Algebra liniowa 1R, Lista 1

1. Oblicz i zaznacz w układzie współrzędnych A, B, $A+B$ i $-2A+3B$.
(a) $A=\binom{1}{0}$, $B=\binom{-1}{2}$, (b) $A=\binom{-3}{1}$, $B=\binom{-1}{1}$.
2. Napisz równania parametryczne prostej przechodzącej przez punkt A w kierunku wektora U. Naszkicuj w układzie współrzędnych.
(a) $A=\binom{1}{0}$, $U=\binom{-1}{-2}$, (b) $A=\binom{-3}{1}$, $U=\binom{1}{-1}$.
3. Napisz równanie prostej przechodzącej przez punkt $A=\binom{1}{2}$ i prostopadłej do wektora $U=\binom{-1}{1}$.
4. Znajdź cztery wektory U, takie że $\langle U, \binom{1}{1}\rangle = 0$.
5. Znajdź $P_U(V)$ i $P_V(U)$ gdy (a) $U=\binom{1}{1}$, $V=\binom{-2}{2}$, (b) $U=\binom{0}{1}$, $V=\binom{3}{1}$.

---

6. Znajdź punkt przecięcia prostych
(a) $X=\binom{1}{-1}+t\binom{1}{1}$ i $2x+y=3$, (b) $X=\binom{2}{0}+t\binom{-1}{2}$ i $X=\binom{1}{0}+t\binom{1}{1}$.
7. Napisz parametryczne równania prostej przechodzącej przez punkty A i B, w postaci wektorowej i we współrzędnych. (a) $A=\binom{1}{3}$, $B=\binom{2}{2}$, (b) $A=\binom{-3}{1}$, $B=\binom{-1}{2}$.
8. Napisz nieparametryczne równania prostych z poprzedniego ćwiczenia.
9. Czy punkt a) $\binom{10}{-10}$; b) $\binom{0}{1}$; leży na prostej $\binom{2}{-3}+t\binom{-1}{2}$?
10. Napisz we współrzędnych parametryczne równanie prostej
(a) $y=2x-1$, (b) $y=7$, (c) $x=-1$, (d) $2x+3y=5$.
11. Znajdź współrzędne czwartego wierzchołka równoległoboku, ktorego trzema wierzchołkami są $\binom{1}{2}$, $\binom{0}{0}$, $\binom{-2}{-1}$. Uwaga: jest kilka możliwości; znajdź wszystkie.
12. Uzasadnij, że proste $y=ax+b$ i $y=cx+d$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy gdy $ac=-1$.
13. Znajdź kąt między środkowymi trójkąta ABC poprowadzonymi z wierzchołków A i C wiedząc że $A=\binom{1}{-2}$, $B=\binom{2}{4}$, $C=\binom{0}{3}$.
14. Dane są współrzędne punktów P,Q,R będących środkami boków trójkąta ABC. Znajdź współrzędne punktów A,B,C. Rachunki warto przeprowadzić na wektorach wodzących.
15. Niech ℓ będzie prostą, zaś p tym punktem na prostej ℓ który leży najbliżej początku układu współrzędnych. Uzasadnij, że wektor wodzący punktu p jest prostopadły do ℓ.
16. Używając poprzedniego zadania znajdź odległość punktu $\binom{0}{0}$ od prostej $-2x+5y=7$.
17. Wyprowadź wzór na odległość punktu $A=\binom{x_0}{y_0}$ od prostej
(a) $ax+by=0$, (b) $ax+by=c$, (c) $X=B+tU$, gdzie $B=\binom{b_1}{b_2}$, $U=\binom{u_1}{u_2}$.
18. Niech U i V będą wektorami wodzącymi końców pewnego odcinka. Zapisz, w terminach wektorów U i V, wektor wodzący punktu dzielącego dany odcinek w stosunku 2:1. Uogólnij.

---

19. Znajdź współrzędne punktu, w którym promień światła biegnący od punktu $A=\binom{-3}{2}$ musi odbić się od osi OX (zgodnie z zasadą: kąt padania jest równy kątowi odbicia) aby dotrzeć do punktu
(a) $\binom{3}{4}$, (b) $\binom{7}{3}$, (c) $\binom{-11}{3}$.
20. W trójkącie ABC dane są wierzchołki $A=\binom{-4}{3}$, $B=\binom{4}{-1}$, $C=\binom{0}{5}$. Znajdź punkt opuszczenia (spodek) wysokości z wierzchołka C na bok AB.
21. Udowodnij, że przekątne dowolnego rombu są prostopadłe.
22. Udowodnij, że kąt wpisany oparty na średnicy okręgu jest prosty.
23. Udowodnij (najlepiej na kilka sposobów), że dla dowolnych U, V zachodzi nierówność: $|\langle U,V\rangle| \le \|U\|\|V\|$. Kiedy w tej nierówności zachodzi równość? Wywnioskuj, że dla dowolnych U, V zachodzi nierówność: $\|U+V\| \le \|U\|+\|V\|$.

