Przykłady

Uwaga

Jeżeli $f: X \to Y$ jest homeomorfizmem oraz $x \in X$, to $f: X \setminus \{x\} \to Y \setminus \{f(x)\}$ jest również homeomorfizmem.

$X = S^1$ $\qquad Y = [0,1]$

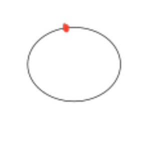
Nie wprost istnieje $f: S^1 \to [0,1]$, homeomorfizm.

$\frac{1}{3} = a$ $\qquad$ nie jest przestrzeń spójną $[0, \frac{1}{3}) \cup (\frac{1}{3}, 1]$

Niech $b = f^{-1}(\frac{1}{3})$

Z uwagi powyżej, $f: \underbrace{S^1 \setminus \{b\}} \to [0,1] \setminus \{a\}$ jest homeomorfizmem

homeo z odcinkiem bez końców przestrzeń spójna



Przykład 2

$\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^2$

Nie wprost $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ homeomorfizm

Wówczas $f: \underbrace{\mathbb{R} \setminus \{0\}}_{\text{nie jest spójne}} \to \underbrace{\mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\}}_{\text{jest spójna}}$ homeomorfizm

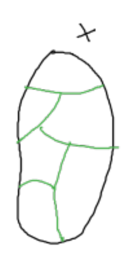
<u>Def</u> Składowa spójności $(X, \mathcal{T})$ to jest maksymalny (ze względu na inkluzję) podzbiór spójny w X.

$S^{\subseteq X}$ - składowa spójności
- S - spójny
- $\forall_{X \supseteq T \supseteq S}$, jeśli T - spójny to $S = T$

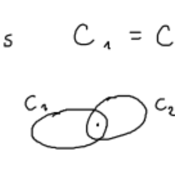
Przykład
- $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ma dwie składowe spójności: $\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ i $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$
- $\mathbb{Q}$ składowe spójności to są $\{p\}$, $p \in \mathbb{Q}$

Stwierdzenie / Uwaga $\qquad (X, \mathcal{T})$ - pr. top.

1. C_1, C_2 - składowe spójności
Wówczas $C_1 = C_2$ lub $C_1 \cap C_2 = \emptyset$



⌜ Dowód



Jeśli $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ to $C_1 \cup C_2$ - spójny
Zatem $C_1 = C_1 \cup C_2 = C_2$ ⌟

2. $X = \bigcup \{C : C$ - składowa spójności$\}$

⌜ $x \in X$
Rozważmy $\mathcal{A}_x = \{C : C \ni x,\ C$ - spójny$\}$
$\bigcup \mathcal{A}_x$ składowa spójności do której należy x ⌟

3. Składowe spójności są domknięte

⌜
C - skł. spójn.
$C \subseteq \overline{C}$ (spójny) zatem z maksymalności C, $C = \overline{C}$ ⌟

<u>Def</u> $(X, \mathcal{T})$ jest łukowo spójna jeśli $\forall x, y \in X$ istnieje $w: [0,1] \to X$, $w(0) = x$, $w(1) = y$, ciągłe (nazywane drogą).

Łukowa spójność $\to$ spójność

$\not\leftarrow$

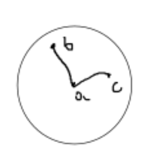
$\{(t, \sin(\frac{1}{t})) : t \in (0,1]\} \cup \{0\} \times [-1,1]$

Twierdzenie

Spójny, otwarty zbiór w $(\mathbb{R}^n, d_e)$ jest łukowo spójny.

D-d

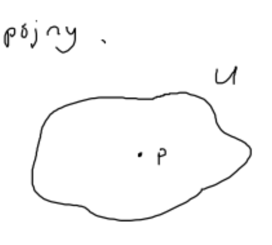
$B(a,r) \subseteq \mathbb{R}^n$



Droga łącząca a i b:
$f: [0,1] \to \mathbb{R}^n$
$f(t) = (1-t)a + tb$
$f[0,1] \subseteq B(a,r)$

Niech $U \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie otwarty i spójny.

