Pracownia z ANALIZY NUMERYCZNEJ

Lista nr 2

Początek zapisów: **18 listopada 2019 r.**

Termin realizacji: **31 grudnia 2019 r.**

Termin na poprawki (100%, podgrupa A): **19 stycznia 2020 r.**

Termin na poprawki (100%, podgrupa B): **26 stycznia 2020 r.**

Termin na poprawki (80%, podgrupa A): **26 stycznia 2020 r.**

Termin na poprawki (80%, podgrupa B): **2 lutego 2020 r.**

Punktacja (podana przy każdym zadaniu): ***8–12 punktów***

Każde z zadań może być wybrane najwyżej przez trzy osoby (trzy zespoły dwuosobowe — w wypadku zadań P2.12, P2.19, P2.25) spośród wszystkich zapisanych na pracownię.

P2.1. 10 punktów Zrealizować efektywny algorytm obliczania wartości sumy

$$s_n(x) = \sum_{i=0}^{n}{}' c_k T_k(x),$$

gdzie T_k jest k-tym wielomianem Czebyszewa. Zaburzyć wartości współczynników według wzoru $\tilde{c_k} := c_k(1+\epsilon_k)$, wybierając losowo liczby ϵ_k z małego przedziału $[-\delta,\, \delta]$. Porównać wartości wielomianu $s_n(x)$ dla dokładnych i dla zaburzonych współczynników. Wykonać obliczenia **między innymi** dla wielomianów I_n i J_n z zadania **P2.8.**.

P2.2. 10 punktów Wyznaczyć taki wielomian w możliwie najniższego stopnia, który spełnia nierówność

$$\sum_{k=0}^{r} \left[w(x_k) - f_k\right]^2 < \delta,$$

gdzie $x_0, x_1, \ldots, x_r$ są danymi punktami, $f_0, \ldots, f_r$ – danymi wartościami funkcji f w tych punktach, a δ – daną liczbą dodatnią. Wykonać obliczenia kontrolne **między innymi** dla następujących danych:

x_k	-1.00	-0.75	-0.50	-0.25	0	0.25	0.50	0.75	1.00
f_k	-0.2209	0.3295	0.8826	1.4392	2.0003	2.5645	3.1334	3.7061	4.2836

P2.3. 10 punktów Liniowe zadanie najmniejszych kwadratów, tzn. minimalizacji

$$||\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}||,$$

gdzie $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, przy czym $||\cdot||$ jest normą euklidesową, można sprowadzić do rozwiązywania układu równań liniowych z macierzą kwadratową układu (układ równań normalnych). Inna metoda polega na postawieniu dwóch układów równań liniowych,

$$\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{A}^T\mathbf{r} = \mathbf{0},$$

gdzie $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^m$, zapisaniu ich w postaci macierzowej jednego układu typu

$$\mathbf{B}\begin{bmatrix}\mathbf{r}\\ \mathbf{x}\end{bmatrix} = \mathbf{c},$$

gdzie $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times(n+m)}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n+m}$, i rozwiązaniu takiego układu. Jaki jest koszt tej metody w porównaniu z metodą układu równań normalnych? Porównaj obie metody na podstawie wybranych testów. W jakich szczególnych wypadkach warto stosować przedstawioną w treści metodę?

P2.4. 8 punktów Skonstruować ***naturalną funkcję sklejaną III stopnia*** s, interpolującą daną funkcję f w $n+1$ równoodległych punktach przedziału $[a,\, b]$. Obliczyć błąd

$$\hat{E}_N^{(n)} := \max_{x \in D_N} |f(x) - s(x)|,$$

gdzie D_N jest zbiorem N równoodległych punktów przedziału $[a,\, b]$. Wykonać obliczenia dla kilku par wartości n i N oraz dla funkcji (a) $f(x) = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$; (b) $f(x) = e^x$, $0 \leqslant x \leqslant 4$; (c) $f(x) = (x^2+1)^{-1}$, $x \in [-5,\, 5]$; (d) $f(x) = x/(x^2 + \frac{1}{4})$, $x \in [-\pi,\, \pi]$.

