# Pracownia z analizy numerycznej

Zadanie: P1.25

Prowadzący: Witold Karczewski

Wiktor Pilarczyk

10 listopada 2019

## 1 Wielomiany i Algorytm Clenshawa

Szereg Taylora umożliwia dowoloną funkcję f $\in$ C$^{n+1}$ przybliżyć za pomoca wielomianu stopnia n. Wielomiany ze względu na swoje własności takie jak różniczkowalność lub ciągłość, znalazły szerokie zastosowanie m.in. w analizie matematycznej lub ekonomii. Ważnym aspektem jest liczenie pochodnej wielomianu, która pozwala na dokladniejszą analizę zachowania się funkcji.

Wielomiany Czebyszewa jest to zbiór wielomianów zadanych rekurencją:

$$T_0(x) = 1 \qquad T_1(x) = x$$

$$T_k(x) = 2x\ T_{k-1}(x) - T_{k-2}(x) \tag{1}$$

Albo wzorem trgonometrycznym:

$$T_k(x) = \begin{cases} \cos(k \arccos x)\ dla\ |x| \leqslant 1 \\ \cosh(k \operatorname{arccosh} x)\ dla\ x > 1 \\ \cosh(k \operatorname{arccosh} -x)\ dla\ x < -1 \end{cases} \tag{2}$$

Wielomiany te są wzajemnie ortogonalne, przez co tworzą bazę przestrzeni wielomianów.

Algorytm Clenshawa został skonstruowany do rekurencyjnego obliczania liniowej kombinacji wielomianów Czebyszewa, ale ogólnie stosuje się go do funkcji definiowalnych za pomocą trójtermowego równania rekurencyjnego:

$$s_n := \sum_{i=1}^{n} w_i\ P_i$$

gdzie $w_i$ są współczynnikami, a $P_k$ ciągiem wielomianów zadany wzorem rekurencyjnym:

$$P_0(x) = a_0 \qquad P_1(x) = (a_1 x - b_1)P_0(x)$$

$$P_k(x) = (a_k x - b_k)P_{k-1}(x) - c_k P_{k-2}(x) \qquad (k = 2, 3, ...) \tag{3}$$

przy czym $a_k, b_k, c_k$ są danymi stałymi.

Algorytm Clenshawa można też wyliczyć za pomocą zadanej rekurencji:

$$B_{n+1}(x) = 0 \qquad B_{n+2}(x) = 0$$

$$B_k(x) = w_k + (a_{k+1}x - b_{k+1})B_{k+1}(x) - c_{k+2}B_{k+2}(x) \qquad (k = n, n-1, ..., 0) \quad (4)$$

$$s_n(x) = a_0 B_0$$

### 1.1 Dowód równoważności algorytmów (3) i (4)

Teza:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i P_i = a_0 B_0$$

Lemat:

$$P_k B_k - c_{k+1} B_{k+1} P_{k-1} = \sum_{i=k}^{n} w_i P_i \tag{5}$$

Przeprowadzony zostanie dowód indukcyjny lematu po k.
Baza: $k = n$

$$P_n B_n - c_{n+1} B_{n+1} P_{n-1} = P_n B_n = P_n w_n = \sum_{i=n}^{n} w_i P_i$$

Założenie Indukcyjne:

$$P_k B_k - c_{k+1} B_{k+1} P_{k-1} = \sum_{i=k}^{n} w_i P_i \tag{6}$$

Teza Indukcyjna:

$$P_{k-1} B_{k-1} - c_k B_k P_{k-2} = \sum_{i=k-1}^{n} w_i P_i \tag{7}$$

*Dowód.*

$$P_{k-1} B_{k-1} - c_k B_k P_{k-2} =^{z\ def\ B}$$

$$= P_{k-1}(w_{k-1} + (a_k x - b_k)B_k - c_{k+1}B_{k+1}) - c_k B_k P_{k-2} =$$

$$= P_{k-1} w_{k-1} + B_k((a_k x - b_k)P_{k-1} - c_k P_{k-2}) - c_{k+1} B_{k+1} P_{k-1} =$$

