関数

AVILEN

はじめに

Q

関数はAIとどんな関係がある？

はじめに

Q 関数はAIとどんな関係がある？

A AIは説明変数から目的変数を出力するための関数と言える。

クイズ！ ? の中では何が起きている？

1問目

入力				出力
1	→	?	→	2
3	→	?	→	6
7	→	?	→	14

2問目

入力				出力
1	→	?	→	1
2	→	?	→	4
3	→	?	→	9

3問目

入力				出力
1	→	?	→	2
2	→	?	→	5
3	→	?	→	10

4問目

入力						出力
1	1	1	→	?	→	3
1	2	3	→	?	→	6
1	3	4	→	?	→	8

クイズ！ ？ の中では何が起きている？

1問目

入力		？		出力
1	→	×2	→	2
3	→	×2	→	6
7	→	×2	→	14

2問目

入力		？		出力
1	→	^2	→	1
2	→	^2	→	4
3	→	^2	→	9

3問目

入力		？		出力
1	→	^2 +1	→	2
2	→	^2 +1	→	5
3	→	^2 +1	→	10

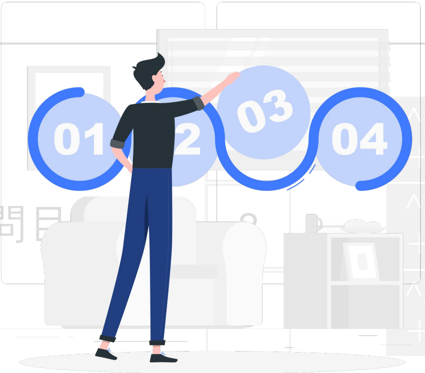
4問目

入力				？		出力
1	1	1	→	Σ	→	3
1	2	3	→	Σ	→	6
1	3	4	→	Σ	→	8

クイズ！ ？ の中では何が起きている？

この様に「何か」を入れると「何か」が出てくる

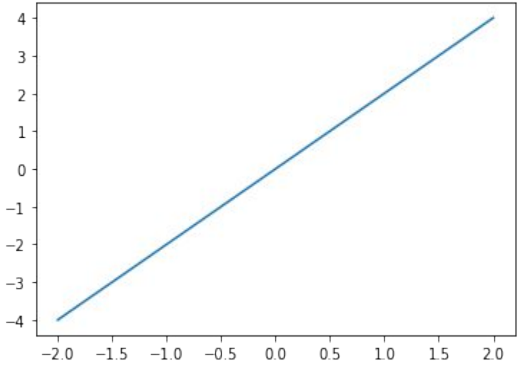
？ のことを「関数」という



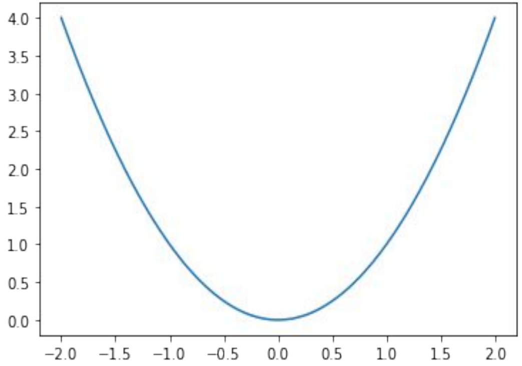
数学で扱う「何か」は基本的に数字

入出力が数字なら、その関係をグラフで表せる！

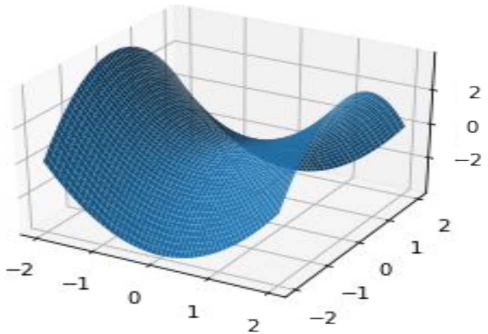
入力を2倍する関数



入力を2乗する関数

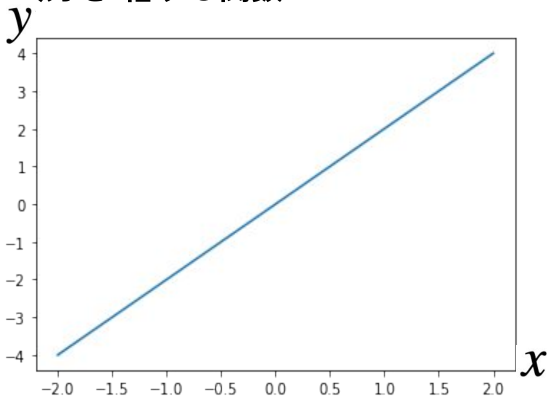


入力1を2乗したものから
入力2を2乗したものを引く関数



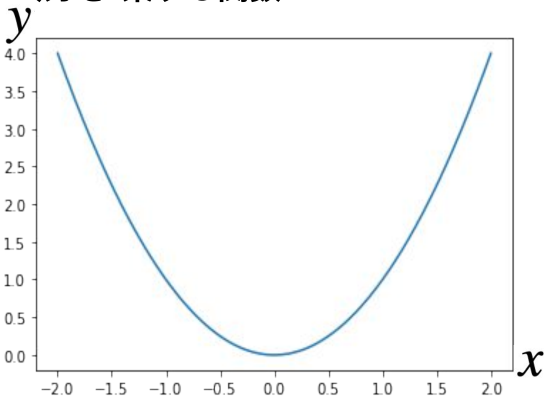
入出力をx, y, zなどと文字式で表せば、関数は数式で書ける！

入力を2倍する関数



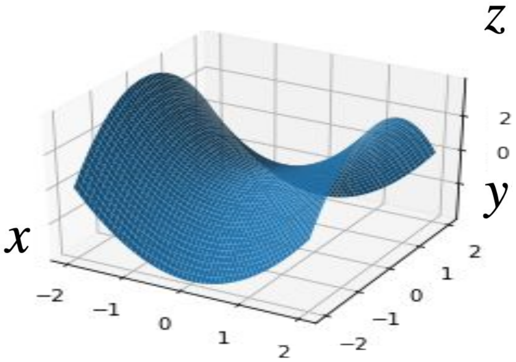
$\longrightarrow\ y = 2x$

入力を2乗する関数



$\longrightarrow\ y = x^2$

入力1を2乗したものから
入力2を2乗したものを引く関数



$\longrightarrow\ z = x^2 - y^2$

入出力をx, y, zなどと文字式で表せば、関数は数式で書ける！

x について何かしらの処理をする関数を $f(x)$ と書くことができる

$$y = f(x) = 2x$$

$$z = f(x, y) = x^2 - y^2$$

