1.2. **Przestrzenie topologiczne.** Własności wyróżnione w Twierdzeniu 1.1.5 przyjmiemy za określenie topologii w przestrzeniach bez metryki.

Definicja 1.2.1. *Rodzina $\mathcal{T}$ podzbiorów zbioru X jest topologią w X, jeśli*

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$,

(ii) przecięcie skończenie wielu elementów $\mathcal{T}$ jest elementem $\mathcal{T}$,

(iii) suma dowolnie wielu elementów $\mathcal{T}$ jest elementem $\mathcal{T}$.

Parę $(X, \mathcal{T})$ nazywamy przestrzenią topologiczną, elementy zbioru X punktami tej przestrzeni, a elementy rodziny $\mathcal{T}$ zbiorami otwartymi w $(X, \mathcal{T})$.

Definicja 1.2.4. *Rodzinę $\mathcal{B}$ podzbiorów otwartych przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ nazywamy bazą topologii $\mathcal{T}$, jeśli dla dowolnego $U \in \mathcal{T}$ i $x \in U$ istnieje $B \in \mathcal{B}$ spełniające $x \in B \subset U$.*

Przykład 1.2.5. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną i niech $A \subset X$ będzie zbiorem takim, że każda kula w (X, d) zawiera element A. Wówczas rodzina $\mathcal{B} = \{B(a, \frac{1}{n}) : a \in A, n = 1, 2, \ldots\}$ jest bazą topologii $\mathcal{T}(d)$.

Baza topologii jednoznacznie wyznacza tę topologię: zbiór jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest sumą pewnej rodziny zbiorów z bazy. Opiszemy teraz metodę generowania topologii przy pomocy rodzin mających dwie własności przysługujące każdej bazie.

Twierdzenie 1.2.6. *Niech $\mathcal{B}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru X spełniającą warunki*

(i) $\bigcup \mathcal{B} = X$,

(ii) dla dowolnych $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ i $x \in B_1 \cap B_2$ istnieje $B \in \mathcal{B}$ takie, że $x \in B \subset B_1 \cap B_2$.

Wówczas rodzina $\mathcal{T}$ zbiorów $U \subset X$ takich, że jeśli $x \in U$, to $x \in B \subset U$ dla pewnego $B \in \mathcal{B}$, jest topologią w X.

Podzbiór przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ można rozpatrywać w naturalny sposób jako przestrzeń topologiczną, bo dla $Y \subset X$, rodzina $\{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$ śladów na Y zbiorów otwartych w X jest topologią w Y, zob. 1.2.1. Przyjęta przez nas poniżej definicja podprzestrzeni jest zgodna z tym, co opisaliśmy w Uwadze 1.1.8 dla przestrzeni metrycznych.

Definicja 1.2.9. *Niech $(X, \mathcal{T}_X)$ będzie przestrzenią topologiczną i niech $Y \subset X$. Przestrzeń topologiczną $(Y, \mathcal{T}_Y)$, gdzie $\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}_X\}$, nazywamy podprzestrzenią przestrzeni $(X, \mathcal{T}_X)$, a $\mathcal{T}_Y$ - topologią indukowaną w Y.*

W przestrzeni metrycznej (X, d), dla każdej pary różnych punktów $x_1, x_2 \in X$ istnieją rozłączne zbiory otwarte U_1, U_2 takie, że $x_i \in U_i$ - wystarczy przyjąć $U_i = B(x_i, r/2)$, gdzie $r = d(x_1, x_2)$.

Definicja 1.2.11. *Przestrzeń topologiczną $(X, \mathcal{T})$ nazywamy przestrzenią Hausdorffa, jeśli dla każdej pary różnych punktów $x_1, x_2 \in X$ istnieją $U_i \in \mathcal{T}$ takie, że $x_i \in U_i$, oraz $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.*

Przestrzenie niemetryzowalne opisane w przykładach 1.2.2 i 1.2.10 są przestrzeniami Hausdorffa.

Przykład 1.2.12. Niech X będzie zbiorem nieskończonym. Topologia $\mathcal{T} = \{U \subset X : U = \emptyset,$ lub $X \setminus U$ jest zbiorem skończonym$\}$ nazywa się topologią Zariskiego w X. W przestrzeni $(X, \mathcal{T})$ każde dwa niepuste zbiory otwarte mają niepuste przecięcie, w szczególności przestrzeń $(X, \mathcal{T})$ nie jest Hausdorffa.

