LİNEER DENKLEM TAKIMLARI

Genel olarak bir lineer denklem takımı ***n*** bilinmeyenli ***m*** adet denklemden oluşur.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2$$

$$\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = c_m$$

A X = C   şeklinde gösterebiliriz.

Verilen denklem takımında **C** vektörü **sıfır** ise denklem takımı ***Homojen Denklem Takımı*** sıfırdan farklı olması halinde ***Homojen Olmayan Denklem*** Takımı adını alır.

Homojen Olmayan Denklem Takımlarını çözümü için kullanılan yöntemler ikiye ayrılır.

- Dolaysız (direct)
- Dolaylı (indirect)

A. Dolaysız Yöntemler

1. Cramer Yöntemi
2. Yok Etme (Eleminasyon) Yöntemi
    a. Gauss Eleminasyon Yöntemi
    b. Gauss-Jordan Yöntemi
3. Yoğunlaştırılmış Yok Etme Yöntemi (Compact Elimination)
    a. Cholesky Yöntemi

B. Dolaylı Yöntemler

1. Jacobi Yöntemi
2. Gauss-Seidel Yöntemi

Dolaysız Yöntemler

CRAMER Yöntemi

- Verilen denklem takımı [A] [X] = [C] formuna getirilir
- Az sayıda denklemden oluşan denklem sistemlerinin çözümünde kullanılır

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{bmatrix} c1 & a12 & a13 \\ c2 & a22 & a23 \\ c3 & a32 & a33 \end{bmatrix}}{|A|} \quad x_2 = \frac{\begin{bmatrix} a11 & c1 & a13 \\ a21 & c2 & a23 \\ a31 & c3 & a33 \end{bmatrix}}{|A|} \qquad x_3 = \frac{\begin{bmatrix} a11 & a12 & c1 \\ a21 & a22 & c2 \\ a31 & a32 & c3 \end{bmatrix}}{|A|}$$

Örnek

2x1 – 3x2 + 2x3 = -11
x1 + x2 – 2x3 = 8
3x1 – 2x2 – x3 = -1

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

|A|= 2(-1-4) +3(-1+6)+2(-2-3) = -5

$$x_1 = \frac{\begin{bmatrix} -11 & -3 & 2 \\ 8 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}}{-5} \quad x_2 = \frac{\begin{bmatrix} 2 & -11 & 2 \\ 1 & 8 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}}{-5} \quad x_3 = \frac{\begin{bmatrix} 2 & -3 & -11 \\ 1 & 1 & 8 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}}{-5}$$

$X_1 = 1$ $X_2 = 3$ $X_3 = -2$

Dolaysız Yöntemler

Yoketme (Elemination) Yöntemleri

Lineer Denklem Sistemlerini çözer

Her Lineer Denklem Sistemini Çözer mi?

Denklem Sayısı = Bilinmeyen Sayısı

- Denklem sistemi genişletilmiş katsayılar matrisi şeklinde yazılır
- Elementer satır işlemleri uygulanır
- Katsayılar matrisi **üst üçgen matris** haline getirilir

Neden üst üçgen matris haline getirilir ?

Gauss Yoketme (Elemination) Yöntemi

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, xj = ci \qquad (i = 1,2,3, \dots n)$$

Denklem takımı üst üçgen matris haline getirilmek için bir seri işlem yapılır

$$\begin{aligned}
a_{11}'x_1 + a_{12}'x_2 + a_{13}'x_3 + \dots + a_{1n}'x_n &= c_1' \\
a_{22}'x_2 + a_{23}'x_3 + \dots + a_{2n}'x_n &= c_2' \\
a_{33}'x_3 + \dots + a_{3n}'x_n &= c_3' \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
a_{nn}'x_n &= c_n'
\end{aligned}$$

En sondaki denklemden başlayarak geriye doğru işlem yapılır

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Örnek

3,6 x + 2,4 y - 1,8 z = 6,3
4,2 x - 5,8 y + 2,1 z = 7,5
0,8 x + 3,5 y + 6,5 z = 3,7

Verilen denklem sistemini Gauss Eleminasyon yöntemini kullanarak çözünüz.