n 個の変数をもつ関数を以下のように書くことができる

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$$

※関数 f がもつことができる変数の個数に制限はない

f は g や h など他の文字で書かれることもある
例：$g(x)$ 、$h(x)$

AIは入力された**説明変数**から**目的変数**を出力する関数

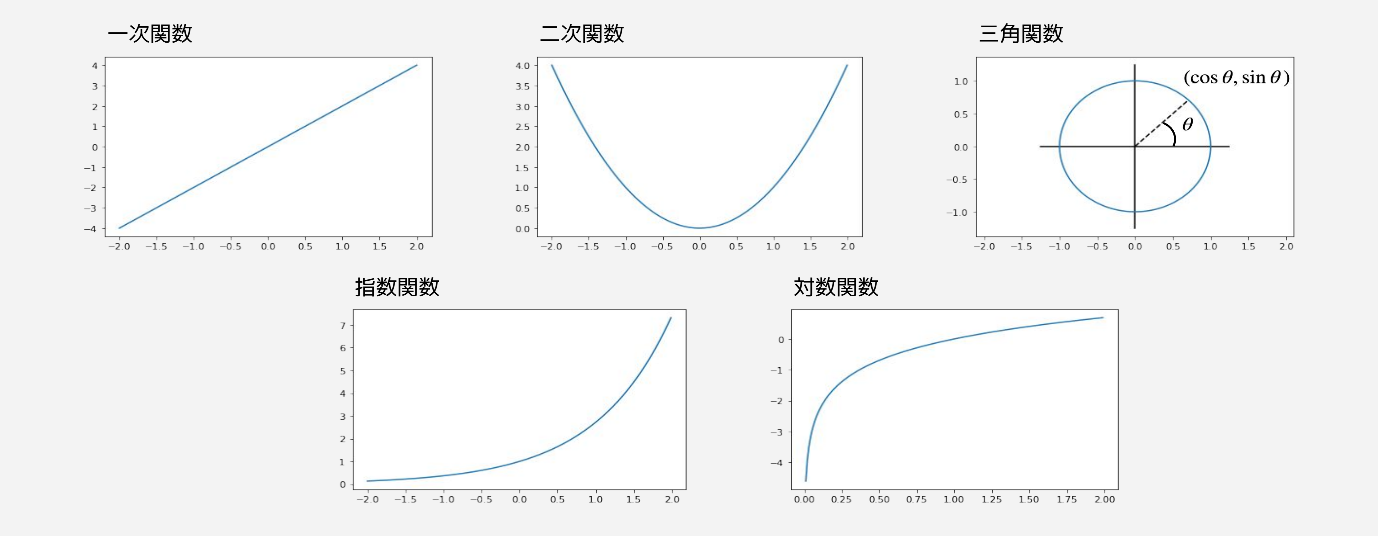
AIで予測をするときは、
「　説明変数を関数に入れて出てくる出力　＝　AIによる目的変数の予測値　」となる

説明変数		目的変数
気温	→ 関数 →	アイスの売上
目・鼻・口・耳の形	→ 関数 →	イヌ or ネコ
年齢・性別・視聴履歴	→ 関数 →	オススメ作品

入力データに対して適切な出力をするように 関数 を修正（最適化）することで
予測の精度を上げる

AIはある種の関数！

一次関数、二次関数、三角関数、指数関数、対数関数など色々な「関数」から **関数** は作られる。AIを作る際に必要なそれぞれのパーツについて次から見ていこう。



まとめ

01 関数とは入力に対して何かを出力するもので、AIも入力データから必要な予測などを出力する関数と言える。

02 関数は様々な単純な関数の組み合わせで作られるため、その1つ1つの性質を理解しておくことは重要である。

はじめに

Q

ではその単純な関数にはどんなものがあるでしょう？

はじめに

Q

ではその単純な関数にはどんなものがあるでしょう？

A

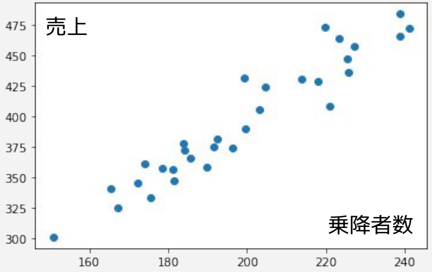
ここから3節に分けて一次・二次関数、指数・対数関数、三角関数について見ていこう。

駅の乗降者数と駅前の店舗の売上

例として以下のような場合

・**ある駅の1日の乗降者数とその駅前にある店舗の1日の売上の関係**

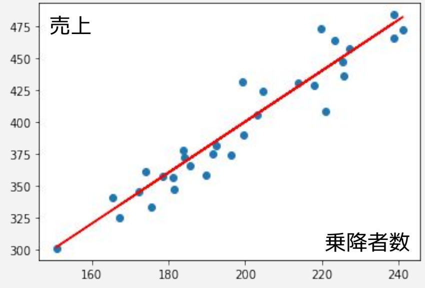
	10/1	10/2	10/3	10/4	10/5	10/6	10/7	...	10/25	10/26	10/27	10/28	10/29	10/30	10/31
乗降者数(万人)	204	225	191	175	172	199	219	...	165	150	199	203	225	217	181
売上(千円)	423	435	374	333	345	389	473	...	340	300	431	405	447	428	356



このケースにおいて、
乗降者数から売上を予測する関数にどのようなものが使えるか考えてみよう

一次関数

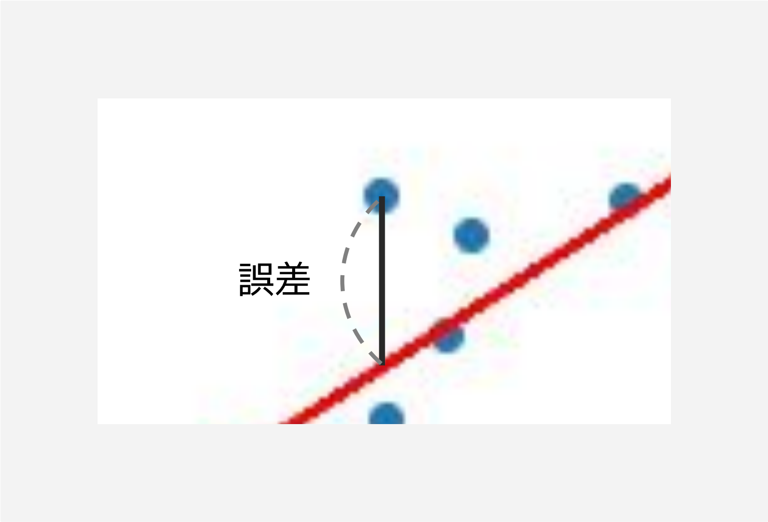
今回のケースでは $y = 2x$ という関数が利用できる
実際に、$y = 2x$ のグラフを描画してみると以下のようになる