Definicja 1.2.15. *W przestrzeni metrycznej (X, d), ciąg punktów $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do punktu x_0, $x_n \to x_0$, jeśli $d(x_n, x_0) \to 0$.*

Twierdzenie 1.2.16. *W przestrzeni metrycznej (X, d), warunek $x_0 \in \overline{A}$ jest równoważny temu, że istnieje ciąg punktów $x_n \in A$ taki, że $x_n \to x_0$.*

Dowód. Niech $x_0 \in \overline{A}$. Kula $B(x_0, \frac{1}{n})$ jest otoczeniem x_0, istnieje więc $x_n \in B(x_0, \frac{1}{n}) \cap A$. Ponieważ $d(x_0, x_n) < \frac{1}{n}$, $x_n \to x_0$.

Na odwrót, załóżmy, że $x_n \to x_0$ dla pewnego ciągu $x_n \in A$. Niech V będzie otoczeniem x_0 i niech $B(x_0, r) \subset V$. Wówczas, jeśli $d(x_0, x_n) < r$, to $x_n \in V$. Tak więc każde otoczenie punktu x_0 przecina A.

1.3. **Ciągłość przekształceń.** Klasyczna $(\varepsilon - \delta)$-definicja ciągłości funkcji rzeczywistej $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ przenosi się na przypadek przekształceń $f : X \to Y$ między przestrzeniami metrycznymi (X, d_X) i (Y, d_Y) w następujący sposób:

$$(1)\quad \forall_{a\in X}\, \forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{\delta>0}\, \forall_{x\in X}\;\; d_X(a,x) < \delta \implies d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon.$$

Część formuły (1) otrzymaną przez pominięcie pierwszych trzech kwantyfikatorów można zapisać w postaci $f(B_X(a,\delta)) \subset B_Y(f(a),\varepsilon)$ lub też $B_X(a,\delta) \subset f^{-1}(B_Y(f(a),\varepsilon))$, gdzie $B_X(a,\delta)$, $B_Y(f(a),\varepsilon)$ są kulami w (X, d_X) i (Y, d_Y), odpowiednio. Zastępując kule otoczeniami, można rozszerzyć pojęcie ciągłości na przekształcenia między dowolnymi przestrzeniami topologicznymi.

Przyjmiemy jednak jako definicję ciągłości przekształceń inny równoważny warunek (zob. Twierdzenie 1.3.2), mający prostsze sformułowanie.

Definicja 1.3.1. *Przekształcenie $f : X \to Y$ przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}_X)$ w $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jest ciągłe, jeśli dla każdego $U \in \mathcal{T}_Y$, $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$.*

Twierdzenie 1.3.2. *Dla przekształcenia $f : X \to Y$ przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}_X)$ w $(Y, \mathcal{T}_Y)$ następujące warunki są równoważne:*

(i) f jest przekształceniem ciągłym,

(ii) jeśli zbiór F jest domknięty w $(Y, \mathcal{T}_Y)$, to $f^{-1}(F)$ jest zbiorem domkniętym w $(X, \mathcal{T}_X)$,

(iii) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, dla każdego $A \subset X$,

(iv) dla każdego $a \in X$ i otoczenia U punktu $f(a)$ w $(Y, \mathcal{T}_Y)$ istnieje otoczenie V punktu a w $(X, \mathcal{T}_X)$ takie, że $f(V) \subset U$.

Dowód. (i) $\Longrightarrow$ (iv) Niech $a \in X$ i niech U będzie otoczeniem $f(a)$ w $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Wybierzmy $W \in \mathcal{T}_Y$ takie, że $f(a) \in W \subset U$. Wówczas $V = f^{-1}(W) \in \mathcal{T}_X$ jest otoczeniem punktu a i $f(V) \subset U$.

(iv) $\Longrightarrow$ (iii) Niech $a \in \overline{A}$. Mamy sprawdzić, że $f(a) \in \overline{f(A)}$. Wybierzmy dowolne otoczenie U punktu $f(a)$ w $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Na mocy (iv) istnieje otoczenie V punktu a w $(X, \mathcal{T}_X)$ takie, że $f(V) \subset U$. Ponieważ $a \in \overline{A}$, $V \cap A \neq \emptyset$, skąd $U \cap f(A) \supset f(V \cap A) \neq \emptyset$.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) Niech F będzie zbiorem domkniętym w $(Y, \mathcal{T}_Y)$ i $A = f^{-1}(F)$. Z (iii), $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{F} = F$, skąd $\overline{A} \subset f^{-1}(F) = A$. Tak więc $\overline{A} = A$, czyli zbiór A jest domknięty.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Wynika to natychmiast z faktu, że zbiory domknięte są dopełnieniami zbiorów otwartych, zob. 1.2.18, (ii).

