(9) $Cl(A) = [0, \frac{1}{2}]^{\mathbb{N}}$

$\subseteq$

$\supseteq$

$(a_1, a_2, a_3, \frac{3}{4}, a_5, \dots)$

Weźmy $\underset{\text{otwarty}}{U} \ni \frac{3}{4}$ $\quad U \cap [0, \frac{1}{2}] = \emptyset$

$[0,1] \times [0,1] \times [0,1] \times U \times [0,1] \times \dots$

$Int(A) = \emptyset$ $\quad A = (0, \frac{1}{2})^{\mathbb{N}}$

$U = U_1 \times U_2 \times \dots \times [0,1] \times [0,1] \times \dots$

Nie ma takiego U, które zawiera się w A.

---

8 . $d(x,y) \overset{?}{\leq} d(x,z) + d(z,y)$ $\qquad |a-b| \leq |a-c| + |b-c|$

. $d(x,y) = d(y,x)$

używamy tego dla

$a = \sqrt{x}$

$b = \sqrt{y}$

$c = \sqrt{z}$

. $d(x,y) = 0 \iff |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = 0$

$\iff \sqrt{x} = \sqrt{y} \iff x = y$

$d \qquad d_e$

$\forall x, r \quad \exists x', r' \quad B_e(x', r') \subseteq B_d(x, r)$

$\forall x, r \quad \forall x' \in B(x,r) \ \exists r' \quad B_e(x', r') \subseteq B_d(x, r)$

$\forall x, r \quad \exists x', r' \quad B_d(x', r') \subseteq B_e(x, r)$

Chcemy

$\forall x, r \ \exists r' \quad B_e(x, r') \subseteq B_d(x, r)$

$\forall x, r \ \exists r' \quad B_d(x, r') \subseteq B_e(x, r)$

Możemy też skorzystać z zad 6

Potrzebujemy pokazać $\forall (x_n) \ \forall x$

$|x_n - x| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \iff |\sqrt{x_n} - \sqrt{x}| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$|a_n^2 - a^2| \xrightarrow[n]{} 0 \Leftarrow |a_n - a| \xrightarrow[n]{} 0$

---

(10) b_n – ciąg, który nie jest niemalejący

$\exists k \quad b_k < b_{k+1}$

$l = \frac{b_{k+1} - b_k}{2}$

$U = (b_k + l, b_k - l)$, $\quad V = (b_{k+1} + l, b_{k+1} - l)$

$U \cap V = \emptyset$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times U \times V \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$

