Sommes Restreintes de Chiffres

Yusuf Emin Akpinar

Superviseur: Arnaud Bodin

Projet de Fin d'Etudes, 2025

Contents

Constraintes

Quelle contrainte peut-on imposer à une série harmonique pour la rendre convergente ?

Théorème (Kempner, *A Curious Convergent Series*, 1914)

La somme des inverses des entiers ne contenant pas le chiffre 9 converge :

$$K = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ 9 \text{ non dans } n}} \frac{1}{n} < 80.$$

Les travaux de Kempner

Partition de K selon le nombre de chiffres dans le dénominateur.

- $a_1 = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{8} < 8 \cdot 1$
- $a_2 = \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{18} + \frac{1}{20} + \cdots \frac{1}{28} + \frac{1}{30} + \cdots + \frac{1}{88} < 8 \cdot 9/10$
- $\ldots$
- $a_n < 8 \cdot (9/10)^{n-1}$
- $K \leq 8 \sum_n (9/10)^n = 80$

Méthode d'Irwin

$$a_2 = \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{18} + \frac{1}{20} + \cdots + \frac{1}{88}$$

Il compare les neuf premiers termes de a_3.

- $1/100 + 1/101 + \cdots + 1/108 \leq 9 \cdot 1/100 = 9/10 \cdot 1/10$
- $1/110 + 1/111 + \cdots + 1/118 \leq 9 \cdot 1/110 = 9/10 \cdot 1/11$

Donc nous avons

$$a_3 \leq \frac{9}{10} a_2.$$

Et plus généralement,

$$a_n \leq \left(\frac{9}{10}\right)^{n-2} a_2.$$

Méthode d'Irwin

$$K \leq a_1 + \left[1 + \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \dots\right] a_2 = a_1 + 10a_2.$$

- $a_1 \leq 2,72$
- $10a_2 \leq 20,58$
- $K < 23,3$
- $22,4 < K < 23,3$

Estimation de Baillie (1979)

- Formule binomiale
- Puissances des inverses
- Plus général, pas seulement 9.

$$s(i+1,j) = \sum_{x \in S_{i+1}} \frac{1}{x^j} = \sum_{x \in S_i} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{9} (10x+k)^{-j}.$$

Estimation de Baillie

Après les calculs, on obtient,

$$s(i+1,j) = \sum_{n=0}^{\infty} a(j,n)s(i,j+n),$$

où

$$c(j,n) = (-1)^j \binom{j+n-1}{n}$$
$$b_n = 1^n + \ldots + 9^n - m^n \qquad (n \geq 0), b_0 = 9$$
$$a(j,n) = b_n c(j,n)/10^{j+n}.$$

Estimation de Baillie

On a donc,

- Ainsi, pour $i \leq 4$, on calcule $s(i,j)$ explicitement.
- Pour $5 \leq i \leq 30$, on utilise la formule de récurrence.
- Pour $i \geq 31$, on va utiliser l'estimation,

$$\sum_{i=31}^{\infty} s(i,1) \approx 9 \cdot s(30,1)$$

$$K = \sum_{i=1}^{\infty} s(i,1) = 22,92067661926415034816\ldots$$

Définitions de Schmelzer et Baillie

- Motifs plus général,
- Comportement asymptotique
- X une chaîne de n chiffres

Matrice de $X = 9$, cas de Kempner,

$$T = \left[\begin{array}{c|cccccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Matrice de $X = 42$,

$$T = \left[\begin{array}{c|cccccccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$K = 228.44630415923081325414808612625058957816292753983036118591346000045286076865021430704804611741443217\,41\ldots$

Définitions : Burnol

- $\mathcal{A}$: Entiers non négatifs admissibles
- $l(n)$: Nombre de chiffres de l'entier n
- $\sum_n' : \sum_{n \in \mathcal{A}}$
- $\mu = \sum_{l \geq 0} 10^{-l} \sum' \delta_{n/10^l}$
- $\int_I f(x) d\mu(x) = \sum_{l \geq 0} 10^{-l} \sum'_{n/10^l \in I} f(n/10^l)$

$$K = \int_{[1/10,1)} \frac{d\mu(x)}{x}.$$

Théorème Principal

Théorème

$$K = \sum_{0<n<10^{l-1}}{}' \frac{1}{n} + 10 \sum_{l(n)=l}{}' \frac{1}{n} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m u_m \beta_{l,m+1}.$$

$$u_m = \int_{[0,1)} x^m d\mu(x) = \sum_{l\geq 0} 10^{-l} \sum_{n/10^l \in [0,1)}{}' (n/10^l)^m \qquad (m \geq 0).$$

$$\beta_{l,m} = \sum_{l(n)=l}{}' n^{-m},$$

Formula

Lemme

Pour tout $n \in \mathcal{A}$ non nul de longueur $l(n)$,

$$\int_{[0,1)} \frac{1}{n+x} d\mu(x) = \sideset{}{'}\sum_{Id_{l(n)}(m)=n} \frac{1}{m}.$$

$$K = \sideset{}{'}\sum_{0<n<10^{l-1}} \frac{1}{n} + \sideset{}{'}\sum_{l(n)=l} \int_{[0,1)} \frac{1}{n+x} d\mu(x)$$

