d_1, d_2 na X

$\exists K, L$

$\forall x, y$

$L\, d_2(x,y) \leq d_1(x,y) \leq K\, d_2(x,y)$

Cauchy d_1 $\equiv$ Cauchy d_2

$\Delta(x,y) = k$ — k zależy od x i y, 1 miejsce gdzie się różnią

Tutaj podobna sytuacja, nie dokładnie to samo

$d = d_2$

$d_{prod} = d_3$

$d_{prod}(x,y) \leq \frac{2}{2^k} \leq \frac{1}{k} = d(x,y)$ Cauchy w d $\Rightarrow$ Cauchy w d_{prod}

oraz $\frac{k}{2^k} d(x,y) = \frac{1}{2^k} \leq d_{prod}(x,y)$

Niemniej jednak: (x_n) Cauchy w d_{prod} $\Rightarrow \min_k \{\Delta(x_i, x_j),\ i,j \geq k\} \to \infty$ $\Rightarrow (x_n)$ Cauchy w d

U - wnętrze kwadratu $\subseteq \mathbb{R}^2$

(2) a)

d' jest metryką

F $\boxed{x\ y}$

$x \neq y$, to może się zdarzyć, że $\frac{1}{d(x,F)} = \frac{1}{d(y,F)}$

Ale $d(x,y) \neq 0$

nier. Δ osobno na d

osobno na tą drugą część

$\frac{1}{d(x,F)} = a$ $\quad \frac{1}{d(z,F)} = c$

$|a-c| \leq |a-b| + |b-c|$ $\quad \frac{1}{d(y,F)} = b$

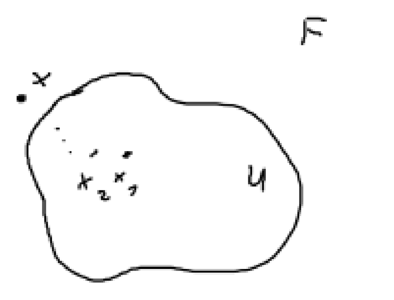
Weźmy ciąg Cauchy'ego w d'

$\forall \varepsilon \exists n: d'(x_i, x_j) < \varepsilon$

$d'(a,b) \geq d(a,b)$

$\left| \frac{1}{d(F, x_i)} - \frac{1}{d(F, x_j)} \right| \xrightarrow[j \to \infty]{} \infty$

ustalmy x_i



$\underbrace{(x_n)}_{w\ U} \to \underbrace{x}_{w\ F}$

To (x_n) nie jest Cauchy'ego

$B(x,r) \subseteq U$ tworzą bazę

(x_n) w U bieżemy

$x_n \xrightarrow{d} x$ w U $\iff$ $x_n \xrightarrow{d'} x$ w U

$d' \geq d$ $\Rightarrow$?

$\Leftarrow$ jasne

kula w d

$V = B(x,r)$ kula względem d

$\overline{B(x,r)} \subseteq U$

$\exists c \quad \forall y \in B(x,r) \quad \frac{1}{d(y,F)} \leq c$

leży w V od pewnego miejsca

$x_n \to x$ w d' $\qquad x_n, x \in B(x,r)$

$d(x_n, x) + \underbrace{\left| \frac{1}{d(x_n,F)} - \frac{1}{d(x,F)} \right|}_{\downarrow\ ?\ 0} \to 0$

Istotne jest, że $x \notin bd(V)$. Równoważnie, że $d(x,F) \neq 0$.

wynika z ciągłości $y \to d(y,F)$

i z ograniczoności ciągu $\frac{1}{d(x_n,F)}$

zad 3

$U_n = \bigcup \{U$ - otwarty w X, $U \cap Y \neq \emptyset$
$diam(U) < \frac{1}{n}$ w (X,d)
$diam(U \cap Y) < \frac{1}{n}$ w (Y, d_Y) $\}$

Sprawdzamy, że $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$

$\subseteq$ jasne

$\supseteq$ widzimy, że $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \subseteq \overline{Y}$ ← domknięcie w d

(ponieważ dla $x \in X \setminus \overline{Y}$
$d(x,Y) > 0$)
tzn $d(x,Y) > \frac{1}{n}$ dla pewnego n

Weźmy $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Chcemy $x \in Y$.

$\forall n \quad \exists \quad V_n$ - otwarty w X $\subseteq U_n$, V_n jest otoczeniem x
$diam(V_n) < \frac{1}{n}$ w (X,d), $V_n \cap Y \neq \emptyset$
$diam(Y \cap V_n) < \frac{1}{n}$ w (Y, d_Y)

Pomniejszając V_n jak trzeba, $\overline{V_n}^X \subseteq U_n$

oraz $V_1 \supseteq V_2 \supseteq V_3 \supseteq \dots$

Przypomnijmy:
$\overline{V_n \cap Y}^Y$
$= \overline{V_n \cap Y}^X \cap Y$ (lista 2, zad 5)
$\subseteq \overline{V_n}^X \cap Y$
$\subseteq \overline{V_n}^X$

Wiemy, że $\forall n \quad V_n \cap Y \neq \emptyset$

Z warunku Cantora $\exists y \quad \{y\} = \bigcap_n \overline{V_n \cap Y}^Y \in Y$

z zupełności (Y, d_Y)

$x \in V_n$
i $diam(V_n) = diam(\overline{V_n})^X \to 0$
implikują $\{x\} = \bigcap_n \overline{V_n}^X$

Ponieważ $y \in \overline{V_n \cap Y}^Y \subseteq \overline{V_n}^X$ dla każdego n, mamy $y = x$, czyli $x \in Y$.

Do zadania 1

$[0,1]^{\mathbb{R}}$ - zwarta

$\left(\begin{array}{l} X_i \text{ - zwarte} \quad i \in I \\ \Rightarrow \prod_{i \in I} X_i \text{ zwarte} \\ \text{Tw Tichonowa} \end{array} \right)$ ← skrypt. Tw. 7.3.4

Przestrzenie zwarte są normalne (na którejś liście)

$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ - nie jest przestrzenią normalną (nie pokazaliśmy tego)

$\|$ top

$(0,1)^{\mathbb{R}}$

$(0,1)^{\mathbb{R}} \subseteq [0,1]^{\mathbb{R}}$

nie jest normalna — normalne

5 Nie wprost $\forall a$, $\{a\}$ nie jest otwarty w (X,d) ← przeliczalny.

$\{a\}$ - domknięty

- brzegowy ($Int\{a\} = \emptyset$ ponieważ $\{a\}$ nie jest otwarty)

$X = \underbrace{\bigcup_{a \in X} \{a\}}_{\text{przeliczalna suma}}$ z tw Baire jest brzegowy

Sprzeczność ponieważ $Int\, X = X$