

ENTERPOLASYON

Basit olarak interpolasyon işlemi, tablo halinde değerleri verilen bir değişkenin, tabloda olmayan bir değerini bulma olarak tanımlanabilir.

Genel anlamda ise interpolasyon; bilinmeyen bir $f(x)$ fonksiyonunun x_0, x_1, \dots, x_n gibi ayrık noktalarda verilen f_0, f_1, \dots, f_n değerlerini kullanarak, bu fonksiyonun başka basit ve bilinen bir $F(x)$ fonksiyonu ile ifade edilmesidir. Bulunan $F(x)$ fonksiyonuna "**Interpolasyon Fonksiyonu**" denir. Bu fonksiyon; polinom, üslü bir ifade, trigonometrik fonksiyon veya özel bir fonksiyon olabilir.

Genelde interpolasyon fonksiyonu olarak polinomlar kullanılır. Periyodik değerlerde ise trigonometrik fonksiyonlar tercih edilir.

Entopolasyon fonksiyonunun seçiminde δ i teorem kullanılır.
1. Eğer $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ise
entropolasyon fonksiyonu olarak polinom kullanılabilir.
Bu aralıkta

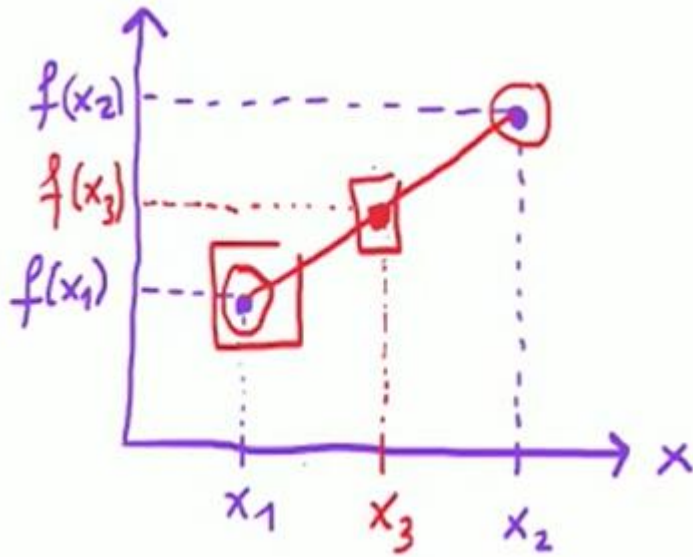
$$|f(x) - F(x)| \leq \epsilon \quad \text{esitliği sağlanır.}$$

2. Periyodu 2π olan sürekli bir fonksiyon için

$$F(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cos kx + \sum_{k=1}^n b_k \sin kx$$

gibi sonlu bir trigonometrik açılım, entropolasyon
fonksiyonu olarak kullanılabilir. Belli bir n değeri
 $|f(x) - F(x)| < \epsilon$ sağlanabilir.

Doğrusal Enterpolasyon



Eğim üzerinden doğru denklemini bulmak

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$$

Örnek

x	f(x)
-2	-0,909297
-1	-0,841471
0	0
1	0,841471
3	0,141120
4	-0,756802
6	-0,279415

Yanda $f(x)$ fonksiyonu için bazı değerler verilmiştir. Buna göre,

a) $f(2)$ değerini $x=1$ ve $x=3$ kullanarak doğrusal interpolasyon metodu ile bulunuz.

b) $f(2)$ değerini $x=-2$ ve $x=6$ kullanarak doğrusal interpolasyon metodu ile bulunuz.

$$a) f(2) = ?$$

$$f(1) = 0,841471$$

$$f(3) = 0,141120$$

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}$$

$$\frac{0,141120 - 0,841471}{2} = \frac{f(2) - 0,841471}{1}$$

$$f(2) = 0,4912955$$

$$b) f(2) = ?$$

$$f(-2) = -0,909297$$

$$f(6) = -0,279415$$

$$\frac{f(6) - f(-2)}{6 - (-2)} = \frac{f(2) - f(6)}{2 - 6}$$

DOĞRUSAL ENTERPOLASYON

Enterpolasyon fonksiyonu olarak 1. dereceden bir polinom (doğru) kullanılıyorsa bu şekildeki enterpolasyona **doğrusal (lineer) enterpolasyon** denir.

