Introduction to CES Functions

曹与时*

摘要

这份文档简要介绍了 CES(constant elasticity of substitution) 函数的基本性质。我们会先介绍弹性、替代弹性的概念，再开始正题。我们会从两商品的 CES 效用函数出发，逐步扩展到 n 个离散商品，最后拓展到 n 维连续商品。最终我们会列举一些在经济学理论中涉及到 CES 函数的模型。

目录

*复旦大学经济学院。电子信箱：yscao22@m.fudan.edu.cn.

1. 弹性 (Elasticity)

经济学入门中，最令人头疼的概念可以说是弹性了。为什么经济学关心弹性？到底如何理解弹性？我们可以先从经济学原理一定会遇到的例子入手：需求弹性。

例 1.1 (需求弹性)**.** *烤冷面摊位面临一个价格决策的难题。由于"猪周期"波动，火腿肠的成本上升。摊位老板想了解，如果把火腿肠从 5 元提高到 6 元，来购买的学生会少多少？老板已经算出来，市场的价格-需求函数是 $Q_D(P) = 250 - 10P$.*

这里的计算非常容易。

$$Q_D(5) = 250 - 10 * 5 = 200(\text{人}), Q_D(6) = 250 - 10 * 6 = 190(\text{人}).$$

$\Delta Q = 10$. 也就是说，学生会少 10 人。

当然，注意力强的朋友已经注意到了，我们可以利用导数（差分）来做这道题。假设（元）是最小单位，那么对于极小变动（5 元到 6 元）而言，我们可以近似地写为：

$$\Delta Q = Q'_D(P)\Delta P|_{P=5} = -10.(\text{人}).$$

这里，我们把微分 $\frac{dQ}{dP}$ 引入了我们的分析中。这里的 $\frac{dQ}{dP}$，单位是：（人/元）。

所以这位老板会损失 10 位客人。或者说，老板会少 $\frac{10}{200} = 5\%$ 的顾客。

这两种表述有什么不一样？第一种表述中，我们算出来的数字是有单位的。而计算百分比时，由于分子分母均有单位，所以单位抵消，我们只剩下数字。

然而，这似乎只是表述上的不同，是否有单位看起来并不重要。那么让我们看下一个例子。

例 1.2 (需求弹性：变式 1)**.** *假设这个世界上不存在单身狗，只有小情侣。摊位老板想了解，如果把火腿肠从 5 元提高到 6 元，来购买的小情侣会少多少对？注意到，市场的价格-需求函数会发生改变，成为 $Q_D(P) = 125 - 5P$.*

$$Q_D(5) = 125 - 5 * 5 = 100(\text{对}), Q_D(6) = 125 - 5 * 6 = 95(\text{对}).$$

$\Delta Q = 5$. 也就是说，老板会损失 5 对小情侣顾客。也即，老板会损失 $\frac{5}{100} = 5\%$ 的顾客。

和例 1.1 相比，我们发现：存在单位的结果会随着单位而变化，而比例则展现了其稳健性。事实上两个例子在现实生活中并没有任何差别（当然第二个例子不太现实）。经济学研究中，量纲会变得非常复杂。为了排除量纲带来的影响，我们选取比例作为研究对象。

例 1.3 (需求弹性：变式 2)**.** *现在重新以人为单位。烤冷面摊位决定逃离小破五角场，来到了徐家汇。现在烤肠的基本价是 24 元（感觉可以更高）。摊位老板想了解，如果把火腿肠从 24 元提高到 25 元，来购买的顾客会少多少？假设所有复旦学生回家都路过徐家汇，也即：市场的价格-需求函数仍然与例 1.1 一样，是 $Q_D(P) = 250 - 10P$.*

$$Q_D(5) = 250 - 10 * 24 = 10(\text{人}), Q_D(6) = 250 - 10 * 25 = 0(\text{人}).$$

$\Delta Q = 10$. 由于价格需求函数是线性的，这里不会有任何变化。所以 10（人）这一点，和之前例 1.1 的计算是一样的。但是老板损失了多少比例的顾客？$\frac{10}{10} = 100\%$！也即，老板提了同样单位的价格，却损失了所有顾客。

我们可以清楚的看到例 1.1 和例 1.3 的差异：由于基础价格的不同，即使老板损失的顾客数量是一样的，损失顾客的比例天差地别。也即：损失顾客的比例具有*价格效应*。

在通常的经济学建模中，除非我们关注价格效应（或者价格带来的规模效应），我们一般会设定其为*恒定*的。

由此，我们正式引入弹性的定义。

Definition 1.1 (弹性)**.** *如果变量 y 是 x 的函数，即 y=$y(x)$，那么 y 对 x 的弹性可以定义为：*

$$\epsilon = e_{yx} = \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{dlny}{dlnx} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{x}{y} = \frac{dy(x)}{dx}\frac{x}{y}.$$

