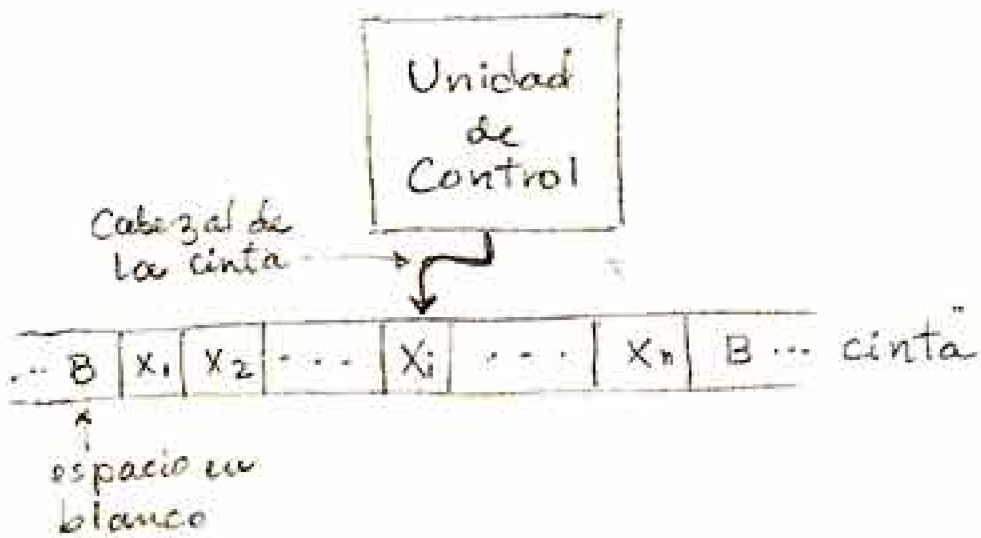
Máquinas de Turing

Herramienta para determinar indecibilidad o intratabilidad de los problemas. Modelo matemático sencillo de un computador. Podemos modelar cualquier cosa que haga un computador

- indecibilidad = no tiene solución algoritmica
- intratabilidad = problemas decidibles con tiempos grandes de resolución.

Desarrollada por Alan Turing en 1936.
Surge la Teoría Matemática de la Computación (un algoritmo es la representación formal y sistemática de un proceso y se demuestra que no todos son representables. Surge la teoría de la computabilidad).

Notación



- Unidad de Control: Conjunto finito de estados
- Cinta: dividida en casillas. tiene un simbolo por casilla. Es infinita pero contiene el conjunto de simbolos de entrada
- Cinta de entrada es la cadena de simbolos de longitud finita ($x_1 \ldots x_n$)

- Cinta infinita inicializada con B (espacio en blanco) es un simbolo de la cinta y no es un símbolo de entrada.
- Cabeza de la cinta: al principio esta en la casilla mas a la izquierda de la cinta de entrada.
- Sobre la cinta se puede leer y escribir
- El cabezal puede moverse a la izquierda o a la derecha (celda por celda) cualquier cantidad de veces
- La cinta de entrada no tiene intercalados B

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$$

Q: conjunto finito de estados de la Unidad de Control.

Σ: " " " símbolos de entrada

Γ: " " " " " la cinta $(\Sigma \subseteq \Gamma)$

δ: función de transición.

$$\delta(q, \overset{\text{lee}}{X}) = (p, \overset{\text{escribe}}{Y}, S) \qquad Q \times \Gamma \longmapsto Q \times \Gamma \times \{D, I\}$$

q, p son estados

X símbolo de la cinta (lee) — Γ } apuntados por el cabezal

Y símbolo de Γ que se escribe } apuntados por el cabezal

S sentido de movimiento del cabezal $\{D, I\}$

D: derecha, I: izquierda.

q_0: estado inicial

B: símbolo de espacio en blanco B en Γ pero no en Σ

F: conjunto de estados finales o de Aceptación. $F \subseteq Q$.

<u>Descripciones</u> <u>Instantaneas</u> o <u>Configuraciones</u>

$\alpha_1 q \alpha_2$; con α_1, α_2 en Γ^*, q en Q, $\alpha_1\alpha_2$ esta en la cinta.

