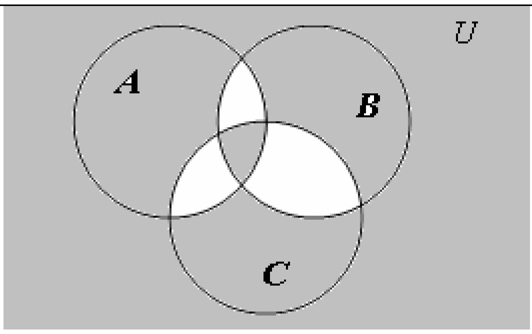
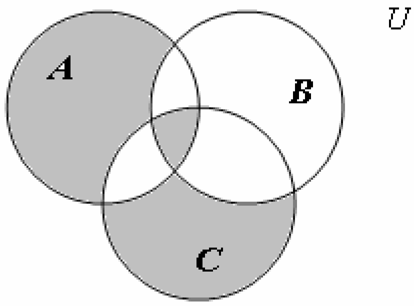
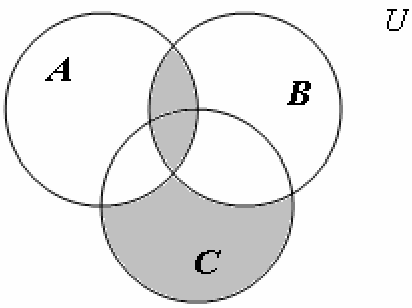
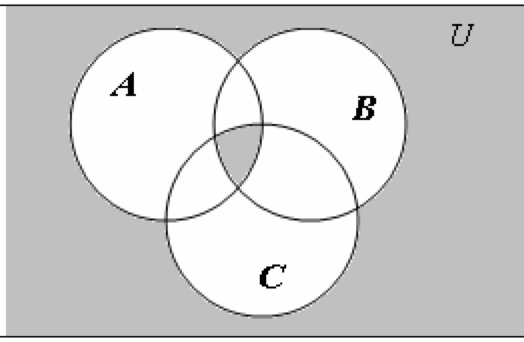
Індивідуальне завдання №1. **ДОДАТОК 1**

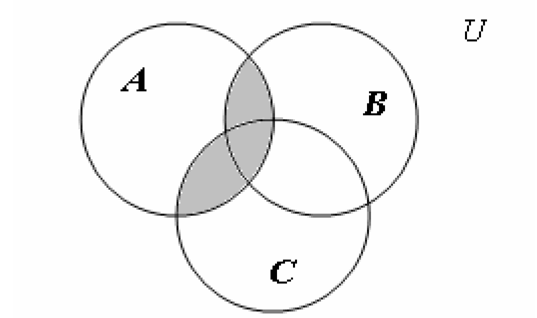
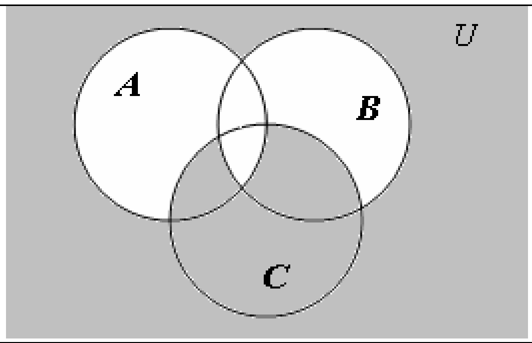
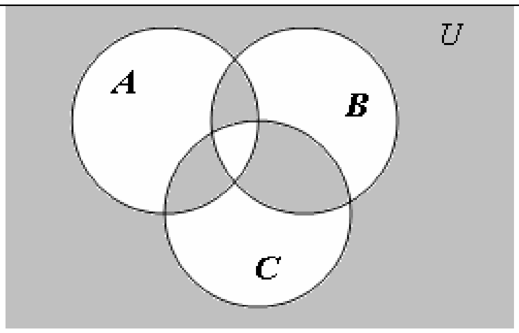
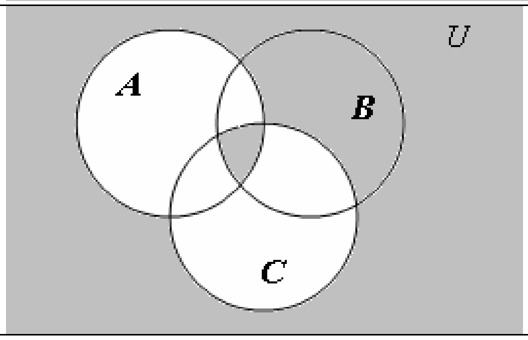
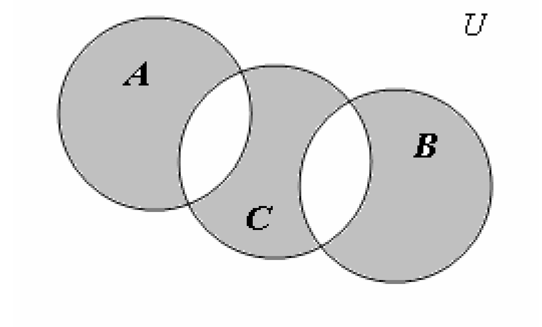
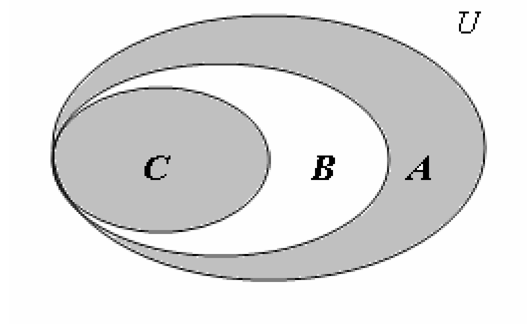
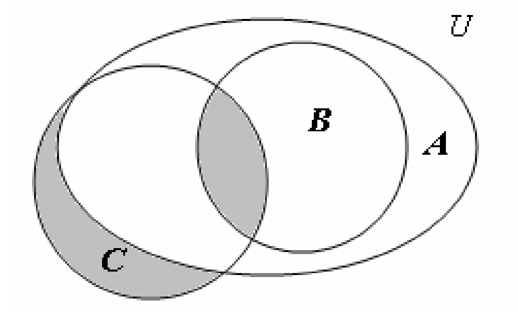
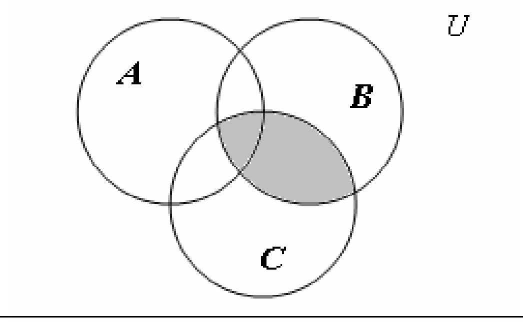
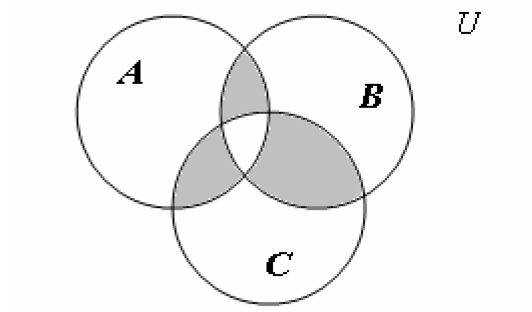
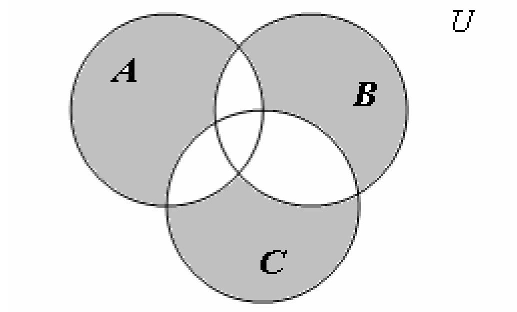
Теорія множин.

