hiperplano de separación

$w \cdot x + b = 0 \quad ; w \in \mathbb{R}^n , b \in \mathbb{R}$

El margen geometrico es la distancia entre el hiperplano y los puntos más cercanos

$dis(x, hiperplano) = \frac{|w \cdot x + b|}{\|w\|}$

$r_i^{(F)} = y_i(w \cdot x_i + b)$; sí $r_i^{(F)} > 0$ entonces x_i esta en el lado correcto.

los vectores de soporte cumplen:

$y_i(w \cdot x_i + b) \geq 1$; para todo i

$dis = \frac{|w \cdot x_i + b|}{\|w\|} = \frac{1}{\|w\|}$; por lo que la distancia total entre las dos clases que son:

$margen = \frac{1}{\|w\|} + \frac{1}{\|w\|} = \frac{2}{\|w\|}$

$\max_{w,b} \frac{2}{\|w\|}$ sujeto a $y_i(w \cdot x_i + b) \geq 1 ; \forall i$

maximizar $\frac{2}{\|w\|}$ es lo mismo que minimizar $\|w\|$ ya que

$f(t) = 2/t$ es monotona decreciente para todo $t > 0$

$\|w\| \longrightarrow \|w\|^2 \; ; \|w\| \geq 0$

$\min_{w,b} \frac{1}{2} \|w\|^2$, entonces $\nabla_w f(w) = w$

Dem: Relación de distancia.

Sea $u = \frac{w}{\|w\|}$ el vector normal unitario al hiperplano H, para cualquier punto $x_H \in H$, la distancia de x_0 a H es la longitud de la componente $x_0 - x_H$ en la dirección de u.

$$dis(x_0, H) = |(x_0 - x_H)\cdot u|$$

Pero $(x_0 - x_H)\cdot u = \frac{1}{\|w\|}\, w\cdot(x_0 - x_H) = \frac{1}{\|w\|}(w\cdot x_0 - w\cdot x_H)$

como $x_H \in H$ entonces

$$w\cdot x_H = -b$$

$$(x_0 - x_H)\cdot u = \frac{1}{\|w\|}(w\cdot x_0 + b)$$

$$dis(x_0, H) = \frac{|w\cdot x_0 + b|}{\|w\|}$$