



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

O Problema da Visita de Polígonos

Gabriel Freire Ushijima

São Paulo, SP
14 de novembro de 2025

Sumário

1	Introdução	2
2	O Problema de Visita de Polígonos Irrestrito	2
2.1	Definindo o Problema	2
2.2	Particionando o Plano	2
2.2.1	Região de Primeiro Contato	3
2.2.2	Construindo Regiões de Vértice	4
2.3	Localizando Pontos na Partição	5
2.3.1	Verificando Regiões de Vértice	5
2.3.2	Verificando Regiões de Aresta	6
2.3.3	Localização Eficiente de Pontos na Partição	7
2.4	Respondendo Consultas	8
2.5	Calculando o Caminho Mínimo	9
2.6	Análise de Complexidade	10
3	O Problema de Visita de Polígonos Geral	11
3.1	Definições e Notação	11
3.2	Caminhos Restritos	11
A	Notações	12

1 Introdução

Este relatório descreve a implementação e os resultados obtidos na resolução do problema da visita de polígonos, usando como base o paper de Dror et al. (2003) [1] que descreve algoritmos para o caso sem e com restrições. Buscamos apresentar uma abordagem mais prática e detalhada para o problema, sem um foco tão grande na análise teórica.

Recomendamos a leitura do paper original para uma compreensão mais profunda dos conceitos e das provas por trás dos algoritmos apresentados aqui. Também é importante notar que este relatório não cobre todos os detalhes do paper, mas sim uma visão geral e a implementação prática dos algoritmos.

O código implementado pode ser encontrado no repositório GitHub, contendo scripts em *Python* para resolver ambos os casos do problema.

Finalmente, recomendamos a leitura do Apêndice A para entender as notações usadas ao longo do relatório.

2 O Problema de Visita de Polígonos Irrestrito

Vamos tomar como base a implementação do algoritmo de Mitchell para o problema irrestrito que fizemos em *Python*. O código pode ser encontrado no arquivo `TouringPolygons/problem1.py`.

2.1 Definindo o Problema

Considere o seguinte problema: dados dois pontos $s, t \in \mathbb{R}^2$ e uma sequência de polígonos convexos disjuntos P_1, P_2, \dots, P_k , encontrar o caminho de menor comprimento que se inicia em s , termina em t e toca cada polígono P_i em pelo menos um ponto, podendo atravessá-los.

A Figura 1 ilustra um exemplo de entrada e a solução ótima para o problema para um caso com 3 polígonos. Temos s como o **ponto verde**, t como o **ponto vermelho** e os polígonos P_1, P_2 e P_3 como o **triângulo azul**, o **trapézio laranja** e o **pentágono verde**, respectivamente. O caminho mínimo é representado pela **linha roxa**.

Retomando o paper, definimos um i -path até p como um caminho mínimo que começa em s , encosta em cada um dos polígonos P_1, P_2, \dots, P_i e termina em p . Note que nosso objetivo é encontrar um k -path até t . Enquanto não vamos entrar em detalhes, todo i -path é único.

A função central desse algoritmo será a função $\text{Query}(p, i)$, que recebe um ponto p e um índice i e retorna o penúltimo ponto q do i -path até p (ou seja, o ponto imediatamente anterior à p nesse caminho).

Primeiramente, vamos descrever procedimentos auxiliares que serão úteis para a implementação da função Query . Finalmente, vamos descrever como responder consultas usando esses procedimentos. Por enquanto, vamos assumir que sabemos como responder as consultas. Para as seções a seguir, vamos assumir que os polígonos P_1, \dots, P_k são representados por listas de vértices ordenados em sentido anti-horário, com um vértice arbitrário como o primeiro.

2.2 Particionando o Plano

É possível mostrar [1] que para cada polígono P_i podemos criar uma partição S_i do plano tal que o comportamento da função $\text{Query}(p, i)$ dependa exclusivamente de a qual região da partição S_i o ponto p pertence, sendo possível localizar cada ponto de maneira eficiente. Por falta de um nome melhor, chamamos cada parte de S_i de *região*.

Nas seções a seguir vamos descrever como usar essas partições para responder consultas, mas por enquanto vamos descrever como representar e construir essas partições. Por enquanto, apenas mantenha em mente que se conseguirmos representar e construir essas partições, então podemos usá-las para responder consultas e resolver o problema de maneira eficiente.

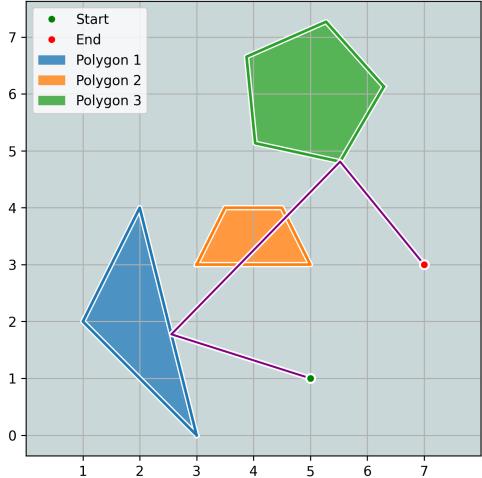


Figura 1: Caminho mínimo para um caso de 3 polígonos.

Enquanto a quantidade de regiões de S_i pode ser numerosa a depender do número de vértices de P_i , cada região pode ser exatamente 3 tipos diferentes: **Regiões de Vértice**, **Regiões de Aresta** e **Regiões de Atravessar**.

