Wiktor Pilarczyk 308533

Zad 1 [Skany są wykonane po kolei]

a) $A = [0,1) \times \{0\}$

$Int(A) = \emptyset$

Dowód nie wprost

$Int(A) \neq \emptyset$

Weźmy $x \in Int(A) \Rightarrow x \in A \Rightarrow x = (a, 0)$, gdzie $a \in [0,1]$

skoro $x \in Int(A)$ to istnieje $r > 0$, t. że $B(x, r) \subseteq A$

ale $(a, \frac{r}{2}) \in B(x, r)$ i $(a, \frac{r}{2}) \notin A$

, a przecież $B(x,r) \subseteq A$ ↯

□

$\bar{A} = [0,1] \times \{0\}$

Wynika to z tego, że $A \subseteq \bar{A}$ więc $[0,1) \times \{0\} \subseteq \bar{A}$

oraz $(1,0) \in \bar{A}$ bo istnieje $x_n = (1 - \frac{1}{n}, 0)$

$\forall n \; x_n \in A$ i $x_n \to (1,0)$ więc $(1,0) \in \bar{A}$.

I wiemy, że $\left((-\infty, 0) \cup (1, \infty)\right) \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jest otwarty

więc $\bar{A} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus (\;)$ jest domknięty

$Bd(A) = \bar{A} \setminus Int(A) = [0,1] \times \{0\}$

Scanned with CamScanner

Wiktor Pikaczyk 308533

Zad 1

b) $B = \mathbb{N}\times\mathbb{R} \cup \{(x,y): 0 \leq x \leq 1, y \in \mathbb{R}\} = (\mathbb{N}\cup[0,1])\times\mathbb{R}$

$\operatorname{Int}(B) = (0,1)\times\mathbb{R}$

Dowód

Pokażmy, że nie ma nic poza

Weźmy $x \in B \setminus (0,1)\times\mathbb{R} = \mathbb{N}\times\mathbb{R}$

i załóżmy nie wprost, że $x \in \operatorname{Int}(B)$

czyli istnieje $r>0$ $B(x,r) \subseteq B$

niech $x=(a,b)$ i $r \in \mathbb{R}$

$\left(a+\frac{\sqrt{3}}{3}r, b\right) \in B(x,r)$ i $\left(a+\frac{\sqrt{3}}{3}r, b\right) \notin B$

a $B(x,r) \subseteq B$ ↯

więc nie ma takiego punktu

Pokażmy, że $\forall x \in (0,1)\times\mathbb{R}$ $x \in \operatorname{Int} B$

Weźmy dowolne $x \in (0,1)\times\mathbb{R}$ niech $x=(a,b)$

Pokaże, że istnieje $r$ t.ż. $B(x,r)\subseteq B$

niech $2r = \min(a, 1-a)$

boy $B(x,r)\subseteq B$

Weźmy dowolne $y \in B(x,r)$

$y=(c,d)$

Interesuje nas zmienna c bo $d \in \mathbb{R}$ jest zawsze „prawidłowe" – należy do żądanego przedziału

Chcemy, żeby $c \in [0,1]\cup\mathbb{N}$

$c \in \left(a-\frac{r}{2}, a+\frac{r}{2}\right)$

1° $a < 1-a \Rightarrow a < \frac{1}{2}$ [$a \in [0,1]$ przypomnienie]

$c \in \left(\frac{a}{2}, \frac{3}{2}a\right) \subseteq [0,1]\cup\mathbb{N}$

2° $a \geq 1-a \Rightarrow a \geq \frac{1}{2}$ 

$c \in \left(\frac{3}{2}a-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\right) \subseteq [0,1]\cup\mathbb{N}$ więc $y \in B$

Scanned with CamScanner

Wiktor Pilarczyk 308533

Zad 1

b) c.d więc skoro $y \in B$ to udowodniliśmy, że $\mathrm{Int}(B) = [0,1] \times \mathbb{R}$