Sea $X_1 X_2 \ldots X_{i-1} q X_i \ldots X_n$ una DI, la maquina está en el estado q leyendo X_i:

$$q \xrightarrow{X_i/Y \leftarrow} p$$

$$\delta(q, X_i) = (p, Y, I)$$

Y → escribimos (reemplazamos) en la cinta (X_i por Y)

. Si $i-1 = n$ estamos sobre un B. $i = n+1$

. Si $i < 1$ estamos sobre un B.

$$X_1 X_2 \ldots X_{i-1} q X_i \ldots X_n \vdash X_1 X_2 \ldots X_{i-2}\, p\, X_{i-1} Y X_{i+1} \ldots X_n$$

Usamos "$\vdash$" para una sola transición y $\vdash^*$ para la clausura reflexiva y transitiva de $\vdash$

. Si $i = n$ y $Y = B$, X_n es ahora B y no se muestra en la cadena de entrada $X_1 X_2 \ldots X_{n-2}\, p\, X_{n-1}$

Ejemplo: Máquina de Turing que acepte

$$L = \{0^n 1^n \mid n \geq 1\}$$

Estrategia: recorrer la cadena de derecha a izquierda sustituyendo 0 x X y 1 x Y por parejas hasta conseguir un B a la derecha.

000111	reemplaza 0 por X
X00Y11	1 por Y
XX0YY1	
XXXYYYB	leo un B y paso al estado final

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$

$\Sigma = \{0, 1\}$

$\Gamma = \{0, 1, X, Y, B\}$

$F = \{q_4\}$

δ :

	0	1	X	Y	B
q_0	(q_1, X, D)			(q_3, Y, D)	
q_1	$(q_1, 0, D)$	(q_2, Y, I)		(q_1, Y, D)	
q_2	$(q_2, 0, I)$		(q_0, X, D)	(q_2, Y, I)	
q_3				(q_3, Y, D)	(q_4, B, D)
q_4					

Función de cada estado:

q_0: cambia 0 por X

q_1: cambia 1 por Y

q_2: Chequea $0^n 1^n$ inicia o termina ciclo

q_3: Brinca la Y hasta el blanco

q_4: estado final.

ojo: para ningún otro caso hay transición.

La MT se tranca y no se está en q_4 por tanto no acepta

Para la cadena 0011, la computación sería:

$q_0 0011 \vdash Xq_1 011 \vdash X0q_1 11 \vdash Xq_2 0Y1 \vdash q_2 X0Y1 \vdash$
$Xq_0 0Y1 \vdash XXq_1 Y1 \vdash XXYq_1 1 \vdash XXq_2 YY \vdash Xq_2 XYY \vdash$
$XXq_0 YY \vdash XXYq_3 Y \vdash XXYYq_3 \vdash XXYYBq_4$

El lenguaje aceptado por una MT M,

$$L(M) = \{ w \mid w \text{ en } \Sigma^*, \; q_0 w \vdash^* \alpha_1 q \alpha_2, \; \alpha_1 \alpha_2 \text{ en } \Gamma^* \text{ y } q \text{ en } F \}$$

Aquí puede ser que no se procese algunos símbolos y sin embargo ya acepte la cadena de entrada.

L(M) es denominado "Lenguajes recursivamente enumerables", o LRE. Un subconjunto de los LRE son los "lenguajes recursivos", para los cuales siempre existe al menos una MT que se detenga para todas las posibles entradas.

Utilidad de las MT:

- Aceptar Lenguajes

b) - Contador, enumerador o generador de lenguajes

a) - Computador de funciones matemáticas sobre enteros.

