Pracownia z ANALIZY NUMERYCZNEJ

Lista nr 1

Początek zapisów: **7 października 2019 r.**

Termin realizacji: **10 listopada 2019 r.**

Termin na poprawki (100%, podgrupa A): **24 listopada 2019 r.**

Termin na poprawki (100%, podgrupa B): **1 grudnia 2019 r.**

Termin na poprawki (80%, podgrupa A): **1 grudnia 2019 r.**

Termin na poprawki (80%, podgrupa B): **8 grudnia 2019 r.**

Punktacja (podana przy każdym zadaniu): ***8–12 punktów***

Każde z zadań może być wybrane najwyżej przez trzy osoby (trzy zespoły dwuosobowe — w wypadku zadań P1.10, P1.15, P1.19) spośród wszystkich zapisanych na pracownię.

P1.1. 10 punktów Ciąg $x_k := 2^k \sin \frac{\pi}{2^k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ jest zbieżny do π. Wykazać, że ciąg ten spełnia każdy z następujących trzech związków rekurencyjnych:

(1) $$x_{k+1} = 2^k \sqrt{2\left(1 - \sqrt{1 - (x_k/2^k)^2}\right)} \qquad (k = 1, 2, \ldots;\ x_1 = 2);$$

(2) $$x_{k+1} = \frac{2x_k}{\sqrt{2\left(1 + \sqrt{1 - (x_k/2^k)^2}\right)}} \qquad (k = 1, 2, \ldots;\ x_1 = 2);$$

(3) $$x_{k+1} = x_k \sqrt{\frac{2x_k}{x_k + x_{k-1}}} \qquad (k = 2, 3, \ldots;\ x_1 = 2,\ x_2 = 2\sqrt{2}).$$

Stosując oddzielnie wzory (1)–(3) obliczać – z pojedynczą, a następnie z podwójną precyzją – kolejne wyrazy ciągu $\{x_k\}$ do chwili, gdy dwa kolejne wyrazy mają 5 identycznych początkowych cyfr. Powtórzyć obliczenia żądając stabilizacji 8 cyfr. Wyciągnąć wnioski.

P1.2. 10 punktów Następujący *algorytm sumowania z poprawkami* pozwala obliczyć z dużą dokładnością sumę $s = \sum_{i=1}^{n} x_i$, w standardowej arytmetyce *fl*:

$$
\begin{aligned}
& s := x_1; \quad c := 0; \\
& \texttt{for i from 2 to } n \texttt{ do} \\
& \quad y := c + x_i; \\
& \quad t := s + y; \\
& \quad c := (s - t) + y; \\
& \quad s := t; \\
& \texttt{end}
\end{aligned}
$$

Dowodzi się, że $fl(s) = \sum_{i=1}^{n} (1 + \xi_i) x_i$, gdzie $|\xi_i| \leqslant 2 \cdot 2^{-t} + O(n2^{-2t})$.
Oblicz sumę

$$\sum_{k=1}^{10000} k^{-2}$$

stosując

a) algorytm sumowania składników w naturalnej oraz odwrotnej kolejności (i) z pojedynczą precyzją, następnie (ii) z podwójną precyzją, a także

b) algorytm sumowania z poprawkami, w arytmetyce z pojedynczą precyzją.

Porównaj wyniki. Podaj wnioski.

P1.3. 8 punktów Obliczać — z pojedynczą, a następnie z podwójną precyzją — kolejne wyrazy ciągów

$$\textbf{(a)}\quad s_n := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k!^{-2}, \qquad \textbf{(b)}\quad t_n := \sum_{k=0}^{n} k!^{-2}$$

do chwili, gdy dwa kolejne wyrazy są równe w wybranej arytmetyce maszynowej. Objaśnić wyniki. (Wybierz odpowiedni sposób generowania składników sum!)

P1.4. 10 punktów *Stałą Eulera* $\gamma = 0.577215664901532286\ldots$ definujemy jako granicę $\gamma := \lim_{n\to\infty} \gamma_n$, gdzie $\gamma_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$. Zakładając, że dla dostatecznie dużych wartości n jest $\gamma_n - \gamma \approx cn^{-d}$, gdzie c i $d > 0$ są pewnymi stałymi, spróbuj przy pomocy komputera wyznaczyć doświadczalnie wartości tych stałych.