P2.5. 10 punktów Dla danej liczby naturalnej n, danych węzłów $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$ i danej funkcji f istnieje dokładnie jedna funkcja $\tilde{s} \in C^2[a, b]$, zwana ***okresową funkcją sklejaną interpolacyjną III stopnia***, spełniająca następujące warunki:

1^o w każdym z podprzedziałów $[x_{k-1},\, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ funkcja $\tilde{s}$ jest identyczna z pewnym wielomianem stopnia co najwyżej trzeciego;

2^o $\tilde{s}(x_k) = f(x_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n;\ f(x_n) = f(x_0))$;

3^o $\tilde{s}^{(i)}(a+0) = \tilde{s}^{(i)}(b-0) \qquad (i = 0, 1, 2)$.

Skonstruować funkcję sklejaną $\tilde{s}$ dla kilku wartości n, równoodległych węzłów oraz m. in. dla funkcji $f(x) = \sin x$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$. W każdym wypadku obliczyć błąd

$$\mathcal{E}_N^{(n)} := \max_{x \in D_N} |f(x) - \tilde{s}(x)|,$$

gdzie D_N jest zbiorem N równoodległych punktów przedziału $[a,\, b]$.

P2.6. 10 punktów Wartości funkcji f znane są jedynie w punktach $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Zaproponuj, jak wykorzystać naturalną funkcję sklejaną trzeciego stopnia do znalezienia przybliżonych wartości wszystkich rozwiązań równania $f(x) = c$ $(c \in \mathbb{R})$ leżących w przedziale (x_0, x_n). Wykonując odpowiednie testy numeryczne, zbadaj czy pomysł ten sprawdza się w praktyce.

P2.7. 10 punktów Zrealizować algorytm, który dla danej funkcji f ciągłej w przedziale $[a,\, b]$, liczby naturalnej n oraz układu $n+2$ punktów $D_n := \{x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}\} \subset [a,\, b]$ wyznacza n-ty wielomian optymalny w_n^* w sensie aproksymacji jednostajnej dla funkcji f na zbiorze D_n. Wykonać obliczenia dla wybranych funkcji f i wartości n w wypadku, gdy

(i) $x_k = a + k\,\dfrac{b-a}{n+1}$; ***(ii)*** $x_k = \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{b-a}{2}\cos\dfrac{k\pi}{n+1} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n+1)$.

Naszkicować wykres funkcji $e_n := f - w_n^*$ w przedziale $[a,\, b]$.

P2.8. 10 punktów Wielomian $I_n \in \Pi_n$ interpolujący funkcję f w węzłach

$$t_{n+1,k} = \cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

można zapisać w postaci

$$I_n(x) = \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^{n}{}' \left(\sum_{j=0}^{n} f(t_{n+1,j}) T_i(t_{n+1,j}) \right) T_i(x),$$

a wielomian J_n o własności $J_n(u_{n-1,k}) = f(u_{n-1,k})$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, gdzie $u_{n-1,k} = \cos(k\pi/n)$, $(k = 0, 1, \ldots, n)$, można zapisać wzorem

$$J_n(x) = \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n}{}'' \left(\sum_{k=0}^{n}{}'' f(u_{n-1,k}) T_k(u_{n-1,j}) \right) T_j(x).$$

Wielomian $K_n \in \Pi_n$ podany wzorem

$$K_n(x) = \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^{n}{}' \left(\sum_{k=0}^{n+1}{}'' f(u_{nk}) T_k(u_{nj}) \right) T_j(x)$$

jest n-tym wielomianem optymalnym w sensie aproksymacji jednostajnej dla funkcji f na zbiorze

$$\{u_{n0}, u_{n1}, \ldots, u_{n,n+1}\},$$

gdzie $u_{nk} = \cos(k\pi/(n+1))$ $(k = 0, 1, \ldots, n+1)$. Dla wybranych funkcji f i wartości n obliczyć (w przybliżeniu) błędy aproksymacji jednostajnej funkcji f za pomocą I_n, J_n i K_n, w przedziale $[-1, 1]$.
Uwaga. Symbol $\sum'$ oznacza sumę, której pierwszy składnik należy podzielić przez 2, a $\sum''$ – sumę, której pierwszy i ostatni składnik należy podzielić przez 2.

P2.9. $\boxed{\text{8 punktów}}$ Wykorzystaj aproksymację średniokwadratową, aby dopasować funkcję postaci $y = ab^x$ do danych

x	1	2	$\cdots$	m
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_m

Opracowaną metodę przetestuj na wybranych przykładach.
Wskazówka: w zadaniu może się przydać procedura aproksymacji średniokwadratowej funkcją liniową.