$$= P_{k-1} w_{k-1} + B_k P_k - c_{k+1} B_{k+1} P_{k-1} = P_{k-1} w_{k-1} + \sum_{i=k}^{n} w_i P_i =^{(6)}$$

$$= \sum_{i=k-1}^{n} w_i P_i$$

Na mocy zasady o indukcji

$$P_k B_k - c_{k+1} B_{k+1} P_{k-1} = \sum_{i=k}^{n} w_i P_i$$

Rozpisując $a_0 B_0$ oraz korzystając z lematu (5) otrzymujemy:

$$a_0 B_0 = a_0 w_0 + a_0(a_1 x - b_1) B_1 - a_0 c_2 B_2 = w_0 P_0 + P_1 B_1 - c_2 B_2 P_0 =$$

$$= w_0 P_0 + \sum_{i=1}^{n} w_i P_i = \sum_{i=0}^{n} w_i P_i$$

□

# 2 Obliczenia

## 2.1 Wielomiany Czebyszewa

Porównujemy dwa algorytmy (3) i (4) za pomocą, których zostanie obliczona pochodna wielomianu Czebyszewa. Na podstawie wzoru trygonometrycznego (2) obliczamy pochodną wielomianu:

$$T_k'(x) = \begin{cases} \frac{-k\sin(k\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} \; dla \; |x| \leqslant 1 \\ \frac{k\sinh(k\,\mathrm{arccosh}\, x)}{\sqrt{x^2-1}} \; dla \; x > 1 \\ \frac{(-1)^{k+1} k \sinh(k\,\mathrm{arccosh}(-x))}{\sqrt{x^2-1}} \; dla \; x < -1 \end{cases} \tag{8}$$

za pomocą tego wzoru będzie wyliczana wartość, którą powinny otrzymać algorytmy.
Dla współczynników $a_0 = a_1 = 1$, $c_0 = c_1 = 0$, $b_k = 0$, $c_l = 1$ i $a_l = 2$ gdzie $k \in \mathrm{N}$ i $n > 1$ algorytmy (3) i (4) obliczają $P_k$ które są kolejnymi wielomianami Czebyszewa (z (1)).
Jeżeli chcemy obliczyć $P_k'$. Dla algorytmu (3) otrzymujemy:

$$P_k'(x) = a_k P_{k-1}(x) + (a_k x - b_k) P_{k-1}'(x) - c_k P_{k-2}'(x) \tag{9}$$

a dla (4):

$$B_k'(x) = a_{k+1} B_{k+1}(x) + (a_{k+1} x - b_{k+1}) B_{k+1}'(x) - c_{k+2} B_{k+2}'(x) \tag{10}$$

Dla obu algorytmów będziemy obliczać wartość dwóch poprzednich wyrazów, aby uzyskać następny. Należy zwrócić uwagę, że istnieje też inna metoda polegająca na wyliczeniu wspołczynników przy odpowiednich potęgach wielomianu, a następnie obliczeniu pochodnych wielomianu dla kolejnych wyrazów wielomianu.

| Indeks Wielomianu | Przedział | Iteracja | Średni Błąd Względny dla Clen1 | Średni Błąd Względny dla Clen2 |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 - 100000 | 100 | 4.30668983454543547602e-19 | 4.30668983454543547602e-19 |
| 2 | -0.99 - 0.99 | 0.001 | 0.40550677751445726477 | 0.40550677751445726477 |
| 2 | -2 - -100000 | -100 | 4.30668983454543547602e-19 | 4.30668983454543547602e-19 |
| 20 | 2 - 100000 | 100 | 5.40279468529885346981e-18 | 5.40608687015868195457e-18 |
| 20 | -0.99 - 0.99 | 0.001 | 0.405506777514457257642 | 0.405506777514457257588 |
| 20 | -2 - -100000 | -100 | 5.40279468529885346981e-18 | 5.40608687015868195457e-18 |
| 39 | 2 - 100000 | 100 | 1.03496271173449142695e-17 | 1.03573948612679605078e-17 |
| 39 | -0.99 - 0.99 | 0.001 | 0.40558815601965413555 | 0.405588156019654135631 |
| 39 | -2 - -100000 | -100 | 1.03496271173449142695e-17 | 1.03573948612679605078e-17 |

