Lista 1 - Kacper Tosek

czwartek, 19 marca 2020 23:55

6.

$f(t)x' + t^2 + x = 0$, czynnik całkujący $u(t) = t$, znaleźć współczynnik $f = f(t)$

To równanie może nie spełniać warunku na równanie zupełne, ale jeśli przemnożymy je przez czynnik całkujący to wtedy będzie spełniało.

$f(t) \cdot x' \cdot t + t^3 + x \cdot t = 0$

warunek na równanie zupełne: $\frac{\partial(t^3 + xt)}{\partial x} = \frac{\partial(f(t) \cdot t)}{\partial t}$

zatem $t = f'(t) \cdot t + f(t)$, $f(t) = y$

$t = y' \cdot t + y$

$y' = \frac{t-y}{t} = 1 - \frac{y}{t}$, $u(t) = \frac{y}{t}$, $y = u \cdot t$, $y' = u't + u$

$u't + u = 1 - u$

$u' \frac{1}{1-2u} = \frac{1}{t}$

$-\frac{1}{2} \ln|1-2u| + c_1 = \ln|t| + c_2$

$\ln|1-2u| = -2\ln|t| + c_3$, $c_3 = c_2 - c_1$

$1 - 2u = e^{-2\ln|t| + c_3} = t^{-2} \cdot e^{c_3} = t^{-2} \cdot c$, $c = e^{c_3}$

$u = \frac{1}{2}(1 - t^{-2} \cdot c) = \frac{y}{t}$

$y = \frac{t}{2}\left(1 - \frac{c}{t^2}\right) = \frac{t}{2} - \frac{c}{2t} = f(t)$

9.

piątek, 20 marca 2020 00:13

$$y' = 2y^{\frac{1}{2}}$$

$$y' y^{-\frac{1}{2}} = 2$$

$$\int y^{-\frac{1}{2}} dy = \int 2 dt$$

$$2y^{\frac{1}{2}} + c_1 = 2t + c_2$$

$$y^{\frac{1}{2}} = t + c \quad , \quad c = \frac{1}{2}(c_2 - c_1)$$

$$y = (t+c)^2$$

wzór jest poprawny dla $t \geq -c$, bo wtedy $y'(t) \geq 0$
i spełnione jest równanie początkowe
Jest jeszcze jedno rozwiązanie $y \equiv 0$
Wykres rozw $y \equiv 0$ jest odwiednią rozw postaci $y = (t+c)^2$
czyli $y = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < c \\ (t+c)^2 & \text{dla } t \geq c \end{cases}$ też spełnia równanie

10.

wtorek, 17 marca 2020 15:32

a) $S'(t) = -k(S(t) - A)$

szybkość zmiany temp. ciała w chwili t

współczynnik proporcjonalności

różnica między temp ciała a temp. otoczenia

prawo Newtona (tak jest napisane w poleceniu)

b) $S(0) = 100°C$, $A = 20°C$, $S(10) = 60°C$

Dla jakiego t_k $S(t_k) = 25°C$?

$S'(t) = -k(S(t) - A)$ równanie liniowe niejednorodne

$S'(t) = -kS(t)$ rozwiązuje równanie liniowe jednorodne

$S' = -kS$

$S = c_1 e^{\int -k\,dt} = c_1 e^{-kt + c_2} = c_1 e^{-kt} e^{c_2} = c_1 e^{c_2} e^{-kt} = c e^{-kt}, \quad c = c_1 e^{c_2}$

$S(t) = c(t) e^{-kt}$

$S'(t) = c'(t) e^{-kt} + c(t)(-k) e^{-kt}$

$c'(t) e^{-kt} - k c(t) e^{-kt} = -k c(t) e^{-kt} + kA$

$c'(t) e^{-kt} = kA$

$c'(t) = kAe^{kt} \Rightarrow c(t) = \int kAe^{kt}\,dt = kA \frac{1}{k} e^{kt} + c_3$

$c(t) = Ae^{kt} + c_3$

$S(t) = (Ae^{kt} + c_3)e^{-kt} = A + c_3 e^{-kt}, \quad S(t) = A + c_3 e^{-kt}$

z ~~zał~~ zał wyznaczę c_3 i k:

$S(0) = 20 + c_3 e^{-k \cdot 0} = 100 \Rightarrow 20 + c_3 = 100 \Rightarrow c_3 = 80$

