Algebra liniowa 1R, lista 13

1. Sprawdź, że podana macierz jest macierzą izometrii. Czy ta izometria jest obrotem, czy symetrią obrotową? Wokół jakiej prostej? O jaki kąt? $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Napisz formę kwadratową Q na $\mathbf{R}^3$, taką że $Q((1,2,3)^\top) = -7$.
3. Niech $Q((x,y,z)^\top) = xy + yz + zx$. Wskaż wektor U, taki że: (a) $Q(U) = 1$; (b) $Q(U) = -1$; (c) $Q(U) = 0$.
4. Naszkicuj powierzchnie: $x^2 = 0$, $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 0$, $x^2 + z^2 = 0$, $x^2 + z^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 0$, $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, $-x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z - y^2 = 0$.
5. Podaj przykład równania stopnia 2 trzech zmiennych którego zbiór rozwiązań jest prostą w $\mathbf{R}^3$.

---

6. Znajdź symetryczną macierz $A \in M_{3\times 3}(\mathbf{R})$, taką że $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, a liczba 3 jest wartością własną A.
7. Znajdź symetryczną macierz $A \in M_{3\times 3}(\mathbf{R})$, taką że $\chi_A(x) = 2x^2 - x^3$, a każdy wektor płaszczyzny $2x+y+z = 0$ jest wektorem własnym A.
8. Podaj przykład macierzy symetrycznej $A \in M_{3\times 3}(\mathbf{R})$, takiej że wektory $(1,-1,0)^\top$, $(0,1,-1)^\top$ i $(1,0,-1)^\top$ są jej wektorami własnymi, a wektor $(1,2,3)^\top$ nie jest jej wektorem własnym.
9. Podaj przykład macierzy symetrycznej S rozmiaru 3×3 oraz jej trzech liniowo niezależnych wektorów własnych, z których żadne dwa nie są prostopadłe.
10. Załóżmy, że X jest wektorem własnym macierzy $A \in M_{3\times 3}(\mathbf{R})$ spełniającej warunek $A^\top = I - A$. Udowodnij, że jeśli $Y \perp X$, to $AY \perp X$.
11. Załóżmy, że $A \in M_{3\times 3}(\mathbf{R})$ jest symetryczna, $AX = \lambda X$, $AY = \mu Y$, $\langle X, Y\rangle \neq 0$. Udowodnij, że wtedy $\lambda = \mu$. Wywnioskuj stąd, że każda liniowa kombinacja wektorów X i Y jest wektorem własnym A.
12. Udowodnij, że jeśli liniowo niezależne wektory $X, Y \in \mathbf{R}^3$ są wektorami własnymi macierzy symetrycznej $A \in M_{3\times 3}(\mathbf{R})$, to również wektor $X \times Y$ jest wektorem własnym tej macierzy.
13. Podaj przykład formy kwadratowej Q na $\mathbf{R}^3$, takiej że $Q(E_1), Q(E_2), Q(E_3) > 0$, ale dla pewnego $U \in \mathbf{R}^3$ mamy $Q(U) < 0$.
14. Niech Q będzie formą kwadratową na $\mathbf{R}^3$, zaś $U, V \in \mathbf{R}^3$ będą takie, że $Q(U) = -Q(V) = 1$. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele wektorów $W \in \mathbf{R}^3$, takich że $Q(W) = 0$.
15. Wiadomo, że powierzchnia stopnia 2 zadana równaniem $ax^2 + 2bxy + 2cxz + dy^2 + 2eyz + fz^2 + g = 0$ może być elipsoidą, hiperboloidą jednopowłokową, hiperboloidą dwupowłokową, ... Uzupełnij tę listę rozważając wszystkie możliwe postacie kanoniczne powyższego równania. Uwzględnij także przypadki zdegenerowane, jak np. punkt.

---

16. Przedstaw elipsoidę o długościach półosi a, b, c jako obraz sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ przez odpowiednie przekształcenie liniowe $\mathbf{R}^3$. Znając wzór na objętość kuli i wiedząc jak zmienia się objętość pod wpływem przekształcenia liniowego oblicz objętość obszaru ograniczonego tą elipsoidą.
17. Oblicz objętość obszaru ograniczonego elipsoidą $x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2xy + 4yz = 1$.
18. Załóżmy, że $F: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ jest przekształceniem liniowym które diagonalizuje się w bazie (X, Y, Z), i że ma ono trzy różne wartości własne. Udowodnij, że każdy wektor własny F jest skalarną krotnością wektora X, Y lub Z.
19. Załóżmy, że $F: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ jest przekształceniem liniowym, że diagonalizuje się w bazie (X, Y, Z), i że ma dwie różne wartości własne – wartości własne odpowiadające wektorom X i Y są takie same. Udowodnij, że każdy wektor własny F jest kombinacją liniową wektorów X, Y lub skalarną krotnością wektora Z.
20. Uzasadnij, że dla dowolnej elipsoidy istnieje płaszczyzna, taka że ich przekrój jest okręgiem.

