BIL301 SAYISAL YÖNTEMLER
5. Hafta
Doğrusal Denklem Sistemlerinin Çözümleri

Doç. Dr. Sercan YALÇIN

DOĞRUSAL DENKLEM SİSTEMLERİNİN SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

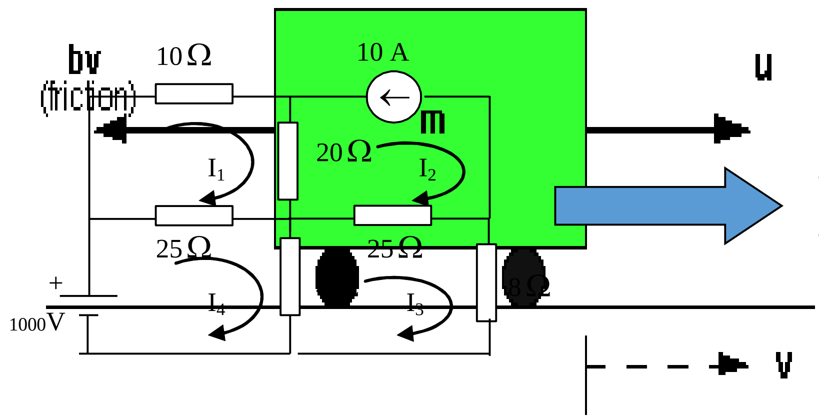
$a_{11}\, x_1 = b_1 \qquad x_1 \longrightarrow$

$f(x_1) = a_{11}\, x_1 - b_1 = 0$

$$
\begin{array}{l}
a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n}\, x_n = b_1 \\
. \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad . \\
. \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad . \\
. \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad . \\
a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots a_{nn}\, x_n = b_n
\end{array}
$$

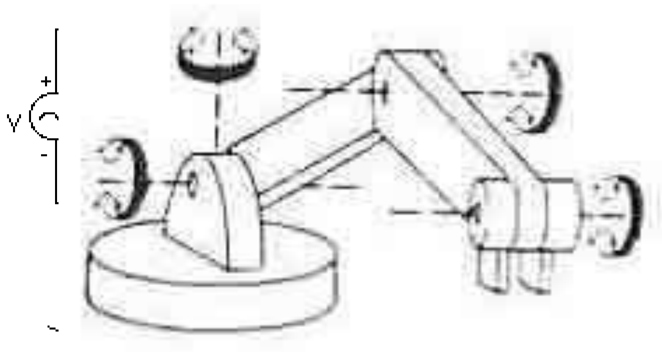
$x_1, x_2, \ldots. x_n$

Karşılaştığımız pek çok sistem;
Hareket Denklemleri, kimyasal denklemler, ısı yasaları, akım-gerilim yasaları, birbirine bağlı olarak değişen değişkenlerle ve bunların oluşturduğu denklemlerle ifade edilirler.

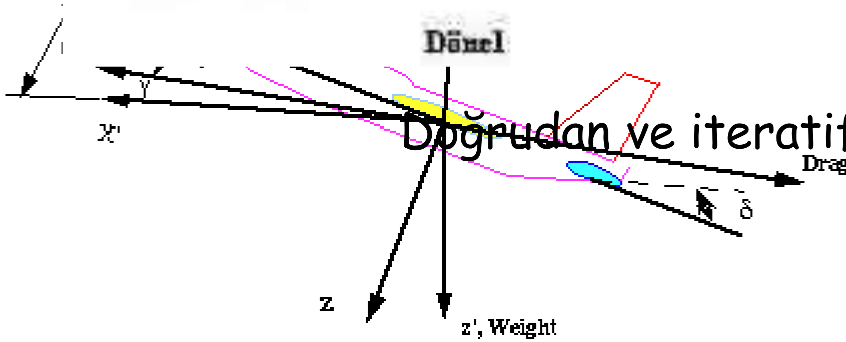


$$5 I_1 - 25 I_4 = -200$$
$$-37 I_3 - 4 I_4 = -250$$
$$-25 I_1 - 4 I_3 + 29 I_4 = 100$$

$$[\dot{v}] = \left[-b/m\right][v] + \left[1/m\right][u]$$
$$y = [1][v]$$



$$A_i \Delta \begin{vmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$



Doğrudan ve iteratif çözüm yöntemleri

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.313 & 56.7 & 0 \\ -0.0139 & -0.426 & 0 \\ 0 & 56.7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.232 \\ 0.0203 \\ 0 \end{bmatrix} [\delta]$$

5.1. DOĞRUDAN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

- **5.1.1. Ters Matris Yöntemi**

$a_{11}\ x_1+a_{12}\ x_2+a_{13}\ x_3=b_1$
$a_{21}\ x_1+a_{22}\ x_2+ a_{23}\ x_3=b_2$
$a_{31}\ x_1+a_{32}\ x_2+ a_{33}\ x_3=b_3$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$[A]\ [X]=[B]$ $\qquad [A]^{-1}\ [A]\ [X]= [A]^{-1}\ [B]$ $\qquad [I]\ [X]= [A]^{-1}\ [B]$

(Hatırlatma: Matrisin tersi $A^{-1}= \dfrac{Adj[A]}{|A|}$ idi.)

Örnek: Aşağıda verilen denklemlerde bilinmeyen olarak tanımlanan x_1, x_2 ve x_3 değerlerini ters matris yöntemini kullanarak bulunuz.

- $2x_1-3x_2+2x_3=-11$
- $x_1+x_2+-2x_3=8$
- $3x_1-2x_2-x_3=-1$

Çözüm

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = +a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|A| = a_{11}(a_{22}\,a_{33}-a_{23}\,a_{32})-a_{12}(a_{21}\,a_{33}-a_{31}\,a_{23})+a_{13}(a_{21}\,a_{32}-a_{31}\,a_{22})$$

$$|A| = 2[1\,(-1)-(-2)\,(-2)]-(-3)[1(-1)-3(-2)]+2[1(-2)-3(1)]$$

$$=2(-1-4)+3(-1+6)+2(-2-3) = 2(-5)+3(5)+2(-5)$$

$$|A| = -5$$

$C(a_{ij}) = (-1)^{i+j}\ M_{ij}$

$C(a_{ij}) = (-1)^{i+j}\ M_{ij}$

$C(a_{11}) = (-1)^{1+1}\ M_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = (+1)\ ((1*-1)-(-2*-2)) = -5$

$C(a_{12}) = (-1)^{1+2}\ M_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\ ((1*-1)-(3*-2)) = -5$

$C(a_{13}) = (-1)^{1+3}\ M_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (+1)\ ((1*-2)-(3*1)) = -5$

$C(a_{21}) = (-1)^{2+1}\ M_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\ ((-3*-1)-(-2*2)) = -7$

$C(a_{22}) = (-1)^{2+2}\ M_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (+1)\ ((2*-1)-(3*2)) = -8$

$C(a_{23}) = (-1)^{2+3}\ M_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (-1)\ ((2*-2)-(3*-3)) = -5$

$C(a_{31}) = (-1)^{3+1}\ M_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (+1)\ ((-3*-2)-(1*2)) = 4$

$C(a_{32}) = (-1)^{3+2}\ M_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1)\ ((2*-2)-(1*2)) = 6$

$C(a_{33}) = (-1)^{3+3}\ M_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (+1)\ ((2*1)-(1*-3)) = 5$

$$C[A]=\begin{bmatrix}-5 & -5 & -5\\ -7 & -8 & -5\\ 4 & 6 & 5\end{bmatrix}$$

Ek Matris (yani Adjoint[A])=$(C[A])^T$

$$\text{Adjoint}[A])=\begin{bmatrix}-5 & -7 & 4\\ -5 & -8 & 6\\ -5 & -5 & 5\end{bmatrix}$$

$$[A]^{-1} = \frac{Adj[A]}{|A|} = \begin{bmatrix} 1 & 1.4 & -0.8 \\ 1 & 1.6 & -1.2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1.4 & -0.8 \\ 1 & 1.6 & -1.2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -11 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 + 11.2 + 0.8 \\ -11 + 12.8 + 1.2 \\ -11 + 8 + 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots\ldots\ldots a_{1n} x_n = b_1 \\ . \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad . \\ . \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad . \\ . \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad . \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots\ldots\ldots a_{nn} x_n = b_n \end{array}$$

$x_1, x_2, \ldots. x_n$

$x_1=1$, $x_2=3$ ve $x_3=-2$

5.1.2. Cramer Yöntemi:

$$x_k = \frac{\det A_k}{\det A}$$

$$[Ak] = \begin{array}{c} \qquad 1 \ldots\ldots k \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots b_1 \ldots & a_{13} \\ a_{21} & \ldots b_2 \ldots & a_{23} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \ldots b_n \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Örnek: Aşağıda verilen denklem takımını Cramer kuralıyla çözün.

