Algebra liniowa 1R, Lista 8

1. Zapisz w postaci wykładniczej: -1, $1+i$, $-1-\sqrt{3}i$, $7-7i$, $-5+5\sqrt{3}i$, $1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$.
2. Rozłóż wielomian $P(z)$ na czynniki liniowe nad $\mathbf{C}$, a także na czynniki liniowe i nierozkładalne kwadratowe nad $\mathbf{R}$. Wykorzystaj fakt, że liczba a jest pierwiastkiem P.
   (a) $P(z)=z^3-2z^2-5z+6$, $a=-2$;
   (b) $P(z)=z^4+2z^3+7z^2-18z+26$, $a=-2+3i$;
   (c) $P(z)=z^4-3z^3+3z^2-3z+2$, $a=i$;
   (d) $P(z)=z^5+2z^4+2z^3+10z^2+25z$, $a=1-2i$.
3. Napisz wielomian o współczynnikach rzeczywistych, taki że liczby 1, 3, $2+i$ są jego pierwiastkami.
4. Sprowadź do postaci Jordana (w razie potrzeby nad $\mathbf{C}$): $\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$.

---

5. Na bokach czworokąta wypukłego zbudowano (na zewnątrz tego czworokąta) kwadraty o środkach A, B, C, D. Udowodnij, że odcinki AC i BD są prostopadłe i mają tę samą długość.
6. Rozłóż wielomian $P(z)$ na czynniki liniowe nad $\mathbf{C}$, a także na czynniki liniowe i nierozkładalne kwadratowe nad $\mathbf{R}$.
   (a) $P(z)=z^4+1$;
   (b) $P(z)=z^4+4z^3+4z^2-4z-5$;
   (c) $P(z)=z^6+27$.
7. Niech $M\in M_{2\times 2}(\mathbf{C})$. Uzasadnij używając twierdzenia Jordana, że jeśli $M^{100}=0$, to $M^2=0$.
8. Sprowadź do postaci Jordana nad $\mathbf{C}$:
$$\begin{pmatrix}3&-4\\2&-1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}4&-1\\1&2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}3&1\\-1&5\end{pmatrix}.$$
9. Sprowadź macierze z poprzedniego zadania do rzeczywistej postaci Jordana.
10. Oblicz $\begin{pmatrix}1&1\\-1&3\end{pmatrix}^{50}$.
11. Oblicz $\begin{pmatrix}7&-4\\14&-8\end{pmatrix}^{64}$. Pomyśl jak zminimalizować ilość potrzebnych rachunków.
12. Oblicz $\begin{pmatrix}2\sqrt{3}&-7\\1&-\sqrt{3}\end{pmatrix}^{1232}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. Pomyśl jak zminimalizować ilość potrzebnych rachunków.
13. Znajdź możliwie dużo $X\in M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ spełniających równanie $X^2=\begin{pmatrix}6&2\\3&7\end{pmatrix}$.
14. Rozwiąż równania: (a) $(z+1)^n-(z-1)^n=0$; (b) $(z+i)^n+(z-i)^n=0$.
15. Uzasadnij wzór $x^{2n+1}-1=(x-1)\Pi_{k=1}^n\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1\right)$. Znajdź analogiczny wzór dla $x^{2n}-1$.

---

16. Uzasadnij (dla $z\neq 1$) wzór $1+z+z^2+\ldots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$. Dla $z=e^{ix}$ część rzeczywista tego wzoru da wzór na sumę $\sum_{k=0}^n\cos(kx)$, a część urojona da wzór na $\sum_{k=0}^n\sin(kx)$. Napisz te wzory; spróbuj przekształcić je do rzeczywistej postaci (tak, by w ostatecznej odpowiedzi były funkcje trygonometryczne, a nie eksponensy liczb urojonych).
17. Oblicz $(2+i)(5+i)(8+i)$. Wywnioskuj następujący wzór Strassnitzky'ego:
$$\frac{\pi}{4}=\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\mathrm{arctg}\frac{1}{5}+\mathrm{arctg}\frac{1}{8}.$$
18. Udowodnij, że $\Pi_{k=1}^n\cos\frac{2k\pi}{2n+1}=\pm 2^{-n}$; oraz że $\Pi_{k=1}^n\sin\frac{k\pi}{2n+1}=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$. Znajdź analogiczne wzory dla $\Pi_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{n}$ oraz dla $\Pi_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}$.
19. Wyznacz wszystkie takie wielomiany $W(x)$ o współczynnikach rzeczywistych, że dla każdej liczby rzeczywistej x spełniona jest równość $W(x^2)W(x^3)=(W(x))^5$.
20. Przeczytaj prolog książki W. Rudina *Analiza rzeczywista i zespolona.*