Жабин Д. И.

Численные методы

Методические указания
по выполнению лабораторно-практических
и самостоятельных работ

Томск — 2022

Содержание

Введение

Численные методы — методы решения математических задач, где входные данные в задаче и её выходные данные (решение) представлены в виде числа или набора чисел. С их помощью можно относительно легко решать самые разные прикладные математические задачи, многие из которых сложно — а иногда и невозможно — решать аналитически. Многие численные методы вошли в математические библиотеки.

Практические работы можно выполнять на разных языках программирования (C, C++, Python, R, Scheme, Haskell и так далее) либо с помощью табличного процессора (с помощью формул). Большая часть представленных заданий — это прикладные задачи, ко многим из них даны примеры и формулы.

Далее представлены шесть практических работ. Каждая работа включает 15 вариантов: пять упрощённых вариантов, восемь вариантов обычного уровня сложности и два варианта повышенного уровня сложности. Чтобы решить задания повышенной сложности, может понадобиться найти какую-то дополнительную информацию.

По каждой практической работе следует предоставить отчёт, содержащий постановку задачи, формулировку задания, описание используемых методов и полученные результаты. Предоставьте график, если это требуется.

Лабораторная работа № 1

Вычисление погрешностей результатов арифметических действий

Постановка задачи

Цель работы — научиться вычислять абсолютные и относительные погрешности результатов арифметических действий.

Задание

1. Проинтегрировали некоторую функцию $f(x)$ и получили точное значение x (формула 1.1).

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = x. \tag{1.1}$$

А при численном интегрировании с помощью программы получили значение x^*. Вычислите абсолютную погрешность $\Delta(x^*)$ и относительную погрешность $\delta(x^*)$ этого приближения по формулам (1.2) и (1.3). Значения x и x^* указаны в таблице 1.1. Относительную погрешность в этом и следующих заданиях выражайте в долях от единицы и в процентах.

$$\Delta(x^*) = |x^* - x| \tag{1.2}$$

№ варианта		Точное значение x	Приближённое значение x^*
1		77,94	77,28
2		18,02	18,65
3		84,51	83,87
4		60,65	60,52
5		76,57	75,89
6		50,88	50,79
7		25,56	25,86
8		55,46	55,92
9		81,22	81,47
10		69,55	69,21
11		48,67	49,29
12		62,62	62,87
13		58,21	58,56
14	*	$2{,}998 \times 10^{10}$	2,992E10
15	*	$8{,}647 \times 10^{-7}$	8,698E−7

Таблица 1.1: Данные для задания № 1

$$\delta(x^*) = \frac{\Delta(x^*)}{|x^*|} \tag{1.3}$$

2. Для примера рассмотрим число $a^* \approx 17{,}2 \pm 0{,}001$, абсолютная погрешность $\Delta(a^*) = 0{,}001$, то есть $a^* \approx 17{,}2 \pm \Delta(a^*)$; относительная погрешность $\delta(a^*) = \dfrac{0{,}001}{|17{,}2|} \approx 0{,}00006 = 0{,}006\,\%$.

По аналогии рассчитайте абсолютную и относительную погрешности чисел x^* и y^* (значения указаны в таблице 1.2).

Заполните таблицу 1.3, используя формулы (1.4—1.11).

Погрешность суммы:

$$\Delta(x^* + y^*) = \Delta(x^*) + \Delta(y^*) \tag{1.4}$$

$$\delta(x^* + y^*) = \frac{\Delta(x^*) + \Delta(y^*)}{|x^* + y^*|} = \frac{\delta(x^*) \cdot |x^*| + \delta(y^*) \cdot |y^*|}{|x^* + y^*|} \tag{1.5}$$

Погрешность разности:

$$\Delta(x^* - y^*) = \Delta(x^*) + \Delta(y^*) \tag{1.6}$$

$$\delta(x^* - y^*) = \frac{\Delta(x^*) + \Delta(y^*)}{|x^* - y^*|} = \frac{\delta(x^*) \cdot |x^*| + \delta(y^*) \cdot |y^*|}{|x^* - y^*|} \tag{1.7}$$

№ варианта		Приближённое число x^*	Приближённое число y^*
1		$34{,}71 \pm 0{,}001$	$72{,}25 \pm 0{,}002$
2		$56{,}43 \pm 0{,}001$	$56{,}09 \pm 0{,}002$
3		$53{,}61 \pm 0{,}001$	$53{,}18 \pm 0{,}002$
4		$25{,}14 \pm 0{,}001$	$25{,}16 \pm 0{,}002$
5		$18{,}73 \pm 0{,}001$	$18{,}68 \pm 0{,}002$
6		$31{,}72 \pm 0{,}001$	$31{,}62 \pm 0{,}002$
7		$27{,}68 \pm 0{,}001$	$27{,}06 \pm 0{,}002$
8		$42{,}57 \pm 0{,}001$	$42{,}37 \pm 0{,}002$
9		$32{,}94 \pm 0{,}001$	$32{,}25 \pm 0{,}002$
10		$75{,}23 \pm 0{,}001$	$75{,}68 \pm 0{,}002$
11		$75{,}45 \pm 0{,}001$	$75{,}32 \pm 0{,}002$
12		$14{,}47 \pm 0{,}001$	$14{,}62 \pm 0{,}002$
13		$53{,}24 \pm 0{,}001$	$52{,}45 \pm 0{,}002$
14	*	$0{,}8492 \cdot 10^2 \pm 0{,}001$	$0{,}8509 \cdot 10^2 \pm 0{,}002$
15	*	$0{,}8247 \cdot 10^2 \pm 0{,}001$	$0{,}8229 \cdot 10^2 \pm 0{,}002$

