θを計算したい

次のc_γ,s_γ,c_δ,s_δとtan^{-1}を使ってθ_eを計算したい。

$$\begin{aligned}
c_\gamma &= 2A(-KL_m\sin(2\theta_\gamma)\sin(\theta_e) + (L_i - L_m\cos(2\theta_\gamma))\cos(\theta_e)) \\
s_\gamma &= 2A(KL_m\sin(2\theta_\gamma)\cos(\theta_e) + (L_i - L_m\cos(2\theta_\gamma))\sin(\theta_e)) \\
c_\delta &= 2A(-L_m\sin(2\theta_\gamma)\sin(\theta_e) - (KL_i + KL_m\cos(2\theta_\gamma))\cos(\theta_e)) \\
s_\delta &= 2A(-L_m\sin(2\theta_\gamma)\cos(\theta_e) + (KL_i + KL_m\cos(2\theta_\gamma))\sin(\theta_e))
\end{aligned}$$

条件を付与すると計算できた。

K=0のとき

$$\begin{aligned}
c_\gamma &= 2A((L_i - L_m\cos(2\theta_\gamma))\cos(\theta_e)) \\
s_\gamma &= 2A((L_i - L_m\cos(2\theta_\gamma))\sin(\theta_e)) \\
\theta_e &= \tan^{-1}\left(\frac{s_\gamma}{c_\gamma}\right)
\end{aligned}$$

K=1のとき

$$\begin{aligned}
c_\gamma &= 2A(-L_m\sin(2\theta_\gamma)\sin(\theta_e) + (L_i - L_m\cos(2\theta_\gamma))\cos(\theta_e)) \\
s_\gamma &= 2A(L_m\sin(2\theta_\gamma)\cos(\theta_e) + (L_i - L_m\cos(2\theta_\gamma))\sin(\theta_e)) \\
c_\delta &= 2A(-L_m\sin(2\theta_\gamma)\sin(\theta_e) - (L_i + L_m\cos(2\theta_\gamma))\cos(\theta_e)) \\
s_\delta &= 2A(-L_m\sin(2\theta_\gamma)\cos(\theta_e) + (L_i + L_m\cos(2\theta_\gamma))\sin(\theta_e)) \\
c_\gamma - c_\delta &= 2A((2L_i)\cos(\theta_e)) \\
s_\gamma + s_\delta &= 2A((2L_i)\sin(\theta_e)) \\
\theta_e &= \tan^{-1}\left(\frac{s_\gamma + s_\delta}{c_\gamma - c_\delta}\right)
\end{aligned}$$

220827

なるほど、回転の変換の積が作用してるように見えるのか！書き直してみる。

$$\begin{aligned}
c_\gamma &= 2A((L_i - L_m\cos(2\theta_\gamma))\cos(\theta_e) + KL_m\sin(2\theta_\gamma)(-\sin(\theta_e))) \\
s_\gamma &= 2A((L_i - L_m\cos(2\theta_\gamma))\sin(\theta_e) + KL_m\sin(2\theta_\gamma)\cos(\theta_e)) \\
c_\delta &= 2A(-K(L_i + L_m\cos(2\theta_\gamma))\cos(\theta_e) - L_m\sin(2\theta_\gamma)\sin(\theta_e)) \\
s_\delta &= 2A(-K(L_i + L_m\cos(2\theta_\gamma))(-\sin(\theta_e)) - L_m\sin(2\theta_\gamma)\cos(\theta_e))
\end{aligned}$$

新たな変数定義

新しくγとδを定義する。

$$
\begin{aligned}
\gamma = \frac{1}{2A}(c_\gamma + js_\gamma) =& (L_i - L_m\cos(2\theta_\gamma) + jKL_m\sin(2\theta_\gamma))e^{i\theta_e} \\
\delta = \frac{1}{2A}(c_\delta + js_\delta) =& (-K(L_i + L_m\cos(2\theta_\gamma)) - jL_m\sin(2\theta_\gamma))e^{-i\theta_e}
\end{aligned}
$$

