z.2

$A = \{(x, \frac{1}{x}) : x > 0\}$

$a_n := (n, \frac{1}{n}) \in A$. $(n, \frac{1}{n}) \xrightarrow[n]{} {}$"$\infty$", tzn. $d(a_n, (0,0)) \xrightarrow[n]{} +\infty$

Weźmy $(n_k)_k \nearrow$ $\quad a_{n_k} = (n_k, \frac{1}{n_k})$ też rozbiega do ∞

$\Rightarrow (a_n)_n$ nie zawiera podciągu zbieżnego

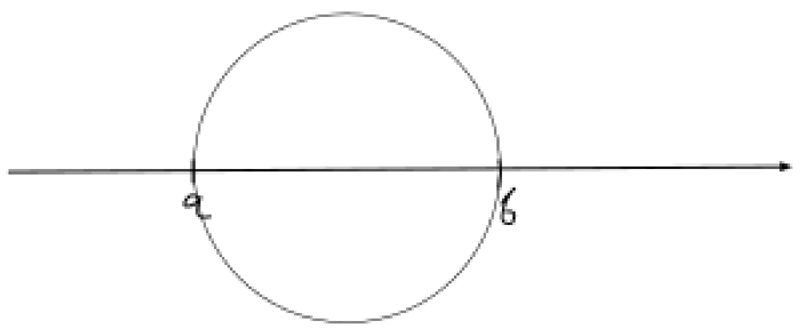
$\Rightarrow A$ nie jest zwarty

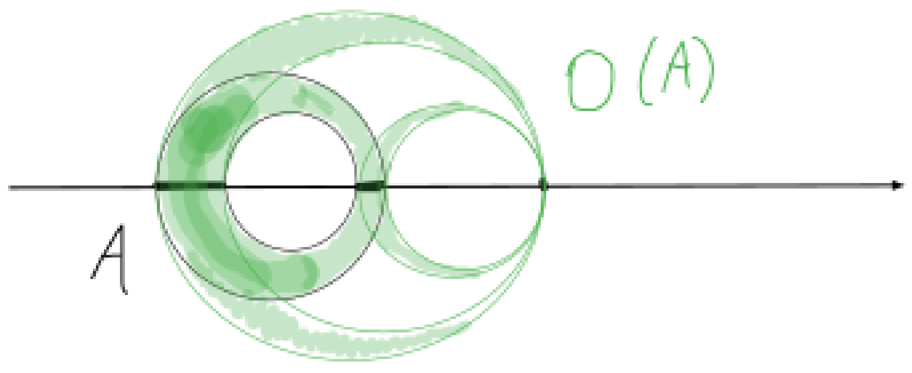
B − (podobnie) nieograniczony, bo $B \supseteq \{0\} \times (-\infty, 0]$ $\Rightarrow$ nie zwarty

$C = \{\ldots\} \cup 0X$ $\Rightarrow$ nieograniczony $\Rightarrow$ nie zwarty

z.3. $\quad O(a,b)$

$O(A) = A \cup \bigcup_{\substack{a \neq b \\ a,b \in A}} O(a,b)$





- $O(A)$ − ograniczony $\Leftrightarrow A$ − ogran. (łatwe)
- $O(A)$ − domkn. $\Rightarrow A$ − domkn.

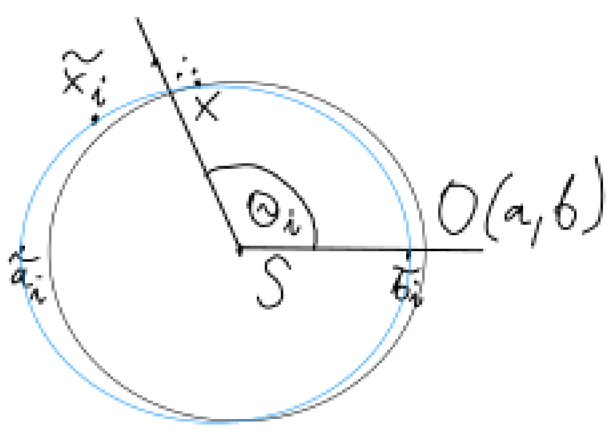
  $A = O(A) \cap 0x$ − domkn. ✓
- A − zwarty $\Rightarrow O(A)$ − domkn. (zwarty):

Weźmy $x_n \in O(A)$ $\quad x_n \xrightarrow[n]{} x \in \mathbb{R}^2$. $\quad$ T: $x \in O(A)$

$(\forall_n)(\exists a_n \neq b_n \in A)\ x_n \in O(a_n, b_n)$ $\quad$ (Założ.: $|A| > 1$)

Ze zwartości A: wybieram podciąg $(a_{n_k})_k$ zbieżny do $a \in A$, z $(b_{n_k})_k$ wybieram podciąg zbieżny $(\tilde{b}_i)_i = (b_{n_{k_i}})_i$ do b. Wtedy $(\tilde{a}_i)_i = (a_{n_{k_i}})_i$ − zbieżny. Ozn. $\tilde{x}_i = x_{n_{k_i}}$

T: $x \in O(a,b)$. (Przy tym $O(\tilde{a}_i, \tilde{b}_i) \xrightarrow[i]{}$ "$O(a,b)$", a ściślej: $d(\tilde{x}_i, O(a,b)) \xrightarrow[i]{} 0$)



Wiem, że $\tilde{x}_i \xrightarrow[i]{} x$, więc $\Theta_i \xrightarrow[i]{} \Theta$ (mogę przyjąć, że $\tilde{x}_i \neq S$).

