## Zbiór Cantora

$\mathcal{C} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i}$ , $c_i \in \{0,2\}$

Zauważmy, że $\forall x \in \mathcal{C}$ istnieje dokładnie jeden ciąg $(c_1, c_2, c_3, \dots)$ t. że $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i} = x$ t. że $c_i \in \{0,2\}$.

Stwierdzenie

$\mathcal{C}$ jest homeomorficzny z $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} \{0,1\} \\ d(0,1) = 1 \end{array} \right.$

D-d

Określamy homeomorfizm

$f: \mathcal{C} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$f\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i}\right) = (c_1', c_2', c_3', \dots)$ t. że $c_i' = \frac{c_i}{2}$

f jest bijekcją
f jest funkcją ciągłą $\Big\}$ to wystarczy ponieważ $\mathcal{C}$ jest przestrzenią zwartą

- w $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ $(a_n)$ zbiega do $a$ $\Leftrightarrow$

$\forall_i$ $a_n^i$ zbiega do $a_i$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} a_n = (a_n^1, a_n^2, a_n^3, \dots) \\ a = (a_1, a_2, a_3, \dots) \\ d_p(a,b) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d(a_i, b_i)}{2^i} \end{array} \right.$

$\left( \forall_\varepsilon \exists_N \forall_{n \geq N} \underbrace{d_p(a_n, a)}_{= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d(a_n^i, a_i)}{2^i}} < \varepsilon \right)$

Komentarz:
Ponieważ $a_n^i, a_i \in \{0,1\}$,
to dla każdego $i$ $a_n^i = a_i$,
dla $n > N_i$, dla pewnego $N_i$

$\Leftrightarrow$ $\forall_M \exists_K \forall_{k > K} \forall_{m \leq M}$

$a_k^m = a_m$.

- w $\mathcal{C}$ $\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_n^i}{3^i}}_{= x_n} \to \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i}}_{= x}$ $\Leftrightarrow$ $\forall_i$ $c_n^i$ zbiega do $c_i$ ∎

---

Stwierdzenie

Produkt skończenie wielu $\mathcal{C}$ jest homeomorficzny z $\mathcal{C}$, czyli $\forall_n$ $\mathcal{C}^n \overset{top}{=} \mathcal{C}$ ($\overset{top}{=}$ "homeomorficzne")

D-d

Wystarczy to pokazać dla $n=2$, dalej przez indukcję.

$\mathcal{C} \overset{top}{=} \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

Chcemy $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} \overset{top}{=} \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

określmy $g: \{0,1\}^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$g((a_1, a_2, a_3, \dots), (b_1, b_2, b_3, \dots)) = (a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots)$

To jest homeomorfizm ∎

Stwierdzenie

Odcinek $[0,1]$ jest ciągłym obrazem $\mathcal{C}$.

D-d

$f: \mathcal{C} \to [0,1]$

$f\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i}}_{\text{zapis trójkowy}}\right) = \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\frac{c_i}{2}}{2^i}}_{\text{zapis dwójkowy}}$ ∎

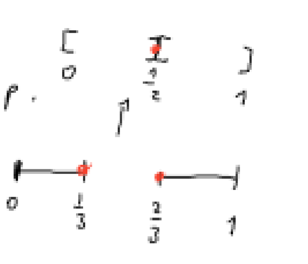
to jest funkcja ciągła na $[0,1]$

Zauważmy, że f nie jest 1-1 ponieważ np.

$(\underset{c_1}{0}, \underset{c_2}{2}, \underset{c_3}{2}, \underset{c_4}{2}, \dots) \overset{f}{\longmapsto} (0,1,1,\dots)$

$\neq \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad =$

$(2, 0, 0, \dots) \overset{f}{\longmapsto} (1,0,0,0,\dots)$




## Produkty

Stwierdzenie 1

Produkt dwóch przestrzeni $T_1$ jest przestrzenią $T_1$.

Stwierdzenie 2

Produkt dwóch przestrzeni $T_2$ jest przestrzenią $T_2$.

D-d

$(x,y) \neq (a,b)$

Weźmy $\underset{\text{otwarte}}{U_1 \ni x, \; V_1 \ni a}$ $\quad V_1 \cap U_1 = \emptyset$

$\underset{\text{otwarte}}{U_2 \ni y, \; V_2 \ni b}$ $\quad V_2 \cap U_2 = \emptyset$

Zauważmy, że $(x,y) \in U_1 \times U_2$, $(a,b) \in V_1 \times V_2$

$(U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2) = \emptyset$ ∎

Stwierdzenie 3

Produkt dwóch przestrzeni $T_3$ jest $T_3$

Na Liście 5

Jeżeli X jest $T_1$ to X jest $T_3$ $\Leftrightarrow$

(*) $\forall_{x \in X} \forall_{\underset{\text{otwarty}}{x \in U}} \exists_{\underset{\text{otwarte}}{x \in V}} \overline{V} \subseteq U$

D-d

X i Y mają (*) $\Rightarrow$ $X \times Y$ ma (*)

Weźmy $(x,y) \in X \times Y$, weźmy $\underset{\text{otwarty}}{(x,y) \in U}$, bzo $U = U_1 \times U_2$

weźmy $x \in V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq U_1$ oraz $y \in V_2 \subseteq \overline{V_2} \subseteq U_2$

Szukane V to jest $V_1 \times V_2$

$(x,y) \in V_1 \times V_2$ $\quad \overline{V_1 \times V_2} = \overline{V_1} \times \overline{V_2} \subseteq U_1 \times U_2$ ∎

Stwierdzenie 4

Produkt dwóch przestrzeni normalnych ($T_4$) niekoniecznie jest przestrzenią normalną

Przykład: Produkt dwóch strzałek.