Extensiones y técnicas de programación de MT

③ MT con varias cintas (varios cabezales)

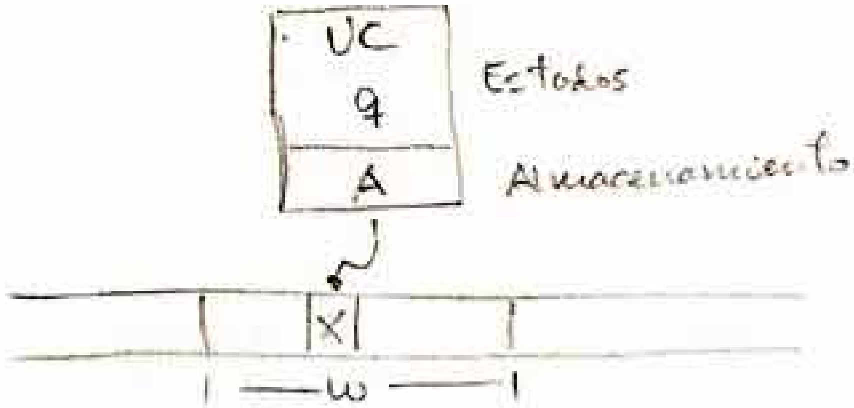
② MT con pistas múltiples (1 solo cabezal)

① Almacenamiento en el estado de la UC

④ MT simula a un computador

Nota: Ninguna extensión o técnica de programación agrega potencialidad a la MT. Solo nos permite sencillez y facilidad para resolver problemas.

① Almacenamiento en la UC (estado) (Técnica de programación)



La UC puede utilizarse como:
- Representar una situación en el "programa".
- Recordar un # finito de datos.

El estado es una tupla $[q, A]$

Por ejemplo: Una MT para $L = \{01^* + 10^*\}$ ⇒ L. Regular

Estrategia es recordar el 1º símbolo en la UC y comprobar que no aparece en el resto de la cadena.

$$M = (Q, \{0,1\}, \{0,1,B\}, \delta, [q_0, B] \{[q_1, B]\})$$

δ:

① $\delta([q_0, B], a) = ([q_1, a], a, D)$ $a = \{0, 1\}$
El símbolo a que se lee se copia en el almacenamiento del estado

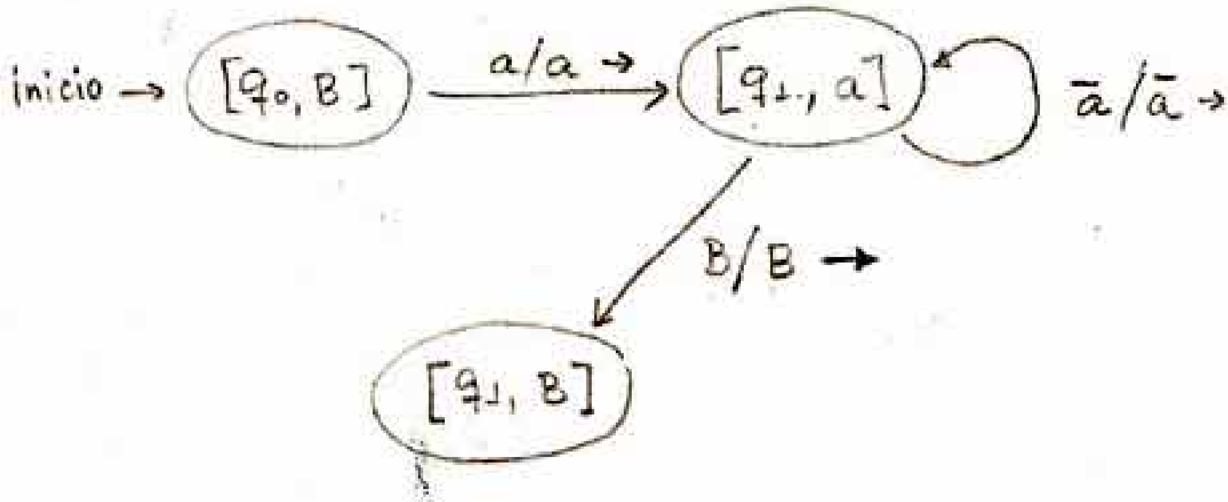
② $\delta([q_1, a], \bar{a}) = ([q_1, a], \bar{a}, D)$ donde $\bar{a}$ es el complemento de a

③ $\delta([q_1, a], B) = ([q_1, B], B, D)$ Si M alcanza el 1º espacio en blanco pasa al estado de aceptación.

