Ödev: 4 - Çözümler

FİZ220 - Bilgisayar Programlama II | 15/05/2020

Lineer Cebir

~~**Son gönderim tarihi:** 21 Mayıs Perşembe, 23:59~~
~~**Gönderim şekli:** FIZ220_Odev_04_Grup_#.ipynb isimli jupyter ipynb formatında dosyayı ödev sayfasından göndermek suretiyle~~
~~**Gönderecek kişi:** Grup temsilcisi~~

Dr. Emre S. Taşçı, emre.tasci@hacettepe.edu.tr (mailto:emre.tasci@hacettepe.edu.tr)
Fizik Mühendisliği Bölümü
Hacettepe Üniversitesi

1. Soru: Çevir, kısalt, göster, ispatla, edge of tomorrow

$$KR = \begin{bmatrix} 0.75 & 0 \\ 0 & 0.75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 120^o & -\sin 120^o \\ \sin 120^o & \cos 120^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.37500 & -0.64952 \\ 0.64952 & -0.37500 \end{bmatrix}$$

Şeklinde tanımlanan KR operatörünün rastgele ürettiğiniz 10 vektörün hepsini 120^o döndürüp, boyunu da %75 kısalttığını teyit edin.

(300 puanlık) Bonus: KR operatörün verilen her vektörü 120^o döndürüp, boyunu da %75 kısalttığını ispatlayın..

In [28]:

```
import numpy as np

K = np.array([[0.75,0],[0,0.75]])
aci_d = 120
aci = np.deg2rad(aci_d)
R = np.array([[np.cos(aci),-np.sin(aci)],[np.sin(aci),np.cos(aci)]])
KR = np.dot(K,R)
print(KR)
print("-"*40)

np.random.seed(220)
N = 10
v = np.random.rand(2,N)*20 - 10
print(v.T)
vp = np.dot(KR,v)
print(vp.T)

for i in range(N):
    v_i = v[:,i]
    vp_i = vp[:,i]
    v_i_boy = np.linalg.norm(v_i)
    vp_i_boy = np.linalg.norm(vp_i)
    print("Boylar: {:8.5f} /{:8.5f} = {:.2f}".format(v_i_boy,vp_i_boy,vp_i_boy/v_i_
    v_i_aci = np.rad2deg(np.arctan2(v_i[1],v_i[0]))
    vp_i_aci = np.rad2deg(np.arctan2(vp_i[1],vp_i[0]))
    print("Açılar: {:5.2f} {:5.2f} :: {:5.2f}".format(v_i_aci,vp_i_aci,vp_i_aci - v
    print("-"*15)
```

```
[[-0.375      -0.64951905]
 [ 0.64951905 -0.375     ]]
----------------------------------------
[[-2.79695579  5.89383131]
 [-2.52693164 -1.87706433]
 [ 2.82020618  3.39815971]
 [-5.38519325  9.16318907]
 [-3.35009089  3.02993143]
 [ 3.68815146  6.40338927]
 [-4.00905305  7.42776687]
 [ 8.60214854 -7.31886739]
 [ 1.5878945  -0.42868633]
 [-1.64404615 -7.0161113 ]]
[[-2.77929731e+00 -4.02686282e+00]
 [ 2.16678841e+00 -9.37391125e-01]
 [-3.26474680e+00  5.57467753e-01]
 [-3.93221842e+00 -6.93398152e+00]
 [-7.11714105e-01 -3.31217215e+00]
 [-5.54218013e+00 -5.74633478e-03]
 [-3.32108121e+00 -5.38936892e+00]
 [ 1.52793811e+00  8.33183464e+00]
 [-3.17020497e-01  1.19212511e+00]
 [ 5.17361527e+00  1.56320244e+00]]
Boylar:  6.52382 / 4.89286 = 0.75
Açılar: 115.39 -124.61 :: -240.00
---------------
Boylar:  3.14782 / 2.36086 = 0.75
Açılar: -143.39 -23.39 :: 120.00
---------------
```

```
Boylar:  4.41600 / 3.31200 = 0.75
Açılar: 50.31 170.31 :: 120.00
---------------
Boylar: 10.62847 / 7.97135 = 0.75
Açılar: 120.44 -119.56 :: -240.00
---------------
Boylar:  4.51703 / 3.38778 = 0.75
Açılar: 137.87 -102.13 :: -240.00
---------------
Boylar:  7.38958 / 5.54218 = 0.75
Açılar: 60.06 -179.94 :: -240.00
---------------
Boylar:  8.44063 / 6.33047 = 0.75
Açılar: 118.36 -121.64 :: -240.00
---------------
Boylar: 11.29437 / 8.47078 = 0.75
Açılar: -40.39 79.61 :: 120.00
---------------
Boylar:  1.64474 / 1.23356 = 0.75
Açılar: -15.11 104.89 :: 120.00
---------------
Boylar:  7.20616 / 5.40462 = 0.75
Açılar: -103.19 16.81 :: 120.00
---------------
```

Gelelim Bonus'a... bonusa gel bonusa!..

