Iteracyjne metody rozwiazywania równań liniowych

Józef Jasek

November 20, 2018

1 Wstep teoretyczny

Omawiać bedziemy 3 iteracyjne metody rozwiazywania układów postaci Ax = b, gdzie macierz A jest macierza nieosobliwa, dominujaca (warunek konieczny poprawności zastosowania poniższych metod), a x to macierz niewiadomych.

1.1 Metoda Jacobiego

Metoda ta polega na rozdzieleniu macierzy A na sume dwóch macierzy - łatwo odwracalna macierz D zawierajaca jedynie elementy na głównej przekatnej i R zawierajaca pozostałe elementy (macierz te można również podzielić na dwie macierze trójkatne, ale w praktyce nie bedziemy dokonywać dzielenia na żadne macierze, gdyż jest to niepotrzebna i zasobożerna operacja). Wówczas rozwiazanie w danym kroku iteracyjnym wyglada nastepujaco

$$x_{k+1} = D^{-1}(b - Rx_k)$$

Możemy zauważyć, że udało sie ograniczyć najbardziej czasochłonna cześć wyznaczania rozwiazania, czyli odwracanie macierzy do absolutnego minimum - macierz diagonalna można odwrócić w czasie liniowym, a przy zastosowaniu iteracji po poszczególnych x-ach tak naprawde odbedzie sie to w czasie stałym. Zatem każdy krok iteracji odbywa sie w czasie $O(n^2)$ (mnożenie R i x).

1.2 Metoda Gaussa-Seidela

Metoda jest analogiczna do metody Jacobiego z ta różnica, że w iteracji po poszczególnych x_i^{k+1} korzystamy z tych x-ów które zostały już obliczone w obecnej iteracji. Intuicyjnie można to interpretować w nastepujacy sposób: jeżeli każdy kolejny krok iteracji zbliża nas do rozwiazania, to x_j^{k+1} jest bliżej prawdziwego rozwiazania niż x_j^k. Użycie go zatem powinno nas zbliżyć troszeczke bardziej i troszeczke szybciej do wyniku.

1.3 Successive over-relaxation

Jest to jeszcze szybsza modyfikacja metody Gaussa-Seidela. Wprowadza dodatkowy argument zwany parametrem relaksacji ω

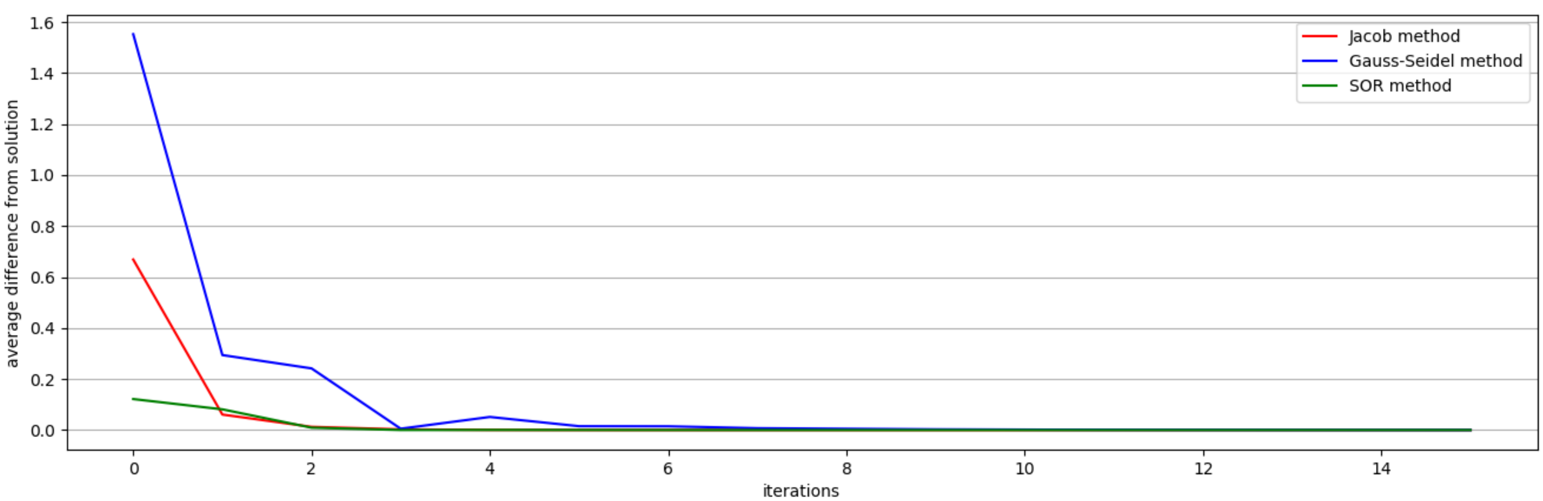
$$0 < \omega < 2$$

Parametr ω wprowadza dodatkowa zależność od x^k. Efekt może być dwojaki w zależności od tego jaki bedzie znak $(1-\omega)$. Oznacza to albo opieranie sie zmianom dla wartości wiekszych od 0 albo wprost przeciwnie "uciekanie" od x^k. Istnieja metody pozwalajace wyznaczyć optymalna wartość parametru, my decydujemy sie jednak przyjać jedna wartość.

