Zadanie 1 Mamy przestrzenie metryczne $(X_1,\, \rho_1)$ i $(X_2,\, \rho_2)$.

Definicja jednostajnej ciągłości dla f: $X_1 -> X_2$

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, x' \in X) \quad \rho_1(x, x') < \delta \implies \rho_2(f(x), f(x')) < \epsilon$$

Warunek Lipschitza:

$$(\exists L > 0)(\forall x, x' \in X) \quad \rho_2(f(x), f(x')) \leq L\rho_1(x, x')$$

1. Teza: Warunek Lipschitza implikuje jednostajną ciągłość

   Załóżmy, że f spełnia warunek Lipschitza i pokażmy, że jest jednostajnie ciągłą.

   Weźmy dowolne $\epsilon > 0$ i L > 0 z warunku Lipschitza. Niech nasza $\delta < \frac{\epsilon}{L}$, wtedy $L\rho_1(x, x') < \epsilon$, a "dokładając"tą nierówność do warunku Lipschitza otrzymujemy:

   $$\rho_2(f(x), f(x')) \leq L\rho_1(x, x') < \epsilon$$

   Czyli funkcja jest jednostajnie ciągła.

   Teza jest prawdziwa.

2. Teza: Jednostajna ciągłość implikuje ciągłość

   Załóżmy, że f jest jednostajnie ciągła i pokażmy, że jest ciągła. (Wynika to z samej definicji ciągłości, która jest słabsza). Więc weźmy dowolnego $x \in X$ i dowolne ϵ, i chcemy pokazać, że istniej δ, że $\forall x' \in X$ zachodzi

   $$\rho_1(x, x') < \delta \implies \rho_2(f(x), f(x')) < \epsilon$$

   korzystając z jednostajnej ciągłości dla ϵ istnieje taka δ, a ponieważ warunek spełniony jest $\forall x, x' \in X$ to tym bardziej dla wcześniej ustalonego x i dowolnego x'.

   Teza jest prawdziwa.

Kontrprzykłady:

1. Jest jednostajnie ciągła, ale nie spełnia warunku Lipschitza.

   W przestrzeniach metrycznych $([0, 1], d_e)$ i $([0, 1], d_e)$ funkcja $f(x) = \sqrt{x}$ jest jednostajnie ciągła, ale nie jest Lipschitzowska.

   Warunek Lipschitza jest równoważny, że pochodna jest ograniczona, ale w pobliży 0 pochodna funkcji nie jest ograniczona, z czego wynika, że nie jest Lipschitzowska.

   Pozostało pokazać, że jest JC, ale z analizy wiemy, że funkcja ciągła na przedziale naszym przedziale (domkniętym) jest jednostajnie ciągła.

2. Jest ciągła, ale nie jest jednostajnie ciągła.

   W przestrzeniach metrycznych $(\mathbb{R}, d_e)$ i $(\mathbb{R}, d_e)$ funkcja $f(x) = x^2$ jest ciągła, ale nie jest jednostajnie ciągła.

   Dowód nie wprost, załóżmy że jest jednostajnie ciągła.

   Weźmy $\epsilon > 0$ oraz $\delta > 0$ dla których warunek JC jest spełniony.

   Weźmy $x = \frac{\epsilon}{\delta} + \frac{\delta}{2}$ i $x' = \frac{\epsilon}{\delta}$ wtedy $x - x' = \frac{\delta}{2} < \delta$ oraz zakładamy, że $f(x) - f(x)' = x^2 - x'^2 = (x - x')(x + x') = \frac{\delta}{2}(\frac{2\epsilon}{\delta} + \frac{\delta}{2}) = \epsilon + \frac{\delta^2}{4} > \epsilon$, więc otrzymujemy sprzeczność ponieważ $d_e(f(x), f(x')) > \epsilon$.

Zadanie 2 Przestrzeń X nazywamy lokalnie zwartą jeśli $(\forall x \in X)(\exists$ otwarte U) t. że $x \in U \subseteq X$ i cl(U) jest zwarte.

A) Chcemy pokazać, że domknięte i otwarte podprzestrzeni lokalnie zwartej przestrzeni Hausdorffa są lokalnie zwarte.

