Algebra liniowa 1R, Lista 3

1. a) Sprawdź, że przekształcenie $\binom{x}{y} \to \binom{ax+by}{cx+dy}$ jest addytywne i jednorodne.
   b) Sprawdź, że dla dowolnych macierzy M, N, L i wektora U: $(MN)U = M(NU)$, $L(MN) = (LM)N$.
   c) Udowodnij bezpośrednim rachunkiem wzór $\det(MN) = \det M \det N$.
2. Oblicz MN oraz NM dla (a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
3. Znajdź macierze P_U oraz S_U gdy $U = \binom{-1}{3}$.
4. Narysuj w układzie współrzędnych obraz siatki $\{\binom{x}{y} : (x \in \mathbf{Z}) \vee (y \in \mathbf{Z})\}$ przez przekształcenie liniowe zadane macierzą: (a) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.
5. Policz M^{-1} dla następujących macierzy M: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

---

6. Znajdź wzór we współrzędnych opisujący przekształcenie:
   (a) $P_{\binom{1}{0}}$, (b) $T_{\binom{3}{4}} \circ P_{\binom{1}{0}}$, (c) $R_\pi \circ T_{\binom{1}{2}}$, (d) $R_{\pi/3}$.
7. Znajdź macierz liniowego przekształcenia płaszczyzny A wiedząc że (a) $A\binom{5}{0} = \binom{3}{1}$, $A\binom{0}{7} = \binom{-2}{3}$, (b) $A\binom{4}{1} = \binom{2}{3}$, $A\binom{1}{-1} = \binom{0}{1}$.
8. Czy prawdziwy jest wzór $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$? Udowodnij lub podaj kontrprzykład.
9. Znajdź przekształcenie liniowe $J\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, takie by dla dowolnych $U, V \in \mathbf{R}^2$ zachodził wzór $\det(U, V) = \langle U, J(V)\rangle$.
10. Znajdź wszystkie macierze M takie, że $M \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} M$.
11. Sprawdź, że pomnożenie dowolnej macierzy M przez macierz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ z lewej strony zamienia rzędy macierzy M, zaś z prawej strony – zamienia jej kolumny. Opisz słowami co dzieje się z macierzą M po pomnożeniu jej z prawej strony przez $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
12. Rozwiąż podane równania macierzowe posługując się macierzami odwrotnymi:

$$(a) \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (b) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

13. Niech S_x, S_y będą odbiciami względem osi układu, P_x, P_y rzutami prostokątnymi na osie, J_r jednokładnością o skali r (względem początku układu) zaś R_θ obrotem o kąt θ (wokół początku układu).
    (a) Napisz macierze powyższych przekształceń.
    (b) Posługując się macierzami uzasadnij, że $R_{\pi/2} \circ S_x \circ R_{-\pi/2} = S_y$, $J_r \circ J_s = J_{rs}$, $R_\theta \circ R_\phi = R_{\theta+\phi}$.
    (c) Posługując się macierzami rozpoznaj następujące przekształcenia złożone: $R_{\pi/2} \circ P_y \circ R_{-\pi/2}$, $S_x \circ S_y$, $S_x \circ P_x$, $P_x \circ S_x$, $P_x \circ P_y$.
14. Niech $U, W \in \mathbf{R}^2$ będą liniowo niezależne.
    a) Uzasadnij, że dowolny $X \in \mathbf{R}^2$ zapisuje się jednoznacznie w postaci kombinacji liniowej U, W.
    b) Uzasadnij, że jeśli F, G są przekształceniami liniowymi płaszczyzny, takimi że $F(U) = G(U)$ i $F(W) = G(W)$, to $F = G$.
    c) Uzasadnij, że dla dowolnych wektorów A, B istnieje (jedyne) przekształcenie liniowe płaszczyzny F, takie że $F(U) = A$, $F(W) = B$.
15. Udowodnij dla dowolnych macierzy odwracalnych wzory $\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)}$, $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$.

---

16. Napisz we współrzędnych wzór na S_ℓ, gdzie ℓ jest prostą $2x + 3y = 5$.
17. Niech A, B będą macierzami 2×2. Uzasadnij, że jeśli $AB = I$, to $BA = I$.
18. Udowodnij, że dla każdej macierzy odwracalnej A istnieje liczba $\epsilon > 0$, taka że jeśli wyrazy macierzy B różnią się od odpowiadających im miejscami wyrazów macierzy A o mniej niż ϵ, to macierz B też jest odwracalna.

19.** Niech $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ będzie przekształceniem różnowartościowym i na (surjektywnym), przy czym $F(0) = 0$. Załóżmy, że obrazem dowolnej prostej przez przekształcenie F jest pewna prosta. Pokaż, że F jest liniowe.