Równania różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu

cząstkowe $\equiv$ z pochodnymi cząstkowymi; wiele zmiennych niezależnych (N)

(*) $\sum_{k=1}^{N} a_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0$ r. liniowe jednorodne

zadane współczynniki $(a_1, \dots, a_N) = a \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$

szukana funkcja $u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ klasy C^1;

pole wektorowe a jest niezdegenerowane: $a(x) \neq 0 \ \forall_{x \in \Omega}$

(*) można zinterpretować jako $(a, \nabla u) = 0$ (iloczyn skalarny), czyli pochodna kierunkowa u w kierunku pola a: $L_a u = 0$

Do rozwiązania (*) wprowadzamy pomocniczy układ równań różniczkowych zwyczajnych (na ogół: nieliniowy)

(**) $x' = a(x)$ układ równań charakterystyk dla (*)

(*) mówi, że $u = u(x)$ jest stała na trajektoriach (**), czyli stała na charakterystykach (inaczej mówiąc: u jest całką pierwszą układu (**))

Wyobrażamy sobie u jako powierzchnię utkaną z charakterystyk. Tw. o rozprostowaniu pola wektorowego $a \neq 0$ pozwala nam na lokalną interpretację (**)

i na określenie u z danych na powierzchni, która jest „przebijana" przez charakterystyki:

Typowe dla (*) jest zagadnienie początkowe (zag. Cauchy'ego): (*) z warunkiem $u/_{S_{N-1}} = \varphi$ zadanym na powierzchni (N-1) wymiarowej (czyli hiperpowierzchni) S_{N-1} transwersalnej do a (czyli przecinanej – niestycznie – przez trajektorie (**)) $S_{N-1} \pitchfork a$ (tak oznaczamy tę własność).

Twierdzenie Jeżeli $a \in C^1$, $S_{N-1} \in C^1$, $\varphi \in C^1$, a nie jest styczne do S_{N-1} w żadnym punkcie (tzn. $S_{N-1} \pitchfork a$), to zagadnienie Cauchy'ego dla (*) ma dokładnie jedno rozwiązanie lokalne w otoczeniu każdego punktu na S_{N-1}.

Dowód wynika z tw. o wyprostowaniu pola.

Przykłady i praktyczna metoda jak rozwiązać (*)

$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, układ charakterystyk $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

rozw. układu charakterystyk $x(t) = c_1 e^t$, $y(t) = c_2 e^t$

$x/y = \text{const}$ – całka pierwsza,

rozwiązanie $u(x,y) = \Phi\left(\frac{x}{y}\right)$, gdzie Φ dowolna funkcja klasy C^1.

Z parametrycznych równań charakterystyk wyrugowaliśmy parametr t widząc, że $x/y = \text{const}$ nie zależy od t, więc jest całką pierwszą.

y/x – też jest całką pierwszą.

Przykład

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}.$$

$x = c_1\cos t + c_2\sin t, \quad y = -c_1\sin t + c_2\cos t$

$x^2 + y^2 = \text{const}$ ↑ parametryzacja okręgów

$u(x,y) = \Phi(x^2+y^2)$

Przykład

$$(x+2y)\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad \begin{aligned} y(t) &= c_1 e^{-t} \\ x(t) &= c_2 e^{t} - c_1 e^{-t} \end{aligned}$$

$u = \phi(xy + y^2)$

Równanie liniowe niejednorodne

$$(***)\ \sum_{k=1}^{N} a_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k} = b(x) \qquad \text{czyli } L_a u = b$$

- zadana pochodna kierunkowa wzdłuż a

Twierdzenie

Rozwiązanie jest postaci $u(g(x,t)) = \varphi(x) + \int_0^t b(g(x,s))\,ds$,

gdzie $g(x,t)$ = wartość rozwiązania $(**)$ z $g(x,0)=x$ po czasie t

Uzasadnienie:

po rozprostowaniu pola $\frac{\partial u}{\partial x_1} = b$, $u|_{x_1=0} = \varphi(x')$,

$x = (x_1, x')$, $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$,

a zatem $u(x_1, x') = \varphi(x') + \int_0^{x_1} b(\xi, x')\,d\xi$.

