

Można się powołać na każde twierdzenie, które było sformułowane na wykładzie lub ćwiczeniach. Do każdej odpowiedzi na pytanie należy podać krótkie uzasadnienie. W częściach “Podać przykład ...” nie trzeba pisać uzasadnienia. Jeśli jako odpowiedź podają Państwo “TAK, przykładem jest ...”, bądź też “NIE, kontrprzykładem jest ...”, to już nie trzeba uzasadniać, że ten przykład lub kontrprzykład działa.

Poniżej \mathbb{R} oznacza zbiór liczb rzeczywistych, \mathbb{Q} oznacza zbiór liczb wymiernych i \mathbb{N} oznacza zbiór liczb naturalnych. Każdy ze zbiorów \mathbb{R} , \mathbb{Q} , $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $[0, 1]$ jest wzięty z metryką euklidesową, \mathbb{N} jest wzięty z topologią dyskretną.

- (1) (4pkt) Czy (\mathbb{R}^2, d_c) , gdzie d_c jest metryką centrum, jest przestrzenią ośrodkową?
- (2) (3pkt) Czy przestrzenie \mathbb{R} i $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ są homeomorficzne?
- (3) (3pkt) Czy istnieje ciągle przekształcenie z odcinka $[0, 1]$ na $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?
- (4) (4pkt) Czy istnieje ciągle przekształcenie z $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (ciągi liczb naturalnych, topologia produktowa) na odcinek $[0, 1]$?
- (5) (4pkt) Podać przykład przestrzeni, która jest T_2 i nie jest T_3 .
- (6) (3pkt) Czy podprzestrzeń przestrzeni metrycznej zupełnej musi być metryzowalna w sposób zupełny?
- (7) (4pkt) Czy funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, której wykres jest domknięty musi być ciągła?
- (8) (4pkt) Czy funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, której wykres jest domknięty musi być ciągła?
- (9) (3pkt) Czy przeliczalna przestrzeń metryczna może być zwarta?
- (10) (4pkt) Czy przeliczalna przestrzeń metryczna może być spójna?
- (11) (3pkt) Czy $\mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times [0, 1])$ z metryką euklidesową jest przestrzenią spójną?
- (12) (3pkt) Podać przykład nieprzeliczalnego zwartego brzegowego podzbioru \mathbb{R} .
- (13) (4pkt) Czy $(C(\mathbb{N}, [0, 1]), d_{\text{sup}})$, gdzie $C(\mathbb{N}, [0, 1])$ jest zbiorem funkcji ciągłych z \mathbb{N} w $[0, 1]$, $d_{\text{sup}}(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in \mathbb{N}\}$, jest przestrzenią ośrodkową?
- (14) (4pkt) Podać przykład przestrzeni, która jest zwarta i nie ma bazy przeliczalnej.