Diagrama de transición

$$\delta(q, X) = (p, Y, I)$$

$$q \xrightarrow{X/Y \leftarrow} p$$



② Pistas Múltiples (técnica de Programación) (1 cabezal)

Estructura de datos que puede ser útil

Estrategias:

a) Cada pista almacena un símbolo de entrada y el alfabeto contiene tuplas (del tamaño = # pistas)

b) Una de las pistas almacena los símbolos de entrada y la otra una marca

P. Ejemplo: Una MT para el $L = \{ wcw \mid w \text{ pertenece } (0+1)^* \}$

Se usa la técnica de almacenamiento en la unidad de Control de manera que los estados son tuplas $[q, a]$ $a = \{0, 1\}$

$$Q = \underbrace{\{q_1, q_2, \cdots q_9\}}_{q_i} \times \underbrace{\{0, 1\}}_{\Sigma}$$

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$$

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, [q_1, B], [B, B], \{[q_9, B]\})$$

control

Pista 1 | B B ···· B | $\{B, *\}$ * símbolo de revisado

pista 2 | x_1 x_2 ···· x_n | $\{0, 1, c, B\}$

cinta de entrada

Un símbolo de la cinta es $[B, x_i]$ o $[*, x_i]$

$$\Sigma = \{ [B, 0], [B, 1] \}$$

δ:

① $\delta([q_1, B], [B, a]) = ([q_2, a], [*, a], D)$ tachar 1º símbolo, $a = \{0, 1\}$ no revisado y almacenar

② $\delta([q_2, a], [B, b]) = ([q_2, a], [B, b], D)$ Mover a la D, $b = \{0, 1\}$

③ $\delta([q_2, a], [B, c]) = ([q_3, a], [B, c], D)$ Detectar al símbolo "c"

④ $\delta([q_3, a], [*, b]) = ([q_3, a], [*, b], D)$ Saltar *

⑤ $\delta([q_3, a], [B, a]) = ([q_4, B], [*, a], I)$ Consegui $a = a$, reinicio almacenamiento, regreso a la I

⑥ $\delta([q_4,B],[*,a]) = ([q_4,B],[*,a],I)$

⑦ $\delta([q_4,B],[B,c]) = ([q_5,B],[B,c],I)$

⑧ $\delta([q_5,B],[B,a]) = ([q_6,B],[B,a],I)$

⑨ $\delta([q_6,B],[B,a]) = ([q_6,B],[B,a],I)$ q_6 caso del w derecho sin procesar completamente

⑩ $\delta([q_6,B],[*,a]) = ([q_1,B],[*,a],D)$ 1º símbolo no comparado

⑪ $\delta([q_5,B],[*,a]) = ([q_7,B],[*,a],D)$ se tachó el lado izq. completo

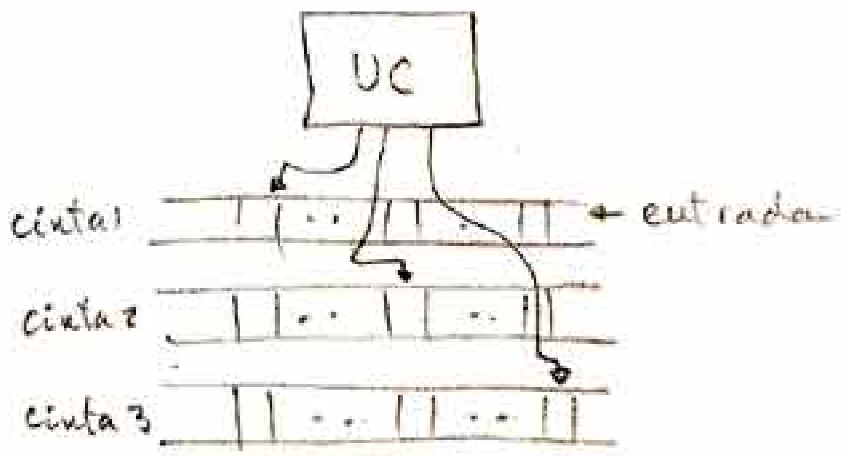
⑫ $\delta([q_7,B],[B,c]) = ([q_8,B],[B,c],D)$ lee la c

⑬ $\delta([q_8,B],[*,a]) = ([q_8,B],[*,a],D)$ todo lo que lee esta tachado

⑭ $\delta([q_8,B],[B,B]) = ([q_9,B],[B,B],D)$ llega al B a la derecha de la entrada sin ver ningun 0,1

③ <u>Mt con varias cintas</u> (varios cabezales) (Extensión)

Igual al Modelo básico de Mt solo que se tiene un número finito de cintas y cabezales.



