Analiza numeryczna

3. Interpolacja

Rafał Nowak

Interpolacja

Zadanie interpolacyjne Lagrange'a

1. dane: $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, $[y_0, y_1, \ldots, y_n]$
2. znaleźć wielomian $L_n(x)$ st. $\leqslant n$ o własnościach

$$L_n(x_i) = y_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

3. rozwiązanie (postać Lagrange'a):

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \lambda_k(x),$$

gdzie

$$\lambda_k(x) := \prod_{j=0,\, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

Inne postaci wielomianu interpolacyjnego

Niech

$$\sigma_k := \prod_{j=0,\, j\neq k}^{n} \frac{1}{x_k - x_j} \qquad (0 \leqslant k \leqslant n)$$

- postać barycentryczna

$$L_n(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\sigma_k}{x - x_k} y_k \Bigg/ \sum_{k=0}^{n} \frac{\sigma_k}{x - x_k}, & \text{gdy } x \notin \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}, \\ y_k, & \text{gdy } x = x_k,\ 0 \leqslant k \leqslant n. \end{cases}$$

Algorytm Wernera

Algorytm (Werner, 1984)

1. *Obliczamy pomocnicze wielkości* $a_k^{(i)}$ *wg wzorów*

$$a_0^{(0)} := 1, \quad a_k^{(0)} := 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\left.\begin{array}{l} a_k^{(i)} := a_k^{(i-1)}/(x_k - x_i), \\ a_i^{(k+1)} := a_i^{(k)} - a_k^{(i)} \end{array}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 0, 1, \ldots, i-1),$$

2. *Wówczas*

$$\sigma_k := a_k^{(n)} \quad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Inne postaci wielomianu interpolacyjnego

Niech

$$p_0(x) \equiv 1, \quad p_k(x) := (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x -_{k-1}) \quad (1 \leqslant k \leqslant n+1)$$

oraz

$$b_k := \sum_{i=0}^{k} \frac{y_i}{p'_{k+1}(x_i)} = \sum_{i=0}^{k} \frac{y_i}{\prod_{j=0, j\neq i}^{k}(x_i - x_j)} \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

- postać Newtona

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k p_k(x)$$

Uogólniony schemat Hornera

Algorytm (uogólniony algorytm Hornera)

$$
\begin{aligned}
&w_n := b_n;\\
&w_k := w_{k+1}(x - x_k) + b_k \qquad (k = n-1, n-2, \ldots, 0);\\
&w(x) = w_0.
\end{aligned}
$$

Ponieważ

$$\sigma_k = \frac{1}{p'_{n+1}(x_k)},$$

więc

- inny wariant wzoru Lagrange'a

$$L_n(x) = p_{n+1}(x) \sum_{k=0}^{n} y_k \frac{\sigma_k}{x - x_k}.$$

Ilorazy różnicowe

Definicja

Niech funkcja f będzie określona w parami różnych punktach $x_0, x_1, \ldots$ *Iloraz różnicowy k-tego rzędu* (krócej: *k-ty iloraz różnicowy*) $(k = 0, 1, \ldots)$ funkcji f w punktach $x_0, x_1, \ldots, x_k$ oznaczamy symbolem $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ i określamy wzorem

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] := \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{k} (x_i - x_j)}. \tag{1}$$

Własności ilorazów różnicowych

1. Iloraz $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ jest symetryczną funkcją zmiennych $x_0, x_1, \ldots, x_k$.
2. Iloraz różnicowy zależy liniowo od funkcji, dla której został utworzony, tj. jeśli $f = g + ch$ (c - stała), to $f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = g[x_0, x_1, \ldots, x_k] + ch[x_0, x_1, \ldots, x_k]$.
3. Jeśli $w \in \Pi_m \setminus \Pi_{m-1}$, to $w[x, x_1, \ldots, x_k]$ jest wielomianem stopnia $(m-k)$-tego zmiennej x; w szczeg. iloraz $w[x, x_1, \ldots, x_m]$ jest stałą, a $w[x, x_1, \ldots, x_{m+1}]$ jest zerem.
4. Zachodzi wzór rekurencyjny

