



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

---

## O Problema da Visita de Polígonos

---

Gabriel Freire Ushijima

São Paulo, SP  
4 de novembro de 2025

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>O Problema de Visita de Polígonos Irrestrito</b>	<b>2</b>
2.1	Definições e Notação . . . . .	2
2.2	Representação dos Objetos . . . . .	2
2.3	Particionando o Plano . . . . .	2
2.3.1	Representado as Partições . . . . .	3
2.3.2	Detectando Arestas Visíveis . . . . .	3
2.3.3	Construindo Regiões de Vértice . . . . .	4
2.4	Respondendo Consultas . . . . .	5
2.5	Calculando o Caminho Mínimo . . . . .	6
<b>3</b>	<b>O Problema de Visita de Polígonos Geral</b>	<b>6</b>
3.1	Definições e Notação . . . . .	6
3.2	Caminhos Restritos . . . . .	7

# 1 Introdução

Este relatório descreve a implementação e os resultados obtidos na resolução do problema da visita de polígonos, usando como base o paper de Dror et al. (2003) [1] que descreve algoritmos para o caso sem e com restrições. Buscamos apresentar uma abordagem mais prática e detalhada para o problema, sem um foco tão grande na análise teórica.

## 2 O Problema de Visita de Polígonos Irrestrito

Vamos tomar como base a implementação do algoritmo de Mitchell para o problema irrestrito que fizemos em *Python*. O código pode ser encontrado no arquivo `TouringPolygons/problem1.py`.

### 2.1 Definições e Notação

Considere o seguinte problema: dados dois pontos  $s, t \in \mathbb{R}^2$  e uma sequência de polígonos convexos disjuntos  $P_1, P_2, \dots, P_k$ , encontrar o caminho de menor comprimento que se inicia em  $s$ , termina em  $t$  e toca cada polígono  $P_i$  em pelo menos um ponto, podendo atravessá-los.

A figura ao lado 1 ilustra um exemplo de entrada e a solução ótima para o problema para um caso com 3 polígonos. Temos  $s$  como o **ponto verde**,  $t$  como o **ponto vermelho** e os polígonos  $P_1, P_2$  e  $P_3$  como o **triângulo azul**, o **trapézio laranja** e o **pentágono verde**, respectivamente. O caminho mínimo é representado pela **linha roxa**.

Retomando o paper, definimos um  $i$ -path até  $p$  como um caminho mínimo que começa em  $s$ , encosta em cada um dos polígonos  $P_1, P_2, \dots, P_i$  e termina em  $p$ . Note que nosso objetivo é encontrar um  $k$ -path até  $t$ . Enquanto não vamos entrar em detalhes, todo  $i$ -path é único.

A função central desse algoritmo será a função  $\text{Query}(p, i)$ , que recebe um ponto  $p$  e um índice  $i$  e retorna o penúltimo ponto  $q$  do  $i$ -path até  $p$  (ou seja, o ponto imediatamente anterior à  $p$  nesse caminho).

Primeiramente, vamos descrever procedimentos auxiliares que serão úteis para a implementação da função  $\text{Query}$ . Finalmente, vamos descrever como responder consultas usando esses procedimentos. Por enquanto, vamos assumir que sabemos como responder as consultas.

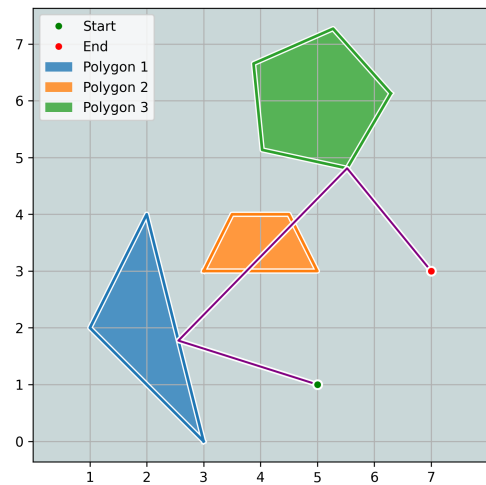


Figura 1: Caminho mínimo para um caso de 3 polígonos.

### 2.2 Representação dos Objetos

Antes de descrever os procedimentos auxiliares, é importante definir como representamos os objetos geométricos envolvidos no problema. Utilizamos as seguintes representações:

- **Pontos e Vetores:** Representados por uma classe `Vector2` que guarda um par de números reais  $(x, y)$ .
- **Polígonos:** Representados por uma classe `Polygon2` que guarda uma lista ordenada de seus vértices (representados por `Vector2`) no sentido anti-horário. Um vértice arbitrário é escolhido para ser indexado como o primeiro.
- **Caminho Final:** Representado como uma lista de pontos (representados por `Vector2`) na ordem em que aparecem no caminho.