P1.5. 8 punktów Rozważmy zadanie obliczania wartości funkcji

$$f(x) = \frac{x - \sin x}{x^3} \tag{4}$$

dla x bliskich 0.

a) Oblicz $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

b) Zaprogramuj funkcję $f(x)$ według wzoru (4) (możesz wykorzystać biblioteczną funkcję $\sin x$). Wywołaj ją dla $x := 10^{-k}$ $(k = 0, 1, \ldots, 15)$. Skomentuj wyniki i porównaj z wcześniej obliczoną granicą.

c) Opracuj metodę obliczania $f(x)$, która jest lepsza niż wzór (4). Zaproponowana metoda powinna dobrze działać dla dowolnego $x \neq 0$.

P1.6. 10 punktów Wykorzystując jedynie podstawowe działania arytmetyczne $(+, -, *, /)$, zaproponuj efektywny sposób wyznaczania wartości funkcji sinus i cosinus z dokładnością bliską dokładności maszynowej. Opracowany algorytm porównaj z funkcjami bibliotecznymi.

P1.7. 12 punktów Rozważ szereg $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{3/2} + k^{1/2}\right)^{-1}$. Spróbuj wyznaczyć trzy dokładne cyfry dziesiętne sumy szeregu. Skomentuj wyniki.

P1.8. 10 punktów Ciąg $\{y_n\}$ jest określony wzorem $y_n := \int_0^1 t^n e^t \,\mathrm{d}t \qquad (n = 0, 1, \ldots)$.

a) Sprawdź, że ciąg $\{y_n\}$ monotonicznie maleje do zera.

b) Sprawdź, że zachodzi związek $y_{n+1} = e - (n+1)y_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ i wyznacz wartość początkową y_0. Korzystając z tego wyniku oblicz w standardowej arytmetyce wyrazy $y_0, y_1, \ldots, y_N$ dla $N = 20$. Czy otrzymane wyniki są wiarygodne?

c) Oto inny sposób realizacji tego samego zadania. Zauważ, że wobec nierówności $\frac{1}{n+1} \leqslant y_n \leqslant \frac{e}{n+1}$ (sprawdzić!) ciąg jest wolno zbieżny, więc y_N i y_{N-1} są prawie sobie równe; z równania $y_N = e - Ny_{N-1}$ wynika wówczas, że w przybliżeniu jest $y_N = e/(N+1)$. Następnie za pomocą podanego wcześniej związku rekurencyjnego oblicz $y_{N-1}, y_{N-2}, \ldots, y_0$. Czy wartość y_0 jest dokładna? A inne wyrazy ciągu? Podsumuj wyniki doświadczeń.

P1.9. 10 punktów Napisz podprogram obliczający dwa pierwiastki x_1 i x_2 trójmianu kwadratowego $f(x) = ax^2 + bx + c$ o rzeczywistych współczynnikach a, b i c, jak również wartości $f(x_1)$ i $f(x_2)$. Użyj wzorów redukujących błędy zaokrągleń. Sprawdź działanie podprogramu m. in. dla

$$\begin{aligned}(a, b, c) \;=\;& (0,1,0),\ (0,0,1),\ (0,0,0),\ (1,1,0),\ (2,10,1),\ (1,-4,3.99999),\\ & (1,-8.01,16.004),\ (2\times 10^{17}, 10^{18}, 10^{17}),\ (10^{-17}, -10^{17}, 10^{17}).\end{aligned}$$

P1.10. Zadanie dla dwuosobowego zespołu. 12 punktów Niech X i Y będą macierzami kwadratowymi stopnia n, gdzie n jest liczbą parzystą. Iloczyn macierzy

$$Z = XY$$

definiujemy następująco:

$$z_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}\, y_{kj} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

gdzie z_{ij} jest elementem i-tego wiersza i j-tej kolumny macierzy Z (wielkości x_{ij} i y_{ij} mają znaczenie analogiczne). Aby wyznaczyć iloczyn macierzy korzystając ze wzoru (5) należy wykonać n^3 mnożeń. Macierze Z, X i Y możemy zapisać w tzw. *postaci blokowej*:

$$Z = \begin{bmatrix} R & S \\ T & U \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \qquad Y = \begin{bmatrix} E & G \\ F & H \end{bmatrix}.$$

