Twierdzenie

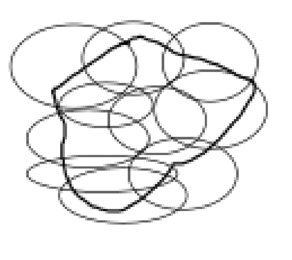
Przestrzeń metryczna (X, d) jest zwarta wtedy i tylko wtedy gdy jest zupełne i całkowicie ograniczona.

Def (X,d) jest całkowicie ograniczona jeśli $\forall \varepsilon > 0$ możemy pokryć X skończenie wieloma kulami o promieniu $\varepsilon > 0$.

Uwaga
(X, d) jest całkowicie ograniczona jeśli $\forall \varepsilon > 0$ możemy pokryć X skończenie wieloma zbiorami o średnicy $< \varepsilon$.

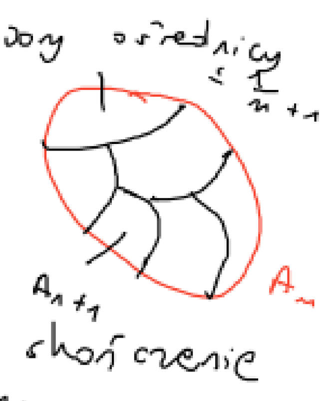
D-d
zwarta $\to$ zupełna
zwarta $\to$ całkowicie ograniczona

$\varepsilon > 0$



Pokrywamy X kulami o promieniu ε.
Wybieramy podpokrycie skończone.

zupełność + całkowita ograniczoność $\to$ zwartość
Nie wprost, istnieje pokrycie $\mathcal{U}$ zbiorami otwartymi przestrzeni X, z którego nie można wybrać podpokrycia skończonego.



$A_0 = X$
Indukcyjnie wybieramy $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$
$\operatorname{diam} A_n \leq \frac{1}{n}$
A_n nie można pokryć skończenie wieloma zbiorami z $\mathcal{U}$

Mamy już wybrane $A_1 \supseteq \dots \supseteq A_n$. Chcemy A_{n+1}.
Rozważmy A_n. Pokrywamy A_n zbiorami o promieniu $\frac{1}{n+1}$
Pokrywamy A_n skończenie wieloma takimi zbiorami (całkowita ograniczoność X).
Któryś z tych zbiorów, nazwijmy A_{n+1}, nie może być pokryty skończenie wieloma zbiorami z $\mathcal{U}$.

Zauważmy $\operatorname{diam}(\overline{A_n}) = \operatorname{diam}(A_n)$
Zatem $\operatorname{diam}(\overline{A_n}) \to 0$

Niech $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$. (zupełność X)

Weźmy n
$\operatorname{diam}(A_n) < \frac{1}{n}$
$\frac{1}{n} < r$

Weźmy $U \in \mathcal{U}$ t. że $a \in U$
Bzo $U = B(a, r)$

A_n był wybrany tak, że nie można go pokryć skończenie wieloma elementami z $\mathcal{U}$. A pokazaliśmy właśnie, że A_n można pokryć jednym elementem z $\mathcal{U}$.

↯

$(C_b(X, \mathbb{R}^n), d_{sup})$ — z d_e

Definicja $(X, \mathcal{T})$ - przestrzeń topologiczna
1) Rodzina $\mathcal{F} \subseteq C(X, \mathbb{R}^n)$ jest jednakowo ciągła jeśli dla $\forall x \in X$, $\forall \varepsilon > 0$ istnieje otoczenie $x \in U$ t. że dla wszystkich $f \in \mathcal{F}$, $\operatorname{diam} f(U) \leq \varepsilon$.

(Dla $\mathcal{F}$ jednoelementowej jednakowa ciągłość = ciągłość)

Uwaga
(Każda skończona rodzina $\mathcal{F}$ funkcji ciągłych jest jednakowo ciągła)

2) Rodzina $\mathcal{F} \subseteq C(X, \mathbb{R}^n)$ jest ograniczona jeśli dla pewnego $r > 0$, $\bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(X) \subseteq B(0, r)$.

Twierdzenie (Arzeli - Ascolego)

$(X, \mathcal{T})$ jest przestrzenią zwartą
Załóżmy, że $\mathcal{F} \subseteq C(X, \mathbb{R}^n)$ jest jednakowo ciągła i ograniczona. Wówczas domknięcie $\mathcal{F}$ w $(C(X, \mathbb{R}^n), d_{sup})$ jest zwarte.

Uwaga
(X, d) zupełna, A całkowicie ograniczony.
Wówczas $\overline{A}$ jest całkowicie ograniczony.
Zauważmy, że $\varepsilon > 0$ jeśli $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, $\operatorname{diam}(B_i) \leq \varepsilon$
Wówczas $\overline{A} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B_i}$ i $\operatorname{diam}(\overline{B_i}) \leq \varepsilon$.

