Wiktor Pilarczyk 308533

Zad 8

Ważny komentarz pod koniec

Nasza funkcja

$$\begin{cases} u(x,y) = xy\sqrt{-\log(x^2+y^2)} & \text{gdzie } x^2+y^2>0 \\ u(0,0)=0 \end{cases}$$

*

$u_x(0,0) = u_{xx}(0,0) =$
$= u_y(0,0) = u_{yy}(0,0) = 0$

Pochodne tej funkcji

$$u_x = y\sqrt{-\log(x^2+y^2)} + xy\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2x}{(x^2+y^2)\sqrt{-\log(x^2+y^2)}} =$$

$$= y\sqrt{-\log(x^2+y^2)} - \frac{x^2y}{(x^2+y^2)\sqrt{-\log(x^2+y^2)}}$$

$$u_{xx} = \frac{-xy}{(x^2+y^2)\sqrt{-\log(x^2+y^2)}} - \frac{2xy(x^2+y^2)\sqrt{-\log(x^2+y^2)} - x^2y\left(2x\sqrt{-\log(x^2+y^2)} + \frac{-x}{\sqrt{-\log(x^2+y^2)}}\right)}{\left((x^2+y^2)\sqrt{-\log(x^2+y^2)}\right)^2}$$

$$= \frac{-3xy}{(x^2+y^2)\sqrt{-\log(x^2+y^2)}} + \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2\sqrt{-\log(x^2+y^2)}} + \frac{x^3y}{(x^2+y^2)^2\sqrt{-(\log(x^2+y^2))^3}}$$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} u_{xx} = 0$ (obliczenia są bardzo rozległe, pozwolę pominąć je uwzględniając, że analizie liczyliśmy takie granice)

czyli u_{xx} jest ciągłe, ~~bo~~ ponieważ niedługo pewności dla $x^2+y^2>0$ i sprawdziliśmy dla $(0,0)$.

$$u_y = x\sqrt{-\log(x^2+y^2)} - \frac{xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{-\log(x^2+y^2)}}$$

$$u_{yy} = \frac{-3xy}{(x^2+y^2)\sqrt{-\log(x^2+y^2)}} + \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2\sqrt{-\log(x^2+y^2)}} + \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2\sqrt{-(\log(x^2+y^2))^3}}$$

Zauważmy, że obliczenie u_y i u_{yy} jest analogiczne jak u_x i u_{xx} ~~więc~~ ponieważ tylko ~~nazwa~~ nazwa zmiennych się różni.

Więc
$\lim_{(x,y)\to(0,0)} u_{yy} = 0$

czyli u_{yy} też jest ciągłe, takie samo toku myślenia jak u_{xx}

Wiktor Pilarczyk 308533

Zad 8 C.P 1

$$\left(2y\sqrt{-\log(x^2+y^2)} - \frac{y}{\sqrt{-\log(x^2+y^2)}}\right)$$

$$(u_x)_y = \sqrt{-\log(x^2+y^2)} + y \cdot \frac{-2y}{(x^2+y^2)\sqrt{-\log(x^2+y^2)}} - \frac{x^2(x^2+y^2)\sqrt{-\log(x^2+y^2)} - x^2y(}{\left((x^2+y^2)\sqrt{-\log(x^2+y^2)}\right)^2}$$

$$= \sqrt{-\log(x^2+y^2)} - \frac{2y}{(x^2+y)^2\sqrt{-\log(x^2+y^2)}} - \frac{x^2(x^2+y^2)\sqrt{-\log(x^2-y^2)}}{\left((x^2+y^2)\sqrt{-\log(x^2+y^2)}\right)^2} + \frac{2x^2y^2\sqrt{-\log(x^2+y^2)} - \frac{x^2y^2}{\sqrt{-\log(x^2+y^2)}}}{\left((x^2+y^2)\sqrt{-\log(x^2+y^2)}\right)^2} =$$

$$= \underset{\downarrow \infty}{\sqrt{-\log(x^2+y^2)}} - \underset{\downarrow 0}{\frac{2y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{-\log(x^2+y^2)}}} - \underset{\downarrow 0}{\frac{x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{-\log(x^2+y^2)}}} + \underset{\downarrow 0}{\frac{2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2\sqrt{-\log(x^2+y^2)}}} + \underset{\downarrow 0}{\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2\sqrt{-(\log(x^2+y^2))^3}}}$$

$\lim_{x,y\to 0,0} u_{xy} = \infty$ [Dokładnie jak wcześniej rozpisywanie jest bardzo żmudne, ale ~~wystarczy~~ warto zauważyć, że $\lim_{x,y\to 0,0}\sqrt{-\log(x^2+y^2)} = \infty$, a reszta wyrazów dąży do 0]

$$u_{yx} = \sqrt{-\log(x^2+y^2)} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{-\log(x^2+y^2)}} - \frac{y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{-\log(x^2+y^2)}} + \frac{2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2\sqrt{-\log(x^2+y^2)}} + \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{-\log(x^2+y^2)^3}}$$

Obliczanie u_{yx} tak jak wcześniej u_y czy u_{yy} jest analogiczne jak u_{xy} tylko ze zamienionymi rolami zmiennych i liczenie granicy też jest analogiczne

$\lim_{x,y\to 0,0} u_{yx} = \infty$

**

Więc u_{xy} i u_{yx} nie ~~są równe~~ istnieją, ponieważ $\infty \neq \infty$

więc pokazaliśmy to co chcieliśmy (?)

Wiktor Pilarczyk 308533

Zad 8 c.d. 2

Nie napisałem ~~dla~~ obliczeń dotyczących pochodnej w punkcie

$u(x,0) = 0$ oraz $u(0,0) = 0$

więc $u_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{u(h,0) - u(0,0)}{h} = 0$

podobnie

$u_x(x,0) = 0$ oraz $u_x(0,0) = 0$

więc $u_{xx}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{u(h,0) - u(0,0)}{h} = 0$

Analogicznie dla $u_y^{(0,0)=0}$ i $u_{yy}^{(0,0)=0}$ tylko ~~dotyczących~~ nazwy zmiennych się różnią w przypadku tych obliczeń

$u_x(0,y) = y\sqrt{-\log(y^2)}$ $u_x(0,0) = 0$

więc

$u_{xy} = \lim_{h \to 0} \frac{h\sqrt{-\log(h^2)} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \sqrt{-\log(h)} = \infty$

i pozostałe obliczenia dla u_{yx} tylko ze zamienionymi ~~nazwami zmiennych~~ nazwami zmiennych $u_{yx}(0,0) = \infty$

Więc pochodne w punkcie $(0,0)$ dla u_{xy} i u_{yx} nie istnieją.