



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

---

## O Problema da Visita de Polígonos

---

Gabriel Freire Ushijima

São Paulo, SP  
10 de novembro de 2025

---

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>O Problema de Visita de Polígonos Irrestrito</b>	<b>2</b>
2.1	Definindo o Problema . . . . .	2
2.2	Particionando o Plano . . . . .	2
2.2.1	Região de Primeiro Contato . . . . .	3
2.2.2	Construindo Regiões de Vértice . . . . .	4
2.3	Localizando Pontos na Partição . . . . .	5
2.3.1	Verificando Regiões de Vértice . . . . .	5
2.3.2	Verificando Regiões de Aresta . . . . .	6
2.3.3	Localização Eficiente de Pontos na Partição . . . . .	7
2.4	Respondendo Consultas . . . . .	8
2.5	Calculando o Caminho Mínimo . . . . .	9
2.6	Análise de Complexidade . . . . .	10
<b>3</b>	<b>O Problema de Visita de Polígonos Geral</b>	<b>11</b>
3.1	Definições e Notação . . . . .	11
3.2	Caminhos Restritos . . . . .	11
<b>A</b>	<b>Notações</b>	<b>12</b>

# 1 Introdução

Este relatório descreve a implementação e os resultados obtidos na resolução do problema da visita de polígonos, usando como base o paper de Dror et al. (2003) [1] que descreve algoritmos para o caso sem e com restrições. Buscamos apresentar uma abordagem mais prática e detalhada para o problema, sem um foco tão grande na análise teórica.

Recomendamos a leitura do paper original para uma compreensão mais profunda dos conceitos e das provas por trás dos algoritmos apresentados aqui. Também é importante notar que este relatório não cobre todos os detalhes do paper, mas sim uma visão geral e a implementação prática dos algoritmos.

O código implementado pode ser encontrado no repositório GitHub, contendo scripts em *Python* para resolver ambos os casos do problema.

Finalmente, recomendamos a leitura do Apêndice A para entender as notações usadas ao longo do relatório.

## 2 O Problema de Visita de Polígonos Irrestrito

Vamos tomar como base a implementação do algoritmo de Mitchell para o problema irrestrito que fizemos em *Python*. O código pode ser encontrado no arquivo `TouringPolygons/problem1.py`.

### 2.1 Definindo o Problema

Considere o seguinte problema: dados dois pontos  $s, t \in \mathbb{R}^2$  e uma sequência de polígonos convexos disjuntos  $P_1, P_2, \dots, P_k$ , encontrar o caminho de menor comprimento que se inicia em  $s$ , termina em  $t$  e toca cada polígono  $P_i$  em pelo menos um ponto, podendo atravessá-los.

A Figura 1 ilustra um exemplo de entrada e a solução ótima para o problema para um caso com 3 polígonos. Temos  $s$  como o ponto verde,  $t$  como o ponto vermelho e os polígonos  $P_1, P_2$  e  $P_3$  como o triângulo azul, o trapézio laranja e o pentágono verde, respectivamente. O caminho mínimo é representado pela linha roxa.

Retomando o paper, definimos um  $i$ -path até  $p$  como um caminho mínimo que começa em  $s$ , encosta em cada um dos polígonos  $P_1, P_2, \dots, P_i$  e termina em  $p$ . Note que nosso objetivo é encontrar um  $k$ -path até  $t$ . Enquanto não vamos entrar em detalhes, todo  $i$ -path é único.

A função central desse algoritmo será a função  $\text{Query}(p, i)$ , que recebe um ponto  $p$  e um índice  $i$  e retorna o penúltimo ponto  $q$  do  $i$ -path até  $p$  (ou seja, o ponto imediatamente anterior à  $p$  nesse caminho).

Primeiramente, vamos descrever procedimentos auxiliares que serão úteis para a implementação da função  $\text{Query}$ . Finalmente, vamos descrever como responder consultas usando esses procedimentos. Por enquanto, vamos assumir que sabemos como responder as consultas. Para as seções a seguir, vamos assumir que os polígonos  $P_1, \dots, P_k$  são representados por listas de vértices ordenados em sentido anti-horário, com um vértice arbitrário como o primeiro.

### 2.2 Particionando o Plano

É possível mostrar [1] que para cada polígono  $P_i$  podemos criar uma partição  $S_i$  do plano tal que o comportamento da função  $\text{Query}(p, i)$  dependa exclusivamente de a qual região da partição  $S_i$  o ponto  $p$  pertence, sendo possível localizar cada ponto de maneira eficiente. Por falta de um nome melhor, chamamos cada parte de  $S_i$  de *região*.

Nas seções a seguir vamos descrever como usar essas partições para responder consultas, mas por enquanto vamos descrever como representar e construir essas partições. Por enquanto, apenas mantenha em mente que se conseguirmos representar e construir essas partições, então podemos usá-las para responder consultas e resolver o problema de maneira eficiente.

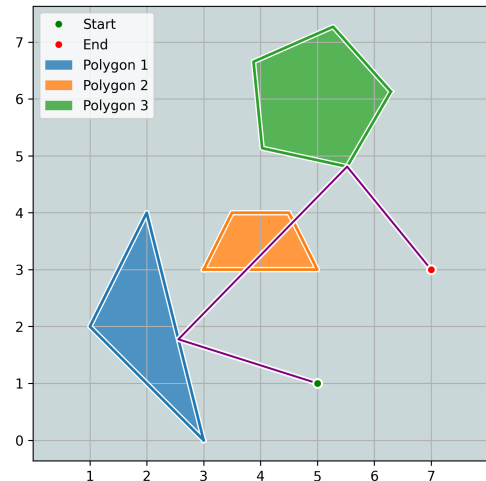


Figura 1: Caminho mínimo para um caso de 3 polígonos.

Enquanto a quantidade de regiões de  $S_i$  pode ser numerosa a depender do número de vértices de  $P_i$ , cada região pode ser de exatamente 3 tipos diferentes: **Regiões de Vértice**, **Regiões de Aresta** e **Regiões de Atravessar**.

