Université Paul Sabatier **Master MApI3, M1**

Image–Signal–Simulation

Travaux pratiques
Feuille 1 :
Comparaisons d'algorithmes itératifs pour résoudre le modèle de tykhonov en débruitage d'images

Nous allons, lors de ce TP, comparer les performances des algorithmes vus en cours. Pour cela, nous considérerons un problème de débruitage : notre donnée est de la forme

$$v = u + b,$$

où $u \in \mathbb{R}^{N^2}$ est l'image que l'on cherche, $v \in \mathbb{R}^{N^2}$ est la donnée à notre disposition et $b \in \mathbb{R}^{N^2}$ est la réalisation d'un bruit blanc Gaussien.

Le modèle que l'on cherchera à résoudre consiste à minimiser l'énergie

$$E(w) = \sum_{i,j=0}^{N-1} |\nabla w_{i,j}|^2 + \lambda \sum_{i,j=0}^{N-1} (w_{i,j} - v_{i,j})^2,$$

pour $w \in \mathbb{R}^{N^2}$ et $\lambda \geq 0$, avec

$$\nabla w_{i,j} = \begin{pmatrix} (D_x w)_{i,j} \\ (D_y w)_{i,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{i+1,j} - w_{i,j} \\ w_{i,j+1} - w_{i,j} \end{pmatrix}$$

pour $(i,j) \in \{0,\ldots,N-1\}^2$ (on supposera que w est périodisée en dehors de son support).

Ce TP porte sur le problème étudié dans le TD 1, exercice 2. Les notations (notammment l'opérateur B) sont décrites dans cet exercice.

Exercice 1.

(1) Utiliser la fonction *numpy.random.normal* pour ajouter un bruit Gaussien de déviation standard 10 à l'image *barbara.gif*.

(2) Lire le programme contenu dans *quadratique_exacte*. Que fait il? Expliquer votre réponse en faisant le lien avec l'exercice 1.

(3) Utiliser la fonction *quadratique_exacte* pour débruiter l'image obtenue à la question 1, pour des valeurs de $\lambda = 0.01$, $\lambda = 0.1$, $\lambda = 1$, $\lambda = 10$, $\lambda = 100$. Expliquer le rôle du paramètre λ. Quelle valeur de λ préconiseriez vous?

(4) Lire le programme contenu dans *quadratique_approx*. Que font précisément chacune des fonctions qui lui sont nécessaire ? Expliquer votre réponse en faisant le lien avec l'exercice 1 et les algorithmes que vous avez vus en cours.

(5) Utiliser la fonction *quadratique_approx* pour débruiter l'image obtenue à la question 1, pour des valeurs de $\lambda = 0.01$, $\lambda = 0.1$, $\lambda = 1$, $\lambda = 10$, $\lambda = 100$. Pour chacune de ces valeurs de λ, dire empiriquement combien d'itérations sont nécessaires à l'algorithme pour atteindre une précision donnée? Expliquer ce résultat en faisant le lien avec l'exercice 1.

(6) Modifier *quadratique_approx* pour pouvoir utiliser une stratégie de pas de plus grande descente. (Astuce: la fonction objectif est un polynôme de degré 2 en t. On peut donc calculer le pas de manière exacte.)

(7) Modifier *quadratique_approx* pour pouvoir utiliser une stratégie de pas suivant la règle de *Armijo*?

(8) Comparer les différentes stratégies de calcul du pas, dans le cadre du débruitage des images obtenues à la question 1, et pour $\lambda = 0.1$ et $\lambda = 1$.

Exercice 2.

(1) Copier le code de *quadratique_approx* dans une nouvelle fonction *quadratique_approx1* puis modifier le programme pour qu'il suive l'algorithme du gradient conjugué décrit dans l'Algorithme 1. (L'opérateur B est celui du TD1, exercice 2)

NB : Pour une fonctionnelle quadratique, l'algorithme du gradient conjugué est connu pour converger en au plus N^2 itérations.

Algorithme 1 Algorithme du gradient conjugué

Entrée: Les entrées nécessaires au calcul de E et de ∇E
Sortie: Une approximation d'un minimiseur de E : w_k

Initialisation de w_0
Initialisation de $d_0 = \nabla E(w_0)$
Initialisation de $w_1 = w_0 - \frac{\langle d_0,\, d_0\rangle}{2\langle Bd_0,\, d_0\rangle}\, d_0$
Tant que l'algorithme n'a pas convergé **faire**
  Calculer $d_k = \nabla E(w_k) + \frac{\|\nabla E(w_k)\|^2}{\|\nabla E(w_{k-1})\|^2}\, d_{k-1}$
  Calculer un pas $t_k = \frac{\langle \nabla E(w_k),\, d_k\rangle}{2\langle Bd_k,\, d_k\rangle}$ (le pas de la plus grande diminution dans la direction d_k)
  Mettre à jour : $w_{k+1} \leftarrow w_k - t_k\, d_k$
Fin tant que

---

(2) Utiliser cet algorithme pour débruiter l'image obtenue à la question 1, pour des valeurs de $\lambda = 0.01$, $\lambda = 0.1$, $\lambda = 1$, $\lambda = 10$, $\lambda = 100$. Pour chacune de ces valeurs de λ, combien d'itérations faut-il à l'algorithme pour converger? Comparer ces résultats à ceux obtenus dans l'exercice précédent et commenter cette comparaison aux vues de ce que vous savez sur ces algorithmes.

Exercice 3.

(1) Copier le code de *quadratique_approx* dans une nouvelle fonction *quadratique_approx2* puis modifier le programme pour qu'il suive l'algorithme du gradient conjugué décrit dans l'algorithme du gradient accéléré décrit dans l'Algorithme 2.

NB : L'algorithme du gradient accéléré est connu pour avoir un vitesse de convergence en $\frac{1}{k^2}$, où k est le numéro de l'itération.

Algorithme 2 Algorithme du gradient accéléré

Entrée: Les entrées nécessaires au calcul de L et de ∇E
Sortie: Une approximation d'un minimiseur de E : w_k

Calculer un pas $t = \frac{1}{L}$ (où L est la constante de Lipschitz du gradient)
Initialisation de w_0
Initialisation de $v_1 = w_0$
Tant que l'algorithme n'a pas convergé ($k = 1 \ldots$) **faire**
  Calculer $w_k = v_k - t\nabla E(v_k)$
  Mettre à jour : $v_{k+1} = w_k - \frac{k-1}{k+2}(w_k - w_{k-1})$
Fin tant que

---

(2) Utiliser cet algorithme pour débruiter l'image obtenue à la question 1, pour des valeurs de $\lambda = 0.01$, $\lambda = 0.1$, $\lambda = 1$, $\lambda = 10$, $\lambda = 100$. Pour chacune de ces valeurs de λ, combien d'itérations faut-il à l'algorithme pour converger? Comparer ces résultats à ceux obtenus dans les exercices précédents et commenter cette comparaison aux vues de ce que vous savez sur ces algorithmes.