Układy konserwatywne na płaszczyźnie. Portret fazowy i potok fazowy.

Zajmiemy się równaniami postaci $\ddot{x} = F(x)$, $x \in \mathbb{R}$, które pojawiają się np. w mechanice; to równanie mówi, że przyspieszenie $\ddot{x}$ jest funkcją położenia x (a już nie zależy od prędkości $\dot{x}$), czyli jest to prawo Newtona. Zamieniamy równanie na układ

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = F(x) \end{cases}$$

$(x,y) \in$ przestrzeni konfiguracji X (lub położeń) $\times$ przestrzeni prędkości (lub pędów)

Określamy $T = \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{2} (\dot{x})^2$ czyli energię kinetyczną oraz $U = -\int_{x_0}^{x} F(s)\,ds$ energię potencjalną (określoną z dokładnością do stałej, bo wybór x_0 jest dowolny).

$E = T + U$ energia całkowita

Tw. $E = \text{const}$ w trakcie ewolucji układu.

Dowód

$$\frac{d}{dt} E = y\dot{y} + U'\dot{x} = yF(x) - F(x)y \equiv 0$$

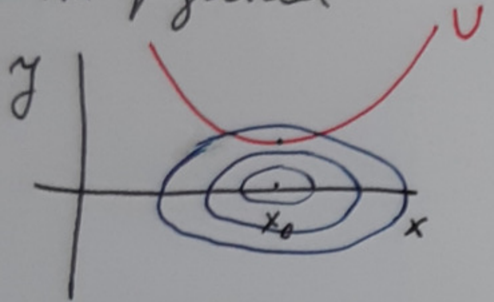
więc energia jest stała i dlatego układ nazywamy konserwatywnym.

Przykłady $\ddot{x} + x = 0$ wahadło matematyczne (opisuje małe drgania wahadła)

$\ddot{x} + \sin x = 0$ wahadło fizyczne (opisuje dowolne drgania wahadła)

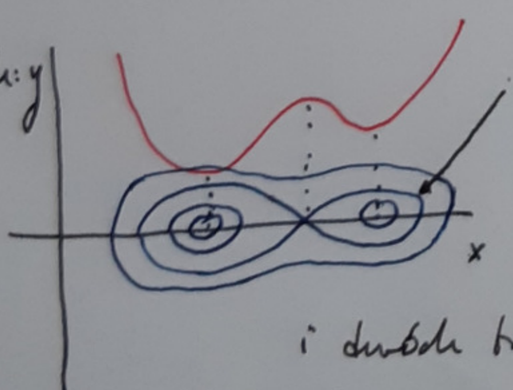
Energia E jest więc całką pierwszą, czyli funkcją $(x,\dot{x})$ stałą na trajektoriach. Jeżeli $(x,\dot{x}) \in \mathbb{R}^2$, to w ten sposób poziomice energii $\{(x,y): E = \text{const}\}$ składają się (z jednej lub wielu) trajektorii układu. Z tw. o funkcji uwikłanej te poziomice są gładkimi krzywymi oprócz punktów gdzie $F(x)=0$, $y=0$ (są to oczywiście położenia równowagi układu), bo tam tw. o f. uwikłanej nie stosuje się. A zatem można sporo informacji o trajektoriach wyczytać z analizy poziomic E.

Na przykład



Jeżeli U ma minimum (lokalne) w x_0, to w pobliżu $(x_0,0)$ te poziomice tworzą rodzinę krzywych zamkniętych $\frac{1}{2}y^2 + U(x) = \text{const}$, symetrycznych względem osi x ((x,y) i $(x,-y)$ równocześnie spełniają równanie $E = \text{const}$). $\frac{\partial E}{\partial x} = -F(x)$, $\frac{\partial E}{\partial y} = y$

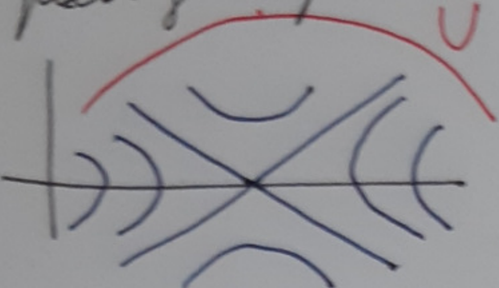
Podobnie, gdy U ma dwa lokalne minima, a między nimi lokalne maksimum, to wykresy wyglądają tak:



„Ósemka" ∞ składa się z trzech trajektorii: punktu równowagi (niestabilnej) tam gdzie jest maksimum lokalne i dwóch trajektorii otaczających punkty równowagi stabilnej odpowiadające minimom lokalnym

Ćwiczenie narysować dla $x > 0$ trajektorie w zagadnieniu Keplera z $U(x) = -\frac{1}{x} + \frac{c}{x^2}$ opisującym ruch dwóch ciał pod wpływem sił grawitacji.

