Zagadnienia brzegowe dla równań różniczkowych zwyczajnych

Oprócz zagadnienia początkowego (używanego np. do opisu zjawisk ewolucyjnych) ważne – również w zastosowaniach – są zagadnienia brzegowe. Dla równań drugiego rzędu spodziewamy się, że można będzie zwykle nakładać dwa warunki. Zbadajmy to na przykładach.

Zagadnienie

$$(*)\quad \begin{cases} y''+\lambda y = 0 & x\in[0,l] \\ a y(0) + b y'(0)=0 \\ c y(l) + d y'(l) = 0 \end{cases} \qquad y = y(x)$$

Aby uniknąć „znikania" warunku załóżmy $a^2+b^2>0$, $c^2+d^2>0$ (czyli, że przynajmniej jeden ze współczynników a i b oraz c i d nie znika).

Okazuje się, że oprócz oczywistego rozwiązania $y\equiv 0$ dla pewnych λ mogą istnieć nietrywialne rozwiązania $y\not\equiv 0$. Prześledźmy to na dwóch prostych przykładach

$$\begin{cases} y''+n^2 y = 0 & x\in[0,\pi] \\ y(0)=y(\pi)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y''+n^2 y = 0 \\ y'(0)=y'(\pi)=0 \end{cases}.$$

Mamy rozwiązania $y(x) = \sin nx$, $y(x) = \cos nx$ odpowiednio, i ich wielokrotności $c\sin nx$, $c\in\mathbb{R}$.

Nietrudno sprawdzić, że zag. $(*)$ z warunkami albo $y(0)=y(\pi)=0$, albo $y'(0)=y'(\pi)=0$ ma nietrywialne rozwiązania tylko dla $\lambda=n^2$.

Takie λ, dla których istnieje nietrywialne rozwiązanie nazywamy <u>wartością własną</u>, a odpowiadającą funkcję – <u>funkcją własną</u> zagadnienia (*). Zachodzi ogólniejsze

<u>Twierdzenie.</u> Istnieje ciąg $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots \uparrow \infty$ taki, że λ_n jest wartością własną zag. (*).

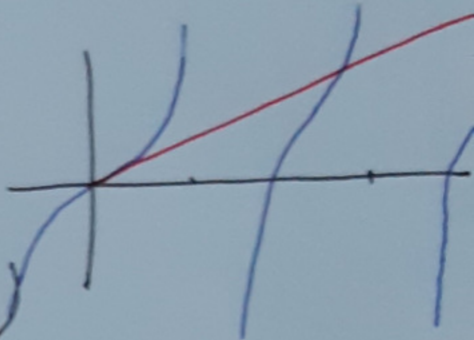
<u>Przykład:</u> warunki brzegowe $y(0) + y'(0) = 0$, $y(1) = 0$ dla (*).

$\lambda = 0 \quad y(x) = c(x-1)$

$\lambda < 0 \quad$ brak rozwiązań

$\lambda > 0 \quad c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x \;+\; \lambda(c_1\cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x) = 0$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\sqrt{\lambda} = \sqrt{\lambda}$ i patrząc na wykres funkcji $x \longmapsto \operatorname{tg} x$ widzimy, że istnieje jedyny pierwiastek λ w każdym przedziale $(n^2\pi^2, (n+\frac{1}{2})^2\pi^2)$, niezerowy gdy $n \neq 0$ jest całkowite.



Zagadnienie brzegowe niejednorodne

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = f & f = f(x) \\ y(0) = y(1) = 0 & \end{cases}$$

ma jedyne rozwiązanie gdy λ nie jest wartością własną.

Jeżeli λ jest wartością własną, to rozwiązań może wcale nie być, lub jest ich nieskończenie wiele.

Pamiętamy podobną sytuację w algebrze liniowej gdy rozważaliśmy układy równań liniowych.

Dla tych z Państwa, którzy spotkali się z szeregami Fouriera:

Związki zagadnień brzegowych z szeregami Fouriera

Dla funkcji $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ rozważamy jej szereg Fouriera

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

gdzie $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f$, $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx$,

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx$.

Zachodzi (trudne) twierdzenie: jeśli f, f' są kawałkami ciągłe (tzn. na każdym przedziale rozbicia $[0,2\pi]$ na pewną skończoną liczbę przedziałów), to sumy częściowe $S_N f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx + b_n \sin nx)$ szeregu Fouriera są zbieżne do $\frac{1}{2}\left(f(x+0)+f(x-0)\right)$ gdy $N\to\infty$ (tzn. do średniej z granic jednostronnych f w punkcie x). Teoria szeregów Fouriera zajmuje się m.in. badaniem jakie są inne warunki dostateczne na zbieżność (w jakimś sensie). Np. $f\in L^2[0,2\pi]$ (funkcja całkowalna z kwadratem: $\int_0^{2\pi} f^2(x)dx<\infty$) ma szereg F. zbieżny w L^2, tzn. $\int_0^{2\pi}(f-S_N f)^2 \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$.