由定义 $e_{yx} = \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}$ 可以看出，弹性衡量的是：因变量 y 由自变量 x 比例上的变动（$\frac{\Delta x}{x}$）而产生的比例上的变动 ($\frac{\Delta y}{y}$)。不但如此，更准确地来说，弹性衡量的是这种*比例变动的速度*。

在我们之前的例子中，我们可以分别计算 $P = 5$ 和 $P = 24$ 对应的*点弹性*。

$$\epsilon|_{P=5} = \frac{dQ_D(P)}{dP}\frac{P}{Q} = -10 * \frac{5}{200} = -0.25,$$

$$\epsilon|_{P=24} = \frac{dQ_D(P)}{dP}\frac{P}{Q} = -10 * \frac{24}{10} = -24.$$

很明显，需求弹性在不同价格下是不一样的，也即存在价格的规模效应。

2. 边际替代率 (Marginal Rate of Substitution)

在过渡到替代弹性之前，我们先介绍一下什么是边际替代率 (MRS)。我们举一个例子。

例 2.1 (*两商品的效用函数*)**.** 假设我们的效用函数服从 C-D 形式：$U(c_1, c_2) = c_1^{\alpha} c_2^{1-\alpha}$。给定现在消费 $\bar{c}_1$ 单位 1 商品和 $\bar{c}_2$ 单位 2 商品，带来 U_1 的效用水平。

此时边际替代率是什么？是给定效用水平 U_1 不变的时候，增加 1 单位的商品 1 的消费会导致商品 2 消费减少的量。很抽象，是不是？

我们来进一步深究里面的经济机制。如果效用水平不变的话，agent 选择 1 个商品 1 还是选择 x 个商品 2，应该是*无差异*的。换句话而言，1 个商品 1 带来的边际效用，与 x 个商品 2 带来的边际效用，应该相同的。也即：

$$\frac{\partial U}{\partial c_1}|_{c_1=\bar{c}_1, c_2=\bar{c}_2} = x\frac{\partial U}{\partial c_2}|_{c_1=\bar{c}_1, c_2=\bar{c}_2}.$$

此处的 x 正是我们要找的边际替代率的绝对值。由于在我们现在的设定下，商品 1 消费的增加带来的是商品 2 消费的减少，所以 $MRS = -x$.

Definition 2.1 (边际替代率)**.** *给定消费组合 (x, y) 对应的效用无差异曲线 U，那么在无差异曲线 U_1 上，商品 x 对商品 y 的边际替代率可以定义为*

$$MRS = \frac{dy(x)}{dx}|_{U=U_1} = -\frac{MU_1}{MU_2}|_{U=U_1}.$$

其中 MU_1 就是商品 1 的边际效益，也即 $\frac{\partial U}{\partial c_1}$。一单位的 x 商品消费的增加带来 MRS 单位 y 商品的消费。

Remark 2.1. 也有教科书为了简洁起见，将 MRS 直接定义为 $\frac{MU_1}{MU_2}|_{U=U_1}$。在此，我们以范里安的定义为基准。

例 2.2 (C-D 函数的边际替代率)**.** 现在开始计算给定 C-D 函数的边际替代率。

$$MU_1 = \frac{\partial U}{\partial c_1} = \alpha c_1^{\alpha-1} c_2^{1-\alpha}|_{c_1=\bar{c}_1, c_2=\bar{c}_2} = \alpha (\frac{\bar{c}_2}{\bar{c}_1})^{1-\alpha}.$$

$$MU_2 = \frac{\partial U}{\partial c_2} = (1-\alpha) c_1^{\alpha} c_2^{-\alpha}|_{c_1=\bar{c}_1, c_2=\bar{c}_2} = (1-\alpha)(\frac{\bar{c}_1}{\bar{c}_2})^{\alpha}.$$

$$MRS = -\frac{MU_1}{MU_2}|_{U=U_1} = -\frac{\alpha}{1-\alpha}(\frac{\bar{c}_2}{\bar{c}_1}).$$

在此处，我们可以看到，C-D 函数的边际替代率仅与两商品消费的比例有关，与消费的总规模无关。换句话而言，C-D 函数的边际替代率不存在规模效应。

3. 边际技术替代率 (Marginal rate of technical substitution/Technical rate of substitution)

上一章我们介绍的是对应效用曲线的*边际替代率 (MRS)*。对于生产函数，我们有类似的定义，此时将商品 1 和 2 换成了资本和劳动：

Definition 3.1 (边际技术替代率)**.** *给定要素投入组合 (k, l) 对应的产出无差异曲线 U，那么在无差异曲线 U_1 上，劳动 l 对资本 k 的边际技术替代率可以定义为*

$$MRTS = \frac{dk}{dl}|_{Y=Y_1} = -\frac{MPL}{MPK}|_{Y=Y_1}.$$

其中 MPK 就是资本的边际产出，也即 $\frac{\partial Y}{\partial k}$。

4. 替代弹性 (Elasticity of Substitution)

