Jakub Kamiński, 27.03.2020

l2z7

Zauważmy, że w przestrzeni $X = (R, d_e)$ każda sfera ma dokładnie dwa punkty. Pokażemy nie wprost, że własność ta jest zachowana przez obraz szukanego włożenia F. Załóżmy, że istnieje sfera $S(x, r) \subseteq F[X] \subseteq Y = (R^2, d_r)$ zawierająca co najmniej 3 punkty a, b, c. Musi istnieć punkt y, taki że najkrótsze drogi łączące go z a, b, c nie mają punktów wspólnych (oprócz y). Zauważmy, że ze względu na ciągłość F^{-1} możemy stopniowo przybliżać te punkty po tych drogach, i ich przeciwobrazy będą się w sposób ciągły przybliżały do przeciwobrazu y. Ale znaczy to, że dla pewnych a', b', c' leżących na tych drogach odległości $F^{-1}(y)$ od $F^{-1}(a'), F^{-1}(b')$ i $F^{-1}(c')$ będą równe, czyli będzie to sfera o trzech punktach (formalnie użyliśmy tw. Darboux, wybierając pewną odległość mniejszą niż pierwotne odległości i mówiąc, że każda z funkcji odległości musi ją przeciąć).
Pokazaliśmy zatem, że $F[X]$ nie ma "rozgałęzień". Musi się zatem zawierać w samej rzece, sumie dwóch półprostych (jednej leżącej na rzece, drugiej nie) o wspólnym początku, lub "zygzaku" (sumie dwóch półprostych i odcinka na rzece leżącego między nimi, być może zerowej długości). Obraz ten może być dowolnym podzbiorem spójnym i otwartym takiej figury, gdyż istnieją ciągłe bijekcje z R_+ w $(0, 1)$, a przeskalowanie długości przedziału nie jest oczywiście problemem. Spójność i otwartość przedziału wynikają bezpośrednio z ciągłości i braku, odpowiednio, "przerw" i "punktów granicznych" w X.