Нелинейные вычисл. процессы. Семинар 1. 9.02.17

100 баллов: - лаба × 3 по 25 баллов

- кр 25 баллов.

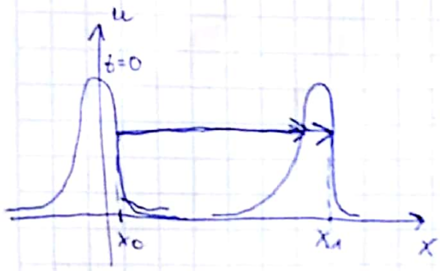
Семинар 1. Разностные схемы для решения ур-я Переноса

① Задача Коши для ур-я переноса:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \quad \text{– задача Коши}$$

$t>0$, $\lambda = const > 0$

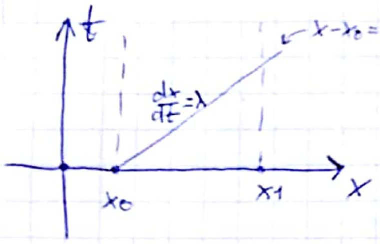
1) Задача имеет точное аналит. реш-е $u_{точн}(x) = u_0(x-\lambda t)$ - перенос (движе.) исходн. профиля.



$\Delta x = x_1 - x_0 = \lambda(t-0)$

2) Решение постоянно вдоль (при) $x - \lambda t = const$

Вдоль характ. $\frac{dx}{dt} = \lambda$ (вдоль прямой)



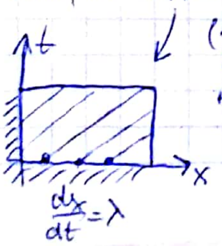
$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \left(\text{вдоль хар.}\ \frac{dx}{dt}=\lambda\right) = \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda\frac{\partial u}{\partial x} =$$

② Краевая задача для ур-я Переноса.

Модельн. задача гиперб. типа:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad 0 \le t \le T, \quad 0 \le x \le 1, \quad \lambda = const > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u(0,t) = \psi(t) \end{cases}$$

$\lambda > 0$, то корректн. постан. гр. усл.



(чтобы заполнить весь прямоугольник, нужно задать на левой границе)

Схема Уголок (КИР)

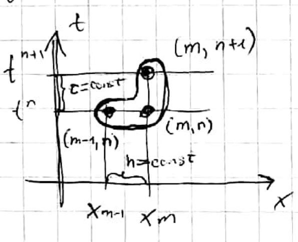
Вопрос численного реш. модельн. ур-я.

Простейш. вариант: – схема левый уголок

$$\boxed{\frac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau} + \lambda\frac{u_m^n-u_{m-1}^n}{h} = 0} \quad (*)$$

упорядоч. совок. узлов, задаюв. разностной (численной) схемы.

Нарисуем шаблон числ. схемы



$u \longrightarrow u_m^n$ – сеточн. ф-я.
$=?$

порядок аппрокс. (*) : $O(\tau, h)$

Иссл. на сход.

Спектральный признак Неймана:

основ. на общеизв. факте.

Все линейные однородные разностные ур-я с постоянными к-ми имеют универсальное полное семейство частных решений:

$$u^n = C\rho^n e^{im\varphi}$$ ← φ-пар. семейство частн. реш. $\forall\varphi$

степень

C – семейство

амплит.

Подставим $u_m^n = C\rho^n e^{im\varphi}$ в (*)

и отыщем ограничения на λ, τ, h

при которых $\left|\frac{\rho^{n+1}}{\rho^n}\right| = |\rho(\lambda,\tau,h)| \le 1 \quad \forall\varphi$

усл-е огр-ти амплитуды гармоники

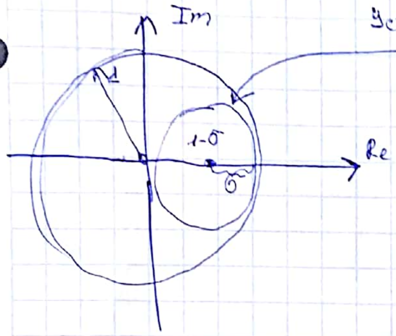
$$\frac{C\rho^{n+1}e^{im\varphi}-C\rho^n e^{im\varphi}}{\tau} + \lambda\frac{C\rho^n e^{im\varphi}-C\rho^n e^{i(m-1)\varphi}}{h} = 0 \;\Big|\; : C\rho^n e^{im\varphi}$$

$$\frac{\rho-1}{\tau} + \lambda\frac{1-e^{-i\varphi}}{h} = 0$$

$$\rho = 1 - \frac{\lambda\tau}{h}\left(1-e^{-i\varphi}\right)$$

σ – число Куранта

$$\rho(\lambda,\tau,h) = \rho(\sigma) = 1-\sigma\left(1-e^{-i\varphi}\right) = 1-\sigma+\sigma e^{-i\varphi} = 1-\sigma+\sigma e^{-i\varphi}$$ – ур-е огр.



