ANALIZA BŁĘDÓW

- błąd względny $\delta x = \frac{|\tilde{x} - x|}{|x|}$
- błąd bezwzględny $\Delta x = |\tilde{x} - x|$

- cyfry dokładne

$|a - \tilde{a}| \leqslant \frac{1}{2} \cdot B^{-p} \longrightarrow \tilde{a}$ ma p cyfr dokładnych

$a: \underbrace{1,0 \cdots 1}_{}, 0$

$\tilde{a}: \underbrace{1,0 \cdots 1}_{\text{p-cyfr}}, 1$

- cyfry znaczące

→ cyfry dokładne przed którymi były zera

$\tilde{a}: \underbrace{0.0 \ldots 0}_{\text{dokł}}\underbrace{1}_{\text{znaczące}}0110\ldots$

- znormalizowana postać

$X = s\, m\, B^{c}$ (c – cecha, m – mantysa)

- precyzja arytmetyki

$u := \frac{1}{2} \cdot 2^{-t}$ t – liczba bitów mantysy

- $|rd(x) - x| \leqslant 2^{-t-1} \cdot 2^{c}$ c – cecha

- model arytmetyki

$fl(a \circ b) = (a \circ b) \cdot (1 + \varepsilon_0)$

$|\varepsilon_0| \leqslant u$

- TWIERDZENIE 1

$$\prod_{j=1}^{n} (1 + \alpha_j)^{\rho_j} = 1 + \theta_n \qquad |\alpha_j| \leqslant u \quad \rho_j = \pm 1 \quad nu < 1$$

$$|\theta_n| \leqslant \frac{nu}{1 - nu} \approx nu$$

- TWIERDZENIE

$$\prod_{j=1}^{n} (1 + \alpha_j) = 1 + \eta_n \qquad |\alpha_j| < u \quad nu \lessapprox 0.01 \qquad |\eta_n| \leqslant 1.01\, nu$$

- UWARUNKOWANIE ZADANIA

Jak niewielka zmiana danych wpływa na zmianę rozwiązania.

→ Wskaźnik uwarunkowania

- obliczanie wartości funkcji f:

$$C_f(x) = \frac{|x f'(x)|}{|f(x)|}$$

- ALGORYTM NUMERYCZNIE POPRAWNY

→ obliczone rozwiązanie jest wynikiem lekko zaburzonym dla lekko zaburzonych danych

→ NUMERYCZNIE BARDZO POPRAWNY

→ rozwiązanie jest wynikiem dokładnym dla lekko zaburzonych danych

RÓWNANIA NIELINIOWE

• TWIERDZENIE

Jeśli $f(x)$ jest m-krotnie różniczkowalna w α

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \ldots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0 \quad f^{m}(\alpha) \neq 0$$

to α jest m-krotnym zerem funkcji f.

• metoda bisekcja

• Metoda newtona

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad e_n = x_n - \alpha$$

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\boxed{e_{n+1} = \frac{1}{2} F''(\eta_n) e_n^2 \quad \text{* gdy pierw 1krotny}}$$

$$\eta_n \in (\alpha, x_n)$$

~~TWIERDZENIE~~

• WYKŁADNIK ZBIEŻNOŚCI

$$a_k \longrightarrow g$$

$$\lim \frac{|a_{n+1} - g|}{|a_n - g|^p} = C \text{ - stała}$$

p - wykł. zbieżności

$p=1 \wedge 0<C<1$ - zb. liniowa

$p=2,\ p=3$ - kwadratowa/sześcienna

$p=1 \quad C=1$ - podliniowa

$p=1 \quad C=0$ - nadliniowa

• METODA SIECZNYCH

-> zamiast pochodnej w Newtonie iloraz różnicowy

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f[x_{n-1}, x_n]}$$

• ILORAZ RÓŻNICOWY

$$f[x_{n-1}, x_n] = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

• Reguła Falsi – to samo co siecznych ale zawsze wybieramy x_n i $x_{n'}$ tak aby $f(x_n)\cdot f(x_{n'}) < 0$

• odwrotna interpolacja kwadratowa

-> zamiast siecznych konstruujemy parabolę ay^2+by+c

SCHEMAT HORNERA

obliczania $p(x),\ p'(x),\ p''(x),\ p'''(x)$

$p(x) = a_n$

$p'(x) = p''(x) = p'''(x) = 0$

Dla $k = n-1, \ldots, 0$

$p'''(x) = 3\cdot p''(x) + x\cdot p'''(x)$

$p''(x) = 2\cdot p'(x) + x\,p''(x)$

$p'(x) = p(x) + x\,p'(x)$

$p(x) = a_k + x\,p(x)$

wynik: $p(x),\ p'(x),\ p''(x),\ p''(x)$

INTERPOLACJA

- postać Lagrange'a

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

- postać Newtona

$$L_n(x) = \sum A_k \cdot p_k(x)$$

$$p_k(x) = (x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})$$
$$p_0(x) \equiv 1$$