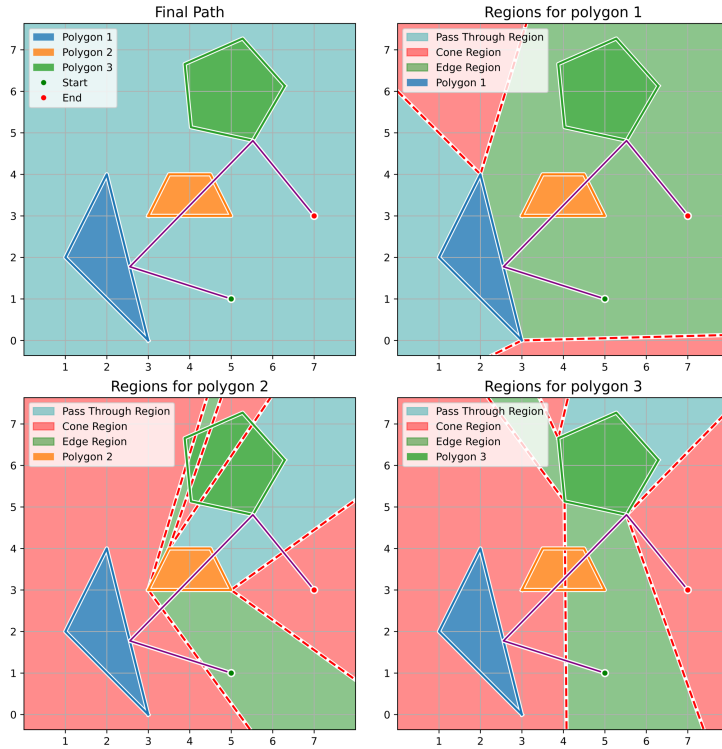


Figura 2: Partição do plano para cada polígono do exemplo anterior.

os pontos que estão entre essas semi-retas e a aresta. Finalmente, a região de atravessar é o complemento das regiões de vértice e aresta.

### 2.2.1 Região de Primeiro Contato

Para cada polígono  $P_i$ , definimos  $T_i$  como a *região de primeiro contato* de  $P_i$ , ou seja, o conjunto de pontos  $p$  no perímetro de  $P_i$  tais que o  $(i-1)$ -path até  $p$  toca em  $P_i$  pela primeira vez em  $p$ . Podemos provar [1] que  $T_i$  é uma região contínua do perímetro de  $P_i$  e que  $T_i$  é delimitada por vértices de  $P_i$ , ou seja,  $T_i$  é a união de uma sequência de arestas consecutivas de  $P_i$ . Por esse motivo, chamamos arestas de  $P_i$  que pertencem à  $T_i$  de **arestas visíveis** e as que não pertencem de **arestas bloqueadas**.

Essa região é importante, pois apenas as arestas visíveis de  $P_i$  que pertencem à  $T_i$  geram regiões de aresta em  $S_i$ , além disso, se um vértice está entre duas arestas bloqueadas, então ele não gera uma região de vértice em  $S_i$ .

Como  $T_i$  é a união de arestas, para determinar quais arestas de  $P_i$  pertencem à  $T_i$ , podemos simplesmente iterar sobre as arestas de  $P_i$  e verificar se o  $(i-1)$ -path até um ponto interno qualquer da aresta, por exemplo o ponto médio, chega em  $P_i$  pela primeira vez nesse ponto. Se isso for verdade, então a aresta pertence à  $T_i$ , caso contrário, não pertence.

No entanto, precisamos de uma maneira eficiente de fazer isso para todas as arestas de  $P_i$ . Se simplesmente fizermos isso de maneira ingênua, verificando se o segmento entre o último ponto  $q$  do  $(i-1)$ -path até o ponto médio  $m$  da aresta intersecta  $P_i$ , teríamos uma complexidade de  $O(|P_i|)$  por aresta, resultando em  $O(|P_i|^2)$

A partir da Figura 2, note que cada região de vértice (*Cone Region*) está associada a um vértice de  $P_i$ , cada região de aresta (*Edge Region*) está associada a uma aresta de  $P_i$  e há exatamente uma região de atravessar (*Pass Through Region*). Ademais, essas regiões se complementam, ou seja, o conjunto de todas as regiões de vértice, aresta e atravessar é o plano todo e nenhuma região se sobrepõe a outra. Para que isso seja válido, devemos considerar pontos dentro dos polígonos  $P_i$  como pertencentes à região de atravessar. As fronteiras entre as regiões podem ser consideradas como pertencentes a qualquer uma das regiões que as delimitam, produzindo o mesmo resultado, mas para simplicidade, vamos considerar que pertencem às regiões de vértice.

Ademais, note que cada região de vértice é delimitada por duas semi-retas que partem de um vértice de  $P_i$ , incluindo todos os pontos que estão entre essas semi-retas. Similarmente, cada região de aresta é delimitada por duas semi-retas que partem dos extremos de uma aresta de  $P_i$  e a própria aresta, incluindo todos

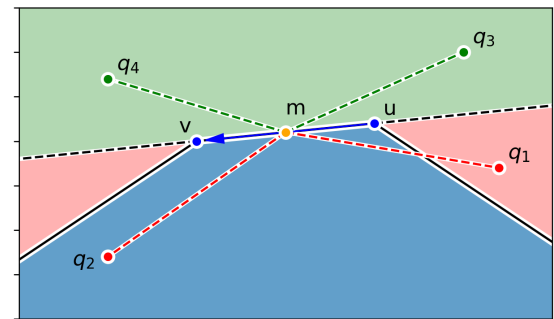


Figura 3: Testando aresta para região de primeiro contato.

para todas as arestas de  $P_i$ .

Felizmente, como  $P_i$  é convexo e suas arestas estão ordenadas em sentido anti-horário, sabemos que o segmento  $\overline{qm}$  toca  $P_i$  pela primeira vez em  $m$  se e somente se o produto vetorial de  $\overrightarrow{mv}$  com  $\overrightarrow{mq}$  for positivo. Usando essa ideia, podemos determinar todas as arestas visíveis de  $P_i$  em tempo  $O(1)$  por aresta, totalizando  $O(|P_i|)$ .