$3 x_1 + 4 x_2 - 5 x_3 = -47$
$-2 x_1 - 5 x_2 + 7 x_3 = 56$
$-7 x_1 + 2x_2 - 3 x_3 = 15$

- *Çözüm:*

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 \\ -2 & -5 & 7 \\ -7 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -47 \\ 56 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 3(15-14)-4(6+49)-5(-4-35)=3-220+195=-22$$

$$E=\begin{bmatrix}-47\\56\\15\end{bmatrix}$$

$$x_1=-\frac{1}{22}\begin{vmatrix}-47 & 4 & -5\\ 56 & -5 & 7\\ 15 & 2 & -3\end{vmatrix}=-\frac{1}{22}[-47(15-14)-4(-168-105)-5(112+75)]=-\frac{1}{22}(110)=-5$$

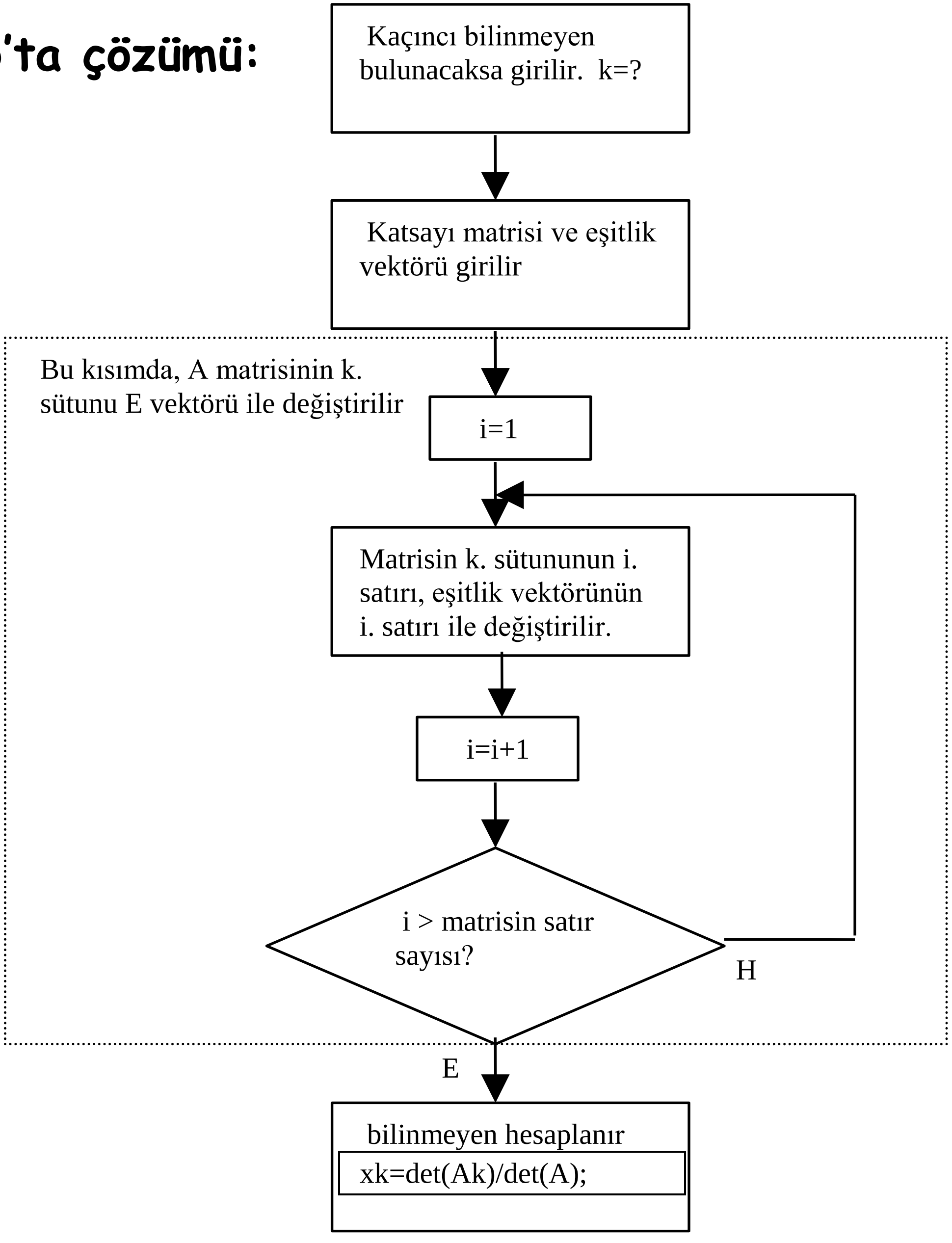
Benzer biçimde x_2 ve x_3 elemanları da bulunur.

$$x_2=-\frac{1}{22}\begin{vmatrix}3 & -47 & -5\\ -2 & 56 & 7\\ -7 & 15 & -3\end{vmatrix}=-\frac{1}{22}[3(-168-105)+47(6+49)-5(-30+392)]=-\frac{1}{22}(-44)=2$$

$$x_3=-\frac{1}{22}\begin{vmatrix}3 & 4 & -47\\ -2 & -5 & 56\\ -7 & 2 & 15\end{vmatrix}=-\frac{1}{22}[3(-75-112)-4(-30+392)-47(-4-35)]=-\frac{1}{22}(-176)=8 \quad \text{bulunur.}$$

$x_1=-5$, $x_2=2$ ve $x_3=8$

Problemin Matlab'ta çözümü:



C:\matlabR12\work\Cramer.m

```matlab
function [xk] = x(k)
A=[3  4 -5
  -2 -5  7
  -7  2 -3];
E=[-47
    56
    15];

Ak=A;

for i=1:size(A,1)
 Ak(i,k)=E(i)
end

xk=det(Ak)/det(A);
```

Ready

5.1.3. Gauss-Yoketme Yöntemi

$3x + 4y + 2z = 71$
$x + 2y + 6z = 73$
$4x + 12y + 5z = 180$

uygun katsayılarla çarpma,bölme

$3x + 4y + 2z = 71$
$-3 / \; x + 2y + 6z = 73$

taraf tarafa toplama, çıkarma

$3x + 4y + 2z = 71$
$+ \; -3x - 12y - 18z = -219$

$-8y + 16z = -148$

$y = (148 - 16z)/8$

Denklemde yerine koyma

Adım adım

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$a_{33}\, x_3 = b_3 \quad x_3 = b_3/a_{33}$

x_3, x_2, x_1

- Gauss yoketme işlemi için;
  - Genişletilmiş matris:

$$[A|b]=\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right]$$

W=[A|b] ⟶ Bu durumda

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix}$$

$$W=\begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & w_{24} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & w_{34} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} w_{14} \\ w_{24} \\ w_{34} \end{bmatrix}$$

$N=M+1$

$j=1,2,\ldots N$

$i=k+1,k+2,\ldots.,M$

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & \ldots\ldots\ldots w_{1N} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & \ldots\ldots\ldots w_{2N} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & \ldots\ldots\ldots w_{3N} \\ & & & \\ w_{M1} & w_{M2} & w_{M3} & \ldots\ldots w_{MN} \end{bmatrix}$$

