16.02.18

Лекция 2. НВП

Построение схем в пр-ве неопр. коэффициентов

Напоминание:

1) $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + A(\vec{v}, t, x)\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = \vec{F}(\vec{v}, t, x)$

$A = \Omega_R \Lambda \Omega_L$

2) $u_t + \lambda u_x = 0$ → схема "левый уголок": $\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \lambda\frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = 0$

схема „Лакса": $\frac{u_m^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{m-1}^n + u_{m+1}^n)}{\tau} + \lambda\frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = 0$ $\Big\}\ O(\tau, h)$

Обобщение схемы „уголок" — схема Куранта-Изаксона-Риса

Построим схему $O(\tau^2, h^2)$

Рассмотрим неустойчивую схему центральной разности:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \lambda\frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{h} = 0$$

Исследуем на аппрокс.:

$$u(x_m, t^{n+1}) = u + \tau u_t + \frac{\tau^2}{2}u_{tt} + O(\tau^3)$$
$$u(x_m - h, t^n) = u - hu_x + \frac{h^2}{2}u_{xx} + O(h^3)$$
$$u(x_m + h, t^n) = u + hu_x + \frac{h^2}{2}u_{xx} + O(h^3)$$

Подставляем разложения в схему:

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{погр.}\\ \text{аппрокс.}}}{\psi_h} = \frac{\cancel{u} + \tau u_t + \frac{\tau^2}{2}u_{tt} + O(\tau^3) - \cancel{u}}{\tau} + \lambda\frac{\cancel{u} - hu_x + \cancel{\frac{h^2}{2}u_{xx}} - \cancel{u} - hu_x - \cancel{\frac{h^2}{2}u_{xx}} + O(h^3)}{2h} =$$

$$= \underbrace{u_t} + \frac{\tau}{2}u_{tt} + O(\tau^2) + \underbrace{\lambda u_x} + O(h^2) = \underbrace{\frac{\tau}{2}u_{tt}}_{\text{главный член погрешности аппроксимации}} + O(h^2) + O(\tau^2) = \frac{\tau\lambda^2}{2}u_{xx} + O(h^2) + O(\tau^2)$$

Рассмотр. $u_t + \lambda u_x = 0$

Следствие $\left.\begin{matrix} u_{tt} + \lambda u_{xt} = 0 \\ u_{tx} + \lambda u_{xx} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow u_{tt} = \lambda^2 u_{xx}$

Построим новую схему:

$$\underbrace{\underbrace{\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \lambda\frac{u_{m+1}^n + u_{m-1}^n}{2h}}_{\text{неуст. схема с ц.р.}} - \frac{\tau\lambda^2}{2}\frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} = 0}_{\text{схема Лакса-Вендроффа}} \rightarrow O(\tau^2, h^2)$$

Теперь выразим u_m^{n+1} через всё остальное.

Схема „левый уголок": $\dfrac{u_m^{n+1}-u_m^n}{\tau} + \lambda\dfrac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = 0$

$\sigma = \dfrac{\lambda\tau}{h}$ – число Куранта (главная характ. уст. схемы)

$$u_m^{n+1} - u_m^n + \sigma(u_m^n - u_{m-1}^n) = 0$$

$$u_m^{n+1} = u_m^n(1-\sigma) + \sigma u_{m-1}^n = \alpha_0^0 u_m^n + \alpha_{-1}^0 u_{m-1}^n$$

$\alpha_0^0 = 1-\sigma$ – нулевой сдвиг по t и x

$\alpha_{-1}^0 = \sigma$ – ~~нулевой~~ нулевой сдвиг по t, сдвиг влево по x

$\Sigma = 1$

Схема Лакса:

$$u_m^{n+1} - \frac12\left(u_{m-1}^n + u_{m+1}^n\right) + \frac{\sigma}{2}\left(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n\right) = 0$$

$$u_m^{n+1} = u_{m-1}^n\left(\frac12 + \frac{\sigma}{2}\right) + u_{m+1}^n\left(\frac12 - \frac{\sigma}{2}\right) :$$

$\alpha_0^0 = 0$

$\alpha_{-1}^0 = \dfrac{1+\sigma}{2}$

$\alpha_{+1}^0 = \dfrac{1-\sigma}{2}$

$\Sigma = 1$

Схема Лакса-Вендрофа

$$u_m^{n+1} - u_m^n + \frac{\sigma}{2}\left(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n\right) - \frac{\sigma^2}{2}\left(u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n\right) = 0$$

$$u_m^{n+1} = u_{m-1}^n\left(\frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma^2}{2}\right) + u_m^n(1-\sigma^2) + u_{m+1}^n\left(-\frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$\alpha_0^0 = 1-\sigma^2$