Jeśli $Z = XY$, to

$$R = AE + BF, \quad S = AG + BH, \quad T = CE + DF, \quad U = CG + DH.$$

W tym wypadku musimy obliczyć 8 iloczynów macierzy stopnia $n/2$, czyli ponownie wykonać $8(n/2)^3 = n^3$ mnożeń. Sprawdź jednak, że prawdziwe są równości:

$$R = P_5 + P_4 - P_2 + P_6, \quad S = P_1 + P_2, \quad T = P_3 + P_4, \quad U = P_5 + P_1 - P_3 - P_7,$$

gdzie

$$P_1 = A(G - H), \quad P_2 = (A + B)H, \quad P_3 = (C + D)E, \quad P_4 = D(F - E),$$
$$P_5 = (A + D)(E + H), \quad P_6 = (B - D)(F + H), \quad P_7 = (A - C)(E + G).$$

Stosując powyższą procedurę obliczamy tylko 7 iloczynów macierzy stopnia $n/2$. Wykonujemy zatem $7/8 \cdot n^3$ mnożeń. Jeśli $n = 2^k$, to iloczyny macierzy stopnia $n/2$ obliczamy podobnie (jeśli n nie jest potęgą dwójki możemy rozszerzyć macierze uzupełniając je zerami do odpowiedniego rozmiaru). Powyższe postępowanie nosi nazwę *algorytmu Strassena mnożenia macierzy*.

1. Porównaj pod względem szybkości i dokładności tradycyjny algorytm mnożenia macierzy (wzór (5)) z algorytmem Strassena. **2.** Obliczenia przeprowadź dla macierzy o rozmiarach od 4 do 500. Dla macierzy X o znanej macierzy odwrotnej X^{-1} (konsultacje) oblicz wartości błędów

$$\Delta(XX^{-1} - I), \qquad \Delta(X^{-1}X - I),$$

gdzie I jest macierzą jednostkową, natomiast $\Delta(X) := \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^2$. **3.** Dla danych macierzy X, Y i V oblicz $\Delta((XY)V - X(YV))$. **4.** Skomentuj wyniki.

P1.11. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Niech f będzie funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$. Opracować ***metodę obliczania***

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$$

z dużą dokładnością. Przeprowadzić eksperymenty obliczeniowe dla odpowiednio dobranych f i $[a, b]$. Uwaga: Nie należy zakładać żadnych dodatkowych własności funkcji f, np. że jest ona różniczkowalna w rozważanym przedziale.

P1.12. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Współrzędne planety na orbicie eliptycznej w czasie t można obliczyć wzorem

$$\left(a(\cos x - e),\ a\sqrt{1 - e^2}\sin x\right),$$

gdzie a jest półosią wielką elipsy, natomiast e to mimośród orbity. Kąt x, zwany anomalią mimośrodową, możemy obliczyć z równania Keplera,

$$x - e\sin x = M \qquad (0 < |e| < 1),$$

gdzie M to anomalia średnia, która jest dana wzorem $M = 2\pi t/T$, przy czym T oznacza okres orbitalny.

a) Pokaż, że dla każdych e, M rozwiązanie $x = \alpha$ spełnia $M - |e| \leqslant \alpha \leqslant M + |e|$. Czy można poprawić to oszacowanie?

b) Rozwiąż równanie Keplera metodą bisekcji wykorzystując oszacowanie z poprzedniego podpunktu.

c) Zaprogramuj prostą metodę iteracyjną,

$$x_{n+1} = e\sin x_n + M, \quad x_0 = 0.$$

d) Zastosuj metodę Newtona do równania Keplera. Jak wybrać przybliżenie startowe?

Wykonaj testy i porównaj zbieżność metod (b) oraz (c). Dane dotyczące planet Układu Słonecznego znajdziesz w Internecie. Jak dobrać przybliżenie startowe?

Literatura:

[1] R. Esmaelzadeh, H. Ghadiri, Appropriate Starter for Solving the Kepler's Equation, International Journal of Computer Applications 89 (2014), 31–38.

[2] G. R. Smith, A simple, efficient starting value for the iterative solution of Kepler's equation, Celestial Mechanics 19 (1979), 163–166.

P1.13. 10 punktów Niech dane będę wartości funkcji dwóch zmiennych,

$$f_{ij} := f(x_i, y_j) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m),$$

gdzie x_i oraz y_j są dane. Interpolacja funkcji dwóch zmiennych polega na znalezieniu wielomianu

$$p(x, y) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij} x^i y^j,$$

który spełnia warunki

$$p(x_i, y_j) = f_{ij} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m).$$

Zaproponuj algorytm rozwiązujący to zadanie. Przetestuj uzyskaną metodę dla kilku wybranych funkcji f.

