BIL301 SAYISAL YÖNTEMLER
13. Hafta
Diferansiyel Denklemlerin Sayısal Çözümleri-II

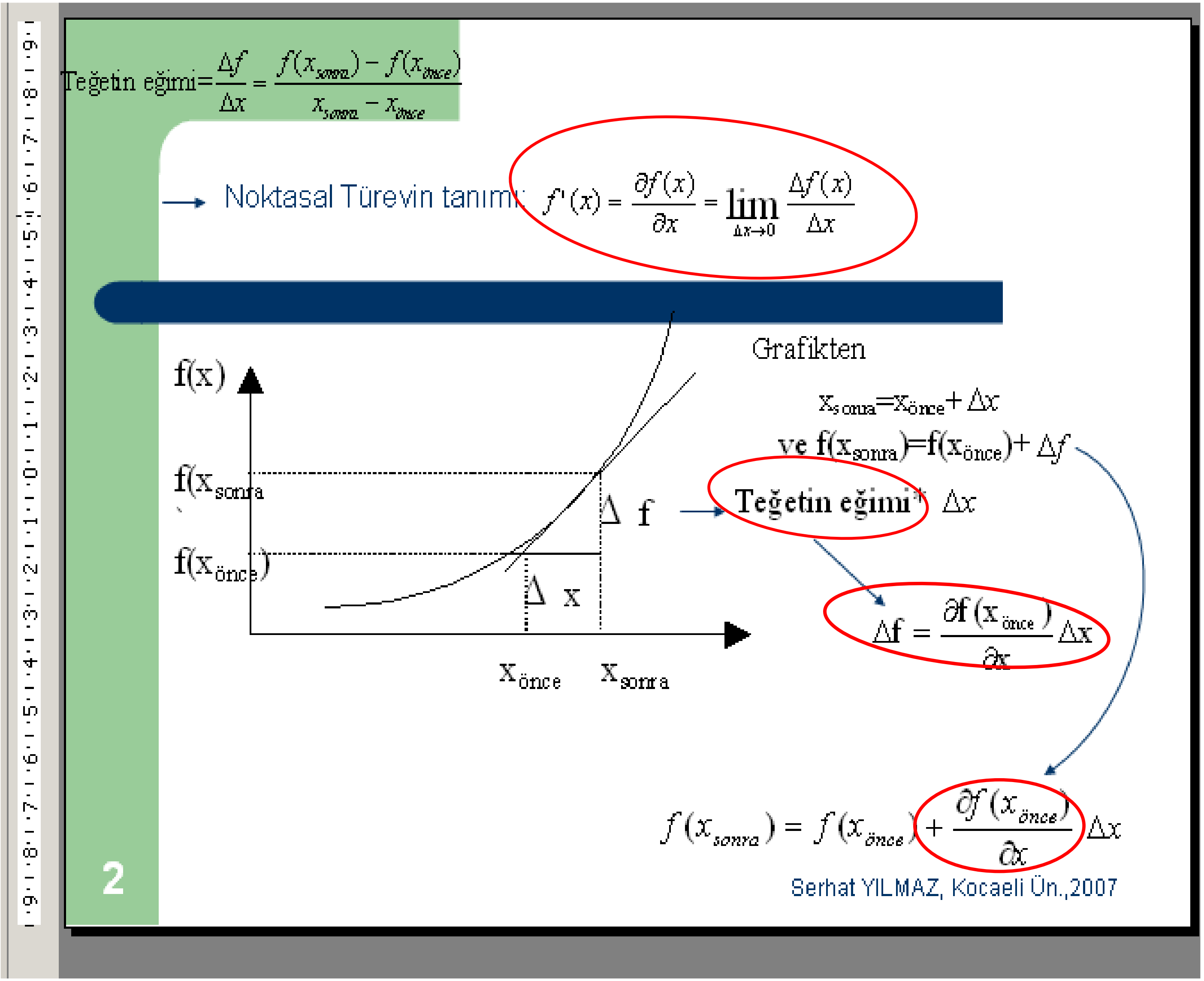
Doç. Dr. Sercan YALÇIN

Sayısal Çözümleme Yöntemleri

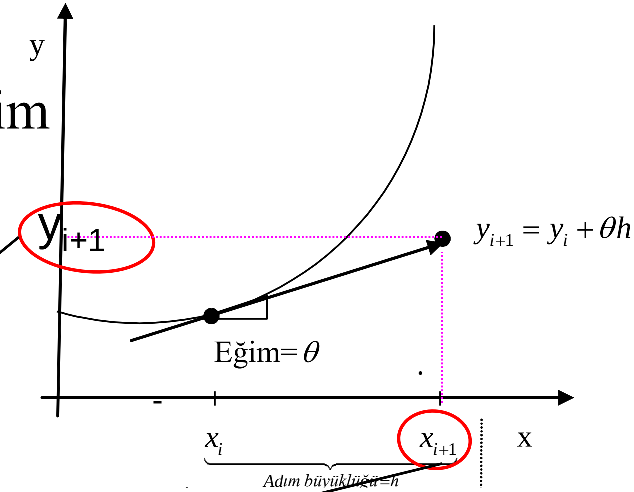
lineer olmayan

denk sist. dersini

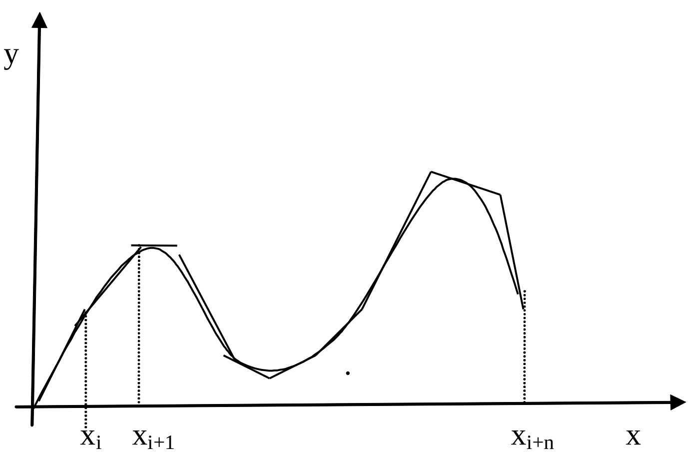
hatırlayalım



$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \longrightarrow \frac{dy}{dx} = f(x, y) = \theta = \text{eğim}$$

