(1) Wykazać, że dla przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ następujące warunki są równoważne:
   (a) $(X, \mathcal{T})$ jest przestrzenią Hausdorffa,
   (b) przekątna $\Delta = \{(x, x) \colon x \in X\} \subseteq X \times X$ jest zbiorem domkniętym w kwadracie kartezjańskim przestrzeni $(X, \mathcal{T})$.

(2) Niech
   (a) $Z_0 = \mathbb{N}$,
   (b) $Z_1 = \{0\} \cup \{\frac{1}{i} \colon i = 1, 2, \ldots\}$,
   (c) $Z_2 = \mathbb{N} \cup Z_1$,
   (d) $Z_3 = \{0\} \cup \{\frac{1}{i} + \frac{1}{j} \colon i, j = 2, 3, \ldots,\ \frac{1}{j} < \frac{1}{i-1} - \frac{1}{i}\}$.

   Pokazać, że żadne dwie spośród podprzestrzeni Z_0, Z_1, Z_2, Z_3 prostej euklidesowej nie są homeomorficzne.

(3) Funkcję ciągłą $f : X \to Y$ nazywamy przekształceniem *domkniętym* jeżeli obraz $f[F]$ jest domknięty w Y dla każdego domkniętego $F \subseteq X$. *Otwartość* odwzorowania f definiujemy analogicznie, zastępując 'domknięty' przez 'otwarty'.

   Podać przykłady ciągłych funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, które nie są otwarte (nie są domknięte).

(4) Sprawdzić, że $f : X \to Y$ jest przekształceniem domkniętym wtedy i tylko wtedy gdy $\overline{f[A]} = f[\overline{A}]$ dla dowolnego $A \subseteq X$, a f jest przekształceniem otwartym wtedy i tylko wtedy gdy f jest ciągłe i $f[\mathrm{Int}\,(A)] \subseteq \mathrm{Int}\, f[A]$ dla dowolnego $A \subseteq X$.

(5) Sprawdzić, że dla $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ w przestrzeni $X \times Y$ zachodzą wzory:
   (a) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$;
   (b) $\mathrm{Int}\,(A \times B) = \mathrm{Int}\, A \times \mathrm{Int}\, B$;
   (c) $\mathrm{Bd}\,(A \times B) = (\overline{A} \times \mathrm{Bd}\, B) \cup (\mathrm{Bd}\, A \times \overline{B})$.

(6) Z definicji, metryki d_1 i d_2 na zbiorze X są *równoważne* jeżeli wyznaczają te same zbiory otwarte. Ustalić, dlaczego metryki d_1 i d_2 na przestrzeni X są równoważne wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego ciągu (x_n) w X i $x \in X$,

$$\lim_n d_1(x_n, x) = 0 \iff \lim_n d_2(x_n, x) = 0.$$

(7) Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną. Sprawdzić, że wzory

$$d_1(x, y) = \min(\rho(x, y), 1), \qquad d_2(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)},$$

   definiują ograniczone metryki na X, równoważne z wyjściową metryką ρ.

(8) Rozważyć metrykę $d(x, y) = |\sqrt{x} - \sqrt{y}|$ na $[0, \infty)$; czy jest ona równoważna metryce euklidesowej?

(9) Zbadać brzeg, wnętrze i domknięcie $(0, 1/2)^{\mathbb{N}}$ w $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.

(10) Sprawdzić, że zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ złożony z tych ciągów $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, które są niemalejące jest domknięty, a zbiór ciągów stałych od pewnego miejsca jest gęsty.

(11) Sprawdzić, że każdy rzut $\pi_s : \prod_{t \in T} X_t \to X_s$ jest odwzorowaniem otwartym. Zauważyć, że rzut $\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nie jest domknięty.

(12) Powiemy, że podzbiór A przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ jest *wypukły* jeśli dla każdych $x, y \in \mathbb{R}^n$, i dla każdego $0 \leq t \leq 1$ mamy, że jeśli $x, y \in A$ to również $tx + (1-t)y \in A$. Pokazać, że dowolne dwa otwarte niepuste podzbiory $\mathbb{R}^n$ są homeomorficzne.

(13) Podać przykład dwóch przestrzeni topologicznych X i Y które nie są homeomorficzne, dla których istnieją $f\colon X \to Y$ oraz $g\colon Y \to X$ ciągłe bijekcje.

Wskazówka: Można wskazać takie X i Y będące podzbiorami prostej rzeczywistej.