Literatura:

[1] G. Dahlquist, Å. Björck, *Numerical Methods in Scientific Computing*, Volume 1, SIAM, 2008.

P1.14. 12 punktów Metodę Newtona można stosować także do znajdowania rozwiązań równania nieliniowego $f(z) = 0$ w dziedzinie liczb zespolonych. Np. dla $f(z) := z^4 + 1$ i $z_0 := 0.5 + 0.5i$ otrzymujemy $z_{10} = 0.7071067812 + 0.7071067812i$ – czyli bardzo dobre przybliżenie liczby $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, będącej jednym z rozwiązań równania $z^4 + 1 = 0$.

Niech c_{n+1} oznacza kolor czarny. Niech $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ będą rozwiązaniami równania $z^n + 1 = 0$ w dziedzinie liczb zespolonych. Przypiszmy każdemu z tych rozwiązań inny, ale różny od czarnego, kolor; powiedźmy odpowiednio $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Niech M będzie liczbą parzystą, a W_M następującym zbiorem punktów płaszczyzny zespolonej:

$$W_M := \left\{ -1 + 2\frac{k}{M} + \left(-1 + 2\frac{l}{M}\right) i \ :\ k, l = 0, 1 \ldots, M \right\}.$$

Dla wybranych n i M (np. $n = 3, 4, 5, 6$; $M = 400, 800$), wykonaj rysunek, na którym każdy z punktów w zbioru W_M zostanie narysowany kolorem $c(w)$ ustalonym na podstawie poniższej procedury:

a) $z_0 := w; \qquad z_{k+1} := z_k - \dfrac{f(z_k)}{f'(z_k)} \qquad (k = 0, 1, \ldots, N-1;$ np. $N = 10, 20, 35);$

b) jeśli istnieje takie k, że z_N jest *blisko* liczby ζ_k (jak należy to rozumieć w wypadku liczb zespolonych?), to przyjmujemy $c(w) := c_k$, w przeciwnym razie $c(w) := c_{n+1}$.

Jaki charakter ma otrzymamy w ten sposób obraz? Spróbuj przeanalizować zaobserwowane zjawisko i wyciągnąć wnioski. Następnie przeprowadź podobny eksperyment dla *metody Halleya*, która wyraża się wzorem

$$z_{k+1} := z_k - 1 \Big/ \left[\frac{f'(z_k)}{f(z_k)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(z_k)}{f'(z_k)} \right].$$

Czy metoda ta zachowuje się podobnie?

P1.15. Zadanie dla dwuosobowego zespołu. 12 punktów Ważnym z punktu widzenia zastosowań jest zadanie obliczania wszystkich pierwiastków wielomianu $p_n \in \Pi_n$ o współczynnikach rzeczywistych, czyli takich liczb zespolonych $z_1, z_2, \ldots, z_n$ dla których zachodzi

$$p_n(z_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

gdzie

$$p_n(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \qquad (a_k \in \mathbb{R},\ k = 0, 1, \ldots, n;\ a_n \neq 0).$$

Przybliżone wartości pierwiastków $z_1, z_2, \ldots, z_n$ można wyznaczyć stosując np. *iteracyjną metodę Bairstowa*, której zwięzły opis został podany m.in. w [1, str. 107], [2, str. 112], [3, str. 384] i [4, str. 293]. Wykonując odpowiednie testy numeryczne, sprawdź pod względem dokładności, skuteczności i stabilności powyższą metodę.

Literatura:

[1] W. Cheney, D. Kincaid, *Analiza numeryczna*, WNT, 2006.

[2] M. Dryja, J. i M. Jankowscy, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*, cz. 2, WNT, 1988.

[3] A. Ralston, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, 1971.

[4] J. Stoer, R. Bulirsch, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, 1987.

P1.16. 8 punktów Niech $p_n \in \Pi_n$ będzie wielomianem interpolującym funkcję f w węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(-1 \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leqslant 1)$. Obliczyć błąd $e_{nr} := \max_{x \in D_r} |f(x) - p_n(x)|$, gdzie D_r jest zbiorem r (np. 100) punktów przedziału $[-1, 1]$, dla

a) węzłów równoodległych,

b) węzłów będących zerami $(n+1)$-go wielomianu Czebyszewa,

c) losowo wybranych węzłów.