Uwaga 1.3.3. Jeśli w przestrzeni $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jest wyróżniona baza $\mathcal{B}$ generująca topologię $\mathcal{T}_Y$, to dla dowodu ciągłości przekształcenia $f : X \to Y$, gdzie $(X, \mathcal{T}_X)$ jest przestrzenią topologiczną, wystarczy sprawdzić, że $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$ dla każdego $U \in \mathcal{B}$. Wynika to natychmiast z Definicji 1.3.1 i faktu, że każdy zbiór otwarty jest sumą pewnej podrodziny rodziny $\mathcal{B}$.

Uwaga 1.3.4. Ciągłość przekształcenia $f : X \to Y$ przestrzeni metrycznej (X, d_X) w przestrzeń metryczną (Y, d_Y) jest równoważna warunkowi, że jeśli $x_n \to x_0$, to $f(x_n) \to f(x_0)$, zob.1.2.15.

Istotnie, zgodnie z Twierdzeniem 1.2.16, ten warunek zapewnia własność (iii) w Twierdzeniu 1.3.2. Na odwrót, jeśli f jest przekształceniem ciągłym, $x_n \to x_0$ i $\varepsilon > 0$, to zgodnie z 1.3.2 (iv), dla pewnego otoczenia V punktu x_0, obraz $f(V)$ jest zawarty w kuli o środku w $f(x_0)$ i promieniu ε, a ponieważ prawie wszystkie wyrazy x_n leżą w V, $d_Y(f(x_0), f(x_n)) < \varepsilon$, dla prawie wszystkich n. Zatem $f(x_n) \to f(x_0)$.

Uwaga 1.3.5. (A) Dla ustalonego $a \in X$, własność (iv) w 1.3.2 definiuje ciągłość przekształcenia f w punkcie a. Dla przekształcenia między przestrzeniami metrycznymi, ciągłość w punkcie a jest więc opisana formułą (1), z pominięciem kwantyfikatora $\forall_{a \in X}$.

(B) Niech $f_n, f : X \to Y$ będą przekształceniami przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ w przestrzeń metryczną (Y, d) takimi, że $\gamma_n = \sup\{d(f_n(x), f(x)) : x \in X\} \to 0$. Wówczas, jeśli wszystkie przekształcenia f_n są ciągłe w punkcie $a \in X$ (ze względu na topologię $\mathcal{T}(d)$ w Y), to także f jest ciągłe w tym punkcie.

Istotnie, niech U będzie otoczeniem punktu $f(a)$ w przestrzeni $(Y, \mathcal{T}(d))$ i niech $B(f(a), r) \subset U$. Ustalmy n takie, że $\gamma_n < r/3$ i korzystając z ciągłości f_n w a wybierzmy otoczenie V punktu a w $(X, \mathcal{T})$ takie, że $f_n(V) \subset B(f_n(a), r/3)$. Wówczas, dla $x \in V$, $d(f(x), f(a)) \leqslant d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(a)) + d(f_n(a), f(a)) < 3 \cdot \frac{r}{3} = r$, a zatem $f(V) \subset U$.

Definicja 1.3.6. *Przekształcenie* $f : X \to Y$ *przestrzeni topologicznej* $(X, \mathcal{T}_X)$ *w* $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *jest homeomorfizmem, jeśli* f *jest różnowartościowe,* $f(X) = Y$ *oraz oba przekształcenia* f *i* $f^{-1} : Y \to X$ *są ciągłe. Jeśli* f *jest homeomorfizmem przestrzeni* $(X, \mathcal{T}_X)$ *na podprzestrzeń* $(f(X), (\mathcal{T}_Y)_{f(X)})$ *przestrzeni* $(Y, \mathcal{T}_Y)$*, mówimy, że* f *jest zanurzeniem homeomorficznym.*

Uwaga 1.3.7. Z Definicji 1.3.1 wynika natychmiast, że złożenie przekształceń ciągłych jest ciągłe. W szczególności, złożenie homeomorfizmów jest homeomorfizmem.

