Методические указания
по выполнению лабораторной работы № 1
по курсу «Обработка данных в точных измерительных системах»

Суть обработки данных заключается в получении количественных характеристик обрабатываемых данных (возможно, неточных), либо результатов таких их преобразований, что оказываются удобными для дальнейшего принятия решений. Следовательно, суть обработки данных – в выполняемых вычислениях.

Если исходные данные, подвергаемые обработке, неточны (например, являются результатами измерений), то неточны и любые результаты их обработки. Назначение данного курса заключается в том, чтобы научиться с помощью программных средств автоматически определять характеристики погрешности результатов вычислений с неточными данными, унаследованные ими от неточных исходных данных.

Программное обеспечение

Основной рекомендуемый инструмент для выполнения заданий – пакет математического моделирования Matlab, с которым Вы знакомы. При этом при желании можно воспользоваться любым другим инструментом программирования (C++, Python и др.). Дальнейшие примеры программирования относятся к Matlab.

Чтобы воспользоваться программным обеспечением Matlab в условиях дистанционного образовательного процесса, можно использовать один из трех взаимозаменяемых вариантов.

1. Получить студенческую лицензию на сайте разработчика.

https://ch.mathworks.com/campaigns/products/trials.html

2. Воспользоваться сервисами удаленного доступа СПбПУ, позволяющими получить доступ к университетскому серверу Matlab.

https://www.spbstu.ru/upload/it/VDI_for_users.pdf

3. Выполнять задания в свободно распространяемом пакете математического моделирования Octave, язык программирования которого в рамках предлагаемых заданий полностью идентичен языку программирования Matlab.

https://www.gnu.org/software/octave/

https://octave.sourceforge.io/

Для Octave есть online-версия для браузера:

https://octave-online.net/

Лабораторная работа № 1

В настоящей работе для оценки наследственной погрешности результатов вычислений, получаемых после математической обработке результатов, поступающих из измерительных каналов высокоточных измерительных систем, требуется реализовать метод Крейновича.

Пусть x_1, x_2, …, x_n – это совокупность однородных, а, возможно, и разнородных величин. Пусть Δx_i – абсолютная погрешность величины x_i, т.е $\Delta x_i = x_i - x_{\text{ист } i}$, где $x_{\text{ист } i}$ – истинное значение величины x_i. Пусть Δ_i – предельное (наибольшее возможное) значение модуля абсолютной погрешности величины x_i, то есть $|\Delta x_i| < \Delta_i$.

Пусть алгоритм обработки данных задан функцией

$$y_{\text{ист}} = f(x_{\text{ист } 1}, x_{\text{ист } 2}, \ldots, x_{\text{ист } n}).$$

Требуется определить наибольшее возможное значение модуля абсолютной погрешности результата $y_{\text{ист}}$, вызванного погрешностью исходных данных. Т.е. нас интересует наибольшее значение величины $|\Delta y|$.

Точных значений $x_{\text{ист } 1}$, $x_{\text{ист } 2}$, …, $x_{\text{ист } n}$ обрабатываемых данных мы не знаем, и всё, что нам известно, это результаты измерений x_1, x_2, …, x_n. Следовательно, вычислить значение функции $f(x_{\text{ист } 1}, x_{\text{ист } 2}, \ldots, x_{\text{ист } n})$ мы не можем. Всё, что можно сделать, это вычислить значение функции f при известных результатах измерений, т.е. значение $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, либо при каких-либо других заданных нами значениях аргументов.

Основная идея метода Монте-Карло заключается в том, чтобы извлекать из интервалов

$$x_i - \Delta_i < \text{x}_{\text{ист } i} < x_i + \Delta_i.$$

случайные значения – это позволяет уменьшить объем производимых вычислений, получая при этом приемлемую оценку предела погрешности для Δy. Комбинации значений $x_{\text{ист } 1}, x_{\text{ист } 2}, \ldots, x_{\text{ист } n}$ формируются случайным образом, и если их будет достаточное количество, то шансы, что среди них будут такие, что приведут к значениям y, близким к минимальному и максимальному возможным, окажутся близки к 100%.

Сравним метод Крейновича с методом Монте-Карло с тем, чтобы обнаружить, в чем состоит сходство и в чем различие этих методов.

