Do zadania 6

$(f_k)_k \quad f_k \to f$

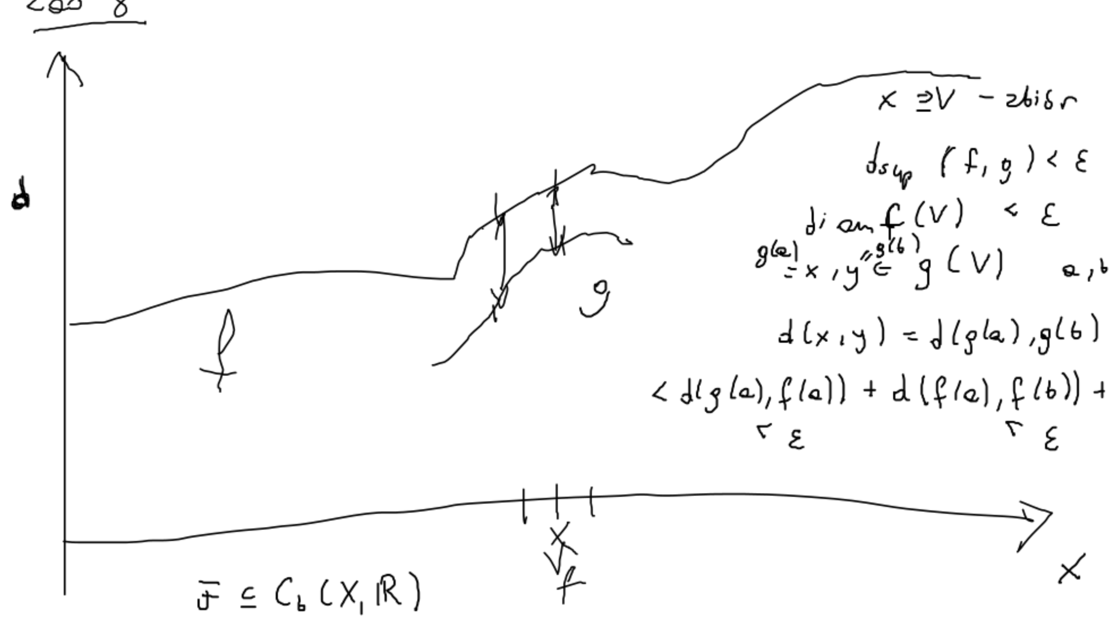
$f_k \leadsto x_k$ jak założeniach t.zn $\forall_y \left|\frac{f_k(y)-f_k(x_k)}{y-x_k}\right| \leq n$

(x_k) – ciąg w $[0,1]$, istnieje podciąg zbieżny
Bierzemy za x_0 – granicę tego podciągu

Dla uproszczenia (x_k) jest zbieżny do x_0

Przykład funkcji ciągłej, która nie jest różniczkowalna w którymkolwiek punkcie:
Funkcja Weierstrasse $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$

zad 8



$x \ni V$ – zbiór

$d_{sup}(f,g) < \varepsilon$

$\operatorname{diam} f(V) < \varepsilon$

$\overset{g(a)}{=}x, \overset{g(b)}{y} \in g(V) \quad a,b \in V$

$d(x,y) = d(g(a),g(b)) <$
$< \underbrace{d(g(a),f(a))}_{<\varepsilon} + \underbrace{d(f(a),f(b))}_{<\varepsilon} + \underbrace{d(f(b),g(b))}_{<\varepsilon}$