今回使った $y = 2x$ の様な式で表される関数を一次関数という

【補足】このようにデータに合うモデル（関数）を作ることを**フィッティング**という

モデル(関数)による予測からの誤差というものは必ず発生する



誤差が発生する要因

・ランダムなデータ
・データを収集する際のミスや個体差
・モデルのフィッティングの程度

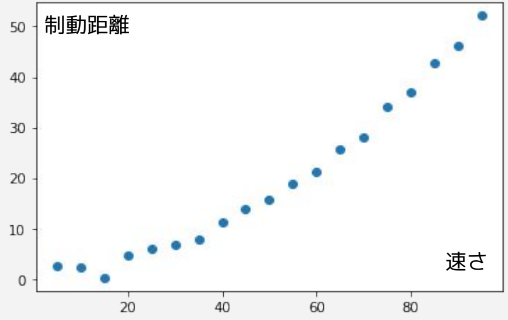
【補足】
モデルを過剰にフィッティングすると**過学習**が起こり、予測時の誤差が大きくなってしまう

車の速さと制動距離

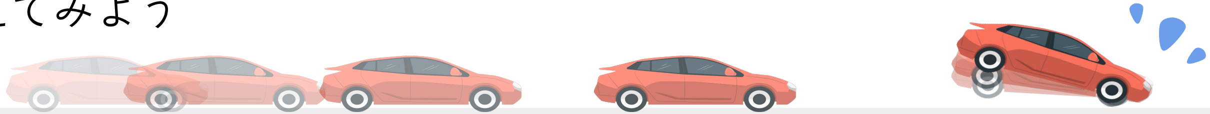
例として以下のような場合

- **制動距離と車の速さの関係**

速度(Km/h)	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95
停止距離(m)	2	2	0	4	5	6	7	11	13	15	18	21	25	28	34	37	42	46	52



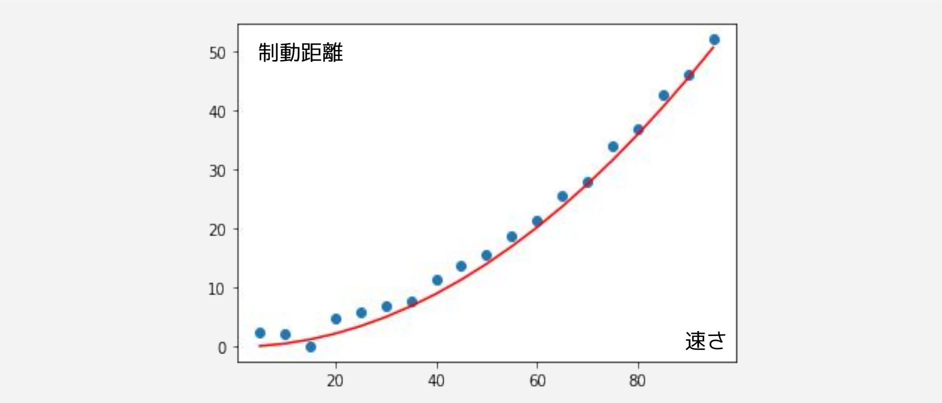
この表とグラフから、速さを入力すると制動距離が出力される関数について考えてみよう



二次関数

今回のケースでは　$y = ax^2$ という関数が利用できる

実際に、$y = ax^2$ のグラフを描画してみると以下のようになる



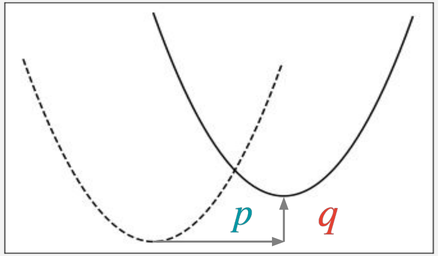
※ただし、$a = \dfrac{1}{254 \times \mu}$ 、$\mu = 0.7$（乾いたアスファルトに対するタイヤの摩擦係数）

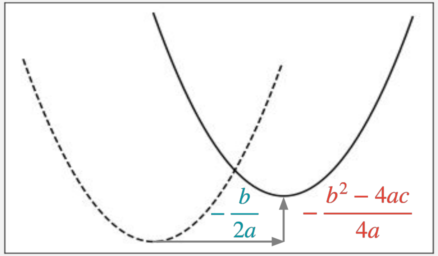
今回使った $y = ax^2$ の様な式で表される関数を**二次関数**という

二次関数

$y = a(x-p)^2 + q$ (a、p、q は実数、$a \neq 0$) のグラフは、

放物線 $y = ax^2$ を x 軸方向に p 、y 軸方向に q だけ平行移動した放物線





二次関数は一般的に $y = ax^2 + bx + c$ (a、b、c は実数、$a \neq 0$) と表される

これは $y = a(x-p)^2 + q$ ($p = -\frac{b}{2a}$, $q = -\frac{b^2-4ac}{4a}$)の形に変形できる(平方完成)

まとめ

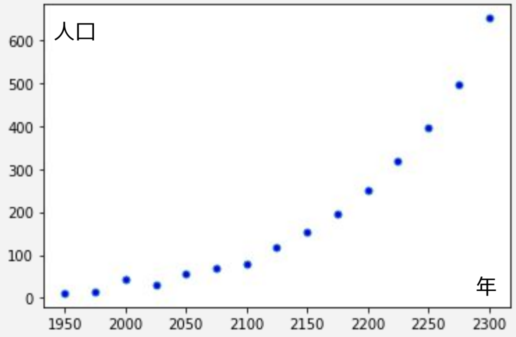
01 一次関数は直線であり、二次関数は放物線となる。

02 モデルを用いて実際のデータにフィッティングする際、必ず誤差は発生する。

一定の割合で増え続ける関数

例として以下のような場合
・ある市の人口の増加と年の関係

年	1950	1975	2000	2025	2050	2075	2100	2125	2150	2175	2200	2225	2250	2275	2300
人口(千人)	11	14	43	32	55	70	79	117	153	196	250	319	397	498	651

