z. 6

$a_n = \frac{1}{n}$

ze zwartości

Pokrywamy X kulami o promieniu a_1, wybieram skończone

Niech P_1 – zbiór wszystkich środków ze skończonego pokrycia

$\forall_{x\in X}\ \ d(x, P_1) < 1$

P_n – zbiór a_n

$P = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$ – przeliczalne

$\forall_{\varepsilon>0}\ \forall_{x\in X}\ \exists_{p\in P}\ \ d(x,p) < \varepsilon$

więc P jest gęste w X

X jest ośrodkowa

z. 7. (X,d) – ośrodkowa, szukamy $h: X \to [0,1]^{\mathbb{N}}$, że

- h – ciągłe
- h – 1-1
- $h^{-1}: h[X] \to X$ jest ciągłe

D – ośrodek, $D = \{s_n : n\in\mathbb{N}\}$ (D-gęsty)

$h(x) = \left(\min\left(d(x,s_n), 1\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(czyli $(h(x))_n = \min\left(d(x,s_n),1\right)$)

Dowód tego, że h – homeomorfizm:

- h – ciągła. $\forall_n\ x \overset{h_n}{\mapsto} \min\left(d(x,s_n),1\right)$ – ciągłe, więc h – ciągłe, bo dla bazowego zbioru $U_1\times U_2\times\dots\times U_n\times[0,1]\times[0,1]\times\dots \subseteq [0,1]^{\mathbb{N}}$
$h^{-1}(U_1\times U_2\times\dots\times U_n\times[0,1]\times\dots) = \{x : (h(x))_i \in U_i \text{ dla } i\le n\} =$
$= \bigcap_{i=1}^{n}\{x : h(x)_i \in U_i\} = \bigcap_{i=1}^{n} \underbrace{h_i^{-1}(U_i)}_{\text{otwarty}}$ – otwarty

- h – 1-1: weźmy $x\neq y$ w X, $r = d(x,y)$ $\quad T:\ h(x)\neq h(y)$

weźmy $s_n\in D$: $d(x,s_n) < \frac{r}{2} \wedge 1 \leftarrow \min(1, \frac{r}{2})$

$d(y,s_n) \geqslant \left|\underbrace{d(x,y)}_{=r} - \underbrace{d(x,s_n)}_{<\frac{r}{2}}\right| > \frac{r}{2}$

$h_n(y) = \min\left(d(y,s_n),1\right) \geqslant \min\left(\frac{r}{2},1\right) > d(x,s_n) \geqslant h_n(x)$

$\Rightarrow h(x)\neq h(y)$.

- h^{-1} – ciągłe, czyli dla dowolnego ciągu $(y_k)_k$ w $h[X]$ zbieżnego do $z\in h[X]$. $T:\ h^{-1}(y_k) \xrightarrow[k]{} h^{-1}(z)$.

(współrzędne ozn. n, a indeksy ciągu k)

$(\exists a_k, b\in X)\ y_k = h(a_k)$, $z = h(b)$, czyli $T:\ a_k \xrightarrow[k]{(\text{w } d)} b$.

Wiemy, że $h(a_k) \xrightarrow{k} h(b)$, czyli $\forall n$

$h_n(a_k) = \min\left(1, d(a_k,s_n)\right) \xrightarrow{k} \min\left(1, d(b,s_n)\right) = h_n(b)$

Niech $\varepsilon > 0$. Ustalmy s_n t. że $d(s_n,b) < \frac{\varepsilon}{2} \wedge 1$ (z gęstości D).

Wtedy $\min\left(1, d(b,s_n)\right) = d(b,s_n) < 1$ i od pewnego k $\min\left(1, d(a_k,s_n)\right) = d(a_k,s_n)$, ~~czyli~~

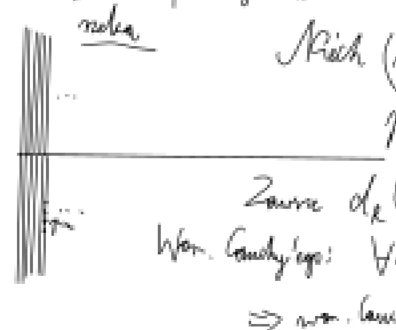
$d(a_k,s_n) \xrightarrow{k} d(b,s_n) < \frac{\varepsilon}{2}$

od pewnego k $d(a_k,s_n) < \frac{\varepsilon}{2} \overset{\Delta}{\Rightarrow}$

$\overset{\Delta}{\Rightarrow} d(a_k,b) \leqslant d(a_k,s_n) + d(s_n,b) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Zatem $a_k \xrightarrow{k} b$, czyli h^{-1} – ciągłe ■

z. 8. rzeka



Niech $(p_n)_n$ – ciąg Cauchy'ego w d_R

$p_n = (x_n, y_n)$

Zawsze $d_R(p_n,p_m) \geqslant |x_n - x_m|$

War. Cauchy'ego: $\forall\varepsilon>0\ \exists_N\ \forall_{n,m\geqslant N}\ d_R(p_n,p_m) < \varepsilon$

