topologia 17.04

April 17, 2020

Z 4

a)

f ciagła $\Leftrightarrow$ Dla każdego A: $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$.

($\Rightarrow$)

Niech f domknieta. Wiemy, że $f[A] \subseteq f[\overline{A}]$ oraz $\overline{f[A]}$ zawiera sie w każdym domknietym zbiorze zawierajacym $f[A]$. Z domknietości f, $f[\overline{A}]$ domkniete, wiec $\overline{f[A]} \subseteq f[\overline{A}]$. Skoro $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$, to $f[\overline{A}] = \overline{f[A]}$.

($\Leftarrow$)

Dla każdego A: $f[\overline{A}] = \overline{f[A]} \Rightarrow$ Dla każdego D domknietego $f[D] = \overline{f[D]}$ domkniete.

b)

($\Rightarrow$)

Niech f otwarta. Wiemy, że $f[\mathrm{Int}(A)] \subseteq f[A]$ oraz w $\mathrm{Int}(f[A])$ zawiera sie każdy otwarty zbiór zawarty w $f[A]$. Z otwartości f, $f[\mathrm{Int}(A)]$ otwarte, wiec $f[\mathrm{Int}(A)] \subseteq \mathrm{Int}(f[A])$.

($\Leftarrow$)

Załóżmy, że dla każdego A: $f[\mathrm{Int}(A)] \subseteq \mathrm{Int}(f[A])$ oraz f ciagła. Weźmy U otwarty. Wtedy $f[U] \subseteq \mathrm{Int}(f[U])$. Skoro $\mathrm{Int}(f[U]) \subseteq f[U]$. Stad $f[U] = \mathrm{Int}(f[U])$, wiec $f[U]$ otwarty.