Zad. 6.

Niech (dla $n \in \mathbb{N}$) $A_n = \{ f \in C[0,1] : \overbrace{(\exists x \in [0,1])(\forall y \in [0,1]\setminus\{x\}) \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}}^{(*)} \le n \}$.

A_n domknięty:

Weźmy $(f_k) \xrightarrow{k} f$, oraz x_1 taki jak w (*) dla f-cji f_1.

$\cancel{f_n(x)}$ $(f_n) \to f$, więc $(\forall_{\varepsilon>0})(\forall x)(\exists N)(\forall_{n \ge N})\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

$$\left| \frac{f(x_0)-f(y)}{x_0-y} \right| \le \frac{|f(x_0)-f_k(x_0)| + |f_k(x_0)-f_k(y)| + |f_k(y)-f(y)|}{|x_0-y|} \le$$

od pewnego miejsca

$$\le \frac{2\varepsilon}{|x_0-y|} + \frac{|f_k(x_0)-f_k(y)|}{|x_0-y|} \le \frac{2\cdot\varepsilon}{|x_0-y|} + n$$

$$\Big\downarrow\ k \to \infty$$

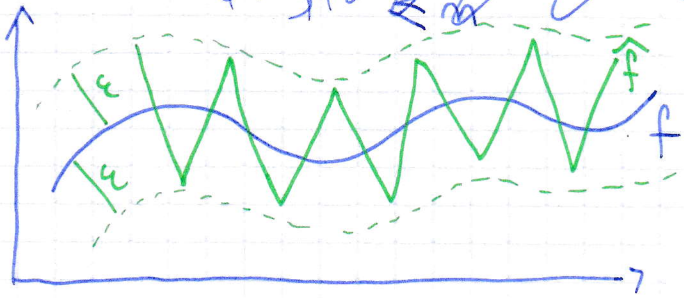
$$\frac{|f(x_0)-f(y)|}{|x_0-y|} \le n$$

Zatem $f \in A_n$.

A_n brzegowy:

Weźmy dowolne $f \in A_n$ oraz $\varepsilon > 0$. Rozważmy $B(f,\varepsilon)$.

~~Warunek $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \le n$ mówi nam, że~~



Bierzemy $\hat{f} \in B(f,\varepsilon)$, która ~~składa~~ jest łamaną złożoną z fragmentów f-cji $\pm(n+1)x + C$

Weźmy dow. $x \in [0,1]$.

Jeżeli w tym punkcie $\hat{f}$ jest zadana przez $\pm(n+1)x$ to bierzemy y w którym $\hat{f}$ jest zadana tym samym wzorem.

Wtedy $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} = \frac{|(n+1)x - (n+1)y|}{|x-y|} \overset{=}{} n+1 > n.$

2 tw. Baire $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ brzegowa ~~pojęcia~~ ~~której funkcja~~.

Funkcja $f \in C[0,1] \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ w każdym punkcie nie jest różniczkowalna, bo

$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \geq n$ dla dow. n ~~jakieś~~.