Równania Zwyczajne

I RZĘDU

- o rozdzielonych zmiennych

$y'(t) = f(t)\,g(y)$ $\Rightarrow$ jeśli $g(y_0) \neq 0$ oraz f, g ciągłe w otoczeniu t_0, y_0 to istnieje otoczenie t_0, gdzie istnieje dokł. jedno rozw

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{g(s)}\,ds = \int_{t_0}^{t} f(s)\,ds$$

- r. liniowe

$y'(t) + p(t)y(t) = q(t)$ * gdy $q \equiv 0$ to jednorodne

-> czynnik całkujący $\underbrace{\text{np } e^{P(t)} \text{ gdzie } P \text{ - pierwotna } p(t)}$ $r(t) = e^{\int p(s)ds}$

jedn. $y'(t) + p(t)y(t) = 0 \Rightarrow y(t) = Ce^{-P(t)}$

niejedn. $y'(t) + p(t)y(t) = q(t) \Rightarrow y(t) = e^{-P(t)}\left(\int_{t_0}^{t} q(s)e^{P(s)}ds + y_0 e^{P(t_0)}\right)$

$\boxed{\text{Tw}}$ funkcje $p(t), q(t)$ - ciągłe na (a,b) $a \leq t_0 \leq b$

wtedy $\begin{cases} y'(t) + p(t)y(t) = q(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ ma dokładnie jedno rozw na tym odcinku

- r. w różniczkach zupełnych

$M(t,y) + N(t,y)y' = 0$ oraz $\frac{\partial}{\partial y}M(t,y) = \frac{\partial}{\partial t}N(t,y)$

istnieje $\varphi(t,y)$ t. że $M(t,y) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi$ $N(t,y) = \frac{\partial}{\partial y}\varphi$

wtedy rozwiązaniem równania jest $\varphi(t,y)$ ← Różniczka zupełna

$\boxed{\text{Tw}}$ Jeśli $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N}$ jest zależne tylko od t

to równanie ma czynnik całkujący $e^{\int \phi(t)}$ gdzie $\phi(t) = \dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N}$

$\boxed{\text{Tw}}$ Jeśli $\dfrac{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ jest zależne tylko od y

to równanie ma czynnik całkujący $e^{\int \varphi(y)}$ gdzie $\varphi(y) = \dfrac{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$

- Równanie Bernoulliego

$\left[\frac{dy}{dt} + p(t)y(t) = q(t)\,y^m(t)\right]$ $y' + p(t)y(t) = q(t)y^m$ dla $m \neq 0,1$

mnożymy przez $(1-m)\,y^{-m}$

$$(1-m)\frac{y'}{y^m} + (1-m)p(t)\,y^{1-m} = (1-m)q(t)$$

podstawiamy $z(t) = y^{1-m}(t)$ wtedy: $z'(t) + (1-m)z(t) = (1-m)q(t)$ to już umiemy

- r. jednorodne

$\frac{\partial y}{\partial t} = f\left(\frac{y}{t}\right)$ ← podstawienie $z(t) = \frac{y(t)}{t}$

$z'(t)\cdot t + z(t) = f(z) \Rightarrow z'(t) = \dfrac{f(z) - z}{t}$ teraz wystarczy $\displaystyle\int \frac{dz}{f(z) - z} = \ln t + C$

↑ rozdzielone zmienne

ROZWIĄZANIA

$$(*) \begin{cases} y' = f(y,t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

LOKALNE

$\boxed{\text{Tw Picarda-Lindelöfa}}$

Jeżeli f: (1) $|f(y_1,t) - f(y_2,t)| \leq k|y_1 - y_2|$
(2) f ciągła ze względu na t

wtedy $\exists T>0$ t. że $(*)$ ma jedyne rozw na $[0,T]$

$\boxed{\text{Tw}}$ Jeśli f ciągła w otoczeniu $(y_0, 0)$ to $\exists T>0$ t. że $(*)$ ma rozw na $[0,T]$

$\boxed{\text{Tw Kryterium Osgooda}}$

Jeśli istnieje $\omega: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - ciągła t. że (1) $|f(y_1,t) - f(y_2,t)| \leq \omega(|y_1 - y_2|)$
(2) $\int_0^\delta \frac{1}{\omega(s)} ds = \infty$ dla każdego $\delta > 0$

to rozw $(*)$ jest jedyne

GLOBALNE

$\boxed{\text{Tw}}$ Jeżeli f: (1) $|f(y_1,t) - f(y_2,t)| \leq k|y_1 - y_2|$ dla $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ z tym samym k (globalnie)
(2) f ciągła ze względu na t