Kullandığımız koordinat sisteminde (Kartezyen), herhangi bir $\vec{a}$ vektörü, iki baz vektörün $(\hat{\imath}, \hat{\jmath})$ skalerlerle $(\alpha, \ \beta)$ çarpılıp toplanmış hali olarak yazılabilir:

$$\vec{a} = \alpha\hat{\imath} + \beta\hat{\jmath}$$

veya vektör-matris temsilinde açık olarak yazarsak:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Lineer cebirde operatörlerin toplama üzerine dağılma özelliğini kullanırsak:

$$\begin{aligned} \vec{a}' &= KR \cdot \vec{a} = \begin{bmatrix} -0.37500 & -0.64952 \\ 0.64952 & -0.37500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0.37500 & -0.64952 \\ 0.64952 & -0.37500 \end{bmatrix} \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.37500 & -0.64952 \\ 0.64952 & -0.37500 \end{bmatrix} \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

In [32]:

```
i = np.array([[1],[0]])
j = np.array([[0],[1]])
KRi = np.dot(KR,i)
KRj = np.dot(KR,j)
print("KRi:\n",KRi)
print("-"*15)
print("KRj:\n",KRj)
```

```
KRi:
 [[-0.375     ]
 [ 0.64951905]]
---------------
KRj:
 [[-0.64951905]
 [-0.375     ]]
```

$$\vec{a}' = \alpha \begin{bmatrix} -0.37500 \\ 0.64952 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -0.64952 \\ -0.37500 \end{bmatrix}$$

$\vec{a}'$ nün büyüklüğü, bileşenlerinin karelerinin toplamına eşit:

$$\begin{aligned} |\vec{a}'|^2 &= \left(\alpha \left\| \begin{bmatrix} -0.37500 \\ 0.64952 \end{bmatrix} \right\| \right)^2 + \left(\beta \left\| \begin{bmatrix} -0.64952 \\ -0.37500 \end{bmatrix} \right\| \right)^2 \\ &= \alpha^2(0.5625) + \beta^2(0.5625) \\ &= (0.5625)\left(\alpha^2 + \beta^2\right) \end{aligned}$$

Bileşen vektörlerin boylarının karesini nasıl 0.5625 bulduğumuza gelirsek:

In [43]:

```
print(np.dot(KRi.T,KRi))
print(np.dot(KRj.T,KRj))
print((-0.375)**2+0.64952**2)
```

```
[[0.5625]]
[[0.5625]]
0.5625012304
```

$\vec{a}$ vektörümüzün boyu da:

$$|\vec{a}|^2 = \left\| \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \right\|^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

...buradan da boylarının oranını:

$$\frac{|\vec{a}'|}{|\vec{a}|} = \sqrt{\frac{|\vec{a}'|^2}{|\vec{a}|^2}} = \sqrt{\frac{(0.5625)\cancel{\left(\alpha^2 + \beta^2\right)}}{\cancel{\alpha^2 + \beta^2}}} = \sqrt{0.5625} = \boxed{0.75}$$

olarak buluruz. Boyu gösterdik, sıra açıda.

İki vektör arasındaki açıyı skaler çarpımın tanımından yola çıkarak buluruz, bu durumda $\vec{a}$ ile $\vec{a}'$ arasındaki açıya θ dersek:

$$\vec{a}\cdot\vec{a}' = |\vec{a}||\vec{a}'|\cos\theta \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{\vec{a}\cdot\vec{a}'}{|\vec{a}||\vec{a}'|}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{a}' &= \begin{bmatrix}\alpha & \beta\end{bmatrix}\cdot\left(\alpha\begin{bmatrix}-0.37500\\0.64952\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}-0.64952\\-0.37500\end{bmatrix}\right)\\ &= \alpha^2(-0.375)+\beta\alpha(0.64952)+\alpha\beta(-0.64952)+\beta^2(-0.375)\\ &= (-0.375)\left(\alpha^2+\beta^2\right)\end{aligned}$$

Boylarının çarpımlarını da biliyoruz:

$$\begin{aligned}|\vec{a}| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2},\quad |\vec{a}'| = 0.75\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\\ \rightarrow |\vec{a}||\vec{a}'| = 0.75\left(\alpha^2+\beta^2\right)\end{aligned}$$

