z. 9. $X = [0,1]^{\mathbb{N}}$ $A = (0,\frac{1}{2})^{\mathbb{N}}$

$\operatorname{Int} A = \emptyset$

D-d nie wprost:

Gdyby $\operatorname{Int} A \neq \emptyset$, to istniałby niepusty zbiór otwarty bazowy $\subseteq A$

$$V = U_1 \times U_2 \times U_3 \times \dots \times U_n \times [0,1] \times [0,1] \times \dots$$

weźmy dowolny $(x_1, x_2, \dots) \in V$

mogę żądać, żeby $x_k = 1$ dla $k > n$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, 1, 1, \dots) \in V \setminus A \quad \text{⚡}$$

■

$\overline{A} = ?$ Ogólnie, dla $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$, $A = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \subseteq X_n$, chcemy

T: $\overline{A} = \underbrace{\prod_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}}_{\text{domknięty w } X} \supseteq A \implies \subseteq$ ✓

$\supseteq$: Niech $x \in \prod_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$, czyli $x_n \in \overline{A_n}$.

T: $x \in \overline{A}$, czyli $(\forall U \ni x \text{ bazowe})(U \cap A \neq \emptyset)$

Weźmy zatem otoczenie $U_1 \times \dots \times U_n \times X_{n+1} \times X_{n+2} \times \dots \ni x$

wówczas $x_k \in U_k$ dla $k = 1 \dots n$, U_k otw. w X_k, więc

$U_k \cap A_k \neq \emptyset$, zatem

$$U \cap A = \underbrace{\prod_{k=1}^{n} U_k \times \prod_{k=n+1}^{\infty} X_k}_{U} \cap \underbrace{\prod_{k=1}^{\infty} A_k}_{A} = \prod_{k=1}^{n} \underbrace{(U_k \cap A_k)}_{\neq \emptyset} \times \prod_{k=n+1}^{\infty} \underbrace{A_k}_{\neq \emptyset} \neq \emptyset$$

■

z.10.

•) $(a_n)_n$ o wyrazach w $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ jest zbieżny do g

$$\Longleftrightarrow$$

$$(\forall k) \quad a_{n,k} \xrightarrow[n\to\infty]{} g_k$$

Zatem jeśli $\forall n \; a_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ jest ciągiem niemalejącym, to

$$(\forall k \leq l) \quad \begin{array}{ccc} a_{n,k} & \leq & a_{n,l} \\ \downarrow{\scriptstyle n\to\infty} & & \downarrow{\scriptstyle n\to\infty} \\ g_k & \leq & g_l \end{array}$$

$\Longrightarrow g$ niemalejący.

••) $A = \{ x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (\exists N \in \mathbb{N}) \; x_N = x_{N+1} = \dots \}$

T: A – gęsty

Wystarczy pokazać, że każdy $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ jest granicą pewnego ciągu $(a_n)_n : a_n \in A$.