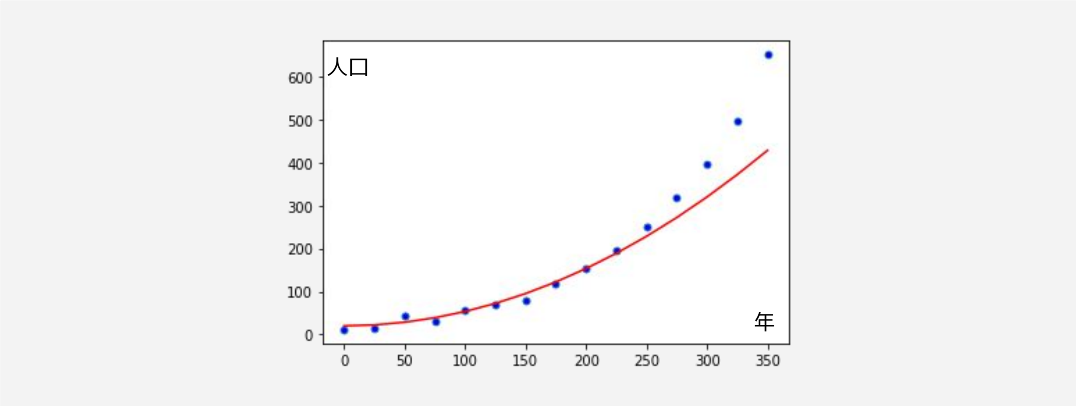


この表とグラフから、経過年を入力すると人口が出力される関数について考えてみよう。
ただし、以降では簡単のため1950年を原点($x=0$)として考える。
※実際は $x' = x - 1950$ とすれば平行移動できるので問題ない。

二次関数をフィッティングしてみよう

二次関数ではどうだろう？ 実際に当てはめてみよう

※赤線は $y = \frac{1}{300}x^2 + 20$ のグラフを描画したもの

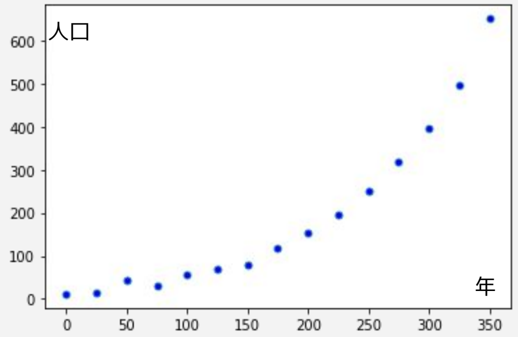


データの後半部分ではモデルとの誤差が大きくなっていることがわかる。

一定の割合で増加していく関数

街の人口増加は毎年同じ割合であると考えて、例えば毎年1%(1.01倍)ずつ増加していくと考えれば。
1年ごとに1.01倍になると考えることができる。つまり、x 年後には 1.01^x 倍である。

年	0	25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	275	300	325	350
人口(千人)	11	14	43	32	55	70	79	117	153	196	250	319	397	498	651

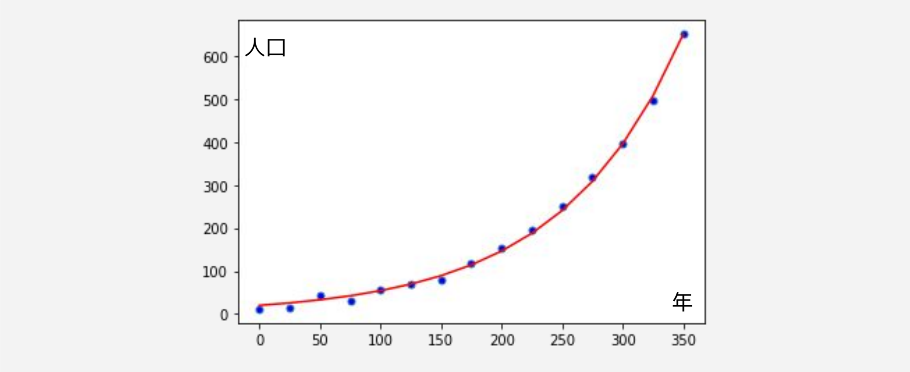


0年(実際1950年)の人口を20(千人)と考えて、そこから毎年1%(1.01倍)ずつ増えると考えると式は

$$y = 20 \times 1.01^x$$ となりそう。

指数関数

実際に、$y = 20 \times 1.01^x$ のグラフを描画してみると以下のようになる



今回使った $y = 20 \times 1.01^x$の様な式で表される関数を**指数関数**という

$y = a^x$ を a を底とする指数関数といい、このとき、x を a の指数という

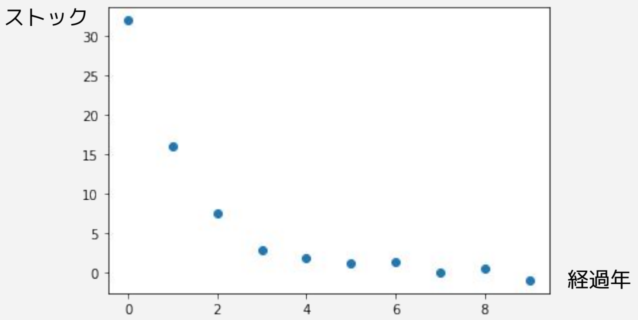
今回の例では 1.01 を底とする指数関数を使用

一定の割合で減り続ける関数

例として以下のような場合

・ある製造工場にある生産ラインに使用されているモーターは一年ごとに50%の確率で破損し交換が必要になる

経過年	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ストック(個)	32	16	7	2	1	1	1	0	0	0



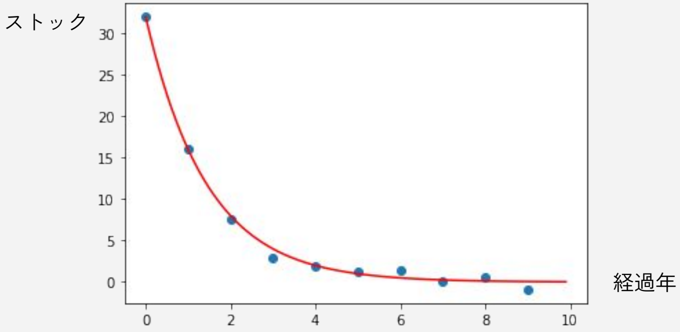
この表とグラフから、経過年を入力するとモーターのストック数が出力される関数について考えてみよう

