Algebra liniowa 1R, Lista 12

Wszystkie macierze których rozmiar nie jest explicite określony to macierze 3×3.

1. Uzasadnij następujące wzory. Załóż, że występujące w nich macierze odwrotne istnieją. a) $(M^{-1})^{-1} = M$; b) $\det(MNM^{-1}) = \det(N)$; c) $(\lambda I - M)^{-1} - (\mu I - M)^{-1} = (\mu - \lambda)(\mu I - M)^{-1}(\lambda I - M)^{-1}$; d) $\det(M^{-1}) = (\det(M))^{-1}$.
2. Znajdź wartości i wektory własne. Porównaj krotność pierwiastka wielomianu charakterystycznego z maksymalną możliwą liczbą odpowiadających mu liniowo niezależnych wektorów własnych.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
3. Znajdź wektory i wartości własne dla (a) obrotu o kąt θ wokół pewnej prostej; (b) rzutu na prostą; (c) rzutu na płaszczyznę; (d) symetrii względem prostej; (e) symetrii względem płaszczyzny. (O wszystkich prostych i płaszczyznach o których mowa w tym zadaniu zakładamy, że przechodzą przez 0.)
4. Wektory $(1, -2, 2)^\top, (-3, 0, 1)^\top, (7, 1, 0)^\top$ są wektorami własnymi przekształcenia liniowego $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ o wartościach własnych odpowiednio $-1, -3, 2$. Znajdź macierz M tego przekształcenia.
5. Znajdź wszystkie wymierne pierwiastki wielomianów. Stwierdź też, ile mają one pierwiastków rzeczywistych. (a) $x^3 + 5x^2 + 2x - 8$, (b) $x^3 + 5x^2 + 5x + 4$, (c) $2x^3 - 10x^2 + 7x + 3$, (d) $6x^3 + 7x^2 - x - 2$, (e) $-x^3 - 7x^2 + 3x + 27$, (f) $-x^3 + 7$, (g) $2x^3 - (1 + 2\sqrt{2})x^2 + (\sqrt{2} - 1)x + \sqrt{2}$.
6. Napisz co najmniej trzy macierze izometrii w których pierwszym wierszem jest $(3/5, \sqrt{7}/5, -3/5)$.

---

7. Macierze A i A^{-1} mają całkowite wyrazy. Co wynika stąd o $\det(A)$?
8. Niech $X, Y, Z \in \mathbf{R}^3$ będą niezerowymi wektorami, A macierzą, zaś $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ dwoma różnymi liczbami, przy czym $AX = \lambda X$, $AY = \lambda Y$, $AZ = \mu Z$. Udowodnij, że jeśli X, Y są lnz, to X, Y, Z są lnz.
9. Zdiagonalizuj macierz M: znajdź wartości własne i bazę wektorów własnych; zapisz M w postaci PDP^{-1} z diagonalnym D; znajdź nowe współrzędne w których macierz M staje się diagonalna; wyraź nowe współrzędne przez stare, a stare przez nowe. $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$; $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
10. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$ – która z tych macierzy diagonalizuje się, a która nie?
11. Niech ciąg (a_n) będzie zadany rekurencyjnie: $a_0 = 1$, $a_1 = 7$, $a_2 = -1$, $a_{n+3} = 4a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n$. Wyprowadź jawny wzór na n-ty wyraz tego ciągu.
12. Następujące przekształcenia są izometriami $\mathbf{R}^3$; przedstaw każde z nich jako złożenie translacji i izometrii liniowej. Znajdź macierz części liniowej. (a) odbicie względem płaszczyzny $x + z = 1$; (b) odbicie względem prostej $x = z = 1$; (c) obrót o $\pi/2$ wokół prostej $y = z = 1$ (są dwa takie obroty; wybierz dowolny z nich).
13. Znajdź macierz izometrii liniowej F, takiej że $F((2, 2, -1)^\top) = (0, 3, 0)^\top$.
14. Znajdź macierz izometrii liniowej F, takiej że $F((2, 2, -1)^\top) = (1, -1, \sqrt{7})^\top$. Ile jest takich izometrii?
15. Ślad pewnej izometrii wynosi -3. Co to za izometria?
16. Znajdź macierz obrotu o $\frac{\pi}{6}$ wokół prostej $x = -y = \frac{z}{3}$, w którąkolwiek stronę. Następnie wytłumacz komuś w którą stronę obracałeś.
17. Znajdź macierz złożenia obrotu prawoskrętnego wokół prostej $X = t(2, 1, 2)^\top$ o kąt $\frac{\pi}{4}$ (przekształcenia $R_{(2,1,2)^\top, \frac{\pi}{4}}$) i odbicia w płaszczyźnie prostopadłej do osi tego obrotu.
18. Niech A będzie liniową izometrią $\mathbf{R}^3$ zmieniającą orientację, taką że liczba 1 jest jej wartością własną. Uzasadnij, że A jest odbiciem względem pewnej płaszczyzny.

---

19. Załóżmy, że macierz A ma 3 różne wartości własne, i że $AB = BA$. Uzasadnij, że macierz B jest diagonalizowalna.
20. Jak może wyglądać zbiór wszystkich wartości własnych liniowej izometrii $\mathbf{R}^3$? Opisz wszystkie możliwości. Uwzględnij zespolone wartości własne.
21. Udowodnij, że każda zachowująca 0 izometria $\mathbf{R}^3$ jest liniowa. [Robi się to podobnie jak dla $\mathbf{R}^2$.]
22. Uzasadnij, że każda izometria $\mathbf{R}^3$ jest złożeniem co najwyżej czterech odbić (w płaszczyznach).
23. Które macierze 2×2 dają się rozszerzyć do macierzy izometrii rozmiaru 3×3? Spróbuj sformułować różne warunki konieczne i różne warunki dostateczne.