

# Pracownia z analizy numerycznej

Zadanie: P2.2

Prowadzący: Witold Karczewski

Wiktor Pilarczyk

24 stycznia 2020

## 1 Aproksymacja

Aproksymacja jak sama nazwa wskazuje polega na przybliżaniu, pojęcie to jest głównie związane z funkcjami, które można przybliżać za pomocą prostszych funkcji (łatwiejszych do obliczenia lub zawierających mniej informacji). W informatyce oraz wielu dziedzinach pokrewnych częstym problemem są ograniczone zasoby (np. pamięć lub moc procesora), przez co zamiast obliczania dokładnego wyniku, zadowalająca jest jego aproksymacja, która nieznacznie się różni. Jeśli już przybliżamy funkcję to chcemy, aby była optymalna, czyli aby przy korzystaniu z tych samych zasobów było to najlepsze oszacowanie wyniku.

### 1.1 Podstawowe definicje i własności

Definicja iloczynu oraz normy, która wyraża się poprzez ten iloczyn pozwala zdefiniować przestrzeń liniową (unitarną), dzięki której znalezienie elementu optymalnego sprowadza się do rozwiązania układu liniowego. Podstawowe własności iloczynu skalarnego:

- a)  $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$
- b)  $\langle f, \alpha g + \beta h \rangle = \langle f, \alpha g \rangle + \langle f, \beta h \rangle$
- c)  $\langle f, f \rangle \geq 0$

Jeśli  $f \in E$  i  $g \in G$ , gdzie  $E$  jest przestrzenią unitarną, a  $G$  jest jej podprzestrzenią to  $w^* \in G$  najlepiej aproksymuje  $f$  (jest elementem optymalnym), gdy:

$$\|f - w^*\| = \text{dist}(f, G) = \inf_{g \in G} \|f - g\| \quad (1)$$

Dla każdej podprzestrzeni skończeniowymiarowej  $G$  istnieje punkt optymalny (Kincaid 367) oraz  $w$  jest optymalny  $\Leftrightarrow f - w^* \perp G$  (Kincaid 369).

Baza ortogonalna  $\{B_i\}$  jest to zbiór wektorów z przestrzeni unitarnej, która ma następujące własności:

- a)  $\langle B_i, B_j \rangle = 0 \quad i \neq j$
- b)  $\forall f \in E \quad f = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i B_i$

więc dowolny  $f \in E$  można przedstawić za pomocą sumy wektorów bazy.

## 2 Aproksymacja średniokwadratowa na zbiorze dyskretnym

### 2.1 Iloczyn skalarny na zbiorze dyskretnym

Jeśli mamy zbiór  $n + 1$  punktów  $\{x_i\}$  gdzie  $i \in \mathbb{N}$  oraz  $i \leq n$ , jak również funkcje  $f$  i  $g$ , dla których znane są wartości w punktach  $\{x_i\}$  definiujemy iloczyn skalarny:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^n f(x_i)g(x_i) \quad (2)$$

*Dowód.* Sprawdzamy czy (2) spełnia definicję iloczynu skalarnego.

a) Weźmy dowolne  $f$  i  $g$  dla zbioru  $n + 1$  elementowego punktów  $\{x_i\}$ .

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^n f(x_i)g(x_i) = \sum_{i=0}^n g(x_i)f(x_i) = \langle g, f \rangle$$

b) Weźmy dowolne  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$   $f, g$  i  $h$  dla zbioru  $n + 1$  elementowego punktów  $\{x_i\}$ .

$$\begin{aligned} \langle f, \alpha g + \beta h \rangle &= \sum_{i=0}^n f(x_i) (\alpha g(x_i) + \beta h(x_i)) = \\ &= \sum_{i=0}^n f(x_i) \alpha g(x_i) + \sum_{i=0}^n f(x_i) \beta h(x_i) = \langle f, \alpha g \rangle + \langle f, \beta h \rangle \end{aligned}$$

c) Weźmy dowolne  $f$  dla zbioru  $n + 1$  elementowego punktów  $\{x_i\}$ .

$$\langle f, f \rangle = \sum_{i=0}^n f(x_i)f(x_i) = \sum_{i=0}^n f(x_i)^2 \geq 0$$

□

### 2.2 Wielomian optymalny na zbiorze dyskretnym

Niech  $\{B_i\}$  będzie bazą dla  $\Pi_k$ . Spróbujmy znaleźć wielomian optymalny  $w_k^*$   $k$ -tego stopnia dla dowolnej funkcji  $f$ , która jest określona dla zbioru  $n + 1$  elementowego punktów  $\{x_i\}$ .