$g = (g_1, g_2, g_3, g_4, \dots)$

Weźmy dla dowolnego n

$$a_n = (g_1, g_2, \dots, g_n, g_n, g_n, g_n, \dots) \in A$$

Zauważmy, że

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g \quad , \text{bo}$$

$$(\forall k) \quad a_{n,k} \xrightarrow[n\to\infty]{} g_k \qquad ✓ \qquad ■$$

z. 11 :) $\pi_j : \prod_{t\in\mathbb{N}} X_t \to X_j$

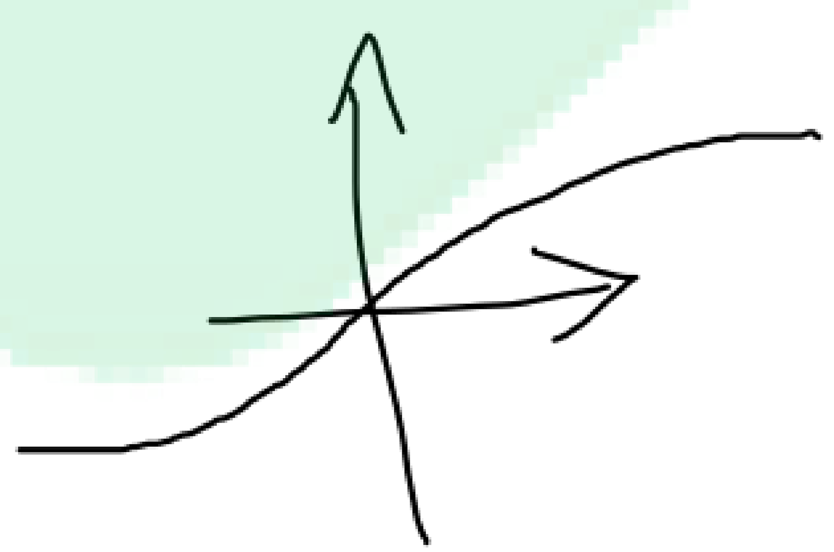
- π_j – ciągłe ✓
- T: $\pi_j(U)$ – otwarty dla U – otw. w $X = \prod_{t\in\mathbb{N}} X_t$

$$U = \bigcup_\alpha B_\alpha \qquad B_\alpha = V_1^\alpha \times V_2^\alpha \times \dots \times V_{n_\alpha}^\alpha \times X_{n_\alpha+1} \times \dots$$

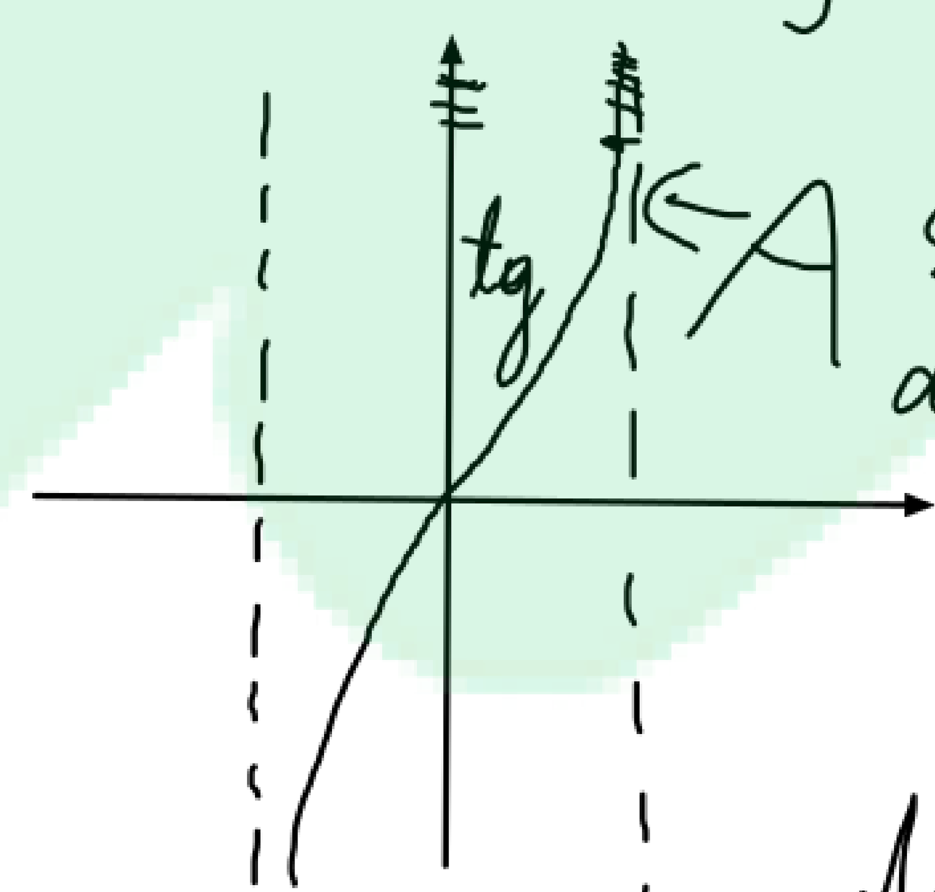
$$\pi_j(U) = \pi_j\Big(\bigcup_\alpha B_\alpha\Big) = \bigcup_\alpha \pi_j(B_\alpha)$$ – otwarte, bo

$$\pi_j(B_\alpha) = \begin{cases} n_\alpha \geq j \to V_j^\alpha \\ n_\alpha < j \to X_j \end{cases}$$ ← otwarte w X_j ∎

