応用代数学 試験対策

百合根
@ kjy3371

はじめに

このノートには 2024 年度の応用代数学の授業内容が集約されています。ただし、**表現論の内容**は含まれていないので注意してください。また、授業では様々な具体例を扱いましたが、このノートではそれらは省略されているのでそちらの方も注意してください。(対称群や交代群、正多面体群、正多面体の塗り分けなど) 序盤の群論の内容は『代数入門』(堀田良之)に準拠すると思われますので、証明等を知りたい際はそちらを参照してください。

§1 群論の基本

群の事項について簡単にまとめる。

§1.1 群に関する定理

簡約律

$(G, \circ)$が群であるとき、x, y, zに対して

$$x \neq y \Rightarrow z \circ x \neq z \circ y,\ x \circ z \neq y \circ z \tag{1}$$

これより、次の定理が成り立つ。

組み換え定理

$(G, \circ)$が群であり、その位数がnであるとする。このとき、GにGの任意の元xをかけて得られる集合を$G' = xG$とする。このとき、

$$G = \{y_k \mid k = 1, 2, ...n\} \tag{2}$$

と

$$G' = \{xy_k \mid k = 1, 2, ...n\} \tag{3}$$

には全単射の写像が存在し、GとG'は対等。

群の基本的な性質と言える。この性質を用いることで位数の小さな群($n = 2, 3$)のバリエーションを数えたりできる。

§1.2 群の例

いくつかの群について簡単におさえる。

§1.2.1 巡回群

一つの元のべき乗で群Gの全ての元を表せる場合、Gを巡回群とよび位数nの群を巡回群C_nとかく。例えば

$$C_n =< c \mid c^n = e > \tag{4}$$

のように書いたりする。

§1.2.2 二面体群

位数$2n$の二面体群D_nは

$$D_n =< a, b \mid e = a^n = b^2 = abab > \tag{5}$$

のように定義される。これは、正n角形の回転移動および裏返しを群操作として表現したものと考えられる。

§1.2.3 対称群

対称群S_nは$\{1, 2, ..., n\}$の並び替え全体であるとも言えるが、抽象的に定義すると次のようになる。

$$S_n =< S_1, ..., S_{n-1} \mid S_i^2 = e,\ S_i S_{i+1} S_i = S_{i+1} S_i S_{i+1},\ S_i S_j = S_j S_i\ \ (|i-j| \geq 2) > \tag{6}$$

ただし、S_iはiと$i+1$の並び替えと捉えることもできる。ここで、生成系のとり方は1通りに定まるものとは限らず、

$$S_n =< (1,2), (1,3), ...(1,n) >=< (1,2), (1,2,...n) > \tag{7}$$

などの取り方もあることに注意。

§1.2.4 行列群

特定の性質を満たす行列は群をなす。当然、正則な行列であることが必要であり、正則行列のみを集めた集合を**一般線形群**、その中でも行列式が1であるもののみを集めたものを**特殊線形群**と呼ぶ。

§1.3 部分群・準同型写像

§1.3.1 部分群

Gの空でない部分集合Hが群Gの演算によって群となるとき、Hを群Gの**部分群**とよび、$H \leq G$と書くことがある。Gの自明な部分群としてG自身や$\{e\}$などがある。

Gの部分集合Hが部分群であることを確かめる簡単な方法として次のような定理がある。

部分群確認法

群Gの空でない部分集合Hが

$$x, y \in H \Rightarrow xy^{-1} \in H \tag{8}$$

をみたすとき、HはGの部分群となる。

§1.3.2 準同型写像

2つの群G, G'の間の写像$f : G \to G'$が

$$f(xy) = f(x)f(y)\ \ (x, y \in G) \tag{9}$$

を満たすとき、fは**準同型写像**または**準同型**であるという。また、GからG'への準同型写像全体の集合$\mathrm{Hom}(G, G')$と書く。

準同型写像$f:G\to G'$が全単射であるとき、fは**同型写像**または**同型**であるという。GとG'の間に同型写像が存在すればGとG'は同型であるといい、$G\cong G'$や$G\xrightarrow{\sim}G'$などと書く。

§1.3.3 準同型写像と核

準同型写像が誘導する部分群として**像**と**核**がある。それぞれ次のように定義する。

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}f &= \{f(x) \mid x\in G\}\\ \mathrm{Ker}f &= \{x\in G \mid f(x)=e_{G'}\}\end{aligned} \tag{10}$$