$k=1,2,\ldots M-1$

$$w_{ij} \leftarrow w_{ij} - \frac{w_{ik}}{w_{kk}} w_{kj}$$

$$w_{ij} \leftarrow w_{ij} - \frac{w_{ik}}{w_{kk}} w_{kj}$$

k=1, $w_{kk}=w_{11}$

$$W = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} j=1 & j=2 & j=3 & & j=N \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ i=2 \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & \cdots\cdots & w_{1N} \\ 0 & w_{22} & w_{23} & \cdots\cdots & w_{2N} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} & \cdots\cdots & w_{3N} \\ & & & & \\ w_{M1} & w_{M2} & w_{M3} & \cdots\cdots & w_{MN} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$w_{ij} \leftarrow w_{ij} - \frac{w_{ik}}{w_{kk}} w_{kj}$$

k=1, $w_{kk}=w_{11}$

i=3 $$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & \cdots\cdots\cdots w_{1N} \\ 0\ldots & w_{22} & w_{23} & \cdots\cdots\cdots w_{2N} \\ \boxed{0\ldots} & \boxed{w_{32}} & \boxed{w_{33}} & \cdots\cdots\cdots w_{3N} \\ & & & \\ w_{M1} & w_{M2} & w_{M3} & \cdots\cdots w_{MN} \end{bmatrix}$$

$$w_{ij} \leftarrow w_{ij} - \frac{w_{ik}}{w_{kk}} w_{kj}$$

k=1, $w_{kk}=w_{11}$

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & \ldots\ldots\ldots w_{1N} \\ 0\ldots. & w_{22} & w_{23} & \ldots\ldots\ldots w_{2N} \\ 0\ldots. & w_{32} & w_{33} & \ldots\ldots\ldots w_{3N} \\ & & & \\ \boxed{0\ldots.} & \boxed{w_{M2}} & \boxed{w_{M3}} & \ldots\ldots w_{MN} \end{bmatrix} \quad i=M$$

$$w_{ij} \leftarrow w_{ij} - \frac{w_{ik}}{w_{kk}} w_{kj}$$

k=2, $w_{kk}=w_{22}$

i=3

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & \ldots\ldots\ldots w_{1N} \\ 0\ldots. & w_{22} & w_{23} & \ldots\ldots\ldots w_{2N} \\ 0\ldots. & \boxed{..0..} & \boxed{w_{33}} & \ldots\ldots\ldots w_{3N} \\ & & & \\ 0\ldots. & w_{M2} & w_{M3} & \ldots\ldots w_{MN} \end{bmatrix}$$

$$w_{ij} \leftarrow w_{ij} - \frac{w_{ik}}{w_{kk}} w_{kj}$$

k=2, $w_{kk}=w_{22}$

i=M

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & \ldots\ldots\ldots w_{1N} \\ 0\ldots. & w_{22} & w_{23} & \ldots\ldots\ldots w_{2N} \\ 0\ldots. & ..0.. & w_{33} & \ldots\ldots\ldots w_{3N} \\ & & & \\ 0\ldots. & \boxed{.0..} & \boxed{w_{M3}} & \ldots\ldots w_{MN} \end{bmatrix}$$

$$w_{ij} \leftarrow w_{ij} - \frac{w_{ik}}{w_{kk}} w_{kj}$$

k=3, $w_{kk}=w_{33}$ $$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & \text{.........} w_{1N} \\ 0\text{....} & w_{22} & w_{23} & \text{.........} w_{2N} \\ 0\text{....} & \text{..}0\text{..} & w_{33} & \text{.........} w_{3N} \\ & & & \\ 0\text{....} & \text{.}0\text{..} & \boxed{\text{...}0\text{..}}\text{.} & \text{........} w_{MN} \end{bmatrix}$$

i=M

Adım adım

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

- Geriye doğru bilinmeyenleri bulmak ve yerine koymak için

$a_{33}\,x_3=b_3 \quad x_3= b_3/a_{33}$

x_3, x_2, x_1 idi

(i=M-1, M-2, ...,1)

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} & \ldots\ldots\ldots\, w_{1N} \\ 0\ldots & w_{22} & w_{23} & \ldots\ldots\ldots\, w_{2N} \\ 0\ldots & ..0.. & w_{33} & \ldots\ldots\ldots\, w_{3N} \\ & & & \\ 0\ldots & .0.. & \ldots 0 \ldots\, w_{MM} & \ldots w_{MN} \end{bmatrix}$$

$$x_k=\frac{1}{w_{kk}}\left(w_{kN}-\sum_{j=k+1}^{M} w_{kj}\,x_j\right) \quad (k=M-1, M-2, \ldots, 1)$$

$w_{MM}\,x_M=w_{MN} \longrightarrow x_M=\dfrac{w_{MN}}{w_{MM}}$

$w_{(M-1)(M-1)}\,x_{M-1}+w_{(M-1)M}\,x_M=w_{(M-1)N}$

$\downarrow$

$$x_{M-1}=\frac{1}{w_{(M-1)(M-1)}}\left(w_{(M-1)N}-w_{(M-1)M}\,x_M\right)$$

Örnek: Yanda verilen 4 bilinmeyenli denklem takımını Gauss-Yoketme yöntemiyle çözünüz.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 42 \\ -11 \\ -38 \end{bmatrix}$$

Çözüm

Bu denklem takımını sağa genişlemiş matris olarak yazalım ve köşegenin altını sıfırlamak üzere önce birinci satırı esas alarak a_{21}, a_{31} ve a_{41} elemanlarını adım adım sıfırlayalım. Kutuların sol tarafındaki sayılar, sıfırların çarpıldığı sayılardır.

2/1 k=1. i=2. satırlar	**1**	**-3**	**4**	**-5**	**-11**
	2	**4**	**6**	**8**	**42**
	4	**3**	**2**	**1**	**-11**
	5	**3**	**1**	**-3**	**-38**

4/1 k=1. i=3. satırlar	**1**	**-3**	**4**	**-5**	**-11**
	0	**10**	**-2**	**18**	**64**
	4	**3**	**2**	**1**	**-11**
	5	**3**	**1**	**-3**	**-38**

5/1 k=1. i=4. satırlar	**1**	**-3**	**4**	**-5**	**-11**
	0	**10**	**2**	**-18**	**-64**
	0	**-15**	**14**	**-21**	**-33**
	5	**3**	**1**	**-3**	**-38**

15/10 k=2. i=3. satırlar	**1**	**-3**	**4**	**-5**	**-11**
	0	**10**	**-2**	**18**	**64**
	0	**15**	**-14**	**21**	**33**
	0	**18**	**-19**	**22**	**17**

18/10 k=2. i=4. satırlar	**1**	**-3**	**4**	**-5**	**-11**
	0	**10**	**-2**	**18**	**64**
	0	**0**	**-11**	**-6**	**-63**
	0	**18**	**-19**	**22**	**17**

77/55 k=3. i=4. satırlar	**1**	**-3**	**4**	**-5**	**-11**
	0	**10**	**-2**	**18**	**-64**
	0	**0**	**-11**	**-6**	**-63**
	0	**0**	**-77/5**	**-52/5**	**-491/5**

1	**-3**	**4**	**-5**	**-11**
0	**10**	**-2**	**18**	**64**
0	**0**	**-11**	**-6**	**-63**
0	**0**	**0**	**-2**	**-10**

$$x_4 = \frac{-10}{-2} = 5$$

$$x_3 = \frac{-63 + 6*5}{-11} = 3$$

$$x_2 = \frac{64 + \left[2*3 - 18*5\right]}{10} = -2$$

$$x_1 = \frac{-11 - \left[(-3)*(-2) + 4*3 + (-5)*5\right]}{1} = -4$$

Pivot (referans eksen) Seçimi

$$\begin{aligned} 3x + 4y + 2z &= 71 \\ x + 2y + 6z &= 73 \\ 4x + 12y + 5z &= 180 \end{aligned} \quad \xrightarrow{\equiv} \quad \begin{aligned} 3x + 4y + 2z &= 71 \\ 4x + 12y + 5z &= 180 \\ x + 2y + 6z &= 73 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ldots 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 5 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 5 & 20 & 10 & 0 & 0 & -200 \\ \hline \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 5 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \ldots 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 5 & 20 & 10 & 0 & 0 & -200 \\ \hline \end{bmatrix}$$

