Zagadnienie brzegowe dla równania struny – metoda Fouriera

◇ str. 17 – 18

Dla struny zamocowanej na końcach przedziału, tu pomiędzy $[0,\pi]$, zagadnienie początkowo-brzegowe wygląda następująco

$$(*) \quad \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x), \; u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

Wzór D'Alemberta daje ogólną postać rozwiązania, ale byłoby trudno tak dobrać φ i ψ aby spełniony był warunek zamocowania $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$.

Spróbujmy poszukać najpierw rozwiązań specjalnych $(*)$ z rozdzielonymi zmiennymi

$u(x,t) = W(x)T(t)$,

a potem skorzystamy z liniowości równania struny i rozważymy kombinacje liniowe (skończone lub nieskończone – szeregi) takich specjalnych rozwiązań.

$\dot{} = \frac{d}{dt}$, $' = \frac{\partial}{\partial x}$

$W\ddot{T} = TW''$ zatem $\frac{\ddot{T}}{T} = \frac{W''}{W} = \text{const} = K$

bo $\frac{\ddot{T}}{T}$ jest funkcją t, a $\frac{W''}{W}$ - funkcją niezależnej od t zmiennej x.

$\frac{W''}{W} = \text{const}$ - znamy to równanie, uzupełnione warunkiem $W(0) = W(\pi) = 0$, z zagadnień brzegowych dla równań liniowych zwyczajnych.

Ogólnie byłoby $w(x) = \alpha \sin kx + \beta \cos kx$

z $k \in \mathbb{N}$ (aby były spełniony warunek brzegowy),

bo gdy $\lambda > 0$ to rozwiązania są wykładnicze

i nie mają szansy aby spełniać warunek brzegowy

chyba że $w \equiv 0$. Tu mamy $\lambda = -k^2$.

Zatem: $w(x) = w_k(x) = \alpha \sin kx$

i wtedy dla $\lambda = -k^2$ bez trudu widzimy, że

$T = T_k(t) = a \sin kt + b \cos kt$

Hipotetycznie mamy zatem rozwiązanie

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin kx \left(a_k \sin kt + b_k \cos kt\right)$$

(stałą α włączyliśmy w stałe a_k, b_k).

Dla $t=0$

$$u(x,0) = f(x) \overset{?}{=} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx .$$

Formalnie $u_t(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin kx \,(k a_k \cos kt -$

$- k b_k \sin kt)$, więc dla $t = 0$

$$u_t(x,0) = g(x) \overset{?}{=} \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \sin kx$$

i wyznaczenie współczynników a_k, b_k wymaga

znajomości rozwinięcia f i g w szereg

Fouriera sinusów. Ponieważ

$\int_0^{\pi} (\sin kx)^2 dx = \int_0^{\pi} (\cos kx)^2 dx = \frac{\pi}{2}$ (suma

tych całek jest równa $\int_0^{\pi} 1\, dx = \pi$), to

$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin kx \, dx$. Oczywiście

$\int_0^\pi \sin kx \cdot \sin lx \, dx = 0$ dla $k \neq l$, $k, l \in \mathbb{N}$.

Podobnie

$a_k = \frac{1}{k} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi g(x) \sin kx \, dx$

Na tym kończy się analiza metody rozdzielania zmiennych. Pozostaje synteza rozwiązania, czyli sprawdzenie kiedy $u(x,t)$ ma sens (szereg musi być zbieżny), kiedy $u \in C^2$ i czy wtedy $u_{tt} = u_{xx}$. Jeżeli założymy (tak na wyrost), że $f \in C^4$, $g \in C^3$, to z teorii szeregów Fouriera dostaniemy $b_k = O\left(\frac{1}{k^4}\right)$,

$a_k = O\left(\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k^3}\right) = O\left(\frac{1}{k^4}\right)$. Po dwukrotnym zróżniczkowaniu $k^2 a_k,\ k^2 b_k = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$

i otrzymane szeregi Fouriera będą bezwzględnie i jednostajnie zbieżne – z majorantą

$C \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$. A po zróżniczkowaniu

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = \sum_{k=1}^\infty (-k^2)(a_k \sin kt + b_k \cos kt)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) \qquad \text{bo} \quad (\sin kt)'' = -k^2 \sin kt,$$
$$(\cos kt)'' = -k^2 \cos kt.$$

Mamy zatem klasyczne (C^2) rozwiązanie.

Zwróćmy uwagę na zad. 12.3 ◇, str. 28.

Jeżeli f, g nie są dostatecznie regularne, to u nie musi być C^2 – więc nie jest r. klas.

Oryginalnie metoda rozdzielania zmiennych była zaproponowana przez J. Fouriera dla rozwiązania równania ciepła na odcinku.
To znaczy, badał on zagadnienie

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

(jeden warunek początkowy, bo równanie jest pierwszego rzędu względem t).
Znowu szukamy u w postaci $u(x,t) = w(x)T(t)$
i wtedy $w''T = w\dot{T}$ czyli $\frac{w''}{w} = \frac{\dot{T}}{T} = \text{const}$.
Podobnie jak poprzednio $w(x) = \alpha \sin kx$
ale tym razem $T(t) = a e^{-k^2 t}$. Otrzymamy szereg $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-k^2 t} \sin kx$
rozwiązań uzyskanych dla $k \in \mathbb{N}$ jest tym razem znacznie lepiej zbieżny, bo $e^{-k^2 t} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, i to bardzo szybko. Aby rozwiązanie miało sens dla $x \in [0,\pi]$ i wszystkich $t \geqslant 0$ wystarczy aby szereg Fouriera początkowej funkcji f był zbieżny bezwzględnie.
A na to aby $u(x,t)$ miało sens dla $t > 0$ nawet nie trzeba aby szereg f miał sens; wystarczy, że a_k są ograniczone.
Ale wtedy mamy kłopot z nadaniem sensu

warunkowo postawione. [illegible],

aby $u(x,t) \xrightarrow[t \searrow 0]{} f(x)$ – przynajmniej

w jakimś sensie.....

Metoda rozdzielania zmiennych dopuszcza różne modyfikacje. Np. warunek brzegowy $u_x(0,t) = u_x(\pi, t) = 0$ prowadzi do szeregu wyglądem $\cos kx$. Jeszcze ogólniejsze warunki typu $u_x + cu = 0$ (przepływ ciepła przez brzeg proporcjonalny do różnicy temperatur) prowadzą do innych, znanych nam, rozwiązań zagadnienia brzegowego dla r. r. zw. drugiego rzędu.

Teoria szeregów Fouriera powstała właśnie wtedy, gdy J.F. badał rozdzielanie zmiennych w r. przewodnictwa cieplnego.

Jeżeli próbujemy rozdzielać zmienne, gdy $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, to dla r. falowego i r. ciepła okazuje się, że dobrze byłoby umieć rozwiązać

$$\begin{cases} \Delta w + \lambda w = 0 & \text{w } \Omega \\ w(x) = 0 & \forall x \in \Omega \end{cases}$$

czyli zagadnienie na wartości własne dla Laplasjanu w Ω.

Informacje o tym są np. w ◇, str. 18-20.

[illegible]