Feuille n° 2
Problèmes paraboliques

On considère le problème de la chaleur 1D :

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \partial_{xx}^2 u(x,t) = 0, & \forall x \in]0,1[, \, \forall t \geq 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & \forall t \geq 0, \\ u(x,0) = \sin(\pi x), & \forall x \in [0,1]. \end{cases}$$

Vérifier que la solution analytique est donnée par $u(x,t) = \sin(\pi x)\exp(-\pi^2 t)$.

1 Un schéma explicite

1. Implémenter, dans un fichier `tp2.ipynb`, le schéma d'Euler explicite pour l'équation de la chaleur :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\tau}{h^2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right),$$

où u_i^n est une approximation numérique de $u(x_i, t_n)$ avec $x_i = ih$, $i = 1, \dots N$, $h = \frac{1}{N+1}$ et $t_n = n\tau$. On prendra $N = 100$ points de grille en espace et un temps final $t_{end} = 0.1$.

2. Vérifier numériquement que la condition CFL :

$$CFL = \frac{\tau}{h^2} \leq 0.5$$

est nécessaire et suffisante pour assurer la stabilité du schéma :

   (a) Tracer la solution numérique et l'erreur au temps t_{end} pour $CFL = 0.25$,

   (b) Tracer la solution numérique et l'erreur au temps t_{end} pour $CFL = 0.5$,

   (c) Tracer la solution numérique et l'erreur au temps t_{end} pour $CFL = 0.51$.

3. Vérifier numériquement que le schéma explicite est d'ordre $O(\tau) + O(h^2)$.

2 Un schéma implicite

1. Implémenter, dans un fichier `tp2.ipynb`, le schéma d'Euler implicite pour l'équation de la chaleur :

$$u_i^{n+1} - \frac{\tau}{h^2}\left(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}\right) = u_i^n,$$

où u_i^n est une approximation numérique de $u(x_i, t_n)$ avec $x_i = ih$, $i = 1, \dots N$, $h = \frac{1}{N+1}$ et $t_n = n\tau$. On prendra $N = 100$ points de grille en espace et un temps final $t_{end} = 0.1$.

2. Vérifier numériquement que le schéma est inconditionellement stable. Vérifier en particulier la stabilité du schéma même lorsque la condition CFL du schéma explicite n'est pas vérifiée. Tracer la solution numérique et l'erreur au temps t_{end} pour différentes valeurs de τ.

3. Vérifier numériquement que le schéma explicite est d'ordre $O(\tau) + O(h^2)$.

3 Le schéma de Crank-Nicolson

1. Implémenter, dans un fichier `tp2.ipynb`, le schéma de Crank-Nicolson pour l'équation de la chaleur :

$$u_i^{n+1} - \frac{\tau}{2h^2}\left(u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}\right) = u_i^n + \frac{\tau}{2h^2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right),$$

   où u_i^n est une approximation numérique de $u(x_i, t_n)$ avec $x_i = ih$, $i = 1, \dots N$, $h = \frac{1}{N+1}$ et $t_n = n\tau$. On prendra $N = 100$ points de grille en espace et un temps final $t_{end} = 0.1$.

2. Vérifier numériquement que le schéma est inconditionellement stable. Vérifier en particulier la stabilité du schéma même lorsque la condition CFL du schéma explicite n'est pas vérifiée. Tracer la solution numérique et l'erreur au temps t_{end} pour différentes valeurs de τ.
3. Vérifier numériquement que le schéma de Crank-Nicolson est d'ordre $O(\tau^2) + O(h^2)$.
4. Tester le schéma de Crank-Nicolson dans le cas où la condition intiale est donnée par la fonction suivante :

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 0.25], \\ 1, & x \in [25, 0.5], \\ -1, & x \in [5, 0.75], \\ 0, & x \in [0.75, 1]. \end{cases}$$

   (a) Afficher la solution numérique pour $\tau = h$.
   (b) Afficher la solution numérique pour $\tau = h^2$.
   (c) Afficher la solution numérique obtenue par un schéma implicite pour $\tau = h$.
   (d) Afficher la solution numérique obtenue par un schéma implicite pour $\tau = h^2$.
   (e) Commenter.