底が1以下、もしくは指数が負の指数関数

今回は初期値32から一年ごとに50%($\frac{1}{2}$)倍になるつまり、関数 $y = 32 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x$ が使える

【補足】この式は $y = 32 \times 2^{(-x)}$ とも書くことができる

実際にフィッティングしたグラフが以下となる

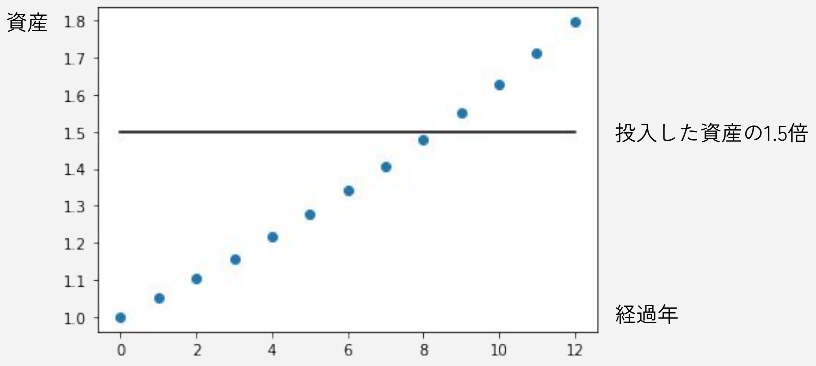


表には1年ごとのデータしかないが、モデルだとその途中の状態も表すことができている。

一定の割合で増える数が〇倍になるまで

例として以下のような場合

・平均利回り5%で運用できる金融商品に投入した資産が1.5倍になるまでにどれくらいの年数がかかるか予想したい



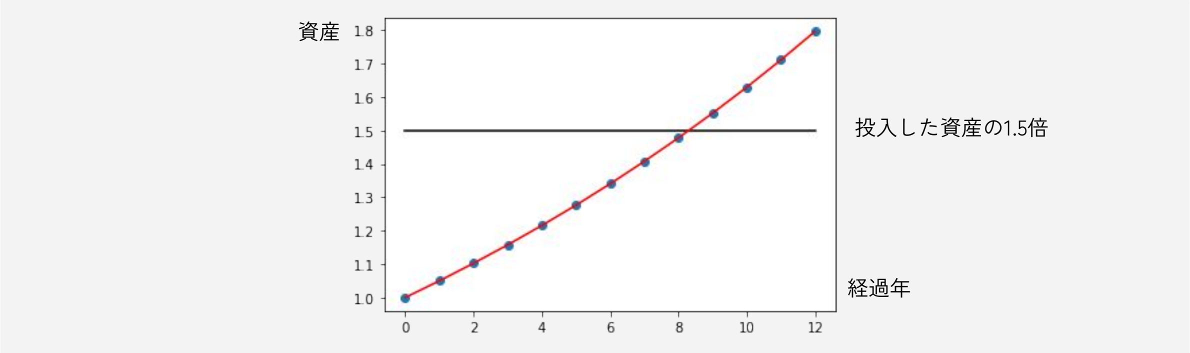
どのように算出すれば良いか考えてみよう

一定の割合で増える数が〇倍になるまで

✔ 資産を投入して**n年経過**した時の資産は、元の資産に1.05を**n回掛ける**ことで算出できる

このことから資産は経過年の指数関数であると言え、元の**資産が1.5倍**になるのにかかる年数は以下の式で計算できる

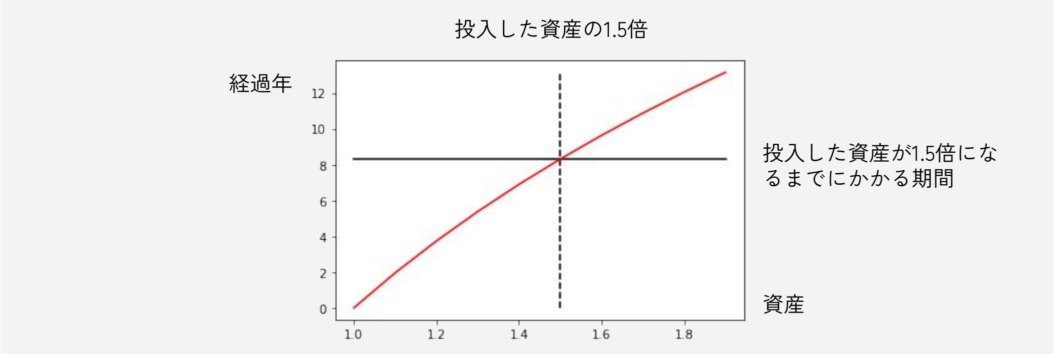
$$1.5 = 1.05^n$$



指数関数の逆関数：対数関数

$1.5 = 1.05^x$ を求めるには指数関数の**逆算**をする必要がある。
この様にある関数を逆算したものをその関数の**逆関数**という。

また、指数関数の逆関数を**対数関数**という。
元の資産が平均利回り a %で x 倍になるまでにかかる期間 y は $y = \log_a x$ の様に書き、グラフは以下のようになる



