確率離散事象論 試験対策

百合根
@kjy3371

1. 離散時間マルコフ連鎖

1.1. 用語

離散時間マルコフ連鎖においては、確率空間の標本は確率過程$\{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$である。

離散時間マルコフ連鎖

状態空間$\mathbb{S}$上の確率過程$\{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$が任意の$n \in \mathbb{Z}_+$と状態列$i, j_0, j_1, ..., j_{n-1}$に対して

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = j_{n-1}, ..., X_0 = j_0) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \tag{1}$$

を満たすとき、確率過程は**マルコフ性**を持つという。また、$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$が$n$に依存しないとき、確率過程は**斉時性**をもつという。

離散時間マルコフ連鎖は有向重みつきグラフによって表現することができる。**(状態推移図)**推移確率行列$\boldsymbol{P}$を

$$\boldsymbol{P} = \left(P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)\right)_{i,j \in \mathbb{S}} \tag{2}$$

によって定義する。状態空間上の分布の推移は行列$\boldsymbol{P}$を分布ベクトル(**=行ベクトル)**を**右から**かける操作として表される。すなわち時刻0での状態分布を$\boldsymbol{\pi}^{(0)}$とおくと、時刻nでの状態分布$\boldsymbol{\pi}^{(n)}$は

$$\boldsymbol{\pi}^{(n)} = \boldsymbol{\pi}^{(0)} \boldsymbol{P}^n \tag{3}$$

と表される。

推移時間nでの推移確率行列を$\boldsymbol{P}^{(n)}$とおくと次の**チャップマン=コルモゴロフ方程式(CK 方程式)**が成立する。

$$\boldsymbol{P}^{(m+n)} = \boldsymbol{P}^m \boldsymbol{P}^n \tag{4}$$

1.2. グラフ構造としてのマルコフ連鎖

$P_{i,j}^m > 0$なる自然数mが存在するとき、状態$i \in \mathbb{S}$から状態$j \in \mathbb{S}$に**到達可能**であるという。$\mathbb{S}$の中の任意の状態対(i, j)について、iからjに到達可能であるとき、マルコフ連鎖は**既約**であるという。そうでない場合マルコフ連鎖は**可約**であるという。既約性は状態推移図の連結性と等価な概念である。

既約なマルコフ連鎖には、周期性において面白い性質がある。いま、状態$i \in \mathbb{S}$に対してその**周期**d_iを

$$d_i \equiv \gcd\left\{n \in \mathbb{N} : P_{i,i}^n > 0\right\} \tag{5}$$

として定義する。このとき

互いに到達可能な状態$i, j \in \mathbb{S}$について$d_i = d_j$が成立する。

という性質がある。このことから、既約なマルコフ連鎖の全ての状態は同じ周期をもつ。既約なマルコフ連鎖について、その共通周期が1に等しいとき、マルコフ連鎖は**非周期的**であるという。次の性質が成り立つ。

既約なマルコフ連鎖において、その共通周期をdとする。さらに、$i, j \in \mathbb{S}$および

$$P_{i,j}^{(l)} > 0 \tag{6}$$

となる$l \in \mathbb{N}$を任意に選んで固定する。このとき、

(1) $P_{j,i}^{(m)} > 0$ならば$l + m \equiv 0 \pmod d$
(2) $P_{i,j}^{(n)} > 0$ならば$l \equiv n \pmod d$

1.3. 停止時刻

停止時刻の定義を与える。(標本空間の取り方に注意せよ。)

停止時刻

マルコフ連鎖における確率空間を$(\Omega, \mathcal{F}, P)$とする。値域が∞も含んだ自然数値である確率変数$\tau = \tau(\omega) \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$が確率過程$\{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$に対する**停止時刻**であるとは、任意の$m \in \mathbb{Z}_+$について全ての起こりうる標本$\{X_0, X_1, ..., X_m\}$(例えば$\{1, 5, 7, ..., 1\}$などすべての遷移)を集めた集合によって生成される$\sigma$集合体$\mathcal{F}_m$について、

$$\{\omega : \omega \in \mathcal{F},\ \tau(\omega) \leq m\} \subset \mathcal{F}_m \tag{7}$$