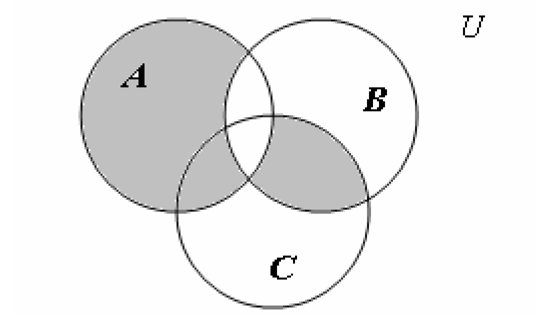
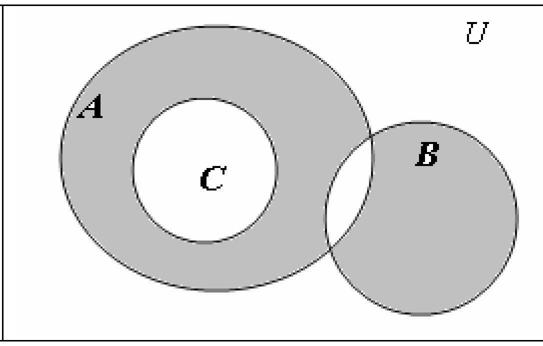
Завдання №1

Опишіть множину, яка відповідає відзначеній частині діаграми Вена:

1		**2**	
3		**4**	
5		**6**	
7		**8**	
9		**10**	

11		**12**	
13		**14**	
15		**16**	
17		**18**	
19		**20**	

21		**22**	
23		**24**	
25		**26**	
27		**28**	
29		**30**	

31		**32**	

Завдання №2

Перевірити рівність множин:

1	$(A\cup B)\setminus(A\cap B)=(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})$	**2**	$A\cup(C\setminus B)=((A\cup C)\setminus B)\cup(A\cap B)$
3	$A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$	**4**	$(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$
5	$\overline{(C\setminus A)\cap(C\setminus B)}=A\cup B\cup\overline{C}$	**6**	$A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$
7	$A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\setminus C$	**8**	$A\oplus(A\oplus B)=B$
9	$A\oplus(A\cap B)=A\setminus B$	**10**	$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$
11	$(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus(B\cap C)$	**12**	$A\setminus(B\oplus C)=(A\setminus B\setminus C)\cup(A\cap B\cap C)$
13	$(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=A$	**14**	$A\cup(C\setminus B)=((A\cup C)\setminus B)\cup(A\cap B)$
15	$A\cup(C\setminus B)=((A\cup C)\setminus B)\cup(A\cap B)$	**16**	$\overline{(A\cap\overline{B})}\cup B=\overline{A}\cup B$
17	$\overline{A\cup(B\cap C)}=(\overline{C}\cup\overline{B})\cap\overline{A}$	**18**	$(A\cup B)\oplus(C\setminus A)=(A\cup C)\oplus(B\setminus A)$
19	$(A\oplus C)\cup(A\setminus B)=(A\oplus C)\cup(C\setminus B)$	**20**	$A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$
21	$(A\setminus B)\cup(B\oplus C)=(A\cup B\cup C)\setminus(B\cap C)$	**22**	$A\setminus(B\oplus C)=(A\setminus(B\setminus C))\cap(A\setminus(C\setminus B))$
23	$A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$	**24**	$(C\setminus(A\cap B))\oplus A=(C\setminus(A\setminus B))\cup(A\setminus C)$
25	$(A\setminus B)\setminus C=(A\cap C)\setminus(B\cap C)$	**26**	$(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)$
27	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	**28**	$A\oplus B\oplus(A\cap B)=(A\cup B)$
29	$(A\cup B)\setminus(A\cap B)=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$	**30**	$A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus C$
31	$(A\oplus C)\cup(A\cap B)=A\oplus(C\setminus(A\cap B))$	**32**	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

Теорія відношень.

Завдання №3

Дослідити відношення:

1	R={(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)} на множині {1, 2, 3, 4}	**2**	$R=\{(x,y)\in R^2 \mid y=x^2,\quad x\in[-3,2]\cup[3,4]\}$
3	$(x, y)\in R$ якщо й лише якщо $x\neq y$	**4**	R={(1, 3), (2, 4), (3, 2), (4, 1), (5, 5)} на множині {1, 2, 3, 4, 5}
5	R={(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)} на множині {1, 2, 3, 4}	**6**	R={(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 1)} на множині {1, 2, 3, 4, 5}
7	$(x, y)\in R$ якщо й лише якщо $xy\geq 1$	**8**	R={(1, 5), (2, 4), (3, 1), (4, 3), (5, 2)} на множині {1, 2, 3, 4, 5}
9	R={(2, 4), (4, 2)} на множині {1, 2, 3, 4}	**10**	$R=\{(x,y)\in Z^2 \mid (x=y)\vee(x=-y)\}$
11	$(x, y)\in R$ якщо й лише якщо $x=y+1$ або $x=y-1$	**12**	R={(1, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 5), (5, 4)} на множині {1, 2, 3, 4, 5}
13	R={(1, 2), (2, 3), (3, 4)} на множині {1, 2, 3, 4}	**14**	R={(1, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 3), (5, 5)} на множині {1, 2, 3, 4, 5}

15	$(x, y) \in R$ якщо й лише якщо x та y обидва або від'ємні, або невід'ємні	**16**	$R = \{(x, y) \in Z^2 \mid x^2 + y^2 = 16\}$
17	R={(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)} на множині {1, 2, 3, 4}	**18**	R={(1, 1), (2, 2), (3, 5), (4, 3), (5, 4)} на множині {1, 2, 3, 4, 5}
19	R={(1, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 4)} на множині {1, 2, 3, 4}	**20**	$R = \{(x, y) \in R^2 \mid x = y^2\}$
21	$R = \{(x, y) \in R^2 \mid x \geq y^2\}$	**22**	R={(1, 5), (2, 1), (3, 3), (4, 2), (5, 4)} на множині {1, 2, 3, 4, 5}
23	R={(1, 5), (2, 3), (3, 1), (4, 2), (5, 4)} на множині {1, 2, 3, 4, 5}	**24**	$R = \{(x, y) \in R^2 \mid \lvert x + y \rvert = 1\}$
25	$R = \left\{(x, y) \in [-1,1] \times [-1,1] \mid y = \dfrac{x}{1 + x^2}\right\}$	**26**	R={(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)} на множині {1, 2, 3, 4}
27	R={(1, 4), (2, 5), (3, 1), (4, 3), (5, 2)} на множині {1, 2, 3, 4, 5}	**28**	$R = \{(x, y) \in N^2 \mid x < y\}$
29	$R = \{(x, y) \in N^2 \mid x \text{ ділить } y\}$	**30**	R={(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)} на множині {1, 2, 3, 4}
31	R={(1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (5, 5)} на множині {1, 2, 3, 4, 5}	**32**	$R = \{(x, y) \in N^2 \mid x^2 + y^2 = 25\}$

Логіка висловлювань.

Завдання №4

Перевірити рівносильності, використовуючи еквівалентні перетворення:

1	$(p \to q) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q}) = \bar{p} \wedge (p \to q \wedge r)$	**2**	$q \wedge (p \leftrightarrow r) \vee (\bar{p} \wedge r) = r \wedge (p \leftrightarrow q) \vee (\bar{p} \wedge q)$
3	$(p \to q) \vee (p \to r) = (p \to q) \vee p \wedge r$	**4**	$(p \vee q) \leftrightarrow (r \to p) = (q \leftrightarrow r) \to p$
5	$(p \vee r) \leftrightarrow p \vee q \wedge r = p \vee r \to p \vee q$	**6**	$\neg((r \to q) \wedge (q \to p)) = (\bar{r} \to q) \wedge (q \to \bar{p})$
7	$(r \to p) \vee (r \to q) = r \vee p \to q \vee p$	**8**	$(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r) \vee \neg(p \leftrightarrow q) = p \vee q \vee r$
9	$p \vee (q \wedge \bar{r}) = p \wedge (q \to r) \vee (q \wedge \bar{r})$	**10**	$(p \vee r) \to p \wedge (q \to r) = (p \wedge q \to r) \wedge (r \to p)$
11	$r \wedge (p \to q) = (p \vee r) \wedge (p \to q \wedge r)$	**12**	$(p \wedge q \vee r) \to (p \wedge r) = p \wedge (q \to r) \vee \bar{p} \wedge \bar{r}$
13	$r \to (p \vee q) = p \vee r \leftrightarrow p \vee (q \wedge r)$	**14**	$q \wedge (r \to p) \vee \bar{q} \wedge (p \vee r) = r \wedge (q \to p) \vee \bar{r} \wedge (p \vee q)$
15	$p \wedge (q \to r) \vee (q \wedge \bar{r}) = (r \to p) \wedge (p \vee q)$	**16**	$(p \to \bar{q}) \wedge (\bar{q} \to r) = (\bar{r} \to q) \wedge (q \to \bar{p})$
17	$(p \leftrightarrow q) \to p = (r \to p \vee q) \wedge (\bar{p} \to q \vee r)$	**18**	$((p \leftrightarrow q) \to r) \to p = (q \vee r) \to p$
19	$(q \wedge r \to p) \wedge (\bar{q} \wedge \bar{r} \to p) = (q \leftrightarrow r) \to p$	**20**	$p \leftrightarrow \bar{r} \wedge (p \to q) = \bar{p} \leftrightarrow (p \wedge \bar{q} \vee r)$
21	$(r \to p) \wedge (r \to q) = (p \wedge q) \vee r \to (p \wedge q)$	**22**	$r \to (p \vee q) = p \vee r \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \wedge r)$
23	$(p \wedge q) \leftrightarrow r = p \wedge (q \leftrightarrow r) \vee \neg(p \wedge r)$	**24**	$(p \wedge q) \leftrightarrow (p \to r) = p \wedge (q \leftrightarrow r)$
25	$(p \wedge r) \leftrightarrow (q \wedge r) = r \to (p \leftrightarrow q)$	**26**	$(p \leftrightarrow q) \to (p \vee r) = p \vee q \vee r$
27	$(p \vee q) \wedge r \leftrightarrow \bar{r} = \neg(p \vee q) \wedge r$	**28**	$\bar{p} \leftrightarrow (p \to q) \wedge (p \to r) = p \wedge q \to \bar{r}$
29	$p \leftrightarrow (q \to p) \wedge (r \to p) = \bar{r} \wedge \bar{q} \to p$	**30**	$p \wedge \neg(q \wedge r) \vee \bar{p} \wedge (q \vee r) = q \wedge \neg(p \wedge r) \vee \bar{q} \wedge (p \vee r)$
31	$(\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r) \vee \neg(p \leftrightarrow q) \vee (p \wedge q) = p \vee q \vee r$	**32**	$(q \wedge \bar{r}) \vee p = p \wedge (q \to r) \vee (q \wedge \bar{r})$

