Algebra liniowa 1R, Lista 4

1. Uzasadnij równości: $M(N+P) = MN + MP$, $(M+N)P = MP + NP$, $t(MN) = (tM)N = M(tN)$, $\det(M^{-1}NM) = \det(N)$, $\det(tM) = t^2\det(M)$, $\mathrm{tr}(MN) = \mathrm{tr}(NM)$, $\mathrm{tr}(M+N) = \mathrm{tr}(M) + \mathrm{tr}(N)$, $\mathrm{tr}(M^{-1}NM) = \mathrm{tr}(N)$ (M, N, P są macierzami, $t \in \mathbf{R}$).
2. Sprawdź, że przekształcenia liniowe płaszczyzny z operacjami dodawania i mnożenia przez skalar spełniają aksjomaty przestrzeni liniowej.
3. Dla jakich wartości parametru c macierz $\begin{pmatrix} 2 & c \\ -c & 1 \end{pmatrix}$ ma (a) zero, (b) jedną, (c) dwie wartości własne.
4. Znajdź wielomian charakterystyczny, wartości własne i wektory własne macierzy (a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, (e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, (f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

---

5. Niech $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Oblicz A^2, A^3 i A^4. Sformułuj narzucającą się hipotezę, a następnie udowodnij ją indukcyjnie.
6. Sprawdź, że jedyną wartością własną macierzy $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ jest 5. To samo zrób dla macierzy $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Sprawdź, że jedna z tych macierzy diagonalizuje się, a druga nie.
7. Przedstaw macierz $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ w postaci PDP^{-1}, gdzie D jest macierzą diagonalną. Zastosuj tę postać do obliczenia 6-tej potęgi macierzy M.
8. Znajdź macierz przekształcenia liniowego, dla którego $\binom{1}{0}$ jest wektorem własnym o wartości własnej $-\frac{1}{2}$, zaś $\binom{1}{1}$ jest wektorem własnym o wartości własnej 1.
9. Podaj przykład liniowego przekształcenia płaszczyzny, które zachowuje pole, zmienia orientację i ma wartość własną π.
10. Które z poniższych przekształceń diagonalizują się? Dla tych które diagonalizują się, znajdź wartości własne oraz bazę wektorów własnych. (Wsk.: Rozwiązuj to zadanie geometrycznie, bez odwoływania się do macierzy)
(a) R_θ, (b) S_ℓ (ℓ – pewna prosta przechodząca przez O), (c) J_r, (d) P_U.
11. Napisz warunek na liczby a, b, c, d gwarantujący, że macierz $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ ma dwie różne wartości własne.
12. Niech $A = PMP^{-1}$. Uzasadnij, że wielomiany charakterystyczne macierzy A oraz M są równe (wsk.: można to zrobić odwołując się do wzorów z ćwiczenia 1). Wywnioskuj, że jeśli macierz M ma dwie różne wartości własne λ, μ, to $\det(M) = \lambda\mu$, $\mathrm{tr}(M) = \lambda + \mu$. Czy założenie $\lambda \neq \mu$ jest istotne?
13. Załóżmy, że przekształcenie liniowe E spełnia warunek $E \circ E = E$. Jakie wartości własne może mieć to przekształcenie? Czy koniecznie musi być przekształceniem zerowym lub identycznościowym?
14. Uzasadnij, że jeśli $A = PDP^{-1}$ (gdzie D jest diagonalna), to kolumny P są wektorami własnymi A.
15. Załóżmy, że wektory $U, W \in \mathbf{R}^2$ są lnz, zaś macierz A spełnia warunki $AU = 5U + 4W$, $AW = 3U + 2W$. Udowodnij, że istnieje odwracalna macierz P, taka że $A = P\left(\begin{smallmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{smallmatrix}\right)P^{-1}$. Uogólnij.
16. Załóżmy, że przekształcenie liniowe płaszczyzny A ma dwie różne wartości własne λ, μ. Uzasadnij, że A zachowuje orientację wtedy i tylko wtedy gdy $\lambda\mu > 0$, zaś zmienia orientację wtedy i tylko wtedy gdy $\lambda\mu < 0$. Wywnioskuj, że przekształcenie S_ℓ (gdzie ℓ jest dowolną prostą przechodzącą przez O) zmienia orientację.