特に核は次のような定理により、重要な対象である。

単射性の必要十分条件

核が単位元のみからなることと、準同型写像が単射であることは同値。

なお、像および核が部分群となることを示していなかったが、これは次の定理から従う。

準同型写像と部分群

G, G'をそれぞれ群, 写像fを$f\in\mathrm{Hom}(G,G')$, $H\leq G,\ H'\leq G'$とする。このとき、

$$f(H)\leq G',\ f^{-1}(H')\leq G \tag{11}$$

§1.3.4 自己準同型

GからGへの準同型写像をG上の**自己準同型**という。G上の自己準同型全体の集合$\mathrm{End}(G)$はモノイドをなす。さらに、自己準同型が同型写像であるときそれを**自己同型**という。自己同型全体の集合$\mathrm{Aut}(G)$を自己同型群という。$\mathrm{Aut}(G)$は$\mathrm{End}(G)$の単元群である。

自己準同型の重要な例として**共役変換**がある。具体的には群Gの元aを選び、

$$A_a : G\to G\ ;\ g\mapsto aga^{-1} \tag{12}$$

で定義する。これはG上の**自己同型**を与える。

§1.4 群以外の代数系

§1.4.1 半群・モノイド

集合M上に二項演算$\circ$が定義されていて、結合法則のみが満たされるとき集合Mは**半群**と呼ぶ。また、半群の中でも単位元が存在するものは**モノイド**と呼ぶ。

モノイドMについて、可逆な元の集まりを取るとそれはM上の演算で再び群となる。これを**単元群**と呼ぶ。

モノイドとして、集合Xから集合Xへの写像全体の集合$S(X)$が挙げられる。これは写像の合成演算$\circ$を演算としてモノイドとなる。また、このモノイドの単元群は集合Xから集合Xへの全単射全体の集合となる。Xが有限集合でその要素の個数がnであるとき、これはn次対称群と同一のものになる。

§1.4.2 環

交換法則が成り立つ群を**加群**と呼ぶ。加群Aの上でまた加群Aによる作用を考え、その作用に対して諸々の条件を課した代数系は**環**と呼ばれる。これはちょうどたし算・ひき算だけの代数系にかけ算を導入したようなものである。

§2 群作用

§2.1 一般の集合に対する群作用

群Gの集合Xへの**左作用**とは、次の条件を満たす$\lambda : G \times X \to X$のことである。

$$\begin{aligned} &\circ\ \forall x \in X \quad \lambda(e,x) = x \\ &\circ\ \forall g,h \in G,\ \forall x \in X \quad \lambda(g,\lambda(h,x)) = \lambda(gh,x) \end{aligned} \tag{13}$$

このような作用λが存在するとき、Xは**左G集合**と呼ばれる。Xの左からGの元を掛け算するのでこのようなネーミングになっている。

逆に**右作用**は、$\rho : X \times G \to X$が

$$\begin{aligned} &\circ\ \forall x \in X \quad \rho(x,e) = x \\ &\circ\ \forall g,h \in G,\ \forall x \in X \quad \rho(\rho(x,g),h) = \rho(x,gh) \end{aligned} \tag{14}$$

を満たす場合に使う。この場合同様にXは**右G集合**と呼ばれる。

左作用と右作用は 1 対 1 に対応する。それは次の定理が教えることである。

左作用と右作用の対応

群Gの集合Xの左作用λが与えられているとき、写像$\rho : X \times G \to X$を以下のように定義すると集合Xへの右作用を与える。

$$\rho(x,g) \coloneqq \lambda(g^{-1},x) \tag{15}$$

逆に右作用ρが与えられた場合も

$$\lambda(g,x) = \rho(x,g^{-1}) \tag{16}$$

として左作用を得る。

また、Gの左作用が与えられている集合X上において、その集合X上の複素数値関数全体$F(X)$に対しても群作用が定まる。具体的には$f \in F(X)$に対して、関数f'を

$$f'(x) \coloneqq f(g \circ x) \tag{17}$$

と定義して$F(X)$への作用ρを

$$\rho(f,g) = f' \tag{18}$$

と定義するとこれは$F(X)$への右作用を与える。gの代わりにg^{-1}を用いると左作用となる。

§2.2 集合Xの軌道分解

先立って群Gによる集合Xへの作用を考えたが、一般の集合SによるXへの作用も同様に考えることができる。集合Sによる左作用λは次のように定義される。

$$\forall g,h \in S \ \ \lambda(gh,x) = \lambda(g,\lambda(h,x)) \tag{19}$$

このとき、Xの各元xに対する**S軌道**を次のように定義する

$$S(x) = S \cdot x = \{S \circ x \mid s \in S\} \subset X \tag{20}$$

以下、一般の集合Sではなく群Gが作用すると考えて話を戻す。このように定義した軌道という概念について、“xとyが同じ軌道に属する”という関係は**同値関係**となる。すなわち、二項関係を

$$x \overset{G}{\sim} y \Leftrightarrow x \in G \cdot y \tag{21}$$

と定義するとこれは同値関係となるのである。この同値関係で集合Xを割ったものを**XのGによる軌道分解**といい、$X/\underset{\sim}{G}$と書く。このとき、

$$X/\underset{\sim}{G} = \{G(t) \mid t \in \Lambda \subset X\} \tag{22}$$

で

$$X = \bigsqcup_{t \in \Lambda} G(t) \tag{23}$$

となっている。Λは完全代表系である。

XのGによる作用が誘導する軌道が 1 本のみであるとき、作用は**推移的**であるという。作用が推移的であるとき、

$$\forall x, y \in X \ \exists g_0 \in G \ \text{s.t.}\ y = g_0 \circ x \tag{24}$$