Завдання №5

За допомогою таблиць істинності побудувати досконалі кон'юнктивну та диз'юнктивну нормальні форми формул та скласти контактно-релейні схеми для даних функцій:

1	$q \wedge \neg(p \wedge r) \vee \bar{q} \wedge (p \vee r)$	**2**	$(q \wedge r \to p) \wedge (\bar{q} \wedge \bar{r} \to p)$
3	$((p \vee q) \wedge (q \to \bar{r})) \leftrightarrow (p \to r)$	**4**	$(\bar{p} \wedge r) \vee \neg(p \leftrightarrow q) \vee (p \wedge q)$
5	$((p \leftrightarrow q) \to r) \to p$	**6**	$(p \leftrightarrow q \leftrightarrow r) \vee p \wedge (q \leftrightarrow \bar{r})$
7	$(((\bar{p} \to q) \vee r) \wedge (\neg(p \to q) \to r)) \vee (p \to q)$	**8**	$(\bar{r} \to q) \wedge (q \to \bar{p})$

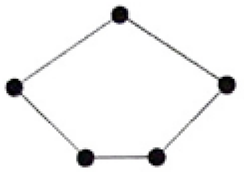
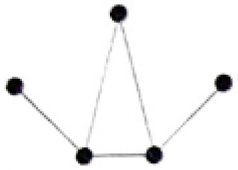
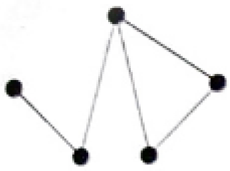
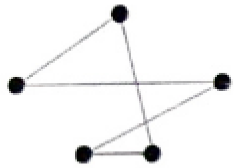
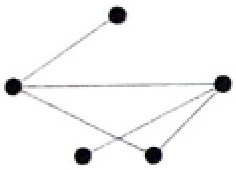
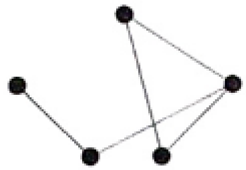
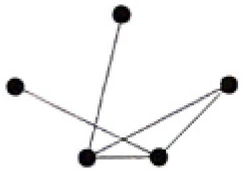
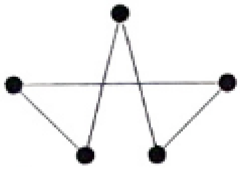
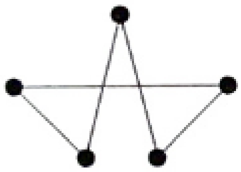
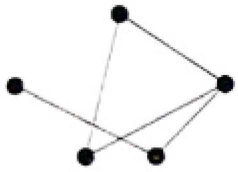
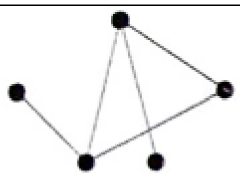
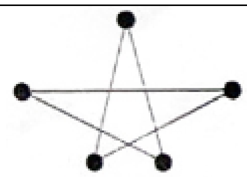
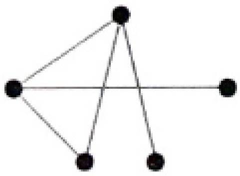
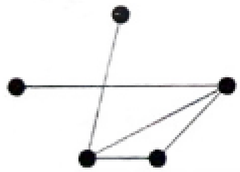
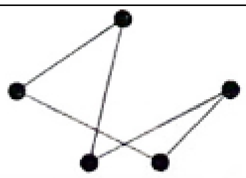
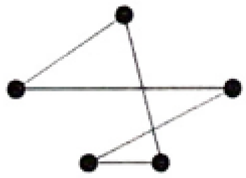
9	$r \vee p \to q \vee p \wedge \bar{r}$	**10**	$((\bar{p} \to q) \wedge (p \to q)) \to q$
11	$(p \leftrightarrow q) \to p \wedge (\bar{p} \to q \vee r)$	**12**	$(r \to p) \wedge (q \wedge \bar{r} \to \bar{p})$
13	$p \wedge (q \vee r) \to \bar{p}$	**14**	$(r \to p) \vee (r \to q)$
15	$(q \wedge r) \vee (\bar{q} \wedge (p \leftrightarrow r)) \vee (p \wedge (q \leftrightarrow r))$	**16**	$(p \wedge \bar{q}) \vee r \to (p \wedge q)$
17	$(p \to \bar{q}) \wedge (\bar{q} \to r) \wedge (q \to \bar{p})$	**18**	$(p \to (q \to p)) \to (q \to \bar{p})$
19	$\neg(p \vee q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{r}) \vee (p \wedge q)$	**20**	$p \wedge (q \to r) \vee (q \wedge \bar{r})$
21	$(q \wedge \bar{r} \to p) \vee (\bar{q} \leftrightarrow r) \to p$	**22**	$(\bar{r} \to p) \vee \bar{q} \wedge (p \vee r)$
23	$(p \wedge q) \vee r \to (\bar{p} \wedge q)$	**24**	$(p \vee q \wedge \bar{r}) \wedge (p \vee r)$
25	$(\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r}) \vee (p \wedge q) \vee r \wedge (p \leftrightarrow q)$	**26**	$p \wedge \neg(q \wedge r) \vee \bar{p} \wedge (q \vee r)$
27	$(r \to p) \wedge (p \vee q) \vee \bar{r}$	**28**	$((p \vee q) \wedge (\bar{p} \to q) \wedge (q \to r)) \to r$
29	$(q \wedge r) \vee (q \leftrightarrow r) \to p$	**30**	$(p \to (\bar{q} \to p)) \vee (q \to \bar{p})$
31	$r \wedge (q \to p) \vee \bar{r} \wedge (p \vee q)$	**32**	$(r \to p \vee q) \wedge (\bar{p} \to q \vee r)$