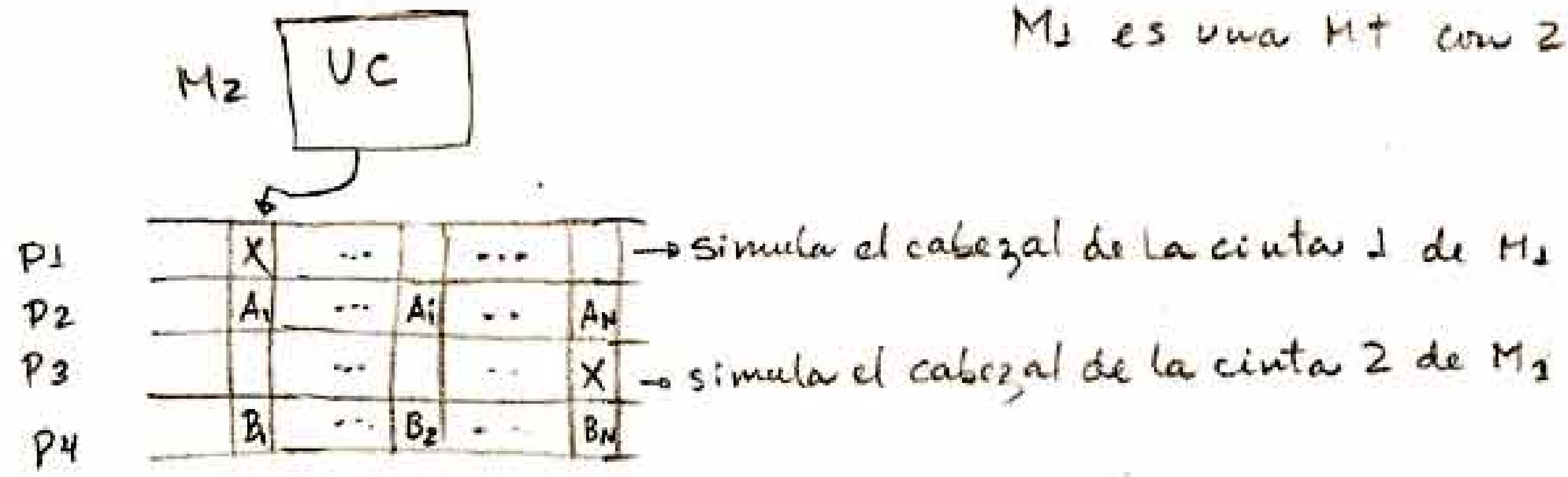
Arrancar:
- la cabeza de la 1ª cinta esta en el extremo izquierdo
- el resto de las cadenas de las cintas señala posiciones arbitrarias

Cada Movimiento:
- estado
- simbolo leido x cada cabeza de cinta

Luego de cada Movimiento se especifica:
- Estado de la UC (nuevo)
- Nuevo simbolo de cada cinta
- Movimiento de cada cabeza (movimientos independientes) {D, I, E(estacionario)}

Se puede simular una Mt M_1 con K cintas que acepta L con una Mt M_2 de una sola cinta con 2K pistas

