2023 年 8 月 22 日実施　「基礎」

基礎：I　(3) 4）について問題文の修正があった（試験開始時に板書）

誤）A^n を a および n を用いて・・・

正）A^n の各要素を a および n を用いて・・・

基　礎

２０２３年8月２２日
１３：３０～１６：３０

（注意事項）

1. この問題冊子には表紙１枚，問題用紙７枚，下書き用紙２枚の計１０枚が綴じ込んである．
2. 基礎：I～基礎：Ｖの５つの大問すべてに解答せよ．
3. 各大問の解答には，それぞれ１枚の答案用紙を使用せよ．必要であれば裏面を使用してもよい．
4. 各答案用紙には，第一志望専攻，受験番号，解答する大問の番号（I, II, III, IV, Ｖのいずれか）を記入せよ．
5. 問題冊子，下書き用紙，答案用紙はすべて回収する．
6. 必要に応じて下書き用紙２枚を使用してよい．
7. 試験終了まで退室できない．
8. 携帯電話，計算機などの電子機器は，電源を切り鞄に入れること．
9. 問題の解答には，必要に応じて貸与した電卓を使用してもよい．

エネルギー理工学専攻・総合エネルギー工学専攻

基礎：I

(1) 関数 $f(x,y)$ について，極限値 $\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} f(x,y)\right]$ および $\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} f(x,y)\right]$ を求めよ．

$$f(x,y)=\frac{1-\cos y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

(2) 変数 x, y が媒介変数 t の関数として下記のように与えられているとき，導関数 dy/dx を x の関数として表せ．

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\ ,\quad y=\frac{2t}{1+t^2}$$

(3) 2×2 の実正方行列 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ が次の２つの式を満たすとする．

$$\boldsymbol{A}=\lambda_1\boldsymbol{P}+\lambda_2\boldsymbol{Q}$$

$$\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{E}$$

ここで，λ_1,λ_2 は $\boldsymbol{A}$ の固有値（ただし，$|\lambda_1|\le|\lambda_2|$），$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ である．また $\boldsymbol{O}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ と定義する．

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&0\\2&a+2\end{pmatrix}$ のとき，以下の問いに答えよ．ただし，a は正の実数である．

1) λ_1,λ_2 を求めよ．

2) 行列 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ を求めよ．

3) $\boldsymbol{P}^2=\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{PQ}=\boldsymbol{O}$ となることを示せ．

4) $\boldsymbol{A}^n$ を a および n を用いて表せ．ただし，n は自然数である．

基礎：II

(1) 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+5y=65\cos 2x$$

(2) 三次元直交座標系（デカルト座標系）において，x軸，y軸，z軸の正の方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$とする．

$z=\sqrt{x^2+y^2}$により表される曲面S_0について，以下の問いに答えよ．

1) 曲面S_0の単位法線ベクトル$\boldsymbol{n}$をxおよびyの関数として求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$はz成分が正となる方向の単位法線ベクトルとする．

2) 曲面S_0上の点$\mathrm{P}(1,1,\sqrt{2})$を通る接平面Sを求めよ．

3) スカラー場$\phi=x+y+z$について，$-1\leq x\leq 1$, $-1\leq y\leq 1$における設問 2)の接平面S上の面積分$\iint_S \phi\, dS$を求めよ．

基礎：III

図１のように２つの剛体円柱 A と B が一体となり，２つの穴が軸対称位置で円柱 A と B を貫通するプーリ（滑車）が，中心軸まわりで回転方向にのみ運動をする．中心軸の位置は固定されている．円柱 A，B それぞれの半径は$2r$とr，密度，厚さはどちらもρ，hとする．２つの穴の半径はr_D，穴の中心とプーリ中心の間の距離はl_Dとする．２つの穴の位置については $r > l_D + r_D$が成立するものとする．プーリの円柱Aには，巻きつけられたひもを介して質量mの質点 C がとりつけられている．同様に，プーリの円柱 B には，逆向きに巻きつけられたひもを介して質量mの質点 D がとりつけられている．質点 C，D に作用する張力をそれぞれS_1，S_2とする．プーリの円柱 A には上からブレーキ E がおかれ，接触位置における速度に比例して逆向きに減衰力が作用する．その比例定数（減衰係数）をcとする．プーリの中心から鉛直下方を正としてy座標を取り，質点 C，D それぞれの位置はy_1，y_2，プーリの角速度はωで表し，その正の方向は反時計回りとする．空気抵抗はないものとする．プーリの中心軸には質量はなく，変形せず，回転に対する摩擦はないとする．質点 C と D は鉛直方向にのみ運動する．ひもは質量はなく，伸縮せず，また，十分に長く，たるまないものとする．以下の問いに答えよ．重力加速度をgとし，円周率にはπを用いよ．

