1. Zadanie 10, lista 4

Zgodnie ze wskazówką najpierw pokażemy, że dla dowolnych domkniętych A, B:

$$\max\{\sup\{d(x,A) : x \in B\}, \sup\{d(x,B) : x \in A\}\} = \sup_{x \in A \cup B} |d(x,A) - d(x,B)|.$$

Ponieważ A, B są zbiorami domkniętymi przestrzeni zwartej, to są zwarte, więc oba suprema są realizowane przez pewne punkty. Załóżmy że dla pewnego punktu wartość z prawej wynosi więcej niż wartość z lewej. Ponieważ ten punkt należy do jednego ze zbiorów, to różnica odległości od A i B i jest po prostu odległością do drugiego z nich, więc sprzeczność. Odwrotnie argumentacja przebiega podobnie.

Teraz wybierzmy dowolny $x \in X$ oraz taki $a \in A, b \in B$, żeby $d(x,a), d(x,b)$ było najmniejsze (istnienie ponownie wynika ze zwartości). Bez straty ogólności załóżmy $d(x,b) \geqslant d(x,a)$. Niech $b' \in B$ będzie takie, żeby $d(a,b')$ była najmniejsza. Wówczas stosując nierówność trójkąta:

$$|d(x,A) - d(x,B)| = d(x,b) - d(x,a) \leqslant d(x,b') - d(x,a) \leqslant d(a,b') = d(a,B) - d(a,A) \leqslant \sup_{x \in A \cup B} |d(x,A) - d(x,B)|.$$

Zatem możemy rozszerzyć wcześniejszą postać do:

$$\sup_{x \in A \cup B} |d(x,A) - d(x,B)| = \sup_{x \in X} |d(x,A) - d(x,B)|.$$

Teraz weźmy x, dla którego to supremum jest realizowane oraz dowolny niepusty zbiór domknięty C. Zgodnie z nierównością trójkąta:

$$d_H(A,B) = \sup_{x \in X} |d(x,A) - d(x,B)| = |d(x,A) - d(x,B)| = |d(x,A) - d(x,C) + d(x,C) - d(x,B)| \leqslant$$

$$|d(x,A) - d(x,C)| + |d(x,C) - d(x,B)| \leqslant \sup_{x \in X} |d(x,A) - d(x,C)| + \sup_{x \in X} |d(x,C) - d(x,B)| = d_H(A,C) + d_H(C,B).$$

W ten sposób pokazaliśmy nierówność trójkąta. Ponieważ symetria wynika z definicji, a zerowanie się dokładnie na tym samym zbiorze można pokazać nie wprost biorąc element, który nie nalezy do obydwu zbiorów, teza zachodzi.