Уткин Павел Сергеевич
pavel_utk@mail.ru

fastproclab.16mb.com → Education

управл. → НВП

Нелинейные вычисл. процессы

Лекция 1

Система уравнений гипербол. типа. Простейшие схемы для решения ур-я переноса.

Рассмотрим систему первого порядка:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + A(x,t,\vec{v})\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = \vec{f}(x,t,\vec{v})$$

$$\vec{v} = \{v_1, v_2, \dots, v_I\}^T \qquad \vec{f} = \{f_1, f_2, \dots, f_I\}^T$$

$$A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{I}$$

Если $a_{ij} = const$, $f_i = const$, то задача линейная.

Пусть матрица A обладает следующими свойствами:

1) все собств. числа матрицы A – вещественные

$$|A - \lambda \underbrace{E}_{\text{ед. матр.}}| = P_I(\lambda) = 0 \qquad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_I$$

2) существует базис из собственных векторов матрицы A.

Пусть $\vec{\omega_i} = \{\omega_{i1}, \omega_{i2}, \dots, \omega_{iI}\}$ – ~~т~~ левый СВ, соотв. λ_i

$$\vec{\omega_i}(A - \lambda_i E) = 0$$

$$\Omega = \{\vec{\omega_1}, \vec{\omega_2}, \dots, \vec{\omega_I}\}^T = \Omega_L \quad \text{матр. левых СВ} \qquad |\Omega| \neq 0 \quad \text{опр. не 0.}$$

Тогда система уравнений имеет гиперболический тип.

Некоторые особенности системы уравнений гиперб. типа:

- конечная скорость распространения слабых возмущений
- возможность существования разрывных решений даже при гладких нач. данных.

Из курса линала известно, что можно представить A в виде:

$$A = \underbrace{\Omega^{-1}}_{\text{матр. левых СВ}} \Lambda \underbrace{\Omega}_{\text{матр. правых СВ}} = \Omega_R \Lambda \Omega_L \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 \ddots & \\ 0 & & \lambda_I \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \Omega_R \Lambda \Omega_L \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = \vec{f} \qquad (\Omega_R = \Omega_L^{-1})$$

$$\Omega_L \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \Lambda \Omega_L \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = \Omega_L \vec{f} \quad (*)$$

Scanned by CamScanner

$(a_{ij}=const \Rightarrow \Omega=const)$

Пусть система линейна, тогда: $\frac{\partial}{\partial t}(\Omega_L \vec{v}) + \Lambda \frac{\partial}{\partial x}(\Omega_L \vec{v}) = \Omega_L \vec{F}$

Делаем замену переменных $\vec{u} = \Omega_L \vec{v}$, $\vec{\varphi} = \Omega_L \vec{F}$

$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \vec{\varphi}$ – совокупность независимых линейных скалярных уравнений переноса

$$\boxed{\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = \varphi_i, \quad i=\overline{1,I}}$$

$u_i = (\Omega_L \vec{v})_i$ – инварианты Римана

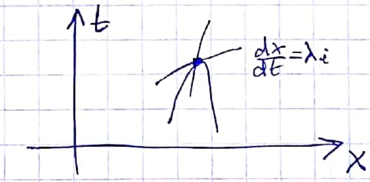
Теперь рассмотрим нелинейный случай

Распишем (*) покомпонентно:

$$\vec{\omega}_i \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \lambda_i \vec{\omega}_i \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} - \vec{\omega}_i \vec{f} = \underbrace{\vec{\omega}_i \left[\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_i - \vec{f}\right] = 0}_{\text{ур-е совместности вдоль характеристики}} \quad i=\overline{1,I}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt}\right)_i = \frac{\partial}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial}{\partial x} \\ dx = \lambda_i dt \quad \text{– уравнение характеристики} \end{cases}$$

Характ. направление – это направление, вдоль которого решение остаётся неизменным



---

② Простейшие схемы для решения уравнения переноса. (линейное, скалярное, однородное)

Задача Коши:

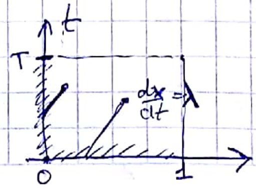
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

