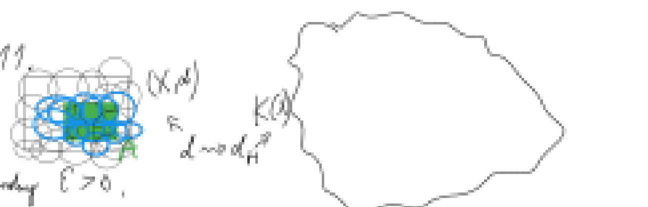
L4. z.11.



Weźmy dowolny $\varepsilon > 0$.

T: $\exists$ skończone pokrycie $K(X)$ kulami o promieniu ε

Weźmy skończone pokrycie X kulami $B(x_i, \varepsilon)$, $i = 1, \dots, n$

Każdy element $K(X)$ to zbiór zwarty $A \subseteq X$ i dla niego patrzymy, które kule $B(x_i, \varepsilon)$ się krzyżują z A.

Mamy więc przyporządkowanie

$$K(X) \ni A \overset{\Phi}{\longmapsto} \{ i = 1, \dots, n : \underbrace{B(x_i, \varepsilon) \cap A}_{\neq \emptyset} \} \in \mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$$

Dla dowolnego $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, jakie zbiory A przechodzą na I, czyli $\Phi^{-1}(I) = ?$

Lemat: dla $A, B \in \Phi^{-1}(I)$, to $d_H(A,B) \leq 2\varepsilon$

Dla $a \in A$, $(\exists i \in I)$ $B(x_i, \varepsilon) \ni a$ $\rightsquigarrow$ skoro $\Phi(B) \ni i$, to $(\exists b \in B)$ $B(x_i, \varepsilon) \ni b$

Wtedy $d(a,b) < 2\varepsilon$, wobec tego $d(a,B) < 2\varepsilon$.

Analogicznie: $(\forall b \in B)$ $d(b,A) < 2\varepsilon$

$$d_H(A,B) = \max\left(\sup_{a \in A} d(a,B), \sup_{b \in B} d(b,A) \right) \leq 2\varepsilon. \ \blacksquare$$

Dla dowolnego $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, który leży w $\operatorname{Im} \Phi$, wybieram A_I t. że $\Phi(A_I) = I$. Z lematu, że

$$\Phi^{-1}(I) \subseteq B_{d_H}(A_I, 2\varepsilon)$$

Zatem
$$\bigcup_{I \in \operatorname{Im}\Phi} \Phi^{-1}(I) = \operatorname{Dom}(\Phi) = K(X) \subseteq \bigcup_{I \in \operatorname{Im}\Phi} B_{d_H}(A_I, 2\varepsilon)$$

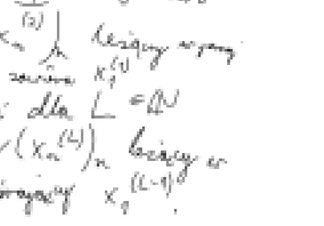
Mamy więc skończone pokr. $K(X)$ kulami w d_H o prom. 2ε. Jeśli chcemy o prom. ε, to wystarczy zacząć konstrukcję od pokrycia X kulami o prom. $\frac{\varepsilon}{2}$ zamiast ε.

Fakt: Każdy ciąg $(x_n)_n$ w przestrzeni całkowicie ograniczonej (X,d) ma podciąg Cauchy'ego.

D-d: 1° Niech $\varepsilon > 0$. Skonstruujemy podciąg $(x_{n_k})_k$
$$(\exists N)(\forall k, l > N) \ d(x_{n_k}, x_{n_l}) < \varepsilon$$

Weźmy skończone pokrycie X kulami o prom. $\frac{\varepsilon}{2}$: $\left(B(y_i, \frac{\varepsilon}{2})\right)_{i=1}^{K}$
$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{K} B(y_i, \frac{\varepsilon}{2}) = X$. Dla każdego i patrzę na $I_i = \{ n \in \mathbb{N} : x_n \in B(y_i, \frac{\varepsilon}{2}) \}$. Jeden z I_i musi być nieskończony, bo inaczej $|\mathbb{N}| = |\bigcup_i I_i| < \infty$ ↯

Więc któraś $B(y_i, \frac{\varepsilon}{2})$ zawiera nieskończenie wiele wyrazów x_n — z nich tworzę $(x_{n_k})_k$.



2° Będziemy brać $\varepsilon = \frac{1}{L}$, $L \in \mathbb{N}$.

dla $\varepsilon = \frac{1}{1}$ z $(x_n)_n$ wybieram podciąg $(x_n^{(1)})_n$ leżący w pewnej kuli o promieniu $\frac{1}{2}$ (jak 1°) taki, że $(x_n^{(1)})_n$ nie zawiera x_1

dla $\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\rightsquigarrow$ z $(x_n^{(1)})$ wybieram podciąg $(x_n^{(2)})_n$ leżący w pewnej kuli o prom. $\frac{1}{4}$ (jak w 1°) taki, że $(x_n^{(2)})_n$ nie zawiera $x_1^{(1)}$

itd. (kontynuuję w nieskończoność tę konstrukcję), czyli dla $L \in \mathbb{N}$
$\varepsilon = \frac{1}{L}$ $\rightsquigarrow$ z $(x_n^{(L-1)})_n$ wybieram podciąg $(x_n^{(L)})_n$ leżący w pewnej kuli o prom. $\frac{1}{2L}$ (jak w 1°), nie zawierający $x_1^{(L-1)}$.

. . . .

