Pracownia z analizy numerycznej

Zadanie: P2.2

Prowadzacy: Witold Karczewski

Wiktor Pilarczyk

January 16, 2020

1 Aproksymacja

Aproksymacja jak sama nazwa wskazuje polega na przybliżaniu, pojecie to jest głównie zwiazane z funkcjami, które można przybliżać za pomoca prostszych funkcji (latwiejszych do obliczenia lub zawierajacych mniej informacji). W informatyce oraz wielu dziedzinach pokrewnych czestym problemem sa ograniczone zasoby (np. pamieć lub moc procesora), przez co zamiast obliczania dokładnego wyniku, zadowalajaca jest jego aproksymacja, która nieznacznie sie różni. Jeśli już przybliżamy funkcje to chcemy, aby była optymalna, czyli aby przy korzystaniu z tych samych zasobów było to najlepsze oszacowanie wyniku.

1.1 Podstawowe definicje i własności

Definicja iloczynu oraz normy, która wyraża sie poprzez ten iloczyn pozwala zdefiniować przestrzeń liniowa (unitarna), dzieki której znalezienie elementu optymalnego sprowadza sie do rozwiazania układu liniowego. Podstawowe własności iloczynu skalrnego:

a) $< f, g > = < g, f >$
b) $< f, \alpha g + \beta h > = < f, \alpha g > + < f, \beta h >$
c) $< f, f > \geq\ 0$

Jeśli f $\in$ E i g $\in$ G, gdzie E jest przestrzenia unitarna, a G jest jej podprzestrzenia to $w^* \in$ G najlepiej aproksymuje f (jest elementem optymalnym), gdy:

$$\|f - w^*\| = dist(f, G) = inf_{g \in G}\ \|f - g\| \tag{1}$$

Dla każdej podprzestrzeni skończeniowymiarowej G istnieje punkt optymalny (Kincaid 367) oraz w jest optymalny $\Leftrightarrow\ \ f - w^*\ \perp\ G$ (Kincaid 369).
Baza ortogonalna $\{B_i\}$ jest to zbiór wektorów z przestrzeni unitarnej, która ma nastepujace własności:

a) $< B_i, B_j > =\ 0\ \ i \neq j$
b) $\forall_{f \in E}\ \ f = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i B_i$

wiec dowolny f $\in$ E można przedstawić za pomoca sumy wektorów bazy.

2 Aproksymacja średniokwadratowa na zbiorze dyskretnym

2.1 Iloczyn skalarny na zbiorze dyskretnym

Jeśli mamy zbiór n + 1 punktów $\{x_i\}$ gdzie $i \in \mathbb{N}$ oraz $i \leq n$, jak również funkcje f i g, dla których znane sa wartości w punktach $\{x_i\}$ definiujemy iloczny skalarny:

$$< f, g >= \sum_{i=0}^{n} f(x_i)g(x_i) \tag{2}$$

Proof. Sprawdzamy czy (2) spełnia definicje iloczynu skalranego.

a) Weżmy dowolne f i g dla zbioru n + 1 elementowego punktów $\{x_i\}$.

$< f, g > = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)g(x_i) = \sum_{i=0}^{n} g(x_i)f(x_i) = < g, f >$

b) Weżmy dowolne $\alpha i \beta \in \mathbb{R}$ f, g i h dla zbioru n + 1 elementowego punktów $\{x_i\}$.

$< f, \alpha g + \beta h > = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ (\alpha g(x_i) + \beta h(x_i)) =$

$= \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ \alpha g(x_i) + \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ \beta h(x_i) = < f, \alpha g > + < f, \beta h >$

c) Weżmy dowolne f dla zbioru n + 1 elementowego punktów $\{x_i\}$.

$< f, f >= \sum_{i=0}^{n} f(x_i)f(x_i) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)^2 \geq 0$

□

2.2 Wielomian optymalny na zbiorze dyskretnym

Niech $\{B_i\}$ bedzie baza dla Π_k. Spróbujmy znaleźć wielomian optymalny w_k^* k-tego stopnia dla dowolnej funkcji f, która jest określona dla zbioru n + 1 elementowego punktów $\{x_i\}$.
Ponieważ $\{B_i\}$ jest baza wiec $w_k^* = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i B_i$, wiec dla dowolnego i otrzymujemy równanie:

$$< f - w_k^*, B_i >=< f, B_i > - < w_k^*, B_i > \tag{3}$$

z (1) otrzymujemy:

$$< f, B_i > - < w_k^*, B_i >= 0 \tag{4}$$

przekształcając równanie:

$$< f, B_i >= \sum_{j=0}^{k} \alpha_i < B_j, B_i > \tag{5}$$

wiec otrzymujemy wzór na α_i:

$$\alpha_i = frac{<} f, B_i > \sum_{j=0}^{k} < B_j, B_i > \tag{6}$$

Skoro dla każdego i otrzymujemy równanie (5), możemy stworzyć układ równań i zapisać je w macierzy:

$$\begin{pmatrix} < B_0, B_0 > & < B_1, B_0 > & \cdots & < B_k, B_0 > \\ < B_0, B_1 > & < B_1, B_1 > & \cdots & < B_k, B_1 > \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ < B_0, B_k > & < B_1, B_k > & \cdots & < B_k, B_k > \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} < f, B_0 > \\ < f, B_1 > \\ \vdots \\ < f, B_k > \end{bmatrix} \tag{7}$$

Wiec Jeśli baza jest ortogonalna wtedy $< B_i, B_j = 0$ dla $i \neq j$, wiec otrzymujemy macierz diagonalna:

$$\begin{pmatrix} < B_0, B_0 > & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & < B_1, B_1 > & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & < B_k, B_k > \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} < f, B_0 > \\ < f, B_1 > \\ \vdots \\ < f, B_k > \end{bmatrix} \tag{8}$$

