zad

Pokazać, że $\mathcal{C} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ jest homeomorficzny z $\mathcal{C}^{\mathbb{N}}$.

Szukamy

$$f : \underbrace{\{0,1\}^{\mathbb{N}}} \to \prod_{i=1}^{\infty} \underset{\mathcal{C}}{\overset{\shortparallel}{\mathcal{C}_i}} = \underbrace{\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}}}$$

Przypomnijmy, że

$f_0 : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to (\{0,1\}^{\mathbb{N}})^2$ $\qquad b_0 : \mathbb{N} \times \{1,2\} \to \mathbb{N}$

$f_0(y_1, y_2, y_3, \dots) = ((y_1, y_3, y_5, \dots), (y_2, y_4, \dots))$ $\qquad b_0((x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots)) = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots)$

$b : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekcja

$f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to (\{0,1\}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ $\qquad y = (y_1, y_2, \dots)$

$f(y_1, y_2, \dots) \to F_y$

$F_y : \mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$F_y(n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$(F_y(n))(m) = y_{b(n,m)} \in \{0,1\}$

Ponieważ b jest bijekcją, to f jest też bijekcją.

Dzięki zwartości obu przestrzeni, wystarczy sprawdzić, że

$f(U_1 \times U_2 \times \dots \times U_k \times \{0,1\} \times \{0,1\} \times \dots)$ jest zbiorem otwartym

bzo $U_i = \{\varepsilon_i\}$, $\varepsilon_i \in \{0,1\}$ $\qquad$ oznaczmy $b^{-1}(n) = (l_n, p_n)$

$\to \{F \in (\{0,1\}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} : (F(l_i))(p_i) = \varepsilon_i, \ i = 1, \dots, k\}$

jeśli współrzędna $\neq l_1$, to na tej współrzędnej jest $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$

wsp. l_i $\qquad p_i \to 1$ (czyli ε_1)

(6)/5

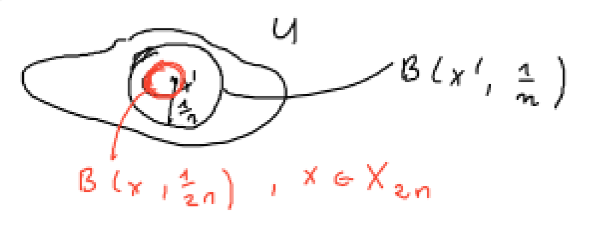
$$B_n = \{B(x, \tfrac{1}{n}) : x \in X\}$$

X_n – skończony zbiór x t. że $\{B(x, \frac{1}{n}) : x \in X_n\}$ jest pokryciem skończonym

przeliczalny $\to \bigcup_n X_n$ – pokażemy, że ten zbiór jest gęsty

$\forall n$ X_n – skończony dzięki zwartości

Weźmy $U \subseteq X$ – zb. otwarty, $B(x', \frac{1}{n}) \subseteq U$



zad 7

do zad 5

z wykładu $g : \mathcal{C} \to [0,1]$ ciągła, na $\rightsquigarrow g^{\mathbb{N}} : \mathcal{C}^{\mathbb{N}} \to [0,1]^{\mathbb{N}}$

$f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ homeo

$g^{\mathbb{N}} \circ f : \mathcal{C} \to [0,1]^{\mathbb{N}}$

ciągła surjekcja

(1) Bzo $\operatorname{diam}(X) \leq 1$ w (X, d)

(Jeżeli trzeba zastąpimy (X, d) przez $d'(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$

d i d' są równoważne)

Niech $(a_n)_n$ będzie zbiorem przeliczalnym gęstym w X

Bierzemy $f : X \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ $\qquad \{A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}\}$

$f(x) = (d(x, a_1), d(x, a_2), d(x, a_3), \dots) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$

• różnowartościowość

$x \neq y$

y $\qquad a \in A$

$d(x,a) < d(y,a)$

$\neq$

co daje $f(x) \neq f(y)$

• f jest ciągła

Weźmy $x_n \xrightarrow[n]{} x$ $\qquad$ Chcemy $f(x_n) \to f(x)$

Czyli chcemy $\forall a \in A$, $d(x_n, a) \xrightarrow[n]{} d(x, a)$

to wynika z nier. trójkąta

$$\begin{cases} d(a, x_n) \leq d(a, x) + d(x, x_n) \\ d(a, x) \leq d(a, x_n) + d(x, x_n) \end{cases}$$