P2.10. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Niech p będzie wielomianem niewysokiego stopnia, np. równego 4. Obliczyć wartości tego wielomianu w 100 wybranych losowo punktach przedziału $[-1, 1]$. Zaburzyć te wartości dodając liczby losowe z małego przedziału, np. $[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$. Dla zaburzonych danych konstruować wielomiany optymalne w sensie aproksymacji średniokwadratowej, stopnia pierwszego, drugiego itd. Zinterpretować wyniki.

P2.11. $\boxed{\text{12 punktów}}$ Niech $b_0, b_1, \ldots, b_n$ będzie bazą przestrzeni P_n z iloczynem skalarnym $\langle\cdot,\cdot\rangle : P_n \times P_n \longrightarrow \mathbb{R}$. Funkcje $d_0^{(n)}, d_1^{(n)}, \ldots, d_n^{(n)}$ stanowią bazę dualną przestrzeni P_n względem iloczynu skalarnego $\langle\cdot,\cdot\rangle$, jeżeli spełniają następujące warunki:

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} \operatorname{span}\left\{d_0^{(n)}, d_1^{(n)}, \ldots, d_n^{(n)}\right\} = P_n, \\ \left\langle b_i, d_j^{(n)} \right\rangle = \delta_{ij} \qquad (0 \leqslant i, j \leqslant n), \end{cases}$$

gdzie δ_{ij} wynosi 1, jeżeli $i = j$ oraz 0 w przeciwnym wypadku. Dla danej bazy $b_0, b_1, \ldots, b_n$, należy opracować algorytm wyznaczania bazy dualnej $d_0^{(n)}, d_1^{(n)}, \ldots, d_n^{(n)}$, spełniającej warunki (1). Następnie, pokaż w jaki sposób wykorzystać własności baz dualnych do znalezienia elementu optymalnego p^* przestrzeni P_n, dla funkcji f, w sensie normy średniokwadratowej,

$$||f - p^*|| = \min_{p \in P_n} ||f - p||,$$

gdzie $||\cdot|| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$. W sprawozdaniu należy podać przykłady zastosowania opracowanej metody.

Literatura:

[1] P. Woźny, Construction of dual bases, Journal of Computational and Applied Mathematics 245 (2013), 75–85.

[2] P. Woźny, Construction of dual B-spline functions, Journal of Computational and Applied Mathematics 260 (2014), 301–311.

P2.12. $\boxed{\text{Zadanie dla dwuosobowego zespołu. 10 punktów}}$ Zrealizować i porównać na przykładach dwie poznane metody konstrukcji wielomianów ortogonalnych $P_0, P_1, \ldots, P_r$ na danym zbiorze $\{x_0, x_1, \ldots, x_r\}$ z wagą p:

a) metodę Grama-Schmidta ortogonalizacji układu $1, x, \ldots, x^r$;

b) sposób korzystający ze związku rekurencyjnego, spełnianego przez $P_0, P_1, \ldots, P_r$.

Wykonać obliczenia i zinterpretować wyniki **między innymi** dla zbioru punktów $\{u_0, u_1, \ldots, u_r\}$, gdzie $u_k := \cos\frac{k\pi}{r}$ $(k = 0, 1, \ldots, r)$, oraz takiej wagi p, że

$$p(u_k) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (k = 0, r), \\ 1 & (1 < k < r). \end{cases}$$

P2.13. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Dla danego n i danych węzłów $x_0, x_1, \ldots, x_n$ wyznaczyć współczynniki kwadratury interpolacyjnej

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

stosując wzór

$$A_k = \frac{1}{\omega'(x_k)} \int_{-1}^{1} \frac{\omega(x)}{x - x_k}\,\mathrm{d}x, \qquad \omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n).$$

Rozważyć (a) węzły równoodległe, (b) węzły będące zerami $(n+1)$-go wielomianu Czebyszewa, (c) punkty ekstremalne n-tego wielomianu Czebyszewa. Wykonać obliczenia kontrolne **między innymi** dla funkcji podcałkowych:

$$f_1(x) = \frac{1}{x^4+x^2+0.9}, \quad f_2(x) = \frac{4}{\pi(1+x^2)}, \quad f_3(x) = \frac{2\pi^2(1+x)}{(1-x)(3+x)}\sin\pi(1+x).$$