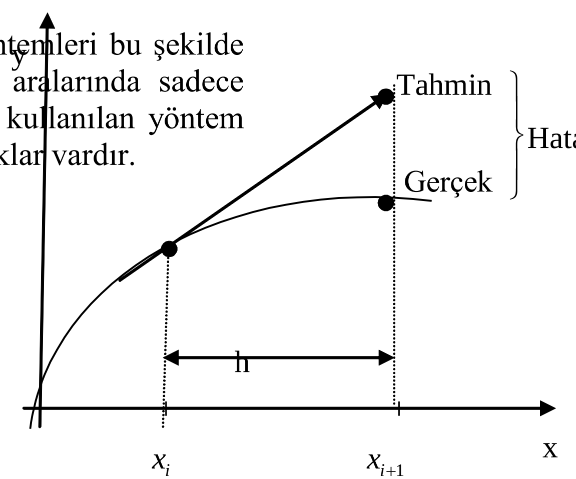


$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ şeklindeki adi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri, bir önceki x_i ve bunun fonksiyonda aldığı değer olan y_i değerlerinden yola çıkarak, diferansiyel (fonksiyonun eğimi) yardımıyla daha sonraki (x_{i+1}, y_{i+1}) değerlerini bulmak olarak özetlenebilir.



Şekil.9.6. y fonksiyonunun yörüngesi

Bütün çözüm yöntemleri bu şekilde olmakla birlikte, aralarında sadece eğim tahmininde kullanılan yöntem yönünden farklılıklar vardır.



Şekil.9.7. Eğim tahmini

Euler Yöntemi

$$\frac{dy}{dx} = \theta = f(x_i, y_i)$$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h}$$

Euler Formülü

Örnek: Eşitlik 9.8'deki dif. denklemi sayısal olarak çözmek için Euler yöntemini kullanın (Adım büyüklüğünü h=0.5 olarak alın, x=0'dan x=4'e kadar integre edin, başlangıç koşulu x=0 için y=1)

Çözüm:

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

Buradaki x=0, y(0)=1 noktasındaki eğim tahmini;

$f(0,1)= -2\,(0)^3+12\,(0)^2-20\,(0)+8.5=8.5$ Buradan

y(0.5)=1+8.5*0.5=5.25 bulunur.

Oysa orijinal fonksiyonun bu noktadaki gerçek değeri;

$y=-0.5\,(0.5)^4+4\,(0.5)^3-10\,(0.5)^2+8.5\,(0.5)+1=3.21875$'tir.

i) $y(1)=y(0.5)+f(1\ ,\ 5.25)*0.5$

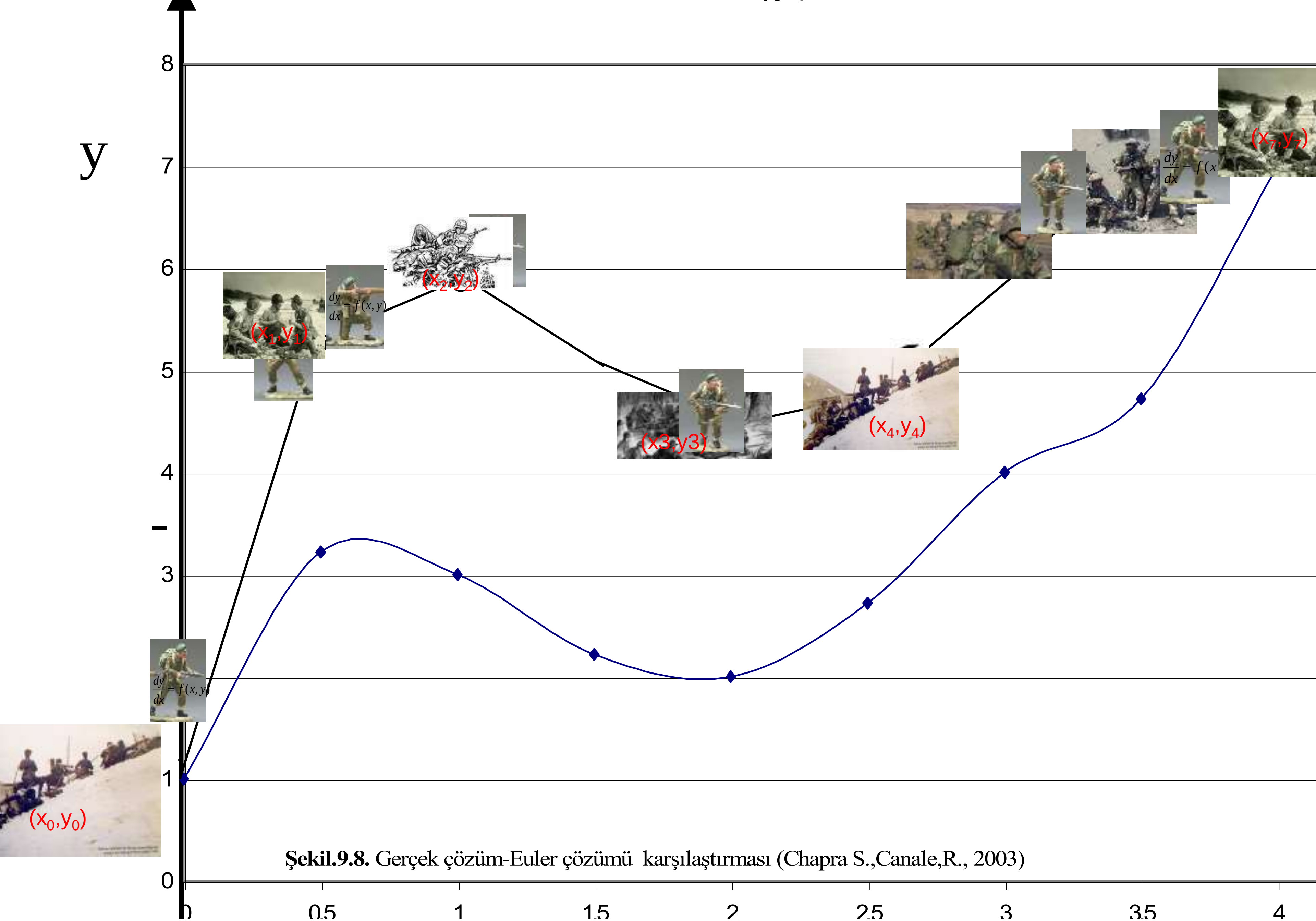
Buradaki $x=1$, $y(1)=5.25$ noktasındaki eğim tahmini;

