Równania różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu

Literatura:

H. Marcinkowska, Wstęp do teorii r. r. cz.

L.C. Evans, Partial Differential Equations

◊ Wykłady z równań różniczkowych cząstkowych (Toruń 2002)

Trzy ważne przykłady

równanie falowe

$N=1$ równanie struny $u_{tt} = u_{xx}$ $\quad$ u - wychylenie od położenia równowagi

wyprowadzenie: str. 7–8, ◊

$N \geq 2$ $\quad u_{tt} = \sum_{j=1}^{N} u_{x_j x_j} \equiv \Delta u$ $\quad$ (Δ - laplasjan, czyli $\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$)

opisuje rozchodzenie się dźwięku (fale akustyczne) i fal elektromagnetycznych $N=3$

$N=2$ drgania membrany

równanie przewodnictwa cieplnego

opisuje bilans zmian ciepła w obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^N$,

u - temperatura $\quad u_t = \sum_{j=1}^{N} u_{x_j x_j} \equiv \Delta u$

równanie Laplace'a

opisuje stany stacjonarne (niezależne od czasu) w równaniu falowym albo w równaniu przewodnictwa ciepła

$\Delta u = 0$

ogólniejsze równanie Poissona $\Delta u = f$ opisuje potencjał grawitacyjny (elektryczny) wytworzony przez materię o gęstości f (odpowiednio: przez cząstki naładowane o gęstości ładunku f).

Własności rozwiązań tych trzech równań są bardzo różne, a metody badania całkiem inne.

Inne ważne równania cząstkowe

równanie Fokkera-Plancka $u_t = \Delta u + \nabla\cdot(u\nabla V)$

z zadanym potencjałem $V=V(x)$

równanie Schrödingera (w mechanice kwantowej)

$u: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$

$i u_t = \Delta u - Vu$ V - potencjał, u gęstość f. falowej

równania Naviera-Stokesa (ruch cieczy lepkiej, nieściśliwej)

$u_t = \Delta u - (u\cdot\nabla)u - \nabla p$ u - prędkość, p - ciśnienie

$\nabla\cdot u = 0$ warunek nieściśliwości

Klasyfikacja liniowych r. r. cz. drugiego rzędu ◇, str. 23-24

operator $Lu = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum b_i(x) u_{x_i} + c(x)u$

$A(x) = [a_{ij}(x)]$ - macierz współczynników, $b(x) = (b_i(x))$ - wektor

$a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ można założyć bez straty ogólności,

bo jeżeli $u \in C^2$, to pochodne mieszane spełniają $u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}$

Operatory L klasyfikujemy wg tego jakie własności

ma macierz A

operator eliptyczny - jeżeli macierz $A(x)$ jest ściśle

dodatnio określona (albo ściśle ujemnie określona)

$\forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$

typowy przykład: operator Laplace'a $\Delta = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$

$A(x) = I$ macierz identycznościowa

operator hiperboliczny - jeżeli macierz $A(x)$

ma sygnaturę $N-1, 1$ (czyli ma niezerowe wartości własne

niezerowe i jedna z nich jest przeciwnego znaku co

pozostałe, np. $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

Jeżeli wyróżnimy ostatnią zmienną x_N jako czas t,

to operator falowy przybiera tę postać: $\Box_N \equiv \Delta_{N-1} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$

Δ_{N-1} - laplasjan w $\mathbb{R}^{N-1}$

operator paraboliczny

$$L = \sum_{i,j=1}^{N-1} a_{ij}(x)\, u_{x_i x_j} - u_{x_N},$$

gdzie $[a_{ij}(x)]$ tworzy macierz dodatnio określoną w $\mathbb{R}^{N-1}$, x_N - zmienna, po której nie ma pochodnych drugiego rzędu tak, jak w operatorze przewodnictwa cieplnego

$$\Delta - \frac{\partial}{\partial t}$$

Taka klasyfikacja oczywiście nie obejmuje wszystkich (ciekawych) przypadków, np. równanie Tricomiego $y u_{xx} = u_{yy}$ jest mieszanego typu ($y>0$ - eliptyczne, $y<0$ - hiperboliczne), a opisuje ono przepływy gazu pod- i naddźwiękowe.

Jest też wiele interesujących równań wyższego rzędu niż 2, np. $\Delta^2 u = 0$ (z bilaplasjanem $\Delta^2 = \Delta(\Delta)$ ważne w teorii sprężystości), czy też równanie Kortewega - de Vriesa $u_t + u_{xxx} + u u_x = 0$ (opisujące fale na powierzchni wody w kanale).

Powyższe równanie jest nieliniowe; zawiera wyraz $u u_x$.

Wiele ważnych równań jest nieliniowych, np. $u_t = \Delta(u^2)$ równanie filtracji w ośrodkach porowatych, równanie Monge'a - Ampère'a

$$\det \begin{vmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{yx} & u_{yy} \end{vmatrix} = 1$$

(które ma charakter eliptyczny jeżeli funkcja u jest wypukła).

Niewiele jest ogólnych twierdzeń o r. r. cz. (nawet tylko liniowych), por. $\diamond$ str. 24.

Jednowymiarowe równanie falowe ≡ r. struny

(*) $u_{tt} = u_{xx}$

po zamianie zmiennych $\xi = x - t$, $\eta = t + x$ przybiera ono postać $u_{\xi\eta} = 0$; pisząc $u(\xi,\eta) = u(x,t)$ mamy

$u_t = -u_\xi + u_\eta$, $u_x = u_\xi + u_\eta$, $u_{tt} = u_{\xi\xi} - u_{\eta\xi} - u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$,

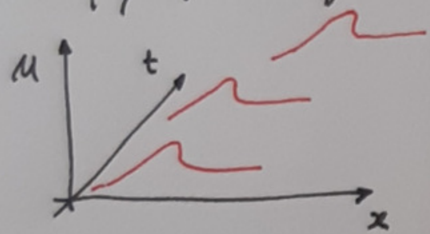
$u_{xx} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\xi} + u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$, więc $u_{\xi\eta} = 0$.

