PROJET DE FIN D'ÉTUDES

pour obtenir le diplôme de

l' Université Galatasaray
Spécialité : **Mathématiques**

Sommes Restreintes de Chiffres

Préparé par **Yusuf Emin Akpınar**
Responsable : **Arnaud Bodin**

12 juin 2025

Table des matières

1 Introduction

Il est bien connu que la série harmonique

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

qui consiste en la somme infinie de la réciproque des entiers naturels non nuls est divergente. Cependant, en 1914, Kempner [1] a ajouté une restriction sur les termes de cette somme et s'est demandé ce qu'il se passe si on élimine les éléments dont le dénominateur contient le chiffre 9. C'est-à-dire la somme $K = 1 + 1/2 + \cdots + 1/8 + 1/10 + \cdots$. La réponse est que la série converge, ce que Kempner a prouvé de manière simple et élégante. Mais il n'a pas donné d'indication sur la valeur vers laquelle cette série converge, à part montrer que cette valeur est inférieure à 90.

Deux ans plus tard, Irwin a publié son article [2] dans lequel il regroupe les termes de la somme et trouve de nouvelles bornes supérieures et inférieures. À l'origine, il a trouvé correct pour la somme à la main, et avec sa méthode nous pouvions obtenir jusqu'à 6 chiffres après la virgule à l'aide d'un ordinateur.

Soixante ans plus tard, Baillie [3] a proposé une nouvelle idée clé : travailler avec $1/x^j$ en lieu de $1/x$ et réécrire l'entier x comme $10\lfloor x/10 \rfloor + (x \bmod 10)$. Puis, en utilisant la formule binomiale, il crée une relation récurrence entre la somme des inverses et la somme de puissances des inverses. Sa méthode astucieuse sera la clé pour le reste des méthodes. Cette méthode peut être généralisée pour les autres chiffres. Baillie utilise sa méthode pour calculer jusqu'à 20 chiffres après la virgule pour le problème original et des variantes.

Puis, Fischer [4] retourne à la question originale et laisse les généralisations de côté. Fischer a travaillé avec la fonction $1/(m + x)$. En définissant un opérateur linéaire, il a proposé deux approches différentes pour le calcul de la somme de Kempner. Dans la première méthode, il utilise des outils avancés en analyse tels que la fonction digamma et la fonction zêta de Riemann et a trouvé une autre formule pour calculer les valeurs par une récurrence très simple. Dans sa deuxième méthode, il utilise les polynômes de Chebyshev afin d'encadrer la somme entre une borne supérieure et une borne inférieure. Ces méthodes sont extrêmement rapides mais ne peuvent pas être généralisées facilement à d'autres cas que celui de Kempner.

Après le travail de Fisher, Baillie travaille avec Schmelzer [5] pour trouver un nouvel algorithme qui généralise les contraintes possibles. Les motifs permis par Schmelzer sont très variés, par exemple au lieu de juste un chiffre, cette méthode de Schmelzer & Baillie nous permet de restreindre tous les entiers qui contient le motif "314". Ils utilisent principalement de l'algèbre linéaire matricielle, et la théorie de graphes. Ils mentionnent également le comportement asymptotique de la suite restreinte de chiffres. Ils ont proposé que, le résultat final ne dépend que de la periode du motif de restriction.

Enfin, Jean-François Burnol [6] a proposé une formule et un algorithme très général et très efficace, à la pointe des connaissances actuelles. Il a généralisé la méthode de Fischer avec l'usage de la théorie de la mesure. La mesure qu'il a défini vient de l'intuition probabiliste, mais on peut aussi voir que c'est une solution au problème des moments de Hausdorff pour les α_n utilisés par Fischer. Avec sa méthode, nous avons atteint une précision de 100 000 chiffres.

2 Résultats

2.1 Somme de Kempner

En 1914, Kempner a montré le théorème suivant.[1]

Théorème 1. *La somme des inverses des entiers sans les termes qui contiennent le chiffre 9 dans leur dénominateur, appelée somme de Kempner, converge.*

Démonstration. Tout d'abord, nous partitionnons le somme selon que le nombre de chiffres dans le dénominateur et les nommant S_i. En d'autres termes, S_i sont les termes de somme de Kempner qui ont exactement i chiffres dans leur dénominateur et définıssons a_i comme la somme des termes de S_i. Par exemple, les deux premiers termes sont,

$$a_1 = \sum_{s \in S_1} s = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{8}$$
$$a_2 = \sum_{s \in S_2} s = \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{18} + \frac{1}{20} + \cdots + \frac{1}{88}$$

La première observation que nous devons faire est que pour le premier chiffre, il y a 8 termes, et pour chacun des autres chiffres, il y a 9 termes possibles. Nous avons donc 8 termes dans a_1 et $8 \cdot 9$ termes dans a_2. Plus généralement, il y a $8 \cdot 9^{n-1}$ termes dans a_n. La deuxième observation est à propos des bornes des a_n, nous pouvons voir que tous ces termes sont plus petits que leur premier terme $\frac{1}{10^{n-1}}$. Alors, nous avons obtenu,

$$\begin{aligned}
\forall s \in S_1, s \leqslant 1 &\Rightarrow a_1 \leqslant 1 \cdot 8 = 8 \\
\forall s \in S_2, s \leqslant 1/10 &\Rightarrow a_2 \leqslant \frac{1}{10} \cdot 8 \cdot 9 = 8 \cdot \frac{9}{10} \\
&\vdots \\
\forall s \in S_n, s \leqslant 1/10^{n-1} &\Rightarrow a_n \leqslant \frac{1}{10^{n-1}} \cdot 8 \cdot 9^{n-1} = 8 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$

Avec une somme geométrique simple, nous avons $K \leqslant 8 \cdot 10 = 80$. Alors on sait que la somme de Kempner converge et plus est petite que 80. □

Cela semble un peu contre-intuitif, mais c'est juste à cause de notre perception. À première vue, nous pensons surtout aux entiers avec un ou deux chiffres, par lesquels il semble que juste une petite partie des termes sont écartés. Mais si nous élargissons notre vision à des nombres entiers plus grands, disons avec 51 chiffres, seulement $\frac{8}{9} \cdot (9/10)^{50} \approx 0,004 = 0,04\%$ n'est pas écarté. Donc après un certain temps, presque tous les termes sont écartés.

2.2 Méthode d'Irwin pour les bornes

La série harmonique diverge très lentement. De même, la somme de Kempner converge très lentement. On peut voir cela par un calcul de force brute. Il y a deux problèmes majeurs avec cette méthode. Premièrement, elle ne donne pas une borne supérieure, et deuxièmement elle converge trop lentement. Donc en 1916, en plus de la généralisation de la somme de Kempner, Irwin [2] a donné une borne supérieure et inférieure. Pour trouver ces bornes, nous devons examiner les termes a_i. Nous comparons les termes de a_2 avec les termes de a_3.

$$a_2 = \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{18} + \frac{1}{20} + \frac{1}{21} + \cdots + \frac{1}{28} + \cdots + \frac{1}{80} + \cdots + \frac{1}{88}.$$

Maintenant, on compare les neuf premiers termes de a_3 : $1/100, 1/101, \ldots, 1/108$, sont tous plus petits que $1/100$ et leur somme est plus petite que $9/100$, en d'autres termes ils sont plus petits que $9/10 \cdot 1/10$, $9/10$ fois le premier terme de a_2. Ensuite, on examine les neuf termes suivants de a_3, $1/110, 1/111, \ldots, 1/118$, ils sont tous plus petits que $1/110$ et leur somme est plus petite que $9/110 = 9/10 \cdot 1/11$, soit $9/10$ fois le deuxième terme de a_2. Donc nous avons,

$$a_3 \leqslant \frac{9}{10} a_2.$$

De la même manière, si nous comparons a_4 avec a_2, on a $a_4 \leqslant (9/10)^2 a_2$. Et plus généralement,

$$a_n \leqslant \left(\frac{9}{10}\right)^{n-2} a_2.$$

Alors la somme est plus petite que,

$$a_1 + \left[1 + \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}^2\right) + \dots\right] a_2 = a_1 + 10 \cdot a_2.$$

En 1916, Irwin a trouvé que, $a_1 \leqslant 2,72$ et $10a_2 \leqslant 20,58$, donc le somme, K est plus petite que 23,3.
Pour la borne inférieure, il applique la même méthode mais cette fois, la somme a_n est plus grande que $(9/10)^{n-2} a_2{}'$ où,

$$a_2{}' = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \dots + \frac{1}{29} + \dots + \frac{1}{81} + \dots + \frac{1}{89}$$

et, donc la somme est plus grande que,

$$a_1 + a_2 + 9 \cdot a_2{}'$$

qu'il a calculé comme 22,4.
Cette méthode peut être améliorée à l'aide d'un ordinateur (ce qu'Irwin ne pouvait pas faire), si nous commençons à partir d'un autre rang. Si nous commençons avec a_7 et $a_7{}'$, j'ai obtenu comme limite supérieure $22,920676635$ et limite inférieure $22,920676598$. En conclusion, cet encadrement permet d'obtenir avec certitude les 6 premiers chiffres de S après la virgule, $S \approx 22,920676$.

2.3 Estimation de Baillie

En 1979, Robert Baillie [3] utilise la formule binomiale pour dériver un formule récursive pour le somme de Kempner, en plus sa méthode peut être généralisée pour d'autres chiffres $m = 0, 1, \dots 9$. Soit S l'ensemble des entiers positifs qui n'inclut pas le chiffre m et S_i l'ensemble des entiers de S ayant exactement i chiffres. On définit

$$s(i,j) = \sum_{x \in S_i} \frac{1}{x^j} \qquad (j \geqslant 1).$$

On a $K = \sum_{i \geqslant 0} s(i,1)$. On va calculer chaque $s(i,1)$ par une formule de recurrence en de $s(i-1,1), s(i-1,2), \cdots$ en utilisant que si j est grand, $s(i,j)$ est très petit.

$$S_{i+1} = \bigcup_{s \in S_i} \{10s, 10s+1, \dots, 10s+9\} \backslash \{10s+m\}.$$

On a donc,

$$s(i+1,j) = \sum_{x \in S_i} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{9} (10x+k)^{-j}.$$

Après on applique le théorème binomial négatif et on obtient

$$(10x+k)^{-j} = (10x)^{-j} \left(\frac{k}{10x} + 1\right)^{-j} = (10x)^{-j} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{j+n-1}{n} 1^{-j-n} (k/10x)^n.$$

Ainsi, quelle somme devient

$$\begin{aligned} s(i+1,j) &= \sum_{x\in S_i} \sum_{\substack{k=0\\k\neq m}}^{9} (10x)^{-j} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{j+n-1}{n} (k/10x)^n \\ &= \sum_{x\in S_i} \sum_{\substack{k=0\\k\neq m}}^{9} (10x)^{-j} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{j+n-1}{n} k^n (10x)^{-n} \end{aligned} \tag{1}$$

Rendons l'équation plus claire en faisant quelques définitions.

$$\begin{aligned} &c(j,n) = (-1)^j \binom{j+n-1}{n} \\ &b_n = 1^n + \ldots + 9^n - m^n \qquad (n \geqslant 0), b_0 = 9 \\ &a(j,n) = b_n c(j,n)/10^{j+n}. \end{aligned}$$

Alors, finalement on a

$$\begin{aligned} s(i+1,j) &= \sum_{x\in S_i} (10x)^{-j} \sum_{n=0}^{\infty} b_n c(j,n)(10x)^{-n} \\ &= \sum_{x\in S_i} \sum_{n=0}^{\infty} a(j,n) x^{-j-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a(j,n) s(i,j+n). \end{aligned} \tag{2}$$

Pour les petits i, il est possible de calculer $s(i,j)$ directement.

