Wiktor Pirawczyk 308533

Zad 11

$$* \quad x'(t) = \nabla V(x) \qquad V: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Zzt Funkcje są ciągłe

Teza Jeżeli jest okresowa to jest stała

Załóżmy nie wprost, że istnieje rozw x, które jest okresowe

$$x(a) = x(a+T) \qquad T - \text{okres}$$

$$a^* = a+T$$

$$\forall_a \in \mathbb{R} \quad x(a) = x(a^*)$$

więc $V(x(a)) = V(x(a^*))$

z tw Rolle'a istnieje $b \in (a, a^*)$

$$\frac{d}{dt}\left(V(x(b))\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt} V(x(b)) = V_{x_1} \cdot x_1' + \dots + V_{x_n} \cdot x_n' \overset{*}{=} (x_1')^2 + \dots + (x_n')^2 = 0$$

Więc $x_1'(b) = \dots = x_n(b) = 0$

Więc istnieje rozw stałe

$$x'(t) = x(b)$$

Ponieważ nasza funkcja jest ciągła i Lipschitzowska

(jest Lipschitzowska, ponieważ jest ciągła i określona - ograniczona)

~~nie~~ nie może istnieć rozwiązanie okresowe nie stałe

$\square$

Wiktor Pilarczyk 308533

Zad 14

a) $y'' - y = 2x \qquad y(0) = 0 \quad y(1) = -1$

Najpierw rozw. ogólne dla:

$$y'' - y = 0$$

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$$

Rozw ogólne dla

$$y'' - y = 2x$$

bo $y = -2x$ jest rozw. szczególne

to $\quad y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} - 2x$

Chcemy, żeby:

$y(0) = 0$ więc $\quad 0 = c_1 + c_2$

$y(1) = 1$ więc $\quad -1 = c_1 e + \frac{c_2}{e} - 2$

$$1 = c_1 e + \frac{c_2}{e}$$

$$e = c_1 e^2 + c_2$$

z obu równań wyliczam c_1

$$c_1 (e^2 - 1) = e$$

$$c_1 = \frac{e}{e^2-1} \implies c_2 = \frac{-e}{e^2-1}$$

więc rozwiązaniem naszym to

$$y = \frac{e^{x+1} - e^{-x+1}}{e^2-1} - 2x$$