Niech naszą przestrzenią topologiczna (X,T), gdzie X jest zbiorem, a T jest topologią na X, gdzie X będzie lokalnie zwartą przestrzenią Hausdorffa

1. Podprzestrzenie domknięte

   Niech A będzie dowolnym zbiorem domkniętym w X i weźmy dowolne $x \in A$. Z lokalnej zwartości X wiemy, że istnieje otwarte U, dla którego cl(U) jest zwarte i $x \in U$.

   Korzystając z wskazówski, że przestrzeń X jest normalna, a to implikuje, że jest regularna i wiemy, że podprzestrzenie przestrzeni regularnej też są regularne. Czyli A jest regularne.

   Wiemy, że $X \setminus U$ jest domknięte bo U jest otwarte oraz $(X \setminus U) \cap A \subseteq A$ jest domknięte bo iloczyn zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym. Korzystając z regularności A mamy dwa zbiory otwarte $x \in V \subseteq A$ oraz $(X \setminus U) \cap A \subseteq O \subseteq A$, które są rozłączne.

   Więc wiemy, że $x \in V \cap U \subseteq A$ jest zbiorem otwartym (skończony iloczyn zbiorów otwartych oraz $cl(V \cap U) \subseteq cl(U)$, a ponieważ $cl(V \cap U)$ jest domkniętym podzbiorem zbioru zwartego oznacza to, że też jest zwarty czyli pokazaliśmy, że dla dowolnego zbioru domkniętego A, możemy znaleźć zbiór otwarty $V \cap U$, takie że $cl(V \cap U)$ jest zwarty, czyli dowolna podprzestrzeń domknięta lokalnie zwartej przestrzeni Hausdorffa jest lokalnie zwarta.

2. Podprzestrzenie otwarte

   Niech B będzie dowolnym zbiorem otwartym w X i weźmy dowolne $x \in B$. Z lokalnej zwartości X weźmy otwarte U, dla którego cl(U) jest zwarte i $x \in U$. Wiemy, że:

   $$x \in U \cap B \subseteq cl(U \cap B) \subseteq cl(U)$$

   Skoro U i B są otwarte to $U \cap B \subseteq B$ jest otwarty, oraz otrzymaliśmy $cl(U \cap B)$ jest zbiorem zwartym, ponieważ jest domkniętym podzbiorem zbioru zwartego $cl(U)$, więc pokazaliśmy, że zbiór B jest lokalnie zwarty. Czyli pokazaliśmy, że każda otwarta podprzestrzeń lokalnie zwartej przestrzeni Hausdorffa jest lokalnie zwarta.

B) Lokalna zwartość $\mathbb{R}^n$

Weźmy dowolny $x \in \mathbb{R}$ i przedział (x-1, x+1), który jest zbiorem otwartym zawierającym x. $cl((x-1, x+1)) = [x-1, x+1]$ jest zwarty, ponieważ jest domknięty i ograniczony, więc z każdego ciągu możemy wybrać podciąg zbieżny. Czyli pokazaliśmy, że $\mathbb{R}$ jest lokalnie zwarty.

Korzystając z udowodnienia lokalnej zwartości dla $\mathbb{R}$ pokażemy, że $\mathbb{R}^n$ tez jest lokalnie zwarte dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Weźmy dowolne $x \in \mathbb{R}^n$. Wtedy $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ gdzie, $x_i \in \mathbb{R}$. Wtedy $x \in (x_1 - 1, x_1 + 1) \times ... \times (x_n - 1, x_n + 1)$ czyli x należy do iloczynu kartezjanskiego przedziałów, podany zbiór jest otwarty więc korzystając z własności domknięcia iloczynu skalarnych $cl((x_1 - 1, x_1 + 1) \times ... \times (x_n - 1, x_n + 1)) = [x_1 - 1, x_1 + 1] \times ... \times [x_n - 1, x_n + 1]$. Korzystając z twierdzenia 2.4.2 iloczyn kartezjański skończeniu wielu przestrzeni zwartych jest zbiore zwartym oraz dowodu, że w $\mathbb{R}$ każdy przedział postaci $[x-1, x+1]$ jest zwarty wnioskujemy, że $cl((x_1 - 1, x_1 + 1) \times ... \times (x_n - 1, x_n + 1))$ jest zwarte czyli $\mathbb{R}^n$ jest lokalnie zwarte.

C) **Q** nie jest lokalnie zwarta

Aby pokazać, że **Q** nie jest lokalnie zwarta pokaże, że dla x=0 nie istniej zbiór otwarty, spełniający tą własność.