- Ainsi, pour $i \leqslant 4$, on calcule $s(i,j)$ explicitement.
- Pour $5 \leqslant i \leqslant 30$, on utilise la formule de récurrence dans (2).
- Pour $i \geqslant 31$, on va utiliser l'estimation,

$$\sum_{i=31}^{\infty} s(i,1) \approx 9 \cdot s(30,1) = a(1,0) \cdot s(30,1).$$

Si on calcule la valeur de $s(4,11)$, la valeur est inférieure à 10^{-30} et il est évident que lorsque i ou j (ou $j+n$ dans ce cas) augmente, nous obtenons des valeurs de plus en plus petites. Donc, on utilise (2) avec au plus 10 termes. Cette troncature nous permet donc de calculer pour au moins 20 chiffres de K. Par exemple, dernière ligne du tableau représentant la somme sans le chiffre 9, 20 décimales exactes.

m	S_m
0	23,10344790942054161603
1	16,17696952812344426657
2	19,25735653280807222453
3	20,56987759096123037107
4	21,32746579959003668663
5	21,83460081229691816340
6	22,20559815955609188416
7	22,49347531170594539817
8	22,72636540267937060283
9	22,92067661926415034816

TABLEAU 1 – Les valeurs sont tirées de [3]

2.4 Plus rapide : Fischer

En 1993, Hans-Jürgen Fischer [4] a également travaillé sur les séries de Kempner, mais pas sur des généralisations comme celles d'Irwin. Il a découvert une méthode incroyablement rapide pour calculer de nombreux chiffres. Nous présentons maintenant son idée.

Équation de la fonction

Soit M, l'ensemble des entiers dont les représentations décimales ne contiennent pas le chiffre 9. Le nombre dans M, est soit un nombre à un chiffre, qui est l'un de 1, 2, ..., 8 dans notre cas, soit il est formé en ajoutant l'un de ces chiffres à un nombre dans M avec moins de chiffres. Ainsi, nous avons :

$$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cup \bigcup_{z=0}^{8} \{10m + z : m \in M\} \tag{3}$$

Pour le calcul précis de la série $\sum_{m \in M} \frac{1}{m}$, on considère la fonction :

$$s(x) = \sum_{m \in M} \frac{1}{m + x}, x \geqslant 0,$$

qui, en raison de la convergence uniforme de la série pour $x > 0$, est bien définie et continue. De l'equation (3), il résulte que

$$\begin{aligned}
s(x) &= \frac{1}{1+x} + \cdots + \frac{1}{8+x} + \sum_{z=0}^{8} \sum_{m \in M} \frac{1}{10m + z + x} \\
&= \frac{1}{1+x} + \cdots + \frac{1}{8+x} + \frac{1}{10} \sum_{z=0}^{8} \sum_{m \in M} \frac{1}{m + \frac{z+x}{10}} \\
&= \frac{1}{1+x} + \cdots + \frac{1}{8+x} + \frac{1}{10} \sum_{z=0}^{8} s(\frac{z+x}{10}).
\end{aligned}$$

Alors, l'équation finale est,

$$s(x) - \frac{1}{10} \sum_{z=0}^{8} s(\frac{z+x}{10}) = \frac{1}{1+x} + \cdots + \frac{1}{8+x} = r(x). \tag{4}$$

On definit $r(x)$ comme le côté droit de l'équation (4). Nous pouvons continuer avec l'opérateur sur l'espace $C[0, 1]$ défini par :

$$(Af)(x) = \frac{1}{10} \sum_{z=0}^{8} f(\frac{z+x}{10}). \tag{5}$$

Cet opérateur permet de réécrire l'équation (4) sous la forme

$$s - As = r \tag{6}$$

Quelques propriétés de l'équation de l'opérateur

Les propriétés suivantes de l'opérateur A sont facile à vérifier.

1. A est linéaire.

2. $\|A\| = \frac{9}{10} < 1$.
3. Si f est non-négatif sur $[0,1]$, alors c'est vrai aussi pour Af.
4. Si p_n est un polynôme de degré n, alors Ap_n est aussi un polynôme de degré n.

Les propriétés 1, 3 et 4 peuvent etre facilement vérifiées en se référant à la définition (5). Pour propriété 2, on a,

$$\|A\|_{op} = \sup\{\|Af\|_\infty : \|f\|_\infty = 1\} = \frac{1}{10}\sum_{z=0}^{8} 1 = \frac{9}{10} < 1.$$

Ainsi, l'opérateur $I - A$ est inversible, où I désigne l'opérateur identité.

$$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \dots \tag{7}$$

et

$$||(I-A)^{-1}|| \leqslant (1 - ||A||)^{-1} = 10$$

Alors l'équation,

$$(I-A)f = g$$

admet une solution unique dans $C[0,1]$ pour tout $g \in C[0,1]$, et notre fonction désirée $s(x)$ est uniquement déterminée par (4) (ou (6)). Soit l la fonction définie par

$$l(g) = (I-A)^{-1}g(0) \qquad \text{pour } g \in C[0,1],$$

qui est évidemment linéaire. De la propriété 3 et l'équation (7), il résulte que $g_1(x) \leqslant g_2(x)$ pour tout $x \in [0,1]$, alors $l(g_1) \leqslant l(g_2)$ aussi vrai. De plus,

$$\|l\| \leqslant \left\|(I-A)^{-1}\right\| \leqslant 10 \tag{8}$$

en raison de

$$\sum_{m \in M} \frac{1}{m} = s(0) = (I-A)^{-1}r(0) = l(r),$$

Notre tâche se réduit donc à calculer $l(r)$. La base pour cela, puisque propriété 4, le $l(p)$ pour un polynôme p est facile à calculer, et il est bien connu que les fonctions dans $C[0,1]$ peuvent être approchées arbitrairement près par des polynômes.

Deux Récurrences

Pour un polynôme donné p, le polynôme $q = (I-A)^{-1}p$, déterminé de manière unique, peut être trouvé facilement en substituant dans l'équation $q - Aq = p$ et en comparant les coefficients. Mais, nous seulement intéressés par $l(p)$, et $p(x)$ peut être écrit comme $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ ou de façon équivalente comme $b_0 + b_1(1-x) + \cdots + b_n(1-x)^n$, il suffit de dériver des relations récursives pour les suites :

$$\alpha_n = l(x^n) \qquad \& \qquad \beta_n = l((1-x)^n)$$

Par définition, on a $l((I-A)g) = g(0)$ pour tout $g \in C[0,1]$. Pour un $t \in \mathbb{N}$ donné, Soit $g(x) = (e^{t/10} - 1)e^{tx}$, qui nous donne :

$$\begin{aligned} Ag(x) &= \frac{1}{10}(e^{t/10} - 1)\left(e^{tx/10} + \ldots + e^{t(x+8)/10}\right) \\ &= \frac{1}{10}(e^{t/10} - 1)e^{tx/10}\left(1 + e^{t/10} + \ldots + e^{8t/10}\right) \\ &= \frac{1}{10}(e^{t/10} - 1)e^{tx/10}\frac{e^{9t/10} - 1}{e^{t/10} - 1} = \frac{1}{10}(e^{9t/10} - 1)e^{tx/10} \end{aligned}$$

et à partir de là,

$$l\left((e^{t/10}-1)e^{tx}-\frac{1}{10}(e^{9t/10}-1)e^{tx/10}\right)=e^{t/10}-1$$

Développans les deux côtés en puissances de t :

$$\begin{aligned}
&l\left((e^{t/10}-1)e^{tx}-\frac{1}{10}(e^{9t/10}-1)e^{tx/10}\right)=(e^{t/10}-1)l(e^{tx})-\frac{1}{10}(e^{9t/10}-1)l(e^{tx/10})\\
&=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!10^n}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\alpha_n-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^nt^n}{n!10^n}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!10^{n+1}}\alpha_n\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}t^n\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_{n-k}}{(n-k)!k!10^k}-\sum_{n=0}^{\infty}t^n\sum_{k=1}^{n}\frac{9^k}{k!}\frac{\alpha_{n-k}}{(n-k)!10^{n+1}}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}t^n\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_{n-k}}{(n-k)!k!}\left(\frac{1}{10^k}-\frac{9^k}{10^{n+1}}\right)
\end{aligned}$$

D'autre part, $e^{t/10}-1$ peut être écrire comme $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!10^n}$. Après comparaison des coefficients, on obtient,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}\left(\frac{1}{10^k}-\frac{9^k}{10^{n+1}}\right)\alpha_{n-k}=\frac{1}{n!}\frac{1}{10^n}$$

Cette équation peut-être écrit sous la forme :

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(10^{n-k+1}-9^k\right)\alpha_{n-k}=10 \tag{9}$$

De l'équation (9), on peut obtenir $\alpha_0=10$, $\alpha_1=360/91$, etc. De la même manière, en utilisant $g(x)=(e^{t/10}-1)e^{t(1-x)}$, on peut obtenir,

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(10^{n-k+1}-10^k+1\right)\beta_{n-k}=10(11^n-10^n) \tag{10}$$

De l'équation (10), on peut obtenir $\beta_0=10$, $\beta_1=550/91$, etc. Pour appliquer ces résultats à l'équation (4), on a besoin d'approcher $r(x)$ par un polynôme. Puisque on recherche $l(r)$ et on juste trouvé comment on peut écrire $l(x^n)$ pour n arbitraire. Mais le développement limité de $r(x)$, converge très lentement dans $[0,1]$. On doit trouver une meilleure solution.

Une méthode analytique

On a trouvé une solution unique de l'équation (4) dans $C[0,1]$, mais il existe des solutions non bornées. Par exemple, une solution est $-\frac{1}{x}$, et peut être vérifiée par substitution. Cela signifie que la fonction non bornée $s_1(x)=s(x)+\frac{1}{x}$ satisfait l'équation $s_1-As_1=0$. Cependant, le fonction Digamma, $\psi(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ satisfait à l'équation suivante, [7, 6.4.8], où $n=0$ & $m=10$:

$$\psi(10x)=\ln(10)+\frac{1}{10}\sum_{k=0}^{9}\psi\left(x+\frac{k}{10}\right)\Rightarrow\psi(x)=\ln(10)+\frac{1}{10}\sum_{k=0}^{9}\psi\left(\frac{x+k}{10}\right).$$

Maintenant, on peut voir que la fonction $s_2(x)=s_1(x)+\psi(x)+\gamma$ satisfiant l'équation,

$$s_2(x)-As_2(x)=\cancelto{0}{s_1-As_1}+\psi-A\psi+\gamma-A\gamma$$

$$= \ln(10) + \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{9}\psi\left(\frac{x+k}{10}\right) - \frac{1}{10}\sum_{k=0}^{8}\psi\left(\frac{x+k}{10}\right) + \gamma - \frac{9\gamma}{10}$$
$$= \ln(10) + \frac{1}{10}\left[\psi\left(\frac{x+9}{10}\right) + \gamma\right] = r_1(x).$$

Aussi, puisque $s_1(x) = s(x) + \frac{1}{x}$, on peut remplacer dans s_2 et en utilisant [7, 6.3.5] on obtient,

$$s_2(x) = s(x) + \frac{1}{x} + \psi(x) + \gamma = s(x) + \psi(x+1) + \gamma.$$

Alors, s_2 est aussi en $C[0,1]$, et l'équation $s(0) = s_2(0) = l(r_1)$ est vraie grâce à [7, 6.3.2]. On peut aussi relier r_1 avec le fonction de zeta avec [7, 6.3.14]. Donc,

$$r_1(x) = \ln(10) + \frac{1}{10}\left[\psi\left(1 - \frac{1-x}{10}\right) + \gamma\right] = \ln(10) - \frac{1}{10}\sum_{n=2}^{\infty}\zeta(n)\left(\frac{1-x}{10}\right)^{n-1}.$$

Mais, on recherche $s(0)$, ou de manière équivalente $l(r_1)$. On a donc :

$$\sum_{m\in M}\frac{1}{m} = l(r_1) = l(\ln(10)) - l(\sum_{n=2}^{\infty}\zeta(n)(1-x)^{n-1}10^{-n})$$
$$= \ln(10)l((1-x)^0) - \sum_{n=2}^{\infty}\zeta(n)10^{-n}l((1-x)^{n-1})$$
$$= \beta_0\ln(10) - \sum_{n=2}^{\infty}\zeta(n)10^{-n}\beta_{n-1}$$

On peut aussi trouver l'erreur de troncature. Puisque β_n et ψ_n sont decroissantes, le rapport de deux termes est plus petit que 0.1. Ce pourquoi, l'erreur est plus petite que $0.1{+}0.001{+}\ldots = 1/9$ fois ea dernier terme inclus. Maintenant, on va proposer une nouvelle methode pour calculer avec beaucoup plus de precision.