Таблица 1.2: Данные для задания № 2

Погрешность произведения:

$$\Delta(x^* \cdot y^*) = |x^*| \cdot \Delta(y^*) + |y^*| \cdot \Delta(x^*) \tag{1.8}$$

$$\delta(x^* \cdot y^*) = \frac{\Delta(x^*)}{|x^*|} + \frac{\Delta(y^*)}{|y^*|} = \delta(x^*) + \delta(y^*) \tag{1.9}$$

Погрешность частного:

$$\Delta\left(\frac{x^*}{y^*}\right) = \frac{1}{|y^*|} \cdot \Delta(x^*) + \frac{|x^*|}{|y^*|^2} \cdot \Delta(y^*) \tag{1.10}$$

$$\delta\left(\frac{x^*}{y^*}\right) = \frac{\Delta(x^*)}{|x^*|} + \frac{\Delta(y^*)}{|y^*|} = \delta(x^*) + \delta(y^*) \tag{1.11}$$

Операция	Погрешность	
	Абсолютная	Относительная
Сумма	$\Delta(x^*+y^*) =$	$\delta(x^*+y^*) =$
Разность	$\Delta(x^*-y^*) =$	$\delta(x^*-y^*) =$
Произведение	$\Delta(x^*\cdot y^*) =$	$\delta(x^*\cdot y^*) =$
Частное	$\Delta(x^*/y^*) =$	$\delta(x^*/y^*) =$

Таблица 1.3: Погрешности арифметических операций

3. Некоторое число x округляют до целого x^*. Определите абсолютную погрешность $\Delta(x^*)$ и относительную погрешность $\delta(x^*)$ приближённого результата (точные и округлённые до целого числа см. в таблице 1.4).

Примечание. Знак $\lfloor x \rfloor$ показывает, что результат округляется до целых в нижнюю сторону, $\lceil x \rceil$ — в верхнюю сторону.

№ варианта		Точное число x	Приближённое число x^*
1		37,59	$\lfloor 37{,}59 \rfloor = 37$
2		82,21	$\lceil 82{,}21 \rceil = 83$
3		91,82	$\lfloor 91{,}82 \rfloor = 91$
4		55,76	$\lceil 55{,}76 \rceil = 56$
5		80,54	$\lfloor 80{,}54 \rfloor = 80$
6		77,01	$\lceil 77{,}01 \rceil = 78$
7		23,58	$\lfloor 23{,}58 \rfloor = 23$
8		94,13	$\lceil 94{,}13 \rceil = 95$
9		36,62	$\lfloor 36{,}62 \rfloor = 36$
10		41,19	$\lceil 41{,}19 \rceil = 42$
11		15,22	$\lfloor 15{,}22 \rfloor = 15$
12		68,24	$\lceil 68{,}24 \rceil = 69$
13		31,11	$\lfloor 31{,}11 \rfloor = 31$
14	*	80,61	$\lfloor x \rfloor$
15	*	13,62	$\lceil x \rceil$

Таблица 1.4: Данные для задания № 3

4* (только для вариантов 14 и 15). Сомнительные цифры приближённого числа x^* с относительной погрешностью $\delta(x^*)$ можно отбросить, оставив только верные цифры. Например, если приближённое число $x^* \approx 4{,}12157$, а $\delta(x^*) = 0{,}5\,\%$, то количество верных цифр n вычисляется по формуле (1.12):

$$n = [1 - \log_{10}(d \cdot \delta(x^*))], \tag{1.12}$$

где d — старший (то есть самый левый) разряд (у числа 4,12157 это 4), а квадратные скобки означают округление до ближайшего целого. Получается, что

$$n = [1 - \log_{10}(4 \cdot 0{,}005)] = [2{,}699...] = 3, \tag{1.13}$$

то есть можно записать $x^* \approx 4{,}12$, оставив три верные цифры и отбросив сомнительные, это и будет ответом.

Отбросьте сомнительные цифры в заданном с относительной погрешностью $\delta(x^*)$ приближённом числе x^* (см. таблицу 1.5).

№ варианта		Приближённое число x^*	Погрешность $\delta(x^*)$
14	*	0,38211712	0,5%
15	*	0,46539824	0,4%

Таблица 1.5: Данные для задания № 4

5* Вычислите абсолютную и относительную погрешности объёма геометрической фигуры (см. таблицу 1.6).

№ варианта		Фигура	Объём	Аргументы
14	*	Цилиндр	$V = \pi r^2 h$	$\pi = 3{,}14$, $\Delta_\pi = 0{,}01$ $r = 5 \pm 0{,}05$ см, $h = 14 \pm 0{,}05$ см
15	*	Шар	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	$\pi = 3{,}14$, $\Delta_\pi = 0{,}01$, $r = 9 \pm 0{,}05$ см

Таблица 1.6: Данные для задания № 5

Примечание. Для произвольной функции $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ абсолютная погрешность вычисляется по формуле:

$$\Delta_f = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta_i$$

Относительная погрешность:

$$\delta_f = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta_i = \frac{\Delta_f}{|f|}$$

Лабораторная работа № 2

Решение алгебраических и трансцендентных уравнений

Постановка задачи

Цель работы — написать программу для численного решения уравнений различными методами (в отчёт поместите график).
В каждом варианте поставлена некоторая прикладная задача, для которой нужно составить функцию, приравнять её нулю и найти решение получившегося уравнения на заданном интервале.

Задание

Варианты 1—5 (упрощённые). Напишите программу для решения заданного уравнения с помощью трёх методов: метода дихотомии (половинного деления), метода хорд и метода грубой силы. Уравнения даны в таблице 2.1.