Nie wprost zakładam, że istnieje taki zbiór otwarty z definicji, (ma on postać $(-a, \epsilon)\cap\mathbf{Q}$ lub $(-\epsilon, a)\cap\mathbf{Q}$, gdzie $a, \epsilon > 0$ oraz $\epsilon \leq a$) zabiorę przedział $(-\epsilon, \epsilon)\cap\mathbf{Q}$ (ponieważ jest on zawarty w tym większym zbiorze otwartym, który spełnia definicje, więc on też ją spełnia i zawiera 0). $cl((-\epsilon, \epsilon) \cap \mathbf{Q}) = [-\epsilon, \epsilon] \cap \mathbf{Q} \subseteq cl((-a, \epsilon)\cap\mathbf{Q})$, czyli $cl((-\epsilon, \epsilon)\cap\mathbf{Q})$ jest zbiorem zwartym, ponieważ jest domkniętym podzbiorem zbioru zwartego. Z własności **Q** możemy wybrać nieskończony ciąg zbieżny do liczby niewymiernej, a ona nie należy do **Q**, więc otrzymyjemy sprzeczność z założeniem, czyli **Q** nie jest przestrzenią lokalnie zwartą.

Przykładowy ciąg to kolejne rozwinięcia dziesiętne liczby niewymiernej $\frac{\sqrt{3}}{k}$ dla takiego $k \in \mathbb{N}$, że $\frac{\sqrt{3}}{k} < \epsilon$.

Zadanie 3 Niech Y zbiorem niepustym i $\infty \notin Y$. Rozważamy przestrzeń $X = Y \cup \{\infty\}$ oraz każdy podzbiór Y jest domknięty oraz zbiory postaci $\{\infty\} \cup (Y \setminus I)$ gdzie I jest skończonym podzbiorem Y.

A) Czy zdefiniowaliśmy topologię na X, niech T oznacza tą topologię.

1. Teza: $\emptyset$ i X należą do tej topologi, czyli są zbiorami pustymi.

   $\emptyset \subseteq Y$ więc $\emptyset$ jest otwarte, więc należy do naszej topologii.

   $X = \{\infty\} \cup (Y \setminus I)$ gdzie $I = \emptyset$ więc X jest otwarte czyli należy do naszej topologii.

   Teza jest prawdziwa.

2. Teza: Przecięcie skończenie wielu elementów z T jest elementem w T

   Dowód indukcyjny:

   Baza indukcji N = 1 Oczywiste.

   Założenie indukcyjne: przecięcie dowolnych N elemementów z T jest elementem w T

   Teza indukcyjna: przecięcie dowolnych N+1 elemementów z T jest elementem w T

   Chcemy udowodnić tezę indukcyjną, że $(X_1 \cap X_2 \cap ... \cap X_{N+1}) \in T$, korzystając z założenia indukcyjnego wiemy, że $(X_1 \cap X_2 \cap ... \cap X_N) \in T$ czyli możemy zabrać $Z \in T$ t. że $(X_1 \cap X_2 \cap ... \cap X_N) = Z$. Więc pozostało nam udowodnić $(Z \cap X_{N+1}) \in T$ Rozważmy przypadki:

   (a) $Z \subseteq Y$ i $X_{N+1} \subseteq Y$
   Więc $(Z \cap X_{n+1}) \subseteq Y$ czyli przecięcie jest otwarte, więc $(Z \cap X_{n+1}) \in T$

   (b) b.s.o $Z \subseteq Y$ i $X_{N+1} = \{\infty\} \cup (Y \setminus I)$ gdzie $I \subseteq Y$ skończone.
   Wtedy $Z \cap X_{n+1} = Z \cap (\{\infty\} \cup (Y \setminus I)) = Z \cap (Y \setminus I) = Z \setminus I \subseteq Y$ więc jest otwarte, czyli $Z \cap X_{n+1} \in T$.

   (c) $Z = \{\infty\} \cup (Y \setminus I_z)$ i $X_{N+1} = \{\infty\} \cup (Y \setminus I_x)$ gdzie $I_z, I_x \subseteq Y$ skończone.
   Wtedy $Z \cap X_{n+1} = (\{\infty\} \cup (Y \setminus I_z)) \cap (\{\infty\} \cup (Y \setminus I_x)) = \{\infty\} \cup ((Y \setminus I_z)) \cap (Y \setminus I_x))) = \{\infty\} \cup (Y \setminus (I_z \cup I_x)) = \{\infty\} \cup (Y \setminus I)$, gdzie $I = I_z \cup I_x$, a ponieważ I_z i I_x są skończone to I jest skończone czyli mamy zbiór otwarty, więc $Z \cap X_{n+1} \in T$

   Teza indukcyjna została spełniona, więc na mocy zasady o indukcji teza jest spełniona.

