Łukowa spójność: X jest łukowo spójna, jeśli $(\forall x, y \in X)$ $(\exists f : [0,1] \xrightarrow{\text{ciągła}} X)$ $f(0) = x$, $f(1) = y$. (Takie f nazywamy drogą.)

Np. • X dyskretna ($|X| \geq 2$) nie jest łukowo spójna,

• $|X| = 1$ jest łukowo spójna (trywialne)

• $\mathbb{R}$ – ł. spójna

Spójność: p.-n. X jest spójna, gdy $\nexists\, U, V \subseteq X$ otwarte t., że $U, V \neq \emptyset$, $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = X$.

(Równoważnie $\nexists\, \emptyset \neq U \subsetneq X$ otw.-domkn. w X.

bo: jeśli X niespójna, to U (z def.) jest otw.-domk. (bo $U^c = X \setminus U = V$ – otwarty),

a jeśli $\exists\, \emptyset \neq U \subsetneq X$ otw.-domk., to biorę $V = U^c$ $\rightsquigarrow$ V – otw., $V \neq \emptyset$ ✓.)

Np. • $X = ((0,1) \cup (1,2), d_e)$ — niespójna, bo $U := (0,1)$, $V = (1,2)$

• $X = ((0,2), d_e)$ – spójny (to już nie działa)

• $X = ([a,b], d_e)$ – spójny (zakł. nie wprost że $\exists\, U, V$ jak w def. niespójności)

to biorę $x = \inf V \in [a,b] \rightsquigarrow ?$: $x \in U$ czy $V \rightsquigarrow x \in V$

$y = \inf U \in [a,b] \rightsquigarrow y \in U$

b.z.o. $y > x$ $[a, y) \subseteq V$

$y \in V$ z domk. V

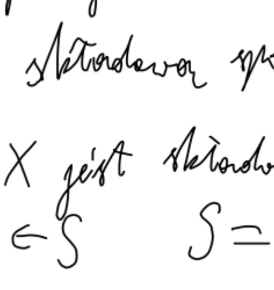
sprz. z rozłącz. U, V.

Fakt X – ł. spójna $\Rightarrow$ spójna

(gdyby nie $\to$ f – droga $f : [0,1] \to X$ $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ – otw., $\neq \emptyset$ $\to$ sprzeczn. ze spójnością $[0,1]$)

$(f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cup V) = [0,1])$

$\Leftarrow\!\!\!\!/$ przykład: „zagęszczająca się sinusoida"



$X = (\{0\} \times [-1,1] \cup W_{\sin\frac{1}{x}, x>0}, d_e)$

X – spójna, ale nie łukowo spójna.

Podzbiór $S \subseteq X$ jest spójny (łukowo spójny), jeśli jest taki z topologią $\mathcal{T}_S$.

• Podzbiór maksymalny $S \subseteq X$ spójny (łukowo spójny) nazywamy składową spójności (łukowej spójności),

(?) Fakt: $S \subseteq X$ jest składową łukowej spójn. jeśli dla pewnego $x \in S$ $S = \{y \in X : \exists \text{ droga } x \to y \text{ w } X\}$

(czyli $f : [0,1] \xrightarrow{\text{ciągła}} X$, $0 \mapsto x$, $1 \mapsto y$)

Np. $X = \underbrace{(0,1)}\cup\underbrace{(1,2)}$

składowe spójności (łukowej spójności)

$(0,1)$ – skł. spójności, bo:

• jest spójny

• jest maksymalny taki, tzn. $(\forall T \supsetneq S)$ T niespójny (bo $(0,1)$, $T \cap (1,2)$ świadkami na niespójność)

• Np. $X =$ ∿∿∿ $\rightsquigarrow$ X – spójna (więc X jest jedyną składową spójności), ale X – nie łukowo spójna;

składowe łukowej spójności: | , ∿∿∿

2.10. X: $0 \cdots \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ \ 1$; $\mathcal{C} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

(a) Fakt: $f : X \xrightarrow[\text{na}]{\text{ciągła}} Y$ i X – spójna (łukowo) $\Rightarrow$ Y – spójny (łukowo)

$\mathcal{C}$ nie spójny, bo

• (wersja $C \subseteq [0,1]$): $\underbrace{(\cdot\cdot\ \ \cdot\cdot)}_{U}\ \underbrace{(\cdot\cdot\ \ \cdot\cdot)}_{V}$

$U \cap C$, $V \cap C$ – świadkowie o niespójności)

• (wersja $C = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$): $C = \{0\} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}_{>1}} \cup \{1\} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}_{>1}}$

wobec tego $\nexists$ $\underset{\uparrow \text{sp.}}{[0,1]} \xrightarrow[\text{ciągła}]{\text{na}} \underset{\uparrow \text{niesp.}}{\mathcal{C}}$

(b) $f : X \times [0,1] \xrightarrow[\text{ciągła}]{\text{na}} \mathcal{C}$

Gdyby istniała taka f, to

$X \times [0,1]$

$\{x\} \times [0,1]$ – spójny w $X \times [0,1]$

$\Rightarrow f(\{x\} \times [0,1])$ – spójny, czyli $\underset{\text{(singleton)}}{\{y_x\}} \subseteq \mathcal{C}$

$\mathcal{C} = f(X \times [0,1]) = \bigcup_x f(\{x\} \times [0,1]) = \bigcup_x \{y_x\}$ – mocy $\leq \aleph_0$