$$\begin{bmatrix} 3,6 & 2,4 & -1,8 \\ 4,2 & -5,8 & 2,1 \\ 0,8 & 3,5 & 6,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6,3 \\ 7,5 \\ 3,7 \end{bmatrix}$$

1. İşlem

1.satırı a_{11}'e böl

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,667 & -0,5 \\ 4,2 & -5,8 & 2,1 \\ 0,8 & 3,5 & 6,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,75 \\ 7,5 \\ 3,7 \end{bmatrix}$$

2.İşlem

2.satırı a_{21}'e böl, 2.satırdan 1.satırı çıkar ve 2.satırı a_{21} ile çarp

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,667 & -0,5 \\ 0 & -8,6 & 4,2 \\ 0,8 & 3,5 & 6,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,75 \\ 0,15 \\ 3,7 \end{bmatrix}$$

3.İşlem

3.satırı a_{31}'e böl, 3.satırdan 1.satırı çıkar ve 3.satırı a_{31} ile çarp

$$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}667 & -0{,}5 \\ 0 & -8{,}6 & 4{,}2 \\ 0 & 2{,}966 & 6{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}75 \\ 0{,}15 \\ 2{,}3 \end{bmatrix}$$

4.İşlem

2.satırı a_{22}'ye böl

$$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}667 & -0{,}5 \\ 0 & 1 & -0{,}489 \\ 0 & 2{,}966 & 6{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}75 \\ -0{,}017 \\ 2{,}3 \end{bmatrix}$$

5.İşlem

3.satırı a_{32}'ye böl, 3.satırdan 2.satırı çıkar ve 3.satırı a_{32} ile çarp

$$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}667 & -0{,}5 \\ 0 & 1 & -0{,}489 \\ 0 & 0 & 8{,}35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}75 \\ -0{,}017 \\ 2{,}35 \end{bmatrix}$$

6.İşlem

3.satırı a_{33}'e böl

$$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}667 & -0{,}5 \\ 0 & 1 & -0{,}489 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}75 \\ -0{,}017 \\ 2{,}81 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,667 & -0,5 \\ 0 & 1 & -0,489 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,75 \\ -0,017 \\ 2,81 \end{bmatrix}$$

Kökleri geriye doğru hesaplayacak olursak:

$$x_i = \frac{1}{aii}\left[c_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, xj\right]$$

k= 1,2,...n
i=n-k+1

z = 0,281
y = 0,120
x = 1,81

Gauss Jordan Yöntemi

- Gauss Eleminasyon yöntemine benzer
- Katsayılar matrisi üst üçgen matris haline getirildikten sonra bu yöntem ile devam edilir
- Bu yöntemde, üst üçgen matris **birim matris** haline getirilir

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & 1 & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

1.adım

α_{23} sıfırlayalım

2. satırdaki α_{23}, a_{33} ile çarpılır ve α_{23} 'den çıkarılır. Aynı işlem C matrisi içinde yapılır

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & 1 & \alpha_{23} - a_{33}.\alpha_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_{2-\beta_3}\alpha_{23} \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

2.adım

α_{13} sıfırlayalım

α_{13} a_{33} ile çarpılır ve α_{13}, den çıkarılır. Aynı işlem C matrisi içinde yapılır.

$$\begin{bmatrix}1 & \alpha_{12} & \alpha_{13-a33}\alpha_{13}\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\beta_1 - \beta_3\alpha_{13}\\ \gamma_2\\ \beta_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & \alpha_{12} & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\beta_1{}^{*}\\ \gamma_2\\ \beta_3\end{bmatrix}$$

3.adım

α_{12} a_{22} ile çarpılır ve α_{12} den çıkarılır.
Aynı işlem C matrisi içinde yapılır

$$\begin{bmatrix}1 & \alpha_{12} - a_{22}\alpha_{12} & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\beta_1 * -\gamma_2\alpha_{12}\\ \gamma_2\\ \beta_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \beta_3\end{bmatrix}$$

