



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

---

## O Problema da Visita de Polígonos

---

Gabriel Freire Ushijima

São Paulo, SP  
6 de novembro de 2025

## Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>O Problema de Visita de Polígonos Irrestrito</b>	<b>2</b>
2.1	Definições e Notação . . . . .	2
2.2	Representação dos Objetos . . . . .	2
2.3	Particionando o Plano . . . . .	2
2.3.1	Representando as Partições . . . . .	3
2.3.2	Detectando Arestas Visíveis . . . . .	3
2.3.3	Construindo Regiões de Vértice . . . . .	4
2.4	Localizando Pontos na Partição . . . . .	5
2.4.1	Verificando Regiões de Vértice . . . . .	5
2.4.2	Verificando Regiões de Aresta . . . . .	6
2.4.3	Localização Eficiente de Pontos na Partição . . . . .	6
2.5	Respondendo Consultas . . . . .	7
2.6	Calculando o Caminho Mínimo . . . . .	8
2.7	Análise de Complexidade . . . . .	8
<b>3</b>	<b>O Problema de Visita de Polígonos Geral</b>	<b>10</b>
3.1	Definições e Notação . . . . .	11
3.2	Caminhos Restritos . . . . .	11

# 1 Introdução

Este relatório descreve a implementação e os resultados obtidos na resolução do problema da visita de polígonos, usando como base o paper de Dror et al. (2003) [1] que descreve algoritmos para o caso sem e com restrições. Buscamos apresentar uma abordagem mais prática e detalhada para o problema, sem um foco tão grande na análise teórica.

## 2 O Problema de Visita de Polígonos Irrestrito

Vamos implementar o algoritmo em [1] para o problema irrestrito de visita de polígonos.

### 2.1 Definições e Notação

Considere o seguinte problema: dados dois pontos  $s, t \in \mathbb{R}^2$  e uma sequência de polígonos convexos disjuntos  $P_1, P_2, \dots, P_k$ , encontrar o caminho de menor comprimento que se inicia em  $s$ , termina em  $t$  e toca cada polígono  $P_i$  em pelo menos um ponto, podendo atravessá-los.

A figura ao lado 1 ilustra um exemplo de entrada e a solução ótima para o problema para um caso com 3 polígonos. Temos  $s$  como o **ponto verde**,  $t$  como o **ponto vermelho** e os polígonos  $P_1, P_2$  e  $P_3$  como o **triângulo azul**, o **trapézio laranja** e o **pentágono verde**, respectivamente. O caminho mínimo é representado pela **linha roxa**.

Retomando o artigo, definimos um  $i$ -path até  $p$  como um caminho mínimo que começa em  $s$ , encosta em cada um dos polígonos  $P_1, P_2, \dots, P_i$  e termina em  $p$ . Note que nosso objetivo é encontrar um  $k$ -path até  $t$ . Enquanto não vamos entrar em detalhes, todo  $i$ -path é único.

A função central desse algoritmo será a função  $\text{Query}(p, i)$ , que recebe um ponto  $p$  e um índice  $i$  e retorna o penúltimo ponto  $q$  do  $i$ -path até  $p$  (ou seja, o ponto imediatamente anterior à  $p$  nesse caminho).

Primeiramente, vamos descrever procedimentos auxiliares que serão úteis para a implementação da função  $\text{Query}$ . Finalmente, vamos descrever como responder consultas usando esses procedimentos. Por enquanto, vamos assumir que sabemos como responder as consultas.

### 2.2 Representação dos Objetos

Antes de descrever os procedimentos auxiliares, é importante definir como representamos os objetos geométricos envolvidos no problema. Utilizamos as seguintes representações:

- **Pontos e Vetores:** Representados por uma classe `Vector2` que guarda um par de números reais  $(x, y)$ .
- **Polígonos:** Representados por uma classe `Polygon2` que guarda uma lista ordenada de seus vértices (representados por `Vector2`) no sentido anti-horário. Um vértice arbitrário é escolhido para ser indexado como o primeiro.
- **Caminho Final:** Representado como uma lista de pontos (representados por `Vector2`) na ordem em que aparecem no caminho.

### 2.3 Particionando o Plano

É possível mostrar [1] que para cada polígono  $P_i$  podemos criar uma partição  $S_i$  do plano tal que o comportamento da função  $\text{Query}(p, i)$  depende exclusivamente de qual região da partição  $S_i$  o ponto  $p$  pertence, sendo possível localizar cada ponto de maneira eficiente. Por falta de um nome melhor, chamamos cada parte de  $S_i$  de *região*.

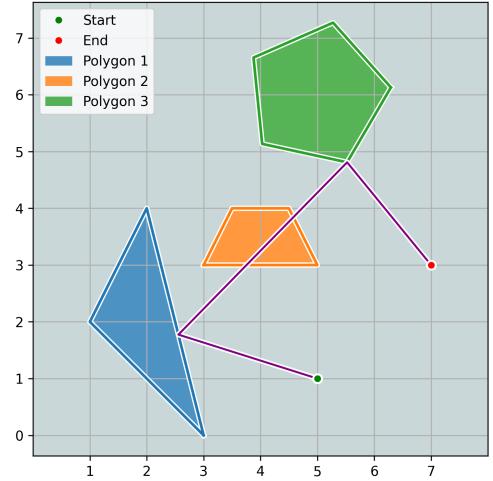


Figura 1: Caminho mínimo para um caso de 3 polígonos.

