Def Przestrzeń metryczną (X, d) nazwiemy przestrzenią zupełną jeśli każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny.

<u>Twierdzenie</u>

(X, d) jest zupełna $\Leftrightarrow$ jest spełniony warunek Cantora: każdy zstępujący ciąg niepustych zbiorów domkniętych o średnicach dążących do zera ma niepusty przekrój.

<u>Wniosek</u>

Każda przestrzeń metryczna zwarta jest przestrzenią zupełną.

D-d

Sprawdzamy warunek Cantora

$F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \dots$ $\quad \operatorname{diam}(F_n) \to 0$

$F_n \neq \emptyset$

$\bigcap_n F_n = ?$

Weźmy $a_n \in F_n$

Wówczas (a_n) ze zwartości ma podciąg (a_{n_k}) zbieżny do a.

Zauważmy, że $a \in \bigcap_n F_n$.

Czyli $\bigcap_n F_n \neq \emptyset$

<u>Def</u>: $(X, \mathcal{T})$ - prz. top., $A \subseteq X$

A jest zbiorem <u>brzegowym</u> jeśli $\operatorname{int} A = \emptyset$

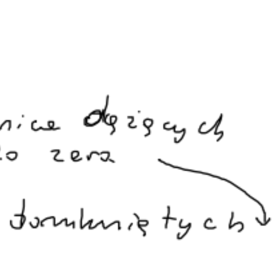
<u>Uwaga</u>

A jest brzegowy $\Leftrightarrow$ $X \setminus A$ jest gęsty

<u>Def</u>

$A \subseteq X$ jest <u>nigdziegęsty</u> $\Leftrightarrow$

$\underset{\substack{\text{otwarty} \\ \neq \emptyset}}{\forall U \subseteq X} \ \underset{\substack{\text{otwarty} \\ \neq \emptyset}}{\exists V \subseteq U} \quad V \cap A = \emptyset$



Przykłady

$(\mathbb{R}, d_e)$

- $A = \mathbb{N}$ jest nigdziegęsty
- Zbiór Cantora jest nigdziegęsty
- Zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ nie jest nigdziegęsty

Uwaga

- Jeżeli zbiór jest nigdziegęsty to jest brzegowy.
- Na odwrót nie jest to prawda!

np. $\mathbb{Q}$ jest brzegowy, ale nie jest nigdziegęsty

- Domknięcie zbioru nigdziegęstego jest zbiorem nigdziegęstym

⌐ A - nigdziegęsty

$\bar{A}$ $\quad \underset{\neq \emptyset}{U \text{ - otw.}}$ $\quad$ Weźmy $\underset{\substack{\text{otw} \\ \neq \emptyset}}{V \subseteq U}$ $\quad V \cap A = \emptyset$

$X \setminus V$ - domknięty

$A \subseteq X \setminus V \Rightarrow \bar{A} \subseteq X \setminus V$

czyli $\bar{A} \cap V = \emptyset$ ⌙

- Załóżmy, że A jest domknięty.

Wówczas A jest brzegowy $\Leftrightarrow$ A jest nigdziegęsty.

⌐ $\Leftarrow$ Ze wcześniejszej uwagi (nie korzystamy z założenia domkniętości A)

$\Rightarrow$ Weźmy $\underset{\substack{\text{otw.} \\ \neq \emptyset}}{U \subseteq X}$

Ponieważ A jest brzegowy $\underbrace{U \cap \underbrace{(X \setminus A)}_{\text{otwarty}}}_{\text{otwarty}} \neq \emptyset$

Niech $V = U \cap (X \setminus A)$

Wówczas $V \cap A = \emptyset$. ⌙

<u>Def</u>

Zbiór B jest <u>pierwszej kategorii</u> jeśli jest przeliczalną sumą zbiorów nigdziegęstych.

<u>Tw</u> (Baire'a)

W przestrzeni metrycznej zupełnej (X, d), przeliczalna suma domkniętych zbiorów brzegowych jest zbiorem brzegowym.

<u>Uwaga</u>

Założenie o domkniętości jest istotne!

$(\mathbb{R}, d_e)$ $\quad \underbrace{\mathbb{Q}} \cup \underbrace{(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})} = \mathbb{R}$

zbiory brzegowe $\quad$ nie jest brzegowy

Równoważne sformułowania tw Baire'a

(X, d) - zupełna

(1) przeliczalna suma zbiorów domkniętych brzegowych jest zbiorem brzegowym (oryginalne sformułowanie)

(2) przeliczalna suma zbiorów nigdziegęstych jest zbiorem brzegowym

(2') zbiór pierwszej kategorii jest zbiorem brzegowym

(3) (dualne do (1))

przekrój przeliczalnie wielu zbiorów otwartych gęstych jest zbiorem gęstym.

⌐ F domknięty brzegowy $\Leftrightarrow$ $G = X \setminus F$ jest otwarty gęsty

F jest brzegowy $\Leftrightarrow$ $G = X \setminus F$ jest gęsty ⌙

(1) $\Rightarrow$ (2)

$\bigcup_n A_n$ $\quad A_n$ - nigdziegęsty

Ze wcześniejszych uwag, $\overline{A_n}$ jest nigdziegęsty i domknięty, zatem $\overline{A_n}$ jest domknięty i brzegowy.

Zauważmy, że $\bigcup_n A_n \subseteq \underbrace{\bigcup_n \overline{A_n}}$

z (1) brzegowy

D-d tw Baire'a

$F_1, F_2, F_3, \dots$ - zbiory domknięte brzegowe

Weźmy U - otwarty, $\neq \emptyset$

Chcemy: $U \setminus \bigcup_n F_n \neq \emptyset$.