Ponieważ  $\{B_i\}$  jest bazą więc  $w_k^* = \sum_{i=0}^k \alpha_i B_i$ , więc dla dowolnego  $i$  otrzymujemy równanie:

$$\langle f - w_k^*, B_i \rangle = \langle f, B_i \rangle - \langle w_k^*, B_i \rangle \quad (3)$$

z (1) otrzymujemy:

$$\langle f, B_i \rangle - \langle w_k^*, B_i \rangle = 0 \quad (4)$$

przekształcając równanie:

$$\langle f, B_i \rangle = \sum_{j=0}^k \alpha_j \langle B_j, B_i \rangle \quad (5)$$

więc otrzymujemy wzór na  $\alpha_i$ :

$$\alpha_i = \frac{\langle f, B_i \rangle}{\langle B_i, B_i \rangle} \quad (6)$$

Skoro dla każdego  $i$  otrzymujemy równanie (5), możemy stworzyć układ równań i zapisać je w macierzy:

$$\begin{pmatrix} \langle B_0, B_0 \rangle & \langle B_1, B_0 \rangle & \cdots & \langle B_k, B_0 \rangle \\ \langle B_0, B_1 \rangle & \langle B_1, B_1 \rangle & \cdots & \langle B_k, B_1 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle B_0, B_k \rangle & \langle B_1, B_k \rangle & \cdots & \langle B_k, B_k \rangle \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, B_0 \rangle \\ \langle f, B_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, B_k \rangle \end{bmatrix} \quad (7)$$

Więc Jeśli baza jest ortogonalna wtedy  $\langle B_i, B_j \rangle = 0$  dla  $i \neq j$ , więc otrzymujemy macierz diagonalną:

$$\begin{pmatrix} \langle B_0, B_0 \rangle & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \langle B_1, B_1 \rangle & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \langle B_k, B_k \rangle \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, B_0 \rangle \\ \langle f, B_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, B_k \rangle \end{bmatrix} \quad (8)$$

Więc dla każdego  $i$  otrzymujemy układ równań:

$$\langle f, B_i \rangle = \alpha_i \langle B_i, B_i \rangle \quad (9)$$

Co umożliwia łatwe wyliczenie wielomianu optymalnego, gdyż korzystając z (8) oraz własności bazy ortogonalnej otrzymujemy:

$$w_k^* = \sum_{i=0}^k \alpha_i B_i = \sum_{i=0}^k \frac{\langle f, B_i \rangle}{\langle B_i, B_i \rangle} B_i \quad (10)$$

### 2.3 Obliczanie bazy ortogonalnej

Do obliczenia bazy ortogonalnej skorzystamy z zależności rekurencyjnej:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 & P_1(x) &= 1 - a_1 \\ P_k(x) &= (x - a_k)P_{k-1}(x) - b_k P_{k-2}(x) \end{aligned} \quad (11)$$

gdzie

$$a_k = \frac{\langle x P_{k-1}, P_{k-1} \rangle}{\langle P_{k-1}, P_{k-1} \rangle} \quad b_k = \frac{\langle P_{k-1}, P_{k-1} \rangle}{\langle P_{k-2}, P_{k-2} \rangle}$$

## 2.4 Postać potęgowa wielomianu

Przy szukaniu wielomianu optymalnego wystarczy spamiętywać wartości w podanych punktach  $x_i$ , aby wyliczyć jego postać skorzystamy z uogólnionego algorytmu Clenshawa, wymaga to spamiętywania współczynników:  $\alpha_i$ ,  $a_i$  oraz  $b_i$ . Dla bazy zadanej powyżej (10), algorytmu Clenshawa przyjmuje postać:

$$V_k = \alpha_k + (x - a_{k+1})V_{k+1} - b_{k+2}V_{k+2}$$

gdzie

$$V_{n+1} = V_{n+2} = 0$$

wtedy

$$w_n^* = V_0$$

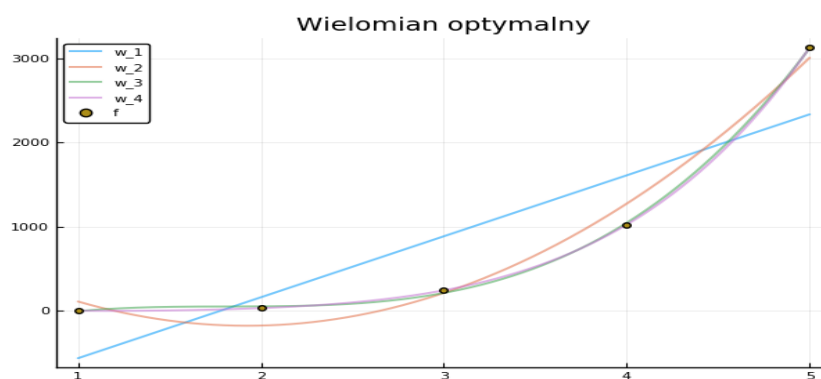
### 3 Obliczenia

#### 3.1 Funkcja $x^5$

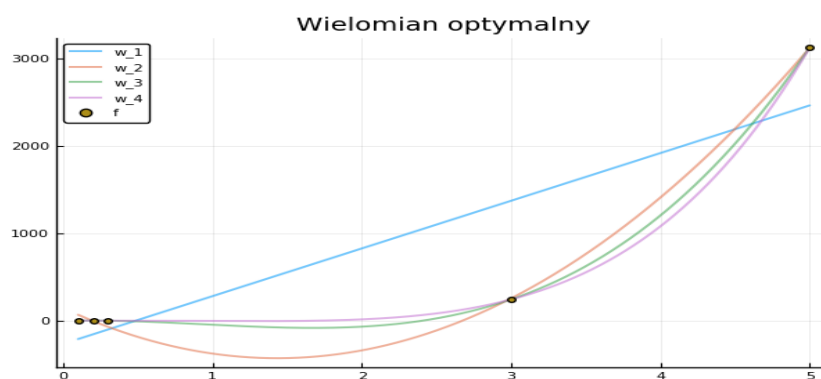
Stopień wielomianu optymalnego, a wielkość  $\delta$

Stopień wielomianu optymalnego	$\delta$ dla punktów równoodległych	$\delta$ dla punktów różnoodległych
1	1800000	1800000
2	140000	10000
3	1900	1
4	0.000001	0.000001

Wielomian 4 stopnia jest wielomianem interpolacyjnym dla zadanych punktów, dzięki czemu delta może być minimalna (nie może być równa zero, ponieważ wiąże się to z błędem obliczania wartości wielomianu w zadanych punktach).



Rysunek 1: Dla punktów równoodległych



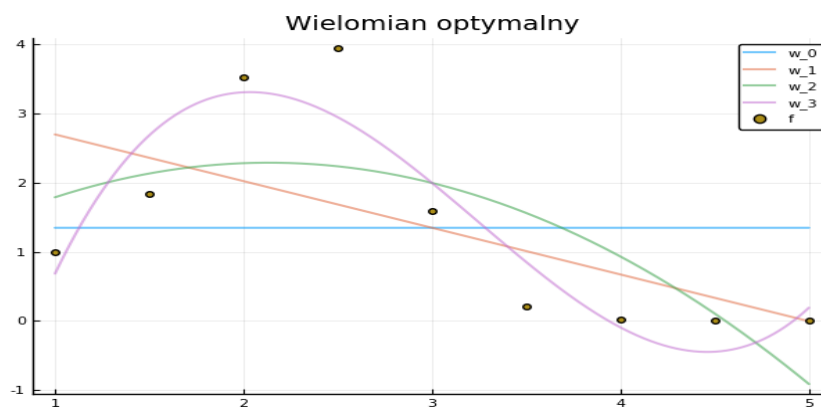
Rysunek 2: Dla punktów różnoodległych

### 3.2 Funkcja $x^{x\sin(x)}$

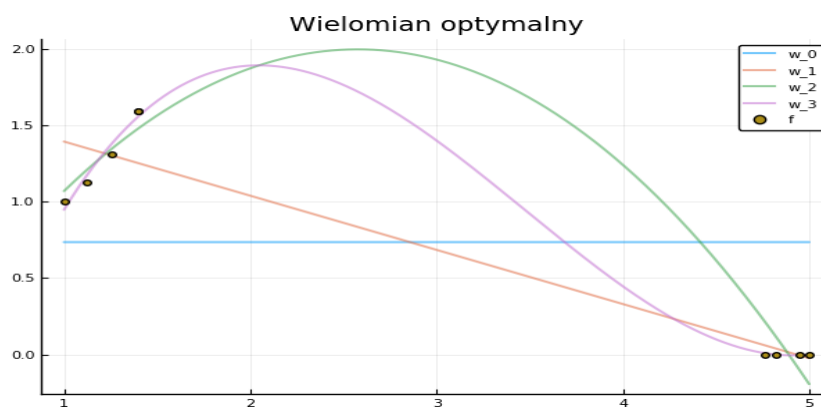
Stopień wielomianu optymalnego, a wielkość  $\delta$

