Def: Przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$ jest <u>spójna</u> jeśli zachodzi jeden z następujących równoważnych warunków.

1) Nie ma $A, B \subseteq X$, $\neq \emptyset$, rozłącznych, $A \cup B = X$, domkniętych.
2) Nie ma $A, B \subseteq X$, $\neq \emptyset$ rozłącznych, $A \cup B = X$, otwartych.
3) Nie ma $A, B \subseteq X$, $\neq \emptyset$ rozłącznych, $A \cup B = X$, otwarto-domkniętych.
4) Nie ma $f: X \to \{0,1\}$ ciągłej
z topologią dyskretną

Def
Powiemy, że $S \subseteq (X, \mathcal{T})$ jest <u>spójny</u> jeśli $(S, \mathcal{T}_S)$ jest spójna.

Twierdzenie
Zbiór $S \subseteq (X, \mathcal{T})$ jest spójny wtedy i tylko wtedy gdy dla każdych $A, B \neq \emptyset$ takich, że $S = A \cup B$ mamy $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$ lub $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$.
domkn. w X — w X

D-d
¬ konkluzji <=> ¬ założeń

Przypomnijmy sobie, że dla $C \subseteq S$, $\overline{C}^X \cap S = \overline{C}^S$.
Załóżmy, że mamy $A, B \neq \emptyset$ takie, że $S = A \cup B$ i $\overline{A}^X \cap B = \emptyset$ i $A \cap \overline{B}^X = \emptyset$.
(równoważnie $\overline{A}^S \cap B = \emptyset$ i $A \cap \overline{B}^S = \emptyset$)
$\overline{A}^S \cap B = \emptyset$ i $S = A \cup B$ => B otwarty
$A \cap \overline{B}^S = \emptyset$ i $S = A \cup B$ => A otwarty
Równoważnie S nie jest spójny.
($\exists A, B \neq \emptyset$, $A \cup B = S$, A, B – domknięte, A, B – rozłączne) => $A \cap B = \emptyset$, $\overline{A}^S \cap B = \emptyset$ i $\overline{B}^S \cap A = \emptyset$
z domkniętości A i B ∎

Przykłady
$X = [0,1] \cup [2,3]$ nie jest spójny
$\mathcal{C}$ – zbiór Cantora — // —
$A = \mathcal{C} \cap [0, 1/3]$
$B = \mathcal{C} \cap [\frac{2}{3}, 1]$
0 $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ 1

$GL_{n\times n}(\mathbb{R}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$ $\subseteq (\mathbb{R}^{n\times n}, d_e)$
macierze odwracalne nie jest przestrzenią spójną
$A = GL^+_{n\times n}(\mathbb{R}) = \{A \in GL_{n\times n}(\mathbb{R}) : \det(A) > 0\}$
$B = GL^-_{n\times n}(\mathbb{R}) =$ $\det(A) < 0$

A, B są otwarto-domknięte
ponieważ $\det: M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą
$A = \det^{-1}(0, \infty)$ $B = \det^{-1}(-\infty, 0)$.

Przykład
Odcinek jest przestrzenią spójną.
D-d
Pokażemy, że $([0,1], d_e)$ jest spójny.
Nie wprost, załóżmy, że $[0,1]$ nie jest spójny:
$A \cup B = [0,1]$
$\neq \emptyset$ otwarte
Bzo $0 \in A$. Rozważmy $b = \inf B$
Ponieważ B jest otwarty, $b \notin B$.
Zatem $b \in A$.
Zatem z otwartości A, istnieje $\varepsilon > 0$ t. że $(b-\varepsilon, b+\varepsilon) \subseteq A$. Czyli $(b, b+\varepsilon) \subseteq A$. To daje sprzeczność z tym, że $b = \inf B$. ∎

Twierdzenie
$f: X \to Y$ ciągła
$S \subseteq X$ spójny. Wówczas $f(S)$ jest spójny.
D-d
Nie wprost, $f(S)$ nie jest spójny.
$f(S) = A \cup B$
otwarte, $\neq \emptyset$, rozłączne

$f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = S$
otwarte, $\neq \emptyset$, rozłączne ∎

Twierdzenie
$\mathcal{S}$ – rodzina zbiorów spójnych. Załóżmy, że istnieje $S \in \mathcal{S}$ t. że $\forall T \in \mathcal{S}$ $S \cap T \neq \emptyset$.
Wówczas $\bigcup \mathcal{S}$ jest zbiorem spójnym.

