TOPOLOGIA - ZADANIE DOMOWE 2

KACPER SOLECKI

Zadanie 1

Lipschitz $\Rightarrow$ jednostajna ciągłość. Weźmy $\varepsilon > 0$. Niech $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$.
Weźmy dowolne $x, x' \in X_1$. Jeżeli $\rho_1(x, x') < \delta$ to z założenia

$$\rho_2(f(x), f(x')) \leq L\rho_1(x, x') < L \cdot \delta = \varepsilon$$

Jednostajna ciągłość $\Rightarrow$ ciągłość. Weźmy dowolne $a \in X_1$.
Weźmy $\varepsilon > 0$. Z założenia istnieje δ taka, że

$$\forall_{x,x' \in X_1} \rho_1(x, x') < \delta \Rightarrow \rho_2(f(x), f(x')) < \varepsilon$$

Weźmy dowolny $x \in X_1$. Wtedy w szczególności podstawiając $x' = a$ otrzymujemy tezę.

ciągłość $\not\Rightarrow$ jednostajna ciągłość. Niech $f(x) = \frac{1}{x}$ będzie określone na $(0, 1)$. Oczywiście f jest ciągłe. W pobliżu 0 f ma nieograniczoną pochodną, więc w szczególności nie może być jednostajnie ciągłe (Dla danego ε nie może istnieć δ spełniająca tezę dla każdych $x, x' \in \mathbb{R}$, $|x - x'| < \delta$ bo $|\frac{1}{x} - \frac{1}{x'}|$ może być dowolnie duże).

jednostajna ciągłość $\not\Rightarrow$ Lipschitz. Niech $f(x) = \sqrt{x}$ będzie określone na $[0, 1]$. Jest to funkcja ciągła na przedziale domkniętym, więc jest jednostajnie ciągła. Załóżmy nie wprost, że zachodzi dla niej warunek Lipschitza z pewnym $L > 0$. Weźmy $x = 0$, $x' = \frac{1}{4L^2}$. Mamy wtedy:

$$\left|\sqrt{\frac{1}{4L^2}} - 0\right| = |\frac{1}{2L}| < L \cdot \frac{1}{4L^2} \Rightarrow |\frac{1}{2L}| < \frac{1}{4L}$$

co daje sprzeczność z założeniem $L > 0$.

Zadanie 2

Lokalnie zwarta przestrzeń Hausdorffa jest regularna. D-d:
Niech X będzie lokalnie zwartą przestrzenią Hausdorffa, $x \in X$ - dowolnym punktem. Niech $F \subseteq X$ będzie dowolnym zbiorem domkniętym t. że $x \notin F$. Z założenia istnieje otwarty U: $x \in U \subseteq X$, t. że $\overline{U}$ jest zwarty. Pokażę, że istnieją otwarte A, B: $x \in A$, $F \subseteq B$, $A \cap B = \emptyset$. Rozważmy 2 przypadki:

1^o. $F \cap \overline{U} = \emptyset$
Wtedy tym bardziej $F \cap U = \emptyset$. $A = U$, $B = X \setminus \overline{U}$ są szukanymi zbiorami.

Date: June 2020.

2º. $F \cap \overline{U} = C \neq \emptyset$
C jest domknięte jako przecięcie zbiorów domkniętych. Z zadania (9) z listy 4 wiemy, że zwarta przestrzeń Hausdorffa jest normalna, więc w szczególności też regularna. Stąd $\overline{U}$ jest regularne, czyli istnieją otwarte $A, B' \subseteq \overline{U}$: $x \in A$, $C \subseteq B'$, $A \cap B' = \emptyset$. Szukane zbiory to A oraz $B = B' \cup (X \setminus \overline{U})$

a). Niech Y będzie dowolną otwartą podprzestrzenią X.
Weźmy dowolny $x \in Y$. Z lokalnej zwartości X mamy otwarte $x \in U \subseteq X$ t. że $\overline{U}$ jest zwarte. $U \cap Y$ jest otwartym otoczeniem x. Z zadania (4) z listy 5 wiemy więc, że skoro X jest regularne (lemat), to istnieje V - otoczenie x t. że $\overline{V} \subseteq U \cap Y$.
Mamy więc $x \in V \subseteq Y$ oraz $\overline{V} \subseteq \overline{U}$, więc $\overline{V}$ jest zwarte jako zbiór domknięty w zwartym $\overline{U}$. Czyli Y jest lokalnie zwarte.