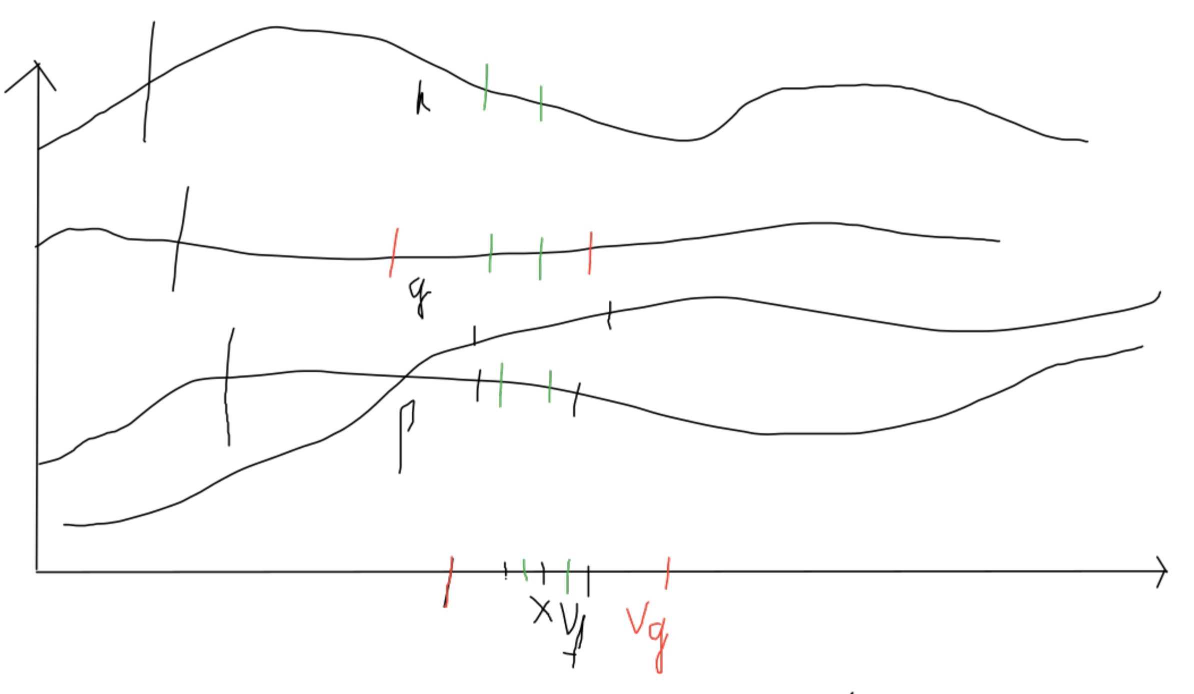
$\mathcal{F} \subseteq C_b(X,\mathbb{R})$

Wiemy: $\mathcal{F}$ – całkowicie ograniczony, t.zn.

$\forall \varepsilon>0 \ \exists m \ \exists f_1,\dots,f_m \quad \mathcal{F} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(f_i,\varepsilon)$

Chcemy: $\mathcal{F}$ jednakowo ciągłe, t.zn

$\forall_x \ \forall \varepsilon>0 \ \exists \underset{\text{otwarty}}{U \ni x} \quad \forall_{f\in\mathcal{F}} \ \operatorname{diam} f(U) < \varepsilon$



Ustalamy x i $\varepsilon>0$. Szukamy $\underset{\text{otwarty}}{U \ni x}$ t.że $\forall f\in\mathcal{F} \ \operatorname{diam} f(U) < \varepsilon$. Ponieważ $\mathcal{F}$ jest całkowicie ograniczone istnieją $f_1,\dots,f_n \in \mathcal{F}$ $\bigcup_{i=1}^{n} B(f_i,\varepsilon/3) \supseteq \mathcal{F}$.

- Z ciągłości f_i, $i=1,\dots,n$ znajdujemy $x \in U_i$ t.że $\operatorname{diam} f_i(U_i) < \frac{\varepsilon}{3}$ (czyli $f_i(U_i) \subseteq B(f_i(x),\frac{\varepsilon}{3})$)
- Ze wskazówki, $\forall i$, jeśli $g \in B(f_i,\frac{\varepsilon}{3})$ to ponieważ $\operatorname{diam} f_i(U_i) < \frac{\varepsilon}{3}$ to $\operatorname{diam} g(U_i) < \varepsilon$.

