(1) (Płaszczyzna Niemyckiego) Niech $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \geq 0\}$. Oznaczmy $L_1 = \{(x,0) \colon x \in \mathbb{R}\}$ oraz $L_2 = L \setminus L_1$. Dla $(x,y) \in L$ oraz $r > 0$ przez $B_e((x,y),r)$ oznaczymy kulę w $\mathbb{R}^2$ w metryce euklidesowej. Jeżeli $(x,y) \in L_2$, niech

$$\mathcal{B}(x,y) = \{B_e((x,y),\frac{1}{i}) \colon i = 1,2,3,\ldots,\ y > \frac{1}{i}\}.$$

Jeżeli $(x,0) \in L_1$, niech

$$\mathcal{B}(x,0) = \{B_e((x,\frac{1}{i}),\frac{1}{i}) \cup \{(x,0)\} \colon i = 1,2,3,\ldots\}.$$

Niech $\mathcal{T}$ będzie topologią generowaną przez $\bigcup_{(x,y)\in L} \mathcal{B}(x,y)$.

(a) Zauważyć, że $(L,\mathcal{T})$ jest przestrzenią ośrodkową.

(b) Pokazać, że $(L,\mathcal{T})$ zawiera dyskretną podprzestrzeń mocy continuum.

(c) Pokazać, że $(L,\mathcal{T})$ nie jest przestrzenią normalną.
Wskazówka: Rozważmy $C = \{(x,y) \in L_2 \colon x,y \in \mathbb{Q}\}$. Załóżmy nie wprost, że dla każdego $A \subseteq L_1$ istnieją rozłączne zbiory otwarte $A \subseteq V_A$ i $L_1 \setminus A \subseteq U_A$. Rozważmy $\{C \cap V_A \colon A \subseteq L_1\}$.

(2) Pokazać, że płaszczyzna Niemyckiego jest przestrzenią Tichonowa (czyli $T_{3\frac{1}{2}}$, przestrzeń Tichonowa nazywamy też przestrzenią całkowicie regularną).

(3) Pokazać, że produkt dwóch strzałek nie jest przestrzenią normalną.
Wskazówka: Rozważmy $D = \{(-x,x) \colon x \in \mathbb{R}\}$ oraz zbiory postaci $A \subseteq D$ i $D \setminus A$.

(4) Niech X będzie przestrzenią topologiczna T_1. Pokazać, że X jest przestrzenią regularną wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $x \in X$ i dla każdego otoczenia otwartego $x \in U$ istnieje otoczenia otwarte $x \in V$ takie, że $\overline{V} \subseteq U$.

(5) Pokazać, że przestrzeń $\mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ jest homeomorficzna z $\mathcal{C}$, gdzie $\mathcal{C}$ jest zbiorem Cantora, a $\mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ oznacza $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \ldots$. Wywnioskować, że istnieje ciągłe przekształcenie $\mathcal{C}$ na $[0,1]^{\mathbb{N}}$. Zarówno $\mathcal{C}^{\mathbb{N}}$ jak i $[0,1]^{\mathbb{N}}$ bierzemy z topologią produktową.

(6) Pokazać, że przestrzeń zwarta metryczna jest przestrzenią ośrodkową.

(7) Niech (X,d) będzie przestrzenią ośrodkową metryczną. Pokazać, że (X,d) zanurza się w przestrzeń $[0,1]^{\mathbb{N}}$. Innymi słowy, (X,d) jest homeomorficzna z podprzestrzenią $[0,1]^{\mathbb{N}}$. Zatem w szczególności konkluzja zachodzi dla przestrzeni zwartych metrycznych.

(8) Pokazać, że płaszczyzna z metryką centrum, jak również płaszczyzna z metryką rzeka, są przestrzeniami zupełnymi.

(9) Pokazać, że $C[0,1]$ z metryką $d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$ nie jest przestrzenią zupełną.

(10) Niech $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ będzie zbiorem ciągów liczb naturalnych z metryką d zdefiniowaną w zadaniu (1) na liście 2.

(a) Pokazać, że metryka d jest równoważna metryce określonej w Tw. 1.5.2 w skrypcie ($\mathbb{N}$ bierzemy z metryką dyskretną).

(b) Pokazać, że $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ jest przestrzenią zupełną w każdej z tych dwóch metryk.