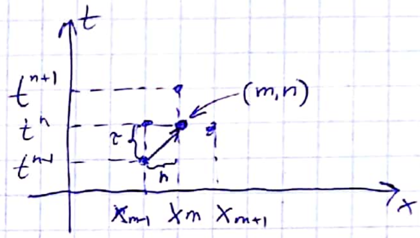
Семинар 2. НВП. 16.02.18

Исследуем $\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ $\lambda = const$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \lambda \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = 0$$

Иссл. на аппроксимацию

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$



Метод неопр. коэффициентов:

$$u_m^{n+1} = \sum_{\mu,\nu} \alpha_\mu^\nu u_{m+\mu}^{n+\nu} = \alpha_{-1}^0 u_{m-1}^n + \alpha_0^0 u_m^n + \alpha_1^0 u_{m+1}^n + \alpha_{-1}^{-1} u_{m-1}^{n-1}$$

Надо рассмотреть $L_{\tau,h}[u]^{\tau,h} - F_{\tau,h} = \delta r = ?$

$$L_{\tau,h}[u]^{\tau,h} - F_{\tau,h} \sim \alpha_{-1}^0 \cdot u(x_{m-1}, t^n) + \alpha_0^0 u(x_m, t^n) + \alpha_1^0 u(x_{m+1}, t^n) +$$
$$+ \alpha_{-1}^{-1} u(x_{m-1}, t^{n-1}) - u(x_m, t^{n+1}) =$$

$$= \begin{pmatrix} \text{отн. точки} \\ (x_m, t^n) \end{pmatrix} = \alpha_{-1}^0 \cdot \left(u(x_m, t^n) - h \cdot u_x + \frac{h^2}{2} u_{xx} - \frac{h^3}{6} u_{xxx} + O(h^4) \right) + \alpha_0^0 u +$$
$$+ \alpha_1^0 \left(u + h u_x + \frac{h^2}{2} u_{xx} + \frac{h^3}{6} u_{xxx} + O(h^4) \right) +$$
$$+ \alpha_{-1}^{-1} \Big(u - h u_x - \tau u_t + \frac{h^2}{2} u_{xx} + \tau h u_{tx} + \frac{\tau^2}{2} u_{tt} - \frac{h^3}{6} u_{xxx}$$
$$+ \frac{(-1)^2 h^2}{2} (-1)\tau \cdot u_{xxt} + (-1)h \cdot \frac{(-1)^2 \tau^2}{2} u_{xtt} - \frac{\tau^3}{6} u_{ttt} + O(\tau^4, h^4) \Big)$$
$$- \left(u + \tau u_t + \frac{\tau^2}{2} u_{tt} + \frac{\tau^3}{6} u_{ttt} + O(\tau^4) \right) =$$

$\boxed{\frac{\lambda \tau}{h} = \sigma}$ число Куранта

$$= u \left(\alpha_{-1}^0 + \alpha_0^0 + \alpha_1^0 + \alpha_{-1}^{-1} - 1 \right) +$$
$$+ u_x \cdot h \left(-\alpha_{-1}^0 + \alpha_1^0 + \alpha_{-1}^{-1}(-1 + \sigma) + \sigma \right) +$$
$$+ u_{xx} \cdot \frac{h^2}{2} \left(\alpha_{-1}^0 + \alpha_1^0 + \alpha_{-1}^{-1}(1 - 2\sigma + \sigma^2) - \sigma^2 \right)$$
$$+ u_{xxx} \cdot \frac{h^3}{6} \left(-\alpha_{-1}^0 + \alpha_1^0 + \alpha_{-1}^{-1}(-1 + 3\sigma - 3\sigma^2 + \sigma^3) + \sigma^3 \right) +$$
$$+ O(\tau^4, h^4) =$$

$u_t + \lambda u_x = 0$

$u_t = -\lambda u_x$

$u_{tt} = -\lambda u_{xt} = -\lambda u_{tx} = -\lambda(-\lambda u_x)_x = \lambda^2 u_{xx}$