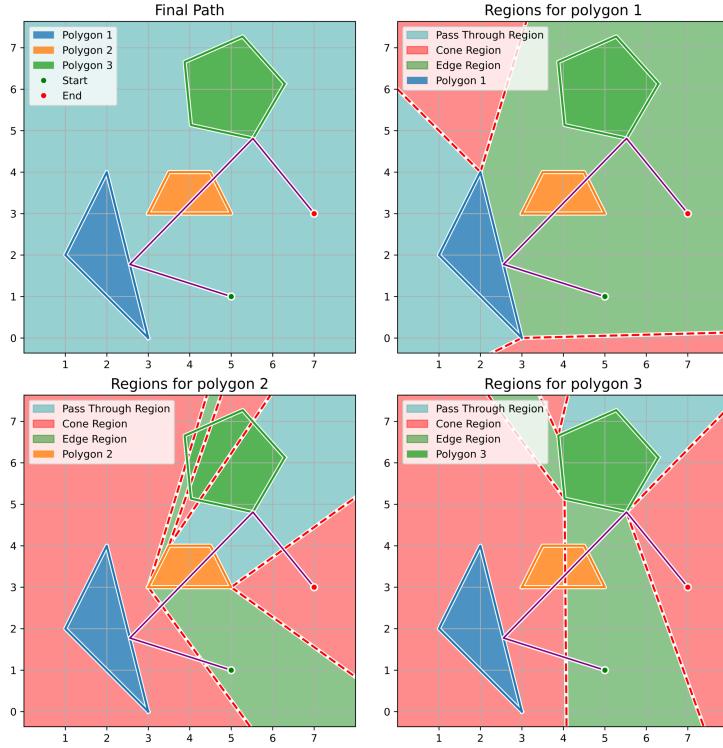


Figura 2: Partição do plano para cada polígono do exemplo anterior.

mos considerar pontos dentro dos polígonos  $P_i$  como pertencentes à região de atravessar.

Ademais, note que cada região de vértice é delimitada por duas semi-retas que partem de um vértice de  $P_i$ , incluindo todos os pontos que estão entre essas semi-retas. Similarmente, cada região de aresta é delimitada por duas semi-retas que partem dos extremos de uma aresta de  $P_i$  e a própria aresta, incluindo todos os pontos que estão entre essas semi-retas e a aresta. Finalmente, a região de atravessar é o complemento das regiões de vértice e aresta.

### 2.3.1 Representando as Partições

Como mencionado, as regiões se complementam, assim, do ponto de vista de implementação, decidimos armazenar apenas as regiões de vértice, uma vez que as regiões de aresta podem ser construídas a partir delas, simplesmente verificando se um ponto está entre as semi-retas de duas regiões de vértice adjacentes e a aresta que as separa.

Para representar as regiões de vértice, armazenamos uma lista de pares de direções ( $d_1, d_2$ ) para cada vértice  $v$  de  $P_i$ , onde  $d_1$  e  $d_2$  são vetores unitários que representam as direções das semi-retas que delimitam a região de vértice associada a  $v$ . Nem todo vértice de  $P_i$  gera uma região de vértice, assim, se um vértice  $v$  não gerar uma região, então armazenamos um par  $(d, d)$  qualquer na posição correspondente da lista, representando uma região válida, mas vazia. Isso será mais relevante adiante.

Essa representação já permite que verifiquemos se um ponto  $p$  pertence a uma região de vértice e qual. No entanto, não conseguimos distinguir entre regiões de aresta e a região de atravessar. Para resolver esse problema, armazenamos uma lista de booleanas que indica se uma aresta é visível ou não. Assim, para determinar se um ponto  $p$  pertence a uma região de aresta ou à região de atravessar, basta verificar se  $p$  está entre as semi-retas de duas regiões de vértice adjacentes e, em caso positivo, verificar se a aresta que as separa é visível ou não.

### 2.3.2 Detectando Arestras Visíveis

Seja  $e$  um aresta de  $P_i$  e  $u, v$  seus vértices na ordem que aparecem em  $P_i$  (antihorário). Dizemos que  $e$  é visível se e somente se para todo ponto interno  $p$  de  $e$  o  $i$ -path até  $p$  não passa pela parte interna de  $P_i$ . Como a borda de  $P_i$  e sua parte interna são contínuas, podemos fazer esse teste para um único ponto interno de  $e$  e teremos o mesmo resultado.

Enquanto a quantidade de regiões de  $S_i$  pode ser numerosa a depender do número de vértices de  $P_i$ , cada região pode ser de exatamente 3 tipos diferentes:, [Regiões de Vértice](#), [Regiões de Aresta](#) e [Regiões de Atravessar](#).

Nas seções a seguir vamos descrever como usar essas partições para responder consultas, mas por enquanto vamos descrever como representar e construir essas partições. Por enquanto, apenas mantenha em mente que se conseguirmos representar e construir essas partições, então podemos usá-las para responder consultas e resolver o problema de maneira eficiente.

A partir da ilustração 2, note que cada região de vértice (*Cone Region*) está associada a um vértice de  $P_i$ , cada região de aresta (*Edge Region*) está associada a uma aresta de  $P_i$  e há exatamente uma região de atravessar (*Pass Through Region*). Ademais, essas regiões se complementam, ou seja, o conjunto de todas as regiões de vértice, aresta e atravessar é o plano todo e nenhuma região se sobreponha a outra. Para que isso seja válido, deve-

Assim, temos a intuição de pegar o ponto médio  $m$  de  $e$  ou qualquer outro ponto interno de  $e$ , calcular o último passo  $q$  do  $i$ -path até  $m$  e verificar se o segmento  $\overline{qm}$  passa por  $P_i$ . No entanto, uma abordagem ingênuas, testando cada aresta de  $P_i$  individualmente, seria muito lenta, tomando tempo  $O(|P_i|^2)$ .