$f(1\ ,\ 5.25) = -2\ (0.5)^3+12\ (0.5)^2-20\ (0.5)+8.5=1.25$ Buradan

$y(1)=5.25+1.25*0.5=5.875$ bulunur. Tüm adımlar için sonuçlar tabloda verilmiştir.

Tablo.9.2. Fonksiyonun gerçek ve euler yaklaşımıyla çözümleri

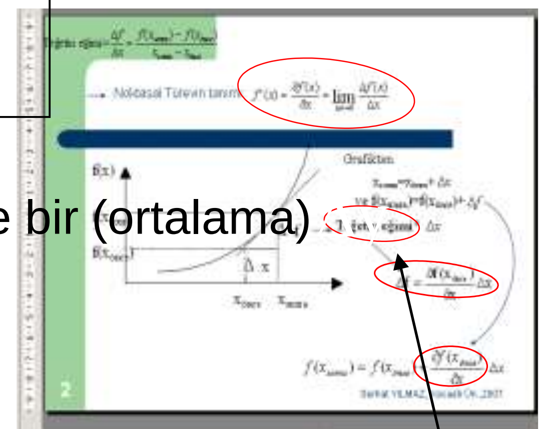
x	$y_{gerçek}$	y_{euler}
0	1	1
0.5	3.21875	5.25
1	3	5.875
1.5	2.21875	5.125
2	2	4.5
2.5	2.71875	4.75
3	4	5.875
3.5	4.71875	7.125
4	7	7



Şekil.9.8. Gerçek çözüm-Euler çözümü karşılaştırması (Chapra S.,Canale,R., 2003)

Runge-Kutta Yöntemi

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4\right)$$



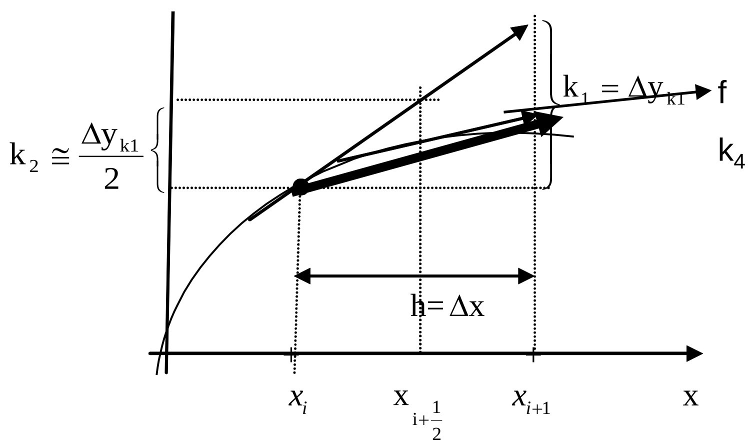
Yine bir (ortalama)

,

Runge-Kutta Formülü

$$, k_1 = h f(x_i, y_i) \qquad k_2 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$\underbrace{k_3 = h f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right) k_4 = h f(x_i + h, y_i + k_3)}_{h*(egim)=\Delta y}$$



En son adımda en güncel

Delta y

tahmini

kullanılır

Örnek: $\frac{dI(t)}{d(t)} = 10 - I(t)$ dif. denklemini Runge-Kutta yöntemiyle çözünüz. h=0.1, I(0)=0;

Çözüm: y=I, x=t $\Rightarrow$ $y_0=I_0=0$, $x_0=t_0=0$ (başlangıç anı)

$k_1 = h\,f(x_0, y_0) = h\,f(t_0, I_0) = 0.1*(10-I_0) = 0.1*(10-0) = 1$

$$k_2 = h f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = 0.1*\left[10-(0+\frac{1}{2})\right] = 0.1*(10-0.5) = 0.95$$

$$k_3 = h f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = 0.1*\left[10-(0+\frac{0.95}{2})\right] = 0.9525$$

$$k_4 = h f\left(x_0 + h, y_0 + k_3\right) = 0.1*\left[10-(0+0.9525)\right] = 0.9047$$

$$I(0.1) = 0 + \frac{1}{6}\left(1 + 2\left(0.95 + 0.9525\right) + 0.9047\right) = 0.9516$$