Algebra liniowa 1R, lista 14

1. Sprowadź poniższe powierzchnie do postaci kanonicznej: napisz macierz odpowiedniej formy kwadratowej; znajdź wartości własne i bazę ortonormalną wektorów własnych; napisz postać kanoniczną równania i macierze P i P^{-1} wiążące współrzedne x, y, z ze współrzędnymi x', y', z' w których postać równania jest kanoniczna. Zidentyfikuj powierzchnię, naszkicuj ją na tle układu współrzędnych $x'y'z'$. Odczytaj z postaci kanonicznej równania jej własności geometryczne (długości półosi, symetrię obrotową lub jej brak, odległość między powłokami, kąty półrozwarcia stożka asymptotycznego itp.). Opisz też położenie powierzchni względem układu xyz (podając kierunki półosi, osi symetrii obrotowej lub osi stożka asymptotycznego itp.).
   (a) $x^2 - 5y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 4yz = 3$,
   (f) $-2xz + y^2 = 1$,
   (e) $11x^2 + 4xy - 16xz + 2y^2 + 20yz + 5z^2 = 9$,
   (g) $5x^2 - 2xy - 2xz + 5y^2 - 2yz + 5z^2 = 3$,
2. Polecenie jak w poprzednim zadaniu, ale dla powierzchni:
   (c) $x^2 - 4y^2 - 4yz - z^2 = 0$,
   (h) $x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy - 2xz + 2zy = 0$,
   (d) $6x^2 + 5y^2 + 7z^2 - 4xy + 4xz = 0$,
   (j) $2x^2 - 8xy + 8y^2 + 12xz - 24yz + 18z^2 = 1$.
3. Dla poniższych wielomianów znajdź liczbę pierwiastków dodatnich i liczbę pierwiastków ujemnych (i stwierdź czy 0 jest pierwiastkiem). Określ też krotności pierwiastków. (Wsk. Zróżniczkuj wielomian; znajdź jego ekstrema, przedziały monotoniczności, wartości wielomianu na końcach tych przedziałów i wartość w 0. Często zamiast tej procedury wystarczy policzyć wartości w kilku sprytnie zgadniętych punktach.) (a) $-x^3 + 7x^2 + 2x - 1$, (b) $x^3 - 4x^2 + 17x - 1$, (c) $x^3 + 3x$, (d) $x^3 + x^2 - 8x - 12$, (e) $x^3 + 2x^2 - x + 2$, (f) $x^3 + x^2 + x + 3$.
4. Zidentyfikuj powierzchnię (np. jako elipsoidę, parę płaszczyzn itp.), nie znajdując dokładnych wartości współczynników postaci kanonicznej a jedynie określając ich znaki.
   (a) $x^2 - 2xy + 2y^2 + 4xz + 3z^2 = 1$,
   (b) $x^2 - 2xy + 2xz + 4yz + 3z^2 = 0$,
   (c) $x^2 + 2xy + 2y^2 + 2xz + 2yz + 4z^2 = 1$,
   (d) $-2x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 6yx - 2z^2 = 1$.
5. Dla kilku z poniższych powierzchni: znajdź postać kanoniczną równania; nazwij powierzchnię; znajdź prostokątny (niekoniecznie liniowy) układ współrzędnych X', w którym równanie powierzchni jest kanoniczne, tzn. wyznacz macierz izometrii P i wektor T, takie że $X' = P^\top X + T$; naszkicuj powierzchnię w układzie X'; określ położenie powierzchni na tle standardowego układu (zdaniami typu: " osią symetrii obrotowej rozpatrywanej hiperboloidy jest prosta $X = (1, 2, 3)^\top + t(3, 4, 5)^\top$")
   (a) $x^2 + 2xy + y^2 - z^2 + 2z - 1 = 0$,
   (d) $2xy + 2yz + 2zx + 2x + 2y + 2z + 1 = 0$,
   (b) $4x^2 - y^2 - z^2 + 32x - 12z + 44 = 0$,
   (e) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2yz - 2zx - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$,
   (c) $z^2 = 2xy$,
   (f) $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy - 8xz + 4yz - 28x + 2y + 16z + 45 = 0$,
   (g) $4x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 10xy + 4xz + 4yz - 16x - 16y + 10z - 2 = 0$.
6. Podaj przykład paraboloidy hiperbolicznej i leżącej na niej prostej.
7. Pokaż na przykładach, że przekrój stożka $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ i płaszczyzny może być elipsą, hiperbolą, parabolą.

---

8. Uzasadnij, że jeśli macierz $A \in M_{3\times3}(\mathbf{R})$ ma nierzeczywistą wartość własną, to A diagonalizuje się (nad $\mathbf{C}$).
9. Załóżmy, że macierze $A, B \in M_{3\times3}(\mathbf{R})$ mają obie wielomian charakterystyczny $(3 - x)(5 - x)^2$, ale żadna z nich nie diagonalizuje się. Wykaż, że istnieje odwracalna macierz $P \in M_{3\times3}(\mathbf{R})$, taka że $A = PBP^{-1}$.
10. Sprowadź do postaci Jordana:
$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$
11. Oblicz: $\exp\left(\begin{smallmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\exp\left[t\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right]$, $\sin\begin{pmatrix} \pi - 1 & 1 \\ -1 & \pi + 1 \end{pmatrix}$.
12. Wyprowadź wzór na $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$.
13. Udowodnij, że $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$ (dla $A \in M_{3\times3}(\mathbf{C})$).