$(\mathbb{R}^2, d_c)$ $\quad$ $(\mathbb{R}^2, d_r)$

Pytamy się czy jest bijekcja $f: \underset{d_c}{\mathbb{R}^2} \to \underset{d_r}{\mathbb{R}^2}$

t. że $f(\underset{\in \mathcal{T}_c}{U}) \in \mathcal{T}_r$

$f^{-1}(\underset{\in \mathcal{T}_r}{V}) \in \mathcal{T}_c$

Nie wprost, mamy takie f

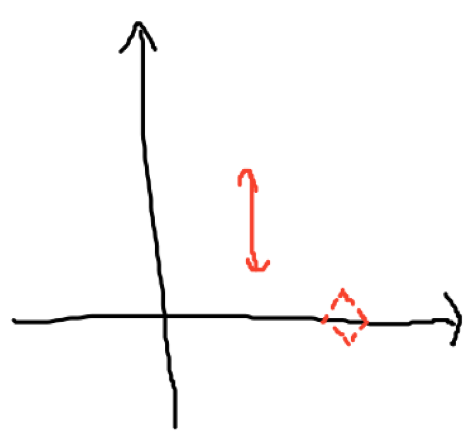
$(\mathbb{R}^2, d_c)$

$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

= rozłączne sumę zbiorów otwarto-domkniętych (półproste wychodzące z $(0,0)$, bez $(0,0)$)

Jest tych zbiorów $\mathfrak{c}$

• Nie ma punktu $x \in (\mathbb{R}^2, d_r)$ o tej własności, że $\mathbb{R}^2 \setminus \{x\}$ jest sumą rozłączną $\mathfrak{c}$ wielu zbiorów otwarto-domkniętych



• Jeżeli $(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ są p. top.
$k = 2, 3, \dots, \aleph_0, \mathfrak{c}$, niesk. wiele
$f: X \to Y$ homeomorfizm
Jeżeli x ma własność
(*) $X \setminus \{x\}$ jest sumą rozłączną k zbiorów otwarto-domkniętych,
to wówczas $Y \setminus \{f(x)\}$ ma wł. (*).

$\pi_i: X^d \to X$

$\forall U \in \mathcal{T}_X \quad f^{-1}(U) = X \times \dots \times X \times U \times \dots \times X$

$f: Y \to X^d$, $V = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_d \in \mathcal{T}$

$f^{-1}(V) = f^{-1}(U_1 \times \dots \times U_d) =$

$(f_1, \dots, f_d)^{-1}(U_1 \times \dots \times U_d) =$

$f_1^{-1}(U_1) \cap \dots \cap f_d^{-1}(U_d)$

Czyli $f_1, \dots, f_d$ ciągłe $\Rightarrow$ f ciągłe

Teraz załóżmy, że f jest ciągła

chcemy: f_1 jest ciągła

U - otwarty w X

$f_1^{-1}(U) = \underbrace{f^{-1}(U \times X \times \dots \times X)}_{\text{otwarty}}$