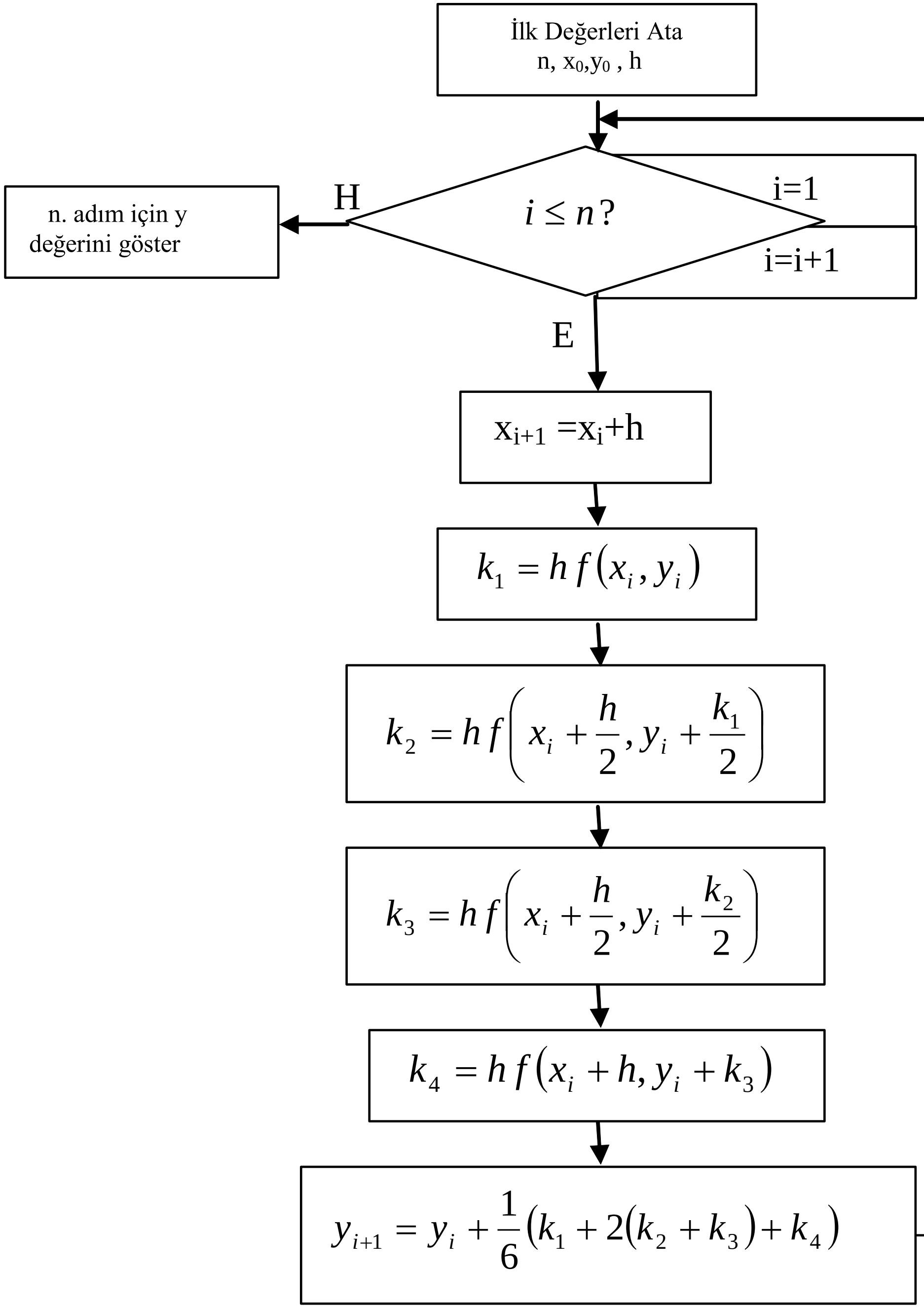
$t_2 = 0.2$ $\quad k_1 = 0.1*f(x_1, y_1) = 0.1(10-0.9516) = 0.9048$, $k_2 = 0.1*[10-(I(0.1) + \frac{0.9048}{2})$

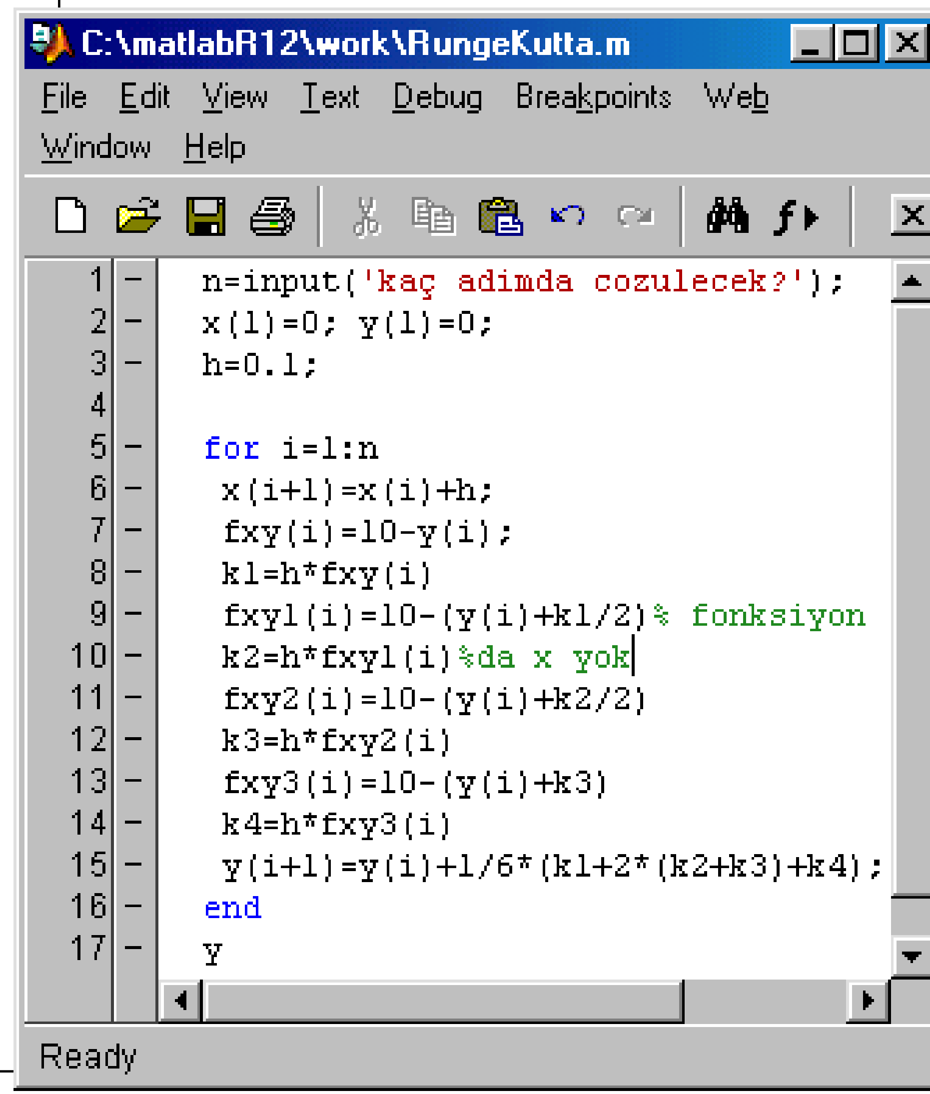
k_3.....