P2.14. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Obliczyć przybliżoną wartość całki $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ przy założeniu, że znane są tylko wartości f w zadanych z góry punktach $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. Wykonać obliczenia kontrolne, m. in., dla następujących funkcji podcałkowych:

$$f_1(x) = \frac{1}{x^4+x^2+0.9}, \quad f_2(x) = \frac{4}{\pi(1+x^2)}, \quad f_3(x) = \frac{2\pi^2(1+x)}{(1-x)(3+x)}\sin\pi(1+x).$$

P2.15. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Węzły równoodległe używane w kwadraturach Newtona-Cotesa bywają użyteczne dla wielomianów niskich stopni, ale mogą się okazać złym wyborem, gdy stopień jest wysoki. Należy rozważyć kwadratury dla całek postaci

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$$

z węzłami interpolacyjnymi będącymi:

a) zerami wielomianu Czebyszewa pierwszego rodzaju $T_n(x)$ w przedziale $(-1, 1)$,

$$x_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n);$$

b) zerami wielomianu Czebyszewa drugiego rodzaju $U_{n-1}(x)$, które są punktami ekstremalnymi $T_n(x)$ w przedziale $(-1, 1)$,

$$x_k = \cos\frac{k\pi}{n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1); \tag{2}$$

c) wartościami danymi wzorem (2) wraz z $x_0 = 1$ i $x_n = -1$.

Podaj jawne wzory na wagi kwadratur w każdym z wymienionych wypadków. Przetestuj uzyskane kwadratury dla kilku wybranych funkcji f.

Literatura:

[1] G. Dahlquist, Å. Björck, *Numerical Methods in Scientific Computing*, Volume 1, SIAM, 2008.

P2.16. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Zadanie polega na realizacji metody Romberga obliczania całki $I := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Dla danych a, b, f i $\varepsilon > 0$ należy skonstruować K początkowych wierszy tablicy Romberga $\{T_{mk}\}$, gdzie K jest najmniejszą liczbą naturalną, dla której zachodzi nierówność

$$|T_{K0} - T_{K-1,0}| < \varepsilon|T_{K0}|.$$

Zapewnić możliwość drukowania pełnej tablicy błędów $\{|I - T_{mk}|/|I|\}$. Wykonać obliczenia kontrolne **między innymi** dla następujących całek:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^4+x^2+0.9}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^1 \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^1 \frac{2}{2+\sin(10\pi x)}\,\mathrm{d}x.$$

P2.17. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Wyprowadź wzory na współczynniki kawadratury Newtona-Cotesa

a) z dwoma węzłami (*wzór trapezów*),

b) z trzema węzłami (*wzór Simpsona*),

c) z czterema węzłami itd.

Następnie wykorzystaj otrzymane wzory do skonstruowania odpowiednich kwadratur złożonych. Przeprowadź eksperymenty numeryczne m.in. dla całek typu

$$\int_a^b P(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_a^b \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_a^b R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x,$$

gdzie P i Q są wielomianami, a R – funkcją wymierną dwu zmiennych. Wyciągnij wnioski.

P2.18. $\boxed{\text{12 punktów}}$ Wykorzystując poznane metody numerycznego obliczania całek oznaczonych, zaproponuj i zrealizuj algorytmy wyznaczania przybliżonej wartości całki podwójnej

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

Przeprowadź eksperymenty numeryczne m.in. dla całki

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2+1} = 0.639510351870311001962693085427323679\ldots$$

Literatura:

[1] J. i M. Jankowscy, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych, cz. 1*, WNT, 1988, str. 164–166.

[2] A. Ralston, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, 1971, str. 139–140.

P2.19. $\boxed{\text{Zadanie dla dwuosobowego zespołu. 12 punktów}}$ Rozważyć następujące sugestie co do sposobu obliczenia całek

$$I_c := \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \approx 1.809045218947 \qquad I_s := \int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \approx 0.620549071924.$$

a) Użyć złożonego wzoru trapezów z $n+1$ równoodległymi węzłami, „ignorując" osobliwość w $x=0$ (tj. przyjmując arbitralnie zerową wartość funcji podcałkowej dla $x=0$). Wykonać obliczenia dla $n = 100(100)1000$.