Przedstawić wnioski z obliczeń dla funkcji $f_1(x) = (1 + 25x^2)^{-1}$, $f_2(x) = \operatorname{arctg} x$ i $f_3(x) = \max(0, 1 - 4x)$.

P1.17. 8 punktów Skonstruować wielomiany przybliżające funkcje $f(x) = \arcsin x$ i $g(x) = \arccos x$ w przedziale $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ jako wielomiany interpolacyjne stopnia piętnastego, z odpowiednio dobranymi węzłami. Sprawdzić eksperymentalnie, jaka jest dokładność przybliżenia. Napisać podprogramy, obliczające przybliżone wartości $\arcsin x$ i $\arccos x$ dla dowolnego $x \in [-1, 1]$.

P1.18. 10 punktów Zrealizować algorytmy obliczania wartości wielomianu podanego za pomocą wzoru interpolacyjnego Lagrange'a oraz zamiany postaci Lagrange'a na postać Newtona. Porównać dokładności wyników uzyskanych za pomocą obu wzorów m. in. dla funkcji $f_1(x) = (1 + 25x^2)^{-1}$ i $f_2(x) = \operatorname{arctg} x$.
Literatura: W. Werner, Mathematics of Computation 43 (1984), 205–217; Kopię artykułu można otrzymać od prowadzących pracownię.

P1.19. Zadanie dla dwuosobowego zespołu. 12 punktów Niech p_N będzie wielomianem stopnia $N > 1$ interpolującym daną funkcję f w węzłach $t_s = \cos\frac{\pi s}{N}$ $(s = 0, 1, \ldots, N)$. Wielomian p_N można podać wzorem

$$p_N \equiv \sum_{k=0}^{N}{}'' b_k^N T_k \overset{\text{def}}{=} \frac{b_0^N}{2} T_0 + \sum_{k=1}^{N-1} b_k^N T_k + \frac{b_N^N}{2} T_N,$$

gdzie T_k jest k-tym wielomianem Czebyszewa, a

$$b_k^N = \frac{2}{N} \sum_{s=0}^{N}{}'' f(\cos\frac{\pi s}{N}) \cos\frac{\pi k s}{N} \qquad (k = 0, 1, \ldots, N).$$

Używając algorytmu Clenshawa można obliczyć b_k^N $(k = 0, 1, \ldots, N)$ kosztem $O(N^2)$ działań. Wielkości te można jednak wyznaczyć szybciej. Mianowicie, dowodzi się, że

$$b_k^N = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{2N-1} f(\cos\frac{2\pi s}{2N}) \exp(\frac{2\pi i k s}{2N}) \qquad (k = 0, 1, \ldots, N).$$

Zakładając, że $N = 2^m$ $(m > 1)$ i wykorzystując powyższy wzór, współczynniki b_k^N dla $k = 0, 1, \ldots, N$ można obliczyć w czasie $O(N \log N)$, za pomocą tzw. *szybkiej transformacji Fouriera*. Patrz np. [1], [2] i [3]. Dla kilku odpowiednio dobranych funkcji f, m. in. e^x, $\sin(e^{2x})$, $\sqrt{1 - x^2}$, $\cos(|4x|)$ oraz funkcji Rungego, porównać różne algorytmy wyznaczania wielomianu interpolacyjnego p_N dla $N = 2^m$ $(m = 2, 3, \ldots, 30)$, zarówno pod względem dokładności jak i stabilności oraz efektywności. Przez dokładność rozumiemy wartość błędu

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - p_N(x)|,$$

a przez stabilność to, czy błąd ten maleje wraz ze wzrostem m (teoretycznie, jeśli funkcja f jest ciągła i ma wahanie ograniczone, to ciąg wielomianów p_N jest do niej zbieżny jednostajnie, gdy $N \to \infty$, na odcinku $[-1, 1]$).

Literatura

[1] G. Dahlquist, Å. Björck, *Numerical Methods in Scientific Computing*, Volume 1, SIAM, 2008.

[2] P. J. Davis, P. Rabinowitz, *Methods of Numerical Integration*, Second ed., Academic Press, New York, 1984.

[3] D. Kincaid, W. Cheney, *Analiza numeryczna*, WNT, 2006.