В методе Монте-Карло оценка пределов для $|\Delta y|$ выполнялась по следующему алгоритму:

1. Для каждого аргумента функции f (т.е. для значения $x_{\text{ист } i}$) сгенерировать случайным образом с помощью ***равномерного распределения*** N значений x_{ij} из интервала $[x_i–\Delta_i, x_i+\Delta_i]$, где $i = 1, 2, \ldots, n$ – номер аргумента, Δ_i – предел погрешности результата измерения i-ой величины, а $j = 1, 2, \ldots, N$ – номер итерации генерации.
2. Вычислить значения $y_j = f(x_{1j}, x_{2j}, x_{3j},\ldots, x_{nj})$.
3. Вычислить значение $y_0 = f(x_1, x_2, x_3,\ldots, x_n)$, которое соответствует результату обработки в ситуации, когда мы не знаем или не принимаем в расчет характеристики погрешности обрабатываемых данных.
4. Оценка предельной погрешности искомого значения $y_{\text{ист}}$ есть максимальное из значений $|y_0 - y_j|$.

Значение N рекомендовано принимать равным 10^6. На практике обычно достаточно значения 10^4 или 10^5.

В методе Крейновича оценка пределов для $|\Delta y|$ выполняется похожим образом:

1. Для каждого аргумента функции f (т.е. для значения $x_{\text{ист } i}$) сгенерировать случайным образом N значений x_{ij}, как случайных величин, ***распределенных по Коши*** с параметрами сдвига $x_0 = x_i$ и масштаба $d_i = k{\cdot}\Delta_i$ (для i-ой величины), где x_i – заданное/измеренное значение i-ой величины, Δ_i – предельное (наибольшее возможное) значение модуля абсолютной погрешности величины x_i, k – коэффициент преобразования предела погрешности Δ_i в параметр масштаба величины

распределенной по Коши, задаваемый экспериментатором в интервале $0 < k << 1$, а $j = 1, 2, \ldots, N$ – номер итерации генерации.

2. Вычислить значения $y_j = f(x_{1j}, x_{2j}, x_{3j},\ldots, x_{nj})$, $j = 1, 2, \ldots, N$.

3. Вычислить значение $y_0 = f(x_1, x_2, x_3,\ldots, x_n)$, которое соответствует результату обработки в ситуации, когда мы не знаем или не принимаем в расчет характеристики погрешности обрабатываемых данных.

4. Вычислить значения отклонений y_j от y_0:

$$\Delta y_j = y_j - y_0, j = 1, 2, \ldots, N.$$

5. Считая отклонения Δy случайной величиной, ***распределенной по Коши***, оценить её параметр масштаба $d_{\Delta y}$ методом максимального правдоподобия из полученной в п.4 выборки $(\Delta y_1, \Delta y_2, \ldots, \Delta y_N)$.

6. Вычислите искомую оценку предельного значения Δ_y величины $|\Delta y|$ по формуле

$$\Delta_y = |\mathrm{d}_{\Delta y}| / k,$$

где в качестве значения k подставляется величина, выбранная в п.1 при вычислении коэффициентов масштаба $d_i = k\cdot\Delta_i$.

Значение N обычно на практике принимают равным 200-300.

Задание к лабораторной работе № 1 заключается в оценке характеристик погрешности значения заданной функции, реализующей математическую обработку неточных данных (результатов измерений), при помощи метода Крейновича с последующим сравнением полученных результатов с результатами эксперимента, проведенного по методу Монте-Карло.

Детальный текст задания представлен в сопроводительном файле.

При выполнении данной лабораторной работы следует использовать: аналитическое выражение $y = f(x_1, x_2, x_3,\ldots, x_n)$, значения $x_1, x_2, x_3,\ldots, x_n$ и предельные относительные отклонения δ_{x_1}, δ_{x_2}, …, δ_{x_N} из сопроводительного файла.

Замечания относительно встроенных функций в среде Matlab.

При использовании среды Matlab случайные величины, распределенные по Коши, можно генерировать следующим образом:

```
    xr1 = x1+k*d1*tan(pi*(rand(N,1)-1/2));
% x1 – параметр сдвига СВ по Коши
% k – поправочный коэффициент порядка 10^(-2) - 10^(-3)
% d1 - предельное значение модуля абсолютной погрешности x1
% d1*k – коэффициент масштаба СВ по Коши
```

Численно решить уравнение, приведенное к виду $f(x) = 0$, где x – искомая величина, можно, например, с помощью функции fzero():

```
      d0 = 0;   % стартовая точка
      d_deltay = fzero(@myfun,d0,[],dy);
                                 % где @myfun – дескриптор функции
                                % (указатель на функцию) myfun,
                                % корень, которой мы ищем;
                               % dy – выборка из ген. Совокупности СВ по Коши
```