$x \quad U_1,\dots,U_m$

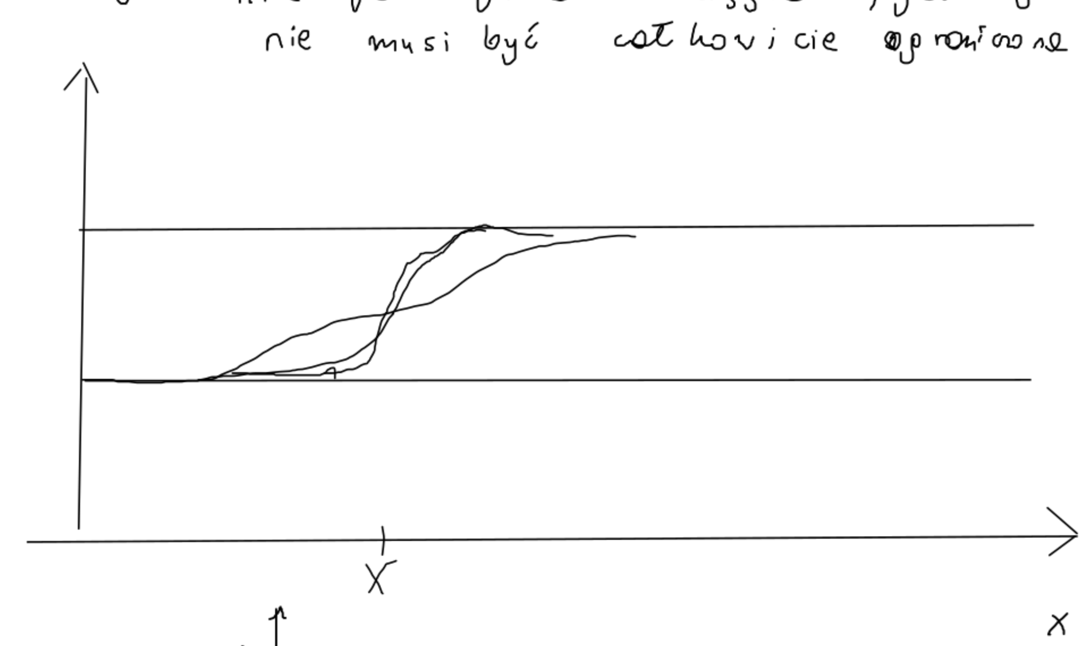
$B(f_1,\frac{\varepsilon}{3}),\dots,B(f_n,\frac{\varepsilon}{3})$
$\quad \ni g \qquad\qquad \ni h$
$\operatorname{diam} g(U_1) < \varepsilon \qquad \operatorname{diam} h(U_m) < \varepsilon$

Bierzemy $U = \bigcap_{i=1}^{m} U_i$. Wówczas $\forall g\in\mathcal{F} \ \operatorname{diam} g(U) < \varepsilon$.

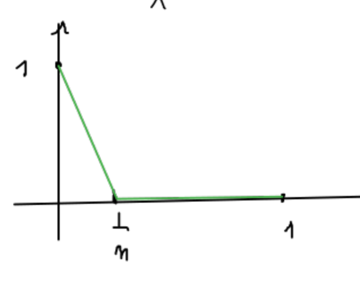
(b) $\mathcal{F}$ jednakowo ciągłe, nie jest ograniczone
~~do~~ nie musi być całkowicie ograniczone

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcje stałe $\quad \operatorname{diam}\left(\bigcup_{f\in\mathcal{F}} f(X)\right) < \infty$

$\mathcal{F}$ nie jest jednakowo ciągłe, jest ograniczone,
nie musi być całkowicie ograniczone



