Przybliżenia całek oznaczonych i metody Monte Carlo

Józef Jasek

December 4, 2018

1 Wstep teoretyczny

Omawiać bedziemy 4 metody przybliżania całki oznaczonej funkcji jednej zmiennej z przedziału $[a; b]$. W drugiej cześci wykorzystamy metody Monte Carlo do wyznaczenia liczby π.

1.1 Metoda prostokatów

Metoda ta polega na podziale całkowanego fragmentu na $(n+1)$ równoodległych punktów. Nastepnie tworzymy n prostokatów, gdzie długość jednego boku to odległość miedzy dwoma sasiednimi punktami, a długość drugiego to f(x), gdzie x to pierwsza współrzedna drugiego wybranego punktu. Do obliczenia całki sumujemy pola utworzonych prostokatów.

1.2 Metoda trapezów

Dzielimy funkcje podobnie jak poprzednio, ale zamiast przybliżać fragmenty do prostokatów przybliżamy do trapezów i liczymy pole ze wzoru

$$P = h\frac{f(x_n) + f(x_{n+1})}{2}$$

1.3 Metoda Simpsona

Dzielimy funkcje podobnie jak poprzednio, ale przybliżamy fragmenty do funkcji kwadratowych i liczymy prosta całke funkcji kwadratowej.