計算の準備

共役により、次の値が計算に利用できる。

$$
\begin{aligned}
\overline{\gamma} =& (L_i - L_m\cos(2\theta_\gamma) - jKL_m\sin(2\theta_\gamma))e^{-i\theta_e} \\
\overline{\delta} =& (-K(L_i + L_m\cos(2\theta_\gamma)) + jL_m\sin(2\theta_\gamma))e^{i\theta_e}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma - \overline{\delta} =& (L_i - L_m\cos(2\theta_\gamma) + jKL_m\sin(2\theta_\gamma))e^{i\theta_e} \\
&+ (K(L_i + L_m\cos(2\theta_\gamma)) - jL_m\sin(2\theta_\gamma))e^{i\theta_e} \\
=& ((K+1)L_i + (K-1)L_m(\cos 2\theta_\gamma + j\sin 2\theta_\gamma))e^{i\theta_e} \\
=& ((K+1)L_i + (K-1)L_m e^{i2\theta_\gamma})e^{i\theta_e}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{\gamma} + \delta =& (L_i - L_m\cos(2\theta_\gamma) - jKL_m\sin(2\theta_\gamma))e^{-i\theta_e} \\
&+ (-K(L_i + L_m\cos(2\theta_\gamma)) - jL_m\sin(2\theta_\gamma))e^{-i\theta_e} \\
=& ((-K+1)L_i - (K+1)L_m(\cos 2\theta_\gamma + j\sin 2\theta_\gamma))e^{-i\theta_e} \\
=& ((-K+1)L_i - (K+1)L_m e^{i2\theta_\gamma})e^{-i\theta_e}
\end{aligned}
$$

結論として再掲する。

$$
\begin{aligned}
\gamma - \overline{\delta} =& ((K+1)L_i + (K-1)L_m e^{i2\theta_\gamma})e^{i\theta_e} \\
\overline{\gamma} + \delta =& ((-K+1)L_i - (K+1)L_m e^{i2\theta_\gamma})e^{-i\theta_e}
\end{aligned}
$$

不要な値の除去

ここからは$L_m e^{i2\theta_\gamma}$を除去する事を目標にする。

$$
\begin{aligned}
(K+1)(\gamma - \overline{\delta}) =& ((K+1)^2 L_i + (K+1)(K-1)L_m e^{i2\theta_\gamma})e^{i\theta_e} \\
(K-1)(\overline{\gamma} + \delta) =& (-(K-1)^2 L_i - (K+1)(K-1)L_m e^{i2\theta_\gamma})e^{-i\theta_e}
\end{aligned}
$$

$$
(K+1)(\gamma - \overline{\delta}) + (K-1)(\overline{\gamma} + \delta) = (K+1)^2 L_i e^{i\theta_e} - (K-1)^2 L_i e^{-i\theta_e} + (K+1)(K-1)L_m e^{i2\theta_\gamma}(e^{i\theta_e} - e^{-i\theta_e})
$$

実数係数では、$L_m e^{i2\theta_\gamma}$が除去できない。
複素数$e^{i\theta_e}$を乗じて除去する。

$$
\begin{aligned}
(K+1)(\gamma - \overline{\delta})e^{-i\theta_e} =& ((K+1)^2 L_i + (K+1)(K-1)L_m e^{i2\theta_\gamma}) \\
(K-1)(\overline{\gamma} + \delta)e^{i\theta_e} =& (-(K-1)^2 L_i - (K+1)(K-1)L_m e^{i2\theta_\gamma})
\end{aligned}
$$

$$
(K+1)(\gamma - \overline{\delta})e^{-i\theta_e} + (K-1)(\overline{\gamma} + \delta)e^{i\theta_e} = (K+1)^2 L_i - (K-1)^2 L_i = 4KL_i
$$

