基　礎

２０２２年8月23日
１３：３０～１６：３０

（注意事項）

1. この問題冊子には表紙１枚，問題用紙７枚の計１０枚が綴じ込んである．
2. 基礎：I～基礎：V の５つの大問すべてに解答せよ．
3. 各大問の解答には，それぞれ１枚の答案用紙を使用せよ．必要であれば裏面を使用してもよい．
4. 各答案用紙には，第一志望専攻，受験番号，解答する大問の番号（I, II, III, IV, V のいずれか）を記入せよ．
5. 問題冊子，下書き用紙，答案用紙はすべて回収する．
6. 必要に応じて，下書き用紙２枚を使用してよい．
7. 試験終了まで退室できない．
8. 携帯電話の電源を切り，計算機等は鞄に入れること．
9. 問題の解答には，必要に応じて，貸与した電卓を使用してもよい．

エネルギー理工学専攻・総合エネルギー工学専攻

基礎：Ⅰ

(1) 次の不定積分を求めよ．

$$\int \frac{x^2 + x - 8}{x^3 + 8x^2 + 20x + 16}\,dx$$

(2) 次の関数の第 n 次導関数を求めよ（$n \geqq 1$）．ただし，数学的帰納法による証明は不要である．

$$f(x) = x^2 e^x$$

(3) 三つの3次実ベクトル

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} a^2 \\ b^2 \\ c^2 \end{pmatrix}$$

を考える．ここで，a，b，c は互いに異なる実数とする．以下の問いに答えよ．

1) $a = -1$，$b = 2$，$c = 1$ とする．このとき，ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}$ を $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$，$\boldsymbol{r}$ の線形結合として表せ．

2) $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$，$\boldsymbol{r}$ は線形独立であることを示せ．

3) $\boldsymbol{p}$，$\boldsymbol{q}$，$\boldsymbol{r}$ をそれぞれ第1列，第2列，第3列とする3次正方行列を定義し，$(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r})$ と表す．同様に，$(\boldsymbol{q}, -\boldsymbol{p}, 2\boldsymbol{r})$ を定義する．このとき，

$$(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r})A = (\boldsymbol{q}, -\boldsymbol{p}, 2\boldsymbol{r})$$

を満たすような3次正方行列 A を求めよ．全ての成分を明示すること．

基礎：Ⅱ

(1) 次の常微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = \sin x$$

(2) 三次元直交座標系（デカルト座標系）において，x軸，y軸，z軸の正の方向の単位ベクトルをそれぞれ$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$とする．以下の問いに答えよ．

1) $\boldsymbol{r} = 3\boldsymbol{i} + u\boldsymbol{j} + v\boldsymbol{k}$ $(1 \leq u \leq 2,\ 0 \leq v \leq 3)$ で表される曲面Sにおいて，スカラー場$\varphi = xyz$の面積分を求めよ．

2) ベクトル場$\boldsymbol{a} = (x+y)\boldsymbol{i} + (x+y)\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$について考える．

① $\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}$および$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a}$を求めよ．

② Sを曲面$x^2+y^2+z^2=1$とする．このとき，面積分$\int_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$を求めよ．

基礎：Ⅲ

水平面上に質量$2m$の小物体 A が置かれており，質量の無視できるばねを介して壁面に固定されている．小物体 A は静止しており，ばねは自然長にある．ばねは自然長がL，ばね定数がkであり，フックの法則に従う．空気抵抗と水平面上での摩擦，および小物体の大きさは無視できる．また本問での小物体の運動やばねの伸縮は，すべて水平面と壁面に垂直な単一の面内で起こるものとする．以下の問いに答えよ．

(1) 図 1 のように，ばねが伸縮する軸線上を質量mで大きさの無視できる弾丸 B が速さVで等速直線運動し，小物体 A に撃ち込まれた．弾丸は小物体を貫通せず一体となり，壁面に衝突することなく往復運動した．往復運動の振幅と周期を求めよ．

