Wiktor Pilarczyk 308533

Zad 11

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$$

i) $y = z\, e^{-\frac{1}{2}\int p(s)\,ds}$

$$y' = e^{-\frac{1}{2}\int p(s)\,ds} \left(z' - \frac{1}{2} z p \right)$$

$$y'' = e^{-\frac{1}{2}\int p(s)\,ds} \left(z'' - z' p + z \left(\frac{1}{4} p^2 - \frac{1}{2} p' \right) \right)$$

Podstawiamy do równania

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$$

$$e^{-\frac{1}{2}\int p(s)\,ds} \left[z'' + z'(p - p) + z \left(\frac{1}{4} p^2 - \frac{1}{2} p' - \frac{1}{2} p^2 + q \right) \right] = 0$$

$$e^{-\frac{1}{2}\int p(s)\,ds} \left[z'' + z \left(q - \frac{1}{4} p^2 - \frac{1}{2} p' \right) \right] = 0 \quad / : e^{-\frac{1}{2}\int p(s)\,ds}$$

możemy tak dzielić bo nigdy nie będzie równe zero, a jak dążymy do zera to w liczniku i tak jest zero

$$z'' + z \left(q - \frac{1}{4} p^2 - \frac{1}{2} p' \right) = 0$$

$$z'' + z\, \underbrace{b(x)}_{//} = 0$$

$\int N(t)\,dt$ ~~wstawić~~

Zad 14 Wiktor Pilarczyk 308533

$$t^2 x'' + 6x = 0$$

Niech
$$x = t^n$$
wtedy
$$x'' = n(n-1)t^{n-2}$$

podstawiając
$$t^n n(n-1) + 6t^n = 0 /: t^n \to t=0$$

$$n(n-1) + 6 = 0$$

$$n^2 - n + 6 = 0$$

$$\Delta = 1 - 46$$

1° $\Delta > 0 \iff$ ~~...~~ $6 < \frac{1}{4}$

wtedy rozwiązaniem równania to
$$x = c_1 t^{n_1} + c_2 t^{n_2}$$ gdzie n_1 i n_2 to pierwiastki n^2-n+6

2° $\Delta = 0 \iff 6 = \frac{1}{4}$

wtedy rozwiązaniem równania to
$$x = c_1 t^n + c_2 t^n \log(t)^{*}$$ n to pierwiastek n^2-n+6

3° $\Delta > 0 \iff 6 > \frac{1}{4}$

wtedy rozwiązaniem równania to
$$x = c_1 x^a \sin(6\ln(t)) + c_2 x^a \cos(6\ln(t))$$

gdzie n_1 i $\bar{n}_1$ to pierwiastki n^2-n+6 i $n_1 = a+bi$

---

* Jak uzyskałem $t^n \log(t)$ wiem, że $y_1 = t^n$
niech $y_2 = v(t)\, y_1$ Podstawiamy

~~$y_2 = x(t)$~~

$$t^2 (y_2)'' + 6 y_2 = 0$$

$$t^2 (y_1 v(t))'' + 6 y_1 v(t) = 0$$

$$t^2 (n(n-1)t^{n-2} v(t) + n t^{n-1} v'(t) + t^n v''(t)) + 6 y_1 v(t) = 0$$

$$n(n-1) y_1 v(t) + t y_1 v'(t) + t^2 y_1 v''(t) + 6 y_1 v(t) = 0$$

$$y_1 \underbrace{(n(n-1)+6)}_{0} + t y_1 v'(t) + t^2 y_1 v''(t) = 0$$

$$t y_1 v'(t) + t^2 y_1 v''(t) = 0$$

$$v'(t) + t v''(t) = 0 \to$$ rozwiązaniem jest $\log(t)$: stała, więc stąd mamy log

Zad 15 Wiktor Pilarczyk 308533

$$x'' - t x = 0$$

Niech $x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ można tak przedstawić każdą funkcję

$$x'' = \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1) a_i t^{i-2} = \sum_{i=0}^{\infty} (i+2)(i+1) a_{i+2} t^i$$

Podstawiając

$$\sum_{i=0}^{\infty} (i+1)(i+2) a_{i+2} t^i + \cancel{X} \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^{i+1} = 0$$

$$2 a_2 + \sum_{i=1}^{\infty} \left[(i+1)(i+2) a_{i+2} + a_{i-1}\right] t^i = 0$$