to rozw $(*)$ jest globalne

$\boxed{\text{Tw}}$ Jeżeli f: (1) $|f(y_1,t) - f(y_2,t)| \leq k|y_1 - y_2|$ na otoczeniu $(y_0, 0)$
(2) f - ciągła ze wzgl. na t

oraz

$y(t) \leq g(t)$ gdzie $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - ciągła

to rozw $(*)$ jest globalne

w $\mathbb{R}^n$

$\boxed{\text{Tw Piccarda - Lindelofa}}$

(1) $\|f(x_1,t) - f(x_2,t)\| \leq k \|x_1 - x_2\|$
(2) f ciągła ze wzgl. na t

$\Rightarrow$ rozw jedyne

$\boxed{\text{Tw}}$ ciągła w otoczeniu $(y_0, 0) \Rightarrow$ istn. rozw

$\boxed{\text{Tw}}$ f. ciągła, globalnie Lipschitzowska

lub

lokalnie Lipschitzowska + $x(t) \leq g(t)$ dla g-ciągłej

to rozw $(*)$ jest globalne

Równania liniowe II rzędu

$$(*)\begin{cases} y''(t)+p(t)y'(t)+q(t)y(t)=f(t) \\ y(t_0)=y_0 \\ y'(t_0)=y_1 \end{cases}$$

Tw o jednoznaczności

p, q - ciągłe na (α,β) $t_0 \in (\alpha,\beta)$

wtedy zagadnienie jednorodne ma dokładnie jedno rozwiązanie dla $\alpha \leq t \leq \beta$

Wroński an

$$W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}$$

** no i dla $\mathbb{R}^n$ analogicznie

- y_1, y_2 są lnz $\iff W(y_1,y_2)(t) \neq 0$ dla dowolnego t
- fundamentalny zbiór rozwiązań
  - zbiór lnz. rozwiązań równania

Tw

y_1, y_2 - rozwiązania zagadnienia jednorodnego

y_1 i y_2 są lnz

wtedy dowolne rozw. zagad. jedn to

$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$

Tw (niejednorodne)

p, q, f - ciągłe φ - dowolne rozw $(*)$

y_1, y_2 - lnz rozw. jednorodnego równania

wtedy rozw ogólne:

$y(t) = \varphi(t) + C_1y_1(t) + C_2y_2(t)$

▶ Równania o stałych współczynnikach

-> wielomian charakterystyczny

▶ szukanie rozw. szczególnego

$$ay'' + by' + cy = e^{rt} w(t)$$

$r \in \mathbb{C}$ $w(t)$ - wielomian stopnia n

Jeśli r - k-krotny pierwiastek wielomianu char (może być 0)

to $\varphi(t)$ należy szukać wśród funkcji

$$t^k e^{rt} W(t) \quad \text{gdzie } \deg W = \deg w$$

Równania wyższego rzędu

$$a_n(t)y^{(n)}(t) + \dots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t)$$

+ warunki początkowe $y(0)=y_0, \dots, y^{(n-1)}(0)=y_{n-1}$

Gdy $y_1(t) \dots y_n(t)$ lnz rozw to

$$y(t) = C_1y_1(t) + \dots + C_ny_n(t)$$

$$W(y_1,\dots,y_n)(t) = \det\begin{pmatrix} y_1(t) & \cdots & y_n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \neq 0 \iff y_1 \dots y_n \text{ są lnz}$$

Stałe współczynniki -> liczymy wielomian charakterystyczny

gdy r_i - k-ty pierwiastek wielomianu char to:

$e^{r_i t}, te^{r_i t}, \dots, t^{k-1}e^{r_i t}$ - funkcje odpowiadające temu pierwiastkowi

dla $z = a+bi$ $z_2 = a-bi$

$e^{at}\cos bt$ oraz $e^{at}\sin bt$

Równanie niejednorodne -> zgadujemy rozw szczególne

-> liczymy jednorodne

$\boxed{Tw}$ funkcja y jest rozw $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y_0 = y(t_0) \end{cases}$ $\iff$ jest rozw $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\,ds$

$\boxed{\text{Lemat Gronwalla}}$

$u(t) \geq 0$ spełnia $u(t) \leq a + b\int_{t_0}^{t} u(s)ds$ dla $a, b \geq 0$

wtedy

$u(t) \leq a e^{b(t-t_0)}$ dla każdego $t \in (a,b)$

$\boxed{\text{Iteracje Piccarda}}$ dla $\begin{cases} y' = f(y,t) \\ y_0 = y(t_0) \end{cases}$

$y_0(t) = y_0$

$y_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_0(s))ds$

$\vdots$

$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))ds$

$\boxed{\text{Tw Liouville'a}}$

$y' = Ay$

Φ - macierz fundamentalna

$\Phi(t) = \Phi(0)\, e^{-\int_0^t trA(s)\,ds}$

STABILNOŚĆ

dla $x' = Ax$ $\quad x(0) = x_0$

Tw

1. Jeśli istnieje wart. wł. t. że $Re\lambda > 0$ to rozwiązanie niestabilne
2. Jeżeli wszystkie wart. wł. $Re\lambda < 0$ to rozw. asymptotycznie stabilne
3. Jeżeli wszystkie wart. wł. $Re\lambda \leq 0$ oraz wart. wł dla których liczba wekt. wł. jest mniejsza niż krotność spełn. $Re\lambda < 0$ to rozw jest stabilne.