↯ bo $|\mathcal{C}| > \aleph_0$

$\longrightarrow$ nie istnieje taki f

(c) Tak, bo $\exists\, f : \mathbb{Q} \xrightarrow[\text{ciągła}]{\text{na}} X$

w drugą stronę, $f : X \times \mathcal{C} \xrightarrow[\text{na}]{\text{ciągła}} \mathbb{Q} \times \mathcal{C}$

2.11. (a) składowe spójności $X = \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ to zbiory postaci $\{x\} \times \mathbb{R}$

podobnie dla $Y = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times \mathbb{R}$

więc X ma $\aleph_0$, a Y ma $\mathfrak{c}$ składowych spójności

$\longrightarrow$ nie

(b) $X = \mathbb{Q} \times [0,1]$, $Y = \mathbb{N} \times [0,1]$

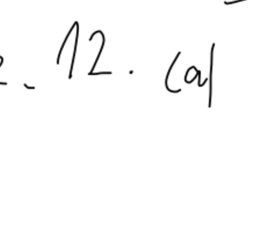
nie $\exists$ homeom, bo gdyby $h : X \underset{\text{homeo}}{\longrightarrow} Y$, to

biorąc $a_n = (\frac{1}{n}, 0) \in X$ $a_n \xrightarrow{n} (0,0)$

$h(a_n) \in \mathbb{N} \times [0,1] \rightsquigarrow h(a_n)_1 \in \mathbb{N}$

skoro różne a_n, a_m leżą w różnych składowych (łukowej) spójności,

to ich obrazy też, czyli $h(a_n)_1 \neq h(a_m)_1$

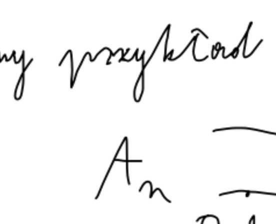


czyli ciąg $(h(a_n)_1)_{n=1}^{\infty}$ jest różnowartościowy, więc

$h(a_n)_1 \xrightarrow[n]{} \infty$, więc $h(a_n)$ nie ma granicy w Y ↯

$\longrightarrow$ nie $\exists$ taki h

2.12. (a) K_1 K_n



$[0,1] \times (0, \frac{1}{n})$

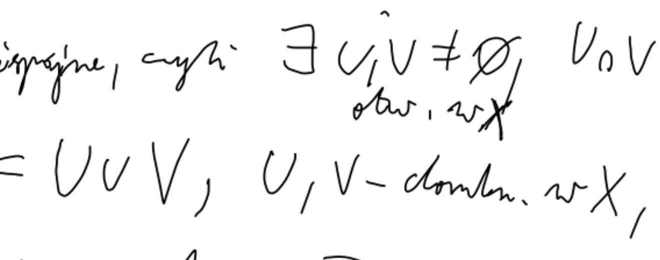
A_n – spójne

$A_n = K_1 \cup K_2 \cup [0,1] \times (0, \frac{1}{n})$

$\bigcap_n A_n = K_1 \cup K_2$ – niespójne

• Inny przykład:

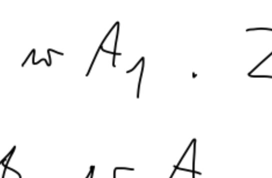
A_n



$0\ 1\ 2 \cdots\ n$

A_n – spójne, ale

$\bigcap_n A_n$



– niespójne

(b) Jeśli A_n – spójne i zwarte, to

Z. nie wprost: $X = \bigcap_n A_n$ – niespójne, czyli $\exists\, \underset{\text{otw. w } X}{U, V} \neq \emptyset$, $U \cap V = \emptyset$,

$X = \bigcap_n A_n = U \cup V$, U, V – domkn. w X, X – domkn. w A_1

więc U, V – domkn. w A_1. Z normalności A_1

istnieją $\widehat{U}, \widehat{V}$ otw. w A_1, $\widehat{U} \cap \widehat{V} = \emptyset$

$\widehat{U} \supseteq U$, $\widehat{V} \supseteq V$

Cel: któryś A_n jest niespójny:

• skoro $X \subseteq \widehat{U} \cup \widehat{V}$, to $A_1 \setminus X \cup \widehat{U} \cup \widehat{V} = A_1$,

czyli $A_1 = \widehat{U} \cup \widehat{V} \cup \bigcup_n A_1 \setminus A_n$ – otwarte pokrycie A_1

$\Rightarrow$ ze zwartości A_1 $(\exists\, n \in \mathbb{N})$ $\widehat{U} \cup \widehat{V} \cup \bigcup_{k=1}^{n} A_1 \setminus A_n = A_1$

czyli $A_1 = \widehat{U} \cup \widehat{V} \cup A_1 \setminus \bigcap_{k=1}^{n} A_n = \widehat{U} \cup \widehat{V} \cup A_1 \setminus A_n$

bo zstępująca

czyli $A_n \subseteq \widehat{U} \cup \widehat{V}$, ale

$A_n \cap \widehat{U} \supseteq X \cap \widehat{U} \neq \emptyset$, $A_n \cup \widehat{V} \supseteq X \cap \widehat{V} \neq \emptyset$

$\rightsquigarrow$ $A_n \cap \widehat{U}$, $A_n \cap \widehat{V}$ świadkowie o niespójności A_n