が成り立つことをいう。

このとき、次の重要な定理が成り立つ。

Wald の補題

$\{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$を独立同一に分布する確率変数列でかつ$E[|X_1|] < \infty$を満たすものとし、さらに確率過程$\{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$に関する停止時刻を$\tau$とする。$E[\tau] < \infty$が成立するとき、次の関係が成立する。

$$E\left[\sum_{n=1}^{\tau} X_n\right] = E[\tau]E[X_1] \tag{8}$$

1.4. 強マルコフ性

強マルコフ性の定義を述べる。その前に再帰時刻τに対してσ集合体$\mathcal{F}_\tau$を定義する。

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\ \ \forall t \in \mathbb{Z}_+\} \tag{9}$$

とする。

強マルコフ性

離散時間マルコフ連鎖について、マルコフ連鎖が**強マルコフ性**をもつとは、任意の状態$i, j \in \mathbb{S}$および$P(X_\tau = i, A) > 0$なる任意の事象$A \in \mathcal{F}_\tau$について

$$P(X_{\tau+1} = j \mid P_\tau = i, A) = P(X_{\tau+1} = j \mid P_\tau = i) \tag{10}$$

が成立することをいう。

次の性質が成り立つ。

状態空間$\mathbb{S}$上のマルコフ連鎖$\{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$は強マルコフ性をもち、任意の$A \in \mathcal{F}_\tau$について次式が成立する。

$$P(X_{\tau+1} = j \mid X_\tau = i, A) = P_{i,j}, \quad i, j \in \mathbb{S} \tag{11}$$

1.5. 再帰性

以下では次のような記法を用いる。

$$P_i(\cdot) = P(\cdot \mid X_0 = i), \quad E_i[\cdot] = E[\cdot \mid X_0 = i] \tag{12}$$

また、**初到達時刻**を以下のように定義する。

$$\tau_j = \inf\{n > 0 : X_n = j\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \tag{13}$$

事象$X_0 = j$のもとでτ_jを状態jの**再帰時刻**とよぶ。

これらの用語を踏まえて、再帰性の概念が定義される。

再帰性

マルコフ連鎖において

$$P_i(\tau_i < \infty) = 1 \tag{14}$$

となっているとき、状態$i \in \mathbb{S}$は**再帰的**であるという。また、

$$P_i(\tau_i < \infty) < 1 \tag{15}$$

となっているとき、状態$i \in \mathbb{S}$は**過渡的**であるという。

正再帰性・零再帰性

再帰的な状態iにおいて、

$$E_i[\tau_i] < \infty \tag{16}$$

であるとき、状態iは**正再帰的**であるという。また、

$$E_i[\tau_i] = \infty \tag{17}$$

であるとき、状態iは**零再帰的**であるという。

再帰的を調べるにあたって、次の概念を導入する。

$$\boldsymbol{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{P}^n \tag{18}$$

として$\boldsymbol{S}$を基礎行列と呼ぶ。実は、この行列について次の性質が成り立つ。

基礎行列と再帰性

基礎行列$\boldsymbol{S}$について、次の(1), (2)が成立する。
(1) 状態iが再帰的であることと$S_{i,i} = \infty$なことは等価である。
(2) $P_i(\tau_j < \infty) > 0$, すなわち状態iからjに到達可能であるとき、$S_{j,j} = \infty \Leftrightarrow S_{i,j} = \infty$

また、次の性質が成り立つ。

連結性と再帰性

状態i, jが互いに到達可能であるとする。このとき、状態i, jは再帰性, 正再帰性, 零再帰性の成否を共有する。

したがって、既約なマルコフ連鎖においては全ての状態が再帰的・非再帰的のどちらか一方になり、再帰的な場合は全ての状態が正再帰的・零再帰的のどちらか一方になる。

1.6. 定常測度

離散時間マルコフ連鎖において、その推移確率行列を$\boldsymbol{P}$としたときに

$$\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\pi} \tag{19}$$

を満たすベクトル(**=行ベクトル**)について調べる操作は重要である。$\boldsymbol{\pi}$が単なるベクトルであるときこれを**定常測度ベクトル**と呼び、$\boldsymbol{\pi}$が**確率ベクトル**であるときこれを**定常分布ベクトル**と呼ぶ。