A Figura 3 ilustra essa ideia. Temos o polígono  $P_i$  em azul, os vértices  $u$  e  $v$  em azul, o ponto médio  $m$  da aresta em laranja e 4 pontos  $q_1, q_2, q_3$  e  $q_4$  representando possíveis últimos pontos do  $(i-1)$ -path até  $m$ . Note que os segmentos  $\overline{q_1m}$  e  $\overline{q_2m}$  passam pela parte interna de  $P_i$ , assim, o produto vetorial de  $\overrightarrow{uv}$  com  $\overrightarrow{mq_1}$  e  $\overrightarrow{mq_2}$  é positivo. Já os segmentos  $\overline{q_3m}$  e  $\overline{q_4m}$  não passam pela parte interna de  $P_i$ , assim, o produto vetorial de  $\overrightarrow{uv}$  com  $\overrightarrow{mq_3}$  e  $\overrightarrow{mq_4}$  é negativo.

Implementamos essa ideia no algoritmo 1, que recebe um polígono  $P_i$  e seu índice  $i$  e retorna uma lista booleana indicando quais arestas de  $P_i$  são visíveis.

---

**Algorithm 1:** ArestasVisíveis( $P_i$ )

Determina as arestas visíveis de  $P_i$

---

```

1  $n \leftarrow |P_i|$  // Número de vértices de  $P_i$ 
2 visível  $\leftarrow [\text{False}] * n$  // Inicializa todas as arestas como não visíveis
3 for  $j \leftarrow 0$  até  $n - 1$  :
4    $u \leftarrow j$ -ésimo vértice de  $P_i$ 
5    $v \leftarrow$  vértice que segue  $u$  em  $P_i$ 
6    $m \leftarrow (u + v)/2$  // ponto médio
7    $q \leftarrow \text{Query}(m, i - 1)$  // penúltimo ponto do  $(i - 1)$ -path até  $m$ 
8
9   // Marca a aresta  $j$  como visível se o produto vetorial for negativo
10  visível[ $j$ ]  $\leftarrow ((v - m) \times (q - m) < 0)$ 
11 return visível

```

---

## 2.2.2 Construindo Regiões de Vértice

Uma vez que sabemos quais arestas são visíveis, podemos construir as regiões de vértice. Observamos anteriormente que essas são delimitadas por duas semi-retas que partem de um vértice de  $P_i$ . Por esse motivo, nessa etapa, à cada vértice  $v$  vamos associar um par ordenado de direções  $(d_{\text{prev}}, d_{\text{next}})$  tais que a região de vértice associada a  $v$  são os pontos entre as semi-retas que partem de  $v$  nas direções  $d_{\text{prev}}$  e  $d_{\text{next}}$ , no sentido anti-horário.

Para calcular as direções da regiões de vértice de um vértice  $v$  de  $P_i$ , devemos considerar o ponto  $p = \text{Query}(v, i - 1)$  e definimos  $d = v - p$ . Sejam  $v_{\text{prev}}$  o vértice que precede e  $v_{\text{next}}$  o que segue  $v$  em  $P_i$  (no sentido anti-horário). Se a aresta  $(v_{\text{prev}}, v)$  é visível, então  $d_{\text{prev}}$  será a reflexão de  $d$  em relação à aresta  $(v_{\text{prev}}, v)$ , caso contrário,  $d_{\text{prev}}$  será a mesma direção de  $d$ . Similarmente, se a aresta  $(v, v_{\text{next}})$  é visível, então  $d_{\text{next}}$  será a reflexão de  $d$  em relação à aresta  $(v, v_{\text{next}})$ , caso contrário,  $d_{\text{next}}$  será a mesma direção de  $d$ . Assim, criamos a região de vértice  $(d_{\text{next}}, d_{\text{next}})$  associada à  $v$ .

Vale notar que se ambas as arestas incidentes a  $v$  estão bloqueadas, então  $d_{\text{prev}} = d_{\text{next}} = d$ , assim, a região de vértice associada a  $v$  é válida, mas vazia.

Encorajamos o leitor a verificar que essa lógica se aplica à Figura 4, usando o ponto inicial  $s$  como resposta de  $\text{Query}(v, 0)$  para qualquer vértice  $v$ . Os vértices  $(-2, 0)$  e  $(0, 0)$  terão as suas duas arestas incidentes visíveis, assim, suas regiões de vértice serão delimitadas pelas reflexões do raio que parte de  $s$ . O vértice  $(-3, 1)$  terá apenas a aresta posterior visível, assim, sua região de vértice será delimitada pela reflexão do raio em relação à aresta posterior e a própria direção do raio. Similarmente, o vértice  $(2, 1)$  tem apenas a aresta anterior visível. Finalmente, os vértices  $(1, 1.25)$  e  $(-1, 1.5)$

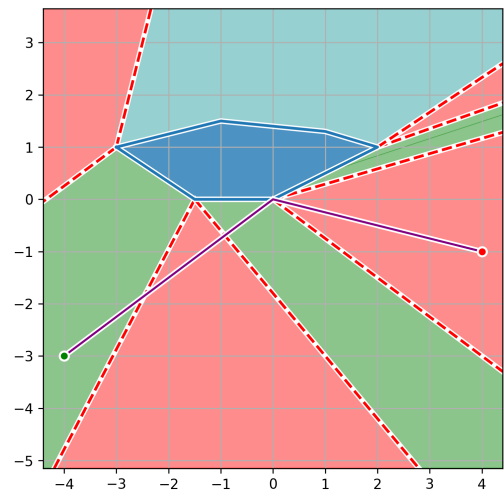


Figura 4: Partição de um polígono com múltiplas arestas não visíveis.

não terão nenhuma aresta visível, assim, suas regiões de vértice serão vazias.

Implementamos essas ideias nos algoritmos 2 e 3. O primeiro reflete uma direção em relação a uma aresta, enquanto o segundo a partição  $S_i$  de um polígono  $P_i$ , retornando uma lista de pares ordenados de direções representando as regiões de vértice associadas a cada vértice de  $P_i$ .

