Rafał Nowak

Notatki do wykładu analizy numerycznej
Kwadratury

18 grudnia 2018

Rozważmy zbiór $\mathbb{F} \equiv \mathbb{F}[a, b]$ funkcji całkowalnych (ograniczonych i ciągłych prawie wszędzie w $[a, b]$). Funkcjonał liniowy I_p odwzorowujący $\mathbb{F}$ w zbiór liczb rzeczywistych $\mathbf{R}^1$ określamy następująco:

$$I_p(f) := \int_a^b p(x)f(x)\,dx \qquad (f \in \mathbb{F}), \tag{1}$$

gdzie *funkcja wagowa* $p \in \mathbb{F}$ jest nieujemna w $[a, b]$, znika w skończonej liczbie punktów tego przedziału.

Definicja 1. Kwadraturą liniową *nazywamy funkcjonał Q_n określony następująco*

$$Q_n(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \qquad (n > 0). \tag{2}$$

gdzie liczby

$$A_k \equiv A_k^{(n)} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

– *nazywamy* współczynnikami (wagami), *a liczby*

$$x_k \equiv x_k^{(n)} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

– węzłami kwadratury Q_n. Resztą kwadratury Q_n *nazywamy funkcjonał*

$$R_n(f) := I_p(f) - Q_n(f).$$

Definicja 2. *Mówimy, że kwadratura Q_n jest* rzędu r, *jeśli*
(i) $R_n(f) = 0$ dla każdego wielomianu $f \in \Pi_{r-1}$ i
(ii) istnieje taki wielomian $w \in \Pi_r \setminus \Pi_{r-1}$, że $R_n(w) \neq 0$.

Lemat 1. *Jeśli kwadratura Q_n jest określona wzorem (2), to jej rząd nie przekracza $2n + 2$.*

Kwadratury interpolacyjne

Rozważamy kwadratury

$$Q_n(f) := I_p(L_n[f]), \tag{3}$$

gdzie $L_n[f]$ jest wielomianem interpolacyjnym dla funkcji f w punktach x_k. Wprowadźmy oznaczenie na *wielomian węzłowy*:

$$\omega(x) := (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n).$$

Współczynniki kwadratury interpolacyjnej wyrażają się wzorem

$$A_k := I_p(\lambda_k) := \int_a^b p(x)\lambda_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b p(x) \prod_{j=0,\, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}\,\mathrm{d}x \qquad (k = 0, 1, \ldots, n), \tag{4}$$

a reszta – wzorem

$$\begin{aligned} R_n(f) &= \int_a^b p(x)\omega(x)f[x, x_0, x_1, \ldots, x_n]\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b p(x)\omega(x)f^{(n+1)}(\xi_x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{5}$$

Ostatni wzór zachodzi przy założeniu, że $f \in C^{n+1}[a,\, b]$.

Twierdzenie 1 (Jacobi)**.** *Kwadratura Q_n określona wzorem (2) ma rząd $\geqslant n+1+m$ ($1 \leqslant m \leqslant n+1$) wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące dwa warunki:*
(i) Q_n jest kwadraturą interpolacyjną,
(ii) dla każdego wielomianu $u \in \Pi_{m-1}$ zachodzi równość $I_p(\omega u) = 0$.

Kwadratury Newtona-Cotesa

Kwadratury Newtona to kwadratury interpolacyjne z węzłami równoodległymi

$$x_k \equiv x_k^{(n)} := a + kh \qquad (k = 0, 1, \ldots, n;\ h := (b-a)/n), \tag{6}$$

stosowane do obliczenia całki (1) dla $p \equiv 1$, czyli całki

$$I(f) := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Zatem

$$Q_n(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k f(a+kh),$$

gdzie zgodnie z wzorem (4)

$$A_k \equiv A_k^{(n)} = I(\lambda_k) = \int_a^b \lambda_k(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!}\int_0^n \prod_{j=0,\,j\neq k}^{n} (t-j)\,dt \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Twierdzenie 2. *Reszta R_n kwadratury Newtona-Cotesa wyraża się wzorem*

$$R_n(f) = \begin{cases} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\displaystyle\int_a^b \omega(x)\,\mathrm{d}x & (n = 1, 3, \ldots), \\ \frac{f^{(n+2)}(\eta)}{(n+2)!}\displaystyle\int_a^b x\,\omega(x)\,\mathrm{d}x & (n = 2, 4, \ldots), \end{cases} \tag{7}$$

gdzie ξ, $\eta \in (a, b)$.

