Wiktor Pikarczyk 308533

Zad 15

$y'' + ay = 1 \qquad y(0) = 0,\ y(1) = 0$

Rozwiązanie szczególne równania dla $a \neq 0$ $\quad y = \frac{1}{a}$

1° $a > 0$

Rozwiążmy najpierw $y'' + ay = 0$

Rozw ogólne tego równ $\quad y = c_1 \sin(\sqrt{a}\,x) + c_2(\cos(\sqrt{a}\,x))$

Więc rozw ogólne pocz. równ to

$$y = c_1 \sin(\sqrt{a}\,x) + c_2 \cos(\sqrt{a}\,x) + \frac{1}{a}$$

Chcemy żeby

$y(0) = 0$ więc $c_2 + \frac{1}{a} = 0$

$c_2 = -\frac{1}{a}$

$y(1) = 0$ więc $c_1 \sin(\sqrt{a}) - \frac{1}{a}\cos(\sqrt{a}) + \frac{1}{a} = 0$

1° $\sin(\sqrt{a}) \neq 0$

wtedy $c_1 = \dfrac{\frac{1}{a}(\cos(\sqrt{a}) - 1)}{\sin(\sqrt{a})}$

2° $\sin(\sqrt{a}) = 0$

1° $\sqrt{a} = k2\pi \quad k \in \mathbb{N}$

$\cos(\sqrt{a}) = 1$

więc $-\frac{1}{a}\cos(\sqrt{a}) + \frac{1}{a} = 0$ ✓

2° $\sqrt{a} = k2\pi + \pi \quad k \in \mathbb{N}$

więc $\cos(\sqrt{a}) = -1$

a $2 \cdot \frac{1}{a} = 0$ ↯

Więc dla $\sqrt{a} = k2\pi + \pi$, a dokładnie $a = (2k\pi + \pi)^2$ $k \in \mathbb{N}$

nie ma rozw

Wiktor Pikorwych 308533

Zad 15 c.d. 1

2° $a < 0$

Rozwiążmy najpierw $y'' + a y = 0$

Rozw ogólne tego równ. to $y = c_1 e^{\sqrt{-a}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{-a}\,x}$

Więc rozw ogólne pocz. równ. to

$$y = c_1 e^{\sqrt{-a}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{-a}\,x} + 1/a$$

chcemy żeby

$y(0) = 0$ więc $c_1 + c_2 + \frac{1}{a} = 0$ $\quad c_1 = -c_2 - \frac{1}{a}$

$y(1) = 0$ więc $c_1 e^{\sqrt{-a}} + c_2 e^{-\sqrt{-a}} + \frac{1}{a} = 0$

więc

$$c_2\left(e^{-\sqrt{-a}} - e^{\sqrt{-a}}\right) + \frac{1}{a}\left(1 - e^{\sqrt{-a}}\right) = 0$$

$$c_2 = \frac{\frac{1}{a}\left(e^{\sqrt{-a}} - 1\right)}{\left(e^{-\sqrt{-a}} - e^{\sqrt{-a}}\right)}$$

$$c_1 = -c_2 - \frac{1}{a}$$

więc dla $a < 0$ ma rozw

Wiktor Pikarowych 308533

Zad 15 C.P. 2

3° $a = 0$

$$y'' = 1, \quad y(0) = 0 \quad y(1) = 0$$

rozw ogólne $y'' = 0$

~~jest~~ to $y = c_1 + c_2 x$

rozw szczególne $y'' = 1$ to $y = \frac{1}{2}x^2$

więc ogólne to

$$y = c_1 + c_2 x + \frac{1}{2}x^2$$

chcemy

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$y(1) = 0 \Rightarrow c_2 + \frac{1}{2} = 0$$

$$c_2 = -\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2$$ spełnia równanie

rozw

Wiktor Pilarczyk 308533

Zad 17

$$y'' - \lambda y = 0 \qquad y(0) = y(B) = 0 \quad B \neq 0$$

1° $\lambda < 0$

~~przykładowy~~

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}\, x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\, x)$$

$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

$y(B) = 0 \Rightarrow c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}\, B) = 0$

1° $c_2 = 0$ rozw. trywialne

2° $c_2 \neq 0$ więc $\sin(\sqrt{-\lambda}\, B) = 0$

tzn.

$$\sqrt{-\lambda}\, B = n\pi \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\lambda = -\left(\frac{n\pi}{B}\right)^2$$

Więc mamy wartości własne $\lambda = -\left(\frac{n\pi}{B}\right)^2$ i

~~funkcje własne~~ dla tego λ $y(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{B} x\right)$ dla $n \in \mathbb{N}^+$

oraz funkcje własne dla tego λ $y(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{B} x\right)$ dla $n \in \mathbb{N}$

Scanned with CamScanner

Wiktor Pikarczyk 308533

~~Zad~~ 17 c.D

2° $\lambda = 0$

$$y'' = 0$$

więc

$$y = c_1 + c_2 x$$

chcemy

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$y(B) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

Mamy tylko rozw trywialne $y = 0$

3° $\lambda > 0$

$$y'' - \lambda y = 0$$

$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda} x}$$

chcemy

$$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0$$

$$y(B) = 0 \Rightarrow c_1 e^{\sqrt{\lambda} B} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda} B} = 0$$

więc

$$c_2 \left(\underbrace{-e^{\sqrt{\lambda} B} + e^{-\sqrt{\lambda} B}}_{\neq 0} \right) = 0$$

więc $c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

Mamy tylko rozw trywialne $y = 0$