

# Ćwiczenia z topologii

Aleksandra Kwiatkowska

20.03.2020

## Zadanie 1/11

Nie. Kontrprzykład: metryka dyskretna na  $X$  (gdzie  $|X| > 1$ ). Weźmy dowolny  $x \in X$  i kulę  $B(x, 1) = \{x\}$ . W metryce dyskretniej każdy zbiór jest domknięty, więc  $B(x, 1) = \overline{B(x, 1)}$ . Z drugiej strony  $\{y : d(x, y) \leq 1\} = X$ , a z warunku na moc zbioru  $X$  mamy  $X \neq \{x\}$ .

## Zadanie 1/8

a)

triv

b)

Tw.  $\overline{A \cup B} = \overline{A \cup B}$   
 $U \subseteq V \implies \overline{U} \subseteq \overline{V}$

- $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A \cup B}$
- $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A \cup B}$

c)

$\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A \cap B}$

dwie kule o środkach w -1 i 1 o promieniach 1.

$A = [0, 1/2) B = (1/2, 1]$

d)

Cel:  $X \setminus \overline{A} = \text{Int}(X \setminus A)$ .

$X \setminus \overline{A} = X \cap \overline{A}^C$  otwarty, bo  $X$  i  $\overline{A}^C$  otwarte.  $X \setminus \overline{A} \subseteq X \setminus A$ , a  $\text{Int}(X \setminus A)$  to maksymalny zbiór otwarty zawarty w  $X \setminus A$ , więc  $X \setminus \overline{A} \subseteq \text{Int}(X \setminus A)$ .

Mamy  $A \subseteq X \setminus \text{Int}(X \setminus A)$ , dalej  $\overline{A} \subseteq X \setminus \text{Int}(X \setminus A)$ , bo zbiór po prawej domknięty. Stąd  $\text{Int}(A \setminus X) \subseteq X \setminus \overline{A}$ .

*Alternatywne rozwiązanie drugiej inkluzji.* Weźmy  $x \in \text{Int}(X \setminus A)$ . Istnieje otoczenie  $U$  t. że  $x \in U \subseteq X \setminus A$ . Korzystamy z zad 10. Zauważamy, że  $U$  ma własność  $U \cap A = \emptyset$ . Czyli  $x \notin \overline{A}$ .

e)

Z d) mamy  $X \setminus \overline{A} = \text{Int}(X \setminus A)$ . Stąd  $X \setminus (\overline{X \setminus A}) = \text{Int}(X \setminus (X \setminus A)) = \text{Int}A$ .  
Zatem  $\overline{X \setminus A} = X \setminus (X \setminus (\overline{X \setminus A})) = X \setminus \text{Int}A$ .

Alternatywne rozwiązanie: Weźmy  $x \in X \setminus \text{Int}A$ . Dla każdego otoczenia  $x \in U$ ,  $U$  nie jest zawarte w całości w  $A$ . Czyli  $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ . Czyli  $x \in \overline{X \setminus A}$ .

## Zadanie 1/12

$$B(x, \delta) \cap A \neq \emptyset \quad (L)$$

$$B(x, \delta) \setminus A \neq \emptyset \quad (P)$$

a)

Cel:  $\text{Int}(A) = A \setminus \text{Bd}(A)$ .

Weźmy  $x \in \text{Int}(A)$ , wtedy istnieje otoczenie  $x$  zawarte w  $A$ , więc  $x$  nie spełnia  $P$ . Stąd  $x \notin \text{Bd}(A)$ , więc  $\text{Int}(A) \subseteq A \setminus \text{Bd}(A)$

Weźmy  $x \in A \setminus \text{Bd}(A)$ . Wtedy  $x$  spełnia  $L$  (bo  $x \in A$ ), więc nie spełnia  $P$ , więc istnieje otoczenie  $x$  zawarte w  $A \setminus \text{Bd}(A)$ , więc  $A \setminus \text{Bd}(A)$  otwarty, stąd  $A \setminus \text{Bd}(A) \subseteq \text{Int}(A)$

b)

Cel:  $\overline{A} = A \cup \text{Bd}(A)$ .

