Przykład 1

$C_b[0,1] = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \text{ , ciągłe} \}$

$d_{sup}(f,g) = \sup\{ |f(x) - g(x)| : x \in [0,1] \}$

metryka zbieżności jednostajnej

Przestrzeń $(C_b[0,1], d_{sup})$ jest ośrodkowa.

Wynika to z tw. Weierstrassa:

{ Jeżeli mamy $A \subseteq C_b[0,1]$ zamknięte na

$+$, $\cdot$, $-$, funkcje stałe $\subseteq A$, A rozdziela punkty

$(\forall_{\substack{x,y \in [0,1] \\ x \neq y}} \ \exists f \in A \ \ f(x) \neq f(y))$)

np. A = wielomiany $\upharpoonright [0,1]$

Konkluzja $\overline{A}^{d_{sup}} = C_b[0,1]$

Czyli wielomiany A_Q o współczynnikach wymiernych spełniają założenie. Jest to zbiór przeliczalny. Konkluzja tw. Weierstrassa $\Rightarrow A_Q$ jest gęsty.

Przykład 2

a) $(\mathbb{R}^2, d_e)$ - ośrodkowa

b) $(\mathbb{R}^2, d_r)$ $\forall r \in \mathbb{R}$ $\{(r,y) : \frac{1}{2} < y < 1\}$ otwarty

Czyli wskazaliśmy nieprzeliczalną rodzinę zbiorów otwartych, parami rozłącznych

Czyli przestrzeń nie jest ośrodkowa

c) $(\mathbb{R}^2, d_c)$ również nie jest ośrodkowa

3 $C_b(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ , } f \text{ - ciągła, ograniczone} \}$

$(C_b(\mathbb{R}), d_{sup})$ nie jest ośrodkowa

Dla dowolnego $S \subseteq \mathbb{N}$ rozważmy następującą funkcję:

$d_S(x) = \inf\{ |x - z| : z \in S \}$

$f_S(x) = \min\{ d_S(x), 1 \}$

uwaga

Dla $x = n \in \mathbb{N}$ $f_S(n) = \begin{cases} 0 & n \in S \\ 1 & n \notin S \end{cases}$

Zauważmy, że $S \neq T$ $d_{sup}(f_S, f_T) = 1$

Nie istnieje przeliczalny zbiór gęsty

Dlaczego? Nie wprost A - przel. gęsty

Ustalmy $\varepsilon < \frac{1}{3}$

$\mathbb{N} \supseteq S \overset{F}{\rightsquigarrow} g \in A$ t. że $d(f_S - g)_{sup} < \varepsilon$

Zauważmy, że F jest różnowartościowe.

Daje to sprzeczność, ponieważ $P(\mathbb{N})$ - nieprzeliczalny i A - przeliczalny

Tw (Tietze)

X - przestrzeń metryczna $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$

$A \subseteq X$ domknięty

$f : A \to [a,b]$ ciągła

Wówczas istnieje funkcja ciągła $\overline{f} : X \to [a,b]$

t. że $\overline{f}(x) = f(x)$ dla $x \in A$.

Istotne jest tylko to, że X jest metryzowalne

($(X, \mathcal{T})$ -top. jest metryzowalne jeśli istnieje metryka d na X t. że $\mathcal{T}(d) = \mathcal{T}$)

<u>Definicja</u>: • Funkcja $f : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ jest półciągła z góry jeśli zbiory $\{x : f(x) < r\}$ są otwarte , $r \in \mathbb{R}$.

• Funkcja $f : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ jest półciągła z dołu jeśli zbiory $\{x : f(x) > r\}$ są otwarte , $r \in \mathbb{R}$.