Eğer x değisteri $[a, b]$ aralığında bir $f(x)$ 'e aitse enterpolasyon fonksiyonu olarak :

$$F(x) = Ax + B \text{ seçilirse,}$$

$$f(a) = F(a)$$

$$f(b) = F(b)$$

bağıntılarının sağlanması gerekir. Buradan;

$$Aa + B = f(a)$$

$$Ab + B = f(b)$$

yazılır.

$$A = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

$$B = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$

yazılır.

$F(x)$ fonksiyonu ise :

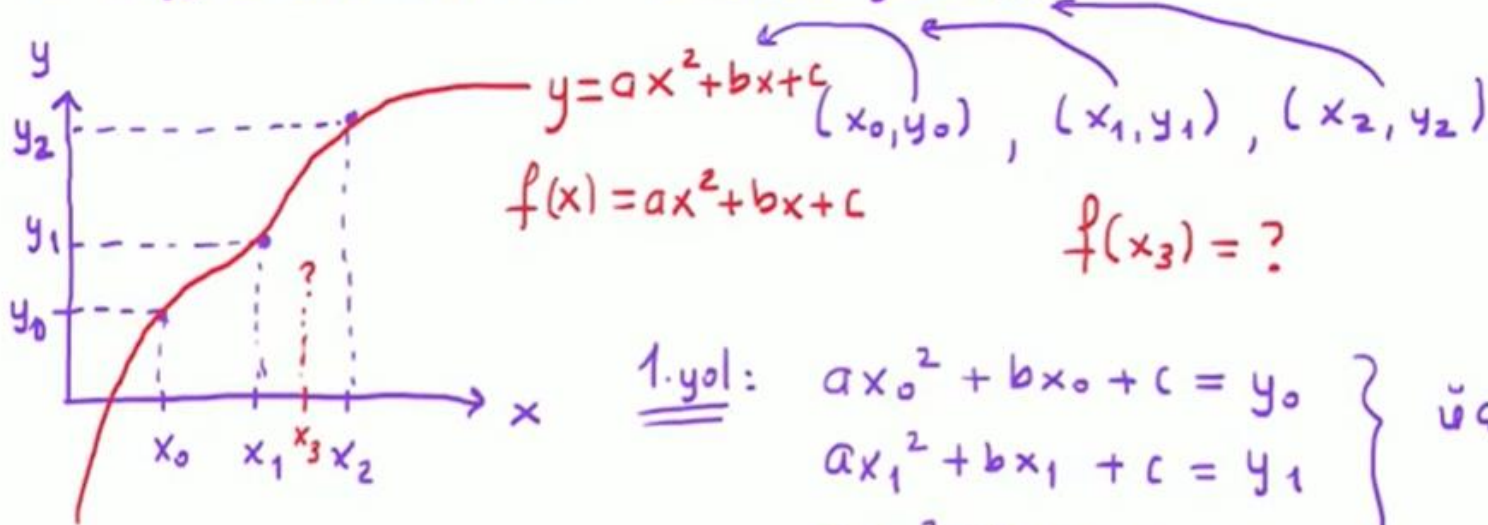
$$F(x) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$

olur.

Eğrisel İnterpolasyon Yöntemi

Quadratic Interpolation Methods

* Uygulanabilmesi için 3 nokta gereklidir.