有了弹性和边际替代率的基础，我们来介绍替代弹性。需求弹性衡量的是：一单位价格变动的比例带来的需求变动的比例，那么依葫芦画瓢，替代弹性是什么？是单位*边际替代率*变化的比例带来的*替代变动的比例*。

什么是*替代变动的比例*？替代指的是消费品组合中，商品 1 的消费被商品 2 的消费所替代。也就是说，我们关心的变量是 $\frac{c_2}{c_1}$。由此，我们可以定义替代弹性：

Definition 4.1 (替代弹性)**.** *对于消费者而言，假定有商品 1 和商品 2，那么替代弹性可以被定义为：*

$$\sigma = \frac{\frac{\Delta \frac{c_2}{c_1}}{\frac{c_2}{c_1}}}{\frac{\Delta |MRS|}{|MRS|}} = \frac{d \ln \frac{c_2}{c_1}}{d \ln |MRS|}.$$

对于生产者而言，替代弹性可以被定义为：

$$\sigma = \frac{\frac{\Delta \frac{k}{l}}{\frac{k}{l}}}{\frac{\Delta |MRTS|}{|MRTS|}} = \frac{d \ln \frac{k}{l}}{d \ln |MRTS|}.$$

为何我们关心常替代弹性 (constant elasticity of substitution)？正如烤肠的例子所示，如果替代弹性不是常数，就会出现（价格上的）规模效应。然而，在经济建模中，大部分时间，我们不希

望替代弹性会随着消费规模的扩大而发生变化————只要要素之间比例相同，他们的替代弹性就应当是一样的。否则，模型会变得非常复杂：不同规模的厂商/消费者有不同的行为。当然，在更贴近现实的建模（Heterogeneous Agent Model）中，这一点假设可以放松。

例 4.1 (C-D 函数的替代弹性). *证明 C-D 函数的替代弹性是常数，也即：C-D 函数是一类 CES 函数。*

$$\sigma = \frac{d\ln\frac{c_2}{c_1}}{d\ln|MRS|} = \frac{d\ln\frac{c_2}{c_1}}{d\ln\frac{\alpha}{1-\alpha}(\frac{c_2}{c_1})} = \left[\frac{d\ln\frac{\alpha}{1-\alpha} + d\ln(\frac{c_2}{c_1})}{d\ln\frac{c_2}{c_1}}\right]^{-1} = 1.$$

5. 两商品的 CES 函数与 CES 生产函数

在定义完替代弹性后，我们终于进入正题：CES 函数。首先我们来看一个最简单的情况：两个商品的 CES 函数。

Definition 5.1 (两商品的 CES 效用函数). *对于两商品的 CES 效用函数，我们定义为*

$$U(x,y) = [a_1 x^\rho + a_2 y^\rho]^{\frac{1}{\rho}}, \rho \leq 1.$$

类似地，我们可以定义 CES 生产函数。

Definition 5.2 (CES 生产函数). *对于 CES 生产函数，我们定义为*

$$U(x,y) = A\left[aK^\rho + (1-a)L^\rho\right]^{\frac{1}{\rho}}, \rho \leq 1.$$

Theorem 5.2.1 (替代弹性). *对于 CES 形式的效用函数/生产函数，替代弹性为*

$$\sigma = \frac{1}{1-\rho}.$$

Theorem 5.2.2 (Leontief 生产函数). *当替代弹性 $\sigma \to 0$, $\rho \to -\infty$, 函数形式演变为 $Y = A\min[K, L]$.*

Theorem 5.2.3 (Linear 生产函数). *当替代弹性 $\sigma \to +\infty$, $\rho \to 1$, 函数形式演变为 $Y = A[aK + (1-a)L]$.*

Theorem 5.2.4 (Cobb-Douglas 生产函数). *当替代弹性 $\sigma \to 1$,$\rho \to 0$, 函数形式演变为 $Y = \tilde{A}K^a L^{1-a}$.*

6. n 维离散商品的 CES 函数

Definition 6.1 (n 维离散商品的 CES 函数). *对于 n 维离散商品的 CES 函数，我们定义为*

$$U(x) = \left[\sum_i a_i x i^\rho\right]^{\frac{1}{\rho}}, \rho \leq 1.$$

7. 连续商品的 CES 函数

Definition 7.1 (连续商品的 CES 函数)**.** 对于连续商品的 *CES* 函数，我们定义为

$$C \equiv \left(\int_0^N c_i^{\frac{\epsilon-1}{\epsilon}} di \right)^{\epsilon/(\epsilon-1)}$$

8. 应用：The Armington Model

9. 应用：垄断竞争——Dixit-Stigliz Model

10. 拓展：非齐次 CES 函数与结构转型：Comin et al:(2021, *Econometrica*).

11. 拓展：非希克斯中性的 CES 生产函数：Acemoglu& Restrepo:(2019,*AER*).

12. 拓展：嵌套 CES(Nested CES): Boppart et al:(2023, *Revision for JPE*).