Ustalmy $p \in U$.

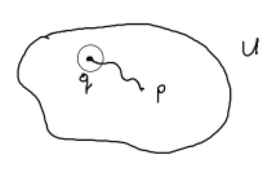


$W = \{q \in U :$ istnieje droga łącząca p i $q\}$

Cel: • W otwarty
•• W domknięty

Ze spójności U to nam da $W = U$.

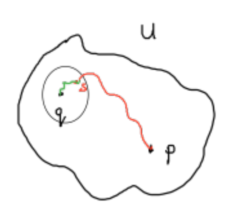
•



$q \in W$
Weźmy dowolną kulę $q \in B(q, r) \subseteq U$

Ze wcześniejszej uwagi, q można połączyć z każdym punktem w $B(q,r)$. To oznacza, $B(q,r) \subseteq W$.

••



$q \notin W$ $\quad q \in U$

Weźmy dowolną kulę $q \in B(q,r) \subseteq U$

Gdyby był $s \in B(q,r)$, $s \in W$
To by dało drogę z p do q (przechodzącą przez s). Czyli $q \in W$ ↯

$U \setminus W$ otwarty

Zatem $B(q,r) \cap W = \emptyset$.

∎

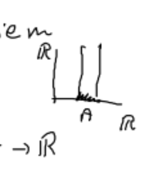
<u>Twierdzenie</u>

Niech $p: (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ będzie odwzorowaniem ilorazowym, tzn. p jest "na"

$\mathcal{T}_Y = \{A \subseteq Y : p^{-1}(A) \in \mathcal{T}_X\}$

(W szczególności p jest ciągła)

<u>P-d</u>
$p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$p(a,b) = a$
jest ilorazowe



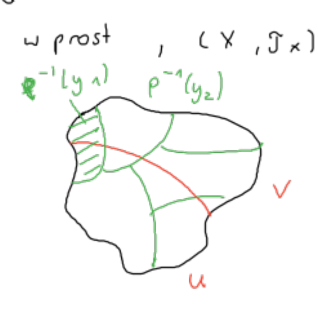
Załóżmy, że $(Y, \mathcal{T}_Y)$ jest spójne

$\forall y \in Y$ $\underline{f^{-1}(y)} \subseteq X$ jest spójny.

Wówczas X - spójny.

D-d

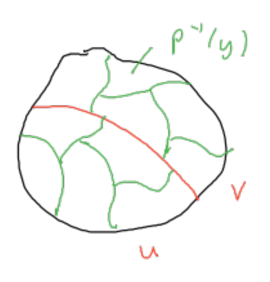
Nie wprost, $(X, \mathcal{T}_X)$ nie jest spójny



U, V - otwarto domknięte

$X =$ rozłączne sumy $p^{-1}(y)$, $y \in Y$

- $\forall y \in Y$ $p^{-1}(y) \cap U = \emptyset$ lub $p^{-1}(y) \cap V = \emptyset$ ze spójności $p^{-1}(y)$



$\forall y \in Y$ $p^{-1}(y) \subseteq U$ lub $p^{-1}(y) \subseteq V$

Niech $U_0 = \{y \in Y : p^{-1}(y) \subseteq U\}$
$V_0 = \{y \in Y : p^{-1}(y) \subseteq V\}$

U_0, V_0 są rozłączne niepuste (jeśli $U, V \neq \emptyset$) otwarto-domknięte

To daje sprzeczność ze spójnością Y.

