PRZESTRZENIE ZUPEŁNE

Def (Ciąg Cauchy'ego)
(x_n) jest <u>ciągiem Cauchy'ego</u> w przestrzeni metrycznej (X, d) jeżeli:
$\forall \varepsilon>0\ \exists N\ \forall m,n \geq N \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon$

Def
Przestrzeń metryczna (X,d) jest <u>zupełna</u> jeśli każdy ciąg Cauchy'ego ma granicę.

Przykład
$(\mathbb{R}\setminus\{0\}, d_e)$
$x_n = \frac{1}{n}$ To jest ciąg Cauchy'ego
Nie jest zbieżny
Przestrzeń ta nie jest zupełna.

<u>Uwaga</u> (X,d) – metryczna
① Każdy ciąg zbieżny w przestrzeni metrycznej jest ciągiem Cauchy'ego.

⌐ (x_n), $\varepsilon>0$, $x_n \xrightarrow[n]{} x_0$ jeżeli $d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ i $d(x_m, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ to $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ ⌟

② Niech (x_n) będzie ciągiem Cauchy'ego i załóżmy, że (x_n) ma punkt skupienia (równoważnie: (x_n) ma podciąg zbieżny). Wówczas (x_n) jest zbieżny.

⌐ d-d
Niech a będzie punktem skupienia (x_n).
Pokażemy, że (x_n) jest zbieżny do a.
Weźmy $\varepsilon>0$. Weźmy N, że dla $m,n \geq N$ $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Ponieważ a jest punktem skupienia (x_n), to istnieje $m_0 \geq N$ t. że $d(x_{m_0}, a) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Zatem dla $n \geq N$ mamy $d(x_n, a) \leq \underbrace{d(a, x_{m_0})}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{d(x_{m_0}, x_n)}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$. ⌟

<u>Uwaga</u>
Zupełność jest własnością przestrzeni metrycznej, a nie przestrzeni metryzowalnej: Może się zdarzyć, że (X, d_1), (X, d_2) są równoważne (generują tę samą topologię na X), ale (X, d_1) jest zupełna, a (X, d_2) nie jest zupełna.

Przykład
$(\mathbb{R}\setminus\{0\}, d_e)$ – nie jest zupełna

$U \subseteq X$ otwarty $\quad (X,d) \quad F = X \setminus U$ domknięty
Wówczas możemy rozważyć metrykę $d'(x,y) = d(x,y) + \left|\frac{1}{d(x,F)} - \frac{1}{d(y,F)}\right|$
- Jeżeli (X,d) jest zupełna, to (U, d') jest zupełna. zad dom
- W naszym szczególnym przypadku $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, d_e)$
$U = \mathbb{R}\setminus\{0\} \quad F = \{0\}$

$d'(x,y) = |x-y| + \left|\frac{1}{|x|} - \frac{1}{|y|}\right|$
Rozważmy $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, d')$
Jest to przestrzeń zupełna.

Wcześniej (dla d_e) Problem dla ciągów (x_n) $x_n \to 0$
Ciąg (x_n) nie jest ciągiem Cauchy'ego w $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, d')$

Def Przestrzeń $(X, \mathcal{T})$ jest <u>metryzowalna w sposób zupełny</u> jeśli istnieje metryka d na X generująca $\mathcal{T}$ i (X,d) jest zupełna.

<u>Stwierdzenie</u> Niech (X, d_X) będzie przestrzenią metryczną i niech $Y \subseteq X$. Rozważmy (Y, d_Y), $d_Y = d_X \upharpoonright Y$.
(i) Jeżeli (Y, d_Y) jest zupełna, to Y jest domknięty w (X, d_X).

d-d
Weźmy $y_0 \in \overline{Y}$. Ustalmy (y_n), $y_n \to y_0 \in X$.
Zatem w (X, d_X), (y_n) jest ciągiem Cauchy'ego w
Zatem w (Y, d_Y), — // — // —
Z zupełności (Y, d_Y), (y_n) jest zbieżny do $y \in Y$
w (X, d_X), (y_n) jest zbieżny do y i do y_0.
Zatem $y = y_0$, co daje $y_0 \in Y$.

(ii) Jeżeli (X, d_X) jest zupełna i $Y \subseteq X$ domknięty, to (Y, d_Y) jest zupełna.

d-d
(y_n) – ciąg Cauchy'ego w Y
(y_n) jest też ciągiem Cauchy'ego w X
Niech $a \in X$ będzie granicą (y_n)
Zauważmy, że $a \in \overline{Y}$.
Ponieważ $\overline{Y} = Y$, to $a \in Y$.
Zatem (y_n) jest zbieżny w (Y, d_Y) do a.

<u>Przykłady przestrzeni zupełnych</u>
① $(\mathbb{R}^n, d_e)$
(x_n) – ciąg Cauchy'ego
Stąd (x_n) jest ciągiem ograniczonym $\subseteq B(0,R)$
Ciąg (x_n) ma podciąg zbieżny ←
$\overline{(x_n)}$ – ograniczony $\Rightarrow$ zwarty
$\Rightarrow$ z (x_n) można wybrać podciąg zbieżny
Z Uwagi na początku (Uwaga ②), (x_n) jest zbieżny

② $C_b(X,Y) = \{f: X \to Y \text{ ciągła, ograniczone}\}$
↑
$f(X) \subseteq B(a, r)$ dla pewnych $a \in Y$, $r>0$

$(X, \mathcal{T})$ – przestrzeń top
(Y, d) – przestrzeń met.

