



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

---

## O Problema da Visita de Polígonos

---

Gabriel Freire Ushijima

São Paulo, SP  
3 de novembro de 2025

# 1 Introdução

Este relatório descreve a implementação e os resultados obtidos na resolução do problema da visita de polígonos, usando como base o paper de Dror et al. (2003) [1] que descreve algoritmos para o caso sem e com restrições. Buscamos apresentar uma abordagem mais prática e detalhada para o problema, sem um foco tão grande na análise teórica.

## 2 O Problema de Visita de Polígonos Irrestrito

Vamos tomar como base a implementação do algoritmo de Mitchell para o problema irrestrito que fizemos em *Python*. O código pode ser encontrado no arquivo `TouringPolygons/problem1.py`.

### 2.1 Definições e Notação

Considere o seguinte problema: dados dois pontos  $s, t \in \mathbb{R}^2$  e uma sequência de polígonos convexos disjuntos  $P_1, P_2, \dots, P_k$ , encontrar o caminho de menor comprimento que se inicia em  $s$ , termina em  $t$  e toca cada polígono  $P_i$  em pelo menos um ponto, podendo atravessá-los.

A figura ao lado 1 ilustra um exemplo de entrada e a solução ótima para o problema para um caso com 3 polígonos. Temos  $s$  como o **ponto verde**,  $t$  como o **ponto vermelho** e os polígonos  $P_1, P_2$  e  $P_3$  como o **triângulo azul**, o **trapézio laranja** e o **pentágono verde**, respectivamente. O caminho mínimo é representado pela **linha roxa**.

Retomando o paper, definimos um  $i$ -path até  $p$  como um caminho mínimo que começa em  $s$ , encosta em cada um dos polígonos  $P_1, P_2, \dots, P_i$  e termina em  $p$ . Note que nosso objetivo é encontrar um  $k$ -path até  $t$ . Enquanto não vamos entrar em detalhes, todo  $i$ -path é único.

A função central desse algoritmo será a função  $\text{Query}(p, i)$ , que recebe um ponto  $p$  e um índice  $i$  e retorna o penúltimo ponto  $q$  do  $i$ -path até  $p$  (ou seja, o ponto imediatamente anterior à  $p$  nesse caminho).

Primeiramente, vamos descrever procedimentos auxiliares que serão úteis para a implementação da função  $\text{Query}$ . Finalmente, vamos descrever como responder consultas usando esses procedimentos. Por enquanto, vamos assumir que sabemos como responder as consultas.

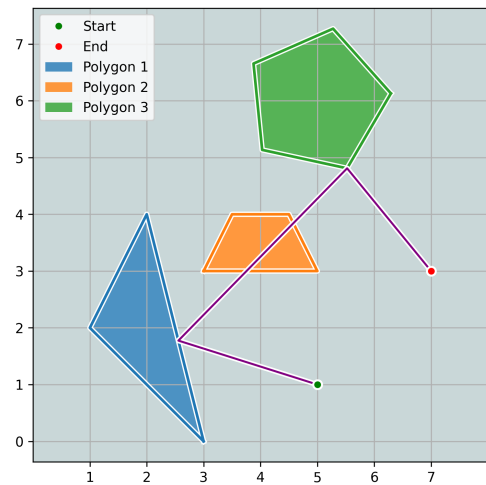


Figura 1: Caminho mínimo para um caso de 3 polígonos.

### 2.2 Representação dos Objetos

Antes de descrever os procedimentos auxiliares, é importante definir como representamos os objetos geométricos envolvidos no problema. Utilizamos as seguintes representações:

- **Pontos e Vetores:** Representados por uma classe `Vector2` que guarda um par de números reais  $(x, y)$ .
- **Polígonos:** Representados por uma classe `Polygon2` que guarda uma lista ordenada de seus vértices (representados por `Vector2`) no sentido anti-horário. Um vértice arbitrário é escolhido para ser indexado como o primeiro.
- **Caminho Final:** Representado como uma lista de pontos (representados por `Vector2`) na ordem em que aparecem no caminho.