$\overline{B} = (\mathbb{N} \cup [0,1]) \times \mathbb{R} = B$

Dowód

Korzystając z definicji, że każde otoczenie $x \in \overline{B}$ przecina B

Weźmy dowolny $x \in B \setminus ((\mathbb{N} \cup [0,1]) \times \mathbb{R})$

$x = (a,b)$ $\quad a \overset{**}{\in} (n_1, n_1+1)$ $\quad n_1 \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$

niech $r = \min(a - n_1, n_1+1-a)$

Pokaże, że $B(x,r) \cap B = \emptyset$

Weźmy dowolne $y \in B(x,r)$

$y = (c,d)$, żeby $y \in B$ to $c \in \mathbb{N} \cup [0,1]$, $d \in \mathbb{R}$

d spełnia to więc rozważmy c

1° $a - n_1 < n_1+1-a \Rightarrow a < n_1 + \frac{1}{2}$ $*$

więc $c \in (n_1, 2a - n_1) \overset{*\,i\,**}{\Rightarrow} c \notin B$

2° $a - n_1 \geq n_1+1-a \Rightarrow a \geq n_1 + \frac{1}{2}$

więc $c \in (2a - n_1 - 1, n_1+1) \overset{*\,i\,**}{\Rightarrow} c \notin B$

więc z tego wynika, że istnieje otoczenie, które nie przecina B

Więc $\overline{B} = (\mathbb{N} \times [0,1]) \times \mathbb{R}$

$\leftarrow \mathbb{N} \geq 0$

$\mathrm{Bd}(B) = \overline{B} \setminus \mathrm{Int}(B) = \mathbb{N} \times \mathbb{R}$

Scanned with CamScanner

Wiktor Pikosz 308533

# Zad 1

c) $C = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

$Int(C) = \emptyset$

Dowód

$(x=(a,b))$

Weźmy dowolny $x \in C$ i załóżmy nie wprost, że istnieje $r>0$ t. że $B(x,r) \subseteq C$

~~Weźmy dowolny $x \in$ ... $B(x,r)$~~

Możemy zobaczyć $y \in B(x, r)$ t. że $x \notin C$

bo np. w przedziale $[a, a+r)$ istnieje $d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

$(d,b) \in B(x,r)$, ale $(d,b) \notin C$

więc

$Int(C) = \emptyset$

Domknięcie

$\overline{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Korzystając z definicji

$\overline{C} = \{x \in C : \exists (x_n) \subset A : x_n \to x\}$

a wiemy z analizy, że dla każdej liczby ~~rzeczy~~ $x \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ możemy skonstruować taki ciąg

$Bd(C) = \overline{C} \setminus Int(C) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Scanned with CamScanner

Wiktor Pilarczyk 308533

Zad 2

$f: X \to Y$ ciągła $\iff f^{-1}[\mathrm{Int}(B)] \subseteq \mathrm{Int}(f^{-1}[B])$ dla dow. $B \subseteq Y$

„$\Rightarrow$"

Weźmy dowolne

$x \in f^{-1}[\mathrm{Int}(B)] \iff f(x) \in \mathrm{Int}(B)$

$\Updownarrow$

Istnieje otoczenie $f(x_0)$ - $U$

t.że $U \subset B$

$\Updownarrow$

Istnieje $U$ otoczenie $f(x_0)$

t.że $f^{-1}[U] \subseteq f^{-1}[B]$

$*$ otwarte bo $U$ otwarte i $f$ ciągłe

$x_0 \in f^{-1}[U] \subseteq f^{-1}[B]$

$\Downarrow *$

$x_0 \in \mathrm{Int}\, f^{-1}(B)$

Wiktor Pilarczyk 308533

Zad 2 c.d

$\Leftarrow$

Aby udowodnić ciągłość chcę udowodnić, że

$\forall U$-otw $f^{-1}[U]$ jest otwarte

$$f^{-1}[U] \overset{\text{bo } U \text{ otw.}}{=} \overset{\text{bo } U=\mathrm{Int}(U)}{f^{-1}}[\mathrm{Int}(U)] \subseteq \mathrm{Int}\, f^{-1}[U] \subseteq f^{-1}[U]$$

$$\Updownarrow$$

$$f^{-1}[U] \subseteq \mathrm{Int}\, f^{-1}[U] \subseteq f^{-1}[U]$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathrm{Int}\, f^{-1}[U] = f^{-1}[U]$$

$$\Updownarrow$$

$f^{-1}[U]$ ~~[illegible]~~ jest otwarte

więc $f$ jest ciągłe

$\square$

Scanned with CamScanner

Wiktor Pilarczyk 308533

Zad 3 F domknięty

Teza $\mathrm{Int}(F \cup \mathrm{Int}(A)) = \mathrm{Int}(F \cup A)$

Korzystając z definicji, że $\mathrm{Int}(A)$ to zbiór punktów, których pewne otoczenia są zawarte w A.

