線形代数

AVILEN

1 機械学習に必要な線形代数の知識
2 スカラー・ベクトル・行列
3 ベクトルの演算
4 行列の演算

1 機械学習に必要な線形代数の知識

2 スカラー・ベクトル・行列

3 ベクトルの演算

4 行列の演算

はじめに

Q

なぜ、機械学習に
線形代数の知識が必要なの？

はじめに

Q

なぜ、機械学習に
線形代数の知識が必要なの？

A

ベクトルや行列、テンソルが**データやその処理を表現**するのにとても便利だから！

機械学習とは
データからパターンを見つけ出す分野

データ

	築年数（年）	専有面積 [㎡]	駅からの距離 [m]	家賃 [円]
物件A	20	40	200	45,000
物件B	15	35	400	40,000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
物件Y	10	45	500	52,000
物件Z	8	50	100	85,000

パターン

築年数：●●年

専有面積：●●㎡

駅からの距離：●●●m

なら

家賃は：●●

機械学習とは
データからパターンを見つけ出す分野

データ

	築年数（年）	専有面積 [㎡]	駅からの距離 [m]	家賃 [円]
物件A	20	40	200	45,000
物件B	15	35	400	40,000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
物件Y	10	45	500	52,000
物件Z	8	50	100	85,000

パターン

物件Aの家賃はどの様に予測できる...

$$20w_1 + 40w_2 + 200w_3 = ?$$

パターンを見つけ出すために
データに対して共通の計算処理を行う

データ

	築年数（年）	専有面積 [㎡]	駅からの距離 [m]	家賃 [円]
物件A	20	40	200	45,000
物件B	15	35	400	40,000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
物件Y	10	45	500	52,000
物件Z	8	50	100	85,000

共通の計算処理

予測値の計算

$$20w_1 + 40w_2 + 200w_3 = 40000$$
$$15w_1 + 35w_2 + 400w_3 = 45000$$
$$10w_1 + 45w_2 + 500w_3 = 52000$$
$$8w_1 + 50w_2 + 100w_3 = 83000$$

誤差の計算

正解値	予測値	差分	差分の二乗
45,000	40,000	5,000	…
40,000	45,000	-5,000	…
52,000	52,000	0	…
85,000	83,000	2,000	…

線形代数では、データや計算処理をまとめて表記することで1つの数として扱う

データや計算処理

$$20w_1 + 40w_2 + 200w_3 = 40000$$
$$15w_1 + 35w_2 + 400w_3 = 45000$$
$$10w_1 + 45w_2 + 500w_3 = 52000$$
$$8w_1 + 50w_2 + 100w_3 = 83000$$

正解値	予測値	差分	差分の二乗
45,000	40,000	5,000	…
40,000	45,000	-5,000	…
52,000	52,000	0	…
85,000	83,000	2,000	…

線形代数

予測値の計算

$$\begin{pmatrix} 20 & 40 & 200 \\ 15 & 35 & 400 \\ 10 & 45 & 500 \\ 8 & 50 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40000 \\ 45000 \\ 52000 \\ 83000 \end{pmatrix}$$

$$Xw = t'$$

誤差の計算

$$E(\boldsymbol{w}) = \frac{1}{2} ||\boldsymbol{X}\boldsymbol{w} - \boldsymbol{t}||^2$$

まとめ

01
機械学習とは
データから**パターン**を見つけ出す分野

02
データや計算処理は
線形代数を使うと**簡潔に表現**できる

1 機械学習に必要な線形代数の知識

2 スカラー・ベクトル・行列

3 ベクトルの演算

4 行列の演算

はじめに

Q | 線形代数って何を学ぶ分野？

はじめに

Q 線形代数って何を学ぶ分野？

A 数を縦や横に並べた
ベクトルや**行列**などの扱いを学ぶ！

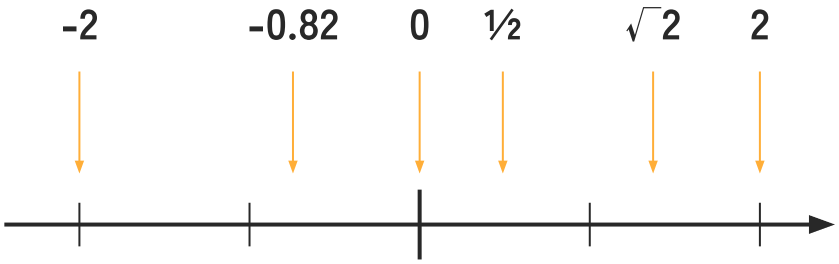
線形代数で扱うスカラー、ベクトル、行列

スカラー	ベクトル	行列
2	$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$
$\frac{3}{4}$	$\boldsymbol{d} = (2, 0, 4, -1)$	$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