$S(t) = 20 + 80e^{-kt}$

$S(10) = 20 + 80e^{-10k} = 60 \Rightarrow e^{-10k} = \frac{1}{2} \Rightarrow -10k = \ln\frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{1}{10}\ln 2$

$S(t) = 20 + 80e^{-\frac{t}{10}\ln 2}$

$S(t_k) = 20 + 80e^{-\frac{t_k}{10}\ln 2} = 25$

$e^{-\frac{t_k}{10}\ln 2} = \frac{1}{16} \Rightarrow 2^{-\frac{t_k}{10}} = \frac{1}{16} \Rightarrow -\frac{t_k}{10} = \log_2 \frac{1}{16} \Rightarrow \underline{\underline{t_k = 40}}$

12.

wtorek, 17 marca 2020 21:00

$$M'(t) = aM(t) - bM^2(t) \qquad a = 0{,}029 \quad b = 2{,}941\cdot 10^{-12}$$

$$M' = aM\left(1-\frac{b}{a}M\right)$$

$$M'\frac{1}{aM(1-\frac{b}{a}M)} = 1$$

$$\int \frac{1}{aM(1-\frac{b}{a}M)}\, dM = \int 1\, dt$$

$$\int \frac{dM}{aM(1-\frac{b}{a}M)} = \int \frac{1}{aM} + \frac{\frac{b}{a^2}}{(1-\frac{b}{a}M)}\, dM = \int\frac{dM}{aM} + \int\frac{\frac{b}{a^2}dM}{1-\frac{b}{a}M} =$$

$$= \frac1a \ln|M| + \int \frac{\frac{b}{a^2}dM}{1-\frac ba M} = \left| \begin{matrix} t = 1-\frac ba M \\ dt = \frac{-b}{a}dM\end{matrix}\right| = \frac1a\ln|M| + \int\frac{\frac{-1}{a}dt}{t} =$$

$$= \frac1a \ln|M| - \frac1a\ln|t| = \frac1a\left(\ln|M| - \ln\left|1-\frac ba M\right|\right) = \frac1a \ln\frac{M}{1-\frac ba M} + c_1$$

$$\frac1a \ln\frac{M}{1-\frac ba M} + c_1 = t + c_2$$

$$\ln\frac{M}{1-\frac baM} = at + ac, \quad c = c_2 - c_1$$

$$\frac{M}{1-\frac baM} = e^{at}e^{ac} = e^{at}c_3$$

$$M = e^{at}c_3 - c_3 e^{at}\frac ba M$$

$$M = \frac{c_3e^{at}}{1+c_3e^{at}\frac ba} = \frac{1}{\underbrace{c_3e^{-at}}_{\xrightarrow{t\to\infty} 0}+\frac ba} \xrightarrow{t\to\infty} \frac ab$$

$M'(t)$ przyjmuje maksimum dla t takiego, że $M''(t)=0$ i w tym t $M''(t)$ zmienia znak z "+" na "−".

$M' = aM - bM^2$ zatem $M'' = aM' - b\cdot 2M\cdot M'$

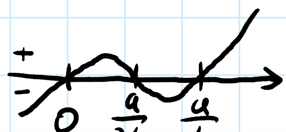
$$M'' = M'(a-2bM) = (aM-bM^2)(a-2bM) = M(a-bM)(a-2bM)$$

$M'' = 0$

$\Updownarrow$

$M=0 \;\vee\; a-bM=0 \;\vee\; a-2bM=0$

$M = \frac ab$ $\qquad$ $M=\frac{a}{2b}$



przybliżony wykres znaku M''

Zatem maksimum $M'(t)$ będzie w takim t dla którego $M(t) = \frac{a}{2b}$

$$M(t) = \frac{1}{c_3 e^{-at} + \frac{b}{a}} = \frac{a}{2b}$$

$$2b = a c_3 e^{-at} + b$$

$$b = a c_3 e^{-at}$$

$$\frac{b}{a c_3} = e^{-at} \Rightarrow \ln \frac{b}{a c_3} = -at \Rightarrow t = -\frac{1}{a} \ln \frac{b}{a c_3} = \frac{1}{a} \ln \frac{a c_3}{b}$$

$M'(t)$ przyjmuje maksimum dla $t = \frac{1}{a} \ln \frac{a c_3}{b}$

17.

