Zad 4 Wiktor Pilarczyk 308533

$\{|x_0| < 1, |y_0| < 1\}$

$$\begin{cases} x' = 2y \\ y' = x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x' \\ y' = \frac{1}{2}x'' \\ y' = x + y \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}x'' = x + \frac{1}{2}x'$$

$$2x = x'' - x$$

jest to spełnione przy $x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$

$\uparrow$ wszystkie rozw.

więc z $y = \frac{1}{2}x'$

to $y = -\frac{1}{2} c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$

dla $t = 0$

x_0 ~~$x(0)$~~ $= c_1 + c_2$

y_0 ~~$y(0)$~~ $= -\frac{1}{2}c_1 + c_2$

więc

$c_1 = \frac{2}{3}(x_0 - y_0)$

$c_2 = \frac{1}{3}(x_0 + 2y_0)$

więc dla $t = 1$

$x(1) = c_1 e^{-1} + c_2 e^2 = \frac{2}{3}(x_0 - y_0)e^{-1} + \frac{1}{3}(x_0 + 2y_0)e^2$

$y(1) = -\frac{1}{3}(x_0 - y_0)e^{-1} + \frac{1}{3}(x_0 + 2y_0)e^2$

$$* \; f^1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 \\ e^2 \end{pmatrix}$$

$$f^1\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^2 \\ -e^2 \end{pmatrix}$$

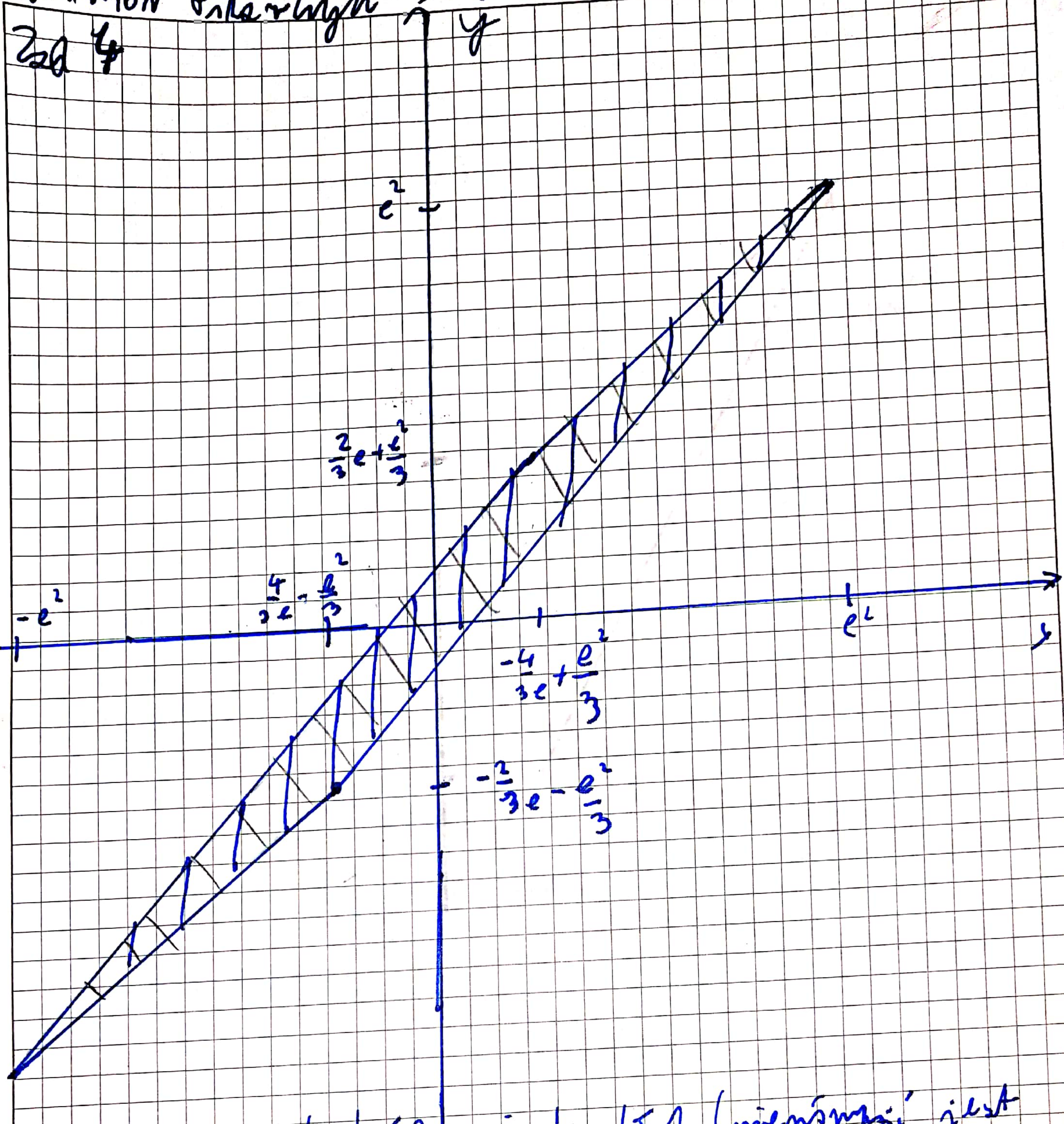
$$f^1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3e} - \frac{e^2}{3} \\ -\frac{2}{3e} - \frac{e^2}{3} \end{pmatrix}$$

