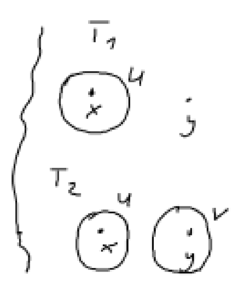
Przykład

Przestrzeń, która nie jest T_2, a jest T_1



Przestrzeń Zariskiego

X nieskończony

$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{X \setminus F : F \text{ - skończony}\}$

$(X, \mathcal{T})$ jest T_1 $\quad x \quad y \quad U = X \setminus \{y\}$

$(X, \mathcal{T})$ nie jest T_2

$x \quad y$ nie wprost istnieją $U \ni x$, $V \ni y$, $V \cap U = \emptyset$

$U = X \setminus F_1 \qquad V = X \setminus F_2$

Dla dowolnych F_1, F_2 - skończonych $U \cap V$ - nieskończony

$T_1 \supseteq T_2 \supseteq T_3 \supseteq T_{3\frac{1}{2}} \supseteq T_4 \supseteq$ metryzowalne

zawieranie jest właściwe

Przykład

Strzałka jest T_4, ale nie jest metryzowalna

Wiemy, że strzałka nie jest metryzowalna $\quad \{(\mathbb{R}, \mathcal{T} = \{[a, b) : a \leq b\}\}$

Pokażemy, że strzałka jest normalna

F, G - domknięte

$\forall f \in F$, weźmy $[f, b_f) \cap G = \emptyset$

$\forall g \in G$, weźmy $[g, b_g) \cap F = \emptyset$

Weźmy $U = \bigcup_{g \in G} [g, b_g) \qquad V = \bigcup_{f \in F} [f, b_f)$

$U \cap F = \emptyset \qquad V \cap G = \emptyset$

Chcemy pokazać $\forall g \in G, f \in F \quad [f, b_f) \cap [g, b_g) = \emptyset$

Gdyby ten przekrój był niepusty, i powiedzmy $f < g$, to zauważmy

$f \quad g \quad b_f$

Ale wówczas $g \in [f, b_f)$ $\lightning$

Zatem $U \cap V = \emptyset$

Przykład

Przestrzeń, która jest T_2 i nie jest T_3.

Rozważmy $\mathbb{R}$ z następującą topologią:

$Z = \{\frac{1}{n} : n = 1, 2, \ldots\}$

Bierzemy $\mathcal{T}$ generowaną przez

- $(r - \frac{1}{n}, r + \frac{1}{n})$ dla $r \neq 0$ $\quad$ Załóżmy $r - \frac{1}{n} > 0$
- $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \setminus Z$ dla 0

To stanowi bazę topologii

$(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ jest T_2

$(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ nie jest T_3

Nie możemy oddzielić $x = \{0\}$ $\quad F = Z$ domknięty

$0 \cdots \frac{1}{4} \; \frac{1}{3} \; \frac{1}{2} \; 1$

Weźmy dowolne $U \ni 0$, $V \supseteq Z$

$U = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \setminus Z$ dla pewnego n

Weźmy $\frac{1}{m} < \frac{1}{n}$

Dla każdego $V \supseteq Z$, $\frac{1}{m} \in V$

czyli dla pewnego k $\quad \frac{1}{m} \in (\frac{1}{m} - \frac{1}{k}, \frac{1}{m} + \frac{1}{k}) \subseteq V$

$\Rightarrow U \cap V \neq \emptyset$.

ZWARTOŚĆ

Definicja $(X, \mathcal{T})$ przestrzeń topologiczna

(1) Rodzina zbiorów otwartych $\mathcal{U}$ jest pokryciem $A \subseteq X$ jeśli $A \subseteq \bigcup \mathcal{U}$.

(2) Punkt $a \in X$ jest punktem skupienia (a_n) jeśli dla dowolnego otoczenia $U \ni a$, mamy że nieskończenie wiele elementów z (a_n) należy do U.