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Obliczanie ilorazów różnicowych

Schemat obliczeń

$$
\begin{array}{llllllll}
x_0 & \underline{f(x_0)} & \searrow & & & & & \\
x_1 & f(x_1) & \rightarrow & \underline{f[x_0,x_1]} & & & & \\
x_2 & f(x_2) & & f[x_1,x_2] & & & & \\
\multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} & & & \\
x_{n-1} & f(x_{n-1}) & \searrow & f[x_{n-2},x_{n-1}] & \cdots & \underline{f[x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}]} & \searrow & \\
x_n & f(x_n) & \rightarrow & f[x_{n-1},x_n] & \cdots & f[x_0,x_1,\ldots,x_{n-1}] & \rightarrow & \underline{f[x_0,x_1,\ldots,x_n]}
\end{array}
$$

Obliczanie ilorazów różnicowych

Algorytm (Obliczanie współczynników postaci Newtona)

Ensure: $b_k = f[x_0, \ldots, x_k]$

```
1: for k = 0 to n do
2:     b_k ← f(x_k)
3: end for
4: for j = 1 to n do
5:     for k = n downto j do
6:         b_k ← (b_k − b_{k−1})/(x_k − x_{k−j})
7:     end for
8: end for
9: return b
```

Reszta wzoru interpolacyjnego

Twierdzenie

Niech f *będzie funkcją określoną w przedziale* $[a, b]$*, niech* $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ *będą parami różne i niech wielomian* $L_n \in \Pi_n$ *spełnia warunki*

$$L_n(x_i) = f(x_i) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n). \tag{2}$$

Wówczas dla każdego $x \in [a, b] \setminus \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *zachodzi równość*

$$f(x) - L_n(x) = f[x, x_0, x_1, \ldots, x_n]p_{n+1}(x), \tag{3}$$

gdzie

$$p_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

Twierdzenie

Jeśli funkcja f ma w przedziale $[a, b]$ ciągłą $(n+1)$-szą pochodną, a wielomian $L_n \in \Pi_n$ interpoluje tę funkcję w parami różnych punktach $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$, to dla każdego $x \in [a, b]$ zachodzi równość

$$f(x) - L_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) p_{n+1}(x), \tag{4}$$

gdzie ξ_x jest pewną liczbą (zależną od x) z przedziału (a, b).

Twierdzenie

Jeśli funkcja f ma w przedziale $[a, b]$ ciągłą $(n+1)$-szą pochodną, a wielomian $L_n \in \Pi_n$ interpoluje tę funkcję w parami różnych punktach $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$, to dla każdego $x \in [a,\, b]$ zachodzi równość

$$f(x) - L_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x) p_{n+1}(x), \tag{4}$$

gdzie ξ_x jest pewną liczbą (zależną od x) z przedziału (a, b).

Wniosek

Jeśli $f \in C^{n+1}[a, b]$, $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in [a, b]$, to istnieje taki punkt $\xi \in (a, b)$, że

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}] = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Wniosek

Jeśli funkcja f *ma w przedziale* $[-1, 1]$ *ciągłą* $(n+1)$*-szą pochodną, to*

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}P_{n+1}}{(n+1)!}, \tag{5}$$

gdzie

$$M_{n+1} := \max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |f^{(n+1)}(x)|,$$
$$P_{n+1} := \max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |p_{n+1}(x)|.$$

Wielomiany Czebyszewa

Definicja (Wielomiany Czebyszewa (pierwszego rodzaju) $T_k(x)$)

$$\begin{aligned} &T_0(x) \equiv 1; \quad T_1(x) = x; \\ &T_k(x) = 2xT_{k-1} - T_{k-2} \qquad (k = 2, 3, \ldots). \end{aligned}$$

