Stabilność rozwiązań równań różniczkowych

Mówimy, że rozw. $x=\varphi(t)$ równania $x'=f(x)$ jest <u>stabilne</u> $\Leftrightarrow [\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall$ rozw. ψ takiego, że $|\psi(0)-\varphi(0)|<\delta \Rightarrow \forall t\geq 0\ |\psi(t)-\varphi(t)|<\varepsilon]$

Czyli mała zmiana warunków początkowych mało zmienia rozwiązanie; inaczej: jeżeli wynik pomiaru warunku początkowego jest obarczony małym błędem, to ewolucja będzie przebiegać podobnie dla <u>wszystkich</u> $t\geq 0$ (<u>Uwaga</u>: tw. o ciągłej zależności rozwiązań od warunków początkowych daje to <u>tylko na skończonych</u> przedziałach czasowych).

Zacznijmy od <u>układów równań liniowych</u>

(L) $x'=Ax$ Zachodzi następujące

<u>Twierdzenie</u>

i) Jeżeli $\mathrm{Re}\,\lambda_j<0\ \ \forall j=1,\dots,k$, to każde rozw. (L) jest stabilne

a nawet <u>asymptotycznie stabilne</u>, tzn.

$$\forall \varepsilon>0 \left[\exists \delta>0 \quad |\psi(0)-\varphi(0)|<\delta \quad \lim_{t\to+\infty}|\varphi(t)-\psi(t)|=0\right]$$

a nie tylko $\forall t\geq 0\ |\psi(t)-\varphi(t)|<\varepsilon$.

ii) Jeżeli $\forall j=1,\dots,k\ \ \mathrm{Re}\,\lambda_j\leq 0$, a wszystkie czysto urojone pierwiastki równania charakterystycznego to $\lambda_1=i\sigma_1,\dots,\lambda_\ell=i\sigma_\ell$ z krotnościami k_j, $j=1,\dots,\ell$

czyli $P(\lambda)=(\lambda-i\sigma_1)^{k_1}\dots(\lambda-i\sigma_\ell)^{k_\ell}\,Q(\lambda)$

i wszystkie pierwiastki Q spełniają $\mathrm{Re}\,\lambda<0$,

to jeżeli macierz A ma k_j liniowo niezależnych wektorów własnych dla $\lambda_j = i\sigma_j$ (inaczej mówiąc: nie ma nietrywialnych klatek Jordana odpowiadających czysto urojonym wartościom własnym), to każde rozwiązanie (L) jest stabilne.
W przeciwnym przypadku: każde jest niestabilne

Dowód: Przedstawiamy dowolne rozw. (L) jako $\psi(t) = e^{tA}\psi(0)$. Jeżeli $\mathrm{Re}\,\lambda_j \leq -\alpha < 0$ to wyrazy macierzy $e^{tA} \equiv (\varphi_{ij}(t))$ spełniają oszacowanie $|\varphi_{ij}(t)| \leq K e^{-\beta t}$ dla dowolnego $-\alpha < -\beta < 0$. Wynika to z postaci e^{tA}, w szczególności z analizy postaci e^{tJ} dla klatek Jordana J.

Wówczas
$|\psi_i(t)| = |\sum \varphi_{ij}(t)\psi_j(0)| \leq K e^{-\beta t} \sum |\psi_j(0)|$
używając normy $\|\psi(t)\| \equiv \max |\psi_j(t)|$ mamy
$\|\psi(t)\| \leq k K e^{-\beta t}\|\psi(0)\|$ dla stałej K zależnej tylko od A. Rozwiązanie $\varphi(t) \equiv 0$ jest więc stabilne (i asymptotycznie stabilne), a każde inne rozwiązanie zbiega do niego dla $t \to +\infty$.

iii) Dodatkowo, jeżeli $\exists \lambda : \mathrm{Re}\,\lambda > 0$ oraz $Av = \lambda v$, to $\psi(t) = c e^{\lambda t} v$ jest rozw. (L) pokazującym, że $\varphi(t) \equiv 0$ jest niestabilne. W zapisie zespolonym $\lambda = \mu + i\nu$, $v = v_1 + i v_2$, $\psi(t) = c e^{\mu t}(v_1 \cos \nu t - v_2 \sin \nu t)$.

ii) $|(e^{tA})_{ij}| \leq K$ gdy macierz A ma pełny układ wektorów własnych, tzn. k_j liniowo niezależnych w. wł. dla $\lambda_j = i\sigma_j$ (nie występują wyrazy postaci $t^j \times$ f. tryg.) i zachodzi wtedy stabilność (ale nie asymptotyczna stabilność).

