Topologia

27.03.2020

Zad 2/ lista 2

(a)

Rozpatrzmy nierówności: $|y| < \frac{1}{2}|x|$ $|x| < \frac{1}{2}|y|$. Zauważmy, że każda z tych nierówności opisuje zbiór należący do $\mathcal{T}$. Nazwijmy zbiór rozwiązań pierwszej nierówności jako A, a drugiej jako B. Zauważmy, że zbiór $X = A \cup B \cup \{(0,0)\} \in \mathcal{T}$: Jeśli $(0,0) \in L$, to $X \cap L = L$, co jest zbiorem otwartym na L, jeśli natomiast $(0,0) \notin L$, to $L \cap X$ jest sumą zbiorów $L \cap A$ i $L \cap B$, które są otwarte, zatem jest zbiorem otwartym. X natomiast nie jest otwarty w $\mathbb{R}^2$ - rozpatrzmy kulę o środku w $(0,0)$ ($(0,0) \in X$) i promieniu $\delta > 0$. Wówczas $B((0,0),\delta) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus X) \neq \emptyset$, więc X nie jest otwarty w $\mathbb{R}^2$.

(b)

$\mathcal{T}$ jest topologią

(i) $\emptyset \in \mathcal{T}$ i $\mathbb{R}^2 \in \mathcal{T}$. Istotnie dla dowolnej prostej L zachodzi: $\emptyset \cap L = \emptyset$ oraz $\mathbb{R}^2 \cap L = L$, a zarówno $\emptyset$ jak i L są otwarte ze względu na metrykę euklidesową w L. Zatem

(ii) Jeśli $A \in \mathcal{T}$ oraz $B \in \mathcal{T}$, to $A \cap B \in \mathcal{T}$. Niech L będzie prostą równoległą do osi x lub równoległą do osi y. Wówczas $L \cap (A \cap B) = (L \cap A) \cap (L \cap B)$, zatem jest przekrojem dwóch zbiorów otwartych ze względu na metrykę euklidesową w L, więc jest zbiorem otwartym ze względu na metrykę euklidesową w L. W związku z tym $A \cap B \in \mathcal{T}$.

(iii) Jeśli $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}$ jest rodziną zbiorów otwartych, to $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \mathcal{T}$ Niech L będzie prostą równoległą do osi x lub równoległą do osi y. Wówczas

$$L \cap \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} L \cap A$$

Zatem jest sumą zbiorów otwartych ze względu na metrykę euklidesową w L, więc jest zbiorem otwartym ze względu na metrykę euklidesową w L. W związku z tym $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \mathcal{T}$.

(iv) $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ jest przestrzenią Hausdorffa

Zauważmy, że dla dowolnej prostej L oraz dowolnej kuli B_E z przestrzeni euklidesowej $B_E \cap L$ jest zbiorem otwartym ze względu na metrykę euklidesową w L, zatem $B_E \in \mathcal{T}$. Weźmy dowolne 2 punkty $x, y \in \mathbb{R}^2$. Niech d_E będzie euklidesową odległością pomiędzy punktami x i y. Wówczas kule $B_E(x, \frac{d_E}{2})$ i $B_E(y, \frac{d_E}{2})$ są rozłączne i zawierają odpowiednio x oraz y, więc $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ jest przestrzenią Hausdorffa.

(c)

1. Jeżeli dla pewnego $r > 0$, $C \setminus B(0, r)$ jest nieskończony, to weźmy $U = B(0, r)$.
2. W przeciwnym wypadku, weźmy $U = B(0, 1) \setminus C$.

Zad 3/ lista 2

Chcemy pokazać ciągłość w x_0. Niech $\delta > 0$ i niech $x \in X$ będzie taki, że $\rho(x, x_0) < \delta$. Niech $a \in A$. Z nierówności trójkąta $\rho(x, a) \leqslant \rho(x, x_0) + \rho(x_0, a)$ oraz $\rho(x_0, a) \leqslant \rho(x, x_0) + \rho(x, a)$.

Zatem jeśli a jest takie, że $\rho(x_0, a) < \rho(x_0, A) + \delta$ to $\rho(x, A) \leqslant \rho(x, a) \leqslant \rho(x, x_0) + \rho(x_0, a) < 2\delta + \rho(x_0, A)$, czyli $\rho(x, A) \leqslant 2\delta + \rho(x_0, A)$.
Zatem $\lim_{x \to x_0} \rho(x, A) \leqslant \rho(x_0, A)$.

Podobnie, jeśli a jest takie, że $\rho(x, a) < \rho(x, A) + \delta$ to $\rho(x_0, A) \leqslant \rho(x_0, a) \leqslant \rho(x, x_0) + \rho(x, a) < 2\delta + \rho(x, A)$, czyli $\rho(x_0, A) \leqslant 2\delta + \rho(x, A)$. Zatem $\rho(x_0, A) \leqslant \lim_{x \to x_0} \rho(x, A)$.

Aby uzasadnić, że $x \in \overline{A}$ iff $\rho(x, A) = 0$ możemy skorzystać z faktu, że $x \in \overline{A}$ iff istnieje ciąg (x_n) elementów z A taki, że $\lim x_n = x$.

2/4

Weźmy $Y \subseteq X$ nieskończony oraz $x \notin Y$. Niech $U \in \mathcal{T}$ to otoczenie x. Skoro dopełnienie U jest skończone, to $U \cap Y \neq \emptyset$. Stąd każdy $x \in X$ należy do $\overline{Y}$, czyli $\overline{Y} = X$.

2/6

Mamy $A \cap B = \emptyset, A \in \mathcal{T}$. Załóżmy nie wprost, że $x \in \mathrm{Int}(\overline{B}) \cap \overline{A}$. Istnieje otoczenie $x \in U_x \subseteq \overline{B}$. Istnieje $y \in U_x \cap A$ t. że $y \in \overline{B}$. Istnieje otoczenie $U_y \subseteq A$ (ponieważ A jest otwarty). Zatem istnieje $z \in U_y \cap B$, czyli $z \in A \cap B$. Sprzeczność.

2/7

$f(x) = (0, x)$