Tw dla układu nieliniowego

$x' = f(x)$

A - macierz linearyzacji $A = f'(x_0)$

Rozw $x = x_0$ jest stabilne jeżeli wszystkie wart. wł $Re\lambda < 0$

niestabilne gdy $\exists\lambda$ $Re\lambda > 0$.

Def

stabilność

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ że dla dowolnego war. pocz

$\|x(0) - \bar{x}(0)\| \leq \delta \Rightarrow \sup_{t \geq 0} \|x(t) - \bar{x}(t)\| \leq \varepsilon$

asymptotyczna stabilność

$\exists\delta > 0$

$\|x(0) - \bar{x}(0)\| \leq \delta \Rightarrow \|x(t) - \bar{x}(t)\| \leq e^{-ct}$

dla pewnego c

rozw niestabilne gdy nie jest stabilne

Tw Liouville'a

$x_1(t)$ - rozw $x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$ (*)

$x_2(t) = x_1(t) \int \frac{e^{\int a(t)dt}}{(y_1(t))^2}$ $\quad x_1, x_2$ - lnz $\quad x_2$ - rozw *

BVP typowe $y'' + \lambda y = 0$

λ - dla których istnieje nietrywialne rozw to wartość własna

(rozw to f. własna)

UKŁADY RÓWNAŃ

(*) $x' = Ax$ $\quad x = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ $\quad X(0) = (x_0, \dots, x_n)$

Tw $x_1(t), \dots, x_n(t)$ - lnz rozw (*) $\Leftarrow\Rightarrow$ $x_1(\overset{t_0}{0}), \dots, x_n(\overset{t_0}{0})$ są lnz

Tw Jeżeli λ_j, v_j - wartości i wektory własne macierzy A

- $x_j(t) = e^{\lambda_j t} v_j$ - rozwiązania $x' = Ax$
- jeżeli v_j są lnz to x_j są lnz

~~Rozw~~ Jeżeli v_j są lnz to rozw ogólne

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t} v_j$$

Tw Jeżeli $z = x + iy$ jest rozw o wart zespolonych $x' = Ax$ to x, y są rozwiązaniami $x' = Ax$ o wart. rzeczywistych

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}$$

dla $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\quad e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$

dla $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda t} & \dots \\ & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \dots \\ & & \ddots & \end{pmatrix} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{3!} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \\ & & 1 & t & & \\ & & & & \ddots & \end{pmatrix}$$

Tw rozw $x' = Ax$ $\quad x(0) = x_0$

$$x(t) = e^{tA} x_0$$

MACIERZ FUNDAMENTALNA

$X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ gdzie $x_i(t)$ - rozwiązania $x' = Ax$

Tw
$$e^{tA} = X(t) X^{-1}(0)$$

- e^{tA} - jest macierzą fundamentalną
- $X(t)$ jest fundamentalna gdy $X'(t) = AX(t)$

Tw jeśli $X(t), Y(t)$ - macierze fund. to $X(t) = Y(t) \cdot C$ gdzie C - macierz o stałych współczynnikach

Układ niejednorodny

$$x' = Ax + f(t) \qquad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \qquad f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

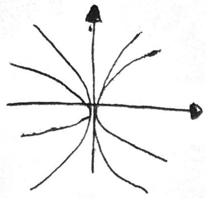
Zasada Duhamela

$$x(t) = e^{tA} x_0 + \int_0^t e^{tA} e^{-sA} f(s)\,ds$$

Portret fazowy — wykres $(x(t), y(t))$

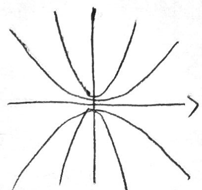
$x' = Ax$ w $\mathbb{R}^2$

1) $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$



$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ • do zewnątrz [nie]

$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ • do środka [stabilne]

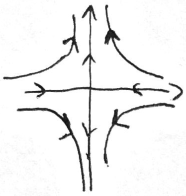


[nie]

$\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ • do zewnątrz

$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ • do środka

[stabilne]