Felizmente, não é necessário implementar um teste eficiente de interseção de segmento e polígono, uma vez que temos a informação adicional que  $m$  pertence à borda de  $P_i$ , mais especificamente na aresta  $e$ . Por esse motivo, como  $P_i$  é convexo e suas arestas estão ordenadas em sentido antihorário, sabemos que se o produto interno de  $\vec{uv}$  com  $\vec{mq}$  for positivo, então  $\vec{mq}$  chega em  $m$  pela parte interna de  $P_i$ .

---

**Algorithm 1:** ArestasVisíveis( $P_i, i$ )

---

Determina as arestas visíveis de  $P_i$

---

```

1  $n \leftarrow |P_i|$  // Número de vértices de  $P_i$ 
2 visível  $\leftarrow [\text{False}]^n$  // Inicializa todas as arestas como não visíveis
3 for  $j \leftarrow 0$  até  $n - 1$  :
4    $u \leftarrow P_i[j]$  // j-ésimo vértice de  $P_i$ 
5    $v \leftarrow P_i[j + 1]$  // vértice que segue  $u$ , considerando  $P_i[n] = P_i[0]$ 
6    $m \leftarrow (u + v)/2$  // ponto médio
7    $q \leftarrow \text{Query}(m, i - 1)$  // penúltimo ponto do  $(i - 1)$ -path até  $m$ 
8
9   // Marca a aresta  $j$  como visível se o produto vetorial for negativo
10  visível[j]  $\leftarrow ((v - u) \times (q - u) < 0)$ 
11 return visível

```

---

### 2.3.3 Construindo Regiões de Vértice

Uma vez que sabemos quais arestas são visíveis, podemos construir as regiões de vértice. Vamos considerar o vértice  $v$  de  $P_i$  e calculamos  $p = \text{Query}(v, i - 1)$ . Vamos explicar posteriormente como calcular  $p$ , mas uma intuição inicial é pensar que  $\text{Query}(q, 0) = s$  para qualquer  $q$ , uma vez que um 0-path não precisa tocar em nenhum polígono, assim, o menor caminho é uma linha reta de  $s$  até  $q$ .

Agora consideramos a direção de  $d = v - p$  e a maneira que esse raio chega em  $v$ . Sejam  $v_1$  o vértice que precede e  $v_2$  o que segue  $v$  em  $P_i$  (no sentido anti-horário). Se a aresta  $(v_1, v)$  é visível, então  $d_1$  será a reflexão de  $d$  em relação à aresta  $(v_1, v)$ , caso contrário,  $d_1$  será a mesma direção de  $d$ . Similarmente, se a aresta  $(v, v_2)$  é visível, então  $d_2$  será a reflexão de  $d$  em relação à aresta  $(v, v_2)$ , caso contrário,  $d_2$  será a mesma direção de  $d$ . Assim, criamos a região de vértice  $(d_1, d_2)$  associada à  $v$ .

Encorajamos o leitor a verificar que essa lógica se aplica na imagem ao lado 3, usando o ponto inicial  $s$  como resposta de  $\text{Query}(v, 0)$  para qualquer vértice  $v$ . Os vértices  $(-2, 0)$  e  $(0, 0)$  terão ambas as arestas visíveis, assim, suas regiões de vértice serão delimitadas pelas reflexões do raio que parte de  $s$ . O vértice  $(-3, 1)$  terá apenas a aresta posterior visível, assim, sua região de vértice será delimitada pela reflexão do raio em relação à aresta posterior e a própria direção do raio. Similarmente, o vértice  $(2, 1)$  tem apenas a aresta anterior visível. Finalmente, os vértices  $(1, 1.25)$  e  $(-1, 1.5)$  não terão nenhuma aresta visível, assim, suas regiões de vértice serão simplesmente a direção do raio em ambas as semi-retas.

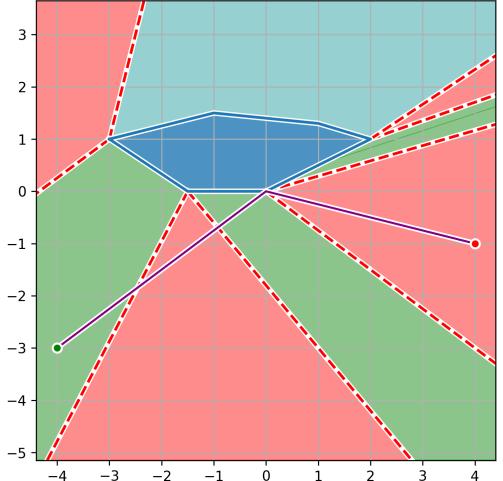


Figura 3: Partição de um polígono com múltiplas arestas não visíveis.