Przypadek Y domkniętego:
Weźmy analogiczne x oraz U. $V = (U \cap Y) \in \mathcal{T}_Y$, $\overline{V} \subseteq \overline{U} \cap \overline{Y} = \overline{U} \cap Y$. Stąd $x \in V \subseteq Y$ i podobnie $\overline{V}$ jest zwarte jako zbiór domknięty w zwartym $\overline{U}$.
Y jest lokalnie zwarte.

b). Tak:
Ustalmy $n \in \mathbb{N}$. Weźmy $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Niech $U_i \subset \mathbb{R} : U_i = (x_i - 1, x_i + 1)$. $\overline{U_i}$ są zwarte (przykład 2.1.7). Niech $U = U_1 \times ... \times U_n$. Wtedy U jest otwartym otoczeniem x, a $\overline{U} = \overline{U_1} \times ... \times \overline{U_n}$ jest zwarte jako skończony iloczyn przestrzeni zwartych.

c). Nie:
Weźmy $x \in \mathbb{Q}$. Niech U będzie dowolnym otoczeniem x. W szczególności U zawiera jakąś kulę: $(a, b) \subseteq U \Rightarrow [a, b] \subseteq \overline{U}$.
Rozważmy zstępujący ciąg zbiorów domkniętych w $\overline{U}$:
$A_n = [l_i, r_i]$, $l_i = a + \frac{b-a}{5}(1 + \frac{1}{n})^n$, $r_i = a + \frac{b-a}{5}(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$
$(1 + \frac{1}{n})^n \leq (1 + \frac{1}{n})^{n+1} \leq 4$ (dla naturalnych n), więc $A_i \subseteq [a, b]$. Załóżmy nie wprost, że $\overline{U}$ jest zwarte, czyli w szczególności $\cap A_i \neq \emptyset$. Niech $q \in \cap A_i$. jeżeli $q < e$ to od pewnego miejsca $l_i > q$, ponieważ l_i dąży do e od dołu (w $\mathbb{R}$). Jeżeli natomiast $q > e$ to od pewnego miejsca $r_i < q$ bo r_i też dąży do e (ale od góry). Otrzymujemy więc sprzeczność.

Alternatywnie, ponieważ odcinki o obu końcach niewymiernych stanowią bazę $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, wystarczy rozważać odcinki (a, b), $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Wówczas $q_n \in \mathbb{Q}$, $q_n \to a$ nie ma podciągu zbieżnego.

Zadanie 3

a). $\to X \in \mathcal{T}$, bo $X = \{\infty\} \cup (Y \setminus \emptyset)$
$\to \emptyset \in \mathcal{T}$, bo $\emptyset \subseteq Y$
$\to$ Niech $A, B \in \mathcal{T}$.

1°. $\{\infty\} \in A$ oraz $\{\infty\} \in B$
Wtedy $A = \{\infty\} \cup (Y \setminus I_1)$, $B = \{\infty\} \cup (Y \setminus I_2)$, gdzie I_1, I_2 - skończone.
$A \cap B = \{\infty\} \cup (Y \setminus (I_1 \cup I_2))$, $(I_1 \cup I_2)$ też jest skończone, więc $A \cap B \in \mathcal{T}$.

2°. $\{\infty\} \notin A \vee \{\infty\} \notin B$
Wtedy $A \cap B \subseteq Y \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$.

$\rightarrow$ Niech $A_i \in \mathcal{T}$
Jeżeli $\{\infty\} \in \bigcup A_i$ to dla pewnego j: $A_j = \{\infty\} \cup (Y \setminus I)$, I skończone, więc $\bigcup A_i$ można też oczywiście zapisać w tej postaci dla pewnego $I' \subseteq I$.
W przeciwnym przypadku $\bigcup A_i \subseteq Y$ więc $\bigcup A_i \in \mathcal{T}$.

b). Każdy $\{y\}$, $y \in Y$, jest zbiorem otwartym, musi być więc elementem bazy, czyli baza może być przeliczalna tylko gdy Y jest przeliczalne. Z drugiej strony baza złożona ze wszystkich punktów Y oraz zbiorów postaci $\{\infty\} \cup (Y \setminus I)$: I skończone, na pewno wystarczy i jest przeliczala, gdy Y jest przeliczalne. Tak więc baza jest przeliczalna $\Leftrightarrow$ Y jest przeliczalne.
Jeżeli Y jest przeliczalny to oczywiście X jest ośrodkowy (zbiór gęsty to wszystkie punkty). W przeciwnym przypadku X nie może być ośrodkowy, bo każdy zbiór gęsty musi zawierać wszystkie punkty z Y (jeżeli U nie zawiera $y \in Y$ to istnieje otoczenie y - $\{y\}$ które nie przecina U, więc $\overline{U}$ nie zawiera całego Y). Stąd również:
X jest ośrodkowe $\Leftrightarrow$ Y jest przeliczalne.

c). Rozważmy $A \subseteq X$.