3. Teza: Suma dowolnie wielu elementów T jest elementem w T. Rozważmy dwa przypadki sum:
   (a) Każdy zbiór sumy nie zawiera ∞
   Wtedy każdy zbiór z sumy $\bigcup X$ jest podzbiorem Y, więc $\bigcup X \subseteq Y$ czyli jest otwarty więc $\bigcup X \in T$.
   (b) Istnieje zbiór Z w naszej sumie, któty zawiera ∞
   Zbiór ten ma postać $Z = \{\infty\} \cup (Y \setminus I)$ gdzie $I \subseteq Y$ skończone.
   Więc $\bigcup X = \bigcup X' \cup Z = \bigcup X' \cup \{\infty\} \cup (Y \setminus I)$, ponieważ mamy $\{\infty\}$ to możemy z naszej sumy "usunąć"ten element i zabrać $\bigcup X'' = (\bigcup X') \setminus \infty$ czyli nasze $X'' \subseteq Y$.
   Korzystając z poprzedniego podpunktu istnieje $A \subseteq Y$ i $A \in T$ takie, że $A = \bigcup X''$ czyli mamy $\bigcup X' \cup \{\infty\} \cup (Y \setminus I) = \bigcup X'' \cup \{\infty\} \cup (Y \setminus I) = \{\infty\} \cup A \cup (Y \setminus I) = \{\infty\} \cup (Y \setminus I')$, gdzie $I' \subseteq I$, a ponieważ I ograniczone to tym bardzie I', więc nasza suma jest zbiorem otwartym, czyli $\bigcup X \in T$.

Teza jest prawdziwa.

D) Wykazać, że X jest przestrzenią normalną

1. Przestrzeń jest T_1 czyli $\forall x \in X$ $\{x\}$ jest zbiorem domkniętym.

   Weźmy $x \in Y$, wtedy $\{x\} = X \setminus (\{\infty\} \cup (Y \setminus \{x\}))$, a $(\{\infty\} \cup (Y \setminus \{x\}))$ jest otwarty bo $\{x\} \subseteq Y$ skończone, więc $\{x\}$ jest domknięte.

   Weźmy $\{\infty\} = X \setminus Y$, a $Y \subseteq Y$ więc jest zbiorem otwartym czyli $\{\infty\}$ jest domknięte.

   Więc pokazaliśmy, że nasza przestrzeń jest T_1

2. $\forall A, B$ domknięte i rozłączne $\exists$ U i V otwarte takie, że $A \subseteq U$ i $B \subseteq V$ oraz $U \cap V = \emptyset$

   Korzystając z własności, że A jest domknięte wtedy i tylko wtedy, kiedy dopełnienie A jest otwarte otrzymujemy 2 rodzaje zbiorów domkniętych w naszej topologii

   (a) Skończone podzbiory Y. (Nie mogą być nieskończone z własności, że I skończone).
   (b) Dowolne podzbiory z $\{\infty\}$ (ponieważ ich dopełnienie jest podzbiorem Y, czyli jest otwarte)

   Należy rozważyć teraz przypadki:

   (a) Weźmy dowolne rozłączna A i B typa a) wtedy oba są podzbiorami Y, więc oba są otwarte, czyli istinieje U = A i V = B, a ponieważ A i B rozłączne to U i V też.
   (b) B.S.O. Weźmy dowolne rozłączna A (typ a) i B (typ B), ponieważ A jest skończonym podzbiorem Y to istnieje U = A i $V = \{\infty\} \cup (Y \setminus A)$, oczywiste jest, że U i V są rozłączna, a $B \subseteq V$, ponieważ A i B rozłączne.
   (c) Weźmy dowolne rozłączna A (typ b) i B (typ B), ale nie ma takich, ponieważ $\{\infty\} \in A$ oraz $\{\infty\} \in B$.

   Więc pokazaliśmy, że nasza przestrzeń jest normalna.

