Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 3: lista M 12

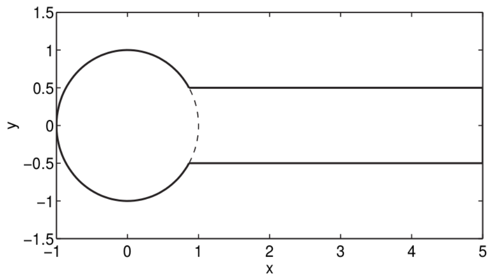
16 stycznia 2020 r.

M12.1. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Obliczyć całkę podwójną

$$I = \int\int_D \sin^2 y \sin^2 x (1 + x^2 + y^2)^{-1/2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \approx 0.13202,$$

gdzie

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\} \cup \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 3, |y| \leqslant 0.5\}.$$



Rysunek 1. Zbiór D.

Wskazówka. Zapisać całkę I w sposób iterowany, tj.

$$I = \int_{-1}^{3} \sin^2(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

gdzie $\varphi(x) = \int_{-c(x)}^{c(x)} \psi(x, y)\mathrm{d}y$. Obie całki można obliczać np. za pomocą metoy Romebrga.

M12.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wyprowadzić wzór na jednopunktową kwadraturę liniową, która jest dokładna dla wszystkich funkcji stałych i liniowych.

M12.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Znaleźć, o ile to możliwe, takie węzły x_0, x_1 i współczynniki A_0, A_1, żeby dla każdego wielomianu f stopnia $\leqslant 3$ zachodziła równość $\displaystyle\int_0^1 (1 + x^2) f(x)\, dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$.

M12.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Udowodnić, że spośród wszystkich wielomianów stopnia n-tego postaci

$$w_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_0,$$

najmniejszą wartość całki

$$\int_a^b p(x) w_n^2(x)\, dx$$

daje n-ty standardowy wielomian ortogonalny w sensie normy średniokwadratowej z funkcją wagową $p(x)$.

M12.5. $\boxed{\text{3 punkty}}$ Rozważyć lot kuli wystrzelonej z armaty. Niech $(x(t), y(t))$ oznacza położenie kuli w chwili t (ograniczamy się do płaszczyzny). Z kolei, niech $(u(t), v(t))$ oznacza wektor prędkości kuli w chwili t. Oczywiście mamy $x'(t) = u(t)$ oraz $y'(t) = v(t)$.

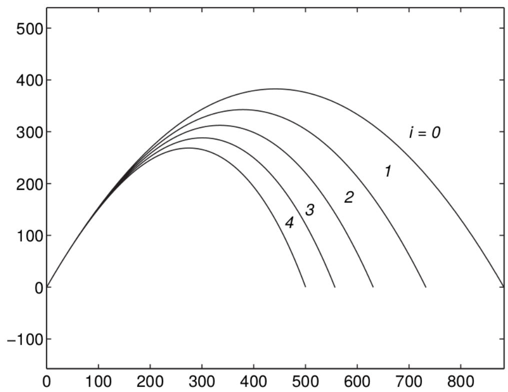
Rozważyć wystrzał z kątem $\phi = 60^\circ$ oraz przyjąć następujące warunki początkowe:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad u_0 = 100 \cos \phi, \quad v_0 = 100 \sin \phi.$$

Z zasad dynamiki Newtona (przyjmujemy spore uproszenia dotyczące środowiska układu, w którym wykonywane jest doświadczenie) otrzymujemy równania

$$u'(t) = -z(t)u(t), \qquad v'(t) = -g - z(t)v(t),$$

gdzie $z(t) = \kappa\sqrt{u^2(t) + v^2(t)}$ jest wielkością oporu powietrza, a stała $g \approx 9.81$ ozancza wielkość grawitacji.



Rysunek 2. Przykładowe trajektorie lotu kuli armatniej.

Rozważyć aproksymację rozwiązania powyższego zagadnienia początkowego w punktach $t_n = nh$, gdzie h jest wielkością kroku (np. 0.01).

— $\boxed{\text{1 pkt}}$ Wyprowadzić wzory dla $x_{n+1}, y_{n+1}, u_{n+1}, v_{n+1}$, jakie daje jawna metoda Eulera.

— $\boxed{\text{2 pkt}}$ Zaprogramować metodę Eulera i narysować kilka przykładowych trajektorii lotu kuli przy różnych wartościach parametru κ charakteryzującego wielkość oporu powietrza.

M12.6. $\boxed{\text{1 pkt, Włącz komputer}}$ Zaprogramować w języku Julia metodę RK2 lub RK4 w sposób wektorowy. Rozwiązać zagadnienie początkowe z poprzedniego zadania za pomocą tej metody.

M12.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Rozważyć problem

$$y'(t) = \lambda y(t) \quad (t > 0), \qquad y(0) = 1,$$

gdzie $\lambda < 0$. Wyprowadzić wzór na kolejne przybliżenia $y_n \approx y(t_n)$ ($t_n = hn$) uzyskiwane w jawnej i niejawnej metodzie Eulera. Sprawdzić czy $y_n \to 0$.

M12.8. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Rozważyć problem z zadania M12.7. Wyprowadzić wzór na kolejne przybliżenia y_n uzyskiwane w metodzie Cranka-Nicolsona, tj. metodzie trapezów:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1}).$$

M12.9. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Rozważyć problem z zadania M12.7. Wyprowadzić wzór na kolejne przybliżenia y_n uzyskiwane w metodzie Heuna, określonej następującym wzorem:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\left[f_n + f(t_{n+1}, u_n + hf_n)\right].$$

11 stycznia 2020

Rafał Nowak