L3, z 4.

„$\Rightarrow$": Z: $f: X \to Y$ – domknięte

T: $\overline{f[A]} = f[\overline{A}]$

– $f[\overline{A}]$ – domknięty

– $f[\overline{A}] \supseteq f[A]$, więc $f[\overline{A}] \supseteq \overline{f[A]}$

Zaś inkluzja $\overline{f[A]} \supseteq f[\overline{A}]$ wynika z ciągłości f.

(skrypt)

„$\Leftarrow$": Z: $(\forall A \subseteq X)$ $\overline{f[A]} = f[\overline{A}]$

T: f – (ciągła) domknięta

Ciągłość wynika z „$\supseteq$" (dla każdego A), zaś domkniętość: niech A – dowolny domknięty w X

T: $f(A)$ – domknięty

ale $f(A) = f(\overline{A}) = \overline{f[A]} \Rightarrow$ ✓

odwzorowanie otwarte:

„$\Leftarrow$": Z: $(\forall A \subseteq X)$ $f[\mathrm{Int}(A)] \subseteq \mathrm{Int}\, f[A]$ f – ciągłe

T: f – otwarte

Niech U – otwarty. $f(U) = f(\mathrm{Int}\, U) \subseteq \mathrm{Int}\, f(U) \overset{\text{zawsze}}{\subseteq} f(U)$

$\mathrm{Int}\, f(U) = f(U) \rightsquigarrow$ ✓

„$\Rightarrow$": Z: f – otwarte

T: f – ciągłe (✓) i $(\forall A \subseteq X)$ $f[\mathrm{Int}(A)] \subseteq \mathrm{Int}\, f[A]$

Wiemy, że $f[\mathrm{Int}(A)]$ – otwarty, zawarty w $f(A)$

więc OK.

2.5. b) $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$

T: $\text{Int}(A\times B) = \text{Int}\,A \times \text{Int}\,B$

$$\text{Int}\,(A\times B) = \bigcup_{\substack{U \text{ otw.} \\ U\subseteq A\times B}} U \overset{(\text{fakt})}{=} \bigcup_{\substack{U\in\mathcal{B} \\ U\subseteq A\times B}} U = \bigcup_{\substack{U\times V,\ U\in\mathcal{T}_X \\ V\in\mathcal{T}_Y \\ U\subseteq A,\ V\subseteq B}} U\times V \ \underset{\subseteq}{\overset{\supseteq}{}}\ \text{Int}\,A\times\text{Int}\,B$$

← oczywiste

skoro dla każdego $U\times V$, to też dla całej sumy

„$\supseteq$" inaczej: Skoro $\underbrace{\text{Int}\,A\times\text{Int}\,B}_{\text{otwarty}} \subseteq A\times B$, to

$$\text{Int}\,A\times\text{Int}\,B \subseteq \text{Int}(A\times B)$$

Fakt: W topologii produktowej $\prod_{t\in T} X_t$, dla zbiorów domkniętych $A_t\subseteq X_t$, to

$\prod_{t\in T} A_t$ – domknięty w $\prod_{t\in T} X_t$.

Dowód: $$\prod_{t\in T} A_t = \bigcap_{t\in T} \prod_{s\in T\setminus\{t\}} X_s\times A_t$$

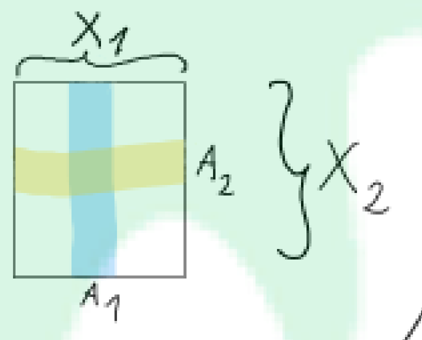
↑ na współrzędnej t

(np. dla $T=\mathbb{N}$:

$$\prod_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_1\times X_2\times\dots\times X_{n-1}\times A_n\times\prod_{k>n} X_k$$

lub $T=\{1,2\}$

$$A_1\times A_2 = A_1\times X_2\cap X_1\times A_2$$



a $$\left(\prod_{s\in T\setminus\{t\}} X_s\times A_t\right)^c = \prod_{s\in T\setminus\{t\}} X_s\times A_t^c \text{ – otwarty})$$

więc $\prod_{t\in T} A_t$ jest przekrojem zbiorów domkniętych, więc jest domknięty.

