

## Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 1: lista M2

17 października 2019 r.

**M2.1.** [2 punkty] Załóżmy, że  $|\alpha_j| \leq u$  dla  $j = 1, 2, \dots, n$  oraz że  $nu < 0.01$ . Wykazać, że zachodzi równość

$$\prod_{j=1}^n (1 + \alpha_j) = 1 + \eta_n,$$

gdzie

$$|\eta_n| \leq 1.01nu.$$

**M2.2.** [1 punkt] Zbadać uwarunkowanie zadania obliczania pierwiastka  $x^-$  (notacja z wykładu) równania kwadratowego równania

$$(1) \quad x^2 + 2px + q = 0 \quad (p^2 - q > 0, \quad p, q \neq 0).$$

*Wskazówka:* Rozpatrzeć funkcję

$$f(p, q) := p - \sqrt{p^2 - q},$$

a następnie zbadać uwarunkowanie zadania obliczania jej wartości. Dla funkcji dwuargumentowej mówimy o dwóch wskaźnikach uwarunkowania obliczania jej wartości; pierwszy uwzględnia zmianę argumentu  $p$ , a drugi — argumentu  $q$ . Niech  $\delta_p$  i  $\delta_q$  oznaczają względne zmiany argumentów  $p$  i  $q$ . Następnie wystarczy skorzystać ze wzoru Taylora

$$f(p(1 + \delta_p), q(1 + \delta_q)) \approx f(p, q) + p\delta_p f'_p(p, q) + q\delta_q f'_q(p, q).$$

Przy badaniu błędu względnego otrzymanej wartości funkcji, rozpatrzeć osobno wielkości stojące przy  $\delta_p$  i  $\delta_q$ . W ten sposób otrzymamy odpowiednio wskaźniki uwarunkowania ze względu na zmienną  $p$  i  $q$ :

$$(2) \quad \text{cond}_p = -\frac{1}{\sqrt{1 - q/p^2}}, \quad \text{cond}_q = -\frac{1 + \sqrt{1 - q/p^2}}{2\sqrt{1 - q/p^2}}.$$

**M2.3.** [1,5 punktu] Załóżmy, że  $x, y$  są liczbami maszynowymi, tzn.  $\text{rd}(x) = x, \text{rd}(y) = y$ , takimi, że  $0 < y < x$ . Wykazać, że jeśli

$$2^{-q} \leq 1 - \frac{y}{x} \leq 2^{-p}$$

( $p$  i  $q$  są całkowite), to

$$p \leq \text{liczba bitów straconych przy odejmowaniu } x - y \leq q.$$

**M2.4.** [1 punkt] Wartość wielomianu  $L(x) := a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  w punkcie  $x$  można obliczyć według następującego schematu Hornera:

— Oblicz wielkości pomocnicze  $w_0, w_1, \dots, w_n$  za pomocą wzorów

a)  $w_n := a_n,$

b)  $w_k := w_{k+1} \times x + a_k \quad (k = n-1, n-2, \dots, 0).$

— Wynik:  $L(x) = w_0.$

Zakładając, że  $a_0, a_1, \dots, a_n$  oraz  $x$  są liczbami zmiennopozycyjnymi wykazać, że schemat Hornera jest algorytmem numerycznie poprawnym.

**M2.5.** 1 punkt Rozważyć zadanie obliczenia wartości  $a + a^2$  dla  $a > 2$ .  
Udowodnić, że poniższy algorytm jest numerycznie poprawny.

- Oblicz
- a)  $x := a * a$ ,
- Wynik:  $a + x$

**M2.6.** 1 punkt Pole  $n$ -kąta foremnego ( $n \geq 4$ ) wpisanego w okrąg o promieniu 1 wynosi

$$P_n = \frac{1}{2}n \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Wartość  $P_n$  jest przybliżeniem liczby  $\pi$  – tym lepszym, im większe jest  $n$ . Następujący algorytm pozwala oszczędnie obliczać kolejno  $P_4, P_8, P_{16}, \dots$ :

$$s_2 := 1, \quad c_2 := 0, \quad P_4 := 2;$$
$$s_k := \sqrt{\frac{1}{2}(1 - c_{k-1})}, \quad c_k := \sqrt{\frac{1}{2}(1 + c_{k-1})}, \quad P_{2^k} := 2^{k-1} s_k \quad (k = 3, 4, \dots).$$

- a) Uzasadnić powyższy algorytm.
- b) Stosując wybraną arytmetykę  $t$ -cyfrową ( $t \geq 128$ ) obliczyć  $P_{2^k}$  dla  $k = 2, 3, \dots, 2t$ .
- c) Czy wyniki są zgodne z oczekiwaniami? Jeśli nie, to jakie jest źródło kłopotów? Jak można ich uniknąć?

**M2.7.** 1 punkt Zbadać uwarunkowanie zadania obliczania wartości funkcji  $f$ , podanej wzorem  
(a)  $f(x) = 1/(x^2 + c)$ , gdzie  $c$  jest stałą;      (b)  $f(x) = (1 - \cos x)/x^2$  dla  $x \neq 0$ .

10 października 2019 r.  
*Rafał Nowak*