Feuille n° 1
Problèmes elliptiques

1 Résolution d'un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss

On souhaite résoudre numériquement le système $Ax = b$ où la matrice du système $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est inversible. On rappelle que la méthode du pivot de Gauss consiste à transformer le système de façon à obtenir un système équivalent $Ux = c$ (équivalent veut dire ici que les deux systèmes ont la même solution x) dans lequel la matrice U est triangulaire supérieure. Ce système peut alors se résoudre simplement en calculant de proche en proche à partir de la dernière ligne du système les coordonnées du vecteur x.

On décrit ici la première étape de l'algorithme du pivot de Gauss qui aboutit à un nouveau système $\tilde{A}x = \tilde{b}$ équivalent au système $Ax = b$ dans lequel la matrice $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ est telle que $\tilde{a}_{i1} = 0$, $\forall i = 2, \ldots n$ (les coefficients de la première colonne et des lignes de 2 à n sont nuls). On suppose ici $a_{11} \neq 0$ (a_{11} est appelé le pivot).

Les coefficients de la matrice $\tilde{A}$ sont donnés par :

$$\tilde{a}_{1j} = a_{1j}, \forall j = 1, \ldots, n,$$

$$\tilde{a}_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}\, a_{1j},\ \forall i = 2, \ldots, n,\ \forall j = 1, \ldots, n.$$

On vérifie que pour $j = 1$, on a $\tilde{a}_{i1} = a_{i1} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}\, a_{11} = 0$, $\forall i = 2, \ldots, n$.

Pour obtenir un système équivalent il faut que le membre de droite soit modifié de la même façon :

$$\tilde{b}_1 = b_1,$$

$$\tilde{b}_i = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}\, b_1,\ \forall i = 2, \ldots, n.$$

Les étapes suivantes de l'algorithme du pivot de Gauss sont obtenues en répétant la transformation précédente au sous-système $\tilde{A}(2:n, 2:n)\, x(2:n) = \tilde{b}(2:n)$ obtenu en considérant uniquement les lignes et colonnes de 2 à n de la matrice $\tilde{A}$ et les coefficients de 2 à n des vecteurs x et b. Pour que les différentes étapes puissent se réaliser on suppose que chaque nouveau pivot (coefficient 11 du sous-système) est non nul. Au terme de $n-1$ étapes (en comptant la première étape), on aboutit à un système triangulaire supérieur $Ux = c$.

Ecrire une fonction `solvePG(A,b)` qui, étant donné une matrice A (supposée inversible) et un vecteur b, donne la solution x du système $Ax = b$ par la méthode du pivot de Gauss.

2 Problème 1D

On considère l'équation de Poisson en dimension un avec conditions aux limites de Dirichlet homogène :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & \forall x \in]0, 1[, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où $f(x) \in C([0, 1])$ est une fonction donnée.

1. Soit $f(x) = \sin(\pi x)$. Calculer analytiquement la solution exacte u en utilisant la fonction de Green :

$$u(x) = \int_0^1 G_D(x,y) f(y) dy, \tag{2}$$

$$G_D(x,y) = \begin{cases} y(1-x), & \text{si } 0 \le y \le x \le 1, \\ x(1-y), & \text{si } 0 \le x \le y \le 1. \end{cases} \tag{3}$$

2. Écrire une fonction `poisson1D(f,N)` qui, étant donné une fonction f et N points de discrétisation, calcule la solution approchée u_h par la méthode des différences finies.
3. Tracer l'erreur de la solution numérique en norme L_2 en fonction du nombre de points de discrétisation. L'erreur est donnée par :

$$||u_h - u||_2 = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (u_i - u(x_i))^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N u(x_i)^2}}. \tag{4}$$

   Donner l'ordre de convergence.
4. Soit $f(x) = -36\pi x \left(\sin(12\pi x^3) + 18\pi x^3 \cos(12\pi x^3)\right)$. Vérifier que la solution analytique est donnée par $u(x) = \sin^2(6\pi x^3)$.
5. Tracer pour différentes valeurs de N la solution analytique et la solution numérique obtenue par la méthode des différences finies.
6. Tracer l'erreur de la solution numérique en norme L_2 en fonction de $h = 1/(N+1)$.

3 Problèmes 2D

1. On considère l'équation de Poisson en dimension deux avec conditions aux limites de Dirichlet homogène :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{5}$$

   où $\Omega =]0,1[^2$, et $f(x) \in C(\Omega)$ est une fonction donnée.

   Matrices creuses

   La matrice obtenue par la discrétisation de l'équation (5) sur un maillage de taille 100×100 contient 10^8 éléments mais seulement $5\ 10^4$ valeurs sont non nulles. Pour économiser la mémoire et rendre les simulations numériques possibles, on utilise un format spécifique pour stocker et manipuler la matrice. L'idée de base est de ne stocker que les éléments non nuls. Un exemple de ce type de stockage est le format COO (coordinates en anglais) : la matrice est caractérisée par trois listes : la liste des indices i, la liste des indices j et la liste des valeurs.

   (a) Écrire une fonction `poisson2D(f,Nx,Ny)` qui, étant donnée une fonction $f(x,y)$, résout le problème de Poisson avec conditions aux limites de Dirichlet homogène par la méthode des différences finies sur un maillage de taille $N_x \times N_y$. Assembler la matrice en utilisant le format COO (commande `coo_matrix` du `scipy.sparse`). Pour résoudre le système on peut utiliser la fonction `spsolve` de la bibliothèque `scipy.sparse.linalg` adaptée pour les matrices creuses. Comparer les performances des fonctions `spsolve` et `solvePG`.

   (b) Soit $f(x,y) = 8\pi^2 \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$. Vérifier que la solution analytique est donnée par $u(x,y) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)$. Tracer la solution numérique pour $N_x = N_y = 100$. Commandes : `Axes3D` de `mpl_toolkits.mplot3d`

   (c) Tracer l'erreur de la solution numérique en norme L_2 en fonction de h.

2. On considère à présent l'équation de Poisson en dimension deux avec conditions aux limites de Neumann homogène :

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{6}$$

où $\Omega =]0,1[^2$, et $f(x) \in C(\Omega)$ est une fonction donnée. La solution u est maintenant déterminée à une constante près. Pour avoir l'unicité de la solution on introduit une contrainte supplémentaire :

$$\int_\Omega u(x)\, dx = 0. \tag{7}$$

(a) Comment imposer la contrainte $\int_\Omega u(x)\, dx = 0$?

(b) Écrire une fonction `poisson2N(f,Nx,Ny)` qui, étant donnée une fonction $f(x,y)$, résout le problème de Poisson avec conditions aux limites de Neumann homogène par la méthode des différences finies sur un maillage de taille $N_x \times N_y$.

(c) Soit $f(x,y) = 8\pi^2 \cos(2\pi x)\cos(2\pi y)$. Vérifier que la solution analytique est donnée par $u(x,y) = \cos(2\pi x)\cos(2\pi y)$. Tracer la solution numérique pour $N_x = N_y = 100$.

(d) Tracer l'erreur de la solution numérique en norme L_2 en fonction de h.