Analiza numeryczna

Algebra liniowa

Rafał Nowak

Macierzą nazywamy prostokątną tablicę $m \times n$ liczb rzeczywistych, ustawionych w m wierszach i n kolumnach:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Sumą macierzy $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ i $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ jest macierz $C = [c_{ij}]$ tego samego rozmiaru:

$$C = A + B, \qquad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Iloczyn macierzy $A = [a_{ij}]$ przez liczbę α jest macierz

$$B = \alpha A, \qquad b_{ij} = \alpha a_{ij}.$$

Iloczyn macierzy A i B jest określony tylko wtedy, gdy liczba kolumn macierzy A jest równa liczbie wierszy macierzy B. Iloczyn $C = AB$ macierzy $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ i $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times p}$ jest macierzą

$$C = [c_{ij}], \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Mnożenie macierzy jest łączne i rozdzielne względem dodawania:

$$A(BC) = (AB)C, \qquad A(B + C) = AB + AC,$$

jednak nie jest przemienne.

Wektory $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^n$ są **liniowo niezależne**, jeśli żaden z nich nie jest liniową kombinacją pozostałych, tj. jeśli

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{\theta} \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Wektory $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^n$ są **liniowo niezależne**, jeśli żaden z nich nie jest liniową kombinacją pozostałych, tj. jeśli

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{\theta} \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Rząd macierzy A jest liczbą jej liniowo niezależnych kolumn (wierszy). Macierz kwadratowa $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest **nieosobliwa** wtedy i tylko wtedy, gdy jej rząd jest równy n. Wówczas istnieje **macierz odwrotna** oznaczana symbolem A^{-1}, o własności

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I.$$

Jeśli A i B są nieosobliwe, a iloczyn AB jest określony, to

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},$$

tj. macierz odwrotna do iloczynu macierzy jest równa iloczynowi odwrotności czynników w odwrotnym porządku. Macierz jest nieosobliwa wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A \neq 0$.

Definicja

Normą wektorową nazywamy nieujemną funkcję rzeczywistą $\|\cdot\|$, określoną w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, o następujących własnościach:

$$\bigwedge_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\theta\}} \{\|\boldsymbol{x}\| > 0\}\,;$$

$$\bigwedge_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} \bigwedge_{\alpha\in\mathbf{R}} \{\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|\}\,;$$

$$\bigwedge_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n} \{\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|\}\,.$$

Definicja

Normą wektorową nazywamy nieujemną funkcję rzeczywistą $\|\cdot\|$, określoną w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, o następujących własnościach:

$$\bigwedge_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\theta\}} \{\|\boldsymbol{x}\| > 0\}\,;$$

$$\bigwedge_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} \bigwedge_{\alpha\in\mathbf{R}} \{\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|\}\,;$$

$$\bigwedge_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n} \{\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leqslant \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|\}\,.$$

Najczęściej używane są trzy normy wektorów, zwane *normami Hoeldera*, definiowane następująco ($\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$):

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 := |x_1| + \ldots, |x_n|,$$
$$\|\boldsymbol{x}\|_2 := (x_1^2 + \ldots, x_n^2)^{1/2},$$
$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty := \max_{1\le k\le n} |x_k|.$$

Definicja

Normą macierzy nazywamy nieujemną funkcję rzeczywistą $\|\cdot\|$, określoną w przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^{n\times n}$ wszystkich macierzy kwadratowych stopnia n, o następujących własnościach:

$$\bigwedge_{A\in\mathbb{R}^{n\times n}\setminus\{\Theta\}} \{\|A\| > 0\};$$

$$\bigwedge_{A\in\mathbb{R}^{n\times n}} \bigwedge_{\alpha\in\mathbf{R}} \{\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|\};$$

$$\bigwedge_{A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}} \{\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|\};$$

$$\bigwedge_{A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}} \{\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|\}.$$

Przyjęcie jakiejś normy wektora pozwala na wprowadzenie odpowiedniej normy macierzy, zdefiniowanej równością

$$\|A\| := \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\theta\}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}.$$

Mówimy, że ta norma macierzy jest indukowana przez normę wektora. Można sprawdzić, że

$$\|A\|_1 = \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|,$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

$$\|A\|_2 = \left(\text{największa wartość własna macierzy} A^T A\right)^{1/2},$$

gdzie A^T oznacza macierz transponowaną do A. Normę $\|\cdot\|_2$ nazywamy niekiedy normą spektralną. Zauważmy, że $\|I\| = 1$ dla dowolnej normy macierzy, indukowanych przez normy wektorów. Symbol I oznacza macierz jednostkową, $I = \mathrm{diag}\,(1, \ldots, 1)$.