となる。また、

$$\forall x_0 \ \ G \cdot x_0 = X \tag{25}$$

となっている。

軌道という概念は、例えば集合Xを正多面体, 集合Gを正多面体群として正多面体の各面の(回転で一致するものを同一の塗り分けとしたときの)塗り分けを数え上げるときに用いられる。これについては、後で述べる。

集合Xへの群Gの作用が推移的であるとき、集合Xと群Gは以下の意味で“ほぼ同じ”とみなすことができる。

推移性と全射性

Gを群XをG集合とする。$x_0 \in X$をとってきてGからXへの写像fを以下のように定める。

$$f : G \to X; g \mapsto g \circ x_0 \tag{26}$$

このとき、fの全射性と、群作用の推移性が同値である。

このとき、fは単射とは限らないが、群Gをx_0の固定部分群

$$G_{x_0} = \{g \in G; g \circ x = x\} \ (\leq G) \tag{27}$$

で割ることで全単射を構成することができる。群を部分群で割るという操作について具体的に触れていく。

§2.3 群に対する群作用

§2.3.1 群の剰余類

集合Xに対するGの群作用を考えてきたが、群G自身の積演算が群Gに対する作用を自然に導入することが分かる。しかし、それでは単なる積演算と話が変わらないので群Gの部分群Hによる作用を考える。具体的には、群Hによる右からの乗法作用による軌道を考える。すなわち、Gの各元gに対して

$$H(g) = \{\rho(g,h) \mid h \in H\} = \{gh \mid h \in H\} \tag{28}$$

という軌道を考えるのである。これは前の議論より

$$a \overset{L}{\sim} b \Leftrightarrow a^{-1}b \in H \tag{29}$$

という**同値関係**が誘導する同値類と等価であって、これを$g \in G$の**左剰余類**とよぶのである。gHは$C_H(a)$とノートされる場合もある。

Hの**右**からの乗法移動による軌道分解を**左**剰余類と呼ぶので少しややこしい。これを逆転して同様に、Hの**左**からの乗法移動による軌道分解を**右**剰余類として考える。すなわち、

$$H(g) = \{\lambda(h,g) \mid h \in H\} = \{hg \mid h \in H\} \tag{30}$$

という軌道と

$$a \overset{R}{\sim} b \Leftrightarrow ba^{-1} \in H \tag{31}$$

という同値関係を考えるのである。

加群の場合は左剰余集合と右剰余集合が一致する。しかし一般の群Gとその部分群Hを考えた場合はそうとは限らない。一般の群でもHが**正規部分群**である場合は左剰余類と右剰余類が一致するのである。(後で述べる。)

左剰余類gHを集めるとGをカバーすることができる。(軌道分解) すなわち

$$G = \bigsqcup_{g \in \Lambda} gH \tag{32}$$

とできる。Λは**左完全代表系**と言われ、$\{gH \mid g \in \Lambda\}$を**左剰余集合**と呼ぶ。また、左剰余集合の濃度をHのGのよる**指数**と呼ぶ。左剰余集合を$\frac{G}{H}$, 指数を$(G:H)$とノートする。右剰余類の場合も同様に考える。

§2.3.2 正規部分群と剰余群

左剰余集合と右剰余集合が一致するための条件としてHが**正規部分群**であることが必要かつ十分である。

正規部分群

GのHによる左剰余集合と右剰余集合が一致するためには任意の$g \in H$に対して

$$gHg^{-1} = H \tag{33}$$

となることが必要かつ十分である。

ここで、

$$\forall g \in G \;\; gNg^{-1} = N \tag{34}$$

が成立するような部分群Nを**正規部分群**という。このことを$N \lhd G$あるいは$G \rhd N$と書く。

正規部分群であることを確かめる条件として次の定理がある。

正規部分群となる条件

部分群$H \leq G$について、任意の$g \in G$に対して$gHg^{-1} \subseteq H$となるならば、HはGの正規部分群となる。

剰余集合を考える部分群Hが正規部分群であることのご利益として、その剰余集合自身が群構造を持つことが挙げられる。具体的には$N \lhd G$に対して剰余集合$\frac{G}{N}$を考え、その元xN, yNに対して

$$xN \cdot yN := xy \cdot N \tag{35}$$

と定義するのである。このとき、剰余集合の代表元に掛け算の結果が依存しないこと(well-definedness)を確認しなければならないが、そこは well-defined に定義できる。このようにして定義した積演算について$\frac{G}{N}$は群となる。これを**剰余群**あるいは**商群**と呼ぶ。このときの単位元はeNであって、aNに対する逆元は$a^{-1}N$となる。

