Ćwiczenia z topologii

Aleksandra Kwiatkowska

20.03.2020

Zadanie 1/11

Nie. Kontrprzykład: metryka dyskretna na X (gdzie $|X| > 1$). Weźmy dowolny $x \in X$ i kulę $B(x, 1) = \{x\}$. W metryce dyskretnej każdy zbiór jest domknięty, więc $B(x, 1) = \overline{B(x, 1)}$. Z drugiej strony $\{y : d(x, y) \leqslant 1\} = X$, a z warunku na moc zbioru X mamy $X \neq \{x\}$.

Zadanie 1/8

a)

triv

b)

Tw. $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$
$U \subseteq V \implies \overline{U} \subseteq \overline{V}$

- $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$

c)

$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

Nie mamy inkluzji w drugą stronę: $A = [0, 1/2) B = (1/2, 1]$

W (a)-(c) wygodnie jest skorzystać z definicji domknięcia zbioru, natomiast w (d)-(e) przydaje się zadanie 10.

d)

Cel: $X \setminus \overline{A} = \mathrm{Int}(X \setminus A)$.

$X \setminus \overline{A} = X \cap \overline{A}^C$ otwarty, bo X i $\overline{A}^C$ otwarte. $X \setminus \overline{A} \subseteq X \setminus A$, a $\mathrm{Int}(X \setminus A)$ to maksymalny zbiór otwarty zawarty w $X \setminus A$, więc $X \setminus \overline{A} \subseteq \mathrm{Int}(X \setminus A)$.

Mamy $A \subseteq X \setminus \mathrm{Int}(X \setminus A)$, dalej $\overline{A} \subseteq X \setminus \mathrm{Int}(X \setminus A)$, bo zbiór po prawej domknięty. Stąd $\mathrm{Int}(A \setminus X) \subseteq X \setminus \overline{A}$.

Alternatywne rozwiązanie, korzystające z zad. 10: $x \in \mathrm{Int}(X \setminus A)$ iff istnieje otoczenie U takie, że $x \in U \subseteq X \setminus A$ iff istnieje otoczenie U takie, że $x \in U$ i $U \cap A = \emptyset$ iff $x \notin \overline{A}$.

e)

Z d) mamy $X \setminus \overline{A} = \mathrm{Int}(X \setminus A)$. Stąd $X \setminus (\overline{X \setminus A}) = \mathrm{Int}(X \setminus (X \setminus A)) = \mathrm{Int} A$. Zatem $\overline{X \setminus A} = X \setminus (X \setminus (\overline{X \setminus A})) = X \setminus \mathrm{Int} A$.

Alternatywne rozwiązanie, korzystające z zad. 10: $x \in X \setminus \mathrm{Int} A$ iff dla każdego otoczenia $x \in U$, $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ iff $x \in \overline{X \setminus A}$.

Zadanie 1/12

$$\text{Dla każdego } \delta,\ B(x,\delta) \cap A \neq \emptyset\ (L)$$
$$\text{Dla każdego } \delta,\ B(x,\delta) \setminus A \neq \emptyset\ (P)$$

a)

Cel: $Int(A) = A \setminus Bd(A)$.

Weźmy $x \in Int(A)$, wtedy istnieje otoczenie x zawarte w A, więc x nie spełnia P. Stąd $x \notin Bd(A)$, więc $Int(A) \subseteq A \setminus Bd(A)$

Weźmy $x \in A \setminus Bd(A)$. Wtedy x spełnia L (bo $x \in A$), więc nie spełnia P, więc istnieje otoczenie x zawarte w $A \setminus Bd(A)$, więc $A \setminus Bd(A)$ otwarty, stąd $A \setminus Bd(A) \subseteq Int(A)$

b)

Cel: $\overline{A} = A \cup Bd(A)$.

