Zadania z kolosów p. Plebanka

z. 1

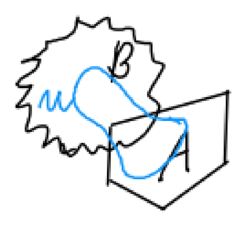
**1.** Sprawdzić, że w dowolnej przestrzeni metrycznej $X$ operacja wnętrza $\mathrm{int}(A)$ zbioru $A \subseteq X$ ma następujące własności:

(i) $\mathrm{int}(A) \cup \mathrm{int}(B) \subseteq \mathrm{int}(A \cup B)$, ale inkluzja przeciwna na ogół nie zachodzi;
(ii) $\mathrm{int}(A \cup \mathrm{int}(B)) = \mathrm{int}(A \cup B)$ przy założeniu, że zbiór $A$ jest domknięty.

(ii) Z: $A$ - domkn.
Wystarczy pokazać, że dla dowol. $U$ - otw.
$U \subseteq A \cup \mathrm{int}B \iff U \subseteq A \cup B$

$\Rightarrow$ oczywiste
$\Leftarrow$ ! Z: $U_{\text{otw.}} \subseteq A \cup B$, wtedy

$U \setminus A$ - otw i $\subseteq B$,




więc $U \setminus A \subseteq \mathrm{int}B$,
więc $U = (U \setminus A) \cup (U \cap A) \subseteq U \setminus A \cup A \subseteq A \cup \mathrm{int}B$

z. 2.

**2.** Sprawdzić, że wzór

$$\rho(f,g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$$

określa metrykę na przestrzeni $C[0,1]$ funkcji ciągłych $[0,1] \to \mathbb{R}$.
Zbadać zbieżność w metryce $\rho$ ciągów $(f_n)$ i $(g_n)$ w przestrzeni $C[0,1]$, gdzie

(i) $f_n(x) = x^n(1-x)$;
(ii) $g_n(x) = nx^n(1-x)$.

$$\rho(f,g) = \sup_x |f(x) - g(x)| =$$

$$= \sup_x |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)| \leq$$

$$\leq \sup_x \left(|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|\right) \leq$$

$$\leq \sup_x |f(x) - h(x)| + \sup_x |h(x) - g(x)| =$$

$$= \rho(f,h) + \rho(h,g)$$

z. 3. (a)

**3.** Dana jest przestrzeń metryczna $(X, \rho)$. Na przestrzeni $X \times X$ rozważamy metryki

$$l(x,y) = \rho(x_1,y_1) + \rho(x_2,y_2) \qquad s(x,y) = \max\left(\rho(x_1,y_1), \rho(x_2,y_2)\right).$$

gdzie $x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2)$.

(a) Sprawdzić, że metryki $l$ i $s$ wyznaczają tę samą topologię na $X \times X$.
(b) Wykazac, że jeżeli $X$ jest przestrzenią ośrodkową to przestrzeń $X \times X$ też jest ośrodkowa.

Metryki $\rho_1, \rho_2$ na $X$ są równoważne, gdy
- (def.) zadają tę samą topologię na $X$,
- równoważnie: $\forall$ ciągu $(x_n)_n$ oraz $x$ w $X$

$$x_n \xrightarrow[\rho_1]{n} x \iff x_n \xrightarrow[\rho_2]{n} x.$$

Fakt: Jeśli mamy metryki $l$ i $s$ t. że
$\frac{1}{M} s(x,y) \leq l(x,y) \leq M \cdot s(x,y)$ dla pewnej stałej $M>0$,
to $l$ i $s$ wyznaczają tę samą topologię

Dowód: • T: Jeśli $x_n \xrightarrow{l} x \Rightarrow x_n \xrightarrow{s} x$

równoważnie: $l(x_n, x) \xrightarrow[n]{} 0 \Rightarrow s(x_n, x) \xrightarrow[n]{} 0$

ale $0 \leq s(x_n, x) \leq M\, l(x_n, x) \xrightarrow[n]{} 0$
$\downarrow n$
$0$

• T: Jeśli $x_n \xrightarrow{s} x \Rightarrow x_n \xrightarrow{l} x$
— tak samo.

Wr. w zad. 3.

$$l(x,y) = \rho(x_1,y_1) + \rho(x_2,y_2) \leq$$

$$\leq 2\max\left(\rho(x_1,y_1), \rho(x_2,y_2)\right) = 2s(x,y)$$

$$s(x,y) = \max\left(\rho(x_1,y_1), \rho(x_2,y_2)\right) \leq$$

$$\leq \rho(x_1,y_1) + \rho(x_2,y_2) = l(x,y)$$

czyli Fakt zachodzi z $M=2$.
więc $l$ i $s$ równoważne

Zad. Niech dla $n, m \in \mathbb{N}$

$$\rho(n,m) = \begin{cases} 0, & n = m \\ \max(n,m), & n \neq m \end{cases}$$

wtedy: • $\rho$ jest metryką
• $\rho$ równoważna $\rho_D$

$$\rho_D(n,m) = \begin{cases} 0, & n=m \\ 1, & n \neq m \end{cases}$$

T: W $\rho$ każdy singleton jest otwarty. Owszem, dla $n \in \mathbb{N}$
$B(n, \frac{1}{2}) = \{n\}$ ✓ Zatem $\rho$ też generuje topologię dyskretną. ∎

(Mimo to nie istnieje $M > 0$ t. że
$\rho \leq M \cdot \rho_D$.)