Örnek

$$\begin{bmatrix}1 & 0{,}667 & -0{,}5\\ 0 & 1 & -0{,}489\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1{,}75\\ -0{,}017\\ 0{,}281\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0{,}667 & -0{,}5\ -1*(-0{,}5)\\ 0 & 1 & -0{,}489\ -1(-0{,}489)\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1{,}75\ -(-0{,}5)*0{,}281\\ -0{,}017\ -(-0{,}489)*0{,}281\\ 0{,}281\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0{,}667 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1{,}89\\ 0{,}12\\ 0{,}281\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0{,}667-0{,}667*1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1{,}89-(0{,}12*0{,}667)\\ 0{,}12\\ 0{,}281\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1{,}81\\ 0{,}12\\ 0{,}281\end{bmatrix}$$

z = 0,281
y = 0,120
x = 1,81

Dolaysız Yöntemler

Yoğunlaştırılmış Yoketme Yöntemleri

CHOLESKY Yöntemi

- Lineer Denklem Sistemlerini çözer
- Katsayılar matrisi biri alt üst üçgen diğeri üst üçgen olan iki ayrı matrise ayrıştırılır

[A] [X] = [C]

Lower Upper

[L][U][X] = [C]
[U][X] = [Y]
[L][Y] = [C]

[A] = [L][U]

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[L] ve [U] çarparsak

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{11}U_{12} & L_{11}U_{13} \\ L_{21} & L_{21}U_{12} + L_{22} & L_{21}U_{13} + L_{22}U_{23} \\ L_{31} & L_{31}U_{12} + L_{32} & L_{31}U_{13} + L_{32}U_{23} + L_{33} \end{bmatrix}$$

$L_{11} = a_{11}$
$L_{11}U_{12} = a_{12}$
$L_{11}U_{13} = a_{13}$

$U_{12} = a_{12}/a_{11}$
$U_{13} = a_{13}/a_{11}$

$L_{21} = a_{21}$
$L_{21}U_{12} + L_{22} = a_{22}$
$L_{21}U_{13} + L_{22}\,U_{23} = a_{23}$

$L_{22} = a_{22} - L_{21}U_{12}$
$U_{23} = (a_{23} - a_{21}\,a_{13}/a_{11})/(a_{22} - a_{21}\,a_{12}/a_{11})$

$L_{31} = a_{31}$
$L_{31}U_{12} + L_{32} = a_{32}$
$L_{31}U_{13} + L_{32}\,U_{23} + L_{33} = a_{33}$

U ve L matrisinin elemanları bulunduktan sonra

[L][Y] = [C]   Y çözülür
[U][X] = [Y] X çözülür

Örnek

3,6 x + 2,4 y - 1,8 z = 6,3
4,2 x - 5,8 y + 2,1 z = 7,5
0,8 x + 3,5 y + 6,5 z = 3,7 Denklem sistemini Cholesky yöntemi ile çözünüz.

$$\begin{bmatrix} 3,6 & 2,4 & -1,8 \\ 4,2 & -5,8 & 2,1 \\ 0,8 & 3,5 & 6,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & U_{12} & U_{13} \\ 0 & 1 & U_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L_{11} = 3,6
$L_{11}U_{12}$ = 2,4
$L_{11}U_{13}$ = $-1,8$
U_{12} = 0,67
U_{13} = $-0,5$

$L_{21} = 4,2$
$L_{21}U_{12} + L_{22} = -5,8$ L_{22} = -8,6
$L_{21}U_{13} + L_{22}\,U_{23} = -2,1 - 8,6U_{23}$= 2,1 U_{23}= 0,49

L_{31} = 0,8
$L_{31}U_{12} + L_{32}$ = 3,5 $L_{32} = 2,96$
$L_{31}U_{13} + L_{32}\,U_{23} + L_{33} = -0,4 - 1,45 + L_{33}$ = 6,5 L_{33} = 8,4

[L][Y] = [C]   Y çözülür

$$\begin{bmatrix} 3,6 & 0 & 0 \\ 4,2 & -8,6 & 0 \\ 0,8 & 2,96 & 8,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,3 \\ 7,5 \\ 3,7 \end{bmatrix}$$

y1 = 1,75
y2 = -0,02
y3= 1,4 - 0,059 + 8,4y3 = 3,7
y3=0,28

[U][X] = [Y]   X çözülür

$$\begin{bmatrix} 1 & 0,67 & -0,5 \\ 0 & 1 & -0,49 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,75 \\ -0,02 \\ 0,28 \end{bmatrix}$$

