Lista 2 - Rozwiązanie zadania 4

Szymon Kiczak

31 marca 2020

1 Algorytm (zachłanny)

Chcemy pokolorować wszystkie liście drzewa, usunąć je z drzewa, a następnie wykonać to samo dla pozostałego drzewa, ale usuwając tylko wierzchołki które znajdują się w odległości nie większej niż $\frac{k}{2}$ od najdalszego liścia w pierwotnym drzewie. Zdefiniujmy dwie tablice o rozmiarze n, S[u] - oznaczającą stopień wierzchołka u w drzewie (ilość sąsiadów), oraz D[u] - mówiącą jak daleko od wierzchołka u znajduje się najdalszy liść drzewa. Załóżmy że k >1 (gdy k = 1 można pokolorować jeden, dowolny wierzchołek). Niech Q będzie kolejką w której znajdują się kandydaci do pokolorowania. Na początku dla każdego u ustawiamy S[u] na prawdziwy stopień tego wierzchołka w drzewie. W pierwszym kroku dodajemy na kolejkę Q wszystkie liście (czyli wierzchołki o stopniu 1) i ustawiamy ich D na 1. Następnie dopóki kolejka nie będzie pusta wykonujemy następujące kroki:

1. u - pierwszy wierzchołek z kolejki, usuwamy go z kolejki
2. jeżeli D[u] $\leqslant \frac{k}{2}$, to można pokolorować ten wierzchołek
3. dla każdego sąsiada v - wierzchołka u
   (a) S[v] = S[v] - 1
   (b) jeżeli S[v] = 1 to D[v] = D[u] + 1 i dodaj v na Q

W przypadku, że n jest nieparzyste można pokolorować jeszcze jeden dowolny wierzchołek.

2 Uzasadnienie

2.1 Rozwiązanie jest poprawne

Algorytm ten zawsze znajdzie poprawne rozwiązanie, ponieważ każda ścieżka prosta w drzewie ma dwa końce. W najgorszym przypadku ścieżka biegnie od liścia do innego liścia, wtedy będzie ona wyglądać w taki sposób, że na jej początku będzie pewien blok pokolorowanych wierzchołków, następnie blok niepokolorowanych wierzchołków i na końcu znów blok pokolorowanych wierzchołków (gdy n nieparzyste możliwe że będzie po drodze jeszcze jeden dodatkowy wierzchołek). Bloki pokolorowanych wierzchołków będą mieć maksymalnie po $\frac{k}{2}$ wierzchołków każdy, a więc łącznie na takiej ścieżce będzie co najwyżej k pokolorowanych wierzchołków.

2.2 Rozwiązanie jest optymalne

Załóżmy że nasz algorytm pokolorował zbiór wierzchołków I, podczas gdy istnieje optymalne kolorowanie innego zbioru wierzchołków J. Można je sprowadzić do kolorowania zbioru I w następujący sposób:

W J na pewno jest wierzchołek u inny niż w zbiorze I. Poprowadźmy ścieżkę od liścia do innego liścia przechodzącą przez u i zawierającą dokładnie k pokolorowanych wierzchołków (taka ścieżka na pewno istnieje, gdyby nie istniała można by pokolorować jeszcze co najmniej jeden wierzchołek, a wiemy że J jest optymalne). Ta ścieżka w I ma pokolorowane pierwsze i ostatnie $\frac{k}{2}$ wierzchołków. Ta sama ścieżka w I nie ma pokolorowanego wierzchołka u, więc można go odkolorować i zamiast niego pokolorować jakiś wierzchołek niepokolorowany w J, który jest pokolorowany w I. Na pewno taki istnieje, ponieważ gdy zabierzemy z tej ścieżki u to zostaje na niej k - 1 pokolorowanych wierzchołków, więc na pewno jest co najmniej jeden niepokolorowany w pierwszych lub ostatnich $\frac{k}{2}$ wierzchołków.