Gauss-Yoketme Yönteminin Matlab'ta Çözümü

$$
\begin{array}{cc} & \mathbf{j} \longrightarrow \\ \mathbf{i}\downarrow & W=\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & \cdots\cdots\cdots\cdots & & & a_{1N} \\ a_{21} & .a_{22}\cdots\cdots\cdots & & & a_{2N} \\ & & \mathbf{k} & & \\ \vdots & & & & \\ a_{M1} & \cdots\cdots b_n \cdots\cdots & & a_{kk} & a_{MN} \end{array}\right] \end{array}
$$

idi

$$x_M = \frac{1}{w_{MM}} w_{MN} \qquad x_k = \frac{1}{w_{kk}}\left(w_{kN} - \sum_{j=k+1}^{M} w_{kj} x_j \right) \quad (k=M-1,\ M-2,\ \ldots..,1)$$

a) Algoritmayı daha önce çözdüğümüz örneğe uygulayacak olursak, birinci yordam aşağıdaki denklem takımına karşılık gelen matrisi bulacaktır.

$w_{11} x_1+w_{12} x_2+w_{13} x_3+w_{14} x_4=b_1(=w_{15})$
$0 * x_1+w_{22} x_2+w_{23} x_3+w_{24} x_4=b_2(=w_{25})$
$0* x_1+0* x_2+w_{33} x_3+w_{34} x_4=b_3(=w_{35})$
$0* x_1+0* x_2+0* x_3+w_{44} x_4=b_4(=w_{45})$

b) İkinci yordam bu denklemlerden bilinmeyenleri çeker. Sonuncu bilinmeyenden başlayarak bulduğu bilinmeyeni bir önceki denklemde yerine koyarak tüm bilinmeyenleri bulur.

$x_4=w_{45}/w_{44}$

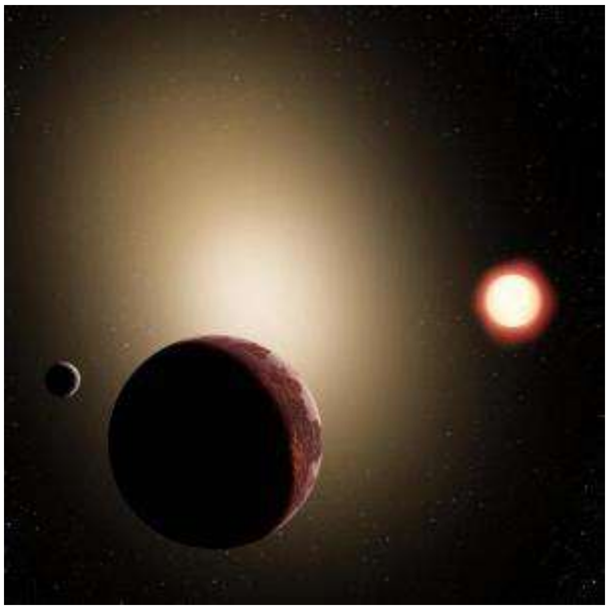
$$x_3 = \frac{1}{w_{33}}\left(w_{35} - w_{34}\, x_4\right)$$

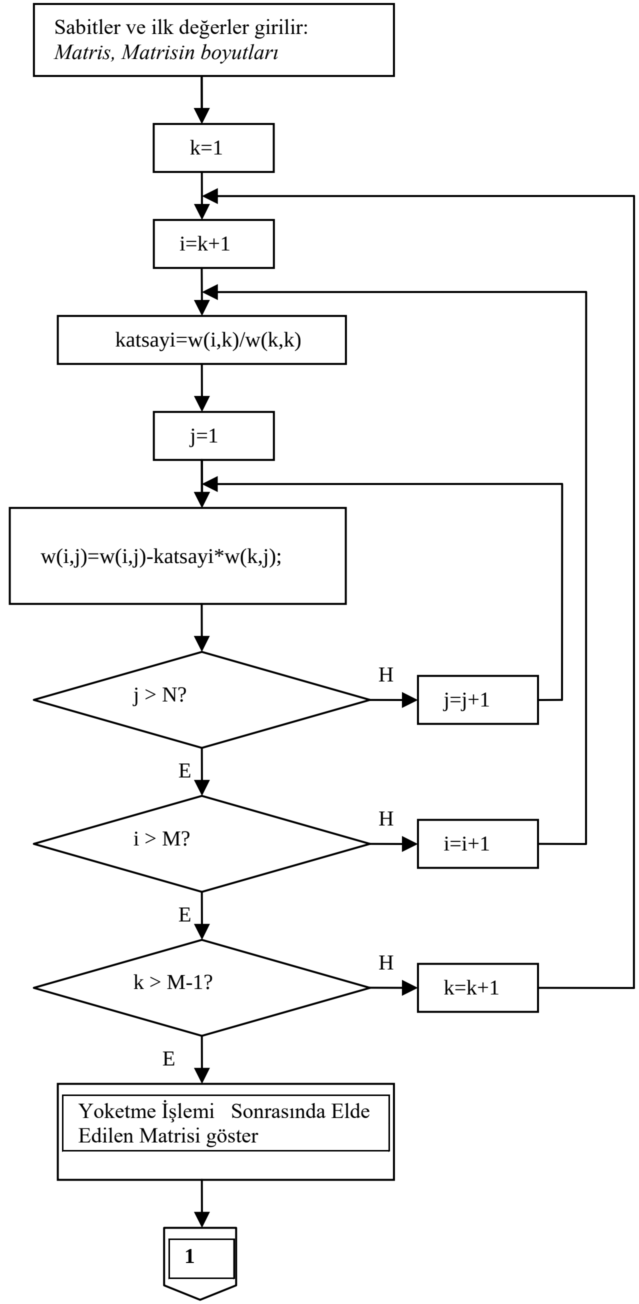
$$x_2 = \frac{1}{w_{22}}\left(w_{25} - w_{23}\, x_3 - w_{24}\, x_4\right)$$

$$x_1 = \frac{1}{w_{11}}\left(w_{15} - w_{12}\, x_2 - w_{13}\, x_3 - w_{14}\, x_4\right)$$