W pobliżu maksimum lokalnego funkcji potencjału U przebieg trajektorii wygląda tak:



podobnie jak dla siodła w równaniu liniowym.

Tw. Równanie Newtona $\ddot{x} = -\frac{dU}{dx}$ ma rozwiązania globalne w czasie o ile $E>0$, $U \geq 0$.

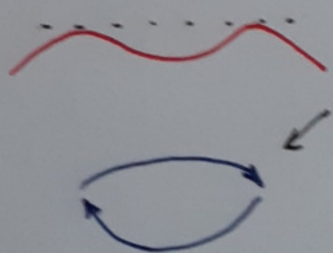
$\frac{1}{2}(\dot{x})^2 + U(x) = E_0 = \text{const}$ $\quad U \geq 0$ więc $|\dot{x}| \leq \sqrt{2E_0}$, całkując $|x(t) - x(t_0)| \leq \sqrt{2E_0}\,|t-t_0|$. $\dot{x}$ oraz x mamy ograniczone (lokalnie w czasie), więc można rozwiązanie $(x(t), \dot{x}(t))$ przedłużać nieograniczenie w czasie.

Dodatkowo, możemy rozwiązać równanie Newtona z $x \in \mathbb{R}$, bo

$$\pm \frac{\dot{x}}{\sqrt{2(E-U(x))}} = 1, \qquad t - t_0 = \pm \int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\xi}{\sqrt{2(E-U(\xi))}}$$

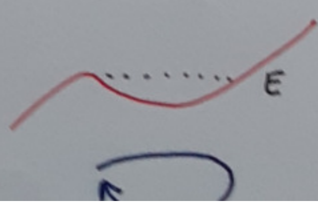
co daje $x(t)$ w postaci uwikłanej.

Przypadki krytyczne



dwa maksima jednakowej wysokości

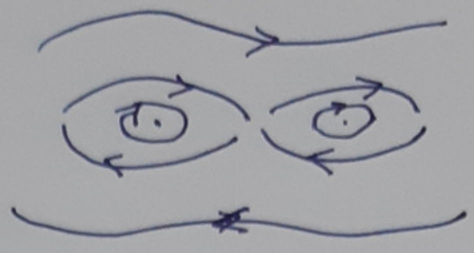
ta krzywa zamknięta składa się z dwóch punktów równowagi i dwóch łączących je krzywych (= 4 trajektorie)



wyjście z p. równowagi dla $T = -\infty$, powrót

Portret fazowy ≡ krzywe $\{E = \mathrm{const}\}$ z zaznaczonym kierunkiem czasu na trajektorii i ewentualnym dookreśleniem z ilu trajektorii składa się taka poziomica energii.

Ćwiczenie Narysować portret fazowy dla wahadła fizycznego.
wsk. okresowo powtarza się:



Ćwiczenie.
Korzystając ze wzorów ze str. 31 zbadać zależność okresu drgań wahadła fizycznego od amplitudy drgań (dla wahadła matematycznego też okres jest stały).

Potok fazowy ≡ przekształcenie $x_0 \xmapsto{g^t} x(t)$ przyporządkowujące warunkowi początkowemu x_0 w $t=0$ rozwiązanie $x(t)$
$g^t(x_0) = x(t)$. Jeżeli zachodzi jednoznaczność rozwiązań (co teraz i w dalszym ciągu zakładamy), to

$$g^{s+t} = g^s \circ g^t = g^t \circ g^s$$

(tzn. wszystko jedno czy rozwiążemy równanie z warunkiem x_0 i popatrzymy na $x(s+t)$ czy też rozwiążemy dochodząc do $x(t)$ i dalej pójdziemy po trajektorii o s:

$$x(s+t) = g^s(x(t)) = g^t(x(s)).$$

Oczywiście: $g^0 = I$ (identyczność na przestrzeni x).
Można też zauważyć $g^{-t} = (g^t)^{-1}$. A zatem:
abstrakcyjnie mówiąc $\{g^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ tworzy grupę przekształceń przestrzeni zawierającej x.

Dla równania $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$ (wahadło matematyczne) trajektorie to współśrodkowe okręgi (oraz punkt $(x,y)=(0,0)$), a potok fazowy składa się z obrotów płaszczyzny o kąt t, czyli jest izomorficzny z okręgiem, na którym kąty dodawane są mod 2π.

Oprócz badania punktów osobliwych (≡ punktów równowagi) i ich stabilności interesujące (i ważne w zastosowaniach) jest poszukiwanie stabilnych rozwiązań okresowych. Henri Poincaré badał przy jakich założeniach z portretu fazowego na $\mathbb{R}^2$ można poznać, że istnieje takie stabilne rozwiązanie okresowe (czyli cykl graniczny). Okazało się, że kryterium można sformułować bez założeń o charakterze analitycznym a tylko w terminach geometrycznych (dziś powiedzielibyśmy: topologicznych; Poincaré wówczas tworzył podstawy topologii).

