RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE, II ROK MATEMATYKI
LISTA 3

Zadanie 1. Zbadać stabilność rozwiązania $x = y = 0$ układów

$$\dot{x} = -y, \quad \dot{y} = 2x^3;$$

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \sin x.$$

Zadanie 2. Określić dla jakich wartości parametrów a i b rozwiązanie $x = y = 0$ jest stabilne

$$\dot{x} = ax - 2y + x^2, \quad \dot{y} = x + y + xy;$$

$$\dot{x} = ax + y + x^2, \quad \dot{y} = x + by + y^2.$$

Zadanie 3. Zbadać przebieg trajektorii w pobliżu punktu $(0, 0)$ dla układu równań

$$\dot{x} = \lambda x + y, \quad \dot{y} = \lambda y, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 4. Narysować obraz kwadratu $\{|x| < 1,\ |y| < 1\}$ pod działaniem przekształcenia f^t, $t = 1$, z potoku fazowego układu $x' = 2y$, $y' = x + y$.

Zadanie 5. Przeanalizować portret fazowy równania małych tłumionych drgań wahadła $x'' + x + kx' = 0$, $k \geq 0$, tzn. układu $x' = y$, $y' = -x - ky$ na płaszczyźnie.

Zadanie 6. Zbadać punkty stacjonarne układu

$$x' = xy + 12, \quad y' = x^2 + y^2 - 25$$

i określić ich stabilność. Narysować krzywe fazowe tego układu.

Zadanie 7. Czy wszystkie rozwiązania $x = x(t)$ równania $x'' = 1 + 2\sin x$ można przedłużyć do globalnych w czasie ?

Zadanie 8. Narysować poziomice energii w zagadnieniu Keplera z potencjałem $U(x) = -x^{-1} + Cx^{-2}$ i zbadać charakter trajektorii.

Zadanie 9. Narysować krzywe fazowe układu konserwatywnego z potencjałami $U(x) = \pm x \sin x,\ \pm \sin x^2$.

Zadanie 10. Zbadać zależność okresu drgań wahadła od amplitudy (równanie $x'' + \sin x = 0$).

Zadanie 11. Udowodnić, że równanie $\dot{x} = \nabla V(x)$, $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nie ma rozwiązań okresowych. (Wsk. zbadać ewolucję w czasie $V(x(t))$.)

Zadanie 12. Udowodnić globalne istnienie rozwiązań równań Newtona w $\mathbb{R}^N$

$$x_j'' = -\frac{\partial U}{\partial x_j}, \quad j = 1, \ldots, N$$

w przypadku dodatniej energii potencjalnej $U > 0$.

Zadanie 13.* Obliczyć pochodną względem parametru rozwiązania zagadnienia

$$y' = y + \mu(x + y^2), \quad y(0) = 1;$$

tzn. $\frac{\partial y}{\partial \mu}|_{\mu=0}$.

Zadanie 14. Znaleźć rozwiązania równań różniczkowych z warunkami brzegowymi

a. $y'' - y = 2x, \quad y(0) = 0,\ y(1) = -1,$
b. $y'' + y' = 1, \quad y'(0) = 0,\ y(1) = 1,$
c. $y'' - y' = 0, \quad y(0) = -1,\ y'(1) - y(1) = 2,$
d. $y'' - 2iy = 0, \quad y(0) = -1,\ y(+\infty) = 0.$

Zadanie 15. Dla jakich wartości a zagadnienie $y'' + ay = 1$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$, nie ma rozwiązań?

Zadanie 16. Skonstruować funkcję Greena dla zagadnień brzegowych

a. $y'' = f(x), \quad y(0) = 0,\ y(1) = 0,$
b. $y'' + y' = f(x), \quad y(0) = 0,\ y'(1) = 0,$
c. $y'' + y = f(x), \quad y(0) = y(\pi),\ y'(0) = y'(\pi).$

Zadanie 17. Znaleźć wartości własne i funkcje własne zagadnień

a. $y'' = \lambda y, \quad y(0) = 0,\ y(B) = 0,$
b. $y'' = \lambda y, \quad y'(0) = 0,\ y'(B) = 0,$
c. $y'' = \lambda y, \quad y(0) = 0,\ y'(B) = 0,$

d. $x^2y'' = \lambda y, \quad y(1) = 0, \; y(A) = 0.$

Zadanie 18. $\lambda_1, ..., \lambda_n$ są pierwiastkami równania charakterystycznego $\det(A-\lambda I) = 0$. Pokazać, że $\exp(tA) = a_1(t)B_1 + a_2(t)B_2 + ... + a_n(t)B_n$, gdzie $a_k(t)$ zdefiniowane są rekurencyjnie

$$a_1(t) = \exp(\lambda_1 t), \quad a_k(t) = \int_0^t \exp(\lambda_k(t-s))a_{k-1}(s)\, ds,$$

$B_1 = I, \quad B_k = (A - \lambda_1 I)...(A - \lambda_{k-1} I), \quad k = 2, ..., n.$

24 marca 2020

Piotr Biler