M1 es una Mt con 2 cintas



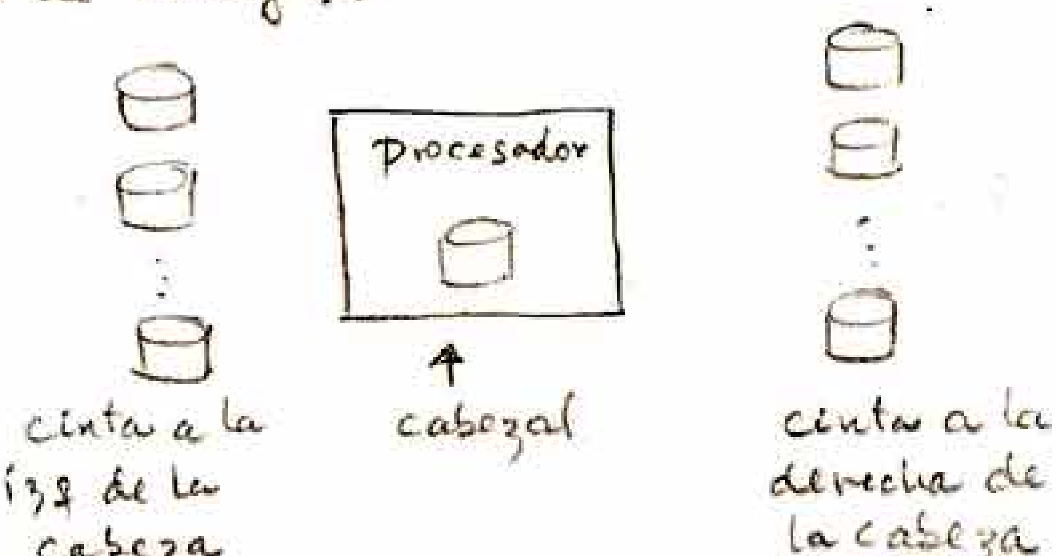
(4) Mt simula a un computador, Computador simula Mt.

a) Computador simula Mt

Escribir un programa que actue como una MT.
La UC es un número finitos de estados y reglas:

- transiciones = tabla para determinar movimientos
- símbolos de la cinta son cadenas de caracteres de longitud fija

Detalle: Cómo podemos simular la cinta infinita de Turing??



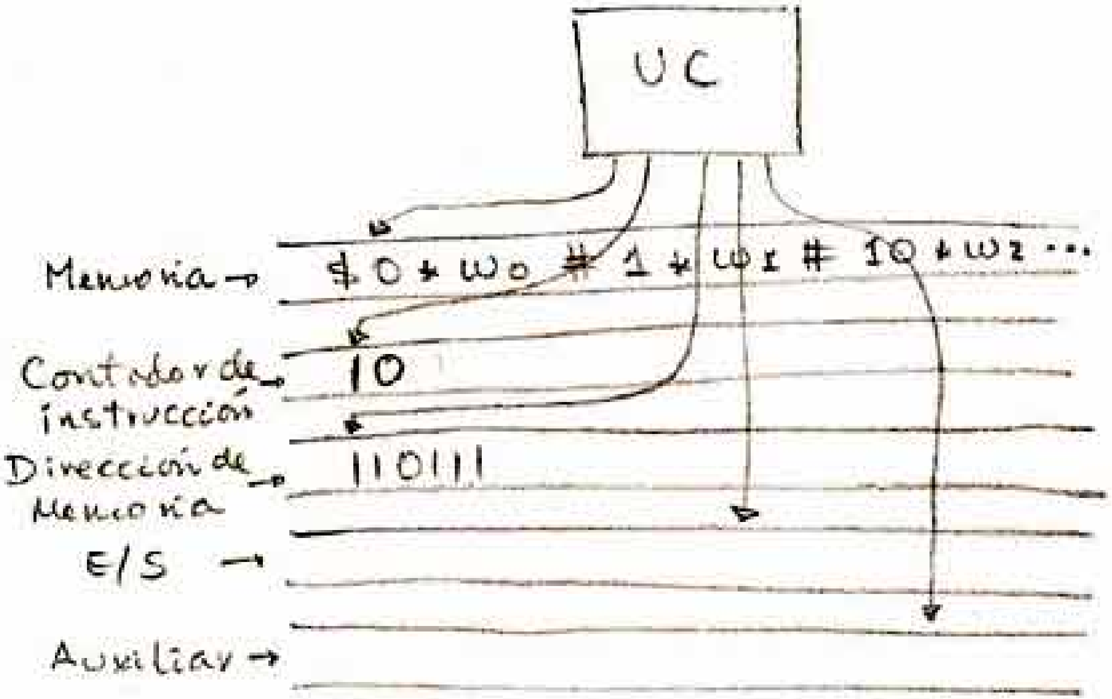
. Si es posible reemplazar los dispositivos de almacenamiento (asume que es posible tener tantos como se necesite)
. En caso contrario es un AF y se aceptan L. Regulares

El programa pediría cambiar o reemplazar el disco del cabezal

b) MT simula a un computador

computador es más rápido que MT generalmente. Los tiempos difieren polinomicamente.