$$f^1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3e} + \frac{e^2}{3} \\ \frac{2}{3e} + \frac{e^2}{3} \end{pmatrix}$$

Korzystając z własności funkcji liniowych – ciągłości otrzymujemy czworokąt

Wiktor Pilarczyk 308537

Zad 4



Ponieważ $|x_0| < 1$ i $|y_0| < 1$ (nierówność jest ostra) to obszar ~~[illegible]~~ nie należy do obszaru

Wiktor Pilarczyk 308533

Zad 5

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - ky \end{cases} \qquad k \geq 0$$

więc $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$A = PDP^{-1} \cdot \qquad P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

Na podstawie A. Palczewski „R.R. Zwyczajne"
9.2 - Punkty krytyczne układów liniowych na płaszczyźnie

Należy zbadać w. własne macierzy A.

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + k\lambda + 1$$

$$\Delta = k^2 - 4 = (k-2)(k+2)$$

1° $\Delta > 0 \Rightarrow k > 2$

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2}(-k + \sqrt{k^2-4}) < 0$$

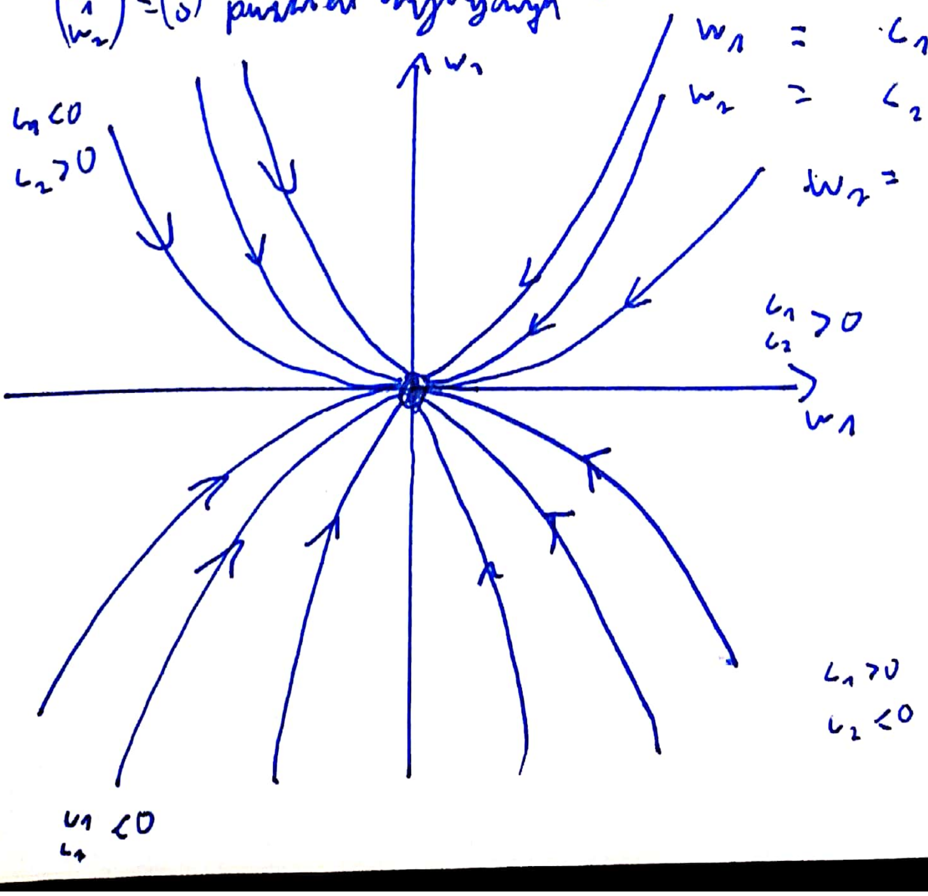
$$\lambda_2 = \tfrac{1}{2}(-k - \sqrt{k^2-4}) < 0 \quad \text{oraz} \quad \lambda_2 < \lambda_1 < 0$$

$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ punktem krytycznym stabilny

$$w_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}$$

$$w_2 = c_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$w_2 = c_3 x_1^{\lambda_2/\lambda_1}$$



Wiktor Pilarczyk 308533

Zad 5 c.d.