W szczególności, jeśli $\exists p$ t. że $\forall T \in \mathcal{S}$ $p \in T$, zachodzi konkluzja.

Dowód
Nie wprost $\bigcup \mathcal{S} = A \cup B$ otwarte, $\neq \emptyset$ rozłączne

$S = (A \cap S) \cup (B \cap S)$
otwarte — otwarte

Ze spójności S, $A \cap S = \emptyset$ lub $B \cap S = \emptyset$.
Bzo $A \cap S = \emptyset$. Czyli $B \supseteq S$.
Rozważmy $T \in \mathcal{S}$. Wiemy, że $T \cap S \neq \emptyset$
Zatem $B \cap T \neq \emptyset$
Ponieważ $(A \cap T) \cup \underbrace{(B \cap T)}_{\neq \emptyset}$ – otw. rozł. i T – spójny,
$A \cap T = \emptyset$. Czyli $B \supseteq T$.
Pokazaliśmy $\forall T \in \mathcal{S}$ $B \supseteq T$. Czyli $B \supseteq \bigcup \mathcal{S}$.
Zatem $A = \emptyset$. To daje sprzeczność. ∎

Twierdzenie
Produkt dowolnej liczby przestrzeni spójnych jest spójny.
(za chwilę)

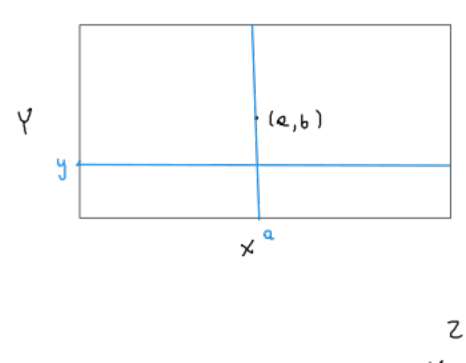
Twierdzenie
$(X, \mathcal{T})$, $D \subseteq X$ gęsty, D jest spójny.
Wówczas X jest spójny.
<u>D-d</u>
Nie wprost A, B – otwarto-domk., $A \cup B = X$, $\neq \emptyset$, rozłączne

$D = (A \cap D) \cup (B \cap D)$
Ze spójności D, jeden ze zbiorów jest $\emptyset$,
bzo $A \cap D = \emptyset$, czyli $B \supseteq D$.
domknięty

Zatem $B \supseteq \overline{D} = X$. Stąd $B = X$ i $A = \emptyset$.
Sprzeczność. ∎

<u>Wniosek</u>
$(X, \mathcal{T})$, $S \subseteq T \subseteq \overline{S}$
spójny
Wówczas T jest spójny.
W szczególności domknięcie zbioru spójnego jest spójne.

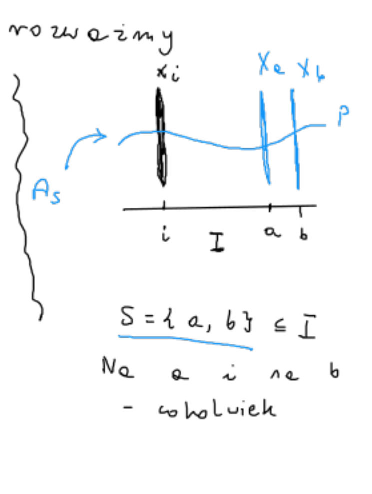
Dowód tego że produkt przestrzeni spójnych jest spójny
- Mamy X i Y – spójne. Rozważmy $X \times Y$



$A_y = (\{a\} \times Y) \cup (X \times \{y\})$
Rozważmy
$\mathcal{S} = \{A_y : y \in Y\}$
$\forall y$ $\{a\} \times Y \subseteq A_y$
Zatem jak ustalę y_0, to
$\forall y$ $A_y \cap A_{y_0} \neq \emptyset$

Zatem $\bigcup \mathcal{S}$ – spójny.
Zauważmy $\bigcup \mathcal{S} = X \times Y$.