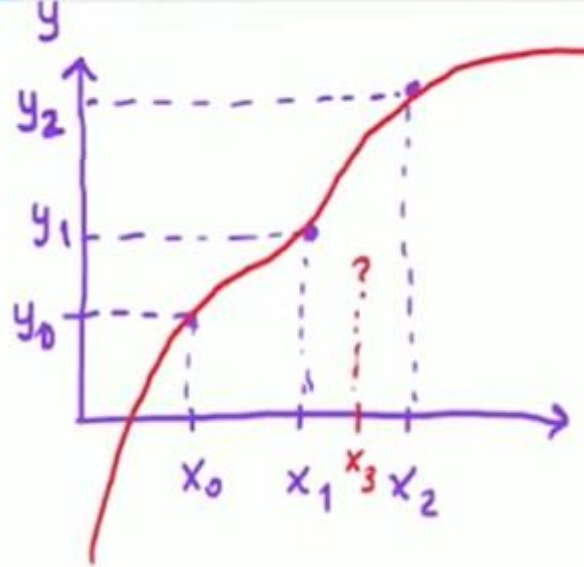


1.yol:

$$\left. \begin{aligned} ax_0^2 + bx_0 + c &= y_0 \\ ax_1^2 + bx_1 + c &= y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c &= y_2 \end{aligned} \right\}$$

Üç bilinmeyenli
denklemler
sistemini
çözüp a, b, c
bulunur.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$f(x_3) = \dots$$



2. yol:

$$f(x) = b_0 + b_1 \cdot (x - x_0) + b_2 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1)$$

→ eğrisel
interpolasyon
fonksiyonu

$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$b_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

$$f(x_3) = \dots$$

Örnek

(1, -2), (2, -1) ve (3, 4) noktaları veriliyor. Bu noktalar kullanılarak eğrisel interpolasyon metodu ile $x=2,5$ değeriye karşılık gelen y değeri bulunuz.

$$\begin{array}{lll} (1, -2) & (2, -1) & (3, 4) \\ (x_0, y_0) & (x_1, y_1) & (x_2, y_2) \end{array}$$

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) = b_0 + b_1(x-1) + b_2(x-1)(x-2)$$

$$b_0 = f(x_0) = -2$$

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{-1 - (-2)}{2 - 1} = 1$$

$$b_2 = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{4 - (-1)}{3 - 2} - \frac{(-1) - (-2)}{2 - 1}}{3 - 1} = 2$$

$$\begin{aligned} f(x) &= -2 + x - 1 + 2(x^2 - 3x + 2) \\ f(x) &= 2x^2 - 5x + 1 \\ f(2,5) &= 1 \end{aligned}$$

GREGORY NEWTON ENTERPOLASYONU

$F(x) = f_0 + \sum_{i=1}^n \binom{k}{i} \Delta^i f_0$ olarak verilir. Bu formül açıl-

duğınca;

$$F(x) = f_0 + \binom{k}{1} \Delta f_0 + \binom{k}{2} \Delta^2 f_0 + \dots + \binom{k}{n} \Delta^n f_0$$

$k = \frac{x_i - x_0}{h}$ olarak enterpolasyon değişkeni adını alır.

$$\binom{k}{i} = \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-i+1)}{i!}$$

$$F(x) = f_0 + \frac{k}{1!} \Delta f_0 + \frac{k(k-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots + \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!} \Delta^n f_0$$

$k = \frac{x_i - x_0}{h}$ konulursa;

$$F(x) = f_0 + \frac{k}{1!} \Delta f_0 + \frac{k(k-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \frac{k(k-1)\dots(k-n+1)}{n!} \Delta^n f_0$$

$$F(x) = f_0 + \frac{\frac{x_i - x_0}{h}}{1!} \Delta f_0 + \frac{\frac{x_i - x_0}{h} \left(\frac{x_i - x_0}{h} - 1 \right)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{\frac{x_i - x_0}{h} \left(\frac{x_i - x_0}{h} - 1 \right) \left(\frac{x_i - x_0}{h} - 2 \right)}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots$$

$$F(x) = f_0 + \frac{x_i - x_0}{h} \Delta f_0 + \frac{x_i - x_0}{h} \frac{x_i - x_0 - h}{h} \frac{\Delta^2 f_0}{2!} + \frac{x_i - x_0}{h} \frac{x_i - x_0 - h}{h} \frac{x_i - x_0 - 2h}{h} \frac{\Delta^3 f_0}{3!} + \dots$$

