

θを計算したい

次の $c_\gamma, s_\gamma, c_\delta, s_\delta$ と \tan^{-1} を使って θ_e を計算したい。

$$\begin{aligned}c_\gamma &= 2A(-KL_m \sin(2\theta_\gamma) \sin(\theta_e) + (L_i - L_m \cos(2\theta_\gamma)) \cos(\theta_e)) \\s_\gamma &= 2A(KL_m \sin(2\theta_\gamma) \cos(\theta_e) + (L_i - L_m \cos(2\theta_\gamma)) \sin(\theta_e)) \\c_\delta &= 2A(-L_m \sin(2\theta_\gamma) \sin(\theta_e) - (KL_i + KL_m \cos(2\theta_\gamma)) \cos(\theta_e)) \\s_\delta &= 2A(-L_m \sin(2\theta_\gamma) \cos(\theta_e) + (KL_i + KL_m \cos(2\theta_\gamma)) \sin(\theta_e))\end{aligned}$$

条件を付与すると計算できた。

K=0のとき

$$\begin{aligned}c_\gamma &= 2A((L_i - L_m \cos(2\theta_\gamma)) \cos(\theta_e)) \\s_\gamma &= 2A((L_i - L_m \cos(2\theta_\gamma)) \sin(\theta_e)) \\ \theta_e &= \tan^{-1} \left(\frac{s_\gamma}{c_\gamma} \right)\end{aligned}$$

K=1のとき

$$\begin{aligned}c_\gamma &= 2A(-L_m \sin(2\theta_\gamma) \sin(\theta_e) + (L_i - L_m \cos(2\theta_\gamma)) \cos(\theta_e)) \\s_\gamma &= 2A(L_m \sin(2\theta_\gamma) \cos(\theta_e) + (L_i - L_m \cos(2\theta_\gamma)) \sin(\theta_e)) \\c_\delta &= 2A(-L_m \sin(2\theta_\gamma) \sin(\theta_e) - (L_i + L_m \cos(2\theta_\gamma)) \cos(\theta_e)) \\s_\delta &= 2A(-L_m \sin(2\theta_\gamma) \cos(\theta_e) + (L_i + L_m \cos(2\theta_\gamma)) \sin(\theta_e)) \\c_\gamma - c_\delta &= 2A((2L_i) \cos(\theta_e)) \\s_\gamma + s_\delta &= 2A((2L_i) \sin(\theta_e)) \\ \theta_e &= \tan^{-1} \left(\frac{s_\gamma + s_\delta}{c_\gamma - c_\delta} \right)\end{aligned}$$

220827

なるほど、回転の変換の積が作用してるように見えるのか！書き直してみる。

$$\begin{aligned}c_\gamma &= 2A((L_i - L_m \cos(2\theta_\gamma)) \cos(\theta_e) + KL_m \sin(2\theta_\gamma)(-\sin(\theta_e))) \\s_\gamma &= 2A((L_i - L_m \cos(2\theta_\gamma)) \sin(\theta_e) + KL_m \sin(2\theta_\gamma) \cos(\theta_e)) \\c_\delta &= 2A(-K(L_i + L_m \cos(2\theta_\gamma)) \cos(\theta_e) - L_m \sin(2\theta_\gamma) \sin(\theta_e)) \\s_\delta &= 2A(-K(L_i + L_m \cos(2\theta_\gamma))(-\sin(\theta_e)) - L_m \sin(2\theta_\gamma) \cos(\theta_e))\end{aligned}$$

新たな変数定義

新しく γ と δ を定義する。

$$\gamma = \frac{1}{2A}(c_\gamma + js_\gamma) = (L_i - L_m \cos(2\theta_\gamma) + jKL_m \sin(2\theta_\gamma))e^{i\theta_e}$$

$$\delta = \frac{1}{2A}(c_\delta + js_\delta) = (-K(L_i + L_m \cos(2\theta_\gamma)) - jL_m \sin(2\theta_\gamma))e^{-i\theta_e}$$