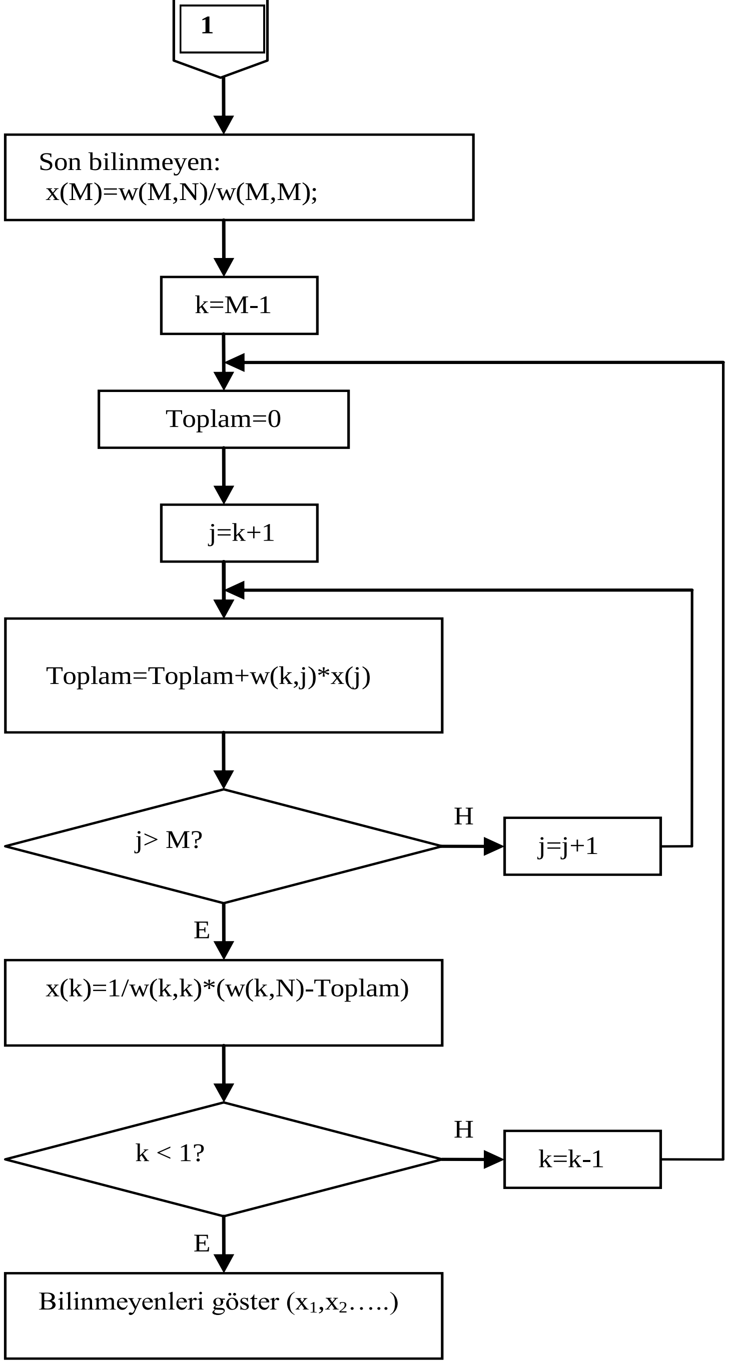
Program Algoritması

(Yok etme yordamı)





Bilinmeyenlerin geriye doğru çözümü



```
%Yoketme Yordami
w=[1 -3 4 -5 -11; 2 4 6 8 42;4 3 2 1 -11;5 3 1 -3 -38];
M=size(w,1); N=size(w,2);

for k=1:M-1

    for i=k+1:M
        katsayi=w(i,k)/w(k,k);

        for j=1:N
            w(i,j)=w(i,j)-katsayi*w(k,j);
        end
    end
end

disp('Yok etme islemi sonrasinda matris:');
w

%geriyecozum yordami

x(M)=w(M,N)/w(M,M);

for k=M-1:-1:1%k. satirdaki bilinmeyen bulunacak.
    Toplam=0;
    for j=k+1:M %Bilinmeyenin sağındaki aynı "j."
        Toplam=Toplam+w(k,j)*x(j);% satırdaki
    end %tüm  çarpımların toplamı eşitliğin sağına
    x(i)=1/w(i,i)*(w(i,N)-Toplam);%atılır ve bilin-
end %meyenin paydasına bölünür
disp('Bilinmeyenler x1,x2......xM');
x
```

Çıkışlar:
Yok etme islemi sonrasinda matris:

w =

```
    1.0000   -3.0000    4.0000   -5.0000  -11.0000
         0   10.0000   -2.0000   18.0000   64.0000
         0         0  -11.0000   -6.0000  -63.0000
         0         0    0.0000   -2.0000  -10.0000
```

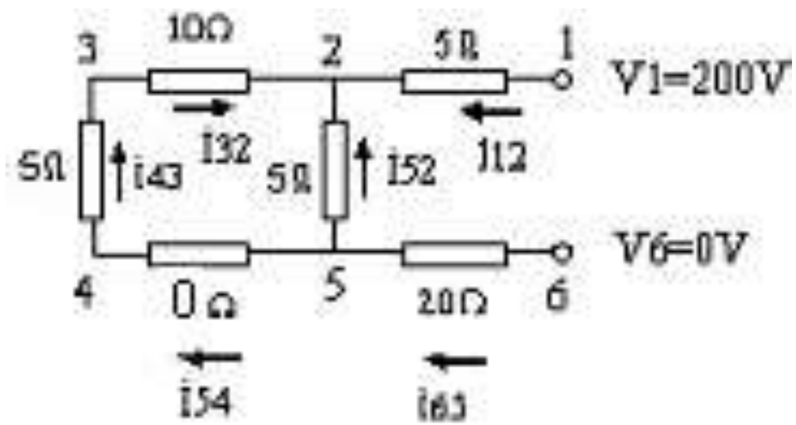
Bilinmeyenler x1,x2......xM   sırasıyla;

x =

```
   -4.0000   -2.0000    3.0000    5.0000
```

Örnek: Şekildeki devrede bilinmeyen i12,i52, i32, i65, i54 ve i43 akımlarını Gauss Yoketme yöntemi ile bulun
İpucu: ilk 4 denklemi Kirchoff'un akım yasasından, kalan 2 denklemi de her iki kapalı çevrime gerilim yasasını uygulayarak elde edebilirsiniz.

($w_{ij\,(yeni)} = w_{ij}(eski) - katsayi * w_{kj}$, $x_M = \frac{1}{w_{MM}} w_{MN}$, $x_k = \frac{1}{w_{kk}}\left(w_{kN} - \sum_{j=k+1}^{M} w_{kj} x_j\right)$ (k=M-1, M-2, …..,1))



b) Problemi çözen programı yazın. Program, ilgili pivot sıfır olduğu sürece (birden fazla sefer de sıfır olabilir) pivotun bulunduğu satırı, bir alt satırla yer değiştirsin.
c) Programı anlaşılır şekilde tarif eden bir akış şeması oluşturun.

Genel olarak devre çözümü yapacak bir programda farklı devrelere karşı esnek olabilmek için her bir direnç arası düğüm olarak tanımlanır. Bu nedenle her düğümü hesaba katmak gerektiği unutulmamalıdır. En genel haliyle çözüm aşağıdaki gibidir.

a) Kirscoff'un akım yasası işaretleri göz önüne alındığında

- 3 noktasındaki akımlar : $i_{43} + (-i_{32})=0;$
- 4 noktasındaki akımlar: $i_{54} + (-i_{43})=0;$
- 2. düğüme gelen akımlar: $i_{32} + i_{52}+i_{12}=0;$
- 5. düğüme gelen akımlar: $i_{65} + (-i_{54})+(-i_{52})=0;$

b) Kirscoff'un gerilim yasasını 1. ve 2. çevreye uygularsak (akım yönlerini saat yönünde seçelim)

1. çevre denklemi: $5\, i_{43}+ 10\, i_{32}+ 5\, (-i_{52})=0$
2. çevre denklemi: $20\, i_{65}+ 5\, i_{52}+ 5\, (-i_{12})=-200$

6 bilinmeyenimiz ve 6 denklemimiz var bu denklemleri yeniden düzenleyip matrisel forma getirirsek (karıştırmamak için sıralamayı küçükten büyüğe olacak şekilde yapabiliriz)

$$1\,i_{12} + 1\,i_{32} + 0\,i_{43} + 1\,i_{52} + 0\,i_{54} + 0\,i_{65} = 0 \qquad \text{(2. düğüm)}$$
$$0\,i_{12} - 1\,i_{32} + 1\,i_{43} + 0\,i_{52} + 0\,i_{54} + 0\,i_{65} = 0 \qquad \text{(3. düğüm)}$$
$$0\,i_{12} + 0\,i_{32} - 1\,i_{43} + 0\,i_{52} + 1\,i_{54} + 0\,i_{65} = 0 \qquad \text{(4. düğüm)}$$
$$0\,i_{12} + 0\,i_{32} + 0\,i_{43} - 1\,i_{52} - 1\,i_{54} + 1\,i_{65} = 0 \qquad \text{(5. düğüm)}$$
$$0\,i_{12} + 10\,i_{32} + 5\,i_{43} - 5\,i_{52} + 0\,i_{54} + 0\,i_{65} = 0 \qquad \text{(1. çevre)}$$
$$-5\,i_{12} + 0\,i_{32} + 0\,i_{43} + 5\,i_{52} + 0\,i_{54} + 20\,i_{65} = -200 \qquad \text{(2. çevre)}$$

$$W=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 5 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 20 & -200 \end{bmatrix}$$

$$
W=\begin{array}{r} (+5/1)\,| \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 10 & 5 & -5 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
[-5] & 0 & 0 & 5 & 0 & 20 & -200 \\
\hline
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 10 & 5 & -5 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 5 & 0 & 10 & 0 & 20 & -200 \\
\hline
\end{array}\right]
$$

$$
W=\begin{array}{r} \\ (+10/1)\,| \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
\hline
0 & [10] & 5 & -5 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 5 & 0 & 10 & 0 & 20 & -200
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 15 & -5 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 5 & 0 & 10 & 0 & 20 & -200
\end{array}\right]
$$