Stopień wielomianu optymalnego	$\delta$ dla punktów równoodległych	$\delta$ dla punktów różnoodległych
0	19	5
1	12	0.6
2	9	0.2
3	3	0.02

Delta dla punktów różnoodległych, które można podzielić na podzbiory, wokół jednego punktu jest znacznie mniejsza od delty dla punktów równoodległych dla tego samego zakresu.



Rysunek 3: Dla punktów równoodległych



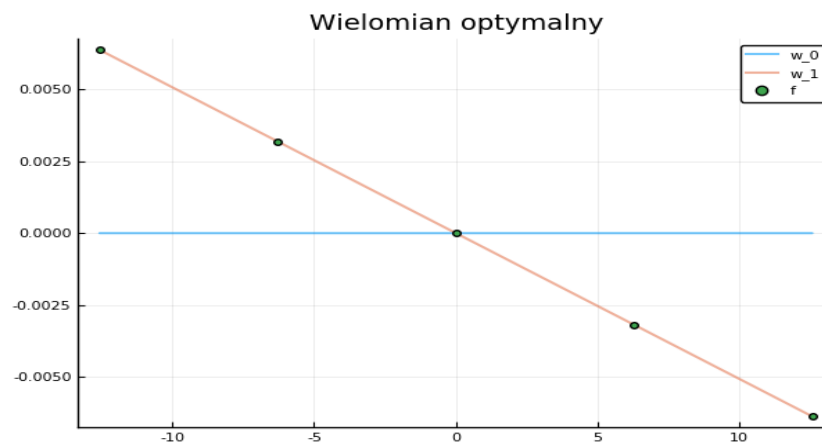
Rysunek 4: Dla punktów różnoodległych

### 3.3 Funkcja $\sin(x)$

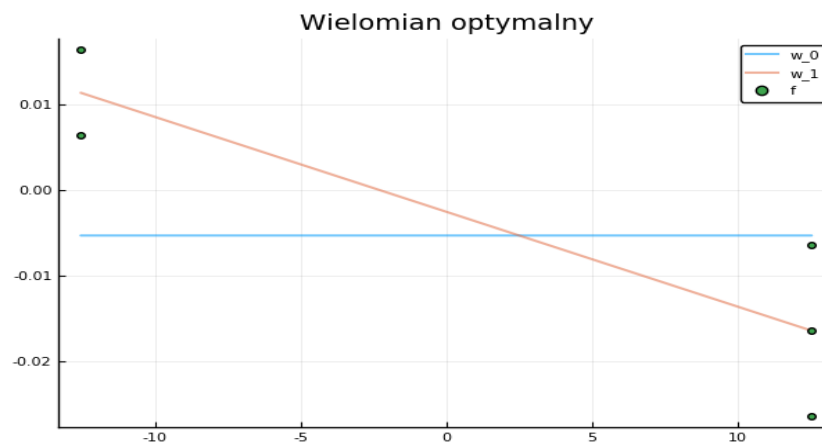
Stopień wielomianu optymalnego, a wielkość  $\delta$

Stopień wielomianu optymalnego	$\delta$ dla punktów równoodległych	$\delta$ dla punktów różnoodległych
0	0.0002	0.1
1	0.00000000000001	0.001

Delta dla punktów równoodległych jest znacznie mniejsza, ponieważ wartości w tych punktach nieznacznie się różnią.



Rysunek 5: Dla punktów równoodległych



Rysunek 6: Dla punktów różnoodległych

## 4 Porównanie dokładności obliczania wielomianu optymalnego w zależności od bazy

Porównania dla bazy ortogonalnej oraz bazd  $1, x, x^2, \dots$ . Dane dla funkcji są identyczne jak powyżej.

### 4.1 Dla funkcji x listy 7 zadania 8

Stopień wielomianu optymalnego, a różnice w wielkości  $\delta$ .