1.6.1. 詳細釣り合い方程式

可逆測度ベクトルについて述べる。

可逆測度ベクトル

行ベクトル$\boldsymbol{\mu} = (\mu_j)_{j \in \mathbb{S}}$が任意の$i, j \in \mathbb{S}$について

$$P_{i,j}\mu_i = P_{j,i}\mu_j \tag{20}$$

を満たすとき、これを**可逆測度ベクトル**と呼ぶ。また式 20 を**詳細釣り合い方程式**と呼ぶ。
また、可逆測度ベクトルが確率ベクトルであるとき、**可逆分布ベクトル**と呼ぶ。

可逆測度ベクトルは次の性質を持っている。

可逆測度ベクトルの性質

可逆測度ベクトルは定常測度ベクトルとなる。

この定理から、詳細釣り合い方程式の解を求めることで定常測度ベクトルが得られるということが分かる。定常測度ベクトルが規格化可能な場合、定常分布ベクトルも求められることになる。詳細釣り合い方程式は一般に解を持たないのであるが、考えるマルコフ連鎖によっては解が存在することがある。

1.6.2. 定常測度ベクトルの構成

推移確率行列$\boldsymbol{P}$をもつ状態空間$\mathbb{S}$上のマルコフ連鎖$\{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$が既約であるとする。さらに、任意の状態$s \in \mathbb{S}$に対して、

$$ {}_{\{s\}}x_i = E_s\left[\sum_{n=1}^{\tau_s} \mathbf{1}(X_n = i)\right] \tag{21} $$

と定義する。このとき、

(1) ${}_{\{s\}}x_s \leq 1$かつ、等号成立は$\boldsymbol{P}$が再帰的であることと同値
(2) ${}_{\{s\}}\boldsymbol{x}\boldsymbol{P} \leq {}_{\{s\}}\boldsymbol{x}$かつ等号成立は$\boldsymbol{P}$が再帰的であることと同値
(3) ${}_{\{s\}}x_i \in (0, \infty)\ \ (\forall i \in \mathbb{S})$

となる。すなわち、**既約かつ再帰的**なマルコフ連鎖においては定常測度ベクトルが存在することが分かる。さらに、次の定理も分かる。

推移確率行列$\boldsymbol{P}$をもつ状態空間$\mathbb{S}$上のマルコフ連鎖$\{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$が**既約かつ再帰的**であるとする。このとき、$\boldsymbol{P}$が正再帰的であることと${}_{\{s\}}x_i$が$\sum_{i\in\mathbb{S}} {}_{\{s\}}x_i < \infty$を満たすことは等価である。

実は上に述べてきた仮定のもとで、次の性質が成り立つ。

定常測度の一意性

推移確率行列$\boldsymbol{P}$をもつ状態空間$\mathbb{S}$上のマルコフ連鎖$\{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$が**既約かつ再帰的**であるとする。このとき、定常測度ベクトルは定数倍の自由度を除いて一意に定まる。

また、定常分布の存在性と正再帰性について、次の関係が成り立つ。

定常分布と正再帰性

推移確率行列$\boldsymbol{P}$をもつ状態空間$\mathbb{S}$上のマルコフ連鎖$\{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$が**既約**であるとき、次の２つは同値である。
(i) 推移確率行列$\boldsymbol{P}$が正再帰的である。
(ii) 定常分布が存在する。

1.6.3. 有限なマルコフ連鎖における定常分布

状態空間が有限なマルコフ連鎖においては、次の性質が成り立つ。

有限なマルコフ連鎖に

状態空間が**有限**でなおかつ**既約**なマルコフ連鎖は、正再帰的であってかつ定常分布をもつ。

1.7. 定常分布の確率的意味

状態空間$\mathbb{S}$上のマルコフ連鎖$\{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$が既約かつ再帰的であるとする。任意に選ばれた$s \in \mathbb{S}$について$N_m$を

$$N_m = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{1}(X_k = s) \tag{22}$$