2° $\Delta = 0 \Rightarrow k = 2$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

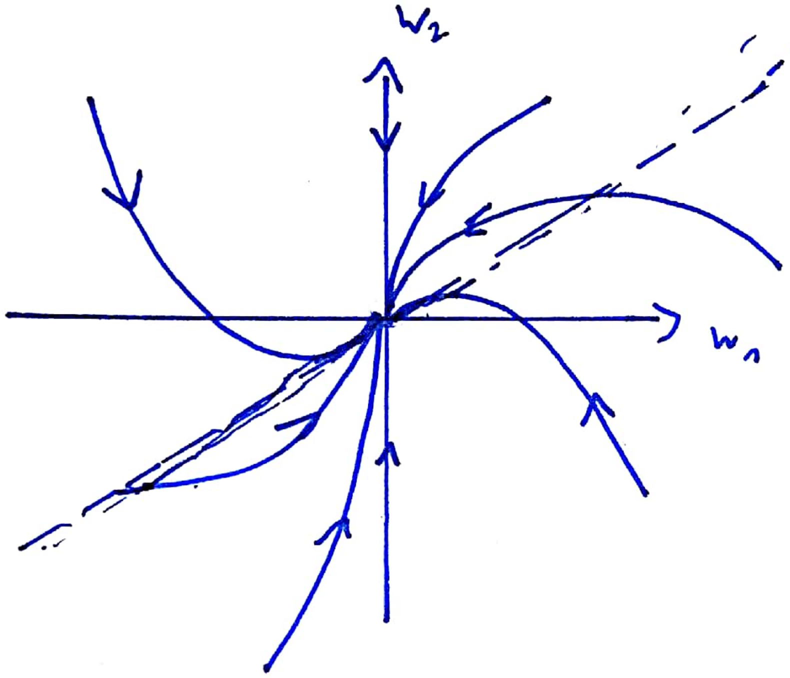
$\lambda = -1$

Otrzymujemy klatkę Jordana

więc $w_1 = c_1 e^{\lambda t}$

$w_2 = (c_2 + c_1 t) e^{\lambda t}$

z węzłem zdegenerowanym stabilnym w $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



prosta na której orbity osiągają ekstrema względem w_2

Wiktor Pilewczyk 308533

Zad 5C.D.2

3° $\Delta < 0$ $k \in [0, 2)$

$\lambda_1 = a + ib$ $\lambda_2 = a - ib$ $b > 0$

$$\begin{pmatrix} w_1' \\ w_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

$w_1 = r\cos\theta$ $w_2 = r\sin\theta$

$w_1' = a r\cos\theta - b r\sin\theta$

$w_2' = b r\cos\theta + a r\sin\theta$

$r' = ar$ $\theta' = b$

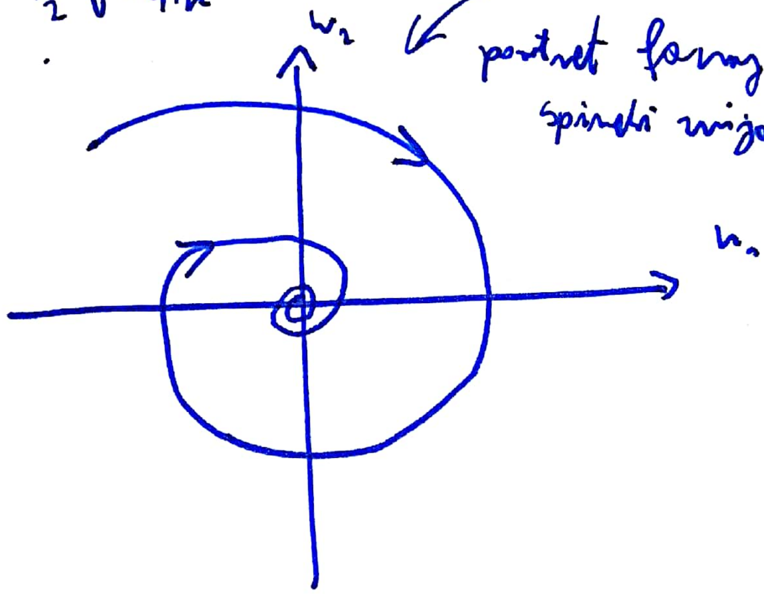
więc $r = r_0 e^{at}$

$\theta = \theta_0 + bt$

$a = -\frac{1}{2}k < 0$

$b = \frac{1}{2}\sqrt{-4+k^2}$

więc



portret fazowy ma postać spirali zwijającej się do $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$

ognisko stabilne