Approximation de Chebyshev

Maintenant on va utiliser les polynômes de Chebyshev de première espèce,

$$T_n(y) = \cos(n\arccos(y))$$

On a donc,

$$|T_n(y)| \leqslant 1 \quad \text{pour} \quad y \in [-1,1] \Rightarrow |T_n(1-2x)| \leqslant 1 \quad \text{pour} \quad x \in [0,1].$$

Le polynômiel $T_{n+1}(3) - T_{n+1}(1-2x)$ vaut zéro quand $x = -1$, donc est divisible par $1 + x$. Alors on definit $Q_n(x)$ comme, $(T_{n+1}(3) - T_{n+1}(1-2x))/(1+x)$. On a donc,

$$\frac{T_{n+1}(3) - 1}{1+x} \leqslant \frac{T_{n+1}(3) - T_{n+1}(1-2x)}{1+x} = Q_n(x) \leqslant \frac{T_{n+1}(3) + 1}{1+x}$$

puisque $|T_{n+1}(1-2x)| \leqslant 1$. Après, on divise $Q_n(x)$ par $T_{n+1}(3)$ et on définit,

$$\frac{Q_n(x)}{T_{n+1}(3)} = \sum_{k=0}^{n} q_{n_k}x^k$$

on a

$$\left(1-\frac{1}{T_{n+1}(3)}\right)\frac{1}{1+x} \leqslant \sum_{k=0}^{n} q_{n_k} x^k \leqslant \left(1+\frac{1}{T_{n+1}(3)}\right)\frac{1}{1+x} \quad \text{pour} \quad x \in [0,1]$$

et parce que

$$\frac{1}{m+x} = \frac{1}{m}\frac{1}{1+x/m} \quad \text{pour} \quad m = 1,2,...,8$$

En remplaçant x par x/m et en multipliant chaque côté des inégalités par $1/m$, on obtient

$$\left(1-\frac{1}{T_{n+1}(3)}\right)\frac{1}{m+x} \leqslant \sum_{k=0}^{n} q_{n_k} \frac{1}{m^{k+1}} x^k \leqslant \left(1+\frac{1}{T_{n+1}(3)}\right)\frac{1}{m+x} \quad \text{pour} \quad x \in [0,1]$$

En sommant ces inégalités pour $m = 1,\ldots,8$ et appliquer l, on a

$$\left(1-\frac{1}{T_{n+1}(3)}\right)\sum_{m\in M}\frac{1}{m} \leqslant \sum_{k=0}^{n} q_{n_k}\alpha_k H_{k+1} \leqslant \left(1+\frac{1}{T_{n+1}(3)}\right)\sum_{m\in M}\frac{1}{m} \tag{11}$$

où H_{k+1} est défini par,

$$H_k = 1 + \frac{1}{2^k} + \ldots + \frac{1}{8^k}$$

De plus, en utilisant [8, 1.49], on peut réécrire la polynôme da Chebyshev de première espèce de manière non récursive.

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n\right]$$

Cette formule nous donne une estimation de degré suffisant pour une precision donnée. On a,

$$T_n(3) = \frac{1}{2}((3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n) \approx \frac{1}{2}(3+2\sqrt{2})^n \qquad \text{pour les grands } n.$$

Alors si on veut 50 chiffres de précision, on doit calculer la polynôme de degré 70, puisque $T_{70}(3) \approx 10^{53}$, alors,

$$(1-10^{-53})\sum_{m\in M}\frac{1}{m} \leqslant \sum_{k=0}^{n} q_{n_k}\alpha_k H_{k+1} \leqslant (1+10^{-53})\sum_{m\in M}\frac{1}{m}.$$

Si on fait le calcul pour $n = 70$, et le terme d'erreur est 10^{-53}. On a,

$\boxed{\texttt{22.9206766192 6415034816 3657094375 9319149447 6243699848 1586404710 48521259}}$

$\leqslant s(0) \leqslant$

$\boxed{\texttt{22.9206766192 6415034816 3657094375 9319149447 6243699848 1545840772 76734915}}$

Comme on peut voir, on a trouvé la valeur de somme pour une précision de 52 chiffres.

2.5 Généralisation de Schmelzer-Baillie

Kempner a demandé ce qui se passerait si l'on restreint le chiffre 9 dans la série harmonique, et on peut naturellement demander ce qui se passera si l'on restreint un motif au lieu d'un chiffre. Par exemple, quelle est la somme de $1/s$ où s est un nombre naturel qui n'inclut pas le motif "42" ? Cette question a été posée pour la première fois par Bornemann [9]. En 2008, Schmelzer et Baillie [5] ont donné une réponse à ce type de questions et à d'autres encore. Avec leur méthode, on peut facilement calculer la somme sans le motif "42" ou "314159" ou toute combinaison de ces contraintes.

Matrices de récurrence

Définition 1. *Soient X une chaîne de n chiffres, et S l'ensemble des nombres naturels qui n'incluent pas X en base 10. Alors*

$$\Psi = \sum_{x \in S} \frac{1}{s}.$$

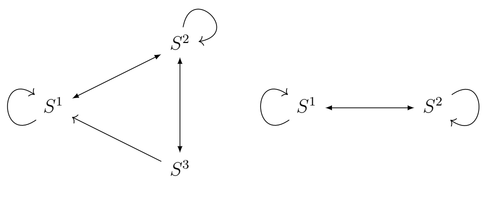
On définit ensuite S_i comme l'ensemble des entiers de S qui ont exactement i chiffres. On peut aussi partitionner S_i en S_i^j pour $j = 1, 2, \ldots, n$ tel qu'il y a une relation de récurrence entre S_{i+1}^j et les ensembles $S_i^1, \ldots, S_i^n$. Donc on définit S_i^j comme l'ensemble de tous les membres de S_i dont les derniers $j-1$ chiffres sont exactement égaux avec les premiers $j-1$ chiffres de X, mais dont les derniers j chiffres sont différents des premiers j chiffres de X. Après avoir relié les ensembles, on obtient la somme comme suit

$$\Psi = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{s \in S_i^j} \frac{1}{s}.$$

On definit une matrice T de dimension $n \times 10$. L'entrée (j, d) de T indique l'ensemble obtenu après l'ajout du chiffre d à chaque élément de S^j. On définit $T(j, d) = 0$, si l'ajout du chiffre d conduit à sortir de S.
Par exemple, si on prend $X = 42$, on partitionne S en deux parties, S^1 sont les éléments de S qui ne se terminent pas par 4, et S^2 sont les éléments de S, se terminant par 4. Alors le tableau T est

$$T = \left[\begin{array}{c|cccccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

La relation entre les ensembles $S^1, \ldots, S^n$ peut également être montrée par un graphe orienté. Il y a une arête de S^i à S^j si l'ajout d'un chiffre aux éléments de S^i donne un élément de S^j. Par exemple, le graphe de droite est le graphe de T défini ci-dessus, et le graphe de gauche est graphe de la contrainte $X = 314$.



(12)

Il est important de noter que l'on travaille ici avec des graphes fortement connexe. Premièrement, on commence avec une définition.

$$\Psi_{i,k}^j = \sum_{s \in S_i^j} \frac{1}{s^k}.$$

Donc, le probléme est réduit à calculer

$$\Psi = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{\infty} \Psi_{i,1}^j.$$

La relation récursive des ensembles S_i^j est utilisée pour dériver une relation de récurrence pour les sommes $\Psi_{i,k}^j$. Donc, on introduit un tenseur f de dimension $n \times n \times 10$ comme

$$f_{jlm} = \begin{cases} 1 & \text{si } T(l,m) = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce tenseur indique si un terme doit être inclus ou non. Ainsi la somme est

$$\Psi_{i,k}^j = \sum_{m=0}^{9} \sum_{l=1}^{n} f_{jlm} \sum_{s \in S_{i-1}^l} (10s+m)^{-k}.$$

En utilisant la série binomiale négative, on observe

$$(10s+m)^{-k} = (10s)^{-k} \sum_{w=0}^{\infty} (-1)^w \binom{k+w-1}{w} \left(\frac{m}{10s}\right)^w$$

où $0^0 = 1$. On définit également

$$\begin{aligned} c(k,w) &= (-1)^w \binom{k+w-1}{w} \\ a(k,w,m) &= 10^{-k-w} c(k,w) m^w. \end{aligned}$$

Donc la somme est égale à

$$\begin{aligned} \Psi_{i,k}^j &= \sum_{m=0}^{9} \sum_{l=1}^{n} f_{jlm} \sum_{s \in S_{i-1}^l} (10s)^{-k} \sum_{w=0}^{\infty} c(k,w) \left(\frac{m}{10s}\right)^w \\ &= \sum_{m=0}^{9} \sum_{l=1}^{n} f_{jlm} \sum_{w=0}^{\infty} 10^{-k-w} c(k,w) m^w \sum_{s \in S_{i-1}^l} s^{-k-w}. \end{aligned}$$

Et donc,

$$\Psi_{i,k}^j = \sum_{m=0}^{9} \sum_{l=1}^{n} f_{jlm} \sum_{w=0}^{\infty} a(k,w,m) \Psi_{i-1,k+w}^l. \tag{13}$$

Troncature et extrapolation

Maintenant, on va faire une analyse numérique du problème. Jusqu'à présent, on a seulement reformulé la somme en utilisant les sommes partielles $\Psi_{i,k}^j$. On doit calculer $\Psi = \sum_{i,j} \Psi_{i,1}^j$.

Pour $i \leqslant 3$, les sommes $\Psi_{i,k}^j$ sont calculées explicitement sans approximation. Pour $i > 3$, on utilise la formule récursive de (13). Pour w, on va tronquer en négligeant tous les termes $\Psi_{i-1,k+w}^l$ plus petit que une limite donnée ε, c'est-à-dire quand $k+w$ est suffisamment grand. Pour la même raison, on peut négliger les termes pour i grand avec $k+w > 1$. L'équation (13) avec $w = 0$ et $k = 1$ sous la forme matricielle est

$$\begin{pmatrix} \Psi_{i,1}^1 \\ \vdots \\ \Psi_{i,1}^n \end{pmatrix} \approx \sum_{m=0}^{9} 10^{-1} \begin{pmatrix} f_{11m} & \dots & f_{1nm} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1m} & \dots & f_{nnm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_{i-1,1}^1 \\ \vdots \\ \Psi_{i-1,1}^n \end{pmatrix} = A_n \begin{pmatrix} \Psi_{i-1,1}^1 \\ \vdots \\ \Psi_{i-1,1}^n \end{pmatrix} \tag{14}$$

Donc, on définit A_n comme la somme de matrices ci-dessus. La matrice non négative A_n est contractante, c'est-à-dire toutes les valeurs propres de A_n se trouvent à l'intérieur du disque unité.

Définition 2. *Le digraphe associé à la matrice $n \times n$ A_n est le graphe orienté avec sommets numératés et une arête de i vers j si et seulement si $A(i,j) \neq 0$. [10, Définition 6.2.11]*

Le digraphe associé de A_n^T représentant les ensembles S^j est exactement le graphe introduit ci-dessus (12). On suppose que ce graphe est fortement connexe et donc A_n et A_n^T sont irreductibles [10, Théorème 6.2.14]. Ainsi, le théorème suivant est applicable [10, Théorème 8.4.4].

Théorème 2 (Perron-Frobenius)**.** *Soit A une matrice non négative et irréductible. Alors ;*

- *Il existe une valeur propre λ_d qui est réelle et positive, avec vecteurs propres positifs à gauche et à droite.*
- *Les autres valeurs propres λ satisfont $|\lambda| < \lambda_d$.*
- *La valeur propre λ_d est simple.*

Alors, la valeur propre λ_d s'appelle la valeur propre dominante de A.