№	Уравнение	Интервал
1	$x^2-5=0$	$x\in[-15;1]$
2	$x^3-x^2+30=0$	$x\in[-6;0]$
3	$(x-5)^3-4=0$	$x\in[3;9]$
4	$-(x+2)^2+15=0$	$x\in[-3;7]$
5	$x^4-x^3+15x^2-30=0$	$x\in[0;4]$

Таблица 2.1: Данные для вариантов 1—5

Варианты 6—10. Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t)$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. В какой момент времени мяч коснётся земли? Законы определены в таблице 2.2. Решите задачу с помощью методов: дихотомии, хорд и грубой силы (перебора).

Варианты 11—13. Антенна датчика принимает радиосигнал, который переводится в электрический сигнал, изменяющийся по закону:

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi),$$

где t — время (в секундах), U_0 — амплитуда сигнала (В), ω — частота (рад/с), φ — фаза (рад). На датчике установлена лампочка, которая горит, если напряжение в нём больше нуля. Определить, когда лампочка погаснет впервые (то есть напряжение упадёт до нуля). Законы заданы в таблице 2.2. Решите с помощью методов дихотомии, касательных (Ньютона) и грубой силы (перебора).

№		Закон	Интервал
6		$h(t) = -5t^2 + 8t + 1$	$t \in [0; 2]$
7		$h(t) = -5t^2 + 12t + 1{,}6$	$t \in [0; 3]$
8		$h(t) = -4t^2 + 7t + 2{,}04$	$t \in [0; 3]$
9		$h(t) = -5t^2 + 9t + 1{,}4$	$t \in [0; 4]$
10		$h(t) = -5t^2 + 7t + 2$	$t \in [0; 2]$
11		$U(t) = 30 \cdot \cos(1{,}39t + 0{,}52)$	$t \in [0; 2]$
12		$U(t) = 30 \cdot \cos(0{,}2t + 1{,}2)$	$t \in [0; 14{,}6]$
13		$U(t) = 30 \cdot \cos(0{,}31t + 0{,}7)$	$t \in [0; 5]$
14	*	$H_0 = 40, k = \frac{1}{50}$	$t \in [0; 200]$
15	*	$H_0 = 47, k = \frac{1}{70}$	$t \in [0; 250]$

Таблица 2.2: Данные для вариантов 6—15

Варианты 14—15 (повышенной сложности). У дна бака расположен кран. Кран открыли, высота столба меняется по закону:

$$H(t) = H_0 - kt\sqrt{2gH_0} + \frac{gk^2t^2}{2},$$

где H — высота (м), H_0 — начальная высота (м), k — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, t — время (с), $g = 9{,}8$ м/с^2. Параметры заданы в таблице 2.2. В какой момент вода вытечет полностью? Особенность функции $H(t)$ в том, что она имеет с осью Ox только одну общую точку (функция убывает до 0, затем возрастает). Используйте производную для поиска экстремума функции $H(t)$.

Лабораторная работа № 3

Решение систем линейных алгебраических уравнений

Постановка задачи

Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) применяются для моделирования реальных объектов и процессов. Среди распространённых прикладных задач — задачи на сплавы и смеси, распределение материалов и транспорта в производственных процессах и тому подобные.

Цель работы — написать программу, реализующую указанный в варианте метод решения систем линейных алгебраических уравнений, и с её помощью найти решение поставленной задачи.

Примеры составления СЛАУ

Задача о сплавах. Три куска сплава имеют массу 115 кг. Первый сплав содержит 50 % меди, второй — 20 %, третий — 25 %. При этом во втором и третьем сплавах, вместе взятых, меди на 10 кг меньше, чем в первом сплаве, а во втором сплаве меди на 20 кг меньше, чем в первом. Найти массу каждого куска сплава.

Для решения задачи нужно составить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 115 \\ 0{,}5x_1 - 0{,}2x_2 - 0{,}25x_3 = 10 \\ 0{,}5x_1 - 0,2x_2 = 20 \end{cases}$$

Решая с помощью программы, получаем ответ:

$$x_1 = 50, x_2 = 25, x_3 = 40.$$

Задача о ценных бумагах. Частное лицо купило три пакета акций общей стоимостью 203 доллара. Акции первой группы стоили 6 долларов каждая, второй — 19 долларов, третьей — 5 долларов. Через месяц стоимость акций была, соответственно, 5, 13 долларов и 41 доллар, а стоимость всего пакета — 444 доллара. Ещё через месяц акции стоили 8, 21 и 22 доллара, стоимость пакета — 363 доллара. Сколько акций каждой группы было у этого частного лица?
Для решения задачи нужно составить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 6x_1 + 19x_2 + 5x_3 = 203 \\ 5x_1 + 13x_2 + 41x_3 = 444 \\ 8x_1 + 21x_2 + 22x_3 = 363 \end{cases}$$

Решая с помощью программы, получаем ответ:

$$x_1 = 5, x_2 = 7, x_3 = 8.$$

Задача о перевозках. Из Новосибирска в Томск нужно перевезти оборудование трёх типов: 149 единиц первого типа, 140 единиц второго и 180 единиц третьего типа. Для перевозки оборудования завод может заказать три вида транспорта. Количество оборудования каждого типа, вмещаемого на определённый вид транспорта, приведено в таблице 3.1. Сколько единиц транспорта каждого вида нужно использовать?

