EGZAMIN RR1R

Lokalne istnienie rozwiązań

• **Twierdzenie (Picard-Lindelöf):**

Jeżeli funkcja f spełnia: • $|f(y_1,t)-f(y_2,t)| \leq k|y_1-y_2|$ na otoczeniu y_0

• f jest ciągła ze względu na t w otoczeniu 0

to wtedy istnieje $T>0$, że zagadnienie $\begin{cases} y'=f(y,t) \\ y_0=y(0) \end{cases}$ ma jedyne rozw na $[0,T]$

Przykład:

$\begin{cases} y'=y^2(1+t^2) \\ y(0)=y_0 \end{cases}$ Istnieje jedyne rozwiązanie na $[0,T]$

• **Twierdzenie:**

Jeżeli $f(y,t)$ jest ciągła w otoczeniu (y_{t_0},t_0), to wtedy istnieje $T>t_0$, że zagadnienie $\begin{cases} y'=f(y,t) \\ y(t_0)=y_{t_0} \end{cases}$, ma rozwiązanie (niekoniecznie jedyne) na przedziale $[t_0,T]$

Przykład:

$\begin{cases} y'=\sqrt{y}\,(1+t^2) \\ y(0)=0 \end{cases}$ Istnieje rozwiązanie na przedziale $[0,T]$

• **Twierdzenie (Kryterium Osgooda):**

Jeżeli istnieje funkcja ciągła $\omega: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, taka że:

- $|f(y_1)-f(y_2)| \leq \omega(|y_1-y_2|)$ dla y_1,y_2 z otoczenia y_0
- $\int_0^\delta \frac{1}{\omega(s)}\,ds = \infty$ dla każdego $\delta>0$

Wtedy rozwiązanie zagadnienia $\begin{cases} y'=f(y,t) \\ y(0)=y_0 \end{cases}$ jest jedyne

• **Twierdzenie:** (globalność)

Jeżeli f spełnia: - $|f(y_1)-f(y_2)| \leq k|y_1-y_2|$ dla dow $y_1,y_2 \in \mathbb{R}$ z tą samą stałą k nie zależną od t

- f jest ciągła ze względu na t

to wtedy rozwiązanie zagadnienia $\begin{cases} y'=f(y,t) \\ y(0)=y_0 \end{cases}$ jest globalne, tzn instnieje dla wszystkich $t>0$

Przykład:

$\begin{cases} y'=1+\sin(y)=f(y) \\ y(0)=y_0 \end{cases}$ f - globalnie Lipshitzowska

$|\sin y_1 - \sin y_2| \leq \underline{1}|y_1-y_2|$ Zatem istnieje globalne rozwiązanie

• Twierdzenie: (globalności)

Niech $f(y,t)$ spełnia: $- |f(y_1,t) - f(y_2,t)| \le k|y_1 - y_2|$ na otoczeniu $(y_0, 0)$

- f - ciągła ze względu na t

Niech rozwiązanie $y(t)$ zagadnienia $\begin{cases} y' = f(y,t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ spełnia oszacowanie

$|y(t)| \le g(t)$, $g(t): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ciągła, to wtedy rozwiązanie jest globalne.

Przykład:

$y'' = f(x)$

energia całkowita — $E = const = T + U$ (T — energia kinetyczna, U — energia potencjalna)

$T = \frac{(x')^2}{2}$ $\quad U = -\int_{x_0}^{x} f(s)\,ds \ge 0$

$(x')^2 - F(x) + F(x_0) = c$

$\frac{(x')^2}{2} \le \frac{(x')^2}{2} + U = c$

$x' \le \sqrt{2c} \quad / \int_{t_0}^{t}$

$x(t) \le \sqrt{2c}\,(t - t_0) + x(t_0)$

$x \le at + b$

f - ciągła i Lipschitzowska ze względu na y

z P-L istnieje jedyne rozw na $[0,T]$

z zasady zachowania energii mamy $x(t) \le at + b$. Zatem z tw o globalności rozwiązanie jest globalne.