2 Pomiary szybkości zbiegania metod do rozwiazania

Przyjmujemy $\omega = 1.2$. Wykonamy pomiary na 5 różnych równaniach. Wszystkie równania sa postaci $Ax = b$. Na wykresach przedstawiono średnia różnice pomiedzy elementami z macierzy X_i, która przedstawia rzeczywiste rozwiazania a wynikami otrzymanymi przez algorytm w kolejnych iteracjach. Przez e_J, e_G, e_S oznaczymy średni bład w 16 (ostatniej) iteracji dla metody odpowiednio Jacobiego, Gaussa-Seidela i SOR.

$$A_0 = \begin{bmatrix} 4.0 & -1.0 & -0.2 & 2.0 \\ -1.0 & 5.0 & 0.0 & -2.0 \\ 0.2 & 1.0 & 10.0 & -1.0 \\ 0.0 & -2.0 & -1.0 & -4.0 \end{bmatrix} B_0 = \begin{bmatrix} 21.6 \\ 36 \\ -20.6 \\ -11 \end{bmatrix} X_0 = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

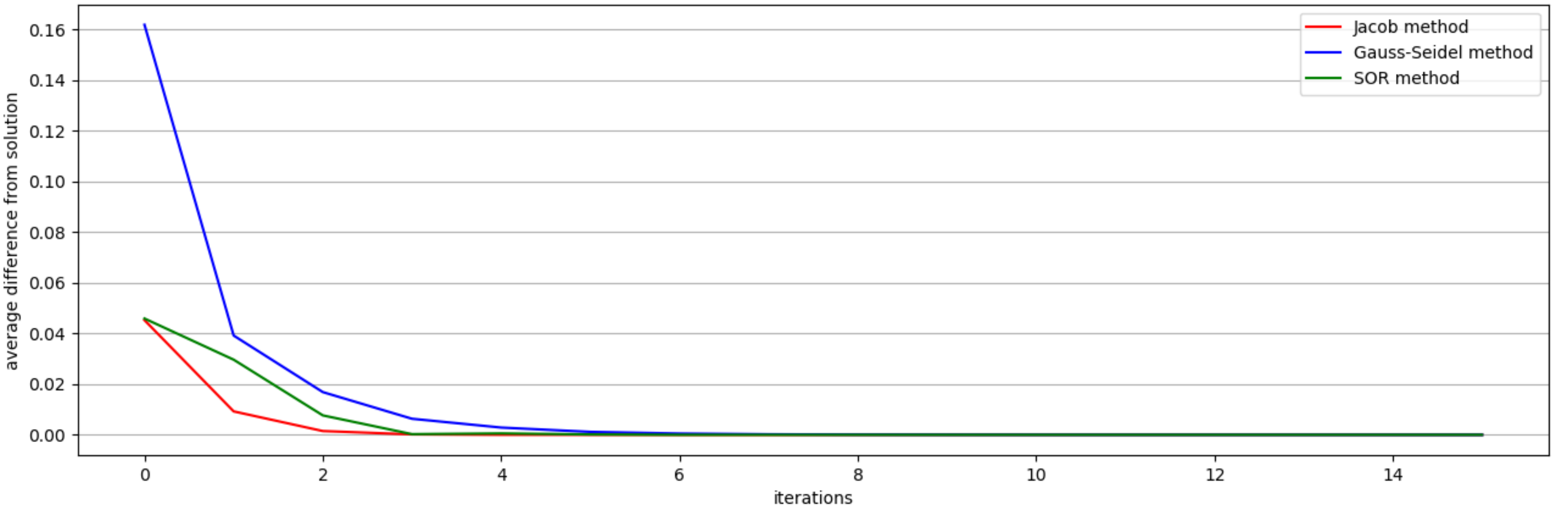


$$e_J = 2.335 \cdot 10^{-11}$$

$$e_G = 1.51955 \cdot 10^{-4}$$

$$e_S = 1.09655 \cdot 10^{-10}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 10.0 & -1.0 & 2.0 & 0.0 \\ -1.0 & 11.0 & -1.0 & 3.0 \\ 2.0 & -1.0 & 10.0 & -1.0 \\ 0.0 & 3.0 & -1.0 & 8.0 \end{bmatrix} B_1 = \begin{bmatrix} 6.0 \\ 25.0 \\ -11.0 \\ 15 \end{bmatrix} X_1 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 2.0 \\ -1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