$u_{ttt} = (u_t)_{tt} = (-\lambda u_x)_{tt} = (-\lambda u_t)_{tx} = (-\lambda)(-\lambda u_t)_{tx} = -\lambda^3 u_{xxx}$

$$O\left(\tfrac{1}{h}\right) \quad O(1) \quad O(h)$$

$$= \frac{u\delta_0}{\tau} + \frac{u_x h \delta_1}{\tau} + \frac{u_{xx} h^2}{2\tau} \delta_2 + \frac{u_{xxx} h^3}{6\tau} \delta_3 + O(h^3)$$

$O(h^2)$

т.к. $\lambda, \sigma = const \Rightarrow \tau \sim h$ "$O(h^4)$"

$Lu - F = u_t + \lambda u_x \sim \frac{u}{t} \sim \frac{u}{\tau}$
$L_{\tau,h}[u]^{\tau,h} - F_{\tau,h} \sim u$
$\Rightarrow$ надо поделить на τ

I пор. аппр.

$$\begin{cases} \delta_0 = 0 = \alpha_{-1}^0 + \alpha_0^0 + \alpha_1^0 + \alpha_{-1}^{-1} - 1 = 0 \\ \delta_1 = 0 = -\alpha_{-1}^0 + \alpha_1^0 + \alpha_{-1}^{-1}(-1+\sigma) + \sigma = 0 \end{cases}$$

II пор. аппр.:

$$\begin{cases} \delta_0 = 0 \\ \delta_1 = 0 \\ \delta_2 = 0 = \alpha_{-1}^0 + \alpha_1^0 + \alpha_{-1}^{-1}(1-2\sigma+\sigma^2) - \sigma^2 = 0 \end{cases}$$

III пор. аппр.:

$$\begin{cases} \delta_0 = 0 \\ \delta_1 = 0 \\ \delta_2 = 0 \\ \delta_3 = -\alpha_{-1}^0 + \alpha_1^0 + \alpha_{-1}^{-1}(-1+3\sigma-3\sigma^2+\sigma^3) + \sigma^3 = 0 \end{cases}$$

Получим аналитический вид 2-х парам. семейства схем. I пор.

$$\begin{cases} \alpha_{-1}^0 + \alpha_0^0 + \alpha_1^0 + \alpha_{-1}^{-1} = 1 \\ -\alpha_{-1}^0 + \alpha_1^0 + \alpha_{-1}^{-1}(-1+\sigma) = -\sigma \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} \alpha_1^0 = \alpha_1^0(\alpha_0^0, \alpha_{-1}^0) \\ \alpha_{-1}^{-1} = \alpha_{-1}^{-1}(\alpha_0^0, \alpha_{-1}^0) \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1^0 = \frac{1-2\sigma}{2-\sigma} + \frac{-1+\sigma}{2-\sigma}\alpha_0^0 + \frac{\sigma}{2-\sigma}\alpha_{-1}^0 \\ \alpha_{-1}^{-1} = -\frac{2}{2-\sigma}\alpha_{-1}^0 - \frac{1}{2-\sigma}\alpha_0^0 + \frac{1+\sigma}{2-\sigma} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_1^0 = \frac{1-2\sigma}{2-\sigma} - \frac{1-\sigma}{2-\sigma}\alpha_0^0 + \frac{\sigma}{2-\sigma}\alpha_{-1}^0 \\ \alpha_{-1}^{-1} = \frac{1+\sigma}{2-\sigma} - \frac{1}{2-\sigma}\alpha_0^0 - \frac{2}{2-\sigma}\alpha_{-1}^0 \end{cases}$$

Опр. Положительные по Фридрихсу схемы: $\alpha_\mu^\nu \geq 0$

Получим аналитический вид двухпарам. семейства полож. по Фридрихсу схем 1-го порядка аппроксимации (отн. двух выбранных коэфф)