x3 = 0,28

x2 -0,49*0,28 = -0,02
x2= 0,12

x1 + 0,08 – 0,14 = 1,75
x1 = 1,81

Dolaylı Yöntemler
1- Jacobi İterasyon Yöntemi

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= c_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n &= c_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n &= c_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n &= c_m
\end{aligned}
$$

$$[A]\,[X] = [C]$$

1. Adım

- A matrisinde diyagonelde yer alan katsayıların mutlak değerce çarpımı maksimum olmalıdır. Gerekiyorsa elementer satır değiştirme işlemleri yapılmalıdır
- Kısaca, her sütunda mutlak değerce en büyük sayı köşegene getirilmelidir

2. Adım

- Tüm denklemler yazıldıktan sonra birinci denklemden x_1, ikinci denklemden x_2, n. denklemden x_n çekilerek yalnız bırakılır

3.Adım

- Verilen ilk değerler ile iterasyon işlemi başlatır. Tüm bilinmeyenler için ardışık iki kök değeri arasındaki mutlak değerce fark verilen hatadan küçük oluncaya kadar işleme devam edilir
- Her iterasyon adımı, **bir önceki iterasyonun değerini kullanır**

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = c_3$$

....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = c_m$$

$$x_1 = [c_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n)] / a_{11}$$

$$x_2 = [c_2 - (a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n)] / a_{22}$$

....

$$x_n = [c_m - (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn-1}x_{n-1})] / a_{mn}$$

Örnek Verilmiş olan denklem takımını Jacobi İterasyon yöntemi ile çözünüz. x,y ve z için başlangıç değerleri 0'dır. Hata= 0,001

$$-x + 4y - 3z = -8$$
$$3x + y - 2z = 9$$
$$x - y + 4z = 1$$

1.Adım

$$-x + 4y - 3z = -8$$
$$3x + y - 2z = 9$$
$$x - y + 4z = 1$$

$$3x + y - 2z = 9$$
$$-x + 4y - 3z = -8$$
$$x - y + 4z = 1$$

$$x = (9 - y + 2z) / 3$$
$$y = (-8 + x + 3z) / 4$$
$$z = (1 - x + y) / 4$$

$$x = y = z = 1$$

İterasyon	x	|Δx|	y	|Δy|	z	|Δz|
1	1	-	1	-	1	-
2	3,333	2,333	-1,000	2,000	0,250	0,750
3	3,5	0,167	-0,979	0,021	-0,833	1,083
4	2,771	0,729	-1,750	0,771	-0,870	0,036
5	3,003	0,233	-1,960	0,210	-0,880	0,010
6	3,006	0,063	-1,909	0,050	-0,991	0,111
7	2,976	0,090	-1,976	0,067	-0,994	0,003
8	2,996	0,020	-2,001	0,025	-0,988	0,006
9	3,008	0,012	-1,992	0,009	-0,999	0,011
10	2,998	0,011	-1,997	0,005	-1,000	0,001
11	2,999	0,001	-2,001	0,003	-0,999	0,001
12	3,001	0,002	-1,999	0,001	-1,000	0,001
13	3,00	0,001	-2,000	-0,001	-1,000	0,000

$x = 3 \quad y = -2 \quad z = -1$

Dolaylı Yöntemler

2- Gauss Seidel İterasyon Yöntemi

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= c_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= c_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n &= c_3 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n &= c_m
\end{aligned}
$$

$$[A]\,[X] = [C]$$

- Jacobi İterasyon yöntemi gibi, linner denklem sistemlerinin çözümünde sayısal yöntemler yaklaşımıdır
- İterasyon adımına kadar her şet Jacabi İterasyon yöntemi ile aynıdır
- Her iterasyon adımında her değişken için bulunan en son değer kullanılır
- Jacobi İterasyon yöntemine göre daha hızlı sonuç alınır

