

問題 4. (1)  $(a_1, a_2, a_3)$  の組み合わせとして起こりうるものとそれらが持つサイクルは,

$$\begin{aligned}(1, 2, 3) \quad & a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 3 \\(1, 3, 2) \quad & a_1 = 1, \quad a_2 = 3 \rightarrow a_3 = 2 \\(2, 1, 3) \quad & a_1 = 2 \rightarrow a_2 = 1, \quad a_3 = 3 \\(2, 3, 1) \quad & a_1 = 2 \rightarrow a_2 = 3 \rightarrow a_3 = 1 \\(3, 1, 2) \quad & a_1 = 3 \rightarrow a_3 = 2 \rightarrow a_2 = 1 \\(3, 2, 1) \quad & a_1 = 3 \rightarrow a_3 = 1, \quad a_2 = 2\end{aligned}$$

である. このうち,  $(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (3, 2, 1)$  が長さ 1 のサイクルを持つ. 従って求める確率は,

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

(2)  $n = 4$  のとき長さ 4 のサイクルは相異なる  $i, j, k, l \in \{1, 2, 3, 4\}$  を用いて以下のように表せる.

$$a_i = j \rightarrow a_j = k \rightarrow a_k = l \rightarrow a_l = i$$

ここで  $i, j, k, l$  の組み合わせは,

$$(i, j, k, l) = (1, 2, 3, 4), (1, 2, 4, 3), (1, 3, 2, 4), (1, 3, 4, 2), (1, 4, 2, 3), (1, 4, 3, 2)$$

の 6 通りである. よって長さ 4 のサイクルを含む順列は以下のものである.

$$(2, 3, 4, 1), (2, 4, 1, 3), (3, 4, 2, 1), (3, 1, 4, 2), (4, 3, 1, 2), (4, 1, 2, 3)$$