Wszystkie współczynniki muszą być równe zero więc

$$a_2 = 0$$

$$\forall_{i \in \mathbb{N}^+} \ (i+1)(i+2) a_{i+2} + a_{i-1} = 0$$

Rozpisując początkowe wyrazy

$$\begin{cases} 2 \cdot 3 \cdot a_3 + a_0 = 0 \\ 3 \cdot 4 \cdot a_4 + a_1 = 0 \\ 4 \cdot 5 \cdot a_5 + a_2 = 0 \Rightarrow a_5 = 0 \\ \vdots \\ k(k-1) \cdot a_k + a_{k-3} \end{cases}$$

Można zauważyć, że $\forall k \in \mathbb{N} \ \ a_{3k+2} = 0$

Indukcyjnie

Baza $k = 0$

$a_2 = 0$

Zał $a_{3k+2} = 0$

Teza $a_{3(k+1)+2} = 0$

Wiemy, że

$$\underbrace{[3(k+1)+1]}_{\neq 0}\underbrace{(3(k+1)+2)}_{\neq 0} \cdot a_{3(k+1)+2} + \underbrace{a_{3(k)+2}}_{\text{zał } = 0} = 0$$

więc z tego wynika, że

$a_{3(k+1)+2} = 0$ ~~więc na mocy zasady o indukcji dla ... jest spełniona~~

więc na mocy zasady o indukcji dla $k \in \mathbb{N}$ spełniona jest teza

Scanned with CamScanner

~~Zad~~ Wiktor Pikarczyk 308533

~~Zad~~ 15 c.d

Podobnie korzystając, że z własności

$\forall k \geq 3 \quad a_k = \frac{a_{k-3}}{k(k-1)}$

udowodnię się za pomocą indukcji, że

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad a_{3k} = \frac{a_0}{\prod_{i=1}^{k} (3i)(3i-1)}$$

i

$$a_{3k+1} = \frac{a_1}{\prod_{i=0}^{k} (3i+1)(3i)}$$

Więc mamy 2 zmienne, które generują nam wszystkie rozwiązania – a_0 i a_1, więc rozwiązaniem ogólnym będzie

$$x = c_1 \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i$$

gdzie $(a_0 = 0$ i $a_1 = 1)$ oraz $(b_0 = 1$ i $b_1 = 0)$

oczywiste, że mamy równanie 2. stopnia więc jest to równanie ogólne

Zad 18 Wiktor Pilarczyk 308533

$$y'' + p(t)y' + q(t) = 0$$

Niech rozwiązaniem ogólnym powyższego równania będzie

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

odpowiednio wybór

rozwiązaniem równania jest zarówno y_1 i y_2 dla $(c_1 = 1 \text{ i } c_2 = 0)$ oraz $(c_1 = 0 \text{ i } c_2 = 0)$

więc

$\lim_{t\to\infty} y_1 = 0$ oraz $\lim_{t\to\infty} y_2 = 0$

$\lim_{t\to\infty} y_1' = 0$ $\lim_{t\to\infty} y_2' = 0$

Z tw Liouvill'a

$$W' = tr(A(t)) \cdot W$$

gdzie W to wrońskian liniowo niezależnych rozwiązań równania czyli np. $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix}$

a z tego wynika, że

$$W(t) = W(0)\, e^{\int_0^t tr\, A(s)\, ds}$$

$$\lim_{t\to\infty} W(t) = \lim_{t\to\infty} W(0)\, e^{-\int_0^t p(s)\, ds}$$

$$\lim_{t\to\infty} (y_1 y_2' - y_2 y_1') = W(0) \lim_{t\to\infty} e^{-\int_0^t p(s)\, ds} \quad / : W(0)$$

$$0 = \lim_{t\to\infty} e^{-\int_0^t p(s)\, ds}$$

z własności wrońskiana $W(0) \neq 0$

więc $\lim_{t\to\infty} e^{-\int_0^t p(s)\, ds} = 0$

czyli

$$\lim_{t\to\infty} -\int_0^t p(s)\, ds = -\infty$$

więc

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t p(s)\, ds = \infty$$

co chcieliśmy pokazać