Niech x' − punkt na $O(a,b)$ t., że $\vec{Sx'}$ ma „kąt biegunowy" $= \Theta$

T: $x' = \lim_i \tilde{x}_i \ (= x)$; skoro $\Theta_i \xrightarrow[i]{} \Theta$, to pozostaje pokazać: $d(\tilde{x}_i, S) \xrightarrow[i]{} d(x', S) = \frac{b-a}{2}$.

$$\underbrace{\min\left(d(\tilde{a}_i, S), d(\tilde{b}_i, S)\right)}_{\to \frac{b-a}{2}} \leq d(\tilde{x}_i, S) \leq \underbrace{\max\left(d(\tilde{a}_i, S), d(\tilde{b}_i, S)\right)}_{\to \frac{b-a}{2}}$$

z tw. o 3 ciągach $d(\tilde{x}_i, S) \xrightarrow[i]{} \frac{b-a}{2}$

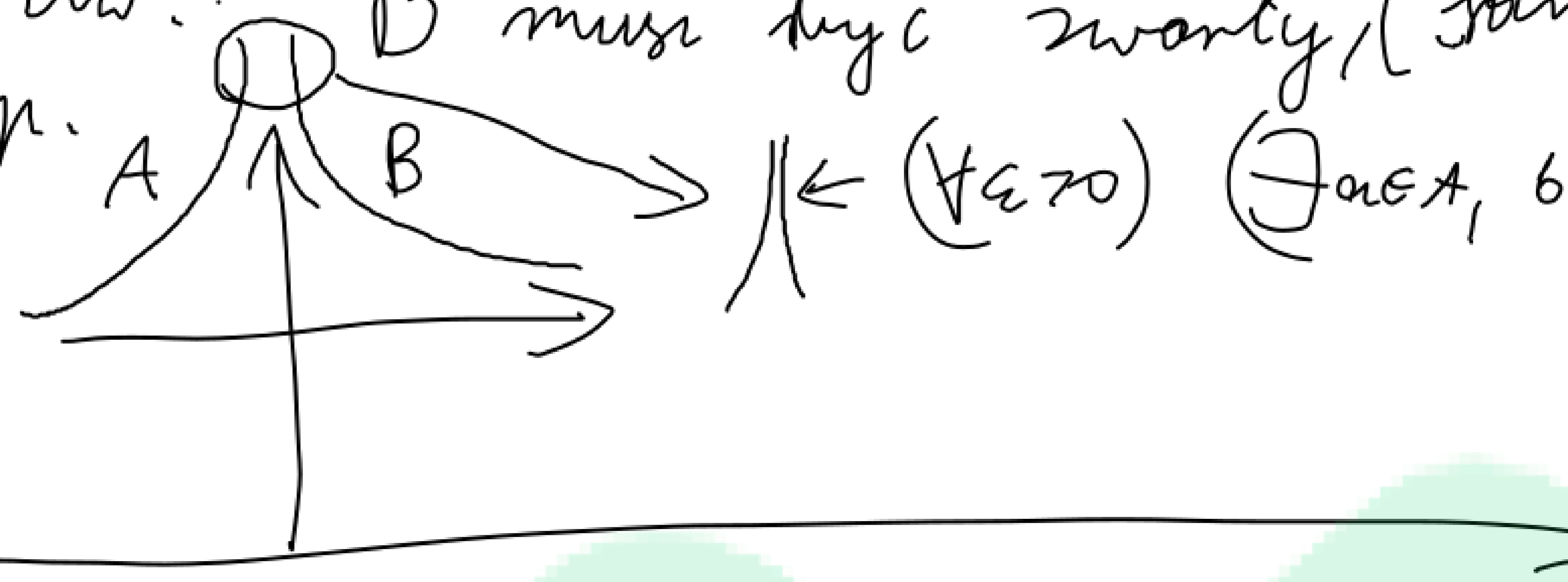
$\Rightarrow \tilde{x}_i \to x' \Rightarrow x' = x$, więc $x \in O(a,b)$.