数値 ＝ スカラー

数直線上にある数

整数、小数、分数、無理数



数式

文字に数値を代入するとこちらも
スカラーであることがわかる

$$2x^2 + 3x + 1$$

$$\frac{1}{1+x^2}$$

ベクトルとは
例えばデータテーブルの1つの行や列

データ

	築年数 [年]	専有面積 [㎡]	駅からの距離 [m]	家賃 [円]
物件A	20	40	200	45,000
物件B	15	35	400	40,000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
物件Y	10	45	500	55,000
物件Z	8	50	100	80,000

ベクトル

行ベクトルによる表現

$$(20, 40, 200, 45000)$$
$$(15, 35, 400, 40000)$$
$$(10, 45, 500, 55000)$$
$$(8, 50, 100, 80000)$$

列ベクトルによる表現

$$\begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ \vdots \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 35 \\ \vdots \\ 45 \\ 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 400 \\ \vdots \\ 500 \\ 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 45000 \\ 40000 \\ \vdots \\ 55000 \\ 80000 \end{pmatrix}$$

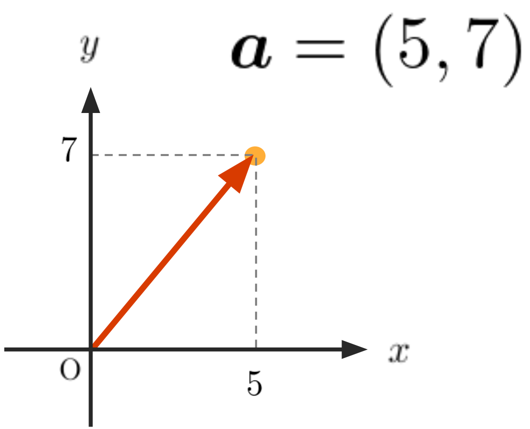
縦または横にスカラー(数値)を並べたもの ＝ **ベクトル**

行ベクトル	列ベクトル
$\boldsymbol{a} = (5, 7)$ $\boldsymbol{b} = (2, 3, 5)$ $\boldsymbol{c} = (-1, 3, 1, 4)$	$\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

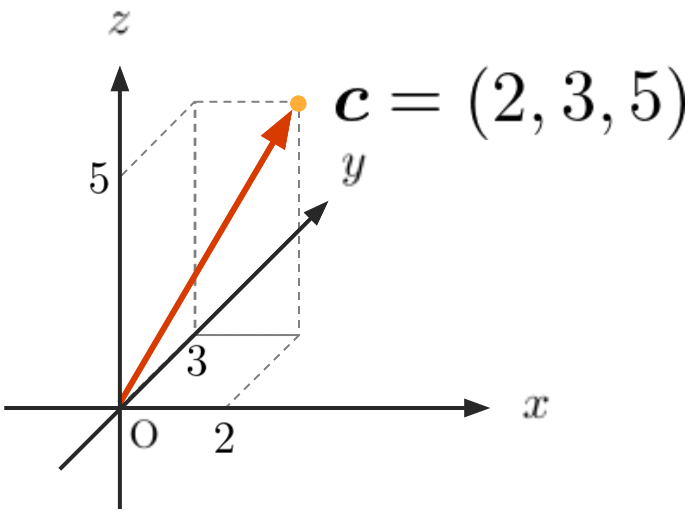
$\boldsymbol{a}$ というベクトルの i 番目の成分を a_i と書く

ベクトルの図形的なイメージ

2次元ベクトル



3次元ベクトル



行列は
データテーブルそのもの

データ

	築年数 [年]	専有面積 [㎡]	駅からの距離 [m]	家賃 [円]
物件A	20	40	200	45,000
物件B	15	35	400	40,000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
物件Y	10	45	500	55,000
物件Z	8	50	100	80,000

行列

$$D = \begin{pmatrix} 20 & 40 & 200 & 45000 \\ 15 & 35 & 400 & 45000 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 10 & 45 & 500 & 55000 \\ 8 & 50 & 100 & 80000 \end{pmatrix}$$

縦と横にスカラー(数値)を並べたもの ＝ **行列**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{1行} \\ \text{2行} \\ \text{3行} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{1列} & \text{2列} & \text{3列} \end{array}$$