Weźmy $x \in A \cup Bd(A)$, wtedy x spełnia L.
Weźmy x spełniający L. Wtedy gdy x spełnia P to należy do $Bd(A)$, zaś gdy x nie spełnia P, to istnieje kula o środku w x zawarta w A, więc $x \in A$, stąd jeśli x spełnia L to $x \in A \cup Bd(A)$.
Z zad. 1/10 o $\overline{A}$, x spełnia L wtedy i tylko wtedy gdy $x \in \overline{A}$. Zatem: $\overline{A} = A \cup Bd(A)$.

Zadanie 1/9

Wskazówka: $\{y\colon \rho(x,y) = r\} = B(x,r) \cup \{y\colon \rho(x,y) > r\}$. Należy pokazać, że $\{y\colon \rho(x,y) > r\}$ jest zbiorem otwartym (dowód tego będzie podobny do dowodu z wykładu tego, że przekrój dwóch kul jest zbiorem otwartym).

Zadanie 2/1

$B(a, \frac{1}{i})$ to ciągi, które różnią się od a po raz pierwszy dla indeksu $> i$.

a)

$d(a,b) = 0 \iff a = b$ oraz $d(a,b) = d(b,a)$ trywialne. Załóżmy, że a, b oraz b, c się różnią po raz pierwszy na indeksach i oraz j odpowiednio. Wtedy $a_k = c_k$ dla $k < \min(i,j)$. Zatem $d(a,c) \leqslant \frac{1}{\min(i,j)} = \max(\frac{1}{i}, \frac{1}{j}) < \frac{1}{i} + \frac{1}{j}$.

b)

Weźmy $a, b \in \mathbf{N^+}^{\mathbf{N}^+}$ oraz $\frac{1}{i} \geqslant \frac{1}{j} > 0$. Wtedy

$$\begin{aligned}
B(a, \tfrac{1}{i}) \cap B(b, \tfrac{1}{j}) &= \{c \mid d(c,a) < \tfrac{1}{i} \wedge d(c,b) < \tfrac{1}{j}\} && (1)\\
&= \{c \mid (k \leqslant i \implies c_k = a_k) \wedge (k \leqslant j \implies c_k = b_k)\} && (2)\\
&\subseteq \{c \mid k \leqslant i \implies a_k = b_k = c_k\} && (3)\\
&\subseteq \begin{cases} \emptyset & \exists_{k \leqslant i} a_k \neq b_k \\ B(a, \frac{1}{i}) & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases} && (4)
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
A &= \{(n_1, n_2, ...) \mid n_i = 1 \text{ dla co najmniej trzech indeksów } i\} \\
&= \bigcup_{a \in A} B(a, \tfrac{1}{i_a}),\ \text{gdzie } i_a \text{ to indeks trzeciego wystąpienia 1 w } a
\end{aligned}$$

Zatem A jest otwarty.

$$B = \{(n_1, n_2, ...) \mid n_i = 1 \text{ dla nieskończenie wielu } i\}$$

Weźmy $b \in B, n \in \mathbf{N}^+$. Wtedy do $B(b, \frac{1}{n})$ należą ciągi, które nie mają jedynek po indeksie i, więc B nie jest otwarty.

Np. $b = (0, 1, 0, 1, 0, 1, ...)$. Weźmy dowolnie duży $n \in N^+$, wtedy ciąg b_n równy b dla indeksów $\leqslant n$ i $b_n = 0$ dla indeksów $> n$ jest w $B(b, \frac{1}{n})$, ale nie jest w B.

d)

$$\begin{aligned}(a, b) &= \{x \mid a < x < b\} \\ &= \bigcup_{x \in (a,b)} B(x, \min(d(x, a), d(x, b)))\end{aligned}$$

Niech $c = (2, 1, 1, 1, ...)$. Wtedy $B(c, \frac{1}{2})$ to zbiór ciągów, które się zaczynają od $(2, 1, ...)$. Ciągi mniejsze od c zaczynają się od $(1, ...)$.

Przykładowo, gdy $a = (1, 9, 9, 9, ..) < c = (2, 1, 1, ...) < b = (2, 2, 2, 2, ...)$, to wtedy ciąg $a < (1, 10, 101, ...) < b$ nie zawiera się w kuli.