### 2.3 Particionando o Plano

É possível mostrar [1] que para cada polígono  $P_i$  podemos criar uma partição  $S_i$  do plano tal que o comportamento da função  $\text{Query}(p, i)$  depende exclusivamente de qual região da partição  $S_i$  o ponto  $p$  pertence, sendo possível localizar cada ponto de maneira eficiente. Por falta de um nome melhor, chamamos cada parte de  $S_i$  de *região*.

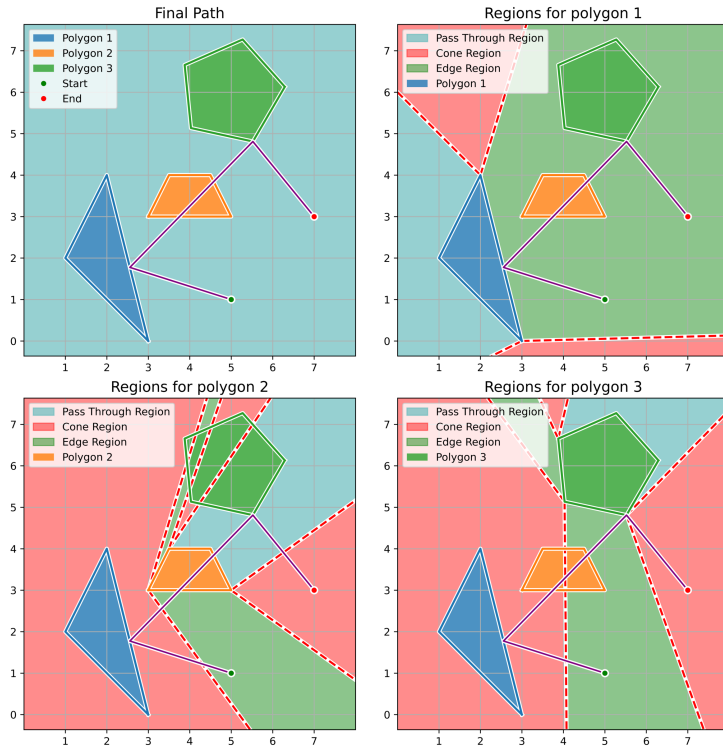


Figura 2: Partição do plano para cada polígono do exemplo anterior.

mos considerar pontos dentro dos polígonos  $P_i$  como pertencentes à região de atravessar.

Ademais, note que cada região de vértice é delimitada por duas semi-retas que partem de um vértice de  $P_i$ , incluindo todos os pontos que estão entre essas semi-retas. Similarmente, cada região de aresta é delimitada por duas semi-retas que partem dos extremos de uma aresta de  $P_i$  e a própria aresta, incluindo todos os pontos que estão entre essas semi-retas e a aresta. Finalmente, a região de atravessar é o complemento das regiões de vértice e aresta.

### 2.3.1 Representado as Partições

Como mencionado, as regiões se complementam, assim, do ponto de vista de implementação, decidimos armazenar apenas as regiões de vértice, uma vez que as regiões de aresta podem ser construídas a partir delas, simplesmente verificando se um ponto está entre as semi-retas de duas regiões de vértice adjacentes e a aresta que as separa.

Para representar as regiões de vértice, armazenamos uma lista de pares de direções  $(d_1, d_2)$  para cada vértice  $v$  de  $P_i$ , onde  $d_1$  e  $d_2$  são vetores unitários que representam as direções das semi-retas que delimitam a região de vértice associada a  $v$ . Nem todo vértice de  $P_i$  gera uma região de vértice, assim, se um vértice  $v$  não gerar uma região, então armazenamos um par  $(d, d)$  qualquer na posição correspondente da lista, representando uma região válida, mas vazia. Isso será mais relevante adiante.