行の数、**列の数**に合わせて**n行m列の行列**などと表現する。

今回は3行3列の行列である。

行数と列数が一致している行列は特に

正方行列

A という行列の i 行目 j 列目の成分を A_{ij} と書く

スカラー、ベクトル、行列を一般化したテンソル

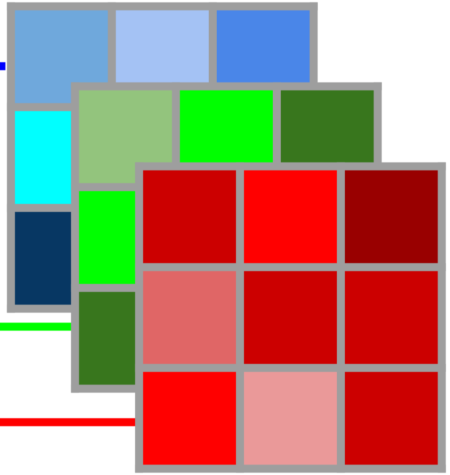
スカラー、ベクトル、行列を一般化し、数値を並べる方向の数に着目した
n階のテンソルという言い方がある。

スカラー = **0階の**テンソル (並べる向きがない)	ベクトル = **1階の**テンソル (縦のみ or 横のみの配列)	行列 = **2階の**テンソル (縦と横の配列)
2	$\boldsymbol{c} = (2, 3, 5)$	$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

※もちろん**nが3以上**の場合もある

3階以上のテンソルも存在する

$$
\begin{pmatrix} 150 & 100 & 80 \\ 50 & & \\ 240 & & \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 150 & 50 & 240 \\ 50 & & \\ 240 & & \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 240 & 50 & 255 \\ 60 & 240 & 220 \\ 200 & 30 & 210 \end{pmatrix}
$$



3階のテンソル

(数値を縦・横・奥行き方向に並べた配列)

行列はベクトルが縦または横に並んだものとも考えられる

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

別の見方

列ベクトルを
横に並べた集まり

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

行ベクトルを
縦に並べた集まり

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

テーブルデータにおける 列ベクトルと行ベクトルの意味

	築年数 [年]	専有面積 [㎡]	駅からの距離 [m]	家賃 [円]
物件A	20	40	200	45,000
物件B	15	35	400	40,000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
物件Y	10	45	500	**55,000**
物件Z	8	50	100	80,000

列ベクトルは

全サンプルのある特徴量

$$\begin{pmatrix}20\\15\\\vdots\\10\\8\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}200\\400\\\vdots\\500\\100\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}40\\35\\\vdots\\45\\50\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}45000\\40000\\\vdots\\55000\\80000\end{pmatrix}$$

行ベクトルは

1サンプルのデータ

$$\begin{pmatrix}20 & 40 & 200 & 45000\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}15 & 35 & 400 & 40000\end{pmatrix}$$
$$\vdots$$
$$\begin{pmatrix}10 & 45 & 500 & 55000\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}8 & 50 & 100 & 80000\end{pmatrix}$$

行列の行と列を入れ替える操作 ＝ 転置

$$
\begin{array}{c c}
① & \\
② & \\
③ &
\end{array}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}
\xrightarrow{\text{転置}}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} ① & ② & ③ \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

A $\qquad\qquad$ A^T

転置の記号

対角成分は同じ値になる

行列の転置とは？

データ行列

	築年数[年]	専有面積[㎡]	駅からの距離[m]	家賃[円]
物件A	20	40	200	45,000
物件B	15	35	400	40,000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
物件Y	10	45	500	**55,000**
物件Z	8	50	100	80,000

転置したデータ

	物件A	物件B	…	物件Y	物件Z
築年数[年]	20	15	…	10	8
専有面積[㎡]	40	35	…	45	50
駅からの距離[㎡]	200	400	…	500	100
家賃[円]	45000	40000	…	**55000**	80000

まとめ

01

線形代数とは
ベクトルや**行列**などの扱いを学ぶ分野。

02

ベクトルや行列を使ってデータを表現することで
線形代数の知識を用いて**データを解釈できる。**

1 機械学習に必要な線形代数の知識

2 スカラー・ベクトル・行列

3 ベクトルの演算

4 行列の演算

はじめに

Q

ベクトルの演算はどの様にするの？

はじめに

Q ベクトルの演算はどの様にするの？

A この章で、データの扱いを例にとって
ベクトルの演算を見ていこう。

スカラーの演算は小学校で学んだ通り

$+$	$-$	$\times$	$\div$
$1+2$	$3-2$	3×2	$4\div 3$
$a+b$	$b-a$	$x\times y$	$x\div y$