$(C_b(X,Y), d_{sup})$
$d_{sup}(f,g) = \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in X\}$

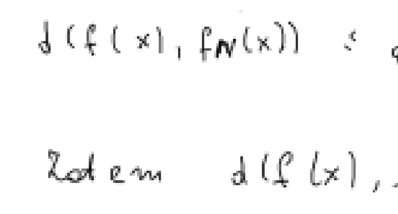
zauważmy, że $(C[0,1], d_{sup}) = (C_b([0,1], \mathbb{R}), d_{sup})$.

<u>Twierdzenie</u>
Jeżeli (Y, d) jest zupełna, to $(C_b(X,Y), d_{sup})$ jest zupełna

D-d
Bierzemy (f_n) – ciąg Cauchy'ego.
Dla ustalonego x, zauważmy że $(f_n(x))$ jest Cauchy'ego.
Ponieważ (Y,d) jest zupełna, to $(f_n(x))$ jest zbieżny.
Granicę oznaczmy przez $f(x)$.
Pozostaje pokazać, że $f \in C_b(X,Y)$.

- f jest ograniczona:
Niech $\varepsilon = 1$
Dla $m,n \geq N$ $d(f_n(x), f_m(x)) < 1$
To jest $\forall x$
skorzystaliśmy: (f_n) jest Cauchy'ego.
Mamy $d(f_m(x), f_N(x)) < 1$ dla $m \geq N$
$n \to \infty$
Ponieważ $\forall x$ $f_n(x) \xrightarrow[n]{} f(x)$, to mamy
$d(f(x), f_N(x)) \leq \underbrace{d(f(x), f_n(x))}_{\to 0} + \underbrace{d(f_n(x), f_N(x))}_{<1}$

Zatem $d(f(x), f_N(x)) \leq 1$.
$d(f_N(x), f_n(x)) \leq 1 \Rightarrow \forall n \geq N \ d(f_n(x), f(x)) \leq 2$
Ponieważ f_N jest ograniczone, to f jest ograniczona



$\{g \in C_b(X,Y) : d_{sup}(g, f) \leq 1\} \ni f$

- ciągłość f
Zauważmy (Uwaga 1.3.5 w skrypcie)
$r_n = \sup\{d(f_n(x), f(x)) : x \in X\} \to 0$
Z rozumowania powyżej mamy (dowolne $\varepsilon>0$ w miejsce $\varepsilon=1$)
$\forall \varepsilon>0\ \exists N\ \forall n \geq N\ \forall x \quad d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$
Zatem z ciągłości (f_n), dostajemy ciągłość f

<u>Średnica</u> $A \subseteq (X,d)$
$\operatorname{diam} A = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\}$

Twierdzenie (warunek Cantora)
(X,d) – przestrzeń metryczna
(X,d) jest zupełna $\iff$ $\forall F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3$ zbiory domknięte $\neq \emptyset$, $\operatorname{diam}(F_n) \xrightarrow[n]{} 0$ zachodzi $\bigcap_n F_n \neq \emptyset$
warunek Cantora

Uwaga
Założenie, że $\operatorname{diam}(F_n) \xrightarrow[n]{} 0$ jest istotne:
$(\mathbb{R}, d_e)$ zupełna $\quad F_n = [n, \infty) \quad \bigcap_n F_n = \emptyset$

d-d
$\Rightarrow$ Weźmy $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \ldots$ domknięte, $\neq \emptyset$ $\operatorname{diam} F_n \xrightarrow[n]{} 0$

Chcemy: $\bigcap_n F_n \neq \emptyset$
Weźmy $\forall n$ $a_n \in F_n$. Ponieważ $\operatorname{diam} F_n \to 0$, to (a_n) jest ciągiem Cauchy'ego
⌐ Jeżeli $\forall \varepsilon>0$ $\operatorname{diam}(F_n) < \varepsilon$ dla $n \geq N$
Dla $m \geq n \geq N$, ponieważ $F_n \supseteq F_m$, to $a_m, a_n \in F_n$.
Ale $\operatorname{diam}(F_n) < \varepsilon$, czyli $d(a_m, a_n) < \varepsilon$. ⌟

Niech a będzie granicą (a_n) (zupełność (X,d))
Zauważmy, że $a \in \bigcap_n F_n$
⌐ $a_n \in F_n$, chcemy $\forall n_0$ $a \in F_{n_0}$
wiemy, że $\forall n \geq n_0$ $a_n \in F_{n_0} = \overline{F_{n_0}}$
zatem $a = \lim_{n\to\infty} a_n \in \overline{F_{n_0}} = F_{n_0}$ ⌟

$\Leftarrow$ Z warunku Cantora pokażemy zupełność
Niech (x_n) będzie ciągiem Cauchy'ego.
Rozważmy $F_n = \overline{\{x_k : k \geq n\}}$
Ponieważ (x_n) jest Cauchy'ego, to $\operatorname{diam} F_n \to 0$
⌐ $\varepsilon > 0 \rightsquigarrow N$ t. że $\forall m,n \geq N$ $d(x_n, x_m) < \varepsilon$
czyli $\operatorname{diam}\{x_k : k \geq N\} < \varepsilon$
stąd $\operatorname{diam} F_N \leq \varepsilon$ ⌟

Zatem $\bigcap_n F_n \neq \emptyset$
$\ni a$ (naprawdę $\{a\} = \bigcap_n F_n$)

Mamy: $a = \lim_{n\to\infty} x_n$
⌐ (x_n) – Cauchy, a jest punktem skupienia (x_n)
$U = B(a,r)$
nie wprost
$\exists U$, $U \cap (x_n) = \emptyset$
F_n
$a \in F_n = \overline{\{x_k : k \geq n\}}$
Zatem $U \cap \{x_k : k \geq n\} \neq \emptyset$ ⌟

Z uwagi (2), a jest granicą (x_n) ∎