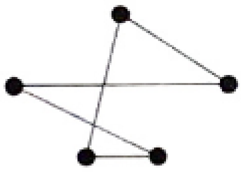
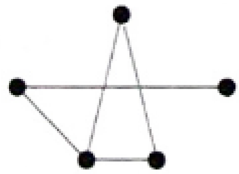
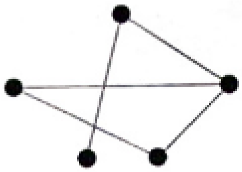
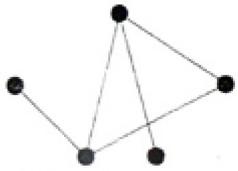
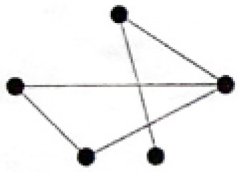
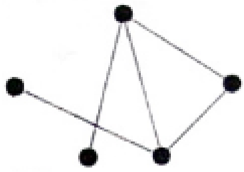
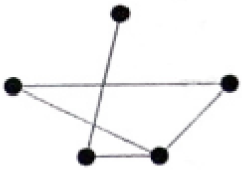
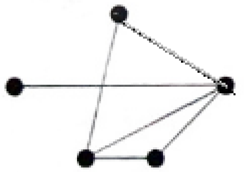
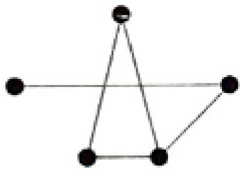
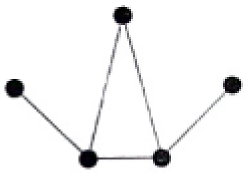
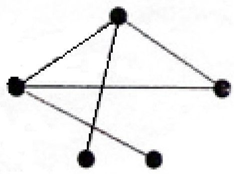
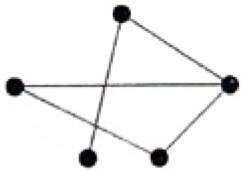
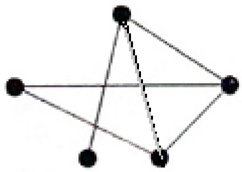
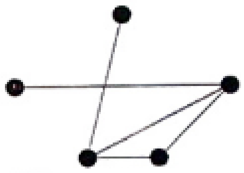
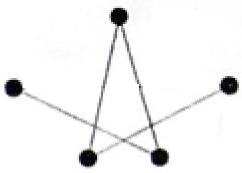
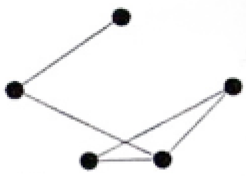
Індивідуальне завдання №2. **ДОДАТОК 2**

Теорія графів.

Завдання №1

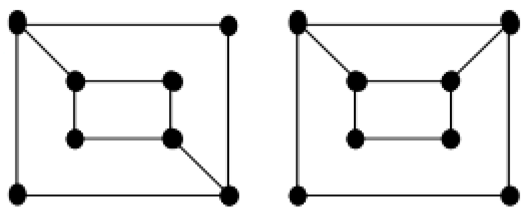
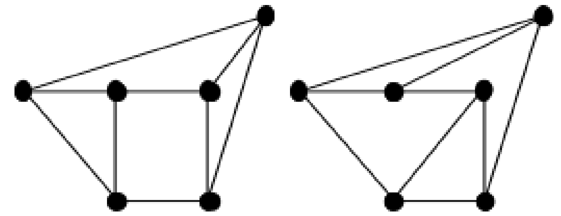
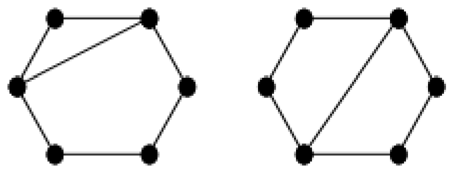
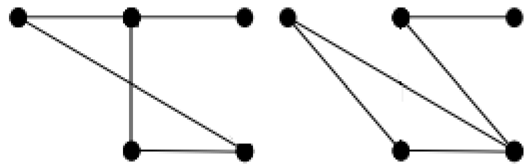
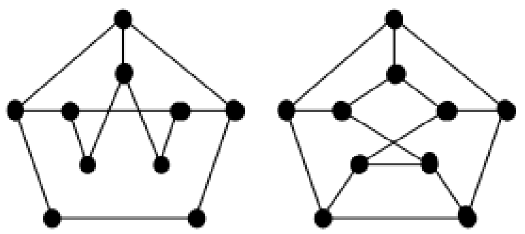
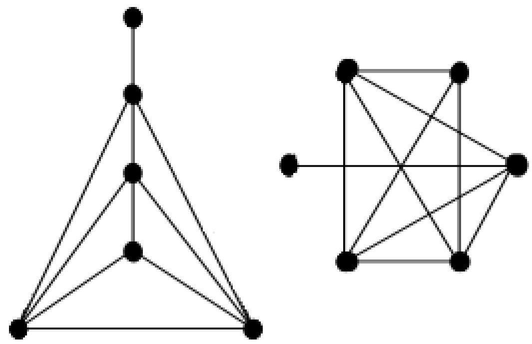
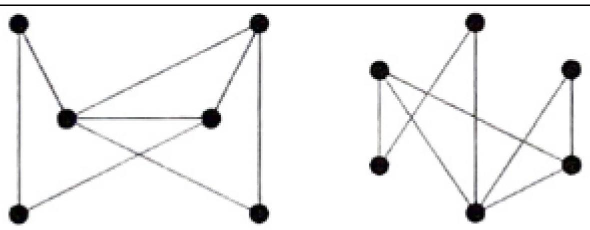
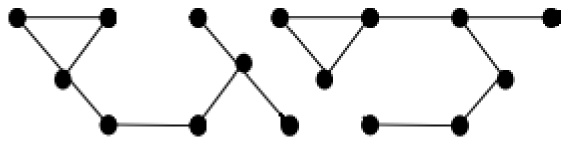
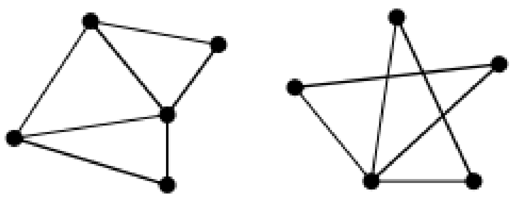
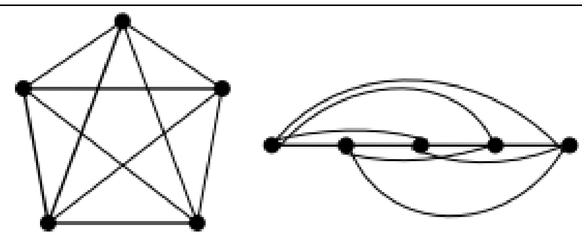
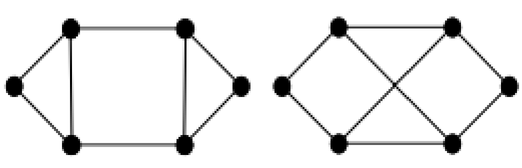
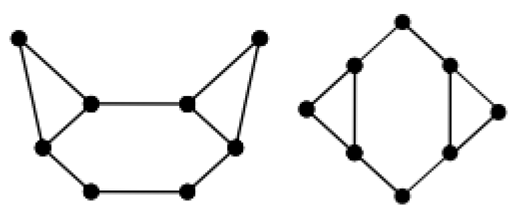
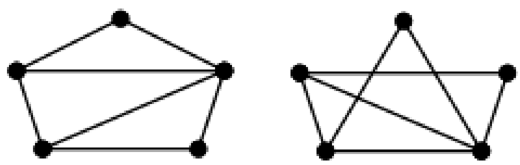
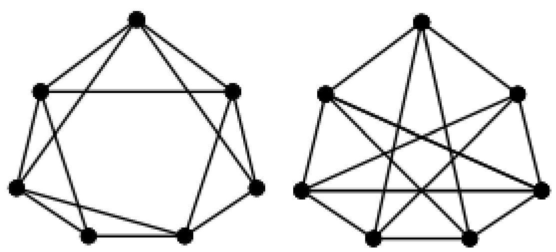
Встановити чи граф є самодоповнювальним:

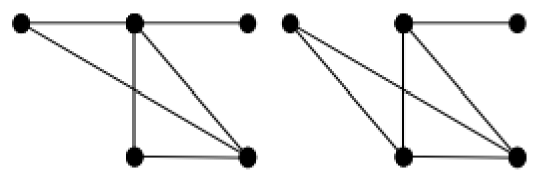
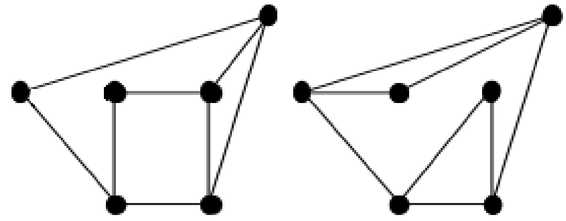
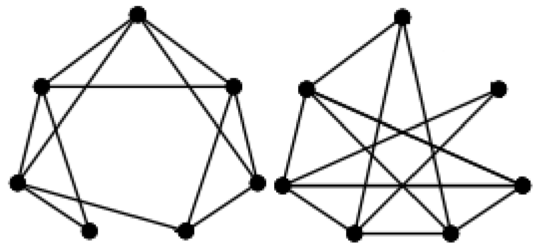
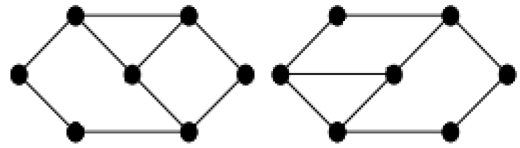
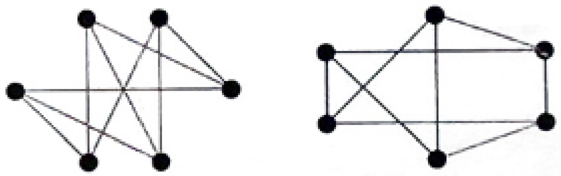
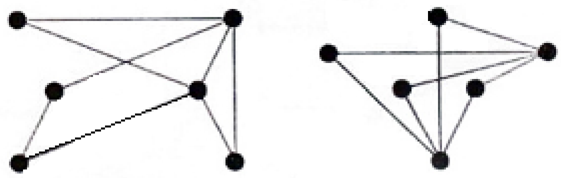
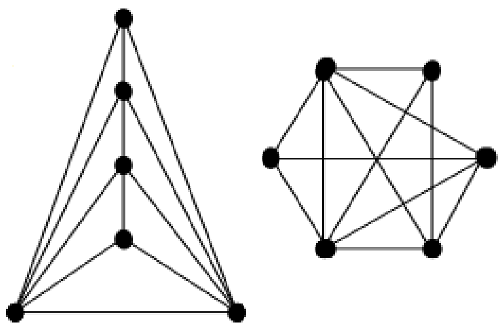
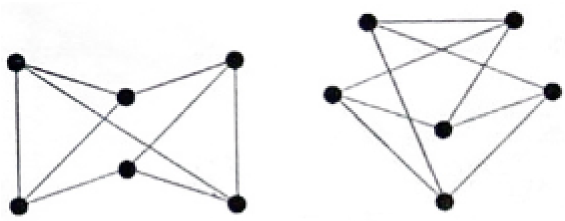
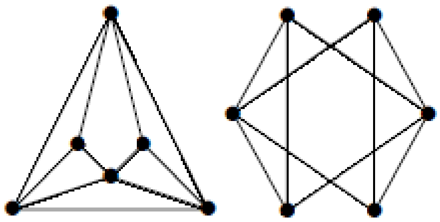
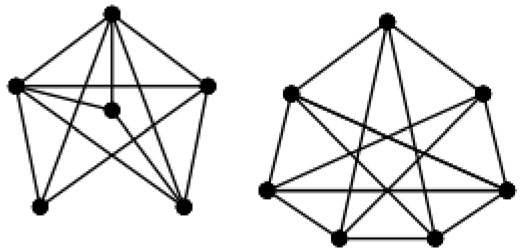
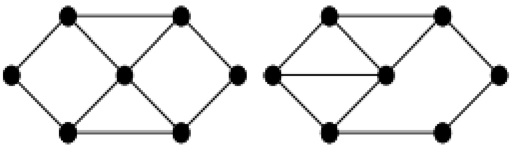
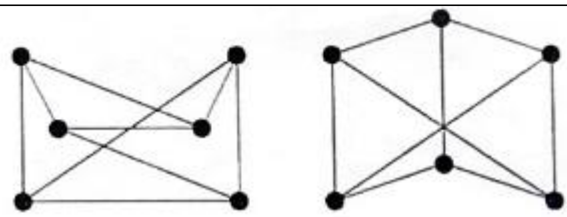
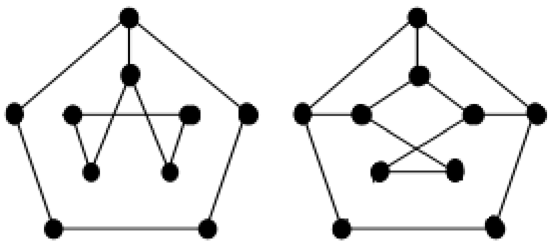
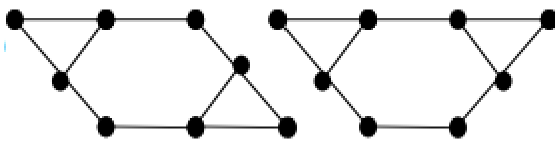
1		**2**	
3		**4**	
5		**6**	
7		**8**	
9		**10**	
11		**12**	
13		**14**	
15		**16**	

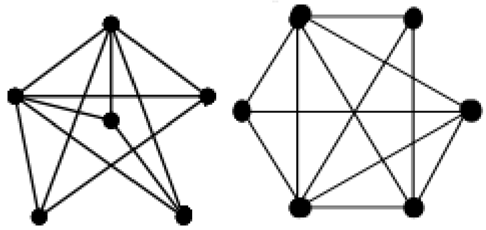
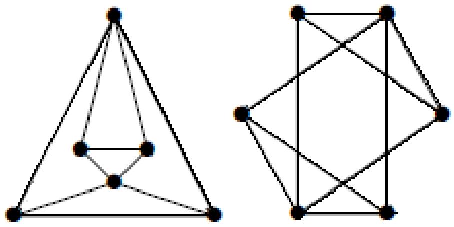
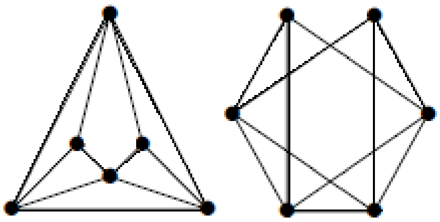
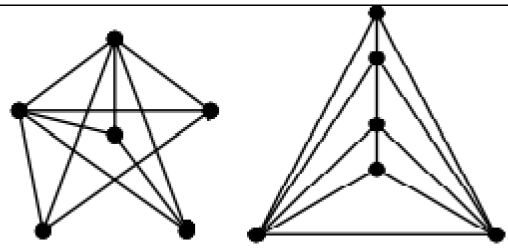
17		**18**	
19		**20**	
21		**22**	
23		**24**	
25		**26**	
27		**28**	
29		**30**	
31		**32**	

Завдання №2

Перевірити чи графи є ізоморфними. Побудувати ізоморфне відображення, або довести, що його не існує:

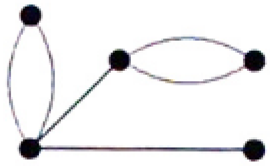
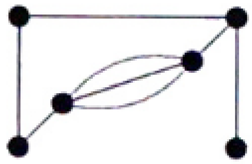
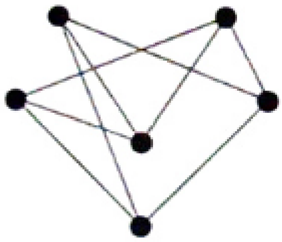
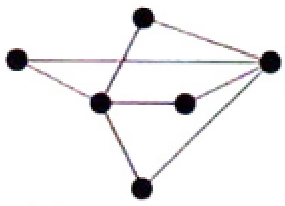
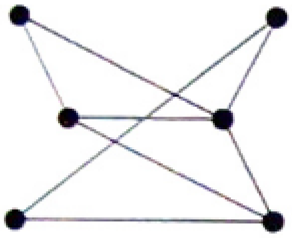
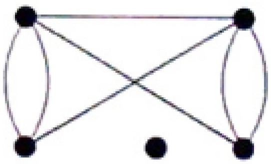
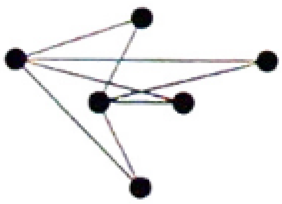
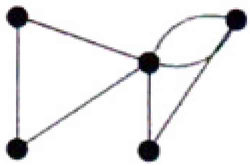
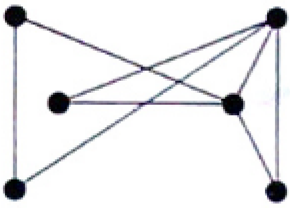
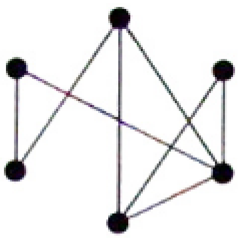
1		**2**	
3		**4**	
5		**6**	
7		**8**	
9		**10**	
11		**12**	
13		**14**	

