Rafał Nowak

Notatka do wykładu analizy numerycznej

Kilka własności wielomianów Czebyszewa

Niech $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ oznacza ciąg wielomianów Czebyszewa I-go rodzaju:

$$T_0(x) \equiv 1, \qquad T_1(x) = x, \qquad T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x) \qquad (k \geqslant 2),$$

a $\{U_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — ciąg wielomianów Czebyszewa II-go rodzaju:

$$U_0(x) \equiv 1, \qquad U_1(x) = 2x, \qquad U_k(x) = 2xU_{k-1}(x) - U_{k-2}(x) \qquad (k \geqslant 2).$$

Łatwo sprawdzić, że zera $t_k \equiv t_{n+1,k}$ wielomianu T_{n+1} wyrażają się wzorami

$$t_{n+1,k} := \cos \frac{2k+1}{2n+2}\pi \qquad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Natomiast punkty ekstremalne $u_k \equiv u_{nk}$ wielomianu T_n wyrażają się wzorami

$$u_{nk} := \cos(k\pi/n) \qquad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Lemat 1. *Wielomiany T_n są ortogonalne w sensie iloczynu skalarnego*

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Zachodzi wzór

$$\langle T_i, T_j\rangle = \begin{cases} \pi, & i = j = 0, \\ \pi/2, & i = j \neq 0, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{1}$$

Lemat 2. *Wielomiany U_n są ortogonalne w sensie iloczynu skalarnego*

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Zachodzi wzór

$$\langle U_i, U_j\rangle = \begin{cases} \pi/2, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{2}$$

Lemat 3. *Wielomiany $T_0, T_1, \dots, T_n$ są ortogonalne w sensie dyskretnego iloczynu skalarnego*

$$\langle f, g\rangle = \sum_{k=0}^{n} f(t_k)g(t_k).$$

Zachodzi wzór

$$\langle T_i, T_j\rangle = \begin{cases} n+1, & i = j = 0, \\ (n+1)/2, & i = j \neq 0, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{3}$$

Lemat 4. *Wielomiany $T_0, T_1, \dots, T_n$ są ortogonalne w sensie dyskretnego iloczynu skalarnego*

$$\langle f, g\rangle = {\sum_{k=0}^{n}}'' f(u_k)g(u_k).$$

Zachodzi wzór

$$\langle T_i, T_j\rangle = \begin{cases} n, & i = j = 0 \text{ lub } i = j = n, \\ n/2, & i = j \neq 0, n \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{4}$$

Lemat 5. *Wielomian $I_n \in \Pi_n$ interpolujący funkcję f w węzłach t_k można zapisać w postaci*

$$I_n(x) = \sum_{i=0}^{n}{}' \alpha_i \, T_i(x), \tag{5}$$

gdzie

$$\alpha_i := \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^{n} f(t_j) T_i(t_j) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n). \tag{6}$$

Ponadto, mamy

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} I_n(x) \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{n+1} \sum_{j=0}^{n} f(t_j).$$

Lemat 6. *Wielomian $J_n \in \Pi_n$ interpolujący funkcję f w węzłach u_k można zapisać wzorem*

$$J_n(x) = \sum_{j=0}^{n}{}'' \beta_j \, T_j(x), \tag{7}$$

gdzie

$$\beta_j := \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n}{}'' f(u_k) T_j(u_k) \qquad (j = 0, 1, \ldots, n). \tag{8}$$

Ponadto, mamy

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} J_n(x) \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{n} \sum_{j=0}^{n}{}'' f(u_j).$$