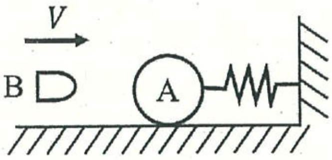

図1

(2) 図 1 のばねを自然長Lのゴムひもに替えた．ゴムひもは伸びた時だけフックの法則に従う復元力がはたらく．そのばね定数はkである．ゴムひもは復元力以外に小物体の運動を妨げることはなく，その質量と太さは無視できる．壁面から距離Lの位置で静止している小物体 A に，問(1)と同様に速さVで弾丸 B を撃ち込んだところ，一体化した A と B は往復運動した．この往復運動の周期を求めよ．壁面と小物体の衝突は完全弾性衝突と考えて良い．

(3) 問(2)と同じゴムひもで壁面につながれた小物体 A が壁の位置で静止している．ある時刻から小物体 A に水平面上の左向きに一定の力kLを加えつづけたところ（図 2），小物体 A は往復運動した．この往復運動の周期を求めよ．

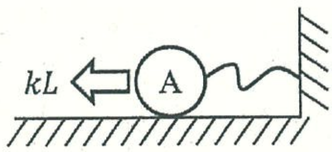

図2

(4) 図 3 のように，壁面の替わりに質量$4m$の小物体 C と小物体 A とが問(1)と同じばね（自然長L，ばね定数k）で接続され，水平面上に静止している．問(1)と同様に小物体 A に，速さVで弾丸 B を撃ち込んだところ，一体化した A と B はばねを介した小物体 C とともに運動した．この時のばねの伸びの最大値を求めよ．

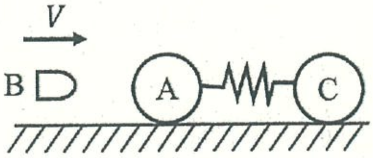

図3

基礎：Ⅳ

図1に示すように，同じ中心軸Oをもち，無限に長く厚さが無視できる円筒導体A（半径 a）と円筒導体B（半径 $2a$）がある．円筒導体AとBの表面には単位長さあたり $+\lambda$, $-\lambda$ の電荷（λ は正とする）がそれぞれ一様に分布している．各円筒導体の周囲は真空であり，真空の誘電率を ε_0 とする．

中心軸Oからの径方向距離を r とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 円筒導体Aの内部($r<a$)，円筒導体AB間($a<r<2a$)，円筒導体Bの外部($r>2a$)の電界の大きさ $E(r)$ をそれぞれ求めよ．

(2) 円筒導体Bの電位を基準とするとき，円筒導体Aの電位 V_A を求めよ．また，単位長さあたりの静電容量 C を求めよ．

次に，図2に示すように，円筒導体A（$r=a$）から $r=b$ までを誘電体1（誘電率 $2\sqrt{2}\,\varepsilon_0$），$r=b$ から円筒導体B（$r=2a$）までを誘電体2（誘電率 $2\varepsilon_0$）で満たした．ただし，$a<b<2a$ とする．以下の問いに答えよ．

(3) 誘電体1の内部の電界の大きさ $E_1(r)$，誘電体2の内部の電界の大きさ $E_2(r)$ をそれぞれ求めよ．

(4) 円筒導体Bの電位を基準とするとき，円筒導体Aの電位 V_A を求めよ．また，単位長さあたりの静電容量 C を求めよ．

(5) 誘電体1中の電界の大きさの最大値および最小値をそれぞれ $E_{1\max}$, $E_{1\min}$，誘電体2中の電界の大きさの最大値および最小値をそれぞれ $E_{2\max}$, $E_{2\min}$ とする．$E_{1\max}=E_{2\max}$ かつ $E_{1\min}=E_{2\min}$ とするための b を a を用いてあらわせ．