---

**Algorithm 2:** RefleteDireção( $d, v_{\text{prev}}, v_{\text{next}}$ )  
 Reflete a direção  $d$  em relação à aresta  $(v_{\text{prev}}, v_{\text{next}})$

---

```

1  $u \leftarrow v_{\text{prev}} - v_{\text{next}}$ 
2  $w \leftarrow$  Vetor normal à  $u$ , tal que  $|w| = 1$ 
3 return  $d - 2\langle d, w \rangle w$  // Fórmula de reflexão
```

---



---

**Algorithm 3:** ConstróiRegiõesDeVértice( $P_i$ )  
 Constrói as partições do polígono  $P_i$

---

```

1 regiões  $\leftarrow []$  // Lista vazia
2 visível  $\leftarrow$  ArestasVisíveis( $P_i$ )
3 for  $j \leftarrow 0$  até  $|P_i| - 1$  :
4    $v \leftarrow j$ -ésimo vértice de  $P_i$ 
5    $v_{\text{prev}} \leftarrow$  vértice que precede  $v$  em  $P_i$ 
6    $v_{\text{next}} \leftarrow$  vértice que segue  $v$  em  $P_i$ 
7
8    $p \leftarrow$  Query( $v, i - 1$ ) // penúltimo ponto do  $(i - 1)$ -path até  $v$ 
9    $d \leftarrow v - p$  // direção do raio de  $p$  até  $v$ 
10
11   if visível[ $j - 1$ ] :
12      $d_{\text{prev}} \leftarrow$  Reflete( $d, v_{\text{prev}}, v$ ) // reflexão de  $d$  em relação à aresta  $(v_{\text{prev}}, v)$ 
13   else
14      $d_{\text{prev}} \leftarrow d$ 
15   if visível[ $j$ ] :
16      $d_{\text{next}} \leftarrow$  Reflete( $d, v, v_{\text{next}}$ ) // reflexão de  $d$  em relação à aresta  $(v, v_{\text{next}})$ 
17   else
18      $d_{\text{next}} \leftarrow d$ 
19   // Armazena a região de vértice associada a  $v$  como o par  $(d_{\text{prev}}, d_{\text{next}})$ 
20   regiões.append( $((d_{\text{prev}}, d_{\text{next}}))$ )
21 return regiões
```

---

## 2.3 Localizando Pontos na Partição

Gostaríamos de responder consultas do tipo Query( $p, i$ ) de maneira eficiente. Para isso, precisamos ser capazes de localizar o ponto  $p$  na partição  $S_i$  de maneira eficiente, ou seja, determinar se  $p$  pertence a uma região de vértice, região de aresta ou região de atravessar e, em caso positivo, qual região.

Esse processo não é trivial, principalmente se desejamos fazer isso de maneira eficiente. Para tal, primeiro vamos considerar dois problemas mais simples: determinar se  $p$  pertence a uma região de vértice e determinar se  $p$  pertence a uma região de aresta.

### 2.3.1 Verificando Regiões de Vértice

Primeiramente vamos implementar um procedimento auxiliar 4 que verifica se um ponto  $p$  está em uma região de vértice associada a um vértice  $v$  delimitada por duas direções  $d_{\text{prev}}$  e  $d_{\text{next}}$ . Basicamente, temos dois casos, dependendo do ângulo entre as direções  $d_{\text{prev}}$  e  $d_{\text{next}}$  (considerando o sentido anti-horário):

- Ângulo  $\leq 180^\circ$ : Nesse caso,  $p$  deve estar à esquerda de  $d_{\text{prev}}$  e à direita de  $d_{\text{next}}$ .
- Ângulo  $> 180^\circ$ : Nesse caso,  $p$  deve estar à direita de  $d_{\text{prev}}$  ou à esquerda de  $d_{\text{next}}$ .

Podemos usar produtos vetoriais para determinar a posição relativa de  $p$  em relação às direções  $d_{\text{prev}}$  e  $d_{\text{next}}$ , assim como o ângulo entre essas direções. Usando essas ideias, implementamos o procedimento no algoritmo 4.

---

**Algorithm 4:** PontoEmVértice( $p, v, d_{\text{prev}}, d_{\text{next}}$ )

Verifica se o ponto  $p$  está na região de vértice associada ao vértice  $v$  delimitada pelas direções  $d_{\text{prev}}$  e  $d_{\text{next}}$

---

```

1  $c_1 \leftarrow (d_{\text{prev}} \times (p - v) \geq 0)$ 
2  $c_2 \leftarrow (d_{\text{next}} \times (p - v) \leq 0)$ 
3 if  $d_{\text{prev}} \times d_{\text{next}} \geq 0$  :
4   return  $c_1 \wedge c_2$ 
5 else
6   return  $c_1 \vee c_2$ 

```

---

### 2.3.2 Verificando Regiões de Aresta

Uma vez que conseguimos verificar se um ponto pertence a uma região de vértice, podemos usar essa funcionalidade para verificar se um ponto pertence a uma região de aresta.

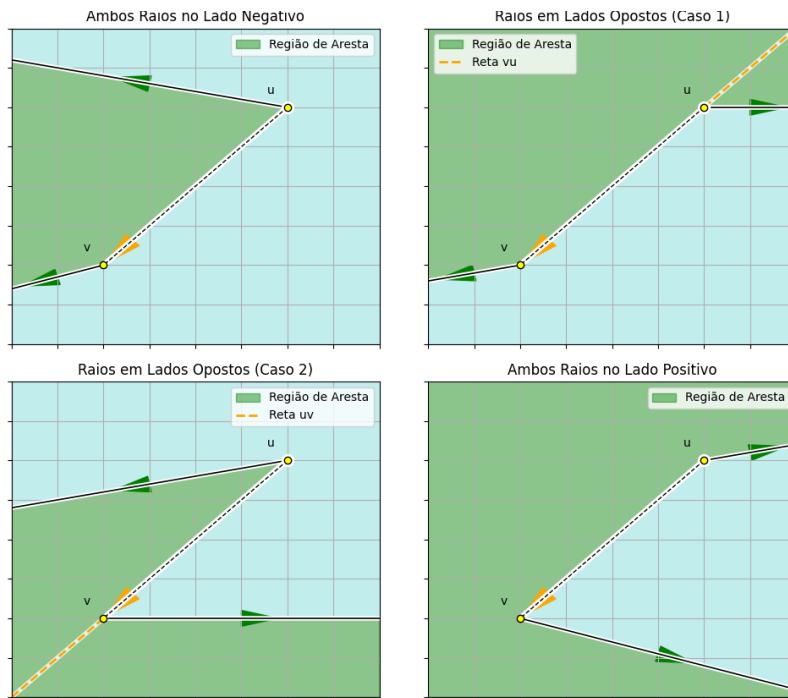


Figura 5: Casos possíveis para região de aresta.