Ici, on doit juste montrer que la valeur propre dominante λ_d de A_n est plus petite que 1. Prenons la l-iéme colonne de la matrice

$$\begin{pmatrix} f_{11m} & \cdots & f_{1nm} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1m} & \cdots & f_{nnm} \end{pmatrix}.$$

Par définition de f, la ligne $T(l,m)$ admet un 1 si $T(l,m) > 0$. Toutes les autres entrées de la colonne sont zéro. Ainsi pour chaque colonne a_i, on a $\|a_i\|_1 \leqslant 1$. L'existence de colonnes pour lesquelles toutes les entrées sont zéro implique qu'il existe des colonnes de A_n avec $\|a_i\|_1 < 1$. Soit x la valeur propre à droite de A_n correspondant à λ_d. Alors, on a

$$\lambda_d \|x\|_1 = \|A_n x\|_1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|a_i\|_1 < \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|x\|_1 .$$

Ainsi, $\lambda_d < 1$. On a montré que $\mathrm{spec}(A_n)$ se trouve à l'intérieur de disque unité. Pour un grand K, on peut simplifier

$$\sum_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \Psi_{i+K,1}^1 \\ \vdots \\ \Psi_{i+K,1}^n \end{pmatrix} \approx \sum_{i=1}^{\infty} A_n^i \begin{pmatrix} \Psi_{K,1}^1 \\ \vdots \\ \Psi_{K,1}^n \end{pmatrix}.$$

Puisque A_n est une matrice contractante, on peut définir

$$B_n^\infty := \sum_{k=1}^{\infty} A_n^k = (I_n - A_n)^{-1} - I_n.$$

On a donc

$$\Psi \approx \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{K} \Psi_{i,1}^j + \left\| B_n^\infty \begin{pmatrix} \Psi_{K,1}^1 \\ \vdots \\ \Psi_{K,1}^n \end{pmatrix} \right\|_1 . \tag{15}$$

Comportement asymptotique

On definit la *période* de la chaîne comme la longueur du plus petit motif qui se répète. Dans le premier tableau, il y a les valeurs de $\Psi/10^n$ pour différents X aléatoires et le deuxième

Tableau 2 – Chaînes aléatoire de longueur 20, tirées de [5]

n	Chaîne X_n	$\Psi/10^n$
20	21794968139645396791	2,30258 50929 94045 68397 52162
20	31850115459210380210	2,30258 50929 94045 68399 08824
20	67914499976105176602	2,30258 50929 94045 68401 09579
20	98297963712691768117	2,30258 50929 94045 68401 77079

Tableau 3 – Chaînes de periode 1 et 2, tirées de [5]

n	Chaîne X_n	$\Psi/10^n$
20	00000000000000000000	2,55842 78811 04495 20443 88506
20	99999999999999999999	2,55842 78811 04495 20443 88506
20	42424242424242424242	2,32584 35282 76813 82219 89695
20	09090909090909090909	2,32584 35282 76813 82221 85405

tableau, pour X avec les chaînes de période 1 et 2.

On peut voir que, bien que les chaînes soient complètement différentes, les sommes 'normalisées' sont presque les mêmes que $\ln(10) \approx 2,30258\ 50929\ 94045\ 68401\ 79914$. Plus généralement on peut donner le théorème suivant avec le petit détail que l'absence de motif périodique signifie que p tend vers l'infini.

Théorème 3. *Soit X_n un motif de longueur n et période p. Alors, la somme de $1/s$ où s n'inclut pas X_n, verifie :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Psi_{X_n}}{10^n} = \frac{10^p}{10^p - 1} \ln(10).$$

Schmelzer a donné une preuve seulement pour le cas $p = 1$. Pour ce cas, on a $X_n = dd\ldots d$ de n chiffres. On analyse le spectre de la matrice A_n dans (14). Premièrement on écrit le tableau T et matrice A_n.

$$T = \left[\begin{array}{c|ccccc} & 0 & \ldots & d & \ldots & 9 \\ \hline 1 & 1 & \ldots & 2 & \ldots & 1 \\ 2 & 1 & \ldots & 3 & \ldots & 1 \\ \vdots & & & \vdots & & \\ n & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right], \qquad A_n = \begin{pmatrix} 9/10 & 9/10 & \ldots & \ldots & 9/10 \\ 1/10 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1/10 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1/10 & 0 \end{pmatrix}.$$

On va étudier le spectre de A_n, et pour cela, on a besoin du Théorème de Gershgorin [10, Théorème 6.1.1] comme suit.

Théorème 4 (Gershgorin)**.** *Soit A matrice de taille $n \times n$, et soit*

$$R_i(A) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

la somme de valeurs absolues des des élements de la ligne i, sauf celui de la diagonale. Alors toutes les valeurs propres de A se trouvent dans l'union de n disques de Gershgorin

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leqslant R_i(A)\}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

En plus, si l'union de k de ces n disques forment un ensemble G tel que G est disjoint des autres $n-k$ disques, alors G contient exactement k valeurs propres de A, comptées selon leurs multiplicités algébriques.

On va continuer cette démonstration avec une série de lemmes, et ensuite le résultat souhaité sera obtenu trivialement.

Lemme 1. *La matrice A_n est diagonalisable. En plus, les valeurs propres de la matrice A_n sont les solutions de l'équation*

$$\lambda^n(1-\lambda) = 9/10^{n+1} \tag{16}$$

à l'exception de 1/10. En plus, il y a exactement $n-1$ valeurs propres de A_n dans un disque de rayon 1/10 centré à l'origine, et $(\lambda^{n-1}, \lambda^{n-2}, \ldots, 1)^T$ est un vecteur propre de A_n.

Démonstration. Pour trouver les valeurs propres de A_n, on doit déterminer les λ qui satisfont $|A_n - \lambda I_n| = 0$. Soit $x = 10\lambda$.

$$\begin{aligned}
|A_n - \lambda I_n| &= \frac{1}{10^n}\left|\begin{pmatrix} 9-x & 9 & \ldots & 9 \\ 1 & -x & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -x \end{pmatrix}\right| \\
&= (9-x)(-x)^{n-1} - 9(-x)^{n-2} + \ldots \pm 9(-x)^0 \\
&= (-x)^n + 9\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n-i+1}(-x)^i = (-x)^n + 9\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n+1}x^i = 0 \\
&\Rightarrow -10(-x)^n = -9(-x)^n + 9\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{n+1}x^i \\
&\Rightarrow \sum_{i=0}^{n}(-1)^n x^i = \frac{10(-x)^n}{9} \Rightarrow \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{10x^n}{9}, \qquad (x \neq 1) \\
&\Rightarrow 9 = x^n(10-x) = 10^n\lambda^n 10(1-\lambda) \Rightarrow \frac{9}{10^{n+1}} = \lambda^n(1-\lambda).
\end{aligned}$$

Donc A_n admet n valeurs propres, alors elle est diagonalisable. On a aussi

$$10A_n\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\sum_{i=1}^n x_i \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Alors, $x_{n-k} = \lambda^k x_n$. Donc $(\lambda^{n-1}, \ldots, \lambda, 1)^T$ est un vecteur propre de A_n en choisissant $x_n = 1$. Les racines du polynôme $x^n(10-x) - 9$ sont les valeurs propres de la matrice compagnon de dimension $(n+1) \times (n+1)$.

$$H_{n+1} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & \ldots & 0 & -9 \\ 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On écrit $H_{n+1} = D_{n+1} + B_{n+1}$ où $D_{n+1} = \mathrm{diag}(10, 0, \ldots, 0)$ et on pose $H^\varepsilon_{n+1} = D_{n+1} + \varepsilon B_{n+1}$ for $\varepsilon \in [0,1]$. Pour tout $\varepsilon < 1$, l'union des disques Gershgorin de rayon ε centrés à l'origine est disjointe du disque centré en 10. Parce que les valeurs propres de H^ε_{n+1} sont des fonctions continues de ε, il y a n valeurs propres de H^1_{n+1} situées à l'intérieur du disque unité fermé, avec une valeur propre simple à 1. Donc il y a $n-1$ valeurs propres de A_n à l'intérieur du disque de rayon 1/10. □

Lemme 2. *Soit λ_n la valeur propre dominante de A_n. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n^n = 1. \tag{17}$$

Démonstration. Puisque λ_n est une valeur propre de A_n, elle est solution de (16). Les zéros de la dérivée de ce polynôme sont $n\lambda^{n-1} = (n+1)\lambda^n \Rightarrow \lambda = \frac{n}{n+1}$. Alors (16) est décroissant après $\lambda = n/n+1$. Mais pour $\lambda = (1-1/10^n)$, on a $\lambda^n(1-\lambda) > 9/10^{n+1}$, et donc $1 > \lambda_n > (10^n-1)/10^n$. Il suffit de prendre la puissance n-ième de tous termes pour finir la preuve. □

Lemme 3. *Soit Ω_n la valeur propre dominante de $1/10^n B_n^\infty$. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \Omega_n = \frac{10}{9}. \tag{18}$$

Démonstration. Soit λ_n la valeur propre dominante de A_n. On a donc

$$\lim_{n\to\infty} \Omega_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(1-\lambda_n)^{-1} - 1}{10^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{10^{n+1}\lambda_n^n}{9 \times 10^n} - \frac{1}{10^n} \right) = \frac{10}{9}.$$

□

La valeur propre dominante de $1/10^n B_n^\infty$ est la valeur propre dominante de $10A_n$. La valeur propre dominante de $10A_n$ approche de 10 et donc le vecteur propre approche de $(1, 1/10, \ldots, 1/10^{n-1})^T$, où le vecteur est normalisé pour la première composante.

Lemme 4. *Soit $\Psi_{n-1,1}^1, \ldots, \Psi_{n-1,1}^n$ les sommes partielles des réciproques de nombres de $n-1$ chiffres associés avec le motif $X = d \ldots d$ de longueur n. Alors*

$$\left\| B_n^\infty \begin{pmatrix} \Psi_{n-1,1}^1 \\ \vdots \\ \Psi_{n-1,1}^n \end{pmatrix} \right\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{10}{9} \ln(10).$$

Démonstration. La norme du vecteur

$$\begin{pmatrix} \Psi_{n-1,1}^1 \\ \vdots \\ \Psi_{n-1,1}^n \end{pmatrix}$$

est exactement la somme de $1/s$ sur tous les entiers positifs ayant exactement $n-1$ chiffres. Aucun entier n'a encore été supprimé. Donc

$$\left\| \begin{pmatrix} \Psi_{n-1,1}^1 \\ \vdots \\ \Psi_{n-1,1}^n \end{pmatrix} \right\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{10^{n-1}}^{10^n} \frac{1}{t} dt = \ln(10).$$

La prochaine affirmation est que

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{\Psi_{n-1,1}^1} \begin{pmatrix} \Psi_{n-1,1}^1 \\ \vdots \\ \Psi_{n-1,1}^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1/10 \\ \vdots \\ 1/10^{n-1} \end{pmatrix} \right\|_1 = 0.$$

La première entrée est évidemment zéro. La deuxième entrée est le rapport de la somme des nombres à $n-1$ chiffres se terminant par d mais pas dd aux nombres à $n-1$ chiffres ne se terminant pas par d. C'est-à-dire, le rapport des nombres de la forme $x\dots yd$ et $z\dots t$, où x et z peuvent être n'importe quels chiffres, tandis que y et t sont des chiffres différents que d. Le nombre de termes dans les deux sommes est exactement $\frac{10^{n-2}\times 9}{10^{n-1}\times 9}=\frac{1}{10}$. Ce rapport tend vers 1/10, puisque les nombres se terminant par d sont également distribués entre les nombres ne se terminant pas par d. Le même argument s'applique pour les autres colonnes. Donc, le vecteur

$$\begin{pmatrix}\Psi^1_{n-1,1}\\ \vdots \\ \Psi^n_{n-1,1}\end{pmatrix}$$

tend vers le vecteur propre dominant de B_n^∞ en approchant la norme $\ln(10)$. □

En utilisant le Lemme 4, on peut examiner l'équation (15) dans une nouvelle perspective, où on fixe la variable de troncature K à $n-1$ et introduit un terme d'erreur e_n. Donc (15) est maintenant égale à

$$\frac{\Psi_{X_n}}{10^n}=\frac{1}{10^n}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n-1}\Psi^j_{i,1}+\left\|B_n^\infty\begin{pmatrix}\Psi^1_{n-1,1}\\ \vdots \\ \Psi^n_{n-1,1}\end{pmatrix}\right\|_1+e_n\right).$$

Les plus grands termes collectés dans e_n sont $\Psi^j_{n-1,2}$ pour $j=1,\dots,n$. Leur somme est plus petite que $9/10^{n-2}$. Alors les termes négligés, deviennent exponentiellement petits pour n grand. On observe aussi que pour n grand, la somme double multipliée par 10^{-n} converge vers zéro en raison de la croissance trop lente de la somme. Le terme d'erreur e_n est mis à l'échelle par 10^{-n} montrant que la somme qu'on néglige disparaît aussi. Donc le Lemma 4 implique que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Psi_{X_n}}{10^n}=\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{10^n}B_n^\infty\begin{pmatrix}\Psi^1_{n-1,1}\\ \vdots \\ \Psi^n_{n-1,1}\end{pmatrix}\right\|_1=\frac{10}{9}\ln(10).$$

2.6 Plus rapide & général : Jean-François Burnol

Jean-François Burnol a également travaillé sur ce problème en 2024 et a trouvé un algorithme plus efficace en utilisant la théorie de mesure et d'intégration.

