RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE, II ROK MATEMATYKI
LISTA 4

Zadanie 1. Wyznaczyć rozwiązania ogólne równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu:

$$yz\frac{\partial z}{\partial x} - xz\frac{\partial z}{\partial y} = e^z, \qquad y\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x},$$

$$(x-z)\frac{\partial u}{\partial x} + (y-z)\frac{\partial u}{\partial y} + 2z\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Zadanie 2. Znaleźć ogólną postać rozwiązania równania $u_x - u_y = f(x,y)$.

Zadanie 3. Znaleźć rozwiązania spełniające dodatkowe warunki

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 2\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u = yz \quad \text{dla} \quad x = 1,$$

$$y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = x, \quad z = y^2 \quad \text{dla} \quad x = 0,$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - 2y\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2, \quad z = x^2 \quad \text{dla} \quad y = 1.$$

Zadanie 4. Znaleźć powierzchnię spełniającą równanie $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy$ i przechodzącą przez krzywą $y = x, \;\; z = x^2$.

Zadanie 5. Pokazać, że jeżeli dane początkowe dla równania

$$a(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} + c(x,y,z) = 0$$

są zadane na charakterystyce, to albo nie istnieje żadne rozwiązanie, albo jest nieskończenie wiele rozwiązań (jak w poprzednim zadaniu).

Zadanie 6. Wyjaśnić dlaczego nie istnieje rozwiązanie równania liniowego $u_x + u_y = u$ przechodzące przez prostą $x = t, \;\; y = t, \;\; u = 1$.

Zadanie 7. Udowodnić, że rozwiązanie równania quasiliniowego $u_t + a(u)u_x = 0$ z warunkiem początkowym $u(x, 0) = h(x)$ w niejawny sposób może być zadane jako $u = h(x - a(u)t)$. Jeżeli $a(h(s))$ nie jest niemalejącą funkcją argumentu s, to u przestaje być dobrze określone dla pewnego $t > 0$.

Zadanie 8. (Ilustracja do wyniku z poprzedniego zadania.)
Rozwiązać równanie $u_t + uu_x = 0$ z warunkiem początkowym $u(x, 0) = -x \exp(1 - x^2)$.

Zadanie 9. Pokazać, że ogólne rozwiązanie równania

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

jest postaci $u(x, y) = f(xy)$. Znaleźć rozwiązanie, którego wykres zawiera prostą $u = x = y$. Znaleźć rozwiązanie, które na krzywej $y = \frac{1}{x}$ jest równe 1.

17 kwietnia 2020 *Piotr Biler*