6. satır için

$$
W=\left[\begin{array}{c|ccccccc}
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
(+5/1) & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
 & 0 & 0 & 15 & -5 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
 & 0 & \boxed{5} & 0 & 10 & 0 & 20 & -200 \\
\hline
\end{array}\right]
=\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 15 & -5 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 20 & -200 \\
\hline
\end{array}\right]
$$

Adım3: 3. sütunda pivot w_{33}=-1'in altında sıfırlanabilecek yine sadece 5. ve 6. satırlar görünüyor.
5. satır için

$$
W=\left[\begin{array}{c|ccccccc}
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(+15/1) & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
\hline
 & 0 & 0 & \boxed{15} & -5 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
- & 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 20 & -200
\end{array}\right]
=\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & -5 & 15 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 20 & -200
\end{array}\right]
$$

6. satır için

$$
W=\left[\begin{array}{c|ccccccc}
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
(+5/1) & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & -5 & 15 & 0 & 0 \\
\hline
 & 0 & 0 & \boxed{5} & 10 & 0 & 20 & -200 \\
\hline
\end{array}\right]
=\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -5 & 15 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 10 & 5 & 20 & -200 \\
\hline
\end{array}\right]
$$

$$
W=\begin{array}{r} \\ \\ \\ (-5/1)| \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \boxed{-5} & 15 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 10 & 5 & 20 & -200
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 20 & -5 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 10 & 5 & 20 & -200
\end{array}\right]
$$

6. satır için

$$
W=\begin{array}{r} \\ \\ \\ (+10/1)| \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 20 & -5 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \boxed{10} & 5 & 20 & -200 \\
\hline
\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccccccc}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 20 & -5 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 30 & -200 \\
\hline
\end{array}\right]
$$

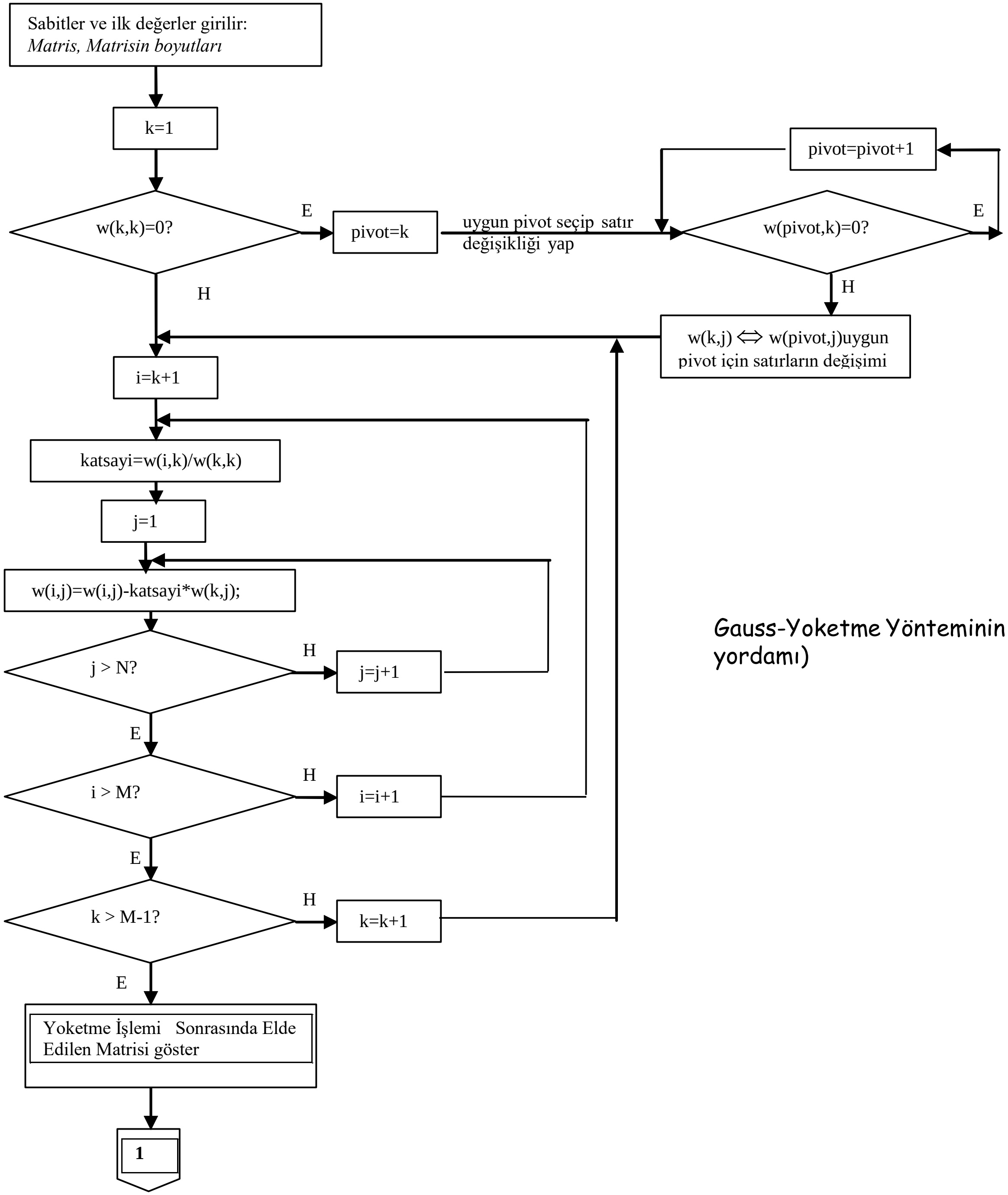
Adım5: 5. sütunda pivot w_{55}=20'nin altında sıfırlanabilecek bir tek 6. satır kalmıştır.