Przykład 1.3.8. (A) Każde dwa otwarte zbiory wypukłe w przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^n, d_e)$ (rozpatrywane jako podprzestrzenie) są homeomorficzne, zob. Uzupełnienie 7.1.

Jednakże, każde ciągłe przekształcenie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ płaszczyzny w prostą ma nieprzeliczalną warstwę. Aby to sprawdzić, rozpatrzmy funkcje $f_x(y) = f(x, y)$, dla $x \in \mathbb{R}$. Funkcja $f_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła, więc $f_x(\mathbb{R})$ jest przedziałem. Jeśli jeden z tych przedziałów redukuje się do punktu, $f_x(\mathbb{R}) = \{r\}$, mamy $f^{-1}(r) = \{x\} \times \mathbb{R}$. W przeciwnym razie, zawsze istnieje liczba wymierna $q_x \in f_x(\mathbb{R})$. Dla pewnej liczby wymiernej q zbiór $\{x : q_x = q\}$ jest nieprzeliczalny, a więc warstwa $f^{-1}(q)$ jest nieprzeliczalna.

(B) Przekształcenie $f(t) = (\cos t, \sin t)$ odcinka $[0, 2\pi)$ na prostej euklidesowej na okrąg $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ (z topologią podprzestrzeni płaszczyzny euklidesowej) jest ciągłą bijekcją, ale nie jest homeomorfizmem. Istotnie, dla $a_n = (\cos(2\pi - \frac{1}{n}), \sin(2\pi - \frac{1}{n}))$, $a_n \to f(0)$, ale $f^{-1}(a_n) \not\to 0$. Zauważmy też, że nie istnieje ciągłe i różnowartościowe przekształcenie $g : S^1 \to \mathbb{R}$. Załóżmy przeciwnie i rozpatrzmy złożenie $g \circ f : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$. Przekształcenie $g \circ f$ jest ciągłe i różnowartościowe, a więc jest albo rosnące, albo malejące. W pierwszym przypadku $g \circ f(0) < g(a_1) < g(a_2) < \ldots$, bo $g(a_n) = g \circ f(2\pi - \frac{1}{n})$, oraz $g(a_n) \to g \circ f(0)$, co jest niemożliwe. Podobnie do sprzeczności dochodzi się, jeśli $g \circ f$ maleje.

Uwaga 1.3.9. (A) Niech $f : X \to Y$ będzie przekształceniem ciągłym przestrzeni $(X, \mathcal{T}_X)$ w przestrzeń $(Y, \mathcal{T}_Y)$ i niech $Z \subset X$. Wówczas obcięcie $f \mid Z : Z \to Y$ jest przekształceniem ciągłym, gdzie w Z rozpatruje się topologię podprzestrzeni przestrzeni X. Ponadto $f \mid Z$ jest ciągłe jako przekształcenie z Z na podprzestrzeń $f(Z)$ przestrzeni Y.

Istotnie, zbiory otwarte w $f(Z)$ są postaci $W = U \cap f(Z)$, gdzie $U \in \mathcal{T}_Y$, a $(f \mid Z)^{-1}(W) = f^{-1}(U) \cap Z$ jest zbiorem otwartym w Z, bo $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$.

(B) Niech $f : X \to Y$ będzie przekształceniem przestrzeni $(X, \mathcal{T}_X)$ w $(Y, \mathcal{T}_Y)$. Jeśli $X = F_1 \cup \ldots \cup F_m$, gdzie każdy ze zbiorów F_i jest domknięty i każde obcięcie $f \mid F_i : F_i \to Y$ jest ciągłe, to przekształcenie f jest ciągłe.

Istotnie, dla dowolnego zbioru domkniętego F w Y, zbiór $A_i = f^{-1}(F) \cap F_i$ jest domknięty w przestrzeni $(F_i, \mathcal{T}_{F_i})$, a ponieważ F_i jest zbiorem domkniętym w $(X, \mathcal{T}_X)$, zbiór A_i jest też domknięty w X, zob. 1.2.19 (B). Zatem $f^{-1}(F) = A_1 \cup \ldots \cup A_m$ jest zbiorem domkniętym w X.

Podobnie sprawdza się, że jeśli $X = \bigcup_{s \in S} U_s$, $U_s \in \mathcal{T}_X$ i obcięcia $f \mid U_s : U_s \to Y$ są ciągłe, to f jest przekształceniem ciągłym.