W przeciwnym wypadku mamy rozwiązanie (L) postaci

$$\psi(t) = c e^{i\sigma_j t}\,[v + t\underbrace{(A - i\sigma_j)v}_{\neq 0}]$$ nieograniczone i wystarczy wziąć Re lub Im tego zespolonego wektora aby otrzymać rzeczywiste nieogr. rozw. ∎

Asymptotyczna stabilność jest ważna np. w konstrukcjach mechanicznych czy budowlanych. W XIX–XX w. wprowadzono – z racji praktycznych zastosowań – wiele kryteriów na to, aby pierwiastki równania charakterystycznego miały ujemne części rzeczywiste (np. kryterium Routha–Hurwitza).

Proste przykłady

$$x' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} x, \qquad P(\lambda) = -(1+\lambda)^3 - 4(1+\lambda)$$
$$= -(1+\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda + 5)$$

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = -1 \pm 2i$, więc to równanie ma wszystkie rozw. (asymptotycznie) stabilne.

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = -4,\ \lambda_2 = 6 \longrightarrow \text{niestabilność}$$

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} x \qquad \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{6}\, i$$

stabilność, ale nie asymptotyczna stabilność

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} -\sqrt{6} \sin \sqrt{6} t \\ 2 \cos \sqrt{6} t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sqrt{6} \cos \sqrt{6} t \\ 2 \sin \sqrt{6} t \end{pmatrix}, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

wszystkie rozw. są okresowe z okresem $2\pi/\sqrt{6}$.

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \\ -6 & 0 & -3 \end{pmatrix} x \qquad \lambda_1 = -7, \ \lambda_{2,3} = 0$$

dwukrotna w. wł.,

ale $c \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ jest jedynym w. wł. odpowiadającym wartości wł. 0.

$\rightarrow$ niestabilność

Stabilność położenia równowagi w przypadku nieliniowym (N) $x' = Ax + g(x)$

zakładamy, że $g(x)$ jest „małe w otoczeniu 0", tzn.

$$(*) \qquad \frac{g(x)}{\max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}} \xrightarrow[|x| \to 0]{} 0$$

np. g wielomian jednorodny stopnia co najmniej 2 (lub suma takich wielomianów) $g(x) = \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2^2 \\ x_1 \cdot x_2 \end{pmatrix}$

$g(0) = 0$ więc $x(t) \equiv 0$ jest punktem osobliwym (tzn. punktem równowagi) (N). Mówimy wtedy, że (L) $x' = Ax$ jest linearyzacją (N) wokół punktu osobliwego $x = 0$.

Twierdzenie

Jeżeli $\frac{g(x)}{\|x\|}$ jest ciągła i znika w $x=0$ (czyli spełnia poprzednie założenie (*)),

to:
i) jeżeli $\forall_{j=1,\dots,k}$ $\mathrm{Re}\,\lambda_j < 0$, to rozwiązanie $x \equiv 0$ równania (N) jest asymptotycznie stabilne.

ii) jeżeli $\exists_j$ $\mathrm{Re}\,\lambda_j > 0$, to $x(t)$ jest niestabilne (dowód jest trudniejszy; pominiemy go).

iii) W przypadku $\mathrm{Re}\,\lambda_j \leq 0$ i $\mathrm{Re}\,\lambda_{j_0} = 0$ dla pewnego j_0 – nie można rozstrzygnąć stabilności na podstawie samego równania zlinearyzowanego (L).

Przykłady
$$\begin{cases} x' = y - x(x^2+y^2) \\ y' = -x - y(x^2+y^2) \end{cases}$$ jako (N)

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$$ jako (L), z czysto urojonymi wartościami wł.

Zauważmy, że $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2+y^2) = xx' + yy'$
$$= -(x^2+y^2)^2$$

A zatem funkcja x^2+y^2 (mierząca kwadrat odległości od $(x,y)=(0,0)$) spełnia
$$(x^2+y^2)(t) = \frac{c}{1+2ct} \qquad c = x^2(0) + y^2(0)$$
i rozwiązanie $(0,0)$ jest asymptotycznie stabilne.

W przykładzie $\begin{cases} x' = y + x(x^2+y^2) \\ y' = -x + y(x^2+y^2) \end{cases}$ mamy

$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2+y^2) = +(x^2+y^2)^2$, więc $(x^2+y^2)(t)$
$$= \frac{c}{1-2ct}$$
i nie tylko niestabilność, ale wybuch w skończonym czasie $T = \frac{1}{2c}$.

