$\forall_{x \in X}$
$|d(x,C) - d(x,B)| \leq |d(x,C) - d(x,A)| + |d(x,A) - d(x,B)|$

$B(s_i, \varepsilon)$ ← pokrywają X

$S = \{s_1, \dots, s_k\}$

$f(t) = s_i \Rightarrow t \in B(s_i, \varepsilon)$

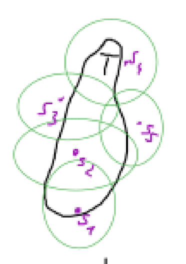
Pokażemy, że
$\{B_H(S', \varepsilon) : S' \subseteq S\}$ pokrywa $K(X)$

$K(X) \ni T$ $\quad S'' = f[T]$

$\forall_{x \in T}\ d(x, S'') < \varepsilon$
$\forall_{s \in S''}\ d(s, T) < \varepsilon$

$d_H(S'', T) < \varepsilon$

$S'' = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$

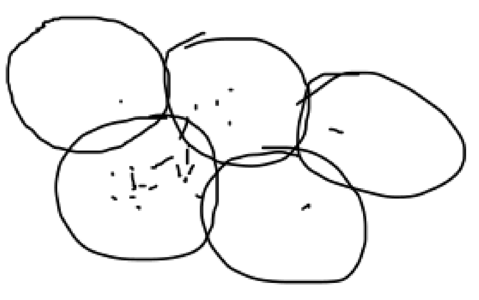


Każde z kul ma promień ε

$d_H(T, S'') < \varepsilon$

Sprawdzamy
- $S'' \subseteq (T)_\varepsilon$
- $T \subseteq (S'')_\varepsilon$

gdzie
$(A)_\varepsilon = \{x \in X : d(x,A) \leq \varepsilon\}$



$d(a_n, a_m) < 2\varepsilon$

$\subseteq B_H(S, \frac{1}{n})$

$\frac{1}{n}$ $\quad (a_n) \to (a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots)$

Startujemy z (a_n) w X

$A_1 \subseteq \mathbb{N}$ Krok 1 $\rightarrow$ $(a_n)_{n \in A_1}$ jest w całości zawarty w pewnej kuli o promieniu 1

$A_2 \subseteq A_1$ krok 2 $\rightarrow$ $(a_n)_{n \in A_2}$ — " — $\frac{1}{2}$ diagonalnie

$A_k \subseteq A_{k-1}$ krok k $\rightarrow$ $(a_n)_{n \in A_k}$ — " — $\frac{1}{k}$

Wybieramy $b_1 \in A_1$
$b_2 \in A_2$
$\vdots$
$b_k \in A_k$
$\vdots$

$\underbrace{b_1 < b_2 < \dots < b_k < \dots}_{B}$

Dostajemy, że $(a_n)_{n \in B}$ jest ciągiem Cauchy'ego.

$\forall_k \exists F_k \subseteq \mathbb{N}$ skończony $\quad B \setminus F_k \subseteq A_k$

$\forall_{i,j \in A_k} \quad d(a_i, a_j) < 2 \cdot \frac{1}{k}$

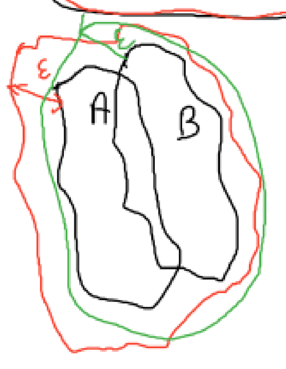
Ciąg Cauchy'ego nie musi mieć podciągu zbieżnego.

Przykład
$(\mathbb{R}, d_e)$ $\quad (\mathbb{R} \setminus \{0\}, d_e)$
$a_n = \frac{1}{n}$

Metryka Hausdorffe $\quad B \subseteq A_\varepsilon \quad A \subseteq B_\varepsilon$

(X,d) $\quad K(X)$

$d_H(A,B) = \max\{\underbrace{\sup\{d(x,A) : x \in B\}}_{\leq \varepsilon}, \underbrace{\sup\{d(x,B), x \in A\}}_{\leq \varepsilon}\} \leq \varepsilon$