1. Współczynnik wielomianu T_k ($k \geqslant 1$) przy x^k (zwany **współczynnikiem wiodącym**) jest równy 2^{k-1}.
2. Zachodzi równość $T_k(-x) = (-1)^k T_k(x)$ dla $k \geqslant 0$.
3. Dla dowolnego x z przedziału $[-1, 1]$ k-ty wielomian Czebyszewa ($k \geqslant 0$) wyraża się wzorem
$$T_k(x) = \cos(k \arccos x).$$
Zatem $|T_k(x)| \leqslant 1 \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1;\ k \geqslant 0)$.
4. **Punkty ekstremalne** wielomianu $T_k(x)$ w przedziale $[-1,\ 1]$, czyli rozwiązania równania $|T_k(x)| = 1$, wyrażają się wzorem
$$u_{kj} = \cos \frac{j\pi}{k} \qquad (j = 0, 1, \ldots, k).$$
Stąd, wobec poprzedniej własności, mamy
$$\|T_k\|_{[-1,1]} = 1 \qquad (k \geqslant 0).$$
5. Wielomian Czebyszewa $T_k(x)$ ($k \geqslant 1$) ma k zer pojedynczych, leżących w przedziale $(-1,\ 1)$, równych
$$t_{kj} = \cos \frac{2j+1}{2k}\pi \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, k-1).$$

Twierdzenie (Postać Czebyszewa wielomianu)

Każdy wielomian $w \in \Pi_n$ *można jednoznacznie przedstawić w postaci*

$$w(x) = \sum_{k=0}^{n}{}' c_k T_k(x). \tag{6}$$

Twierdzenie (Postać Czebyszewa wielomianu)

Każdy wielomian $w \in \Pi_n$ można jednoznacznie przedstawić w postaci

$$w(x) = {\sum_{k=0}^{n}}' c_k T_k(x). \tag{6}$$

Algorytm (algorytm Clenshawa)

Aby obliczyć wartość wielomianu (6) w punkcie x określamy pomocniczo wielkości B_0, B_1, B_{n+2} wzorami

$$\begin{aligned} &B_{n+2} := B_{n+1} := 0; \\ &B_k := 2xB_{k+1} - B_{k+2} + c_k \qquad (k = n, n-1, \ldots, 0). \end{aligned}$$

Wówczas

$$w(x) = \frac{1}{2}(B_0 - B_2).$$

Twierdzenie

Dla danych $c_i \in X_{fl}$ *i* $x \in X_{fl}$ *wartość wielomianu* (6) *obliczonego za pomocą algortymu Clenshawa wyraża sie wzorem*

$$\mathrm{fl}(w(x)) = \sum_{k=0}^{n}{}' c_k(1+e_k)T_k(x),$$

gdzie $|e_k| \leqslant L(n)\, u$*, przy czym* $L(n)$ *rośnie kwadratowo wraz z* n*.*

Zatem algortym Clenshawa jest numerycznie poprawny.

Węzły Czebyszewa

1. zera wielomianu T_{n+1}:

$$x_k := t_{n+1,k} = \cos \frac{2k+1}{2n+2}\pi \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

2. punkty ekstremalne wielomianu T_n:

$$x_k := u_{n,k} = \cos \frac{k}{n}\pi \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

Lemat

Wielomian $\tilde{T}_n := 2^{1-n} T_n$ *ma najmniejszą normę w przedziale* $[-1,\,1]$ *spośród wszystkich wielomianów stopnia* $\leqslant n$, *o współczynniku wiodącym równym 1.*

Lemat

Wielomian $\tilde{T}_n := 2^{1-n}T_n$ *ma najmniejszą normę w przedziale* $[-1, 1]$ *spośród wszystkich wielomianów stopnia* $\leqslant n$*, o współczynniku wiodącym równym 1.*

Wniosek

W poniższym oszacowaniu błędu interpolacji

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}P_{n+1}}{(n+1)!}, \tag{7}$$

prawa strona jest najmniejsza i równa $\frac{M_{n+1}}{2^n(n+1)!}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$p_{n+1}(x) = 2^{-n}T_{n+1}(x),$$

tj. gdy węzłami $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *są zera wielomianu Czebyszewa* T_{n+1}*.*

Lemat

Wielomian $I_n \in \Pi_n$ *interpolujący funkcję* f *w węzłach*

$$t_j \equiv t_{n+1,j} = \cos \frac{2j+1}{2n+2}\pi \qquad (j = 0, 1, \ldots, n)$$