Przykład

$$y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = x-y$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ u' \end{pmatrix} = \begin{matrix} y \\ x \\ x-y \end{matrix}$$ rozszerzony układ charakterystyk (o równanie $u' = b$)

$x = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$, $y = c_1 e^t - c_2 e^{-t}$, $u' = 2c_2 e^{-t}$

a zatem $u = -2c_2 e^{-t} + c_3$, $u = y - x + c_3$

$x^2 - y^2$, $x - y + u$ całki pierwsze

$\Phi(x^2-y^2, x-y+u) = 0$ zadaje w uwikłany sposób rozwiązanie u ($\Phi \in C^1$ dowolna funkcja).

Przykład

Zag. (***) z warunkiem podstawionym na powierzchni charakterystycznej.

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy \qquad S_1 = \{y = x\}, \ \underset{\text{na } S_1}{u = x^2} \ (=\varphi)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2xy \end{pmatrix}$$

$x = c_1 e^t$, $y = c_2 e^t$, $u' = 2c_1c_2 e^{2t}$

$u = c_1c_2 e^{2t} + c_3$

y/x, $u - xy$ całki pierwsze

ogólna postać u jest w relacji $\Phi(u-xy, y/x) = 0$

z $\Phi \in C^1$ (dowolna funkcja klasy C^1)

dla $y = x$ warunek $\Phi(x^2-x^2, x/x) = \Phi(0,1) = 0$

niewiele ogranicza funkcję Φ,

można np. rozważyć $\Phi(s,t) = s + f(t)$

z dowolną $f \in C^1$ taką, że $f(1) = 0$.

Wtedy $u(x,y) = xy + f(y/x)$ – wiele rozwiązań.

Równania różniczkowe cząstkowe pierwszego rzędu quasiliniowe

(≡ liniowe względem pochodnych najwyższego – tu: 1° – rzędu).

$N=2$ dla prostoty

$$a_1(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x} + a_2(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y} = b(x,y,u) \qquad (****)$$

Takie równania pojawiają się w mechanice ośrodków ciągłych.

Założenie $\quad a=(a_1,a_2,b)\neq(0,0,0)$

$\qquad a_1,a_2,b\in C^1$

szukamy $u\in C^1$

Interpretacja geometryczna:

rozważamy $\quad F = u(x,y) - u$

nazwa funkcji $\quad$ nazwa zmiennej

$u=u(x,y)$ szukana wartość rozwiązania

Równanie mówi, że

$$\nabla F = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, -1\right) \perp \{F=0\}$$

czyli $\quad (a,\nabla F)=0 \qquad$ iloczyn skalarny

Badamy zatem rozszerzony układ charakterystyk

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b \end{pmatrix}$$

szukamy $u=\phi(x,y)$ – powierzchni klasy C^1 utkanej z charakterystyk

Zagadnienie Cauchy'ego

Na krzywej S_1 zadaje się wartości u, podnosi się na wysokość $u=u(x,y)$ i przeprowadza przezeń charakterystyki.

Twierdzenie. Jeżeli krzywa S_0 nie jest styczna do pola wektorowego a, to zagadnienie Cauchy'ego (****) ma lokalnie dokładnie jedno rozwiązanie.

Przykład. Badamy ruch cząstek w ośrodku jednowymiarowym poruszających się bez oddziaływań (więc bez przyspieszenia). $u(x,t)$ prędkość cząstki, która w chwili t znajduje się w punkcie x (tzw. opis polowy; nie śledzimy trajektorii cząstki, tylko badamy pole prędkości).