		Виды транспорта		
		A	B	C
Оборуд.	I	4	3	2
	II	5	1	3
	III	4	4	3

Таблица 3.1: Данные для задачи о перевозках

Для решения задачи нужно составить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 149 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 140 \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 180 \end{cases}$$

Решая с помощью программы, получаем ответ:

$$x_1 = 17, x_2 = 19, x_3 = 12.$$

Задача о раскрое. Из листового материала необходимо изготовить 577 единиц продукции вида A, 359 единиц вида B и 712 единиц вида C. Количество листов, которые необходимо раскроить способами A, B и C для изготовления каждого вида изделия, указано в таблице 3.2. Какое количество заготовок нужно разрезать каждым из способов для достижения наилучшего результата?

		Способы раскроя		
		A	B	C
Заготов.	I	4	5	2
	II	2	3	2
	III	4	2	5

Таблица 3.2: Данные для задачи о раскрое

Для решения задачи нужно составить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 577 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 359 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 712 \end{cases}$$

Решая с помощью программы, получаем ответ:

$$x_1 = 92, x_2 = 17, x_3 = 62.$$

Задание

Вариант 1 (упрощённый). Написать программу, реализующую метод Гаусса, для решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 15x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 13 \\ x_1 + 17x_2 + 5x_3 = -2 \\ 3x_1 + 64x_2 + 22x_3 = 5 \end{cases}$$

Вариант 2 (упрощённый). Написать программу, реализующую метод Гаусса, для решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15 \\ 3x_1 + 5x_2 + 18x_3 = 66 \end{cases}$$

Вариант 3 (упрощённый). Написать программу, реализующую метод Гаусса, для решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -25 \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -26 \\ 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 = -30 \end{cases}$$

Вариант 4 (упрощённый). Написать программу, реализующую метод Гаусса, для решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 62 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 = 53 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 43 \end{cases}$$

Вариант 5 (упрощённый). Написать программу, реализующую метод Гаусса, для решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 76 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 20 \\ 3x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 42 \end{cases}$$

Вариант 6. Три куска сплава имеют общую массу 115 кг. Первый сплав содержит 50 % меди, второй — 28 %, третий — 15 %. При этом во втором и третьем сплавах, вместе взятых, меди на 8,75 кг меньше, чем в первом сплаве, а в третьем сплаве меди на 0,25 кг меньше, чем во втором. Найти массу каждого куска. Программа должна реализовывать метод Гаусса.

Вариант 7. Три куска сплава имеют общую массу 140 кг. Первый сплав содержит 40 % меди, второй — 18 %, третий — 10 %. При этом во втором и третьем сплавах, вместе взятых, меди на 4,9 кг меньше, чем в первом сплаве, а в третьем сплаве меди на 3,1 кг меньше, чем во втором. Найти массу каждого куска. Программа должна реализовывать метод итераций.

Вариант 8. Частное лицо купило три пакета акций общей стоимостью 232 доллара. Акции первой группы стоили 5 долларов каждая, второй — 20 долларов, третьей — 6 долларов. Через месяц стоимость акций была, соответственно, 6, 14 и 43 доллара, а стоимость всего пакета — 449 долларов. Ещё через месяц акции стоили 10, 19 и 21 доллар, стоимость пакета — 359 долларов. Сколько акций каждой группы было у этого частного лица? Программа должна реализовывать метод Гаусса.

Вариант 9. Частное лицо купило три пакета акций общей стоимостью 331 доллар. Акции первой группы стоили 15 долларов каждая, второй — 20 долларов, третьей — 7 долларов. Через месяц стоимость акций была, соответственно, 14, 23 и 31 доллар, а стоимость всего пакета — 548 долларов. Ещё через месяц акции стоили 11, 21 и 28 долларов, стоимость пакета — 489 долларов. Сколько акций каждой группы было у этого частного лица? Про-грамма должна реализовывать метод итераций.

Вариант 10. Из Новосибирска в Томск нужно перевезти оборудование трёх типов: 165 единиц первого типа, 136 единиц второго и 210 единиц третьего типа. Для перевозки оборудования завод может заказать три вида транспорта. Количество оборудования каждого типа, вмещаемого на определённый вид транспорта, приведено в таблице 3.3. Сколько единиц транспорта каждого вида нужно использовать? Программа должна реализовывать метод Гаусса.

		Виды транспорта		
		A	B	C
Оборуд.	I	3	5	1
	II	4	1	4
	III	6	4	2

Таблица 3.3: Данные для варианта 10

Вариант 11. Из Томска в Новосибирск нужно перевезти оборудование трёх типов: 93 единицы первого типа, 79 единиц второго и 98 единиц третьего типа. Для перевозки оборудования завод может заказать три вида транспорта. Количество оборудования каждого типа, вмещаемого на определённый вид транспорта, приведено в таблице 3.4. Сколько единиц транспорта каждого вида нужно использовать? Программа должна реализовывать метод итераций.

		Виды транспорта		
		A	B	C
Оборуд.	I	4	3	2
	II	5	2	1
	III	4	3	3

Таблица 3.4: Данные для варианта 11

Вариант 12. Из Москвы в Томск нужно перевезти оборудование трёх типов: 71 единицу первого типа, 93 единицы второго и 64 единицы третьего типа. Для перевозки оборудования завод может заказать три вида транспорта. Количество оборудования каждого типа, вмещаемого на определённый вид транспорта, приведено в таблице 3.5. Сколько единиц транспорта каждого вида нужно использовать? Программа должна реализовывать метод Гаусса.

		Виды транспорта		
		A	B	C
Оборуд.	I	7	2	1
	II	7	3	2
	III	5	2	2

Таблица 3.5: Данные для варианта 12

Вариант 13. Из листового материала необходимо изготовить 870 единиц продукции вида A, 540 единиц вида B и 570 единиц вида C. Количество листов, которые необходимо раскроить способами A, B и C для изготовления каждого вида изделия, указано в таблице 3.6. Программа должна реализовывать метод итераций.