Essa representação já permite que verifiquemos se um ponto  $p$  pertence a uma região de vértice e qual. No entanto, não conseguimos distinguir entre regiões de aresta e a região de atravessar. Para resolver esse problema, armazenamos uma lista de booleanas que indica se uma aresta é visível ou não. Assim, para determinar se um ponto  $p$  pertence a uma região de aresta ou à região de atravessar, basta verificar se  $p$  está entre as semi-retas de duas regiões de vértice adjacentes e, em caso positivo, verificar se a aresta que as separa é visível ou não.

### 2.3.2 Construindo as Partições

Primeiramente, a partir da figura, note que nem todo vértice e nem toda aresta de  $P_i$  geram uma região na partição  $S_i$ . Dizemos que uma aresta que gera uma região é uma aresta visível, assim, nosso primeiro passo é encontrar todas as arestas visíveis de  $P_i$ .

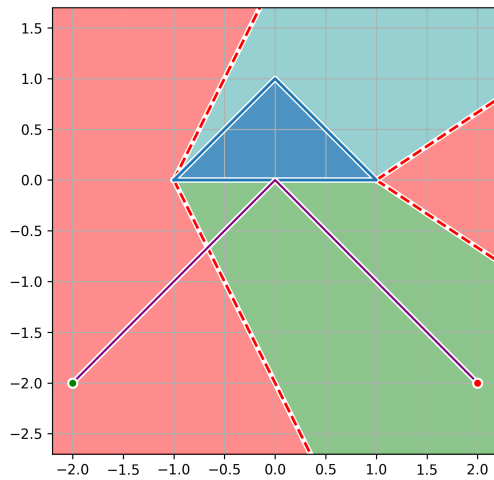
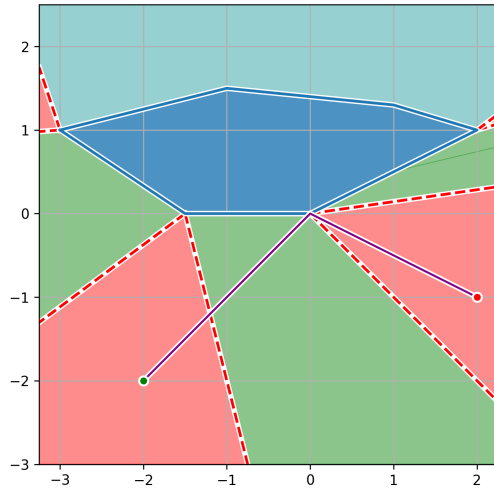
Uma maneira intuitiva de se uma aresta  $e$  é visível é calcular  $p = \text{Query}(m, i - 1)$  onde  $m$  é o ponto médio de  $e$  e verificamos se  $\overline{pm}$  atravessa  $P_i$ . Se o segmento atravessa  $P_i$ , então  $e$  não é visível, caso contrário,

Enquanto a quantidade de regiões de  $S_i$  pode ser numerosa a depender do número de vértices de  $P_i$ , cada região pode ser de exatamente 3 tipos diferentes: **Regiões de Vértice** (red), **Regiões de Aresta** (green) e **Regiões de Atravessar** (blue).

Nas seções a seguir vamos descrever como usar essas partições para responder consultas, mas por enquanto vamos descrever como representar e construir essas partições. Por enquanto, apenas mantenha em mente que se conseguirmos representar e construir essas partições, então podemos usá-las para responder consultas e resolver o problema de maneira eficiente.

A partir da ilustração 2, note que cada região de vértice (*Cone Region*) está associada a um vértice de  $P_i$ , cada região de aresta (*Edge Region*) está associada a uma aresta de  $P_i$  e há exatamente uma região de atravessar (*Pass Through Region*). Ademais, essas regiões se complementam, ou seja, o conjunto de todas as regiões de vértice, aresta e atravessar é o plano todo e nenhuma região se sobrepõe a outra. Para que isso seja válido, deve-

$e$  é visível. No entanto, essa abordagem é ineficiente, uma vez que determinar se  $\overline{pm}$  atravessa  $P_i$  custa  $O(|P_i|)$  com uma abordagem ingênua e uma abordagem mais eficiente seria complexa de implementar. Por esse motivo vamos calcular essas arestas posteriormente.