---

**Algorithm 2:** RefleteDireção( $d, v_1, v_2$ )

---

Reflete a direção  $d$  em relação à aresta  $(v_1, v_2)$

---

```

1  $e \leftarrow v_2 - v_1$ 
2  $N \leftarrow \text{Vector2}(-e.y, e.x)/|e|$  // Vetor normal à aresta
3 return  $d - 2 \cdot (d^\top \cdot N)N$  // Fórmula de reflexão

```

---

---

**Algorithm 3:** Particiona( $P_1, \dots, P_k$ )Constroi as partições dos polígonos

---

```

1 regiõesDeVértice ← [] // Lista vazia
2 for  $i \leftarrow 1$  até  $k$  :
3   visível ← ArestasVisíveis( $P_i, i$ )
4   regiõesDeVértice.append([]) // Adiciona uma nova lista para as regiões de vértice de  $P_i$ 
5   for  $j \leftarrow 0$  até  $|P_i| - 1$  :
6      $v \leftarrow P_i[j]$  // j-ésimo vértice de  $P_i$ 
7      $v_1 \leftarrow P_i[j - 1]$  // vértice que precede  $v$ , considerando  $P_i[-1] = P_i[|P_i| - 1]$ 
8      $v_2 \leftarrow P_i[j + 1]$  // vértice que segue  $v$ , considerando  $P_i[|P_i|] = P_i[0]$ 
9
10     $p \leftarrow \text{Query}(v, i - 1)$  // penúltimo ponto do  $(i - 1)$ -path até  $v$ 
11     $d \leftarrow v - p$  // direção do raio de  $p$  até  $v$ 
12
13    if  $\text{visível}[j - 1]$  :
14       $d_1 \leftarrow \text{Reflete}(d, v_1, v)$  // reflexão de  $d$  em relação à aresta  $(v_1, v)$ 
15    else
16       $d_1 \leftarrow d$ 
17    if  $\text{visível}[j]$  :
18       $d_2 \leftarrow \text{Reflete}(d, v, v_2)$  // reflexão de  $d$  em relação à aresta  $(v, v_2)$ 
19    else
20       $d_2 \leftarrow d$ 
21    // Armazena a região de vértice associada a  $v$  como o par  $(d_1, d_2)$ 
22    regiõesDeVértice[i - 1].append(( $d_1, d_2$ ))

```

---

## 2.4 Localizando Pontos na Partição

Gostaríamos de responder consultas do tipo  $\text{Query}(p, i)$  de maneira eficiente. Para isso, precisamos ser capazes de localizar o ponto  $p$  na partição  $S_i$  de maneira eficiente, ou seja, determinar se  $p$  pertence a uma região de vértice, região de aresta ou região de atravessar e, em caso positivo, qual região.

Esse processo não é trivial, principalmente se desejamos fazer isso de maneira eficiente. Para tal, primeiro vamos considerar dois problemas mais simples: determinar se  $p$  pertence a uma região de vértice e determinar se  $p$  pertence a uma região de aresta.

### 2.4.1 Verificando Regiões de Vértice

Primeiramente vamos implementar um procedimento auxiliar que verifica se um ponto  $p$  está em uma região de vértice associada a um vértice  $v$  delimitada por duas direções  $d_1$  e  $d_2$ . Basicamente, se o ângulo entre  $d_1$  e  $d_2$  é menor ou igual a  $180^\circ$ , então verificamos se  $p$  está entre as semi-retas usando produtos vetoriais. Caso contrário, verificamos se  $p$  não está no complemento da região.

---

**Algorithm 4:** PontoEmVértice( $p, v, d_1, d_2$ )Verifica se o ponto  $p$  está na região de vértice associada ao vértice  $v$  delimitada pelas direções  $d_1$  e  $d_2$ 

---

```

1 // Se o ângulo da região de vértice é maior que  $180^\circ$  // verificamos se  $p$  não pertence ao
  // complemento da região.
2 if  $d_1 \times d_2 < 0$  :
3   return  $\neg \text{PontoEmVértice}(p, v, d_2, d_1)$  // Troca as direções e inverte o resultado
4 // Se o ângulo da região de vértice é menor ou igual a  $180^\circ$ 
5 // Verificamos se  $p$  está entre as semi-retas
6 return  $(d_1 \times (p - v) \geq 0) \wedge ((p - v) \times d_2 \geq 0)$ 

```

---

### 2.4.2 Verificando Regiões de Aresta

Uma vez que conseguimos verificar se um ponto pertence a uma região de vértice, podemos usar essa funcionalidade para verificar se um ponto pertence a uma região de aresta.

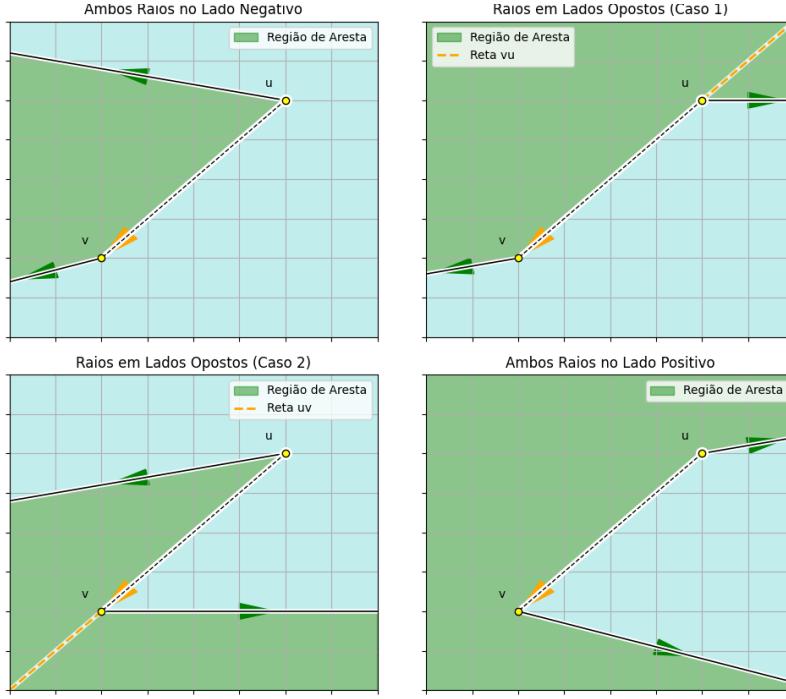


Figura 4: Casos possíveis para região de aresta.