### 2.3 Particionando o Plano

É possível mostrar [1] que para cada polígono  $P_i$  podemos criar uma partição  $S_i$  do plano tal que o comportamento da função  $\text{Query}(p, i)$  depende exclusivamente de qual região da partição  $S_i$  o ponto  $p$  pertence, sendo possível localizar cada ponto de maneira eficiente. Por falta de um nome melhor, chamamos cada parte de  $S_i$  de *região*.

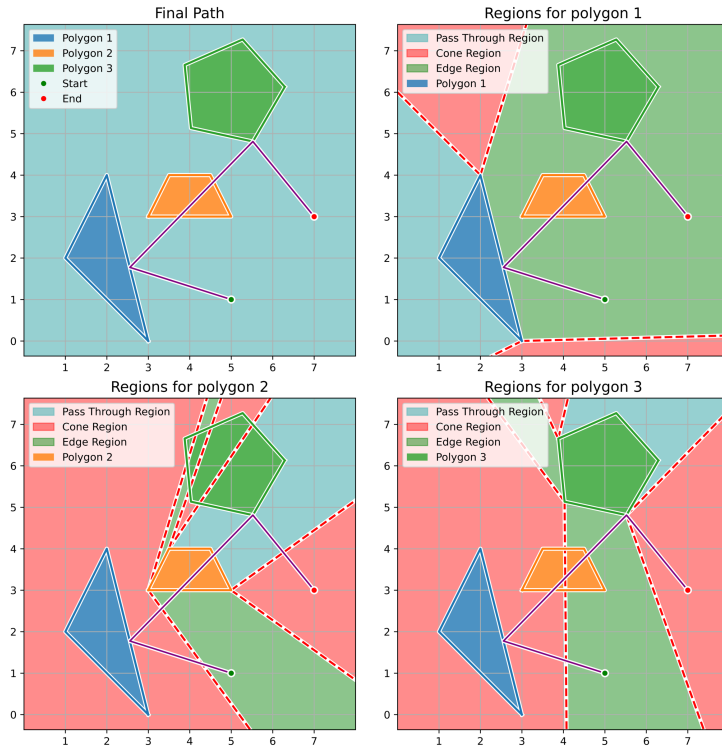


Figura 2: Partição do plano para cada polígono do exemplo anterior.

mos considerar pontos dentro dos polígonos  $P_i$  como pertencentes à região de atravessar.

Ademais, note que cada região de vértice é delimitada por duas semi-retas que partem de um vértice de  $P_i$ , incluindo todos os pontos que estão entre essas semi-retas. Similarmente, cada região de aresta é delimitada por duas semi-retas que partem dos extremos de uma aresta de  $P_i$  e a própria aresta, incluindo todos os pontos que estão entre essas semi-retas e a aresta. Finalmente, a região de atravessar é o complemento das regiões de vértice e aresta.

### 2.3.1 Representado as Partições

Como mencionado, as regiões se complementam, assim, do ponto de vista de implementação, decidimos armazenar apenas as regiões de vértice, uma vez que as regiões de aresta podem ser construídas a partir delas, simplesmente verificando se um ponto está entre as semi-retas de duas regiões de vértice adjacentes e a aresta que as separa.

Para representar as regiões de vértice, armazenamos uma lista de pares de direções  $(d_1, d_2)$  para cada vértice  $v$  de  $P_i$ , onde  $d_1$  e  $d_2$  são vetores unitários que representam as direções das semi-retas que delimitam a região de vértice associada a  $v$ . Nem todo vértice de  $P_i$  gera uma região de vértice, assim, se um vértice  $v$  não gerar uma região, então armazenamos um par  $(d, d)$  qualquer na posição correspondente da lista, representando uma região válida, mas vazia. Isso será mais relevante adiante.

Essa representação já permite que verifiquemos se um ponto  $p$  pertence a uma região de vértice e qual. No entanto, não conseguimos distinguir entre regiões de aresta e a região de atravessar. Para resolver esse problema, armazenamos uma lista de booleanas que indica se uma aresta é visível ou não. Assim, para determinar se um ponto  $p$  pertence a uma região de aresta ou à região de atravessar, basta verificar se  $p$  está entre as semi-retas de duas regiões de vértice adjacentes e, em caso positivo, verificar se a aresta que as separa é visível ou não.

