Wiktor Pilarczyk 308533

Zad 1

Nasze równanie i warunki

$$u_t = u_{xx} \qquad (x,t) \in (0,1) \times (0,T)$$

$$u(x,0) = g(x) \qquad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\pi x)$$

$$u(0,t) = u(1,t)$$

Rozw równania

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\pi x)\, e^{-(k\pi)^2 t}$$

1° Czy nasze rozw jest gładkie w $(0,1) \times (0,T)$

Pokazując, że nasza funkcja jest nieskończ. wiele razy różniczkowalna i że te pochodne są ciągłe z warunku że dla funkcji szeregu funkcyjnego:

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

Jeśli $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0)$ zbieżny

$\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ zbieżny jednostajnie na otoczeniu x_0

to F jest różniczkowalna w sposób ciągły na otoczeniu x_0 i $F'(x) = \sum f_k'(x)$

Nasze

F to $u(x,t)$ i f_k to $c_k \sin(k\pi x)\, e^{-(k\pi)^2 t}$

$$(f_k)_x = c_k (k\pi) \cos(k\pi x)\, e^{-(k\pi)^2 t}$$

$$(f_k)_t = -c_k (k\pi)^2 \sin(k\pi x)\, e^{-(k\pi)^2 t}$$

Dla dowolnego k te pochodne są ciągłe

Scanned with CamScanner

Wiktor Piskorzyk 308533

Zad 1 c.d

Teraz pokażę, że sumy są zbieżne. $\sum_{k=1}^{\infty}(f_k)_x$ i $\sum_{k=1}^{\infty}(f_k)_t$

To pokażę coś mocniejszego – że są bezwzględnie zbieżne w otoczeniu x_0

a) $(f_k)_x$

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(f_k)_x| = \sum |c_k k\pi \cos(k\pi x) e^{-(k\pi)^2 t}| \leq$$

$$\leq \sum |c_k (k\pi)^2| e^{-k\pi(t_0-\varepsilon)}$$

Z kryterium Dirichleta

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{c_{k+1}}{c_k} \cdot e^{-\pi(t_0-\varepsilon)} \cdot \left(\frac{k+1}{k}\right)\right| < 1$$

$\frac{c_{k+1}}{c_k} \leq 1$, $e^{-\pi(t_0-\varepsilon)} < 1$ bo $(t_0-\varepsilon)>0$, $\frac{k+1}{k} \to 1$

wszystko to z tożsamości Parsevala $\sum \frac{1}{c_k^2} < \infty$

więc $\left(\frac{c_{k+1}}{c_k}\right)^2 \to c \leq 1$ czyli $\frac{c_{k+1}}{c_k} \to \sqrt{c} \leq 1$

b) więc jest zbieżne bezwzględnie i podobnie dla $(f_k)_t$ tylko zamiast $\left(\frac{k+1}{k}\right)$ mamy $\left(\frac{k+1}{k}\right)^2$

$\to 1$, $\to 1$

Szereg $\sum f_k$ czyli nasze $u(x,t)$ jest zbieżne z samej definicji

Więc ponieważ możemy wybrać dowolne $(x_0, t_0) \in (0,1)\times(0,T)$

~~mamy~~ to pokazaliśmy to na całym przedziale.

Dla wyższych pochodnych jest podobnie tylko $\left(\frac{k+1}{k}\right)^c$ ma c do ~~wyższej potęgi~~ wyższej potęgi i też spełniony jest Dirichlet

więc ~~WMF~~ czyli nasze $u(x,t)$ jest nieskończenie wiele różniczkowalne i te pochodne są ciągłe więc nasza funkcja jest gładka

Wiktor Pikowsky 308533
Zad 1 C.D 2

2°
$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(kx\pi)$$

Wiemy, że $g(0) = 0$, a ponieważ g jest ciągła to
$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

3° $\lim_{x\to 1} g(x) = 0$

Podobnie jak wyżej $g(1) = 0$ więc $\lim_{x\to 1} g(x) = 0$

4° $g'(x)$

$g \in C^1$ więc $g'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \sin(k\pi x))'$

czyli
$$g'(x) = \sum c_k k\pi \sin(k\pi x)$$

g' też jest ciągła więc pochodne jednostronne ~~??~~ istnieją

$$g'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot k\pi (-1)^k$$
$$g'(0) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot k\pi$$

5° $g(x) = 0$ dla $0 < x < a$ i $b < x < 1$ oraz $g(x) = 1$ $a \le x \le b$

c_k współczynnik szeregu

$$c_k = \frac{1}{\pi} \int_0^1 g(x) \sin(k\pi x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_a^b g(x) \sin(k\pi x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_a^b \sin(k\pi x) dx = \left[\begin{matrix} du = k\pi dx \\ u = k\pi x \end{matrix} \right] = \frac{1}{k\pi^2} \int_a^b \sin y \, dy =$$

$$= \frac{1}{k\pi^2} \left(\cos(k\pi a) - \cos(k\pi b) \right)$$