この式は実数となる事が分かった。

虚部の係数比較

虚部が0であることを利用する。

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{2A}(c_\gamma + js_\gamma) \\ \delta &= \frac{1}{2A}(c_\delta + js_\delta) \\ \overline{\gamma} &= \frac{1}{2A}(c_\gamma - js_\gamma) \\ \overline{\delta} &= \frac{1}{2A}(c_\delta - js_\delta)\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}&(K+1)(\gamma - \overline{\delta})e^{-i\theta_e} + (K-1)(\overline{\gamma} + \delta)e^{i\theta_e} \\ &= \frac{1}{2A}(K+1)((c_\gamma - c_\delta) + j(s_\gamma + s_\delta))e^{-i\theta_e} + \frac{1}{2A}(K-1)((c_\gamma + c_\delta) + j(s_\delta - s_\gamma))e^{i\theta_e} \\ &= \frac{1}{2A}(K+1)((c_\gamma - c_\delta) + j(s_\gamma + s_\delta))(\cos\theta_e - j\sin\theta_e) + \frac{1}{2A}(K-1)((c_\gamma + c_\delta) + j(s_\delta - s_\gamma))(\cos\theta_e + j\sin\theta_e) \\ &= \frac{1}{2A}(K+1)(((c_\gamma - c_\delta)\cos\theta_e + (s_\gamma + s_\delta)\sin\theta_e) + j((s_\gamma + s_\delta)\cos\theta_e - (c_\gamma - c_\delta)\sin\theta_e)) \\ &+ \frac{1}{2A}(K-1)(((c_\gamma + c_\delta)\cos\theta_e - (s_\gamma - s_\delta)\sin\theta_e) + j((s_\gamma - s_\delta)\cos\theta_e + (c_\gamma + c_\delta)\sin\theta_e))\end{aligned}$$

虚部のみを計算する。

$$\begin{aligned}&\mathrm{Im}((K+1)(\gamma - \overline{\delta})e^{-i\theta_e} + (K-1)(\overline{\gamma} + \delta)e^{i\theta_e}) \\ &= \frac{1}{2A}(K+1)(j((s_\gamma + s_\delta)\cos\theta_e - (c_\gamma - c_\delta)\sin\theta_e)) \\ &+ \frac{1}{2A}(K-1)(j((s_\gamma - s_\delta)\cos\theta_e + (c_\gamma + c_\delta)\sin\theta_e)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{A}j(Ks_\gamma + s_\delta)\cos\theta_e + \frac{1}{A}j(Kc_\delta - c_\gamma)\sin\theta_e = 0\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin\theta_e}{\cos\theta_e} = -\frac{Ks_\gamma + s_\delta}{Kc_\delta - c_\gamma}$$

よって、

$$\theta_e = \arctan\left(-\frac{Ks_\gamma + s_\delta}{Kc_\delta - c_\gamma}\right)$$

python + sympyで検算

```
print("@calculate 220827-2 my expr")
y = -(K*s_deltat + s_gammat)
x = K*c_deltat - c_gammat
print("@x")
print(simplify_collect(sy,x,sy.cos(theta_e)))
print("@y")
print(simplify_collect(sy,y,sy.sin(theta_e)))
print("@calculate atan my expr")
print(simplify_atan(sy, y, x))
```

出力

@calculate 220827-2 my expr

@x

2*A*(-K**2*Li - K**2*Lm*cos(2*theta_gamma) - Li + Lm*cos(2*theta_gamma))*cos(theta_e)

@y

2*A*(-K**2*Li - K**2*Lm*cos(2*theta_gamma) - Li + Lm*cos(2*theta_gamma))*sin(theta_e)

@calculate atan my expr

atan(tan(theta_e))

値が正しい事が確認できた。

オンライン検証

paizaに簡単に検証できる場所を作った。
https://paiza.io/projects/jVVmL3gQZOfjTWiBze6vFw
ただし、paizaには時間制限があることと、sympyを利用した代数計算は計算量が多いため、複雑な式はタイムアウトしてしまい検証ができない。
そのため、ローカル環境で検証するのがよい。