Uwaga

Stwierdzenia 1, 2, 3 uogólniają się na skończenie wiele produkty przestrzeni (indukcja), a nawet na dowolne produkty.

Uzupełnienie: Własność $T_{3\frac{1}{2}}$ też jest zachowana na branie produktów.

Dowolne Iloczyny Kartezjańskie

$(X_s, \mathcal{T}_s)$, $s \in S$ (np. $S = \mathbb{R}$)

$\prod_{s \in S} X_s = \{ u : S \to \bigcup_{s \in S} X_s \;,\; \forall_{s \in S} \; u(s) \in X_s \}$

Topologia na $\prod_{s \in S} X_s$ jest określona przez bazę złożoną z kostek:

$\prod_{s \in S} V_s$, gdzie $V_s \in \mathcal{T}_s$ i $\{ s \in S : V_s \neq X_s \}$ jest skończony

Twierdzenie

Produkt dowolnej ilości przestrzeni zwartych jest przestrzenią zwartą.

(Patrz skrypt, "uzupełnienie")

Sprawdzimy to dla przypadku gdy mamy skończenie wiele bądź też przeliczalnie wiele przestrzeni zwartych metrycznych.

(patrz też skrypt, inny dowód, korzystający z definicji pokryciowej, dla przestrzeni topologicznych)

Twierdzenie 1

Produkt dwóch przestrzeni zwartych metrycznych jest zwarty.

D-d

X, Y - zwarte metr.

$(x_n, y_n)_n$ chcemy podciąg zbieżny

- $(x_n)_n$ wybierzmy podciąg zbieżny $(x_{n_k})_k$ do $x$
- Rozważmy $(x_{n_k}, y_{n_k})_k$

Wybierzmy podciąg ciągu $(y_{n_k})_k$, który jest zbieżny, $(y_{n_{k_l}})_l$ powiedzmy do $y$.

- Rozważmy $(x_{n_{k_l}}, y_{n_{k_l}}) \to (x,y)$ ∎

Twierdzenie 2

Produkt przeliczalnie wielu przestrzeni zwartych metrycznych jest zwarty

d-d

$X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ $\quad X_i$ - zwarta

weźmy ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ w X, czyli

$x_n = (x_n^1, x_n^2, x_n^3, \dots)$

Dla $A \subseteq \mathbb{N}$, $(x_n)_{n \in A}$ to jest podciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Zauważmy, że jeśli $A \subseteq B$ to $(x_n)_{n \in A}$ jest podciągiem $(x_n)_{n \in B}$.

1. Weźmy podciąg $(x_n)_{n \in A_1}$ ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ t. że $(x_n^1)_{n \in A_1}$ zbieżny do $y_1 \in X_1$ (korzystamy z tego, że $X_1$ - zwarta)

2. Weźmy podciąg $(x_n)_{n \in A_2}$ ciągu $(x_n)_{n \in A_1}$ (czyli $A_2 \subseteq A_1$) t. że $(x_n^2)_{n \in A_2}$ zbieżny do $y_2 \in X_2$

$\vdots$

Na k-tym kroku wybraliśmy $A_k \subseteq A_{k-1}$ t. że $(x_n^k)_{n \in A_k}$ jest zbieżny do $y_k \in X_k$

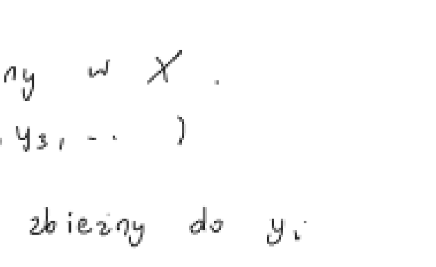
Weźmy $b_1 = 1$

$b_2 \in A_1$ $\qquad b_1 < b_2$

$b_3 \in A_2$

$\vdots$

$b_k \in A_{k-1}$ $\qquad b_{k-1} < b_k$




$\bigcap A_i = \emptyset$

Niech $B = \{b_1, b_2, \dots\}$

Zauważmy, że $(x_n)_{n \in B}$ jest zbieżny w X do $(y_1, y_2, y_3, \dots)$

Potrzebujemy pokazać, że $\forall_i$ $(x_n^i)_{n \in B}$ zbieżny do $y_i$

Zauważmy

$\forall_i \exists_{\underset{\text{skończony}}{F_i \subseteq \mathbb{N}}}$ t. że $B \setminus F_i \subseteq A_i$

Wiemy, że $(x_n^i)_{n \in A_i}$ zbiega do $y_i$

Zatem również $(x_n^i)_{n \in B}$ — // — ∎

---