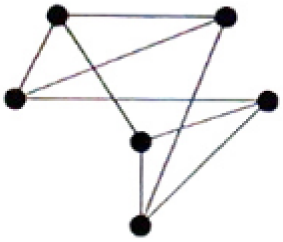
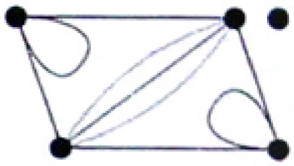
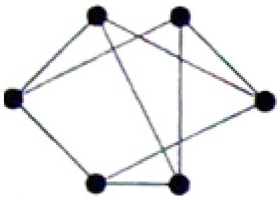
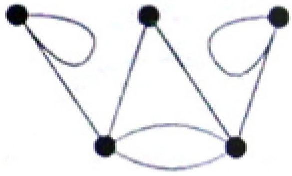
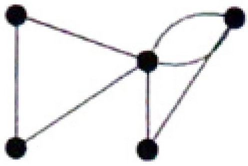
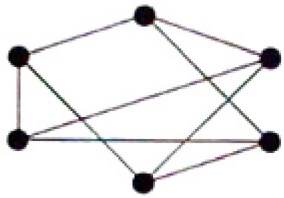
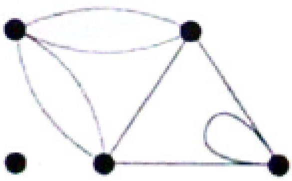
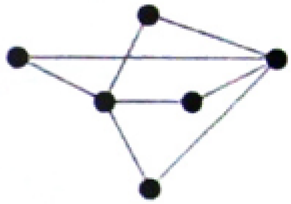
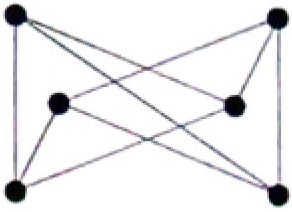
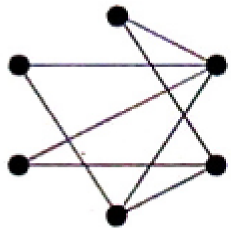
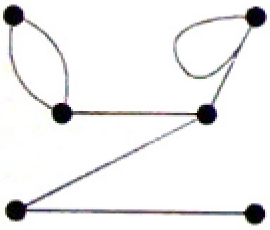
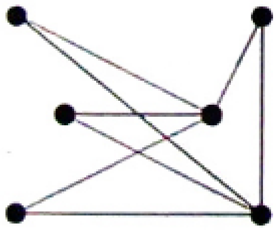
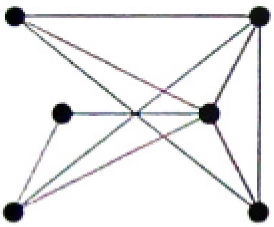
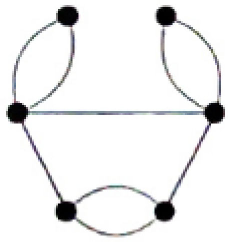
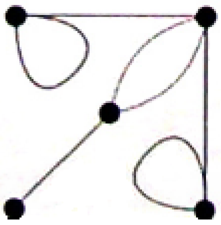
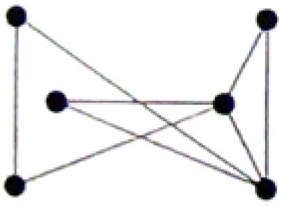
15		**16**	
17		**18**	
19		**20**	
21		**22**	
23		**24**	
25		**26**	
27		**28**	

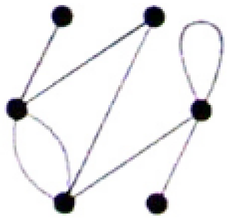
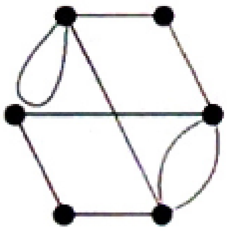
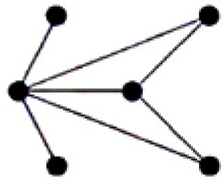
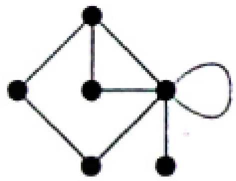
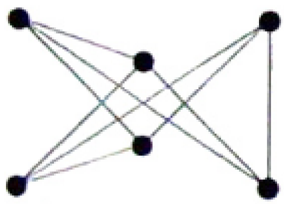
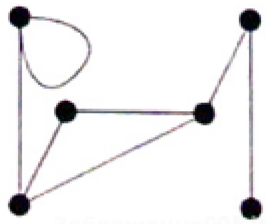
29		**30**	
31		**32**	

Завдання №3

Побудувати матриці суміжності та інцидентності для заданого графу:

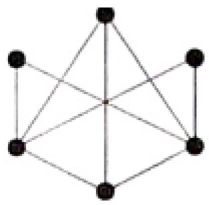
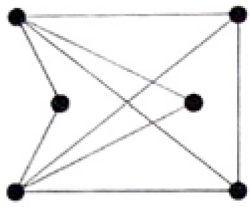
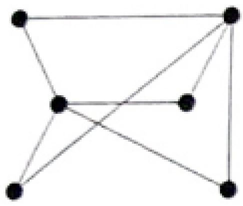
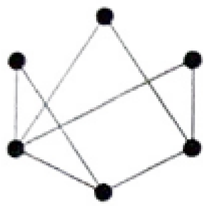
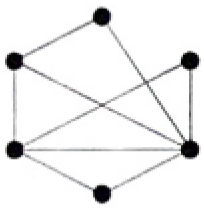
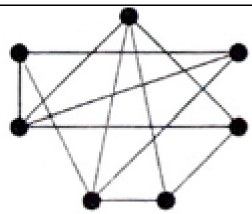
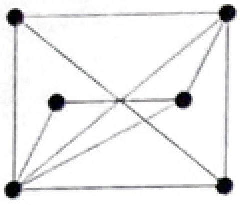
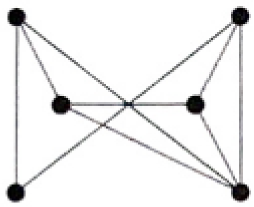
1		**2**	
3		**4**	
5		**6**	
7		**8**	
9		**10**	

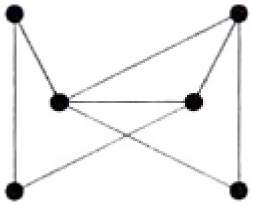
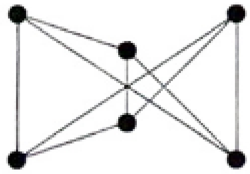
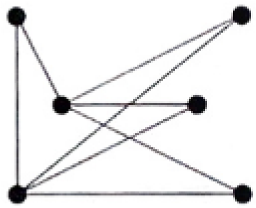
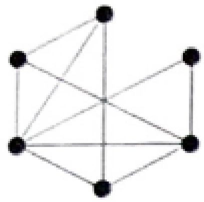
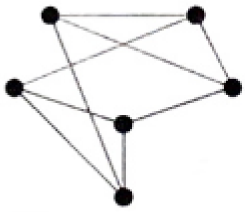
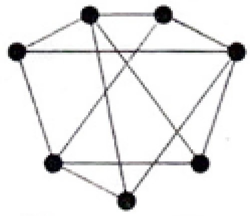
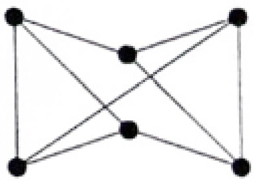
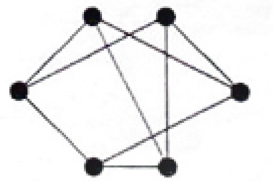
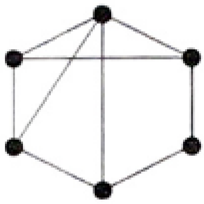
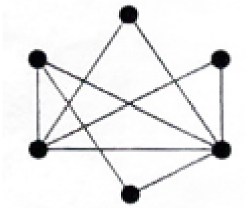
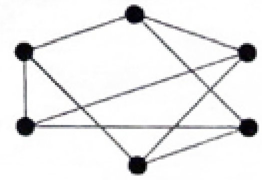
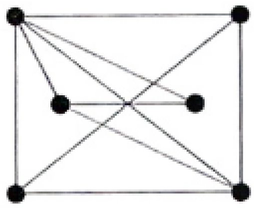
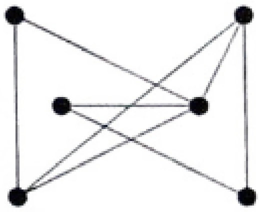
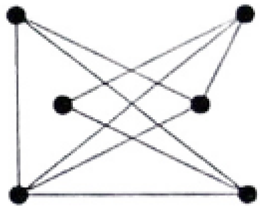
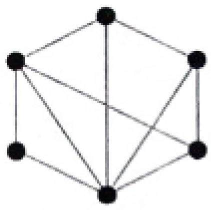
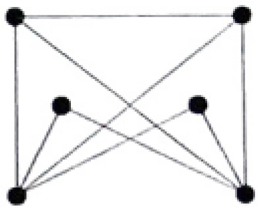
11		**12**	
13		**14**	
15		**16**	
17		**18**	
19		**20**	
21		**22**	
23		**24**	
25		**26**	