<u>Uwaga</u> (dla przestrzeni metryzowalnej)

- Jeżeli (a_n) zbiega do a, to a jest punktem skupienia
- a jest punktem skupienia (a_n) $\Leftrightarrow$ możemy wybrać podciąg z (a_n), który jest zbieżny do a

$\Uparrow$ jasne $\qquad \Downarrow$

$B(a, \frac{1}{n})$

Wybieramy

$a_{n_1} \in B(a, 1)$

$a_{n_2} \in B(a, \frac{1}{2})$, $n_2 > n_1$

$a_{n_3} \in B(a, \frac{1}{3})$, $n_3 > n_2$

Wówczas $(a_{n_k}) \to a$

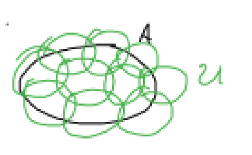
<u>Definicja</u>

Przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$ jest zwarta jeśli jest T_2 i z każdego otwartego pokrycia X można wybrać podpokrycie skończone.

<u>Twierdzenie</u> (X, d) - przestrzeń metryczna, $A \subseteq X$, niech $\mathcal{U}$ będzie pokryciem zbioru A, i załóżmy, że dla każdego ciągu (a_n) punktów w A można wybrać podciąg zbieżny do pewnego $a \in A$.

Wówczas istnieje $\underline{\delta > 0}$ t. że dla każdego $a \in A$, $B(a, \delta)$ leży w pewnym elemencie $\mathcal{U}$.

(Oczywiście mamy $\forall a \in A \; \exists \delta > 0$ $B(a, \delta)$ leży w pewnym elemencie $\mathcal{U}$)



Za chwilę zobaczymy, że warunek powyżej $\Leftrightarrow$ zwartości

D-d

Nie wprost, nie ma takiej $\delta > 0$.

Wówczas $\forall n$ istnieje $a_n \in A$ t. że $B(a_n, \frac{1}{n})$ nie leży w elemencie $\mathcal{U}$.

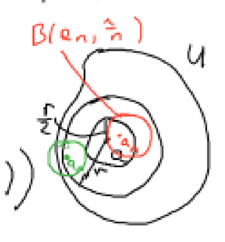
Pokażemy, że z (a_n) nie można wybrać podciągu zbieżnego.

Weźmy $a \in A$ nie jest granicą podciągu (a_n)

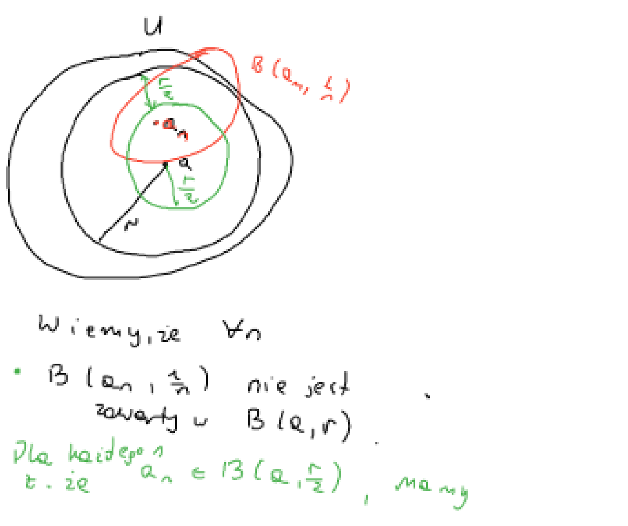
Weźmy $r > 0$, weźmy $U \in \mathcal{U}$ t. że $B(a, r) \subseteq U$.

Zauważmy, że jeśli $a_n \in B(a, \frac{r}{2})$ to $\frac{1}{n} > \frac{r}{2}$ $\quad \frac{1}{n} \leq \frac{r}{2}$

(ponieważ $B(a_n, \frac{1}{n})$ nie zawiera się w U
$\quad$ — ″ — $\quad$ w $B(a, r)$)



Czyli tylko skończenie wiele wyrazów z (a_n) może być w kuli $B(a, \frac{r}{2})$, zatem a nie jest punktem skupienia (a_n).