Professeur Burnol donne la preuve, [6] pour toute base b et tout ensemble de restriction A, mais nous ne donnerons ici que le cas de la somme de Kempner.

Maintenant, nous devons introduire quelques notations. Tout d'abord, nous définissons l'ensemble des chiffres *admissibles* A comme un sous-ensemble de l'ensemble des chiffres en base de b, $\{d\in\mathbb{Z}, 0\leqslant d<b\}$. Aussi soit,

$$K(A)=\sum_{n>0}{}' \frac{1}{n}, \tag{19}$$

où le symbole prime $'$ indique que le nombre naturel n est ajouté à la somme si, est seulement si, tous les chiffres appartiennent à l'ensemble A défini ci-dessus. Bien sûr, une entier positif est dit admissible si sa représentation décimale contient uniquement des chiffres admissibles. Aussi, soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des entiers non négatifs admissibles. Alors la sommation avec le symbole prime $\sum'_n$ signifie que $n\in\mathcal{A}$. Nous définissons également $N=\#A$ and $N_1=\#(A\backslash\{0\})$. Le regroupement par nombre de chiffres est toujours utilisé depuis l'article original de Kempner [1] et aussi dans l'algorithme de Baillie [3], nous avons donc besoin d'une notation pour représenter le nombre de chiffres d'un entier. Soit $l(n)$ le nombre de chiffres de l'entier n. En d'autres termes, $l(n)$ est l'éxposant plus petit non négatif l tel que $n < b^l$. Maintenant, nous définissons deux quantités pour le théorème principal.

$$\beta_{l,m} = \sum_{l(n)=l}' n^{-m}, \tag{20}$$

et

$$\gamma_j = \begin{cases} \sum'_{l(n)=1} n^j & (j \geqslant 1), \\ N & (j = 0). \end{cases} \tag{21}$$

Maintenant, nous pouvons présenter le résultat.

Théorème 5. *Soit $l \geqslant 1$ choisi arbitrairement. Soit $K = \sum'_{n>0} \frac{1}{n}$. Alors,*

(a) Le "Somme de Kempner" K peut etre calculée avec :

$$K = \sum_{0<n<b^{l-1}}' \frac{1}{n} + \frac{b}{b-N} \sum_{l(n)=l}' \frac{1}{n} a + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m u_m \beta_{l,m+1}. \tag{22}$$

Où les u_m sont déterminés par $u_0 = \frac{b}{b-N}$ et la relation de récurrence,

$$(b^{m+1} - N) u_m = \sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j} \gamma_j u_{m-j}, \qquad (m \geqslant 1). \tag{23}$$

(b) Les quantités λ_{m+1} implicitement définies par

$$u_m = \frac{\lambda_{m+1}}{m+1} \left(\frac{max A}{b-1} \right)^m \frac{b}{b-N}, \tag{24}$$

Satifait $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_{m+1} < 1$ pour $m \geqslant 1$.

(c) La convergence de (22) est bornée géométriquement sauf pour $l = 1$, $1 \in A$ et $b - 1 \in A$ en même temps.

Le calcul de u_m prendre beaucoup plus de temps que les autres calculs. Comme u_m est défini par nature récursive, le calcul ne peut pas facilement parallélisé.

Somme de Kempner comme intégrales

Dans cette section, nous voulons relier le K en (19) à une intégrale. Pour cet objectif, nous définissons une mesure μ sur $[0, \infty)$ ainsi :

$$\mu = \begin{cases} \sum_{l \geqslant 0} b^{-l} \sum' \delta_{n/b^l} & \text{si } 0 \in A, \\ \sum' \delta_n + \sum_{l \geqslant 1} b^{-l} \sum_{n \geqslant b^{l-1}}' \delta_{n/b^l} & \text{si } 0 \notin A. \end{cases} \tag{25}$$

Même si nous avons donné la formule pour μ en général, nous allons prouver les théorèmes pour seulement la cas de Kempner ($A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $b = 10$, $N = 9$). Alors, $\mu = \sum_{l \geqslant 0} 10^{-l} \sum' \delta_{n/10^l}$ dans ce cas, et l'intégrale est définie comme,

$$\int_I f(x) d\mu(x) = \sum_{l \geqslant 0} 10^{-l} \sum_{n/10^l \in I}' f(n/10^l). \tag{26}$$

Avant tout autre chose, mettons K en relation avec une intégrale,

$$\int_{[\frac{1}{10},1)} \frac{d\mu(x)}{x} = \sum_{l\geqslant 0} \frac{1}{10^l} \sum_{\frac{n}{10^l}\in[\frac{1}{10},1)}' \frac{10^l}{n} = \sum_{l\geqslant 0} 10^{-l} \sum_{n\in[10^{l-1},10^l)}' \frac{10^l}{n} = \sum_{n>0}' \frac{1}{n} = K \tag{27}$$

Ainsi, une approximation de x^{-1} avec une polynôme sur l'intervalle $[0.1, 1]$, nous donnerait l'approximation de K. Dans ce memoire, nous travaillerons aves les moments de μ sur $[0, 1)$.

$$u_m = \int_{[0,1)} x^m d\mu(x) \qquad (m \geqslant 0). \tag{28}$$

Car $u_m \leqslant u_0$, pour montrer que u_m est fini pour tout m, nous montrerons que u_0 l'est.

$$u_0 = \mu([0,1)) = \sum_{l\geqslant 0} 10^{-l} \left|\{n \in \mathcal{A}, n < 10^l\}\right| = \sum_{l\geqslant 0} 10^{-l} 9^l = 10.$$

Cela signifie que $u_0 = 10$. Nous allons maintenant parler du support de μ. Formellement, le support d'une mesure est l'ensemble de tous les points x ayant $\mu(U) > 0$ pour chaque ensemble ouvert U contenant x [11, Définition 2.1].

Ici, $x \in \mathbb{Q}_{>0}$ est dans le support de μ si et seulement si sa fraction irréductible peut être écrite sous la forme $n/10^l$ où $n \in \mathcal{A}$. De plus, si $n/10^l$ est dans $\mathrm{supp}(\mu)$, $n/10^{l+1}$ est aussi dans $\mathrm{supp}(\mu)$. Le poids total à l'origine est donc $1 + 10^{-1} + \ldots = 10/9$. Si x est dans $\mathrm{supp}(\mu)$ et n'est pas un entier, alors $10x$ est aussi dans $\mathrm{supp}(\mu)$ et le poids de δ_{10x} est 10 fois δ_x.

Proposition 1. *Soit n un entier positif, si n n'est pas admissible, la restriction de μ à $[n, n+1)$ est zéro, sinon c'est la translation par n de la restriction de μ à $[0, 1)$.*

Démonstration. Nous savons que l'entier positif n est dans le support si et seulement s'il est admissible, et le poids dans μ de δ_n est 10/9. Supposons maintenant que $x \in (n, n+1)$ soit dans le support si $n > 0$. Sa représentation irréductible doit être $x = m/10^l$ avec m admissible et $l \geqslant 1$. Mais comme $x > 1$, m doit $q > l$ chiffres, donc n, la partie entière de x, est admissible. Ecrivons maintenant $m = 10^l n + p$ avec $0 \leqslant p < 10^l$. Alors p est également admissible car il est obtenu à partir des l derniers chiffres de m. On sait aussi que $10 \nmid p$ puisque $10 \nmid m$. Donc la différence $y = x - n = p/10^l$ *dans*$(0, 1)$ est dans le support de μ. Autre côté, à partir d'un tel $y \in (0, 1)$ dans le support de μ, on l'écrit $p/10^l$ pour un certain p admissible, donc $m = 10^l n + p$ est admissible et $x = y + n = m/10^l$ est dans le support de μ. □

Soit m un entier positif avec au moins l chiffres et $ld_l(m)$ l'entier dans $[10^{l-1}, 10^l)$ partageant avec m ses l chiffres de tête. Si $m \in \mathcal{A}$, évidemment $ld_l(m) \in \mathcal{A}$.

Lemme 5. *Pour tout $n \in \mathcal{A}$ non nul de longueur $l(n)$,*

$$\int_{[0,1)} \frac{1}{n+x} d\mu(x) = \sum_{ld_{l(n)}(m)=n}' \frac{1}{m}.$$

Démonstration. Si prendre l'intégrale en utilisant (26), on obtient,

$$\sum_{l\geqslant 0} 10^{-l} \sum_{p/10^l\in[0,1)}' \frac{1}{(n + p/10^l)}.$$

Ici, $l = 0$ ne contribue que pour $p = 0$, ce qui donne $1/n$. Puisque nous pouvons écrire chaque m comme $m = 10^l n + p$, cela donne une corrélation biunivoque avec $\mathrm{ld}_{l(n)} m = n$ et les paires (l, p) avec $l \geqslant 1$ et $p < 10^l$ admissibles. Ceci conclut notre démonstration. □

Les sommes de Kempner en tant que séries alternées

On peut maintenant commencer à prouver notre théorème principal qui calcul la valeur de $K(A)$ en (19).

Théorème 6. *Pour tout $l \geqslant 1$, on a :*

$$K = \sum_{0<n<10^{l-1}}' \frac{1}{n} + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m u_m \sum_{l(n)=l}' \frac{1}{n^{m+1}}. \tag{29}$$

En plus, le moments (u_m) de μ est une suite décroissante et converge vers zéro.

Démonstration.

- $u_m > u_{m+1}$ est clair de la définition de u_m (28) puisque le domaine est plus petit que 1 : $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Sa convergence vers zéro vient de l'argument suivant, $\forall \varepsilon \in (0,1), \int_{[0,1)} x^m d\mu(x) = \int_{[0,1-\varepsilon)} x^m d\mu(x) + \int_{[1-\varepsilon,1)} x^m d\mu(x) \leqslant (1-\varepsilon)^m \int_{[0,1-\varepsilon)} d\mu(x) + \int_{[1-\varepsilon,1)} x^m d\mu(x) \underset{\varepsilon\to 0}{\leqslant} (1-\varepsilon)^m u_0 + \mu([1-\varepsilon,1))$. Ainsi on a $\lim u_m = 0$.
- D'abord, on sépare la somme en deux parties. Contributions de $1/n$, où $n \geqslant 10^{l-1}$ et $n < 10^{l-1}$. On travaille sur la partie de $n \geqslant 10^{l-1}$. On a :

$$\sum_{n\geqslant 10^{l-1}}' \frac{1}{n} = \sum_{n\in[10^{l-1},10^l)}' \sum_{ld_l(m)=n}' \frac{1}{m}.$$

Alors, si on combine cette équation avec $n < 10^{l-1}$, on a :

$$\forall l \geqslant 1 \qquad K = \sum_{0<n<10^{l-1}}' \frac{1}{n} + \sum_{l(n)=l}' \int_{[0,1)} \frac{1}{n+x} d\mu(x). \tag{30}$$

Nous pouvons toujours développer (pour n positif) en :

$$\int_{[0,1)} \frac{1}{n+x} d\mu(x) = \int_{[0,1)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k-1}}{n^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{n}\right)^k \int_{[0,1)} x^k = \frac{u_0}{n} - \frac{u_1}{n^2} + \frac{u_2}{n^3} + \dots \quad .$$

Cette somme alternée fournit une borne supérieure et inférieure pour l'intégrale de $(n+x)^{-1}$. Pour $n = 1$, puisque u_m décroît vers zéro, $\sum(-1)^m u_m / n^{m+1}$ est aussi convergente. Pour $n > 1$, nous pouvons obtenir la convergence en connaissant la convergence uniforme de la série de Taylor sur $[0,1]$ pour $x \mapsto (n+x)^{-1}$. Enfin, en sommant sur tous les entiers admissibles de longueur l, nous obtenons la formule de notre théorème.