$$A_k = f[x_0, \cancel{x}, \ldots, x_k]$$

- postać barycentryczna

$$L_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sum_{k=0}^{n} \frac{\sigma_k}{x-x_k} \cdot y_k}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\sigma_k}{x-x_k}} \\ y_k \end{cases} \qquad \sigma_k = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{1}{x_k-x_j}$$

o Reszta interpolacji

$$f(x) - L_n(x) = f[x, x_0, \ldots, x_n]\, p_{n+1}(x)$$
$$= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_x)\, p_{n+1}(x)$$

$$\max_{-1\leq x\leq 1} |f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1} P_{n+1}}{(n+1)!}$$

$$M_{n+1} = \max_{-1\leq x\leq 1} |f^{(n+1)}(x)|$$
$$P_{n+1} = \max_{-1\leq x\leq 1} |p_{n+1}(x)|$$

WIELOMIANY CZEBYSZEWA

$$T_0 \equiv 1 \qquad T_1 \equiv x$$

$$T_k = 2x \cdot T_{k-1} - T_{k-2}$$

- $T_k = \cos(k \arccos x)$
- zera wielomianu T_k:
  $$t_j = \cos \frac{2j+1}{2k}\pi$$
- punkty ekstremalne T_k:
  $$u_j = \cos \frac{j\pi}{k}$$
- wsp. wiodący T_k
  $$a_k = 2^{k-1}$$

ILORAZY RÓŻNICOWE

◇ $f[x_0, \ldots, x_k] = \sum_{i=0}^{k} \dfrac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{k} (x_i - x_j)}$

◇ $f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \dfrac{f[x_1, \ldots, x_k] - f[x_0, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$

◇ nie zależą od permutacji $x_0, x_1, \ldots, x_k$

◇ $\boxed{f[x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}] = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)}$

ALGORYTM Clenshawa

$$W(x) = \sum_{k=0}^{n}{}' c_k T_k(x)$$

$$B_{n+2} = B_{n+1} = 0$$

$$B_k = 2x B_{k+1} - B_{k+2} + c_k \qquad \text{dla } k = n, n-1, \ldots, 0$$

$$w(x) = \tfrac{1}{2}(B_0 - B_2)$$

FUNKCJA SKLEJANA

→ szukamy funkcji s która spełnia warunki

1° s, s', s'' – ciągłe

2° na każdym $[x_{k-1}, x_k]$ s jest wielomianem st ≤ 3

3° $s(x_k) = f(x_k)$

warianty

4° naturalna: $s''(a) = s''(b) = 0$

4° zupełna: $s'(a) = f'(a)$; $s'(b) = f'(b)$

4° okresowa: $s'(a) = s'(b)$; $s''(a) = s''(b)$

APROKSYMACJA ŚREDNIOKWADRATOWA

ILOCZYN SKALARNY : funkcja $\langle \cdot , \cdot \rangle : K \times K \to \mathbb{R}$

(I1) $\langle f, f \rangle \geq 0$ oraz $\langle f, f \rangle = 0 \iff f = 0$

(I2) $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$

(I3) $\langle \alpha f, g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle$

$\langle f + g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$

ORTOGONALIZACJA GRAMMA – SCHMIDTA

$\{f_1, \dots, f_n\} \xrightarrow{\text{lnz}} \{g_1, \dots, g_n\}$ ortogonalny

$g_1 = f_1$

$g_k = f_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle f_k, g_i \rangle}{\langle g_i, g_i \rangle} g_i$

rzut na g_i

• wielomiany standardowe

$\{\overline{P_k}\}$ – ortogonalne i wsp. przy x^k w $\overline{P_k}$ jest $= 1$

$\overline{P_0} \equiv 1$

$\overline{P_1} = x$

$\overline{P_k} = (x - c_k)\overline{P_{k-1}} - d_k \overline{P_{k-2}}$

$c_k = \frac{\langle x\overline{P_{k-1}}, \overline{P_{k-1}} \rangle}{\langle \overline{P_{k-1}}, \overline{P_{k-1}} \rangle}$

$d_k = \frac{\langle \overline{P_{k-1}}, \overline{P_{k-1}} \rangle}{\langle \overline{P_{k-2}}, \overline{P_{k-2}} \rangle}$

(*) gdy $\overline{P_k}$ są ortogonalne wzgl. parzystej funkcji wagowej

$\overline{P_0} = 1 \quad \overline{P_1} = x$

$\overline{P_k} = x P_{k-1} - d_k P_{k-2}$

N-ty wielomian optymalny (średniokwadratowy)

$W_n^* = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, P_k \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle} P_k$ – taki $w_n \in \Pi_n$, że $\|f - w_n\|_2$ – najmniejsze

błąd

$\|f - w_n^*\| = \sqrt{\|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, P_k \rangle^2}{\langle P_k, P_k \rangle}}$

