Algebra liniowa 1R, Lista 6

1. Sprawdź, że $(AB)^\top = B^\top A^\top$, $(A^\top)^\top = A$, $(A^{-1})^\top = (A^\top)^{-1}$, $\mathrm{tr}(A^\top) = \mathrm{tr}(A)$, $\det(A^\top) = \det(A)$.
2. Udowodnij, że $\langle A^\top X, Y\rangle = \langle X, AY\rangle$.
3. Zdiagonalizuj jak w twierdzeniu spektralnym następujące macierze symetryczne (postaraj się minimalizować ilość rachunków):
$$\begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$
4. Wzory $x' = x + y$, $y' = x - 2y$ zadają liniowy, ale nieprostokątny układ współrzędnych na płaszczyźnie.
   a) wskaż dwa punkty $P_1 = \begin{bmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{bmatrix}$, takie że $d(P_1, P_2) \neq \sqrt{(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2}$.
   b) wskaż dwa wektory $U_1 = \begin{bmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{bmatrix}$, $U_2 = \begin{bmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{bmatrix}$, takie że $\langle U_1, U_2\rangle \neq x'_1x'_2 + y'_1y'_2$.

---

5. Uzasadnij, że w prostokątnym liniowym układzie współrzędnych we wzorach z poprzedniego zadania zachodzą równości.
6. Niech $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{smallmatrix}\right)$ będzie macierzą przekształcenia liniowego F, jak również macierzą formy kwadratowej Q (w standardowym układzie współrzędnych). Wprowadźmy nowy liniowy układ współrzędnych wzorami $x' = 2x + y$, $y' = x + 2y$. Znajdź macierz F i macierz Q w tym nowym układzie współrzędnych.
7. Podaj przykład równania stopnia 2 postaci $ax^2 + 2bxy + cy^2 = d$ opisującego (a) parę prostych przecinających się w punkcie $\binom{0}{0}$; (b) parę prostych równoległych do wektora $\binom{1}{2}$; (c) okrąg przechodzący przez punkt $\binom{3}{4}$; (d) $\emptyset$; (f) hiperbolę przechodzącą przez $\binom{0}{3}$, taką że kąt między jej asymptotami wynosi $\pi/3$.
8. Dana jest krzywa $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$. Napisz jej równanie w układzie współrzędnych powstałym ze standardowego przez obrót o kąt $\pi/4$ (wszystko jedno w którą stronę) i rozstrzygnij co to za krzywa.
9. Znajdź kanoniczne równania poniższych krzywych diagonalizując stosowną macierz symetryczną (lub inaczej). Następnie znajdź wektory własne tej macierzy i prostokątny układ współrzędnych w którym równanie staje się kanoniczne. Rozpoznaj i naszkicuj krzywą (na tle oryginalnych współrzędnych).
   (a) $x^2 + 3xy + y^2 + 1 = 0$, (b) $4x^2 + 2\sqrt{2}xy + 3y^2 = 1$,
10. Zbadaj i naszkicuj krzywe (używając strategii z poprzedniego zadania lub inaczej):
    (c) $x^2 - 2xy + y^2 = 1$, (d) $x^2 - 3y^2 = 0$, (e) $x^2 + 2xy + y^2 = 0$, (f) $x^2 + xy + y^2 = 0$.
11. W zależności od wartości liczb λ, μ, stwierdź czym jest zbiór rozwiązań równania $\lambda x^2 + \mu y^2 = 0$.
12. Rozważmy równanie $ax^2 + 2bxy + cy^2 = h$. Ma ono postać kanoniczną $\lambda(x')^2 + \mu(y')^2 = 1$ lub $\lambda(x')^2 + \mu(y')^2 = 0$ w pewnym prostokątnym układzie współrzędnych. Rozpatrując znaki liczb $ac-b^2$, a, h można sporo powiedzieć o znakach liczb λ, μ (zrób tabelkę?). Użyj tej metody by stwierdzić, czy następujące równania reprezentują elipsę, hiperbolę, prostą, parę prostych, punkt czy zbiór pusty.
    (a) $x^2 - 3xy + y^2 = 1$, (b) $25x^2 + 10xy + y^2 = 2$, (c) $x^2 - 2xy - 2y^2 = 0$, (d) $x^2 + 4xy + y^2 = -7$,
    (e) $x^2 - 6xy + 9y^2 = 0$, (f) $3x^2 + 7xy - y^2 = -2$, (g) $7x^2 - 2xy + 2y^2 = 0$, (h) $x^2 + xy = -3$,
13. Niech X będzie niezerowym wektorem własnym macierzy symetrycznej S, zaś Y niech będzie niezerowym wektorem prostopadłym do X. Uzasadnij, że $SY \perp X$ i wywnioskuj, że Y jest wektorem własnym S.
14. Załóżmy, że wartości własne macierzy symetrycznej M są dodatnie.
    a) Uzasadnij, że dla każdego niezerowego wektora X mamy $\langle MX, X\rangle > 0$.
    b) Udowodnij, że jeśli P jest macierzą odwracalną to wartości własne macierzy $P^\top MP$ są dodatnie.

---

15. Znajdź wszystkie odwracalne przekształcenia liniowe F, takie że obrazem hiperboli $xy = 1$ przez F jest ta sama hiperbola. Które spośród znalezionych przekształceń są izometriami?
16. Niech M, N będą dwoma punktami, zaś $L > d(M, N)$. Uzasadnij, że $\{P \in \mathbf{R}^2 : d(P, M) + d(P, N) = L\}$ jest elipsą. (Wsk: Wybierz układ współrzędnych, w którym M, N leżą na osi OX, oba w tej samej odległości od O. Licz aż wyjdzie.)
17. Udowodnij, że jeśli F jest przekształceniem liniowym, to istnieją dwa niezerowe wektory U, W prostopadłe do siebie, takie że $F(U)$ i $F(W)$ są prostopadłe.