Mam system ciągów $(x_n)_n \overset{\text{podciąg}}{\supseteq} (x_n^{(1)})_n \supseteq (x_n^{(2)})_n \supseteq \cdots$

„Trik": konstruuję podciąg $(x_n)_n$ następujący

$$\tilde{x}_n = x_1^{(n)} \quad (\rightsquigarrow \text{odpowiada } x_{k_n},\ k_n \nearrow_n)$$

Dla $L \in \mathbb{N}$ $(\tilde{x}_n)_{n \geq L}$ podciąg $(x_n^{(L)})_n$, wobec tego

$(\tilde{x}_n)_{n \geq L}$ siedzi w pewnej kuli o prom. $\frac{1}{2L}$,

stąd $d(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) < \frac{1}{L}$ dla $n, m \geq L$, $(\forall L)$

$\Rightarrow$ war. Cauchy'ego na $(\tilde{x}_n)_n$, bo $(\forall \varepsilon > 0)$ weźmy L: $\frac{1}{L} < \varepsilon$ i wtedy dla $n, m \geq L$ $d(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) < \frac{1}{L} < \varepsilon$.

z.12. T: $(K(X), d_H)$ – zwarta

Lemat: $K(X)$ – zupełna.

Lemacik: $(\forall (A_n)_n \subseteq K(X))\left((\forall n\ A_n \supseteq A_{n+1}) \Rightarrow \lim_n^{(d_H)} A_n = \bigcap_n A_n \right)$

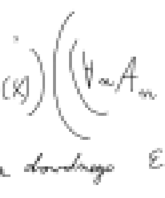
Niech $A = \bigcap_n A_n$. Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ rozważmy

$N_\varepsilon(A)$: ε-otoczenie w X zbioru $A \subseteq X$

$N_\varepsilon(A) = \{ x \in X : d(x, A) < \varepsilon \}$ – otwarty, bo

[$x \mapsto d(x,A)$ jest ciągłą funkcją na X, a $N_\varepsilon(A)$ = przeciwobraz $(-\infty, \varepsilon)$ przez tę funkcję]

(lub uzasadn. „na piechotę": $\forall y \in N_\varepsilon(A)$ $(\exists \delta > 0)$ $B(y, \delta) \subseteq N_\varepsilon(A)$



np. $\delta := \varepsilon - d(y, A) > 0$)

Weźmy rodzinę $\{ N_\varepsilon(A), A_n^c \}$. Skoro $A^c = \bigcup_n A_n^c$ i $A \subseteq N_\varepsilon(A)$, więc ta rodzina jest otwartym pokryciem X, więc ze zwartości X $\exists$ podpokrycie skończone $\mathcal{U}_0$.

1° $N_\varepsilon(A) \in \mathcal{U}_0$ i poza tym $\mathcal{U}_0$ zawiera sk. wiele A_n^c, biorę największy z nich $\rightsquigarrow A_N^c \supseteq A_n^c$ dla $A_n^c \in \mathcal{U}_0$
czyli $N_\varepsilon(A) \cup A_N^c = X \Rightarrow A_N \subseteq N_\varepsilon(A)$.

2° $N_\varepsilon(A) \notin \mathcal{U}_0$, wtedy $\mathcal{U}_0 = \{ A_n^c : n \in I_{sk} \}$ i
$X = \bigcup \mathcal{U}_0 = A_N^c \leftarrow$ największy $A_n^c \in \mathcal{U}_0 \Rightarrow$
$A_N = \emptyset$ ↯ bo $A_N \in K(X)$

Zatem dla pewnego $N \in \mathbb{N}$, $(\forall n \geq N)$ $A \subseteq A_n \subseteq N_\varepsilon(A) \Rightarrow$
$\Rightarrow d_H(A, A_n) < \varepsilon$

Wobec tego $A_n \xrightarrow[n]{d_H} A$

Weźmy ciąg Cauchy'ego $(B_n)_n \subseteq K(X)$; niech $A_n = \overline{\bigcup_{k \geq n} B_k}$ $(\Rightarrow A_n \in K(X))$. Z lemacika, skoro $A_n \searrow_n$, to

$$A_n \xrightarrow[n]{d_H} \bigcap_n A_n = \bigcap_n \overline{\bigcup_{k \geq n} B_k}$$

Zauważmy, że dla $\varepsilon > 0$ $(\exists N \in \mathbb{N}$ (z war. Cauchy'ego)$)$ t. że $(\forall n, m \geq N)$ $d_H(B_n, B_m) < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow B_n \subseteq N_\varepsilon(B_m) \wedge B_m \subseteq N_\varepsilon(B_n)$

$(\forall n \geq N)$ $B_n \subseteq N_\varepsilon(B_N) \Rightarrow$

$\bigcup_{n \geq N} B_n \subseteq N_\varepsilon(B_N)$,

$$A_N = \overline{\bigcup_{n \geq N} B_n} \subseteq \overline{N_\varepsilon(B_N)} \subseteq \{ x \in X : d(x, B_N) \leq \varepsilon \}$$

$$B_N \subseteq A_N \subseteq \overline{N_\varepsilon(A_N)}$$

$$\Rightarrow d_H(B_N, A_N) \leq \varepsilon$$

i podobnie dla $n \geq N$

$$d_H(B_n, A_n) \leq \varepsilon$$

Pokazaliśmy, że $d_H(B_n, A_n) \xrightarrow[n]{} 0$, więc
$A_n \xrightarrow[n]{d_H} A = \bigcap A_n$, to $B_n \xrightarrow[n]{d_H} A$

C.B.D.U.

Zatem $K(X)$ – zwarta. $\blacksquare$