<u>teorema:</u> Una MT con una cinta puede simular "n" pasos de un computador utilizando $O(n^6)$ de sus propios pasos.



Asume:

- tamaño de la palabra es infinito (w_i)
- Registros del computador para realizar operaciones → asume que las operaciones se pueden dar en cualquier palabra.
- El programa se almacena en Memoria.

- todo se escribe en binario. Los marcadores "#" (instrucción) y "*" se usan para separar los contenidos. $ indica comienzo. # dir * instrucción #
- La MT simula el ciclo de instrucción del computador.

Utilidad de la MT

a) Computador de funciones matemáticas sobre enteros.

Los enteros se representan en código unario, con bloques de un único caracter cuya longitud es igual al número.

$3 = 000$
$8 = 00000000$

Los argumentos se separan por otro código.

La operación aritmética consiste en variar la longitud del bloque o en escribir más bloques en otro lugar de la cinta. $8 - 3 \Rightarrow 00000000\,1\,000$ → Separador de argumentos

$8 - 3 = 5 \Rightarrow 00000$

P.E. MT para realizar la sustracción propia

$$m \dot{-} n = \begin{cases} m - n & \text{si } m \geq n \\ 0 & \text{si } n > m \end{cases}$$

$\boxed{\text{La MT se detiene con } 0^{m \dot{-} n} \ (m \dot{-} n \text{ ceros})}$

$M = (\{q_0, q_1, \dots q_6\}, \{0,1\}, \{0,1,B\}, \delta, q_0, B)$

ojo no hay estado de aceptación → calculando

		0	1	B
1° op	q_0	(q_1, B, D)	(q_5, B, D)	–
Buscar 2° op.	q_1	$(q_1, 0, D)$	$(q_2, 1, D)$	–
2° do	q_2	$(q_3, 1, I)$	$(q_2, 1, D)$	(q_4, B, I)
Buscar → repetir ciclo	q_3	$(q_3, 0, I)$	$(q_3, 1, I)$	(q_0, B, D)
	q_4	$(q_4, 0, I)$	(q_4, B, I)	$(q_6, 0, D)$
	q_5	(q_5, B, D)	(q_5, B, D)	(q_6, B, D)
	q_6	–	–	–

$q_0 0010 \vdash B q_1 010 \vdash$
$B0 q_1 10 \vdash B01 q_2 0 \vdash$
$B0 q_3 11 \vdash B q_3 011 \vdash$
$q_3 B011 \vdash q_0 011 \vdash$
$B q_1 11 \vdash 1 q_2 1 \vdash$
$11 q_2 B \vdash 1 q_4 1 \vdash$
$q_4 10 \vdash q_4 BB0 \vdash$

q_0 : cero 0 más a la izq y lo cambia por B (1° operando)

q_1 : busca el primer "1" desde la izq

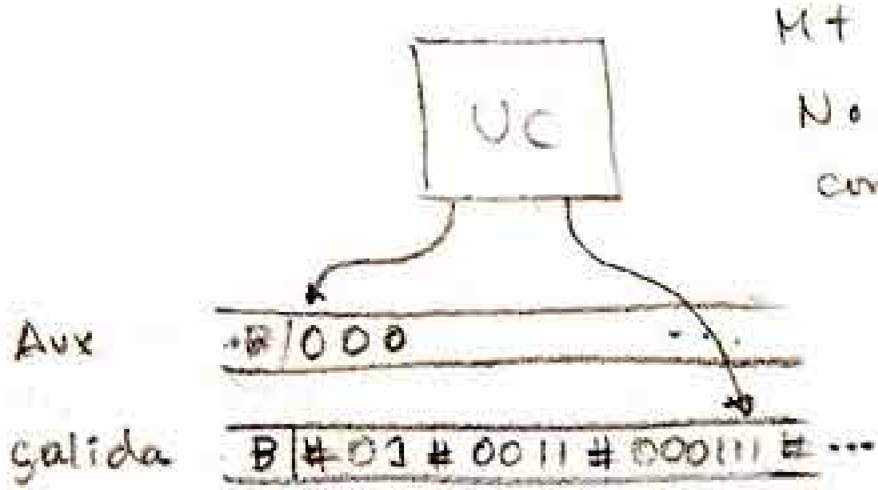
q_2 : busca 0 más a la izq y lo cambia por 1 (2° operando)