$$F(x) = f_0 + \frac{x_i - x_0}{h} \Delta f_0 + \frac{x_i - x_0}{h} \frac{x_i - \overbrace{(x_0 + h)}^{x_1}}{h} \frac{\Delta^2 f_0}{2!} + \frac{x_i - x_0}{h} \frac{x_i - \overbrace{(x_0 + h)}^{x_1}}{h} \frac{x_i - \overbrace{(x_0 + 2h)}^{x_2}}{h} \frac{\Delta^3 f_0}{3!} + \dots$$

$$F(x) = f_0 + \frac{x_i - x_0}{h} \Delta f_0 + \frac{(x_i - x_0)(x_1 - x_1)}{h^2} \frac{\Delta^2 f_0}{2!} + \frac{(x_i - x_0)(x_1 - x_1)(x_1 - x_2)}{h^3} \frac{\Delta^3 f_0}{3!} + \dots$$

$h=1$ ve $x_0=0$ alınırsa formül şu şekle dönüşür.

$$F(x) = f_0 + x_i \Delta f_0 + \frac{x_i(x_i-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{x_i(x_i-1)(x_i-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots$$

$h=1$ ve $x_0=0$ alınırsa formül şu şekle dönüşür.

$$F(x) = f_0 + x_i \Delta f_0 + \frac{x_i(x_i-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{x_i(x_i-1)(x_i-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots$$

$x_i \rightarrow x$ alınırsa

$$F(x) = f_0 + x \Delta f_0 + \frac{x(x-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots$$

II
ÖRNEK:

<u>x</u>	<u>f(x)</u>	<u>$\Delta f(x)$</u>	<u>$\Delta^2 f(x)$</u>	<u>$\Delta^3 f(x)$</u>
0	<u>-4</u>	<u>2</u>	<u>14</u>	<u>18</u>
1	-2	16	32	18
2	14	48	50	18
3	62	98	68	18
4	160	166	86	
5	326	252		
6	578			

$$x_0 = 0$$

$$h = 1$$

$$F(x) = -4 + x \cdot 2 + \frac{x(x-1)}{2} \cdot 14 + \frac{x(x-1)(x-2)}{6} \cdot 18$$

$$F(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 4$$

$$F(4) = 160$$

11
DRNEK.

<u>x</u>	<u>f(x)</u>
2	<u>10</u>
4	50
6	122
8	226
10	362

$\Delta f(x)$

40
72
104
136

$\Delta^2 f(x)$

32
32
32

$x_0 \neq 0$
 $h \neq 1$

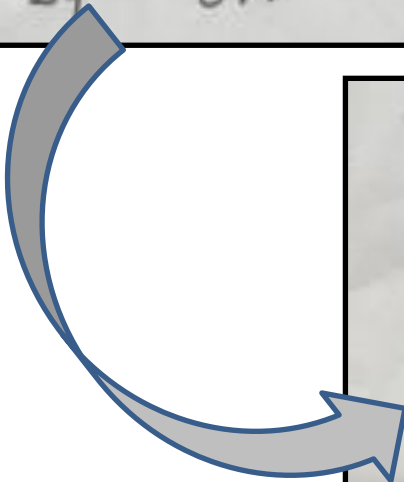
$$F(x) = f_0 + \frac{x-x_0}{h} \Delta f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{h^2} \frac{\Delta^2 f_0}{2!}$$

$$F(x) = 10 + \frac{x-2}{2} \overset{20}{\cancel{40}} + \frac{(x-2)(x-4)}{4} \frac{\cancel{32}^8}{2!}$$

$$F(x) = 4x^2 - 4x + 2 \Rightarrow F(8) = 226$$

Değişken dönüşümü yapılarak ayırık noktaların eşit aralıklı yapılması:

<u>x</u>	<u>f(x)</u>	<u>$\Delta f(x)$</u>	<u>$\Delta^2 f(x)$</u>	<u>$\Delta^3 f(x)$</u>	<u>$\Delta^4 f(x)$</u>
-1	<u>2</u>	<u>-1</u>			
0	1	9	<u>10</u>	<u>26</u>	
3	10	55	46	60	<u>24</u>
8	65	161	106	84	24
15	226	351	190		
24	577				



<u>τ</u>	<u>x</u>	<u>Δx</u>	<u>$\Delta^2 x$</u>
0	-1		
1	0	1	2
2	3	3	2
3	8	5	2
4	15	7	2
5	24	9	

<u>z</u>	<u>F(z)</u> <u>x</u>	<u>Δx</u>	<u>Δ²x</u>
0	-1		
1	0	1	2
2	3	3	2
3	8	5	2
4	15	7	2
5	24	9	

$$F(x) = f_0 + x \Delta f_0 + \frac{x(x-1)}{2!} \Delta^2 f_0$$

$$x = F(z) = x_0 + z \cdot \Delta x + \frac{z(z-1)}{2!} \Delta^2 x = -1 + z \cdot 1 + \frac{z^2 - z}{2} \cdot 2$$

$$x = z^2 - 1 \Rightarrow z = \pm \sqrt{x+1}$$

$$f(z) = f_0 + z \cdot \Delta f_0 + \frac{z(z-1)}{2} \Delta^2 f_0 + \frac{z(z-1)(z-2)}{6} \Delta^3 f_0 + \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)}{24} \Delta^4 f_0$$

$$f(z) = f_0 + z \cdot \Delta f_0 + \frac{z(z-1)}{2} \Delta^2 f_0 + \frac{z(z-1)(z-2)}{6} \Delta^3 f_0 + \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)}{24} \Delta^4 f_0$$

<u>x</u>	<u>f(x)</u>	<u>$\Delta f(x)$</u>	<u>$\Delta^2 f(x)$</u>	<u>$\Delta^3 f(x)$</u>	<u>$\Delta^4 f(x)$</u>
-1	<u>2</u>	<u>-1</u>	<u>10</u>		
0	1	9	46	<u>26</u>	
3	10	55	106	60	<u>24</u>
8	65	161	190	84	24
15	226	351			
24	577				

$$x = z^2 - 1 \Rightarrow z = \pm \sqrt{x+1}$$

$$f(z) = 2 - z + \frac{5}{10} \frac{z(z-1)}{2} + \frac{6}{36} \frac{z(z-1)(z-2)}{6} + \frac{24}{24} \frac{z(z-1)(z-2)(z-3)}{24}$$

$$f(z) = z^4 - 2z^2 + 2 \quad \text{Ara Interpolasyon Formülü}$$

$$f(x) = (\pm \sqrt{x+1})^4 - 2(\pm \sqrt{x+1})^2 + 2$$

$$F(x) = x^2 + 1$$

II ÖRNEK:

x	z	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$
2	0	3	4	8
4	1	7	12	8
6	2	19	20	8
8	3	39	28	
10	4	67		

z	x	Δx
0	2	2
1	4	2
2	6	2
3	8	2
4	10	

$$x = F(z) = x_0 + z \cdot \Delta x$$

$$x = 2 + 2z$$

$$z = \frac{x-2}{2}$$

x	z	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$
2	0	3	4	8
4	1	7	12	8
6	2	19	20	8
8	3	39	28	
10	4	67		

$$f(z) = f_0 + z \cdot \Delta f_0 + \frac{z(z-1)}{2} \Delta^2 f_0$$

$$= 3 + 4z + \cancel{\frac{8}{2}} \frac{z(z-1)}{2} \Rightarrow f(z) = 4z^2 + 3$$

$$F(z) = 4z^2 + 3$$

$$= 4 \left(\frac{x-2}{2} \right)^2 + 3 \Rightarrow \bar{F}(x) = (x-2)^2 + 3$$

$$F(z) = x^2 - 4x + 7$$

II. 301

$$F(x) = f_0 + \frac{(x-x_0)}{h} \Delta f_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{h^2 2!} \Delta^2 f_0$$