a) T: $\overline{A\times B} = \overline{A}\times\overline{B}$

$\overline{A}\times\overline{B}$ – produkt zbiorów domkniętych, więc jest domknięty w $X\times Y$

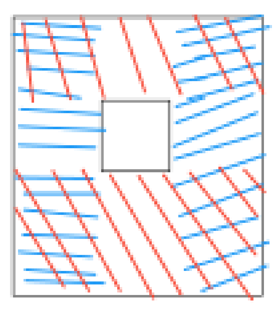
Skoro $\overline{A}\times\overline{B}$ – domknięty i zawiera $A\times B$, to

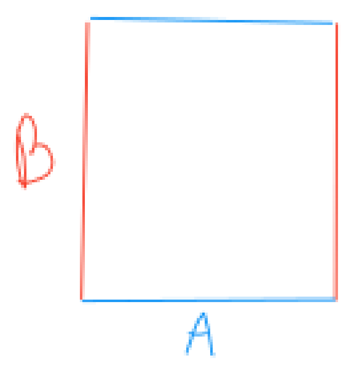
$$\overline{A}\times\overline{B} \supseteq \overline{A\times B}.$$

Pozostaje dowieść „$\subseteq$"; weźmy $(x,y)\in\overline{A}\times\overline{B}$.
Chcemy: $(x,y)\in\overline{A\times B}$. Weźmy dowolne otoczenie (x,y), b.s.o. otoczenie bazowe $U\times V$.
Pokażemy, że ono się kroi z $A\times B$: $x\in U$, $y\in V$, ale też $x\in\overline{A}$, $y\in\overline{B}$, więc $U\cap A\neq\emptyset$, $V\cap B\neq\emptyset$. Zatem

$A\times B\cap U\times V = (A\cap U)\times(B\cap V)\neq\emptyset$, a tego chcieliśmy. Zatem $(x,y)\in\overline{A\times B}$. ∎

(c) kluczowe: $(\text{Int}\,A\times\text{Int}\,B)^c = (\text{Int}\,A)^c\times Y\cup X\times(\text{Int}\,B)^c$





← $\text{Bd}(A\times B)$

z. 8. T: Jeśli $d(x_n, y) \xrightarrow[n]{} 0$, to $|x_n - y| \xrightarrow[n]{} 0$

Z: $|\sqrt{x_n} - \sqrt{y}| \xrightarrow[n]{} 0$ $(\sqrt{x_n} \xrightarrow[n]{} \sqrt{y})$

$\Downarrow$

$|x_n - y| = |\sqrt{x_n} - \sqrt{y}| \underbrace{(\sqrt{x_n} + \sqrt{y})}_{\text{ograniczone}} \xrightarrow[n]{} 0$

Inny dowód:

$[0,\infty) \ni x \overset{h}{\mapsto} \sqrt{x}$ – homeomorfizm $[0,\infty) \to [0,\infty)$

Kula w d to $B_d(x,r) = \{ y : d(x,y) < r \} =$

$= \{ y : |h(x) - h(y)| < r \}$,

więc $h[B_d(x,r)] = \{ y : |h(x) - y| < r \} = B_e(h(x), r)$

dowolny $y \in [0,\infty)$ jest postaci $h(x)$, bo h - bijekcja

więc z homeomorficzności h $B_e(h(x), r) \in \mathcal{T}(d)$.

Podobnie, używając h^{-1}, mamy, że $B_d(x,r) \in \mathcal{T}(d_e)$.

Skoro zbiory bazowe (kule) to spełniają, to zbiory otwarte (ich sumy) też, więc $\mathcal{T}(d) = \mathcal{T}(d_e)$.