ФИВТ, группа 298, весенний семестр 2014 – 2015

Лабораторная работа № 3 по теме «Численные методы решения уравнения переноса»

Теоретическое задание

Для простейшего уравнения переноса

$$u_t + \lambda u_x = 0,\ \lambda = 1$$

все множество разностных схем

$$u_m^{n+1} = \sum_{\mu,\nu} \alpha_\mu^\nu(\tau, h) u_{m+\mu}^{n+\nu} \text{ (в суммирование не входит точка } \mu = 0,\ \nu = 1)$$

исследовать на заданном сеточном шаблоне, отмеченном точками на рисунке (см. ниже), найдя коэффициенты схемы как функции от числа Куранта $\sigma = \lambda\tau/h$:

(1т) для заданного сеточного шаблона получить аналитический вид для двухпараметрического множества положительных по Фридрихсу ($\alpha_\mu^\nu \ge 0$) схем 1-го порядка аппроксимации относительно двух выбранных коэффициентов α_μ^ν;

(2т) для заданного сеточного шаблона получить аналитический вид для однопараметрического множества схем 2-го порядка аппроксимации относительного выбранного коэффициента α_μ^ν;

(3т) для заданного сеточного шаблона получить аналитический вид для единственной схемы 3-го порядка аппроксимации;

(4т) среди положительных по Фридрихсу (монотонных, мажорантных) схем найти аналитический вид для наиболее точной схемы с минимальной «аппроксимационной вязкостью», а также для остальных вершин двухпараметрического множества монотонности;

(5т) среди схем 2-го порядка аппроксимации найти аналитический вид для наиболее близкой ко множеству положительных по Фридрихсу схем.

(6) для заданного сеточного шаблона и значения числа Куранта изобразить все построенные в пунктах (1т) – (5т) схемы в пространстве двух выбранных в пункте (1т) коэффициентов α_μ^ν.

Практическое задание

Решить следующую краевую задачу для уравнения переноса

$$\begin{cases} u_t + \lambda u_x = 0,\ \lambda = 1\ \left(t > 0,\ 0 < x \le X,\ X = 2\right), \\ u\left(0, x\right) = \varphi\left(x\right)\ \left(0 \le x \le X\right), \\ u\left(t, 0\right) = 0\ \left(0 < t \le 100\tau\right), \end{cases}$$

где функция $\varphi\left(x\right)$ определяется одним их трех способов:

(а) «ступенька»

$$\varphi\left(x\right) = \begin{cases} 1 \text{ при } 0.4 \le x \le 0.6, \\ 0 \text{ иначе.} \end{cases}$$

(б) «полуэллипс»

$$\varphi\left(x\right) = \begin{cases} \sqrt{1 - 100 \cdot \left(x - 0.5\right)^2} & \text{при } 0.4 \le x \le 0.6, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

(в) «треугольник»

$$\varphi\left(x\right) = \begin{cases} 10x - 4 & \text{при } 0.4 \le x \le 0.5, \\ -10x + 6 & \text{при } 0.5 \le x \le 0.6, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

на сетке с числом узлов 201 ($h = 0.01$) для заданного сеточного шаблона и указанного значения числа Куранта:

(1п) по двум монотонным схемам первого порядка аппроксимации – вершинам области монотонных схем, включая схему с минимальной «аппроксимационной вязкостью» из (4т);

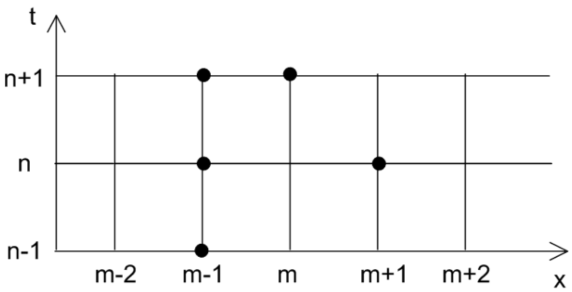
(2п) по наименее осциллирующей на разрывных решениях схеме 2-го порядка аппроксимации из (5т);

(3п) по двум схемам 2-го порядка аппроксимации, лежащим на прямой – однопараметрическом множестве схем 2-го порядка аппроксимации – по разные стороны от схемы из (5т);

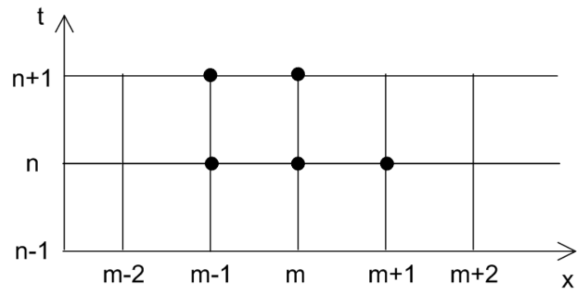
(4п) по схеме 3-го порядка аппроксимации из (3т).

В каждом из пунктов (1п) – (4п) в конечный момент времени, т.е. через 100 шагов, вывести на одном графике точное решение и численное.