※ y は指数、a は底、x は真数という

まとめ

01 一定の割合で増える、減る数は指数関数で表せる。またその逆算となる場合は対数関数が使える。

02 ある関数の逆算となる関数を、逆関数という。

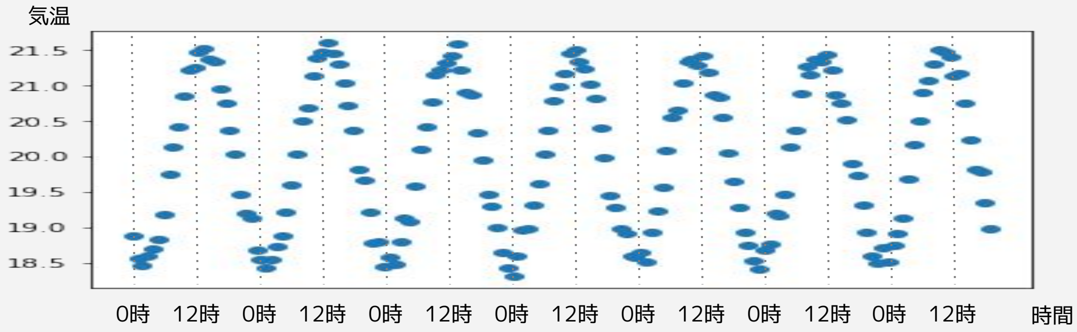
一定の周期で同じ変化を繰り返す関数

例として以下のような場合

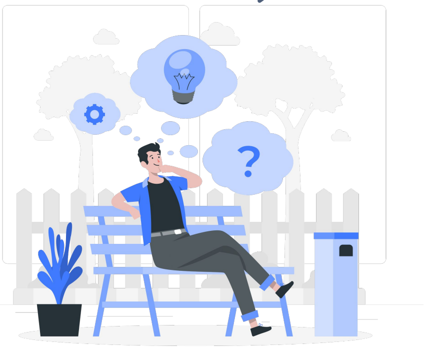
- **1時間ごとの気温データ1週間分**

気温が1週間で繰り返し**上下**していることが分かる

時間	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	…	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
気温	18	18	18	18	18	18	19	19	20	20	20	21	21	21	21	…	20	20	21	21	21	21	21	21	21	20	20	19	19	19	18



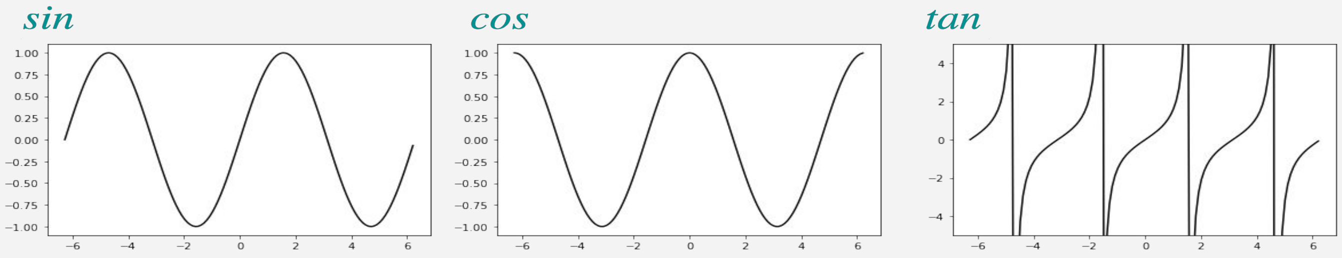
この表とグラフから、
使用できそうな関数について
考えてみよう



周期関数

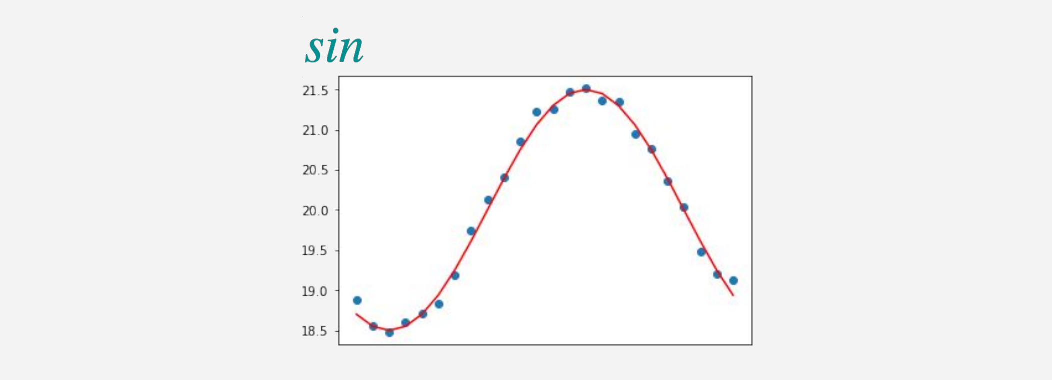
このデータは一定の周期ごとに変化を繰り返している
そのようなデータを**周期関数**という

周期関数の代表的なものに三角関数があり、以下のような3種類がある。



sin によるフィッティング

sinのグラフを実際にデータと合わせると以下のようになり上手くフィッティング出来ていることがわかる



周期的なデータには他にも以下のようなものがある

✔ 季節ごとの売上

✔ 音声データ

sin, cos, tan の関係

三角関数を式では sin, cos, tan と書く

cos と sin の違いは平行移動しているだけであり、$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ である

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ という性質がある

sin は**正弦**、cos は**余弦**と呼ばれることもある

【補足】波に関する用語

波の振動の中心値と最大値の差(最大値と最小値の差の半分の値)を**振幅**

波1回分の距離を**波長**

$y = \sin(x - \varphi)$ は $y = \sin x$ を x 軸方向に φ ずらしたグラフであり、このズレのことを**位相**と呼ぶ。

三角関数の振幅と周期

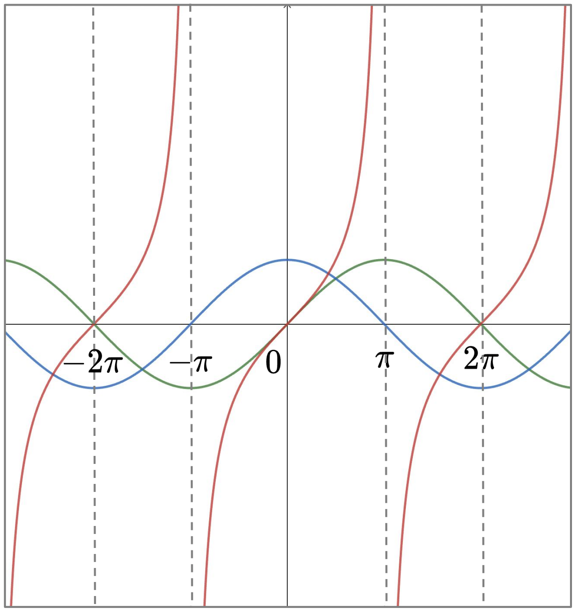
三角関数は以下の様に 2π ごとに同じ値に戻ってくる周期 2π の**周期関数**であることを表している。

$$\begin{cases} \sin(x-2\pi) & = & \sin x \\ \cos(x-2\pi) & = & \cos x \\ \tan(x-2\pi) & = & \tan x \end{cases}$$