(1) このプーリの中心軸まわりの慣性モーメントI_pをρ，h，r，r_D，l_D，πのうち必要なものを用いて表せ．

以下では，プーリの中心軸まわりの慣性モーメントは I_pで表す．

(2) 質点 C と D およびプーリからなる系の運動方程式を求め，それらから S_1，S_2，y_1，y_2を消去して，プーリの角加速度 $d\omega/dt$ に関する式を示せ．

(3) 十分に時間が経ったらプーリが等角速度運動をした．

1) そのときの角速度ωを示せ．

2) 張力S_1，S_2を示せ．

(4) ブレーキ E を取り除き，プーリに初期角速度ω_0を与えたとする．質点 D の初期時刻（$t = 0$）の位置が$y_2 = L$とする．質点 D の位置y_2を時間tの関数で示せ．

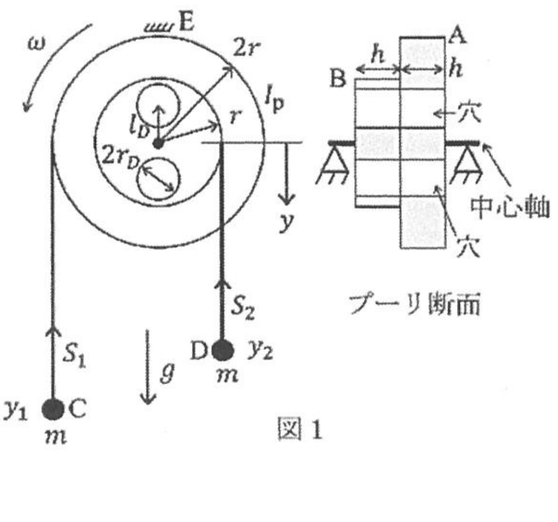

図１

基礎：IV

以下の静電場に関する問いに答えよ．なお，真空の誘電率をε_0とし，無限遠点における電位をゼロとする．また，円周率をπとせよ．

(1) 図 1 に示すように，半径aの導体球 A と，それを取り囲む導体球殻 B(内半径はb，外半径はc)が，どちらも接地されず，それらの中心を一致させて真空中に置かれている．ただし，$a<b<c$とする．中心からの距離をrとする．導体球 A に電荷Q_1，導体球殻 B に電荷Q_2を与えた(Q_1とQ_2は正とする)．

1) 導体球殻 B の内側と外側の表面における電荷Q_{in}，Q_{out}をそれぞれ答えよ．

2) 中心から無限遠点までの各領域における電場の大きさEと電位ϕを距離rの関数として答えよ．

3) 導体球 A を接地し，無限遠点と同じ電位とした．導体球 A がもつ電荷Q'を答えよ．

(2) 導体球 A の接地を外し，図 2 に示すように，導体球殻 B を誘電体球殻 C(誘電率はε_1)と置き換えた．導体球 A と誘電体球殻 C は，真空中に置かれている．導体球 A に正の電荷Q_1を与えた．