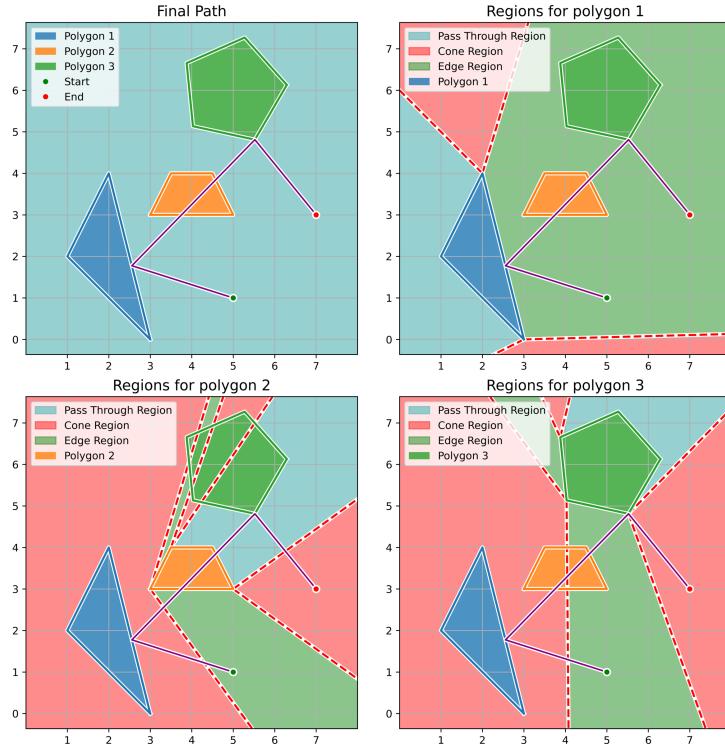


Figura 2: Partição do plano para cada polígono do exemplo anterior.

os pontos que estão entre essas semi-retas e a aresta. Finalmente, a região de atravessar é o complemento das regiões de vértice e aresta.

2.2.1 Região de Primeiro Contato

Para cada polígono P_i , definimos T_i como a *região de primeiro contato* de P_i , ou seja, o conjunto de pontos p no perímetro de P_i tais que o $(i-1)$ -path até p toca em P_i pela primeira vez em p . Podemos provar [1] que T_i é uma região contínua do perímetro de P_i e que T_i é delimitada por vértices de P_i , ou seja, T_i é a união de uma sequência de arestas consecutivas de P_i . Por esse motivo, chamamos arestas de P_i que pertencem à T_i de **arestas visíveis** e as que não pertencem de **arestas bloqueadas**.

Essa região é importante, pois apenas as arestas visíveis de P_i que pertencem à T_i geram regiões de aresta em S_i , além disso, se um vértice está entre duas arestas bloqueadas, então ele não gera uma região de vértice em S_i .

Como T_i é a união de arestas, para determinar quais arestas de P_i pertencem à T_i , podemos simplesmente iterar sobre as arestas de P_i e verificar se o $(i-1)$ -path até um ponto interno qualquer da aresta, por exemplo o ponto médio, chega em P_i pela primeira vez nesse ponto. Se isso for verdade, então a aresta pertence à T_i , caso contrário, não pertence.

No entanto, precisamos de uma maneira eficiente de fazer isso para todas as arestas de P_i . Se simplesmente fizermos isso de maneira ingênua, verificando se o segmento entre o último ponto q do $(i-1)$ -path até o ponto médio m da aresta intersecta P_i , teríamos uma complexidade de $O(|P_i|)$ por aresta, resultando em $O(|P_i|^2)$

A partir da Figura 2, note que cada região de vértice (*Cone Region*) está associada a um vértice de P_i , cada região de aresta (*Edge Region*) está associada a uma aresta de P_i e há exatamente uma região de atravessar (*Pass Through Region*). Ademais, essas regiões se complementam, ou seja, o conjunto de todas as regiões de vértice, aresta e atravessar é o plano todo e nenhuma região se sobrepõe a outra. Para que isso seja válido, devemos considerar pontos dentro dos polígonos P_i como pertencentes à região de atravessar. As fronteiras entre as regiões podem ser consideradas como pertencentes a qualquer uma das regiões que as delimitam, produzindo o mesmo resultado, mas para simplicidade, vamos considerar que pertencem às regiões de vértice.

Ademais, note que cada região de vértice é delimitada por duas semi-retas que partem de um vértice de P_i , incluindo todos os pontos que estão entre essas semi-retas. Similarmente, cada região de aresta é delimitada por duas semi-retas que partem dos extremos de uma aresta de P_i e a própria aresta, incluindo todos

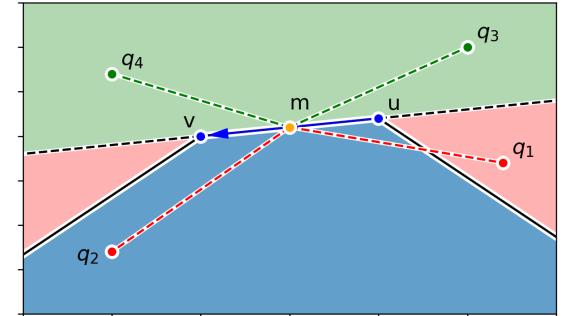


Figura 3: Testando aresta para região de primeiro contato.

para todas as arestas de P_i .

Felizmente, como P_i é convexo e suas arestas estão ordenadas em sentido anti-horário, sabemos que o segmento \overline{qm} toca P_i pela primeira vez em m se e somente se o produto vetorial de \overrightarrow{mv} com \overrightarrow{mq} for positivo. Usando essa ideia, podemos determinar todas as arestas visíveis de P_i em tempo $O(1)$ por aresta, totalizando $O(|P_i|)$.

A Figura 3 ilustra essa ideia. Temos o polígono P_i em azul, os vértices u e v em azul, o ponto médio m da aresta em laranja e 4 pontos q_1, q_2, q_3 e q_4 representando possíveis últimos pontos do $(i-1)$ -path até m . Note que os segmentos $\overline{q_1m}$ e $\overline{q_2m}$ passam pela parte interna de P_i , assim, o produto vetorial de \overrightarrow{uv} com $\overrightarrow{mq_1}$ e $\overrightarrow{mq_2}$ é positivo. Já os segmentos $\overline{q_3m}$ e $\overline{q_4m}$ não passam pela parte interna de P_i , assim, o produto vetorial de \overrightarrow{uv} com $\overrightarrow{mq_3}$ e $\overrightarrow{mq_4}$ é negativo.