Definicja

Będziemy mówili, że normy macierzy i wektora są *zgodne*, jeśli

$$\bigwedge_{A \in \mathbb{R}^{n \times n}} \bigwedge_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} \{\|A\boldsymbol{x}\| \leqslant \|A\|\|\boldsymbol{x}\|\}\,.$$

Definicja (Macierz trójkątna dolna)

Macierz $L = [l_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nazywamy *trójkątną dolną*, jeśli $l_{ij} = 0$ dla $i < j$:

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & & & & & \\ l_{21} & l_{22} & & & & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & & & \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{n,n-1} & l_{nn} \end{bmatrix}.$$

Zbiór wszystkich macierzy trójkątnych dolnych stopnia n oznaczamy symbolem $\mathbb{L}_n$. Podzbiór zbioru $\mathbb{L}_n$, zawierający macierze o elementach $l_{ii} = 1$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, oznaczamy symbolem $\mathbb{L}_n^{(1)}$.

Definicja (Macierz trójkątna górna)

Macierz $U = [u_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nazywamy *trójkątną górną*, jeśli $u_{ij} = 0$ dla $i > j$:

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ & & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ & & & \dots\dots\dots & \\ & & & & u_{nn} \end{bmatrix}.$$

Zbiór wszystkich macierzy trójkątnych górnych stopnia n oznaczamy symbolem $\mathbb{U}_n$.

$$U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \qquad \mathbb{U}_n \ni U = [u_{ij}];$$

$$\sum_{j=i}^{n} u_{ij} x_j = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left\{ b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j \right\} \qquad (i = n, n-1, \ldots, 2, 1).$$

$$U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \qquad \mathbb{U}_n \ni U = [u_{ij}];$$

$$\sum_{j=i}^{n} u_{ij} x_j = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left\{ b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j \right\} \qquad (i = n, n-1, \ldots, 2, 1).$$

$$L\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \qquad \mathbb{L}_n \ni L = [l_{ij}];$$

$$\sum_{j=1}^{i} l_{ij} x_j = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

$$x_i = \frac{1}{l_{ii}} \left\{ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_j \right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Rozkłady trójkątne

Twierdzenie (Rozkład trójkątny macierzy)

Niech macierz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *będzie taka, że*

$$\det A_k \neq 0 \qquad (k = 1, 2, \dots, n),$$

gdzie

$$A_k := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix} \qquad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Wówczas istnieje dokładnie jedna para macierzy $L \in \mathbb{L}_n^{(1)}$, $U \in \mathbb{U}_n$, *spełniających równość* $LU = A$. *Ponadto,* $\det A = u_{11}u_{22}\cdots u_{nn}$.

Faktoryzacja LU

Dla $i = 1, 2, \ldots, n$ obliczamy

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \qquad (j = i, i+1, \ldots, n),$$

$$l_{ji} = \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki} \right) / u_{ii} \qquad (j = i+1, i+2, \ldots, n).$$

Jeśli znany jest rozkład macierzy układu równań

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

na czynniki trójkątne:

$$A = LU,$$

to zadanie sprowadza się do rozwiązania kolejno dwóch układów o macierzy trójkątnej:

$$\begin{cases} L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}, \\ U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \end{cases}$$

Eliminacja Gaussa

Rozważmy układ równań

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad (A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n). \tag{2}$$

Eliminacja Gaussa

Rozważmy układ równań

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad (A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n). \tag{2}$$

Niech

$$A^{(1)} = [a_{ij}^{(1)}] := A, \quad \boldsymbol{b}^{(1)} = [b_1^{(1)}, \ldots, b_n^{(1)}]^T := \boldsymbol{b}.$$

Eliminacja Gaussa

Rozważmy układ równań

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad (A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n). \tag{2}$$

Niech

$$A^{(1)} = [a_{ij}^{(1)}] := A, \quad \boldsymbol{b}^{(1)} = [b_1^{(1)}, \ldots, b_n^{(1)}]^T := \boldsymbol{b}.$$

Układ (2) przekształcamy w sposób równoważny do układu

$$\sum_{j=k}^{n} a_{kj}^{(k)} x_j = b_k^{(k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

gdzie $a_k^{(k)} \neq 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ oraz

$$\begin{cases} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} + m_{i,k-1} a_{k-1,j}^{(k-1)}, \\ b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} + m_{i,k-1} b_{k-1}^{(k-1)}, \\ m_{i,k-1} = -\dfrac{a_{i,k-1}^{(k-1)}}{a_{k-1,k-1}^{(k-1)}} \end{cases} \qquad \begin{aligned} &(k = 2, 3, \ldots, n; \\ &\quad i, j = k, k+1, \ldots, n). \end{aligned}$$

Współczynniki $a_{kk}^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ nazywamy elementami głównymi.