LAGRANGE ENTERPOLASYONU

Bir $f(x)$ fonksiyonunun, $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ gibi ayrı noktalardeki bilinen $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ değerleri varsa (bu noktaların aralıkları eşit olsun olmasın) ve $f(x)$ fonksiyonunun enterpolasyon fonksiyonuna $g(x)$ dersek;

$$g(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) y_i \text{ şeklindedir.}$$

$L_i(x)$ katsayıları

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \text{ şeklinde hesaplanır.}$$

Örnek:

Bir $y = f(x)$ fonksiyonunun x_i 'ler için y_i değerleri şöyle olsun.

i	x_i	y_i
0	0	-5
1	1	1
2	3	25

$$n=2$$

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}}^2 \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} = \frac{\cancel{x-x_0}}{\cancel{x_0-x_0}} \cdot \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \cdot \frac{x-x_2}{x_0-x_2} = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} \cdot \frac{x-x_2}{x_0-x_2} \\ &= \frac{x-1}{0-1} \cdot \frac{x-3}{0-3} \Rightarrow L_0(x) = \frac{1}{3} (x-1)(x-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^2 \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \cdot \frac{\cancel{x-x_1}}{\cancel{x_1-x_1}} \cdot \frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} \cdot \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \\ &= \frac{x-0}{1-0} \cdot \frac{x-3}{1-3} \Rightarrow L_1(x) = -\frac{1}{2} (x^2-3x) \end{aligned}$$

$$L_2(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 2}}^2 \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} = \frac{x-x_0}{x_2-x_0} \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{x-0}{3-0} \frac{x-1}{3-1} = \frac{1}{6} (x^2-x)$$

$$g(x) = \frac{1}{3} (x-1)(x-3)(-5) + \left(-\frac{1}{2}\right) (x^2-3x)(1) + \frac{1}{6} (x^2-x)(25)$$

$$g(x) = 2x^2 + 4x - 5 \quad \text{bulunur.} \quad \Rightarrow \quad g(1) = 1 \quad g(2) = 11$$

ORNEK:

i	x	y
0	3	1
1	7	-8
2	15	-22
3	22	-9

$n=3$

$$g(x) = \sum_{i=0}^3 L_i(x) y_i$$

$$L_0(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}}^3 \frac{x-x_j}{x_0-x_j} = \frac{x-x_1}{x_0-x_1} * \frac{x-x_2}{x_0-x_2} * \frac{x-x_3}{x_0-x_3} = -\frac{1}{912} (x-7)(x-15)(x-22)$$

$$L_1(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^3 \frac{x-x_j}{x_1-x_j} = \frac{x-x_0}{x_1-x_0} * \frac{x-x_2}{x_1-x_2} * \frac{x-x_3}{x_1-x_3} = \frac{1}{480} (x-3)(x-15)(x-22)$$

$$L_2(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 2}}^3 \frac{x-x_j}{x_2-x_j} = \frac{x-x_0}{x_2-x_0} * \frac{x-x_1}{x_2-x_1} * \frac{x-x_3}{x_2-x_3} = -\frac{1}{672} (x-3)(x-7)(x-22)$$

$$L_3(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 3}}^3 \frac{x-x_j}{x_3-x_j} = \frac{x-x_0}{x_3-x_0} * \frac{x-x_1}{x_3-x_1} * \frac{x-x_2}{x_3-x_2} = \frac{1}{1995} (x-3)(x-7)(x-15)$$

$$g(x) = -\frac{1}{912}(x-7)(x-15)(x-22)*\textcolor{brown}{(1)} + \frac{1}{480}(x-3)(x-15)(x-22)*(-8) \\ - \frac{1}{672}(x-3)(x-7)(x-22)*(-22) + \frac{1}{1995}(x-3)(x-7)(x-15)*(-9)$$

$$\textcolor{brown}{g(4)} = -1.0296854$$

$$\textcolor{brown}{g(10)} = -14.973684$$