DOĞRUSAL (LİNEER) DENKLEM TAKIMLARININ ÇÖZÜMÜ

Matrisler Hakkında Kısa Bilgi

- Alt ve Üst Üçgen Matris
- Birim ve Köşegen Matris
- Bant Matris
- Transpoze Matris
- Simetrik Matris
- Kofaktör Matris
- Adjoint (Ek) Matris
- Ters Matris
- Matrislerde Toplama ve Çarpma

Matrisler satır ve sütunlardan oluşan iki boyutlu dizilerdir.

Tek satır veya sütundan oluşurlarsa vektör veya dizi adını alırlar.

Matrisler genelde isimleri ile veya [ ] şeklinde gösterilir.

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} \end{bmatrix}$$

Alt ve Üst Üçgen Matris

- Matrisin köşegeni üstündeki elemanlar sıfır ise Alt Üçgen Matris
- Matrisin köşegeni altındaki elemanlar sıfır ise Üst Üçgen Matris denir.

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} \end{bmatrix} \quad [A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{ij} \end{bmatrix}$$

Birim ve Köşegen Matris

• Matrisin köşegeni üzerindeki elemanlar 1 ise Birim Matris

• Matrisin köşegeni üzerinde değer bulunan ve diğer elemanları 0 olan matrise de Köşegen Matris adı verilir.

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad [A] = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{ij} \end{bmatrix}$$

Bant Matris

Matrisin elemanları köşegen etrafında belirli bir düzen ile yerleşmiştir. Genellikle kısmi türevli denklemlerin çözümünde kullanılır.

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & a_{4,6} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & a_{i-1,j-3} & a_{i-1,j-2} & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} \\ & & & & & a_{i,j-2} & a_{i,j-1} & a_{i,j} \end{bmatrix}$$

Transpoze Matris

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$[A]^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Simetrik Matris

- Bir matrisin transpozesi kendisine eşit ise Simetrik Matris adını alır.

$$[A]=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}$$

$$[A]^T=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}$$

Kofaktör Matris

• Bir matrisin herhangi bir elemanının bulunduğu satır ve sütun silinerek elde edilen matrisin işaretli determinantı o elemanın Kofaktörü olarak adlandırılır.

• Bu işlem bütün elemanlar için tekrarlanıp yerine konulursa elde edilen yeni matris Kofaktör Matris olarak adlandırılır.

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$\alpha 1,1 = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

$$kofaktör[A]=\begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$\alpha 2,1 = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

Adjoint (Ek) Matris

- Kofaktör matrisinin transpozesinden oluşur.

$$\text{Adjoint}[A]=\text{Kofaktör}[A]^T$$

$$Adjo\,\text{int}[A]=\begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{2,1} & \alpha_{3,1} \\ \alpha_{1,2} & \alpha_{2,2} & \alpha_{3,2} \\ \alpha_{1,3} & \alpha_{2,3} & \alpha_{3,3} \end{bmatrix}$$

Ters Matris

- Bir matrisin Adjoint matrisinin o matrisin determinantına bölünmesiyle elde edilen matrise Ters Matris denir.

$$A^{-1}=\frac{\text{Adj}[A]}{|A|}$$

Ortogonal Matris

$$[A] = [A]^{-1}$$

Matrislerde Toplama ve Çıkarma

• Aynı boyuttaki matrislerin toplanması aynı konumdaki elemanların toplanması ile gerçekleştirilir.

• Matrislerin çarpımı, birinci matrisin satır elemanlarıyla ikinci matrisin sütun elemanlarını çarparak elde edilir.

• A[i,j] ile B[m,n] matrislerinin çarpma işleminin gerçekleşmesi için (j=m) olmalıdır.

• Matrislerde bölme işlemi yoktur. Ancak matris herhangi bir sayıya bölünebilir.

ELEMENTER (TEMEL) SATIR İŞLEMLERİ

Denklem sistemlerinin matris ile çözümünde kullanılır

$x + 3y - z = 10$
$3x - y + 2z = 5$
$x + 5y - 2z = -3$

Genişletilmiş (augmented) katsayılar matrisi haline getirelim

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 10 \\ 3 & -1 & 2 & | & 5 \\ 1 & 5 & 2 & | & -3 \end{bmatrix}$$

Denklem sistemlerini çözerken matrisler üzerinde yapmamıza izin verilen işlemler vardır ki bu işlemlere elementer satır işlemleri denir

Elementer satır işlemleri nedir?

I. Genişletilmiş matris içerisindeki istediğimiz satırı istediğimiz sayı ile çarpabiliriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 10 \\ 3 & -1 & 2 & | & 5 \\ 1 & 5 & 2 & | & -3 \end{bmatrix} \qquad 2 * S1 \rightarrow S1 \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{6} & \mathbf{-2} & \mathbf{|} & \mathbf{20} \\ 3 & -1 & 2 & | & 5 \\ 1 & 5 & 2 & | & -3 \end{bmatrix}$$

II. Genişletilmiş matris içerisinde istenildiğinde iki satırın yeri değiştirilebilir

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 10 \\ 3 & -1 & 2 & | & 5 \\ 1 & 5 & 2 & | & -3 \end{bmatrix} \qquad S1 \Leftrightarrow S2 \qquad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & | & 5 \\ 1 & 3 & -1 & | & 10 \\ 1 & 5 & 2 & | & -3 \end{bmatrix}$$

III. Genişletilmiş matris içerisinde istenildiğinde bir satır diğer bir satıra eklenebilir veya bir satır bir sayı ile çarpılıp diğer bir satıra eklenebilir

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & | & 10 \\ 3 & -1 & 2 & | & 5 \\ 1 & 5 & 2 & | & -3 \end{bmatrix}$$

S1 +S2 → S1

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & | & 15 \\ 3 & -1 & 2 & | & 5 \\ 12 & 6 & 3 & | & 45 \end{bmatrix}$$

3*S1 → S3

Orijinal matris ile genişletilmiş ve üzerine elementer satır işlemi yapılmış matrislerin çözümleri aynıdır.