とする。さらに関数$f : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$が

$$\sum_{i\in\mathbb{S}} |f(i)| \ {}_{\{s\}}x_i < \infty \tag{23}$$

このとき、次の式が成立する。

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{N_m} \sum_{k=1}^{m} f(X_k) = \sum_{i\in\mathbb{S}} f(i)_{\{s\}}x_i \tag{24}$$

この補題を用いて、次のエルゴード定理が証明される。

エルゴード定理

状態空間$\mathbb{S}$上のマルコフ連鎖$\{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$が既約かつ正再帰的であるとする。このとき、一意的に定まる定常分布を$\boldsymbol{\pi}$とし、関数$f : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$が$\sum_{i\in\mathbb{S}} |f(i)| \ \pi_i < \infty$を満たすならば、次式が成立する。

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} f(X_k) = \sum_{i\in\mathbb{S}} f(i)\pi_i \tag{25}$$

エルゴード定理の系として次の関係が得られる。

エルゴード定理の仮定のもとで、

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \mathbf{1}(X_k = i) = \pi_i \tag{26}$$

PageRank の計算などに応用がきく次の定理も重要である。まず、極限分布の定義を導入する。

極限分布

任意の初期分布$\boldsymbol{\pi}^{(0)}$に対して、$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\pi}^{(n)}$が同じ確率ベクトル$\boldsymbol{p}$に収束するとき、$\boldsymbol{p}$を**極限分布**と呼ぶ。

このとき、

極限分布の存在

推移確率行列$\boldsymbol{P}$が**エルゴード的**(既約かつ非周期的かつ正再帰的)ならば、次の式が成り立つ。

$$\lim_{n\to\infty} P_{i,j}^{(n)} = \pi_j,\ (i,j \in \mathbb{S}) \tag{27}$$

つまり、任意の初期分布は、一意的な定常分布に収束する。

1.8. 離散時間マルコフ連鎖の応用~ランダムウォーク~

n次元ランダムウォークは離散時間マルコフ連鎖の特別な場合と考えることができる。ランダムウォークは明らかに既約だが、再帰性に関しては、

1 次元ランダムウォークの再帰性

1 次元ランダムウォークは移動確率が等重のとき再帰的であり、それ以外の場合は過渡的である。

また、等確率での移動を仮定すると、次の定理が簡易に証明される。

N 次元ランダムウォークの再帰性

移動確率が等確率なランダムウォークについて、ランダムウォークの次元をKとすると、$K \leq 2$のときランダムウォークは再帰的であり、$K \geq 3$のときランダムウォークは過渡的である。

1.9. 離散時間マルコフ連鎖の応用 ~PageRank~

ランダムウォークの考え方はPageRankに応用されている。具体的には、ハイパーリンク上の各ウェブサイトへの訪問をマルコフ連鎖であると仮定(**ランダムサーファーモデル**)し、その推移確率行列をエルゴード性を満たすように設計(**Google 行列**)し、その極限分布をべき乗法により計算する。今回はその詳細については取り扱わない。

2. 連続時間マルコフ連鎖

2.1. 用語

離散時間マルコフ連鎖においては、確率空間の標本は確率過程$\{X(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$である。

連続時間マルコフ連鎖

状態空間$\mathbb{S}$上の確率過程$\{X_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$が任意の$k \in \mathbb{N}$と任意の時系列$0 \leq s_1 < s_2 < ... < s_k < s < t$および任意の状態列$j, i, i_1, i_2, ..., i_k$に対して

$$P(X(t) = j \mid X(s) = i; X(s_n) = i_n\ \ n = 1, 2, ..., k) = P(X(t) = j \mid X(s) = i) \tag{28}$$

を満たすとき、確率過程は**マルコフ性**を持つという。また、$P(X(t) = j \mid X(s) = i)$が$t - s$だけに依存するとき、確率過程は**斉時性**をもつという。