Oczywiście, cykl graniczny musi być otoczony pierścieniem, w który wchodzą trajektorie. Ale to jeszcze nie wystarcza aby istniał cykl graniczny:

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1-r) \\ \dot{\varphi} = \sin\varphi \end{cases}$$

układ dynamiczny na $\mathbb{R}^2$ zapisany w zmiennych biegunowych.

Okrąg $\{r=1\}$ składa się z dwóch punktów równowagi $\varphi=0$, $\varphi=\pi$ i dwóch trajektorii je łączących.

Okazuje się, że jeżeli wykluczymy punkty równowagi w takim pierścieniu jak wyżej, to cykl graniczny istnieje

Twierdzenie Poincaré'go - Bendixsona

Jeżeli zbiór zwarty $D \subset \mathbb{R}^2$ jest niezmienniczy dla $t \geq 0$ na działanie potoku fazowego i nie zawiera punktów osobliwych, to w D istnieje cykl graniczny.

D jest niezmienniczy na działanie g^t jeżeli

$g^t(D) \subset D$ (powyżej $\forall\, t \geq 0$)

To jest wyabstrahowanie powiedzenia: jak trajektorie wejdą w zbiór D, to z niego nie wyjdą.

Przykład równanie van der Pola (raz jeszcze)

$$\ddot{x} + x - \dot{x}\left(1 - 3x^2 - 2(\dot{x})^2\right) = 0$$

ma cykl graniczny.

Zewnętrze koła $\{r > 1/2\}$ jest niezmienniczy:

dla $r = \frac{1}{2}$ $\quad \dot{r} = \frac{1}{4}\sin^2\varphi\left(1 - \frac{1}{2}\cos^2\varphi\right) \geq 0$

($= 0$ tylko dla $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$)

Wnętrze koła $\{r < \frac{1}{\sqrt{2}}\}$ też jest zbiorem niezmienniczym

$\dot{r} \leq r\sin^2\varphi(1 - 2r^2)$ dla $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad \dot{r} \leq 0$

(oprócz $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$)

* Część wspólna zbiorów niezmienniczych jest zbiorem niezmienniczym.

Idea dowodu twierdzenia Poincaré'go-Bendixsona jest następująca: jak wygląda $\bigcap_{t \geq 0} \overline{\bigcup_{s \geq t} g^s(D)}$?

Zbiór ten zawiera informację o dowolnie dalekich kawałkach trajektorii wychodzących z D. Z założenia zwartości D i niezmienniczości jest to zbiór niepusty.

Pokażemy, że składa się z trajektorii okresowej. TRUDNE

Informacja o własnościach potoków fazowych

Twierdzenie Jeżeli $f \in C^1$ w równaniu $\dot{x} = f(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^k$

to $g^t \in C^1$ (zakładamy, że potok fazowy istnieje)

Oznacza to, że zależność rozwiązań od danych początkowych jest C^1.

Do dowodu równocześnie rozpatruje się $\dot{x} = f(x)$ i układ równań liniowych (nieautonomicznych)

$$\dot{y} = f_x(x,t)\,y \qquad \text{(tzw. równanie w wariacjach).}$$

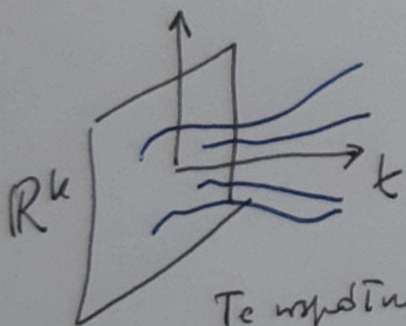
tu: $x = x(t)$ i równanie w wariacjach bada się wzdłuż takiej trajektorii.

Podobnie: $f \in C^r \Rightarrow g \in C^r$

$f \in C^\infty \Rightarrow g \in C^\infty$

Dzięki temu mamy twierdzenie o wyprostowaniu pola wektorowego (jest to lokalne twierdzenie)

W otoczeniu każdego punktu (x,t) można wprowadzić lokalne współrzędne takie, że



wygląda jak

$\dot{x} = 0$

$\dot{t} = 1$

Te współrzędne tworzy się z potoku fazowego g^t:

$G(x,t) = (g^t(x), t)$. Pochodna G ma postać

$$DG = \begin{pmatrix} g_x & g_t \\ 0 \dots 0 & I \end{pmatrix} \text{ i } \det DG = \det g_x, \qquad g_x|_{t=t_0} = I$$

więc dla dostatecznie małych $|t - t_0|$ G jest odwracalne (i gładkie).