□

Le reste du papier explique comment les moments de μ peuvent être calculés efficacement pour transformer ce Théorème en un algorithme.

Estimation des moments

Notre résultat principal sur ce sujet est le suivant.

Lemme 6. *Soit f est une function borné sur* $[0,10)$. *Alors*

$$\int_{[0,1)} f(10x) d\mu(x) = f(0) + \int_{[0,1)} \frac{1}{10} \sum_{a\in A} f(a+x) d\mu(x).$$

Démonstration. D'abord, nous devons développer l'intégrale du côté gauche. Elle est égale à $\sum_{l\geqslant 0} 10^{-l} \sum'_{n<10^l} f(10^{1-l}n)$. La condition $l=0$ nous donne seulement $f(0)$, donc nous séparons naturellement cette condition. Puis en changeant l'indice l en $l-1$, nous obtenons,

$$\sum_{l\geqslant 1} 10^{-l} \sum_{n<10^l}{}' f(10^{1-l}n) = \sum_{l\geqslant 0} 10^{-1-l} \sum_{n<10^{l+1}}{}' f(10^{-l}n) = \frac{1}{10}\sum_{l\geqslant 0} 10^{-l} \sum_{n<10^{l+1}}{}' f(10^{-l}n).$$

Mais le somme avec condition $n < 10^{l+1}$ peut être s'écrire comme

$$\sum_{n<10^l}{}' \sum_{a<10}{}' f(a+10^{-l}n).$$

Donc, notre somme devient l'intégrale comme,

$$\frac{1}{10}\sum_{l\geqslant 0} 10^{-l} \sum_{n<10^l}{}' \sum_{a<10}{}' f(a+10^{-l}n) = \int_{[0,1)} \frac{1}{10}\sum_{a<10}{}' f(a+x)d\mu(x).$$

□

Nous avons aussi besoin du résultat suivant :

Proposition 2.

$$(10^{m+1}-9)u_m = \sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j} \gamma_j u_{m-j}, \qquad (m \geqslant 1),$$

avec $u_0 = 10$.

Démonstration. Nous avons déjà calculé la valeur de u_0. Maintenant, pour la formule générale, nous appliquons le Lemme 6 à la fonction $g(x) = x^m$ et obtenons,

$$10^{m+1}u_m = \int_{[0,1)} \sum_{a\in A} (a+x)^m d\mu(x) = 9u_m + \sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j} u_{m-j}\gamma_j.$$

Si nous ajoutons $-9u_m$ aux deux côtés, nous obtenons le formule désirée. □

On va maintenant donner les bornes pour λ_m.

Proposition 3. *Soit λ_m pour $m \geqslant 1$ défini comme suit :*

$$\lambda_m = m\left(\frac{9}{8}\right)^{m-1} \frac{u_{m-1}}{u_0}. \tag{31}$$

Ils satisfiant pour $m \geqslant 2$,

$$(10^m - 9)\lambda_m = \sum_{j=1}^{m-1} \binom{m}{j} \frac{9^j}{8^j} \gamma_j \lambda_{m-j} \tag{32}$$

et on a $\lambda_m < 1$.

Démonstration. Pour la formule de récurrence, nous avons seulement besoin de manipuler avec la définition de u_m. Nous savons que $u_m/u_0 = \lambda_{m+1}(8/9)^m(m+1)^{-1}$. Donc, si nous divisons chaque côté de (23) par u_0, nous avons,

$$\begin{aligned}(10^{m+1}-9)\lambda_{m+1} &= (8/9)^{-m}\sum_{j=1}^{m}\binom{m}{j}\frac{m+1}{m+1-j}\gamma_j(8/9)^{m-j}\lambda_{m+1-j}\\ &= \sum_{j=1}^{m}\binom{m+1}{j}(9/8)^j\lambda_{m+1-j}.\end{aligned}$$

Avec un remplacement de $(m+1)\to m$, on trouve la formule de récurrence désirée pour λ_m. Maintenant, supposons que $m>2$, et que $\lambda_j \leqslant 1$ est vrai pour $1\leqslant j<m$. Alors, on obtient,

$$\begin{aligned}(10^m-9)\lambda_m &\leqslant \sum_{j=1}^{m-1}\binom{m}{j}\gamma_j\left(\frac{9}{8}\right)^j = \sum_{a\in A}\sum_{j=0}^{m}\left[\binom{m}{j}\left(\frac{9a}{8}\right)^j\right]-1-\left(\frac{9a}{8}\right)^m\\ &= \sum_{a\in A}\left(\left(\frac{9a}{8}+1\right)^m-\frac{9^m a^m}{8^m}-1\right)\end{aligned}$$

Soit $a'=a-1$. Alors, on a $1+(9a'/8)=(9a-1)/8\leqslant 9a/8$. La différence est $1/8$, puisque pour $a=8$, $(1+9a/8)^m=(10)^m$, et $|A|=9$, on obtient

$$(10^m-9)\lambda_m \leqslant 10^m-9(1/8+1).$$

Ainsi, $\lambda_m<1$. □

Maintenant, on peut prouver le théorème (5).

Démonstration. L'équation (22) est une conséquence de (6). La formule de récurrence (23) est prouvé par la proposition (2).

Pour la convergence géométrique on doit montrer que $\beta_{l,m+1}=O((1/b^{l-1})^m)$. Pour cela, $\beta_{l,m+1}=\sum'_{l(n)=l}1/n^{m+1}=\sum'_{b^{l-1}len<b^l}1/n^{m+1}$, on a $n>b^{l-1}$, donc

$$\beta_{l,m+1}<\sum{}'(1/b^{l-1})^{m+1}=(b^l-b^{l-1})b^{(1-l)(m+1)}=(b-1)/b^{(l-1)m}.$$

On a donc $\beta_{l,m+1}=O((1/b^{l-1})^m)$. De même, on peut écrire

$$u_m=\frac{\lambda_{m+1}u_0}{(m+1)}\left(\frac{8}{9}\right)^m<\frac{u_0}{(m+1)}\left(\frac{8}{9}\right)^m,$$

puisque on prouvé que $\lambda_m<1$, alors la convergence de u_m est plus rapide que la convergence géométrique. □

3 Conclusion

Bien sûr, j'ai commencé par une méthode de somme directe, j'ai pris des sommes partielles jusqu'à 4 milliards des termes, mais cela donne environ 20.38. Même la partie entière n'est pas correcte.

Ensuite, j'ai appliqué la méthode d'Irwin en calculant a_n et a'_n. Cependant, au bout d'un certain temps, vers $n=8$, la convergence devient trop lente. J'ai effectué ce calcul en C, mais cela ne m'a pas aidé davantage. J'ai pu obtenir seulement 6 décimales exactes.

Après avoir lu l'article de Baillie, j'ai implémenté sa méthode, toujours en C, pour améliorer les performances et d'obtenu jusqu'à 40 décimales de précision, même si le calcul a pris un peu de temps, presque 20 minute sur mon ordinateur.

Pour l'algorithme de Fischer, je suis passé à SageMath pour les deux méthodes. Elles sont relativement faciles à implémenter. Sur ma machine, je peux facilement obtenir 100 décimales en moins d'une minute.

Puis, pour l'implémentation de l'algorithme de Schmelzer et Baillie, il faut manipuler des matrices, c'est pourquoi j'ai également choisi SageMath pour ses utilitaires matriciels intégrés. Ce n'est pas encore l'algorithme le plus puissant, mais je l'ai inclus par souci d'exhaustivité, et il est relativement simple à programmer.

Enfin, j'ai implémenté l'algorithme de Burnol, premièrement en SageMath pour voir s'il fonctionne comme prévu, puis je l'ai réimplémenté en C pour obtenir de meilleures performances. Puisque j'avais besoin de calculer beaucoup de chiffres, j'ai utilisé MPFR et GMP, les bibliothèques de précision arbitraire. Il y a eu quelques difficultés de calcul que j'ai rencontrées, par exemple, j'ai eu besoin de tous les coefficients binomiaux jusqu'à n très grand et utilisé les fonctions binomiales intégrées donne une performance très faible, donc j'ai du utiliser le calcul récursif du triangle Pascal pour surmonter ce problème. Aussi, après un certain point, la mémoire a commencé à devenir un problème. Mémoriser tout le triangle de Pascal pour des grands n consomme beaucoup de mémoire, donc j'ai implémenté une matrice *oubliée* de coefficients binomiaux pour résoudre les problèmes de mémoire. Puisque la méthode d'optimisation le plus simple est le *multithreading*, j'ai utilisé OpenMP pour paralléliser le calcul de certaines parties comme β_m et la somme des u_m. Le calcul de β_m ou γ_j est facile, le calcul des β_m ne pose pas non plus de problème car leur nature nous permet de paralléliser facilement. Mais le problème vient des u_m. Leur nature récursive, ne permet pas le parallélisme et m'a laissé peu de marge pour optimiser. Cependant, grâce à Monsieur Burnol, après une discussion et des conversations par e-mail plus, nous sommes arrivés à la conclusion que la précision peut être changée. Au fil des calculs les derniérs u_m ne contribuent qu'aux derniers chiffres décimaux. Donc, nous n'avons pas besoin de calculer tous les u_m à la même précision en bits. Nous pouvons réduire dynamiquement la précision pour calculer à la fois les u_m et les β_m pour accélérer le calcul. En effet, après avoir implémenter la *précision décroissante*, nous avons presque une performance 10 fois plus rapide. Après presque 500 lignes de code C, j'arrive à un point où je peux calculer K avec une précision de 100000 chiffres en un jour même sur un ordinateur personnel. Ces implémentations sont disponibles sur la page GitHub de l'auteur [1]. Vous pouvez aussi trouver les 20000 premiers chiffres dans les pages suivantes.

1. `https://github.com/YusufEminAkpinar/digit-restricted-sums`

22.