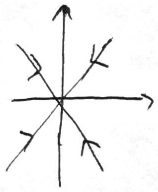


<siodło>

$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ - str. na odwrót

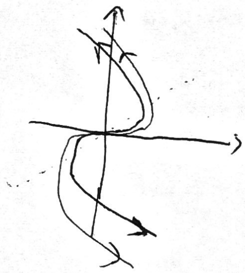
2) $A = \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda \end{pmatrix}$



$\lambda < 0$ [stabilne]

$\lambda > 0$ - str. na zewnątrz [niestabilne]

3) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{pmatrix}$

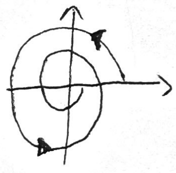


$\lambda > 0$ [niestabilne]

$\lambda < 0$ [stabilne]

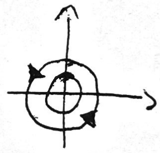
4) $\lambda \in \mathbb{C}$ $\lambda = \alpha + i\beta$

$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$



$\alpha > 0$ $\beta > 0$

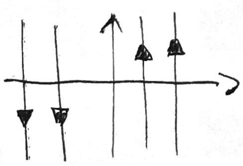
$\alpha > 0$, $\beta < 0$ [niestabilne]



$\alpha = 0$ $\beta > 0$

$\alpha = 0$ $\beta < 0$

5) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$



Punkt hiperboliczny x jeśli wszystkie wart. wł. w układzie zlinearyzowanym mają $\mathrm{Re}\lambda \neq 0$.

Punkt stacjonarny $x' = f(x)$

$\overset{*}{x}$ t. że $f(\overset{*}{x}) = 0$

LINEARYZACJA

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases} \sim \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + g(x,y)$$

- robimy to korzystając z Taylora czyli $A = f'(x_0)$

Tw Grobman–Hartman

Jeśli $x=0$ - punkt hiperboliczny $x' = Ax + g(x)$

gdzie $g \in C^1$ $g(0) = 0$ $\lim_{|x| \to 0} \frac{|g(x)|}{|x|} = 0$ to

portret fazowy $x' = f(x)$ w otoczeniu $x=0$ jest topologicznie równoważny $x' = Ax$

Równania Cząstkowe

I rzędu

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} = 0 \qquad a = (a_1, \dots, a_n)$$

$$\parallel$$

$$\langle a, \nabla u \rangle = 0$$ ← pochodna kierunkowa w kierunku pola $a(x)$

rozw

$u(x) = f(C)$

C - całka pierwsza

układ charakterystyk

$x' = a(x)$

* mówi, że u jest stałe na charakterystykach (jest całką pierwszą układu char)

Gdy równanie niejednorodne

$$\sum a_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} = f(u, x)$$

to do układu char dopisujemy $u' = f(u, x)$

rozw:

$u(x) = \phi(C_1, C_2)$

całki pierwsze

II rzędu

Klasyfikacja $\sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_{x_i} + c(x)$

$A(x) = \{a_{ij}(x)\}$ - macierz współczynników

wiemy, że $A(x)$ jest symetryczna (dla f. ciągłej u)

- r. eliptyczne → A jest ściśle dod (lub ściśle ujemnie) określona
- r. hiperboliczne → A ma sygnaturę $(n-1, 1)$ *czyli jedna wart. wł. jest innego znaku niż pozostałe
- r. paraboliczne → $\sum_{i,j}^{n-1} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} - u_{x_n}$ * nie ma pochodnej 2 rzędu wzgl. jednej zmiennej niezależnej

R

** ważna metoda **

możemy założyć że $u(x,t) = v(x) w(t)$

wtedy ograniczamy się do ~~nie kto~~ szczególnych rozwiązań ale wtedy jest łatwiej

dochodzimy do

$$\frac{v''(t)}{v(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)} = const$$

← bo dwie funkcje zależne od różnych zmiennych aby były równe muszą być const.

Szeregi Fouriera

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx \right)$$

[to działa tylko na przedziale $(-\pi, \pi)$]

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx$$

Równanie fali

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

d'Alembert : dowolne rozw jest postaci $u(x,t) = p(x-ct) + q(x+ct)$

(wtedy $u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c} \cdot \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds$ dla $\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$

/

Równanie Transportu

$$u_t + c u_x = 0$$

$u(x,t) = F(x-ct)$ ← bierze się to stąd, że u jest stałe na charakterystykach (czyli prostych $x - ct = k$)

ogólniej

$$a(x,t)\,u_x + b(x,t)\,u_t = f(u)$$

jest ~~stałe~~ na $\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{a(x,y)}{b(x,y)}$ ma przyrost

$\frac{du}{dt} = f(u,x,t)$ ← to chyba tak

← to jest $\frac{d}{dt}(u(x(t),t))$