"$\subseteq$" Weźmy dowolne $x \in \mathrm{Int}(F \cup \mathrm{Int}(A))$

Wtedy istnieje otoczenie $x$ $V_x \subseteq F \cup \mathrm{Int}(A) \subseteq F \cup A$

więc $x \in \mathrm{Int}(F \cup A)$.

"$\supseteq$"

Weźmy dowolne $x_0 \in \mathrm{Int}(F \cup A)$ ~~⇒ Istnieje $V_x$~~ otwarte

$$\Downarrow$$

$\exists\, U$ otwarty, $U \subseteq F \cup A$

$$\Downarrow$$

$U \setminus F \subseteq A$ , a $U \setminus F = U \setminus (X \setminus F)$ otwarte więc $U \setminus F$ otwarte

$$\Downarrow$$

$U \setminus F \subseteq \mathrm{int}\, A$

$$\Downarrow$$

$(U \setminus F) \cup (F \cap U) \subseteq F \cup \mathrm{Int}(A)$

$$\Downarrow$$

$x_0 \in U \subseteq F \cup \mathrm{Int}(A)$

$$\Downarrow$$

$x_0 \in \mathrm{Int}(F \cup \mathrm{Int}(A))$

$\square$

Scanned with CamScanner

Wiktor Pilarczyk 308533

Zad 4

$f: X \to Y$ ciągłe ...

$W(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$

a) Aby pokazać, że przestrzeń $(X, \mathcal{T}_X)$ jest homeomorficzna z $W(f)$

Chcę pokazać że istnieje funkcja $F: X \to W(f)$, która jest homeomorfizm

Niech

$F(x) = (x, f(x))$

1) Wpierw pokażę, że funkcja jest „na"

Jest to dosyć oczywiste, gdyż weźmy dowolne

$(x, f(x)) \in W(f)$ wtedy $F(x) = (x, f(x))$ więc jest „na"

~~koto~~

2) Jest różnowartościowa

Nie wprost

Weźmy $x_1, x_2 \in X$ t. że $x_1 \neq x_2 \wedge F(x_1) = F(x_2)$.

ale to by oznaczało, że $(x_1, f(x_1)) = (x_2, f(x_2))$

czyli $x_1 = x_2$ $\lightning$ z założeniem, że $x_1 \neq x_2$

Scanned with CamScanner

Wiktor Pilarczyk 308533

Zad 4 c.d 1

a) c.d

3) Pozostało udowodnić, że $F$ i $F^{-1}$ są ciągłe

Dowód ciągłości $F$

Niech $U \subseteq X$ i $V \subseteq Y$ oraz $U$ i $V$ otwarte

Policzmy $F^{-1}[U \times V] = \underset{\text{otwarte}}{U} \cap f^{-1}[V]$ $f$ ciągłe więc $f^{-1}[V]$ też otwarte

Skorzystam z iv) definicji ciągłości

$\forall x \in X$ i otoczenia $U \times V$ punktu $f(x)$ istnieje otoczenie $V$ punktu $a$ t. że $f(V) \subset U$

Weźmy dowolne $x \in X$ i

$$x \in F^{-1}(U \times V) \Leftrightarrow F(x) \in U \times V$$
$$\Updownarrow$$
$$(x, f(x)) \in U \times V$$
$$\Updownarrow$$
$$x \in U \wedge f(x) \in V$$
$$\Updownarrow$$
$$x \in U \wedge x \in f^{-1}[V]$$
$$\Updownarrow$$
$$x \in U \cap f^{-1}(V)$$

jest to zbiór otwarty czyli otrzymaliśmy otwarty więc $F$ ciągłe

Wiktor Pilarczyk 308533

Zada 4 C.D.2

a)