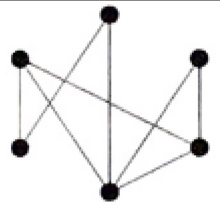
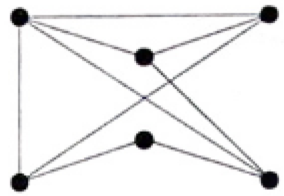
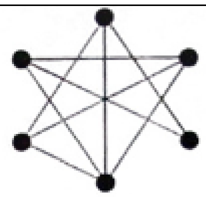
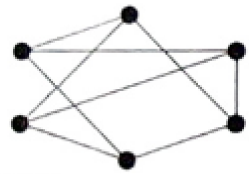
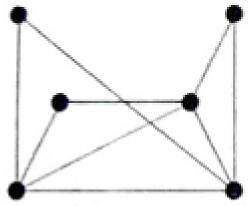
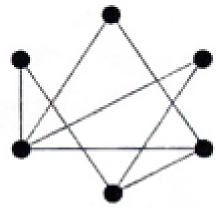
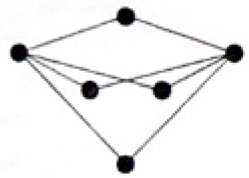
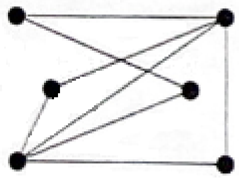
27		**28**	
29		**30**	
31		**32**	

Завдання №4

Визначити чи має граф Ейлерів та Гамільтонів цикли. Визначити хроматичне число графа:

1		**2**	
3		**4**	
5		**6**	
7		**8**	

9		**10**	
11		**12**	
13		**14**	
15		**16**	
17		**18**	
19		**20**	
21		**22**	
23		**24**	

25		**26**	
27		**28**	
29		**30**	
31		**32**	

Завдання №5

Для розподілу ймовірностей *P* появ букв побудувати коди методом Фано та Хаффмана:

1	*P*={0,3; 0,2; 0,2; 0,1; 0,1; 0,05; 0,04; 0,01}	**2**	*P*={0,35; 0,35; 0,1; 0,1; 0,03; 0,03; 0,02; 0,01; 0,01}
3	*P*={0,25; 0,2; 0,15; 0,15; 0,15; 0,05; 0,05}	**4**	*P*={0,35; 0,25; 0,1; 0,1; 0,1; 0,05; 0,04; 0,01}
5	*P*={0,4; 0,2; 0,1; 0,1; 0,1; 0,05; 0,04; 0,01}	**6**	*P*={0,6; 0,1; 0,09; 0,08; 0,07; 0,04; 0,02}
7	*P*={0,4; 0,4; 0,1; 0,03; 0,03; 0,02; 0,01; 0,01}	**8**	*P*={0,3; 0,25; 0,2; 0,1; 0,1; 0,04; 0,01}
9	*P*={0,3; 0,2; 0,2; 0,1; 0,1; 0,04; 0,04; 0,02}	**10**	*P*={0,5; 0,1; 0,09; 0,08; 0,07; 0,05; 0,01}
11	*P*={0,6; 0,1; 0,09; 0,08; 0,07; 0,05; 0,01}	**12**	*P*={0,3; 0,2; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1; 0,05; 0,04; 0,01}
13	*P*={0,3; 0,2; 0,2; 0,1; 0,1; 0,05; 0,03; 0,01; 0,01}	**14**	*P*={0,25; 0,2; 0,15; 0,15; 0,15; 0,06; 0,04}
15	*P*={0,5; 0,15; 0,09; 0,08; 0,07; 0,05; 0,05; 0,01}	**16**	*P*={0,3; 0,2; 0,2; 0,1; 0,05; 0,05; 0,05; 0,03; 0,02}
17	*P*={0,3; 0,3; 0,1; 0,1; 0,1; 0,05; 0,04; 0,01}	**18**	*P*={0,4; 0,35; 0,15; 0,03; 0,03; 0,02; 0,01; 0,01}
19	*P*={0,4; 0,19; 0,15; 0,08; 0,06; 0,06; 0,05; 0,01}	**20**	*P*={0,3; 0,2; 0,2; 0,1; 0,1; 0,04; 0,03; 0,03}
21	*P*={0,35; 0,2; 0,15; 0,1; 0,1; 0,05; 0,04; 0,01}	**22**	*P*={0,4; 0,4; 0,1; 0,03; 0,02; 0,02; 0,02; 0,01}
23	*P*={0,4; 0,25; 0,09; 0,08; 0,07; 0,05; 0,04; 0,02}	**24**	*P*={0,3; 0,25; 0,2; 0,1; 0,05; 0,04; 0,03; 0,03}
25	*P*={0,3; 0,25; 0,2; 0,1; 0,05; 0,05; 0,04; 0,01}	**26**	*P*={0,4; 0,35; 0,15; 0,03; 0,03; 0,02; 0,01; 0,01}
27	*P*={0,6; 0,1; 0,09; 0,09; 0,06; 0,03; 0,03}	**28**	*P*={0,3; 0,2; 0,2; 0,15; 0,05; 0,04; 0,03; 0,02; 0,01}
29	*P*={0,3; 0,2; 0,1; 0,15; 0,1; 0,1; 0,04; 0,01}	**30**	*P*={0,25; 0,25; 0,15; 0,15; 0,1; 0,05; 0,05}
31	*P*={0,4; 0,3; 0,2; 0,03; 0,03; 0,02; 0,01; 0,01}	**32**	*P*={0,4; 0,2; 0,2; 0,1; 0,05; 0,04; 0,01}

Завдання №6

Теорія формальних граматик:

1	Побудувати граматику, яка породжує мову $\{01^{2n} \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$.	**2**	Нехай *G* – граматика з *V*={*S*, A, B, *a*, *b*, *c*}, *T*={*a*, *b*, *c*}, *S* – початковий символ і множина продукцій *P*={*S*→*abB*, *S*→*bcS*, B→*bbA*, *S*→*aA*, *A*→*cb*}. Знайти мову L(G), яка породжується заданою граматикою.
3	Нехай *G* – граматика з *V*={*S*, *a*, *b*, *c*}, *T*={*a*, *b*, *c*}, *S* – початковий символ і множина продукцій *P*={*S*→*abS*, *S*→*bcS*, *S*→*bbS*, *S*→*a*, *S*→*cb*}. Знайти мову L(G), яка породжується заданою граматикою.	**4**	Побудувати граматику, яка породжує мову. $\{0^n1^n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$.
5	Нехай *G* – граматика з *V*={*S*, A, *a*, *b*, *c*}, *T*={*a*, *b*, *c*}, *S* – початковий символ і множина продукцій *P*={*S*→*abS*, *S*→*bcA*, *S*→*bbA*, *S*→*aA*, *A*→*cb*}. Знайти мову L(G), яка породжується заданою граматикою.	**6**	Нехай *G* – граматика з *V*={*S*, A, *a*, *b*, *c*}, *T*={*a*, *b*, *c*}, *S* – початковий символ і множина продукцій *P*={*S*→*abS*, *S*→*bcS*, *S*→*bA*, *S*→*aaA*, *A*→*cbb*}. Знайти мову L(G), яка породжується заданою граматикою.
7	Побудувати граматику, яка породжує мову. $\{0^n1^{2n} \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$.	**8**	Нехай *G* – граматика з *V*={*S*, A, B, *a*, *b*, *c*}, *T*={*a*, *b*, *c*}, *S* – початковий символ і множина продукцій *P*={*S*→*abS*, *S*→*bcB*, *S*→*bA*, *S*→*aacA*, *A*→*cbb*, *B*→*acb*}. Знайти мову L(G), яка породжується заданою граматикою.
9	Нехай *G* – граматика з *V*={*S*, A, B, *a*, *b*, *c*}, *T*={*a*, *b*, *c*}, *S* – початковий символ і множина продукцій *P*={*S*→*baS*, *S*→*bbcB*, *S*→*baA*, *B*→*aacA*, *A*→*cbb*, *B*→*acb*}. Знайти мову L(G), яка породжується заданою граматикою.	**10**	Нехай G=(V,T,S,P) – задана граматика, де V={S,0,1} – алфавіт, T = {0,1} – термінальні символи, S – початковий символ, P = {S→11S, S→00, *S*→λ} – множина продукцій. Знайти мову L(G), породжену цією граматикою.
11	Нехай G=(V,T,S,P) – задана граматика, де V={S,0,1} – алфавіт, T = {0,1} – термінальні символи, S – початковий символ, P = {S→10S, S→0S, S→01S, *S*→λ} – множина продукцій. Знайти мову L(G), породжену цією граматикою.	**12**	Побудувати граматику, яка породжує мову. $\{1^n0^n1^{2n} \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$.
13	Побудувати граматику, яка породжує мову. $\{0^{2n}1^{2n} \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$.	**14**	Нехай *G* – граматика з *V*={*S*, A, B, *a*, *b*, *c*}, *T*={*a*, *b*, *c*}, *S* – початковий символ і множина продукцій *P*={*S*→*abS*, *S*→*bcB*, *S*→*bbS*, *S*→*bB*, *S*→λ, *A*→*aacA*, *A*→*cbb*, *B*→*acb*}. Знайти мову L(G), яка породжується заданою граматикою.
15	Нехай *G* – граматика з *V*={*S*, A, B, *a*, *b*, *c*}, *T*={*a*, *b*, *c*}, *S* – початковий символ і множина продукцій *P*={*S*→*baS*, *S*→*bA*, *S*→*aA*, *A*→*cbb*, *B*→*a*}. Знайти мову L(G), яка породжується заданою граматикою.	**16**	Нехай *G* – граматика з *V*={*S*, A, B, *a*, *b*, *c*}, *T*={*a*, *b*, *c*}, *S* – початковий символ і множина продукцій *P*={*S*→*bS*, *S*→*bcB*, *S*→*bA*, *S*→*acA*, *S*→λ, *A*→*cb*, *B*→*ac*}. Знайти мову L(G), яка породжується заданою граматикою.
17	Нехай G=(V,T,S,P) – задана граматика, де V={S,0,1} – алфавіт, T = {0,1} – термінальні символи, S – початковий символ, P = {S→110S, S→0S, *S*→λ} – множина продукцій. Знайти мову L(G), породжену цією граматикою.	**18**	Нехай *G* – граматика з *V*={*S*, A, *a*, *b*, *c*}, *T*={*a*, *b*, *c*}, *S* – початковий символ і множина продукцій *P*={*S*→*abS*, *S*→*bcS*, *S*→*bbA*, *S*→*aA*, *A*→*cb*, *S*→λ}. Знайти мову L(G), яка породжується заданою граматикою.
19	Побудувати граматику, яка породжує мову. $\{10^n1^{2n} \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$.	**20**	Побудувати граматику, яка породжує мову. $\{0^n1^{2n}0^n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$.