---

17. Załóżmy, że $\det(F - x \cdot Id)$ ma podwójny pierwiastek λ, mimo że F nie jest jednokładnością. Udowodnij, że istnieją liniowo niezależne wektory U, W, takie że $F(U) = \lambda U$, $F(W) = U + \lambda W$. Czy macierz F diagonalizuje się? Jeśli nie, to czy potrafisz wskazać dla niej jakiś substytut diagonalizacji? (Wsk. zad. 16)
18. Udowodnij prawdziwość zdania $(\forall A \in M_{2\times 2}(\mathbf{R}))((\exists \lambda, \mu \in \mathbf{R})(\exists P \in M_{2\times 2}(\mathbf{R}))(A = P\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{smallmatrix}\right)P^{-1}) \iff ((\exists \lambda \in \mathbf{R})(A = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)) \vee (\exists a, b \in \mathbf{R})(a \neq b \wedge \det(A - aI) = 0 \wedge \det(A - bI) = 0)))$.
19. Niech $M = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, zaś U niech będzie dowolnym wektorem. Zbadaj jak szybko rośnie długość wektora M^nU gdy n dąży do nieskończoności. (Uzasadnij, że istnieje stała C zależna (jak?) od wektora U, taka że granica $\lim_{n\to+\infty} \frac{\|M^nU\|}{C^n}$ jest liczbą dodatnią.)

Materiał na konwersatorium:

20. Ciąg Fibonacciego jest zadany rekurencyjnie wzorami $f_0 = 1$, $f_1 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ dla $n \geq 1$. Wyprowadź jawny wzór na n-ty wyraz tego ciągu według następującego planu:
    a) Niech $X_n = \binom{f_n}{f_{n+1}}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pokaż, że $X_0 = \binom{1}{1}$, $X_{n+1} = MX_n$, $X_n = M^n X_0$.
    b) Zdiagonalizuj macierz M: znajdź jej wartości własne i wektory własne i zapisz ją w postaci PDP^{-1}, gdzie D jest macierzą diagonalną.
    c) Znajdź wzór na M^n i wywnioskuj z niego wzór na f_n.
    d) Jak zmieni się odpowiedź, jeśli przyjąć $f_0 = 7$, $f_1 = 3$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ dla $n \geq 1$.

21. Zbadaj, dla jakich a, b macierz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$ ma dwie różne wartości własne. Zbadaj, dla jakich a, b potrafisz znaleźć jawny wzór na n-ty wyraz ciągu zadanego równaniem rekurencyjnym $f_{n+1} = af_n + bf_{n-1}$ ($n \geq 1$), znając f_0 i f_1. Spróbuj zmierzyć się z przypadkiem $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_{n+1} = 2f_n - f_{n-1}$.

Zadania ze starego kolokwium:

1. Znajdź jawny wzór na n-ty wyraz ciągu zadanego rekurencyjnie: $a_0 = 4$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = -3a_n + 10a_{n-1}$ dla $n \geq 1$.
2. Załóżmy, że wektory $A, B, C \in \mathbf{R}^2$ spełniają warunek $\|A+B+C\| = 9$. Czy wynika stąd, że przynajmniej jeden z wektorów A, B, C
    a) ma długość ≥ 3?
    b) ma długość ≤ 3?
3. Niech ℓ oznacza prostą o równaniu $x = 1$, zaś $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ niech będzie przekształceniem liniowym o następującej własności: jeśli $p \in \ell$, to $F(p) \in \ell$.
    a) Udowodnij, że $\binom{0}{1}$ jest wektorem własnym F.
    b) Udowodnij, że 1 jest wartością własną F.
    c) Udowodnij, że jeśli wartość własna F odpowiadająca wektorowi własnemu $\binom{0}{1}$ nie jest równa 1, to istnieje punkt $q \in \ell$ taki że $F(q) = q$.
4. Jaka jest największa możliwa długość wektora A, jeśli wiadomo, że $|\langle \binom{1}{1}, A \rangle| \leq 1$ i $|\langle \binom{1}{2}, A \rangle| \leq 1$? (Wsk: rysunek może pomóc.)
5. Niech $A = \begin{pmatrix} 100 & \frac{401}{200} \\ 50 & 1 \end{pmatrix}$. Udowodnij, że dla dowolnego $X \in \mathbf{R}^2$
$$\lim_{n \to +\infty} \det(A^n X, A^{n+1} X) = 0.$$