(zerach wielomianu T_{n+1}*) można zapisać w postaci*

$$I_n(x) = \sum_{k=0}^{n}{}' \alpha_k T_k(x), \tag{8}$$

gdzie

$$\alpha_k := \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^{n} f(t_j) T_k(t_j) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{9}$$

Lemat

Wielomian $J_n \in \Pi_n$ *interpolujący funkcję* f *w węzłach*

$$u_j \equiv u_{nj} = \cos(j\pi/n) \qquad (j = 0, 1, \ldots, n)$$

(punktach ekstremalnych wielomianu T_n*) można zapisać wzorem*

$$J_n(x) = {\sum_{k=0}^{n}}'' \beta_k T_k(x), \tag{10}$$

gdzie

$$\beta_k := \frac{2}{n} {\sum_{j=0}^{n}}'' f(u_j) T_k(u_j) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{11}$$

Wybór węzłów

- Wybór węzłów w przedziale $[a, b]$: Zauważmy, że funkcja

$$t \to \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}$$

przekształca przedział $[-1, 1]$ w przedział $[a, b]$.

Wybór węzłów

- Wybór węzłów w przedziale $[a,b]$: Zauważmy, że funkcja

$$t \to \frac{b-a}{2}t + \frac{a+b}{2}$$

przekształca przedział $[-1,1]$ w przedział $[a,b]$.

Oszacowanie reszty wzoru interpolacyjnego:

1. węzły równoodległe

$$x_k = -1 + 2k/n \qquad (k = 0, 1, \ldots, n);$$

Mamy

$$\frac{1}{n^{3/2}}\left(\frac{2}{e}\right)^{n+1} \leqslant P^e_{n+1} \leqslant n!\left(\frac{2}{n}\right)^{n+1},$$

przy czym lewa nierówność zachodzi dla dostatecznie dużego n.

2. węzły Czebyszewa:

$$P_{n+1} = 2^{-n},$$

DFT

Dyskretna transformata Fouriera (DFT)

DFT przekształca ciąg $\boldsymbol{x} = [x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}]$ w ciąg $\boldsymbol{y} = [y_0, y_1, \ldots, y_{N-1}]$, gdzie

$$y_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{2\pi \mathrm{i} jk/N} \qquad (0 \leqslant k < N). \tag{12}$$

Wyznaczanie wszystkich wartości y_k wprost ze wzoru (12) wymaga wykonania $\mathcal{O}(N^2)$ operacji arytmetycznych. Okazuje się, że można to zrobić w czasie $\mathcal{O}(N \log N)$ — wykorzystując technikę *dziel i zwyciężaj*.

Algorytm DFT (1/2)

Niech $\omega_N := e^{2\pi \mathrm{i}/N}$. Wówczas wzór (12) można zapisać w postaci

$$y_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j \omega_N^{jk} \qquad (0 \leqslant k < N). \tag{13}$$

Załóżmy, że $N = 2M$, a najlepiej niech N będzie potęgą dwójki.

Algorytm DFT (1/2)

Niech $\omega_N := e^{2\pi \mathrm{i}/N}$. Wówczas wzór (12) można zapisać w postaci

$$y_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j \omega_N^{jk} \qquad (0 \leqslant k < N). \tag{13}$$

Załóżmy, że $N = 2M$, a najlepiej niech N będzie potęgą dwójki. Łatwo sprawdzić, że dla $k = 0, 1, \ldots, M-1$ mamy

$$y_{2k} = \sum_{j=0}^{M-1} \underbrace{(x_j + x_{M+j})}_{a_j} \omega_M^{jk},$$

$$y_{2k+1} = \sum_{j=0}^{M-1} \left[\underbrace{(x_j - x_{M+j})\omega_N^j}_{b_j} \right] \omega_M^{jk}.$$

Algorytm DFT (1/2)

Niech $\omega_N := e^{2\pi \mathrm{i}/N}$. Wówczas wzór (12) można zapisać w postaci

$$y_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j \omega_N^{jk} \qquad (0 \leqslant k < N). \tag{13}$$