Algebra liniowa 1, wariant R

Wykład: wtorki, 16:15-18, s. B; czwartki, 10:15-11, s. EM; Jan Dymara (dymara@math.uni.wroc.pl)
Konsultacje wykładowcy: + na zamówienie, pokój 301.
Konwersatorium: czwartki, 11:15-12, s. EM, Jan Dymara
Ćwiczenia: środy, 8:15-10, s. 606 (601?) Roman Wencel, s. 604 Adam Malinowski.

Program wykładu:
1. $\mathbf{R}^2$: wektory, iloczyn skalarny, równania prostych.
2. Wyznacznik i liniowa niezależność na płaszczyźnie. Układy równań liniowych.
3. Przekształcenia liniowe płaszczyzny: macierze, składanie, odwracanie.
4. Diagonalizacja przekształceń płaszczyzny.
5. Izometrie płaszczyzny.
6. Krzywe stopnia 2: formy kwadratowe, twierdzenie spektralne.
7. Liczby zespolone.
8. $\mathbf{R}^3$: równania prostych i płaszczyzn, iloczyn skalarny i wektorowy.
9. Wyznacznik 3×3, liniowa niezależność.
10. Układy równań, przekształcenia liniowe i ich macierze.
11. Diagonalizacja przekształceń $\mathbf{R}^3$.
12. Izometrie $\mathbf{R}^3$.
13. Twierdzenie spektralne w $\mathbf{R}^3$.
14. Formy kwadratowe trzech zmiennych i powierzchnie stopnia 2.
15. Twierdzenie Jordana dla przekształceń $\mathbf{R}^2$ i $\mathbf{R}^3$; jego zastosowania do równań różniczkowych.

Pomocna literatura:
T.Banchoff, J.Wermer, Linear Algebra Through Geometry.
Matematyka w szkole średniej, rozdziały: 14, 18, 21, 26, 32, 40.
A.I. Kostrikin, Wstęp do algebry.
A.I.Kostrikin, Y.I.Manin, Algebra liniowa i geometria. (dla nienasyconych)
L. Jankowski, G. Szkapiak, Algebra liniowa (skrypt, dostępny pod
www.math.uni.wroc.pl/~dymara/GalA18/skrypt.pdf)
J. Rutkowski, Algebra liniowa w zadaniach.
Zbiór zadań z algebry (pod red. Kostrikina).

Zasady zaliczania.

Lista zadań. Na czwartkowym wykładzie w tygodniu n studenci będą otrzymywać listę zadań nr n (lista będzie też dostępna pod adresem www.math.uni.wroc.pl/~dymara/GalA18/mat.html). Na liście będą proste zadania (nad pierwszą kreską), poważniejsze zadania (między kreskami) oraz trudniejsze zadania (poniżej drugiej kreski). Wybrane zadania z tej listy (głównie spomiędzy kresek) będą omawiane na ćwiczeniach w tygodniu $n+1$ – *przed* tymi ćwiczeniami student powinien rozwiązać wszystkie proste zadania i większość zadań poważniejszych. W razie problemów należy szukać pomocy na konsultacjach lub w tutorni.

Sprawdziany. Będą się odbywać w czwartki i zaczynać o 10:15. Trzy czwartki będą od nich wolne: 4.X, 3.I, 31.I. Półtoragodzinne kolokwia odbędą się 8.XI, 20.XII i 24.I. W pozostałe czwartki zajęcia będą się zaczynać od kartkówki trwającej kwadrans. Sprawdzian obejmuje materiał do listy omawianej w przeddzień sprawdzianu włącznie.

Zaliczenie. Do zdobycia jest 3×21 (kolokwia) $+9 \times 3$ (kartkówki) $= 90$ pkt. Progi na poszczególne oceny: 5 – 70 pkt.; 4,5 – 60 pkt.; 4 – 50 pkt.; 3,5 – 40 pkt.; 3 – 30 pkt. Prowadzący ćwiczenia ma prawo podnieść ocenę o 0,5 na podstawie całokształtu pracy studenta (uwzględniając w szczególności aktywność na ćwiczeniach, systematyczność pracy, czynione postępy w nauce oraz odległość od progu na wyższą ocenę).

Nieobecności. W przypadku usprawiedliwionej lub planowanej nieobecności na kolokwium lub kartkówce należy niezwłocznie skontaktować się z prowadzącym ćwiczenia w celu ustalenia sposobu uzyskania zaliczenia.