1 Wstęp

Interesuje nas oczekiwana liczba pustych list po umieszczeniu n kluczy w tablicy haszującej T o n elementach. Czyli oznacza to, że w elemencie tablicy może być wiele kluczy. Więc jeśli funkcja haszująca f dla klucza x zwróci wartość $i =$ f(x) to do elementu tablicy T[i], będzie należał $x \in T[i]$, zazwyczaj element tablicy jest listą klucz, które zostały w nim umieszczone. Zakładamy, że nasza funkcja haszująca f z tym samym prawdopodobieństwem dla każdego klucza przydziela elemnt tablicy T.

2 Obliczanie prawdopodobieństwa

Chcemy sprawdzić z jakim prawdopodobieństwem element tablicy $T[i]$ jest pusty, niech $P(T[i])$ będzie oznaczało, że prawdopodobieństwem element tablicy $T[i]$ jest pusty, a skoro prawdopodobieństwo, że klucz wyląduje w $T[i]$ wynosi $\frac{1}{n}$ dla każdego klucza. Biorąc zdarzenie przeciwne otrzymujemy wzór:

$$P(T[i]) = (\frac{n-1}{n})^n$$

3 Wartość oczekiwana

Chcemy obliczyć wartość oczekiwaną pustych elementów tablicy T. Najpierw obliczmy wartość oczekiwaną pojedyńczego elemntu:

$$E(T[i]) = P(T[i]) * 1 + (1 - P(T[i])) * 0 = P(T[i])$$

Mnożymy razy 1, ponieważ jest to przypadek kiedy nasza lista jest pusta, a razy 0 wpp.

Korzystając z liniowości wartości oczekiwanej

$$E(\sum_{i=0}^{n} T[i]) = \sum_{i=0}^{n} E(T[i]) = \sum_{i=0}^{n} (\frac{n-1}{n})^n = n * (\frac{n-1}{n})^n$$

Wiemy o tym, że dla odpowiednio dużego n:

$$(\frac{n-1}{n})^n -> \frac{1}{e}$$

Więc naszą wartość oczekiwaną możemy oszacować jako:

$$E(\sum_{i=0}^{n} T[i]) = \frac{n}{e}$$