Dowód Twierdzenia
Ponieważ $(\mathbb{R}^n, d_e)$ jest zupełna, to $(C(X, \mathbb{R}^n), d_{sup})$ jest zupełne. Chcemy:
$\overline{\mathcal{F}}$ jest zupełna ✓ ($\overline{\mathcal{F}}$ jest domkniętym podzbiorem p. zupełnej $(C(X, \mathbb{R}^n), d_{sup})$)

$\overline{\mathcal{F}}$ jest całkowicie ograniczona

Z uwagi powyżej, wystarczy pokazać, że $\mathcal{F}$ jest całkowicie ograniczona.

Ustalmy $\varepsilon > 0$
Rozważmy pokrycie X
$\mathcal{U} = \{U : U\text{-otwarty } \forall_{f \in \mathcal{F}} \operatorname{diam} f(U) < \frac{\varepsilon}{3}\}$
(korzystamy z jednakowej ciągłości $\mathcal{F}$)

X jest zwarta
Weźmy $U_1, \dots, U_k$, $U_i \in \mathcal{U}$ pokrycie skończone X
Z ograniczoności $\mathcal{F}$, weźmy $r > 0$ t. że
$\bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(X) \subseteq B(0, r)$
Bierzemy kule $B_1, \dots, B_m \subseteq \mathbb{R}^n$, $\operatorname{diam}(B_i) < \frac{\varepsilon}{3}$, $\bigcup_{i=1}^{m} B_i \supseteq B(0, r)$
Pokażemy, że następujące zbiory mają średnicę $< \varepsilon$ i pokrywają $\mathcal{F}$.

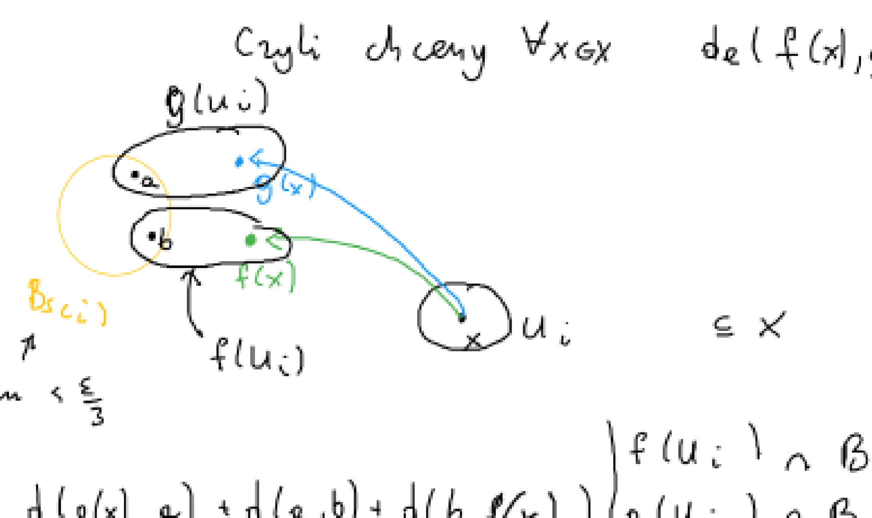
$s : \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, m\}$

$\rightsquigarrow \mathcal{A}_s = \{f \in \mathcal{F} : f(U_i) \cap B_{s(i)} \neq \emptyset, i = 1, \dots, k\}$

Zauważmy, że
$\bigcup_s \mathcal{A}_s = \mathcal{F}$ ($f \in \mathcal{F}$ $f(U_1), \dots, f(U_k)$
$\forall_i f(U_i) \cap B(0, r) \neq \emptyset$
zatem $\exists_{j = 1, \dots, m}$ $f(U_i) \cap B_j \neq \emptyset$)

Musimy jeszcze pokazać, że $\forall_s$ $\operatorname{diam}(\mathcal{A}_s) \leq \varepsilon$
Weźmy $f, g \in \mathcal{A}_s$. Chcemy $d_{sup}(f, g) < \varepsilon$

Czyli chcemy $\forall_{x \in X}$ $d_e(f(x), g(x)) < \varepsilon$.

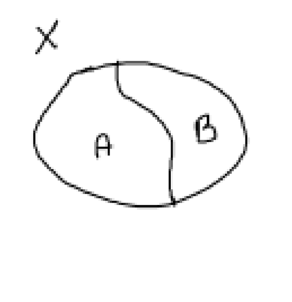


$$d(g(x), f(x)) \leq \underbrace{d(g(x), a)}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{d(a, b)}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{d(b, f(x))}_{< \frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon$$

$f(U_i) \cap B_{s(i)} \neq \emptyset$
$g(U_i) \cap B_{s(i)} \neq \emptyset$

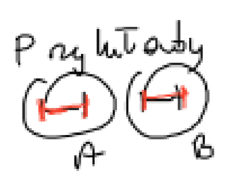
■

Def $(X, \mathcal{T})$ jest spójna jeśli nie istnieją A, B rozłączne, niepuste domknięte t. że $A \cup B = X$



Uwaga: W definicji powyżej można zastąpić "domknięty" przez "otwarty".

Przykłady



- nie jest spójna