Implementamos essa ideia no algoritmo 1, que recebe um polígono P_i e seu índice i e retorna uma lista booleana indicando quais arestas de P_i são visíveis. Para os próximos algoritmos, vamos referenciar os objetos T_1, \dots, T_k como listas booleanas indicando quais arestas de cada polígono P_1, \dots, P_k são visíveis.

Algorithm 1: ArestasVisíveis(P_i)

Determina as arestas visíveis de P_i

```

1  $n \leftarrow |P_i|$  // Número de vértices de  $P_i$ 
2 visível  $\leftarrow [\text{False}] * n$  // Inicializa todas as arestas como não visíveis
3 for  $j \leftarrow 0$  até  $n - 1$  :
4    $u \leftarrow j\text{-ésimo vértice de } P_i$ 
5    $v \leftarrow \text{vértice que segue } u \text{ em } P_i$ 
6    $m \leftarrow (u + v)/2$  // ponto médio
7    $q \leftarrow \text{Query}(m, i - 1)$  // penúltimo ponto do  $(i - 1)$ -path até  $m$ 
8   // Marca a aresta  $j$  como visível se o produto vetorial for negativo
9   visível[j]  $\leftarrow ((v - m) \times (q - m) < 0)$ 
10
11 return visível

```

2.2.2 Construindo Regiões de Vértice

Uma vez que sabemos quais arestas são visíveis, podemos construir as regiões de vértice. Observamos anteriormente que essas são delimitadas por duas semi-retas que partem de um vértice de P_i . Por esse motivo, nessa etapa, à cada vértice v vamos associar um par ordenado de direções $(d_{\text{prev}}, d_{\text{next}})$ tais que a região de vértice associada a v são os pontos entre as semi-retas que partem de v nas direções d_{prev} e d_{next} , no sentido anti-horário.

Para calcular as direções da regiões de vértice de um vértice v de P_i , devemos considerar o ponto $p = \text{Query}(v, i - 1)$ e definirmos $d = v - p$. Sejam v_{prev} o vértice que precede e v_{next} o que segue v em P_i (no sentido anti-horário). Se a aresta (v_{prev}, v) é visível, então d_{prev} será a reflexão de d em relação à aresta (v_{prev}, v) , caso contrário, d_{prev} será a mesma direção de d . Similarmente, se a aresta (v, v_{next}) é visível, então d_{next} será a reflexão de d em relação à aresta (v, v_{next}) , caso contrário, d_{next} será a mesma direção de d . Assim, criamos a região de vértice $(d_{\text{next}}, d_{\text{next}})$ associada à v .

Vale notar que se ambas as arestas incidentes a v estão bloqueadas, então $d_{\text{prev}} = d_{\text{next}} = d$, assim, a região de vértice associada a v é válida, mas vazia.

Encorajamos o leitor a verificar que essa lógica se aplica à Figura 4, usando o ponto inicial s como resposta de $\text{Query}(v, 0)$ para qualquer vértice v . Os vértices $(-2, 0)$ e $(0, 0)$ terão as suas duas arestas incidentes visíveis, assim, suas regiões de vértice serão delimitadas pelas reflexões do raio que parte de s . O vértice $(-3, 1)$ terá apenas a aresta posterior visível, assim, sua região de vértice será delimitada pela reflexão do raio em relação à aresta posterior e a própria direção do raio. Si-

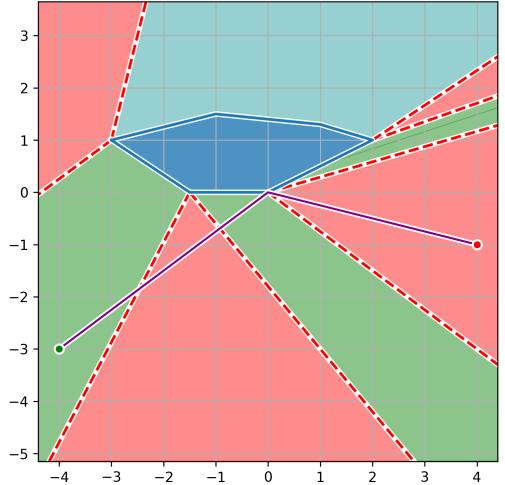


Figura 4: Partição de um polígono com múltiplas arestas não visíveis.

milarmente, o vértice $(2, 1)$ tem apenas a aresta anterior visível. Finalmente, os vértices $(1, 1.25)$ e $(-1, 1.5)$ não terão nenhuma aresta visível, assim, suas regiões de vértice serão vazias.

Implementamos essas ideias nos algoritmos 2 e 3. O primeiro reflete uma direção em relação a uma aresta, enquanto o segundo cria a partição S_i de um polígono P_i , retornando uma lista de pares ordenados de direções representando as regiões de vértice associadas a cada vértice de P_i . Para os próximos algoritmos, vamos referenciar os objetos S_1, \dots, S_k como listas de pares ordenados de direções representando as regiões de vértice de cada polígono P_1, \dots, P_k .

