

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (M)

Blok 3: lista M10

19 grudnia 2019 r.

M10.1. 1 punkt Udowodnić, że wielomiany Czebyszewa spełniają tożsamość

$$\int_{-1}^1 T_n(x) dx = \begin{cases} 0, & n \text{ nieparzyste,} \\ \frac{2}{1-n^2}, & n \text{ parzyste.} \end{cases}$$

M10.2. 1,5 punktu Obliczamy wartość całki $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ stosując *kwadraturę Newtona-Cotesa*, czyli kwadraturę interpolacyjną z węzłami równoodległymi $x_k := a + kh$ ($k = 0, 1, \dots, n$), gdzie $h := (b-a)/n$:

$$Q_n^{NC}(f) := \sum_{k=0}^n A_k^{(n)} f(x_k).$$

Wykazać, że

$$(1) \quad A_k^{(n)} = h(-1)^{n-k} \frac{1}{k!(n-k)!} \int_0^n \prod_{j=0, j \neq k}^n (t-j) dt \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Niech będzie $B_k^{(n)} := A_k^{(n)}/(b-a)$ ($k = 0, 1, \dots, n$). Sprawdzić, że

a) wielkości $B_k^{(n)}$ są liczbami wymiernymi;

b) $B_k^{(n)} = B_{n-k}^{(n)}$ ($k = 0, 1, \dots, n$)

M10.3. 1 punkt Niech $B_k^{(n)}$ oznaczają liczby z poprzedniego zadania. Wykazać, że

$$\sum_{k=0}^n B_k^{(n)} = 1.$$

M10.4. 2 punkty Niech $B_k^{(n)}$ oznaczają liczby z poprzedniego zadania. Sprawdzić numerycznie, czy wielkości $B_k^{(n)}$ są dodatnie. Następnie rozważyć sumy $\sigma_n := \sum_{k=0}^n |B_k^{(n)}|$ i obliczyć $\sigma_{10}, \sigma_{15}, \sigma_{20}$.

M10.5. 1 punkt Obliczyć $Q_n^{NC}(f)$ dla $n = 2, 4, 6, 8, 10$ dla całki

$$\int_{-4}^4 \frac{dx}{1+x^2} = 2 \arctan 4.$$

Który wynik jest najdokładniejszy? Jak to skomentować?

M10.6. 1,5 punktu Niech $f \in C^4[a, b]$. Obliczamy wartość całki $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ za pomocą wzoru Simpsona, czyli kwadraturę *Newtona-Cotesa* dla $n = 2$. Udowodnić, że istnieje taka liczba $\xi \in [a, b]$, dla której

$$I(f) - Q_2^{NC}(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{90} h^5 \quad (h := (b-a)/2).$$

M10.7. 2 punkty Niech $f \in C^4[a, b]$. Obliczamy wartość całki $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ za pomocą kwadratury *Newtona-Cotesa* dla $n = 3$. Udowodnić, że istnieje taka liczba $\xi \in [a, b]$, dla której

$$I(f) - Q_3^{NC}(f) = -\frac{3f^{(4)}(\xi)}{80} h^5 \quad (h := (b-a)/3).$$

Notatka: W poniższych zadaniach mowa jest o *złożonych kwadraturach Newtona-Cotesa*.

1. Dla danych punktów $t_k = a + kh$ ($h = (b - a)/n$), **złożonym wzorem trapezów** nazywamy kwadraturę, która oblicza całkę $\int_a^b f(x) dx$ za pomocą wzoru

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x) dx,$$

w którym każdą całkę $\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x) dx$ obliczamy za pomocą wzoru trapezów.

2. Dla danych punktów $t_k = a + kh$ ($h = (b - a)/n$, $n = 2m$), **złożonym wzorem Simpsona** nazywamy kwadraturę, która oblicza całkę $\int_a^b f(x) dx$ za pomocą wzoru

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{t_{2k}}^{t_{2k+2}} f(x) dx,$$

w którym każdą całkę $\int_{t_{2k}}^{t_{2k+2}} f(x) dx$ obliczamy za pomocą wzoru Simpsona (w punktach $t_{2k}, t_{2k+1}, t_{2k+2}$).

M10.8. 0 punktów Podać współczynniki złożonego wzoru trapezów oraz złożonego wzoru Simpsona.

M10.9. 1 punkt Wykazać, że dla dowolnej funkcji f ciągłej w przedziale $[a, b]$ ciąg złożonych wzorów trapezów $\{T_n(f)\}$ jest zbieżny do wartości całki $\int_a^b f(x) dx$, gdy $n \rightarrow \infty$.

M10.10. 1 punkt Sprawdzić, że

$$S_n(f) = \frac{1}{3}[4T_n(f) - T_{n/2}(f)] \quad (n = 2, 4, \dots),$$

gdzie $S_n(f)$ jest złożonym wzorem Simpsona, a $T_n(f)$ – złożonym wzorem trapezów.

12 grudnia 2019
Rafał Nowak