Weźmy  $x \in A \cup \text{Bd}(A)$ , wtedy  $x$  spełnia  $L$ .

Weźmy  $x$  spełniający  $L$ . Wtedy gdy  $x$  spełnia  $P$  to należy do  $\text{Bd}(A)$ , zaś gdy  $x$  nie spełnia  $P$ , to istnieje kula o środku w  $x$  zawarta w  $A$ , więc  $x \in A$ , stąd jeśli  $x$  spełnia  $L$  to  $x \in A \cup \text{Bd}(A)$ .

Z def.  $\overline{A}$  (Z 1/10):  $\overline{A} = A \cup \text{Bd}(A)$ .

## Zadanie 2/1

$B(a, \frac{1}{i})$  to ciągi, które różnią się od  $a$  po raz pierwszy dla indeksu  $> i$ .

a)

$d(a, b) = 0 \iff a = b$  oraz  $d(a, b) = d(b, a)$  trywialne. Załóżmy, że  $a, b$  oraz  $b, c$  się różnią po raz pierwszy na indeksach  $i$  oraz  $j$  odpowiednio. Wtedy  $a_k = c_k$  dla  $k < \min(i, j)$ . Zatem  $d(a, c) \leq \frac{1}{\min(i, j)} = \max(\frac{1}{i}, \frac{1}{j}) < \frac{1}{i} + \frac{1}{j}$ .

b)

Weźmy  $a, b \in \mathbf{N}^{+\mathbf{N}^+}$  oraz  $\frac{1}{i} \geq \frac{1}{j} > 0$ . Wtedy

$$B(a, \frac{1}{i}) \cap B(b, \frac{1}{j}) = \{c \mid d(c, a) < \frac{1}{i} \wedge d(c, b) < \frac{1}{j}\} \quad (1)$$

$$= \{c \mid (k \leq i \implies c_k = a_k) \wedge (k \leq j \implies c_k = b_k)\} \quad (2)$$

$$\subseteq \{c \mid k \leq i \implies a_k = b_k = c_k\} \quad (3)$$

$$\subseteq \begin{cases} \emptyset & \exists k \leq i a_k \neq b_k \\ B(a, \frac{1}{i}) & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases} \quad (4)$$

c)

$$\begin{aligned} A &= \{(n_1, n_2, \dots) \mid n_i = 1 \text{ dla co najmniej trzech indeksów } i\} \\ &= \bigcup_{a \in A} B(a, \frac{1}{i_a}) \text{ gdzie } i_a \text{ to indeks trzeciego wystąpienia 1 w } a \end{aligned}$$

$$B = \{(n_1, n_2, \dots) \mid n_i = 1 \text{ dla nieskończenie wielu } i\}$$

Weźmy  $b \in B, n \in \mathbf{N}^+$ . Wtedy do  $B(b, \frac{1}{n})$  należą ciągi, które nie mają jedynek po indeksie  $i$ , więc  $B$  nie jest otwarty.

Np.  $b = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ . Weźmy dowolnie duży  $n \in \mathbf{N}^+$ , wtedy ciąg  $b_n$  równy  $b$  dla indeksów  $\leq n$  i  $b_n = 0$  dla indeksów  $> n$  jest w  $B(b, \frac{1}{n})$ , ale nie jest w  $B$ .

d)

$$\begin{aligned} (a, b) &= \{x \mid a < x < b\} \\ &= \bigcup_{x \in (a, b)} B(x, \min(d(x, a), d(x, b))) \end{aligned}$$

Niech  $c = (2, 1, 1, 1, \dots)$ . Wtedy  $B(c, \frac{1}{2})$  to zbiór ciągów, które się zaczynają od  $(2, 1, \dots)$ . Ciągi mniejsze od  $c$  zaczynają się od  $(1, \dots)$ .

$a = (1, 9, 9, 9, \dots) < c = (2, 1, 1, \dots) < b = (2, 2, 2, 2, \dots)$  Wtedy ciąg  $(1, 10, 101, \dots)$  nie zawiera się w kuli.

e)

o co chodzi?