数値解析法　第 3 課題

九州工業大学　機械知能工学科　機械知能コース 3 年 坂本　悠作
学籍番号 13104069　　提出日 2015 年 4 月 28 日

問題

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

上の行列の固有値、固有ベクト ルを 求めよ

- べき乗法
- Jacobi 法

1　べき乗法

べき乗法により 、最大の固有値を 求める。計算すると、以下のようになる。収束条件は以下のように設定した

$$\frac{\lambda^{(k-1)}}{\lambda^{(k)}} < \epsilon \qquad (\epsilon = 0.005) \tag{1}$$

初期設定として、固有ベクト ルを 以下のように仮定する

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Ax} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{11}{4} \\ \frac{15}{4} \\ \frac{15}{4} \end{pmatrix} = \frac{15}{4} \begin{pmatrix} \frac{11}{15} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{11}{15} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{41}{15} \\ \frac{56}{15} \\ \frac{56}{15} \end{pmatrix} = \frac{56}{15} \begin{pmatrix} \frac{41}{56} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\dfrac{\lambda^{(k-1)}}{\lambda^{(k)}}$の値が 0.00031 となったので、ここで終了とした。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{41}{56} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{153}{56} \\ \frac{209}{56} \\ \frac{209}{56} \end{pmatrix} = \frac{209}{56} \begin{pmatrix} \frac{153}{209} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \approx 3.73214 \begin{pmatrix} 0.73205 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

結果

$$\text{固有値}\lambda = \frac{209}{56}, \quad \text{固有ベクトル } v = (0.73205, 1, 1) \tag{4}$$

2 Jacobi 法

行列 $\boldsymbol{A}$ は実対称行列なので、Jacobi 法が使える。

$$\boldsymbol{P_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ 0 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

問題より、$a = 1, b = 2, d = 1$ であるので、$a = d$ より $\theta = \pi/4$ を用いる。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P_1^T A P_1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\pi/4 & \sin\pi/4 \\ 0 & -\sin\pi/4 & \cos\pi/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\pi/4 & -\sin\pi/4 \\ 0 & \sin\pi/4 & \cos\pi/4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ここで、$\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{(1-3)} \div 2 = -0.477658(radian)$ であるので、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P_2^T A P_2} &= \begin{bmatrix} \cos -0.477658 & \sin -0.477658 & 0 \\ -\sin -0.477658 & \cos -0.477658 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos -0.47765 & -\sin -0.47765 & 0 \\ \sin -0.47765 & \cos -0.47765 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.267949 & 1.07062 \times 10^{-6} & 0 \\ 1.07062 \times 10^{-6} & 3.73205 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{6}$$

非対角成分が十分に小さい事 ($\epsilon = 0.005$ 以下) から、ここで収束したと判定する。
固有値は、$(0.267949, 3.73205, -1)$ となる

この結果より、固有ベクトルを求めると、

$$\begin{aligned}
P_1 P_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\pi/4 & -\sin\pi/4 \\ 0 & \sin\pi/4 & \cos\pi/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos -0.47765 & -\sin -0.47765 & 0 \\ \sin -0.47765 & \cos -0.47765 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.88807 & 0.45969 & 0 \\ -0.325052 & 0.62797 & -0.70711 \\ -0.325052 & 0.62797 & 0.70711 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{7}$$

第 2、第 3 行の成分の大きさを 1 と調整すると、以下のようになる

$$\begin{aligned}
v_1 &= (0.73205, 1, 1) \\
v_2 &= (0, -1, 1) \\
v_3 &= (-2.73949, 1, 1)
\end{aligned}$$