Przypomnienie

Lemat

Niech (X,d) będzie przestrzenią zwartą.
Niech $\mathcal{U}$ będzie pokryciem otwartym przestrzeni X.
Wówczas istnieje $\delta > 0$, że dla każdego $x \in X$, kula $B(x,\delta)$ leży w pewnym elemencie z $\mathcal{U}$.

Definicja Zbiór K w przestrzeni Hausdorffa $(X,\mathcal{T})$ jest zwarty jeśli $(K, \mathcal{T}_K)$ jest zwarta

Stwierdzenie

$(X,\mathcal{T})$ jest zwarta, $K \subseteq X$ jest domknięty.
Wówczas K jest zwarty.

D-d

K jest T_2 ponieważ X jest T_2

Niech $\mathcal{U}$ będzie pokryciem otwartym $(K, \mathcal{T}_K)$

$\mathcal{U} \ni U \mapsto U_X$ - zbiór otwarty w X t. że $U_X \cap X = U$

$\mathcal{U} \mapsto \mathcal{U}_X = \{U_X : U \in \mathcal{U}\}$

Rozważmy pokrycie otwarte X: $\{X \setminus K\} \cup \mathcal{U}_X$

Wybierzmy podpokrycie skończone.

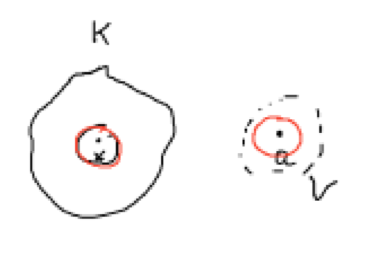
To nam daje podpokrycie skończone $\mathcal{U}$

$(U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{U}$ t. że $\bigcup_{i=1}^{k} U_i = K)$.

Twierdzenie

Zbiór zwarty K w $\underbrace{\text{przestrzeni } T2}_{(X,\mathcal{T})}$ jest domknięty. $(K \subseteq X)$.

D-d



Weźmy $a \in X \setminus K$.

Dla ustalonego $x \in K$,
weźmy $a \in \underbrace{V(x)}_{\text{otwarty}}$ i $x \in \underbrace{W(x)}_{\text{otwarty}}$

t. że $V(x) \cap W(x) = \emptyset$.

Ponieważ K jest zwarty $\{W(x) : x \in K\}$ ma podpokrycie skończone $\{W(x_1), \ldots, W(x_n)\}$

Rozważmy $V = \bigcap_{i=1}^{n} V(x_i)$, to jest zbiór otwarty,

V jest rozłączny z $W = \bigcup_{i=1}^{n} W(x_i)$

$V \cap W = \emptyset$ zatem $\overset{a}{V} \cap K = \emptyset$

Ale $W \supseteq K$

Znajdujemy takie otoczenie $\forall a \in X \setminus K$

$\Rightarrow X \setminus K$ otwarty $\Rightarrow K$ domknięty.

Twierdzenie

Podzbiór przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^n, d_e)$ jest zwarty $\Leftrightarrow$ jest domknięty i ograniczony.

Dowód

Mamy $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ z tw. powyżej, A jest domknięty

Aby zobaczyć, że jest ograniczony, rozważmy kule

$B(0,1) \subseteq B(0,2) \subseteq B(0,3) \subseteq \ldots$ pokrycie $\mathbb{R}^n$

$B(0,1) \cap A \subseteq B(0,2) \cap A \subseteq B(0,3) \cap A \subseteq$ pokrycie A

Istnieje podpokrycie skończone.

To oznacza: istnieje $R > 0$, $A \subseteq B(0,R)$.

$\Leftarrow$ Ponieważ A jest ograniczony, to istnieje $R > 0$ t. że $A \subseteq \overline{B(0,R)} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_e \leq R\}$

$\left\{ \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \right.$ można rozważać zamiast $\overline{B(0,1)}$

Ponieważ A jest domknięty, czyli jest domkniętym podzbiorem przestrzeni zwartej $\overline{B(0,R)}$, to jest on też zwarty.

∎

Uwaga

Odcinek domknięty jest przestrzenią zwartą.
Możemy to sprawdzić bezpośrednio.
Zauważmy, że każdy ciąg ma podciąg zbieżny.

Twierdzenie

Mamy $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$, X, Y są T_2
f - ciągła

Jeżeli $K \subseteq X$ jest zwarty, to $f(K)$ jest zwarty.

d-d

Rozważmy $\mathcal{U}$ - rodzinę zbiorów otwartych w Y t. że $\bigcup \mathcal{U} \supseteq f(K)$

Chcemy pokazać, że istnieje podpokrycie skończone, tzn. $U_1, \ldots, U_m \in \mathcal{U}$ t. że $U_1 \cup \ldots \cup U_m \supseteq f(K)$

Rozważmy $\{\underbrace{f^{-1}(U)}_{\text{otwarte w } X} : U \in \mathcal{U}\}$ pokrycie K

Wybierzmy podpokrycie skończone.

