L5. z.10.

a) $a, b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

$$d_1(a,b) = \begin{cases} \frac{1}{\min\{i : a_i \neq b_i\}} \\ 0 \quad a = b \end{cases}$$

$$d_2(a,b) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \cdot \delta(a_i, b_i) \qquad \delta = \begin{cases} 0 & a_i = b_i \\ 1 & \text{w.p.p.} \end{cases}$$

a, b które różnią się 1. raz na k-tym miejscu

$$d_1(a,b) = \frac{1}{k}$$

$$2^{-k} \leq d_2(a,b) = 2^{-k} + \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-i} \cdot \delta \leq 2^{-(k-1)} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

$$d_1(a_n, b_n) \to 0 \Rightarrow k_n \xrightarrow{n} \infty$$

($a_n, b_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$)

$$\Rightarrow d_2(a_n, b_n) \to 0$$

b) T: d_2 – zupełna: Weźmy $(x_n)_n$ – ciąg Cauchy'ego ($x_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$)

$$d_2(a,b) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\delta(a_i, b_i) \geq 2^{-k}\delta(a_k, b_k)$$

$$2^k d_2(a,b) \geq \delta(a_k, b_k)$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall m,n \geq N \quad d_2(x_m, x_n) < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\delta((x_n)_k, (x_m)_k) < 2^k \varepsilon$$

Np. $\varepsilon := 2^{-k-1} \rightsquigarrow 2^k\varepsilon = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \exists N_k\ \forall m,n \geq N\ \delta((x_n)_k, (x_m)_k) = 0$,

czyli $(x_n)_k = (x_m)_k$

$$z_k := \lim_{n \to \infty} (x_n)_k$$

$$(z_k)_k = z \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

T: $x_n \xrightarrow{n} z$. Dla dowolnego $K \in \mathbb{N}$, $\varepsilon = \frac{1}{2^K}$

Kiedy $d_2(x_n, z) \leq \frac{1}{2^K}$? Wystarczy, że $(x_n)_k = z_k$ dla $k \leq K$

ale to zachodzi już dla $n \geq N = \max\{N_k : k \leq K\}$

L6

z1) $Y \subseteq X$

T_0, T_1, T_2 – bierzemy ślady U, V: $Y \cap U$, $Y \cap V$

$T_3, T_{3\frac{1}{2}}$ $\quad F \subseteq Y$ (domk.), $y \in Y \setminus F$

$D \subseteq X$ (domk.) $\quad D \cap Y = F$

$\exists f : X \to [0,1]$ – ciągła
$f[D] \equiv 0$
$f(y) = 1$

teraz
$f|_Y[F] \equiv 0$ $\quad f|_Y$ – ciągła
$f|_Y(y) = 1$

$\exists U, V : D \subset U,\ y \in V$
$U \cap V \neq \emptyset$, $U, V \in \mathcal{T}$

$F \subseteq U \cap Y$
$y \in V \cap Y$

T_4: A, B domknięte w Y $\quad A \cap B = \emptyset$

U, V: $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ $\quad U \cap V = \emptyset$

skoro Y dom. to A, B dom. w X

$Y \cap U \qquad Y \cap V$

2.2a) d – zupełna na X, $\mathcal{U} \underset{\text{otw}}{\subseteq} X$

$$d'(x,y) := d(x,y) + \left|\frac{1}{d(x,F)} - \frac{1}{d(y,F)}\right|$$

gdzie $x, y \in \mathcal{U}$, $F = X \setminus U$

- d' jest metryką na $\mathcal{U}$:
  - $d(x,x) = 0$
  - $d(x,y) = d(y,x)$
  - nierówność Δ:

$$d'(x,z) = d(x,z) + \left|\frac{1}{d(x,F)} - \frac{1}{d(z,F)}\right| \leq$$
$$\leq d(x,y) + d(y,z) + \left|\frac{1}{d(x,F)} - \frac{1}{d(y,F)}\right| + \left|\frac{1}{d(y,F)} - \frac{1}{d(z,F)}\right| =$$
$$= d'(x,y) + d'(y,z)$$

  - $d'(x,y) = 0 \Rightarrow d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

- d' – zupełna: weźmy $(a_n)_n$ – ciąg Cauchy'ego w $\mathcal{U}$ dla d'

