Wiktor Pikarczyk 308533

Zad 1

$$Tu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Równanie w innej formie

$$T = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & y/2 & \\ y/2 & 1 & \\ & & z \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Oczywistą wartością własną jest: $\lambda_1 = z$

$\begin{pmatrix} 1 & y/2 \\ y/2 & 1 \end{pmatrix}$ Równanie charakterystyczne $\lambda^2 - 2\lambda - \frac{x^2}{4} + 1 = 0$

Więc wartości własne $\lambda_2 = \frac{2-x}{2}$ $\lambda_3 = \frac{x+2}{2}$

Jeśli $x \in (-\infty, -2)$

to $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 < 0$

$x \in (-2, 2)$

to $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$

$x \in (2, +\infty)$

to $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 > 0$

Pomijamy przypadki dla $\lambda = 0$

Więc dla:

1° $\begin{cases} x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \\ z \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{cases}$

oraz

$\begin{cases} x \in (-2, 2) \\ z \in (-\infty, 0) \end{cases}$

równanie jest hiperboliczne

2° $\begin{cases} x \in (-2, 2) \\ z \in (0, +\infty) \end{cases}$

równanie jest eliptyczne

Scanned with CamScanner

Wiktor Pikarczyk 308533

Zad 2

$$u_{xy} + a u_x + b u_y + c u = 0$$

Niech

$$u(x,y) = v(x,y)\, e^{(-bx-ay)}$$

Wtedy

$$u_x = v_x e^{(-bx-ay)} + v e^{(-bx-ay)}(-b)$$

$$u_y = v_y e^{(-bx-ay)} + v e^{(-bx-ay)}(-a)$$

$$u_{xy} = v_{xy} e^{(-bx-ay)} + v_y e^{(-bx-ay)}(-b) + v_x e^{(-bx-ay)} + v e^{(-bx-ay)}(ab)$$

Niech

$$E = e^{-bx-ay}$$

Teraz podstawiając

$$E\left(v_{xy} - bv_y - av_x + abv + av_x - abv + bv_y - abv + cv\right) = 0$$

$$E\left(v_{xy} + cv - abv\right) = 0 \quad /: E \neq 0$$

$$v_{xy} + (c-ab)v = 0$$

czyli otrzymaliśmy to czego szukaliśmy

$\square$