Wiemy, że $\forall n$

- $B(a_n, \frac{1}{n})$ nie jest zawarty w $B(a, r)$.

Dla każdego n t. że $a_n \in B(a, \frac{r}{2})$, mamy $\frac{1}{n} > \frac{r}{2}$.

~~xxx~~ jeśli $\frac{r}{2} \geq \frac{1}{n}$, to $B(a_n, \frac{1}{n}) \subseteq B(a, r)$

$b \in B(a_n, \frac{1}{n})$

$d(a_n, b) < \frac{1}{n}$

Wiemy, że $d(a_n, a) < \frac{r}{2}$

$d(b, a) < \frac{1}{n} + \frac{r}{2} \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$

$\Rightarrow b \in B(a, r)$

Twierdzenie $(X, \mathcal{T})$ - metryzowalna

Następujące warunki są równoważne

(i) X jest zwarta

(ii) Z każdego ciągu punktów w X można wybrać podciąg zbieżny do pewnego elementu w X

(iii) Dla każdych $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \ldots$, F_i - domknięte, $F_i \neq \emptyset$

$\bigcap_i F_i \neq \emptyset$

<u>D-d</u>

(i) $\Rightarrow$ (iii)

Rozważmy $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \ldots$ $\quad F_i$ domknięte

Nie wprost $\bigcap_i F_i = \emptyset$

Wówczas $\mathcal{U} = \{X \setminus F_i : i = 1, 2, \ldots\}$ pokrycie otwarte X

Ponieważ X jest zwarta, to istnieje podpokrycie skończone $X \setminus F_{i_1}, \ldots, X \setminus F_{i_k}$

Zatem $F_{i_1} \supseteq F_{i_2} \supseteq \ldots \supseteq F_{i_k}$ są takie, że $\bigcap_k F_{i_k} = \emptyset$

To daje sprzeczność, ponieważ $\bigcap_k F_{i_k} = F_{i_k}$

(iii) $\Rightarrow$ (ii)

(a_n) $\quad$ chcemy $\overline{\text{podciąg zbieżny}}$ w X

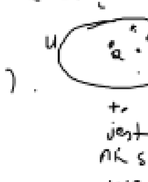
Rozważmy $F_i = \overline{\{a_n : n \geq i\}}$

Zauważmy, że $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots$

Z (iii) istnieje $a \in \bigcap_i F_i$

Wówczas a jest punktem skupienia (a_n).

$\forall i \; a \in F_i$ $\quad$ i - dowolne, U - dowolne



to w U jest nieskończenie wiele elementów z (a_i)

(ii) $\Rightarrow$ (i) $\qquad (X, d)$

Niech $\mathcal{U}$ będzie otwartym pokryciem X.

Weźmy $\delta > 0$ jak w poprzednim tw.

($\forall a \in X$ $B(a, \delta)$ jest zawarte w pewnym elemencie z $\mathcal{U}$)

Załóżmy nie wprost, że nie istnieje podpokrycie skończone $\mathcal{U}$.

To implikuje $\forall n \forall x_1, \ldots, x_n$ $\bigcup_{i \leq n} B(x_i, \delta) \neq X$.

Możemy więc wybrać (a_n) t. że dla $n = 2, 3, \ldots$

$a_n \notin \bigcup_{m < n} B(a_m, \delta)$.

Pokażemy, że (a_n) nie ma podciągu zbieżnego $\Leftrightarrow$ nie ma punktu skupienia

Zauważmy, że $d(a_m, a_n) \geq \delta$, $m \neq n$

Dla dowolnego $a \in X$

$B(a, \frac{\delta}{2})$ zawiera co najwyżej 1 spośród (a_n).

Zatem a nie jest punktem skupienia (a_n).

Innymi słowy (a_n) nie ma punktu skupienia.