Skoro $d \leq d'$, to $(a_n)_n$ jest Cauchy'ego w d. Zatem

z zupełności (X,d) $(\exists\, a \in X)$ $a_n \xrightarrow[d]{n} a$

Pokażemy: • $a \in \mathcal{U}$ • $a_n \xrightarrow[d']{n} a$

Nie wprost z: $a \in F$, to $d(a,F) = 0$; z ciągłości $d(\cdot, F)$

$$d(a_n, F) \xrightarrow[n]{} d(a,F) = 0$$

$$\frac{1}{d(a_n,F)} \xrightarrow[n]{} \infty$$

Wiemy że $(a_n)_n$ jest Cauchy'ego w d', stąd jest warunek Cauchy'ego

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall m,n \geq N) \quad \underbrace{\left|\frac{1}{d(a_m,F)} - \frac{1}{d(a_n,F)}\right|}_{\text{bo } \leq d'(a_m,a_n)} < \varepsilon$$

dla ciągu $\left(\frac{1}{d(a_n,F)}\right)_n$, więc $\frac{1}{d(a_n,F)}$ powinno zbiegać, a dąży do ∞

czyli $a \in \mathcal{U}$ $\rightarrow \otimes$

- $a_n \xrightarrow[n]{} a$ w d'

$$d'(a_n,a) = \underbrace{d(a_n,a)}_{\downarrow n \; 0} + \underbrace{\left|\frac{1}{d(a_n,F)} - \frac{1}{d(a,F)}\right|}_{\to 0}$$

$d(a,F) > 0$

2.2 b) mamy Y typu G_δ, czyli

$\left(\exists\, \mathcal{U}_n \text{ - otw} \atop (n \in \mathbb{N})\right)$ $\quad Y = \bigcap_n \mathcal{U}_n \quad$ T: Y – metryzowalna w sposób zupełny

$\mathcal{U}_n \supseteq \mathcal{U}_{n+1}$

Kładę $d_Y(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min\{d_n(x,y), 1\}$

- d_Y – metryka – podobnie, jak dla metryki na produkcie
- d_Y – zupełna: Niech $(x_n)_n$ – ciąg Cauchy'ego w Y

$(\forall k \in \mathbb{N})$ $\quad \overline{d_k} = \min(d_k, 1)$

$\quad \overline{d_k} \leq 2^k \cdot d_Y$

więc z war. Cauchy'ego d_Y wynika war. Cauchy'ego w $\overline{d_k}$

(jak w zad. 5.10.) $\Rightarrow$ war. Cauchy'ego w d_k

(możemy brać $\varepsilon < 1$)

Z zupełności $(\mathcal{U}_k, d_k)$ $\quad x_n \xrightarrow[n]{d_k} z_k \in \mathcal{U}_k$. $z_k = z_l$ dla $k < l$, bo

$\mathcal{U}_k \supseteq \mathcal{U}_l \ni z_l$. Na $\mathcal{U}_l$ d_l zgodna z top. $\mathcal{T}_{\mathcal{U}_l}$, $d_k|_{\mathcal{U}_l}$ – też zgodna

skoro $x_n \xrightarrow[n]{d_l} z_l$, to $x_n \xrightarrow[n]{\mathcal{T}_{\mathcal{U}_l}} z_l$ i $x_n \xrightarrow[n]{d_k} z_l$

$\qquad\qquad x_n \xrightarrow[n]{} z_k$, $z_l = z_k$

$\rightsquigarrow$ oznaczam $z := z_k$ dla $k \in \mathbb{N}$ $\rightsquigarrow$ $z \in \bigcap_k \mathcal{U}_k = Y$

Pozostaje pokazać, że $x_n \xrightarrow[n]{d_Y} z$:

Niech $\varepsilon > 0$, b.z.o. $\varepsilon = \frac{1}{2^K}$ $\quad K \in \mathbb{N}$ – duże.

Biorę N: dla $k = 1, \ldots, K$ $\quad d_k(x_n, z) < \varepsilon$

dla $n > N$ $\quad$ (ze zbieżności d_k)

wtedy

$$d_Y(x_n, z) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \max(d_k(x_n,z), 1) \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{K} 2^{-k}\varepsilon + \sum_{k=K+1}^{\infty} 2^{-k} \leq \varepsilon \cdot 1 + 2^{-K} = 2\varepsilon$$

czyli $x_n \xrightarrow[n]{d_Y} z$ $\quad$ ▯

Z.5.2: (X,d) – zupełna, przeliczalna

T: $(\exists\, a \in X)$ izolowany

Z. nie wprost $(\forall a \in X)$ nie jest izolowany

$\Rightarrow \{a\}$ nie jest otwarty, więc $\operatorname{int}\{a\} = \emptyset$, $\{a\}$ brzegowy

$[X \models T_1$, czyli $\forall a, b$ $(\exists\, \mathcal{U} \underset{\text{otw.}}{\ni} b)$ $\mathcal{U} \not\ni a] \Rightarrow$ domknięty

Z tw Baire'a, skoro $X = \bigcup_{a \in X} \{a\}$, to X – brzegowy $\otimes$

$\qquad$ ↑ przeliczalna

$\rightsquigarrow \exists\, a$ izolowany.

Np

$X = \{0 \ldots \frac{1}{n} \ldots \frac{1}{2} \ldots 1\}$