$\Rightarrow$ war. Cauchy'ego dla $(x_n)_n \Rightarrow (\exists x\in\mathbb{R})\ x_n \xrightarrow{n} x$

1° $\liminf_n |y_n| > 0$, czyli $\exists\varepsilon>0\ \exists_N\ \forall n\geqslant N\ \ |y_n| \geqslant \varepsilon$

Z war. Cauchy'ego dla $\varepsilon \to (\exists N')\ (\forall_{m,n}\geqslant N')\ d_R(p_n,p_m) < \varepsilon$

b.z.o. $N'\geqslant N \longrightarrow |y_n|, |y_m| \geqslant \varepsilon$

$\rightsquigarrow$ Gdyby $x_n\neq x_m$, to $d_R(p_n,p_m) \geqslant |y_n| + |y_m| \geqslant 2\varepsilon$ ↯

$\Rightarrow x_n = x_m$ a nawet $\operatorname{sgn} y_n = \operatorname{sgn} y_m \Rightarrow d_R(p_n,p_m) = |y_n - y_m|$

$\Rightarrow (y_n)$ – Cauchy'ego, więc $y_n \xrightarrow{n} y$, stąd łatwo widać

$p_n \xrightarrow{d_R} (x,y)$

2° $\liminf_n |y_n| = 0$, czyli $\exists$ podciąg $y_{n_k} \xrightarrow{k} 0$

$p_{n_k} \xrightarrow[k]{d_R} (x,0)$, bo

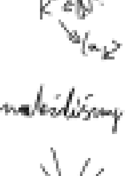
$|x_{n_k} - x| \xrightarrow{k} 0$

$|y_{n_k} - 0| \xrightarrow{k} 0$. Skoro $(p_n)_n$ – Cauchy'ego i ma podciąg zbieżny do $(x,0)$ (w d_R), to $p_n \xrightarrow{d_R} (x,0)$, bo $(\forall\varepsilon>0)$

$\left[d_R(p_n,(x,0)) \leqslant \underbrace{d_R(p_n,p_{n_k})}_{<\varepsilon} + \underbrace{d(p_{n_k},(x,0))}_{<\varepsilon}\right]$

$(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n\geqslant N,\ k\geqslant K')$, $K'\in\mathbb{N}$ ($n_k\geqslant N$) $\qquad (\exists K\in\mathbb{N})(\forall k\geqslant K)$

W 1°, 2° znaleźliśmy granicę (p_n), więc d_R – zupełna

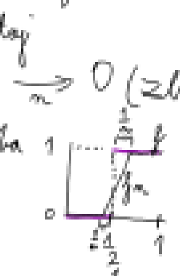
w d_c  analogicznie.

z. 9. $C[0,1]$, $d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\,dx$

1. próba $f_n(x) = x^n$ $\quad f_n \xrightarrow{n} f$: $f(x) = \begin{cases} 0, & x<1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$

ale tutaj $f_n \xrightarrow{n} 0$ (zbieżny) $\quad$ (!) $d(0,f) = 0$

2. próba

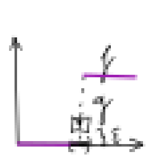


$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x < \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ 1, & x > \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} + \frac{n}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right), & x\in\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{n}, \frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right] \end{cases}$

Faktycznie $\int_0^1 |f_n - f| \xrightarrow{n} 0$

2. nie wprost, że $(\exists g\in C[0,1])\ f_n \xrightarrow{n} g$

wtedy: $\qquad$ z nierówności Δ



$d(g,f) \leqslant d(f_n,g) + d(f_n,f) \xrightarrow{n} 0$,

$d(g,f) = 0$

z ciągłości g i wartości dla $x \approx \frac{1}{2}$ na liczbę $g(\frac{1}{2})$

b.z.o. załóżmy, że $g(\frac{1}{2}) \neq 0$, $(\exists\delta>0)\ |g(x)| > \delta$ dla $x\in(\frac{1}{2}-\delta, \frac{1}{2}]$ $\left(\delta \leqslant \frac{|g(\frac{1}{2})|}{2}\right)$

$\int_0^1 |f(x) - g(x)|\,dx \geqslant \int_{\frac{1}{2}-\delta}^{\frac{1}{2}} |\underbrace{f(x)}_{0} - g(x)|\,dx \geqslant \delta\cdot\delta = \delta^2 > 0$ ↯

T: f_n – Cauchy'ego, bo „ma granicę" (nie w $C[0,1]$)

$d(f,f_n) \xrightarrow{n} 0 \Rightarrow d(f_n,f_m)$ – małe