- $c_1 \leq 0 \wedge c_2 \leq 0$ : Esse é o caso em que temos **ambas arestas no lado negativo**, que é o caso tradicional que aparece na partição  $S_i$ . Nesse caso, verificamos se  $p$  está entre as semi-retas e a aresta  $e$  usando produtos vetoriais.
- $c_1 \leq 0 \wedge c_2 \leq 0$ : Esse é o caso em que temos **aresta anterior no lado negativo e aresta posterior no lado positivo**, o *Caso 1* na figura. Nesse caso, dividimos a região de aresta em duas regiões de vértice, definidas por  $(u, d_1, u - v)$  e  $(v, u - v, d_2)$ , então verificamos se o ponto está em qualquer uma das duas.
- $c_1 \leq 0 \wedge c_2 \leq 0$ : Esse é o caso em que temos **aresta anterior no lado positivo e aresta posterior no lado negativo**, o *Caso 2* na figura. Nesse caso, dividimos a região de aresta em duas regiões de vértice, definidas por  $(u, d_1, v - u)$  e  $(v, v - u, d_2)$ , então verificamos se o ponto está em qualquer uma das duas.
- $c_1 \leq 0 \wedge c_2 \leq 0$ : Esse é o caso em que temos **ambas arestas no lado positivo**. Nesse caso, simplesmente verificamos se o ponto não pertence ao complemento da região, ou seja, verificamos se  $p$  não pertence à região de aresta definida por  $(v, u, d_2, d_1)$ .

Dessa forma, conseguimos verificar se um ponto pertence a uma região de aresta usando o procedimento de verificação de regiões de vértice. Agora podemos implementar o procedimento completo na forma de um algoritmo.

### 2.4.3 Localização Eficiente de Pontos na Partição

Agora que sabemos como verificar se um ponto pertence a uma região de vértice ou de aresta, podemos usar essas funcionalidades para localizar um ponto  $p$  na partição  $S_i$ . Uma abordagem ingênuo seria iterar sobre todas as regiões de vértice e aresta, verificando se  $p$  pertence a alguma delas. Isso funcionaria, no entanto, essa abordagem tomaria tempo  $O(|P_i|)$ , o que é muito lento.

Por esse motivo, desejamos explorar a ideia de busca binária para resolver o problema. Primeiramente, vamos assumir que o ponto não pertence ao polígono  $P_i$ , isso vale como suposição inicial dos polígonos serem

Esse problema é mais complexo, uma vez que existem diferentes casos possíveis para uma região de aresta, dependendo do ângulo entre as direções  $d_1$  e  $d_2$ . Esses casos não aparecem explicitamente na partição  $S_i$ , na verdade apenas o primeiro caso aparece. No entanto, vamos usar esses outros casos adicionais para otimizar a localização de pontos na partição posteriormente, permitindo complexidade  $\log(|P_i|)$  para detecção.

Essencialmente existem 4 casos possíveis para uma região de aresta, dependendo do ângulo entre as direções  $d_1$  e  $d_2$ . A figura ao lado 4 ilustra esses casos. Para sabermos com qual caso estamos lidando, definimos  $e = v - u$  e calculamos os produtos vetoriais  $c_1 = e \times d_1$  e  $c_2 = e \times d_2$ . Agora, temos os seguintes casos:

---

**Algorithm 5:** PontoEmAresta( $p, u, v, d_1, d_2$ )

Verifica se o ponto  $p$  está na região de aresta associada à aresta  $e = (u, v)$  delimitada pelas direções  $d_1$  e  $d_2$

---

```

1 // Se vértices são muito próximos, tratamos a região de aresta
2 // como uma região de vértice.
3 if  $|u - v| < 10^{-8}$  :
4   return PontoEmVértice( $p, v, d_2, d_1$ )
5  $e \leftarrow v - u$ 
6  $c_1 \leftarrow d_1 \times e$ 
7  $c_2 \leftarrow e \times d_2$ 
8 if  $c_1 \leq 0 \wedge c_2 \leq 0$  :
9   return  $(d_1 \times (p - u) \geq 0) \wedge ((p - u) \times d_2 \leq 0) \wedge ((v - u) \times (p - u) \leq 0)$ 
10 else if  $c_1 \leq 0 \wedge c_2 > 0$  :
11   return PontoEmVértice( $p, u, d_1, u - v$ )  $\vee$  PontoEmVértice( $p, v, u - v, d_2$ )
12 else if  $c_1 > 0 \wedge c_2 \leq 0$  :
13   return PontoEmVértice( $p, u, d_1, v - u$ )  $\vee$  PontoEmVértice( $p, v, v - u, d_2$ )
14 else
15   return  $\neg$  PontoEmAresta( $p, v, u, d_2, d_1$ )

```

---

disjuntos e os pontos  $s$  e  $t$  estarem fora dos polígonos. Ainda assim, se desejássemos evitar essa suposição, poderíamos simplesmente verificar se o ponto está dentro do polígono  $P_i$  usando um teste de ponto em polígonos antes de localizar o ponto na partição, o é um problema clássico que leva tempo  $O(\log(|P_i|))$ .