Algorithm 2: RefleteDireção($d, v_{\text{prev}}, v_{\text{next}}$)
Reflete a direção d em relação à aresta $(v_{\text{prev}}, v_{\text{next}})$

```

1  $u \leftarrow v_{\text{prev}} - v_{\text{next}}$ 
2  $w \leftarrow$  Vetor normal à  $u$ , tal que  $|w| = 1$ 
3 return  $d - 2\langle d, w \rangle w$  // Fórmula de reflexão

```

Algorithm 3: ConstróiRegiõesDeVértice(P_i)
Constroi as partições do polígono P_i

```

1 regiões  $\leftarrow []$  // Lista vazia
2 for  $j \leftarrow 0$  até  $|P_i| - 1$  :
3    $v \leftarrow j$ -ésimo vértice de  $P_i$ 
4    $v_{\text{prev}} \leftarrow$  vértice que precede  $v$  em  $P_i$ 
5    $v_{\text{next}} \leftarrow$  vértice que segue  $v$  em  $P_i$ 
6
7    $p \leftarrow \text{Query}(v, i - 1)$  // penúltimo ponto do  $(i - 1)$ -path até  $v$ 
8    $d \leftarrow v - p$  // direção do raio de  $p$  até  $v$ 
9
10  if Aresta  $j - 1$  de  $P_i$  pertence à  $T_i$  :
11     $d_{\text{prev}} \leftarrow \text{Reflete}(d, v_{\text{prev}}, v)$  // reflexão de  $d$  em relação à aresta  $(v_{\text{prev}}, v)$ 
12  else
13     $d_{\text{prev}} \leftarrow d$ 
14  if Aresta  $j$  de  $P_i$  pertence à  $T_i$  :
15     $d_{\text{next}} \leftarrow \text{Reflete}(d, v, v_{\text{next}})$  // reflexão de  $d$  em relação à aresta  $(v, v_{\text{next}})$ 
16  else
17     $d_{\text{next}} \leftarrow d$ 
18  // Armazena a região de vértice associada a  $v$  como o par  $(d_{\text{prev}}, d_{\text{next}})$ 
19  regiões.append( $(d_{\text{prev}}, d_{\text{next}})$ )
20 return regiões

```

2.3 Localizando Pontos na Partição

Gostaríamos de responder consultas do tipo $\text{Query}(p, i)$ de maneira eficiente. Para isso, precisamos ser capazes de localizar o ponto p na partição S_i de maneira eficiente, ou seja, determinar se p pertence a uma região de vértice, região de aresta ou região de atravessar e, em caso positivo, qual região.

Esse processo não é trivial, principalmente se desejamos fazer isso de maneira eficiente. Para tal, primeiro vamos considerar dois problemas mais simples: determinar se p pertence a uma região de vértice e determinar se p pertence a uma região de aresta.

2.3.1 Verificando Regiões de Vértice

Primeiramente vamos implementar um procedimento auxiliar 4 que verifica se um ponto p está em uma região de vértice associada a um vértice v delimitada por duas direções d_{prev} e d_{next} . Basicamente, temos dois casos, dependendo do ângulo entre as direções d_{prev} e d_{next} (considerando o sentido anti-horário):

- Ângulo $\leq 180^\circ$: Nesse caso, p deve estar à esquerda de d_{prev} e à direita de d_{next} .

- Ângulo $> 180^\circ$: Nesse caso, p deve estar à direita de d_{prev} ou à esquerda de d_{next} .

Podemos usar produtos vetoriais para determinar a posição relativa de p em relação às direções d_{prev} e d_{next} , assim como o ângulo entre essas direções. Usando essas ideias, implementamos o procedimento no algoritmo 4.

Algorithm 4: PontoEmVértice($p, v, d_{\text{prev}}, d_{\text{next}}$)

Verifica se o ponto p está na região de vértice associada ao vértice v delimitada pelas direções d_{prev} e d_{next}

```

1  $c_1 \leftarrow (d_{\text{prev}} \times (p - v) \geq 0)$ 
2  $c_2 \leftarrow (d_{\text{next}} \times (p - v) \leq 0)$ 
3 if  $d_{\text{prev}} \times d_{\text{next}} \geq 0$  :
4   return  $c_1 \wedge c_2$ 
5 else
6   return  $c_1 \vee c_2$ 

```

2.3.2 Verificando Regiões de Aresta

Uma vez que conseguimos verificar se um ponto pertence a uma região de vértice, podemos usar essa funcionalidade para verificar se um ponto pertence a uma região de aresta.

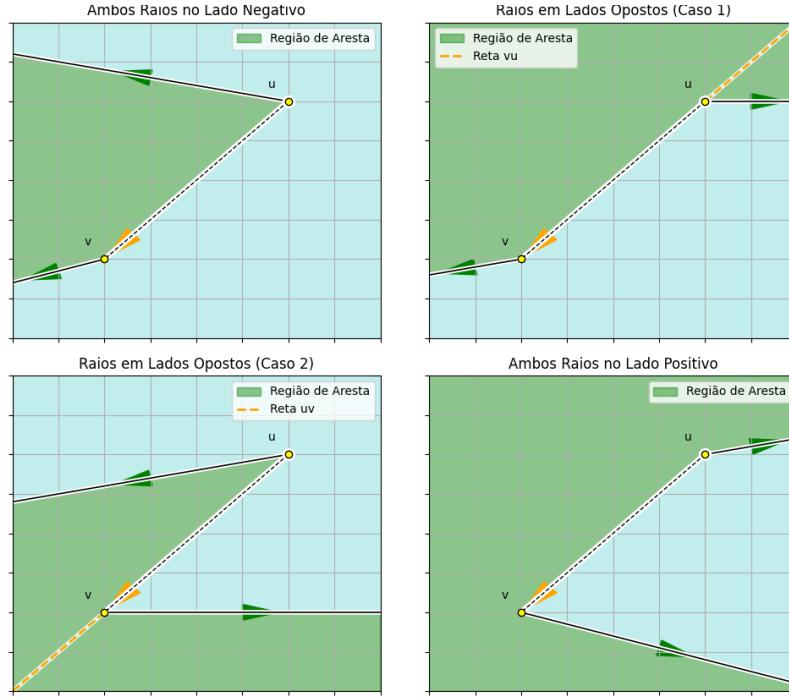


Figura 5: Casos possíveis para região de aresta.