Buradan da, açı denkleminde yerlerine yerleştirirsek:

$$\begin{aligned}\theta = \cos^{-1}\frac{\vec{a}\cdot\vec{a}'}{|\vec{a}||\vec{a}'|} = \cos^{-1}\frac{(-0.375)\cancel{\left(\alpha^2+\beta^2\right)}}{0.75\cancel{\left(\alpha^2+\beta^2\right)}} = \cos^{-1}\frac{-0.375}{0.75} = \cos^{-1}(-0.5)\\ = \boxed{120^o}\end{aligned}$$

In [51]:

```
theta = np.rad2deg(np.arccos(-0.375/0.75))
print("theta: {:5.2f} derece".format(theta))
```

```
theta: 120.00 derece
```

2. Soru: Özvektör, özdeğer, ♪ eski dostlar, eski dostlar... ♪♪

$A = \begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 5\end{bmatrix}$ operatörü için:

- $\begin{pmatrix}-0.49437\\-0.86925\end{pmatrix}$,
- $\begin{pmatrix}-0.79681\\0.60423\end{pmatrix}$

vektörlerini inceleyin. Bunlar özvektör ise, özdeğerlerini hesaplayıp, derste bulduğumuz $\begin{pmatrix}1\\1.7583\end{pmatrix}$ özvektörü ile karşılaştırın.

In [61]:

```
import numpy as np
A = np.array([[2,3],[4,5]])
v1 = np.array([[-0.49437],[-0.86925]])
v2 = np.array([[-0.79681],[0.60423]])

v1_boy = np.linalg.norm(v1)
v2_boy = np.linalg.norm(v2)

A_v1 = np.dot(A,v1)
A_v2 = np.dot(A,v2)

A_v1_boy = np.linalg.norm(A_v1)
A_v2_boy = np.linalg.norm(A_v2)

print("boylar:\n",v1_boy,v2_boy,A_v1_boy,A_v2_boy)
print("A.v1:\n",A_v1)
print("A.v1/|A_v1|:\n",A_v1/A_v1_boy)
print("-"*20)
print("A.v2:\n",A_v2)
print("A.v2/|A_v2|:\n",A_v2/A_v2_boy)
```

```
boylar:
 0.9999986296990611 1.0000000344999993 7.274909032627143 0.27491371919
204016
A.v1:
 [[-3.59649]
 [-6.32373]]
A.v1/|A_v1|:
 [[-0.49436907]
 [-0.86925211]]
--------------------
A.v2:
 [[ 0.21907]
 [-0.16609]]
A.v2/|A_v2|:
 [[ 0.7968682 ]
 [-0.60415319]]
```

Yukarıda şu eşitlikleri çıkarmış olduk:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -0.49437 \\ -0.86925 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -0.79681 \\ 0.60423 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

olmak üzere:

$$A \cdot \vec{v}_1 = 7.2749\,\vec{v}_1$$
$$A \cdot \vec{v}_2 = 0.2749\,\vec{v}_2$$

yani A'nın özdeğerleri $\lambda_{1,2} = \{7.2749, 0.2749\}$ imiş. Derste $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.7583 \end{pmatrix}$ özvektörünün özdeğeri olarak 7.2749'u bulmuştuk, demek ki $\vec{u}$ vektörü, $\vec{v}_1$'in bir skalerle çarpılmış hali. O skaleri de bulalım:

In [63]:

```
u = np.array([[1],[1.7583]])
v1 = np.array([[-0.49437],[-0.86925]])
print(u/v1)
```

```
[[-2.02277646]
 [-2.02277826]]
```

$$\vec{u} = -2.023\,\vec{v}_1$$

3. Soru: $R_{\pi/2}$

90^0 dönüş operatörünün özvektörünü ve özdeğerini bulun (bulamazsanız da yorumlayın (50 puan); bulursanız da (100 puan!))

In [64]:

```
import numpy as np

theta = np.deg2rad(90)
R = np.array([[np.cos(theta),-np.sin(theta)],[np.sin(theta),np.cos(theta)]])

[l,u] = np.linalg.eig(R)
print(l)
print(u)
```

```
[6.123234e-17+1.j 6.123234e-17-1.j]
[[0.70710678+0.j         0.70710678-0.j        ]
 [0.        -0.70710678j 0.        +0.70710678j]]
```

Özdeğerler de özvektörler de kompleks çıktı!!! (Nasıl yani?...)

E sonuçta "2 boyutlu bir düzlemde, saat yönünde 90 derece döndürüldüğünde yönünü değiştirmeyen bir vektör" aradık, o da bize "yok öyle bir dünya!" diyerek, kendi dünyamızın dışından, kompleks düzlemden cevabı yapıştırdı. 8)