離散時間マルコフ連鎖における推移確率行列は、連続時間マルコフ連鎖においては**推移行列関数**として表される。すなわち、行列関数

$$\boldsymbol{P}(t) = (P(X(t) = j \mid X(0) = i))_{i,j\in\mathbb{S}} \tag{29}$$

として定義される。

推移行列関数は次の性質をもっている。

推移行列関数の性質

(i) $\boldsymbol{P}(0) = \boldsymbol{E}$
(ii) $P_{i,j}(t) \geq 0 \quad (\forall i, j \in \mathbb{S}, t \in \mathbb{R}_+)$
(iii) $\sum_{j\in\mathbb{S}} P_{i,j}(t) = 1 \quad (\forall i \in \mathbb{S}, t \in \mathbb{R}_+)$
(iv) 全ての$s, t \in \mathbb{R}_+$に対して$\boldsymbol{P}(s+t) = \boldsymbol{P}(s)\boldsymbol{P}(t)$ **(チャップマン=コルモゴロフ方程式)**

2.2. 連続的な推移行列関数

基本的な補題として以下を導入する。

関数$f : (0,\infty) \to \mathbb{R}_+$が$\lim_{t\searrow 0} f(t) = 0$を満たし、かつ劣加法的であるとする。すなわち、任意の$t, s \in (0,\infty)$に対して

$$f(t+s) \leq f(t) + f(s) \tag{30}$$

とする。このとき、$q = \sup_{t>0} \frac{f(t)}{t}$とおくと、次の性質が成り立つ。

$$\lim_{h\searrow 0} \frac{f(h)}{h} = q \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \tag{31}$$

連続的な推移行列関数

推移行列関数$\boldsymbol{P}(t)$が$\lim_{h\searrow 0} \boldsymbol{P}(h) = \boldsymbol{E}(= \boldsymbol{P}(0))$を満たすとき、**連続的**であるという。

このとき、次の性質が成り立つ。

連続的な推移行列関数

推移行列関数$\boldsymbol{P}(t)$が**連続的**であるとき、次の性質が成り立つ。

$$\begin{gathered}\lim_{h\searrow 0} \frac{1 - P_{i,i}(h)}{h} =: q_i \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \qquad i \in S \\ 1 - P_{i,i}(h) \leq q_i h \qquad h > 0, i \in \mathbb{S}\end{gathered} \tag{32}$$

この式は各状態$i \in \mathbb{S}$からの流出確率が(ある意味で)微分可能であることを示している。

2.3. 推移速度行列

次の定理は連続時間マルコフ連鎖の特徴づけに関する重要な結果である。

推移行列関数$\boldsymbol{P}(t)$が**連続的**であるとき、ある$q_i \in (0,\infty]$および$Q_{i,j} \in (0,\infty)$ $(i,j \in \mathbb{S}, i \neq j)$に対して以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} \lim_{h \searrow 0} \frac{1 - P_{i,i}(h)}{h} &= q_i \in (0,\infty] \\ \lim_{h \searrow 0} P_{i,j} \frac{h}{h} &= Q_{i,j} \in (0,\infty) \\ \sum_{j \in \mathbb{S}, j \neq i} Q_{i,j} &\leq q_i \end{aligned} \tag{33}$$

このとき、次のように推移速度行列定義する。

推移速度行列

連続的な推移行列関数$\boldsymbol{P}(t)$に対して、

$$\boldsymbol{Q} \coloneqq \left(Q_{i,j}\right)_{i,j \in \mathbb{S}} = \lim_{h \searrow 0} \frac{\boldsymbol{P}(h) - \boldsymbol{E}}{h} \tag{34}$$

で定義される行列$\boldsymbol{Q}$を**推移速度行列**、あるいは無限小生成作用素とよぶ。

ここで、$Q_{i,i} = -q_i$であって、次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} Q_{i,j} &\in \mathbb{R}_+ & \quad & i \in \mathbb{S}, j \in \mathbb{S} \setminus \{i\} \\ \sum_{j \in \mathbb{S} \setminus \{i\}} Q_{i,j} < -Q_{i,i} &\in [0,\infty] & \quad & i \in \mathbb{S} \end{aligned} \tag{35}$$

