Wiktor Pilarczyk 308533

Zad 4

Nasze równanie

$u_t = u_{xx} + 1$ i war. brzegowe $\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 1 \end{cases}$

1° Rozw. stacjonarne $U = U(x)$ dla równania powyżej

$$\underset{0}{\overset{}{\underset{\shortparallel}{U_t}}} = U_{xx} + 1$$

więc $U_{xx} = -1$

czyli
$$U(x) = -\frac{1}{2}x^2 + c_1 x + c_2 x$$

podstawiając do war. brzegowego

~~$U_{(t)}$~~ $c_2 = 0$

$$-\frac{1}{2} + c_1 + c_2 = 1$$

więc
$$c_2 = \frac{3}{2}, \text{ a } c_1 = 0$$

$$U(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$$

2° $\lim_{t \to \infty} u(x,t) = U(x)$

Znaleźliśmy rozw. szczególne dla $u_t = u_{xx} + 1$, znajdźmy rozw. ogólne dla ~~$u_t = u_{xx}$~~

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} \\ v(0,t) = 0 \\ v(1,t) = 0 \end{cases} \quad \text{wtedy} \quad u(x,t) = v(x,t) + \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x\right)$$

Korzystając z szeregów Fouriera niech (z bazą $\sin(k\pi x)$) $v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t) \sin(k\pi x)$

Podstawiając do $v_t = v_{xx}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k'(t) \sin(k\pi x) = -\sum_{k=0}^{\infty} c_k(t)(k\pi)^2 \sin(k\pi x)$$

Wiktor Pikovnych 308533

Zad 4 c.d.

Teraz możemy przemnożyć dla ~~razy~~ dowolnego l razy $\sin(l\pi x)$ naszą sumę, a później scałkować $\int_0^1$ a ponieważ nasza baza jest ortogonalna ~~ortonormalna~~ to dla każdego $k \neq l$ $\int_0^1 \sin(k\pi x) \cdot \sin(l\pi x) = 0$ wpp $\int_0^1 \sin^2(k\pi x) = 1/2$ więc dla każdego k otrzymujemy

$$\frac{1}{2} c_k'(t) = -\frac{1}{2} c_k(t) (k\pi)^2$$

więc

$$c_k'(t) = - c_k(t) (k\pi)^2$$

czyli

$$c_k(t) = c_1^k e^{-(k\pi)^2 t} \qquad c_1^k \in \mathbb{R}$$

więc nasze $v(x,t)$

$$v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_1^k e^{-(k\pi)^2 t} \cdot \sin(k\pi x)$$

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \lim_{t\to\infty} v(x,t) + \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x\right) =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_1^k e^{-(k\pi)^2 t} \cdot \sin(k\pi x) + U(x) =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_1^k e^{-(k\pi)^2 t} \cdot \sin(k\pi x) + ce^0 \cdot \underbrace{\sin 0}_{=0} + U(x) =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_1^k e^{-(k\pi)^2 t} \cdot \sin(k\pi x) + U(x)$$

~~Jeśli ta granica zbiega do zera:~~

~~$\lim_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} e$~~

Wiktor Pilarczyk 308533

Zad 4 c.D.2

Pozostało pokazać, że $\lim_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_1^k e^{-(k\pi)^2 t} \cdot \sin(k\pi x) \stackrel{?}{=} 0$

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_1^k e^{-(k\pi)^2 t} \cdot \sin(k\pi x) =$$

$$= \lim_{t\to\infty} e^{-t} \sum_{k=1}^{\infty} c_1^k \cdot e^{-((k\pi)^2-1)t} \cdot \sin(k\pi x)$$

Pokazując, że $\sum_{k=1}^{\infty} c_1^k \cdot e^{-((k\pi)^2-1)t} \cdot \sin(k\pi x)$ jest ograniczone udowodnimy, że nasza granica zbiega do zera

Ograniczenie z góry

b.s.o.

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} c_1^k e^{-((k\pi)^2-1)t} \cdot \sin(k\pi x) \overset{\max_{k\in\mathbb{Z}^+}(c_1^k, \ldots)}{\leq} e \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(k\pi)^2 t}$$

interesuje nas $t\to\infty$ więc b.s.o. niech $t=1$

$$S \overset{\max_{k\in\mathbb{Z}} c_1^k}{\leq} e \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^{(k\pi)^2}}$$ a taka suma jest już ograniczona

pomiędzy

$$S \leq c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

dla pewnego $c \in \mathbb{R}$

wiemy, że to jest ograniczone

Więc wnioskując

$$\lim_{t\to\infty} e^{-t} \cdot S = 0$$

czyli

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = u(x)$$

Wiktor Pilarczyk 308333

Zad 7

Mamy:

$$u_t = u_{xx} - u u_x \quad i \quad u(x,0) = f(x)$$

Niech

$$u = -\frac{2 v_x}{v}$$

wtedy

$$u_x = -2 \frac{v_{xx} v - v_x^2}{v^2}$$

$$u_{xx} = -\frac{2}{v^4}\left(v^3 v_{xxx} - 3v^2 v_x v_{xx} + 2 v v_x^3\right)$$

$$u_t = \frac{-2}{v^2}\left(v_{xt} v - v_x v_t\right)$$

Podstawiając do:

$$u_t = u_{xx} - u u_x$$

$$-\frac{2}{v^2}\left(v_{xt} v - v_x v_t\right) = -\frac{2}{v^4}\left(v^3 v_{xxx} - 3v^2 v_x v_{xx} + 2 v v_x^3\right) - 4\frac{v_x}{v^3}\left(v_{xx} v - v_x^2\right) \quad / \cdot v^4$$

$$-2 v_{xt} v^3 + 2 v_x v_t v^2 = -2 v^3 v_{xxx} + 6 v_{xx} v_x v^2 - 4 v_x^3 v - 4 v_{xx} v_x v^2 + 4 v_x^3 v$$

$$-2 v_{xt} v^3 + 2 v_x v_t v^2 = -2 v^3 v_{xxx} + 2 v^2 v_x v_{xx} \quad / \cdot \frac{-1}{v^2}$$

$$v_{xt} v - v_x v_t = v_{xxx} v - v_{xx} v_x \quad /: v^2$$

$$\left(\frac{v_{xt} v - v_x v_t}{v^2}\right) = \left(\frac{v v_{xxx} - v_x v_{xx}}{v^2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v_t}{v}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v_{xx}}{v}\right)$$

$$\frac{v_t}{v} = \frac{v_{xx}}{v} + c \qquad c \in \mathbb{R}$$

Przyjmując, że $c = 0$ otrzymujemy

$$v_t = v_{xx} + c v \qquad v_t = v_{xx}$$

Wiktor Pikorczyk 308533

Zad 7 c.p.

Warunek początkowy.

$$u(x,0)=f(x) \quad i \quad -2v_x=uv$$

więc

$$v_x(x,0)=-\frac{1}{2}f(x)\cdot v(x,0)$$

czyli

$$v(x,0)=c\,e^{-\frac{1}{2}\int_0^x f(x)\,dx}$$

gdzie przyjmując $c=1$

$$v(x,0)=e^{-\frac{1}{2}\int_0^x f(x)\,dx}$$