Agora vamos calcular as regiões de vértice de um polígono  $P_i$ . Vamos considerar o vértice  $v$  de  $P_i$  e calculamos  $p = \text{Query}(v, i-1)$ , a seguir explicamos como calcular  $p$ , mas uma intuição inicial é pensar que  $\text{Query}(q, 0) = s$  para qualquer  $q$ , uma vez que um 0-path não precisa tocar em nenhum polígono, assim, o menor caminho é uma linha reta de  $s$  até  $q$ .

Agora consideramos a direção de  $d = v - p$  e a maneira que esse raio chega em  $v$ .

Uma vez que temos todas as arestas visíveis, podemos construir as regiões de vértice e de aresta. Para cada vértice  $v$  de  $P_i$ , calculamos  $p = \text{Query}(v, i)$  e consideramos a direção de  $d = v - p$ . Se a aresta anterior a  $v$  (no sentido anti-horário) é visível, então  $d_1$  será a reflexão de  $d$  em relação à aresta anterior, caso contrário,  $d_1$  será a mesma direção de  $d$ . Similarmente, se a aresta posterior a  $v$  é visível, então  $d_2$  será a reflexão de  $d$  em relação à aresta posterior, caso contrário,  $d_2$  será a mesma direção de  $d$ . Assim, criamos a região de vértice  $(v, d_1, d_2)$ .

Dessa forma, sabemos todas as regiões de vértice. Agora para cada aresta visível  $e = (u, v)$  de  $P_i$ , temos que  $d_1$  será a segunda direção da região de vértice associada a  $u$  e  $d_2$  será a primeira direção da região de vértice associada a  $v$ . Assim, criamos a região de aresta  $(u, v, d_1, d_2)$ .

Finalmente, não é necessário criar a região de atravessa, uma vez que sabemos que um ponto pertence a ela se ele não pertence a nenhuma outra região.

## 2.4 Respondendo Consultas

Agora que sabemos como construir as partições  $S_i$ , podemos descrever como usá-las para responder consultas  $\text{Query}(p, i)$ . O procedimento utilizado é recursivo, assim, primeiro definimos o caso base, que é  $\text{Query}(p, 0) = s$ , uma vez que um 0-path não precisa tocar em nenhum polígono, assim, o menor caminho é uma linha reta de  $s$  até  $p$ .

Para  $i > 0$ , primeiramente determinamos a região  $R$  de  $S_i$  que contém  $p$ . Descrevemos acima como representar cada região e a partir dela é fácil determinar à qual um ponto  $p$  pertence. Também é importante ressaltar que  $p$  sempre pertence a exatamente uma região. Agora vamos analisar os 3 casos possíveis para  $R$ :

- Região de Vértice: Seja  $R = (v, d_1, d_2)$ . Nesse caso, o  $i$ -path até  $p$  deve passar pelo vértice  $v$ , tocando o polígono  $P_i$ . Assim, temos que  $\text{Query}(p, i) = v$ .
- Região de Aresta: Seja  $R = (u, v, d_1, d_2)$ . Nesse caso, o  $i$ -path até  $p$  deve passar por algum ponto  $q$  da aresta  $e = (u, v)$ , tocando o polígono  $P_i$ . Para calcular  $q$ , primeiro determinamos  $q' = \text{Query}(p', i-1)$ , onde  $p'$  é a reflexão de  $p$  em relação à aresta  $e$ . Agora, dizemos que  $q$  é a interseção entre  $q'p'$  e a aresta  $e$ . Finalmente, respondemos  $\text{Query}(p, i) = q$ .
- Região de Atravessa: Seja  $R$  a região de atravessa. Nesse caso, o  $i$ -path até  $p$  automaticamente atravessa o polígono  $P_i$  em algum ponto. Portanto, podemos simplesmente responder  $\text{Query}(p, i) = \text{Query}(p, i-1)$ .