SOS:

- $c_1 \leq 0 \wedge c_2 \leq 0$: Esse é o caso em que temos **ambas arestas no lado negativo**, que é o caso tradicional que aparece na partição S_i . Nesse caso, verificamos se p está entre as semi-retas e a aresta (u, v) usando produtos vetoriais.
- $c_1 \leq 0 \wedge c_2 \geq 0$: Esse é o caso em que temos **aresta anterior no lado negativo e aresta posterior no lado positivo**, o *Caso 1* na figura. Nesse caso, dividimos a região de aresta em duas regiões de vértice, definidas por $(u, d_{\text{prev}}, u - v)$ e $(v, u - v, d_{\text{next}})$, então verificamos se o ponto está em qualquer uma das duas.

Esse problema é mais complexo, uma vez que existem diferentes casos possíveis para uma região de aresta, dependendo do ângulo entre as direções d_{prev} e d_{next} . Esses casos não aparecem explicitamente na partição S_i , na verdade apenas o primeiro caso aparece. No entanto, vamos usar esses outros casos adicionais para otimizar a localização de pontos na partição posteriormente, permitindo complexidade $\log(|P_i|)$ para detecção.

Essencialmente existem 4 casos possíveis para uma região de aresta, dependendo do ângulo entre as direções d_{prev} e d_{next} . A Figura 5 ilustra esses casos. Para sabermos com qual caso estamos lidando, definimos $w = v - u$ e calculamos os produtos vetoriais $c_1 = w \times d_{\text{prev}}$ e $c_2 = w \times d_{\text{next}}$. Agora, temos os seguintes ca-

- $c_1 \leq 0 \wedge c_2 \leq 0$: Esse é o caso em que temos **aresta anterior no lado positivo e aresta posterior no lado negativo**, o *Caso 2* na figura. Nesse caso, dividimos a região de aresta em duas regiões de vértice, definidas por $(u, d_{\text{prev}}, v - u)$ e $(v, v - u, d_{\text{next}})$, então verificamos se o ponto está em qualquer uma das duas.
- $c_1 \leq 0 \wedge c_2 \leq 0$: Esse é o caso em que temos **ambas arestas no lado positivo**. Nesse caso, simplesmente verificamos se o ponto não pertence ao complemento da região, ou seja, verificamos se p não pertence à região de aresta definida por $(v, u, d_{\text{next}}, d_{\text{prev}})$.

Dessa forma, conseguimos verificar se um ponto pertence a uma região de aresta usando o procedimento de verificação de regiões de vértice. Agora podemos implementar o procedimento completo no algoritmo 5.

Algorithm 5: PontoEmAresta($p, u, v, d_{\text{prev}}, d_{\text{next}}$)

Verifica se o ponto p está na região de aresta associada à aresta $e = (u, v)$ delimitada pelas direções d_{prev} e d_{next}

```

1 // Se vértices são muito próximos, tratamos a região de aresta
2 // como uma região de vértice.
3 if  $|u - v| < 10^{-8}$  :
4   return PontoEmVértice( $p, v, d_{\text{next}}, d_{\text{prev}}$ )
5  $w \leftarrow v - u$ 
6  $c_1 \leftarrow d_{\text{prev}} \times w$ 
7  $c_2 \leftarrow w \times d_{\text{next}}$ 
8 if  $c_1 \leq 0 \wedge c_2 \leq 0$  :
9   return  $(d_{\text{prev}} \times (p - u) \geq 0) \wedge (d_{\text{next}} \times (p - u) \leq 0) \wedge ((v - u) \times (p - u) \leq 0)$ 
10 else if  $c_1 \leq 0 \wedge c_2 > 0$  :
11   return PontoEmVértice( $p, u, d_{\text{prev}}, u - v$ )  $\vee$  PontoEmVértice( $p, v, u - v, d_{\text{next}}$ )
12 else if  $c_1 > 0 \wedge c_2 \leq 0$  :
13   return PontoEmVértice( $p, u, d_{\text{prev}}, v - u$ )  $\vee$  PontoEmVértice( $p, v, v - u, d_{\text{next}}$ )
14 else
15   return  $\neg$  PontoEmAresta( $p, v, u, d_{\text{next}}, d_{\text{prev}}$ )

```

2.3.3 Localização Eficiente de Pontos na Partição

Agora que sabemos como verificar se um ponto pertence a uma região de vértice ou de aresta, podemos usar essas funcionalidades para localizar um ponto p na partição S_i . Uma abordagem ingênua seria iterar sobre todas as regiões de vértice e aresta, verificando se p pertence a alguma delas. Isso funcionaria, no entanto, essa abordagem tomaria tempo $O(|P_i|)$, o que é muito lento.

Por esse motivo, desejamos explorar a ideia de busca binária para resolver o problema. Primeiramente, vamos assumir que o ponto não pertence ao polígono P_i , isso vale como suposição inicial dos polígonos serem disjuntos e os pontos s e t estarem fora dos polígonos. Ainda assim, se desejássemos evitar essa suposição, poderíamos simplesmente verificar se o ponto está dentro do polígono P_i usando um teste de ponto em polígono antes de localizar o ponto na partição, o que leva tempo $O(\log(|P_i|))$.

Uma questão que diferencia nosso problema de uma busca binária tradicional é que as regiões são circulares. Assim, o primeiro passo é verificar se o ponto pertence à região entre o último e o primeiro vértice de P_i . Se sim, retornamos essa região. Caso contrário, reduzimos o problema para uma lista linear de regiões.

Outra diferença que precisamos considerar é que nossa entrada contém dois tipos de regiões: regiões de vértice e regiões de aresta. Para lidar com isso, podemos tratar regiões de vértice como regiões de aresta degeneradas, onde a aresta tem comprimento zero. Dessa forma, podemos aplicar o mesmo raciocínio para ambos os tipos de regiões, lidando com uma lista de $2|P_i| - 1$ regiões de aresta, uma vez que já eliminamos a última. Note que a implementação de PontoEmAresta já lida com esse caso especial.