Örnek Verilmiş olan denklem takımını Gauss Seidel İterasyon yöntemi ile çözünüz. x, y ve z için başlangıç değerleri 0'dır. Hata= 0,001

$$-x + 4y - 3z = -8$$
$$3x + y - 2z = 9$$
$$x - y + 4z = 1$$

$$3x + y - 2z = 9$$
$$-x + 4y - 3z = -8$$
$$x - y + 4z = 1$$

$\rightarrow$

$$x = (9 - y + 2z) / 3$$
$$y = (-8 + x + 3z) / 4$$
$$z = (1 - x + y) / 4$$

İterasyon	x	|Δx|	y	|Δy|	z	|Δz|
1	1	-	1	-	1	-
2	3,330	2,333	-0,417	1,417	-0,688	1,688
3	2,680	0,348	-1,845	1,428	-0,882	0,194
4	3,027	0,346	-1,904	0,059	-0,983	0,101
5	2,979	0,048	-1,992	0,088	-0,983	0,010
6	3,002	0,023	-1,994	0,002	-0,999	0,006
7	2,999	0,003	-2,000	0,006	-1,000	0,001
8	3,000	0,001	-2,000	0,000	-1,000	0,000
9	3,000	0,000	-2,000	0,000	-1,000	0,000

$x = 3 \quad y = -2 \quad z = -1$

DOĞRUSAL OLMAYAN DENKLEM TAKIMLARININ ÇÖZÜMÜ

İki Değişkenli Eşitlikler

$f(x,y) = 0$ ve $g(x,y) = 0$ için öyle bir x ve y değeri bulmalıyız ki her iki denklemi de sağlamalıdır.

Tek değişkenli sistemlerde olduğu gibi Taylor serisini açalım

$x=x_0+h$

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)*h/1! + f''(x_0)*h^2/2! + \ldots\ldots$

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\frac{\Delta x}{1!} + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\frac{\Delta y}{1!} + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}\frac{\Delta y^2}{2!} + \ldots$$

$$g(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = g(x_0,y_0) + \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x}\frac{\Delta x}{1!} + \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}\frac{\Delta y}{1!} + \frac{\partial^2 g(x_0,y_0)}{\partial x^2}\frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\partial^2 g(x_0,y_0)}{\partial y^2}\frac{\Delta y^2}{2!} + \ldots$$

İkinci mertebeden türev dahil sağdaki tüm terimler atılarak denklem 0 eşitlenir.

İki Değişkenli Eşitlikler

$$f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y = 0$$

$$g(x_0,y_0) + \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x} & \frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f(x_0,y_0) \\ -g(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$

$x_{n+1} = x_n + \Delta x$

$y_{n+1} = y_n + \Delta y$

$| x_{n+1} - x_n |, | y_{n+1} - y_n | <$ hata

Üç Değişkenli Eşitlikler

$f(x,y,z) = 0$, $g(x,y,z) = 0$ ve $v(x,y,z)$ için öyle bir x, y ve z değeri bulmalıyız ki her üç denklemi de sağlamalıdır.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial y} & \frac{\partial f(x_0,y_0,z_0)}{\partial z} \\ \frac{\partial g(x_0,y_0,z_0)}{\partial x} & \frac{\partial g(x_0,y_0,z_0)}{\partial y} & \frac{\partial g(x_0,y_0,z_0)}{\partial z} \\ \frac{\partial v(x_0,y_0,z_0)}{\partial x} & \frac{\partial v(x_0,y_0,z_0)}{\partial y} & \frac{\partial v(x_0,y_0,z_0)}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f(x_0,y_0,z_0) \\ -g(x_0,y_0,z_0) \\ -v(x_0,y_0,z_0) \end{bmatrix}$$

Örnek

$x^2 + y - 3 = 0$
$x + y^2 - 5 = 0$

$X_0 = 0{,}7$ ve $y_0 = 1{,}7$ alarak 0,08 hata ile doğrusal olmayan denklem takımını çözünüz.

$$\begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 2y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x^2 + y - 3 \\ x + y^2 - 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1{,}4 & 1 \\ 1 & 3{,}4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -0{,}81 \\ -1{,}41 \end{bmatrix}$$

$\Delta x = 0{,}31$ $\Delta y = 0{,}38$
$x = 1{,}01$ $y = 2{,}08$

$$\begin{bmatrix} 2{,}02 & 1 \\ 1 & 4{,}16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -0{,}10 \\ -0{,}34 \end{bmatrix}$$

$\Delta x = -0{,}01$ $\Delta y = -0{,}08$
$x = 1$ $y = 2$