6. satır için

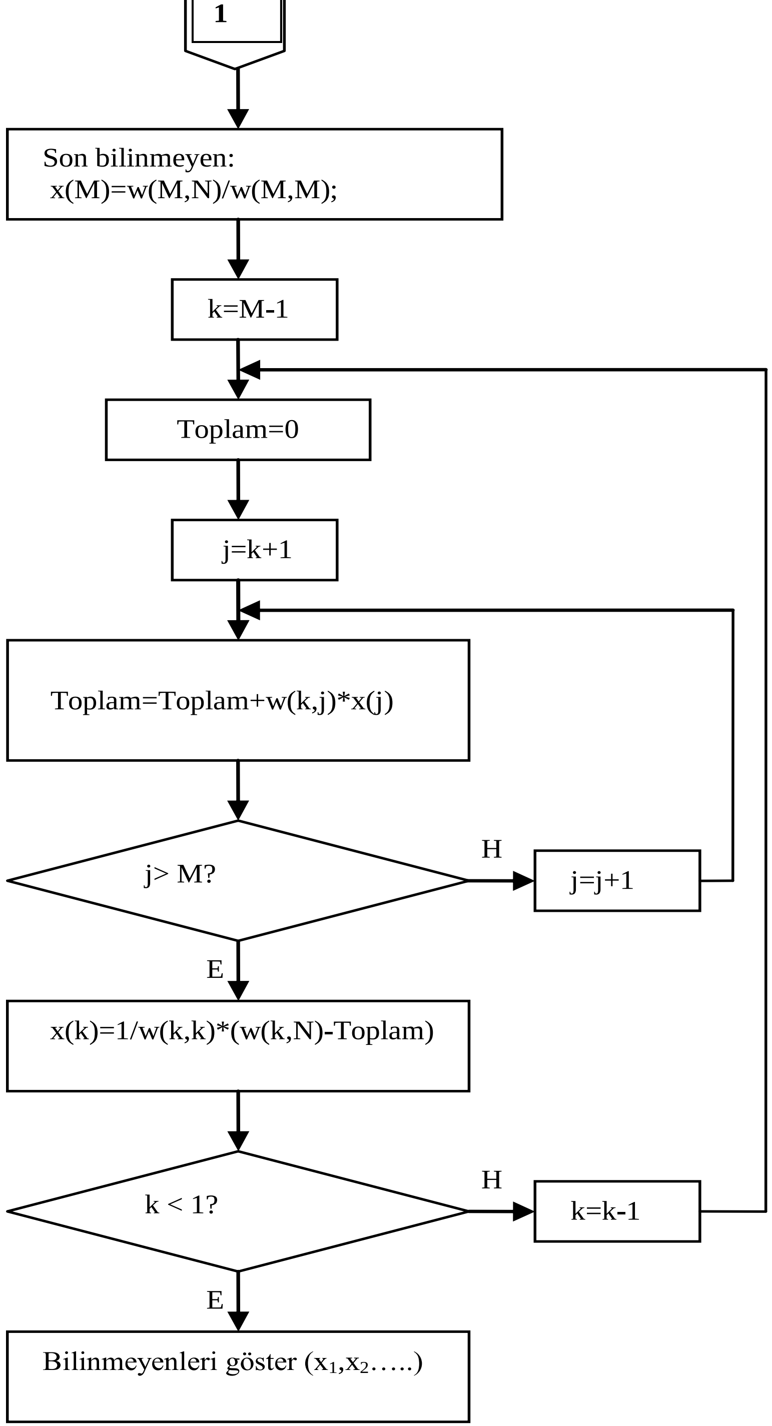
$$W=\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ (1/4) \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & -5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & [-5] & 30 & -200 \\ \hline \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & -5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 28.75 & -200 \\ \hline \end{array}\right]$$

d) Bilinmeyenlerin bulunması

- $28.75 * i_{65} = -200 \Rightarrow i_{65} = -6.9565$ A
- $20 * i_{54} - 5 * i_{65} = 0 \Rightarrow i_{54} = \dfrac{5*(-6.9565)}{20} = -1.7391$ A
- $-1*i_{52} - 1*i_{54} + 1*i_{65} = 0 \Rightarrow i_{52} = -1*(-1.7391) + 1*(-6.9565) = -5.2174$ A
- $-1*i_{43} + 1*i_{54} = 0 \Rightarrow i_{43} = -1.7391$ A
- $-1*i_{32} + i_{43} = 0 \Rightarrow i_{32} = -1.7391$A
- $1*i_{12} + 1*i_{32} + 1*i_{52} = 0 \Rightarrow i_{12} = -1*(-1.7391A) - 1*(-5.2174) = 6.9565$



Gauss-Yoketme Yönteminin Algoritması (Yok etme yordamı)



Gauss-Yoketme Yönt. Algoritması (Bilinmeyenlerin geriye doğru çözümü)

```matlab
w=[1 1 0 1 0 0 0; 0 -1 1 0 0 0 0; 0 0 -1 0 1 0 0;
   0 0 0 -1 -1 1 0; 0 10 5 -5 0 0 0; -5 0 0 5 0 20 -200];
M=size(w,1); N=size(w,2);%Yoketme Yordami
for k=1:M-1
    if w(k,k)==0 %pivot sifirsa
        pivot=k
        while w(pivot,k)==0 %sıfır olmayan
             pivot=pivot+1  %yenisini ara
             if pivot>M 'pivot bulunamadi'
                exit
             end
        end
        for j=1:N %yenisinin bulunduğu satirla
            Gecicidepo=w(k,j);%eski pivotun
            w(k,j)=w(pivot,j); %satırını
            w(pivot,j)=Gecicidepo;%yer değistir
        end
    end
    for i=k+1:M %pivotun altindaki elemanı sıfır
        katsayi=w(i,k)/w(k,k);% yapacak şekilde bir
        for j=1:N %katsayi belirle ve elemanın
            w(i,j)=w(i,j)-katsayi*w(k,j)%bulunduğu
        end %tum satiri guncelle, bunu pivotun
    end % altindaki satirdan son satira (M) kadar yap
end
disp('Yok etme islemi sonrasinda matris:');
w
x(M)=w(M,N)/w(M,M);%geriyecozum yordami
for k=M-1:-1:1
    Toplam=0;
    for j=k+1:M
        Toplam=Toplam+w(k,j)*x(j);
    end
    x(k)=1/w(k,k)*(w(k,N)-Toplam);
end
disp('Bilinmeyenler x1,x2......xM');  x
```

script | Ln 36 | Col 40 | OVR

5.2. YİNELEMELİ YÖNTEMLER

- İteratif ve yaklaşık çözümler daha önce anlatılan yerine koyma yöntemlerine bir alternatif oluştururlar.

5.2.1. Gauss-Siedel Yöntemi

- 3'e 3'lük bir denklem sistemini örnek olarak alalım.

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2$$
$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3$$

Başlangıç koşulları: $x_1=0$; $x_2=0$; $x_3=0$

$$x_1=\frac{b_1-a_{12}\underbrace{x_2}_{0}-a_{13}\underbrace{x_3}_{0}}{a_{11}}$$

$$x_2=\frac{b_2-a_{21}x_1-a_{23}\underbrace{x_3}_{0}}{a_{22}}$$

$$x_3=\frac{b_3-a_{31}x_1-a_{32}x_2}{a_{33}}$$

n değişken için Gauss-Siedel formülü;

$$\boxed{x_i^{k+1}=\frac{b_i}{a_{ii}}-\sum_{j=1}^{i-1}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{k+1}-\sum_{j=i+1}^{n}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{k}}$$

Yakınsama koşulu $\quad |a_{ii}|\geq\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|$

Örnek: Gauss-Siedel yöntemini kullanarak aşağıdaki sistemin çözümünü bulun.

- 3 x_1-0.1 x_2-0.2 x_3 =7.85
- 0.1 x_1+7 x_2- 0.3 x_3=-19.3
- 0.3 x_1+0.2x_2+10 x_3=71.4

Çözüm: Önce bilinmeyenleri diğerleri cinsinden bulalım.

$$x_1 = \frac{7.85 + 0.1x_2 + 0.2x_3}{3}$$

$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1x_1 + 0.3x_3}{7}$$

$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3x_1 + 0.2x_2}{10}$$

Burada x2 ve x3'ü sıfır varsayarsak

$$x_1 = \frac{7.85 + 0 + 0}{3} = 2.616667$$

$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1(2.616667) + 0}{7} = -2.794524$$

$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3\left(2.616667\right) + 0.2\left(-2.794524\right)}{10} = 7.005610$$

İkinci iterasyonda aynı süreç tekrarlanarak aşağıdaki değerler hesaplanır:

$$x_1 = \frac{7.85 + 0.1(-2.794524) + 0.2(7.005610)}{3} = 2.990557$$ Burada

$$x_2 = \frac{-19.3 - 0.1(2.990557) + 0.3(7.005610)}{7} = -2.499625$$

$$x_3 = \frac{71.4 - 0.3(2.990557) + 0.2(-2.499625)}{10} = 7.000291$$

Hatayı tahmin etmek için bilinmeyenlerin bağıl yaklaşım yüzde hatalarına bakılır. Örneğin x_1 için:

$$\left|\in_{a,1}\right| = \left|\frac{2.990557 - 2.616667}{2.990557}\right| \%100 = \%12.5$$ 'tir. x_2 ve x_3 için hata tahminleri

$$\left|\in_{a,2}\right| = \left|\frac{-2.499625 - 2.794524}{-2.499625}\right| \%100 = \%11.8$$

$$\left|\in_{a,3}\right| = \left|\frac{7.000291 - 7.005610}{7.000291}\right| \%100 = \%0.076$$

Bu şekilde tüm hatalar belirlenen bir tolerans sınırı altına düşene kadar iterasyona devam edilir.

