Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 1: lista M 3

24 października 2019 r.

M3.1. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Uzasadnić, że odwrotność liczby c można obliczać bez wykonywania dzieleń, za pomocą wzoru $x_{n+1} := x_n(2 - c\,x_n) \quad (n = 0, 1, \ldots)$. Uzasadnić (lokalną?) zbieżność tej metody. Dla jakich wartości x_0 metoda jest zbieżna?

M3.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Podać przykład funkcji $f \in C^2[a, b]$ oraz przybliżenia początkowego $x_0 \in [a, b]$, dla którego ciąg przybliżeń otrzymany za pomocą metody Newtona jest zbieżny liniowo do pierwiastka funkcji f.

M3.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Podać przykład funkcji $f \in C[a, b]$ dla której metoda regula-falsi jest zbieżna liniowo.

M3.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Które z ciągów: $\frac{1}{n^2}, \frac{1}{2^{2^n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{e^n}, \frac{1}{n^n}$ są zbieżne kwadratowo? Odpowiedź uzasadnij.

M3.5. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Załóżmy, że $f'(x) > 0$ i $f''(x) > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$. Ponadto, niech α będzie pierwiastkiem równania $f(x) = 0$. Wykazać, że jest to jedyny pierwiastek, a metoda Newtona daje ciąg do niego zbieżny dla dowolnego przybliżenia początkowego x_0.

M3.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Znaleźć warunki dotyczące r, które gwarantują, że wzór iteracyjny

$$x_{n+1} = x_n - rf(x_n)$$

daje ciąg zbieżny liniowo do zera funkcji f, jeśli punkt początkowy leży blisko tego zera.

M3.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Rozważmy metodę iteracyjną określoną przez funkcję iteracji $F(x) = x + f(x)g(x)$, gdzie $f(\alpha) = 0$ oraz $f'(\alpha) \neq 0$. Jakie warunki powinna spełniać funkcja g, aby dla dostatecznie bliskich wartości początkowych, metoda była zbieżna sześciennie do α?

M3.8. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Udowodnij, że metoda iteracyjna:

$$x_{n+1} = \frac{x_n\,(x_n^2 + 3R)}{3x_n^2 + R}$$

jest zbieżna sześciennie do $\sqrt{R}$.

M3.9. $\boxed{\text{1,5 punktu}}$ Uzasadnić poprawność (matematyczną, a nie numeryczną) następującego schematu Hornera zastosowanego do obliczenia wartości $p(z)$ i $p'(z)$ dla danego wielomianu $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$.

— Niech $\alpha := a_n$ oraz $\beta := 0$.
— Kolejno dla $k = n-1, n-2, \ldots, 0$ wykonaj
  — $\beta := \alpha + z\beta$
  — $\alpha := a_k + z\alpha$
— Wynik to $p(z) = \alpha$, $p'(z) = \beta$.

17 października 2019

Rafał Nowak