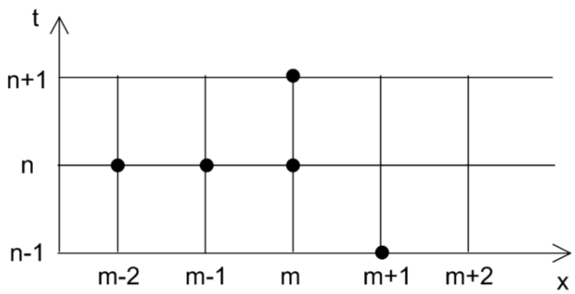
Если за время расчета возмущение выходит на правую границу расчетной области – увеличить значение X.



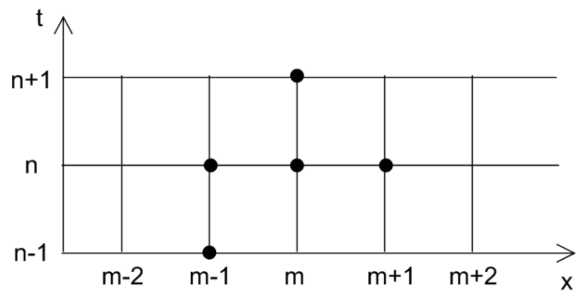
Шаблон № 1



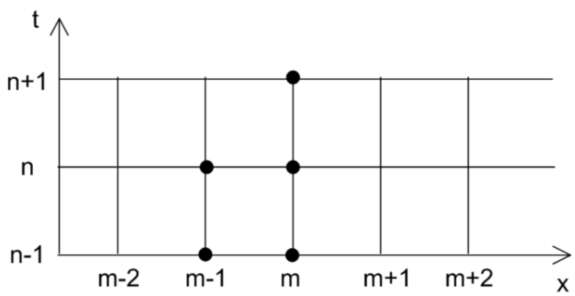
Шаблон № 2



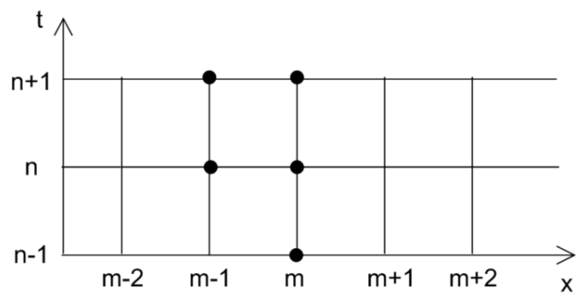
Шаблон № 3



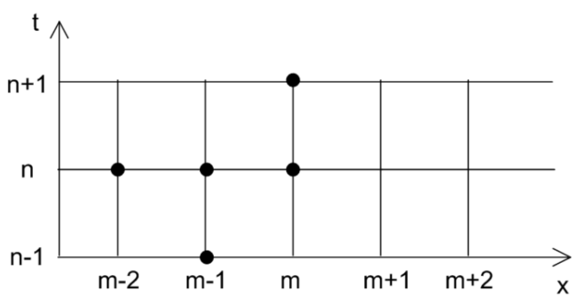
Шаблон № 4



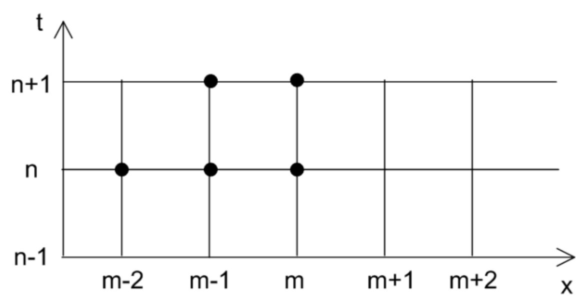
Шаблон № 5



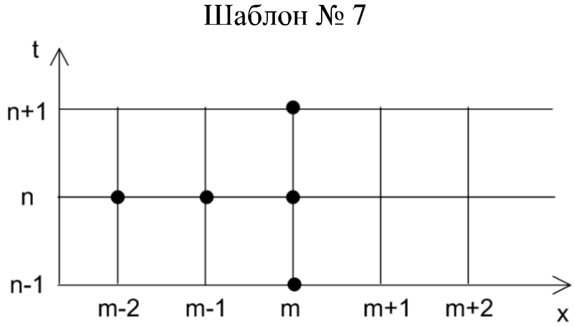
Шаблон № 6



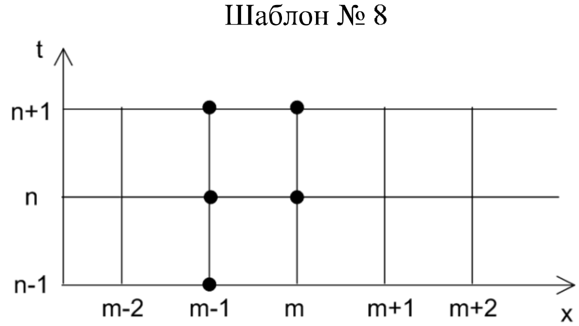
Шаблон № 7



Шаблон № 8



Шаблон № 9



Шаблон № 10