Rozwiązywanie równania niejednorodnego metodą Lagrange'a (metodą uzmienniania parametrów)

- stosuje się do sytuacji ze zmiennymi współczynnikami $A = A(t)$, $b = b(t)$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$ Szukamy rozwiązań w postaci

$$x(t) = Y(t)\,z(t) \tag{*}$$ Y - macierz fundamentalna, z - nieznana funkcja (gdy $z = \text{const}$ $x(t)$ jest rozw. równania jednorodnego). Podstawiając do (N)

$$\dot{Y}z + Y\dot{z} = AYz + b \qquad \dot{Y} = AY \text{ a zatem:}$$

$$AYz + Y\dot{z} = AYz + b, \quad Y\dot{z} = b \quad \text{i otrzymujemy } z:$$

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)\,b(s)\,ds \qquad (Y^{-1} \text{ istnieje bo } Y \text{ - m. fund.})$$

ostatecznie

$$x(t) = Y(t)\int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)\,b(s)\,ds + Y(t)\,Y(t_0)^{-1} x_0 \tag{**}$$

Nie musimy pamiętać wzoru (**); wystarczy, że pamiętamy podstawienie (*) i fakt, że rozw. równania (N) różnią się o rozw. równania jednorodnego czyli o $Y(t)c$ dla pewnego wektora c.

Równania liniowe rzędu $k > 1$; wyznacznik Wrońskiego

Wprawdzie, jak wiemy, równania wyższego rzędu można zredukować do równań wektorowych pierwszego rzędu, ale czasami jest wygodniejsze skorzystanie ze specjalnej postaci dla skalarnego równania k-tego rzędu (***) $x^{(k)} + a_{k-1}(t)\,x^{(k-1)} + \ldots + a_1(t)\,x' + a_0(t)\,x = b(t)$

$a_j : (t_0, t_1) \to \mathbb{R}$, $\quad ' = \frac{d}{dt}$

(***) redukuje się do układu

$x_0 = x,\ x_1 = x_0',\ \dots,\ x_k = x_{k-1}', \qquad x = (x_0, \dots, x_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$

$x_k = x_{k-1}' = b - (a_{k-1} x_{k-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0 x_0)$

czyli $x' = Ax$ z macierzą
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{k-1} \end{pmatrix}$$

Jeżeli $y_1, \dots, y_k$ są liniowo niezależnymi rozwiązaniami (***) z $b \equiv 0$ i tworzymy

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_k \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(k-1)} & & y_k^{(k-1)} \end{pmatrix}$$ oraz definiujemy

wyznacznik Wrońskiego $W[y_1, \dots, y_k](t) = \det Y(t) \equiv W(t)$.

Oczywiście macierz Y utworzona z k rozwiązań jest fundamentalna $\Leftrightarrow$ $\det Y(t) \neq 0$

Z twierdzenia Liouville'a

$$\boxed{W(t) = W(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a_{k-1}(s)\,ds\right)}$$

Zatem dla $k = 2$: $W = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$

jest wyznacznikiem Hoene-Wrońskiego (wrońskianem).

Można zatem myśleć, że przestrzeń X rozwiązań jednorodnego równania (***) jest izomorficzna z $\mathbb{R}^k$.

Zagadnienie odwrotne (do rozwiązywania równań)

mając dane funkcje $y_1 = y_1(t), \dots, y_k = y_k(t)$ takie, że $W[y_1, \dots, y_k] \neq 0$ znaleźć równanie jednorodne, którego rozwiązaniami są te funkcje.

Rozw. 1) użyć wzorów Cramera do uzyskania współczynników spełniających układ k równań.

Rozw. 2) zauważyć, że wyznacznik $(k+1)\times(k+1)$

$$\det\begin{pmatrix} y^{(k)} & y^{(k-1)} & \dots & y \\ y_k^{(k)} & y_k^{(k-1)} & \dots & y_k \\ \vdots & & & \\ y_1^{(k)} & y_1^{(k-1)} & \dots & y_1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{bo układ}$$

$(k+1)\times(k+1)$ równań $y_j^{(k)} + a_{k-1} y_j^{(k-1)} + \ldots = 0$

<u>ma</u> rozwiązania $(1, a_0, \ldots, a_{k-1})$ <u>niezerowe</u>.

