数値解析法　第 3 回

九州工業大学　機械知能工学科　機械知能コース 3 年 坂本　悠作
学籍番号 13104069　　提出日 2015 年 4 月 28 日

3　固有値問題

3.0.1　正方行列とは

正方行列には、次のような性質がある

- 行の数と列の数が等しい行列
- 逆行列を定義できる
- 行列式 (スカラー) を定義できる

$\boldsymbol{A}$:n 次正方行列

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \tag{1}$$

1. n 個の固有値
2. $\boldsymbol{A}$ が実対象行列のとき、次の性質がある
   - 固有値は全て実数となる
   - 異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する
3. $\boldsymbol{A}$ が対角行列 $\rightarrow$ 対角成分が固有値
4. $\boldsymbol{M}$ が正則 $\rightarrow \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}$ は、$\boldsymbol{A}$ と同じ固有値
5. $\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{M} \Rightarrow \boldsymbol{D}$(対角行列) $\rightarrow \boldsymbol{D}$ の対角成分が固有値
   $\boldsymbol{M}$ の各列が固有ベクトル

3.1　べき乗法

絶対値が最大の固有値・固有ベクトルを求める方法

3.1.1　考え方

$$\boldsymbol{A} \text{ の固有値} \quad \|\lambda_1\| \geq \|\lambda_2\| \geq \cdots \geq \|\lambda_N\|$$

$$\text{固有ベクトル} \quad \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \cdots$$

$\boldsymbol{u}$ は互いに 1 次独立なので、初期ベクトル $\boldsymbol{x}^{(0)}$ はこれらの 1 次結合により、次のようになる。() 内の数字は $\boldsymbol{A}$ を何度かけたものかを表している。

$$\text{任意のベクトル} \quad \boldsymbol{x}^{(0)} = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + c_3\boldsymbol{u}_3 + \cdots$$

よって、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)} &= c_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_2 \cdots c_N\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_N \\ &= c_1\lambda_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\lambda_2\boldsymbol{u}_2 \cdots c_N\lambda_N\boldsymbol{u}_N\end{aligned}$$

この計算の () の値を大きくしていくと、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x^{(k)}} = \boldsymbol{A^k x^{(0)}} &= c_1 \boldsymbol{A^k u}_1 + c_2 \boldsymbol{A^k u}_2 \cdots c_N \boldsymbol{A^k u}_N \\
&= c_1 \lambda_1^k \boldsymbol{u}_1 + c_2 \lambda_2^k \boldsymbol{u}_2 \cdots c_N \lambda_N^k \boldsymbol{u}_N \\
&= c_1 \lambda_1^k \left\{ u_1 + \frac{c_2}{c_1} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k u_2 + \cdots + \frac{c_N}{c_1} \left(\frac{\lambda_N}{\lambda_1} \right)^k u_N \right\}
\end{aligned} \tag{2}$$

仮定より、λ_1 が最も大きい値であるので、$\left(\frac{\lambda_N}{\lambda_1}\right)^k$ の値は、k が大きいと 0 に収束する。よって、第一項目以降を 0 と考えると、$c_1 \lambda_1 \boldsymbol{u_1}$ となる。以上の議論により、

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\boldsymbol{x^{(k)T} x^{(k)}}}{\boldsymbol{x^{(k)T} x^{(k-1)}}} = \lambda_1$$

これにより、λ_1 が求められる。

3.1.2 例題

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}, x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

このときの固有値・固有ベクトルを求めよ

3.1.3 解答

このときの最大固有値は 2.9992 である。

3.2 Jacobi 法

3.2.1 考え方

$\boldsymbol{A}$:n 次正方行列

n 個の固有値・固有ベクトルを同時に求める

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{p^{-1}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{6}$$

1. $\boldsymbol{P}$ が正則 $\rightarrow$ $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ は、$\boldsymbol{A}$ と同じ固有値
2. $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} \rightarrow \boldsymbol{D}$(対角行列) $\rightarrow$ $\boldsymbol{D}$ の対角成分が固有値
   $\boldsymbol{P}$ の各列が固有ベクトル

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$a = d \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \tag{8}$$

$$a \neq d \Rightarrow \tan 2\theta = \frac{2b}{a-d} \tag{9}$$

3.2.2 例題

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

対称行列であるので、Jacobi 法が使える。非対角成分の絶対値最大のものを正とする。

3.2.3 解答

1. 絶対値最大のものを見つける
2. その要素が 0 になるように回転行列 P1 を転地行列にして左からかける
3. 右から P1 をかける
4. 計算して出てきたものを $A^{(1)}$ とする
5. 新たに行列 P2 を作る
6. 繰り返し

非対角行列の値が小さくなれば答えとする。
固有値 4,-2,1
固有ベクトル $v_1 = (-2, 2, 1), v_2 = (2, 1, 2), v_3 = (-2, -2, 2)$

問題

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

上の行列の固有値、固有ベクトルを求めよ

- べき乗法
- Jacobi 法
- 厳密解を求めて評価すると加点