		Способы раскроя		
		A	B	C
Заготов.	I	5	4	6
	II	4	4	2
	III	4	2	3

Таблица 3.6: Данные для варианта 13

Вариант 14 (повышенной сложности). Даны два уравнения прямых: $y_1(x) = k_1x + b_1$ и $y_2(x) = k_2x + b_2$ (коэффициенты задаются пользователем). Составьте систему уравнений и найдите координаты (x, y) точки пересечения этих прямых (если они не параллельны). Сделайте график.

Вариант 15 (довольно сложный). Даны три уравнения плоскостей в пространстве: $z_i(x) = a_ix + b_iy + c_i$, $i = \overline{1,3}$ (коэффициенты задаются пользователем). Составьте систему уравнений и найдите координаты (x, y, z) точки пересечения этих плоскостей (если они попарно не параллельны). Сделайте график.

Лабораторная работа № 4

Приближение функций

Постановка задачи

Интерполирование (интерполяция), возможно, самая близкая для вас тема из всех тем, представленных в курсе «Численные методы». С её помощью можно не только строить красивые графики по некоторому числу исходных точек, но и решать другие задачи. Например, строить путь для NPC (неигрового персонажа). Различные кривые часто строятся путём интерполирования нескольких точек — так устроены шрифты. А инженеры-машиностроители так описывают сложные формы корпусов и деталей.

Цель работы — написать программу, реализующую указанный в варианте интерполяционный полином или сплайн, интерполировать заданный набор точек с её помощью и отобразить исходные и полученные точки на графике.

Задание

Варианты 1—5 (упрощённые). Интерполируйте функцию с шагом 0,5 с помощью полинома Лагранжа, данные приведены в таблице 4.1. Изобразите график полученной функции (пример можно увидеть на рисунке 4.1).

Вариант 1	x	-15	-11	-7	-3
	y	220	116	44	4
Вариант 2	x	-6	-4	-2	0
	y	-222	-50	18	30
Вариант 3	x	6	11	16	21
	y	$-5{,}46$	$-1{,}21$	1,41	3,31
Вариант 4	x	0	50	100	150
	y	-12	$-4{,}93$	-2	0,25
Вариант 5	x	3	5	7	9
	y	-12	-4	4	60

Таблица 4.1: Данные для вариантов 1—5

Варианты 6—13. Дана некоторая функция $f(x)$ и интервал $[a,b]$. Вам следует взять несколько точек (например, пять — $x_1, x_2, ..., x_5$) на этом интервале и вычислить значения функции в этих точках: $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_5)$. Получится функция, заданная в табличном виде.

Например, если дана функция $f(x) = \sin(x)$, а интервал $[0;\pi]$, то можно выбрать точки $x_i = \{0; 0{,}79; 1{,}58; 2{,}37; 3{,}14\}$. Вычисляем значения функции в этих точках и заполняем таблицу 4.2.

$\sin(x)$	x	0	0,79	1,58	2,35	3,14
	y	0	0,7104	1	0,7104	0

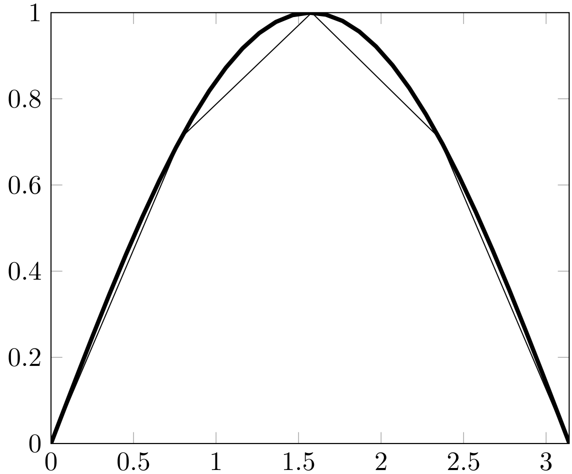
Таблица 4.2: Пример для вариантов 6—13

Интерполируйте полученную табличную функцию с заданным шагом Δ с помощью указанного интерполяционного полинома. Постройте график интерполированной функции и покажите исходные точки табличной функции (пример на рисунке 4.1), исходные данные даны в таблице 4.3.

Вариант	Функция $f(x)$	Интервал	Шаг Δ	Полином
6	$\sin(x^2)$	[0; 2]	0,10	Лагранжа
7	$\cos(x^2)$	[0; 2]	0,10	Ньютона
8	$e^{\sin(x)}$	[0; 5]	0,25	Лагранжа
9	$\dfrac{1}{1+e^{-x}}$	[0; 4]	0,20	Ньютона
10	$\cos(x^2+2x)$	[0; 1]	0,05	Лагранжа
11	$\dfrac{10\cdot\ln(2x)}{1+x}$	[1; 5]	0,20	Ньютона
12	$\cos(x+\cos^3(x))$	[0; 2]	0,10	Лагранжа
13	$\cos(x+e^{\cos(x)})$	[3; 6]	0,15	Ньютона

Таблица 4.3: Данные для вариантов 6—13

Рис. 4.1: Пример графика



Вариант 14 (повышенной сложности). Соберите статистику посещаемости вашей группы и составьте интерполированный с помощью сплайнов график.

Вариант 15 (повышенной сложности). Соберите статистику по посетителям или просмотрам какой-либо группы в социальной сети и составьте интерполированный с помощью сплайнов график.