$\alpha_{-1}^0 = \dfrac{\sigma(\sigma+1)}{2}$

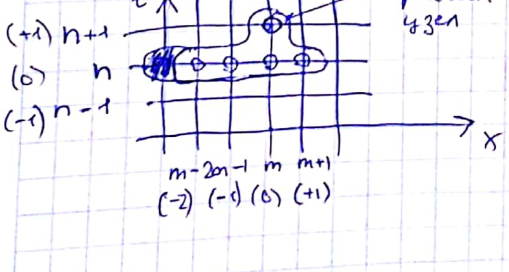
$\alpha_1^0 = \dfrac{\sigma(\sigma-1)}{2}$

$\Sigma = 1$

Далее рассмотрим общий сеточный шаблон.

Будем рассматривать схемы вида

$$\boxed{(*)\quad u_m^{n+1} = \sum_{\mu,\nu} \alpha_\mu^\nu(\sigma)\cdot u_{m+\mu}^{n+\nu}},$$ коэфф. пробегают все знач. на шаблоне (кроме $\begin{pmatrix}\nu=1\\ \mu=0\end{pmatrix}$)



Пятиточечный двуслойный шаблон.

$$u(x_m-2h, t^n) = u + u_x(-2h) + \frac{4h^2}{2}u_{xx} - \frac{8h^3}{6}u_{xxx} + O(h^4)$$

$$u(x_m-h, t) = u - hu_x + \frac{h^2}{2}u_{xx} - \frac{h^3}{6}u_{xxx} + O(h^4)$$

$$u(x_m+h, t) = u + hu_x + \frac{h^2}{2}u_{xx} + \frac{h^3}{6}u_{xxx} + O(h^4)$$

$$u(x_m, t^n+\tau) = u + \tau u + \frac{\tau^2}{2}u_{tt} + \frac{\tau^3}{6}u_{ttt} + O(\tau^4)$$

Подст. в $(*)$

$$u + \tau u_t + \frac{\tau^2}{2}u_{tt} + \frac{\tau^3}{6}u_{tt} + O(\tau^4) = \alpha_{-2}^0\left(u - 2hu_x + 2h^2u_{xx} - \frac43 h^3 u_{xxx}\right) + \alpha_{-1}^0\left(u - hu_x + \frac{h^2}{2}u_{xx} - \frac{h^3}{6}u_{xxx}\right) +$$

$$+\alpha_0^0 (u) +$$
$$+\alpha_1^0 \left(u + h u_x + \frac{h^2}{2} u_{xx} + \frac{h^3}{6} u_{xxx} \right) + O(h^4)$$

$u_t + \lambda u_x = 0$

$$u_t + u_x \left(2\alpha_{-2}^0 + \alpha_{-1}^0 - \alpha_1^0 \right) \frac{h}{\tau} = u \left(-1 + \alpha_{-2}^0 + \alpha_{-1}^0 + \alpha_0^0 + \alpha_1^0 \right) \frac{1}{\tau} +$$
$$+ u_{xx} \left(-\frac{\lambda^2 \tau^2}{2} + \alpha_{-2}^0 \cdot 2h^2 + \alpha_{-1}^0 \cdot \frac{h^2}{2} + \alpha_1^0 \frac{h^2}{2} \right) \frac{1}{\tau} +$$
$$+ u_{xxx} \left(\frac{\lambda^3 \tau^3}{6} - \alpha_{-2}^0 \cdot \frac{4}{3} h^3 - \alpha_{-1}^0 \cdot \frac{h^3}{6} + \alpha_1^0 \cdot \frac{h^3}{6} \right) + O\left(\tau^3, \frac{h^4}{\tau}\right)$$

Знаем, что $u_{tt} = \lambda^2 u_{xx}$

$u_{ttt} = \lambda^2 u_{xxt} = -\lambda^3 u_{xxx}$

Аппрокс. исх. ур-е:
$$\begin{cases} 2\alpha_{-2}^0 + \alpha_{-1}^0 - \alpha_1^0 = \dfrac{\lambda \tau}{h} = \sigma \\ \alpha_{-2}^0 + \alpha_{-1}^0 + \alpha_0^0 + \alpha_1^0 = 1 \end{cases}$$
← условие аппрокс. 1-го порядка (Считаем, что $\sigma = const \Rightarrow h$ и τ имеют один порядок малости)

двух-парам. семейство

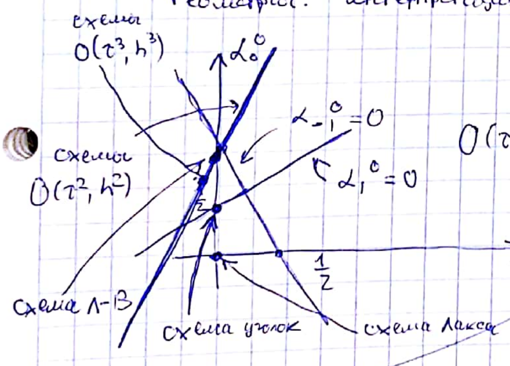
Например: Схема „уголок": $\alpha_{-1}^0 = \sigma$, $\alpha_0^0 = 1 - \sigma$

Аналогично схема Лакса.