推移速度行列は非正の対角成分と非負の非対角成分をもつ広義優対角行列となり、**Q 行列**と呼ばれることもある。

推移速度行列に対して次の用語を導入する。

有界性・保存性

(i) 推移速度行列$\boldsymbol{Q}$の全ての要素が一様に有界な値で抑えられるとき、すなわち$\sup_{i,j} |Q_{i,j}| < \infty$が成立するとき、この推移速度行列は**有界**であるという。推移速度行列の非対角成分は全て有界であったから、このことは$\sup_{i \in \mathbb{S}} q_i < \infty$と同値である。

(ii) 全ての状態iが$\sum_{j \in \mathbb{S} \setminus \{i\}} Q_{i,j} = q_i \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$を満たすとき、推移速度行列は**保存的**であるという。

2.4. コルモゴロフの微分方程式

連続的な推移行列関数$\boldsymbol{P}(t)$に対しては、適当な条件のもとでチャップマン=コルモゴロフ方程式を導くことができる。

コルモゴロフの微分方程式

連続時間マルコフ連鎖$\{X(t)\}$の状態空間$\mathbb{S}$が有限で、その推移行列関数$\boldsymbol{P}(t)$が連続的であるとき、次式が成り立つ。

$$\begin{gathered}\boldsymbol{P}'(t) = \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}(t),\ t \in \mathbb{R}_+ \\ \boldsymbol{P}(t) = \exp\{\boldsymbol{Q}t\} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{Q}^n t^n}{n!},\ t \in \mathbb{R}_+\end{gathered} \tag{36}$$

2.5. 強マルコフ性

以降では、連続時間マルコフ連鎖に対して強マルコフ性といった概念を導入する。今回は簡易な議論のため、$X(t)$が右連続であることを常に仮定する。すなわち、

$$\lim_{h \searrow 0} X(t+h) = X(t) \tag{37}$$

が任意の時刻において確率 1 で成立すると仮定する。これを**ジャンプ過程**と呼ぶ。

ジャンプ時刻の概念を導入する。

ジャンプ時刻

ジャンプ過程となる連続時間マルコフ連鎖$\{X(t)\}$において、次式で定義される$t_n\ (n \in \mathbb{N})$をn番目の**ジャンプ時刻**と呼ぶ。

$$t_n := \inf\{t > t_{n-1} : X(t) \neq X(t_{n-1})\} \tag{38}$$

ただし、$t_0 = 0$である。

ジャンプ時刻t_nについて

$$\lim_{n \to \infty} t_n = \infty, \quad a.s., \tag{39}$$

となるとき、マルコフ連鎖は**正則**であるという。そうでないとき、マルコフ連鎖は**爆発的**であるという。

離散時間マルコフ連鎖における停止時刻を連続時間マルコフ連鎖に拡張する。

停止時刻

$\{Z_t : t \in \mathbb{R}_+\}$を連続時間確率過程とし、確率変数$\tau \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$を考える。事象$\{\tau \leq t\}$が時刻$t$以前の履歴$\{Z_s : s \in [0,t]\}$だけで表現できるとき、$\tau$を$\{Z_t : t \in \mathbb{R}_+\}$に関する**停止時刻**であるという。

停止時刻を用いて次の強マルコフ性が導入される。

強マルコフ性

$\{X(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$を、推移行列関数$\boldsymbol{P}(t)$をもつ連続時間マルコフ連鎖とする。ここで$\{X(t)\}$の有限な停止時刻$\tau < \infty \ (a.s.)$を考えると、$X(\tau) = i$が与えられたという条件の下で、以下の(i), (ii)が成立する。
(i) $\{X(t) : t \in [0, \tau)\}$と$\{X(t) : t \geq \tau\}$は条件付き独立である。
(ii) $\{X(t) : t \geq \tau\}$も$\boldsymbol{P}(t)$を推移行列関数とする連続時間マルコフ連鎖となる。