1.1°. $\{\infty\} \in A \rightarrow (X \setminus A) \subseteq Y \Rightarrow A$ jest domknięte jako dopełnienie zbioru otwartego.

1.2°. $A \subseteq Y$
Jeżeli A jest skończone to jest domknięte jako dopełnienie zbioru otwartego.
W przeciwnym przypadku każde otoczenie $\{\infty\}$ przecina A więc $\overline{A} = A \cup \{\infty\}$ (jest to zbiór domknięty znów jako dopełnienie otwartego).

Podumowując te przypadki: $\overline{A} = \begin{cases} A \text{ gdy } A \text{ jest skończone} \\ A \cup \{\infty\} \text{ wpp.} \end{cases}$

2.1°. $A \subseteq Y$
A jest otwarte więc $\mathrm{Int}(A) = A$

2.2°. $\{\infty\} \in A$
$A = \{\infty\} \cup (Y \setminus I)$. Jeżeli I jest skończone to A jest otwarte: $\mathrm{Int}(A) = A$.
W przeciwnym przypadku $\mathrm{Int}(A) = A \setminus \{\infty\}$

Podsumowując te przypadki: $\mathrm{Int}(A) = \begin{cases} A \text{ gdy } I \text{ skończone} \\ A \setminus \{\infty\} \text{ wpp.} \end{cases}$

d). Weźmy domknięte $A, B \subseteq X : A \cap B = \emptyset$. Znajdziemy otwarte U, V : $U \cap V = \emptyset$, $A \subseteq U$, $B \subseteq V$.
Jeżeli $\infty \in A$ to B musi być skończone (jego dopełnienie, w którym jest $\{\infty\}$ musi być otwarte) i oczywiście zawarte w Y. Wtedy $V = B$, $U = X \setminus B$.
W przypadku $A \subseteq Y, B \subseteq Y$: $U = A, V = B$.

Zadanie 4

Będziemy rozpatrywać przestrzeń $(X \times \mathbb{R}, d_{max})$, gdzie d_{max} jest metryką generującą topologię w iloczynie $X \times \mathbb{R}$:
$d_{max}((x_1, r_1), (x_2, r_2)) = \max(d(x_1, x_2), |r_1 - r_2|)$. Niech $G \subseteq Y \times \mathbb{R} \subseteq X \times \mathbb{R}$ będzie wykresem f.

$\Rightarrow$. Załóżmy, że (Y, d_f) jest zupełna. Weźmy ciąg $(y_n, f(y_n)) \in G$ zbieżny do dowolnego $(x_0, r_0) \in \overline{G}$. Wtedy $d_{max}((y_n, r_n), (x_0, r_0)) \to 0$ więc $d(y_n, x_0) \to 0$ oraz $|f(y_n) - r_0| \to 0$. Stąd y_n jest Cauchy'ego w (Y, d_f). Skoro (Y, d_f) jest zupełny to $x_0 \in Y$, czyli też $r_0 = f(x_0)$, więc $(x_0, r_0) \in G$. z dowolności wyboru (x_0, r_0): $G = \overline{G}$.

$\Leftarrow$. Załóżmy, że G jest domknięte. Weźmy dowolny ciąg Cauchy'ego $y_n \in (Y, d_f)$. Jest on też wtedy ciągiem Cauchy'ego w (X, d) ($d(y_n, y_m) + |f(y_n) - f(y_m)| < \varepsilon \Rightarrow d(y_n, y_m) < \varepsilon$) i $f(y_n)$ jest ciągiem Cauchy'ego w $\mathbb{R}$. X jest zupełne więc y_n ma granicę x_0 w X, $\mathbb{R}$ jest zupełne, więc $f(y_n)$ ma granicę r_0 w $\mathbb{R}$. Czyli $(y_n, f(y_n)) \to (x_0, r_0) \in \overline{G} = G$. Stąd $(x_0, r_0) \in Y \times \mathbb{R}$, czyli $x_0 \in Y$. Z dowolności y_n: (Y, d_f) jest zupełne.

Zadanie 5

Metryka Hausdorffa zadaje się wzorem:
$d_H(A, B) = \max(\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{x \in B} d(x, A))$.

