10 a) NIE

$[0,1]$ - spójny $\qquad \mathcal{C}$ - nie jest spójne

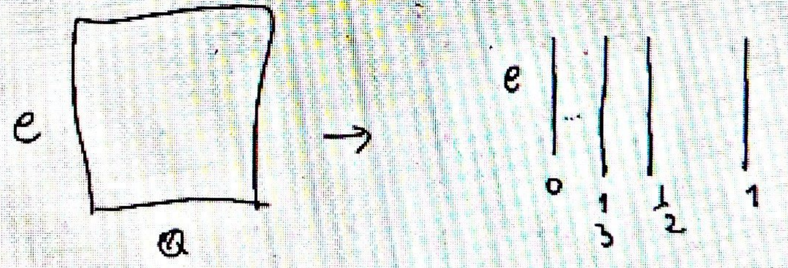
b) NIE

Nie wprost $\qquad f: X\times[0,1] \xrightarrow{na} \mathcal{C}$

$$f\restriction \underbrace{[0,1]\times\{0\}}_{\text{spójny}} \xrightarrow{na} \underbrace{f([0,1]\times\{0\})}_{\text{nie jest spójny}} \subseteq \mathcal{C}$$

dowolny podzbiór $\mathcal{C}$ nie jest spójny

c) Szukamy $f: \mathbb{Q}\times\mathcal{C} \to X\times\mathcal{C}$ ciągłe



$q\in\mathbb{Q} \qquad (a_n)\subseteq\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

$q \ \ldots < a_2 < a_2 < a_1 \qquad \lim_n a_n = q$

Rozważmy przedziały

$I_1 = (a_1, \infty) \qquad 1$

$I_2 = (a_2, a_1) \qquad \frac{1}{2}$

$\bigcup^{\infty} I_n = \mathbb{Q}$

$I_n = (a_n, a_{n-1}) \qquad \frac{1}{n}$

$\bigcup_{k=0}^{\infty} I_k = \mathbb{Q}$

$I_n = (a_n, a_{n-1})$ $\qquad \frac{1}{n}$

$I_0 = (-\infty, q]$ $\qquad 0$

$$\begin{matrix} \mathbb{Q} & \mathcal{C} \\ \downarrow & \downarrow \\ (r, & c) \end{matrix} \longmapsto (\alpha(r), c)$$

$\alpha : \mathbb{Q} \to X$

$\alpha(r) = \frac{1}{n} \iff r \in I_n \qquad n > 0$

$\alpha(r) = 0 \iff r \in (-\infty, q]$

Czy istnieje $f : \underbrace{\underbrace{X}_{\text{zwarte}} \times \underbrace{\mathcal{C}}_{\text{zwarte}}}_{\text{zwarte}} \xrightarrow{\text{na}} \underbrace{\underbrace{\mathbb{Q}}_{\text{nie zwarte}} \times \mathcal{C}}_{\text{nie jest zwarte}}$ ciągła? NIE

11 a) $\underbrace{\mathbb{Q} \times \mathbb{R}}_{\text{przeliczalnie wiele składowych spójności}}$ $\qquad \underbrace{(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times \mathbb{R}}_{\text{nieprzeliczalnie wiele}}$

NIE

b) $\mathbb{Q} \times [0,1]$ $\qquad \mathbb{N} \times [0,1]$

Gdyby był homeo

$f : \mathbb{Q} \times [0,1] \to \mathbb{N} \times [0,1]$ $\qquad \underbrace{\text{odcinki}}_{\text{skł spójności}} \to \text{odcinki}$

wtedy $\tilde{f}(q) = n$

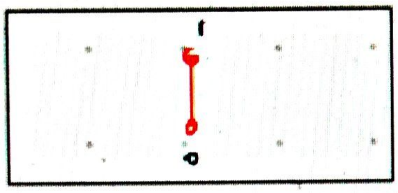
$\iff f(\{q\}\times[0,1]) = \{n\}\times[0,1]$

jest homeomorfizmem

Ale $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{N}$ nie są homeomorficzne

dyskretne

12 a) Nasza przestrzeń $X = \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\}\times(0,1))$