3) C.D Podobnie jak w poprzednim

Pozostało udowodnić, że $F^{-1}$ jest ciągłe

$F^{-1}: W(f) \to X$ oraz $F^{-1}(x, f(x)) = x$

Weźmy dowolne $(x, f(x)) \in W(f)$

Niech $U$ - otwarty w $X$ Pokażę $F(U) = (U \times Y) \cap W(f)$

taki, że $(x, f(x)) \in F(U)$

$\Updownarrow$

$(x, f(x)) \in W(f) \wedge F^{-1}(x, f(x)) \in U$

$\Updownarrow$

$x \in U$

~~x ∈ ...~~

$\Updownarrow$

$(x, f(x)) \in (U \times Y) \cap W(f)$

W topologii indukowanej w przestrzeni $W(f)$ zbiór $(U \times Y) \cap W(f)$ jest otwarty

Wiktor Pilarczyk 308533

Zd 4

b) $(Y, \mathcal{T}_Y)$ przestrzenią Hausdorffa $\Rightarrow$ $W(f)$ jest domkniętym podzbiorem $(X \times Y, \mathcal{T})$

$W(f)$ jest domknięte

$\Updownarrow$

$X \times Y \setminus W(f)$ jest otwarte

Więc weźmy dowolne $(x_0, y_0) \in X \times Y \setminus W(f)$

$\Updownarrow$

$\overset{\in Y}{f(x_0)} \neq \overset{\in Y}{y_0}$ bo w.p.p. $(x_0, y_0) \in W(f)$

z def p. Hausdorffa

otoczenia $f(x_0)$ i $y_0$

Istnieją otoczenia $V_1, V_2$ t. że $f(x_0) \in V_1$, $y_0 \in V_2$ $\wedge$ $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

$\Downarrow$ f ciągła

Istnieje otoczenie $x_0$ - $U$ t. że $f(U) \subset V_1$

Pokażmy

otwarte więc $U \times V_2$ otwarte

$(x_0, y_0) \in \underbrace{U \times V_2 \subseteq X \times Y \setminus W(f)}$ $\Rightarrow$ $X \times Y \setminus W(f)$ jest otwarte

bo $\forall (x_0, y_0) \in X \times Y \setminus W(f)$ zachodzi inkluzja

$(x_0, y_0) \in U \times V_2 \Leftrightarrow x \in U \wedge y \in V_2$

$\Downarrow$

$f(x) \in f[U] \wedge y \in V_2$

$\Downarrow$

$f(U) \cap V_2 = \emptyset$ bo $f(U) \subseteq V_1$

$\Downarrow$

$f(x) \neq y$

$\Downarrow$

$(x, y) \in (X \times Y) \setminus W(f)$

Wiktor Pikarczyk 308533

Zad 5

Weźmy zbiory otwarte $U_x = [x, x+1)$

Niech $\mathcal{B}$ będzie dowolną bazą.

$$\forall_{x\in\mathbb{R}} \ \exists_{\substack{B_x \in \mathcal{B} \\ x\in B_x}} \ B_x \subset U_x$$

Niech $f : \mathbb{R} \to \mathcal{B}$ takie, że $f(x) = B_x$

Chcę udowodnić, że jest to ~~każda~~ funkcja różnowartościowa

Nie wprost ~~$\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $f(x_1) =$~~

istnieje $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \wedge x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$

skoro $f(x_1) = f(x_2)$

to $B_{x_1} = B_{x_2}$

b.s.o. $x_1 < x_2$

$x_1 \in B_{x_1} = B_{x_2} \subset U_{x_2}$

$\Downarrow$

ale wtedy $x_2 \leq x_1$ ↯

więc $x_1 = x_2$

czyli nie istnieje taka baza przeliczalna

ponieważ $|\mathcal{B}| \geq |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$

Strzałka jest ośrodkowa* to wiem [z wykładu], i nie ma przeliczalnej bazy więc nie jest metryzowalna.

* ponieważ posiada gęsty podzbiór przeliczalny ($\mathbb{Q}$)

Scanned with CamScanner