Zatem $u_\xi = \Phi(\xi)$ <u>nie</u> zależy od η, czyli $u = \int\Phi(\xi) + \Psi(\eta)$.

Wracając do zmiennych x, t otrzymujemy

(**) $u(x,t) = \varphi(x-t) + \psi(x+t)$ dla pewnych funkcji $\varphi, \psi \in C^2$. A jeżeli weźmiemy dowolne $\varphi, \psi \in C^2$, to – jak łatwo sprawdzić – (**) jest rozwiązaniem (*)

Proste o równaniach $t - x = const$, $t + x = const$ nazywa się <u>charakterystykami r. falowego</u> (*). Wzdłuż nich przenoszone są wartości rozwiązania φ, ψ – odpowiednio. Ruch ma charakter <u>falowy</u>.



Zagadnienie Cauchy'ego (początkowe) dla (*) opisuje ruch nieograniczonej i niezamocowanej struny

$$(***)\quad \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & (x,t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = u_0(x) \\ u_t(x,0) = u_1(x) \end{cases}$$

(*) jest drugiego rzędu ze względu na t, więc zadajemy <u>dwa</u> warunki początkowe:

u_0 – wychylenie, u_1 – prędkość struny.

Skoro (**) jest ogólnym rozwiązaniem (*), to spróbujemy dobrać φ i ψ tak, aby (***) zachodziło.

$$\begin{cases} u_0(x) = \varphi(x) + \psi(x) \\ u_1(x) = -\varphi'(x) + \psi'(x) \end{cases} \Rightarrow \psi(x) - \varphi(x) = \int_0^x u_1 + c$$

(wybieramy konkretną pierwotną u_1 i pewną stałą c);

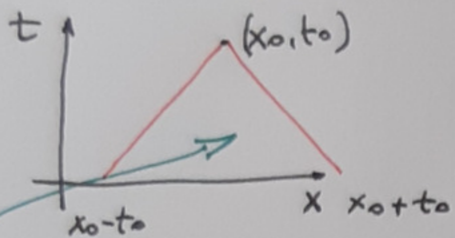
dalej $\quad \psi(x) = \frac{1}{2} u_0(x) + \frac{1}{2}\int_0^x u_1 + \frac{c}{2}$, i ostatecznie

$\quad \varphi(x) = \frac{1}{2} u_0(x) - \frac{1}{2}\int_0^x u_1 - \frac{c}{2}$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left\{ u_0(x-t) + u_0(x+t) + \int_{x-t}^{x+t} u_1(s)\,ds \right\}$$

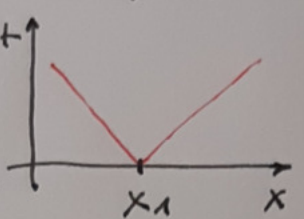
wzór D'Alemberta

Aby otrzymać $u \in C^2$ trzeba (i wystarczy) założyć, że $u_0 \in C^2$, $u_1 \in C^1$.



Na rozwiązanie u w (x_0,t_0) wpływają zatem wartości funkcji początkowych w zbiorze $[x_0-t_0, x_0+t_0] \times \{t=0\}$.

A wartości u_0 i u_1 w $(x_1,0)$ wpływają na wartości rozwiązania u w zbiorze



. Ten zbiór nazywa się stożkiem charakterystycznym przyszłości i jest on obszarem zależności u od $(x_1,0)$.

Podobnie, ten stożek nazywa się stożkiem charakterystycznym przeszłości i jest on obszarem wpływu na $u(x_0,t_0)$

Jeżeli v spełnia (*) z warunkami v_0, v_1, to ze wzoru D'Alemberta łatwo uzyskać oszacowanie dla $t \in \mathbb{R}$:

$$\|u - v\|_\infty \le C(t)\left(\|u_0 - v_0\|_\infty + \|u_1 - v_1\|_\infty\right)$$

Tu: $\|w\|_\infty = \max_{y \in \mathbb{R}} |w(y)|$, $C(t) = 1 + |t|$,

a tu myślimy o $\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_\infty$.

Jest to zatem ciągła zależność rozwiązania od danych początkowych

Przykład $u_{tt} = u_{xx}$ $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$

opisuje strunę półnieskończoną. Można ją umocować w $x=0$:
$u(0,t)=0$ i poszukać ze wzoru D'Alemberta rozwiązania dla $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ nieparzystego względem x.

Zagadnienie początkowe dla wielowymiarowego równania falowego $u_{tt} = \Delta u$ ◇, str. 12-15

można uzyskać jawne wzory na rozwiązanie. Mają one dość skomplikowany charakter, różny dla $N=2$ i $N=3$ (i ogólniej dla N parzystych i N nieparzystych), używają one średnich całkowych z warunków początkowych po kulach ($N=2$), lub po sferach ($N=3$).

Jakościowo te różnice oddaje zasada Huygensa, ◇, str. 16.

Można ją nieformalnie wysłowić następująco: początkowe zaburzenia w trójwymiarowej przestrzeni propagują się z prędkością równą 1. W dwuwymiarowej przestrzeni ta prędkość nie przekracza 1 (i może zachodzić tzw. dyfuzja fal dźwiękowych).

Sformułowanie z ◇, str. 16 mówi o obszarach wpływu i obszarach zależności, podobnie jak to widzieliśmy analizując wzór D'Alemberta.