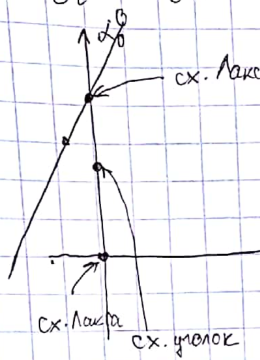
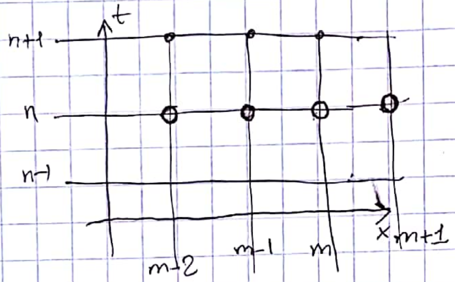
Лекция №3 Понятие монотонности разностных схем.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad \sigma = \frac{\lambda \tau}{h}$$



$$(*)\ u_m^{n+1} = \sum_{\mu,\nu} \alpha_\mu^\nu u_{m-\mu}^{n+\nu} \qquad \alpha_\mu^\nu = \alpha_\mu^\nu(\sigma)$$



Опр. Монотонность по Фридрихсу (мажорантная): Все $\alpha_\mu^\nu \geq 0$ в (*)

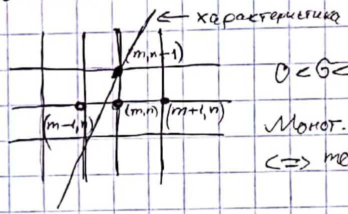
Опр. Монотонность по Годунову. Если $\forall m$ $u_{m+1}^n - u_m^n \geq 0 \Rightarrow u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1} \geq 0$ $\forall m$

(т.е. сохраняется характер монотонности профиля) или наоборот:

Если $\forall m$ $u_{m+1}^n - u_m^n \leq 0$ $\forall m \Rightarrow u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1} \leq 0$.

Опр. Монотонность по Ван Лиру. Bram van Leer

(Сеточно-характеристический крит. монотонности)



$0 < \sigma < 1$

Монот. по В.Л. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \max\{u_m^n, u_{m-1}^n\} \geq u_m^{n} \geq \min\{u_m^n, u_{m-1}^n\}$

Опр. Монотонность по Хартену или TVD = Total Variation Diminishing

$$TV(u_m^n) = \sum_m |u_{m+1}^n - u_m^n|$$

$$TV(u_m^{n+1}) \leq TV(u_m^n) \quad \forall m$$

Покажем, что в линейном случае монотонность по Фридрихсу и Годунову – это одно и то же.

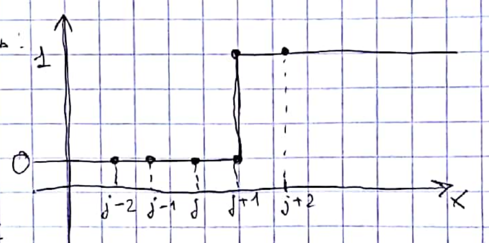
$\boxed{\Phi \Rightarrow \Gamma}$ Для явных двухслойных схем ($\nu = 0$)

$$u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1} = \sum_{\mu,\nu} \alpha_\mu^\nu u_{m+\mu+1}^{n+\nu} - \sum_{\mu,\nu} \alpha_\mu^\nu u_{m+\mu}^{n+\nu} = \sum_{\mu,\nu} \underbrace{\alpha_\mu^\nu}_{\geq 0} \underbrace{(u_{m+\mu+1}^{n+\nu} - u_{m+\mu}^{n+\nu})}_{\geq 0} \geq 0$$

$\boxed{\Gamma \Rightarrow \Phi}$ Рассмотрим наш шаблон и схему ~~такую~~ на нем и пусть $\alpha_0^0 < 0$

Рассмотрим следующий профиль:

$u_{j+1}^n - u_j^n \geq 0$ – верно



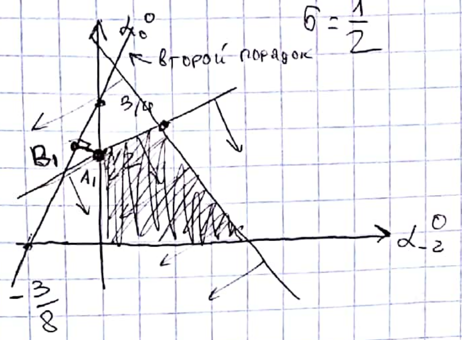
$$u_{j+1}^{n+1} = \alpha_{-2}^0 u_j^n + \alpha_{-1}^0 u_{j+1}^n + \alpha_0^0 u_{j+1}^n + \alpha_1^0 u_{j+1}^n = \boxed{\text{для данного профиля}} =$$

$$= \alpha_0^0 + \alpha_1^0$$

Аналогично: $u_j^{n+1} = u_{j-2}^n \alpha_{-2}^0 + u_{j-1}^n \alpha_{-1}^0 + u_j^n \alpha_0^0 + u_{j+1}^n \alpha_1^0 = \alpha_1^0$

$\Rightarrow u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1} = \alpha_0^0 \geq 0$

Повторим:



$$\begin{cases} \alpha_{-2}^0 + \alpha_{-1}^0 + \alpha_0^0 + \alpha_1^0 = 1 \\ 2\alpha_{-2}^0 + \alpha_{-1}^0 - \alpha_1^0 = \sigma \\ 4\alpha_{-2}^0 + \alpha_{-1}^0 + \alpha_1^0 = \sigma^2 \\ 8\alpha_{-2}^0 + \alpha_{-1}^0 - \alpha_1^0 = \sigma^3 \end{cases}$$

$\alpha_1^0 = \frac{1}{2}(1 - \sigma - \alpha_{-2}^0 + \alpha_0^0) \geq 0$

$\alpha_{-1}^0 = \frac{1}{2}(1 - \alpha_0^0 + \sigma - 3\alpha_{-2}^0) \geq 0$

/// – обл. монот.

$\boxed{\text{Th. Годунова}}$ Не сущ. линейных монотонных схем с пор. апрокс. выше первого

Идея: чем ближе находятся друг к другу точки в евкл. метрике, тем более схожи свойства схем, которые им соответствуют.

Поэтому A_1 – наилучшая монот. схема, наиболее приближ. к схемам 2 порядка.

Также можно взять схему (B_1) 2 порядка, макс. приближ. к области монотонности

Теперь затронем вопрос устойчивости.

Построим множество устойчивых схем.

Пользуемся спектральным признаком Неймана: в разн. ур. подст. $u_m^n = q^n e^{im\varphi}$

$\varphi = kh, \ -\infty \leq \varphi \leq \infty$

(в линейном случае устойчивость $\Leftarrow\Rightarrow$ монотонности)

$$q = \sum_{\mu,\nu} q^\nu e^{i\mu\varphi}$$

$$q = q(\alpha_\mu^\nu(\sigma), \varphi)$$

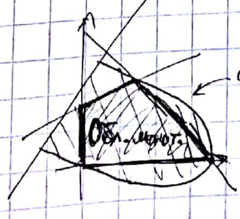
Усл. устойчивости: $|q| \leq 1 \ \forall \varphi$

Рассмотрим однопарам. семейство:

$$f(\varphi) = |q(\alpha_\mu^\nu(\sigma), \varphi)| - 1 = 0$$

При $\forall$ знач. φ будет замкнутый контур на пл-ти. (граница обл. устойчивости)

Нужно построить огибающую всех поверхн.



Выходит, что область уст. полностью включает в себя область монотонности.