Если хотим схему большего порядка аппроксимации

$$\begin{cases} 2\alpha_{-2}^0 + \alpha_{-1}^0 - \alpha_1^0 = \dfrac{\lambda \tau}{h} = \sigma \\ \alpha_{-2}^0 + \alpha_{-1}^0 + \alpha_0^0 + \alpha_1^0 = 1 \\ 2\alpha_{-2}^0 + \dfrac{\alpha_{-1}^0}{2} + \dfrac{\alpha_1^0}{2} = \dfrac{\sigma^2}{2} \end{cases}$$

Геометрич. интерпретация: выберем произв. 2 коэфф. в кач. базисных



$O(\tau, h)$

$$\begin{cases} 2\alpha_{-2}^0 + \alpha_{-1}^0 - \alpha_1^0 = \sigma \\ \alpha_{-2}^0 + \alpha_{-1}^0 + \alpha_0^0 + \alpha_1^0 = 1 \end{cases}$$

↓ сложим

$$3\alpha_{-2}^0 + 2\alpha_{-1}^0 + \alpha_0^0 = \sigma + 1$$

$$\alpha_{-1}^0 = -\frac{3}{2}\alpha_{-2}^0 - \frac{1}{2}\alpha_0^0 + \frac{1+\sigma}{2}$$

Если $\alpha_{-1}^0 = 0$, то

$\boxed{\text{Фиксируем } \sigma = 0}$

$$-\frac{3}{2}\alpha_{-2}^0 - \frac{1}{2}\alpha_0^0 + \frac{1+\sigma}{2} = 0$$

$$\boxed{\alpha_0^0 = -3\alpha_{-2}^0 + (1+\sigma)}$$

Вычтем:

$$\alpha_{-2}^0 - \alpha_0^0 - 2\alpha_1^0 = \sigma - 1$$

$$\alpha_1^0 = \frac{1}{2}\alpha_{-2}^0 - \frac{1}{2}\alpha_0^0 - \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}$$

$\alpha_1^0 = 0$: $\quad \alpha_0^0 = \alpha_{-2}^0 - \sigma + 1$

Построим мн-во схем $O(\tau^2, h^2)$

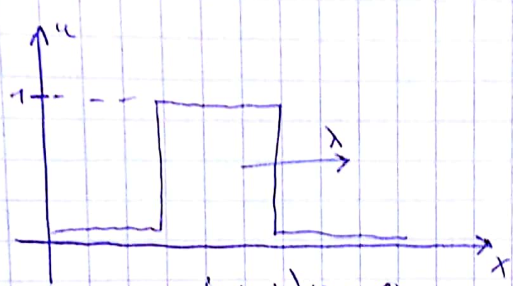
добавим 3 ур-е и получим:

$$4\alpha_{-2}^0 - \frac{3}{2}\alpha_{-2}^0 - \frac{1}{2}\alpha_0^0 + \frac{(1+\sigma)}{2} + \frac{1}{2}\alpha_{-2}^0 - \frac{1}{2}\alpha_0^0 - \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} = \sigma^2$$

$$\alpha_0^0 = 3\alpha_{-2}^0 - \sigma^2 + 1$$

Теперь если хотим макс. порядок, то добавляем последнее ур-е, получ. точка на рисунке.

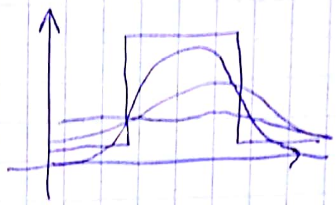
Пример:



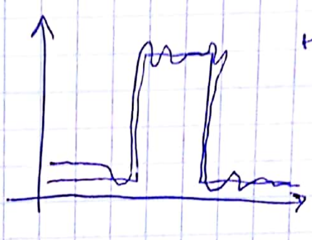
$u_t + \lambda u_x = 0$

$u_{точн} = u_0(x - \lambda t)$

Сх. уголок:



Сх. Л-В



нефизичные осцилляции