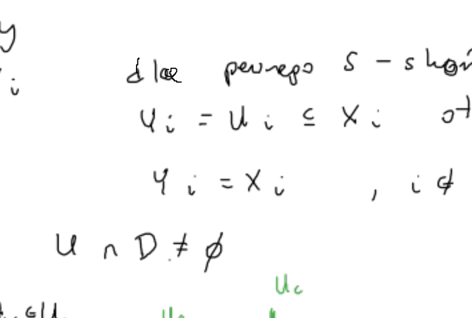
- Przez indukcję dostajemy, że produkt skończenie wielu przestrzeni spójnych jest spójny.
- $X = \prod_{i \in I} X_i$ X_i – spójne
Ustalmy $p = (p_i)_{i \in I}$. ($p \in X$)
Dla dowolnego skończonego $S \subseteq I$ rozważmy
$A_S = \{(a_i)_{i\in I} : \forall i \notin S \ a_i = p_i\}$
  - A_S jest homeomorficzny z $\prod_{i \in S} X_i$ – spójny
  sk.
  - $p \in A_S$ $\forall S$



$S = \{a, b\} \subseteq I$
Na a i na b – cokolwiek

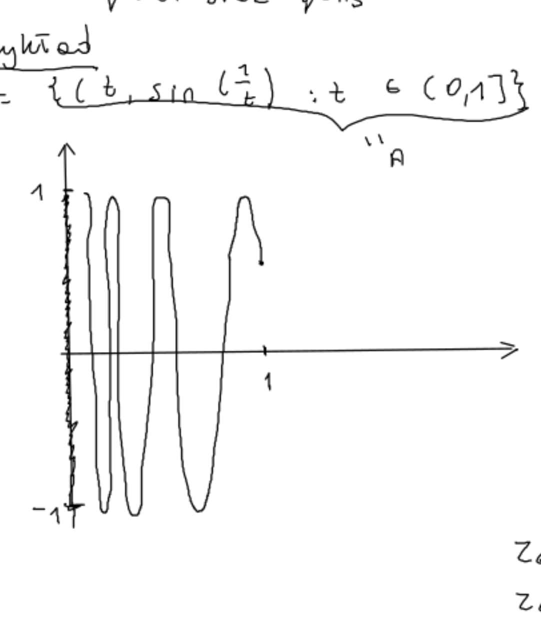
=> Zatem $D = \bigcup_{S\text{-skończony}} A_S$ – jest spójny
Pokażmy, że D jest gęsty w X, co zakończy dowód.
Weźmy $U \subseteq X$ otwarty
Bzo $U = \prod_{i \in I} Y_i$ dla pewnego S – skończonego
$Y_i = U_i \subseteq X_i$ otwarty $i \in S$
$Y_i = X_i$, $i \notin S$

Mamy pokazać, że $U \cap D \neq \emptyset$
ustalmy $t_a \in U_a$, $t_b \in U_b$, $t_c \in U_c$
Dla $q = (q_i)_{i \in I}$
$q_i = p_i$, $i \neq a, b, c$
$q_a = t_a$, $q_b = t_b$, $q_c = t_c$
mamy $q \in U$ oraz $q \in A_S$



Rozważmy A_S
$S = \{a, b, c\}$
$A_S \cap U \neq \emptyset$
$\Rightarrow D \cap U \neq \emptyset$

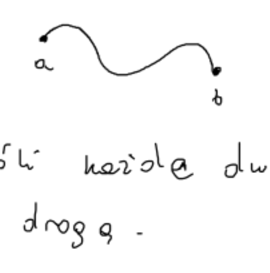
<u>Przykład</u>
$T = \underbrace{\{(t, \sin(\tfrac{1}{t})) : t \in (0,1]\}}_{A} \cup (\{0\} \times [-1, 1])$
spójny



A jest spójny ponieważ jest obrazem $\underbrace{(0,1]}_{\text{spójny}}$ przez funkcję ciągłą
$t \mapsto (t, \sin(\tfrac{1}{t}))$

Zauważmy, że $T = \overline{A}$ (w $(\mathbb{R}^2, d_e)$)
Zatem T jest spójny.

<u>Def</u> <u>Drogą</u> w $(X, \mathcal{T})$ łączącą $a, b \in X$ nazywamy $f: [0,1] \to X$ ciągłą t. że $f(0) = a$, $f(1) = b$.



<u>Def</u> Przestrzeń jest <u>łukowo spójna</u> jeśli każde dwa punkty można połączyć drogą.

<u>Uwaga</u> Łukowo spójne → spójne (Uwaga 4.2.2)

$\not\leftarrow$

Przestrzeń T opisana powyżej (Prz. 4.2.3) jest spójna (pokazaliśmy) i nie jest łukowo spójna.

<u>Def</u> Składową spójności $(X, \mathcal{T})$ nazywamy zbiór spójny $S \subseteq X$ t. że każdy zbiór w X zawierający S w istotny sposób nie jest spójny.

Można pokazać, że składowe spójności tworzą partycję $(X, \mathcal{T})$.

<u>Przykłady</u>
1) okrąg i odcinek nie są homeomorficzne

2) $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^2$ nie są homeo