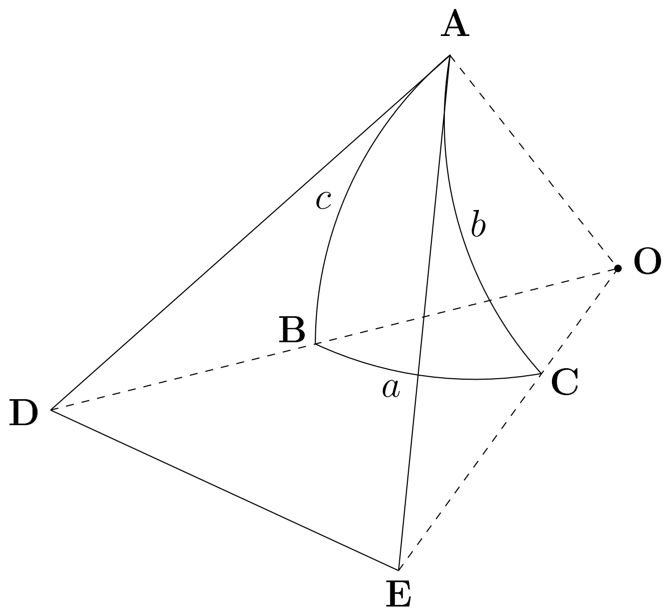
0.1 Сферическая теорема косинусов

Построение: Рассмотрим сферический треугольник с вершинами **A**, **B** и **C** со сторонами a, b и c на сфере с центром в точке **O** и единичным радиусом. Рассмотрим проекцию вершины A на плоскость стороны a. Для этого проведём 2 такие касательные,чтобы они соответственно пересекались с лучами OB и OC. Назовём эти точки пересечения **D** и **E** соответственно.



Запишем теорему косинусов для $\triangle$DOE и $\triangle$DAE:

$$\mathrm{DE}^2 = \mathrm{DO}^2 + \mathrm{OE}^2 - 2 \cdot \mathrm{DO} \cdot \mathrm{OE} \cdot \cos a$$

$$\mathrm{DE}^2 = \mathrm{AE}^2 + \mathrm{DA}^2 - 2 \cdot \mathrm{AE} \cdot \mathrm{DA} \cdot \cos \mathrm{A}$$

Приравняем левые части:

$$\mathrm{DO}^2 + \mathrm{OE}^2 - 2 \cdot \mathrm{DO} \cdot \mathrm{OE} \cdot \cos a = \mathrm{AE}^2 + \mathrm{DA}^2 - 2 \cdot \mathrm{AE} \cdot \mathrm{DA} \cdot \cos \mathrm{A}$$

$$\mathrm{AO}^2 + \mathrm{AO}^2 + 2 \cdot \mathrm{AE} \cdot \mathrm{DA} \cdot \cos \mathrm{A} = 2 \cdot \mathrm{DO} \cdot \mathrm{OE} \cdot \cos a$$

$$\mathrm{AO}^2 + \mathrm{AE} \cdot \mathrm{DA} \cdot \cos \mathrm{A} = \mathrm{DO} \cdot \mathrm{OE} \cdot \cos a$$

Поскольку AD и AE – касательные к окружности, то тогда $\angle \mathrm{OAD} = \angle \mathrm{OAE} =$

90°. Значит:

$$\mathrm{OE} = \frac{\mathrm{AO}}{\cos b} \text{ и } \mathrm{DO} = \frac{\mathrm{AO}}{\cos c}$$

$$\tan b = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AO}} \Rightarrow \mathrm{AE} = \mathrm{AO} \cdot \tan b$$

$$\tan c = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AO}} \Rightarrow \mathrm{AD} = \mathrm{AO} \cdot \tan c$$

Поскольку AO является радиусом окружности, то тогда заменим AO на R:

$$\mathrm{OE} = \frac{\mathrm{R}}{\cos b} \text{ и } \mathrm{DO} = \frac{\mathrm{R}}{\cos c}$$

$$\mathrm{AE} = \mathrm{R}\tan b, \ \ \mathrm{AD} = \mathrm{R}\tan c$$

Подставим это в полученное раннее выражение:

$$\mathrm{R}^2 + \mathrm{R}\tan b \cdot \mathrm{R}\tan c \cdot \cos \mathrm{A} = \frac{\mathrm{R}}{\cos b} \cdot \frac{\mathrm{R}}{\cos c} \cdot \cos a$$

Поскольку сфера единиичного радиуса, то $\mathrm{R} = 1$, тогда:

$$1 + \tan b \cdot \tan c \cdot \cos \mathrm{A} = \frac{1}{\cos b \cos c} \cdot \cos a$$

Преобразовав, получим сферическую теорему косинусов в её привычном виде:

$$\boxed{\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \mathrm{A}}$$

0.2 Сферическая теорема синусов

Для начала запишем уже доказанную сферическую теорему косинусов:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \mathrm{A}$$

$$\cos \mathrm{A} = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$\sin^2 \mathrm{A} = 1 - \cos^2 \mathrm{A} = 1 - \left(\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}\right)^2$$

$$\sin^2 \mathrm{A} = \frac{(\sin b \sin c)^2 - \cos^2 a + 2\cos a \cos b \cos c - (\cos b \cos c)^2}{(\sin b \sin c)^2}$$

Поскольку $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a$, $\sin^2 b = 1 - \cos^2 b$, $\sin^2 c = 1 - \cos^2 c$:

$$\sin^2 \mathrm{A} = \frac{\left(1 - \cos^2 b\right)\left(1 - \cos^2 c\right) - \cos^2 a + 2\cos a \cos b \cos c - \cos^2 b \cos^2 c}{\sin^2 b \sin^2 c}$$

$$\sin^2 \mathrm{A} = \frac{1 - \cos^2 c - \cos^2 b - \cos^2 a + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c}$$

Поделим обе части на $\sin^2 a$:

$$\frac{\sin^2 \mathrm{A}}{\sin^2 a} = \frac{1 - \cos^2 c - \cos^2 b - \cos^2 a + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}$$

Полученное выражение симметрично относительно a, b и c. Если заменить A на B, a на b или A на C и a на c, получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\sin^2 \mathrm{B}}{\sin^2 b} = \dfrac{1 - \cos^2 c - \cos^2 b - \cos^2 a + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c} \\[2ex] \dfrac{\sin^2 \mathrm{C}}{\sin^2 c} = \dfrac{1 - \cos^2 c - \cos^2 b - \cos^2 a + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c} \end{cases}$$

Откуда получаем сферичекую теорему синусов в привычном виде:

$$\boxed{\frac{\sin a}{\sin \mathrm{A}} = \frac{\sin b}{\sin \mathrm{B}} = \frac{\sin c}{\sin \mathrm{C}}}$$