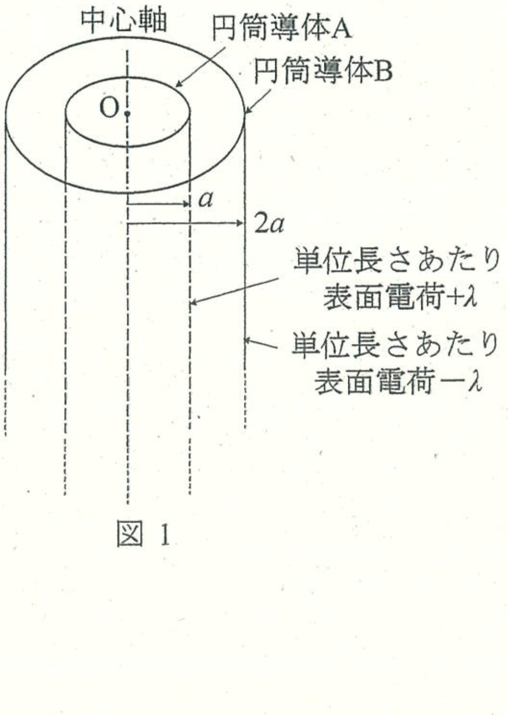

図1

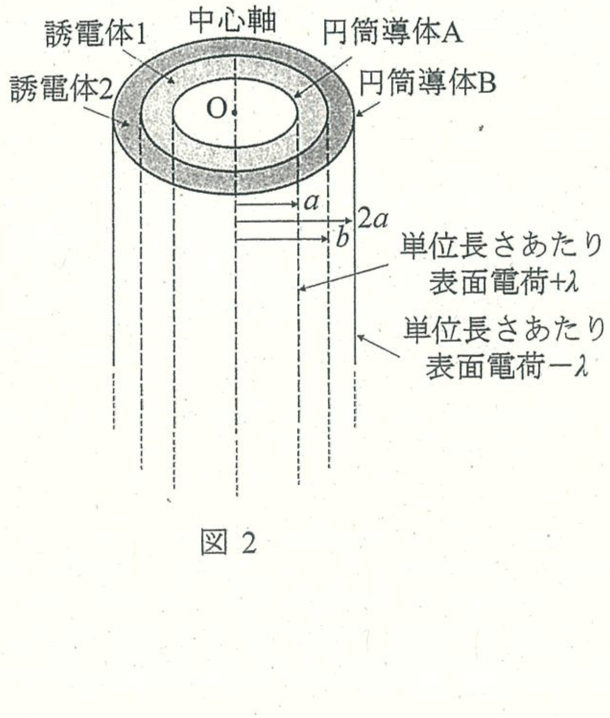

図2

基礎：V

二つの設問(1)(2)の両方を解答せよ．

(1) 次の文章を読んで以下の問い 1)〜2)に答えよ．

特殊相対性理論によれば，1 個の粒子のエネルギーE，運動量 p，静止質量 m，および真空中の光速 c の間には次の関係が成り立つ．

$$E=\sqrt{m^2c^4+p^2c^2} \qquad (1\text{ 式})$$

(1 式)を光子について考える．光子の E はプランク定数 h と光の振動数 ν を用いて(2 式)のように表される．

$$E=\boxed{\quad ア \quad} \qquad (2\text{ 式})$$

また，光子の質量はゼロであることを考慮すると，(1 式) および (2 式) より，光の波長 λ と p および h の関係を表す (3 式) が導かれる．

$$\lambda=\boxed{\quad イ \quad} \qquad (3\text{ 式})$$

(3 式) は，$\boxed{\quad ウ \quad}$ の式と呼ばれる．この式は，電子や原子，分子などの質量をもつ物質に対しても適用でき，(A)運動している物質には，運動量をもつ粒子および波としての性質が現れることを示している．