<u>Ćwiczenie</u> zapisać poprzednie równania (N) w układzie biegunowym współrzędnych (r, φ) na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2 \ni (x, y)$.

<u>Idea dowodu twierdzenia</u>

Przedstawiamy rozwiązanie (N) w postaci rozw. nieliniowego równania całkowego uzyskanego w metodzie uzmienniania parametrów

$$x(t) = e^{tA}x(0) + \int_0^t e^{(t-s)A} g(x(s))\,ds$$

Oszacujmy $|e^{tA}x(0)| \le K e^{-\alpha t}\|x(0)\|$

dla pewnego $\alpha > 0$, oraz

$$\|e^{(t-s)A}g(x(s))\| \le K e^{-\alpha(t-s)}\|g(x(s))\|$$

Z zał. (*) o g $\quad \exists\, \sigma > 0 \ \forall_{\|x\| \le \sigma} \ \|g(x)\| \le \frac{\alpha}{2K}\|x\|$

to jest „mała” liczba

Wtedy

$$\|x(t)\| \le \|e^{tA}x(0)\| + \int_0^t \|e^{(t-s)A}g(x(s))\|\,ds$$

$$\le K e^{-\alpha t}\|x(0)\| + \frac{\alpha}{2}\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\|x(s)\|\,ds$$

dopóki wiemy, że $\|x(s)\| \le \sigma \quad \forall\, s \in [0, t]$

Wtedy $e^{\alpha t}\|x(t)\| \le K\|x(0)\| + \frac{\alpha}{2}\int_0^t e^{\alpha s}\|x(s)\|\,ds$,

tzn. dla $z(t) = e^{\alpha t}\|x(t)\|$ zachodzi nierówność typu Gronwalla

$z(t) \le K z(0) + \frac{\alpha}{2}\int_0^t z(s)\,ds$. Implikuje ona

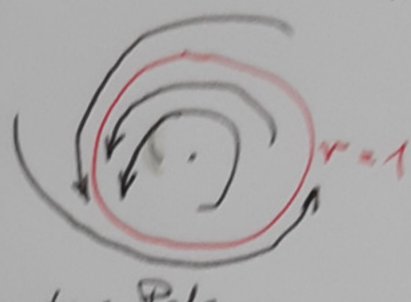
$z(t) \le K z(0)\, e^{\frac{\alpha}{2}t}$ czyli

$\|x(t)\| \le e^{-\alpha t} z(t) \le K\|x(0)\|\, e^{-\frac{\alpha}{2}t}$.

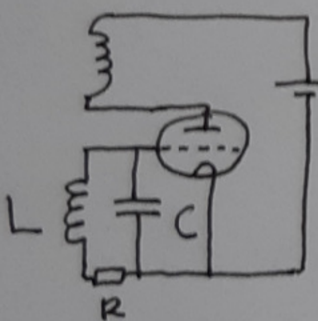
Dla $\|x(0)\| \le \frac{\sigma}{K}$ mamy $\|x(t)\| \le \sigma$ $(\forall t \ge 0)$, można było zastosować powyższe rozumowanie: $x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$. ∎

Rozważa się też stabilność innych rozwiązań niż stałe, np. okresowych (oczywiście jest to ważne zagadnienie w mechanice i technologii – chodzi o stabilność pracy silników, zegarów, generatorów prądu).

Łatwo zauważyć, że $r=1$ jest okresowym rozw. asymptotycznie stabilnym równania na płaszczyźnie zapisanego we współrzędnych biegunowych jako $\dot{r} = 1-r$, $\dot{\varphi}=1$. Tu $r=(x^2+y^2)^{1/2}$, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $\dot{} = \frac{d}{dt}$



Znalezienie rozwiązania okresowego i zbadanie może być trudnym zadaniem, np. dla równania van der Pola opisującego natężenie prądu w układzie elektrycznym zawierającym opornik R, kondensator C, cewkę indukcyjną L i element nieliniowo odpowiadający na zmiany natężenia prądu (czyli lampa trójelektrodowa, tranzystor, układ scalony)



$$x'' + x = (\alpha + \beta x - \gamma x^2)\, x'$$

W układzie takim powstają drgania samowzbudne o stałej częstotliwości (≡ rozw. okresowe). Takie układy potrzebne są do generowania fal radiowych. Są wszędzie!

