Równanie przewodnictwa cieplnego

Zagadnienie początkowe w $\mathbb{R}^n$

wyprowadzenie równania $u_t = \Delta u$, ◇, str. 31-32

zag. początkowe (Cauchy'ego)

$$(*) \begin{cases} u_t = \Delta u & \mathbb{R}^n \times \{t>0\} \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

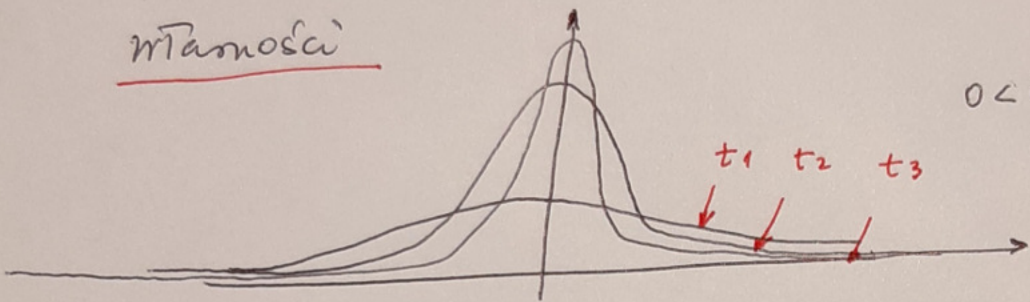
Jądro Gaussa - Weierstrassa - specjalne rozw.

$u_t = \Delta u$

$$p_t(x) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/4t}$$

własności

$0 < t_1 < t_2 < t_3$



$\lim\limits_{|x|\to\infty} p_t(x) = 0$,

$\lim\limits_{t\searrow 0} p_t(x) = 0$ dla $x \neq 0$, $\lim\limits_{t\searrow} p_t(0) = \infty$

$\int_{\mathbb{R}^n} p_t(x)\,dx = 1$ ponieważ $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$,

zatem $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} dz = \pi^{n/2}$; przez zamianę

zmiennych $x \mapsto 2x\sqrt{t}$ widać, że całka $\int_{\mathbb{R}^n} p_t$

nie zależy od $t>0$.

Definiujemy <u>splot</u> funkcji (<u>"convolution"</u>)

$u = P_t * \varphi$ wzorem

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} P_t(x-y)\varphi(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} P_t(y)\varphi(x-y)\,dy$$

<u>Własności u</u> por. ◇, str. 39–41

- $0 \not\equiv \varphi \geq 0 \implies \forall t>0 \quad u(x,t)>0$

  pozorny paradoks: $u>0$ natychmiast $(\forall t>0)$
  nawet jeśli $\varphi>0$ tylko w ograniczonym obszarze

- φ ograniczona $\implies u(\cdot,t)\in C^\infty \quad \forall t>0$

- $\forall y,t \qquad \inf_x \varphi(x) \leq u(y,t) \leq \sup_x \varphi(x)$

- φ ciągła i ograniczona $\implies \lim_{t\downarrow 0} u(x,t) = \varphi(x)$

- u spełnia równanie ciepła $u_t = \Delta u$,

  ponieważ: $\frac{\partial}{\partial t} P_t = \Delta P_t$

W dowodach wykorzystujemy

$$u(x,t) = (4\pi t)^{-n/2}\int \varphi(y)\, e^{-|x-y|^2/4t}\,dy$$

$$= \pi^{-n/2}\int \varphi(x+2\sqrt{t}\,z)\, e^{-|z|^2}\,dz$$

$$|u(x,t)| \leq \sup|\varphi|\ \pi^{-n/2}\int e^{-|z|^2}dz = \sup|\varphi|$$

niemal jednostajna zbieżność całki z jądrem G–W

$|x| \le a \quad , \quad t \le T$

$$\left| \int_{|y|>R} e^{-|x-y|^2/4t} \varphi(y)\,dy \right| \le \sup|\varphi| \cdot \int_{|y|>R} e^{-|x-y|^2/4t}\,dy$$

$$|x-y| \ge |y| - |x| \ge |y| - a$$

dla $R > 2a \quad |x-y| > \frac{1}{2}|y|$

$$\dots \le \int_{|y|>R} e^{-|y|^2/16T}\,dy$$

$$\le \sigma_n \int_R^\infty e^{-r^2/16T} r^{n-1}\,dr \quad \text{małe,}$$

niezależnie od $|x| \le a$ i $\alpha t \le T$.

