(1) Niech $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ będzie zbiorem ciągów liczb naturalnych (przyjmujemy, że $0 \notin \mathbb{N}$) i niech, dla $a = (n_1, n_2, \ldots)$, $b = (m_1, m_2, \ldots)$

$$d(a,b) = \begin{cases} \frac{1}{\min\{i\colon n_i \neq m_i\}}, & \text{gdy } a \neq b, \\ 0, & \text{gdy } a = b. \end{cases}$$

(a) Wykazać, że d jest metryką w $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, przy czym $d(a,b) \leq \max\{d(a,c), d(b,c)\}$, dla $a, b, c \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
(b) Wykazać, że każde dwie kule w przestrzeni $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, d)$ są albo rozłączne, albo jedna zawiera się w drugiej.
(c) Które z następujacych zbiorów są otwarte w przestrzeni $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, d)$:

$$A = \{(n_1, n_2, \ldots)\colon n_i = 1 \text{ dla co najmniej trzech indeksów } i\},$$

$$B = \{(n_1, n_2, \ldots)\colon n_i = 1 \text{ dla nieskończenie wielu } i\}.$$

(d) Niech $<$ będzie porządkiem leksykograficznym w $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (tzn. $(n_1, n_2, \ldots) < (m_1, m_2, \ldots)$ jeśli dla pewnego i, $n_i < m_i$ oraz $n_j = m_j$ dla $j < i$) i niech, dla $a < b$, $(a,b) = \{x\colon a < x < b\}$. Wykazać, że przedziały (a,b) są otwarte w przestrzeni $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, d)$. Niech $c = (2, 1, 1, \ldots)$. Pokazać, że nie istnieje przedział (a,b) taki, że $c \in (a,b) \subseteq B(c, \frac{1}{2})$.

(2) Niech $\mathcal{T}$ będzie rodziną wszystkich zbiorów $U \subseteq \mathbb{R}^2$ takich, że przecięcie $U \cap L$ z każdą prostą równoległą do osi x-ów oraz z każdą prostą równoległą do osi y-ów, jest otwarte ze względu na metrykę euklidesową w L.
(a) Podać przykład zbioru $V \in \mathcal{T}$, który nie jest otwarty w metryce euklidesowej.
(b) Sprawdzić, że $\mathcal{T}$ jest topologia w $\mathbb{R}^2$ i przestrzeń $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ jest Hausdorffa.
(c) Pokazać, że jeśli $C \subseteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x > 0, y > 0\}$ jest zbiorem nieskończonym, to istnieje $U \in \mathcal{T}$ takie, że $0 \in U$ i zbiór $C \setminus U$ jest nieskończony.
(d) Wykazać, ze topologia $\mathcal{T}$ jest niemetryzowalna.
Wskazówka. Założyć, że $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$, pokazać, że każda kula $B(0, \frac{1}{n})$ zawiera punkt c_n o obu współrzędnych dodatnich, rozpatrzyć $C = \{c_1, c_2, \ldots\}$ i wyprowadzić z (c) sprzeczność.

(3) W przestrzeni metrycznej (X, ρ), dla $A \subseteq X$ definiujemy funkcję $\rho(\cdot, A)\colon X \to \mathbb{R}$ (odległości od zbioru) wzorem $\rho(x, A) = \inf_{a \in A} \rho(x, a)$. Sprawdzić, że taka funkcja jest ciągła i że $x \in \overline{A}$ wtedy i tylko wtedy gdy $\rho(x, A) = 0$.

(4) Niech $\mathcal{T}$ będzie topologią Zariskiego w zbiorze nieskończonym X. Udowodnić, że domknięcie każdego zbioru nieskończonego w X jest całą przestrzenią.

(5) Niech $Y \subseteq X$ będzie podzbiorem przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$. Dla $A \subseteq Y$ domknięcie A w podprzestrzeni $(Y, \mathcal{T}_Y)$ (w przestrzeni $(X, \mathcal{T})$) oznaczamy przez $\overline{A}^Y$ (odpowiednio $\overline{A}^X$).
(a) Wykazać, że $\overline{A}^Y = \overline{A}^X \cap Y$.
(b) Wykazać, że jeśli $\overline{A}^Y = Y$, to $\overline{A}^X = \overline{Y}^X$.

(6) Niech A i B będą zbiorami rozłącznymi w przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$. Wykazać, że jeśli zbiór A jest otwarty w X, to $\overline{A} \cap \operatorname{Int}(\overline{B}) = \emptyset$.

(7) Znaleźć zanurzenie homeomorficzne przestrzeni $(\mathbb{R}, d_e)$ w przestrzeń $(\mathbb{R}^2, d_r)$, gdzie d_r jest metryką "rzeka".

(8) Niech T będzie sumą trzech odcinków łączących punkt $(0,0)$ z punktami $(1,0)$, $(-1,0)$ i $(0,1)$ na płaszczyźnie, rozpatrywaną z topologią euklidesową.
(a) Pokazać, że nie istnieje ciągła i różnowartościowa funkcja $f\colon T \to [0,1]$.
Wskazówka. Skorzystać z własności Darboux dla funkcji f obciętej do każdego z trzech wymienionych odcinków w T.
(b) Wskazać trzy kule otwarte w T, z których żadne dwie nie są homeomorficzne.

(9) Korzystając z zadania 8 wykazać, że przestrzeń $(\mathbb{R}^2, d_r)$ nie jest homeomorficzna z przestrzenią $(\mathbb{R}^2, d_c)$, gdzie d_r jest metryką "rzeka" i d_c jest metryką "centrum".

(10) Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną. Zauważyć, że rzut $\pi_i\colon X^d \to X$ na i-tą oś jest funkcją ciągłą.

Zauważyć, że dla dowolnej przestrzeni topologicznej $(Y, \mathcal{S})$, funkcję $f\colon Y \to X^d$ można zapisać jako $f = (f_1, \ldots, f_d)$, gdzie $f_i\colon Y \to X$ są składowymi funkcji.

Udowodnić, że $f\colon Y \to X^d$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy gdy ma ciągłe składowe.