Załóżmy, że $N = 2M$, a najlepiej niech N będzie potęgą dwójki. Łatwo sprawdzić, że dla $k = 0, 1, \ldots, M-1$ mamy

$$y_{2k} = \sum_{j=0}^{M-1} \underbrace{(x_j + x_{M+j})}_{a_j} \omega_M^{jk},$$

$$y_{2k+1} = \sum_{j=0}^{M-1} \left[\underbrace{(x_j - x_{M+j})\omega_N^j}_{b_j} \right] \omega_M^{jk}.$$

Oznacza to, że wektor $\boldsymbol{y}$ można obliczyć wywołując DFT$(\boldsymbol{a})$ i DFT$(\boldsymbol{b})$ czyli dwukrotnie DFT, ale dla wektorów o połowę krótszych.

Algorytm DFT (2/2)

Algorytm (Szybka transformata Fouriera)

DFT$(\boldsymbol{x})$

$N \leftarrow length(\boldsymbol{x})$

if $N = 1$ ***then***

  return x

end if

$M \leftarrow N/2$

$\boldsymbol{x}_{\textit{left}} \leftarrow \boldsymbol{x}[1:M]$

$\boldsymbol{x}_{\textit{right}} \leftarrow \boldsymbol{x}[M+1:N]$

$\boldsymbol{y}_{\textit{even}} \leftarrow DFT(\boldsymbol{x}_{\textit{left}} + \boldsymbol{x}_{\textit{right}})$

$\boldsymbol{y}_{\textit{odd}} \leftarrow DFT((\boldsymbol{x}_{\textit{left}} - \boldsymbol{x}_{\textit{right}}) \;.\!* \;[\omega_N^j \textbf{ for } j = 0 : M-1])$

$\boldsymbol{y}[1:2:N-1] \leftarrow \boldsymbol{y}_{\textit{even}}$

$\boldsymbol{y}[2:2:N] \leftarrow \boldsymbol{y}_{\textit{odd}}$

return $\boldsymbol{y}$

Uwaga: operator $.*$ *oznacza mnożenie wektorów po współrzędnych.*

Zbieżność ciągu wielomianów interpolacyjnych

Twierdzenie (Bernstein)

Niech będzie $f(x) = |x|$, $[a, b] = [-1, 1]$, $x_{nk} = -1 + \frac{2k}{n}$ ($k = 0, 1, \ldots, n$; $n > 0$). *Wówczas dla* $x \notin \{-1, 0, 1\}$ *ciąg* $\{L_n(x)\}$ *nie jest zbieżny do* $f(x)$*!*

Zbieżność ciągu wielomianów interpolacyjnych

Twierdzenie (Bernstein)

Niech będzie $f(x) = |x|$, $[a, b] = [-1, 1]$, $x_{nk} = -1 + \frac{2k}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n;\ n > 0)$. *Wówczas dla* $x \notin \{-1, 0, 1\}$ *ciąg* $\{L_n(x)\}$ *nie jest zbieżny do* $f(x)$*!*

Twierdzenie (Runge)

Niech będzie $f(x) = 1/(1 + 25x^2)$, $[a, b] = [-1, 1]$, $x_{nk} = -1 + \frac{2k}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n;\ n > 0)$. *Ciąg* $\{L_n(x)\}$ *jest zbieżny do* $f(x)$ *tylko dla* $|x| \leqslant 0.72668\ldots$ *i rozbieżny dla* $|x| > 0.72668\ldots$

Zbieżność ciągu wielomianów ...

Twierdzenie (Faber)

Dla każdej tablicy węzłów $\{x_{nk}\}$ *istnieje taka funkcja ciągła w przedziale* $[a, b]$*, do której ciąg wielomianów interpolacyjnych nie jest zbieżny jednostajnie (tj. taka, że* $\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - L_n(x)| \not\to 0$*).*

Zbieżność ciągu wielomianów ...

