流体力学　第 3 回

九州工業大学　機械知能工学科　機械知能コース 坂本　悠作
連絡先：n104069y@mail.kyutech.jp　　提出日 2015 年 4 月 22 日

2.3　流体の加速度

2.3.1　速度について

- ラグランジュの方法
  質点の速度に着目して、$x(t), y(t), z(t)$ を追跡して、流体塊の運動を捉える
- オイラーの方法
  空間に固定された場所を考え、その場所を次々と占める流体塊の運動を捉える

今、空間中のある点 $P(x, y, z, t)$ について考える。この点を追跡して、ある点に移動した点の座標は $P'(x + dx, y + dy, z + dz)$ と表現できる。これらの点の間の速さを、$\boldsymbol{V}(u, v, w)$ とする。このときの u について考える。

$$du = u(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) - u(x, y, z, t) \tag{1}$$

$$= (u + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz + \frac{\partial u}{\partial t}dt) - u \tag{2}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz \tag{3}$$

方向の加速度は、

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt} \tag{4}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \tag{5}$$

同様にしてまとめると、

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \tag{6}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} \tag{7}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} \tag{8}$$

従って、加速度 $\boldsymbol{a}$ は以下のようになる

$$\boldsymbol{a} = (\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dy}, \frac{dw}{dz}) \tag{9}$$

$$= (\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z})\boldsymbol{V} \tag{10}$$

$$= \frac{D}{Dt}\boldsymbol{V} \tag{11}$$

上の式で、$\frac{D}{Dt}$ をラグランジュ微分 (実質微分) という。

2.4　質量力と表面力

2.4.1　質量力 (体積力)

重力や電磁気のように、質量や電荷を作用する力
$\boldsymbol{F}(x, y, z)$ とすると、重力であれば $(x, y, z) = (0, 0, -g)$

2.5　応力テンソル (垂直応力)

今、x 軸 y 軸 z 軸に対して平行な面を持つ直方体を考える。
垂直応力は $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ の 3 つ, 剪断力は $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}, \tau_{zx}, \tau_{xz}$ の 6 つ、合計 9 つの力成分をそれぞれかけることができる。
ここでは、特別に次のような関係式が成り立っているとすると、この行列式は対称行列になる。

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \tau_{yx}\\ \tau_{yz} &= \tau_{zy}\\ \tau_{zx} &= \tau_{xz}\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \tag{12}$$

レポート 1(連続の式)

直交座標に置いて、連続の式は以下のように示される。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{13}$$

この連続の式を、$(x, y) \Rightarrow (r, \theta)$ の変換を用いて、円柱座標 (r, θ) の形で連続の式を求めよ。

提出は 5 月 13 日 (水): 授業前に提出
手書きのみ評価

ヒント

- $v_\theta = r\dot{\theta}$ である
- 授業では (u, v) と表記していたものは、(v_r, v_θ) を用いて表現できる

$$u = v_r \cos\theta - v_\theta \sin\theta \tag{14}$$
$$v = v_r \sin\theta + v_\theta \cos\theta \tag{15}$$

- ここで用いるであろう演算子を以下に示す。

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} \tag{16}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} \tag{17}$$