k_4.....

Buradan gerekli hesaplamalar yapıldığında I(0.2)= 1.8127 bulunur.

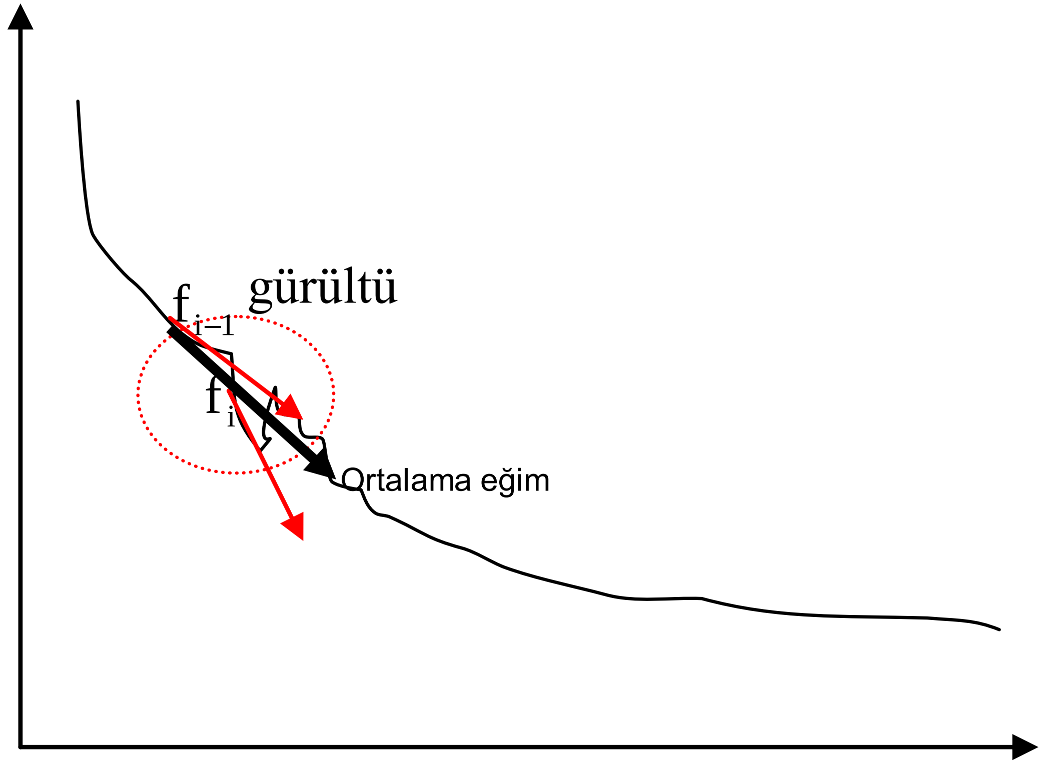
Algoritma ve Program





Adam's Yöntemi

- Bu yöntem, çözüm yörüngesini daha etkili şekilde belirlemek için daha önceki adımlardan kalan bilgileri saklar.
- 2 ve 3 adımlı olmak üzere 2 farklı Adams formülü vardır.



2 adımlı Adam's yöntemi

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(3f_i - f_{i-1}\right)$$

Örneğin $y_2 = y_1 + \frac{h}{2}\left(3f_1 - f_0\right)$ değerini bulabilmek için $f(x_0,y_0)$ ve $f(x_1, y_1)$'i önceden bilmek gerekir.

3 adımlı Adam's yöntemi

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}\left(23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2}\right)$$

y_3 değerini ($y_3 = y_2 + \frac{h}{12}\left(23f_2 - 16f_1 + 5f_0\right)$) bulabilmek için, $f(x_0,y_0)$, $f(x_1, y_1)$ ve $f(x_2,y_2)$ değerleri bilinmelidir.