q_3 : busca 0 más a la izq ⇒ conseguir un B para repetir ciclo (q_0)

q_4 : caso $m \geq n$, El 1° operando tiene $n+1$ 0 x B, regreso I, pone en B los 1 y agrega un 0 por el 1° B

q_5 : caso $n > m$ sustituye todo por B.

b) <u>Generador de lenguajes</u> (enumerador)



Mt usa una cinta como salida.
No acepta, solo llena la cinta con cadenas del lenguaje

Generando $= 0^n 1^n \quad n \geq 1$

Un generador es una Mt con multiples cintas, de las cuales una es usada como salida. En la cinta de salida se imprimen las cadenas generadas (w en Σ^+) separadas por el símbolo # (# no esta en Σ), Su cabezal nunca se mueve a la izquierda y una vez que un simbolo es escrito nunca es cambiado. Una Mt con K cintas

$$\delta(q, A_1, \dots A_K) := (p, (B_1, D_1), \dots (B_K, D_K))$$

$D_K = \{I, D, E\}$

$\delta(q_0, B, B) = (q_1, (0, I), (\#, D))$ → inicio de la cadena

$\delta(q_1, 0, B) = (q_1, (0, I), (B, E))$
$\delta(q_1, B, B) = (q_2, (B, D), (B, E))$ } busca inicio del Aux cinta 1 para poner 0

$\delta(q_2, 0, B) = (q_2, (0, D), (0, D))$ → coloca 0 en cinta 2 tantos como 0 tenga cinta 1

$\delta(q_2, B, B) = (q_3, (B, I), (B, E))$ → fin de 0

$\delta(q_3, 0, B) = (q_3, (0, I), (B, E))$
$\delta(q_3, B, B) = (q_4, (B, D), (B, E))$ } busca inicio de Aux cinta 1 para poner 1

$\delta(q_4, 0, B) = (q_4, (0, D), (1, D))$ → coloca 1 en cinta 2 tantos como 0 tenga la cinta 1.

$\delta(q_4, B, B) = (q_0, (B, E), (B, E))$ → fin de 1, reinicia el ciclo infinitamente.

Esta Mt no para! por qué?

Ejercicios:

- Explicar como diseñaría una MT que acepte el siguiente Lenguaje (sin detallar función de transición)

$$L = \{ww \mid w \text{ en } (a+b)^*\}$$

- Un generador para $L = \{1^{n+1}0^n,\ n \geq 1\}$

- Diseñe una MT con 1 sola cinta y una sola pista que acepte $L = \{w \mid w \text{ en } (a+b)^* \text{ y el } \#a = \#b\}$

- Diseñe una MT para multiplicar $0^m 1 0^n$ y el resultado $0^{m \times n}$

paso i $0^{m-i}\,1\,0^n\,1\,0^{n(i)}$ 1 sola cinta

Una para hacer la suma del binario de un número + 1.

$q_0 100 \vdash^* q_f 101$

$q_0 111 \vdash^* q_f 1000$

paso i

0^{m-i}	1ª cinta
0^n	2ª cinta
$0^{n \times i}$	3ª cinta

- Diseñe MT para

$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$

$L = \{ww^R \mid w \text{ está en } (0+1)^*\}$

$L = \{a^i b^j c^k \mid k = \min(i,j),\ i,j \geq 1\}$

$L = \{0^n 1^m \mid n \geq m \geq 1\}$

$L = \{$ todas las cadenas de la forma $w_1\#w_2\#w_3\#\ldots\#w_n$, para cualquier n tal que w_i en $(0+1)^*$ y coincide con la representación binaria de i.

- Qué ocurre cuando un AP se le permite usar múltiples pilas