$[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \times [0,1]$

przekrój w $\mathbb{R}^2$ $\{0\}\times[0,1]$

w X to $\{0\}$ i $\{1\}$

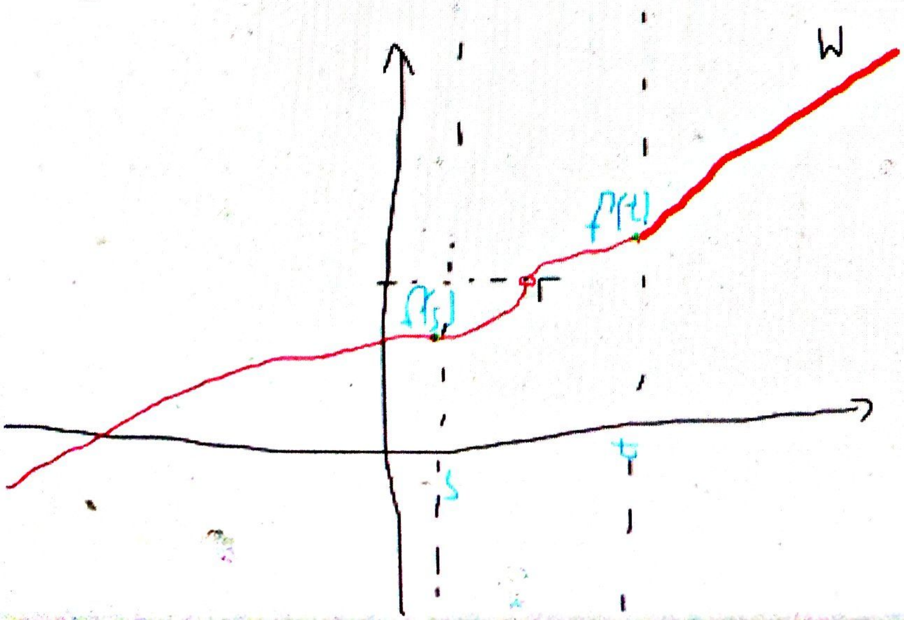
Uwaga

łukowa spójność często definiuje się następująco:

$(X, \mathcal{T})$:

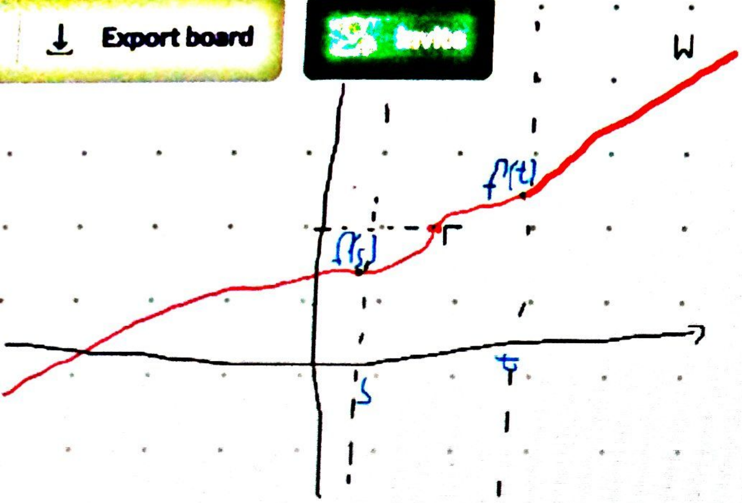
$\forall a, b \quad \exists h : [0,1] \to X$ zanurzenie (homeomorfizm z obrazem h) $\quad h(0) = a$, $h(1) = b$

zad 15



$[s,t] \times (r, \infty)$

$[s,t] \times (-\infty, r)$



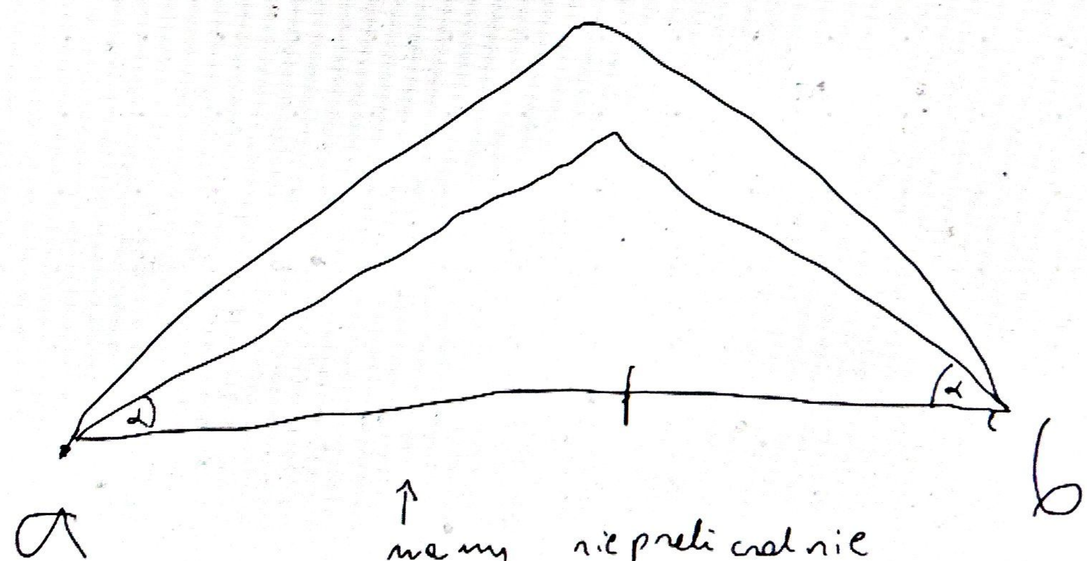
$[s,t] \times (r, \infty)$

$[s,t] \times (-\infty, r)$

$A = W \cap \left([s,t) \times (-\infty, r) \cup (-\infty, s) \times \mathbb{R} \right)$