Soru.1: Salgın bir hastalığın zamana bağlı olarak yayılması diferansiyel denklemlerle ifade edilebilir. Burada
D : hastalığa **Dirençsiz** olan kişilerin gurubu
Y : hastalığa **Yakalanmış** kişiler gurubu
A : hastalığa direnç kazanma, ölüm, karantinaya alınarak guruplardan izole edilme vs. gibi nedenlerle yukarıdaki guruplardan **Ayrılanların** oluşturduğu gurup olmak üzere guruplar aşağıdaki denklemlerde görüldüğü gibi birbirlerinden etkilenmektedir. Burada u: Hastalığa yakalanan yeni bireyler (Yani Y gurubuna eklenen yeni girişler) dir.

$$\frac{dD}{dt} = -\alpha D - \beta D Y, \quad \frac{dY}{dt} = \beta D Y - \gamma Y + u, \quad \frac{dA}{dt} = \alpha D + \gamma Y$$

T=0.2 sn'lik peryodlarla, t=0'dan t=0.6'sn'ye kadar D,Y ve A guruplarının zamana göre değişimlerini her adımda Euler yöntemiyle bularak ayrı ayrı grafiklerde çizin.

$$\alpha = \beta = \gamma = 1$$

İlk koşullar:
D(0)=1, Y(0)=0, A(0)=0, t=0 için u (0)=1, t>0 için u(t)=0
(Euler formülü: $y_{i+1}=y_i+ f(x_i, y_i)h$) (Dorf, 2005)

Çözüm: D : Dirençsizler, Y : Yakalanmışlar, A : Ayrılanlar

Euler formülü: $y_{i+1}=y_i+ f(x_i, y_i)h$ idi, Adım büyüklüğü h=T=0.2sn.

$\alpha = \beta = \gamma = 1$ için diferansiyel denklemler yeniden düzenlenirse

$$\frac{dD}{dt} = -D - DY = f_D(t,D,Y,A,u) \quad , \quad \frac{dY}{dt} = DY - Y + u = f_Y(t,D,Y,A,u)$$

$$\frac{dA}{dt} = D + Y = f_A(t,D,Y,A,u)$$,n=(0.6sn-0sn)/0.2sn= 3 adım için çözüm yapacağız

t_0=0. saniye için D(0)=1, Y(0)=0, A(0)=0, u (0)=1 verilmiş

f_D(t_0, D(0), Y(0), A(0), u(0))=-D(0)-D(0)*Y(0)=-1-(1)*0=**-1**

f_Y(t_0, D(0), Y(0), A(0), u(0))=D(0)*Y(0)-Y(0)+u(0)=(1*0)-(0)+1=**1**

f_A(t_0, D(0), Y(0), A(0), u(0))=D(0)+Y(0)=1+0=**1**

i) 1. adımda t_1=0.2. saniye için

D_1=D(0.2)=D(0)+ **f_D(t_0, D(0), Y(0), A(0), u(0))** *h= 1+ **(-1)***0.2=1-0.2=<u>0.8</u>

Y_1=Y(0.2)=Y(0)+ **f_Y(t_0, D(0), Y(0), A(0), u(0))***h=0+**(1)***0.2=<u>0.2</u>

A_1=A(0.2)=A(0)+ **f_A(t_0, D(0), Y(0), A(0), u(0))***h=0+**(1)***0.2=<u>0.2</u>

t>0 için u(t)=0 oluğundan

u_1= u(0.2)=0'dır ve bundan sonraki tüm u(t) değerleri de sıfır olacaktır.

f_D(t_1, D(0.2), Y(0.2), A(0.2), u(0.2))=-D(0.2)-D(0.2)*Y(0.2)=-0.8-(0.8)*0.2= **-0.96**

f_Y(t_1, D(0.2), Y(0.2), A(0.2), u(0.2))=D(0.2)*Y(0.2)-Y(0.2)+u(0.2)=(0.8*0.2)-(0.2)+0= **-0.04**

f_A(t_1, D(0.2), Y(0.2), A(0.2), u(0.2))=D(0.2)+Y(0.2)=0.8+0.2=**1**

ii) 2. adımda t_2=0.4 saniye için

D_2=D(0.4)=D(0.2)+ **f_D(t_1, D(0.2), Y(0.2), A(0.2), u(0.2))** *h= 0.8+ **(-0.96)***0.2=<u>0.608</u>

Y_2=Y(0.4)=Y(0.2)+ **f_Y(t_1, D(0.2), Y(0.2), A(0.2), u(0.2))***h=0.2+**(-0.04)***0.2=<u>0.192</u>

A_2=A(0.4)=A(0.2)+ **f_A(t_1, D(0.2), Y(0.2), A(0.2), u(0.2))***h=0.2+**(1)***0.2=<u>0.4</u>

f_D(t_2, D(0.4), Y(0.4), A(0.4), u(0.4))=-D(0.4)-D(0.4)*Y(0.4)= -0.608-(0.608)*0.192= **-0.7247**

f_Y(t_2, D(0.4), Y(0.4), A(0.4), u(0.4))=D(0.4)*Y(0.4)-Y(0.4)+u(0.4)=(0.608*0.192)-(0.192)+0= **-0.075264**