計算の準備

共役により、次の値が計算に利用できる。

$$\begin{aligned}\bar{\gamma} &= (L_i - L_m \cos(2\theta_\gamma) - jKL_m \sin(2\theta_\gamma))e^{-i\theta_e} \\ \bar{\delta} &= (-K(L_i + L_m \cos(2\theta_\gamma)) + jL_m \sin(2\theta_\gamma))e^{i\theta_e} \\ \gamma - \bar{\delta} &= (L_i - L_m \cos(2\theta_\gamma) + jKL_m \sin(2\theta_\gamma))e^{i\theta_e} \\ &\quad + (K(L_i + L_m \cos(2\theta_\gamma)) - jL_m \sin(2\theta_\gamma))e^{i\theta_e} \\ &= ((K+1)L_i + (K-1)L_m(\cos 2\theta_\gamma + j \sin 2\theta_\gamma))e^{i\theta_e} \\ &= ((K+1)L_i + (K-1)L_m e^{i2\theta_\gamma})e^{i\theta_e} \\ \bar{\gamma} + \delta &= (L_i - L_m \cos(2\theta_\gamma) - jKL_m \sin(2\theta_\gamma))e^{-i\theta_e} \\ &\quad + (-K(L_i + L_m \cos(2\theta_\gamma)) - jL_m \sin(2\theta_\gamma))e^{-i\theta_e} \\ &= ((-K+1)L_i - (K+1)L_m(\cos 2\theta_\gamma + j \sin 2\theta_\gamma))e^{-i\theta_e} \\ &= ((-K+1)L_i - (K+1)L_m e^{i2\theta_\gamma})e^{-i\theta_e}\end{aligned}$$

結論として再掲する。

$$\begin{aligned}\gamma - \bar{\delta} &= ((K+1)L_i + (K-1)L_m e^{i2\theta_\gamma})e^{i\theta_e} \\ \bar{\gamma} + \delta &= ((-K+1)L_i - (K+1)L_m e^{i2\theta_\gamma})e^{-i\theta_e}\end{aligned}$$

不要な値の除去

ここからは $L_m e^{i2\theta_\gamma}$ を除去する事を目標にする。

$$\begin{aligned}(K+1)(\gamma - \bar{\delta}) &= ((K+1)^2 L_i + (K+1)(K-1)L_m e^{i2\theta_\gamma})e^{i\theta_e} \\ (K-1)(\bar{\gamma} + \delta) &= (-(K-1)^2 L_i - (K+1)(K-1)L_m e^{i2\theta_\gamma})e^{-i\theta_e}\end{aligned}$$

$$(K+1)(\gamma - \bar{\delta}) + (K-1)(\bar{\gamma} + \delta) = (K+1)^2 L_i e^{i\theta_e} - (K-1)^2 L_i e^{-i\theta_e} + (K+1)(K-1)L_m e^{i2\theta_\gamma} (e^{i\theta_e} - e^{-i\theta_e})$$

実数係数では、 $L_m e^{i2\theta_\gamma}$ が除去できない。

複素数 $e^{i\theta_e}$ を乗じて除去する。

$$\begin{aligned}(K+1)(\gamma - \bar{\delta})e^{-i\theta_e} &= ((K+1)^2 L_i + (K+1)(K-1)L_m e^{i2\theta_\gamma}) \\ (K-1)(\bar{\gamma} + \delta)e^{i\theta_e} &= (-(K-1)^2 L_i - (K+1)(K-1)L_m e^{i2\theta_\gamma})\end{aligned}$$

$$(K+1)(\gamma - \bar{\delta})e^{-i\theta_e} + (K-1)(\bar{\gamma} + \delta)e^{i\theta_e} = (K+1)^2 L_i - (K-1)^2 L_i = 4KL_i$$