Wiec dla każdego i otrzymujemy układ równań:

$$< f, B_i > = \ \alpha_i < B_i, B_i > \tag{9}$$

Co umożliwia łatwe wyliczenie wielomianu optymalnego, gdyż korzystajac z (8) oraz własności bazy ortogonalnej otrzymujemy:

$$w_k^* = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i B_i = \sum_{i=0}^{k} \frac{< f, B_i >}{< B_i, B_i >} B_i \tag{10}$$

2.3 Obliczanie bazy ortogonalnej

Do obliczenia bazy ortogonalnej skorzystamy z zależności rekurencyjnej:

$$P_0(x) = 1 \qquad\qquad P_1(x) = 1 - a_1$$

$$P_k(x) = (x - a_k)P_{k-1}(x) - b_k P_{k-2}(x) \tag{11}$$

gdzie

$$a_k = \frac{< xP_{k-1}, P_{k-1} >}{< P_{k-1}, P_{k-1} >} \qquad b_k = \frac{< P_{k-1}, P_{k-1} >}{< P_{k-2}, P_{k-2} >}$$

2.4 Postać potegowa wielomianu

Przy szukaniu wielomianu optymalnego wystarczy spamietywać wartości w podanych punktach x_i, aby wyliczyć jego postać skorzystamy z uogólnionego algorytmu Clenshawa, wymaga to spamietywania współczynników: α_i, a_i oraz b_i. Dla bazy zadanej powyżej (10), algorytmu Clenshawa przyjmuje postać:

$$V_k = \alpha_k + (x - a_{k+1})V_{k+1} - b_{k+2}V_{k+2}$$

gdzie

$$V_{n+1} = V_{n+2} = 0$$

wtedy

$$w_n^* = V_0$$

3 Obliczenia

3.1 Funkcja x^5

Stopień wielomianu optymalnego,a wielkość δ

Stopień wielomianu optymalnego	δ dla punktów równoodległych	δ dla punktów różnoodległych
1	1800000	1800000
2	140000	10000
3	1900	1
4	0.000001	0.000001

Wielomian 4 stopnia jest wielomianem interpolacyjnym dla zadanych punktów, dzieki czemu delta może być minimalna (nie może być równa zero, ponieważ wiaże sie to z błedem obliczania wartości wielomianu w zadanych punktach).

`xpot5.png`

Figure 1: Dla punktów równoodległych

3.2 Funkcja $x^{xsin(x)}$

Stopień wielomianu optymalnego,a wielkość δ

Stopień wielomianu optymalnego	δ dla punktów równoodległych	δ dla punktów różnoodległych
0	19	5
1	12	0.6
2	9	0.2
3	3	0.02

Delta dla punktów różnoodległych, które można podzielić na podzbiory, wokół jednego punktu jest znacznie mniejsza od delty dla punktów równoodległych dla tego samego zakresu.

xpot52.png

Figure 2: Dla punktów różnoodległych

xpotxsin1.png

Figure 3: Dla punktów równoodległych

3.3 Funkcja $sin(x)$

Stopień wielomianu optymalnego,a wielkość δ

Stopień wielomianu optymalnego	δ dla punktów równoodległych	δ dla punktów różnoodległych
0	0.0002	0.1
1	0.0000000000001	0.001

Delta dla punktów równoodległych jest znacznie mniejsza, ponieważ wartości w tych punktach nieznacznie sie różnia.

xpotxsin2.png

Figure 4: Dla punktów różnoodległych

sin.png

Figure 5: Dla punktów równoodległych

4 Analiza wyników

4.1 Stopień wielomianu optymalnego

Im zadana delta jest mniejsza tym stopień wielomianu jest wiekszy, wynika to z tego iż im mniejszy bład chcemy otrzymać tym dokładniejsza musi być aproksymacja. Na podstawie przykładu dla funkcji x^5 można też wywnioskować, iż dla wystarczajaco małej delty stopień wielomianu optymalnego bedzie równy liczbie punktów minus jeden, wtedy otrzymany wielomian optymalny jest też wielomianem interpolacyjnym dla zadanego zbioru.

sin2.png

Figure 6: Dla punktów różnoodległych

4.2 Rozmieszczenie punktów

Istotny wpływ ma też odległość miedzy zadanymi punktami, ponieważ im odległość miedzy nimi jest bliższa tym wieksze prawdopodobieństwo, że wartość funkcji w tych punktach bedzie do siebie zbliżona. Dla zbiorów, które składaja sie z mniejszych podzbiorów oscylujacych wokół jednego punktu jest wyższe prawdopodobieństwo, że błedy dla wielomianów optymalnych zadanego stopnia beda niższe niż dla zbioru punktów równoodległych - własność ta można zaobserwować na przykładzie dla funkcji $x^{xsin(x)}$. Istnieja przypadki dla, których to stwierdzenie nie jest spełnione, dla powyższego przykładu z $sin(x)$, skorzystano z okresowości sinusa, dlatego funkcja miała zbliżone wartości w równoodległych punktach stad wartość delty znaczaco sie różniła od punktów różnoodległych na tym samym przedziale.

References

[1] D. Kincaid, W. Cheney: *Analiza numeryczna, WNT, 2005*,

[2] G. Dahlquist, A. Bjorck: *Numerical Methods in Scientific Computing, Vol.I, SIAM, 2008.*,

[3] M. Dryja, J. i M. Jankowscy: *Przeglad metod i algorytmów numerycznych cz. 2, WNT, 1988*,