Esse problema é mais complexo, uma vez que existem diferentes casos possíveis para uma região de aresta, dependendo do ângulo entre as direções  $d_{\text{prev}}$  e  $d_{\text{next}}$ . Esses casos não aparecem explicitamente na partição  $S_i$ , na verdade apenas o primeiro caso aparece. No entanto, vamos usar esses outros casos adicionais para otimizar a localização de pontos na partição posteriormente, permitindo complexidade  $\log(|P_i|)$  para detecção.

Essencialmente existem 4 casos possíveis para uma região de aresta, dependendo do ângulo entre as direções  $d_{\text{prev}}$  e  $d_{\text{next}}$ . A Figura 5 ilustra esses casos. Para sabermos com qual caso estamos lidando, definimos  $w = v - u$  e calculamos os produtos vetoriais  $c_1 = w \times d_{\text{prev}}$  e  $c_2 = w \times d_{\text{next}}$ . Agora, temos os seguintes ca-

sos:

- $c_1 \leq 0 \wedge c_2 \leq 0$ : Esse é o caso em que temos **ambas arestas no lado negativo**, que é o caso tradicional que aparece na partição  $S_i$ . Nesse caso, verificamos se  $p$  está entre as semi-retas e a aresta  $(u, v)$  usando produtos vetoriais.
- $c_1 \leq 0 \wedge c_2 \geq 0$ : Esse é o caso em que temos **aresta anterior no lado negativo e aresta posterior no lado positivo**, o *Caso 1* na figura. Nesse caso, dividimos a região de aresta em duas regiões de vértice, definidas por  $(u, d_{\text{prev}}, u - v)$  e  $(v, u - v, d_{\text{next}})$ , então verificamos se o ponto está em qualquer uma das duas.
- $c_1 \geq 0 \wedge c_2 \leq 0$ : Esse é o caso em que temos **aresta anterior no lado positivo e aresta posterior no lado negativo**, o *Caso 2* na figura. Nesse caso, dividimos a região de aresta em duas regiões de

vértice, definidas por  $(u, d_{\text{prev}}, v - u)$  e  $(v, v - u, d_{\text{next}})$ , então verificamos se o ponto está em qualquer uma das duas.

- $c_1 \leq 0 \wedge c_2 \leq 0$ : Esse é o caso em que temos **ambas arestas no lado positivo**. Nesse caso, simplesmente verificamos se o ponto não pertence ao complemento da região, ou seja, verificamos se  $p$  não pertence à região de aresta definida por  $(v, u, d_{\text{next}}, d_{\text{prev}})$ .

Dessa forma, conseguimos verificar se um ponto pertence a uma região de aresta usando o procedimento de verificação de regiões de vértice. Agora podemos implementar o procedimento completo na forma de um algoritmo.

---

**Algorithm 5:** PontoEmAresta( $p, u, v, d_{\text{prev}}, d_{\text{next}}$ )

Verifica se o ponto  $p$  está na região de aresta associada à aresta  $e = (u, v)$  delimitada pelas direções  $d_{\text{prev}}$  e  $d_{\text{next}}$

---

```

1 // Se vértices são muito próximos, tratamos a região de aresta
2 // como uma região de vértice.
3 if  $|u - v| < 10^{-8}$  :
4   return PontoEmVértice( $p, v, d_{\text{next}}, d_{\text{prev}}$ )
5  $w \leftarrow v - u$ 
6  $c_1 \leftarrow d_{\text{prev}} \times w$ 
7  $c_2 \leftarrow w \times d_{\text{next}}$ 
8 if  $c_1 \leq 0 \wedge c_2 \leq 0$  :
9   return  $(d_{\text{prev}} \times (p - u) \geq 0) \wedge ((p - u) \times d_{\text{next}} \leq 0) \wedge ((v - u) \times (p - u) \leq 0)$ 
10 else if  $c_1 \leq 0 \wedge c_2 > 0$  :
11   return PontoEmVértice( $p, u, d_{\text{prev}}, u - v$ )  $\vee$  PontoEmVértice( $p, v, u - v, d_{\text{next}}$ )
12 else if  $c_1 > 0 \wedge c_2 \leq 0$  :
13   return PontoEmVértice( $p, u, d_{\text{prev}}, v - u$ )  $\vee$  PontoEmVértice( $p, v, v - u, d_{\text{next}}$ )
14 else
15   return  $\neg$  PontoEmAresta( $p, v, u, d_{\text{next}}, d_{\text{prev}}$ )

```

---

### 2.3.3 Localização Eficiente de Pontos na Partição

Agora que sabemos como verificar se um ponto pertence a uma região de vértice ou de aresta, podemos usar essas funcionalidades para localizar um ponto  $p$  na partição  $S_i$ . Uma abordagem ingênua seria iterar sobre todas as regiões de vértice e aresta, verificando se  $p$  pertence a alguma delas. Isso funcionaria, no entanto, essa abordagem tomaria tempo  $O(|P_i|)$ , o que é muito lento.

Por esse motivo, desejamos explorar a ideia de busca binária para resolver o problema. Primeiramente, vamos assumir que o ponto não pertence ao polígono  $P_i$ , isso vale como suposição inicial dos polígonos serem disjuntos e os pontos  $s$  e  $t$  estarem fora dos polígonos. Ainda assim, se desejássemos evitar essa suposição, poderíamos simplesmente verificar se o ponto está dentro do polígono  $P_i$  usando um teste de ponto em polígono antes de localizar o ponto na partição, o é um problema clássico que leva tempo  $O(\log(|P_i|))$ .