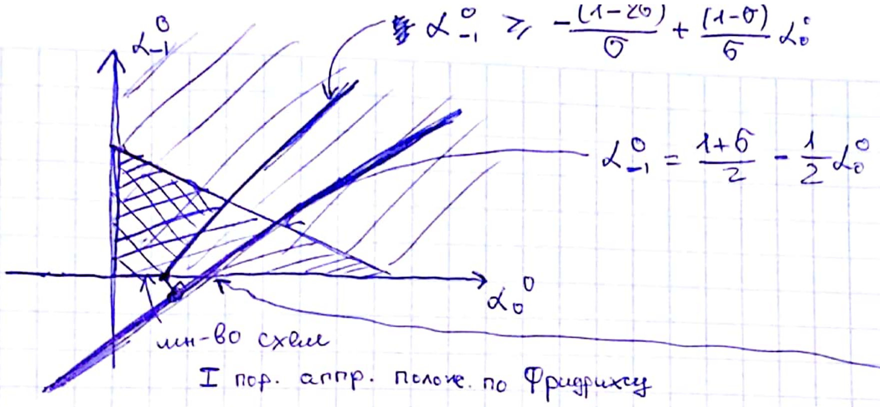
$\boxed{\text{Для } \sigma = \frac{3}{8}}$ $\alpha_0^0 \geq 0$, $\alpha_{-1}^0 \geq 0$, $\begin{cases} \frac{1-2\sigma}{2-\sigma} - \frac{1-\sigma}{2-\sigma}\alpha_0^0 + \frac{\sigma}{2-\sigma}\alpha_{-1}^0 \geq 0. \\ \frac{1+\sigma}{2-\sigma} - \frac{1}{2-\sigma}\alpha_0^0 - \frac{2}{2-\sigma}\alpha_{-1}^0 \geq 0 \end{cases}$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 1-2\sigma - (1-\sigma)\cdot\alpha_0^0 + \sigma\cdot\alpha_{-1}^0 \geq 0 \\ 1+\sigma - \alpha_0^0 - 2\cdot\alpha_{-1}^0 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_{-1}^0 \geq -\frac{(1-2\sigma)}{\sigma} + \frac{(1-\sigma)}{\sigma}\alpha_0^0 \\ \alpha_{-1}^0 \leq \frac{1+\sigma}{2} - \frac{1}{2}\alpha_0^0 \\ \alpha_{-1}^0 \geq 0,\ \alpha_0^0 \geq 0 \end{cases}$$



Получим аналитический вид для однопарам. семейства схем II пор. аппроксимации.

$$\begin{cases} \alpha_1^0 = \frac{1-2\sigma}{2-\sigma} - \frac{1-\sigma}{2-\sigma}\alpha_0^0 + \frac{\sigma}{2-\sigma}\alpha_{-1}^0 \\ \alpha_{-1}^{-1} = \frac{1+\sigma}{2-\sigma} - \frac{1}{2-\sigma}\alpha_0^0 - \frac{2}{2-\sigma}\alpha_{-1}^0 \\ \alpha_{-1}^0 + \alpha_1^0 + \alpha_{-1}^{-1}(1-2\sigma+\sigma^2) = \sigma^2 \end{cases} \longrightarrow \alpha_{-1}^0 = \alpha_{-1}^0(\alpha_0^0)$$

Проведём прямую в осях $(\alpha_0^0, \alpha_{-1}^0)$ при $\sigma = 3/8$

$\boxed{\text{Th. Годунова — не } \exists \text{ монот. схем порядка аппрокс. } \geqslant 2 \text{ для мн. схем ур-я переноса}}$

(многоуг. и прямая, опр. выше не пересекаются)

Получим единственную схему III пор. аппроксимации:

$$\begin{cases} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ -\alpha_{-1}^0 + \alpha_1^0 + \alpha_{-1}^{-1}(-1+3\sigma-3\sigma^2+\sigma^3) = -\sigma^3 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_1^0 = \frac{2\sigma^3-3\sigma^2+\sigma}{2\sigma-4} \\ \alpha_{-1}^{-1} = -\frac{\sigma+1}{\sigma-2} \\ \alpha_{-1}^0 = \sigma^2 + \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \\ \alpha_0^0 = 1-\sigma-2\sigma^2 \end{cases}$$

При $\sigma = 3/8$:

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha_1^0 &= -\frac{15}{832} \\ \alpha_{-1}^{-1} &= \frac{11}{13} \\ \alpha_{-1}^0 &= -\frac{11}{64} \\ \alpha_0^0 &= \frac{11}{32} \end{aligned}}$$

Scanned by CamScanner