Po rozwinięciu wyznacznika wg pierwszego wiersza otrzymujemy relację wiążącą $y, y', \ldots, y^{(k)}$, a po podzieleniu przez $W(t) \neq 0$ – równanie różniczkowe liniowe k-tego rzędu w postaci odwikłanej.

Metoda Lagrange'a rozwiązania równania niejednorodnego k-tego rzędu

Jeżeli $y_1, \ldots, y_k$ są liniowo niezależnymi rozwiązaniami r. jednorodnego, to szukamy rozwiązania (***) w postaci $y(t) = c_1(t) y_1(t) + \ldots + c_k(t) y_k(t)$,

c_j – nieznane współczynniki <u>zależne</u> od t

Wtedy $y' = c_1 y_1' + \ldots + c_k y_k' + c_1' y_1 + \ldots + c_k' y_k$.

Lagrange zauważył, że można <u>kolejno</u> nakładać warunki $c_1' y_1 + \ldots + c_k' y_k = 0$, $c_1' y_1' + \ldots + c_k' y_k' = 0$, $\ldots$, $c_1' y_1^{(k-2)} + \ldots + c_k' y_k^{(k-2)} = 0$ oraz pozostanie $c_1' y_1^{(k-1)} + \ldots + c_k' y_k^{(k-1)} = b$. Tworzą one układ

k równań algebraicznych z niewiadomymi $c_1', \dots, c_k'$, którego wyznacznik główny jest $W[y_1, \dots, y_k](t) \neq 0 \quad \forall t \in (t_0, t_1)$

A zatem możemy wyznaczyć (np. ze wzoru Cramera) $c_1', \dots, c_k'$ i odcałkować. Dowolne stałe całkowania dla tych c_j dają wkład w rozw. równania jednorodnego, reszta jest (szczególnym) rozw. (***).

Ćwiczenie: prześledzić to dla $k=2$ ze szczegółami.

Uwaga praktyczna: jeżeli znane jest jedno rozwiązanie $\bar{y} \not\equiv 0$ równania jednorodnego, to rząd k równania można obniżyć o 1 stosując podstawienie $y = \bar{y}z$ i szukając z. Dla $k=2$ wygląda to następująco: $y' = \bar{y}'z + \bar{y}z'$, $y'' = \bar{y}''z + 2\bar{y}'z' + \bar{y}z''$.

Chcemy aby $\bar{y}''z + 2\bar{y}'z' + \bar{y}z'' + a_1\bar{y}z' + a_1\bar{y}'z + a_0\bar{y}z = b$

po skorzystaniu z równania na $\bar{y}$

$$z''\bar{y} + z'(2\bar{y}' + a_1\bar{y}) = b$$

, czyli otrzymujemy równanie liniowe pierwszego rzędu na z', które umiemy rozwiązać. Podobnie jest dla równań wyższych rzędów. Jeśli zatem znajdziemy jakieś rozwiązanie, to jesteśmy w stanie uprościć zagadnienie obniżając rząd równania z k do $k-1$.

Najprostszy przypadek:

Równanie k-tego rzędu o stałych współczynnikach

(R) $\quad x^{(k)} + a_{k-1}x^{(k-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = 0$

Szukamy rozwiązań w postaci wykładniczej
$x(t) = e^{\lambda t}$ dla pewnego (zespolonego) $\lambda \in \mathbb{C}$.
Wraz z równaniem (R) rozważamy jego wielomian charakterystyczny $P(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$
oraz operator różniczkowy $\mathcal{P} = \left(\frac{d}{dt}\right)^k + a_{k-1}\left(\frac{d}{dt}\right)^{k-1} + \ldots + a_0 I$
działający na funkcjach jak $\mathcal{P}(x) = x^{(k)} + \ldots + a_0 x$.
Oznaczmy przez $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ pierwiastki równania charakterystycznego $P(\lambda) = 0$ (być może są one wielokrotne).