2.6. マルコフ連鎖のジャンプ時刻と推移先

マルコフ連鎖のジャンプ時刻に関する解析を行う。以下、離散時間マルコフ連鎖と同様に、

$$P_i(\cdot) \triangleq P(\cdot \mid X(0) = i), \quad E_i[\cdot] = E[\cdot \mid X(0) = i] \tag{40}$$

という表記を用いる。このとき、

$\{X(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$を有界な推移速度行列$\boldsymbol{Q}$をもつ連続時間マルコフ連鎖とする。ここで$t_1$を最初のジャンプ時刻とすると、任意の$h > 0$に対して以下が成立する.
(i) $P_i(t_1 \leq h) = hq_i + o(h)$
(ii) $P_i(t_1 \leq h, X(t_1) = j) = hQ_{i,j} + o(h)$

これらの準備のもと、まずジャンプまでの時間の確率分布が以下のようにパラメータq_iの指数分布で与えられることが示される。

有界な推移速度行列$\boldsymbol{Q}$をもつ連続時間マルコフ連鎖について、任意の$t > 0$に対して以下が成り立つ。

$$\begin{gathered} P(t_1 > t \mid X(0) = i) = e^{-q_i t}, \qquad t \in \mathbb{R}_+ \\ P_{i,i}(t) = e^{-q_i t}, \qquad t \in \mathbb{R}_+ \end{gathered} \tag{41}$$

マルコフ連鎖のある状態が$q_i = 0$を満たすとき、このマルコフ連鎖は状態iから一切状態変化を起こさないため、このiは**吸収状態**であると呼ばれる。以下、q_iが分母に現れる議論においてはiは吸収状態でないことを常に仮定する。

有界な推移速度行列$\boldsymbol{Q}$をもつ連続時間マルコフ連鎖を考える。このとき、最初のジャンプ時刻t_1について以下が成り立つ。

$$P_i(X(t_1) = j) = \frac{Q_{i,j}}{q_i}, \quad i, j \in \mathbb{S}, \ j \neq i \tag{42}$$

また、有界な推移速度行列を持つ連続時間マルコフ連鎖について、次の性質が成り立っている。

有界な推移速度行列$\boldsymbol{Q}$をもつ連続時間マルコフ連鎖について、以下の主張が成り立っている。
(i) 推移速度行列は保存的である。すなわち、$\sum_{j\neq i} Q_{i,j} = q_i$が任意の$i \in \mathbb{S}$で成り立つ。
(ii) $X(t_{n-1})$を与えたもとで$t_n - t_{n-1}$と$X(t_n)$は条件付き独立であり、任意の$n \in \mathbb{N}$と$i \in \mathbb{S}$に対して

$$\begin{aligned} &P(t_n - t_{n-1} \leq x,\ X(t_n) = j \mid X(t_{n-1}) = i) \\ &= P(t_n - t_{n-1} \leq x \mid X(t_{n-1}) = i) \times P(X(t_n) = j \mid X(t_{n-1}) = i) \\ &= (1 - q^{-q_i x}) \frac{Q_{i,j}}{q_i} \end{aligned} \tag{43}$$

2.7. 埋め込まれたマルコフ連鎖

連続時間マルコフ連鎖$\{X(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$が有界な推移速度行列$\boldsymbol{Q}$をもち、全ての状態$i \in \mathbb{S}$で$q_i > 0$とする。ここで、ジャンプ時刻$t_n$ $(t_0 = 0)$について、

$$Y_n \triangleq X(t_n) \tag{44}$$

と定める。また、行列$\widetilde{\boldsymbol{P}} := \left(\tilde{P}_{i,j}\right)_{i,j\in\mathbb{S}}$を次のように定義する。

$$\tilde{P}_{i,j} = \begin{cases} \frac{Q_{i,j}}{q_i}, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases} \tag{45}$$

これは、速度行列の保存性から$\sum_{j\neq i} Q_{i,j} = q_i$が成り立つので確率行列である。

このとき、次の性質が成り立つ。

埋め込まれたマルコフ連鎖

離散時間確率過程$\{Y_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$は$\widetilde{\boldsymbol{P}}$を推移確率行列にもつマルコフ連鎖である。(この離散時間マルコフ連鎖$\{Y_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$を、マルコフ連鎖$\{X(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$に対する**埋め込まれたマルコフ連鎖**と呼ぶ。)