1) 中心から無限遠点までの各領域における電束密度の大きさDと電場の大きさEを距離rの関数として答えよ．

2) 誘電体球殻 C に分極電荷が現れた．この分極電荷が現れた場所と，分極電荷の面密度ρを答えよ．

3) 無限遠点に対する導体球 A の静電容量C_{A}を求めよ．ただし，$b=2a$，$c=4a$ とし，aを用いて答えよ．

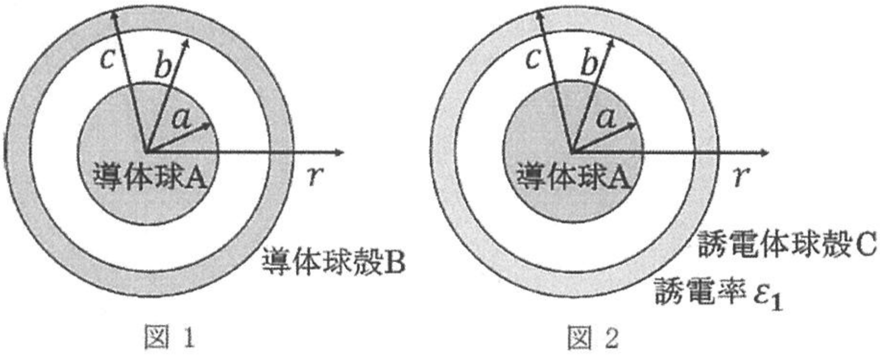

図 1　　図 2

基礎：V

二つの設問(1)(2)の両方を解答せよ．

(1) 水素原子に関する以下の文章を読んで，問 1) および 2) に答えよ．

水素原子は$\boxed{\quad A \quad}$と 1 個の電子から構成される．電気素量を e とするとき，図 1 のように，正の電荷$+e$ をもつ$\boxed{\quad A \quad}$の周囲を質量m_eおよび負の電荷$-e$ をもつ電子が運動している．この系の定常状態におけるシュレーディンガー方程式は，プランク定数 h，真空の誘電率 ε_0，エネルギーE，ラプラス演算子 Δ，円周率 π，波動関数 ψ を用いて(1)式のように表される．

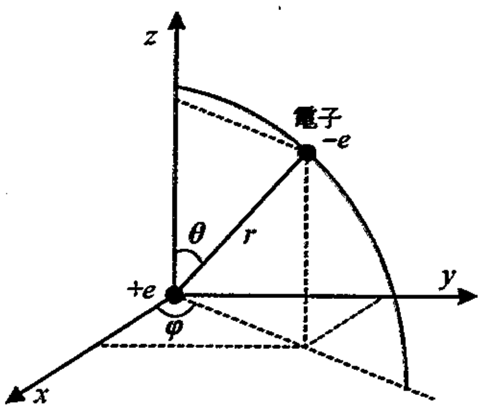

図 1. 水素原子の座標系

$$\left(-\frac{h^2}{\boxed{\quad B \quad}}\Delta + \boxed{\quad C \quad}\right)\psi = E\psi \qquad (1)$$

ここで，$\boxed{\quad C \quad}$は$\boxed{\quad A \quad}$によるポテンシャルエネルギーである．このシュレーディンガー方程式を極座標系で記述する場合，波動関数 $\psi(r, \theta, \varphi)$は(2)式の様に表される．

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r)\, Y_{lm}(\theta, \varphi) \qquad (2)$$

$R_{nl}(r)$ は波動関数の$\boxed{\quad D \quad}$成分を示し，$Y_{lm}(\theta, \varphi)$ は波動関数の角度成分を示していて$\boxed{\quad E \quad}$関数である．n, l および m はシュレーディンガー方程式を解く過程で導入される量子数である．ここで，n は$\boxed{\quad F \quad}$量子数[$n = 1, 2, 3, \ldots$]，l は$\boxed{\quad G \quad}$量子数[$l = 0, 1, 2, \ldots, n-1$]，m は$\boxed{\quad H \quad}$量子数 [$m = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm(n-1)$] とよばれる．$n$, lおよびmに$\boxed{\quad I \quad}$量子数[$s = \pm 1/2$]を加えた 4 つの量子数によって，原子軌道のエネルギーや形状，電子配置が定まる．

水素原子では$\boxed{\quad F \quad}$量子数によって原子軌道のエネルギーが決まる．量子数 $n = 1$ の原子軌道は 1s 軌道と呼ばれ，水素原子中の電子は 1s 軌道を占有する．量子数 $n = 2$ の原子軌道は 2s 軌道と 2p 軌道を含み，さらに，量子数 $n = 3$ の原子軌道は 3s 軌道，3p 軌道および 3d 軌道を含んでいる．

1) 空欄$\boxed{\quad A \quad}$, $\boxed{\quad D \quad}$～$\boxed{\quad I \quad}$にあてはまるもっとも適切な語句を以下の①～⑲より選んで記せ．また，空欄$\boxed{\quad B \quad}$および$\boxed{\quad C \quad}$にあてはまる適切な

次ページに続く

式を数字，数学記号およびπ，m_e，r，e，ε_0から適切な記号を用いて記せ.

① 正孔，	② 動径，	③ 中性子，	④ 正イオン，	⑤ 原子，	⑥ 固有，	
⑦ 球面調和，	⑧ 原子核，	⑨ 偏角，	⑩ ハミルトン，	⑪ 三角，	⑫ 方位，	
⑬ 角運動量，	⑭ 主，	⑮ 磁気，	⑯光子，	⑰ 複素，	⑱ スピン，	⑲ 振動

