Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 3: lista M 14

30 stycznia 2020 r.

M14.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech dla $p \in \{1, 2, \infty\}$ symbol $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}_+$ oznacza normę macierzy indukowaną przez p-tą normę wektorową. Wykazać, że dla dowolnych macierzy $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zachodzi nierówność

$$\|AB\|_p \leqslant \|A\|_p \|B\|_p.$$

M14.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ będzie macierzą o elementach

$$\begin{array}{ll} b_{ii} = 1 & (i = 1, 2, \ldots, n), \\ b_{ij} = -1 & (i < j), \\ b_{ij} = 0 & (i > j). \end{array}$$

Sprawdzić, że $\det B \ll \operatorname{cond}_\infty(B)$, gdzie $\operatorname{cond}_\infty(B) := \|B\|_\infty \|B^{-1}\|_\infty$. Jaki stąd wniosek?

M14.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Jak ocenimy uwarunkowanie układu $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, o macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 1 \end{bmatrix},$$

dla $0 < \varepsilon \leqslant 0.01$?

M14.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $\tilde{\boldsymbol{x}}$ będzie przybliżonym rozwiązaniem układu $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, gdzie $\det A \neq 0$, $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{\theta}$. Niech $\boldsymbol{r} := \boldsymbol{b} - A\tilde{\boldsymbol{x}}$ oznacza *resztę*. Wykazać, że wówczas zachodzą nierówności

$$\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\| \leqslant \operatorname{cond}(A)\frac{\|\boldsymbol{r}\|}{\|A\|}, \qquad \frac{\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leqslant \operatorname{cond}(A)\frac{\|\boldsymbol{r}\|}{\|\boldsymbol{b}\|},$$

gdzie $\boldsymbol{x} := A^{-1}\boldsymbol{b}$ jest dokładnym rozwiązaniem.

M14.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ będzie *macierzą dominującą przekątniowo*, tj. taką, że

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Wykazać, że metoda eliminacji Gaussa bez wyboru elementów głównych zachowuje tę własność, tzn. że wszystkie macierze $A^{(k)}$ są dominujące przekątniowo. Wywnioskować stąd, że każda macierz dominująca przekątniowo jest nieosobliwa i posiada rozkład LU.

M14.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Załóżmy, że wszystkie wartości własne λ_i macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ są rzeczywiste i spełniają nierówności

$$0 < \alpha \leqslant \lambda_i \leqslant \beta \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Wykazać, że metoda iteracyjna Richardsona

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = (I - \tau A)\boldsymbol{x}^{(k)} + \tau\boldsymbol{b} \qquad (k \geqslant 0),$$

zastosowana do rozwiązania układu równań liniowych $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, jest zbieżna, jeśli $0 < \tau < 2/\beta$.

M14.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że jeśli A jest *macierzą ze ściśle dominującą przekątną*, tj.

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

to $\|B_J\|_\infty < 1$ i metoda Jacobiego jest zbieżna.

M14.8. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykazać, że jeśli A jest macierzą ze ściśle dominującą przekątną, to $\|B_S\|_\infty < 1$, a więc metoda Gaussa-Seidela jest zbieżna.

M14.9. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech macierz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ spełnia warunki

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}| \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

(Mówimy, że A jest macierzą z dominującą przekątną kolumnowo.)
Pokazać, że metoda iteracyjna Jacobiego, zastosowana do układu równań o macierzy A, jest zbieżna.

M14.10. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ będzie macierzą trójprzekątniową

$$T = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & & \\ & b_3 & a_3 & c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & b_n & a_n \end{bmatrix}.$$

Wyznaczyć rokład trójkątny macierzy T – przy założeniu, że istnieje.

26 stycznia 2020
Rafał Nowak