Лабораторная работа № 5

Численное интегрирование

Постановка задачи

Цель работы — написать программу, реализующую указанный метод интегрирования, для решения поставленной задачи. В каждой задаче дан готовый интеграл, который нужно лишь вычислить, используя написанную программу. Решение необходимо сопроводить графиком.

Примеры задач

Движение тела. Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой $v(t) = 3t^2 + 2t$. Найти путь, пройденный телом за $t = 5$ (с).
Уравнение для длины пути:

$$S = \int\limits_0^t v(t)\mathrm{d}t = \int\limits_0^5 (3t^2 + 2t)\mathrm{d}t.$$

Пружина. Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть пружину на $l = 4$ см, если коэффициент упругости $k = 100$ Н/м?
Согласно закону Гука, сила $F = kx$, где F — сила, растягивающая пружину (Н), k — коэффициент упругости (Н/м), x — удлинение пружины (м). Уравнение работы имеет вид:

$$A = \int\limits_0^l kx\mathrm{d}x = \int\limits_0^{0,04} 100x\mathrm{d}x.$$

Давление воды. Найти силу давления воды (плотность $\rho = 1000$ кг/м^3),

наполняющей аквариум в форме прямоугольного параллелепипеда, на одну из вертикальных стенок, размеры которой 0,4 м $\times$ 0,7 м.
Пусть оси Ox и Oy содержат боковую сторону и верхнее основание вертикальной стенки, соответственно. Тогда выражение для вычисления давления примет вид:

$$P = g\int_0^b \rho \cdot bx\mathrm{d}x = 9{,}8\int_0^{0{,}4} 1000 \cdot 0{,}7x\mathrm{d}x,$$

где g — ускорение свободного падения (9,8 м/с^2).

Задание

Вариант 1 (упрощённый). Напишите программу для вычисления значения с помощью метода прямоугольников:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(x)\mathrm{d}x.$$

Вариант 2 (упрощённый). Напишите программу для вычисления значения с помощью метода прямоугольников:

$$\int_{-2}^{4} (x^2 + 2x + 8)\mathrm{d}x.$$

Вариант 3 (упрощённый). Напишите программу для вычисления значения с помощью метода прямоугольников:

$$\int_1^2 \left(\frac{4}{x} - 5x^4 + 2\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x.$$

Вариант 4 (упрощённый). Напишите программу для вычисления значения с помощью метода прямоугольников:

$$\int_0^1 (7x - 4) \cdot e^{3x}\mathrm{d}x.$$

Вариант 5 (упрощённый). Напишите программу для вычисления значения с помощью метода прямоугольников:

$$\int_4^5 x \cdot \sqrt{x^2 - 16} \mathrm{d}x.$$

Вариант 6. Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой $v(t) = 2t^2 + 2t$. Найти путь, пройденный телом за 13 с, с помощью программы, реализующей метод трапеций и метод Симпсона.

Вариант 7. Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой $v(t) = t^2 + 4t$. Найти путь, пройденный телом за 4 с, с помощью программы, реализующей метод трапеций и метод Симпсона.

Вариант 8. Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой $v(t) = 3t^2 + 3t$. Найти путь, пройденный телом за 8 с, с помощью программы, реализующей метод трапеций и метод Симпсона.

Вариант 9. Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой $v(t) = 4{,}5t^2 + 5t$. Найти путь, пройденный телом за 18 с, с помощью программы, реализующей метод трапеций и метод Симпсона.

Вариант 10. Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть пружину на $l = 3$ см, если коэффициент упругости $k = 200$ Н/м? Решите задачу с помощью программы, реализующей метод трапеций и метод Симпсона.

Вариант 11. Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть пружину на $l = 3{,}5$ см, если коэффициент упругости $k = 150$ Н/м? Решите задачу с помощью программы, реализующей метод трапеций и метод Симпсона.

Вариант 12. Найти силу давления воды (плотность $\rho = 1000$ кг/м^3), наполняющей аквариум в форме прямоугольного параллелепипеда, на одну из вертикальных стенок, размеры которой составляют 0,5 м $\times$ 0,5 м. Решите задачу с помощью программы, реализующей метод трапеций и метод Симпсона.

Вариант 13. Найти силу давления воды (плотность $\rho = 1000$ кг/м^3), наполняющей аквариум в форме прямоугольного параллелепипеда, на одну из вертикальных стенок, размеры которой составляют 0,8 м $\times$ 0,6 м. Решите задачу с помощью программы, реализующей метод трапеций и метод Симпсона.

Вариант 14 (повышенной сложности). Два тела начали двигаться одновременно из одной точки в одном направлении по прямой. Первое тело движется со скоростью $v_1(t) = 6t^2 + 2t$, второе — $v_2(t) = 4t + 5$. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через время $x = 5$ с? Напишите программу, реализующую метод трапеций и метод Симпсона.

Расстояние вычисляется как интеграл уравнения движения:

$$S = \int\limits_0^x v(t)\mathrm{d}t.$$

Подсказка: решением будет разность расстояний $\Delta S = |S_1 - S_2|$, которые нужно вычислить по отдельности.

Вариант 15 (повышенной сложности). Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2x$, $y = 0$, $x = 1$. Напишите программу, которая реализует методы трапеций и Симпсона. Нарисуйте иллюстрацию к решению.