Podobnie zachodzi gdy założyć, że $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^2 < \infty$
(używając nierówności Cauchy'ego tu)

Dzięki temu (zbieżność niemal jednostajna)
można różniczkować pod znakiem całki.
Zatem spełnione jest równanie $u_t = \Delta u$,
bo $\frac{\partial}{\partial t} p_t = \Delta p_t$

Zbieżność dla $t \downarrow 0$

$$u(x,t) - \varphi(x) = \pi^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\varphi(x + 2\sqrt{t}z) - \varphi(x)\right] e^{-|z|^2}\,dz$$

$$= \int_{|z|>R} + \int_{|z|\le R} \le 2\sup|\varphi|\, \pi^{-n/2} \int_{|z|>R} e^{-|z|^2}\,dz$$

$$+ \pi^{-n/2}\, \varepsilon \int e^{-|z|^2}\,dz \quad \text{gdy } |\varphi(x+2\sqrt{t}z) - \varphi(x)| \le \varepsilon$$

co zachodzi dla $0 < t \le t(\varepsilon)$ z ciągłości w x.
Dobieramy $R = R(\varepsilon)$.

Ciągła zależność od warunków początkowych

Jeżeli φ_1, φ_2 spełniają $\sup |\varphi_1 - \varphi_2| \leq \varepsilon$,
to i u_1, u_2 spełniają $\sup_x |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leq \varepsilon$
dla każdego $t > 0$.

Uwaga: wprawdzie dla ograniczonej φ u jest (nie tylko C^∞ ale i) analityczna jako funkcja x, $\forall_{t>0}$
ale nie jest prawdą, że φ - analityczna $\Rightarrow$
u analityczna w $\mathbb{R}^n \times \{t \geq 0\}$

Przykład Sofii Kowalewskiej — ◇, str. 25

$n=1$ $\quad u_t = u_{xx}$, $\quad u(x,0) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$
$|x|<1$

gdyby $\quad u(x,t) = \sum u_{mk} x^m t^k$, to

$$u_{2m+1,k} \equiv 0, \quad u_{2m,k} = \frac{(2m+2k)!}{(2m)!\ k!} (-1)^{m+1}$$

a ten szereg jest rozbieżny w każdym punkcie $(0,t)$, $t>0$.

Informacja
Zachodzą następujące twierdzenia o jednoznaczności:

tw. Tichonowa

rozwiązania $(*)$ dane przez całkę Gaussa - Weierstrassa są jednoznaczne w klasie funkcji
$$\{v : \mathbb{R}^n \times (0,T] \to \mathbb{R} : \quad |v(x,t)| \leq A e^{a|x|^2}\}$$
dla pewnych $a, A > 0$.

łatwo zauważyć, że gdy $|\varphi(x)| \leq A e^{a|x|^2}$, to całka G-W istnieje dla $t < \frac{a}{4}$.

Tw. Widdera

Nieujemne rozwiązanie r. ciepła $u(x,t) \geq 0$ zawsze jest postaci całki G–W z pewnym $\varphi \geq 0$.

Uwaga

Istnieje rozw. $u(x,t) \not\equiv 0$ zag. $(*)$ z $\varphi \equiv 0$.
Nie jest ono przedstawione całką G–W: nie spełnia oszacowania typu $|u(x,t)| \leq A e^{a|x|^2}$.
Lista 6 zad. 6.

Zagadnienia mieszane – metoda Fouriera

$$(**) \begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

widzieliśmy poprzednio, że warto poszukać rozwiązań w postaci $T(t)\,w(x)$.

Dochodzimy wtedy do $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-k^2 t} \sin kx$,
gdzie $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$ jest rozwinięciem w szereg Fouriera.

Ogólniej:

$$(***) \begin{cases} u_t = \Delta u & \Omega \times (0,T), \\ u(x,t) = 0 & \forall\, x \in \partial\Omega \\ u(x,0) = \varphi(x) & \forall\, x \in \Omega \end{cases}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ obszar ograniczony

szukamy rozwiązań w postaci $T(t)\,w(x)$ i wtedy

$$\frac{\Delta w}{w} = \frac{\dot{T}}{T} = \text{const}$$

$$\begin{matrix} ** \\ ** \end{matrix} \begin{cases} \Delta w + \lambda w = 0 \\ w|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

$u(x,t) = \sum a_k e^{-\lambda_k t} w_k(x)$
jeżeli $\varphi(x) = \sum a_k w_k(x)$.

(** **) to zagadnienie na wartości własne dla laplasjanu, z warunkami Dirichleta ($w=0$ na brzegu obszaru).

Tylko dla niektórych obszarów można wyznaczyć w jawny sposób w_k; np. odcinek, prostopadłościan, koło na płaszczyźnie ale wiele wiadomo o tym, że istnieje ciąg $\lambda_k \nearrow \infty$ i jak szybko (asymptotycznie) zachowuje się ciąg wartości własnych.