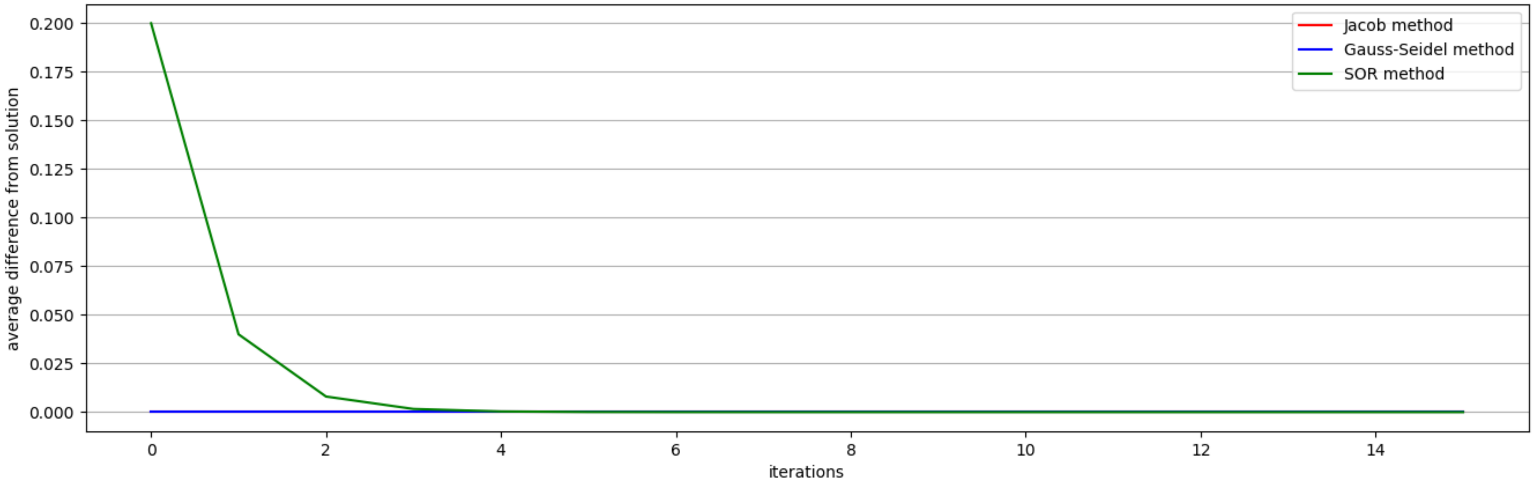


$$e_J = 8.32667 \cdot 10^{-17}$$

$$e_G = 2.35383 \cdot 10^{-7}$$

$$e_S = 9.75908 \cdot 10^{-12}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} B_2 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix} X_2 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