また $\sin$、$\cos$ の**振幅**はそれぞれ1である。

これは以下の様にして振幅 a 、周期 L の関数に変換できる。

$$\begin{cases} \sin x & \to & a\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \\ \cos x & \to & a\cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \end{cases}$$

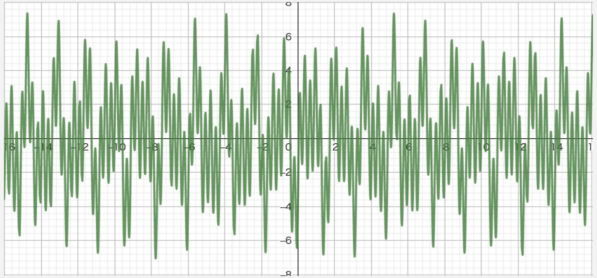


※ $\tan$ については振幅が存在しないが、同様の変換($\tan x \to a\tan\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$)により縦の縮尺の変更と、周期の変換はできる。

sin, cos, tanの関係

データに周期的な変化がある場合でも
それほど綺麗なデータは得られないことの方が多い

しかし、様々な三角関数を足し合わせることで**あらゆる形の関数が作れる**ことが分かっているため三角関数の応用範囲は広い。

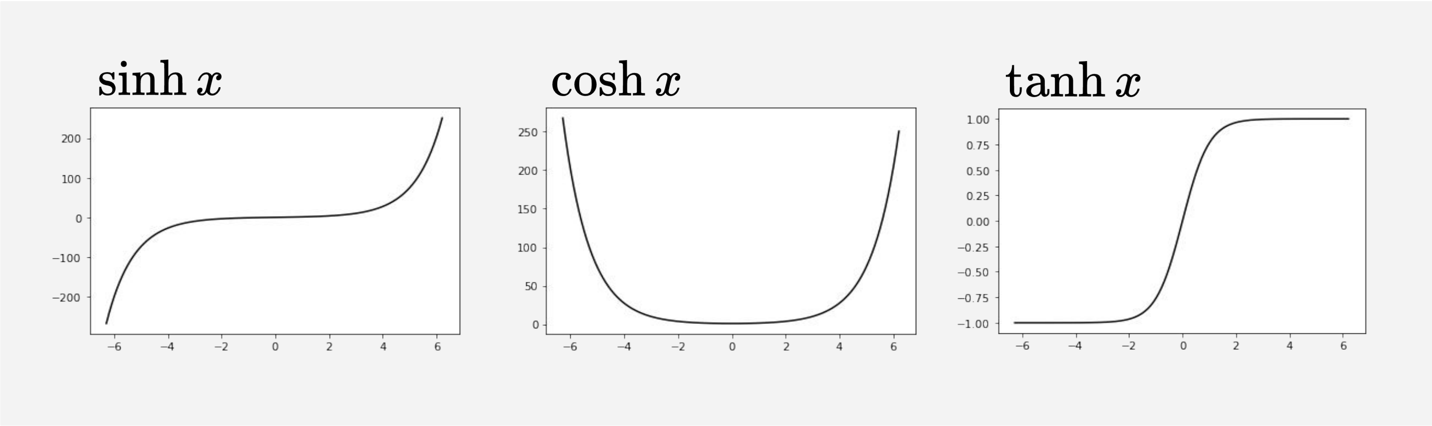


$$f(x) = 2.3\sin(1.3\pi x - 1.1) + 2\sin(2.4\pi x - 0.1) + 3.1\sin(7\pi x - 0.3)$$

双曲線関数

三角関数と良く似たものに双曲線関数($\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$)というものがある。

$\sinh^2 x - \cosh^2 x = 1$ という性質を持っている



具体的にどこが似ているかや、この関数についての詳細は微分の章で詳しく学びます。

まとめ

01 時系列データなどの、周期的な変動をする数は三角関数の組み合わせで表せる。

02 またあらゆる形の関数は三角関数の組み合わせで表せることがわかっている。

03 三角関数に性質がよく似た、双曲線関数というものもある。

はじめに

Q | 入力が複数の関数はどんなときに使う？

はじめに

Q

入力が複数の関数はどんなときに使う？

A

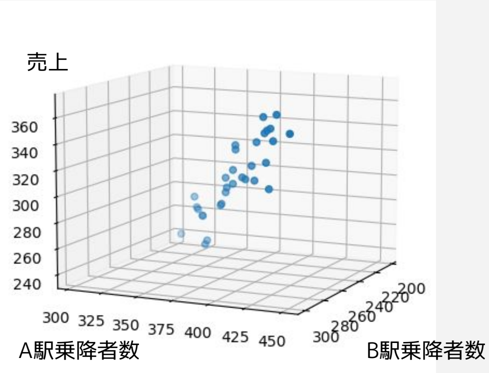
重回帰の例など、複数種類の説明変数が必要な予測モデル(関数)の方が一般的です。

関数の入力は1つでなくてもよかったはず

これまでは1つの数字を入れたら1つの数字が出てくる単変数関数を学んできた
AIでは複数の変数を入力する多変数関数が必要になることも多い

例として以下のような場合
・**近くに駅が2駅ある店舗のその日の売上とその日のそれぞれの駅の乗降者数の関係**

	10/1	10/2	10/3	10/4	10/5	10/6	10/7	...	10/25	10/26	10/27	10/28	10/29	10/30	10/31
A駅乗降者数(万人)	300	254	252	218	219	241	284	...	242	226	246	271	283	255	252
B駅乗降者数(万人)	450	382	378	327	329	362	427	...	363	339	369	407	425	382	379
売上(千円)	358	333	301	268	267	280	356	...	281	241	304	312	310	329	312



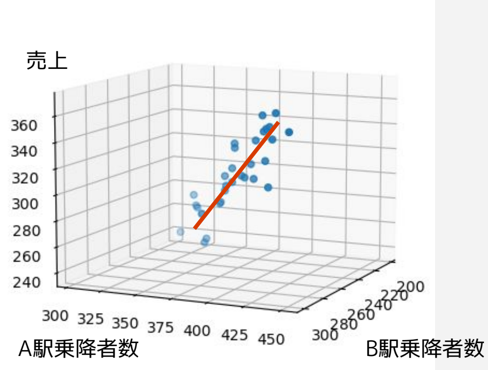
関数の入力は1つでなくてもよかったはず

今回使う関数は以下のような処理を行う

駅1の乗降者数 **駅2の乗降者数** → **関数** → **売上**

今回の例では $y = 0.6x_1 + 0.4x_2$ のような式がよくフィットしそうです

	10/1	10/2	10/3	10/4	10/5	10/6	10/7	...	10/25	10/26	10/27	10/28	10/29	10/30	10/31
A駅乗降者数(万人)	300	254	252	218	219	241	284	...	242	226	246	271	283	255	252
B駅乗降者数(万人)	450	382	378	327	329	362	427	...	363	339	369	407	425	382	379
売上(千円)	358	333	301	268	267	280	356	...	281	241	304	312	310	329	312