Tabela 1: Pochodna Wielomianu Czebyszewa dla precyzji 64 bitowej

### 2.2 Dowolny wielomian

Ponieważ wielomiany Czebyszewa tworzą bazę wielomianów, można dowolny wielomian przedstawić za pomocą kombinacji liniowej tychże wielomianów. Niech:

$$W(x) = x^5 + 4x^4 + -x^3 - 3/2 \tag{11}$$

wtedy

$$W(x) = \frac{T_5}{16} + \frac{T_4}{2} + \frac{T_3}{16} + T_2 - \frac{T_1}{8}$$

Pochodna tego wielomianu wynosi:

$$W'(x) = 5x^4 + 16x^3 + -3x^2 \tag{12}$$

Otrzymane wyniki:

| Przedział | Iteracja | Średni Błąd Względny dla Clen1 | Średni Błąd Względny dla Clen2 |
|---|---|---|---|
| -100050 - 100050 | 100 | 6.75328483818304807646e-09 | 6.75328483818300485506e-09 |
| -1 - 1 | 0.001 | 142.584756274333033954 | 142.584756274333033954 |

## 3 Uwarunkowanie zadania

Uwarunkowanie zadania zależy od funkcji, którą mamy obliczyć, a nie od sposobu w jaki jest obliczana. Wskaźnik uwarunkowania zadania jest wielkością charakteryzującą wpływ zaburzeń danych na odkształcenie rozwiązania:

$$C_f(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{13}$$

Należy zwrócić uwagę na ten aspekt, aby wyniki były rzetelne.

## 3.1 Pochodne wielomianów Czebyszewa

Aby sprawdzić dla jakich x zadanie jest źle uwarunkowane należy sprawdzić kiedy:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{T_k'(x)}{T_k''(x)} = \infty \tag{14}$$

lub

$$\lim_{x \to x_0} \frac{T_k'(x)}{T_k''(x)} = -\infty \tag{15}$$

Zadanie jest dobrze uwarunkowane.

## 3.2 Dowolny wielomian

Obliczając pochodną funkcji (12) otrzymujemy:

$$W'(x) = 20x^3 + 48x^2 - 6x \tag{16}$$

Obliczając wskaźnik uwarunkowania zadania (13) otrzymujemy:

$$C_f(x) = \frac{x(x + \frac{8}{5} + \frac{\sqrt{79}}{5})(x + \frac{8}{5} - \frac{\sqrt{79}}{5})}{(x + \frac{6}{5} + \frac{\sqrt{\frac{87}{2}}}{5})(x + \frac{6}{5} - \frac{\sqrt{\frac{87}{2}}}{5})} \tag{17}$$

więc dla x w pobliżu $-\frac{6}{5} - \frac{\sqrt{\frac{87}{2}}}{5}$ oraz $-\frac{6}{5} + \frac{\sqrt{\frac{87}{2}}}{5}$.