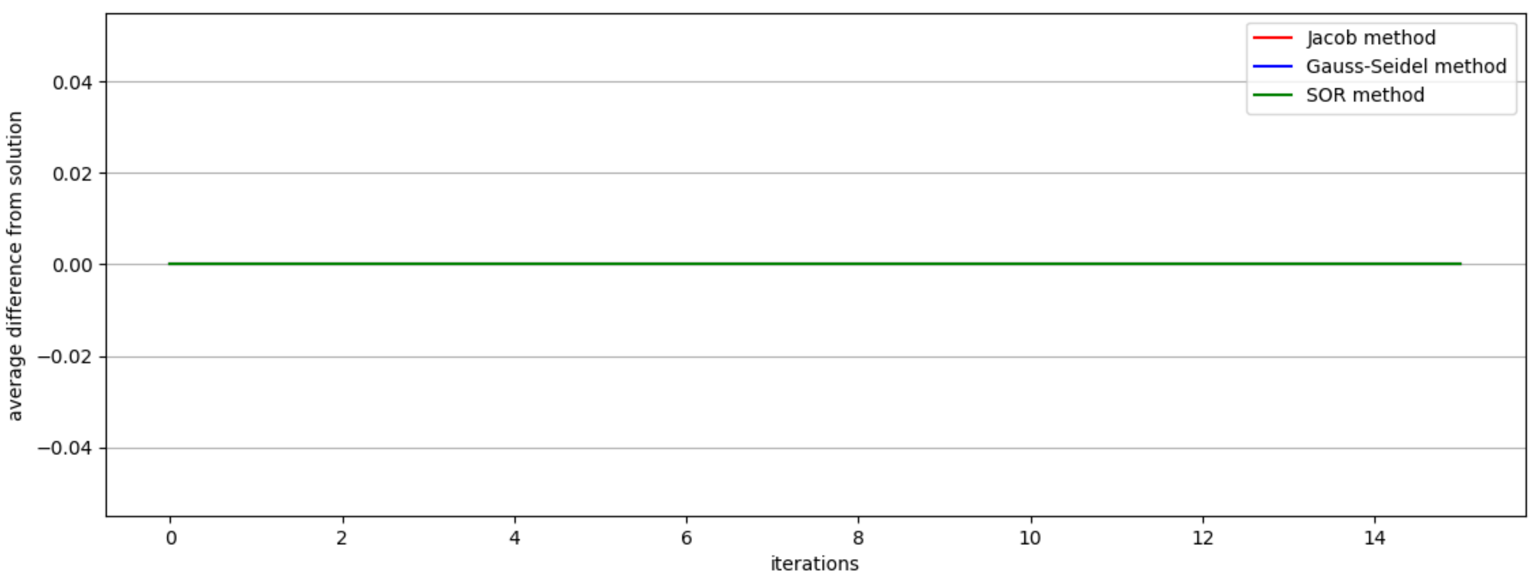


$$e_J = 0$$

$$e_G = 0$$

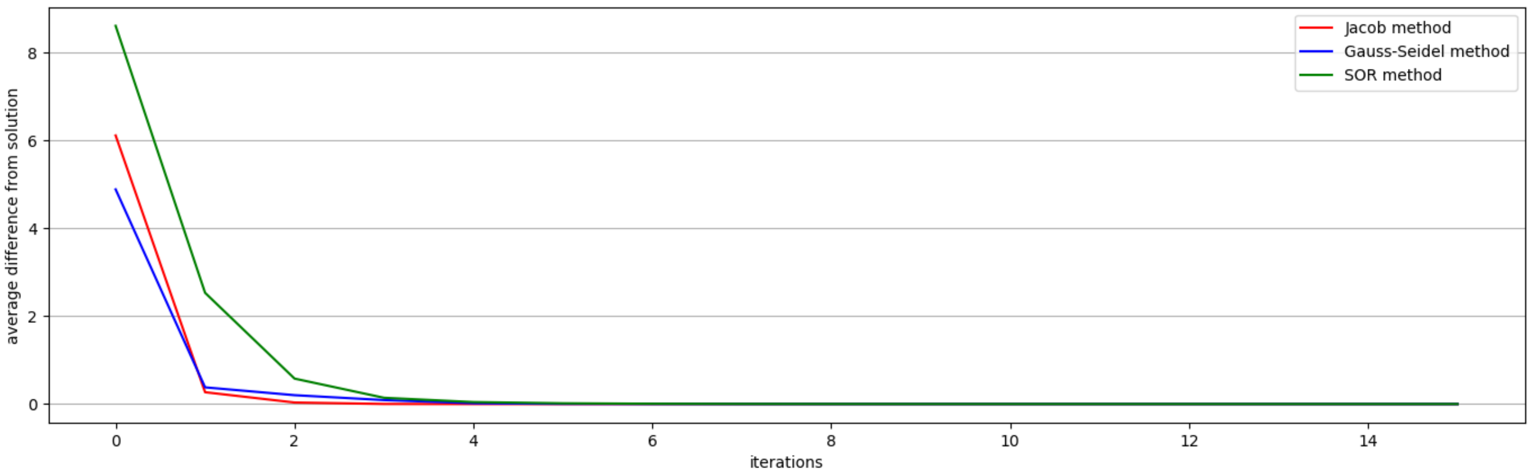
$$e_S = 6.55365 \cdot 10^{-12}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} B_3 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix} X_3 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$



$$e_J = 0$$
$$e_G = 0$$
$$e_S = 0$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 990 & 71 & 678 & 443 & 67 \\ 45 & 867 & 1 & -23 & 42 \\ 213 & 123 & 7484 & 0 & 9 \\ 12 & 344 & -123 & 789 & -45 \\ 81 & 35 & 61 & 80 & 500 \end{bmatrix} B_4 = \begin{bmatrix} 4899 \\ 821 \\ -477055 \\ 19692 \\ -9280 \end{bmatrix} X_4 = \begin{bmatrix} 45 \\ 0 \\ -65 \\ 13 \\ -20 \end{bmatrix}$$



$$e_J = 2.62253 \cdot 10^{-17}$$
$$e_G = 1.97575 \cdot 10^{-8}$$
$$e_S = 1.28737 \cdot 10^{-6}$$

3 Wnioski

Co ciekawe najmniejszy błąd otrzymaliśmy dla metody Jacobiego. Szczególnie słaby wynik metody SOR, niezgodny z oczekiwaniami może wynikać ze źle dobranego parametru ω jak również z faktu, że rozwiazywano bardzo proste macierze, wiec metoda nie mogła sie "wykazać".