Uma questão que diferencia nosso problema de uma busca binária tradicional é que as regiões são circulares. Assim, o primeiro passo é verificar se o ponto pertence à região entre o último e o primeiro vértice de  $P_i$ . Se sim, retornamos essa região. Caso contrário, reduzimos o problema para uma lista linear de regiões.

Outra diferença que precisamos considerar é que nossa entrada contém dois tipos de regiões: regiões de vértice e regiões de aresta. Para lidar com isso, podemos tratar regiões de vértice como regiões de aresta degeneradas, onde a aresta tem comprimento zero. Dessa forma, podemos aplicar o mesmo raciocínio para ambos os tipos de regiões, lidando com uma lista de  $2|P_i| - 1$  regiões de aresta, uma vez que já eliminamos a última. Note que a implementação de PontoEmAresta já lida com esse caso especial.

Finalmente, podemos implementar a busca binária propriamente dita. A ideia é manter dois índices  $l$  e  $r$  que representam o intervalo atual de regiões que estamos considerando. Inicialmente, definimos  $n = |P_i|$ ,  $l = 0$  e  $r = 2n - 1$ . Nos baseamos na ideia de que apenas as regiões após  $l$  e antes de  $r$  podem conter o ponto  $p$ , ambos limites inclusivos.

Enquanto  $l + 1 \neq r$ , calculamos o índice médio  $m = \lfloor (l + r)/2 \rfloor$  e verificamos se o ponto  $p$  pertence à região de aresta entre  $l$  e  $m$ . Se estiver, atualizamos  $r = m$ , caso contrário, atualizamos  $l = m$ , isso vale



pois  $P_i$  é convexo e a região de aresta entre  $l$  e  $m$  cobre todas as regiões entre  $l$  e  $m$  e nenhuma região entre  $m$  e  $r$ .

Repetindo isso até que  $l + 1 = r$ , sabemos que o ponto  $p$  pertence à região de aresta entre  $l$  e  $r$ . Finalmente, retornamos essa região, vamos codificar essa região como um inteiro que representa o índice da região.

Essa codificação segue a seguinte lógica: regiões de vértice são representadas por índices pares, onde o índice  $2j$  representa a região de vértice associada ao  $j$ -ésimo vértice de  $P_i$ . Regiões de aresta são representadas por índices ímpares, onde o índice  $2j + 1$  representa a região de aresta entre o  $j$ -ésimo e o  $(j + 1)$ -ésimo vértice de  $P_i$ . Note que a região entre o último e o primeiro vértice é representada pelo índice  $2|P_i| - 1$ .

---

**Algorithm 6:** LocalizaRegião( $p, P$ , regiõesDeVértice)

Localiza o ponto  $p$  na partição do polígono  $P$

---

```

1 // Criamos uma função auxiliar usando fechamento
2 // para facilitar a implementação da busca binária
3 def pertence( $i, j$ ):
4    $v_1 \leftarrow P[\lfloor i/2 \rfloor]$  // Vértice  $i$  do polígono  $P$ 
5    $v_2 \leftarrow P[\lfloor j/2 \rfloor]$  // Vértice  $j$  do polígono  $P$ 
6   // Vamos lembrar que regiõesDeVértice é uma lista de pares ( $d_{\text{prev}}, d_{\text{next}}$ )
7   // Também vamos tratar  $i \pmod{2}$  como uma operação tradicional de módulo
8    $d_{\text{prev}} \leftarrow \text{regiõesDeVértice}[\lfloor i/2 \rfloor][i \pmod{2}]$ 
9    $d_{\text{next}} \leftarrow \text{regiõesDeVértice}[\lfloor j/2 \rfloor][j \pmod{2}]$ 
10  return PontoEmAresta( $p, v_1, v_2, d_{\text{prev}}, d_{\text{next}}$ )
11  $l \leftarrow 0$   $r \leftarrow 2 \cdot |P| - 1$ 
12 if pertence( $r, 0$ ):
13   return  $r$  // Ponto pertence à região entre o último e o primeiro vértice
14 while  $l + 1 \neq r$  do
15    $m \leftarrow \lfloor (l + r)/2 \rfloor$ 
16   if pertence( $l, m$ ):
17      $r \leftarrow m$ 
18   else
19      $l \leftarrow m$ 
20 return  $l$  // Ponto pertence à região entre  $l$  e  $r$ 

```

---

## 2.4 Respondendo Consultas

Finalmente, podemos descrever como responder consultas do tipo Query( $p, i$ ) usando as partições  $S_i$  que construímos anteriormente. O procedimento utilizado é recursivo, assim, primeiro definimos o caso base, que é Query( $p, 0$ ) =  $s$ , uma vez que um 0-path não precisa tocar em nenhum polígono, assim, o menor caminho é uma linha reta de  $s$  até  $p$ .

Para  $i > 0$ , primeiramente determinamos a região  $R$  de  $S_i$  que contém  $p$ . Uma vez que sabemos qual região contém  $p$ , podemos responder a consulta dependendo do tipo de região:

- Região de Vértice: Seja  $R = (v, d_{\text{prev}}, d_{\text{next}})$ . Nesse caso, o  $i$ -path até  $p$  deve passar pelo vértice  $v$ , tocando o polígono  $P_i$ . Assim, temos que Query( $p, i$ ) =  $v$ .
- Região de Aresta: Seja  $R = (u, v, d_{\text{prev}}, d_{\text{next}})$ . Nesse caso, o  $i$ -path até  $p$  deve passar por algum ponto  $q$  da aresta  $e = (u, v)$ , tocando o polígono  $P_i$ . Para calcular  $q$ , primeiro determinamos  $q' = \text{Query}(p', i - 1)$ , onde  $p'$  é a reflexão de  $p$  em relação à aresta  $e$ . Agora, dizemos que  $q$  é a interseção entre  $q'p'$  e a aresta  $e$ . Finalmente, respondemos Query( $p, i$ ) =  $q$ .
- Região de Atravessa: Seja  $R$  a região de atravessa. Nesse caso, o  $i$ -path até  $p$  automaticamente atravessa o polígono  $P_i$  em algum ponto. Portanto, podemos simplesmente responder Query( $p, i$ ) = Query( $p, i - 1$ ).