Przypadki: i) λ_j są różne. Wtedy $\{e^{\lambda_j t}\}_{j=1}^{k}$ jest układem fundamentalnym rozwiązań (R).

ii) wśród λ_j są pierwiastki wielokrotne, powiedzmy λ jest m-krotnym pierwiastkiem i wtedy
$0 = P(\lambda) = P'(\lambda) = \ldots = P^{(m-1)}(\lambda)$ $(m \geqslant 2)$
Aby znaleźć inne rozwiązania napiszmy
$\mathcal{P}(e^{\lambda t}) = P(\lambda) e^{\lambda t}$ $\quad \frac{d}{dt}$ i $\frac{d}{d\lambda}$ komutują
(są to niezależne zmienne), więc z tożsamości
$\frac{d}{d\lambda}\mathcal{P}(e^{\lambda t}) = \frac{d}{d\lambda} P(\lambda) e^{\lambda t}$ otrzymujemy
$\mathcal{P}\left(\frac{d}{d\lambda} e^{\lambda t}\right) = \left(P'(\lambda) + \lambda P(\lambda)\right) e^{\lambda t}$ czyli
$\mathcal{P}(t e^{\lambda t}) = 0$ - $t e^{\lambda t}$ jest też rozwiązaniem.
Itd, to znaczy $t^j e^{\lambda t}$ dla $0 \leq j \leq m-1$ są rozwiązaniami (R).

Uwaga: jeżeli $\lambda \in \mathbb{C}$ a współczynniki a_j są rzeczywiste, to $P(\lambda)=0$ implikuje $P(\bar{\lambda})=0$.
$e^{\lambda t}$ i $e^{\bar{\lambda} t}$ są rozw. (R) i po oddzieleniu części rzeczywistej i urojonej $\lambda = \alpha + i\beta$ widzimy, że $e^{\alpha t}\cos\beta t$ oraz $e^{\alpha t}\sin\beta t$ są rzeczywistymi rozwiązaniami.

Podsumowanie: rozwiązania (R) mogą być postaci (wielomian zmiennej t) $\times$ (f. wykładnicza) albo (wielomian t) $\times$ (f. wykładnicza) $\times$ (f. trygonometryczna). Wielomian nie jest stałą gdy λ jest wielokrotnym pierwiastkiem; funkcje wykładnicze występują gdy mamy pierwiastki nierzeczywiste.

Punkty osobliwe, zachowanie się rozwiązań dla $t \to \pm\infty$

x_0 - punkt osobliwy $\dot{x} = f(x)$ jeżeli $f(x_0)=0$ wtedy $x(t) \equiv x_0$ jest (statyczny) rozwiązaniem. Interesujące jest jak zachowują się rozwiązania przechodzące blisko punktu osobliwego. x_0 może je np. przyciągać albo odpychać.

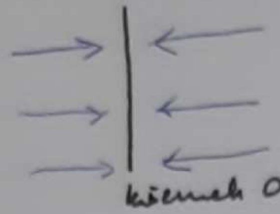
Zacznijmy od przykładów: $f(x)=Ax$, A - macierz.
W „typowym" przypadku $A \in GL(\mathbb{R}^k)$ (tj. A odwracalne) $Ax_0 = 0 \iff x_0 = 0$.
$x(t) = c\,e^{\lambda t}$ rozw. $\iff \lambda$ w. własna A, c - ~~wektor~~ w. własny A

Zachowanie $x(t)$ zależy od znaku części rzeczywistej λ: $\mathrm{Re}\,\lambda \begin{matrix} >0 \\ =0 \\ <0 \end{matrix}$.

Wygodnie jest analizować punkty osobliwe równań liniowych na płaszczyźnie: $k=2$.