Twierdzenie (Faber)

Dla każdej tablicy węzłów $\{x_{nk}\}$ *istnieje taka funkcja ciągła w przedziale* $[a,b]$, *do której ciąg wielomianów interpolacyjnych nie jest zbieżny jednostajnie (tj. taka, że* $\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - L_n(x)| \not\to 0$*).*

Twierdzenie (Kryłow)

Niech dana będzie funkcja $f \in C^1[-1,1]$ *i niech* $\{L_n\}$ *będzie ciągiem wielomianów interpolujących funkcję* f *w węzłach Czebyszewowskich. Wówczas dla każdego* $x \in [-1,1]$ *jest*

$$\lim_{n\to\infty} L_n(x) = f(x).$$

Funkcja sklejana interpolująca III stopna

Definicja

Dla danej liczby naturalnej n, danych węzłów $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$ i danej funkcji f funkcją sklejaną interpolującą III stopnia nazywamy funkcję s, określoną w przedziale $[a, b]$ i spełniającą następujące warunki:

- 1° $s,\ s'$ i s'' są ciągłe w $[a, b]$,
- 2° w każdym przedziałów $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ s jest identyczna z pewnym wielomianem p_k, stopnia co najwyżej trzeciego,
- 3° $s(x_k) = f(x_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$.

Jeśli dodatkowe (tzw. brzegowe) dwa warunki mają postać

- 4°_{nat} $s''(a) = s''(b) = 0$
- 4°_{comp} $s'(a) = f'(a),\ s'(b) = f'(b)$
- 4°_{per} $s'(a) = s'(b),\ s''(a) = s''(b)$ (jeśli f jest funkcją okresową o okresie $b - a$)

to s nazywamy odpowiednio funkcją naturalną, zupełną lub okresową.

Naturalna funkcja sklejana interpolująca III stopnia

Twierdzenie 1.

Dla dowolnych danych: $n \in \mathbf{N}$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ i funkcji f istnieje dokładnie jedna naturalna funkcja sklejana interpolacyjna III stopnia s. Wartości $M_k := s''(x_k)$ $(k = 0, 1, \ldots, n;\ M_0 = M_n = 0)$ spełniają układ równań liniowych

$$\lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1-\lambda_k)M_{k+1} = 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}] \quad (k = 1, \ldots, n-1), \tag{14}$$

gdzie $\lambda_k := h_k/(h_k + h_{k+1})$, $h_k := x_k - x_{k-1}$.
W każdym z przedziałów $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ jest

$$\begin{aligned} s(x) &= h_k^{-1}\left[\frac{1}{6}M_{k-1}(x_k - x)^3 + \frac{1}{6}M_k(x - x_{k-1})^3 \right. \\ &\quad + \left(f(x_{k-1}) - \frac{1}{6}M_{k-1}h_k^2\right)(x_k - x) \\ &\quad \left. + \left(f(x_k) - \frac{1}{6}M_k h_k^2\right)(x - x_{k-1})\right]. \end{aligned} \tag{15}$$

Dowód 1/2

s" jest funkcją kawałkami liniową; w przedziale $[x_{k-1}, x_k]$ wyraża się wzorem:

$$s''(x) = h_k^{-1}[M_{k-1}(x_k - x) + M_k(x - x_{k-1})]. \tag{16}$$

Całkując dwukrotnie otrzymujemy

$$s'(x) = (2h_k)^{-1}[-M_{k-1}(x_k - x)^2 + M_k(x - x_{k-1})^2] + A_k, \tag{17}$$
$$s(x) = (6h_k)^{-1}[M_{k-1}(x_k - x)^3 + M_k(x - x_{k-1})^3] + A_k x + B_k. \tag{18}$$

Stałe A_k i B_k wyznaczamy kładąc w (18) $x = x_{k-1}, x_k$ i uwzględniając równości $s(x_{k-1}) = f(x_{k-1}), s(x_k) = f(x_k)$. Otrzymujemy

$$A_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{h_k} - \frac{1}{6}h_k(M_k - M_{k-1}),$$
$$B_k = \frac{x_k f(x_{k-1}) - f(x_k)x_{k-1}}{h_k} - \frac{1}{6}h_k(M_{k-1}x_k - M_k x_{k-1}).$$

Wówczas wzór (17) jest równoważny wzorowi (15).

Dowód 2/2

Należy jeśli tylko dobrać tak M_k, aby zapewnić ciągłość s'. Ciągłość s i s'' wynika bowiem odpowiednio z (18) i (16).