5.2.2. Jacobi Yöntemi

Birinci iterasyon

$x_1=(b_1-a_{12}\,x_2-a_{13}\,x_3)/a_{11}$

$x_2=(b_2-a_{21}\,x_1-a_{23}\,x_3)/a_{22}$

$x_3=(b_3-a_{31}\,x_1-a_{32}\,x_2)/a_{33}$

İkinci iterasyon

$x_1=(b_1-a_{12}\,x_2-a_{13}\,x_3)/a_{11}$

$x_2=(b_2-a_{21}\,x_1-a_{23}\,x_3)/a_{22}$

$x_3=(b_3-a_{31}\,x_1-a_{32}\,x_2)/a_{33}$

(a)

$x_1=(b_1-a_{12}\,x_2-a_{13}\,x_3)/a_{11}$

$x_2=(b_2-a_{21}\,x_1-a_{23}\,x_3)/a_{22}$

$x_3=(b_3-a_{31}\,x_1-a_{32}\,x_2)/a_{33}$

$x_1=(b_1-a_{12}\,x_2-a_{13}\,x_3)/a_{11}$

$x_2=(b_2-a_{21}\,x_1-a_{23}\,x_3)/a_{22}$

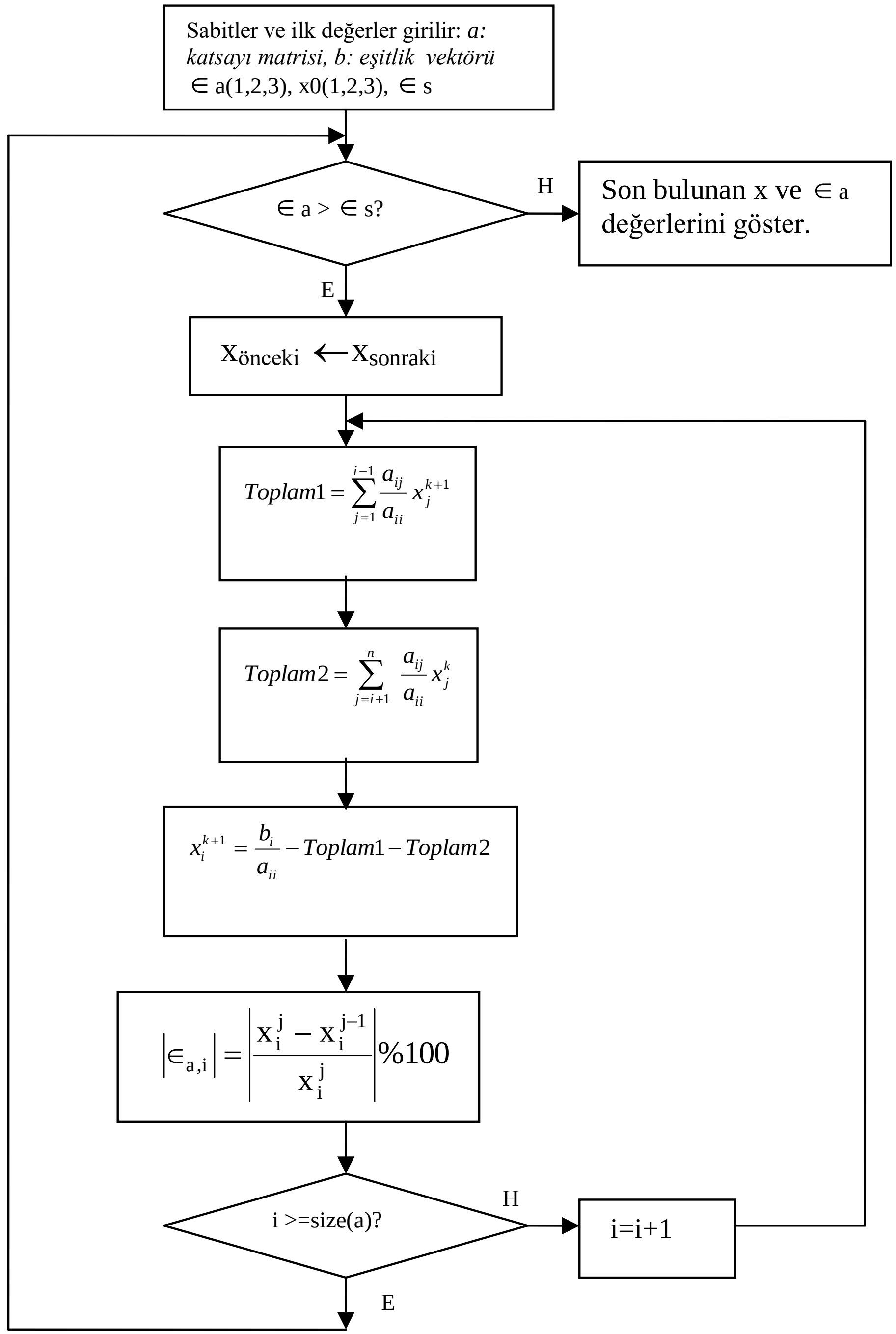
$x_3=(b_3-a_{31}\,x_1-a_{32}\,x_2)/a_{33}$

(b)

Şekil.5.5. (a) Gauss-Siedel ve (b) Jacobi Yöntemleri

Gauss-Siedel yönteminde her x değeri bulundukça, bir sonraki x değerini belirleyen denklemde hemen kullanılır (Şekil.5.5.a). Böylece eğer çözüm yakınsıyorsa her zaman en iyi tahminler kullanılmış olur. Jacobi adı verilen alternatif yöntemde yeni x değerleri toplu olarak eski x değerleri gurubunun denklemde yerine konulmasıyla güncellenir (Şekil.5.5.b).

Gauss-Siedel Yönteminin algoritması Şekil.5.6'da, programı ise Şekil.5.7'de verilmiştir. Jacobi yönteminde tek fark, toplam terimleri hesaplanırken, x'lerin son değerleri (x(k+1)), döngü boyunca kendisi haricindeki x'lerin son değerlerine değil, bir önceki değerlerine (x(k)) bağlı olmasıdır.


Sabitler ve ilk değerler girilir: a: katsayı matrisi, b: eşitlik vektörü
∈ a(1,2,3), x0(1,2,3), ∈ s
∈ a > ∈ s?
H
Son bulunan x ve ∈ a değerlerini göster.
E
$x_{önceki} \leftarrow x_{sonraki}$
$Toplam1 = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k+1}$
$Toplam2 = \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{k}$
$x_i^{k+1} = \frac{b_i}{a_{ii}} - Toplam1 - Toplam2$
$\left|\in_{a,i}\right| = \left|\frac{x_i^j - x_i^{j-1}}{x_i^j}\right| \%100$
i >=size(a)?
H
i=i+1
E

E:\Günlük Kullanım\Sayısal Çözümleme\work\GaussS.m

File Edit View Text Debug Breakpoints Web Window Help

```
a=[3 -0.1 -0.2
   0.1 7 -0.3
   0.3 0.2 10];
b=[7.85
   -19.3
   71.4];
for i=1:size(a,1)
    ea(i)=0.9;
    xson(i)=0;
end
 es=0.8;

while max(ea)>es
    xonceki=xson;
for i=1:size(a,1)
    Toplam1=0; Toplam2=0;
    for j=1:i-1
        Toplam1=Toplam1+a(i,j)/a(i,i)*xson(j);
    end
    for j=i+1:size(a,1)
        Toplam2=Toplam2+a(i,j)/a(i,i)*xonceki(j);
    end
    xson(i)=b(i)/a(i,i)-Toplam1-Toplam2;
    ea(i)=abs((xson(i)-xonceki(i))/xson(i))*100;
end

end
xson
ea
```

Ready