Uma questão que diferencia nosso problema de uma busca binária tradicional é que as regiões são circulares. Assim, o primeiro passo é verificar se o ponto pertence à região entre o último e o primeiro vértice de  $P_i$ . Se sim, retornamos essa região. Caso contrário, reduzimos o problema para uma lista linear de regiões.

Outra diferença que precisamos considerar é que nossa entrada contém dois tipos de regiões: regiões de vértice e regiões de aresta. Para lidar com isso, podemos tratar regiões de vértice como regiões de aresta degeneradas, onde a aresta tem comprimento zero. Dessa forma, podemos aplicar o mesmo raciocínio para ambos os tipos de regiões, lidando com uma lista de  $2|P_i| - 1$  regiões de aresta, uma vez que já eliminamos a última. Note que a implementação de PontoEmAresta já lida com esse caso especial.

Finalmente, podemos implementar a busca binária propriamente dita. A ideia é manter dois índices  $l$  e  $r$  que representam o intervalo atual de regiões que estamos considerando. Inicialmente, definimos  $n = |P_i|$ ,  $l = 0$  e  $r = 2n - 1$ . Nos baseamos na ideia de que apenas as regiões após  $l$  e antes de  $r$  podem conter o ponto  $p$ , ambos limites inclusivos.

Enquanto  $l + 1 \neq r$ , calculamos o índice médio  $m = \lfloor (l + r)/2 \rfloor$  e verificamos se o ponto  $p$  pertence à região de aresta entre  $l$  e  $m$ . Se estiver, atualizamos  $r = m$ , caso contrário, atualizamos  $l = m$ , isso vale pois  $P_i$  é convexo e a região de aresta entre  $l$  e  $m$  cobre todas as regiões entre  $l$  e  $m$  e nenhuma região entre  $m$  e  $r$ .

Repetindo isso até que  $l + 1 = r$ , sabemos que o ponto  $p$  pertence à região de aresta entre  $l$  e  $r$ . Finalmente, retornamos essa região, vamos codificar essa região como um inteiro que representa o índice da região.

Essa codificação segue a seguinte lógica: regiões de vértice são representadas por índices pares, onde o índice  $2j$  representa a região de vértice associada ao  $j$ -ésimo vértice de  $P_i$ . Regiões de aresta são representadas por índices ímpares, onde o índice  $2j + 1$  representa a região de aresta entre o  $j$ -ésimo e o  $(j + 1)$ -ésimo vértice de  $P_i$ . Note que a região entre o último e o primeiro vértice é representada pelo índice  $2|P_i| - 1$ .

## 2.5 Respondendo Consultas

Finalmente, podemos descrever como responder consultas do tipo  $\text{Query}(p, i)$  usando as partições  $S_i$  que construímos anteriormente. O procedimento utilizado é recursivo, assim, primeiro definimos o caso base, que é  $\text{Query}(p, 0) = s$ , uma vez que um 0-path não precisa tocar em nenhum polígono, assim, o menor caminho é uma linha reta de  $s$  até  $p$ .

Para  $i > 0$ , primeiramente determinamos a região  $R$  de  $S_i$  que contém  $p$ . Uma vez que sabemos qual região contém  $p$ , podemos responder a consulta dependendo do tipo de região:

---

**Algorithm 6:** LocalizaRegião( $p, P, \text{regiõesDeVértice}$ )Localiza o ponto  $p$  na partição do polígono  $P$ 

---

```

1 // Criamos uma função auxiliar usando fechamento
2 // para facilitar a implementação da busca binária
3 def pertence( $i, j$ ):
4    $v_1 \leftarrow P[\lfloor i/2 \rfloor]$  // Vértice  $i$  do polígono  $P$ 
5    $v_2 \leftarrow P[\lfloor j/2 \rfloor]$  // Vértice  $j$  do polígono  $P$ 
6   // Vamos lembrar que  $\text{regiõesDeVértice}$  é uma lista de pares  $(d_1, d_2)$ 
7   // Também vamos tratar  $i \pmod 2$  como uma operação tradicional de módulo
8    $d_1 \leftarrow \text{regiõesDeVértice}[\lfloor i/2 \rfloor][i \pmod 2]$ 
9    $d_2 \leftarrow \text{regiõesDeVértice}[\lfloor j/2 \rfloor][j \pmod 2]$ 
10  return PontoEmAresta( $p, v_1, v_2, d_1, d_2$ )
11  $l \leftarrow 0$   $r \leftarrow 2 \cdot |P| - 1$ 
12 if pertence( $r, 0$ ) :
13   return  $r$  // Ponto pertence à região entre o último e o primeiro vértice
14 while  $l + 1 \neq r$  do
15    $m \leftarrow \lfloor (l + r)/2 \rfloor$ 
16   if pertence( $l, m$ ) :
17      $r \leftarrow m$ 
18   else
19      $l \leftarrow m$ 
20 return  $l$  // Ponto pertence à região entre  $l$  e  $r$ 

```

---

- Região de Vértice: Seja  $R = (v, d_1, d_2)$ . Nesse caso, o  $i$ -path até  $p$  deve passar pelo vértice  $v$ , tocando o polígono  $P_i$ . Assim, temos que  $\text{Query}(p, i) = v$ .
- Região de Aresta: Seja  $R = (u, v, d_1, d_2)$ . Nesse caso, o  $i$ -path até  $p$  deve passar por algum ponto  $q$  da aresta  $e = (u, v)$ , tocando o polígono  $P_i$ . Para calcular  $q$ , primeiro determinamos  $q' = \text{Query}(p', i-1)$ , onde  $p'$  é a reflexão de  $p$  em relação à aresta  $e$ . Agora, dizemos que  $q$  é a interseção entre  $\overline{q'p'}$  e a aresta  $e$ . Finalmente, respondemos  $\text{Query}(p, i) = q$ .
- Região de Atravessa: Seja  $R$  a região de atravessa. Nesse caso, o  $i$ -path até  $p$  automaticamente atravessa o polígono  $P_i$  em algum ponto. Portanto, podemos simplesmente responder  $\text{Query}(p, i) = \text{Query}(p, i-1)$ .

