Twierdzenie Tietzego

Niech $f : A \to [a,b]$ będzie funkcją ciągłą, A jest zbiorem domkniętym w przestrzeni metryzowalnej $(X, \mathcal{T})$.
Istnieje wówczas przedłużenie f do X, tzn istnieje $\bar{f} : X \to [a,b]$ t. że $\bar{f}(x) = f(x)$ dla $x \in A$.

Twierdzenie Hahna

Niech $u, w : X \to [a,b]$ t. że
(i) $u \leq w$
(ii) u jest półciągła z góry ($\{x : f(x) < r\}, r \in \mathbb{R}$ są otwarte)
w jest półciągła z dołu.

Istnieje funkcja ciągła $f : X \to [a,b]$ t. że $u \leq f \leq w$

D-d

(1) Najpierw pokażemy następującą rzecz.
Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja ciągła $g : X \to [a,b]$ t. że $u - \varepsilon \leq g \leq w + \varepsilon$.

- Ustalmy $\varepsilon > 0$
- Pokrywamy $[a,b]$ przedziałami (a_i, b_i) o długości $< \varepsilon$, $i = 1, \dots, m$
- $W_i = \{x : u(x) < b_i\} \cap \{x : w(x) > a_i\}$
  W_i są otwarte
- Zauważmy, że $X = W_1 \cup \dots \cup W_m$
  ($x \in X$, weźmy i t. że $[u(x), w(x)] \cap (a_i, b_i) \neq \emptyset$ wówczas $x \in W_i$)
- Skorzystamy z lematu o rozkładzie jedynki.
  Dostajemy: Istnieją funkcje ciągłe $\lambda_i : X \to [0,1]$ t. że $\{x : \lambda_i(x) > 0\} \subseteq W_i$, $i = 1, \dots, m$
  oraz $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) = 1$, $x \in X$.
- Bierzemy $g(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i \lambda_i(x)$
  $c_i = \frac{a_i + b_i}{2}$
- Chcemy pokazać $u(x) - \varepsilon \leq g(x) \leq w(x) + \varepsilon$

→ Zauważmy najpierw $\underbrace{u(x) - \varepsilon \leq c_i}_{\text{gdzie}} \leq w(x) + \varepsilon$ $x \in W_i$

(chcemy $u(x) \leq \varepsilon + \frac{a_i + b_i}{2}$. Mamy: $u(x) < b_i$, $b_i - a_i < \varepsilon$
Pokażemy $b_i \leq \varepsilon + \frac{a_i + b_i}{2}$
Liczymy $b_i - \frac{a_i + b_i}{2} = \frac{b_i - a_i}{2} < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$)

→ $x \in X$
$$g(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i \lambda_i(x) = \sum_{\substack{i \\ x \in W_i}} c_i \lambda_i(x) + \sum_{\substack{i \\ x \notin W_i}} c_i \overbrace{\lambda_i(x)}^{=0}$$

Ponieważ $u(x) - \varepsilon \leq c_i \leq w(x) + \varepsilon$, $x \in W_i$
oraz $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) = 1$, dostajemy
$u(x) - \varepsilon \leq g(x) \leq w(x) + \varepsilon$

(2) Określimy funkcje półciągłe z góry $u_i : X \to [a,b]$
oraz — // — // — z dołu $w_i : X \to [a,b]$
oraz funkcje ciągłe $g_i : X \to [a,b]$
spełniające:
(a) $u = u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_i \leq \dots \leq w_j \leq \dots \leq w_1 \leq w_0 = w$
(b) $g_i - \frac{1}{i} \leq u_i \leq w_i \leq g_i + \frac{1}{i}$, $i = 1, 2, \dots$

Konstrukcja przez indukcję
Załóżmy, że u_{i-1}, w_{i-1} są określone.
Z (1), dla $\varepsilon = \frac{1}{i}$, dostajemy $u_{i-1} - \frac{1}{i} \leq g_i \leq w_{i-1} + \frac{1}{i}$.
Weźmy $u_i = \max\{g_i - \frac{1}{i}, u_{i-1}\}$
$w_i = \min\{g_i + \frac{1}{i}, w_{i-1}\}$

Jasne $u_{i-1} \leq u_i$, $w_i \leq w_{i-1}$
Również $u_i \leq w_i$
] => (a)

$g_i \leq \max\{g_i - \frac{1}{i}, u_{i-1}\} + \frac{1}{i}$

- Zauważmy że $\forall x$ $(u_i(x))$ jest rosnący i ograniczony
  $\forall x$ $(w_i(x))$ jest malejący i ograniczony

Ponadto $w_i - u_i \leq (g_i + \frac{1}{i}) - (g_i - \frac{1}{i}) = \frac{2}{i} \xrightarrow[i \to 0]{} 0$

