# Równania różniczkowe 1 R

*Notatki z konsultacji*

25 marca 2020

**Do zad. 3**

Dla równań niejednorodnych, dla których funkcje po prawej stronie są określonej postaci, to możemy próbować zgadywać jakiej postaci są rozwiązania. Dla funkcji $f(x) = e^x$ możemy próbować funkcji $y = p(x)e^x$, dla $f(x) = p_1(x)\cos(x)+p_2(x)\sin(x)$ możemy próbować $y = p_3(x)\cos(x)+p_4(x)\sin(x)$. Jeżeli podstawimy funkcje tej postaci do wyjściowego równania, to $e^x$ się poskraca i dostaniemy równanie na współczynniki wielomianu. W pierwszym przypadku $f(x)$ jest sumą funkcji tej postaci, z liniowości samego równania wystarczy nam rozwiązać problem osobno dla $f(x) = x\cos(x)$ oraz dla $f(x) = e^x$, następnie dodać te rozwiązania do siebie.

Współczynniki wielomianów pojawiających się przy $e^x q(x) = e^x$ staramy się wyznaczać rekurencyjnie - równanie to pochodzi od wstawienia $y = p(x)e^x$ do wyjściowego równania. W przypadku jednego z równań na naszej liście mamy $q(x) = ap(x) + bp'(x) + cp''(x) = 1$. W tym przypadku jest to jakieś proste: $p(x) = a^{-1}$.

Rozważamy teraz nieco bardziej skomplikowany przypadek. Będziemy rozwiązywać problem postaci $y'' + ay' + by = w(x)e^x$. W takim bardziej ogólnym przypadku schemat postępowania jest bardzo podobny. Szukamy rozwiązania postaci $y(x) = p(x)e^x$. Robimy dokładnie takie same rachunki jak wcześniej, tj. wyliczamy $y'' + ay' + by$. Po przegrupowaniu składników względem stopnia pochodnej $p(x)$ otrzymujemy problem postaci

$$e^x(c_3p''(x) + c_2p'(x) + c_1p(x)) = w(x)e^x$$

Chcemy zatem rozwiązać równość

$$c_1p(x) + c_2p'(x) + c_3p''(x) = w(x)$$

gdzie znane są nam $w(x), c_1, c_2, c_3$, a szukany jest wielomian $p(x)$. Łatwo zauważyć, że stopnie wielomianów $p(x)$ oraz $w(x)$ musza być tego samego stopnia. Oznaczmy więc $p(x) = \sum_k^n p_kx^k$, podobnie $w(x) = \sum_k^n w_kx^k$.

Mamy $p'(x) = \sum_k^n kp_kx^k$, $p''(x) = \sum_k^n k(k-1)x^k$. Wstawiamy te wielomiany do naszego zagadnienia i chcemy porównać wielomiany wyraz po wyrazie. Otrzymujemy więc:

$$c_1\sum_{k=0}^n p_kx^k + c_2\sum_{k=0}^n kp_kx^{k-1} + c_3\sum_{k=0}^n k(k-1)p_kx^{k-2} = \sum_{k=0}^n w_kx^k$$

Staramy się wywnioskować rekurencyjnie jakieś wzorki. Widzimy np., że $p_k = w_k/c_1$.

**Twierdzenie** $\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = w(x)e^x$ ma rozwiązanie $y = p(x)e^x$, gdzie $p(x)$ - wielomian stopnia co najwyżej $n + \deg(w)$. Dowód przez rozumowanie rekurencyjne przedstawione wyżej.

Uwaga dla cosinusowosinusowych zagadnień: całe to nasze rozumowanie działa dla problemu postaci $\sum_k a_k y^{(k)} = w(x)e^{ax}$ gdzie $a \in \mathbb{C}$. Trzeba wówczas wziąć pod uwagę na pojawiające się współczynniki (zwłaszcza potencjalnie zespolone). Można też dla części niejednorodnej postaci $w(x)\cos(x)$ rozważać rozwiązania postaci $y = p_1(x)\cos(x) + p_2(x)\sin(x)$, identycznie dla $w(x)\sin(x)$.

**Wartości własne zespolone**

Rozważamy równania $ay'' + by' + y = 0$. Liczymy wielomiany charakterystyczne. Załóżmy, że dostajemy pierwiastki zespolone: $\lambda_1 = \bar{\lambda_2}$, tj. $\lambda_1 = c_1 + ic_2$, $\lambda_2 = c_1 - ic_2$. Rozwiązania naszego problemu są postaci $y = ce^{\lambda_1 t} + \tilde{c}e^{\lambda_2 t}$.

Dlaczego? Jeżeli założymy, że $y(x) = e^{\lambda x}$, to z wyjściowego równania dostaniemy $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. Ten obiekt traktowany jako funkcję $\lambda$ nazywamy wielomianem charakterystycznym zagadnienia $ay'' + by' + y = 0$.

Jeżeli $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$, to rozwiązanie jest postaci $y(x) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$.

Jeżeli $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$, to rozwiązanie jest postaci $y(x) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_2 t}$.

Jeżeli $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 = \bar{\lambda_2}$. Wtedy rozwiązanie ma postać $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$, gdzie $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Ale interesuje nas rozwiązanie rzeczywiste, więc zespolone współczynniki zdają się być co najmniej niepokojące. Aby wyjaśnić tę sytuację wprowadźmy oznaczenia: $\lambda_1 = s + iu$, $\lambda_2 = s - iu$. Dostajemy zagadnienie postaci $y(t) = c_1 e^{st} e^{itu} + c_2 e^{st} e^{-itu}$. Chcemy dobrać $c_1, c_2$ tak, aby pozbyć się zespolonego charakteru tego rozwiązania i sprowadzić je do wartości rzeczywistych. Np. dla $c_1 = c_2 = c/2i$ dla pewnego $c \in \mathbb{R}$ otrzymujemy $y(t) = ce^{st}(e^{itu} + e^{-itu}) = ce^{st}\cos(tu)$. Podstawiając natomiast $c_1 = c/2i, c_2 - c/2i$ dostajemy $y(t) = ce^{st} + \sin(tu)$. Dodając obie postaci rozwiązania otrzymujemy $y(t) = e^{st}(\alpha \cos(tu) + \beta \sin(tu))$.

Uwaga: przechodząc do części rzeczywistej tracimy pewne rozwiązania istniejące dla zespolonych warunków początkowych.

Jeżeli dane jest nam zagadnienie początkowe $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$, $y'(0) = y'_0 \in \mathbb{R}$, to z rozwiązania postaci $y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\bar{\lambda} t}$ jesteśmy w stanie wyznaczyć stałe $c_1, c_2$.