Współczynniki $a_{kk}^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ nazywamy elementami głównymi. Z układu (3) łatwo otrzymać rozwiązanie wg wzorów

$$x_k = \left(b_k^{(k)} - \sum_{i=k+1}^{n} a_{kj}^{(k)} x_j \right) \Big/ a_{kk}^{(k)} \qquad (k = n, n-1, \ldots, 2, 1) \tag{4}$$

Zdefiniujmy stałą g_n, zwaną **współczynnikiem wzrostu**, wzorem

$$g_n := \max_{1 \leqslant i,j,r \leqslant n} |a_{ij}^{(r)}| / \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}|.$$

Dla eliminacji z częściowym wyborem elem. gł. zachodzi nierówność

$$g_n \leqslant 2^{n-1}.$$

Zdefiniujmy stałą g_n, zwaną **współczynnikiem wzrostu**, wzorem

$$g_n := \max_{1 \leqslant i,j,r \leqslant n} |a_{ij}^{(r)}| / \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}|.$$

Dla eliminacji z częściowym wyborem elem. gł. zachodzi nierówność

$$g_n \leqslant 2^{n-1}.$$

Najlepsze ze znanych oszacowań dla pełnego wyboru elem. gł.,

$$g_n \leqslant \varphi(n),$$

gdzie $\varphi(n) := n^{1/2}\left(2^1 3^{1/2} 4^{1/3} \dots n^{1/(n-1)}\right)^{1/2} < 1.8 n^{1/2 + \log n/4}$, wydaje się natomiast poważnie zawyżone. Np. $\varphi(10) = 19$, $\varphi(50) = 530$, $\varphi(100) = 3570$,

Twierdzenie

Niech $\tilde{\boldsymbol{x}}$ oznacza rozwiązanie układu $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, obliczone w t-cyfrowej arytmetyce fl za pomocą metody eliminacji z wyborem (częściowym lub pełnym) elementów głównych. Wówczas istnieje macierz $\delta A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, spełniająca nierówność

$$\|\delta A\|_\infty \leqslant C n^3 g_n 2^{-t} \|A\|_\infty \qquad (C - \mathrm{const}) \tag{5}$$

i taka, że

$$(A + \delta A)\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}.$$

Wniosek

Metoda eliminacji z wyborem elem. gł. jest algorytmem numerycznie poprawnym (o ile współczynnik g_n nie jest zbyt duży).

Twierdzenie

Niech $\boldsymbol{x}$ będzie rozwiązaniem układu równań liniowych

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{6}$$

i niech wektor $\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x}$ spełnia zaburzony układ

$$(A + \delta A)(\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} + \delta\boldsymbol{b}, \tag{7}$$

gdzie $\delta A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ i $\delta\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ są zaburzeniami macierzy A i wektora b. Załóżmy, że $\eta = \|\delta A\|\|A^{-1}\| = \mathrm{cond}\,(A)\|\delta A\|/\|A\| < 1$ i $\|I\| = 1$. Wówczas dla dowolnej pary norm zgodnych zachodzi nierowność

$$\frac{\|\delta\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leqslant \frac{\mathrm{cond}\,(A)}{1-\eta}\left(\frac{\|\delta\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right), \tag{8}$$

gdzie

$$\mathrm{cond}\,(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|.$$

$$\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \ldots \in \mathbb{R}^n.$$

Niech będzie $\boldsymbol{x}^{(k)} = [x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}]^T$.