C) Podać wzór na domknięcie i wnętrze dowolnego zbioru $A \subseteq X$

W podpunkcie D zdefiniowaliśmy, które podzbiory są domknięte, więc opierając się na tym

$$cl(A) = \begin{cases} \{\infty\} \cup A & A \subseteq Y \quad i \quad A \quad nieskonczony \\ A & wpp \end{cases}$$

Argumentacja dla pierwszego przypadku wynika z tego, że skoro A jest nieskończone i jest podzbiorem Y to większy podzbiór Y nadal nie będzie domknięty, bo będzie nieskończony, więc jedynie dodanie elemntu $\{\infty\}$ pomoże, a z warunku, że musi być najmniejsze i zawierać A otrzymujemy $\{\infty\} \cup A$, a dla drugiego przypadku po prostu są to już zbiory domknięte więc cl(A) = A.

$$int(A) = \begin{cases} A \setminus \{\infty\} & dla A = \{\infty\} \cup (Y \setminus I), gdzie \quad I \quad nieskonczone \\ A & wpp \end{cases}$$

Argumentacja dla pierwszego przypadku (przypadku zbiorów, które nie są otwarte), że z definicji wnętrza jest to największy zbiór otwarty w A, więc jest to albo zbiór otwarty, który jest podzbiotem Y lub zbiór otwarty zawierający $\{\infty\}$, ale drugi przypadke nie jest możliwy do osiągnięcia, ponieważ musielibyśmy sprowadzić I do zbioru skończonego, więc musielibyśmy "dodaćńieskończenie wiele elementów, ale to nie byłoby zawarte w A, więc dlatego "usuwamy"$\{\infty\}$, a drugi przypadek jest oczywisty bo zbiór A jest otwarty.

B) Kiedy topologia ma bazę przeliczalną i kiedy jest ośrodkowa.

Definicja bazy przeliczalnej $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i = X$, gdzie $X_i$otwarte oraz dowolny zbiór otwarty w T można przedstawić za pomocą sumy elementów naszej bazy.

Wiemy, że dowolny podzbiór Y jest zbiorem otwartym szczególnie pojedyńcze elementy. Wieć jeśli Y jest skończone to X jest skończone, więc nasza baza będzie skończona czyli przeliczalna.

Jeśli Y jest przeliczalnie duży wtedy do baza może się składać z zbiorów jednoelemntowych elementów z Y (przeliczalnie wiele), które będą nam generowały Y, a w przypadku generowania zbiorów otwartych postaci $\{\infty\} \cup (X\setminus)$, jedyne od czego zależne są te zbiory otwarte to I, który jest skończonym zbiorem zbioru przeliczalnego. Korzystając z twierdzenia, które pojawiło się na logice wiemy, że zbiór skończonych podzbiorów zbioru przeliczalnego jest zbiorem przeliczalnym, więc w naszym przypadku zbiór wyszstkich możliwych I jest przeliczalnie wiele, ponieważ Y jest przeliczalne. Więc kolejnymi elementami bazy, będą wszystkie zbiory otwarte postaci $\{\infty\} \cup (X\setminus)$, których jest przeliczalnie wiele, a więc cała nasza baza jest przeliczalna. (Powyżej w przypadku I zakładaliśmy, że jest ograniczony.)

Jeśli Y jest nieprzeliczalnie duży wtedy mamy nieprzeliczalnie wiele zbiorów jednoelemntowych, które są zbiorami otwartymi, więc nasza baza nie może być przeliczalna (zbiory jednoelementowe będą do niej należały).

Przestrzeń jest ośrodkowa tylko dla przeliczalnego nieskończonego Y, ponieważ cl(A) = X tylko dla A = Y, uzasadnione w podpunkcie C).

Zadanie 4 Wiemy, że (X,d) jest przestrzenią metryczną zupełną, $f : Y- > \mathbb{R}$, gdzie $Y \subseteq X$ i $d_f(x, y) = d(x, y) + |f(x) - f(y)|$.

