Wiktor Pilarczyk 308533

Zad 8

$u_{tt} = u_{xx}$ oraz dla $\{(x,t) : x>0, t>0\}$ zachodzi

$$* \begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

Dodatkowo wiemy, że $u(x,t) = \varphi(x+t) + \psi(x+t)$ gdzie $\varphi, \psi \in C^2(\mathbb{R})$

Więc z $*$ otrzymujemy $t>0$

$$\begin{cases} 1^\circ & \varphi(t) + \psi(-t) = 0 \\ 2^\circ & \varphi(t) + \psi(t) = f(t) \\ 3^\circ & \varphi'(t) - \psi'(t) = g(t) \Rightarrow \varphi(t) - \psi(t) = \int_0^x g(s)\,ds + c \end{cases}$$

Korzystając z $(2^\circ + 3^\circ)/2$

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\left(f(t) + \int_0^t g(s)\,ds + c\right)$$

podstawiając do 2°

$$\psi(t) = \frac{1}{2}\left(f(t) - \int_0^t g(s)\,ds - c\right)$$

czyli mamy określone $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ dla $t>0$

Ale ψ może przyjmować argumenty ujemne więc korzystając z 1° dla $t>0$

$$\psi(-t) = -\varphi(t)$$

Otrzymujemy

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(f(t) - \int_0^t g(s)\,ds - c\right) & t>0 \\ -\frac{1}{2}\left(f(-t) + \int_0^{-t} g(s) + c\right) & t \leq 0 \end{cases}$$

Wiktor Pikarczyk 308533

Zad 8 c.d

Teraz podstawiając

$$u(x,t) = \varphi(x+t) + \psi(x-t) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\left(f(x+t) + \int_0^{x+t} g(s)\,ds + c + f(x-t) - \int_0^{x-t} g(s)\,ds - c\right) & \begin{matrix} x \geq t \\ t > 0 \end{matrix} \\ \frac{1}{2}\left(f(x+t) + \int_0^{x+t} g(s)\,ds + c - f(t-x) - \int_0^{|x-t|} g(s)\,ds - c\right) & \begin{matrix} t > 0 \\ t > x > 0 \end{matrix} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\left(f(x+t) + \int_{x-t}^{x+t} g(s)\,ds + f(x-t)\right) & \begin{matrix} t > 0 \\ x \geq t \end{matrix} \\ \frac{1}{2}\left(f(x+t) + \int_{|x-t|}^{x+t} g(s)\,ds - f(t-x)\right) & \begin{matrix} t > 0 \\ t > x > 0 \end{matrix} \end{cases}$$

Teraz podstawiając

$$f(x) = xe^{(-x^2)} \qquad g(x) = 0$$

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left((x+t)e^{-(x+t)^2} + (x-t)e^{(x-t)^2}\right. \\ \frac{1}{2}\left((x+t)e^{-(x+t)^2} + |x-t|e^{-(x-t)^2}\right. \end{cases} =$$

$$= \frac{1}{2}\left((x+t)e^{-(x+t)^2} + (x-t)e^{-(x-t)^2}\right)$$