Dla znacznie ogólniejszych zagadnień brzegowych rolę układów $\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ na $[0,\pi]$ pełnią ich funkcje własne.

Teoria Sturma - Liouville'a

Badamy operator różniczkowy drugiego rzędu

$Ly = (p(x)y'(x))' - q(x)y + \lambda y$ i równanie $Ly = 0$

na przedziale $(0, l)$ z warunkami brzegowymi (jak w (*))

$a y(0) + b y'(0) = 0$, $c y(l) + d y'(l) = 0$, $a^2 + b^2 > 0$, $c^2 + d^2 > 0$.

Twierdzenie Istnieje ciąg wartości własnych

$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \nearrow \infty$. Zera $(n+1)$pierwszej funkcji własnej y_{n+1} rozdzielają zera y_n [tak jak zera $\sin (n+1)x$ rozdzielają zera $\sin nx$].

Rozwinięcia wg funkcji własnych [analogiczne jak szeregi F. cosinusów lub sinusów] są zbieżne w $L^2(0, l)$ a dla $f \in C^2$ sumy częściowe są absolutnie zbieżne do f.

Uwaga: współczynniki p, q operatora L spełniać muszą założenia $p \in C^1$, $p(x) \geq p_1 > 0$, $q \in C$, $q \geq 0$.

Po tej dygresji wracamy do prostych zagadnień brzegowych, powiedzmy

(**) $y'' + (\lambda - q(x))y = 0$ na $(0,1)$ a warunki zapisujemy jako $y(0) \cos \alpha + y'(0) \sin \alpha = 0$, $y(1) \cos \beta + y'(1) \sin \beta = 0$ (jeżeli $a^2 + b^2 > 0$, $c^2 + d^2 > 0$, to takie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ istnieją).

Rozwiązujemy zagadnienie początkowe na $(0,1)$ dla $(**)$ z warunkami $u(0) = \sin\alpha$, $u'(0) = -\cos\alpha$ tak, aby spełniony był pierwszy warunek brzegowy. A także zag. z warunkiem końcowym $v(1) = \sin\beta$, $v'(1) = -\cos\beta$.

Jeżeli u i v są liniowo niezależne, to wyznacznik Wrońskiego $W[u,v] \neq 0$. A jeżeli $u = cv$, to jest to funkcja własna tego zagadnienia i $W[u,v]=0$. Inaczej mówiąc, zera W (rozumianego jako funkcja λ) - są to dokładnie wartości własne.

Funkcja Greena

Skonstruujemy funkcję, która w prosty sposób generuje rozwiązania niejednorodnych zagadnień brzegowych

Dla λ, które nie jest wartością własną określamy

$$G(x,t) = \frac{1}{W[u,v]} \begin{cases} u(x)v(t) & \text{dla } 0 \le x \le t \le 1, \\ u(t)v(x) & \text{dla } x \ge t. \end{cases}$$

Funkcja G ma następujące własności:

$$G(x,t) = G(t,x).$$

Dla zadanej f na przedziale $(0,1)$

$y(x) = \int_0^1 G(x,t) f(t)\,dt$ spełnia warunki brzegowe (takie jak u w 0 i v w 1) i równanie

$$y'' + (\lambda - q(x))y = f(x).$$

Aby to sprawdzić trzeba uważnie różniczkować y:

$$y'(x) = \frac{1}{W}\left\{ v'\int_0^x uf + vuf + u'\int_x^1 vf - uvf \right\}$$

$$y''(x) = \frac{1}{W}\left\{ v''\int_0^x uf + u''\int_x^1 vf + v'uf - u'vf \right\}$$

$=$ z równania na u i na v (**)

$$\frac{q(x)-\lambda}{W}\left\{ v\int_0^x uf + u\int_x^1 vf \right\} + f(x)$$

$= (q(x)-\lambda)\, y(x) + f(x)$, czyli równanie niejednorodne jest spełnione.

Uwaga: funkcja G nie jest klasy C^2, nie można jej różniczkować pod znakiem całki w wyrażeniu dla $y(x)$.

Jeżeli λ jest wartością własną, to [jak wcześniej była mowa] równanie niejednorodne na ogół nie ma rozwiązań (albo ma ich nieskończenie wiele).

Zagadnienia na wartości własne pojawią się, gdy będziemy badać równania różniczkowe cząstkowe i szukać ich rozwiązań z rozdzielonymi zmiennymi.