9206766192 6415034816 3657094375 9319149447 6243699848 1568541998 3565721563 3818991112 9445626037
4482018989 9096412533 2346922160 4711904783 1029750614 6968857121 0180678649 3339402886 9627795786
8596119863 7905620169 3218804088 0170136179 0211062866 1173509921 1021080576 7037858147 1208344258
7658322726 5762010383 1470760370 3081599962 3544735896 5269056768 8849708196 0327431233 1458892799
7290413878 4952498149 4420459215 2773507367 0721852000 4083026308 9161691211 2386263685 9589823575
1717059249 8667879488 4732108924 8065916234 0101523560 0050654804 3749678309 0130313355 6109695301
4813317749 5576252380 5629716085 0098435454 7601825342 2157510734 4839216578 2984461954 2391601061
1783538353 9414385364 5608545221 8993239443 6643879041 5885760914 4227813991 9999224205 5353569500
6903416817 5189094448 0911928277 8344699965 1712608600 6663606677 8802880840 6885936480 2875179090
9188136795 1277973480 0336594138 0076337136 2027592352 3021897838 8060696159 3219106619 2832138116
9578671501 2908593756 7695180108 1088185294 6961772722 2369263351 0303284693 1322633320 4662982671
9621921949 7595341302 9846707264 1494803176 1513294759 2059710895 2767229950 6135926501 6527793966
5504378141 9771218981 1411533178 4288289120 0861629055 7888948801 9672973398 2154879558 6539443231
1715997509 0536480771 1452508644 0021477483 7830566983 2947534643 1574887600 2553447060 5016720081
3537681505 1011744737 0525476106 1212995726 7448260674 6619359970 9646499349 6193687192 2718731843
2066929586 4568048819 3966538192 5642051018 4836565613 7014651202 9952508182 0546550025 3512640541
2417351362 7643280141 1344172644 2573721215 8630804360 6232625102 1258024747 6381362063 5344177907
1562727116 1327878990 2233978650 7077973087 1328361981 8042590675 8456493642 1334639694 6418242998
8545122769 8638525759 1169510862 8538843908 9619061464 8926595578 2873997599 0384755992 0768769694
9762798020 9373018576 2618773856 2079135497 8209812211 0653711848 5627606686 3650232959 5606375781
3015885853 8424462891 4371644644 2718250845 0081189605 3012040621 9669846038 5157169114 2506412741
9331936610 8787735837 2424020359 9203103052 5230441065 4214782842 1259579767 3879911778 3670920609
0520816896 7959515743 0158717148 7655386432 2681172140 9493477109 9808002163 7319683461 8263681245
4395545515 0761926472 8176407340 9907122860 5411380705 5000473103 1878099119 5466048230 5212267163
2886388599 7975909801 8593389245 8338197606 8830947913 8824863914 8745871284 7408019395 3423666184
5781986101 6773816298 3566926409 4664406730 6776203487 6282499551 9261087529 1016779474 1670453274
4718916256 6654464575 5083083264 8953899627 5807712778 9472910729 7922605208 3806157703 5436373167
1499881639 4263253421 3614489236 9528754440 6527478896 7535773291 3096728730 9671195081 0996139933
6478710264 0600662388 7128639442 6181151367 6943148694 1061880075 5818576258 7040206579 4294816879
7445298630 0288904876 4006274502 8943686402 4481850123 1537988787 1317967546 3086087464 8095711922
4889702722 1204416298 9472848379 2525618427 2437291858 3327169639 5797640618 9542681139 1034849176
9876412108 5695484851 0048373781 0162184622 2018055414 0239887145 4562772712 6622864848 4489638364
9211612722 4931300700 4068475537 9609101453 6773483819 2375548805 1489378448 2202933698 1524876840
2043137080 6187530446 5395107164 9730257111 6707057247 3170493313 5782596432 5885049469 5927784525
4199268758 9863218245 6537129538 5641336678 7909588328 6859160658 5607497261 0364869933 8154692022
6222290104 0290911087 3367654897 0965086767 5432580133 7709719065 6821367233 5664434833 7682527096
4973004344 5129901464 2670298442 1612193036 6772514920 9310416638 4030573475 1574588100 2832990631
5498068799 8732732190 0178820148 9161336142 5333471685 0623796696 6941019397 3133466287 6634122290
1249654512 2626114852 0780851767 6244330371 6124850297 0727996087 7331302914 6471549910 3168484089
7516598858 9565953824 6038125596 6571261582 6248528441 6872355640 7587944535 1167426589 6410741589
9220250702 9865532935 3760367982 7696222065 7289191492 7609803274 6969113341 9174704094 5183068626
4206079419 9749002484 9438570021 6860269677 9472575736 9534331668 6559612288 1744419014 0923835477
5389892409 1417473343 3515965527 4750598199 3591404896 3421552807 0966688905 5947242355 1756078206
9803708586 5578758385 2775625276 5605652680 6347526910 6342468713 9578799773 3891903164 3036368844
2449956502 4086753356 5747742830 5578054959 3829249988 0802671335 3065189071 9000631557 2747139491
5158510358 6210347373 9324725291 6833245428 3355652704 9618410612 9684067061 9591474794 6289774414
6036074288 8797944688 7085970529 3773317980 9548856551 8158498319 0397009530 0719246984 8991835183
9160706615 8601323668 4863390114 5616258169 4482554517 3023620847 9159558613 2686006322 5105444931
6969698670 4620944505 3775330884 6047107939 0484169194 8336004353 9624858117 2697621398 1282236610
0923661245 4975875407 8267846893 5603954274 5815578423 2642593014 7872853238 4924733119 7320800502
1093953745 0272034202 8159715697 3707193821 7564148942 4434753451 0706181158 9119349963 3040664326
3192813997 7763302795 9962755986 3512780549 6027673687 0443441853 3188589248 3958450806 7254517272
7980369262 1581945734 0731879835 1915540266 0233205585 1770297311 7748916167 3590235198 9876892627
7016565474 6325872886 0700016888 0469675622 1337403924 9346689376 8505036276 2891682242 6771335682
7827677687 2840769325 5700131089 6931777182 6778056344 8212635786 4785698494 2708768466 0850110248
8125898905 4251559801 8285762553 1584499534 6013908720 8464304888 1670140338 8886574862 7210968551
0047404140 4294498921 7845102485 8289937285 5951321412 0912288538 0313603571 3382678912 5448544842
4191161474 4601002690 4328905142 4774394341 7796070164 5550984438 1893304720 1469673186 1817146746
6535331601 8712228751 0363995209 0229942671 3295694722 2337344498 4839133500 1977355982 7807903197

9320334612 5415727117 0829696728 7466754617 6489563249 2430676628 5077445249 8033248197 7935820466
9080387971 4939151127 2208228270 5328316381 0098916138 7539690146 5834051580 5991653765 8376374115
8591954509 7632390142 6019726407 9852886341 5017439062 4329762095 5913516428 6765594124 2944693318
4202952956 0264820088 5808682830 1924002763 5935757671 2846381971 2960671175 8217726357 0434453003
0045931250 6833609261 9577761304 6914922888 6167873090 8415568496 7001164792 6528042345 8972978208
9330830755 8608321211 9685946054 2053791097 0808100738 2246194010 0630511727 8407291708 1606812093
6292932306 7196991027 8084592521 4821404602 5612967708 3187389166 8188353285 6752649471 5274666511
8595226951 7454915360 1331372938 1712993884 7794406708 5528624081 9223296538 4394106791 2962806938
2116845665 2689128338 7324924057 2523088537 4495995237 8319610470 1949431303 2077670567 4369264809
0096437036 2346483371 5039492688 3896634109 7997348071 6917422837 1179941564 5870427180 9452909131
2698021720 8901686676 7644192679 0529911590 0528624511 6046384055 6675145465 5746178099 3068516992
7789318771 0729640102 1251656988 1327311345 5623631449 7331511638 3269918693 9181625502 7004960537
6899155094 4752513727 9895605498 4547761919 2603865607 5155034147 0690117670 1404703152 7948965706
8175556399 1858125688 9239403647 8827362528 0289229471 0016572251 6395697324 1069827764 7230742600
7659708227 1615737649 8323286836 4710510075 0983347664 6395913047 4764399881 8454499850 7186828483
6485273071 3520678942 2194288493 6739826460 1783933266 8789544672 1827507043 0456981755 8563799374
6716298471 6916793464 6173039219 3405592991 4836737896 9520044748 3055262956 0523620896 2123266921
6339816240 5270105606 1753124942 8709692026 7537015233 3298116436 2871380102 7642501536 8907556533
4852894042 6354795595 7734110742 5529872100 0381445153 2371560105 8021767743 9274448472 1565322372
0691117176 2333379117 3897295951 9646198474 3629390545 3430072451 8537504244 2823641517 7796298130
5889730015 2821409233 6468144323 3477553596 8420111492 2239164628 6260524118 6172886317 3981867970
3522952191 1643807155 4372545551 0620198519 6181769561 8591177952 3779535936 2703168307 0081443787
6710364380 6177964685 3994448212 5244950296 4084496145 4684285457 4158499855 2842451560 3393858872
3128588246 0413602371 3041998762 4981557349 1511139947 4981976040 2670674844 3089985250 5871481437
2309110361 5890144592 5469236432 8021298890 9774825214 6681605429 6800886517 5204857981 0877906130
9045623931 8143866980 3834672912 5896396793 3273645936 5933152312 6545888831 5892225666 9734059473
2797569195 2750080232 6350957618 4223472873 9707836137 1752128606 1143230989 3959224032 4301757703
7788225465 7161641161 2388911141 8464608122 9525292078 6663965507 3864917084 2654478899 0075719692
0063615873 2742267987 6469327976 8204818663 3078618998 6313157472 3324488608 8888899034 7749624523
0577629270 2003479376 0227869244 9691589005 3199902727 4971318950 2991071866 0997023623 8757215363
7884248527 8385923242 6125403347 4996356862 6197926586 9281540575 5460022858 5596369979 0364065717
3415203313 9035625707 6190542255 8729255096 3588999188 5148637251 2195987506 3169674335 2063531455
2068515823 8550986552 1873446992 1673277829 0585151543 7566840321 7987812078 6524327613 6938882997
0959377522 9022311804 3858171599 4690954796 4226964190 5309510690 2334560526 3557632186 7226280935
9986149416 0058032385 0555209906 7957328220 5714282420 8190441741 5857200763 5927434907 1455717298
4150827564 4401970927 3416562196 1904433988 2262001582 8727187977 5923480469 4902255276 4107481133
8144974012 9323356143 1655786064 1949250611 3445142784 7853803971 3328602847 0463991135 1040639749
5198149405 5454754135 7965768467 6829280885 6250749417 6335528334 7961539440 5923171143 7425885144
3326887696 2580466404 4978401331 2264143688 6989165087 8766285064 2553682252 1607438244 7989065000
5439631466 6506509148 9904017378 9151778354 7587387675 8408180955 8195278752 0106970516 9771378325
5423766041 8106225750 2802385446 4431806854 1532746292 6184507497 3476663743 7002283244 1914353864
3049904407 0321639995 0401133296 9718662508 5651041332 1808860868 9018029791 4913153461 6820586904
7923434697 3433062579 4735961651 7883283183 9829368516 7612779872 8126092096 2983608162 9509835719
8457750536 5762073358 0351492982 1430116919 7768671663 8266926555 9488053894 2489874063 5720680336
3297509225 0448097760 1105991133 8362009104 2052045871 6693229262 1259584039 4839416973 2551493768
6765878595 8714971488 0402890651 1085456410 5767212044 7476759394 9349980228 7137393891 9763374011
3492186452 5642339338 3075264449 5005308088 4668252330 0126842922 1059412015 0100726120 6205569700
2470558749 6009619234 8053974039 5204190240 7672770932 4108594737 2557358652 0778022695 7417715343
1480127381 5009093117 8112612686 4039759950 2141696657 1899525595 0256440410 5550692679 0015917730
7384113458 4822192321 7611895591 0950147270 9113262250 8340119287 9350010622 3490095661 6077380165
5679590052 8880601479 4675041818 4783929630 9535022969 8382093569 5479415778 5716148233 5802651640
8117033162 2944139640 4264318853 8976094952 9001080232 6070657301 0215146712 1225669827 8484883421
1525971394 1331029369 7996783436 9412179226 1716139732 2054137743 7708589936 9725837793 3916632652
0348171921 5949136250 4182768205 9948105801 3893046404 3890011326 6196890014 7384150756 2732033895
7145061126 0811509706 2329661725 3851598018 1538747184 8137910675 8212431220 4464354832 2443251745
2226617741 6832044710 8771809172 6413622678 5963053962 0525004366 3093165451 8597776736 9307452556
0501130537 0099725800 9786794161 3262526681 5607443397 1733855014 4538937365 8507958128 5732038027
9029610117 2865501106 5171302957 5527774458 4753341506 1175684182 2770738909 3391693877 6143072134
8654695300 2938773032 5854237964 5268519790 4998682433 4549522969 6310014121 2211735031 7345730131
3933370641 3293353631 3906156849 5931734246 8372929859 8429433229 5578532724 4884073353 2736814440