この式は実部しか持たない事が分かった。

虚部の係数比較

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{2A}(c_\gamma + js_\gamma) \\ \delta &= \frac{1}{2A}(c_\delta + js_\delta) \\ \bar{\gamma} &= \frac{1}{2A}(c_\gamma - js_\gamma) \\ \bar{\delta} &= \frac{1}{2A}(c_\delta - js_\delta)\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}& (K+1)(\gamma - \bar{\delta})e^{-i\theta_e} + (K-1)(\bar{\gamma} + \delta)e^{i\theta_e} \\&= \frac{1}{2A}(K+1)((c_\gamma - c_\delta) + j(s_\gamma + s_\delta))e^{-i\theta_e} + \frac{1}{2A}(K-1)((c_\gamma + c_\delta) + j(s_\delta - s_\gamma))e^{i\theta_e} \\&= \frac{1}{2A}(K+1)((c_\gamma - c_\delta) + j(s_\gamma + s_\delta))(\cos\theta_e - j\sin\theta_e) + \frac{1}{2A}(K-1)((c_\gamma + c_\delta) + j(s_\delta - s_\gamma))(\cos\theta_e + j\sin\theta_e) \\&= \frac{1}{2A}(K+1)((c_\gamma - c_\delta)\cos\theta_e + (s_\gamma + s_\delta)\sin\theta_e) + j((s_\gamma + s_\delta)\cos\theta_e - (c_\gamma - c_\delta)\sin\theta_e) \\&+ \frac{1}{2A}(K-1)((c_\gamma + c_\delta)\cos\theta_e - (s_\gamma - s_\delta)\sin\theta_e) + j((s_\gamma - s_\delta)\cos\theta_e + (c_\gamma + c_\delta)\sin\theta_e)\end{aligned}$$

虚部が値を持たない事に着目する。

$$\begin{aligned}& \text{Im}((K+1)(\gamma - \bar{\delta})e^{-i\theta_e} + (K-1)(\bar{\gamma} + \delta)e^{i\theta_e}) \\&= \frac{1}{2A}(K+1)(j((s_\gamma + s_\delta)\cos\theta_e - (c_\gamma - c_\delta)\sin\theta_e)) \\&+ \frac{1}{2A}(K-1)(j((s_\gamma - s_\delta)\cos\theta_e + (c_\gamma + c_\delta)\sin\theta_e)) = 0 \\&\Leftrightarrow \frac{1}{A}j(Ks_\gamma + s_\delta)\cos\theta_e + \frac{1}{A}j(Kc_\delta - c_\gamma)\sin\theta_e = 0 \\&\Leftrightarrow \frac{\sin\theta_e}{\cos\theta_e} = -\frac{Ks_\gamma + s_\delta}{Kc_\delta - c_\gamma}\end{aligned}$$

よって、

$$\theta_e = \arctan\left(-\frac{Ks_\gamma + s_\delta}{Kc_\delta - c_\gamma}\right)$$

python + sympyで検算

```

print("@calculate 220827-2 my expr")
y = -(K*s_gammat + s_deltat)
x = K*c_deltat + c_gammat
print("@x")
print(simplify_collect(sy,x,sy.cos(theta_e)))
print("@y")
print(simplify_collect(sy,y,sy.sin(theta_e)))
print("@calculate atan my expr")
print(simplify_atan(sy, y, x))

```

出力

arctanでθが出るような値にならない、おかしい。どこかで間違っているのだろうか。

```

@calculate 220827-2 my expr
@x
2A(-2KLmsin(theta_e)sin(2theta_gamma) + (-K**2Li - K2Lmcos(2theta_gamma) + Li - Lmcos(2theta_gamma))cos(theta_e))
@y
2A(-K2Lmsin(2theta_gamma)cos(theta_e) - 2KLisin(theta_e) + Lmsin(2theta_gamma)cos(theta_e))
@calculate atan my expr
atan(K**2Lmsin(2theta_gamma)cos(theta_e)/(K**2Licos(theta_e) + K2Lmcos(theta_e)cos(2theta_gamma) +
2KLmsin(theta_e)sin(2theta_gamma) - Licos(theta_e) + Lmcos(theta_e)cos(2theta_gamma)) +
2KLisin(theta_e)/(K2Licos(theta_e) + K2Lmcos(theta_e)cos(2theta_gamma) + 2KLmsin(theta_e)sin(2theta_gamma) -
Licos(theta_e) + Lmcos(theta_e)cos(2theta_gamma)) - Lmsin(2*theta_gamma)*cos(theta_e)/(K2Licos(theta_e) +
K**2Lmcos(theta_e)cos(2theta_gamma) + 2KLmsin(theta_e)sin(2theta_gamma) - Licos(theta_e) +
Lm*cos(theta_e)cos(2theta_gamma)))
MacBook-Air:calc220827 watashi$

```

オンライン検証

paizaに簡単に検証できる場所を作った。
<https://paiza.io/projects/HXA4KsZ6yVzAVFsMGdVaEQ>
 ただし、paizaには時間制限があることと、sympyを利用した代数計算は計算量が多いため、複雑な式はタイムアウトしてしま
 い検証ができない。
 そのため、ローカル環境で検証するのがよい。