$$\sup_{x \in A \cup B} \left| d(x,A) - d(x,B) \right| =$$

$$= \sup_{x \in A \cup B} \begin{cases} |d(x,A) - 0|, & x \in B \\ |d(x,B) - 0|, & x \in A \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \sup_{x \in B} d(x,A), & x \in B \\ \sup_{x \in A} d(x,B), & x \in A \end{cases} = \max\{ -\|- \}$$

1. Lemat: Jeśli A jest domknięty i przestrzeń jest zwarta i metryzowalna to $d(x,A) = d(x,a)$ dla jakiegoś $a \in A$.

d-d:

$$d(x,A) = \inf_{a \in A} d(x,a) \text{, czyli}$$

istnieje ciąg a_n, że $d(x,a_n) \xrightarrow{n} \inf d(x,A)$

przestrzeń zwarta, więc można wybrać podciąg zbieżny $a'_n \xrightarrow{n} a$.

A domknięty, więc $a \in A$ bo $\forall_n\, a'_n \in A$

~~inf $d(x,a)$~~

$d(x,A) = d(x,a)$, bo gdyby

$d(x,A) = d(x,a) - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$

a prawie wszystkie a'_n są takie że

$d(x,a'_n) - d(x,A) \underset{(1)}{<} \frac{\varepsilon}{2}$.

z nierówności $\triangle$:

$\triangle$: $d(x,a'_n) + d(a'_n,a) \geq d(x,a)$

$d(a'_n,a) \geq \varepsilon + d(x,A)$

$- d(a'_n,a) \underset{(1)}{\geq} \frac{\varepsilon}{2}$, czyli a'_n nie byłyby zbieżny do a.

$\longrightarrow$

dla każdego $x \in X \setminus A \cup B$:

załóżmy BSO że $d(x,A) \geq d(x,B)$.

korzystając z lematu niech $d(x,b) = d(x,B)$

dla każdego $a \in A$:

$$d(x,A) = \inf_{a \in A} d(x,a) \leq d(x,a) \leq d(x,b) + d(b,a)$$

$$= d(x,B) + d(b,a)$$

czyli:

$$\sup_{a \in A} d(x,A) \leq \sup_{a \in A} d(x,B) + \sup_{a \in A} d(b,a)$$

$$d(x,A) \leq d(x,B) + d(b,A)$$

$$0 \leq d(x,A) - d(x,B) \leq d(b,A) - \underbrace{d(b,B)}_{=0}$$

$$|d(x,A) - d(x,B)| \leq |d(b,A) - d(b,B)|$$

Zatem dla każdego $x \in X \setminus A \cup B$

możemy wybrać $b \in B$ (BSO ↑b)

takie że ___ || ___ ✓

czyli

$$\sup_{x\in X\setminus A\cup B}|d(x,A)-d(x,B)| \leq \sup_{x\in A\cup B}|d(x,A)-d(x,B)|$$

czyli $$\sup_{x\in X}|-||-| = \sup_{x\in A\cup B}|-||-| = d_H.$$

Sprawdźmy w końcu, że d_H to metryka

~~1.~~ $\cancel{\sup_{x\in X}|d(x,A)-d(x,B)| \geq 0}$ ~~i 0 wtw [illegible] gdy~~

2. $$\sup_{x\in X}|d(x,A)-d(x,B)| = \sup|d(x,B)-d(x,A)|$$

3. $$|d(x,A)-d(x,C)| = |d(x,A)-d(x,B)+d(x,B)-d(x,C)|$$

$$\sup_{x\in X}|d(x,A)-d(x,C)| \leq \sup_{x\in X}\left(|d(x,A)-d(x,B)| + |d(x,B)-d(x,C)|\right)$$

$$\leq \sup_{x\in X}|-||-| + \sup_{x\in X}|-||-|.$$