また，運動している電子は波動性により位置 r と p に不確かさをもつ．これを$\boxed{\quad エ \quad}$という．1 個の電子の波動関数を ψ とすると，ある体積 $d\tau$ の微小空間内において 1 個の電子を見出す確率は，$\boxed{\quad オ \quad}$となる．電子の運動は，空間的な広がりをもつ確率波の波束であらわされ，波束の重心の運動は古典力学に従う．これを$\boxed{\quad カ \quad}$の定理という．波束は波数 k や角周波数 ω の異なる波が重ね合わさることで形成され，波束の重心が移動する速度を$\boxed{\quad キ \quad}$という．

次ページに続く

基礎：V（続き）

1) 空欄 ア ～ キ にあてはまる最も適切な語句もしくは式を答えよ．なお， ウ ， エ ， カ ，および キ については最も適切な語句を次の①～⑯より選んで答えよ． イ に関しては，導出過程も示せ．

①アインシュタイン，②エーレンフェスト，③ファン・デル・ワールス，④クーロン，⑤ド・ブロイ，⑥レイリー・ジーンズ，⑦ガウス，⑧エルミート性，⑨不確定性原理，⑩不連続性，⑪二重性，⑫量子化，⑬角速度，⑭位相速度，⑮群速度，⑯ドリフト速度

2) 下線部(A)に関連して，真空中において光速 c の百分の 1 で運動する電子の波長 λ[nm]を有効数字 2 桁で求めよ．但し，それぞれ c を $3.00\times10^{8}\ \mathrm{ms^{-1}}$，$h$ を $6.63\times10^{-34}\ \mathrm{Js}$，電子の質量を $9.11\times10^{-31}\ \mathrm{kg}$ とせよ．

次ページに続く

基礎：V（続き）

(2) 純物質のα相とそれと異なるβ相の間の相平衡に関する平衡圧力の温度変化はクラウジウス-クラペイロンの式と呼ばれる一般式で示される．この式では，α相が固体でβ相が液体のとき，固体のモル体積 V_S，液体のモル体積 V_L，モル融解エンタルピー$\Delta_{fus}H$，融点T_mを用いて，

$$\frac{dT}{dp} = \frac{T_m(V_L - V_S)}{\Delta_{fus}H}$$

と表される．これは固体の融点の圧力による変化を表す式である．融解に伴う体積変化は小さいので，融点の圧力による変化もわずかである．多くの物質では固体の融解にあたり体積が増加し，$\frac{dT}{dp}>0$ であるが，H_2O(水)，Bi(ビスマス)等は例外で，$\frac{dT}{dp}<0$ である．以上を参考とし，水について以下の 1)と 2)の問いに答えよ．

1) 0°C(273.15 K)で固体の水である氷の$\Delta_{fus}H$は 6.01×10^3 Jmol^{-1}であり，融解に伴ってモル体積は 1.62×10^{-6} m^{3}mol^{-1} だけ減少する．大気圧(1.01×10^5 Pa)にさらに 50.0 MPa の圧力を加えた条件で氷が融解する温度の 0°Cからの変化を有効数字 3 桁で求めよ．

2) 水の三重点，臨界点の圧力 p，温度 Tはそれぞれ$(p, T)=(6.12\times10^2, 2.73\times10^2)$, $(p, T)=(2.21\times10^7, 6.47\times10^2)$である．なお，ここで p, Tの単位はそれぞれ，Pa, K である．水の 3 態についての状態図の概形を縦軸を p，単位は Pa，横軸を T，単位は K として描け．ただし，与えられた三重点や臨界点の数値を図中に表示する必要はないが，三重点と臨界点の位置を示すとともに，固相，液相，気相の領域とこれらに係る 2 相間の平衡曲線をその名称とともに記入すること．また，臨界点を p, Tともに超えた状態に対する名称も記入せよ．

下書き用紙

下書き用紙

「基礎:Ⅴ」の問題文一部追加について

「基礎：Ⅴ」の問題文の一部を以下のように追加して補足します．なお，該当部分以外の追加はありません．

小問(2)の上から 6 行目について，

【追加前】

と表される．これは…

【追加後】

と表される．ここでTは平衡温度，pは平衡圧力である．これは…