Выражение для вычисления объёма тела вращения вокруг оси Ox:

$$V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

Лабораторная работа № 6

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Постановка задачи

Дифференциальные уравнения применяются в прикладных задачах из самых разных областей:

- физика (движение тел постоянной и переменной массы, растяжение упругой нити, изменение яркости света в стеклянной пластине, нагрев и охлаждение тела, давление зерна на стенки хранилища, различные виды движения точки, вращение тел в жидкости, радиоактивный распад, электрические заряды, трение, наполнение и истечение сосудов, растворение твёрдых тел, изучение газовых смесей, ионизации газов, зеркало, фокусирующее параллельные лучи, тра-ектории полёта самолётов, электрические цепи, паровые машины, движение планет),

- химия (химические реакции, концентрация вещества в жидкости),

- экология (рост населения, экология популяций, плотность муравьёв вне муравейника),

- экономика (рост вкладов, рационализаторские предложения),

- строительная инженерия (расстояние между фермами железнодорожного моста, балки на упругом основании),

- физиология (работа сердца).

Цель работы — написать программу для решения обыкновенных дифференциальных уравнений (с помощью метода Эйлера или метода Рунге — Кутты) и найти с её помощью решение уравнения для заданной задачи. Важно помнить, что решением дифференциального уравнения (при заданных начальных условиях). График решения дифференциального уравнения называется интегральной кривой.

Поскольку составление дифференциальных уравнений для решения задач может представлять трудности, вам даны готовые уравнения.

Мы будем решать только уравнения такого вида:

$$y' = f(x,y).$$

Задание

Варианты 1—5 (упрощённые). Решите уравнение из таблицы 6.1.

Вариант	Уравнение	Начальные условия
1	$y' = x + 2y$	$x_0 = 0, y_0 = 0$
2	$y' = 2x + y$	$x_0 = 0, y_0 = 0$
3	$y' = 4x - y$	$x_0 = 0, y_0 = 0$
4	$y' = x - 3y$	$x_0 = 0, y_0 = 0$
5	$y' = 2x + 2y$	$x_0 = 0, y_0 = 0$

Таблица 6.1: Данные для вариантов 1—5

Варианты 6—9. Пусть $y(t)$ — количество бактерий в чашке Петри в момент времени t. Скорость размножения бактерий — это производная $y'(t)$, она пропорциональна $y(t)$ с коэффициентом пропорциональности $k = 1{,}38$. Составить график числа бактерий в течение 120 минут, если в начальный момент было y_0 бактерий. Данные для различных вариантов даны в таблице 6.2.

Дифференциальное уравнение имеет вид $y' = ky$. Начальные условия: $y'(0) = y_0$, иначе — $x_0 = 0$, а y_0 нужно взять из таблицы.

Вариант	Исходное количество y_0	Длительность, мин
6	2000	120
7	5000	60
8	7000	15
9	700	180

Таблица 6.2: Данные для вариантов 6—9

Варианты 10—13. Скорость распада радионуклида $y(t)$ обратно пропорциональна имеющемуся количеству вещества $y(t)$ с постоянной распада λ (вероятность распада ядра за 1 с, иначе говоря — доля ядер, распадающихся за 1 с). Составьте график зависимости ещё не распавшегося вещества от времени, если изначально был 1 кг вещества, то есть начальные условия: $y'(0) = 1$, иначе — $x_0 = 0, y_0 = 1$. Данные приведены в таблице 6.3.

Вариант	Радионуклид	Обозначение	$T_{1/2}$
10	Стронций-89	^{89}Sr	54 дня
11	Стронций-90	^{90}Sr	28 лет
12	Лантан-140	^{140}La	40,2 ч
13	Радон-220	^{220}Ra	56 с

Таблица 6.3: Данные для вариантов 10—13

Уравнение имеет вид $y' = -\lambda y$. Но в таблице указана не постоянная распада λ, а период полураспада $T_{1/2}$. Чтобы найти постоянную распада, нужно воспользоваться простой формулой:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}.$$

Например, если, $T_{1/2} = 56$ с, то $\lambda = \dfrac{\ln 2}{56} \approx 0{,}0123776$. Тогда уравнение принимает вид

$$y' = -0{,}0123776y.$$

Варианты 14—15 (повышенной сложности). Скорость остывания нагретого тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. За x минут тело охладилось с t_0 до t_1 ($^\circ C$). Температура среды t_e постоянна и равна $20^\circ C$. Когда тело остынет до t ($^\circ C$)? Исходные данные задачи представлены в таблице 6.4.

Вариант	x, мин	$t_0, ^\circ C$	$t_1, ^\circ C$	$t, ^\circ C$
14 *	10	100	50	25
15 *	12	110	60	30

Таблица 6.4: Данные для вариантов 14—15

Уравнение имеет вид:

$$y' = k(t_e - y).$$

Значение коэффициента k можно подобрать, чтобы он соответствовал условиям задачи.

Самостоятельная работа № 1

Представление целых чисел

Данные для задач см. в таблице С1.1.
1. Запишите положительное число N_1 в виде 32-разрядного кода.
2. Запишите отрицательное число N_2 в виде 32-разрядного дополнения до 2.
3. Выполните вычисления: $N_1 + N_2$.
4*. Выполните вычисления: $|N_2| - N_1$.