MATRİSİN TERSİNİN (İNVERSİNİN) ALINMASI

$$[A][I] \xrightarrow{\text{Elementer işlemler}} [I][A]^{-1}$$

Verilen matris (A) ve Birim Matris (I) üzerinde aynı elementer satır işlemleri yapılarak:

- A matrisi Birim Matris haline
- Birim Matriste A matrisinin tersine dönüştürülür.

Not:

- Sadece kare matrislerin tersi alınır.
- Her kare matrisin tersi olmayabilir. (A matrisini Birim Matris haline getirmeye çalışırken, bir satır tamamiyle 0 oluyorsa tersi alınamaz)
- Matrisimiz kare değilse, tersini alma işleminden önce ön işlem uygulanması gerekir.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \underbrace{}_{I} \quad \underbrace{}_{A^{-1}}$$

3. olarak 0 yapmalıyız. 2. satır.

1. olarak 0 yapılmalı. 1. satır.

2. olarak köşegendekiler 1 yapılmalı.

Not : Matrisin (1,1) gözündeki değer 0 olmamalıdır. Sıfır ise, ilk olarak sıfırdan kurtarmaktır. Bu sebeple satırların yerlerinin değiştirilmesi gerekirdi.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-3S_1 + S_2 \to S_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}S_2 \to S_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right] \xrightarrow{-2S_2 + S_1 \to S_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{I}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Kare Olmayan Matrislerin Tersi Nasıl Bulunur

1.durum Satır sayısı > Sütun sayısı

$A^{-1}.A = I$

$A . A^{-1} = I$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}_{3x2}$$

1.adım: $A^T . A = C$ matrisi elde edilir. nxn bir kare matris olur.

2.adım $C^{-1}. A^T = A^{-L}$ (soldan ters)

$\boxed{\text{Yani } A^{-L}. A = I \text{ verir.}}$

2.durum Sütun sayısı > Satır sayısı

1.adım $A. A^T = C \rightarrow$ nxn kare bir matris

2.adım C^{-1} bulunur.

3.adım $A^T. C^{-1} = A^{-R}$

GAUSS JORDAN Eleminasyon Yöntemi İle Matrisin Tersini Bulma

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. İşlem

1.satırı a_{11}'e böl

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,4 & -0,8 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. İşlem

*2.satırdan -(a_{21} * 1.satır) çıkar*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,4 & -0,8 \\ 0 & 3,6 & 2,8 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0 \\ -0,2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. İşlem

*3.satırdan – (a_{31} * 1.satır) çıkar*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,4 & -0,8 \\ 0 & 3,6 & 2,8 \\ 0 & 2,2 & 7,6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0 \\ -0,2 & 1 & 0 \\ -0,4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. İşlem

2.satırı a_{22}'ye böl

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,4 & -0,8 \\ 0 & 1 & 0,78 \\ 0 & 2,2 & 7,6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0 \\ -0,06 & 0,28 & 0 \\ -0,4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. İşlem

*1.satırdan – (a_{12} * 2.satır) çıkar*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1,11 \\ 0 & 1 & 0,78 \\ 0 & 2,2 & 7,6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0,22 & -0,11 & 0 \\ -0,06 & 0,28 & 0 \\ -0,4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. İşlem

*3.satırdan – (A_{32} * 2.satır) çıkar*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1{,}11 \\ 0 & 1 & 0{,}78 \\ 0 & 0 & 5{,}88 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0{,}22 & -0{,}11 & 0 \\ -0{,}06 & 0{,}28 & 0 \\ -0{,}27 & -0{,}62 & 1 \end{bmatrix}$$

7. İşlem

3.satırı A_{33} 'e böl

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1{,}11 \\ 0 & 1 & 0{,}78 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0{,}22 & -0{,}11 & 0 \\ -0{,}06 & 0{,}28 & 0 \\ -0{,}05 & -0{,}11 & 0{,}17 \end{bmatrix}$$

8. İşlem

*1.satırdan – (A_{13} * 3.satır) çıkar*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}78 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0{,}16 & -0{,}23 & 0{,}19 \\ -0{,}06 & 0{,}28 & 0 \\ -0{,}05 & -0{,}11 & 0{,}17 \end{bmatrix}$$

9. İşlem

2.satırdan - (a_{22} * 3.satır) çıkar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0{,}16 & -0{,}23 & 0{,}19 \\ -0{,}02 & 0{,}36 & -0{,}13 \\ -0{,}05 & -0{,}11 & 0{,}17 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}16 & -0{,}23 & 0{,}19 \\ -0{,}02 & 0{,}36 & -0{,}13 \\ -0{,}05 & -0{,}11 & 0{,}17 \end{bmatrix}$$