Rafał Nowak

Analiza numeryczna

14 stycznia 2020

1. Metody Rungego-Kutty

Ogólna postać s-etapowej metody Rungego-Kutty, dla parametrów a_i, c_i, b_{ij} $(i, j = 1, \ldots, s)$, dana jest wzorem

$$y_{n+1} = y_n + \Phi_f(h; x_n, y_n, y_{n+1}), \tag{1}$$

gdzie

$$\Phi_f(h; x_n, y_n, y_{n+1}) = h \sum_{i=1}^{s} c_i k_i,$$

zaś

$$k_i \equiv k_i(h; x_n, y_y) = f\Big(x_n + a_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{s} b_{ij} k_j\Big).$$

Wygodna forma zapisu tej metody dana jest w tabeli, w której często pomija się wyrazy zerowe:

$$\begin{array}{c|ccc} a_1 & b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ a_2 & b_{21} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_s & b_{s1} & \cdots & b_{ss} \\ \hline & c_1 & \cdots & c_s \end{array}$$

Definicja 1. Powiemy, że metoda opisana wzorem (1) jest *rzędu* p, jeśli po podstawieniu w nim $y_n \coloneqq y(x_n)$ otrzymujemy y_{n+1} o własności

$$y_{n+1} - y(x_n + h) = \mathcal{O}(h^{p+1}).$$

Przykłady

— metody rzędu pierwszego

— metoda jawna Eulera

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & 1 \end{array}$$

— metoda niejawna Eulera (wzór wsteczny)

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

— ulepszony (jawny) wzór wsteczny Eulera

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

— metody rzędu drugiego

— wzór trapezów

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

— jawny wzór trapezów (metoda Heuna)

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

— jawna metoda punktu środkowego

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

— metody rzędu trzeciego

— metoda Heuna (3)

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\ \hline & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{array}$$

— metoda Rungego-Kutty (3)

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{6} \end{array}$$

— metody rzędu czwartego

— metoda Rungego-Kutty

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{array}$$

— reguła 3/8

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & & \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & & \\ 1 & 1 & -1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{array}$$

— metoda Mersona (4,5)

$$\begin{array}{c|ccccc} 0 & & & & & \\ 1/3 & 1/3 & & & & \\ 1/3 & 1/6 & 1/6 & & & \\ 1/2 & 1/8 & 0 & 3/8 & & \\ 1 & 1/2 & 0 & -3/2 & 2 & \\ \hline & 1/6 & 0 & 0 & 2/3 & 1/6 \end{array}$$

— metoda Scratona (4,5)

$$
\begin{array}{c|ccccc}
0 & & & & & \\
2/9 & 2/9 & & & & \\
1/3 & 1/12 & 1/4 & & & \\
3/4 & 69/128 & -243/128 & 270/128 & & \\
0.9 & -9*0.0345 & 9*0.2025 & -9*0.1224 & 9*0.0544 & \\
\hline
 & 17/162 & 0 & 81/170 & 32/135 & 250/1377
\end{array}
$$

1.1. Analityczne badanie rzędu metody

Aby sprawdzić jakiego rzędu jest dana metoda należy rozwinąć w szereg Taylora wartości $y(x_n+h)$ oraz y_{n+1}, a następnie porównać współczynniki stojące przy kolejnych potęgach h. Do tego przydatne okazują się następujące wzory Taylora:

$$y(x_n+h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{1}{2!}h^2y''(x_n) + \frac{1}{3!}h^3y'''(x_n) + \dots$$

Ponieważ $y'(x) = f(x, y(x))$, więc

$$y(x_n+h) = y_n + hf + \frac{1}{2!}h^2(f_x + f_yf) + \frac{1}{3!}h^3\left[f_{xx} + f_{xy}f + (f_{xy} + f_{yy}f)f + f_y(f_x + f_yf)\right] + \dots,$$

gdzie $f \equiv f(x_n, y_n)$, $f_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}f(x_n, y_n)$, $f_y \equiv \frac{\partial}{\partial y}f(x_n, y_n)$, $f_{xx} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x_n, y_n)$, $\dots$.

Z drugiej strony, aby znaleźć rozwinięcie wartości y_{n+1}, należy rozwinąć wszystkie wartości k_i we wzorze (1). Do tego celu stosujemy wzór Taylora dla funkcji wielu zmiennych:

$$f(x+ah, y+bh) = f(x,y) + \mathrm{d}f(x,y)(ah,bh) + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2f(x,y)(ah,bh) + \frac{1}{3!}\mathrm{d}^3f(x,y)(ah,bh) + \dots,$$

gdzie $\mathrm{d}f(x,y)(ah,bh)$ oznacza różniczkę zupełną funkcji f w punkcie (x,y) dla argumentu (ah,bh):

$$\mathrm{d}^jf(x,y)(ah,bh) = \left(\frac{\partial}{\partial x}ah + \frac{\partial}{\partial y}bh\right)^j f(x,y).$$

Na przykład

$$f(x_n+ah, y_n+bh) = f + h(af_x + bf_y) + \frac{1}{2}h^2(a^2f_{xx} + 2abf_{xy} + b^2f_{yy}) + \dots,$$

gdzie symbole $f, f_x, f_y, \dots$ mają takie samo znaczenie, jak wcześniej.