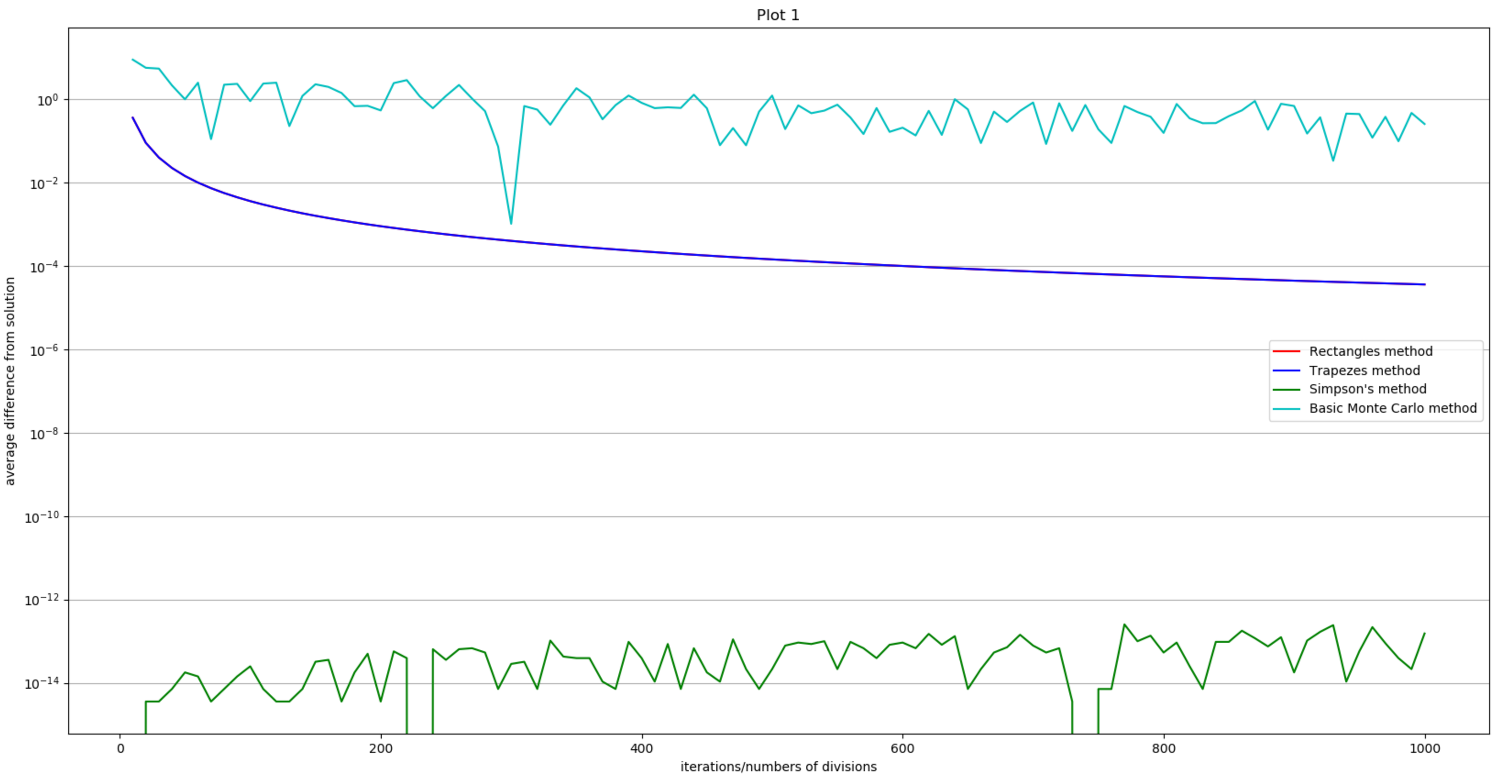
1.4 Metoda Monte Carlo

W tej metodzie nie stosujemy podziału na fragmenty jak poprzednio. Zamiast tego wprowadzamy zmienna losowa Y z przedziału $(a; b]$ o rozkładzie jednorodnym i wykonujemy n losowań. Przybliżeniem całki jest wówczas średnie pole prostokata o rozmiarze $f(Y)$ na $|b - a|$.

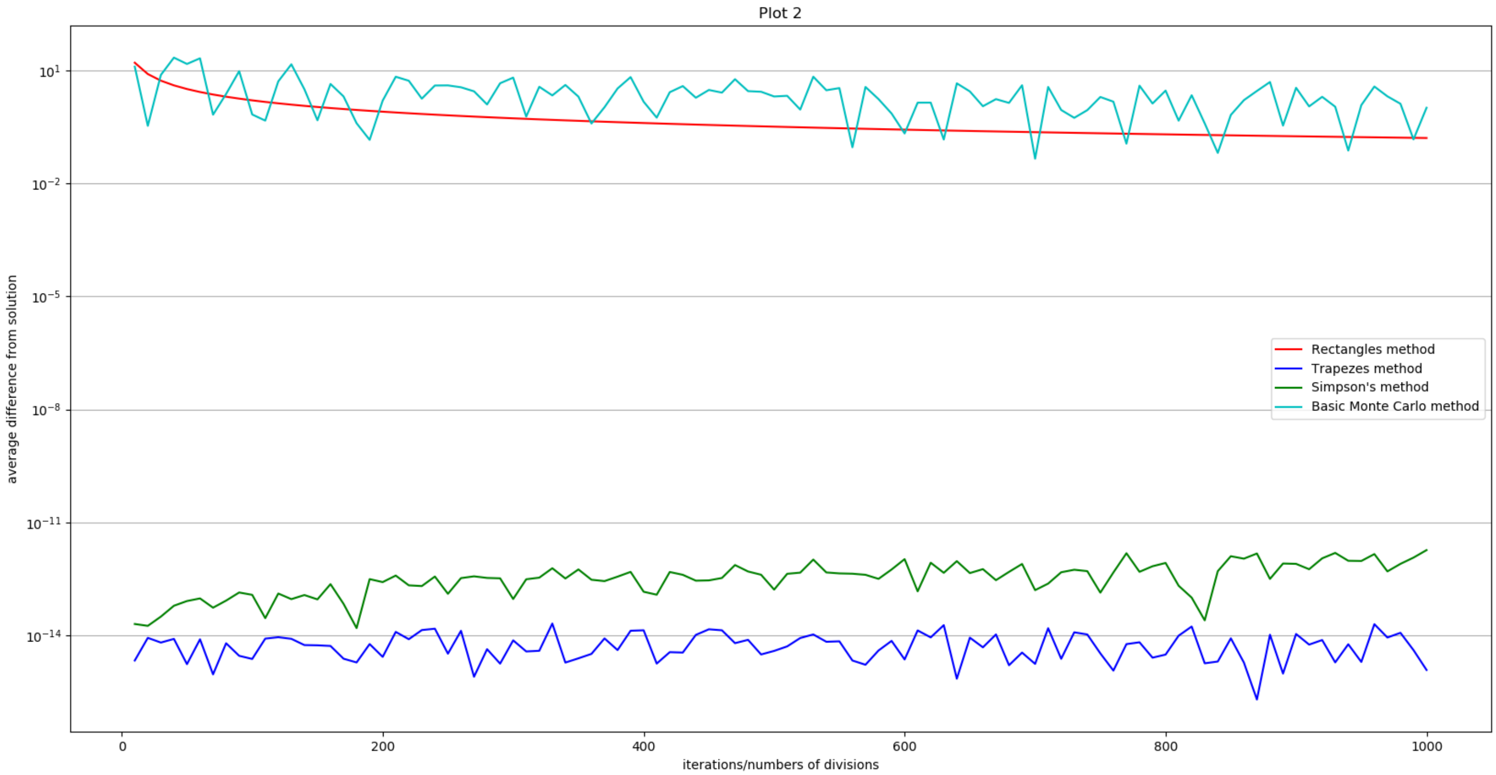
2 Pomiary predkości zbiegania do rozwiazania

Wszystkie próby sa wykonywane dla $n = 1000$.

