Równania różniczkowe 1 R

Notatki z konsultacji

19 marca 2020

Do zad 20 Mamy $x = r\sin(\theta), y = r\cos(\theta)$. Potrafimy wyliczyć $\frac{dx}{dr}$ oraz $\frac{dx}{d\theta}$ oraz $\frac{dt}{dr}, \frac{dt}{d\theta}$. Chcemy wyznaczyć dx oraz dt. Wymnażamy formalnie tożsamości uzyskane z różniczkowania. Otrzymujemy:

$$\begin{pmatrix} dx \\ dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta) & r\cos(\theta) \\ \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix}$$

Twierdzenie o podstawianiu dla funkcji wielu zmiennych: tak jak mamy $\int f(x(t)x'(t)dt = \int f(x)dx$, tak mamy dla $\mathbb{R}^n$: $\int f(g(t))dt = \int Dgf(g)dg$.

Generalnie chcemy znaleźć $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ taką, że $f(r, \theta) = (x, y)$. Jeżeli policzymy Df, to otrzymamy:

$$\begin{pmatrix} dx \\ dt \end{pmatrix} = Df \cdot \begin{pmatrix} dr \\ d\theta \end{pmatrix}$$

Myślimy o rozwiązaniu wyjściowego równania jako o pewnej funkcji $R(x, t)$, ponieważ szukanie rozwiązania $x = p(t)$ niejawnie zakłada, że x daje się rozwikłać jako funkcja zmiennej t - ogranicza nam to mocno zbiór rozwiązań.

Te dx, dy to nie byle syfy - to ma związek z formami różniczkowymi.

Z macierzowych tożsamości możemy wyliczyć dx/dt za pomocą dr oraz $d\theta$ poprzez podzielenie odpowiednich równości, a potem przez wymnożenie licznika i ułamka np. przez $d\theta$ (nie lubimy za bardzo dr oraz $d\theta$).

Do zad 16 Rozwiązanie jest okresowe wtw istnieje $T > 0$ takie, że dla każdego t mamy $x(t) = x(t + T)$. Gdyby nasze równanie miało rozwiązanie okresowe różne od stałego, to wtedy mamy $x'(t) \neq 0$ dla pewnego t. Mamy wtedy $x(0) = x(T)$. To oznacza, że jej pochodna musi być w pewnym punkcie musi się zerować (tw. Rolle'a). Jeżeli $x'(t_0) = 0$, to wtedy $f(x(t_0)) = 0$. Rozważmy rozwiązanie $x(t) \equiv x(t_0)$ - taka funkcja rzeczywiście jest rozwiązaniem wyjściowego równania różniczkowego. Jednak przy założeniu $f \in C^1$ mamy jednoznaczność rozwiązania, stąd nie może być innych rozwiązań.

Do zad 23 Miejmy dwa rozwiązania równania $y' = f(y, t)$ z warunkiem $y_0 = y(0)$. Szukamy rozwiązania $y_T = y_0$ dla malejącego czasu $t < T$. Jeżeli będziemy się tak cofać, to w pewnym momencie rozwiązanie musi uderzyć w jedną z dwóch gałęzi rozwiązań. Kolejne rozwiązania otrzymujemy przez wybór dowolnego punktu z $y_1(T), y_2(T)$.

Szczegóły: jakie i dlaczego rozwiązania istnieją są do przeprowadzenia w ramach dowodu.

Do zad 21 Wychodzimy od równania $y' + y = f(t)$. Równoważnie $(e^t y)' = e^t f(t)$. Po rozwiązaniu tego równania otrzymujemy:

$$y(t) = e^{-t}\left(e^{t_0}y_0 + \int_{t_0}^{t} e^s f(s)ds\right)$$

Aby wykazać ograniczoność, wystarczy wykonać prosty rachunek:

$$y(t) = e^{t_0-t}y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(s-t)}f(s)ds \leqslant e^{t_0-t}y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(s-t)}Mds \leqslant C$$

Aby wykazać jedyność tego rozwiązania wystarczy zauważyć, że równanie ma postać $y' = -y + f(t)$ i zestawić ten fakt z założeniami tw. Picarda-Lindelofa. Mówi ono nam, że równanie spełniające z prawej strony warunek Lipschitza ze względu na y posiada jednoznaczne rozwiązanie warunku początkowego. Stąd mamy jedyność rozwiązania dla zadanego warunku początkowego, np. $y(0) = y_0$.

Żeby pokazać, że okresowość f implikuje okresowość y załóżmy, że $f(x+T) = f(x)$, tj T jest okresem funkcji f. Mamy wówczas następujące tożsamości:

$$\begin{aligned}
y(t) &= e^{-t}\left(y_0 + \int_0^t e^s f(s)ds\right)\\
y(T) &= e^{-T}\left(y_0 + \int_0^T e^s f(s)ds\right)\\
y(2T) &= e^{-2T}\left(y_0 + \int_0^{2T} e^s f(s)ds\right)\\
y(2T) &= e^{-2T}\left(y(T)e^T + \int_T^{2T} e^s f(s)ds\right)
\end{aligned}$$

W szczególności korzystając z okresowości f możemy przeprowadzić następujący rachunek:

$$\begin{aligned}
y(2T) &= e^{-2T}\left(y(T)e^T + \int_T^{2T} e^s f(s)ds\right)\\
&= y(T)e^{-T} + e^{-2T}\int_T^{2T} e^{(s-T)}f(s)ds\\
&= y(T)e^{-T} + e^{-2T}\int_0^{T} e^s f(s)ds\\
&= y(T)e^{-T} - y(T)e^{-T} + y_0 = y_0
\end{aligned}$$