1. (Y, d_f) jest zupełna $\implies$ wykres f jest domknięty

   Oznaczmy wykres f jako W i załóżmy nie wprost, że nie jest domknięty, czyli $\exists(x, y) \in cl(W)$ taki, że $(x, y) \notin W$. Weźmy takie (x,y) i skorzystajmy z definicji zbioru domkniętego w przestrzeni metrycznej, czyli istnieje ciąg $(x_n, y_n) \in W$, taki że $(x_n, y_n)- > (x, y)$. Skoro $(x_n, y_n) \in W$ oznacza to, że $(x_n, y_n) = (x_n, f(x_n))$, a skoro x_n jest zbieżny to jest też ciągiem Cauchy'ego, więc korzystamy z tego, że (Y, d_f) jest zupełne czyli $d_f(x_n, x)- > 0$ czyli $(d(x_n, x)+|f(x_n)-f(x)|)- > 0$, korzystając z tego, że (X,d) jest zupełna wiemy, że $d(x_n, x)- > 0$, więc $|f(x_n) - f(x)|- > 0$, a z tego wynika, że $x_n- > x$ i $f(x_n)- > f(x)$, czyli $(x_n, y_n)- > (x, f(x))$. a wiemy że $(x, f(x)) \in W$, czyli otrzymujemy sprzeczność, więc wykres f jest domknięty.

2. wykres f jest domknięty $\implies$ (Y, d_f) jest zupełna

   Załóżmy nie wprost, że (Y, d_f) nie jest zupełna, czyli istnieje ciąg Cauchy'ego x_n, który nie jest zbieżny. Wiemy o tym, że ten ciąg jest zbieżny w przestrzeni (X,d), więc $d(x_n, x)- > 0$, a ponieważ f jest domknięte to ciąg $(x_n, f(x_n))- > (x, f(x))$ czyli $|f(x_n) - f(x)|- > 0$, a z tych dwóch granic wynika, że $d_f(x_n, x)- > 0$ czyli otrzymujemy sprzeczność, więc (Y, d_f) jest zupełna.

Zadanie 5 A) Korzystając z twierdzenie 1.2.6 pokażę, że zbiory podanej postaci stanowią bazę pewnej topologi K(X).

1. $\bigcup B = K(X)$ Załóżmy nie wprost, że istnieje zbiór $F \in K(X)$, taki że dla każdego elementu $B \in BASE$ $F \notin B$.

   Wiemy, że $F \subseteq X$ oraz F jest domknięte wiemy, że X jest zwarte więc F ma skończone pokrycie zbiorami otwartymi. Niech U_i będzie tym pokryciem dla i > 0, a $U_0 = \bigcup U_i$, a dla takich ustalonych U, $F \in B_k$ dla pewnego k, ponieważ $F \subseteq U_0$ oraz dla dowolnego i $F \cap U_i \neq \emptyset$ Czyli otrzymujemy sprzeczność, więc nasza teza $\bigcup B = K(X)$ jest prawdziwa.

2. Jeśli $B_1, B_2 \in BASE$ i $X \in B_1$ i $X \in B_2$ to istnieje $B_3 \in BASE$, taki że $X \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$

   Więc weźmy dowolne B_1 i B_2, które nie kroją się pusto (wpp pierwsze część implikacji fałszywa) wtedy otrzymujemy pewien zbiór zbiorów domkniętych w X. Załóżmy, że zbiory otwarte U_i generowały B_1, a V_j generowały B_2 (b.s.o. możemy założyć, że jest ich tyle same - n, w przypadku kiedy dla któregoś było ich mniej, można sztucznie zwiększyć ich liczbę poprzez wielokrotne użycie, któregoś zbioru np. U_0 lub V_0).

   Więc zbiory P należące do przecięcia spełniają $P \subseteq (U_0 \cap V_0)$ oraz $P \cap U_i \neq \emptyset$ i $P \cap V_i \neq \emptyset$. Więc mogę wygenerować B_3 z 2n zbiorami otwartymi O_i, gdzie $O_i = U_i$ i $O_{i+n} = V_i$ dla $0 < i < n + 1$, a $O_0 = V_0 \cap U_0$, oczywiste jest że $B_1 \cap B_2 \subseteq B_3$.

   Nie wprost załóżmy, że istnieje element $L \in B_3$ taki, że $L \notin B_1 \cap B_2$, ale sprawdzając warunki, które zdefiniowaliśmy dla B_3 okazuje się, że $L \in B_1$ oraz $L \in B_1$, więc otrzymujemy sprzeczność, czyli pokazaliśmy coś silniejszego niż była teza, bo zdefiniowaliśmy od razu zbiór B_3, który zawiera każdy element z $B_1 \cap B_2$ oraz $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$

B) Topologia generowana przez metryke $(K(X), d_h)$ zadana jest przez zadaną bazę.

