*RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE, II ROK MATEMATYKI*

**LISTA 2**

**Zadanie 1.** Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $\dot{x} = Ax$ dla

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

**Zadanie 2.** Znaleźć rozwiązania ogólne równań

$$y'' + y' - 2y = 0, \quad y^{(4)} + 4y = 0, \quad y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y^{(3)} = 0,$$

$$y'' + y = 4\sin x, \quad y'' - 2y' + y = 6e^x x, \quad y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x.$$

**Zadanie 3.** Znaleźć rozwiązania szczególne równań

$$y'' - 2y' + 2y = e^x + x\cos x, \quad y'' - y = 4 \operatorname{sh} x,$$

nie korzystając z metody uzmienniania parametrów.

**Zadanie 4.** Scałkować równania używając metody uzmienniania parametrów

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}, \quad y'' + 4y = 2 \operatorname{tg} x.$$

**Zadanie 5.** Rozwiązać zagadnienia początkowe

$$y'' - 2y' + y = 0, \quad y(2) = 1,\ y'(2) = -2,$$

$$y^{(3)} - y' = 0, \quad y(0) = 3,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 1,$$

$$y^{(3)} - 3y' - 2y = 9e^{2x}, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = -3,\ y''(0) = 3.$$

**Zadanie 6.** Znaleźć postać ogólną rozwiązania równania $y'' + y = f(t)$. Znaleźć warunki jakie powinna spełniać funkcja $f$ na to, aby wszystkie rozwiązania tego równania były ograniczone dla $t \to +\infty$.

**Zadanie 7.** $W$ jest podprzestrzenią niezmienniczą operatora liniowego $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Pokazać, że jeżeli $x_0 \in W$, to rozwiązanie $x(t)$ zagadnienia $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$ spełnia warunek: dla każdego $t \in \mathbb{R}$ $x(t) \in W$.

**Zadanie 8.** Załóżmy, że przynajmniej jedna wartość własna operatora liniowego $A$ na $\mathbb{R}^n$ ma ściśle dodatnią część rzeczywistą. Pokazać, że dla dowolnych $a \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ istnieje rozwiązanie równania $\dot{x} = Ax$ takie, że $\|x(0) - a\| < \varepsilon$ oraz $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = \infty$.

**Zadanie 9.** Skonstruować równanie różniczkowe liniowe jednorodne trzeciego rzędu, które spełniają funkcje $x, x^2, e^x$.

**Zadanie 10.** Znaleźć rozwiązanie ogólne równania $(1 - x^2)y'' - xy' + 9y = 0$, jeżeli wiadomo, że ma ono rozwiązanie szczególne będące wielomianem stopnia 3.
*Uwaga:* równanie Czebyszewa $(1-x^2)y''-xy'+n^2y = 0$ zawsze ma rozwiązanie szczególne będące wielomianem stopnia $n$.

**Zadanie 11.** Rozważamy równanie $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.
(i) Używając podstawienia $y(x) = z(x) \exp\left(-\frac{1}{2}\int p(s)\, ds\right)$ sprowadzić powyższe równanie do postaci $z'' + b(x)z = 0$.
(ii) Spróbować znaleźć podstawienie redukujące wyjściowe równanie do $w'' + c(x)w' = 0$.
(iii) Zakładając, że $y_1$ jest rozwiązaniem, znaleźć rozwiązanie $y_2$ (w postaci $y_2 = y_1 z$) niezależne od $y_1$.

**Zadanie 12.** Pokazać, że rozwiązanie równania $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ albo ma na każdym skończonym przedziale $[a, b]$ tylko skończenie wiele zer, albo jest tożsamościowo równe zeru. Jak uogólnić ten wynik na równania liniowe wyższego rzędu?

**Zadanie 13.** Udowodnić, że rozwiązania równania $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ z $q(x) < 0$ nie mogą mieć dodatnich maksimów (lokalnych).

**Zadanie 14.** Przeanalizować rozwiązania równania Eulera $t^2x'' + bx = 0$.

**Zadanie 15.** Wyznaczyć rozwiązania równania Airy'ego $x'' - tx = 0$ w postaci szeregów potęgowych zmiennej $t$.

**Zadanie 16.** Dla jakich wartości $k$ i $\omega$ równanie $x'' + k^2x = \sin \omega t$ ma przynajmniej jedno rozwiązanie okresowe?

**Zadanie 17.** Udowodnić, że jeżeli $|b(t)| \leq ct^{-1-a}$ dla pewnego $a > 0$ i wszystkich $t \geq 1$, to równanie $x'' + (1+b(t))x = 0$ ma dwa rozwiązania $x_1, x_2$ takie, że $x_1(t) = \cos t + \mathcal{O}(t^{-a})$, $x_2(t) = \sin t + \mathcal{O}(t^{-a})$ dla $t \to \infty$.

Wsk. przenieść wyraz $b(t)x$ na prawą stronę równania i spróbować metody uzmienniania parametru.

**Zadanie 18.** Pokazać, że jeżeli wszystkie rozwiązania $y$ i ich pochodne $y'$ równania $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ dążą do 0 gdy $t \to \infty$, to $\int^t p(s)\, ds \to +\infty$ dla $t \to +\infty$.
Wsk. zastosować wzór Liouville'a.

**Zadanie 19.** Znaleźć postać ogólną rozwiązania równania $y^{(4)} + \lambda y = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

**Zadanie 20.** Funkcje $f_1(t) = t^2$ i $f_2(t) = t|t|$ są liniowo niezależne na przedziale $(-1, 1)$ oraz $W(f_1, f_2) = 0$. Jak się ma ten fakt do odpowiedniego twierdzenia o wrońskianie ?

**Zadanie 21.** Funkcja $y_1(t) = t$ jest rozwiązaniem równania $y'' + ty' - y = 0$. Znaleźć $y_2(t)$ tak aby $y_1$ i $y_2$ tworzyły układ fundamentalny rozwiązań.

13 marca 2020

*Piotr Biler*