---

b_k – dowolny ciąg $\qquad$ A - zbiór ciągów od pewnego miejsca stałych

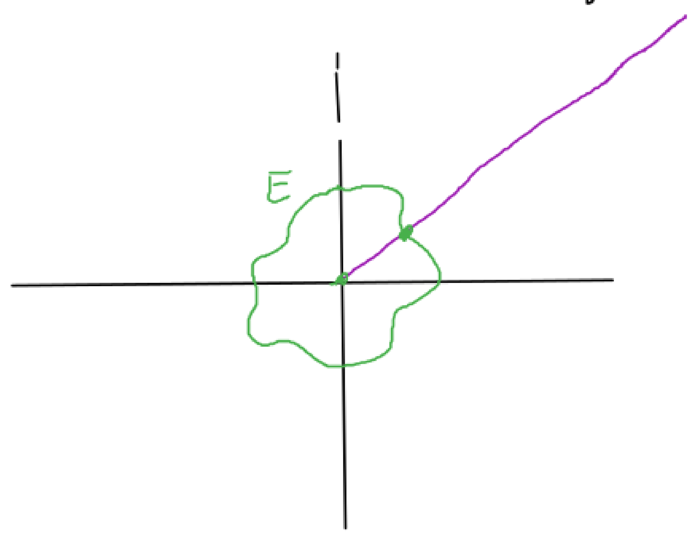
$A_i \in A$

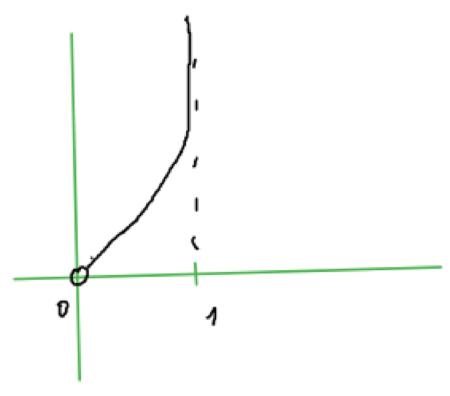
$$A_n = \begin{cases} b_i, & i \leq n \\ b_n, & i > n \end{cases}$$