Agora vamos implementar esse procedimento como um algoritmo, usando as contruções que fizemos anteriormente, uma vez que é um pouco mais complexo do que a descrição acima.

Vamos usar também uma função auxiliar `InterseçãoDeSegmento` que calcula a interseção entre dois segmentos dados seus extremos. Essa não é descrita aqui, mas é uma implementação padrão de geometria computacional.

## 2.6 Calculando o Caminho Mínimo

Agora que sabemos como responder consultas do tipo  $\text{Query}(p, i)$ , calcular o caminho mínimo de  $s$  até  $t$  que toca todos os polígonos  $P_1, \dots, P_k$  é trivial.

Pela definição de `Query`, sabemos que o menor caminho que parte de  $s$ , toca todos os polígonos  $P_1, \dots, P_k$  e termina em  $t$  deve ter como penúltimo ponto  $q_k = \text{Query}(t, k)$ . Ademais, o caminho que toca os polígonos  $P_1, \dots, P_{k-1}$  e termina em  $q_k$  deve ter como penúltimo ponto  $q_{k-1} = \text{Query}(q_k, k-1)$ . Repetindo esse raciocínio, chegamos até o ponto inicial  $s$ .

Usando essa lógica e juntando as implementações anteriores em um algoritmo completo, temos:

## 2.7 Análise de Complexidade

Nessa seção, vamos analisar a complexidade do algoritmo completo. Primeiramente, a função `LocalizaRegião` leva tempo  $O(\log(|P_i|))$  para localizar um ponto na partição  $S_i$ , uma vez que usa busca binária.

---

**Algorithm 7:** Query( $p, i$ )Responde a consulta Query( $p, i$ )

---

```

1 if  $i = 0$  :
2   return  $s$  // Caso base
3    $R \leftarrow \text{LocalizaRegião}(p, P_i, \text{regiõesDeVértice}[i - 1])$ 
4    $j \leftarrow \lfloor R/2 \rfloor$ 
5   if  $R \pmod 2 = 0$  :
6     return  $v \leftarrow P_i[j]$  // Vértice associado à região de vértice
7   if  $\neg \text{visível}[j]$  :
8     return Query( $p, i - 1$ ) // Região de atravessa
9   // Região de aresta
10   $u \leftarrow P_i[j]$  // Vértice inicial da aresta
11   $v \leftarrow P_i[j + 1]$  // Vértice final da aresta
12   $p' \leftarrow u + \text{RefleteDireção}((p - u), u, v)$ 
13   $q' \leftarrow \text{Query}(p', i - 1)$ 
14   $m \leftarrow \text{InterseçãoDeSegmento}(p', q', u, v)$ 
15  return  $m$  // Ponto de interseção

```

---



---

**Algorithm 8:** CaminhoMínimo( $s, t, P_1, \dots, P_k$ )Calcula o caminho mínimo de  $s$  até  $t$  que toca todos os polígonos  $P_1, \dots, P_k$ 


---

```

1 if  $k = 0$  :
2   return  $[s, t]$  // Caso base: caminho direto de  $s$  até  $t$ 
3    $\text{regiãoDeVértice} \leftarrow \text{Particiona}(P_1, \dots, P_k)$ 
4    $\text{caminho} \leftarrow []$  // Lista vazia para armazenar o caminho
5    $p \leftarrow t$  // Começamos do ponto final  $t$ 
6   for  $i \leftarrow k$  até 1 :
7      $q \leftarrow \text{Query}(p, k)$  // Penúltimo ponto do  $k$ -path até  $p$ 
8     // Verificamos se os pontos  $p$  e  $q$  são distintos devido à regiões de atravessar
9     if  $|q - p| > 10^{-8}$  :
10       return  $\text{caminho.append}(p)$  // Adiciona  $p$  ao caminho
11      $p \leftarrow q$  // Atualiza  $p$  para o próximo ponto
12      $k \leftarrow k - 1$  // Decrementa  $k$ 
13    $\text{caminho.append}(s)$  // Adiciona o ponto inicial  $s$ 
14    $\text{caminho.reverse}()$  // Inverte a lista para obter o caminho correto
15   return  $\text{caminho}$ 

```

---

Ademais, a função Query faz uma chamada recursiva para  $i - 1$  em cada nível de recursão, resultando em  $i$  níveis de recursão. Assim, o tempo total para responder uma consulta  $\text{Query}(p, i)$  é  $O(i \log(|P_i|))$ .

