# Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 3: lista M 13

23 stycznia 2020 r.

**M13.1.** $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$. Sprawdzić, że wzór

a) $\|\boldsymbol{x}\|_1 := \sum_{k=1}^{n} |x_k|$,

b) $\|\boldsymbol{x}\|_\infty := \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|$,

definiuje normę w przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

**M13.2.** $\boxed{\text{1.5 punkta}}$ Wykazać, że macierzowa *norma spektralna*, indukowana przez normę euklidesową wektorów $\|\cdot\|_2$, wyraża się wzorem

$$\|A\|_2 = \sqrt{\varrho(A^T A)},$$

gdzie *promień spektralny* $\varrho(A^T A)$ macierzy $A^T A$ jest z definicji jej największą wartością własną.

**M13.3.** $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że dla każdego $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ zachodzą nierówności

a) $\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_1 \leqslant n\|\boldsymbol{x}\|_\infty$;

b) $\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|\boldsymbol{x}\|_\infty$;

c) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{x}\|_1 \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_2 \leqslant \|\boldsymbol{x}\|_1$.

**M13.4.** $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że norma macierzowa indukowana przez normę wektorową $\|\cdot\|_\infty$ wyraża się wzorem

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

**M13.5.** $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że wzór

$$\|A\|_E := \sqrt{\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}^2}$$

definiuje submultiplikatywną normę w $\mathbb{R}^{n \times n}$, zwaną *normą euklidesową*, zgodną z normą wektorową $\|\cdot\|_2$.

**M13.6.** $\boxed{\text{1 punkt}}$ Załóżmy, że nieosobliwa macierz $A = [a_{ij}^{(1)}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest symetryczna, tj. $a_{ij}^{(1)} = a_{ji}^{(1)}$ dla $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Załóżmy ponadto, że do rozwiązania układu równań liniowych $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ można zastosować metodę eliminacji bez wyboru elementów głównych.

a) Wykazać, że wówczas wielkości $a_{ij}^{(k)}$, otrzymywane w tej metodzie kolejno dla $k = 2, 3, \ldots, n$, są takie, że $a_{ij}^{(k)} = a_{ji}^{(k)}$ dla $i, j = k, k+1, \ldots, n$.

b) Wskazać, jak można wykorzystać ten fakt dla zmniejszenia kosztu metody eliminacji.

**M13.7.** $\boxed{\text{1 punkt}}$

a) Wykazać, że jeśli $L$ jest macierzą trójkątną dolną z jedynkami na przekątnej głównej, to $L^{-1}$ również jest macierzą tego typu.

b) Opracować metodę wyznaczenia macierzy odwrotnej do macierzy trójkątnej dolnej $L$, z jedynkami na przekątnej głównej.

**M13.8.** $\boxed{\text{2 punkty. Włącz komputer.}}$ Zaprogramować efektywnie metodę eliminacji Gaussa w języku Julia. Należy zaprezentować funkcję `solve!(A,b)`, która dla danej macierzy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i wektora $b \in \mathbb{R}^n$ znajduje rozwiązanie układu równań $Ax = b$. *Wskazówka.* Aby uzyskać efektywną implementację, można rozważyć układ równań $A^T x = b$. Efektywna implementacja to taka, która działa co najwyżej 30-razy dłużej niż wbudowana metoda `\(A,b)`. Ponadto, dla zaoszczędzenia na obliczeniach, można pominąć wybór elementów głównych.

17 stycznia 2020

*Rafał Nowak*