<u>Układy równań</u>

$x = (x_1, \dots, x_n)$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\quad \begin{cases} x' = f(x,t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

$f = (f_1, \dots, f_n)$

• Twierdzenie Picarda - Lindelöfa - analogiczne jak wcześniej

• Twierdzenie (2) - analogiczne

• Twierdzenia o globalności - analogiczne

• Twierdzenie Liouville'a:

$y' = Ay$, A - macierz, Φ - macierz fundamentalna - zbudowana z rozwiązań układu

$\Phi(t) = \Phi(0)\, e^{-\int_0^t tr A(s)\,ds}$

Rozwiązywanie:

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = e^{At} x(0) \quad , \quad e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

$A = PJP^{-1}$

$\left.\begin{array}{l} P \text{ - macierz zmiany bazy} \\ J \text{ - klatka Jordana} \end{array}\right\} \Rightarrow e^{At} = P e^{Jt} P^{-1}$

a) J - diagonalne

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

b) $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & \lambda_1 \end{pmatrix}$ $\quad e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \frac{t^2}{2} e^{\lambda_1 t} & \frac{t^3}{6} e^{\lambda_1 t} & \dots \\ & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \frac{t^2}{2} e^{\lambda_1 t} & \dots \\ & & \ddots & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} \\ & & & & e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix} =$

$$= e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & 1 & t & & \\ & & \ddots & \dots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$x' = Ax + f(t)$

$(xe^{-At})' = f(t) e^{-At}$

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s)\, ds \quad , \quad e^{(t-s)A} = P e^{(t-s)J} P^{-1}$$

---

równania liniowe wyższego rzędu $\quad a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_0 = f(x)$

$\Downarrow$

układ n równań liniowych $\quad \begin{cases} x_1 = x' \\ \vdots \\ x_{n-1} = x^{(n-1)} \\ a_n \cdot x_{n-1}' + a_{n-1} x_{n-2}' + \dots + a_0 = f(x) \end{cases}$

Stabilność

- Definicje:
  - Rozwiązanie jest stabilne jeżeli $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$, że dla dow. war. początkowego $\|x(0) - \bar{x}(0)\| < \delta \Rightarrow \sup_{t \geq 0} \|x(t) - \bar{x}(t)\| \leq \varepsilon$
  - Rozwiązanie jest asymptotycznie stabilne, gdy $\exists \delta \; \|x(0) - \tilde{x}(0)\| \leq \delta \Rightarrow \|x(t) - \tilde{x}(t)\| \leq e^{-ct}$ dla pewnego $c > 0$
  - Rozwiązanie jest niestabilne jeśli nie jest stabilne.

• Twierdzenie (stabilności układu liniowego)

Mamy układ $\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$:

- Jeżeli istnieje wartość własna macierzy A spełniająca $Re\,\lambda > 0$, to rozwiązanie jest niestabilne
- Jeżeli wszystkie wartości własne spełniają $Re\,\lambda < 0$, to rozwiązanie jest asymptotycznie stabilne
- Jeżeli wszystkie wartości własne spełniają $Re\,\lambda \leq 0$ oraz wielokrotne wartości własne dla których ilość wektorów własnych jest mniejsza niż ich krotność spełniają $Re\,\lambda < 0$ to rozwiązanie jest stabilne.

• Twierdzenie (stabilności układu nieliniowego)

$x' = f(x)$. Niech A - macierz linearyzacji $A = f'(x_0)$

Rozwiązanie $x = x_0$ jest stabilne jeżeli wszystkie wartości własne macierzy A spełniają $Re\,\lambda < 0$

Rozwiązanie $x = x_0$ jest niestabilne, gdy $\exists \lambda$ $Re\,\lambda > 0$

Uwaga: Twierdzenie nie rozstrzyga sytuacji, gdy wszystkie wartości własne spełniają $Re\,\lambda \leq 0$

<u>Metoda szeregów potęgowych</u>

$a_n(t)\,y^{(n)} + a_{n-1}(t)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)\,y^{(1)} + a_0(t)\,y = 0$

$y(0) = y_0$

Szukamy rozwiązania w postaci $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$

$y^{(n)} = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \frac{k!}{(k-n)!} t^{k-n}$

Wstawiając y do wyjściowego równania otrzymujemy rekurencyjne równanie na współczynniki

Układy konserwatywne

$y'' = f(y)$ $\quad f$ - klasy C^1

- Twierdzenie:

W układzie $y'' = f(y)$ $E_{całkowita} = T + U$ jest stała

$T = \frac{(y')^2}{2}$ $\quad U = -\int_{y_0}^{y} f(s)\,ds$

- Twierdzenie:

Rozwiązania są globalne i spełniają oszacowanie $|y(t)| \le \sqrt{2E}(t-t_0) + y(t_0)$

Zagadnienia brzegowe

$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$ $\quad a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$

dla $x \in [0,1]$ z warunkami $y(0), y(1)$
$y'(0), y'(1)$

Rozwiązanie zagadnienia brzegowego można otrzymać dzięki:

- metoda uzmienniania stałych
- metoda Fouriera - rozwiązanie wyrażone w postaci bazy ortogonalnej
- funkcja Greena