Abu udowodnić ten fakt, pokaże że bazy są równoważne czyli obie można przedstawić za pomocą drugiej. Więc wystarczy, że dowolny element z bazy mogę przedstawić za pomocą drugiej bazy tak, aby ta druga baza się zawierała w tej pierwszej.

1. Najpierw pokażę, że dla dowolnego elementu x dowolnej kuli $O(K, r) \subseteq (K(x), d_h)$ (r > 0), istnieje element bazy $B \in BASE$, taki że $x \in B \subseteq O(K, r)$. Weźmy taki dowolny element i dowolną kulę. Wiemy o tym, że $d_h(K, x) = \epsilon$, więc jeśli dla dowolnego element $F \in B$ $d_h(F, x) < r - \epsilon$ oznacza to, że $d_h(K, F) < r$ (nierówność trójkąta). Czyli spełnione byłoby kryterium $B \subseteq O(K, r)$.

   Aby spełnić to kryterium $F \in B$ $d_h(F, x) < r - \epsilon$ chcemy, aby dowolny element z B nie był oddalony od x o przynajmniej $r - \epsilon$, więc zabierzmy pokrycie x kulami o promieniu $r - \epsilon$ i srodkach $a \in x$*, wtedy zapewnimy, że dowolny element spełni nam tą odległość. Ponieważ nasza przestrzeń jest zwarta to możemy wybrać skończone pokrycie tych kul V_i, gdzie (0 $<$ i $<$ n+1). Wygenerujemy nasze B:

   $U_0 = \bigcup V_i$ oraz $U_i = V_i$, więc oczywiste jest, że x należy do naszego B. Więc spełniliśmy $x \in B \subseteq O(K, r)$.

*To, że możemy pokryć zbiór takimi kulami jest oczywiste, ponieważ można założyć nie wprost, że nie możemy, a to oznacza, że istniej punkt $w \in x$, taki że nie należy do żadnej kuli, ale przecież zabraliśmy kulę o środku w tym punkcie, więc otrzymujemy sprzeczność.

2. Pozostało pokazanie, że dla dowolnego elementu x dowolnego elementu bazy, taki że $x \in B \subseteq BASE$ istnieje kula $O(x, r) \subseteq (K(X), d_h)$, taka że $x \in O(x, r) \subseteq B$ (r $>$ 0). Weźmy dowolny element i dowolny element bazy. Oczywiste jest, że $x \in O(x, r)$.

   Chcemy pokazać, że istnieje r takie, że $O(x, r) \subseteq B$. Wiemt o tym, że X_0 jest zbiorem domkniętym, ponieważ U_0 jest otwarte oraz x jest zwarte bo jest domkniętym podzbiorem zbioru zwartego X. Więc z list 4 zad 4, wiemy, że odległość, pomiędzy dowolnymi $a \in x$ oraz $b \in X_0$ jest ograniczona z dołu przez pewną stałą $d_h(a, b) \geq \epsilon$, więc mamy już taki promień dla którego $a \in O(k, \epsilon)$ zachodzi, że $a \subseteq U_0$.

   Może się okazać, że elementy naszego okręgu kroją się pusto z zbiorami otwartymi U_i. Więc musimy zapewnić, że nasz promień nie dopuści do takiej sytuacji. Ponieważ $U_i \cap x \neq \emptyset$ oznacza to, że istnieje kula $o(y, r'_i) \subseteq (X, d)$, gdzie $o(y, r'_i) \subseteq U_i \cap x$, wynika to z faktu, że U_i jest otwarte. Jeśli promień r kuli O, będzie $r \leq r'_i$ będzie oznaczało, że w dowolnym elemencie $F \in O(x, R)$ istnieje punkt, który nie jest $z \in F$, taki że $d(z, y) \leq r'_i$ więc zapewniliśmy, że dowolny element z kuli będzie kroił się niepusto z U_i, a ponieważ U_i jest skończone to możemy zabrać minimum z $r' = min(r_i)$ wtedy będziemy mieć zapewnione to, że nie kroi się pusto z zbiorami U_i.

   Więc znaleźliśmy promień $r = min(r', \epsilon)$, który spełnia nam $x \in O(x, r) \subseteq B$

Więc pokazaliśmy, że topologia $(K(X), d_h)$ jest zadana przez bazę.