z. 4. Uw.: Istotne jest to, że A – domknięty, bo np. gdyby $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$

i np. $A = B^c$:  $\rightarrow \otimes$

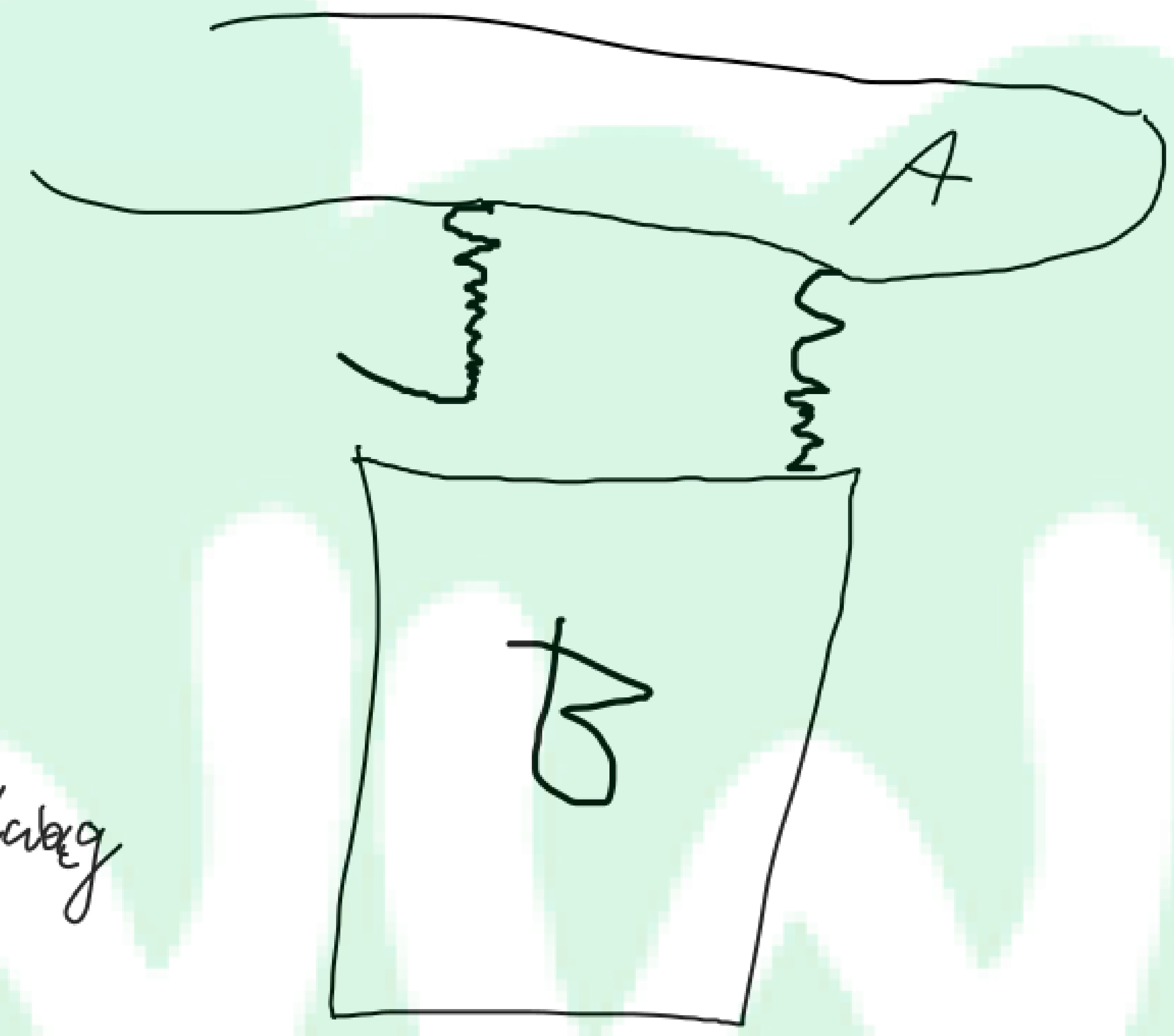
Uw.: B musi być zwarty, (sama domkniętość nie wystarczy):

Np.



$\rightarrow \nparallel \leftarrow (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists a \in A, b \in B)\ d(a,b) < \varepsilon$

D-d nie wprost:



Z: $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists a \in A, b \in B)\ d(a,b) < \frac{1}{n}$

wybieram takie a, b i ozn. a_n, b_n

czyli $d(a_n, b_n) < \frac{1}{n}$

Ze zwartości B mogę wybrać podciąg zbieżny $(b_{n_k})_k$ ciągu (b_n):

$b_{n_k} \xrightarrow{k} b \in B$

$d(a_{n_k}, b_{n_k}) \xrightarrow{k} 0$, więc $\underset{\downarrow k\ 0}{d(a_{n_k}, b)} \le \underset{\downarrow k\ 0}{d(a_{n_k}, b_{n_k})} + \underset{\downarrow k\ 0}{d(b_{n_k}, b)}$ $\Leftarrow$

czyli $a_{n_k} \xrightarrow{k} b$, więc z domkniętości A: $b \in A$ $\otimes$ z zał., że $A \cap B = \emptyset$

z. 5. • $A \subseteq \mathbb{R}^2$ (A, d_E)

np. $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, wtedy $\overline{K}((0,0),1) \cap A$ domkn. i ogr. A

• (X, d_D) – każdy zbiór $A \subseteq X$ domkn. i ogr., ale

A – zwarty $\Leftrightarrow$ A – skończony.