$B = W \cap \left((s,t] \times (r, \infty) \cup (t, \infty) \times \mathbb{R} \right)$

13



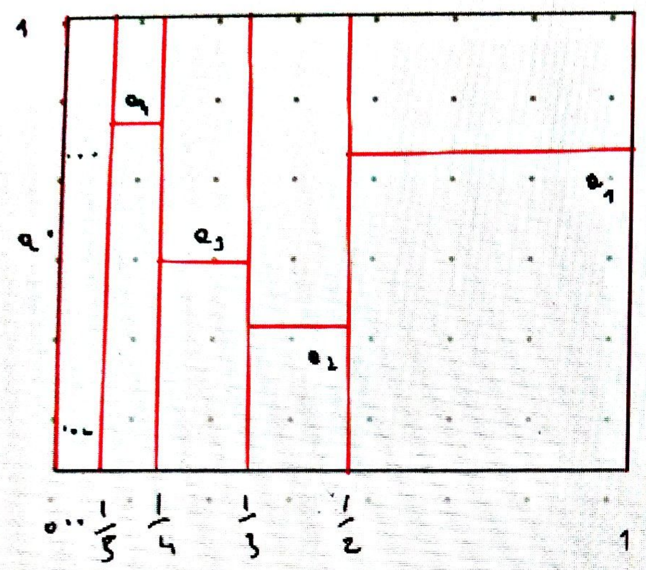
mamy nieprzeliczalnie wiele takich łamanych

A jest przeliczalny

zatem któraś z łamanych nie zawiera punktu z A

Export board Invite ... ść z których nie zawiera punktu z

.14



(a_n)

ciąg punktów z $[0,1]$

spójny? spójny $\downarrow$ na

$p: X \to [0,1]$

rzutowanie na 1 współrzędną

p jest przekształceniem ilorazowym $\forall x \in [0,1]$ $p^{-1}(x) =$ punkt lub odcinek - spójny

sprawdzamy

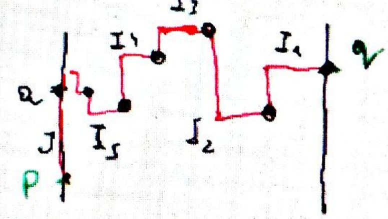
$p^{-1}(A)$ otwarty w X $\iff$ A otwarty w $[0,1]$

Łukowa spójność

- Weźmy (a_n) t. że $\lim a_n = a$

$p = (0,s)$ $q = (b,t)$ $0 < b_{s_3}$

Chcemy połączyć drogą

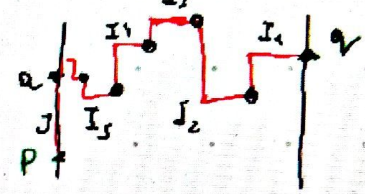


1 $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $-\frac{1}{5}$

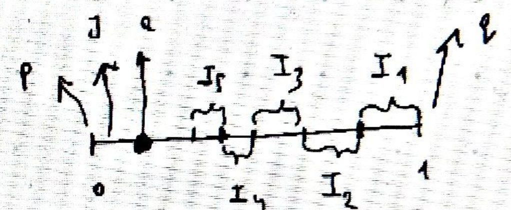
Export board Invite t_1 że $\lim a_n = a$

$p = (0, s)$ $q = (b, t)$ $0 < b_{I_3}$

Chcemy połączyć drogą



1 $\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $-\frac{1}{5}$



Nie ma zbieżności

Podciągi (a_n) $a_{n_k} \to b$

$\vee$

$a_{n_l} \to c$

Postępujemy jak przy $(t, \sin\frac{1}{t}) \cup \{0\} \times [-1, 1]$

Gdyby było $f : [0,1] \to X$ ciągłe

$f(0) = p$ $f(1) = q$

to f byłoby jednostajnie ciągłe

Dzielimy $[0,1]$ na $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = 1$

t. że $\operatorname{diam} f[t_n, t_{n+1}] < \frac{b-c}{2}$