Definicja

Ciąg wektorów $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ jest zbieżny do wektora $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$, gdy $k \to \infty$ (tj. $\boldsymbol{x}^{(k)} \to \boldsymbol{x}$ $(k \to \infty)$ lub $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^{(k)} = \boldsymbol{x}$) wtedy i tylko wtedy gdy dla $i = 1, 2, \ldots, n$ jest

$$x_i^{(k)} \to x_i \qquad (k \to \infty).$$

Analogicznie, jeśli

$$\{A^{(k)}\} = A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots$$

jest ciągiem macierzy klasy $\mathbb{R}^{n\times n}$, $A^{(k)} = [a_{ij}^{(k)}]$, to

Definicja

Ciąg macierzy $\{A^{(k)}\}$ jest zbieżny do macierzy $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (tj. $A^{(k)} \to A$ $(k \to \infty)$ lub $\lim_{k\to\infty} A^{(k)} = A$) wtedy i tylko wtedy gdy dla $i, j = 1, 2, \ldots, n$ jest

$$a_{ij}^{(k)} \to a_{ij} \qquad (k \to \infty).$$

Lemat

1. $\boldsymbol{x}^{(k)} \to \boldsymbol{\theta} \quad (k \to \infty) \iff \|\boldsymbol{x}^{(k)}\| \to 0 \quad (k \to \infty)$ *dla każdej normy wektorowej.*
2. $\boldsymbol{x}^{(k)} \to \boldsymbol{x} \quad (k \to \infty) \iff \|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}\| \to 0 \quad (k \to \infty)$ *dla każdej normy wektorowej.*
3. $A^{(k)} \to \Theta \quad (k \to \infty) \iff \|A^{(k)}\| \to 0 \quad (k \to \infty)$ *dla każdej normy macierzowej.*
4. $A^{(k)} \to A \quad (k \to \infty) \iff \|A^{(k)} - A\| \to 0 \quad (k \to \infty)$ *dla każdej normy macierzowej.*
5. *Jeśli* $\|A\| < 1$ *dla co najmniej jednej normy, to* $A^k \to \Theta \quad (k \to \infty)$.

Metoda Richardsona

Metodę iteracyjną Richardsona definiuje wzór

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = B_\tau \boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{c} \qquad (k \geqslant 0).$$

gdzie

$$B_\tau := I - \tau A, \qquad c := \tau \boldsymbol{b}. \tag{9}$$

Równoważnie, dla $k = 0, 1, \ldots$ obliczamy

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \tau \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right). \tag{10}$$

Metoda Jacobiego

W metodzie Jacobiego mamy następującą macierz przekształcenia:

$$B \equiv B_J := -D^{-1}(L+U). \tag{11}$$

Wersję skalarną metody opisują wzory

$$\begin{aligned} x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \\ &= x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right). \end{aligned} \tag{12}$$

Twierdzenie

Jeśli A jest macierzą ze ściśle dominującą przekątną, tj.

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

to $||B_J||_\infty < 1$ i metoda Jacobiego jest zbieżna.

Metoda Gaussa-Seidela

W metodzie (Gaussa-)Seidela mamy następującą macierz przekształcenia:

$$B \equiv B_S := -(D+L)^{-1}U. \tag{13}$$

Wersję skalarną metody opisują wzory

$$\begin{aligned} x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \\ &= x_i^{(k)} + \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Metoda relaksacji

W metodzie relaksacji mamy następującą macierz przekształcenia:

$$B_\omega := (I - \omega M)^{-1} (\omega N + (1 - \omega) I) \tag{15}$$

gdzie

$$M := -D^{-1} L, \qquad N := -D^{-1} U.$$

Wersję skalarą metody relaksacji można zapisać w następujący sposób:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \tag{16}$$

Metoda relaksacji

W metodzie relaksacji mamy następującą macierz przekształcenia:

$$B_\omega := (I - \omega M)^{-1} (\omega N + (1-\omega) I) \tag{15}$$

gdzie

$$M := -D^{-1} L, \qquad N := -D^{-1} U.$$

Wersję skalarą metody relaksacji można zapisać w następujący sposób:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \tag{16}$$

Twierdzenie (Kahan)

Dla dowolnej nieosobliwej macierzy A i dowolnej liczby ω zachodzi nierówność

$$\varrho(B_\omega) \geqslant |\omega - 1|. \tag{17}$$

Metoda relaksacji

W metodzie relaksacji mamy następującą macierz przekształcenia:

$$B_\omega := (I - \omega M)^{-1} (\omega N + (1 - \omega) I) \tag{15}$$

gdzie

$$M := -D^{-1} L, \qquad N := -D^{-1} U.$$

Wersję skalarą metody relaksacji można zapisać w następujący sposób:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \tag{16}$$

Twierdzenie (Ostrowski, 1954)

Jeśli macierz A jest symetryczna i dodatnio określona, to metoda relaksacji jest zbieżna dla każdego $\omega \in (0, 2)$.