### 2.3.2 Detectando Arestas Visíveis

Seja  $e$  um aresta de  $P_i$  e  $u, v$  seus vértices na ordem que aparecem em  $P_i$  (antihorário). Dizemos que  $e$  é visível se e somente se para todo ponto interno  $p$  de  $e$  o  $i$ -path até  $p$  não passa pela parte interna de  $P_i$ . Como a borda de  $P_i$  e sua parte interna são contínuas, podemos fazer esse teste para um único ponto interno de  $e$  e teremos o mesmo resultado.

Enquanto a quantidade de regiões de  $S_i$  pode ser numerosa a depender do número de vértices de  $P_i$ , cada região pode ser de exatamente 3 tipos diferentes: **Regiões de Vértice**, **Regiões de Aresta** e **Regiões de Atravessar**.

Nas seções a seguir vamos descrever como usar essas partições para responder consultas, mas por enquanto vamos descrever como representar e construir essas partições. Por enquanto, apenas mantenha em mente que se conseguirmos representar e construir essas partições, então podemos usá-las para responder consultas e resolver o problema de maneira eficiente.

A partir da ilustração 2, note que cada região de vértice (*Cone Region*) está associada a um vértice de  $P_i$ , cada região de aresta (*Edge Region*) está associada a uma aresta de  $P_i$  e há exatamente uma região de atravessar (*Pass Through Region*). Ademais, essas regiões se complementam, ou seja, o conjunto de todas as regiões de vértice, aresta e atravessar é o plano todo e nenhuma região se sobrepõe a outra. Para que isso seja válido, deve-

Assim, temos a intuição de pegar o ponto médio  $m$  de  $e$  ou qualquer outro ponto interno de  $e$ , calcular o último passo  $q$  do  $i$ -path até  $m$  e verificar se o segmento  $\overline{qm}$  passa por  $P_i$ . No entanto, uma abordagem ingênua, testando cada aresta de  $P_i$  individualmente, seria muito lenta, tomando tempo  $O(|P_i|^2)$ .

Felizmente, não é necessário implementar um teste eficiente de interseção de segmento e polígono, uma vez que temos a informação adicional que  $m$  pertence à borda de  $P_i$ , mais especificamente na aresta  $e$ . Por esse motivo, como  $P_i$  é convexo e suas arestas estão ordenadas em sentido anti-horário, sabemos que se o produto interno de  $\overrightarrow{uv}$  com  $\overrightarrow{mq}$  for positivo, então  $\overrightarrow{mq}$  chega em  $m$  pela parte interna de  $P_i$ .

---

**Algorithm 1:** ArestasVisíveis( $P_i, i$ )

Determina as arestas visíveis de  $P_i$

---

```

1  $n \leftarrow |P_i|$  // Número de vértices de  $P_i$ 
2 visível  $\leftarrow$  [False] *  $n$  // Inicializa todas as arestas como não visíveis
3 for  $j \leftarrow 0$  até  $n - 1$  :
4    $u \leftarrow P_i[j]$  // j-ésimo vértice de  $P_i$ 
5    $v \leftarrow P_i[j + 1]$  // vértice que segue  $u$ , considerando  $P_i[n] = P_i[0]$ 
6    $m \leftarrow (u + v)/2$  // ponto médio
7    $q \leftarrow \text{Query}(m, i - 1)$  // penúltimo ponto do  $(i - 1)$ -path até  $m$ 
8
9   // Marca a aresta  $j$  como visível se o produto vetorial for negativo
10  visível[j]  $\leftarrow ((v - u) \times (q - u) < 0)$ 
11 return visível
```

---

### 2.3.3 Construindo Regiões de Vértice

Uma vez que sabemos quais arestas são visíveis, podemos construir as regiões de vértice. Vamos considerar o vértice  $v$  de  $P_i$  e calculamos  $p = \text{Query}(v, i - 1)$ . Vamos explicar posteriormente como calcular  $p$ , mas uma intuição inicial é pensar que  $\text{Query}(q, 0) = s$  para qualquer  $q$ , uma vez que um 0-path não precisa tocar em nenhum polígono, assim, o menor caminho é uma linha reta de  $s$  até  $q$ .