$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$
$\subseteq M(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$

det - funkcja ciągła

$\det: M(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$GL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ otwarty w $\mathbb{R}^{n^2}$

otwarte

$GL(n, \mathbb{R}) = GL^+(n, \mathbb{R}) \,\dot{\cup}\, GL^-(n, \mathbb{R})$

$GL^+(n,\mathbb{R})$: $\det > 0$, $= \det^{-1}(0, \infty)$

$GL^-(n,\mathbb{R})$: $\det < 0$, $= \det^{-1}(-\infty, 0)$

Twierdzenie

$GL^+(n, \mathbb{R})$ (oraz $GL^-(n, \mathbb{R})$) jest spójny. Równoważnie, ponieważ $GL^+(n,\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$ jest otwarty, $GL^+(n, \mathbb{R})$ jest łukowo spójny.

Dygresja

$G = GL(n, \mathbb{R})$ jest przykładem grupy topologicznej, tzn.
- G - jest przestrzenią topologiczną
- G - jest grupą (możemy mnożyć i odwracać macierze)
- $G \times G \to G$ $\quad (M, N) \mapsto MN$
$G \to G$ $\quad M \mapsto M^{-1}$
są to przekształcenia ciągłe

D-d twierdzenia

Indukcja względem wymiaru macierzy

$n = 1$

$GL^+(1, \mathbb{R}) = \{t \in \mathbb{R} : t > 0\}$ spójny

Załóżmy, że dla $k < n$, $GL^+(k, \mathbb{R})$ jest spójne.

Rozważmy rzutowanie $\qquad n > 1$

$p: GL^+(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$\mathbb{R}^{n^2} \cong$ macierz $\to$ ostatnia kolumna

(p jest obcięciem do $GL^+(n,\mathbb{R})$ rzutowania z $\mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^n$) odwzorowanie otwarte

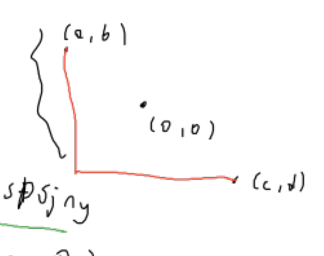
Zatem p też jest otwarte

Zauważmy, że

$p(A) = Ae_n$ $\qquad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

• $p: GL^+(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$(n \geq 2)$ • $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ łukowo spójne $\equiv$ spójne



⊙ Pokażemy, że $\forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ $p^{-1}(y)$ jest spójny

Poprzednie tw. da nam spójność $GL^+(n, \mathbb{R})$

• 1) $\forall v, w \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ $p^{-1}(w)$ i $p^{-1}(v)$ są homeomorficzne

Istnieje $C \in GL^+(n, \mathbb{R})$ $\quad C(v) = w$

Wówczas

$p^{-1}(v) \to p^{-1}(w)$
$A \longmapsto CA$ jest homeomorfizmem

$\to$ Jeśli $A \in p^{-1}(v)$ to $Ae_n = v$
Wtedy $CA(e_n) = C(Ae_n) = Cv = w$

$\to$ $A \mapsto CA$ jest funkcją ciągłą, 1-1
jej odwrotność to $\underset{p^{-1}(w)}{B} \longmapsto C^{-1}B$ jest ciągła 1-1

2) Zatem rozważmy $p^{-1}(e_n)$, $e_n \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Pokażemy, że $p^{-1}(e_n)$ spójny

$p^{-1}(e_n) =$ macierze postaci $M_c = \left(\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline c & 1 \end{array}\right)$ $\qquad M \in GL^+(n-1, \mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}^{n-1}$

Rozważmy macierz t. że $c = 0$, tzn. M_0.

Zauważmy, że istnieje droga z M_c do M_0 $\subseteq GL^+(n, \mathbb{R})$

$w(t) = \left(\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline t \cdot c & 1 \end{array}\right)$ $\qquad w(0) = M_0$, $w(1) = M_c$

Założenie indukcyjne: $GL^+(n-1, \mathbb{R})$ - łukowo spójne

$\cong$ top

$\left(\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$

Łączymy drogę z M_c

To daje, że $p^{-1}(e_n)$ jest łukowo spójne, zatem spójne.

∎