RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE, II ROK MATEMATYKI

LISTA 6

Zadanie 1. Pokazać, że rozwiązanie zagadnienia początkowo-brzegowego dla równania ciepła $u_t = u_{xx}$ w $(0,1)\times(0,T)$, $u(x,0) = g(x)$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$, otrzymane przez zastosowanie metody Fouriera w postaci

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\pi x)\exp(-k^2\pi^2 t),$$

gdzie $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\pi x)$, jest gładkie wewnątrz prostokąta $(0,1) \times (0,T)$ jeżeli (np.) $g \in C^1(0,1)$, oraz $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 1} g(x) = 0$ i istnieją pochodne jednostronne $g'(0), g'(1)$. Zbadać co się dzieje w przypadku gdy $g(x) = 0$ dla $0 < x < a$ i $b < x < 1$, $g(x) = 1$ dla $a \le x \le b$ $(0 < a < b < 1)$.

Zadanie 2. Udowodnić, że jeżeli g jest ograniczoną funkcją ciągłą na $\mathbb{R}^n$, $f, \nabla f$ są ograniczone i ciągłe na $\mathbb{R}^n \times (0,T)$, to (jedyne ograniczone) rozwiązanie niejednorodnego równania ciepła $u_t = \Delta u + f(x,t)$ z warunkiem $u(x,0) = g(x)$ jest rozwiązaniem klasycznym: $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,T))$ i zachodzi wzór Poissona

$$u(x,t) = \int_0^t \int (4\pi(t-s))^{-n/2} \exp\left(\frac{-|x-y|^2}{4(t-s)}\right) f(y,s)\, dy\, ds + (4\pi t)^{-n/2} \int \exp\left(\frac{-|x-y|^2}{4t}\right) g(y)\, dy.$$

Zadanie 3. Rozwiązać następujące zagadnienie brzegowo-początkowe
$u_t + u = u_{xx}$, $0 < x < L$, $u(0,t) = u(L,t) = 0$, $u(x,0) = 1$.

Zadanie 4. Znaleźć rozwiązanie stacjonarne $U = U(x)$ równania $u_t = u_{xx} + 1$ z warunkami brzegowymi $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 1$. Zbadać, czy $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = U(x)$.

Zadanie 5.** Załóżmy, że $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ spełnia warunek

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{|x|\le R} g(x)\, dx = a.$$

Udowodnić, że rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego $u_t = \Delta u$, $u(x,0) = g(x)$, stabilizuje się do a gdy $t \to +\infty$, tzn. $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = a$ niemal jednostajnie ze względu na x.

Zadanie 6.** Podać przykład funkcji $u : \mathbb{R} \times [0,T] \to \mathbb{R}$, $u \not\equiv 0$, takiej, że $u_t = u_{xx}$, $u(x,0) = 0$.
Wsk. Istnieje $0 \not\equiv f \in C^\infty(\mathbb{R})$ o nośniku w $[0,1]$ taka, że $f^{(m)}(0) = 0$ oraz $|f^{(m)}(s)| \le C^m m^{m(1+\varepsilon)}$ dla $m \in \mathbb{N}$, pewnej stałej C i pewnego $\varepsilon > 0$ (w istocie $\forall \varepsilon > 0 \ \exists C > 0$). Następnie przyjąć

$$u(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(t) x^{2m}}{(2m)!}.$$

Literatura: W. Rudin, *Analiza rzeczywista i zespolona*, rozdział 19, o funkcjach quasianalitycznych.

Zadanie 7. Pokazać, że zagadnienie Cauchy'ego dla nieliniowego równania Burgersa

$$u_t = u_{xx} - u u_x, \quad u(x,0) = f(x),$$

przy pomocy zamiany zmiennych $u = -2v_x/v$ sprowadza się do zagadnienia Cauchy'ego dla równania ciepła $v_t = v_{xx}$ z warunkiem początkowym $v(x,0) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^x f(s)\,ds\right)$.

15 maja 2020

Piotr Biler