Agora consideramos a direção de  $d = v - p$  e a maneira que esse raio chega em  $v$ . Sejam  $v_1$  o vértice que precede e  $v_2$  o que segue  $v$  em  $P_i$  (no sentido anti-horário). Se a aresta  $(v_1, v)$  é visível, então  $d_1$  será a reflexão de  $d$  em relação à aresta  $(v_1, v)$ , caso contrário,  $d_1$  será a mesma direção de  $d$ . Similarmente, se a aresta  $(v, v_2)$  é visível, então  $d_2$  será a reflexão de  $d$  em relação à aresta  $(v, v_2)$ , caso contrário,  $d_2$  será a mesma direção de  $d$ . Assim, criamos a região de vértice  $(d_1, d_2)$  associada à  $v$ .

Encorajamos o leitor a verificar que essa lógica se aplica na imagem ao lado 3, usando o ponto inicial  $s$  como resposta de  $\text{Query}(v, 0)$  para qualquer vértice  $v$ . Os vértices  $(-2, 0)$  e  $(0, 0)$  terão ambas as arestas visíveis, assim, suas regiões de vértice serão delimitadas pelas reflexões do raio que parte de  $s$ . O vértice  $(-3, 1)$  terá apenas a aresta posterior visível, assim, sua região de vértice será delimitada pela reflexão do raio em relação à aresta posterior e a própria direção do raio. Similarmente, o vértice  $(2, 1)$  tem apenas a aresta anterior visível. Finalmente, os vértices  $(1, 1.25)$  e  $(-1, 1.5)$  não terão nenhuma aresta visível, assim, suas regiões de vértice serão simplesmente a direção do raio em ambas as semi-retas.

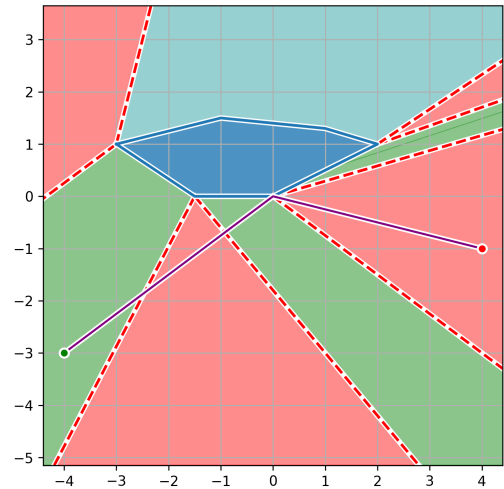


Figura 3: Partição de um polígono com múltiplas arestas não visíveis.

---

**Algorithm 2:** RefleteDireção( $d, v_1, v_2$ )

Reflete a direção  $d$  em relação à aresta  $(v_1, v_2)$

---

```

1  $e \leftarrow v_2 - v_1$ 
2  $N \leftarrow \text{Vector2}(-e.y, e.x)/|e|$  // Vetor normal à aresta
3 return  $d - 2 \cdot (d^\top \cdot N)N$  // Fórmula de reflexão
```

---

**Algorithm 3:** Particiona( $P_1, \dots, P_k$ )

Constroi as partições dos polígonos

---

```

1 regiõesDeVértice  $\leftarrow \square$  // Lista vazia
2 for  $i \leftarrow 1$  até  $k$  :
3   visível  $\leftarrow$  ArestasVisíveis( $P_i, i$ )
4   regiõesDeVértice.append( $\square$ ) // Adiciona uma nova lista para as regiões de vértice de  $P_i$ 
5   for  $j \leftarrow 0$  até  $|P_i| - 1$  :
6      $v \leftarrow P_i[j]$  // j-ésimo vértice de  $P_i$ 
7      $v_1 \leftarrow P_i[j - 1]$  // vértice que precede  $v$ , considerando  $P_i[-1] = P_i[|P_i| - 1]$ 
8      $v_2 \leftarrow P_i[j + 1]$  // vértice que segue  $v$ , considerando  $P_i[|P_i|] = P_i[0]$ 
9
10     $p \leftarrow$  Query( $v, i - 1$ ) // penúltimo ponto do  $(i - 1)$ -path até  $v$ 
11     $d \leftarrow v - p$  // direção do raio de  $p$  até  $v$ 
12
13    if visível[j - 1] :
14       $d_1 \leftarrow$  Reflete( $d, v_1, v$ ) // reflexão de  $d$  em relação à aresta  $(v_1, v)$ 
15    else
16       $d_1 \leftarrow d$ 
17    if visível[j] :
18       $d_2 \leftarrow$  Reflete( $d, v, v_2$ ) // reflexão de  $d$  em relação à aresta  $(v, v_2)$ 
19    else
20       $d_2 \leftarrow d$ 
21    // Armazena a região de vértice associada a  $v$  como o par  $(d_1, d_2)$ 
22    regiõesDeVértice[i - 1].append( $(d_1, d_2)$ )