21	Нехай G=(V,T,S,P) – задана граматика, де V={S,0,1} – алфавіт, T = {0,1} – термінальні символи, S – початковий символ, P = {S→101S, S→0S, *S*→λ} – множина продукцій. Знайти мову L(G), породжену цією граматикою.	**22**	Нехай *G* – граматика з *V*={*S*, A, B, *a*, *b*, *c*}, *T*={*a*, *b*, *c*}, *S* – початковий символ і множина продукцій *P*={*S*→*aS*, *S*→*bB*, *S*→*bA*, *S*→*acA*, *A*→*cb*, *B*→*acc}*. Знайти мову L(G), яка породжується заданою граматикою.
23	Нехай *G* – граматика з *V*={*S*, A, B, *a*, *b*, *c*}, *T*={*a*, *b*, *c*}, *S* – початковий символ і множина продукцій *P*={*S*→*bS*, *S*→*acA*, *S*→*bA*, *S*→*aacB*, *A*→*cab*, *B*→*acb}*. Знайти мову L(G), яка породжується заданою граматикою.	**24**	Побудувати граматику, яка породжує мову. $\{0^n1^{2n} \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$.
25	Нехай *G* – граматика з *V*={*S*, A, B, *a*, *b*, *c*}, *T*={*a*, *b*, *c*}, *S* – початковий символ і множина продукцій *P*={*S*→*abS*,, *S*→*bcA*, *S*→*aaccA*, *A*→*cbb*, *B*→*acb}*. Знайти мову L(G), яка породжується заданою граматикою.	**26**	Нехай G=(V,T,S,P) – задана граматика, де V={S,0,1} – алфавіт, T = {0,1} – термінальні символи, S – початковий символ, P = {S→01S, S→0S, S→010, S→10, *S*→λ} – множина продукцій. Знайти мову L(G), породжену цією граматикою.
27	Побудувати граматику, яка породжує мову. $\{0^n1^{2n}0 \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$.	**28**	Побудувати граматику, яка породжує мову. $\{0^n1^m \mid n, m = 0, 1, 2, \ldots\}$.
29	Нехай G=(V,T,S,P) – задана граматика, де V={S,0,1} – алфавіт, T = {0,1} – термінальні символи, S – початковий символ, P = {S→11S, S→001S, *S*→λ} – множина продукцій. Знайти мову L(G), породжену цією граматикою.	**30**	Нехай G=(V,T,S,P) – задана граматика, де V={S,0,1} – алфавіт, T = {0,1} – термінальні символи, S – початковий символ, P = {S→11S, S→0} – множина продукцій. Знайти мову L(G), породжену цією граматикою.
31	Нехай *G* – граматика з *V*={*S*, A, B, *a*, *b*, *c*}, *T*={*a*, *b*, *c*}, *S* – початковий символ і множина продукцій *P*={*S*→*abS*, *S*→*bcB*, *S*→*bbA*, *B*→*aA*, *A*→*cb}*. Знайти мову L(G), яка породжується заданою граматикою.	**32**	Нехай *G* – граматика з *V*={*S*, A, B, *a*, *b*, *c*}, *T*={*a*, *b*, *c*}, *S* – початковий символ і множина продукцій *P*={*S*→*abS*, *S*→*bcB*, *S*→*bbA*, *S*→λ, *A*→*aacA*, *A*→*cbb*, *B*→*acb}*. Знайти мову L(G), яка породжується заданою граматикою.

Навчально-методичні матеріали

1. Література до теоретичного курсу

Основна:

1. Ю. В. Нікольський, В. В. Пасічник, Ю. М. Щербина. Дискретна математика. Підручник. Львів: Магнолія плюс, вид. перше 2005, 2006 рр., вид. друге 2007 р.
2. Ю. В. Нікольський, В. В. Пасічник, Ю. М. Щербина. Дискретна математика. Підручник. Київ: Видавнича група BHV, 2007 р.
3. Ю. В. Капітонова, С. Л. Кривий, О. А. Летичевський, Г. М. Луцький, М. К. Печурін. Основи дискретної математики. – К.: Наукова думка, 2002.
4. Баранецький Я.О., Гнатів Б.В., Ільків В.С., Каленюк П.І., Костенко І.С., Нитребич З.М., Новіков Л.О., Пелех Я.М., Пукая П.Я., Сохан П.Л. Основи дискретної математики. Частина 1. Теорія множин. Комбінаторний аналіз: Навч. посібник. – Львів: Видавництво Нац. ун-ту «Львівська політехніка», 2005.- 128 с.
5. Ільків В.С., Каленюк П.І., Когут І.В., Нитребич З.М., Пукая П.Я., Сохан П.Л., Столярчук Р.Р., Ярка У.Б. Основи дискретної математики. Частина 2. Математична логіка. Теорія графів: Навч. посібник. – Львів: Видавництво Нац. ун-ту «Львівська політехніка», 2011.- 176 с.
6. Дискретная математика для программистов / Ф.А. Новиков – СПб: Питер, 2000. – 304 с.

Допоміжна:

7. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Дискретная математика: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – 3-е изд. стереотип. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 744 с.
8. Асанов М.О., Баранський В.А. Расин В.В. Дискретная математика: графи, матриоды, алгоритмы. – Ижевск: ННЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 288 с.
9. Горбатов В.А. Фундаментальны основы дискретной математики. Информационная математика. – М.: Наука. Физматлит, 2000. – 544 с.
10. Ерусалимский Я.М. Дискретная математика: теория, задачи, приложения. 3-е изд. – М.: Вузовская книга, 2000.—280 с.

2. Література до практичних занять

11. Эвнин А.Ю. Задачник по дискретной математике. – 2-е изд., перераб. и доп. – Челябинск: Издательство ЮУрГУ, 2002. – 164 с.
12. Захаров Л.Е. Алгоритмы дискретной математики: Учебное пособие. – Моск. гос. ин-т электрики и математики. М., 2002. – 120 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

“Дискретна математика”

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ТА ІНДИВІДУАЛЬНИХ РОБІТ

для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня “молодший спеціаліст”
спеціальності 5.05010101 “Обслуговування програмних систем і комплексів”
денної форми навчання

Укладач Джавала Л.Л., к.ф.-м.н., доц.,
Костюк О.В., к.ф.-м.н., асис.

Комп’ютерне верстання *Любомири Джавали*

Формат 60x84(1/16). Папір офсетний.
Електронний ресурс.

Навчально-науковий інститут підприємництва та перспективних технологій
Національного університету «Львівська політехніка»
вул. Горбачевського, 18, Львів, 79044, тел. (032)2582676