P1.20. 12 punktów Niech dane będą: liczba naturalna k, liczby $m_0, m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ parami różne węzły $x_0, x_1, \ldots, x_k$ oraz wielkości rzeczywiste $y_i^{(j)}$ $(i = 0, 1, \ldots, k;\ j = 0, 1, \ldots, m_k - 1)$. Przyjmijmy $n := m_0 + m_1 + \ldots + m_k - 1$. Udowodnij, że istnieje dokładnie jeden wielomian H_n stopnia co najwyżej n, nazywany *wielomianem interpolacyjnym Hermite'a*, spełniający następujące warunki:

$$H_n^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)} \qquad (i = 0, 1, \ldots, k;\ j = 0, 1, \ldots, m_k - 1).$$

Następnie, zaproponuj efektywny pod względem numerycznym i złożoności obliczeniowej algorytm konstrukcji wielomianu H_n. Wykonaj odpowiednie testy i wyciągnij wnioski dotyczące m.in. użyteczności wielomianu interpolacyjnego Hermite'a w praktyce obliczeniowej.

P1.21. 10 punktów Zrealizować algorytm zamiany kombinacji liniowej $\sum_{k=0}^{n} a_k q_k$ na kombinację $\sum_{k=0}^{n} A_k Q_k$, gdzie $q_k, Q_k \in \Pi_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ są danymi wielomianami, np. $q_k(x) = x^k$, $Q_k(x) = T_k(x)$ (wielomiany Czebyszewa);
Literatura B.Y. Ting, Y. Luke, IMA J. Numer. Anal. 1 (1981), 229–234 (kopię artykułu można otrzymać od prowadzących pracownię).

P1.22. 10 punktów Wartości funkcji f znane są jedynie w punktach $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Zaproponuj, jak wykorzystać naturalną funkcję sklejaną trzeciego stopnia do znalezienia przybliżonych wartości wszystkich ekstremów lokalnych funkcji f leżących w przedziale $[x_0, x_n]$. Wykonując odpowiednie testy numeryczne, m. in. dla funkcji

$$f(x) = \sin(4\pi^2 x^2) \quad (x \in [0,1]), \qquad f(x) = \ln\left(\frac{3}{2} + xT_6(x)\right) \quad (x \in [-1,1]),$$

gdzie T_6 to wielomian Czebyszewa stopnia 6, zbadać, czy pomysł ten sprawdza się w praktyce.

P1.23. 10 punktów Dla danej liczby naturalnej n, danych węzłów $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$ i danej funkcji f istnieje dokładnie jedna funkcja $\tilde{s} \in C^2[a,b]$, zwana ***okresową funkcją sklejaną interpolacyjną III stopnia***, spełniająca następujące warunki:

1^o w każdym z podprzedziałów $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ funkcja $\tilde{s}$ jest identyczna z pewnym wielomianem stopnia co najwyżej trzeciego;

2^o $\tilde{s}(x_k) = f(x_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n;\ f(x_n) = f(x_0))$;

3^o $\tilde{s}^{(i)}(a + 0) = \tilde{s}^{(i)}(b - 0) \qquad (i = 0, 1, 2)$.

Dla danej zamkniętej krzywej parametrycznej $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b;\ x(a) = x(b),\ y(a) = y(b))$ skonstruować następującą ***zamkniętą krzywą sklejaną interpolacyjną***. Dla wybranych: $n \in \mathbb{N}$ oraz $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ obliczamy $x_i = x(t_i)$, $y_i = y(t_i)$ dla $i = 0, 1, \ldots, n$, a następnie konstruujemy okresowe funkcje sklejane interpolujące III stopnia $\tilde{s}_x(t)$, $\tilde{s}_y(t)$. Poszukiwana krzywa sklejana ma przedstawienie parametryczne $x = \tilde{s}_x(t)$, $y = \tilde{s}_y(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$. Wykonać obliczenia m.in. dla okręgu, elipsy i następujących danych:

$(3.7, 6.4)$	$(3.2, 6.7)$	$(2.7, 6.5)$	$(2.1, 6.4)$	$(1.7, 6.0)$	$(1.1, 5.9)$	$(0.7, 5.7)$	$(0.4, 5.7)$
$(0.4, 5.4)$	$(0.5, 5.0)$	$(0.3, 4.6)$	$(0.6, 4.3)$	$(0.6, 4.0)$	$(0.7, 3.7)$	$(0.6, 3.2)$	$(0.8, 2.9)$
$(0.8, 2.6)$	$(0.6, 2.4)$	$(0.8, 2.3)$	$(0.9, 2.4)$	$(1.1, 2.2)$	$(1.4, 2.1)$	$(1.8, 2.0)$	$(1.7, 1.8)$
$(1.9, 1.4)$	$(2.2, 1.5)$	$(2.1, 1.8)$	$(2.7, 1.6)$	$(2.6, 1.4)$	$(3.3, 1.3)$	$(3.5, 0.9)$	$(3.7, 0.6)$
$(3.9, 0.8)$	$(4.2, 0.7)$	$(4.3, 0.4)$	$(4.5, 0.5)$	$(4.7, 0.7)$	$(5.0, 0.6)$	$(5.5, 0.8)$	$(5.9, 0.6)$
$(6.2, 0.4)$	$(6.4, 0.3)$	$(6.3, 0.7)$	$(6.5, 1.2)$	$(6.8, 1.7)$	$(7.2, 2.0)$	$(7.1, 2.2)$	$(7.2, 2.4)$
$(6.8, 2.8)$	$(6.7, 3.2)$	$(6.8, 3.6)$	$(6.4, 3.9)$	$(6.2, 4.2)$	$(6.9, 4.5)$	$(6.8, 5.1)$	$(6.6, 5.6)$
$(6.5, 6.0)$	$(6.1, 6.2)$	$(5.5, 6.1)$	$(5.0, 6.2)$	$(4.6, 6.2)$	$(4.1, 6.3)$	$(3.7, 6.0)$	$(3.4, 6.1)$
$(3.2, 6.5)$	$(3.7, 6.4)$						

TABELA 1. Tajemnicza krzywa, zawarta w kwadracie $[0, 7.5] \times [0, 7.5]$

P1.24. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Na papierze milimetrowym narysować (jednym pociągnięciem!) kontur ulubionego zwierzątka. Wybrać n (np. 10 lub 20) punktów na otrzymanej linii i ponumerować je:

$$(x_1,\, y_1),\, (x_2,\, y_2),\, \ldots,\, (x_n,\, y_n). \tag{6}$$

Odtworzyć w przybliżeniu zadaną linię, stosując jeden lub oba z następujących pomysłów:

a) podzielić ciąg (6) na takie podciągi, żeby każdy z nich zawierał punkty leżące na wykresie pewnej funkcji; uzyskać przybliżoną postać linii wzorcowej łącząc wykresy przybliżeń tych funkcji;

b) potraktować linię jako krzywą parametryczną $[x(t),\, y(t)]$, gdzie t jest parametrem przebiegającym przedział $[1,\, n]$, tak więc $x_i = x(i)$, $y_i = y(i)$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$; zrekonstruować funkcje $x(t)$, $y(t)$ stosując interpolację.

Rozważyć wariant zadania, w którym punkty (6) są podawane w pliku tekstowym. Sprawdzić działanie programu dla danych z tabeli z zadania **P1.23**..

P1.25. $\boxed{\text{10 punktów}}$ Zrealizować następujący *algorytm Clenshawa* obliczania wartości wielomianu

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} w_k P_k,$$

gdzie współczynniki $w_0, w_1, \ldots, w_n$ są dane, a $\{P_k\}$ jest ciągiem wielomianów, spełniającym związek rekurencyjny postaci

$$\begin{gathered} P_0(x) = a_0, \qquad P_1(x) = (a_1 x - b_1) P_0(x), \\ P_k(x) = (a_k x - b_k) P_{k-1}(x) - c_k P_{k-2}(x) \qquad (k = 2, 3, \ldots), \end{gathered}$$

przy czym a_k, b_k, c_k są danymi stałymi.

> Obliczamy pomocnicze wielkości B_0, $B_1, \ldots,$ B_{n+2} według wzorów
>
> $$B_k = w_k + (a_{k+1}x - b_{k+1})B_{k+1} - c_{k+2}B_{k+2} \qquad (k = n, n-1, \ldots, 0),$$
>
> gdzie $B_{n+1} = 0$, $B_{n+2} = 0$. Wówczas jest $s_n(x) = a_0 B_0$.

Zaproponować algorytm obliczania wartości pochodnej wielomianu s_n. Wykonać obliczenia kontrolne **między innymi** dla wielomianów w postaci kombinacji wielomianów Czebyszewa.