- RefleteDireção(...):  $O(1)$ , pois faz um número constante de operações.
- PontoEmVértice(...):  $O(1)$ , pois faz um número constante de operações.
- PontoEmAresta(...):  $O(1)$ , pois faz um número constante de operações e chamadas para PontoEmVértice.
- LocalizaRegião( $P_i, \dots$ ):  $O(\log|P_i|)$ , pois usa busca binária em  $2|P_i| - 1$  regiões.
- Query( $i, \dots$ ): Fazemos no máximo  $i$  chamadas recursivas, cada uma chama LocalizaRegião  $p$  vezes. Assim, temos a complexidade:

$$O\left(\sum_{j=1}^i \log|P_j|\right)$$

- ArestasVisíveis( $P_i, \dots$ ): Chamamos Query para os  $|P_i|$  vértices de  $P_i$ , assim, temos uma complexidade final de:

$$O\left(|P_i| \sum_{j=1}^i \log|P_j|\right)$$

- Particiona( $P_1, \dots, P_n$ ): Chamamos ArestasVisíveis para cada polígono  $P_i$ , assim, temos:

$$O\left(\sum_{i=1}^k |P_i| \sum_{j=1}^i \log|P_j|\right)$$

- CaminhoMínimo: Chamamos Particiona uma única vez e então calculamos o caminho final cuja complexidade é insignificante próximo de Particiona, então a complexidade final é a mesma:

$$O\left(\sum_{i=1}^k |P_i| \sum_{j=1}^i \log|P_j|\right)$$

Enquanto podemos dizer que determinamos a complexidade final do problema, gotaríamos de ter uma forma mais simples e de acordo com o artigo original. Assim, definimos  $n = \sum_{i=1}^k |P_i|$  e note que:

$$\begin{aligned} O\left(\sum_{i=1}^k |P_i| \sum_{j=1}^i \log|P_j|\right) &= O\left(\sum_{i=1}^k |P_i| \sum_{j=1}^k \log|P_j|\right) \\ &= O\left(\left(\sum_{i=1}^k |P_i|\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^k \log|P_i|\right)\right) \\ &= O\left(n \sum_{i=1}^k \log|P_i|\right) \end{aligned}$$

Ademais, se fixarmos o valor de  $k$ , temos que o valor de  $\sum_{i=1}^k \log|P_i|$  é máximo quando  $|P_1| = \dots = |P_k| = n/k$ . Dessa forma, concluímos que em um pior caso a complexidade é:

$$O(nk \log(n/k))$$

Dessa forma, nosso algoritmo está de acordo com o artigo original.

### 3 O Problema de Visita de Polígonos Geral

Vamos tomar como base a implementação do algoritmo de Mitchell para o problema restrito que fizemos em *Python*. O código pode ser encontrado no arquivo *TouringPolygons/problem2.py*.

### 3.1 Definições e Notação

O problema segue de forma similar ao anterior, mas agora também recebemos como entrada ‘cercas’  $F_0, \dots, F_k$  tais que para todo  $0 \leq i \leq k$  vale que o polígono  $P_i$  e  $P_{i+1}$  estão contidos em  $F_i$ , para tal, consideramos  $P_0 = \{s\}$  e  $P_{k+1} = \{t\}$ . Nossa objetivo é encontrar o caminho de menor comprimento que se inicia em  $s$ , termina em  $t$ , toca cada polígono  $P_i$  em pelo menos um ponto e nunca sai da cerca  $F_i$  no seu caminho entre  $P_i$  e  $P_{i+1}$ .

Dizemos que um caminho  $\pi$  de  $a$  até  $b$  respeita as cercas  $F_i, \dots, F_j$  se  $\pi$  toca todos os polígonos  $P_{i+1}, \dots, P_j$  e para cada  $i \leq l < j$ , o trecho de  $\pi$  entre  $P_l$  e  $P_{l+1}$  está contido em  $F_l$ . Ademais, definimos um  $i$ -path até  $p$  como um caminho mínimo de  $s$  até  $p$  que respeita as cercas  $F_0, \dots, F_i$ . Note que nosso objetivo é encontrar um  $k$ -path até  $t$ .

A função central desse algoritmo continua sendo Query, no entanto, dessa vez vamos adicionar um novo parâmetro, assim, a função  $\text{Query}(p, i, j)$  recebe um ponto  $p$  e dois índices  $i$  e  $j$  e retorna o penúltimo ponto  $q$  do menor caminho até  $p$  que parte de  $s$ , toca todos os polígonos  $P_1, \dots, P_i$  e respeita as cercas  $F_0, \dots, F_j$ .

Primeiramente, é essencial que  $i \leq j$ , ademais, se  $i = j$  então  $\text{Query}(p, i, j)$  é simplesmente o penúltimo ponto do  $i$ -path até  $p$ . Adicionamos o parâmetro  $j$  para o caso em que queremos um  $i$ -path, mas  $p$  está fora da cerca  $F_i$  um caso que aparece naturalmente na recursão do algoritmo. Por enquanto, vamos assumir que sabemos como responder as consultas.

### 3.2 Caminhos Restritos

Outra função extremamente importante para a implementação desse algoritmo é a função  $\text{Fenced}(p_1, p_2, i, j)$  que retorna o menor caminho de  $p_1$  até  $p_2$  que respeita as cercas  $F_i, \dots, F_j$ . Note que se  $i = j$ , então  $\text{Fenced}(p_1, p_2, i, j)$  é simplesmente o segmento  $\overline{p_1 p_2}$  se ele estiver contido em  $F_i$  e não existe caso contrário. Assim, vamos assumir que  $i < j$ .

## Referências

- [1] M. Dror, A. Efrat, A. Lubiw e J. S. B. Mitchell, “Touring a sequence of polygons,” em *Proceedings of the Thirty-Fifth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, sér. STOC ’03, San Diego, CA, USA: Association for Computing Machinery, 2003, pp. 473–482, ISBN: 1581136749. doi: 10.1145/780542.780612. endereço: <https://doi.org/10.1145/780542.780612>.