To nam daje żądane $U_1, \ldots, U_m$.

Twierdzenie Weierstrassa

Niech $f : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą na przestrzeni $(X, \mathcal{T})$ Hausdorffa. Dla każdego $\underset{\text{zwarty}}{K \subseteq X}$

istnieją $a, b \in K$
$f(a) = \sup f(K)$
$f(b) = \inf f(K)$.

Uwaga

Na Wykładzie z Analizy było tw Weierstrassa dla $K = [0,1]$.

D-d

Wiemy, że $f(K)$ jest zwarty

$f(K)$ jest domknięty i ograniczony.

Twierdzenie

$f : \underset{\text{zwarta}}{X} \to \underset{T_2}{Y}$ ciągła, bijekcja

Wówczas f jest homeomorfizmem.

Uwaga

Założenie, że X jest zwarta jest istotne

$f : [0, 2\pi) \to S^1$ która "nawija" $[0,2\pi)$ na S^1 jest bijekcją, ciągła, nie jest homeomorfizmem

D-d

Chcemy: f^{-1} jest funkcją ciągłą

Pokażemy, że $(f^{-1})^{-1}(\underset{\text{domknięty}}{F})$ jest domknięty

$(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$

$F \subseteq X$
zatem F jest zwarty
$\overset{T_2}{Y} \supseteq f(F)$ jest zwarty
zatem $f(F)$ jest domknięty.

Twierdzenie

Każde przekształcenie ciągłe $f : \underset{\text{zwarta}}{X} \to Y$ (metryczne) $\left\{ \begin{array}{l} (X, d_X) \\ (Y, d_Y) \end{array} \right.$

jest jednostajnie ciągłe:

$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{a,b \in X}$ $d_X(a,b) < \delta \Rightarrow d_Y(f(a), f(b)) < \varepsilon$.

$\{ |a-b| < \delta$ $\qquad |f(a) - f(b)| < \varepsilon$

d-d

Ustalmy $\varepsilon > 0$

Niech δ będzie liczbą Lebesgue'a dla

$\mathcal{U} = \{ f^{-1}(B_Y(y, \frac{\varepsilon}{2})) : y \in Y \}$, tzn.

δ jest t. że $\forall x \in X \ \exists U \in \mathcal{U} \ B_X(x, \delta) \subseteq U$.

$B_X(x, \delta) \subseteq U$

$B_X(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B_Y(y, \frac{\varepsilon}{2}))$ dla pewnego $y \in Y$

$f(B_X(x,\delta)) \subseteq B_Y(y, \frac{\varepsilon}{2})$

Weźmy, $a, b \in X$ t. że $d_X(a,b) < \delta$

Czyli $b \in B_X(a, \delta)$

Zatem dla pewnego $y \in Y$, $f(a), f(b) \in B_Y(y, \frac{\varepsilon}{2})$

$d_Y(f(a), f(b)) \leq d_Y(f(a), y) + d_Y(y, f(b))$
$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

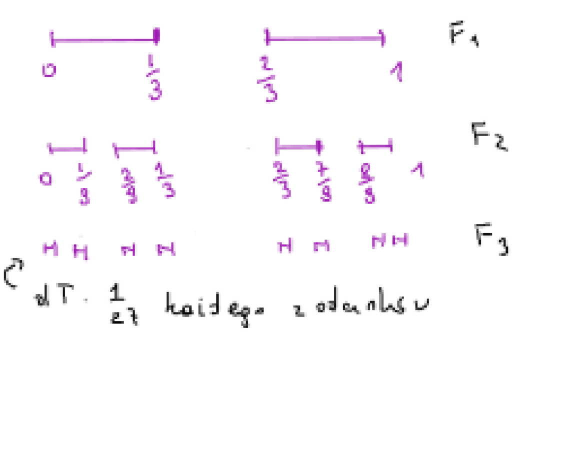
∎

ZBIÓR CANTORA

Def

Zbiorem Cantora nazywamy zbiór liczb postaci $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i}$, gdzie $c_i \in \{0, 2\}$, $i = 1, 2, \ldots$

(czyli jest to zbiór liczb z odcinka $[0,1]$, które w rozwinięciu trójkowym nie mają współczynnika 1)



$\mathcal{C}$ dł. $\frac{1}{27}$ każdego z odcinków

F_i jest domknięty

zbiór Cantora $\mathcal{C} = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$

Czyli $\mathcal{C}$ jest domknięty w $[0,1]$.

- Zatem jest to zbiór zwarty
- Zauważmy, że $\mathcal{C} \subseteq [0,1]$ jest brzegowy