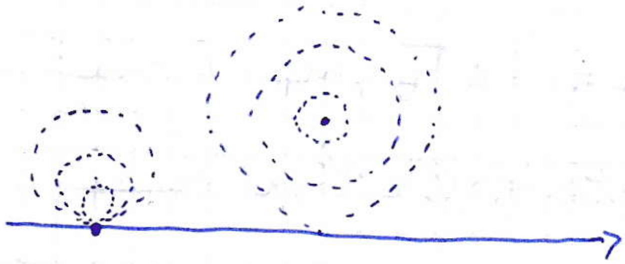
Lista 5

(a)



Niech $A = \mathbb{Q} \times (\mathbb{Q} \cap [0,\infty))$. ($|A| = \aleph_0$)

$\bar{A} = L$, bo dla dowolnego $(x,y) \in L \setminus A$ i jego otoczenia bazowego, to otoczenie jest kulą euklidesową (lub kulą z dołączonym punktem), która tnie się niepusto z A.

(b) $(L_1, \mathcal{T}_{L_1})$ jest dyskretna podprz. mocy continuum.

$\mathcal{T}_{L_1} = \{ U \cap L_1 : U \in \mathcal{T} \} = \{ \{(x,0)\} : x \in \mathbb{R} \}$, bo kule postaci $B_e((x,y), \frac{1}{i})$, $B_e((x, \frac{1}{i}), \frac{1}{i})$ są rozłączne z L_1.

Zatem dla dow. $(x,0) \in L_1$ mamy $\{(x,0)\}$ otwarty, więc jest to podprzestrzeń dyskretna (oraz $|L_1| = \mathfrak{c}$).

(c) $(L, \mathcal{T})$ nie jest normalna

d-d:

Zał. nie wprost, że dla $A \subseteq L_1$ ist. otwarte V_A, U_A t. że $A \subseteq V_A$ i $L_1 \setminus A \subseteq U_2$ ~~tzn~~ (A - domkn. bo L_1 dyskretna).

Jeżeli $A \neq B$, to ~~$V_A \neq V_B$~~ $C \cap V_A \neq C \cap V_B$:

~~$A \subseteq V_A$, $L_1 \setminus B \subseteq U_B$, więc~~

BSO: $A \setminus B \neq \emptyset$

~~Mamy~~ Mamy $A \subseteq V_A$, $L_1 \setminus B \subseteq U_B$, więc $A \setminus B \subseteq V_A \cap U_B$. Ale $V_B \cap U_B = \emptyset$ (bo V_B, U_B - otwarte), więc $V_A \neq V_B$. Zatem

~~$C \cap \overline{V}_A \neq C \cap \overline{V}_B$, więc~~ $C \cap V_A \neq C \cap V_B$.

~~Podzb. $A \subseteq L_1$ jest $2^{\mathfrak{c}}$, a $C \cap V_A$~~

Zatem ~~mamy~~ $\underbrace{|P(L_1)|}_{= 2^{\mathfrak{c}}} \leq |\{C \cap V_A : A \subseteq L_1\}| \leq |P(C)| = \mathfrak{c}$

$\lightning$

$\square$

Zatem