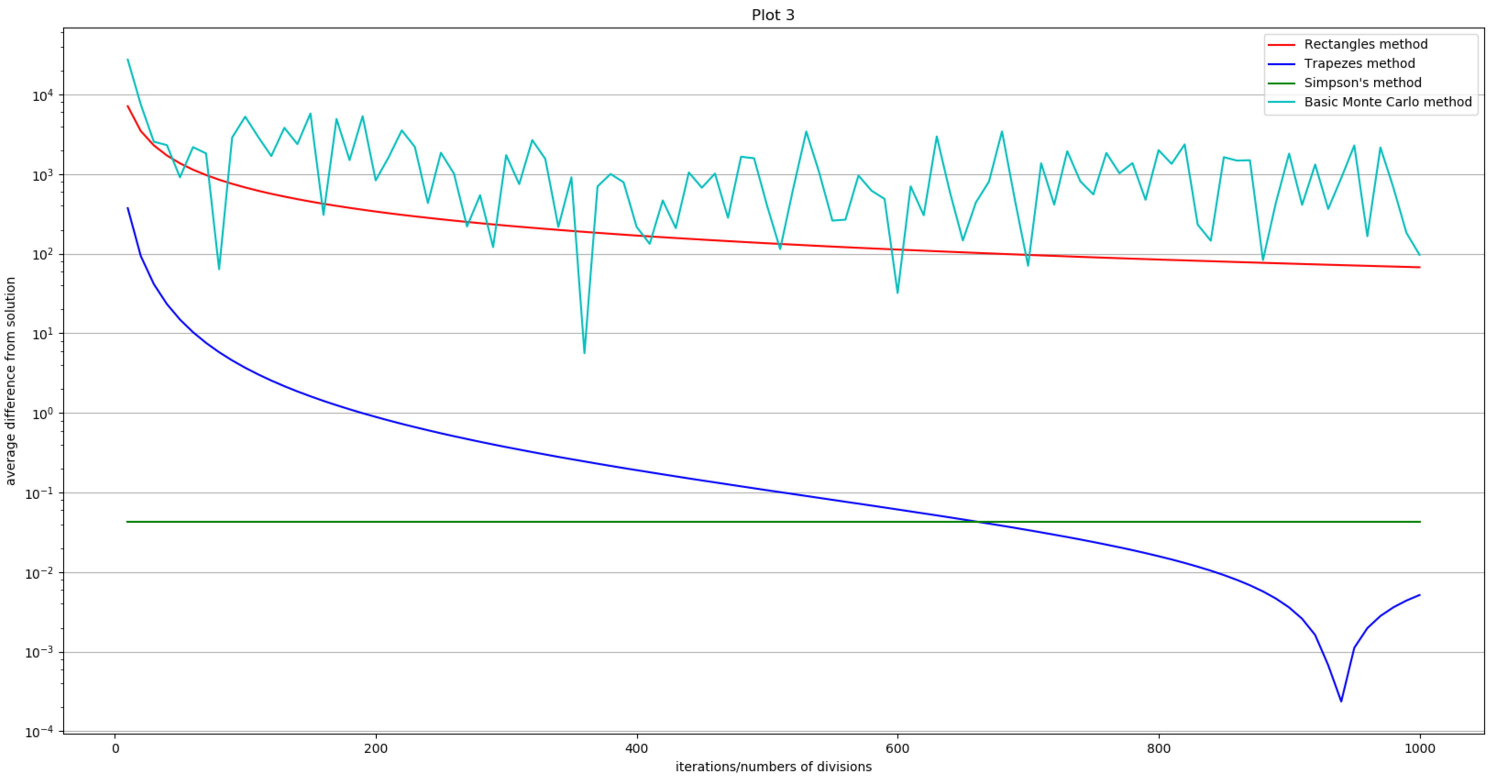
2.1 $f_1(x) = x^2$ na przedziale $(-3; 3)$