Uwaga $f : (X, \mathcal{T}) \to \mathbb{R}$ półciągła z góry i z dołu to jest ciągła

$(\ f^{-1}(a,b) = \underbrace{f^{-1}(a,\infty)}_{\text{z dołu}} \cap \underbrace{f^{-1}(-\infty, b)}_{\text{z góry}}$ otwarty)

Przykład $\underset{\text{ciągła}}{f : A \to [a,b]}$ $A \subseteq X$ - topologiczne, A jest domknięty

$u(x) = \begin{cases} f(x) & \text{, jeśli } x \in A \\ a & \text{, jeśli } x \notin A \end{cases}$

Wówczas u jest półciągła z góry

Sprawdzamy $r \in \mathbb{R}$ $\{x : u(x) < r\}$

Rozważmy $\{x \in A : u(x) < r\} = \underbrace{\{x \in A : f(x) < r\}}_{\text{otwarty w } A}$

Ponieważ f ciągła $\Rightarrow$

Zatem $\{x \in A : f(x) < r\} = V \cap A$, gdzie V - otwarty w X

Zatem $\{x : u(x) < r\} = \{x \in A : u(x) < r\} \cup \{x \notin A : \overset{a}{\overset{\shortparallel}{u(x)}} < r\}$

$= \begin{cases} (V \cap A) \cup (X \setminus A) & \text{jeśli } a < r \\ \emptyset & \text{jeśli } a \geqslant r \end{cases}$

$(V \cap A) \cup (X \setminus A) = V \cup (X \setminus A)$ - otwarty

Zazwyczaj u nie jest ciągła

• Podobnie

$w(x) = \begin{cases} f(x) & \text{, jeśli } x \in A \\ b & \text{, jeśli } x \notin A \end{cases}$

jest półciągła z dołu.

Twierdzenie (Hahn)

Niech $u, w : X \to [a,b]$ będą funkcjami na przestrzeni metryzowalnej $(X, \mathcal{T})$

(i) $u \leqslant w$

(ii) u jest półciągła z góry, w jest półciągła z dołu

Istnieje wówczas funkcja ciągła $f : X \to [a,b]$

t. że $u \leqslant f \leqslant w$.

Tietze wynika z Hahna

X - metryzowalna , $a < b$

$A \subseteq X$ domknięty

$f : A \to [a,b]$ ciągła

Niech $u(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ a, & x \notin A \end{cases}$ $w(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ b, & x \notin A \end{cases}$

$u \leqslant w$

Hahn $\to$ Istnieje funkcja ciągła $\overline{f} : X \to [a,b]$

t. że $u \leqslant \overline{f} \leqslant w$

zauważmy, że dla $x \in A$, $\overline{f}(x) = f(x)$ $\Rightarrow$ Tietze ∎

Lemat 1

(X,d) - metryczne $A \subseteq X$ domknięty ($\Leftrightarrow A = \overline{A}$)

$d_A(x) = \inf\{ d(x,y) : y \in A \} = d(x, A)$

$\begin{cases} d_A \text{ - ciągła} \\ d_A(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A \end{cases}$

Lemat 2

$(X, \mathcal{T})$ - metryzowalna , W otwarty $\subseteq X$

Istnieje funkcja ciągła $\varphi : X \to [0, \infty)$ t. że

$W = \{ x \in X : \varphi(x) > 0 \}$.

Dowód

Weźmy $\varphi = d_{X \setminus W}$

z lematu 1 $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x \in X \setminus W$.

Lemat 3 (o rozkładach jedynki)

$(X, \mathcal{T})$ - przestrzeń metryzowalna

Niech $X = W_1 \cup \ldots \cup W_m$, W_i - otwarty.

Istnieją wtedy funkcje ciągłe $\lambda_i : X \to [0,1]$

t. że $\{x : \lambda_i(x) > 0\} \subseteq W_i$, $i = 1, \ldots, m$

oraz $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) = 1$ dla $x \in X$.

Dowód

Z lematu 2 bierzemy φ_i na W_i

Rozważmy $\sigma = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i$ $\sigma > 0$ $\forall x \in X$

Weźmy $\lambda_i = \frac{\varphi_i}{\sigma}$. To jest to co trzeba. ∎