# 4 Analiza wyników

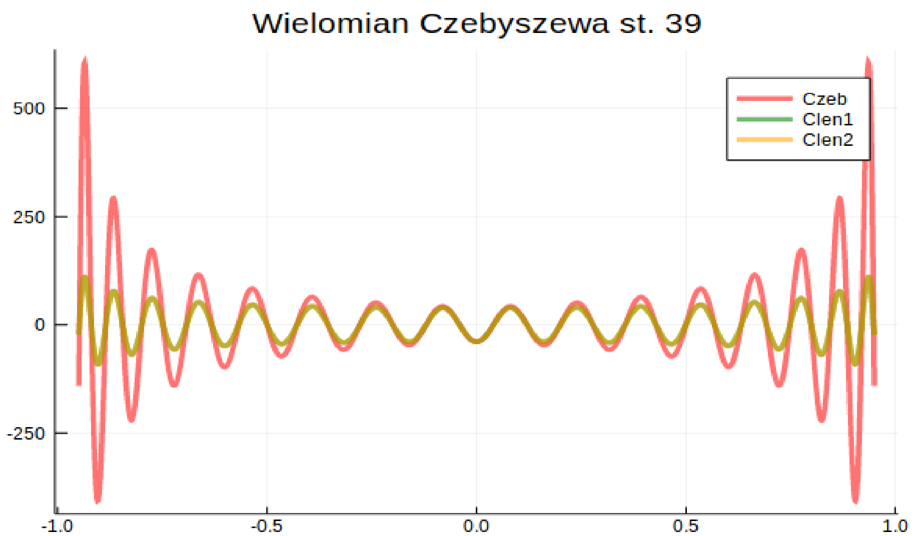
## 4.1 Wielomiany Czebyszewa

Porównując otrzymane wyniki, można wywnioskować, że dla płytkiej rekurencji jaką jest otrzymanie 2-giego wielomainu Czebyszewa błędy względne algorytmów są identyczne, lecz już dla większych indeksów (głebyszch wywołań) funkcja Clen1 (algorytm (3)) otrzymuje nieco lepsze wyniki niż Clen2 (algorytm (4)).

Warto zwrócić uwagę na duży błąd względny w przedziale -0.99 - 0.99, który jest spowodowany dużymi zmianami pochodnej wielomianu dla małych zaburzeń, miejsca zerowe w wielomianie znajdują się w przedziale od $(-1, 1)$. Zauważalne jest to na krańcach przedziału, dla których błąd względny jest wielkości 0.8. Wynika to z faktu, że dla pochodnej wielomianu Czebyszewa (indeksu $k > 2$):

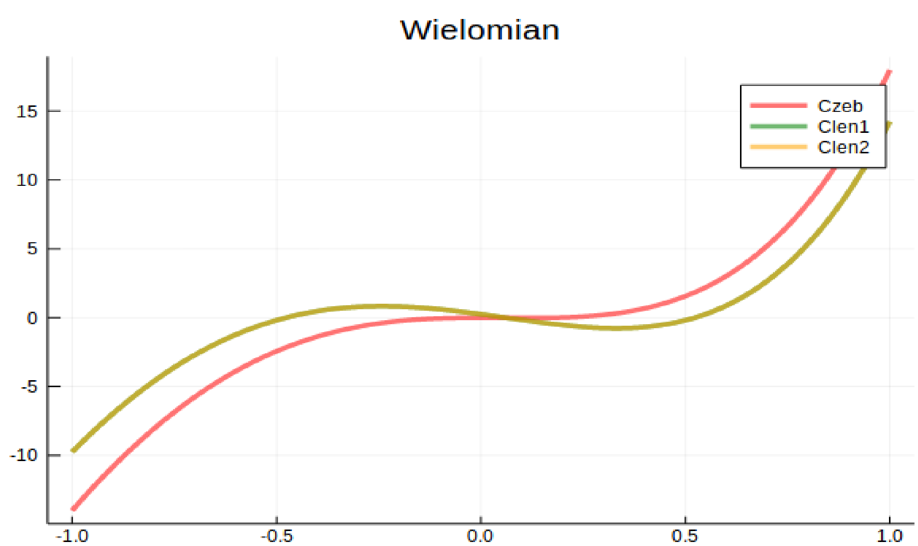
$$\lim_{x \to 1} T_k'(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to -1} T_k'(x) = -\infty$$




## 4.2 Dowolny wielomian

Oba algorytmy z dużą dokładnością obliczają pochodną wielomianu. Średni błąd względny dla przedziału $[-1, 1]$ jest wysoki, ponieważ w tym przedziale znajdują się punkty, w których zadanie jest źle uwarunkowane, jednym z nich jest $-\frac{6}{5} + \frac{\sqrt{\frac{87}{2}}}{5}$ w przybliżeniu wynosi $-0.119$ dla punktu $-0.1$ średni błąd względny wynosi $\approx 918$, a także w miejscach gdzie funkcja przyjmuje wartości bliskie 0 - $x = 0.18$ błąd względny wynosi $\approx 345$.



# Literatura


[1] D. Kincaid, W. Cheney: *Analiza numeryczna, WNT, 2005*,

[2] G. Dahlquist, A. Bjorck: *Numerical Methods in Scientific Computing, Vol.I, SIAM, 2008.*,

[3] M. Dryja, J. i M. Jankowscy: *Przegląd metod i algorytmów numerycznych cz 2, WNT, 1988*,