Dowód 2/2

Należy jeśli tylko dobrać tak M_k, aby zapewnić ciągłość s'. Ciągłość s i s'' wynika bowiem odpowiednio z (18) i (16).
Ze wzoru (17) otrzymujemy, że

$$s'(x_{k-1}+0) = -\frac{1}{3}h_k M_{k-1} - \frac{1}{6}h_k M_k + f[x_{k-1}, x_k],$$
$$s'(x_k-0) = \frac{1}{3}h_k M_k + \frac{1}{6}h_k M_{k-1} + f[x_{k-1}, x_k].$$

Żądamy, aby było $s'(x_k-0) = s'(x_k+0)$ dla $k = 1, 2, \ldots, n-1$, czyli

$$\frac{1}{3}h_k M_k + \frac{1}{6}h_k M_{k-1} + f[x_{k-1}, x_k] =$$
$$= -\frac{1}{3}h_{k+1} M_k - \frac{1}{6}h_{k+1} M_{k+1} + f[x_k, x_{k+1}] \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Po łatwych przekształceniach otrzymuje się stąd układ (14), tj. układ $n-1$ równań z $n-1$ niewiadomymi o nieosobliwej macierzy współczynników, który ma jedyne rozwiązanie $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}$, jednoznacznie określające funkcję s. □

Dalsze własności

Twierdzenie (Holladay)

W klasie funkcji F mających ciągłą drugą pochodną w przedziale $[a,b]$ i takich, że

$$F(x_k) = y_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n) \tag{19}$$

najmniejszą wartość całki

$$\int_a^b \left[F''(x)\right]^2 \, dx \tag{20}$$

daje naturalna funkcja sklejana s z twierdzenia 1. Przy tym

$$\int_a^b \left[s''(x)\right]^2 \, dx = \sum_{k=1}^{n-1} \left(f[x_k, x_{k+1}] - f[x_{k-1}, x_k]\right) M_k. \tag{21}$$

Algorytm obliczania wielkości M_k

Algorytm

Obliczamy pomocnicze wielkości $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$, $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$, $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ w następujący sposób rekurencyjny:

$$q_0 := u_0 := 0, \tag{22}$$

$$\left.\begin{aligned} p_k &:= \lambda_k q_{k-1} + 2, \\ q_k &:= (\lambda_k - 1)/p_k, \\ u_k &:= (d_k - \lambda_k u_{k-1})/p_k \end{aligned}\right\} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{23}$$

gdzie

$$d_k := 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}] \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{24}$$

Wówczas

$$M_{n-1} = u_{n-1}, \tag{25}$$

$$M_k = u_k + q_k M_{k+1} \qquad (k = n-2, n-3, \ldots, 1). \tag{26}$$

Twierdzenie

Niech będzie dana funkcja $f \in C^4[a, b]$. Dla danej liczby naturalnej n niech s będzie naturalną funkcją sklejaną III stopnia interpolującą funkcję f w danych węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ($a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$). Wówczas

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{(r)}(x) - s^{(r)}(x)| \leqslant C_r\, h^{4-r} \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{(r)}(x)| \qquad (r = 0, 1, 2, 3),$$

gdzie $C_0 := 5/384$, $C_1 := 1/24$, $C_2 := 3/8$, $C_3 := (\beta + \beta^{-1})/2$,

$$h := \max_i h_i, \qquad \beta := h/\min_i h_i, \qquad h_i := x_i - x_{-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Przykład

W wypadku funkcji Rungego $f(x) = 1/(25x^2 + 1)$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ i równoodległych węzłów uzyskano następujące wyniki:

Tabela: Przykład Rungego: interpolacja za pomocą funkcji sklejanych III stopnia

n	10	20	40	80	160
h	0.2	0.1	0.05	0.025	0.0125
$\|f - s\|_{\infty}^{[-1,1]}$	$2.20 \cdot 10^{-2}$	$3.18 \cdot 10^{-3}$	$2.78 \cdot 10^{-4}$	$1.61 \cdot 10^{-5}$	$1.61 \cdot 10^{-}$