Stopień wielomianu optymalnego	Błąd względny między odległościami	Błąd bezwzględny względem bazd ortogonalnej
1	6.4666425426268547838e-15	2.3202703019193659142e-14
2	5.95172782585917659048e-16	2.15697453512714472894e-15
3	2.04710922692419305946e-16	1.1984356827452159378e-15
4	2.79033659242658438338e-15	3.0958144686251811424e-14
5	1.98817690961897511337e-17	8.34205522111729474868e-15
6	3.79439519379464424651e-14	6.98951427161064421676e-10
7	4.2628897304417041039e-10	6.03108786328256835312e+17

### 4.2 Dla funkcji z treści zadania

Stopień wielomianu optymalnego	Błąd względny między odległościami	Błąd bezwzględny względem bazd ortogonalnej
1	1.09788175458366138448e-17	1.0043946532488746388e-14
2	2.24519152123430642707e-19	1.49576263819501271238e-14
3	6.83002204604422398114e-19	4.60670739616362159977e-14
4	9.53692096978725386549e-19	1.195567356801952628e-13
5	6.35853736869512373674e-20	1.13393915307046848304e-14
6	4.85905744148349728884e-19	8.67019965614943267926e-14
7	7.37562624218113827034e-19	1.43160425656499147172e-13
8	1.24392645927077572376e-22	2.83282256435087719304e+09



### 4.3 Dla funkcji $x^{*sin(x)}$

Stopień wielomianu optymalnego	Błąd względny między odległościami	Błąd bezwzględny względem bazy ortogonalnej
1	1.26895022267703438956e-15	1.08097154787231143443e-16
2	7.11236625150490908709e-17	8.06295290304171003028e-18
3	2.12503625807158869065e-17	7.94958973542625150593e-18
4	3.04660810468426745956e-16	1.14108138575121590048e-16
5	1.53251977080826051747e-16	2.7230783488180611934e-16
6	1.77558434535235454277e-14	6.02480640720695684293e-14
7	3.86234827147858943153e-11	3.9093339838957780106e-10
8	2.21780378528282783894e-07	1.57315010560863976841e+13

## 5 Analiza wyników

### 5.1 Stopień wielomianu optymalnego

Im zadana delta jest mniejsza tym stopień wielomianu jest większy, wynika to z tego iż im mniejszy błąd chcemy otrzymać tym dokładniejsza musi być aproksymacja. Na podstawie przykładu dla funkcji  $x^5$  można też wywnioskować, iż dla wystarczająco małej delty stopień wielomianu optymalnego będzie równy liczbie punktów minus jeden, wtedy otrzymany wielomian optymalny jest też wielomianem interpolacyjnym dla zadanego zbioru.

### 5.2 Rozmieszczenie punktów

Istotny wpływ ma też odległość między zadanymi punktami, ponieważ im odległość między nimi jest bliższa tym większe prawdopodobieństwo, że wartość funkcji w tych punktach będzie do siebie zbliżona. Dla zbiorów, które składają się z mniejszych podzbiorów oscylujących wokół jednego punktu jest wyższe prawdopodobieństwo, że błędy dla wielomianów optymalnych zadanego stopnia będą niższe niż dla zbioru punktów równoodległych - własność tą można zaobserwować na przykładzie dla funkcji  $x^{*sin(x)}$ . Istnieją przypadki dla, których to stwierdzenie nie jest spełnione, dla powyższego przykładu z  $sin(x)$ , skorzystano z okresowości sinusa, dlatego funkcja miała zbliżone wartości w równoodległych punktach stąd wartość delty znacząco się różniła od punktów różnoodległych na tym samym przedziale.

### 5.3 Baza w obliczeniach

W przedstawionych wynikach widać, że baza, którą zastosujemy do obliczeń nie ma znaczącego wpływu na nasze wyniki. Różnice wynikają głównie z błędów obliczeń, ponieważ zakładając, że podstawowe operacje jak mnożenie, dodawanie lub obliczanie iloczynu skalarnego jest rzędu jednej operacji, to algorytm

obliczania dla bazy ortogonalnej jest rzędu  $O(n)$ , zaś dla obliczania w bazie  $1, x, x^2, \dots$  rzędu  $O(n^3)$ , gdyż odwracamy macierz, a duża wielkość błędu bezwzględna dla wielomianu interpolacyjnego wynika z tego, że dzieli przez małe wartości.

## Literatura

- [1] D. Kincaid, W. Cheney: *Analiza numeryczna*, WNT, 2005,
- [2] G. Dahlquist, A. Björck: *Numerical Methods in Scientific Computing, Vol.I*, SIAM, 2008.,
- [3] M. Dryja, J. i M. Jankowscy: *Przegląd metod i algorytmów numerycznych cz. 2*, WNT, 1988,