A. Kwiatkowska	TOPOLOGIA	LISTA 1	28.02.2020

(1) Sprawdzić, że norma $\|\cdot\|$ na przestrzeni liniowej X zadaje w tej przestrzeni metrykę ρ wzorem $\rho(x,y) = \|x-y\|$. Zauważyć, że taka metryka jest *niezmiennicza na przesunięcia*: $\rho(x+z, y+z) = \rho(x,y)$ dla $x, y, z \in X$.

(2) Sprawdzić, że funkcja $d_r \colon \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$ zdefiniowana na wykładzie jest metryką (tzw. metryka "rzeka").

(3) Sprawdzić, że wzór $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ określa normę w przestrzeni $C[0,1]$ funkcji ciągłych na $[0,1]$.

(4) Sprawdzić, że wzór $\|f\| = \int_0^1 |f(x)|\, \mathrm{d}x$ także określa normę w przestrzeni $C[0,1]$.

(5) Sprawdzić, że wzór $\|f\| = |f(0)| + \sup_x |f'(x)|$ określa normę w przestrzeni $C^1[0,1]$, funkcji mających ciągłą pochodną.

(6) Dla podanych podzbiorów prostej rzeczywistej wyznaczyć ich wnętrze, domknięcie i brzeg:

$$\emptyset,\ \mathbb{R},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{N},\ \mathbb{R}\setminus\mathbb{N},\ \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\ [0,1),\ (0,\infty),\ (0,1)\cap\mathbb{Q}.$$

(7) Na płaszczyźnie euklidesowej $(\mathbb{R}^2, d_e)$ wyznaczyć wnętrze, brzeg i domknięcie zbiorów
 (a) $A = \{(x,y)\colon 0 \le x < 1, 0 \le y < 1\}$;
 (b) $B = \mathbb{R}\times\{0\}$;
 (c) $C = \mathbb{N}\times\mathbb{R}$;
 (d) $D = \{(x,y)\colon x^2+y^2 \le 1\}$;
 (e) $E = \{(x,y)\colon y = x^2\}$.
 Następnie wyznaczyć wnętrze, brzeg i domknięcie powyższych zbiorów w metryce "rzeka".

(8) Udowodnij wzory dla podzbiorów przestrzeni metrycznej (X,ρ) i podaj przykład na istotność inkluzji:
 (a) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;
 (b) $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cup\overline{B}$;
 (c) $\overline{A\cap B} \subseteq \overline{A}\cap\overline{B}$;
 (d) $X\setminus\overline{A} = \mathrm{Int}\,(X\setminus A)$;
 (e) $X\setminus \mathrm{Int}\,(A) = \overline{X\setminus A}$.

(9) Sprawdzić, że w przestrzeni metrycznej (X,ρ) sfera postaci $\{y : \rho(x,y) = r\}$ jest zbiorem domkniętym.

(10) Pokazać, że w przestrzeni metrycznej (X,d) domknięcie $\overline{A}$ zbioru $A\subseteq X$ jest równe zbiorowi tych $x\in X$, dla których $B(x,\delta)\cap A \neq \emptyset$ dla każdego promienia $\delta > 0$.

(11) Zbadać, czy zawsze $\overline{B(x,r)} = \{y\colon d(x,y) \le r\}$.

(12) W przestrzeni metrycznej X brzeg $\mathrm{Bd}\,(A)$ zbioru A można zdefiniować przez warunek $x\in\mathrm{Bd}\,(A)$ jeśli $B(x,\delta)\cap A \ne \emptyset \ne B(x,\delta)\setminus A$ dla każdego $\delta > 0$. Sprawdzić następujące zależności (i pokazać na przykładzie, że inkluzja może być właściwa)
 (a) $\mathrm{Int}\,(A) = A\setminus\mathrm{Bd}\,(A)$;
 (b) $\overline{A} = A\cup\mathrm{Bd}\,A$;
 (c) $\mathrm{Bd}\,(A\cup B)\subseteq\mathrm{Bd}\,(A)\cup\mathrm{Bd}\,(B)$;
 (d) $\mathrm{Bd}\,(A) = \mathrm{Bd}\,(X\setminus A)$.