RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE, II ROK MATEMATYKI
LISTA 7

Zadanie 1. Rozwiązać metodą rozdzielania zmiennych następujące zagadnienie brzegowe dla funkcji harmonicznych w prostokącie $(0,a)\times(0,b)$

(i) $u|_{x=a} = u|_{y=b} = 0$, $u|_{x=0} = A\sin\frac{\pi y}{b}$, $u|_{y=0} = B\sin\frac{\pi x}{a}$;

(ii) $u|_{x=a} = u|_{y=0} = u|_{y=b} = 0$, $u_x(0,y)+\lambda u(0,y) = g(y)$, $y\in(0,b)$.

Zadanie 2. Rozwiązać zagadnienie Dirichleta dla równania Laplace'a $\Delta u = 0$ (we współrzędnych biegunowych $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0$) w pierścieniu $\{R_1 < r = (x^2+y^2)^{1/2} < R_2\}$ z warunkami brzegowymi $u(R_1,\theta) = g_1(\theta)$, $u(R_2,\theta) = g_2(\theta)$.

Wsk. użyć szeregów Fouriera, tzn. metody rozdzielania zmiennych, podobnie jak w przypadku koła. Co należy zmodyfikować w otrzymanych wzorach (i jakie przyjąć warunki brzegowe) w przypadkach granicznych: $R_1 = 0$ albo $R_2 = \infty$?

Zadanie 3. Sprawdzić, że rozwiązanie zagadnienia Dirichleta dla równania Laplace'a $\Delta u = 0$ w kuli $B_R(0)\subset\mathbb{R}^n$ z warunkiem brzegowym $u|_{\partial B_R} = g \in C(\partial B_R)$ jest dane wzorem Poissona

$$u(x) = \frac{1}{\sigma_n R}\int_{\partial B_R} g(y)\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^n}\,dS(y).$$

Zauważyć, że $u\in C^2(B_R)\cap C(\overline{B_R})$. Jak można wyprowadzić wzór Poissona dla koła na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2\equiv\mathbb{C}$?
Wsk. użyć twierdzenia o wartości średniej dla funkcji harmonicznych i odwzorowań homograficznych koła.

Zadanie 4. $**$ Skonstruować funkcję Greena dla półprzestrzeni $\mathbb{R}^n_+ = \{x_n > 0\}$.

Zadanie 5. $**$ Udowodnić twierdzenie Harnacka: Jeżeli ciąg funkcji harmonicznych u_k w obszarze $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ jest zbieżny (niemal) jednostajnie do funkcji u, to u jest funkcją harmoniczną w Ω.
Wsk. użyć własności średniej charakteryzującej funkcje harmoniczne.

Zadanie 6. $**$ Udowodnić twierdzenie Liouville'a: Ograniczona funkcja harmoniczna w $\mathbb{R}^n$ jest funkcją stałą.
Wsk. skorzystać z własności średniej po kulach lub ze wzoru Poissona.

Zadanie 7. Znaleźć wartości własne i funkcje własne operatora Laplace'a w prostokącie $(0,a) \times (0,b)$, tzn. wyznaczyć $\lambda = \lambda_k$, $u = u_k$ spełniające równanie $\Delta u + \lambda u = 0$ w $(0,a) \times (0,b)$ i warunek Dirichleta $u = 0$ na brzegu prostokąta.

Zadanie 8. Sprawdzić, że funkcja $u(x,y) = xy(-\log(x^2+y^2))^{1/2}$, $x^2+y^2 > 0$, $u(0,0) = 0$, ma ciągłe pochodne u_{xx}, u_{yy}, ale pochodna mieszana u_{xy} nie istnieje w (0,0). Zatem u jest potencjałem newtonowskim **ciągłej** gęstości, ale $u \notin C^2$.

22 maja 2020 *Piotr Biler*