Algebra liniowa 1R, Lista 5

"Symetria", o ile nie jest powiedziane inaczej, oznacza symetrię osiową względem prostej przechodzącej przez 0.

1. Uzasadnij, że jeśli λ jest rzeczywistą wartością własną pewnej izometrii liniowej, to $\lambda = \pm 1$.
2. Obrazem wektora $\binom{2}{1}$ przez izometrię liniową F jest wektor $\binom{1}{3}$.
   Wyjaśnij, dlaczego powyższe zdanie jest fałszywe.
3. Czy istnieje liniowa izometria F, taka że $F\binom{1}{1} = \binom{1}{-1}$, $F\binom{1}{-1} = \binom{-1}{1}$?
4. Liniowa izometria F przekształca wektor $\binom{1}{0}$ na wektor $\binom{-1/2}{\sqrt{3}/2}$ i zmienia orientację. Znajdź $F\binom{0}{1}$.
5. Sprawdź, czy macierz jest macierzą izometrii. Jeśli tak, stwierdź czy jest to macierz obrotu czy symetrii. O jaki kąt / względem której prostej? (Wsk: jeśli A jest macierzą symetrii, to równanie $AX = X$ określa oś tej symetrii.) (a) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$, (d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

---

6. Uzupełnij (na wszystkie możliwe sposoby) do macierzy izometrii: $\begin{pmatrix} * & 3 \\ * & * \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} * & * \\ * & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} * & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ * & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.
   Które z otrzymanych izometrii zachowują orientację?
7. Ile jest liniowych izometrii $\mathbf{R}^2$ o śladzie $\sqrt{3}$? Znajdź je wszystkie; wypisz ich macierze.
8. Złożenie $S_\ell \circ S_k$ jest obrotem ($\ell = \{t\binom{1}{1} : t \in \mathbf{R}\}$; $k = \{t\binom{0}{2} : t \in \mathbf{R}\}$). Znajdź jego macierz i stwierdź, o jaki kąt jest to obrót.
9. Przedstaw w postaci $T_U \circ F$ (a) symetrię względem prostej $x = 1$; (b) obrót (w kierunku przeciwzegarowym) o kąt $\pi/2$ wokół punktu $\binom{0}{1}$.
10. Czy zachowuje orientację przekształcenie o macierzy $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{2003}$?
11. Uzasadnij, że złożenie piętnastu symetrii nie jest obrotem.
12. Niech F będzie izometrią liniową. Uzasadnij, że F jest odwracalne i F^{-1} też jest izometrią.
13. Znajdź macierz symetrii względem prostej $y = ax$.
14. Znajdź wszystkie izometrie liniowe przeprowadzające oś OX w siebie.
15. Wyrachuj na macierzach: (a) że $R_\theta \circ S_\ell$ jest symetrią. (b) czym jest $S_\ell \circ R_\theta$. (c) czym jest $S_\ell \circ S_k$.
16. Każda izometria płaszczyzny jest postaci $T_U \circ A$, gdzie A jest izometrią liniową. Zapisz w tej postaci izometrię $(T_X \circ B) \circ (T_Y \circ C)$ (gdzie B, C są izometriami liniowymi).
17. Załóżmy, że A, B, C, D są liniowymi przekształceniami płaszczyzny, przy czym wiadomo, że A i C są obrotami, $\det(D) < 0$, $\det(A \circ B \circ C \circ D) > 0$ zaś B jest izometrią. Znajdź wartości własne B.

---

18. Napisz macierz izometrii F, takiej że kąt między $F\binom{2}{3}$ a $\binom{7}{-2}$ jest większy od 22°, ale mniejszy od 23°.
19. Znajdź wszystkie izometrie liniowe (tzn. ich macierze) takie że obrazem prostej $3x - 2y = 0$ jest prosta $2x + 5y = 0$.
20. Wykaż, że każda izometria płaszczyzny jest złożeniem co najwyżej trzech symetrii osiowych (względem osi niekoniecznie przechodzących przez 0).
21. Dowiedz się, co to jest symetria z poślizgiem i wykaż, że każda izometria płaszczyzny jest obrotem lub symetrią z poślizgiem.
22. Udowodnij, że dowolne dwa obroty F, G płaszczyzny (niekoniecznie wokół zera, niekoniecznie wokół tego samego punktu) spełniają równanie

$$F \circ G \circ F^{-1} \circ G^{-1} \circ F \circ G^{-1} \circ F^{-1} \circ G \circ G \circ F \circ G^{-1} \circ F^{-1} \circ G^{-1} \circ F \circ G \circ F^{-1} = Id.$$

Czy potrafisz napisać nietrywialne równanie spełniane przez dwie dowolne izometrie płaszczyzny?