b) Wybrać małe $h>0$, użyć złożonego wzoru trapezów z n równoodległymi węzłami do obliczenia całki $\int_h^1$ oraz (odpowiednio przekształconego) wzoru

$$\int_0^1 t^{-1/2} g(t)\,\mathrm{d}t \approx \frac{4}{3}\,g(0) + \frac{2}{3}\,g(1)$$

do obliczenia całki $\int_0^h$. Wykonać obliczenia dla $n = 100(100)1000$.

c) Zamienić zmienną całkowania według wzoru $x=t^2$, a następnie użyć złożonego wzoru trapezów z $n+1$ równoodległymi węzłami. Wykonać obliczenia dla $n = 20(20)200$.

d) Użyć kwadratury Gaussa-Legendre'a do obliczenia całek otrzymanych w punkcie c). Wykonać obliczenia dla $n = 1, 2, 3, 4$.

Skomentować otrzymane wyniki.

P2.20. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Jak wiadomo, rzędem macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ nazywamy maksymalą liczbę jej liniowo niezależnych kolumn. Wykorzystując wiadomości podane na wykładzie z algebry liniowej, opracuj efektywny sposób wyznaczania rzędu macierzy. Następnie, wykonując odpowiednie testy numeryczne, sprawdź pod względem dokładności, skuteczności i stabilności zaproponowaną metodę.

P2.21. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Stosując metodę eliminacji z wyborem częściowym elementów głównych obliczyć wyznacznik macierzy A. Zauważyć, że dla uniknięcia nadmiaru lub niedomiaru warto informację o $\det A$ podać w postaci:

$$\sigma, \quad \log|\det A|,$$

gdzie $\sigma := \operatorname{sgn}\, \det A$. Wykonać obliczenia kontrolne m.in. dla macierzy Pei i Hilberta oraz omówić wyniki, przyjmując różne wartości parametrów n i d (w tym – $d \approx 1$).

P2.22. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Zaproponować algorytm rozwiązania układu równań postaci

$$\begin{bmatrix} d_1 & c_1 & & & & \\ a_1 & d_2 & c_2 & & & \\ & a_2 & d_3 & c_3 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & a_{n-2} & d_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & a_{n-1} & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Czy uprości sprawę (jak?) założenie, że stałe a_i, c_i, d_i spełniają nierówności

$$|a_{i-1}| - |d_i| + |c_i| < 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ a_0 := c_n := 0)?$$

Wykonać obliczenia kontrolne i omówić wyniki, podając wartość $\|\boldsymbol{b} - A\tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty$, gdzie $\tilde{\boldsymbol{x}}$ jest obliczonym rozwiązaniem.

P2.23. 10 punktów Dla danej macierzy kwadratowej $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ wartość własna λ i odpowiadający jej wektor własny $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ spełniają równanie $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. Zastosować tzw. *metodę Jacobiego* diagonalizacji rzeczywistej macierzy symetrycznej $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ do znajdowania wszystkich jej wartości (wektorów) własnych. Zobacz np. [1, §10.4.1, s. 497]. Wykonać odpowiednie doświadczenia numeryczne z analizą złożoności, zbieżności i stabilności opracowanej metody.

Literatura

[1] A. Ralston, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, 1965.

P2.24. 12 punktów Załóżmy, że znany jest rozkład *LU* macierzy nieosobliwej $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. W wielu zadaniach praktycznych należy wyznaczyć rozkład *LU* macierzy A^* danej wzorem $A^* := A + \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^t$, gdzie $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ są danymi wektorami. Patrz np. [1, §6.3]. Zaproponuj szybki algorytm znajdowania rozkładu *LU* macierzy A^*. Wykonaj odpwiednie testy numeryczne sprawdzające jego stabilność i skuteczność.

Literatura:

[1] A. Kiełbasiński, H. Schwetlick, *Numeryczna algebra liniowa*, WNT, 1992.

P2.25. Zadanie dla dwuosobowego zespołu. 12 punktów Porównać na wybranych przykładach cztery warianty metody eliminacji rozwiązywania układów równań liniowych – pod względem dokładności wyników:

a) bez wyboru elementów głównych,

b) z pełnym wyborem elementów głównych,

c) z wyborem elementów głównych w kolumnach,

d) z wyborem elementów głównych w wierszach.

Wykonać obliczenia kontrolne i omówić wyniki, podając dla każdego z wariantów wartość $\|\boldsymbol{b} - A\tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty$, gdzie $\tilde{\boldsymbol{x}}$ jest obliczonym rozwiązaniem.