§2.3.3 ラグランジュの定理

次の性質が成り立つ。

剰余類の濃度

GのHによる剰余類aHについて、写像$f : H \to aH$を次のように定義するとfは全単射になる。

$$f : h \in H \mapsto ah \in aH. \tag{36}$$

このことから、各剰余類の濃度はHの濃度と等しいことが分かる。また、有限群の場合は次のことも分かる。

ラグランジュの定理

有限群Gの部分群をHとすると、

$$|G| = (G : H)\ |H| \tag{37}$$

このことから、有限群Gについて$g \in G$の位数をmとすると、

$$\{g, g^2, ...g^m\} \tag{38}$$

はGの部分群となるので、mは必ず$|G|$の約数になることが分かる。また、有限群Gについて$|G|$が素数であるとき、Gは巡回群となる。

§2.3.4 共役類分類

GのG自身への作用

$$x \in G \mapsto gxg^{-1} \in G \tag{39}$$

を考える。この作用が誘導する同値類を以下のように考えると、**共役類**と呼ばれる同値類が誘導される。

$$x \overset{\text{conj}}{\sim} y \Leftrightarrow \exists g \in G \ \text{ s.t. } gxg^{-1} = y \tag{40}$$

群作用を考えたときと同様にaを代表元としたときの共役類$[a]$は

$$[a] = \{gag^{-1} \mid g \in G\} \tag{41}$$

となる。

§2.3.5 準同型定理

核は正規部分群

準同型写像fの核$\mathrm{Ker}f$は正規部分群となる。

このことから、準同型写像$f : G \to G'$について、$\frac{G}{\mathrm{Ker}f}$はGの部分群となる。実は、この$\frac{G}{\mathrm{Ker}f}$と$\mathrm{Im}f$が群として同型となる。それを示すのが**準同型定理**である。

準同型定理

$f \in \mathrm{Hom}(G, G')$について、$\frac{G}{\mathrm{Ker}f}$と$\mathrm{Im}f$は次の準同型写像

$$\overline{f} : g \ \mathrm{Ker}f \in \frac{G}{\mathrm{Ker}f} \mapsto f(g) \in \mathrm{Im}f \tag{42}$$

によって同型となる。

特にGが有限群の場合は

$$|\mathrm{Im}f| = \frac{|G|}{|\mathrm{Ker}f|} \tag{43}$$

となる。

§2.4 群の乗法作用による軌道再考

§2.4.1 軌道構造定理

一般の集合Xに対して群Gが左作用している場合を考える。このとき、Xの中のある元x_0に対する固定部分群

$$G_{x_0} = \{g \in G \mid gx_0 = x_0\} \tag{44}$$

とx_0のG軌道

$$G(x_0) = \{gx_0 \mid g \in G\} \tag{45}$$

について、次の定理が成立する。

固定部分群の性質

(1) $a \in G, x \in X$に対して$G_{a \cdot x} = aG_x a^{-1}$
(2) $a \in G, x \in X$に対して$|G_{a \cdot t}| = |G_t|$.

軌道構造定理

剰余類の集合G/G_{x_0}と$G(x_0)$の間に写像

$$f : gG_{x_0} \in G/G_{x_0} \mapsto gx_0 \in G(x_0) \tag{46}$$

を考えると、fはG/G_{x_0}と$G(x_0)$の間の全単射となる。すなわち、固定部分群G_{x_0}に関するGの左剰余類と軌道$G(x_0)$の点は 1 対 1 に対応する。

これらのことから次の系が従う。

集合Xから点xを選んできたとき、xのG軌道の点の個数$|G(x)|$について

$$|G(x)| = |(G : G_x)| = \frac{|G|}{|G_x|} \tag{47}$$

となる。

§2.4.2 コーシー・フロベニウスの定理

集合Xへの群作用と固定部分群に関する重要な応用として、**コーシー・フロベニウス**の定理がある。この定理は集合XのG軌道の本数を数えるもので、対称性のある物体に対する数え上げ問題などに応用することができる。

コーシー・フロベニウスの定理

集合Xに有限群Gが作用しており、Xが有限個のG軌道$X_1, X_2, ..., X_m$によって

$$X = X_1 \sqcup X_2 \sqcup ... \sqcup X_m \tag{48}$$

の様に分解されるとする。このとき、軌道の本数mはGの任意の元gによる固定元の集合

$$T^g = \{x \in X \mid gx = x\} \tag{49}$$

によって

$$m = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |T^g| \tag{50}$$

と表される。