## 2.5 Calculando o Caminho Mínimo

Uma vez que sabemos como responder consultas, calcular o caminho final é muito simples. Basta calcular  $q_k = \text{Query}(t, k)$ , então  $q_{k-1} = \text{Query}(q_k, k-1)$  e assim por diante, até  $q_0 = s$ . Assim, o caminho mínimo é simplesmente a sequência  $s, q_1, \dots, q_k, t$ .

### 3 O Problema de Visita de Polígonos Geral

Vamos tomar como base a implementação do algoritmo de Mitchell para o problema restrito que fizemos em *Python*. O código pode ser encontrado no arquivo `TouringPolygons/problem2.py`.

#### 3.1 Definições e Notação

O problema segue de forma similar ao anterior, mas agora também recebemos como entrada ‘cercas’  $F_0, \dots, F_k$  tais que para todo  $0 \leq i \leq k$  vale que o polígono  $P_i$  e  $P_{i+1}$  estão contidos em  $F_i$ , para tal, consideramos  $P_0 = \{s\}$  e  $P_{k+1} = \{t\}$ . Nosso objetivo é encontrar o caminho de menor comprimento que se inicia em  $s$ , termina em  $t$ , toca cada polígono  $P_i$  em pelo menos um ponto e nunca sai da cerca  $F_i$  no seu caminho entre  $P_i$  e  $P_{i+1}$ .

Dizemos que um caminho  $\pi$  de  $a$  até  $b$  respeita as cercas  $F_i, \dots, F_j$  se  $\pi$  toca todos os polígonos  $P_{i+1}, \dots, P_j$  e para cada  $i \leq l < j$ , o trecho de  $\pi$  entre  $P_l$  e  $P_{l+1}$  está contido em  $F_l$ . Ademais, definimos um  $i$ -path até  $p$  como um caminho mínimo de  $s$  até  $p$  que respeita as cercas  $F_0, \dots, F_i$ . Note que nosso objetivo é encontrar um  $k$ -path até  $t$ .

A função central desse algoritmo continua sendo `Query`, no entanto, dessa vez vamos adicionar um novo parâmetro, assim, a função `Query(p, i, j)` recebe um ponto  $p$  e dois índices  $i$  e  $j$  e retorna o penúltimo ponto  $q$  do menor caminho até  $p$  que parte de  $s$ , toca todos os polígonos  $P_1, \dots, P_i$  e respeita as cercas  $F_0, \dots, F_j$ .

Primeiramente, é essencial que  $i \leq j$ , ademais, se  $i = j$  então `Query(p, i, j)` é simplesmente o penúltimo ponto do  $i$ -path até  $p$ . Adicionamos o parâmetro  $j$  para o caso em que queremos um  $i$ -path, mas  $p$  está fora da cerca  $F_i$  um caso que aparece naturalmente na recursão do algoritmo. Por enquanto, vamos assumir que sabemos como responder as consultas.

#### 3.2 Caminhos Restritos

Outra função extremamente importante para a implementação desse algoritmo é a função `Fenced(p1, p2, i, j)` que retorna o menor caminho de  $p_1$  até  $p_2$  que respeita as cercas  $F_i, \dots, F_j$ . Note que se  $i = j$ , então `Fenced(p1, p2, i, j)` é simplesmente o segmento  $\overline{p_1 p_2}$  se ele estiver contido em  $F_i$  e não existe caso contrário. Assim, vamos assumir que  $i < j$ .

### Referências

- [1] M. Dror, A. Efrat, A. Lubiw e J. S. B. Mitchell, “Touring a sequence of polygons,” em *Proceedings of the Thirty-Fifth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, sér. STOC ’03, San Diego, CA, USA: Association for Computing Machinery, 2003, pp. 473–482, ISBN: 1581136749. DOI: 10.1145/780542.780612. endereço: <https://doi.org/10.1145/780542.780612>.