Finalmente, podemos implementar a busca binária propriamente dita. A ideia é manter dois índices l e r que representam o intervalo atual de regiões que estamos considerando. Inicialmente, definimos $n = |P_i|$, $l = 0$ e $r = 2n - 1$. Nos baseamos na ideia de que apenas as regiões após l e antes de r podem conter o ponto p , ambos limites inclusivos.

Enquanto $l + 1 \neq r$, calculamos o índice médio $m = \lfloor (l + r)/2 \rfloor$ e verificamos se o ponto p pertence à região de aresta entre l e m . Se estiver, atualizamos $r = m$, caso contrário, atualizamos $l = m$, isso vale pois P_i é convexo e a região de aresta entre l e m cobre todas as regiões entre l e m e nenhuma região entre m e r .

Repetindo isso até que $l + 1 = r$, sabemos que o ponto p pertence à região de aresta entre l e r . Finalmente, retornamos essa região, vamos codificar essa região como um inteiro que representa o índice da região.

Essa codificação segue a seguinte lógica: regiões de vértice são representadas por índices pares, onde o índice $2j$ representa a região de vértice associada ao j -ésimo vértice de P_i . Regiões de aresta são representadas por índices ímpares, onde o índice $2j + 1$ representa a região de aresta entre o j -ésimo e o $(j + 1)$ -ésimo vértice de P_i . Note que a região entre o último e o primeiro vértice é representada pelo índice $2|P_i| - 1$.

Implementamos essa ideia no algoritmo 6, que recebe um ponto p e um polígono P_i e retorna o índice da região de S_i que contém p .

Algorithm 6: LocalizaRegião(p, P_i)

Localiza o ponto p na partição do polígono P_i

```

1 def getDireção( $i$ ):
2   if  $i \pmod 2 = 0$  :
3     return direção anterior associada ao vértice  $\lfloor i/2 \rfloor$  de  $P_i$ 
4   else
5     return direção anterior associada ao vértice  $\lfloor i/2 \rfloor$  de  $P_i$ 
6 def pertence( $i, j$ ):
7    $v_1 \leftarrow$  Vértice  $\lfloor i/2 \rfloor$  do polígono  $P_i$ 
8    $v_2 \leftarrow$  Vértice  $\lfloor j/2 \rfloor$  do polígono  $P_i$ 
9    $d_{\text{prev}} \leftarrow$  getDireção( $i$ )
10   $d_{\text{next}} \leftarrow$  getDireção( $j$ )
11  return PontoEmAresta( $p, v_1, v_2, d_{\text{prev}}, d_{\text{next}}$ )
12  $l \leftarrow 0$ 
13  $r \leftarrow 2|P| - 1$ 
14 if pertence( $r, 0$ ) :
15   return  $r$  // Ponto pertence à região entre o último e o primeiro vértice
16 while  $l + 1 \neq r$  do
17    $m \leftarrow \lfloor (l + r)/2 \rfloor$ 
18   if pertence( $l, m$ ) :
19      $r \leftarrow m$ 
20   else
21      $l \leftarrow m$ 
22 return  $l$  // Ponto pertence à região entre  $l$  e  $r$ 

```

2.4 Respondendo Consultas

Finalmente, podemos descrever como responder consultas do tipo $\text{Query}(p, i)$ usando as partições S_i que construímos anteriormente. O procedimento utilizado é recursivo, assim, primeiro definimos o caso base, que é $\text{Query}(p, 0) = s$, uma vez que um 0-path não precisa tocar em nenhum polígono, assim, o menor caminho é uma linha reta de s até p .

Para $i > 0$, primeiramente determinamos a região R de S_i que contém p . Uma vez que sabemos qual região contém p , podemos responder a consulta dependendo do tipo de região:

- Região de Vértice: Seja $R = (v, d_{\text{prev}}, d_{\text{next}})$. Nesse caso, o i -path até p deve passar pelo vértice v , tocando o polígono P_i . Assim, temos que $\text{Query}(p, i) = v$.
- Região de Aresta: Seja $R = (u, v, d_{\text{prev}}, d_{\text{next}})$. Nesse caso, o i -path até p deve passar por algum ponto q da aresta $e = (u, v)$, tocando o polígono P_i . Para calcular q , primeiro determinamos $q' = \text{Query}(p', i - 1)$, onde p' é a reflexão de p em relação à aresta e . Agora, dizemos que q é a interseção entre $q'p'$ e a aresta e . Finalmente, respondemos $\text{Query}(p, i) = q$.

- Região de Atravessa: Seja R a região de atravessa. Nesse caso, o i -path até p automaticamente atravessa o polígono P_i em algum ponto. Portanto, podemos simplesmente responder $\text{Query}(p, i) = \text{Query}(p, i - 1)$.

Para determinar o ponto de interseção entre o segmento $\overline{q'p'}$ e a aresta e , implementamos o procedimento 7, que calcula a interseção entre duas retas dadas por dois pontos e suas direções. A demonstração desse procedimento é simples e pode ser feita algebraicamente, mas não é o foco desse relatório. Também estamos assumindo que as retas não são paralelas, o que é garantido pela construção do algoritmo.

Agora podemos usar essas ideias para implementar o procedimento completo de resposta a consultas na forma do algoritmo 8.