1). Najpierw pokażę, że zbiory postaci

$$V = \{K \in K(X) : K \subseteq U_0, K \cap U_1 \neq \emptyset, K \cap U_2 \neq \emptyset, \ldots, K \cap U_n \neq \emptyset\}$$

(U_i - otwarte w X)
tworzą bazę $\mathbb{B}$ pewnej topologii na $K(X)$:
$\cup V = K(X)$, bo $\{K \in K(X) : K \subseteq X\} = K(X)$ $(n = 0, U_0 = X)$.
Weźmy

$$V_1 = \{K \in K(X) : K \subseteq U_0, K \cap U_1 \neq \emptyset, ..., K \cap U_n \neq \emptyset\}$$

$$V_2 = \{K \in K(X) : K \subseteq U_0', K \cap U_1' \neq \emptyset, ..., K \cap U_m' \neq \emptyset\}$$

Niech $x \in V_1 \cap V_2$. Wtedy

$$V_3 = \{K \in K(X) : K \subseteq (U_0 \cap U_0'), K \cap U_1 \neq \emptyset, ..., K \cap U_n, K \cap U_1' \neq \emptyset, ..., K \cap U_m' \neq \emptyset\}$$

jest elementem tej bazy równym $V_1 \cap V_2$ czyli też $x \in V_3$.

2). Dla każdej kuli $B_{d_H}(K_0, r) \subseteq K(X)$ i zbioru $S \in B_{d_H}(K_0, r)$ istnieje $V \in \mathbb{B}$ t. że $S \in V \subseteq B_{d_H}(K_0, r)$:

Bzo, zastępując $B_{d_H}(K_0, r)$ pewną kulą postaci $B_{d_H}(S, r') \subseteq B_{d_H}(K_0, r)$, przyjmijmy $K_0 = S$.

Rozważmy otwarte pokrycie K_0 kulami postaci $B_d(x, \frac{r}{2})$, $x \in K_0$. Możemy z tego pokrycia wybrać pokrycie skończone: $A_1, ..., A_n$. Niech

$$Y = \bigcup_{x \in K_0} B_d(x, r),\ V = \{K \in K(X) : K \subseteq Y, K \cap A_1 \neq \emptyset, ..., K \cap A_n \neq \emptyset\}.$$

Mamy $K_0 \in V$. Pozostaje sprawdzić, że $V \subseteq B_{d_H}(K_0, r)$. Weźmy dowolny $K \in V$.
$K \subseteq Y \Rightarrow \sup_{x \in K} d(x, K_0) < r$
(ostra nierówność, ponieważ K jest domknięty, a Y otwarty).
K_0 jest pokryte kulami A_i, w obrębie których maksymalna możliwa odległość jest mniejsza niż r, każda z nich przecina K, stąd:
$\sup_{x \in K_0} d(x, K) < r$.
Te dwie nierówności dają nam łącznie $K \in B_{d_H}(K_0, r)$. Z dowolności K $V \subseteq B_{d_H}(K_0, r)$.

3). Dla każdego $V \in \mathbb{B}$ i zbioru $S \in V$ istnieje $B_{d_H}(S, r)$ t. że $S \in B_{d_H}(S, r) \subseteq V$:

Niech

$$V = \{K \in K(X) : K \subseteq U_0, K \cap U_1 \neq \emptyset, K \cap U_2 \neq \emptyset, ..., K \cap U_n \neq \emptyset\} \in \mathbb{B}$$

Weźmy dowolny $S \in V$.
Niech $r_0 = \inf_{y \in X \setminus U_0} \sup_{x \in S} d(x, y)$.
$r_0 > 0$, bo $S \in U_0$, U_0 otwarte. Jeżeli $K \in B_{d_H}(S, r), r < r_0$ to $K \subseteq U_0$, ponieważ w przeciwnym razie $\sup_{x \in K} d(x, S) \geq r_0 \Rightarrow d_H(K, S) \geq r_0$.

Dla $i \in \{1, ..., n\}$:
Wiemy, że S przecina U_i, istnieje więc $u \in S \cap U_i$. Ponieważ U_i jest otwarte, istnieje kula $B_d(u, r_i) \subseteq U_i$, dla pewnego $r_i > 0$.
Zauważmy, że jeżeli $K \in B_{d_H}(S, r), r < r_i$ to $K \cap U_i \neq \emptyset$, ponieważ inaczej $d(u, K) \geq r_i \Rightarrow d_H(S, K) \geq r_i$.

Stąd dla $r = \frac{\min(r_0, r_1, ..., r_n)}{2}$: $K \in B_{d_H}(S, r) \Rightarrow K \in V$, czyli $B_{d_H}(S, r) \subseteq V$.
Oczywiście $S \in B_{d_H}(S, r)$.

Niech topologia na $K(X)$ generowana przez $\mathbb{B}$ to $\mathcal{T}_{\mathbb{B}}$, a topologia generowana przez metrykę Hausdorffa to $\mathcal{T}_H$. Na mocy punktu 2) : $\mathcal{T}_H \subseteq \mathcal{T}_{\mathbb{B}}$. Na mocy punktu 3) : $\mathcal{T}_{\mathbb{B}} \subseteq \mathcal{T}_H$. Stąd $\mathcal{T}_H = \mathcal{T}_{\mathbb{B}}$.