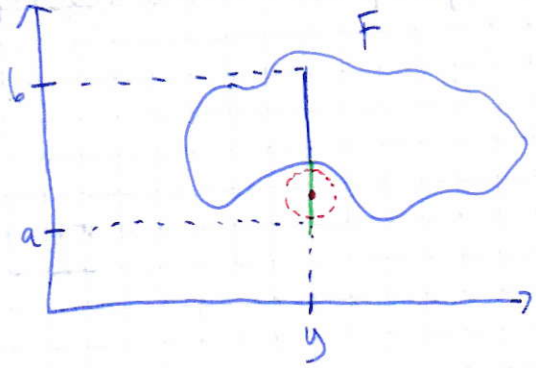
Lista 4

Zad. 4.

$F \subseteq \mathbb{R}^2$ - domk., brzegowy $\Longrightarrow$ Ist. $A, B \subseteq \mathbb{R}$ gęste t. że $(A \times B) \cap F = \emptyset$.

d-d: Weźmy $a, b \in \mathbb{Q}$ $(a<b)$ i zdefiniujmy $K(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : \{x\} \times [a,b] \subseteq F\}$. Pokażemy, że $K(a,b)$ domknięty i brzegowy.



~~Ustalm~~ domkniętości:

Ustalmy $y \in \mathbb{R} \setminus K(a,b)$. Wtedy $\{y\} \times [a,b] \not\subseteq F$.

Weźmy $(y,z) \in (\{y\} \times [a,b]) \setminus F$.

$(y,z) \in \mathbb{R}^2 \setminus F$, który jest otwarty, bo F domknięty. Zatem ist. $r>0$ t. że $B((y,z), r) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus F$. Wtedy

$(y-r, y+r) \cap K(a,b) = \emptyset$, więc $\overline{K(a,b)} = K(a,b)$.

—

brzegowość:

Zał. nie wprost, że $\operatorname{Int} K(a,b) \neq \emptyset$. Wtedy ist. $B(x,r) \subseteq K(a,b)$, czyli dla dow. $y \in (x-r, x+r)$ mamy $\{y\} \times [a,b] \subseteq F$, więc $(x-r, x+r) \times (a,b) \subseteq F$. Wtedy $\operatorname{Int} F \neq \emptyset$. ↯

—

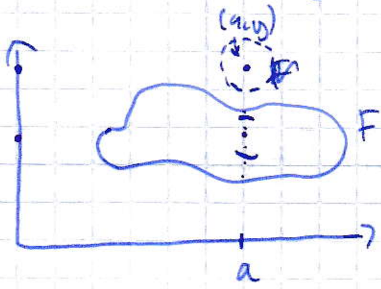
Z tw. Baire'a $\bigcup_{a,b \in \mathbb{Q}} K(a,b)$ jest brzegowa. (Jako przeliczalna suma domknię- tych zb. brzegowych).

bo $\mathbb{R}^2$ ośrodkowa

Zatem $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{a,b \in \mathbb{Q}} K(a,b)$ gęsta, więc weźmy przeliczalny zb. gęsty A t. że

$A \cap \bigcup_{a,b \in \mathbb{Q}} K(a,b) = \emptyset$.

Dla $a \in A$ zb. $\{y \in \mathbb{R} : (a,y) \in F\}$ jest domknięty i brzegowy.



d-d analogiczny.

Zatem z tw. Baire'a $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{a \in A} \{y \in \mathbb{R} : (a,y) \in F\}$ gęsty, więc weźmy gęsty B t. że $B \cap \bigcup_{a \in A} \{y \in \mathbb{R} : (a,y) \in F\} = \emptyset$.

Wtedy $A_{\ast} \times B$ gęsty i $(A \times B) \cap F = \emptyset$.

$\square$