A. Kwiatkowska	TOPOLOGIA	LISTA 4	18.04.2020

(1) Niech $f\colon X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną na przestrzeni topologicznej $(X,\mathcal{T})$. Wykazać, że zbiór

$$E(f) = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R}\colon f(x) \le t\}$$

jest domknięty w iloczynie kartezjańskim $(X,\mathcal{T})$ i prostej euklidesowej wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f jest półciągła z dołu.

(2) Które z następujących podzbiorów przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^2$ są zwarte:
 (a) $A = \{(x, \frac{1}{x})\colon x > 0\}$;
 (b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^3 \le 2020\}$;
 (c) $C = \{(1-1/n, 1/n) \in \mathbb{R}^2 : n = 1,2,\ldots\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$.

(3) Niech $O(a,b)$ będzie okręgiem na płaszczyźnie, którego średnicą jest odcinek o końcach $a,b \in \mathbb{R}\times\{0\}$. Dla $A \subseteq \mathbb{R}\times\{0\}$ przyjmijmy $O(A) = A \cup \bigcup\{O(a,b)\colon a,b \in A, a \ne b\}$. Wykazać, że $O(A)$ jest zbiorem zwartym na płaszczyźnie euklidesowej wtedy i tylko wtedy, gdy A jest zbiorem zwartym.

(4) Udowodnić, że jeżeli A jest domkniętym, a B zwartym podzbiorem przestrzeni metrycznej (X,ρ) i $A \cap B = \emptyset$, to istnieje $\varepsilon > 0$, takie że $\rho(a,b) \ge \varepsilon$ dla dowolnych $a \in A, b \in B$.

(5) Podać przykłady zbiorów w przestrzeniach topologicznych, które są domknięte i ograniczone, ale nie są zwarte.

(6) Udowodnić, że jeżeli (X,ρ) jest przestrzenią metryczną zwartą, to każda ciągła funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ jest ciągła jednostajnie, to znaczy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$, taka że $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ dla dowolnych $x, x' \in X$ spełniających warunek $\rho(x,x') < \delta$.
 Wskazówka. Dowód wprost: zastosować pokryciową definicję zwartości.
 Dowód nie wprost: zdefiniować dwa ciągi i skorzystać z ciągowej charakteryzacji zwartości.

(7) Udowodnić, że jeśli przestrzeń K jest zwarta, to rzut $\pi_1 : X \times K \to X$ jest odwzorowaniem domkniętym dla dowolnej przestrzeni topologicznej X.
 Wskazówka: Rozważyć domknięty $F \subseteq X \times K$ i $x_0 \notin \pi_1[F]$. Wtedy zbiór $\{(x_0,y)\colon y \in K\}$ jest zwarty i rozłączny z F.

(8) Niech $f : X \to Y$ będzie taką funkcję, że jej wykres jest domkniętym podzbiorem $X \times Y$. Udowodnić, że jeżeli przestrzeń Y jest zwarta to f jest funkcją ciągłą.
 Wskazówka: Poprzednie zadanie.

(9) Niech $(X,\mathcal{T})$ będzie przestrzenią Hausdorffa, a A i B jej zwartymi podzbiorami rozłącznymi. Wykazać, że istnieją rozłączne zbiory V i W otwarte w X takie, że $A \subseteq V$ i $B \subseteq W$.
 Wskazówka. Dla jednopunktowego B zobacz dowód 2.1.13 w skrypcie.

(10) Niech (X,d) będzie przestrzenią zwartą metryczną. Niech $K(X)$ będzie rodziną wszystkich niepustych zbiorów domkniętych w X. Odległość między $A,B \in K(X)$ określamy formułą

$$d_H(A,B) = \max\{\sup\{d(x,A)\colon x \in B\}, \sup\{d(x,B)\colon x \in A\}\}.$$

Sprawdzić, że d_H jest metryką na $K(X)$ (nazywamy ją metryką Hausdorffa).

WSKAZÓWKA: Zauważyć, że $d_H(A,B) = \sup_{x \in A \cup B} |d(x,A) - d(x,B)|$, a następnie pokazać, że $d_H(A,B) = \sup_{x \in X} |d(x,A) - d(x,B)|$.

(11) Niech (X,d) będzie przestrzenią zwartą metryczną. Pokazać, że przestrzeń $(K(X), d_H)$ jest całkowicie ograniczona, tzn. dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje pokrycie $K(X)$ skończenie wieloma kulami o promieniu ϵ.

WSKAZÓWKA: Rozważyć skończone pokrycie $B(s_1,\epsilon), \ldots, B(s_k,\epsilon)$ przestrzeni X. Następnie rozważyć kule w $K(X)$ o środkach $S \subseteq \{s_1, \ldots, s_k\}$ i promieniu ϵ.

Wywnioskować, że dla dowolnego ciągu elementów z $K(X)$ można wybrać podciąg Cauchy'ego. Przypomnijmy, że (A_n) jest ciągiem Cauchy'ego jeśli

$$\forall_{\epsilon>0} \exists_N \forall_{m,n>N} d_H(A_m, A_n) < \epsilon.$$

(12) Niech (X,d) będzie przestrzenią zwartą metryczną. Pokazać, że przestrzeń $(K(X), d_H)$ jest zwarta.

WSKAZÓWKA: Najpierw pokazać, że dla ciągu zstępującego (A_n) mamy

$$\lim_n A_n = \bigcap_n A_n.$$

Następnie pokazać, że dla ciągu Cauchy'ego (B_n) mamy

$$\lim_n B_n = \bigcap_n \overline{\bigcup_{k \geq n} B_k}.$$

(13) **Twierdzenie Marczewskiego:** Przestrzeń $[0,1]^T$ jest ośrodkowa dla T mocy $\leq \mathfrak{c}$.

WSKAZÓWKA: Można założyć, że $T \subseteq [0,1]$. Zdefiniować przeliczalny zbiór gęsty w $[0,1]^T$, używając $\mathbb{Q}$ i przedziałów o końcach wymiernych.