W wypadku $n = 1$ kwadratura Newtona-Cotesa nosi nazwę *wzoru trapezów*. Mamy $h = b - a$, $x_0 = a$, $x_1 = b$, $A_0 = A_1 = h/2$,

$$Q_1(f) := \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)], \tag{8}$$

$$R_1(f) = \frac{f''(\xi)}{2!}\int_a^b (x-a)(x-b)\,\mathrm{d}x = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi) = -\frac{h^3}{12}f''(\xi). \tag{9}$$

Dla $n = 2$ otrzymujemy *wzór Simpsona*:

$$h = (b-a)/2, \quad x_0 = a, \quad x_1 = (a+b)/2, \quad x_1 = b,$$
$$A_0 = A_2 = h/3, \quad A_1 = 4h/3,$$

$$Q_2(f) := \frac{b-a}{6}[f(a) + 4f((a+b)/2) + f(b)], \tag{10}$$

$$\begin{aligned} R_2(f) &= \frac{f^{(4)}(\eta)}{4!}\int_a^b x(x-a)(x-\frac{a+b}{2})(x-b)\,\mathrm{d}x \qquad (11) \\ &= -\frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\eta) = -\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\eta). \end{aligned}$$

Złożone kwadratury Newtona-Cotesa

Złożony wzór trapezów

$$T_n(f) := h\sum_{k=0}^{n}{}'' f(t_k), \tag{12}$$

Reszta R_n^T jest równa

$$R_n^T(f) = -n\frac{h^3}{12}f''(\xi) = -(b-a)\frac{h^2}{12}f''(\xi). \tag{13}$$

dla pewnego $\xi \in (a,b)$.

Złożony wzór Simpsona

$$\begin{aligned} S_n(f) \quad &:= \quad \frac{h}{3}\{f(t_0) + 4f(t_1) + +2f(t_2) + 4f(t_3) + 2f(t_4) + \ldots \\ &\qquad \ldots + 2f(t_{2m-2}) + 4f(t_{2m-1}) + f(t_{2m})\} \\ &= \quad \frac{h}{3}\left\{2\sum_{k=0}^{m}{}'' f(t_{2k}) + 4\sum_{k=1}^{m} f(t_{2k-1})\right\} \\ &= \quad \frac{1}{3}(4T_n - T_m) \qquad (n = 2m). \end{aligned} \tag{14}$$

Rzeszta $R_n^S(f)$ jest równa

$$R_n^S(f) = -m\frac{h^5}{90}f(\eta) = -(b-a)\frac{h^4}{180}f^{(4)}(\eta), \tag{15}$$

gdzie $\eta \in (a,b)$.

Metoda Romberga

$$\begin{aligned} h_k &:= (b-a)/2^k, \\ x_i^{(k)} &:= a + ih_k \qquad (i = 0,1,..,2^k), \\ T_{0k} &:= T_{2^k}(f) = h_k \textstyle\sum_{i=0}^{2^k}{}'' f(x_i^{(k)}). \end{aligned}$$

$$T_{mk} = \frac{4^m T_{m-1,k+1} - T_{m-1,k}}{4^m - 1} \qquad (k = 0,1,\ldots;\ m = 1,2,\ldots).$$

Tak więc, zaczynając od złożonych wzorów trapezów $T_{00}, T_{01}, T_{02},\ldots$ budujemy trójkątną **tablicę Romberga** przybliżeń całki (zob. tablicę 1).

Tabela 1. Tablica Romberga

T_{00}					
T_{01}	T_{10}				
T_{02}	T_{11}	T_{20}			
T_{03}	T_{12}	T_{21}	T_{30}		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
T_{0m}	$T_{1,m-1}$	$T_{2,m-2}$	$T_{3,m-3}$	$\ldots$	T_{m0}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\ddots$

Można wykazać, że

1^o $T_{mk} = I - c_m^* h_k^{2m+2} - \ldots \qquad (k \geqslant 0;\ m \geqslant 1)$;

2^o $T_{mk} = \sum_{j=0}^{2^{m+k}} A_j^{(m)} f(x_j^{(m+k)}) \qquad (k \geqslant 0;\ m \geqslant 1)$
(elementy k-tego wiersza tablicy Romberga zawierają te same węzły, co T_{0k}), gdzie $A_j^{(m)} > 0$ $(j = 0,1,\ldots,2^{m+k})$;

3^o dla każdej pary k, m T_{mk} jest sumą Riemanna;

4^o każdy z wzorów $T_{m0}, T_{m1},\ldots$ jest kwadraturą rzędu $2m+2$;

5^o (wniosek z 2^o, 3^o, 4^o i z twierdzenia o zbieżności ciągu kwadratur o dodatnich współczynnikach) niech $I = I(f)$, gdzie f jest dowolną funkcją ciągłą w $[a,b]$; wówczas

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} T_{mk} = I \qquad (m = 1,2,\ldots); \\ \lim_{m\to\infty} T_{mk} = I \qquad (k = 0,1,\ldots). \end{aligned}$$