*RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE* **1R**, *II r. MATEMATYKI*
**LISTA 1**

**Zadanie 1.** Rozwiązać równania o rozdzielonych zmiennych

$$\sqrt{x^2+1} = txx', \quad tx' + x = x^2, \quad xx' + t = 1, \quad x' = \sqrt{2x-1}.$$

**Zadanie 2.** Rozwiązać równania jednorodne

$$2x + t - tx' = 0, \quad tx' = x - te^{x/t}, \quad tx' = x\cos\left(\log\frac{x}{t}\right).$$

**Zadanie 3.** Znaleźć całkę ogólną równań liniowych

$$x' + x\cos t = 0, \quad x' + t^2x = 1, \quad x' + t^2x = t^2,$$

$$x' + \frac{2t}{1+t^2}x = \frac{1}{1+t^2}, \quad x' + x = te^t.$$

**Zadanie 4.** Rozwiązać równania (w różniczkach zupełnych)

$$2tx\,dt + (t^2 - x^2)\,dx = 0, \quad e^{-x}\,dt - (2x + te^{-x})\,dx = 0.$$

**Zadanie 5.** Znaleźć całkę ogólną równania Bernoulliego

$$x' + a(t)x = b(t)x^m, \quad m \in \mathbb{R}.$$

**Zadanie 6.** Znaleźć współczynnik $f = f(t)$ w równaniu $f(t)x' + t^2 + x = 0$, jeżeli wiadomo, że ma ono czynnik całkujący postaci $u(t) = t$.

**Zadanie 7.** Pokazać, że każda krzywa całkowa równania $x' = \sqrt[3]{\frac{x^2+1}{t^4+1}}$ ma poziome asymptoty.

**Zadanie 8.** Pokazać, że zagadnienie $y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0$, nie ma rozwiązania określonego na całej prostej.

**Zadanie 9.** Wyznaczyć wszystkie rozwiązania równania $y' = 2y^{1/2}$.

**Zadanie 10.** Wiadomo, że szybkość zmian temperatury danego ciała jest proporcjonalna do różnicy między temperaturą tego ciała i temperaturą otoczenia (prawo Newtona).

a) Niech $S(t)$ oznacza temperaturę ciała w chwili $t$, a temperatura otoczenia równa jest $A$. Pokazać, że $S'(t) = -k(S(t) - A)$.

b) Zakładamy, że $S(0) = 100^oC$ w temperaturze otoczenia $20^oC$. Po dziesięciu minutach temperatura ciała wynosiła $60^oC$. Po ilu minutach ciało będzie miało temperaturę $25^oC$?

**Zadanie 11.** Z naczynia w kształcie walca wypływa woda przez otwór w dnie z prędkością $v = a\sqrt{2gh}$ (prawo Torricellego), gdzie $h = h(t)$ jest wysokością słupa cieczy w chwili $t$. W momencie $t = 0$ naczynie było napełnione do wysokości $h_0$. Po jakim czasie naczynie opróżni się?

**Zadanie 12.** Rozwój populacji liczącej $M(t)$ osobników w chwili $t$ można opisać równaniem Verhulsta $M'(t) = aM(t) - bM^2(t)$ (dla populacji ludzkiej, z dobrym przybliżeniem $a = 0,029, \quad b = 2,941 \cdot 10^{-12}$). Udowodnić, że $\lim_{t\to\infty} M(t) = a/b$. Określić dla jakiego $t \quad M'(t)$ osiąga maksimum.

**Zadanie 13.** Spadek ciała w polu ciężkości, z uwzględnieniem oporu powietrza, jest opisany równaniem

$$x''(t) = -g + k(x'(t))^2, \qquad k > 0.$$

Pokazać, że $\lim_{t\to\infty} x'(t) = -(g/k)^{1/2}$.

**Zadanie 14.** Pojemnik zawiera roztwór 100 l wody i 10 kg soli. Do pojemnika wlewamy wodę z prędkością 5l/min i tyle samo roztworu wylewa się z pojemnika. Zakładamy, że roztwór jest cały czas intensywnie mieszany. Ile soli będzie w pojemniku po 1 godzinie?

**Zadanie 15.** Pokazać, że dla równania $x' + a(t)x = f(t)$, gdzie $a$ i $f$ są funkcjami ciągłymi, $a(t) \geq c > 0, \qquad \lim_{t\to\infty} f(t) = 0$, zachodzi relacja $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. W szczególności jest tak dla $a(t) \equiv a > 0$ i $f(t) = be^{-\beta t}, \ \ \beta > 0$.

**Zadanie 16.** Udowodnić, że równanie $x' = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $f \in C^1$, nie może mieć rozwiązań okresowych różnych od stałych.

**Zadanie 17.** Jak wiele rozwiązań równania $x' + ax = 1$ posiada granicę dla $t \to +\infty$?

**Zadanie 18.** Pokazać, że równanie $tx' + ax = f(t)$, gdzie $a > 0$, $\lim_{t\to 0} f(t) = b$, ma jedyne rozwiązanie ograniczone dla $t \to 0$. Zbadać przypadek $a < 0$.

**Zadanie 19.** Rozwiązać równania

$$\left(t - x\cos\frac{x}{t}\right)\,dt + t\cos\frac{x}{t}\,dx = 0, \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{x+2}{t+1} + \operatorname{tg}\frac{x-2t}{t+1}.$$

**Zadanie 20.** Wykazać, że krzywe całkowe równania

$$\left[2t(t^2 - atx + x^2) - x^2\sqrt{t^2 + x^2}\right]\ dt + x\left[2(t^2 - atx + x^2) + t\sqrt{t^2 + x^2}\right]\ dx = 0,$$

gdzie $|a| < 2$, są krzywymi zamkniętymi. (Wsk. Wprowadzić zmienne biegunowe.)

**Zadanie 21.** Zakładamy, że $f$ jest funkcją ciągłą i ograniczoną na $\mathbb{R}$. Pokazać, że równanie $y' + y = f(t)$ ma dokładnie jedno rozwiązanie $y(t)$ ograniczone. Pokazać, że jeżeli założymy, że $f$ jest funkcją okresową, to $y$ też jest funkcją okresową.

**Zadanie 22.** Zbadać jak zachowuje się ciąg kolejnych przybliżeń utworzony dla zagadnienia początkowego $x' = x^2, \quad x(0) = 1$ na odcinku $[0, 2]$, jeżeli $x_0(t) \equiv 1$.

**Zadanie 23.** Pokazać, że jeżeli zagadnienie $x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$ ma dwa rozwiązania, to ma ich nieskończenie wiele.

**Zadanie 24.** Dla jakich wartości parametru $a$ równanie $\dot{x} = x\,|\log x|^a$ z warunkiem początkowym $x(0) = 0$ ma jednoznaczne rozwiązanie? A jeśli $x(0) = 1$ ?

**Zadanie 25.** Rozważmy równanie $2x = t^2\ddot{x}$. Rozwiązania $x \equiv 0$ i $x = t^2$ spełniają warunki początkowe $x = \dot{x} = 0$ dla $t = 0$. Wyjaśnić dlaczego zachodzi ta niejednoznaczność rozwiązań.

28 lutego 2020 *P. Biler, S. Cygan*