Методические указания
по выполнению лабораторной работы № 2
по курсу «Обработка данных в точных измерительных системах»

Суть обработки данных заключается в получении количественных характеристик обрабатываемых данных (возможно, неточных), либо результатов таких их преобразований, что оказываются удобными для дальнейшего принятия решений. Следовательно, суть обработки данных – в выполняемых вычислениях.

Если исходные данные, подвергаемые обработке, неточны (например, являются результатами измерений), то неточны и любые результаты их обработки. Назначение данного курса заключается в том, чтобы научиться с помощью программных средств автоматически определять характеристики погрешности результатов вычислений с неточными данными, унаследованные ими от неточных исходных данных.

Программное обеспечение

Основной рекомендуемый инструмент для выполнения заданий – пакет математического моделирования Matlab, с которым Вы знакомы. При этом при желании можно воспользоваться любым другим инструментом программирования (C++, Python и др.). Дальнейшие примеры программирования относятся к Matlab.

Чтобы воспользоваться программным обеспечением Matlab в условиях дистанционного образовательного процесса, можно использовать один из трех взаимозаменяемых вариантов.

1. Получить студенческую лицензию на сайте разработчика.

https://ch.mathworks.com/campaigns/products/trials.html

2. Воспользоваться сервисами удаленного доступа СПбПУ, позволяющими получить доступ к университетскому серверу Matlab.

https://www.spbstu.ru/upload/it/VDI_for_users.pdf

3. Выполнять задания в свободно распространяемом пакете математического моделирования Octave, язык программирования которого в рамках предлагаемых заданий полностью идентичен языку программирования Matlab.

https://www.gnu.org/software/octave/

https://octave.sourceforge.io/

Для Octave есть online-версия для браузера:

https://octave-online.net/

Лабораторная работа № 2

В настоящей работе для оценки наследственной погрешности результатов вычислений, получаемых после математической обработке результатов, поступающих из измерительных каналов высокоточных измерительных систем, требуется реализовать метод линеаризации (оценка на основе частных производных).

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – это совокупность однородных, а, возможно, и разнородных величин. Пусть Δx_i – абсолютная погрешность величины x_i, т.е $\Delta x_i = x_i - x_{\text{ист } i}$, где $x_{\text{ист } i}$ – истинное значение величины x_i. Пусть Δ_i – предельное (наибольшее возможное) значение модуля абсолютной погрешности величины x_i, то есть $|\Delta x_i| < \Delta_i$.

Пусть алгоритм обработки данных задан функцией

$$y_{\text{ист}} = f(x_{\text{ист } 1}, x_{\text{ист } 2}, \ldots, x_{\text{ист } n}).$$

Требуется определить наибольшее возможное значение модуля абсолютной погрешности результата $y_{\text{ист}}$, вызванного погрешностью исходных данных. Т.е. нас интересует наибольшее значение величины $|\Delta y|$.

Точных значений $x_{\text{ист } 1}, x_{\text{ист } 2}, \ldots, x_{\text{ист } n}$ обрабатываемых данных мы не знаем, и всё, что нам известно, это результаты измерений $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Следовательно, вычислить значение функции $f(x_{\text{ист } 1}, x_{\text{ист } 2}, \ldots, x_{\text{ист } n})$ мы не можем. Всё, что можно сделать, это вычислить значение функции f при известных результатах измерений, т.е. значение $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, либо при каких-либо других заданных нами значениях аргументов.

Суть оценки предела погрешности результата обработки неточных данных методом линеаризации сводится к замене функции f в области значений ее аргументов, совпадающих с результатами измерений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ее линейной аппроксимацией (на основе разложения в ряд Тейлора).

В общем виде линейное приближение к величине $|\Delta y|$ записывается как

$$|\Delta y| \le \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i \right| \le \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} \right| \cdot |\Delta x_i| = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta_i .$$

Следовательно, значение Δ_y можно приближенно оценить как

$$\Delta_y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta_i . \qquad (1)$$

Замечание: приведенные выражения получены путем усечения ряда Тейлора для функции f до слагаемых не старше первого порядка. Точность такой оценки Δ_y тем выше, чем меньше значения частных производных функции f порядка, большего, чем первый.

Для оценки Δ_y по формуле (1) необходимо знать пределы погрешностей Δ_i и значения частных производных

$$\frac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_i}$$

исследуемой функции f в заданной точке $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Значения Δ_i известны из технической документации на используемые средства измерений. Значения производных необходимо оценить.

В данной лабораторной работе эта задача решается методом конечных разностей.

Из определения частной производной функции f по некоторому ее аргументу t_i:

$$\frac{\partial f(t_1, t_2, ..., t_n)}{\partial t_i} = \lim_{\Delta t_i \to 0} \frac{f(t_1, t_2, ..., t_{i-1}, t_i + \Delta t_i, t_{i+1}, ..., t_n) - f(t_1, t_2, ..., t_i, ..., t_n)}{(t_i + \Delta t_i) - t_i} . \qquad (2)$$

Тогда значение производной $\partial f / \partial t_i$ в точке $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ может быть приближенно оценено методом конечных разностей, если в формуле (2) взять Δ_i заведомо малым – например, раным порядка $\Delta_i = 10^{-6} \cdot t_i$.

Задание к лабораторной работе № 2 заключается в оценке характеристик погрешности значения заданной функции, реализующей математическую обработку результатов измерений, при помощи метода линеаризации вычисляемой функции.

При выполнении данной лабораторной работы следует использовать: аналитическое выражение $y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, значения $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ и предельные относительные отклонения $\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \ldots, \delta_{x_N}$ из сопроводительного файла для лабораторной работы № 1 при тех же наборах исходных данных. Сравнить результаты с результатами, полученными методами Монте-Карло и Крейновича.