wtorek, 17 marca 2020 21:33

$x' + ax = 1$ ile rozwiązań posiada granicę dla $t \to \infty$

$x' = -ax$

$x' \frac{1}{x} = -a$

$\int \frac{1}{x} dx = \int -a\, dt$

$\ln|x| + c_1 = -at + c_2$

$x = e^{-at} e^{c_3}, \ c_3 = c_2 - c_1$

$x = e^{-at} \cdot c, \ c = e^{c_3}$

$x(t) = c(t) e^{-at}$

$x'(t) = c'(t) e^{-at} + c(t)(-a) e^{-at}$

$c'(t) e^{-at} - a c(t) e^{-at} = 1 - a c(t) e^{-at}$

$c'(t) e^{-at} = 1 \Rightarrow c'(t) = e^{at} \Rightarrow c(t) = \int e^{at} dt = \frac{1}{a} e^{at} + c_4$

$x(t) = \left(\frac{1}{a} e^{at} + c_4\right) e^{-at}$

$x(t) = \frac{1}{a} + c_4 e^{-at}$

- Jeśli $a = 0$, to $x' = 1$, czyli $x(t) = t + k$, $k \in \mathbb{R}$
  wtedy $\lim_{t \to \infty} x(t) = +\infty$
- Jeśli $a < 0$ i $c_4 \neq 0$, to $\lim_{t \to \infty} x(t) = \pm \infty$, w zależności od znaku c_4
  gdy $c_4 = 0$ to $x(t) \equiv \frac{1}{a}$, $\lim_{t \to \infty} x(t) = \frac{1}{a}$
- Jeśli $a > 0$ i $c_4 \neq 0$, to $\lim_{t \to \infty} x(t) = \frac{1}{a}$ oraz
  gdy $c_4 = 0$ to $\lim_{t \to \infty} x(t) = \frac{1}{a}$

Zatem równanie posiada granicę dla $t \to +\infty$, gdy:

- $a > 0$ i wtedy c_4 może być dowolne
- $a < 0$, ale wtedy $c_4 = 0$

19.

czwartek, 19 marca 2020 22:28

a) $(t - x\cos\frac{x}{t})dt + t\cos\frac{x}{t}\, dx = 0 \;/ : dt\cdot t$, $t \neq 0$

$1 - \frac{x}{t}\cos\frac{x}{t} + \cos\frac{x}{t}\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dx}{dt} = x'$

$u(t) = \frac{x(t)}{t}$, $x = u\cdot t$, $x' = u't + u$

$1 - u\cos u + \cos u(u't + u) = 0$

$1 - u\cos u + u't\cos u + u\cos u = 0$

$1 + u't\cos u = 0$

$u'\cos u = \frac{-1}{t}$

$\int \cos u\, du = \int -\frac{1}{t}\, dt$

$\sin u = -\ln t + c$

$u = \arcsin(-\ln t + c)$

$\frac{x}{t} = \arcsin(-\ln t + c) \Rightarrow x = t\cdot\arcsin(-\ln t + c)$

b) $\frac{dx}{dt} = \frac{x+2}{t+1} + \operatorname{tg}\frac{x-2t}{t+1}$, $t \neq -1$, $\frac{dx}{dt} = x'$

$\frac{x-2t}{t+1} + \frac{2t+2}{t+1} = \frac{x-2t}{t+1} + 2$, $u(t) = \frac{x-2t}{t+1}$, $x = u(t+1) + 2t$

$x' = u'(t+1) + u + 2$

$u'(t+1) + u + 2 = u + 2 + \operatorname{tg} u$

$u'(t+1) = \operatorname{tg} u$

$u'\frac{1}{\operatorname{tg} u} = \frac{1}{t+1}$

$\int \frac{1}{\operatorname{tg} u}\, du = \int \frac{1}{t+1}\, dt = \ln|t+1| + c_2$

$\int \frac{1}{\operatorname{tg} u}\, du = \int \frac{\cos u}{\sin u}\, du = \left| \begin{matrix} \sin u = t \\ \cos u\, du = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{t}\, dt = \ln t + c = \ln|\sin u| + c_1$

$\ln|\sin u| = \ln|t+1| + c_3$

$\sin u = (t+1)e^{c_3}$, $e^{c_3} = c$

$u = \arcsin((t+1)c)$

$\frac{x-2t}{t+1} = \arcsin((t+1)c)$

$x = (t+1)\arcsin((t+1)c) + 2t$

20.