Np. ◊, str. 18-20

Dla kostki $\prod_{j=1}^{n}(0, a_j) \subset \mathbb{R}^n$ funkcjami w_k

są $\prod_{j=1}^{n} \sin \frac{k_j \pi}{a_j} x$, $(k_1, \dots, k_n) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^n$,

$$\lambda_k = \sum_{j=1}^{n} \pi^2 \left(\frac{k_j}{a_j}\right)^2.$$

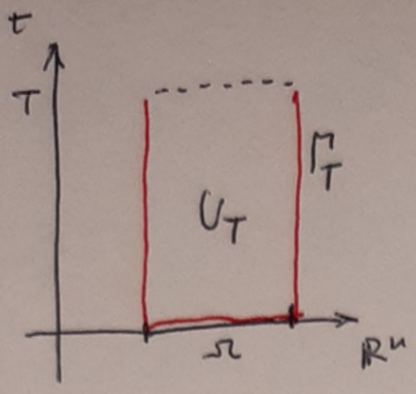
Funkcje $\{w_k\}$ tworzą (i tu, i w przypadku gładkiego obszaru ograniczonego) układ zupełny, tzn. φ można rozwinąć na szereg postaci $\sum_{k=1}^{\infty} a_k w_k$.

Zasada maksimum dla (***) ◊, str. 33-35

Oznaczmy $U_T = \Omega \times (0,T)$ – cylinder nad Ω,

$\Gamma_T = \{(x,t) \in \overline{U_T} : x \in \partial\Omega$ lub $t=0$ i $x \in \overline{\Omega}\}$

brzeg paraboliczny U_T.



$C^{2,1}(U_T)$ = zbiór funkcji

$f=f(x,t)$ na U takich, że pochodne

$\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$ są ciągłe,

$j,k \in \{1,\dots,n\}$

Tw. (słaba zasada maksimum)

Jeżeli funkcja $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U_T})$ spełnia nierówność $\Delta u \geq u_t$ w cylindrze U_T, to $u=u(x,t)$ przybiera swoje maksimum na brzegu parabolicznym Γ_T:

$$\max_{(x,t)\in \overline{U_T}} u = \max_{(x,t)\in \Gamma_T} u$$

Dowód: Załóżmy najpierw, że $\Delta u > u_t$ w U_T. Rozważamy dla $0<\tau<T$ cylinder U_τ i jego brzeg paraboliczny Γ_τ. Jeżeli $\max u(x,t)$ na $\overline{U_\tau}$ jest osiągane w $x\in\Omega$ i $t=\tau$, to

$$u_t(x,\tau) \geq 0 \quad \text{oraz} \quad \Delta u(x,\tau) \leq 0$$

cyli $\Delta u(x,\tau) \leq u_t(x,\tau)$ wbrew założeniu. Podobnie jest dla $x\in\Omega$ i $0<t<\tau$. Oczywiście $\max_{\Gamma_\tau} u \leq \max_{\Gamma_T} u$, więc z ciągłości u

$$\max_{\overline{U_T}} u = \lim_{\tau\to T} \max_{\overline{U_\tau}} u = \lim_{\tau\to T} \max_{\Gamma_\tau} u = \max_{\Gamma_T} u.$$

Teraz, w całej ogólności, $\Delta u \geq u_t$ na U_T. Określamy $v(x,t) = u(x,t) - \varkappa t$ dla (małego) $\varkappa>0$. Oczywiście $v \leq u$ oraz

$\Delta v - v_t = \Delta u - u_t + \varkappa > 0$ na U_T. Stosujemy pierwszą część rozumowania do funkcji v:

$$\max_{\overline{U_T}} u = \max_{\overline{U_T}} (v+\varkappa t) \le \max_{\overline{U_T}} v + \varkappa T = \max_{\Gamma_T} v + \varkappa T$$

$$\le \max_{\Gamma_T} u + \varkappa T$$; Teraz $\varkappa \to 0$ daje

$$\max_{\overline{U_T}} u \le \max_{\overline{\Gamma_T}} u$$ (a przeciwna nierówność jest oczywista).

Oczywiście podobnie jest dla minimów:

$$\Delta u \le u_t \implies \min_{\overline{U_T}} u = \min_{\Gamma_T} u$$

Zatem, dla rozwiązań równania ciepła kresy rozw. osiągane są na brzegu parabolicznym.

Wniosek (jednoznaczność rozwiązań)

Zag. $$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(x,t) & \\ u(x,0) = g(x) & x \in \Omega \\ u(x,t) = h(x,t) & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

może mieć co najwyżej jedno rozwiązanie $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U_T})$.

Założenie o regularności u jest istotne.

Można pokazać, że zag. $$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(x,0) = 0 \\ u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = t^{-3/2} e^{-1/4t} \end{cases}$$

ma rozw. $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U_T})$.

Ale mamy też funkcję

$$v(x,t) = \frac{x}{t}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}$$ spełniającą założenia

i nieograniczoną na krzywych $x = k\sqrt{t}$, $k > 0$.