Twierdzenie

Niech A będzie macierzą symetryczną, dodatnio określoną i niech ma postać blokowo-trójprzekątniową:

$$A = \begin{bmatrix} D_1 & U_1 & & & & \\ L_2 & D_2 & U_2 & & & \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ & & & L_{m-1} & D_{m-1} & U_{m-1} \\ & & & & L_m & D_m \end{bmatrix},$$

gdzie D_i są kwadratowymi macierzami przekątniowymi. Wtedy $\varrho(B_S) = \varrho^2(B_J)$ i optymalny czynnik relaksacji wyraża się wzorem

$$\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \varrho(B_S)}}.$$

Optymalną wartością $\varrho(B_\omega)$ jest

$$\varrho(B_{\omega_{\text{opt}}}) = \omega_{\text{opt}} - 1.$$

Twierdzenie

Jeśli $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *oraz* $A = A^T$, *to istnieje macierz ortogonalna* $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *że*

$$U^T A U = \Lambda = \operatorname{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right) \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

przy czym $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *są wartościami własnymi macierzy* A.

Twierdzenie

Jeśli $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *oraz* $A = A^T$*, to istnieje macierz ortogonalna* $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, że*

$$U^T A U = \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

przy czym $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *są wartościami własnymi macierzy* A*.*

Twierdzenie (Schur)

Jeli $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, to istnieje macierz unitarna* $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$*, że*

$$U^H A U = R \in \mathbb{C}^{n\times n},$$

gdzie $R \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *jest macierzą górną trójkątną. Jeśli wszystkie wartości własne macierzy* A *są rzeczywiste, to* $U, R \in \mathbb{R}^{n\times n}$*.*

Twierdzenie (o rozkładzie SVD)

Dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *istnieją takie macierze ortogonalne* $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ *i* $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$*, że*

$$U^T A V = \Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\ell) \in \mathbb{R}^{m \times n}, \tag{17}$$

gdzie $\ell = \min(m, n)$*. Ponadto, jeśli* $\operatorname{rank}(A) = r$*, to*

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_r > 0, \qquad \sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \ldots = \sigma_\ell = 0.$$

Algorytm 1 Ortogonalizacja Grama-Schmidta

Require: $A = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n] \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\operatorname{rank}(A) = n$

Ensure: $A = QR$, $Q = [\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \ldots, \boldsymbol{q}_n] \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $Q^TQ = I_n$, $R = [r_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $r_{ij} = 0 \quad (i > j)$

for $k = 1, 2, \ldots, n$ **do** ▷ Obliczamy kolejne wektory $\boldsymbol{q}_k$
    for $i = 1, 2, \ldots, k-1$ **do**
        $r_{ik} \leftarrow \boldsymbol{q}_i^T \boldsymbol{a}_k$
    end for
    $\boldsymbol{p}_k \leftarrow \boldsymbol{a}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \boldsymbol{q}_i r_{ik}$ ▷ Można sprawdzić, że $\langle \boldsymbol{p}_k, \boldsymbol{q}_j\rangle = 0$ dla $j = 1, 2, \ldots, k-1$
    $r_{kk} \leftarrow \|\boldsymbol{p}_k\|$
    $\boldsymbol{q}_k \leftarrow \boldsymbol{p}_k / r_{kk}$ ▷ W ten sposób mamy $\|\boldsymbol{q}_k\| = 1$
end for

Algorytm 2 Zmodyfikowany algorytm ortogonalizacji Grama-Schmidta

Require: $A = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathrm{rank}(A) = n$
Ensure: $A = QR$, $Q = [\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \ldots, \boldsymbol{q}_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $Q^T Q = I_n$,
$R = [r_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $r_{ij} = 0 \quad (i > j)$

for $k = 1, 2, \ldots, n$ **do** ▷ Obliczamy kolejne wektory $\boldsymbol{q}_k$
  $\boldsymbol{q}_k \leftarrow \boldsymbol{a}_k$
  for $i = 1, 2, \ldots, k-1$ **do**
    $r_{ik} \leftarrow \boldsymbol{q}_i^T \boldsymbol{q}_k$
    $\boldsymbol{q}_k \leftarrow \boldsymbol{q}_k - \boldsymbol{q}_i r_{ik}$
  end for
  $r_{kk} \leftarrow \|\boldsymbol{q}_k\|$
  $\boldsymbol{q}_k \leftarrow \boldsymbol{q}_k / r_{kk}$ ▷ W ten sposób mamy $\|\boldsymbol{q}_k\| = 1$
end for