- $X$ – zwarta $\neq \emptyset$ metryczna, $X \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \dots$ domknięte, $\neq \emptyset$
- Wówczas (fakt z wykładu) $\bigcap_n F_n \neq \emptyset$
- Możliwości na $\bigcap_n F_n$ jest wiele, choćby
$$F_n = X \Rightarrow \bigcap_n F_n = X$$
- Ale jeśli dodamy założenie:
  - $\operatorname{diam} F_n \xrightarrow[n]{} 0$, to

wtedy $\bigcap_n F_n$ jest singletonem.

Które własności są niezmiennicze na homeomorfizm?

np. zwartość,
- spójność
- łukowa spójność
- lokalna zwartość
- $T_i$ $(i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4 \dots)$
- metryzowalność
- metryzowalność w sposób zupełny

Nie są niezm.: dla przestrzeni metrycznej:
- zupełność
- ograniczoność

Fakt: Niech $X_1 \times X_2 \times \dots$ – produkt prz. top. i dla $i \in \mathbb{N}_{>0}$, $A_i \subseteq X_i$, to
$$\underbrace{\overline{A_1 \times A_2 \times \dots}}_{\leftarrow \text{ w } \prod_i X_i} = \overline{A_1} \times \overline{A_2} \times \dots$$

- $\subseteq$ wystarczy skorzystać z faktu, że produkt domkniętych jest domknięty w $\prod_i X_i$
- $\supseteq$: przez kontrapozycję: weźmy $x \notin \overline{A_1 \times A_2 \times \dots}$. Chcemy pok., że $x \notin \overline{A_1} \times \overline{A_2} \times \dots$

$$x \in \underbrace{\left(\overline{A_1 \times A_2 \times \dots}\right)^c}_{\text{zb. otw. rozłączny z } A_1 \times A_2 \times \dots}$$

$\Rightarrow \exists$ otoczenie bazowe $U \ni x$ rozłączne z $A_1 \times A_2 \times \dots$

$U = U_1 \times U_2 \times U_3 \times \dots \times U_n \times X_{n+1} \times \dots$, gdzie $U_i$ – otw w $X_i$.

$\Rightarrow \exists i \leq n \; U_i \cap A_i = \emptyset$ (bo inaczej (lub $A_i = \emptyset$ dla p. $i > n$ $\to$ łatwo rozpatrzeć) $(\forall i \leq n) \, U_i \cap A_i \neq \emptyset$, $(\forall i > n) \, A_i \neq \emptyset$, mogę wziąć $y_i \in U_i \cap A_i$ lub $A_i$ odpowiednio $\Rightarrow$ $y = (y_i)_i \in U \cap (A_1 \times A_2 \times \dots)$)

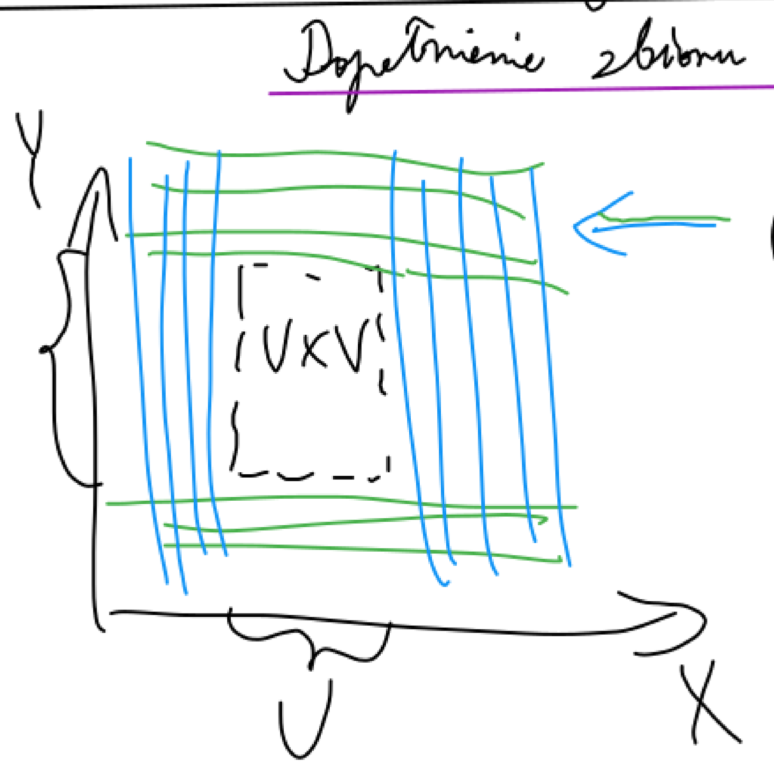
Stąd $x_i \in U_i$, $x_i \notin \overline{A_i}$ $\Rightarrow x \notin \overline{A_1} \times \overline{A_2} \times \dots$

Zad: Niech $F, K \subseteq X$, $F$ – domk., $K$ – zwarty. T: $F \cap K$ – zwarty.

D-d $F \cap K$ jest domkn. w podprzestrzeni $K$ (jako ślad domkniętego $F$)

$\Rightarrow F \cap K$ – zwarty.

Dopełnienie zbioru bazowego w przestrzeni produktowej $X \times Y$




$\leftarrow (X \setminus U) \times Y \cup X \times (Y \setminus V)$

Przykład, że w zbiorze domkniętym (ale nie zwartym) nie musi być realizowana odległość do punktu:

($X$ – otw podzbiór $\mathbb{R}^2$)


$d(x, A) = \inf_{y \in A} d_e(y, x)$ $\leftarrow$ to inf nie jest realizowane jako minimum w zbiorze $A$.