6. Zadania do wykładu
analiza 2B

1. Obliczyć pole obszaru ograniczonego przez wykresy równań.

$$
\begin{array}{ll}
y = x^3,\ y = x^{1/3}; & y = x^2+1,\ y = 2x+9; \\
y = x^3+1,\ y = (x+1)^2; & y^2 = 6x,\ x^2 = 6y; \\
y^2 = 2x-5,\ y = x-4; & y = x+2,\ y = -3x+6,\ y = (2-x)/3; \\
x = y^2-y,\ x = y-y^2; & x = y^2,\ x = 6-y-y^2.
\end{array}
$$

2. Obliczyć długość krzywych opisanych parametrycznie.

$$
\begin{array}{lll}
x = 3t, & y = 2t^{3/2}, & 0 \leqslant t \leqslant 3; \\
x = \frac{1}{4}t^4+1, & y = \frac{1}{6}t^6-1, & 0 \leqslant t \leqslant 1; \\
x = \sin t - t\cos t, & y = t\sin t + \cos t, & 0 \leqslant t \leqslant \pi/2; \\
x = \frac{2}{3}t^{3/2}, & y = \frac{4}{9}t^{9/4}, & 0 \leqslant t \leqslant 4 \\
x = \cos^3 t, & y = \sin^3 t, & 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.
\end{array}
$$

3. Obliczyć długość krzywych podanych równaniem we współrzędnych biegunowych.

$$
\begin{array}{ll}
r = 2\cos\theta; & r = \theta^2,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 4\sqrt{2}; \\
r = 2\theta,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi; & r = \sin^2\dfrac{\theta}{2},\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi; \\
r = \sin^3\dfrac{\theta}{3},\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi; & \theta = \dfrac{1}{2}(r+\dfrac{1}{r}),\ 1 \leqslant r \leqslant 3.
\end{array}
$$

4. Obliczyć pole powierzchni otrzymanej przez obrót wokół osi x podanych wykresów.

$$
\begin{array}{ll}
f(x) = \sqrt{x},\ [2,6]; & f(x) = \dfrac{1}{3}x^3,\ [0,\sqrt{2}]; \\
f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{8x^2},\ [1,\sqrt{2}]; & \left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1; \\
x = \sin^2 t,\ y = \cos^2 t,\ [0,\pi/2]; & x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t,\ [0,2\pi].
\end{array}
$$

5. Obliczyć objętość bryły otrzymanej przez obrót wokół osi x obszarów pod wykresami podanych funkcji.

$$
\begin{array}{ll}
f(x) = x^{3/2},\ [0,1]; & f(x) = \dfrac{-1}{x},\ [-3,-2]; \\
g(x) = \sqrt{\cos x},\ [0,\pi/6]; & f(x) = \sqrt{x}(1-x)^{1/4},\ [0,1].
\end{array}
$$

6. Obliczyć objętość bryły otrzymanej przez obrót wokół osi x obszaru ograniczonego przez podane wykresy.

(a) $f(x) = \sqrt{x+1},\ g(x) = \sqrt{x-1},\ [1,3]$.

(b) $f(x) = \cos x + \sin x,\ g(x) = \cos x - \sin x,\ [0,\pi/4]$.

(c) $f(x) = 2x - x^2,\ g(x) = x^2 - 2x$.

(d) $y = x^{1/2},\ y = 2x^{1/4}$.

(e) $y = x^3 + 2,\ y = x^2 + 2x + 2$.

7. Obliczyć objętość brył opierając się na informacji o przekrojach.

(a) Podstawą bryły jest trójkąt równoramienny prostokątny o ramionach L_1 i L_2 długości 4. Przekroje prostopadłe do L_1 są półkolami.

(b) Podstawą bryły jest koło o promieniu 1. Przekroje prostopadłe do ustalonej średnicy podstawy są kwadratami.

(c) Podstawą bryły jest trójkąt równoramienny o boku 10. Przekroje prostopadłe do ustalonej wysokości trójkąta są kwadratami.

8. Obliczyć objętość bryły otrzymanej przez obrót wokół osi y obszarów pod wykresami podanych funkcji.

$$f(x) = \frac{4}{x^3},\ [1,3]; \qquad f(x) = \sqrt{x^2+1},\ [0,\sqrt{3}];$$
$$g(x) = \sin(x^2), [\sqrt{\pi}/2, \sqrt{\pi}]; \quad h(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}},\ [0,4].$$

9. Obliczyć objętość bryły otrzymanej przez obrót wokół osi y obszaru ograniczonego przez podane wykresy.

(a) $f(x) = 1,\ g(x) = x - 2,\ [2,3]$.

(b) $f(x) = \cos(x^2),\ g(x) = \sin(x^2),\ [0, \sqrt{\pi}/2]$.

10. W kuli o promieniu 2 wydrążono otwór o promieniu 0,5. O ile zmniejszyła się objętość ?