Agora vamos implementar esse procedimento como um algoritmo, usando as construções que fizemos anteriormente, uma vez que é um pouco mais complexo do que a descrição acima.

Vamos usar também uma função auxiliar `InterseçãoDeSegmento` que calcula a interseção entre dois segmentos dados seus extremos. Essa não é descrita aqui, mas é uma implementação padrão de geometria computacional.

---

**Algorithm 7:** `Query( $p, i$ )`

Responde a consulta `Query( $p, i$ )`

---

```

1 if  $i = 0$  :
2   return  $s$  // Caso base
3  $R \leftarrow \text{LocalizaRegião}(p, P_i, \text{regiõesDeVértice}[i - 1])$ 
4  $j \leftarrow \lfloor R/2 \rfloor$ 
5 if  $R \pmod{2} = 0$  :
6   return  $v \leftarrow P_i[j]$  // Vértice associado à região de vértice
7 if  $\neg \text{visível}[j]$  :
8   return Query( $p, i - 1$ ) // Região de atravessa
9 // Região de aresta
10  $u \leftarrow P_i[j]$  // Vértice inicial da aresta
11  $v \leftarrow P_i[j + 1]$  // Vértice final da aresta
12  $p' \leftarrow u + \text{RefleteDireção}((p - u), u, v)$ 
13  $q' \leftarrow \text{Query}(p', i - 1)$ 
14  $m \leftarrow \text{InterseçãoDeSegmento}(p', q', u, v)$ 
15 return  $m$  // Ponto de interseção

```

---

## 2.5 Calculando o Caminho Mínimo

Agora que sabemos como responder consultas do tipo `Query( $p, i$ )`, calcular o caminho mínimo de  $s$  até  $t$  que toca todos os polígonos  $P_1, \dots, P_k$  é trivial.

Pela definição de `Query`, sabemos que o menor caminho que parte de  $s$ , toca todos os polígonos  $P_1, \dots, P_k$  e termina em  $t$  deve ter como penúltimo ponto  $q_k = \text{Query}(t, k)$ . Ademais, o caminho que toca os polígonos  $P_1, \dots, P_{k-1}$  e termina em  $q_k$  deve ter como penúltimo ponto  $q_{k-1} = \text{Query}(q_k, k - 1)$ . Repetindo esse raciocínio, chegamos até o ponto inicial  $s$ .

Usando essa lógica e juntando as implementações anteriores em um algoritmo completo, temos:

---

**Algorithm 8:** `CaminhoMínimo( $s, t, P_1, \dots, P_k$ )`

Calcula o caminho mínimo de  $s$  até  $t$  que toca todos os polígonos  $P_1, \dots, P_k$

---

```

1 if  $k = 0$  :
2   return  $[s, t]$  // Caso base: caminho direto de  $s$  até  $t$ 
3  $\text{regiãoDeVértice} \leftarrow \text{Particiona}(P_1, \dots, P_k)$ 
4  $\text{caminho} \leftarrow []$  // Lista vazia para armazenar o caminho
5  $p \leftarrow t$  // Começamos do ponto final  $t$ 
6 for  $i \leftarrow k$  até 1 :
7    $q \leftarrow \text{Query}(p, i)$  // Penúltimo ponto do  $i$ -path até  $p$ 
8   // Verificamos se os pontos  $p$  e  $q$  são distintos devido à regiões de atravessar
9   if  $|q - p| > 10^{-8}$  :
10     $\text{caminho.append}(p)$  // Adiciona  $p$  ao caminho
11     $p \leftarrow q$  // Atualiza  $p$  para o próximo ponto
12     $k \leftarrow k - 1$  // Decrementa  $k$ 
13  $\text{caminho.append}(s)$  // Adiciona o ponto inicial  $s$ 
14  $\text{caminho.reverse}()$  // Inverte a lista para obter o caminho correto
15 return  $\text{caminho}$ 

```

---

## 2.6 Análise de Complexidade

Nessa seção, vamos analisar a complexidade do algoritmo completo. Primeiramente, a função LocalizaRegião leva tempo  $O(\log(|P_i|))$  para localizar um ponto na partição  $S_i$ , uma vez que usa busca binária. Ademais, a função Query faz uma chamada recursiva para  $i - 1$  em cada nível de recursão, resultando em  $i$  níveis de recursão. Assim, o tempo total para responder uma consulta Query( $p, i$ ) é  $O(i \log(|P_i|))$ .

- RefleteDireção(...):  $O(1)$ , pois faz um número constante de operações.
- PontoEmVértice(...):  $O(1)$ , pois faz um número constante de operações.
- PontoEmAresta(...):  $O(1)$ , pois faz um número constante de operações e chamadas para PontoEmVértice.
- LocalizaRegião( $P_i, \dots$ ):  $O(\log|P_i|)$ , pois usa busca binária em  $2|P_i| - 1$  regiões.
- Query( $i, \dots$ ): Fazemos no máximo  $i$  chamadas recursivas, cada uma chama LocalizaRegião  $p$  umas vez. Assim, temos a complexidade:

$$O\left(\sum_{j=1}^i \log|P_j|\right)$$

- ArestasVisíveis( $P_i, \dots$ ): Chamamos Query para os  $|P_i|$  vértices de  $P_i$ , assim, temos uma complexidade final de:

$$O\left(|P_i| \sum_{j=1}^i \log|P_j|\right)$$

- Particiona( $P_1, \dots, P_n$ ): Chamamos ArestasVisíveis para cada polígono  $P_i$ , assim, temos:

$$O\left(\sum_{i=1}^k |P_i| \sum_{j=1}^i \log|P_j|\right)$$

- CaminhoMínimo: Chamamos Particiona uma única vez e então calculamos o caminho final cuja complexidade é insignificante próximo de Particiona, então a complexidade final é a mesma:

$$O\left(\sum_{i=1}^k |P_i| \sum_{j=1}^i \log|P_j|\right)$$

Enquanto podemos dizer que determinamos a complexidade final do problema, gostaríamos de ter uma forma mais simples e de acordo com o artigo original. Assim, definimos  $n = \sum_{i=1}^k |P_i|$  e note que:

$$\begin{aligned} O\left(\sum_{i=1}^k |P_i| \sum_{j=1}^i \log|P_j|\right) &= O\left(\sum_{i=1}^k |P_i| \sum_{j=1}^k \log|P_j|\right) \\ &= O\left(\left(\sum_{i=1}^k |P_i|\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^k \log|P_i|\right)\right) \\ &= O\left(n \sum_{i=1}^k \log|P_i|\right) \end{aligned}$$