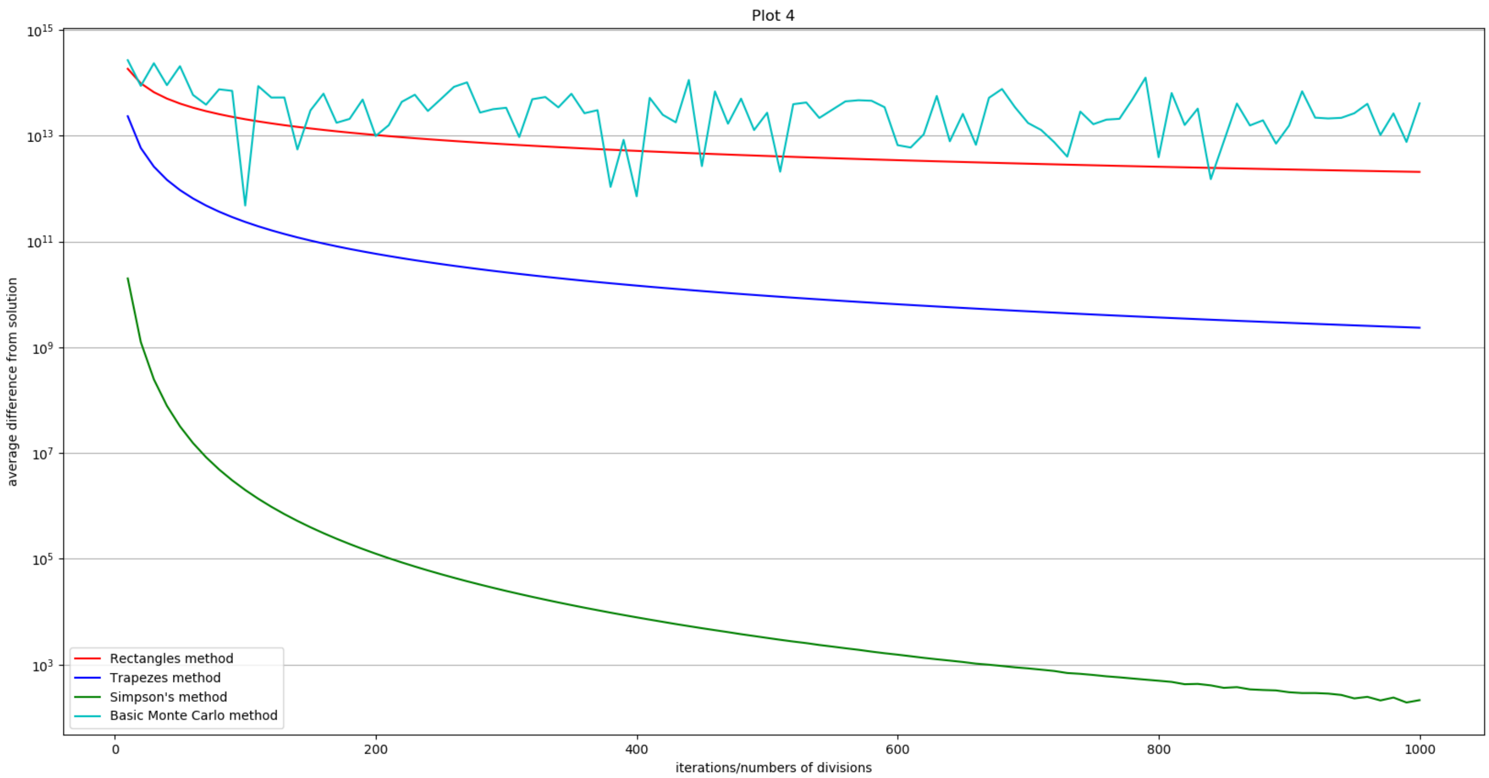
2.2 $f_2(x) = x^3$ na przedziale $(-3; 3)$



2.3 $f_3(x) = 3x^3 - 2.34x^2 + 18x + 45$ na przedziale $(-2.6; 14)$



2.4 $f_4(x) = -2x^5 + 9.21x^4 - 3.14x^3 - 12x^2 + 7.2x + 15.1$ na przedziale $(-335.345; 140.82)$