```

---

## 2.4 Respondendo Consultas

Agora que sabemos como construir as partições  $S_i$ , podemos descrever como usá-las para responder consultas Query( $p, i$ ). O procedimento utilizado é recursivo, assim, primeiro definimos o caso base, que é Query( $p, 0$ ) =  $s$ , uma vez que um 0-path não precisa tocar em nenhum polígono, assim, o menor caminho é uma linha reta de  $s$  até  $p$ .

Para  $i > 0$ , primeiramente determinamos a região  $R$  de  $S_i$  que contém  $p$ . Descrevemos acima como representar cada região e a partir dela é fácil determinar à qual um ponto  $p$  pertence. Também é importante ressaltar que  $p$  sempre pertence a exatamente uma região. Agora vamos analisar os 3 casos possíveis para  $R$ :

- Região de Vértice: Seja  $R = (v, d_1, d_2)$ . Nesse caso, o  $i$ -path até  $p$  deve passar pelo vértice  $v$ , tocando o polígono  $P_i$ . Assim, temos que Query( $p, i$ ) =  $v$ .
- Região de Aresta: Seja  $R = (u, v, d_1, d_2)$ . Nesse caso, o  $i$ -path até  $p$  deve passar por algum ponto  $q$  da aresta  $e = (u, v)$ , tocando o polígono  $P_i$ . Para calcular  $q$ , primeiro determinamos  $q' =$  Query( $p', i - 1$ ), onde  $p'$  é a reflexão de  $p$  em relação à aresta  $e$ . Agora, dizemos que  $q$  é a interseção entre  $\overline{q'p'}$  e a aresta  $e$ . Finalmente, respondemos Query( $p, i$ ) =  $q$ .
- Região de Atravessa: Seja  $R$  a região de atravessa. Nesse caso, o  $i$ -path até  $p$  automaticamente atravessa o polígono  $P_i$  em algum ponto. Portanto, podemos simplesmente responder Query( $p, i$ ) = Query( $p, i - 1$ ).

A maioria dessas operações é simples, no entanto, determinar qual região de  $S_i$  contém  $p$  requer atenção especial. Primeiramente, devemos saber como determinar se um ponto está em uma região de vértice ou em uma região de aresta. Não só, se simplesmente iterarmos sobre todas as regiões, o tempo de resposta seria  $O(|P_i|)$ , o que é muito lento.

Ainda assim, primeiro vamos implementar um procedimento auxiliar que verifica se um ponto  $p$  está em uma região de vértice associada a um vértice  $v$  delimitada por duas direções  $d_1$  e  $d_2$ . Basicamente, se o ângulo entre  $d_1$  e  $d_2$  é menor ou igual a  $180^\circ$ , então verificamos se  $p$  está entre as semi-retas usando produtos vetoriais. Caso contrário, verificamos se  $p$  não está no complemento da região.

**Algorithm 4:** PontoEmVértice( $p, v, d_1, d_2$ )

Verifica se o ponto  $p$  está na região de vértice associada ao vértice  $v$  delimitada pelas direções  $d_1$  e  $d_2$

---

```

1 // Se o ângulo da região de vértice é maior que 180° // verificamos se  $p$  não pertence ao
  complemento da região.
2 if  $d_1 \times d_2 < 0$  :
3   return  $\neg$  PontoEmVértice( $p, v, d_2, d_1$ ) // Troca as direções e inverte o resultado
4 // Se o ângulo da região de vértice é menor ou igual a 180°
5 // Verificamos se  $p$  está entre as semi-retas
6 return  $(d_1 \times (p - v) \geq 0) \wedge ((p - v) \times d_2 \geq 0)$ 

```

---

Ademais, vamos implementar um procedimento que determina se um ponto  $p$  está em uma região de aresta associada à aresta  $e = (u, v)$ . Basicamente, verificamos se  $p$  está entre as semi-retas que delimitam a região de vértice associada a  $u$  e a região de vértice associada a  $v$  e se  $p$  está do mesmo lado da aresta  $e$  que o interior do polígono  $P_i$ . Para determinar esse lado, podemos usar o produto vetorial entre o vetor da aresta e o vetor do ponto médio da aresta até um ponto interno qualquer de  $P_i$ .