Inne metody rozwiązywania równań różn. liniowych

Dla pewnych klas równań liniowych o zmiennych współczynnikach można użyć metody szeregów potęgowych. Zilustrujemy to na przykładzie równań drugiego rzędu o wsp. wielomianowych (lub przedstawionych szeregami potęgowymi).

$$(**)\quad L(y) = P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y\,, \quad P(t) \not\equiv 0$$

(ale może mieć izolowane zera), P, Q, R - szeregi pot.

Przykład $y'' - 2ty' - 2y = 0$

Postulujemy $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$

Tam gdzie szereg y jest zbieżny można go różniczkować; więc

$$L(y) = \sum n(n-1)a_n t^{n-2} - 2t\sum n a_n t^{n-1} - 2\sum a_n t^n$$

Po uporządkowaniu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n - 2n a_n t^n - 2a_n t^n \right] = 0$$

czyli $(n+2)(n+1)a_{n+2} - (2n+2)a_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$a_{n+2} = \dfrac{2a_n}{n+2}$ i możemy zadać a_0 i a_1.

Pierwsza możliwość $a_0 = 1$, $a_1 = 0 \Rightarrow a_{2n} = \frac{1}{n!}$, $a_{2n+1} = 0$

$$y_1(t) = \exp(t^2).$$

dla drugiego wyboru $a_0 = 0$, $a_1 = 1$

$$a_{2n+1} = \frac{2^n}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}\,, \quad a_{2n} = 0$$

$$y_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n t^{2n+1}}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}$$ (to już nie jest funkcja elementarna)

y_1, y_2 - dwa niezależne rozwiązania; inne są postaci $c_1y_1 + c_2y_2$, c_1, c_2 - stałe.

Ogólnie

- szereg potęgowy $\sum c_n (t-t_0)^n$ jest zbieżny w przedziale (kole) zbieżności $|t-t_0|<\rho$ (przypadek rzeczywisty lub zespolony)
- szeregi potęgowe można całkować i różniczkować wyraz po wyrazie wewnątrz koła zbieżności
- mnożenie szeregów w sensie Cauchy'ego: wymnożyć wyrazy i uporządkować wg potęg,
- dzielenie szeregów przez $\sum b_n (t-t_0)^n$, $b_0 \neq 0$. (skomplikowane wyrażenia na współczynniki; zwykle <u>nie</u> trzeba tego robić!)

Funkye analityczne $\equiv$ przedstawione szeregiem potęgowym zbieżnym w pewnym kole $\subseteq \mathbb{C}$.

np $\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots$

gdy $t \in \mathbb{R}$ to „nie widać" dlaczego $\rho = 1$ $(t_0 = 0)$, ale gdy $t \in \mathbb{C}$ to jasne, że dla $\pm i$ mianownik znika więc „coś dzieje się" dla $\rho = 1$.

Funkcje analityczne mają sporo zalet pod względem aproksymacji, również numerycznie.

Uzasadnienie metody użytej w przykładzie

<u>Twierdzenie</u> Jeżeli dla (**) $\frac{Q}{P}$, $\frac{R}{P}$ są przedstawione szeregami potęgowymi zbieżnymi dla $|t-t_0|<\rho$, to <u>każde</u> rozwiązanie $L(y)=0$ jest analityczne przynajmniej dla $|t-t_0|<\rho$.

Dowód wymaga żmudnego oszacowania współczynników.

Przykład praktyczny

$$y'' + \frac{3t}{1+t^2}y' + \frac{1}{1+t^2}y = 0$$ nie rozwijamy mianowników!

$(1+t^2)y'' + 3t\,y' + y = 0$ dla hipotetycznej postaci

$y(t) = \sum a_n t^n$ daje

$$(1+t^2)\sum n(n-1)a_n t^{n-2} + 3t\sum n a_n t^{n-1} + \sum a_n t^n = 0$$

$$a_{n+2} = -\frac{n+1}{n+2}a_n \quad \text{bo} \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)^2 a_n = 0$$

$Ly=0$ ma układ fundamentalny rozwiązań

dla wyborów $a_0 = 1, a_1 = 0 \longrightarrow a_{2n} = (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n n!}$

$|t|<1$

oraz $a_0 = 0, a_1 = 1 \longrightarrow a_{2n+1} = \frac{2^n n!}{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}$, $|t|<1$

Równanie z warunkiem początkowym

$y(0) = 2$, $y'(0) = 3$ ma jako jedyne rozw. $2y_1 + 3y_2$.