2095768760 5239923583 0158351638 1290796855 7401447141 0541092716 4611577375 0340759138 4583144515
5682418388 0473974788 5941805559 4261936422 4355243234 0832706903 4741214947 7124671833 1645237554
0828056605 6604781193 1966514926 6833388983 7951356418 9990463474 9655848618 1455366510 0010946144
2566688592 5430516860 5048422577 6276107321 9790262264 1526941442 4045353442 4408223957 5866122936
0239602630 6433689014 9866669003 9816276818 2801907036 4967798207 7546109937 7616423441 1884151226
2702000884 1528017237 9658578285 6712240800 2717271796 9504993455 1261593547 7963658024 1752745520
5298165478 5037507307 3110339783 9765346361 8954854068 8037497791 4950632808 1638930993 0857840590
8898357839 6026629625 5316092775 1036708055 5532742431 8775566423 9519632370 9140226268 5744468789
9692703363 4453825676 9557487611 5005505042 4050106974 5612770608 7799252265 5929851436 7692082339
3533653269 3768805896 7479323988 5434315540 6273863835 2012610657 9680297527 1644048722 0889427194
0387066573 6719251295 4665872163 0755520760 0241286428 4987415320 8338001705 5262840095 8219062955
8388202008 7755695881 7899337708 2287718427 4226385949 7860210749 7224961589 9046699719 0890567033
9265388437 1183552978 6333860811 7951685376 2431725053 9810788026 8366312921 8644759058 1212125940
9743314735 5068855085 1065436816 2195934501 2760444411 6159963670 3004042340 5354971479 9864201247
6032920773 0400631850 5562307423 7171476242 0834662694 7514726631 4954926138 4718421744 1670486547
6881853345 6655693885 0331727218 1820033698 0163119927 2680315440 8863985795 8108500780 7062964675
9443300652 7175877689 6418140953 2258972600 8869511762 4892627246 1269744921 7387857066 8373821300
4196791841 9998626625 5368917103 0884302870 0301138350 1216689687 5664121674 4889454059 9431045135
0127051192 6518416598 6762382946 7719202956 9086969953 0967958158 7621748285 5198055568 2737298643
1302433601 5105104469 9019581830 0345757118 7778231241 9917174556 8143258318 7709773527 5017476660
7273711165 7150538726 6603609321 0939489305 2469541112 1943641458 4893395822 4007549522 3890816437
1026960160 8705578936 4882419600 1483452019 3634468298 6676184278 9668786062 0974383503 6147033472
6361016271 1430968231 8239403887 5067739051 3515601833 0627068301 9879794060 1646867542 1187262991
4232988854 3125866098 5629234651 1516671724 3662907937 8755748684 8034095335 3918932526 9484776235
7986037952 8813696840 1231699327 5992491972 3641960147 6482903877 0434332013 0835331060 0554405550
4738703221 1319186725 1085064338 5535248353 0616852917 3607369666 9640582690 8399046754 4329382789
6871754142 4216949882 4515561148 1873062113 9392595256 0008157064 1566485563 7109231741 0685687506
0970555527 7862245104 1066820791 0103486673 2808181769 4396433580 9829987067 3613052872 4880564832
0389676554 7803758305 6236332520 4359615718 6741648640 2874762920 9705507603 7861132617 9787445765
9506943433 1599453106 8763755269 2785486552 2803150259 2978159721 5943620511 8601929379 8525515334
4403920784 0691487296 1046446162 5785523108 3736804828 4475495766 6412583150 0601415368 5010080811
7958919928 0618067554 0462009905 2352362027 4726994087 9096110730 1426753872 1676798366 7670402901
1934808281 8752949673 8028572469 1335252670 9139380939 3059652354 4349682646 5941410885 5896551222
0110925386 2001321335 3249689750 9211473106 2841461378 0800051171 4727894794 0072413919 2280972801
5402448815 1011121369 4882083597 9684707944 3501929958 5978958541 9469802059 8614300343 6760469172
8555563470 0659328950 3165719886 9246713774 8417408392 2995316529 0677454744 6402281703 9205093759
9661957201 7630792730 8184462131 1315552586 2155966715 3954224103 5504709430 8759506056 8439870806
5290784322 9781957655 4278731397 7478619222 1710433569 8182084007 7118026104 5084533345 6078076604
2614658747 7327711885 0143821418 7439516712 5440909494 8560116870 7163055266 4373810725 2036425253
9309914885 9768404704 6769580690 5924238673 2822776162 7889706334 9035128197 7321982905 4630970597
2136420434 7543890458 5236314849 6316541784 4533805429 2114581539 6681325070 5774064206 3386753498
4440049692 3941108953 2046618125 9736543689 0163520370 2808032999 5876831525 5036255114 7098677698
2625889504 7657283067 6101518574 8245743931 6879425799 0939110171 5244054270 0595505034 2193351877
2816534360 1054910243 4873012604 4785489669 6242153553 3380867094 6433592011 0382383941 5243352650
6655821669 6180105627 7904383691 8077196280 4228289532 1434776563 6907071811 7008362941 2162273597
1083051872 9567089612 8318559990 0422868653 5691113388 2563137537 8146169160 8027423493 4528113511
7155901263 0741568016 0871610756 2778482199 8186095887 2333834870 7031188582 9876613059 4591257763
0115021454 9611289863 9048276719 4084790944 4052477896 9269545839 5019741291 2438127011 4327184702
5970824496 7634743271 7509354490 7098844515 5509385795 8591053008 6116089230 7553891010 6966122368
5074342862 0262456476 2223453596 9810349281 4654761912 1479257264 5070280653 9100508624 8784018822
2553597958 0451615276 7887476122 0239743301 1947045168 0214614178 5242482643 9653081947 5567364545
0043957086 7168590563 3881831708 5673836453 7594223977 9429325937 1412517909 9443144225 1485962093
4901675323 2853793990 4901625349 8998470030 4179876677 2701483518 9455408535 3223727128 6693293925
6108559807 8548361735 9122456790 4377004737 4000493299 3483310856 6351320356 2399096159 8985657438
8045649676 0516483198 4110991852 6025074323 0198182329 3137799688 1455474430 8363596070 8606356928
0097725598 5241440168 3546605220 5982543752 0340640497 5581494130 6741886714 3024628455 4508398240
3168569912 7180457929 0501474146 1423225701 2488769264 4833213125 8265723084 1063792432 4973494669
1165755169 5721885903 1786693258 2218892344 5302456787 3139646048 3338132298 2837036438 2036386894
1440281552 4047555211 3323689690 6673535607 7148090655 4259767120 2885633812 0207347297 1592318850
4864181674 0674678215 3962616946 1762065569 4890992884 8286153406 1150818560 5406136750 0845982786

4836308157 3801205284 6544350450 7598566814 7102279989 8232656676 1467861657 8247847919 9467902243
2009497527 1996820638 9637310692 5730168744 7052121569 2046227424 3063985579 2988991230 7205892081
8496132323 0874410114 4955719858 1570787989 6895901887 7172259711 3337281039 6016064913 2374604478
8247326520 2921322815 0410759436 4181674137 0413199713 7777506781 6010434912 6236453661 6781783258
4522180980 5080565973 7300096701 6132413274 5427954969 6337825583 8434362868 4120371969 3144524190
9007197638 6717819684 5271284328 1406689391 6634570737 9382606263 0264470221 1922567075 0425396314
3127503859 8590839349 6387972482 3258373430 0205762298 4491295173 4256383599 1562695445 3547676689
7932220295 3721086964 7968707945 1622093052 1960784229 4886074963 3517459803 3816608463 1730275436
0091883054 4679015704 7280727720 1052497474 3080154928 0475594792 8004029092 6678643741 4573662355
2522208628 3718880536 1887172957 1606905353 2001183449 4845992450 8243103179 6266688603 2512285761
8887759673 5381240992 2747179339 5830979679 9439105267 7621276148 9682738180 8719130874 0577077821
6093694542 2148211554 5721969120 3495917255 6458869626 8142649448 2885777852 2313359216 0071449084
1731959182 3891283504 8325578398 2400232863 8403695241 0667616485 4590230034 8273520350 3685250766
9060122454 6558705133 5672987966 3836762389 8225954396 7378608338 4021786276 9204564991 1688619152
2255235040 1674649850 6377561796 9703989088 5258909805 5713073803 9133202435 5311839158 0670922664
6598411354 5510745846 2111883583 8655056738 5521394862 1138152624 4034723167 6649726579 8907521866
9642430657 5972435654 3916031746 2760751198 1365009872 4145786124 6807134888 3656269261 0961564076
0528794844 3903120015 8944181760 8029933887 5141199888 0206594244 9809338555 9955242496 9652108581
9505238124 8762805094 2932649566 7391840983 8151120698 2453887107 1737394173 4258191673 0931127013
0989795012 9499153160 8409652493 3877126863 4293457117 3105120094 0084642678 9398726340 2392217921
9397246751 9046665217 2195453219 3271702035 8209253876 3994020439 7318194858 5536548857 3659499378
9541757294 3808430603 5032950791 6481599644 1655337483 7867005067 8146161315 9476127615 2067818723
9419280875 0113060203 9085816123 4592724110 8493462684 3090090648 4554277148 6040098460 3857451419
2426641154 6734443375 4203975506 5870113012 8195513005 6869192178 0801023684 7062914202 5244267284
2288525684 5893211853 2036390801 6726520780 2353313315 1761128030 6730573915 7204922424 3862818107
9941053639 6569555754 4109158073 9003533122 9794312140 8730189462 5617891012 0740276291 1832169185
1397496683 6607782499 5469604372 2957717559 3176272572 4355513882 9571956705 7011072445 2993955502
9316599587 7349948098 3156518688 2330612602 4428862027 3909498242 9813013552 5392622939 0893432172
8603557642 7758748313 7488494208 8464947465 0241351734 0886127668 1854179357 6289035398 0997942455
3392166374 0604455289 8927518933 5192195297 3410611132 9321946381 2946191198 1967820086 1480610929
7219509991 8001048369 7277702452 8817466057 5424790503 2896418912 9701803270 6103981680 8492888955
2237851122 4410920295 9172044362 1079179753 6973533601 4520235027 3360535941 0322883940 9242154450
5361669699 4771594325 3627200452 1183899500 2019718377 1444897363 6448873983 2784027556 5814309809
7379513796 2718794945 0974492865 4081454097 8135610901 3943208459 2885282944 7274034943 5688417407
1041843683 8139723591 7872139564 0394762711 5895653131 9471906411 7456343061 6018861652 4874664234
8945042876 1755047648 6356423041 2095476996 5673459849 5350385488 4694585240 2753310933 4731014126
1465563331 5071578697 0892222351 0181048356 8477072288 0819131719 2591548310 5967652607 0871702604
6205759894 3498268881 7148153829 7562521444 3572527799 8653071631 1472487929 9895990258 9633065104
7582809132 5165091225 1799630462 9931532721 2263563560 6872396031 9939997203 7089206875 4864193721
0527489783 3224135342 6850119917 6672150496 3358001596 4666091939 0623438810 4541967455 3040162173
5272718973 4781621011 2849880762 3270712042 5522547566 4204971307 5855280473 7566864061 2911683689
3584443545 6112960787 5536641422 7666797092 5079486707 6503416581 8611322766 9326676236 8080529432
2596282154 6132093657 4138549259 8587969243 9708792666 0940798951 7830513862 0112910648 3490875596
0443998951 0322387046

Références

[1] A. J. Kempner, "A curious convergent series," *The American Mathematical Monthly*, vol. 21, no. 2, pp. 48–50, 1914.

[2] F. Irwin, "A curious convergent series," *The American Mathematical Monthly*, vol. 23, no. 5, pp. 149–152, 1916. [Online]. Available : http://www.jstor.org/stable/2974352

[3] R. Baillie, "Sums of reciprocals of integers missing a given digit," *The American Mathematical Monthly*, vol. 86, no. 5, pp. 372–374, 1979.

[4] H.-J. Fischer, *Die Summe der Reziproken der natürlichen Zahlen ohne Ziffer 9.* Birkhäuser, 1993. [Online]. Available : https://www.digizeitschriften.de/id/378850199_0048|log15

[5] T. Schmelzer and R. Baillie, "Summing a curious, slowly convergent series," *The American Mathematical Monthly*, vol. 115, no. 6, pp. 525–540, 2008. [Online]. Available : http://www.jstor.org/stable/27642532

[6] J.-F. Burnol, "Moments in the exact summation of the curious series of kempner type," *arXiv preprint arXiv :2402.08525*, 2024.

[7] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.* Dover, 1964.

[8] J. Mason and D. C. Handscomb, *Chebyshev Polynomials*, 1st ed. Taylor & Francis, 2003.

[9] F. Bornemann, D. Laurie, S. Wagon, and J. Waldvogel, *The SIAM 100-Digit Challenge : A Study in High-Accuracy Numerical Computing*, ser. Other Titles in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004.

[10] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, 2nd ed. Cambridge University Press, 2013.

[11] K. R. Parthasarathy, *Probability Measures on Metric Spaces*, ser. An Imprint of the American Mathematical Society. Ams Chelsea Publishing, 1967.