czwartek, 19 marca 2020 22:57

$$\overbrace{\left[2t(t^2-atx+x^2)-x^2\sqrt{t^2+x^2}\right]dt}^{A}+\overbrace{x\left[2(t^2-atx+x^2)+t\sqrt{t^2+x^2}\right]dx}^{B}=0\quad,\ |a|<2$$

$$x=v\sin\alpha \qquad \frac{dx}{dv}=\sin\alpha\,,\ \frac{dx}{d\alpha}=v\cos\alpha\,,\quad dx=\sin\alpha\,dv+v\cos\alpha\,d\alpha$$

$$t=v\cos\alpha \qquad \frac{dt}{dv}=\cos\alpha\,,\ \frac{dt}{d\alpha}=-v\sin\alpha\,,\quad dt=\cos\alpha\,dv-v\sin\alpha\,d\alpha$$

$$A=\left[2v\cos\alpha\left(v^2\cos^2\alpha-av^2\sin\alpha\cos\alpha+v^2\sin^2\alpha\right)-v^2\sin^2\alpha\sqrt{v^2\cos^2\alpha+v^2\sin^2\alpha}\right](\cos\alpha\,dv-v\sin\alpha\,d\alpha)=$$
$$=\left[2v\cos\alpha\left(v^2-av^2\sin\alpha\cos\alpha\right)-v^3\sin^2\alpha\right](\cos\alpha\,dv-v\sin\alpha\,d\alpha)=$$
$$=(2v^3\cos\alpha-2av^3\sin\alpha\cos^2\alpha-v^3\sin^2\alpha)(\cos\alpha\,dv-v\sin\alpha\,d\alpha)=$$
$$=2v^3\cos^2\alpha\,dv-2av^3\sin\alpha\cos^3\alpha\,dv-v^3\sin^2\alpha\cos\alpha\,dv-2v^4\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha+2av^4\sin^2\alpha\cos^2\alpha\,d\alpha+v^4\sin^3\alpha\,d\alpha$$

$$B=v\sin\alpha\left[2\left(v^2\cos^2\alpha-av^2\sin\alpha\cos\alpha+v^2\sin^2\alpha\right)+v\cos\alpha\sqrt{v^2\cos^2\alpha+v^2\sin^2\alpha}\right](\sin\alpha\,dv+v\cos\alpha\,dv)=$$
$$=v\sin\alpha\left[2v^2-2av^2\sin\alpha\cos\alpha+v^2\cos\alpha\right](\sin\alpha\,dv+v\cos\alpha\,dv)=$$
$$=2v^3\sin^2\alpha\,dv-2av^3\sin^2\alpha\cos\alpha\,dv+v^3\sin^2\alpha\cos\alpha\,dv+2v^4\sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha-2av^4\sin^2\alpha\cos^2\alpha\,d\alpha+v^4\sin\alpha\cos^2\alpha\,d\alpha$$

$$A+B=0$$
$$2v^3\cos^2\alpha\,dv-2av^3\sin\alpha\cos^3\alpha\,dv+2v^3\sin^2\alpha\,dv-2av^3\sin^3\alpha\cos\alpha\,dv+v^4\sin^3\alpha\,d\alpha+v^4\sin\alpha\cos^2\alpha\,d\alpha=0$$
$$2v^3(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)dv-2av^3\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)dv+v^4\sin\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\,d\alpha=0$$
$$2v^3dv-2av^3\sin\alpha\cos\alpha\,dv+v^4\sin\alpha\,d\alpha=0\quad /:v^3$$
$$(2-a\sin2\alpha)dv+v\sin\alpha\,d\alpha=0$$
$$v\sin\alpha\,d\alpha=(a\sin2\alpha-2)dv$$
$$\frac{\sin\alpha}{a\sin2\alpha-2}\,d\alpha=\frac{1}{v}\,dv$$

Możemy scałkować obustronnie i otrzymamy $\displaystyle\int\frac{\sin\alpha}{a\sin2\alpha-2}\,d\alpha=\int\frac{1}{v}\,dv$ (*)
Funkcja podcałkowa po lewej stronie jest okresowa, z okresem 2π.
Funkcja pierwotna też jest okresowa. W wyrażeniu (*) nic innego nie zależy od kąta α, czyli krzywa uzyskana z tego równania będzie zamknięta.