$X = [0,1]$



f_n

$\overline{(f_n)} = (f_n)$

$f_n \to f$ t.że
$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = 0 & \text{dla } x\in(0,1] \end{cases}$

zad 7

Przypomnijmy sobie zad 2

$(X,\mathcal{T})$ metryzowalne w sposób zupełny $\overset{\text{zupełne}}{(X,d)}$

Niech
$G = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i \qquad U_i \subseteq X$ otwarte $\qquad$ (nie potrzeba w 2(b), że $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \dots$)
$\qquad\qquad F_i = X \setminus U_i$

(takie zbiory nazywamy zbiorami G_δ)

Wówczas pokazaliśmy, że G jest metryzowalne w sposób zupełny za pomocą metryki

$$d_G(x,y) = d(x,y) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\min\{1, \left|\frac{1}{d(x,F_i)} - \frac{1}{d(y,F_i)}\right|}{2^i}$$

- Na G d_G i d są metrykami równoważnymi (t.zn generują tą samą topologię)

- (G,d_G) jest zupełna
Sprawdźmy to. (x_m) – ciąg Cauchy'ego dla d_G
Chcemy pokazać, że (x_m) jest zbieżny

Ponieważ $d_G(x,y) = d(x,y) + \text{coś}$, to (x_m) jest Cauchy'ego dla d.
Ponieważ (X,d) jest zupełna, to istnieje granica $x \in X$ ciągu (x_m). Chcemy pokazać, że $x \in G = \bigcap_{m=1}^{\infty} U_m$

Ustalmy m. Pokażemy, że $x \notin F_m = X \setminus U_m$.
Z definicji d_G zauważamy, że $d(x,F_m) > 0$ (i ponieważ (x_m) – Cauchy w d_G)
Zatem $x \notin \overline{F_m} = F_m$.

Wracamy do zad 7 $\qquad \mathbb{Q} = \{q_1, q_n, \dots\}$

Weźmy $U_m = \mathbb{R} \setminus \{q_m\} \qquad F_m = \{q_m\}$

Zatem $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} = \bigcap_{m=1}^{\infty} U_m$ $\qquad$ na $\mathbb{R}$ $d_e(x,y) = |x-y|$
$\qquad d_e(x,F_m) = |x-q_m|$

Z uwag powyżej ($\approx$ zad 2),
$G = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ jest metryzowalna w sposób zupełny
$x,y \in G$

$$d_G(x,y) = |x-y| + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\min\{1, \left|\frac{1}{|x-q_m|} - \frac{1}{|y-q_m|}\right|\}}{2^n}$$

Przypomnijmy sobie metrykę na $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
To jest $d_{prod}((a_n),(b_n)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\min\{1, |a_n - b_n|\}}{2^n}$

Zobaczmy co to jest dla $x,y \in G$

$d_{prod}(f(x),f(y)) = \underbrace{\min\{1,|x-y|\}}_{} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\min\{1, \left|\frac{1}{|x-q_i|} - \frac{1}{|y-q_i|}\right|}{2^n}$

$\underset{f(x)}{\overset{=}{(a_n)}}$ t.że $a_0 = x$
$\qquad a_i = \frac{1}{|x-q_i|} \qquad i = 1,2,\dots$

Podobnie (b_n)

możemy wziąć $|x-y|$
~~to też do metryki na $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$~~

Czyli dostaliśmy $\underline{d_G = d_{prod}}$

Zatem $\underbrace{f(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})}_{Y} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ z metryką d_{prod}

jest zupełne (ponieważ $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, d_G)$ jest zupełne)

Przestrzeń $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, d_G)$ to to samo co (Y, d_{prod})

Wiedząc, że $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d_{prod})$ jest zupełne
((X,d) zupełne $\Rightarrow (X^{\mathbb{N}}, d_{prod})$ zupełne)
oraz, że (Y, d_{prod}) jest podprzestrzenią zupełną $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d_{prod})$, to Y jest domknięty w $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.