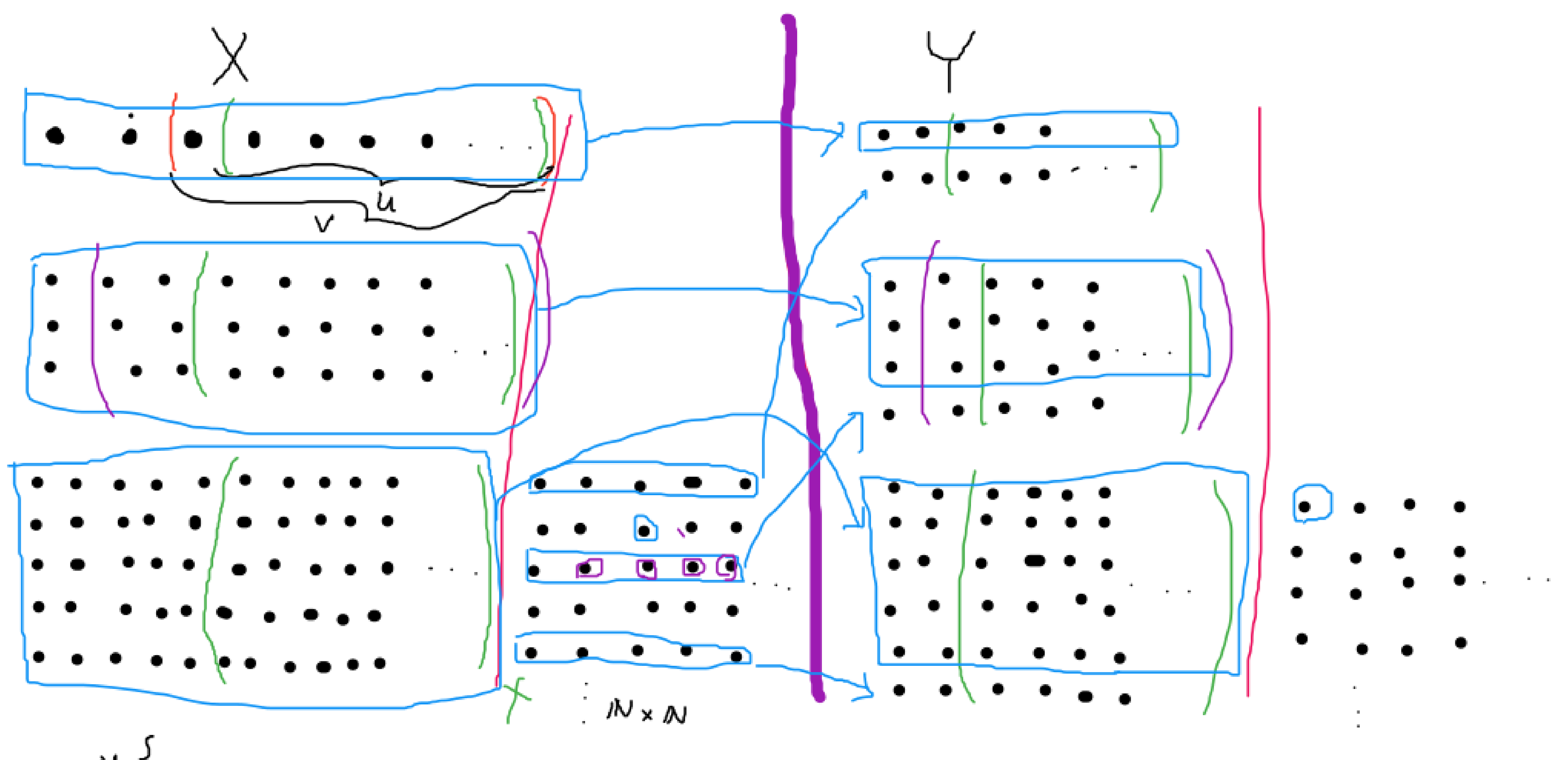
$A_n \xrightarrow[n]{} b_k$

zad 12 – w skrypcie (pod koniec)

Idea Chcemy: $\mathbb{R}^n$ jest homeomorficzny z każdym $\underbrace{\text{zbiorem otwartym i wypukłym}}_{E}$







$M \{ \underbrace{\qquad}_{\mathbb{N}}$ $\quad$ M - nieparzysta

Inny przykład

X

$[a_1, b_1) \ \underset{c_1}{\cdot} \ [a_2, b_2) \ \underset{c_2}{\cdot} \ [a_3, b_3) \ \underset{c_3}{\cdot}$

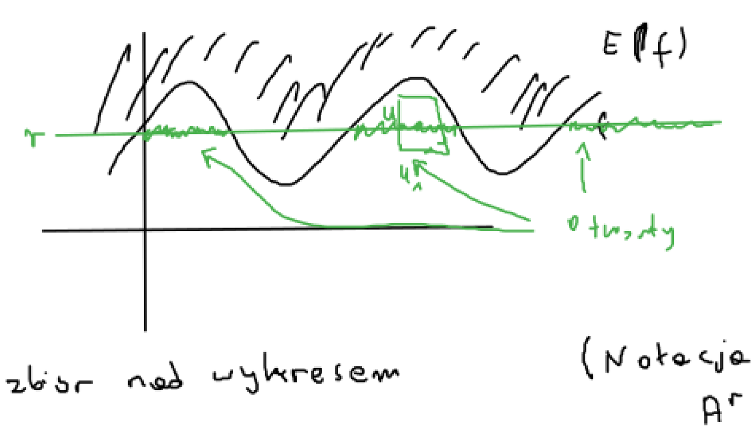
Y

$(a_1, b_1) \ c_1 \ (a_2, b_2) \ c_2 \ (a_3, b_3) \ c_3$

$X \to Y \qquad (a,b) = \underset{a}{(} \ \underset{d_2}{[} \ \underset{d_2}{)[} \ \underset{d_1}{)[} \ \underset{b}{)}$

$Y \to X \qquad [a, b) \qquad \underset{c = a}{\cdot(} \quad \underset{b}{]}$

1 / L.4



E(f) – zbiór nad wykresem

$\{(x,t) : f(x) > t\}$

• Jeśli $(X \times \mathbb{R}) \setminus E(f)$ jest otwarty, to jeśli $r \in \mathbb{R}$,

$\{x : f(x) > r\} =$

$= \{(x,t) : f(x) > t\}^r$, jest również otwarty.

(Notacja: dla $A \subseteq X \times \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$, $A^r = \{x \in X : (x,r) \in A\}$)

• Załóżmy teraz, że f jest półciągła z dołu.

Weźmy $(x_0, y_0) \in (X \times \mathbb{R}) \setminus E(f) = \{(x,t) : f(x) > t\}$

Ustalmy $\varepsilon > 0$ t. że $f(x_0) - \varepsilon > y_0$.

Zbiór $U_1 = \{x : f(x) > f(x_0) - \varepsilon\}$ jest otwarty, ponieważ f jest półciągła z dołu. Niech $0 < \delta < (f(x_0) - \varepsilon) - y_0$.

Niech $U = U_1 \times U_2$, gdzie $U_2 = (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$.

Wówczas $U \cap E(f) = \emptyset$.