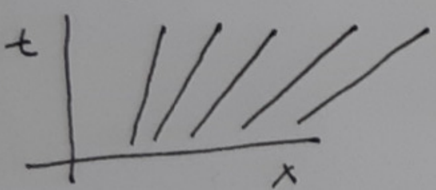
Opis indywidualnych cząstek

$x = \varphi(t)$, $\varphi' = u(\varphi(t), t)$ prędkość w $\varphi(t)$, w chwili t

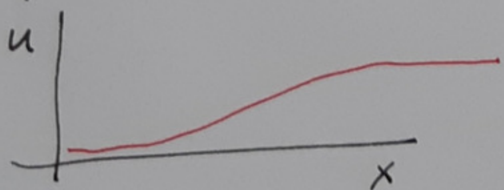
$$\varphi'' = \frac{\partial u}{\partial x}\varphi' + \frac{\partial u}{\partial t} = u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}$$ prawo Newtona

brak oddziaływań oznacza $\varphi'' = 0$. Zatem pole prędkości $u = u(x,t)$ spełnia równanie

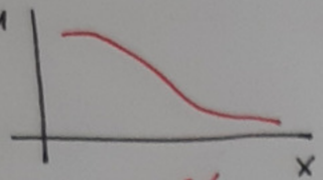
$u_t + u u_x = 0$. Układ charakterystyk ma postać $\begin{cases} x' = u \\ u' = 0 \\ t' = 1 \end{cases}$, czyli z punktu $(x,0)$ wychodzi prosta o nachyleniu u. Te charakterystyki mogą wyglądać tak



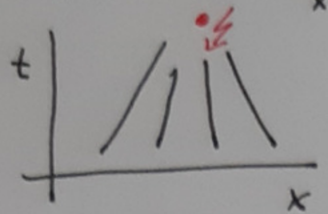
jeżeli dla $t=0$ mamy rosnący profil prędkości u;



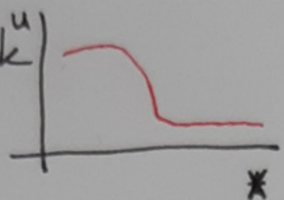
wtedy rozwiązanie będzie istniało globalnie w czasie dla $t \geq 0$. Ale jeżeli w chwili $t=0$



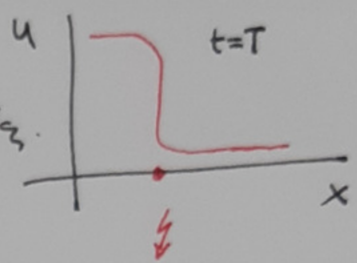
to charakterystyki zaczynają się przecinać dla pewnego $T>0$;



i nie możemy określić poprawnie rozwiązania w takim punkcie przecięcia się charakterystyk. Dla $t>0$ profil u wygląda tak



a gdy $t \nearrow T$ to u



przestaje być dobrze określoną funkcją. Rozwiązanie nie może istnieć globalnie w czasie. Cząstki szybsze doganiają wolniejsze i zaczynają ze sobą oddziaływać; model przestaje być adekwatny.

Zagadnienie odwrotne; równanie różniczkowe rodziny funkcji

Jeżeli $u = w(xy)$, to $xu_x - yu_y = 0$ jest r.r.cz. pierwszego rzędu charakteryzującym takie funkcje $(w \in C^1)$.

Podobnie $u = w(x/y) \Rightarrow xu_x + yu_y = 0$

(są to powierzchnie utkane z prostych – tzw. prostokreślne).

Funkcje jednorodne (stopnia $\alpha \in \mathbb{R}$) $u(\lambda x_1, \dots, \lambda x_k) = \lambda^\alpha u(x_1, \dots, x_k)$ $\forall \lambda > 0$

czyli są wyznaczone przez w takie, że (dla $\lambda = 1/x_k$)

$$u = x_k^\alpha u(x_1/x_k, \dots, 1) \equiv x_k^\alpha w(x_1/x_k, \dots, x_{k-1}/x_k)$$

Po zróżniczkowaniu $\partial/\partial x_j$ i wyrugowaniu w dostajemy

$$x \cdot \nabla u = x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + x_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0$$ wzór Eulera.