f_A(t_2, D(0.4), Y(0.4), A(0.4), u(0.4))=D(0.4)+Y(0.4)=0.608+0.192= **0.8**

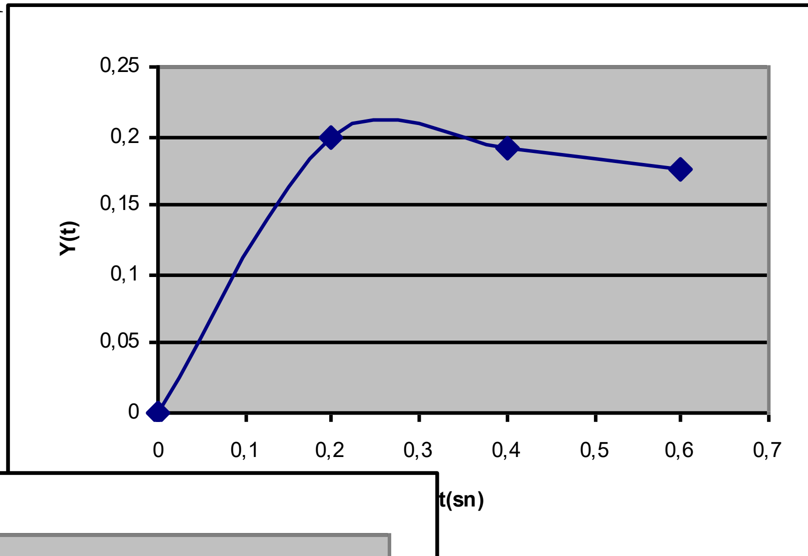
iii) 3. adımda t_2=0.6 saniye için

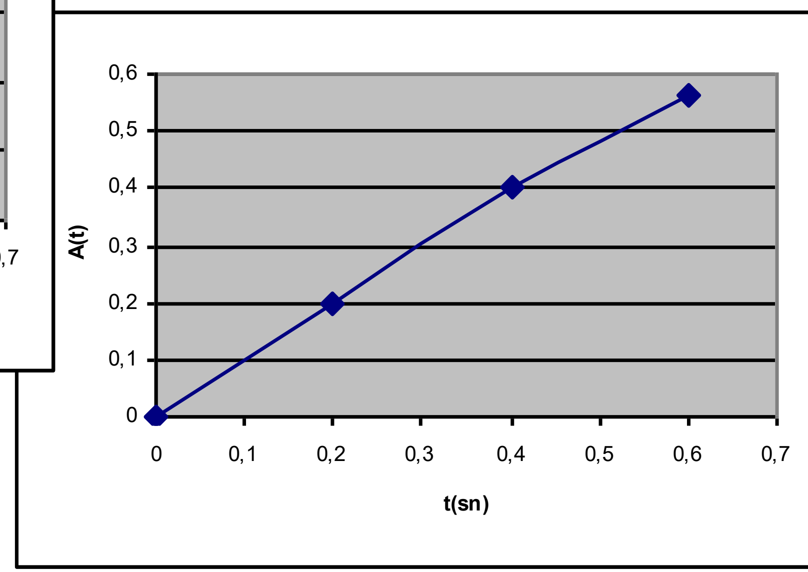
$D_3=D(0.6)=D(0.4)+$ $\mathbf{f_D(t_2, D(0.4), Y(0.4), A(0.4), u(0.4))}$ $*h= 0.608+$ $\mathbf{(-0.7247)}$$*0.2=$ $\underline{0.46306}$

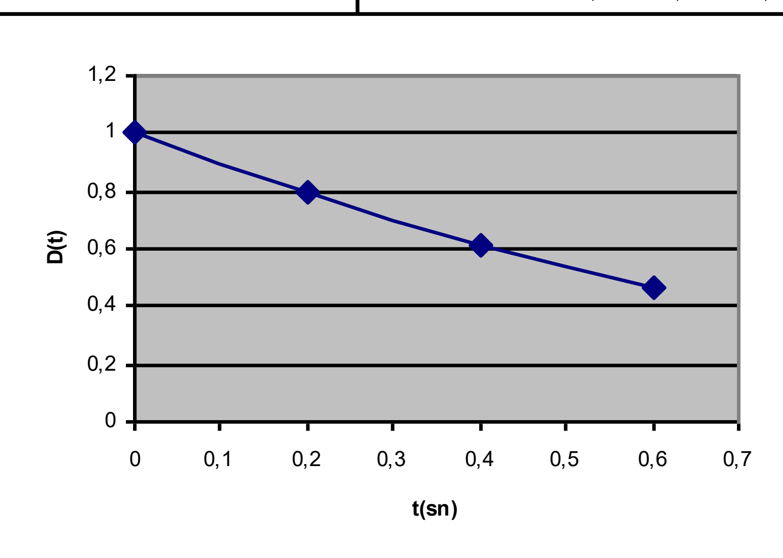
$Y_3=Y(0.6)=Y(0.4)+$ $\mathbf{f_Y(t_2, D(0.4), Y(0.4), A(0.4), u(0.4))}$$*h=0.192$$\mathbf{+(-0.075264)*}$$0.2=$ $\underline{0.1769472}$

$A_3=A(0.6)=A(0.4)+$ $\mathbf{f_A(t_2, D(0.4), Y(0.4), A(0.4), u(0.4))}$$*h=0.4$$\mathbf{+(0.8)*}$$0.2=$ $\underline{0.56}$

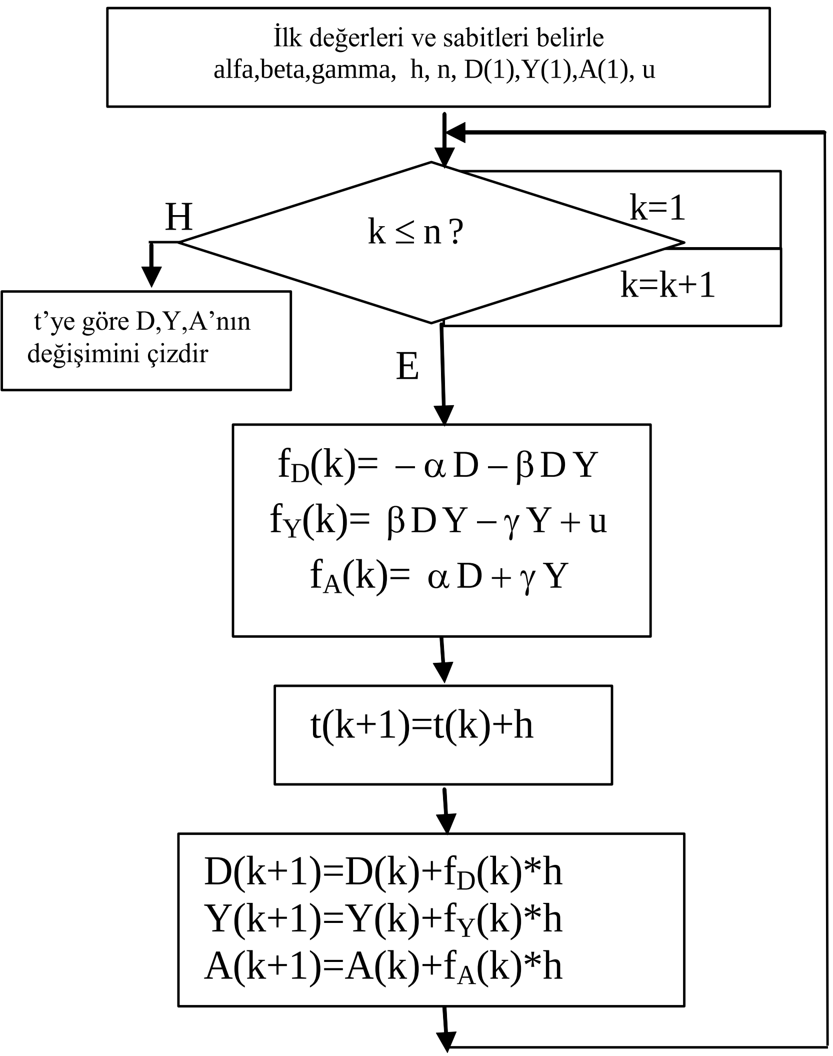
Bu durumda D = 1.00 0.8000 0.608 0.4631, Y= 0 0.20 0.192 0.1769 ve A = 0 0.20 0.4 0.56 bulunur. Grafikleri