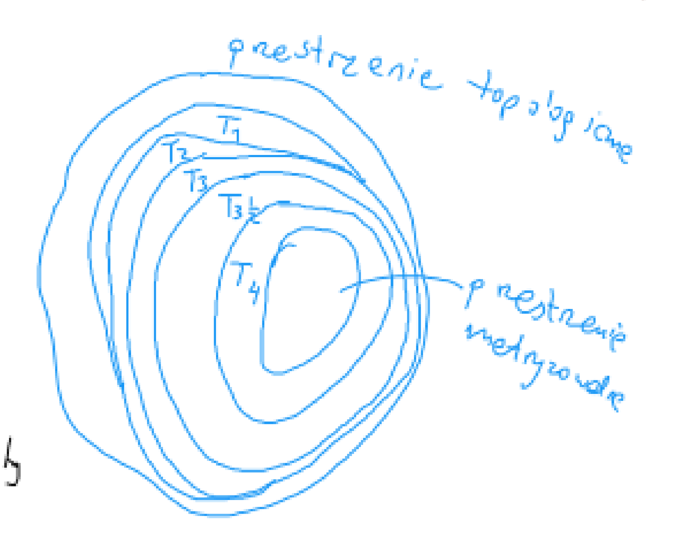
→ Czyli $(u_i(x))$ i $(w_i(x))$ zbiegają do tej samej granicy $\forall x \in X$
Nazwijmy tą granicę $f : X \to [a,b]$.
Jasne: $u \leq f \leq w$

→ Ale f jest ciągła jako granica jednostajna (g_i)
funkcje ciągłe

Zauważmy, że ponieważ $u_i - \frac{1}{i} \leq g_i \leq w_i + \frac{1}{i}$ } $w_i(x) - u_i(x) \leq \frac{2}{i}$
to $(g_i(x))$ zbiega do $f(x)$ $\forall x$

Ale zauważmy, że mamy więcej
$\sup\{\underbrace{|f(x) - g_i(x)|}_{\leq 4/i} : x \in X\} \leq \frac{1}{i} \xrightarrow[i \to \infty]{} 0$. Czyli f jest funkcją ciągłą ∎
(patrz 1.3.5)

Aksjomaty oddzielania



Przestrzeń topologiczna X jest T_1 jeśli $\{x\}$ jest zbiorem domkniętym
$\Leftrightarrow$ $\forall_{\substack{x,y \\ x \neq y}} \exists_{\substack{U \ni x \\ \text{otwarty}}}$ $y \notin U$

$\Rightarrow$ $\dot{x}$ $\dot{y}$ $\{y\}$ domknięty
$\Leftarrow$ $\dot{x}$ $\dot{z}$ $\dot{w}$

- Przestrzeń topologiczna X jest T_2 (przestrzenią Hausdorffa) jeśli
  $\forall_{\substack{x,y \\ x \neq y}} \exists_{\substack{U \ni x \\ V \ni y \\ \text{otwarte}}}$ $U \cap V = \emptyset$

- Przestrzeń topologiczna X jest T_3 (przestrzenią regularną) jeśli
  - jest T_1 i
  - $\forall x \; \forall_{\substack{F \\ \text{domknięty} \\ x \notin F}} \exists_{\substack{U \ni x \\ V \supseteq F \\ \text{otwarte}}}$ $U \cap V = \emptyset$
  } $\dot{x}$ $\dot{y}$ $F = \{y\}$? domknięty

- Przestrzeń topologiczna X jest $T_{3\frac{1}{2}}$ (przestrzenią Tichonova) jeśli
  - jest T_1
  - $\forall x \; \forall_{\substack{F \text{ domknięty} \\ x \notin F}}$ $\exists f : X \to [0,1]$ ciągła t. że $f(x) = 0$ i $f(y) = 1$ dla $y \in F$

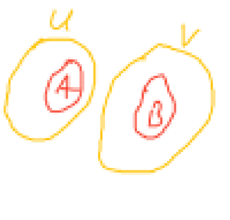
  { przestrzeń antydyskretna
  zbiór $|X| \geq 2$
  $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$
  nie jest T_1

Uwaga $T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3$
$\dot{x}$ $\bigcirc^F$ Weźmy f jak w $T_{3\frac{1}{2}}$
Niech $U = f^{-1}[0, \frac{1}{17})$
$V = f^{-1}(\frac{1}{2}, 1]$

Uwaga
Pokazaliśmy (tw Tietzego), że przestrzenie metryczne są $T_{3\frac{1}{2}}$.

Niech g będzie określona na zbiorze domkniętym $\{x\} \cup F$
$g(x) = 0$
$g(y) = 1$ dla $y \in F$
g jest funkcją ciągłą na $\{x\} \cup F$
Tietze → $\bar{g}$ $\bar{g}|(\{x\} \cup F) = g$
ciągła
szukane f

Przestrzeń topologiczna X jest T_4 (przestrzenią normalną) jeśli
- jest T_1
- $\forall_{\substack{A,B \\ \text{domknięte} \\ A \cap B = \emptyset}} \exists_{\substack{U,V \\ U \supseteq A \\ V \supseteq B}}$ $U \cap V = \emptyset$



Nietrywialne twierdzenie: $T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}}$

Uwaga
Każda przestrzeń metryczna (X, d) jest normalna.
D-d
A, B domknięte, $A \cap B = \emptyset$
Zdefiniujmy $h(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$

$x \in A$ $h(x) = 0$
$x \in B$ $h(x) = 1$
$h : X \to [0,1]$
$0 \leq h(x) \leq 1$
h jest funkcją ciągłą
$A \subseteq h^{-1}\underbrace{[0, \frac{1}{17})}_{\text{otwarty w } [0,1]}$ $B \subseteq h^{-1}(\frac{1}{2}, 1]$ ∎