$\Rightarrow |d(a, x_n) - d(a, x)| \leq d(x, x_n) \to 0$

• $f^{-1} : f(X) \to X$ jest funkcją ciągłą

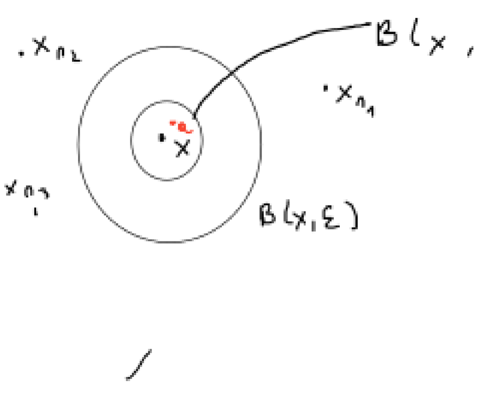
Załóżmy teraz, że (x_n) i $x \in X$

t. że $\forall i$ $d(x_n, a_i) \to d(x, a_i)$

Mamy pokazać, że $d(x_n, x) \to 0$

Nie wprost $\exists \varepsilon > 0$ $\exists (x_{n_k})$ podciąg (x_n)

t. że $d(x_{n_k}, x) > \varepsilon$ $\forall k = 1, 2, \dots$)



$a \in A$

Mamy $d(x_n, a) \xrightarrow[n]{} d(x, a)$

W szczególności $d(x_{n_k}, a) \xrightarrow[k]{} d(x, a)$

$d(x, a) < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall k$ $d(x_{n_k}, a) > \frac{\varepsilon}{2}$

↯ sprzeczność

Zad. 8.

(1) Istnieje n, że $0, a_n, a_{n+1}, \dots$ są współliniowe

(2) $\forall a, b \in \mathbb{R}^2$ $d_c(a, b) \geq d_e(a, b)$

a_{n+2}, a_n, a_{n+1}, $(0,0)$ $\leftarrow$ centrum = euklidesowe na prostej przechodzącej przez $(0,0)$

$0, a_n, a_m$ nie są współliniowe dla dowolnie dużych n, m

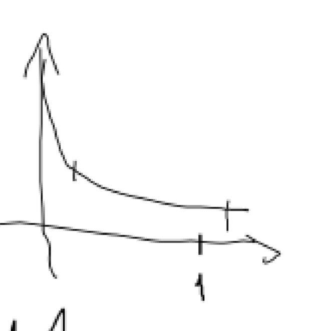
$d_c(a_n, a_m) = d_e((0,0), a_n) + d_e((0,0), a_m)$

$\lim_{n \to \infty}^{d_e} a_n = (0,0)$

(a_n) – Cauchy w d_c

$\Rightarrow \lim_n a_n = 0$

$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{n}}}$



$f_m(1) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{m}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{m+1}{m}}} = \sqrt{\frac{m}{m+1}}$

$f_m(0) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{m}}} = \sqrt{m}$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{n}}} dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} \Big|_{\frac{1}{m}}^{1+\frac{1}{n}} = 2\left((1 + \tfrac{1}{m})^{\frac{1}{2}} - (\tfrac{1}{m})^{\frac{1}{2}}\right) \xrightarrow[m \to \infty]{} 2$$

$k, l > N$

$\int \frac{1}{x} = \ln x + C$

$$\int_{\frac{1}{m}}^{1+\frac{1}{m}} \frac{1}{x} = \ln x \Big|_{\frac{1}{m}}^{1+\frac{1}{m}} = \overbrace{\ln(1 + \tfrac{1}{m})}^{\to 0} - \underbrace{\ln(\tfrac{1}{m})}_{\to -\infty} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$$

Jeśli $(a_m) \to \infty$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall k, l \geq N \ |a_k - a_l| < \varepsilon$

$\varepsilon > 0 \rightsquigarrow N$

Rozważmy $|\underbrace{a_N}_{\text{ustalone}} - \underset{\infty}{\underset{\downarrow}{a_k}}|$ $\qquad k \geq N$