Wiktor Pilarczyk 308533

Zad 6

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = u$$

$$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 1 \\ u' = u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t + c_1 \\ y = t + c_4 \\ u = c_3 e^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + c_4 \\ u = c_3 e^x \end{cases}$$

Na podstawie wykładu

$$\phi\left(\frac{u}{e^x}, y-x\right) = 0$$ gdzie ϕ jest dowolną f. klasy C^1

Załóżmy nie wprost, że istnieje rozwiązanie takie (i zadane w wykładowy sposób wzoru u *) że dla $x = y = t$ $u = 1$

Sprawdźmy jaka musi być ϕ

$$\phi\left(\frac{u}{e^x}, y-x\right) = 0$$

$$\phi(e^{-x}, 0) = 0$$

upraszcza

$$\phi(x, 0) = 0$$

to oznacza, że $\phi \equiv 0$

ale skoro ϕ przystaje do 0 ~~(to nie dostajemy~~

to nie możemy wyciągnąć z niej rozwiązania u (nie spełnia *)

więc nie istnieje takie rozwiązanie

Wiktor Pilarczyk 308533

Zad 9

$$x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = c_1 e^{t} \\ y = c_2 e^{-t} \end{cases} \Rightarrow x \cdot y = c_3$$

Więc charakterystyka jest wyznaczona jednoznacznie przez c_3

$$u(x,y) = \phi(x \cdot y) = f(x \cdot y)$$

I° Chcemy znaleźć rozw. które wykres zawiera prostą $u = x = y$

$$u(x,y) = f(x \cdot y) = x$$

$$f(x \cdot x) = x$$

1° $x > 0$

$$f(x \cdot y) = f(x^2) = x$$

więc $f(x \cdot y) = \sqrt{|x \cdot y|}$ $\quad f \in C^1$

$u = f(x \cdot y) = \sqrt{|x y|}$

2° x może być mniejsze od zera (potrzeba by potrzeba funkcji dwóch zmiennych u)

$$~~Zatem~~ \; f(x \cdot y, x) = \begin{cases} \sqrt{|xy|} & x \geq 0 \\ -\sqrt{|xy|} & x < 0 \end{cases} \quad f \in C^1$$

II Chcemy $u = f(x \cdot y, x)$ rozwiązania, które na krzywej $y = \frac{1}{x}$ ma $u = 1$

$$u(x,y) = f(x \cdot y) = f(1) = 1$$

więc $f(xy) = xy$ $\quad f \in C^1$

$$u(x,y) = x \cdot y$$