..) $\pi_1 : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$



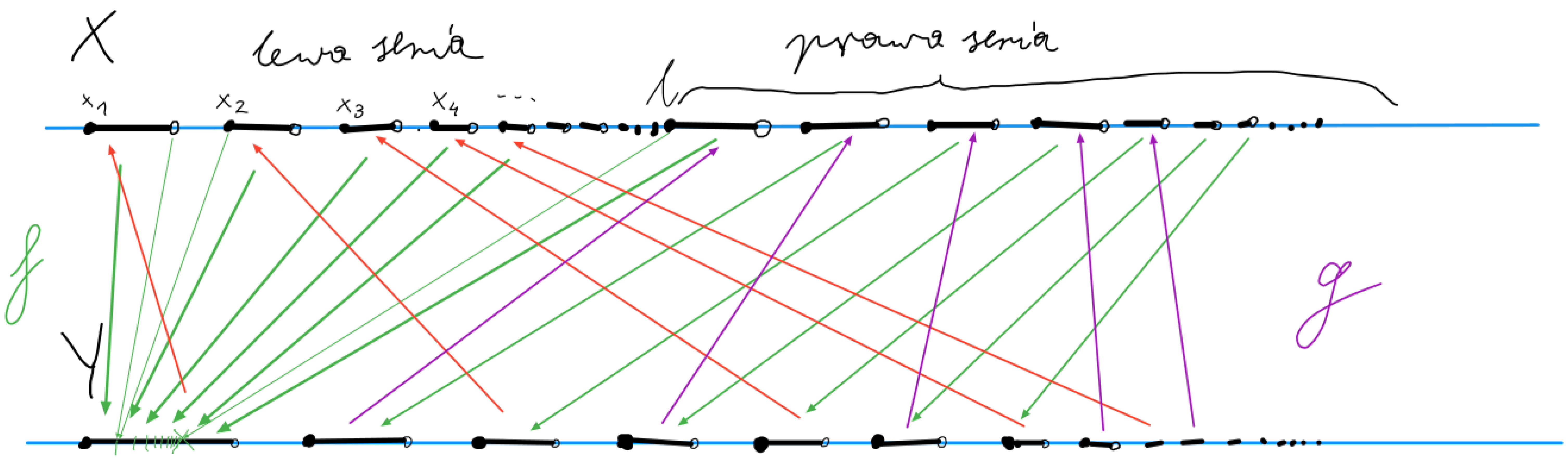
odbicie



$A \subseteq \mathbb{R}^2$ domkn.

Gdyby π_1 – domknięte, to $\pi_1(A)$ – domknięty, ale $\pi_1 = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to$ ↯

2.13.



f, X i Y konstruujemy tak, by f zmniejszało odległości:

$$(\forall x,y\in X)\quad |f(x)-f(y)| \le |x-y|$$

Zatem f – ciągłe

g – ciągłe: dla ciągu $x_n \xrightarrow[n]{} y$ w Y

y leży w jednym z przedziałów Y, więc od pewnego miejsca x_n leży w tym przedziale; na nim g – liniowe, więc

$$g(x_n) \xrightarrow[n]{} g(y)$$

Gdyby istniał homeom. $h: X \to Y$, to

- z własności Darboux h(przedziału X) $\subseteq$ przedziale Y
- podobnie dla h^{-1}
- zatem jeśli I jest jednym z przedziałów X, to $h(I)$ jest równe jednemu z przedziałów Y

(czyli h dokonuje „bijekcji" rodziny wszystkich przedziałów X na rodzinę wszystkich przedziałów Y)

- ciąg (a_n) lewych końców przedziałów X ($\to$ rys.) zbiega do l
- $h(a_n)$ leżą w parami różnych przedziałach Y, więc

$$h(a_n) \xrightarrow[n]{} \sup Y, \text{ ale}$$

$$\sup Y \notin Y,$$

sprzeczność z ciągłością h. ∎