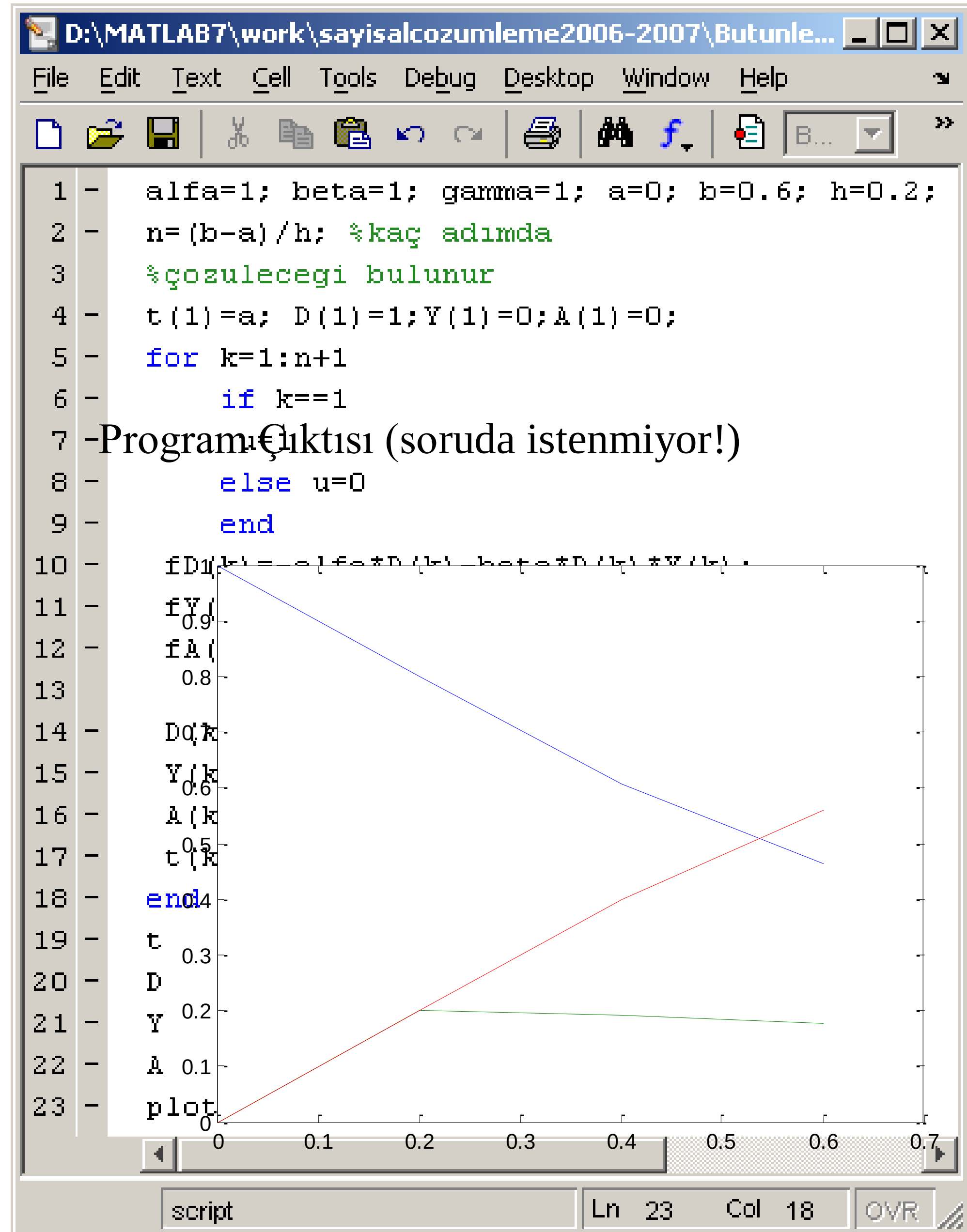






Soru.2) 1. soruyu çözecek a) algoritmayı oluşturun ve b) programı yazın.





Kaynaklar

- Müh. İçin Say. Yöntemler, CAPRA,S ve diğ., Literatür Yayınları
- Sayısal Çözümleme Ders Notları, Bilgin, M.Z., Kocaeli Ün., Elektrik Müh. Bölümü
- Dorf, R.,C., Bishop, R.,H., Modern Control Systems, Tenth Edition, Pearson Prentice Hall, 2005