UOGÓLNIONY ALG CLENSHAWA

$\{P_k\}$ – ciąg wielomianów

$P_0 = \alpha_0 \qquad P_1 = (\alpha_1 x - \beta_1) P_0$

$P_k = (\alpha_k x - \beta_k) P_{k-1} - \gamma_k P_{k-2}$

obliczamy wartość $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k$

$V_{n+1} = V_{n+2} = 0$

dla $k = n, n-1, \dots, 0$

$V_k = a_k + (\alpha_{k+1} x - \beta_{k+1}) V_{k+1} - \gamma_{k+2} V_{k+2}$

$S_n(x) = a_0 V_0$

n-ty w. opt. dla x^{n+1} to:

$x^{n+1} - T_{n+1}(x) \cdot \frac{1}{2^n}$

APROKSYMACJA JEDNOSTAJNA

Tw. Czebyszewa o Alternansie

~~Aby w_n był n-tym wielom. opt f~~

W_n jest n-tym w. opt $\iff$ istnieje $n+2$ punktów $x_0, \dots, x_{n+1}$ t. że

$e_n(x_k) = -e_n(x_{k-1})$

$|e_n(x_j)| = \|f - w_n\|$

KWADRATURY LINIOWE

$$Q_n(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \qquad I_p(f) = \int_a^b p(x) f(x) dx \qquad R_n(f) = I_p(f) - Q_n(f)$$

- rząd kwadratury

  rząd $= n$ gdy $R_n = 0$. dla $f \in \Pi_{n-1}$

  oraz istnieje $f \in \Pi_n$ t. że $R_n(f) \neq 0$

→ rząd kwadratury liniowej $\leqslant 2n+2$

- KWADRATURY INTERPOLACYJNE

  → całkujemy wielomian interpolacyjny

  $$A_k = \int_a^b \lambda_k(x) dx$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$

→ wzór Trapezów → złożony $R = -(b-a)\frac{h^2}{12} f''(\xi)$

→ wzór Simpsona → złożony $R = -(b-a)\frac{h^4}{180} f^{(4)}(\xi)$

- METODA ROMBERGA

$$T_{mk} = \frac{4^m \cdot T_{m-1\,k+1} - T_{m-1\,k}}{4^m - 1}$$

$$\begin{array}{llll} T_{00} & & & \\ T_{01} & T_{10} & & \\ T_{02} & T_{11} & T_{20} & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

- KWADRATURA NEWTONA-COTESA

  → węzły równoodległe

- Kwadratura Gaussa-Czebyszewa (zera czebyszewa)

  $$A_k = \frac{\pi}{n+1}$$

- Kwadratura Lobbato (ekstrema czebyszewa)

  $$A_k = \frac{\pi}{n}$$

- Kwadratura Gaussa

  – w zerach wielomianu ortogonalnego

WIELOMIANY CZEBYSZEWA C.D.

→ ortogonalne przy

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

→ $$\int_{-1}^{1} p(x) T_k(x) T_k(x) = \begin{cases} \pi & , k=0 \\ \frac{\pi}{2} & , k=1,2,\dots \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} p(x) T_k(x) T_l(x) = 0 \qquad k \neq l$$

→ $$\int_{-1}^{1} T_n(x) = \begin{cases} 0 & 2 \nmid n \\ \frac{2}{1-n^2} & 2 \mid n \end{cases}$$

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE

- metoda Eulera (jawna)

  $$y_{n+1} = y_n + h \cdot y_n'$$

  (niejawna)

  $$y_{n+1} = y_n + h y_{n+1}'$$

- metoda Cranka-Nicolsona

  $$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(y_n' + y_{n+1}'\right)$$

ALGEBRA LINIOWA

NORMA WEKTOROWA

$\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$

(N1) $\forall x \quad \|x\| \geq 0 \quad \wedge \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(N2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

(N3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} |x_i|^2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{i \leq n} |x_i|$$

NORMA MACIERZOWA

(N1) $\|A\| \geq 0 \quad \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

(N2) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$

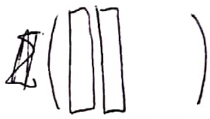
(N3) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

(N4) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

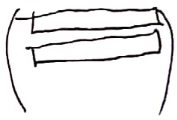
Norma indukowana

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \quad \leftarrow$$



$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \quad \leftarrow$$



$$\|A\|_2 = \sqrt{\text{najw. wart. wł } (A^T A)}$$

ZGODNOŚĆ NORM

$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$

Metoda LU

$A = LU$

$Ax = y \Rightarrow L(Ux) = y$

METODY ITERACYJNE

$Ax = b \to x = Bx + c \to x^{(k+1)} = Bx^k + c$

- metoda Richardsona

$$x^{k+1} = B_\gamma x^{(k)} + c$$

$$B_\gamma = I - \gamma A \qquad c := \gamma b$$

- metoda Jakobiego

$$A = L + D + U$$

$$x = -D^{-1}(L+U)x + D^{-1}b$$

- metoda Gaussa-Seidla

$$x = -(L+D)^{-1}Ux + (L+D)^{-1}b$$

A =