Ademais, se fixarmos o valor de  $k$ , temos que o valor de  $\sum_{i=1}^k \log|P_i|$  é máximo quando  $|P_1| = \dots = |P_k| = n/k$ . Dessa forma, concluimos que em um pior caso a complexidade é:

$$O(nk \log(n/k))$$

Dessa forma, nosso algoritmo está de acordo com o artigo original.

### 3 O Problema de Visita de Polígonos Geral

Vamos tomar como base a implementação do algoritmo de Mitchell para o problema restrito que fizemos em *Python*. O código pode ser encontrado no arquivo `TouringPolygons/problem2.py`.

#### 3.1 Definições e Notação

O problema segue de forma similar ao anterior, mas agora também recebemos como entrada ‘cercas’  $F_0, \dots, F_k$  tais que para todo  $0 \leq i \leq k$  vale que o polígono  $P_i$  e  $P_{i+1}$  estão contidos em  $F_i$ , para tal, consideramos  $P_0 = \{s\}$  e  $P_{k+1} = \{t\}$ . Nosso objetivo é encontrar o caminho de menor comprimento que se inicia em  $s$ , termina em  $t$ , toca cada polígono  $P_i$  em pelo menos um ponto e nunca sai da cerca  $F_i$  no seu caminho entre  $P_i$  e  $P_{i+1}$ .

Dizemos que um caminho  $\pi$  de  $a$  até  $b$  respeita as cercas  $F_i, \dots, F_j$  se  $\pi$  toca todos os polígonos  $P_{i+1}, \dots, P_j$  e para cada  $i \leq l < j$ , o trecho de  $\pi$  entre  $P_l$  e  $P_{l+1}$  está contido em  $F_l$ . Ademais, definimos um  $i$ -path até  $p$  como um caminho mínimo de  $s$  até  $p$  que respeita as cercas  $F_0, \dots, F_i$ . Note que nosso objetivo é encontrar um  $k$ -path até  $t$ .

A função central desse algoritmo continua sendo `Query`, no entanto, dessa vez vamos adicionar um novo parâmetro, assim, a função `Query(p, i, j)` recebe um ponto  $p$  e dois índices  $i$  e  $j$  e retorna o penúltimo ponto  $q$  do menor caminho até  $p$  que parte de  $s$ , toca todos os polígonos  $P_1, \dots, P_i$  e respeita as cercas  $F_0, \dots, F_j$ .

Primeiramente, é essencial que  $i \leq j$ , ademais, se  $i = j$  então `Query(p, i, j)` é simplesmente o penúltimo ponto do  $i$ -path até  $p$ . Adicionamos o parâmetro  $j$  para o caso em que queremos um  $i$ -path, mas  $p$  está fora da cerca  $F_i$  um caso que aparece naturalmente na recursão do algoritmo. Por enquanto, vamos assumir que sabemos como responder as consultas.

#### 3.2 Caminhos Restritos

Outra função extremamente importante para a implementação desse algoritmo é a função `Fenced(p1, p2, i, j)` que retorna o menor caminho de  $p_1$  até  $p_2$  que respeita as cercas  $F_i, \dots, F_j$ . Note que se  $i = j$ , então `Fenced(p1, p2, i, j)` é simplesmente o segmento  $\overline{p_1 p_2}$  se ele estiver contido em  $F_i$  e não existe caso contrário. Assim, vamos assumir que  $i < j$ .

## A Notações

1.  $v = (v_1, v_2), v \in \mathbb{R}^2$ . Vetores são representados como tuplas de coordenadas.
2.  $|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ . Norma Euclidiana de um vetor.
3.  $\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_2v_2$ . Produto interno definido como produto escalar de vetores.
4.  $u \times v = u_1v_2 - u_2v_1$ . Produto vetorial definido como determinante 2D, retornando um escalar. Essa definição tem a seguinte propriedade:

$$\text{sign}(u \times v) = \begin{cases} +1, & \text{se ângulo no sentido anti-horário entre } u \text{ e } v \text{ é menor que } 180^\circ \\ -1, & \text{se ângulo no sentido horário entre } u \text{ e } v \text{ é menor que } 180^\circ \\ 0, & \text{se } u \text{ e } v \text{ são colineares} \end{cases}$$

Pode-se interpretar  $u \times v$  como a área do paralelogramo formado por  $u$  e  $v$ , onde o sinal indica a orientação.

5. Dizemos que um ponto  $p$  está do **lado esquerdo** de uma direção  $d$  se  $d \times p \geq 0$  e do **lado direito** se  $d \times p \leq 0$ .
6.  $\overline{uv}$ : Segmento de reta entre os pontos  $u$  e  $v$ .
7.  $\overrightarrow{uv} = v - u$ . Vetor direcionado do ponto  $u$  até o ponto  $v$ .
8.  $|P|$ . Se  $P$  é um polígono, então  $|P|$  é o número de vértices de  $P$ .

## Referências

- [1] M. Dror, A. Efrat, A. Lubiw e J. S. B. Mitchell, “Touring a sequence of polygons,” em *Proceedings of the Thirty-Fifth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, sér. STOC '03, San Diego, CA, USA: Association for Computing Machinery, 2003, pp. 473–482, ISBN: 1581136749. DOI: 10.1145/780542.780612. endereço: <https://doi.org/10.1145/780542.780612>.