**Algorithm 5:** PontoEmAresta( $p, u, v, d_1, d_2, P_i$ )

Verifica se o ponto  $p$  está na região de aresta associada à aresta  $e = (u, v)$  delimitada pelas direções  $d_1$  e  $d_2$

---

```

1 // Se vértices são muito próximos, tratamos a região de aresta
2 // como uma região de vértice.
3 if  $|u - v| < 10^{-8}$  :
4   return PontoEmVértice( $p, v, d_2, d_1, P_i$ )

```

---

## 2.5 Calculando o Caminho Mínimo

Uma vez que sabemos como responder consultas, calcular o caminho final é muito simples. Basta calcular  $q_k = \text{Query}(t, k)$ , então  $q_{k-1} = \text{Query}(q_k, k-1)$  e assim por diante, até  $q_0 = s$ . Assim, o caminho mínimo é simplesmente a sequência  $s, q_1, \dots, q_k, t$ .

## 3 O Problema de Visita de Polígonos Geral

Vamos tomar como base a implementação do algoritmo de Mitchell para o problema restrito que fizemos em *Python*. O código pode ser encontrado no arquivo `TouringPolygons/problem2.py`.

### 3.1 Definições e Notação

O problema segue de forma similar ao anterior, mas agora também recebemos como entrada ‘cercas’  $F_0, \dots, F_k$  tais que para todo  $0 \leq i \leq k$  vale que o polígono  $P_i$  e  $P_{i+1}$  estão contidos em  $F_i$ , para tal, consideramos  $P_0 = \{s\}$  e  $P_{k+1} = \{t\}$ . Nosso objetivo é encontrar o caminho de menor comprimento que se inicia em  $s$ , termina em  $t$ , toca cada polígono  $P_i$  em pelo menos um ponto e nunca sai da cerca  $F_i$  no seu caminho entre  $P_i$  e  $P_{i+1}$ .

Dizemos que um caminho  $\pi$  de  $a$  até  $b$  respeita as cercas  $F_i, \dots, F_j$  se  $\pi$  toca todos os polígonos  $P_{i+1}, \dots, P_j$  e para cada  $i \leq l < j$ , o trecho de  $\pi$  entre  $P_l$  e  $P_{l+1}$  está contido em  $F_l$ . Ademais, definimos um  $i$ -path até  $p$  como um caminho mínimo de  $s$  até  $p$  que respeita as cercas  $F_0, \dots, F_i$ . Note que nosso objetivo é encontrar um  $k$ -path até  $t$ .

A função central desse algoritmo continua sendo `Query`, no entanto, dessa vez vamos adicionar um novo parâmetro, assim, a função `Query( $p, i, j$ )` recebe um ponto  $p$  e dois índices  $i$  e  $j$  e retorna o penúltimo ponto  $q$  do menor caminho até  $p$  que parte de  $s$ , toca todos os polígonos  $P_1, \dots, P_i$  e respeita as cercas  $F_0, \dots, F_j$ .

Primeiramente, é essencial que  $i \leq j$ , ademais, se  $i = j$  então `Query( $p, i, j$ )` é simplesmente o penúltimo ponto do  $i$ -path até  $p$ . Adicionamos o parâmetro  $j$  para o caso em que queremos um  $i$ -path, mas  $p$  está fora da cerca  $F_i$  um caso que aparece naturalmente na recursão do algoritmo. Por enquanto, vamos assumir que sabemos como responder as consultas.

### 3.2 Caminhos Restritos

Outra função extremamente importante para a implementação desse algoritmo é a função  $\text{Fenced}(p_1, p_2, i, j)$  que retorna o menor caminho de  $p_1$  até  $p_2$  que respeita as cercas  $F_i, \dots, F_j$ . Note que se  $i = j$ , então  $\text{Fenced}(p_1, p_2, i, j)$  é simplesmente o segmento  $\overline{p_1 p_2}$  se ele estiver contido em  $F_i$  e não existe caso contrário. Assim, vamos assumir que  $i < j$ .

### Referências

- [1] M. Dror, A. Efrat, A. Lubiw e J. S. B. Mitchell, “Touring a sequence of polygons,” em *Proceedings of the Thirty-Fifth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, sér. STOC '03, San Diego, CA, USA: Association for Computing Machinery, 2003, pp. 473–482, ISBN: 1581136749. DOI: 10.1145/780542.780612. endereço: <https://doi.org/10.1145/780542.780612>.