上極限・下極限の復習

百合根
@kjy3371

目次

1. 数列の上極限・下極限

1.1. 上極限・下極限の定義

実数列$\{a_n\}$に対して上極限・下極限の定義を述べる。

定義 1.1 (数列の上極限・下極限): 実数列$\{a_n\}$に対して、$\alpha \in \mathbb{R}$が数列$\{a_n\}$の**上極限**であるとは、εを任意の正数とするとき、

ほとんど全てのnに対し$a_n < \alpha + \varepsilon$
無限に多くのnに対し$\alpha - \varepsilon < a_n$

が成り立つことであり、このとき

$$\overline{\lim}\, a_n = \alpha$$

と書く。また、$\alpha \in \mathbb{R}$が数列$\{a_n\}$の**下極限**であるとは、εを任意の正数とするとき、

ほとんど全てのnに対し$\alpha - \varepsilon < a_n$
無限に多くのnに対し$a_n < \alpha + \varepsilon$

が成り立つことであり、このとき

$$\underline{\lim}\, a_n = \alpha$$

と書く。

また、

定義 1.2:

$$\overline{\lim}\, a_n = \infty$$

であるとは、Gを任意の実数とするとき、

$$\text{無限に多くの}n\text{に対し}G < a_n$$

となることと定義する。また、

$$\overline{\lim}\, a_n = -\infty$$

であるとは、Gを任意の実数とするとき、

$$\text{ほとんど全ての}n\text{に対し}a_n < G$$

となることと定義する。

下極限についても同様に、

$$\underline{\lim}\, a_n = \infty$$

であるとは、Gを任意の実数とするとき、

$$\text{ほとんど全ての}n\text{に対し}G < a_n$$

となることと定義する。また、

$$\underline{\lim}\, a_n = -\infty$$

であるとは、Gを任意の実数とするとき、

$$\text{無限に多くの}n\text{に対し}a_n < G$$

となることと定義する。

実はこの定義について、

定理 1.1.1: 任意の実数列$\{a_n\}$についてその上極限および下極限は一意に定まる。

となっている。

1.2. 上極限・下極限の性質

上極限・下極限には以下の性質がある。

定理 1.2.1: 数列$\{a_n\}$の上極限・下極限について、次の関係が成り立つ。

$$\overline{\lim}\, a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} a_k = \inf_n \sup_{k\geq n} a_k$$

$$\underline{\lim}\, a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} a_k = \sup_n \inf_{k\geq n} a_k$$

定理 1.2.2: 数列$\{a_n\}$の上極限・下極限について

$$\underline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\, a_n$$

定理 1.2.3: 数列からその有限個の項を除いても、あるいはそれらの値を変更しても上極限・下極限 の値は変わらない。

定理 1.2.4 (収束列に対する上極限・下極限): 数列$\{a_n\}$について、$\lim_{n\to\infty} a_n$が($\pm\infty$も含めて)存在するための必要十分条件は数列$\{a_n\}$について$\overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n$となることである。

次の定理は Lebsgue の優収束定理の証明などに登場する。符号の付き方に注意せよ。

定理 1.2.5:

$$\overline{\lim}(-a_n) = -\underline{\lim}\, a_n$$
$$\underline{\lim}(-a_n) = -\overline{\lim}\, a_n$$

定理 1.2.6: 全てのnについて$a_n \leq b_n$ならば、

$$\overline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\, b_n, \qquad \underline{\lim}\, a_n \leq \underline{\lim}\, b_n$$

定理 1.2.7:

$$\begin{aligned}\underline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n &\leq \underline{\lim}(a_n + b_n) \\ &\leq \begin{cases} \underline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n \\ \overline{\lim}\, a_n + \underline{\lim}\, b_n \end{cases} \leq \overline{\lim}(a_n + b_n) \leq \overline{\lim}\, a_n + \overline{\lim}\, b_n\end{aligned}$$

(ただし、$(+\infty) + (-\infty)$が起こる場合(不定形)を除く.)

2. 集合族の上極限・下極限

2.1. 上極限・下極限の定義

集合族に対しても、$\subset$を順序関係とみて上極限と下極限を定めることができる。

定義 2.1 (上極限集合・下極限集合): 集合族$\{A_n\}$に対して、その上極限集合と下極限集合を

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$
$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

によってそれぞれ定義する。

2.2. 上極限・下極限の性質

集合族の上極限集合および下極限集合について次の性質が成り立つ。

定理 2.2.1 (上極限集合と下極限集合の包含関係): 集合族$\{A_n\}$について

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$$

2.3. 極限集合

集合族の極限集合は上極限集合および下極限集合を用いて定義される。

定義 2.2 (極限集合): 集合族$\{A_n\}$について

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$$

となるとき、この集合を**極限集合**とよび、

$$\lim_{n\to\infty} A_n$$

と書く。