<u>Krok 1</u> Weźmy $B(a_1, r_1) \subseteq U$

$B(a_1, r_1) \cap F_1 = \emptyset$

<u>Krok n</u>

Skonstruowaliśmy w poprzednich krokach

$B(a_1, r_1) \supseteq B(a_2, r_2) \supseteq \dots \supseteq B(a_{n-1}, r_{n-1})$

$\overline{B(a_i, r_i)} \cap F_i = \emptyset \qquad i = 1, \dots, n-1$

$r_i \leq \frac{1}{i}$

W kroku n weźmy $\quad B(a_n, s) \subseteq B(a_{n-1}, r_{n-1})$

$B(a_n, s) \cap F_n = \emptyset$

(korzystamy z tego, że F_n jest domknięty brzegowy)

Weźmy $r_n = \min\{\frac{1}{n+1}, \frac{s}{2}\}$.

Wówczas $\overline{B(a_n, r_n)} \subseteq \overline{B(a_n, \frac{s}{2})} \subseteq B(a_n, s)$.

Zatem $\overline{B(a_n, r_n)} \cap F_n = \emptyset$.

Zauważmy, że $B_n = \overline{B(a_n, r_n)}$ jest zstępującym ciągiem zbiorów domkniętych $\neq \emptyset$ t.że $\operatorname{diam} B_n \xrightarrow[n]{} 0$. Z warunku Cantora, $\bigcap_n B_n \neq \emptyset$

Weźmy $\{b\} = \bigcap_n B_n$.

Zauważmy $b \in U$. Również $\forall_n \ b \notin F_n$.

Czyli $U \setminus \bigcup_n F_n \neq \emptyset$ $\quad (b \in U \setminus \bigcup_n F_n)$,

co daje brzegowość $\bigcup_n F_n$. ∎

Przykład (zastosowanie Tw. Baire'a)

$(C([0,1], \mathbb{R}), d_{sup})$

<u>Pokażemy</u>

Istnieją funkcje ciągłe które nie są monotoniczne na dowolnym przedziale.

Powiemy, że $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ jest monotoniczna na $[a,b] \subseteq [0,1]$, $a < b$, jeśli f jest

- rosnąca na $[a,b]$ $\quad (\forall a \leq x \leq y \leq b \quad f(x) \leq f(y))$

lub

- malejąca na $[a,b]$ $\quad (\forall a \leq x \leq y \leq b \quad f(x) \geq f(y))$.

Czyli: $\overset{\text{pokażemy, że istnieje}}{\underset{}{\text{znajdziemy}}}$ $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ t. że $\forall [a,b] \subseteq [0,1]$, $a < b$, f nie jest rosnąca na $[a,b]$

i f nie jest malejąca na $[a,b]$

Bez ciągłości, łatwo, np $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

Ponumerujmy odcinki o końcach wymiernych:

$I_n = [p_n, q_n]$

$A_n = \{f \in C([0,1], \mathbb{R}) : f \text{ jest rosnąca na } I_n\}$

$B_n = \{f \in C([0,1], \mathbb{R}) : f \text{ malejąca na } I_n\}$

Cel: $\forall_n$ A_n i B_n są zbiorami domkniętymi brzegowymi.

Jak to pokażemy, to z tw Baire'a dostaniemy, że $\underbrace{\bigcup_n A_n \cup \bigcup_n B_n}_{C}$ jest zbiorem brzegowym

To oznacza, że jeśli $f \in C([0,1], \mathbb{R}) \setminus C$, to f ma żądane własności (tzn nie jest monotoniczna na dowolnym przedziale).

Ustalmy n. Pokażemy, że A_n jest domknięty, brzegowy.

- domkniętość $\quad$ Weźmy $f_k \in A_n$.

$\lim_k f_k = f$ $\quad C([0,1], \mathbb{R})$ $\qquad I_n = [p_n, q_n]$

Niech $p_n \leq x \leq y \leq q_n$ $\quad$ Chcemy $f(x) \leq f(y)$.

Ale mamy $\forall_k \quad f_k(x) \leq f_k(y)$

Mamy $f_k \xrightarrow[k]{} f$, więc w szczególności

$f_k(x) \to f(x)$

$f_k(y) \to f(y)$. $\quad$ Stąd $f(x) \leq f(y)$.

- brzegowość A_n $\quad (\Leftrightarrow C([0,1], \mathbb{R}) \setminus A_n$ gęsty)

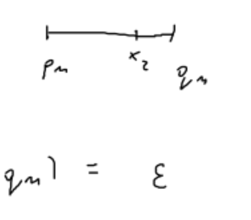
Weźmy $f \in A_n$ oraz $\varepsilon > 0$. Rozważmy

$\overline{B}(f, \varepsilon) = \{h : \forall x \in [0,1] \ |f(x) - h(x)| \leq \varepsilon\}$

Znajdziemy $h \in \overline{B}(f, \varepsilon) \setminus A_n$

Ustalmy $p_n < x_2 < q_n$ t. że

$f(q_n) - \varepsilon < f(x_2) \leq f(q_n)$



Niech $g \in C([0,1], \mathbb{R})$ $\qquad g(q_n) = \varepsilon$

$g(x_2) = 0$

$\forall x \in [0,1] \ |g(x)| \leq \varepsilon$ $\quad \|g\|_{d_{sup}} \leq \varepsilon$

Weźmy $h = f - g$

Zauważmy, że $h \in \overline{B}(f, \varepsilon)$.

Zauważmy też: $x_2 < q_n$

oraz

$h(x_2) = f(x_2) > f(q_n) - \varepsilon = h(q_n)$ $\qquad f(q_n) - g(q_n)$

Czyli $h \notin A_n$ ∎