Algorithm 7: InterseçãoRetas(s, d, s', d')

Calcula a interseção entre as retas definidas por pontos $s + td$ e $s' + t'd'$, onde $t, t' \in \mathbb{R}$

```

1 if  $s = s'$ 
2 return  $s$  // Caso base
3  $R \leftarrow \text{LocalizaRegião}(p, P_i)$ 
4  $j \leftarrow \lfloor R/2 \rfloor$ 
5
6 // Região de vértice
7 if  $R \pmod 2 = 0$  :
8   return Vértice  $j$  do polígono  $P_i[j]$ 
9
10 // Região de aresta
11 if Aresta  $j$  de  $P_i$  não pertence à  $T_i$  :
12   return  $\text{Query}(p, i - 1)$  // Região de atravessa
13
14 // Região de aresta
15  $u \leftarrow$  Vértice  $j$  de  $P_i$ 
16  $v \leftarrow$  Vértice que segue  $u$  em  $P_i$ 
17  $p' \leftarrow u + \text{RefleteDireção}((p - u), u, v)$ 
18  $q' \leftarrow \text{Query}(p', i - 1)$ 
19  $m \leftarrow \text{InterseçãoDeRetas}(p', q' - p', u, v - u)$ 
20 return  $m$  // Ponto de interseção

```

Algorithm 8: Query(p, i)

Responde a consulta $\text{Query}(p, i)$

```

1 if  $i = 0$  :
2   return  $s$  // Caso base
3    $R \leftarrow \text{LocalizaRegião}(p, P_i)$ 
4    $j \leftarrow \lfloor R/2 \rfloor$ 
5
6   // Região de vértice
7   if  $R \pmod 2 = 0$  :
8     return Vértice  $j$  do polígono  $P_i[j]$ 
9
10  // Região de atravesa
11  if Aresta  $j$  de  $P_i$  não pertence à  $T_i$  :
12    return  $\text{Query}(p, i - 1)$  // Região de atravesa
13
14  // Região de aresta
15   $u \leftarrow$  Vértice  $j$  de  $P_i$ 
16   $v \leftarrow$  Vértice que segue  $u$  em  $P_i$ 
17   $p' \leftarrow u + \text{RefleteDireção}((p - u), u, v)$ 
18   $q' \leftarrow \text{Query}(p', i - 1)$ 
19   $m \leftarrow \text{InterseçãoDeRetas}(p', q' - p', u, v - u)$ 
20  return  $m$  // Ponto de interseção

```

2.5 Calculando o Caminho Mínimo

Agora que sabemos como responder consultas do tipo $\text{Query}(p, i)$, calcular o caminho mínimo de s até t que toca todos os polígonos P_1, \dots, P_k é trivial.

Pela definição de Query, sabemos que o menor caminho que parte de s , toca todos os polígonos P_1, \dots, P_k e termina em t deve ter como penúltimo ponto $q_k = \text{Query}(t, k)$. Ademais, o caminho que toca os polígonos P_1, \dots, P_{k-1} e termina em q_k deve ter como penúltimo ponto $q_{k-1} = \text{Query}(q_k, k - 1)$. Repetindo esse raciocínio, chegamos até o ponto inicial s .

Usando essa lógica e juntando as implementações anteriores no algoritmo 9, podemos calcular o caminho mínimo de s até t que toca todos os polígonos P_1, \dots, P_k .

Algorithm 9: CaminhoMínimo(s, t, P_1, \dots, P_k)Calcula o caminho mínimo de s até t que toca todos os polígonos P_1, \dots, P_k

```

1 if  $k = 0$  :
2   return  $[s, t]$  // Caso base: caminho direto de  $s$  até  $t$ 
3 for  $i \leftarrow 1$  até  $k$  :
4    $T_i \leftarrow$  ArestasVisíveis( $P_i$ )
5    $S_i \leftarrow$  ConstróiRegiõesDeVértice( $P_i$ )
6   caminho  $\leftarrow []$  // Lista vazia para armazenar o caminho
7    $p \leftarrow t$  // Começamos do ponto final  $t$ 
8   for  $i \leftarrow k$  até 1 :
9      $q \leftarrow$  Query( $p, k$ ) // Penúltimo ponto do  $k$ -path até  $p$ 
10    // Verificamos se os pontos  $p$  e  $q$  são distintos devido à regiões de atravessar
11    if  $|q - p| > 10^{-8}$  :
12      caminho.append( $p$ ) // Adiciona  $p$  ao caminho
13       $p \leftarrow q$  // Atualiza  $p$  para o próximo ponto
14     $k \leftarrow k - 1$  // Decrementa  $k$ 
15   caminho.append( $s$ ) // Adiciona o ponto inicial  $s$ 
16   caminho.reverse() // Inverte a lista para obter o caminho correto
17 return caminho

```

2.6 Análise de Complexidade

Nessa seção, vamos analisar a complexidade do algoritmo completo. Primeiramente, a função LocalizaRegião leva tempo $O(\log(|P_i|))$ para localizar um ponto na partição S_i , uma vez que usa busca binária. Ademais, a função Query faz uma chamada recursiva para $i - 1$ em cada nível de recursão, resultando em i níveis de recursão. Assim, o tempo total para responder uma consulta Query(p, i) é $O(i \log(|P_i|))$.

- RefleteDireção(...): $O(1)$, pois faz um número constante de operações.
- PontoEmVértice(...): $O(1)$, pois faz um número constante de operações.
- PontoEmAresta(...): $O(1)$, pois faz um número constante de operações e chamadas para PontoEmVértice.
- LocalizaRegião(P_i, \dots): $O(\log|P_i|)$, pois usa busca binária em $2|P_i| - 1$ regiões.
- Query(i, \dots): Fazemos no máximo i chamadas recursivas, cada uma chama LocalizaRegião(P_i, \dots) uma vez. Assim, temos a complexidade:

$$O\left(\sum_{j=1}^i \log|P_j|\right)$$

- ArestasVisíveis(P_i, \dots): Chamamos Query para os $|P_i|$ vértices de P_i , assim, temos uma complexidade final de:

$$O\left(|P_i| \sum_{j=1}^i \log|P_j|\right)$$

- ConstróiRegiõesDeVértice(P_i, \dots): Chamamos Query para os $|P_i|$ vértices de P_i , assim, temos uma complexidade final de:

$$O\left(|P_i| \sum_{j=1}^i \log|P_j|\right)$$

- CaminhoMínimo: Chamamos ArestasVisíveis e ConstróiRegiõesDeVértice para cada polígono P_1, \dots, P_k e então calculamos o caminho final cuja complexidade é insignificante próximo do primeiro passo, então a complexidade final é:

$$O\left(\sum_{i=1}^k |P_i| \sum_{j=1}^i \log |P_j|\right)$$

Enquanto podemos dizer que determinamos a complexidade final do problema, gotaríamos de ter uma forma mais simples e de acordo com o artigo original. Assim, definimos $n = \sum_{i=1}^k |P_i|$ e note que:

$$\begin{aligned} O\left(\sum_{i=1}^k |P_i| \sum_{j=1}^i \log |P_j|\right) &= O\left(\sum_{i=1}^k |P_i| \sum_{j=1}^k \log |P_j|\right) \\ &= O\left(\left(\sum_{i=1}^k |P_i|\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^k \log |P_i|\right)\right) \\ &= O\left(n \sum_{i=1}^k \log |P_i|\right) \end{aligned}$$

Ademais, se fixarmos o valor de k , temos que o valor de $\sum_{i=1}^k \log |P_i|$ é máximo quando $|P_1| = \dots = |P_k| = n/k$. Dessa forma, concluimos que em um pior caso a complexidade é:

$$O(nk \log(n/k))$$

Dessa forma, nosso algoritmo está de acordo com o artigo original.

3 O Problema de Visita de Polígonos Geral

Vamos tomar como base a implementação do algoritmo de Dror et al. [1] para o problema restrito que fizemos em *Python*. O código pode ser encontrado no arquivo *TouringPolygons/problem2.py*.

3.1 Definições e Notação

O problema segue de forma similar ao anterior, mas agora também recebemos como entrada ‘cercas’ F_0, \dots, F_k tais que para todo $0 \leq i \leq k$ vale que o polígono P_i e P_{i+1} estão contidos em F_i , para tal, consideramos $P_0 = \{s\}$ e $P_{k+1} = \{t\}$. Nossa objetivo é encontrar o caminho de menor comprimento que se inicia em s , termina em t , toca cada polígono P_i em pelo menos um ponto e nunca sai da cerca F_i no seu caminho entre P_i e P_{i+1} .

Dizemos que um caminho π de a até b respeita as cercas F_i, \dots, F_j se π toca todos os polígonos P_{i+1}, \dots, P_j e para cada $i \leq l < j$, o trecho de π entre P_l e P_{l+1} está contido em F_l . Ademais, definimos um i -path até p como um caminho mínimo de s até p que respeita as cercas F_0, \dots, F_i . Note que nosso objetivo é encontrar um k -path até t .

A função central desse algoritmo continua sendo *Query*, no entanto, dessa vez vamos adicionar um novo parâmetro, assim, a função *Query*(p, i, j) recebe um ponto p e dois índices i e j e retorna o penúltimo ponto q do menor caminho até p que parte de s , toca todos os polígonos P_1, \dots, P_i e respeita as cercas F_0, \dots, F_j .

Primeiramente, é essencial que $i \leq j$, ademais, se $i = j$ então *Query*(p, i, j) é simplesmente o penúltimo ponto do i -path até p . Adicionamos o parâmetro j para o caso em que queremos um i -path, mas p está fora da cerca F_i um caso que aparece naturalmente na recursão do algoritmo. Por enquanto, vamos assumir que sabemos como responder as consultas.

3.2 Caminhos Restritos

Outra função extremamente importante para a implementação desse algoritmo é a função *Fenced*(p_1, p_2, i, j) que retorna o menor caminho de p_1 até p_2 que respeita as cercas F_i, \dots, F_j . Note que se $i = j$, então *Fenced*(p_1, p_2, i, j) é simplesmente o segmento $\overline{p_1 p_2}$ se ele estiver contido em F_i e não existe caso contrário. Assim, vamos assumir que $i < j$.

A Notações

1. $v = (v_1, v_2), v \in \mathbb{R}^2$. Vektors são representados como tuplas de coordenadas.
2. $|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$. Norma Euclidiana de um vetor.
3. $\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$. Produto interno definido como produto escalar de vetores.
4. $u \times v = u_1 v_2 - u_2 v_1$. Produto vetorial definido como determinante 2D, retornando um escalar. Essa definição tem a seguinte propriedade:

$$\text{sign}(u \times v) = \begin{cases} +1, & \text{se ângulo no sentido anti-horário entre } u \text{ e } v \text{ é menor que } 180^\circ \\ -1, & \text{se ângulo no sentido horário entre } u \text{ e } v \text{ é menor que } 180^\circ \\ 0, & \text{se } u \text{ e } v \text{ são colineares} \end{cases}$$

Pode-se interpretar $u \times v$ como a área do paralelogramo formado por u e v , onde o sinal indica a orientação.

5. Dizemos que um ponto p está do **lado esquerdo** de uma direção d se $d \times p \geq 0$ e do **lado direito** se $d \times p \leq 0$.
6. \overrightarrow{uv} : Segmento de reta entre os pontos u e v .
7. $\overrightarrow{uv} = v - u$. Vetor direcionado do ponto u até o ponto v .
8. $|P|$. Se P é um polígono, então $|P|$ é o número de vértices de P .

Referências

- [1] M. Dror, A. Efrat, A. Lubiwi e J. S. B. Mitchell, “Touring a sequence of polygons,” em *Proceedings of the Thirty-Fifth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, sér. STOC ’03, San Diego, CA, USA: Association for Computing Machinery, 2003, pp. 473–482, ISBN: 1581136749. DOI: 10.1145/780542.780612. endereço: <https://doi.org/10.1145/780542.780612>.