埋め込まれたマルコフ連鎖を用いることで、有界な速度行列をもつ連続時間マルコフ連鎖に既約性や再帰性といった概念を導入する。

既約性

連続時間マルコフ連鎖$\{X(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$が**既約**であるとは、埋め込まれたマルコフ連鎖$\{Y_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$が既約であることをいう。

このとき、

連続時間マルコフ連鎖が既約であるとき、任意の$t > 0$に対して推移行列関数$\boldsymbol{P}(t)$の全ての成分は正となる。

再帰性・過渡性

連続時間マルコフ連鎖$\{X(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$に対する埋め込まれたマルコフ連鎖を$\{Y_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$とする。このとき、
(i) $\{Y_n\}$が再帰的であるとき、$\{X(t)\}$は**再帰的**であるという。
(ii) $\{Y_n\}$が過渡的であるとき、$\{X(t)\}$は**過渡的**であるという。

正再帰性

最初のジャンプ時刻t_1以降での状態0への初到達時刻をτ_0とし、これを状態0への再帰時刻と呼ぶ。このとき、既約な連続時間マルコフ連鎖$\{X(t)\}$が再帰的で、 かつ、$E[\tau_0 \mid X(0) = 0] < \infty$であるとき、**正再帰的**であるという。

2.8. 定常測度と定常分布

定常測度・定常分布

非負ベクトル$\boldsymbol{\eta} = (\eta_i)_{i \in \mathbb{S}} \neq \mathbf{0}$が

$$\boldsymbol{\eta} \boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{\eta}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \tag{46}$$

を満たすとき、マルコフ連鎖$\{X(t)\}$およびその推移行列関数$\boldsymbol{P}(t)$の**定常測度**と呼ぶ。定常測度ベクトルが分布ベクトルとなるとき、**定常分布**と呼ぶ。

$\{X(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$を既約で再帰的な連続時間マルコフ連鎖とし、その推移速度行列を$\boldsymbol{Q}$とする。さらに、$\{X(t)\}$の埋め込まれたマルコフ連鎖を$\{Y_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$とし、その定常測度ベクトルを$\boldsymbol{\mu}$とする。このとき、$\eta_i = \frac{\mu_i}{q_i}$とすると、$\boldsymbol{\eta}$は$\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{Q} = \mathbf{0}$を満たし、かつこれは元の連続時間マルコフ連鎖の定常測度となる。

また、離散時間マルコフ連鎖の場合と同様に、次の主張が成り立つ。

推移速度行列$\boldsymbol{Q}$をもつ連続時間マルコフ連鎖$\{X(t)\}$が既約かつ再帰的であるとする。このとき、以下が成り立つ。
(i) $X(t)$の定常測度ベクトルは定数倍の自由度を除いて一意に定まる。
(ii) 定常分布ベクトルが存在することと$\{X(t)\}$が正再帰的であることは等価である。

2.9. 極限分布

正再帰的かつ既約なマルコフ連鎖について、次の定理が成立する。

極限分布

連続時間マルコフ連鎖$\{X(t):t\in\mathbb{R}_+\}$が既約で正再帰的であるとする。また、マルコフ連鎖の推移行列関数$\boldsymbol{P}(t)$とすると、(一意な)定常分布$\boldsymbol{\pi}$に対して

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{P}(t)=\boldsymbol{e}\boldsymbol{\pi} \tag{47}$$

が成り立つ。すなわち、各$i,j\in\mathbb{S}$に対して、

$$\lim_{t\to\infty}P_{i,j}(t)=\pi_j \tag{48}$$

が成立する。

エルゴード定理

$\{X(t):t\in\mathbb{R}_+\}$を既約で正再帰的な連続時間マルコフ連鎖とし、その定常分布を$\boldsymbol{\pi}=(\pi_i)_{i\in\mathbb{S}}$とすると、

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\mathbf{1}(X(u)=i)du=\pi_i,\quad i\in\mathbb{S} \tag{49}$$

が成り立つ。