Σ記号を使おう

今回の使用した $y = 0.6x_1 + 0.4x_2$ の式を次のように書き換える

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 \ \ (a_1 = 0.6,\ a_2 = 0.4)$$

この時Σ記号を使うことで上式は以下のように表すことができる

$$y = \sum_{i=1}^{2} a_i x_i$$

仮に変数が大量にn 個あった場合は、

$y = a_1x_1 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n$ と全て書き出すことなく、$y = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ とすることで簡潔に書くことができる。これは**重回帰分析**にてよく使用される。

【補足】Σは総和記号といい i について1から n まで**足し合わせる**という意味である

和があれば積もある

$y = ax_1x_2x_3$のような式を使う場合、

これは和ではなく積なので$\prod$ 記号を使うことで以下のように表すことができる

$$y = a\prod_{i=1}^{3} x_i$$

仮に変数が大量にn 個あった場合は、

$y = ax_1 \times x_2 \times \ldots \times x_{n-1} \times x_n$ を

$y = a\prod_{i=1}^{n} x_i$ とすることで簡潔に書くことができる

【補足】Π は総乗記号といい i について1から n まで掛け合わせるという意味である

まとめ

01 複数の説明変数が必要な予測モデルなどでは多変数関数となる。

02 足し合わせを意味する$\sum$や掛け合わせを意味する$\prod$も覚えておこう！

はじめに

Q

関数の入力自体が何らかの関数で計算されることもある？

はじめに

Q 関数の入力自体が何らかの関数で計算されることもある？

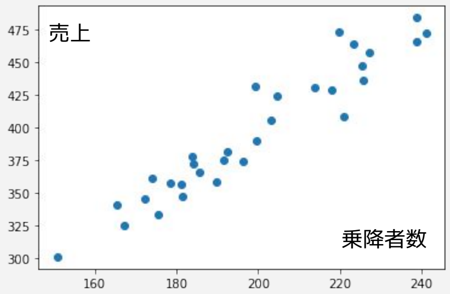
A もちろんあります！その様な場合、まとめて合成関数として考えることができます。

入力が何かの関数となっている関数

これまでは入力を関数に入れると出力が得られるような関数について考えてきた
しかし、入力そのものも何かしらの法則に従って変化する場合もある

一次関数で考えた例について、追加で考えてみよう
・**ある駅の1日の乗降者数とその駅前にある店舗の1日の売上の関係**

	10/1	10/2	10/3	10/4	10/5	10/6	10/7	...	10/25	10/26	10/27	10/28	10/29	10/30	10/31
乗降者数(万人)	204	225	191	175	172	199	219	...	165	150	199	203	225	217	181
売上(千円)	423	435	374	333	345	389	473	...	340	300	431	405	447	428	356



入力が何かの関数となっている関数

日毎の売上を予測する際、その日の**乗降者数がわからない**場合もある。

今回の例では土日の乗降者数が多く、水曜日の乗降者数が少ない
・日付を入力として駅の乗降者数を何かしらの周期関数で表せるとしたら、以下の流れで日付から売上を算出できる

日付 → **周期関数** → **乗降者数** → **一次関数** → **売上**

この流れを以下のように表現した場合

日付 → **関数** → **売上**

合成関数

この様にまとめた関数を以下の式で書くことができ、関数を一次関数と周期関数の**合成関数**と呼ぶ

関数 = **一次関数** ∘ **周期関数**

数式で合成関数 $h(x)$ は一次関数 $f(x)$、周期関数 $g(x)$ を用いて、$h(x) = f \circ g(x)$ と書く

【補足】 $f \circ g(x)$ を $f(g(x))$ と書くこともある

入力が何かの関数となっている関数

具体的に関数を作ってみる

$y = 2x$ は一次関数の例で考えたものをそのまま使い、乗降者数を1週間ごとの周期関数として三角関数で表す

$$x = 25\cos\left(\frac{2\pi}{7}t\right)$$

このとき一次関数と周期関数の合成関数は以下の式で表せる

$$\begin{aligned} y &= 2 \times \left\{25\cos\left(\frac{2\pi}{7}t\right)\right\} \\ &= 50\cos\left(\frac{2\pi}{7}t\right) \end{aligned}$$

※乗降者数を $\cos$ で正確に近似できるわけではないが今回は簡単にこの式で近似した

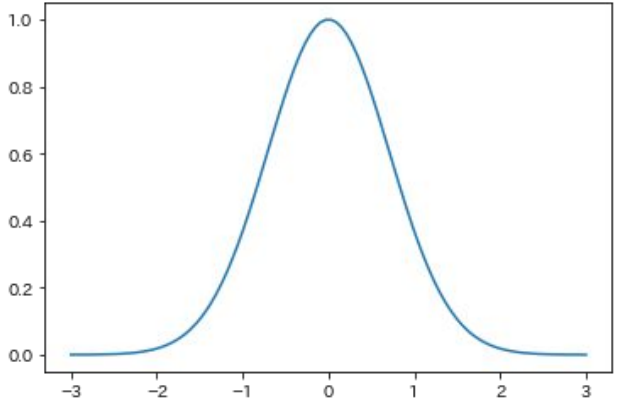
合成関数で色々な関数が作れる！

機械学習の分野に登場する様々な複雑な関数は、ここまでで学んだ**基本的な関数の合成関数**として表せる。

基本的な関数の合成として考えることでその微分などの**性質を理解しやすくなる**。

※微分は次章で学びます。

$$
\begin{cases}
f(x) &= e^{x} \\
g(x) &= -ax^{2} \\
f \circ g(x) &= e^{-ax^{2}}
\end{cases}
$$



まとめ

01 目的変数を予測するための説明変数自体がわからない場合は、それも目的変数として予測する必要がある。

02 機械学習分野に登場する複雑な関数も、単純な関数の合成関数で表せる。