3 Wnioski

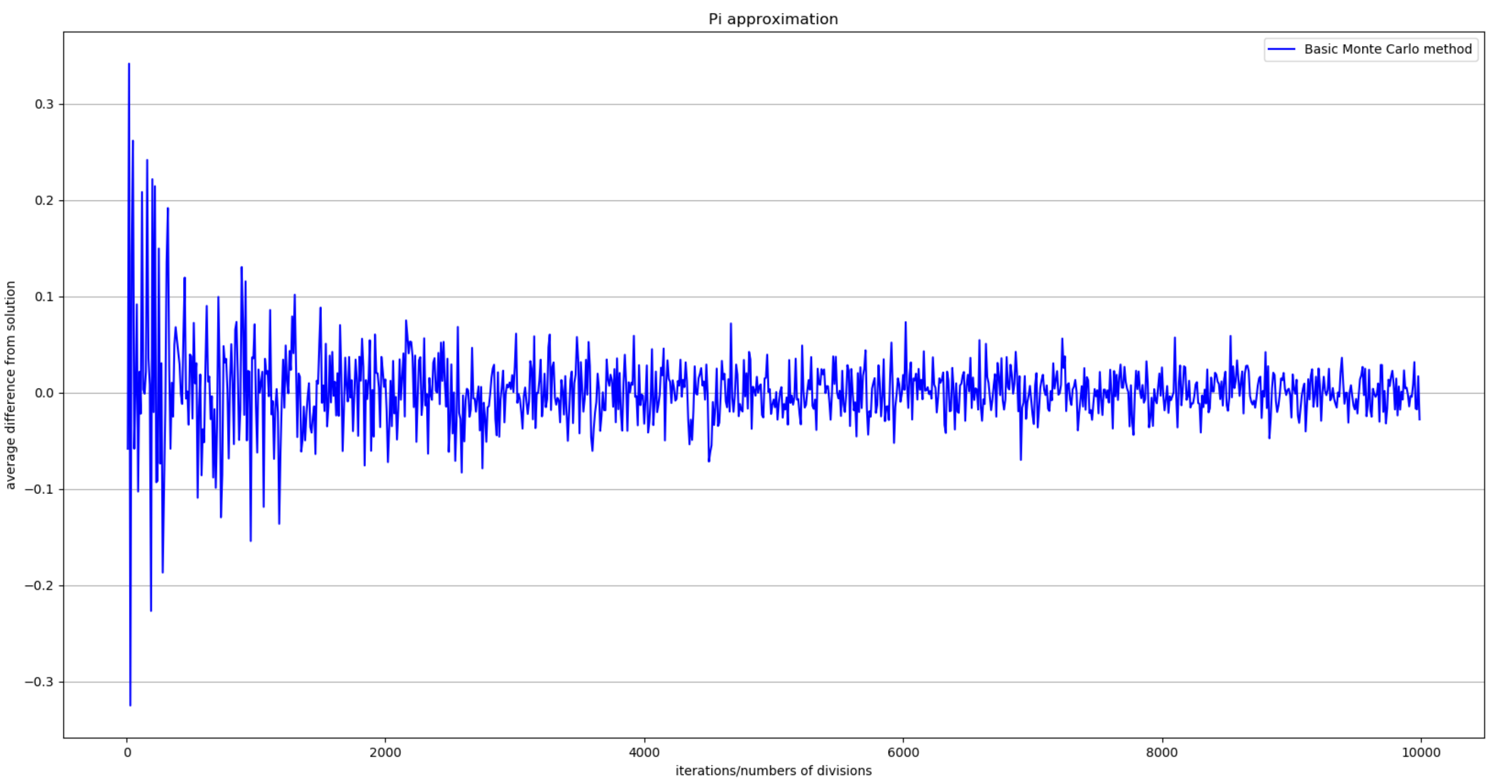
Łatwo zauważyć, że metoda Simpsona osiaga najlepsze wyniki przy tej samej liczbie podziałów. Różnica dla ostatniej funkcji od drugiej najlepszej metody wynosi aż 7 rzedów wielkości! Widzimy też, że losowe metody Monte Carlo nie sa dobrym wyborem dla tak prostych funkcji.

4 Wyznaczanie liczby π za pomoca metod Monte Carlo

4.1 Wstep teoretyczny

Do wyznaczenia liczby π skorzystamy z faktu, że jeżeli pewien kwadrat zawiera jakaś figure i wykonamy wiele rzutów w losowe miejsce wewnatrz kwadratu, to stosunek pola tej figury i pola kwadratu jest w przybliżeniu równy stosunkowi liczby rzutów, które trafiły figure i liczby wszystkich rzutów. W naszym przypadku weźmiemy kwadrat o boku 2 i wpiszemy do niego okrag o promieniu 1.

4.2 Pomiary predkości zbiegania do rozwiazania



4.3 Wnioski

Jak widać metoda pozwala wyznaczyć liczbe pi z dowolna dokładnościa, ale tempo zbiegania do rozwiazania jest na tyle wolne, że nie jest to praktyczna metoda wyznaczania tej stałej.