Устойчивость, если эта окр. внутри ед. круга

это верно при $\sigma \in [0,1]$

$$|\rho| = |1-\sigma+\sigma e^{-i\varphi}| \le 1$$

$$\Updownarrow$$

$$|1-\sigma+\sigma\cos\varphi - i\,\sigma\sin\varphi| \le 1$$

$$\Updownarrow$$

$$|abs|^2 \le 1$$

$$\Updownarrow$$

$$(1-\sigma+\sigma\cos\varphi)^2 + \sigma^2\sin^2\varphi \le 1$$

$$(1-\sigma)^2 + 2(1-\sigma)\sigma\cos\varphi + \underbrace{\sigma^2\cos^2\varphi + \sigma^2\sin^2\varphi}_{\sigma^2} \le 1$$

$$\cancel{1} - 2\sigma + 2\sigma^2 + 2(1-\sigma)\sigma\cos\varphi \le \cancel{1}$$

$$\underbrace{-2\sigma(1-\sigma)}\ + \underbrace{2\sigma(1-\sigma)}\cos\varphi \le 0$$

$$-2\sigma(1-\sigma)\underbrace{(1-\cos\varphi)}_{2\sin^2\frac{\varphi}{2}} \le 0$$

$$-4\sigma(1-\sigma)\cdot\sin^2\frac{\varphi}{2} \le 0$$

$$-(1-\sigma) \le 0$$

$$1-\sigma \ge 0$$

$$0 \le \sigma \le 1$$

$$|\rho(\sigma)| \le 1$$

Схема устойчива, если хар-ка проходит между узлами $(m-1,n)$ и (m,n)

$$u_m^{n+1} = (1-\sigma)u_m^n + \sigma u_{m-1}^n$$

u_* ‖ $u_m^{n+1} = u_*$ – интерполяция по 2 точкам $(x_m, t^n), (x_{m-1}, t^n)$

3) Случай $\lambda < 0$

пост. з-чи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \lambda\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 & T \ge t > 0,\quad 0 \le x \le 1,\quad \lambda = const < 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), & \\ u(1,t) = \psi(t) & \end{cases}$$

Нетрудно показать, что схема левый уголок в случае $\lambda < 0$ будет неустойчивой

вместо нее необходимо вычислять правый уголок:

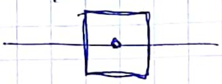
$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \lambda\frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = 0$$

Выпишем схему, учит. 2 случая:

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \sigma\left(u_m^n - u_{m-1}^n\right), \quad \lambda \geq 0$$

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \sigma\left(u_{m+1}^n - u_m^n\right), \quad \lambda \leq 0$$

Потоковая форма: → конечно-объемн. идеология в многом. случае



$$u_m^{n+1} = u_m^n - \frac{\tau}{h}\left(f^n_{m+\frac{1}{2}} - f^n_{m-\frac{1}{2}}\right), \text{ где}$$

$$u_m^{n+1} = u_m^n + f_{\text{втекает}} - f_{\text{вытекает}}$$

$$f^n_{m+1/2} = \frac{1}{2}\left(\lambda\left(u^n_{m+1} + u^n_m\right) - |\lambda|\left(u^n_{m+1} - u^n_m\right)\right)$$

$$f^n_{m-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\lambda\left(u^n_m + u^n_{m-1}\right) - |\lambda|\left(u^n_m - u^n_{m-1}\right)\right)$$

Любая из схем (схема Куранта – Изаксона – Риса)

Есть еще одна форма записи схемы КИР

$$\underbrace{u_m^{n+1} = u_m^n - \frac{\sigma}{2}\left(u^n_{m+1} - u^n_{m-1}\right)}_{\text{схема } O(\tau, h^2) \text{, но она неустойчива}} + \frac{|\sigma|}{2}\left(u^n_{m+1} - 2u^n_m + u^n_{m-1}\right)$$

Второе слагаемое придаёт устойчивость численной схеме

4) Другие схемы для реш. ур-я переноса:

Шаблон

Сх. Лакса: $\frac{u_m^{n+1} - \frac{1}{2}\left(u^n_{m+1} + u^n_{m-1}\right)}{\tau} + \lambda \frac{u^n_{m+1} - u^n_{m-1}}{2h} = 0$

$= L_{\tau, h} u^{\tau, h}$

Исследование на аппрокс.:

Ошибка аппр. разностн. опер. соотв. решаемому непр. дифф. ур-ю (дифф. опер.)

проекция точного реш-я на сетку; правая часть

Ош. аппр.: $\delta r = L_{\tau, h}[u]^{\tau, h} - F_{\tau, h} =$

разностн. опер. ДУ

$$= \frac{1}{\tau}\left[u(x_m, t^{n+1}) - \frac{1}{2}\left(u(x_{m+1}, t^n) + u(x_{m-1}, t^n)\right)\right] + \frac{\lambda}{2h}\left(u(x_{m+1}, t^n) - u(x_{m-1}, t^n)\right)$$