$d_H(A,B) \leq \varepsilon$

$A_\varepsilon = \{x \in X : d(x,A) \leq \varepsilon\}$

$\forall x \in B \quad d(x,A) \leq \varepsilon$
$\forall x \in B\ \exists a \in A \quad d(x,a) \leq \varepsilon$

---

zad 12

(B_n) ciąg Cauchy'ego w $K(X)$

Chcemy pokazać $\quad \lim_{n \to \infty} B_n = \underbrace{\bigcap_n \overline{\bigcup_{k \geq n} B_k}}_{= B}$

Pokażemy $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N$
1. $B \subseteq (B_n)_\varepsilon$
2. $B_n \subseteq (B)_\varepsilon$

Ustalmy $\varepsilon > 0$
z faktu, że (B_n) jest Cauchy'ego $\exists N$
$\forall_{i,j \geq N}\ d_H(B_i, B_j) \leq \varepsilon$

Pokażujemy 1. Weźmy $m \geq N$
dla $i \geq n$ $\quad B_i \subseteq (B_n)_\varepsilon$
$\bigcup_{i \geq n} B_i \subseteq (B_n)_\varepsilon$
$B \subseteq \overline{\bigcup_{i \geq m} B_i} \subseteq (B_n)_\varepsilon$ ← zbiór domknięty

2. Chcemy $B_n \subseteq (B)_\varepsilon$ $\quad n \geq N$
Weźmy $b_n \in B_n$. Pokażemy, że dla pewnego $b \in B$
$d(b_n, b) \leq \varepsilon$

Dla $i \geq n \geq N$ mamy $d(B_i, B_n) \leq \varepsilon$
zatem weźmy $b_i \in B_i$ $\quad d(b_i, b_n) \leq \varepsilon$.
Rozważmy $(b_i)_{i \geq n}$.
Ze zwartości X, istnieje podciąg zbieżny (b_{i_j}) do $a \in X$
Cel: $a \in B$. (Weźmiemy $b = a$.)
Ustalmy k. Weźmy J t. że dla $j \geq J$
$b_{i_j} \in \bigcup_{r \geq k} B_r$

Mamy $\forall_k \quad a \in \overline{\bigcup_{r \geq k} B_r}$

Zatem $a \in \bigcap_k \overline{\bigcup_{r \geq k} B_r} = B$

Ponieważ $\forall i \geq n\ d(b_i, b_n) \leq \varepsilon$
to $d(a, b_n) \leq \varepsilon$. ∎

Dygresja do zad (3)

A zwarty $\subseteq [0,1]$

pary punktów $S = \{\{x,y\} : x, y \in A\} \subseteq K([0,1])$

$f : S \to K([0,1]^2)$ $\quad S$ - zwarty (tzn $S \in K(K[0,1])$)

$f(\{x,y\}) = O(x,y)$ $\quad f$ jest funkcją ciągłą

Zatem $f(S)$ jest zwarty $\quad f(S) \in K(K([0,1]^2))$

$O(A) = \underbrace{\bigcup f(S)}_{\uparrow \text{zwarty}} \in K([0,1]^2)$

---

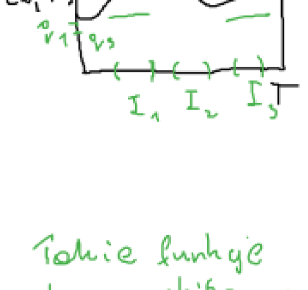
(13)

$[0,1]^T$ $\quad T \subseteq [0,1]$

Baza topologii : $\quad s_1, s_2, \dots, s_k \in T$

$\prod_{t \in T} V_t$ $\quad V_t$ jest zbiorem otwartym w $[0,1]$

$\forall_{s \neq s_i} \quad V_t = [0,1]$



$T \subseteq [0,1]$

$f \in \prod_{t \in T} [0,1]^T$

$f : T \to [0,1]$

$I_1, I_2, \dots, I_k$ otwarte rozłączne w $[0,1]$ ← odcinki o końcach wymiernych

$q_1, \dots, q_k \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$

Takie funkcje tworzą zbiór gęsty w $[0,1]^T$ ← $\begin{cases} f(x) = q_i & \text{dla } x \in I_i \\ f(x) = 0 & \text{dla } x \notin I_1 \cup \dots \cup I_k \end{cases}$