Przypadki

0) $\det A = 0$ $\quad A a_1 = 0$ $\quad a_1$ - wektor własny
i istnieje a_2 taki, że $A a_2 = \gamma a_1$
Jeżeli $\gamma \neq 0$ (tu. $\gamma < 0$) to przebieg trajektorii wygląda tak

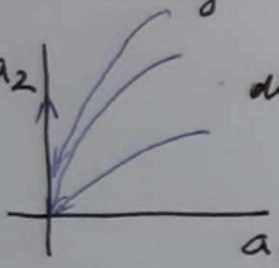


→ wskazuje kierunek czasu na trajektorii

i) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ wartości własne i istnieją dwa wektory własne a_1, a_2
Zamieńmy współrzędne tak aby $\{a_1, a_2\}$ stało się bazą $\mathbb{R}^2$: $x = \xi a_1 + \eta a_2$, $\; ' = \frac{d}{dt}$

$$\begin{cases} \xi' = \lambda_1 \xi \\ \eta' = \lambda_2 \eta \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} \xi = \xi_0 e^{\lambda_1 t} \\ \eta = \eta_0 e^{\lambda_2 t} \end{matrix} \rightarrow \eta = \eta_0 \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^{\lambda_2/\lambda_1}$$

Jest to równanie krzywej typu paraboli (λ_1, λ_2 tego samego znaku) lub hiperboli ($\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$)

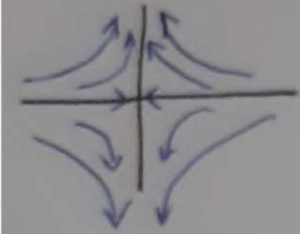


dla $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ (uwaga: układ współrzędnych nie musi być ortogonalny)

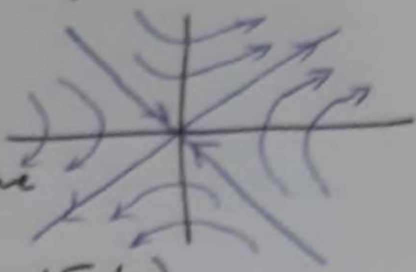
Taki punkt nazywamy węzłem. Na rysunku jest to węzeł stabilny, tzn. dla $t \to +\infty$ trajektorie zbliżają się do punktu osobliwego $(0,0)$, tzn. $x_0 = 0 \in \mathbb{R}^2$.

dla $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ mamy węzeł niestabilny: dla $t \to +\infty$ trajektorie „uciekają" od 0 (ale dla $t \to -\infty$ dążą do 0).

Dla $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ mamy



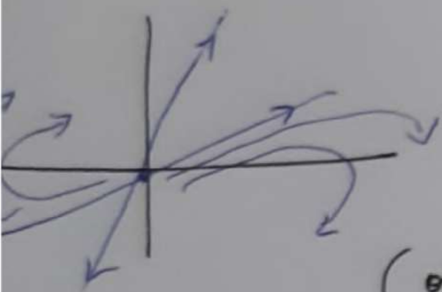
albo
(nowe współrzędne powstają przez obrót starego układu)



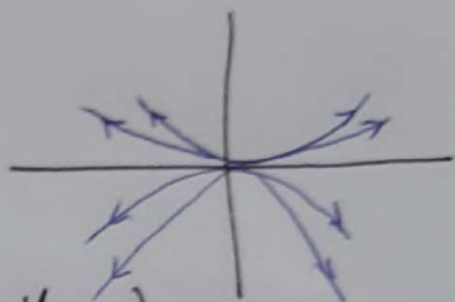
,

czyli siodło. Siodło jest niestabilne: oprócz 3 trajektorii: 0 : dwie półproste wchodzące do 0, inne trajektorie spełniają $|x(t)| \longrightarrow \infty$ dla $t \to +\infty$ (i dla $t \to -\infty$ też).