$t>0, \ \lambda = const > 0$

$u_{точное}(x,t) = u_0(x-\lambda t)$

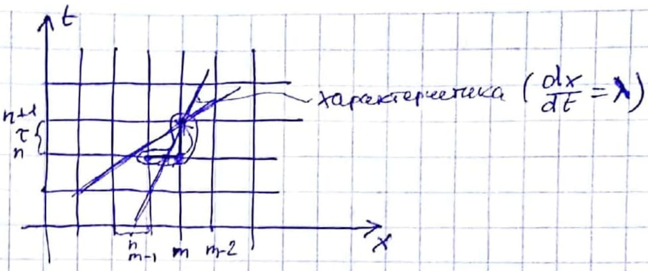
v Нормальная постановка начально-краевой задачи.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & t>0, \ 0<x<1 \\ u(0,x) = \varphi(x), & \lambda = const > 0 \end{cases}$$



Scanned by CamScanner

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

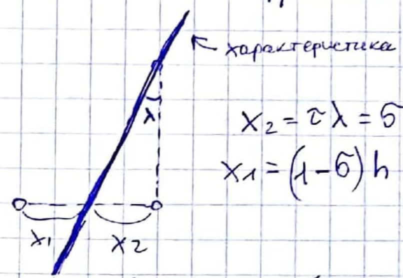


V „схема уголок"

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \lambda \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = 0$$

Порядок аппроксимации $O(\tau, h)$

$$u_m^{n+1} = u_m^n(1-\sigma) + \sigma u_{m-1}^n, \text{ где } \sigma = \frac{\lambda \tau}{h} \text{ – число Куранта}$$



$x_2 = \tau\lambda = \sigma h$

$x_1 = (1-\sigma)h$

Условие устойчивости схемы уголок (спектральный признак Фон-Неймана):

Ищем решение в виде гармоники:

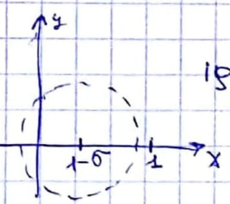
$$u_m^n = C\rho^n e^{im\varphi}$$

Ищем ограничения на τ, h, λ при кот. $\forall\varphi\ |\rho| \le 1$ (в этом случае схема будет устойчивой)

Подставляем: $$\frac{C\rho^{n+1}e^{im\varphi} - C\rho^n e^{im\varphi}}{\tau} + \lambda \frac{C\rho^n e^{im\varphi} - C\rho^n e^{i(m-1)\varphi}}{h} = 0$$

$$\frac{\rho e^{i\varphi} - e^{i\varphi}}{\tau} + \frac{\lambda}{h}(e^{-i\varphi} - 1) = 0$$

$$\rho = 1 + (e^{-i\varphi} - 1)\sigma = (1-\sigma) + \sigma e^{-i\varphi}$$ – круг радиуса σ с центром в точке $1-\sigma$ на действ. оси



$|\rho| \le 1$ при $0 \le \sigma \le 1$

V Построим другие схемы

$$\underset{O(\tau)}{\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau}} + \lambda \underset{O(h^2)}{\frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h}} = 0$$ ← схема с центр. разностью

Она абсолютно неустойчива !!

$$\frac{u_m^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{m-1}^n + u_{m+1}^n)}{\tau} + \lambda \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = 0$$ ← схема Лакса

Исследуем её на аппроксимацию.

Расп. в ряд Тейлора:

$$\begin{cases} u(x_m, t^{n+1}) = u + u_t\tau + u_{tt}\frac{\tau^2}{2} + O(\tau^3) \\ u(x_m - h, t^n) = u - u_x h + u_{xx}\frac{h^2}{2} + O(h^3) \\ u(x_m + h, t^n) = u + u_x h + u_{xx}\frac{h^2}{2} + O(h^3) \end{cases}$$

Погрешность аппроксимации:

$$\frac{\cancel{u} + u_t\tau + u_{tt}\frac{\tau^2}{2} + O(\tau^3) - \cancel{u} - u_{xx}\frac{h^2}{2} + O(h^3)}{\tau} +$$

$$\lambda\frac{hu_x + O(h^3)}{h} = u_t + u_{tt}\frac{\tau}{2} + O(\tau^2) - u_{xx}\frac{h^2}{2\tau} + O\left(\frac{h^3}{\tau}\right) + \lambda u_x + O(h^2)$$

Scanned by CamScanner

т.к. u - решение, то $u_t + \lambda u_x = 0$, ~~и~~ можем переписать:

$$u_{tt} \frac{\tau}{2} + O(\tau^2) - u_{xx} \frac{h^2}{2\tau} + O\left(\frac{h^3}{\tau}\right) + O(h^2) = O\left(\tau, h^2, \frac{h^2}{\tau}\right)$$

Если $\frac{h}{\tau} = const.$, т.е. h и τ одного порядка малости, то $O(h, \tau)$

Если же $\frac{h^2}{\tau} = const$, то выписанная схема аппроксимирует другую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Построим пример схемы с условной аппроксимацией