	N_1	N_2		N_1	N_2		N_1	N_2
1	220	-87	**6**	545	-13	**11**	447	-150
2	728	-255	**7**	930	-139	**12**	852	-348
3	38	-33	**8**	917	-138	**13**	315	-94
4	878	-480	**9**	202	-71	**14***	`0xFF05`	-074
5	47	-42	**10**	50	-27	**15***	`0x303`	-05

Таблица С1.1: Варианты заданий

Примечание. Положительные числа записываются как есть. Например, $N_1 = 7_{10} = 111_2$, остаётся лишь дополнить нулями до 32-х битов.

```
00000000 00000000 00000000 00000111
```

Отрицательные числа хранятся в виде дополнения до 2. Например, прямой код числа $N_2 = -5$ — это его модуль $5_{10} = 101_2$.

```
00000000 00000000 00000000 00000101
```

Обратный код — это код, полученный заменой в прямом коде нулей на единицы, а единицы — на нули.

$$\texttt{11111111 11111111 11111111 11111010}$$

Дополнительный код — сумма обратного кода и 1 (если получается переполнение, оно отбрасывается).

$$\begin{array}{rr}
 & \texttt{11111111111111111111111111111010} \\
+ & \texttt{1} \\
\hline
 & \texttt{11111111111111111111111111111011}
\end{array}$$

Дополнительный код числа -5:

$$\texttt{11111111 11111111 11111111 11111011}$$

Числа $N_1 = 7$ и $N_2 = -5$ в дополнительном коде складываются обычным образом. Если возникает переполнение, оно отбрасывается.

$$\begin{array}{rr}
 & \texttt{00000000000000000000000000000111} \\
+ & \texttt{11111111111111111111111111111011} \\
\hline
 & \texttt{100000000000000000000000000000010}
\end{array}$$

Результат вычисления $7 + (-5)$ будет представлен так:

$$\texttt{00000000 00000000 00000000 00000010}$$

Первый бит равен 0, это значит, что число положительное. Чтобы узнать, что это за число, достаточно перевести его в десятичную систему:

$$10_2 = 2_{10}.$$

Самостоятельная работа № 2

Представление чисел с плавающей запятой

Постановка задачи

Данные для задач см. в таблице С2.1.

Вариант		N_1	Побитовое представление N_2
1		5,735	`0 10000011 11010010000000000000000`
2		1,050	`0 10000011 11110110000000000000000`
3		1,375	`0 10000011 11111110000000000000000`
4		5,375	`0 10000011 11110000000000000000000`
5		5,875	`0 10000011 10111000000000000000000`
6		7,875	`0 10000011 00110000000000000000000`
7		6,125	`0 10000011 00111000000000000000000`
8		6,625	`0 10000011 01110100000000000000000`
9		5,750	`0 10000011 11111110000000000000000`
10		4,875	`0 10000011 10110110000000000000000`
11		2,625	`0 10000011 10010010000000000000000`
12		2,875	`0 10000011 00010110000000000000000`
13		3,750	`0 10000011 00011110000000000000000`
14	*	`.15e2`	`11000011 00011010 10100000 00000000` (BE)
15	*	`5.e-1`	`00000000 00100000 10001100 11000011` (LE)

Таблица С2.1: Варианты заданий

1. Запишите побитовое представление числа с плавающей запятой одинарной точности N_1.

2. Дано побитовое представление числа с плавающей запятой одинарной точности N_2, запишите его в общей форме и в десятичной системе.
3. Выполните операцию $N_1 \cdot N_2$. Запишите результат в десятичной форме и его побитовое представление.
Примечание. Числа с плавающей запятой представляются в следующей форме:

$$N = (-1)^s \cdot m \cdot 2^e,$$

где s — бит знака (если он равен 0, число положительное, если 1, то отрицательное), m — нормализованная мантисса (число вида 1,...), e — экспонента (показатель степени у 2).
Например, число 3,5 представлено как:

$$3{,}5 = (-1)^0 \cdot 1{,}11 \cdot 2^1,$$

то есть $s = 0$, $m = 1{,}11$, $e = 1$.
Побитовое представление строится следующим образом:

```
0 10000000 11000000000000000000000
```

Первый бит — бит знака (s). Следующие восемь бит — смещённая экспонента:

$$e^* = e + 127,$$

в нашем случае $e^* = 1 + 127 = 128_{10} = 10000000_2$. Оставшиеся 23 бита — дробная часть нормализованной мантиссы, дополненная нулями, т. е. 1,11 записывается как `11000000000000000000000`.
Чтобы умножить два числа с плавающей запятой, нужно определить бит знака у результата (сложить показатели степени у -1), перемножить мантиссы и сложить экспоненты (показатели степени у 2):

$$N_1 = (-1)^{s_1} \cdot m_1 \cdot 2^{e_1},$$

$$N_2 = (-1)^{s_2} \cdot m_2 \cdot 2^{e_2},$$

$$N_1 \cdot N_2 = (-1)^{s_1} \cdot m_1 \cdot 2^{e_1} \cdot (-1)^{s_2} \cdot m_2 \cdot 2^{e_2} =$$

$$= (-1)^{s_1+s_2} \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot 2^{e_1+e_2}.$$

Список литературы

1. Авхадиев Ф. Г. Численные методы анализа. — Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2013. — 126 с.

2. Мицель А. А. Практикум по численным методам: Учеб. пособие. — Томск: Томск. гос. ун-т систем управления и радиоэлектроники, 2004. — 196 с. ISBN 5-86889-196-1.

3. Тынкевич М. А. Введение в численный анализ: учеб. пособие / М. А. Тынкевич, А. Г. Пимонов; КузГТУ. — Кемерово, 2017. — 176с. ISBN 978-5-906969-35-4.

4. Фетодов А. А. Численные методы: Методические указания к выполнению лабораторных работ по курсу «Численные методы». / А. А. Федотов, П. В. Храпов. — М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2012. — 141 с.: ил.

5. Численные методы. Примеры и задачи. Учебно-методическое пособие по курсам «Информатика» и «Вычислительная математика». / Сост.: Ф. Г. Ахмадиев, Ф. Г. Габбасов, Л. Б. Ермолаева, И. В. Маланичев. Казань: КГАСУ, 2017. — 107 с.