Trajektorie dla węzła mogą wyglądać tak:



albo tak:



(obydwa przypadki niestabilne).

ii) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ pierwiastki zespolone (więc sprzężone)

$$\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \mu + i\sigma \qquad \mu, \sigma \in \mathbb{R}$$

W bazie $\{a_1, a_2\}$ A ma postać rzeczywistą

$$A = \begin{pmatrix} \mu & -\sigma \\ \sigma & \mu \end{pmatrix}.$$ Wprowadzamy $z = \xi + i\eta \in \mathbb{C}$

$$z' = (\mu - i\sigma) z$$ ponieważ

$$\xi' a_1 + \eta' a_2 = A(\xi a_1 + \eta a_2)$$ czyli

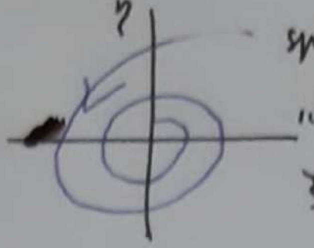
$$\xi' = \mu\xi + \sigma\eta, \quad \eta' = \mu\eta - \sigma\xi$$

ładnie to wygląda w postaci biegunowej

$$z = z_0 e^{(\mu - i\sigma)t} \quad \text{dla } z_0 = \rho e^{i\alpha} \text{ warunku pocz.}$$

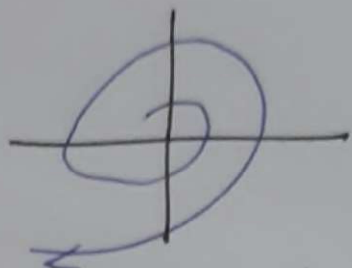
czyli $z(t) = \rho e^{\mu t} e^{i(\alpha - \sigma t)}$

dla $\mu < 0$, $\sigma < 0$



spirale logarytmiczne „skręcające" się dla $t \to +\infty$

dla $\mu > 0$ $\sigma > 0$



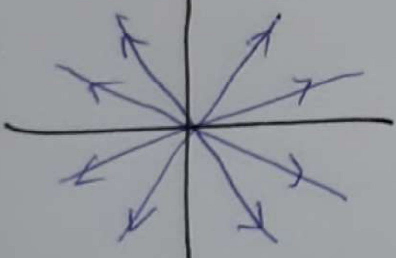
Takie punkty osobliwe to ogniska ("focus")

dla $\mu = 0$ mamy centrum

iii) $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$

istnieją dwa wektory własne

a_1, a_2



tu $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$

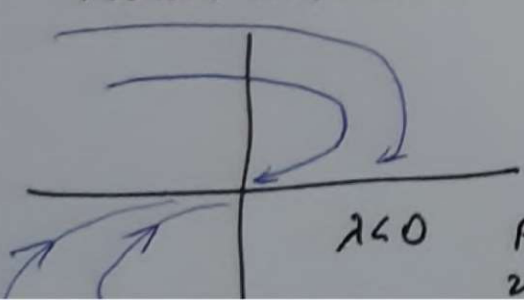
To też jest węzeł.

iv) $\lambda_1 = \lambda_2$ ale jest tylko jeden wektor własny,

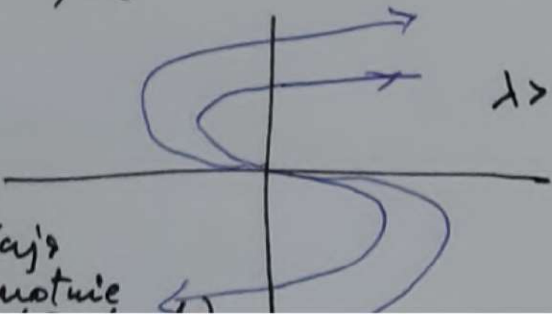
czyli A jest nietrywialną klatką Jordana.

$Aa_1 = \lambda a_1$, $Aa_2 = \lambda a_2 + a_1$ dla pewnych a_1, a_2.

Można nietrudno sprawdzić, że



albo



$\lambda > 0$

$\lambda < 0$

Rozw. zmieniają znak jednokrotnie