La série de Taylor de $(n+x)^{-1}$ nous donne,

$$\int_{[0,1)} \frac{1}{n+x} d\mu(x) = \int_{[0,1)} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k-1}}{n^k} d\mu(x) = \frac{u_0}{n} - \frac{u_1}{n^2} + \frac{u_2}{n^3} + \dots$$

Observations

Pour calculer
$K = {\sum}'_{0<n<10^{l-1}} \frac{1}{n} + 10 {\sum}'_{l(n)=l} \frac{1}{n} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m u_m \beta_{l,m+1}$,

- Somme finie
- $\beta_{l,m+1}$
- Calcul de u_m

Estimation des moments

Lemme

Soit f est une function borné sur $[0,10)$. Alors

$$\int_{[0,1)} f(10x)d\mu(x) = f(0) + \int_{[0,1)} \frac{1}{10}\sum_{a=0}^{8} f(a+x)d\mu(x).$$

Prendre $f(x) = x^m$.

$$(10^{m+1}-9)u_m = \sum_{j=1}^{m}\binom{m}{j}\gamma_j u_{m-j}, \qquad (m \geq 1).$$

Obstacle

- Coefficients binomiaux

```
Sagemath prendre 29.60158967300049 secondes.
Triangle prendre 0.1633593169990490 4 secondes.
```

- Le calcul de β est facile et parallélisable
- Comme u_m est definit de façon récursive ce n'est pas parallélisable.
- Accélération par précision dynamique

Resultat (prèmiére 2000 termes)

```
22.
9206766192 6415034816 3657094375 9319149447 6243699848 1568541998 3565721563 3818991112
9445626037 4482018989 9096412533 2346922160 4711904783 1029750614 6968857121 0180678649
3339402886 9627795786 8596119863 7905620169 3218804088 0170136179 0211062866 1173509921
1021080576 7037858147 1208344258 7658322726 5762010383 1470760370 3081599962 3544735896
5269056768 8849708196 0327431233 1458892799 7290413878 4952498149 4420459215 2773507367
0721852000 4083026308 9161691211 2386263685 9589823575 1717059249 8667879488 4732108924
8065916234 0101523560 0050654804 3749678309 0130313355 6109695301 4813317749 5576252380
5629716085 0098435454 7601825342 2157510734 4839216578 2984461954 2391601061 1783538353
9414385364 5608545221 8993239443 6643879041 5885760914 4227813991 9999224205 5353569500
6903416817 5189094448 0911928277 8344699965 1712608600 6663606677 8802880840 6885936480
2875179090 9188136795 1277973480 0336594138 0076337136 2027592352 3021897838 8060696159
3219106619 2832138116 9578671501 2908593756 7695180108 1088185294 6961772722 2369263351
0303284693 1322633320 4662982671 9621921949 7595341302 9846707264 1494803176 1513294759
2059710895 2767229950 6135926501 6527793966 5504378141 9771218981 1411533178 4288289120
0861629055 7888948801 9672973398 2154879558 6539443231 1715997509 0536480771 1452508644
0021477483 7830566983 2947534643 1574887600 2553447060 5016720081 3537681505 1011744737
0525476106 1212995726 7448260674 6619359970 9646499349 6193687192 2718731843 2066929586
4568048819 3966538192 5642051018 4836565613 7014651202 9952508182 0546550025 3512640541
2417351362 7643280141 1344172644 2573721215 8630804360 6232625102 1258024747 6381362063
5344177907 1562727116 1327878990 2233978650 7077973087 1328361981 8042590675 8456493642
1334639694 6418242998 8545122769 8638525759 1169510862 8538843908 9619061464 8926595578
2873997599 0384755992 0768769694 9762798020 9373018576 2618773856 2079135497 8209812211
0653711848 5627606686 3650232959 5606375781 3015885853 8424462891 4371644644 2718250845
0081189605 3012040621 9669846038 5157169114 2506412741 9331936610 8787735837 2424020359
9203103052 5230441065 4214782842 1259579767 3879911778 3670920609 0520816896 7959515743
```