2）2s 軌道および2p 軌道を与える量子数の組み合わせ(n, l, m)をそれぞれ全て記せ．また，水素原子中のエネルギー準位（量子数n = 1, 2, 3）をボーアモデルにしたがって描くと図2(左)のようになる．シュレーディンガー方程式を解いて得られる量子数n = 1，2，3に対応するエネルギー準位図をエネルギーE_1～E_3に応じて縮退を考慮して解答用紙に図示せよ．解答用紙には，エネルギーE_1～E_3も図２（左）と同様に記し，図中には原子軌道の名称（1s, 2s, 2p, 3s, 3p および3d）も記すこと．ただし，量子数の組み合わせ(n, l, m)を準位図に記す必要はない．

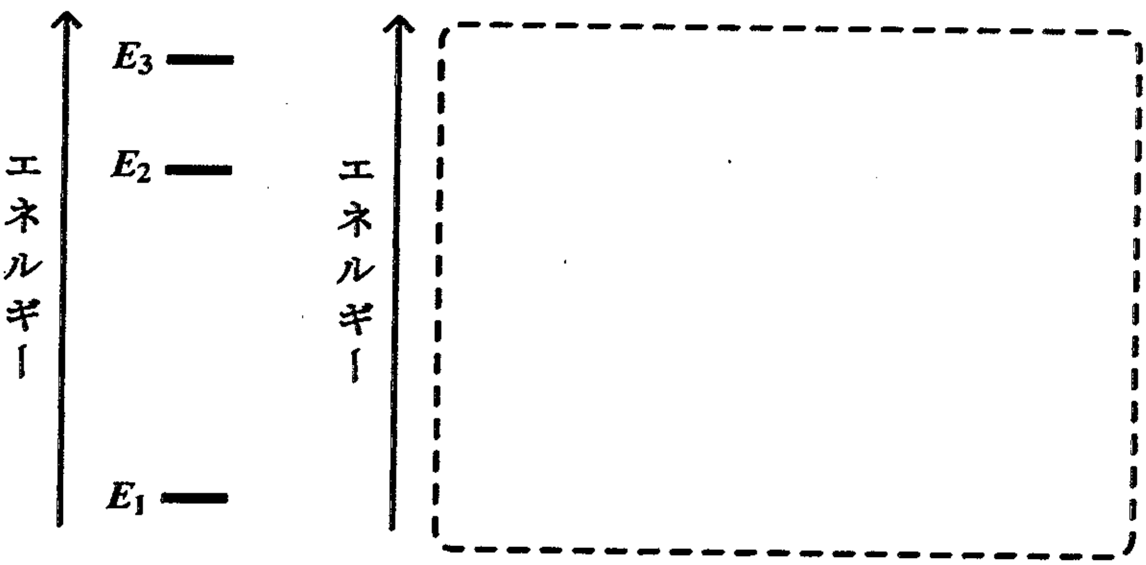

図 2. ボーアの水素原子モデルによるエネルギー準位(左)とシュレーディンガー方程式を解いて得られるエネルギー準位図(右)

次ページに続く

基礎：V（続き）

(2) 2 種類の窒素酸化物である(a)N_2O_4 (b)NO_2 については，1 分子の(a)が 2 分子の(b)に解離して温度と圧力で決定される解離平衡の状態となる．1)～4)の問に答えよ．

1) この解離平衡反応について，表 1 に示されている標準生成ギブスエネルギー（$\Delta_f G^\circ$）の値を用いて，標準温度における(a)と(b)の間の解離平衡に係る標準反応ギブスエネルギー変化 $\Delta_r G^\circ$ の値を有効数字 2 桁で計算せよ．ただし，標準圧力は 1.0×10^5 Pa，標準温度は 298.15 K であるとする．

表 1．(a)N_2O_4 (b)NO_2 の標準生成ギブスエネルギー（$\Delta_f G^\circ$）の値

(a)の $\Delta_f G^\circ$	(b)の $\Delta_f G^\circ$
97.89 kJmol^{-1}	51.31 kJmol^{-1}

2) 標準温度での(a)と(b)の間の解離平衡に係る圧平衡定数 K_p の値を有効数字 2 桁で計算せよ．ただし，気体定数は 8.31 JK^{-1} mol^{-1} であるとする．

3) (a)と(b)の間の解離平衡反応について，出発物質として(a)の存在率が 100% すなわち解離度が 0 である初期条件を想定するとき，平衡状態での解離度を α，標準状態での圧力を全圧で P° として，圧平衡定数 K_p を α と P° を用いて表現する関係式を導出せよ．

4) 2)と 3)の結果を用いて，(a)と(b)の間の解離平衡反応の標準状態での平衡状態における解離度 α の値を有効数字 2 桁で計算せよ．

下書き用紙

下書き用紙