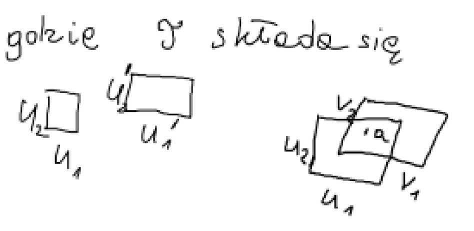
Iloczyny skończone przestrzeni topologicznych

Mamy $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$

Rozważamy $(X_1 \times \dots \times X_n, \mathcal{T})$, gdzie $\mathcal{T}$ składa się z sum zbiorów postaci

$U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$, gdzie $U_i \in \mathcal{T}_i$.



Zauważmy, że zbiory postaci $U_1 \times \dots \times U_n$ tworzą bazę topologii

- $X_1 \times \dots \times X_n$ jest sumą zbiorów postaci $U_1 \times \dots \times U_n$
- $\underbrace{(U_1 \times \dots \times U_n) \cap (V_1 \times \dots \times V_n)}_{P} \ni a = (a_1, \dots, a_n)$

  to istnieje $a \in W_1 \times \dots \times W_n \subseteq P = (U_1 \cap V_1) \times \dots \times (U_n \cap V_n)$

Zatem $\mathcal{T}$ jest topologią.

Twierdzenie Mamy $(X_i, \mathcal{T}_i)$ jak przedtem.

Teraz dodatkowo d_i jest metryką na X_i t. że $\mathcal{T}_i = \mathcal{T}(d_i)$.

Wówczas topologia $\mathcal{T}$ na $X_1 \times \dots \times X_n$ jest generowana przez metrykę

$$d(a, b) = \max_i d_i(a_i, b_i),$$

gdzie $a = (a_1, \dots, a_n)$ $b = (b_1, \dots, b_n)$

Dowód Musimy pokazać $\mathcal{T}(d) \subseteq \mathcal{T}$

oraz $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}(d)$.

- Kule w przestrzeni metrycznej $(X_1 \times \dots \times X_n, d)$ są postaci $B(a, r) = B_1(a_1, r) \times \dots \times B_n(a_n, r)$

  $(a = (a_1, \dots, a_n))$

  To daje $\mathcal{T}(d) \subseteq \mathcal{T}$

- $a \in V_1 \times \dots \times V_n$ Chcemy r t. że $a \in B(a, r) \subseteq V_1 \times \dots \times V_n$

Bez straty dla ogólności $V_i = B(a_i, r_i)$

Weźmy $r = \min_{i \le n} r_i$ ☒

Przykład: $\mathbb{R}^n$

Topologia produktowa (iloczynu kartezjańskiego)

= Topologia generowana przez

$$d_\infty(a, b) = \max_i |a_i - b_i|$$

= Topologia generowana przez metrykę euklidesową

$$d_e(a, b) = \sqrt{(a_i - b_i)^2}$$

= Topologia generowana przez

$$d_1(a, b) = \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|$$

(Ogólniej $|a_i - b_i|$ można zastąpić $d_i(a_i, b_i)$.)

Uwaga 1.4.4 i 1.4.5

- Metryka jest funkcją ciągłą $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\ge 0}$
- $p_i : X_1 \times \dots \times X_n \to X_i$ rzutowanie

  $p_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$

  jest funkcją ciągłą

  $p_i^{-1}(U) = X_1 \times \dots \times X_{i-1} \times U \times X_{i+1} \times \dots \times X_n$

Iloczyny przeliczalne przestrzeni topologicznych (i metrycznych)

Definicja $(X_i, \mathcal{T}_i)$, $i = 1, 2, \dots$ przestrzenie topologiczne

Rodzina $V_1 \times \dots \times V_n \times X_{n+1} \times X_{n+2} \times \dots$

gdzie $V_i \in \mathcal{T}_i$, $n \in \mathbb{N}$

jest bazą topologii, którą nazwiemy $\mathcal{T}$

na przestrzeni $X_1 \times X_2 \times X_3 \times \dots = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$

Twierdzenie: Załóżmy

$\mathcal{T}_i = \mathcal{T}(d_i)$.

Topologia $\mathcal{T}$ jest generowana przez metrykę

$$d(a, b) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\min(d_i(a_i, b_i), 1)}{2^i}$$

$\left(\lim_{n \to \infty} d(a_n, a) = 0 \iff \forall_i \lim_{n \to \infty} d_i((a_n)_i, a_i) = 0\right)$

Dowód Chcemy $\mathcal{T}(d) \subseteq \mathcal{T}$ i $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}(d)$.

- $B(a, r) \in \mathcal{T}(d)$ Znajdziemy $B \in \mathcal{T}$ t. że $a \in B \subseteq B(a, r)$

  Rozważmy $a \in B = B_1(a_1, \frac{r}{2}) \times \dots \times B_n(a_n, \frac{r}{2}) \times X_{n+1} \times \dots$

  Bierzemy n t. że $2^{-n} < \frac{r}{2}$

  Wówczas $B \subseteq B(a, r) = \{b : \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(a_i, b_i)}{2^i} < r\}$

  Weźmy $b \in B$

  $d_i(a_i, b_i) < \frac{r}{2}$, $i = 1, \dots, n$

  Wówczas $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(a_i, b_i)}{2^i} < r$

  dla uproszczenia: $d_i(x, y) \le 1$ $\forall_i \forall_{x, y \in X_i}$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(a_i, b_i)}{2^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i(a_i, b_i)}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{d_i(a_i, b_i)}{2^i}$$

$$\le \underbrace{\frac{r}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right)}_{r/2} + \underbrace{\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i}}_{< r/2} < r$$

pamiętamy, że $\frac{1}{2^n} < \frac{r}{2}$

- Chcemy $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}(d)$

  $a \in V_1 \times \dots \times V_m \times X_{m+1} \times \dots$

  $V_i = B_i(a_i, r_i)$

  Weźmy $r = \min\{\frac{r_i}{2^i} : i = 1, \dots, m\}$

  Wówczas $a \in B(a, r) \subseteq V_1 \times \dots \times V_n \times X_{n+1} \times \dots$

$\boxed{\text{Ośrodkowość}}$

Def: • Zbiór A w przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ jest gęsty jeśli $\overline{A} = X$.

Przykład: $\mathbb{Q}$ jest gęsty w $(\mathbb{R}, d_e)$

- Przestrzeń topologiczna jest ośrodkowa jeśli zawiera przeliczalny zbiór gęsty.

Stwierdzenie Jeżeli $(X, \mathcal{T})$ ma przeliczalną bazę $\mathcal{B}$, to wówczas $(X, \mathcal{T})$ jest ośrodkowe.

D-d Wybieramy po jednym punkcie z każdego elementu bazy

Stwierdzenie Mamy przestrzeń metryczną (X, d). Jeżeli (X, d) jest ośrodkowe, to ma bazę przeliczalną.

Dowód A - przeliczalny gęsty weźmy $\underset{\text{baza}}{\mathcal{B}} = \{B(a, \frac{1}{n}) : a \in A, n \in \mathbb{N}_+\}$