RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE, II rok matematyki

LISTA 5

Zadanie 1. Określić typ równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Zadanie 2. Pokazać, że równanie (liniowe, ze stałymi współczynnikami)

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0$$

sprowadza się przez zamianę zmiennych $u(x, y) = v(x, y)\exp(-bx - ay)$ do

$$v_{xy} + (c - ab)v = 0.$$

Zadanie 3. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $u_{xy} + au_x = 0$.

Zadanie 4. Sprowadzić do postaci kanonicznej równanie

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 6u_{zz} = 0.$$

Zadanie 5. Rozwiązać (używając wzorów d'Alemberta) następujące zagadnienie dla równania falowego $u_{tt} = u_{xx}$ z warunkami $u = h$, $\frac{\partial u}{\partial \nu} = g$ zadanymi na prostej $t = kx$ ($k > 0$, ν jest wektorem normalnym do tej prostej).

Zbadać przypadek $k = 1$ (zagadnienie Goursata).

Zadanie 6. Udowodnić, że laplasjan $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ jest niezmienniczy ze względu na liniowe ortogonalne transformacje zmiennych $x_1, ..., x_n$.

Zadanie 7.* Pokazać, że jeżeli $\Delta u = f$ w pewnym obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, to przekształcenie Kelvina funkcji u zdefiniowane wzorem $v(x) = |x|^{2-n}u(x/|x|^2)$ dla $x/|x|^2 \in \Omega$ spełnia równanie $\Delta v(x) = |x|^{-n-2}f(x/|x|^2)$.

Zadanie 8. Rozwiązać korzystając ze wzoru d'Alemberta następujące zagadnienie brzegowo-początkowe dla równania falowego

$$u_{tt} = u_{xx} \quad \text{w obszarze} \quad \{(x,t)\ :\ x > 0,\ \ t > 0\},$$

$u(0,t) = 0, u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x)$
(w szczególności dla $f(x) = x\exp(-x^2)$, $g(x) = 0$).

Zadanie 9. Rozwiązać metodą Fouriera zagadnienie brzegowo-początkowe dla równania struny

$$u_{tt} = u_{xx} \quad \text{w} \quad \{(x,t)\ :\ 0 < x < 1,\ \ t > 0\}$$

(i) $u(x,0) = 2hx$ dla $0 < x < 1/2$, $u(x,0) = 2h(1-x)$ dla $1/2 < x < 1$; $h > 0$ $u_t(x,0) = 0$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$;
(ii) $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$ dla $0 < x < a$ i dla $b < x < 1$, $u_t(x,0) = h > 0$ dla $a \le x \le b$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$.
Czy otrzymane szeregi Fouriera można dwukrotnie różniczkować?

Zadanie 10.* Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego dla równania falowego w $\mathbb{R}^n$, $n = 1,2,3$, z warunkami początkowymi $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 1$ dla $|x| \le 1$, $u_t(x,0) = 0$ dla $|x| > 1$. Określić jaki jest nośnik rozwiązania. Porównać wyniki i zinterpretować zasadę Huygensa na powyższych przykładach.

Zadanie 11.* Sprawdzić, że szereg

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\Delta^k f(x) \frac{t^{2k}}{(2k)!} + \Delta^k g(x) \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)$$

formalnie spełnia równanie falowe $u_{tt} = \Delta u$ z warunkami $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$. Podać (przykładowo) dla jakich funkcji f i g powyższy szereg przedstawia faktycznie rozwiązanie.
Czy szereg ten ma sens dla $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$?
Wsk. porównać z zasadą Huygensa.

* — zadanie dodatkowe

24 kwietnia 2020 *Piotr Biler*