| TOPOLOGIA | EGZAMIN - TERMIN WRZEŚNIOWY | 02.09.2020, 180 MIN |
|---|---|---|

Można się powołać na każde twierdzenie sformułowane na wykładzie lub ćwiczeniach.

(1) (20pkt) Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ i $T \subseteq [0,1]$ będą zbiorami zwartymi na prostej euklidesowej. Pokazać, że zbiór

$$C = \{ta + (1-t)b \colon a, b \in A, t \in T\}$$

jest zwarty.

(2) (20pkt) Niech $(C[0,1], d_{\sup})$ będzie przestrzenią funkcji ciągłych z $[0,1]$ w $\mathbb{R}$ z metryką supremum:

$$d_{\sup}(f,g) = \sup\{|f(t) - g(t)| \colon t \in [0,1]\}.$$

(a) (5pkt) Sprawdzić, że $d_{\sup}$ jest metryką na $C[0,1]$.

(b) (7pkt) Czy zbiór $A = \{f \in C[0,1] \colon f \text{ jest ściśle rosnąca}\}$ jest otwarty? Uzasadnij swoją odpowiedź.

(c) (8pkt) Czy zbiór $B = \{g \in C[0,1] \colon g \text{ przyjmuje wartość } 0\}$ jest domknięty? Uzasadnij swoją odpowiedź.

(3) (20pkt) Przypomnijmy, że funkcja $f \colon X \to \mathbb{R}$ jest *półciągła z dołu* jeśli $\{x \colon f(x) > r\}$ jest otwarty dla każdego $r \in \mathbb{R}$.

Niech $f \colon X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną na przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$. Wykazać, że zbiór

$$E(f) = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R} \colon f(x) \leq t\}$$

jest domknięty w iloczynie kartezjańskim $(X, \mathcal{T})$ i prostej euklidesowej wtedy i tylko wtedy gdy $f$ jest półciągła z dołu.

(4) (20pkt) Pokazać, że następująca podprzestrzeń płaszczyzny euklidesowej jest spójna.

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left( \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [0,1] \right) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left( [-1,0] \times \left\{ \frac{1}{n} \right\} \right) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left( \left\{ \frac{-1}{n} \right\} \times [-1,0] \right) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left( [0,1] \times \left\{ \frac{-1}{n} \right\} \right)$$

(5) (20pkt) Niech $K$ będzie niepustym zwartym podzbiorem prostej euklidesowej takim, że dla każdego przedziału otwartego $(a,b)$, $(a,b) \setminus K \neq \emptyset$ i przecięcie $(a,b) \cap K$ jest albo puste, albo nieskończone. Pokazać, że

(a) (3pkt) $K$ nie ma punktów izolowanych, tzn. dla dowolnego $a \in K$, $\{a\}$ nie jest otwarty w $K$;

(b) (7pkt) $K$ jest przestrzenią zerowymiarową, tzn. istnieje baza topologii $K$ składająca się ze zbiorów, które są jednocześnie otwarte i domknięte w $K$.

(c) (10pkt) Pokazać, że $K$ jest homeomorficzny ze zbiorem Cantora.