Osobliwości rozwiązań

Gdy współczynnik przy najwyższej pochodnej znika równania nie można przedstawić w postaci odwikłanej. Mogą pojawiać się osobliwości rozwiązań. Zbadamy je najpierw na przykładzie jednorodnego równania Eulera

$$t^2 y'' + \alpha t y' + \beta y = 0 \quad (E)$$

łatwo odgadnąć, że warto szukać rozw. $y(t) = t^r$

Wtedy $r(r-1) + \alpha r + \beta = 0$, $r_{1,2} = -\frac{1}{2}\left(\alpha - 1 \pm \sqrt{(\alpha-1)^2 - 4\beta}\right)$

Mamy przypadki

- $(\alpha-1)^2 - 4\beta > 0$ $\quad r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ $\quad y(t) = c_1 t^{r_1} + c_2 t^{r_2}$
- $(\alpha-1)^2 = 4\beta$ $\quad r_{1,2} = \frac{1-\alpha}{2}$; $y(t) = (c_1 + c_2 \log t)\, t^{r_1}$

- $(\alpha-1)^2 - 4\beta < 0$

$$t^{\lambda+i\mu} = t^{\lambda}\left(e^{\log t}\right)^{i\mu} = t^{\lambda}\left(\cos(\mu\log t) + i\sin(\mu\log t)\right)$$

$$\lambda = \frac{1-\alpha}{2}, \quad \mu = \frac{1}{2}\sqrt{4\beta-(\alpha-1)^2}$$

$$y_1 = t^{\lambda}\cos(\mu\log t), \quad y_2 = t^{\lambda}\sin(\mu\log t)$$

! Równanie (E) można sprowadzić do r. o stałych współczynnikach podstawieniem $t=e^s$, $s=\log t$. Stąd pojawiają się dla $t=0$ osobliwości (np. ujemne potęgi t lub $\log t$).

Ogólna metoda Frobeniusa (dla informacji)

metoda szeregów potęgowych zmodyfikowana tak, aby postulować rozw. w postaci $y(t)=t^r\sum a_n t^n$ stosuje się do przypadku

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \qquad \text{jeżeli}$$

$$p(t) = \frac{p_0}{t} + p_1 + p_2 t + \ldots$$

$$q(t) = \frac{q_0}{t^2} + \frac{q_1}{t} + q_2 + q_3 t + \ldots$$

mówimy wtedy o regularnych punktach osobliwych

tzn. wtedy $tp(t)$ i $t^2q(t)$ są analityczne

Ważne przykłady to: równanie Bessela

$$t^2y'' - ty' + (t^2-\nu^2)y = 0 \qquad (\nu\in\mathbb{R}),$$

równanie Legendre'a $(1-t^2)y'' - 2ty' + \alpha(\alpha+1)y = 0$

$$1-t^2 = (1-t)(1+t)$$

$$(t-1)p(t) = \frac{2t}{1+t}, \qquad (t-1)^2q(t) = \alpha(\alpha+1)\frac{1-t}{1+t}$$

Przykład: dla równania Bessela z $\nu = \frac{1}{2}$

$$t^2 y'' + t y' + (t^2 - \tfrac{1}{4}) y = 0$$ podstawienie

$$y(t) = t^r \sum a_n t^n \qquad a_0 \neq 0, \ r \in R$$

prowadzi do

$$L(y) = \sum (n+r)(n+r-1) a_n t^{n+r} + \sum (n+r) a_n t^{n+r}$$
$$- \tfrac{1}{4} \sum a_n t^{n+r} + \sum a_n t^{n+r+2}$$

$$= \sum \left[(n+r)(n+r-1) + (n+r) - \tfrac{1}{4} \right] a_n t^{n+r} + \sum a_{n-2} t^{n+r}$$

$$(r^2 - \tfrac{1}{4}) a_0 = 0 \qquad \text{więc } r_1 = 1/2, \ r_2 = -1/2.$$

$$\left((n+r)^2 - \tfrac{1}{4}\right) a_n = - a_{n-2}$$

Teraz dla $r_1 = 1/2$, $a_0 = 1$, $a_n = -\dfrac{a_{n-2}}{n(n+1)}$

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!\,(2n+1)}$$ i widzimy, że

$$y_1(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sin t$$

dla $r_2 = -1/2$ $\qquad a_n = -\dfrac{a_{n-2}}{n(n-1)}$

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \qquad y_2(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \cos t$$

Dla innych $\nu^2 (\neq 1/4)$ równanie Bessela nie ma rozwiązań wyrażających się w funkcjach elementarnych i pierwotnych od nich.