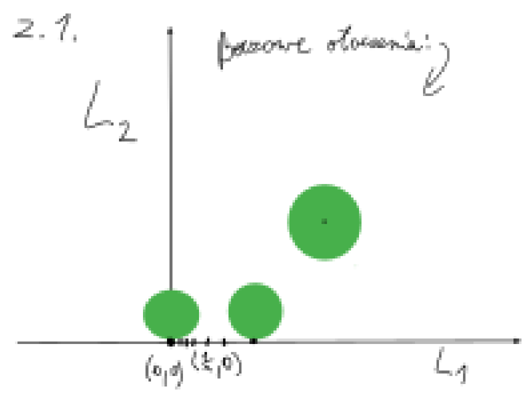
2.1.

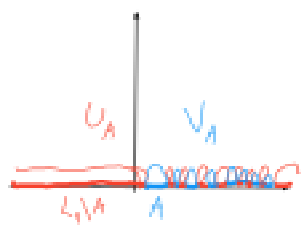


(a) $C = \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}_+$ – ośrodek w X, bo
– przeliczalny
– gęsty: wystarczy pok. że dowolne bazowe otoczenie kroi się niepusto z $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}_+$ – jasne.

(b) każdy singleton w L_1 jest śladem zbioru otwartego, więc każdy $A\subset L_1$ jest otwarty w L_1.

(c) Zauważmy, że L_1 jest domknięty w X, więc dla każdego $A\subset L_1$ A, $L_1\setminus A$ – domknięte w X.

Zał. nie wprost X jest T_4, wtedy dla takich zbiorów A, $L_1\setminus A$ istnieją rozłączne $V_A\supseteq A$, $U_A\supseteq L_1\setminus A$. $C=\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}_+$



wybieram $\rightsquigarrow f: \underset{\mathcal{P}(L_1)}{A} \longmapsto \underset{\mathcal{P}(C)}{C\cap V_A}$ $\quad |\mathcal{P}(L_1)| = 2^{\mathfrak{c}}$, $|\mathcal{P}(C)| = \mathfrak{c}$

• f jest 1–1, bo dla $A\neq B$, $A,B\in\mathcal{P}(L_1)$

$x\in A\setminus B \Rightarrow x\in A\subseteq V_A$, $x\in L_1\setminus B\subseteq U_B$

$x\in V_A\cap U_B$ – zbiór otw, więc zawiera pewien $c\in C$. Zatem

$c\in V_A\cap C = f(A)$, $\quad c\notin V_B \Rightarrow c\notin f(B)$

$\Rightarrow f(A)\neq f(B)$. $\quad\lightning$

2.4. $\Leftarrow$

$X\setminus\overline{V} = A \supseteq F$
$B = V$

2.5. T: $\mathcal{C}^{\mathbb{N}} \cong \mathcal{C}$ $\qquad \mathcal{C}\cong\{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$\Rightarrow$ wystarczy$^{*)}$ pokazać: $\underline{\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}}$:

$\{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ $\qquad$ 0110001…

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ \vdots \end{matrix}$$

Weźmy jakieś $\varphi: \mathbb{N} \xrightarrow{bij} \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

Wówczas macierzy $(a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ przyporządkowujemy ciąg $(a_{\varphi(n)})_n$;

– czyli $\underline{h: \left(\{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\right) \longrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}}$

$h\left((a_{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}\right) = (a_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$

– czyli dla $a\in\{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$

$h(a) = x\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$: $(\forall_{n\in\mathbb{N}})\, x_n = a_{\varphi(n)}$

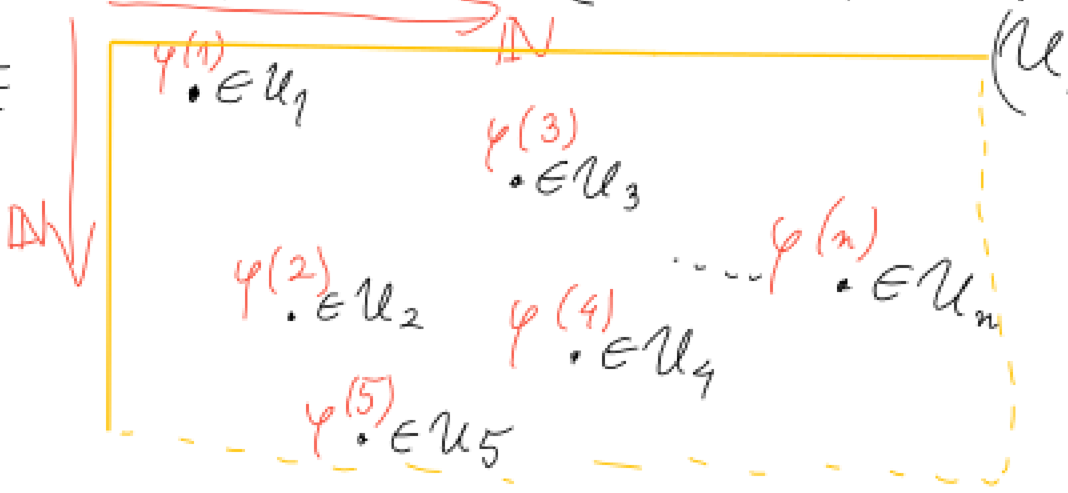
• h jest bijekcją ✓

• h jest ciągła: wystarczy sprawdzić otwartość $h^{-1}(B)$ dla B bazowego w $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Weźmy więc

$B = U_1\times U_2\times\dots\times U_n\times\{0,1\}\times\cdots$

$a\in h^{-1}(B) \iff h(a)\in B \iff (\forall_{k\le n})\,(h(a))_k = a_{\varphi(k)}\in\mathcal{U}_k \iff$

$\iff a\in$



($\mathcal{U}_k$ – otw podzb. $\{0,1\}$)

• podobnie h^{-1} – ciągła

Podobnie można pokazać, że:

– $\mathcal{C}\cong\mathcal{C}^2$, bo $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\{1,2\}}$

– $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \cong \{0,1\}^{A}$ $\quad |A| = \aleph_0$

*) $X\cong Y \Rightarrow X^{\mathbb{N}}\cong Y^{\mathbb{N}}$, bo jeśli $h: X\xrightarrow{homeo} Y$, to

$\underset{\text{homeom}}{h\times h\times\cdots} : X^{\mathbb{N}} \to Y^{\mathbb{N}}$; $(x_1,x_2,\dots) \longmapsto (h(x_1), h(x_2),\dots)$

(ciągła, bo $\pi_n\circ(h\times h\times\cdots) = h(\pi_n(x))$
$(h\times h\times\cdots)^{-1}$ analogicznie ciągłe, bo h^{-1} – ciągłe)

T $\exists f: \mathcal{C} \underset{na}{\xrightarrow{ciągłe}} [0,1]^{\mathbb{N}}$ ← kostka Hilberta / Tichonowa

• mam $h: \mathcal{C}\xrightarrow{homeo}\mathcal{C}^{\mathbb{N}}$

• mam $g: \mathcal{C} \underset{na}{\xrightarrow{ciągłe}} [0,1]$

$\rightsquigarrow$ $g\times g\times\cdots ;\ \mathcal{C}^{\mathbb{N}} \underset{na}{\xrightarrow{ciągłe}} [0,1]^{\mathbb{N}}$

$f = (g\times g\times\cdots)\circ h$ ✓