この章では、**ベクトルの演算**はどの様にすればいいのかを見ていこう。

データの平均を計算しよう

物件情報のデータテーブル

	築年数（年）	専有面積[㎡]	駅からの距離[m]	家賃[円]
物件A	20	40	200	45,000
物件B	15	35	400	40,000
物件Y	8	45	500	60,000
物件Z	5	50	100	85,000

物件A $(20, 40, 200, 45000)$ 20 40 200 45,000

$+$

物件B $(15, 35, 400, 40000)$ 15 35 400 40,000

$$(48, 170, 1200, 230000)$$

$+$

物件Y $(8, 45, 500, 60000)$ 8 45 500 60,000

$+$

物件Z $(5, 50, 100, 85000)$ 5 50 100 85,000

データの平均を計算しよう

物件情報のデータテーブル

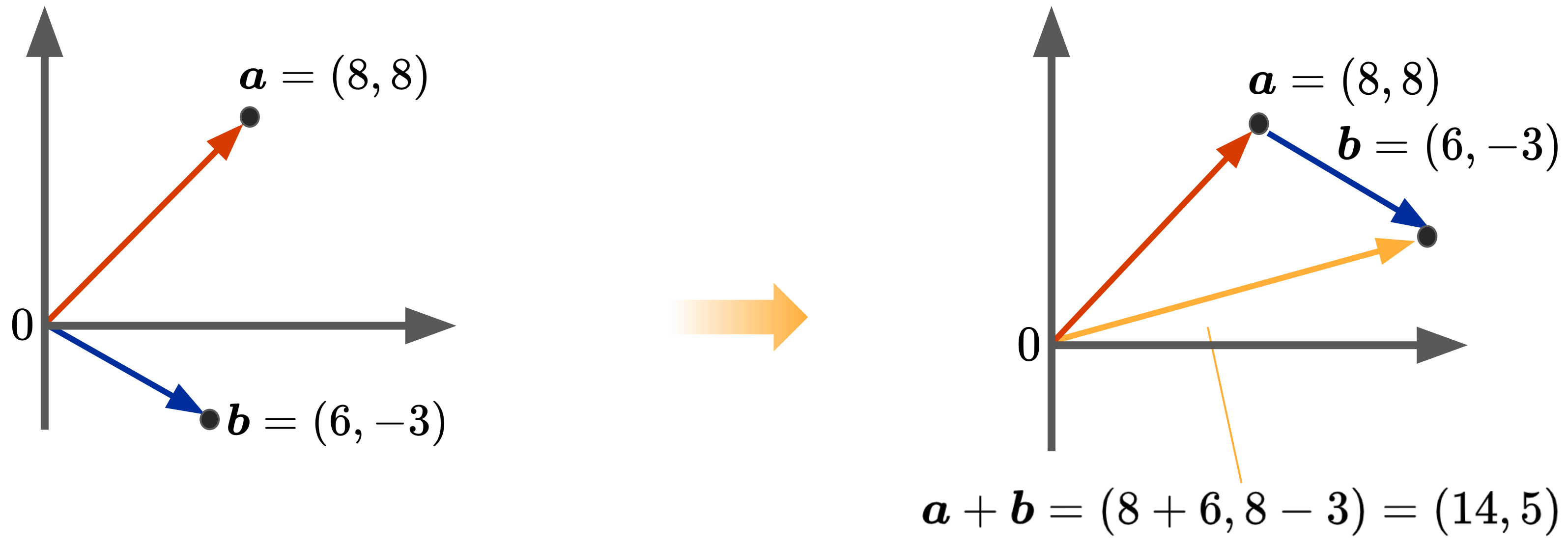
	築年数（年）	専有面積[㎡]	駅からの距離[m]	家賃[円]
物件A	20	40	200	45,000
物件B	15	35	400	40,000
物件C	8	45	500	60,000
物件D	5	50	100	85,000

$$\boldsymbol{a} = (20, 40, 200, 45000)$$
$$\boldsymbol{b} = (15, 35, 400, 40000)$$
$$\boldsymbol{c} = (8, 45, 500, 60000)$$
$$\boldsymbol{d} = (5, 50, 100, 85000)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S} &= \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d} \\ &= (48, 170, 1200, 230000)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu} &= \frac{1}{4}\boldsymbol{S} \\ &= \frac{1}{4}(48, 170, 1200, 230000) \\ &= (12, 42.5, 300, 57500)\end{aligned}$$

ベクトルの和は成分ごとに足す
矢印を繋げるイメージ



平均からの差を求めよう

物件情報のデータテーブル

	築年数（年）	専有面積[㎡]	駅からの距離[m]	家賃[円]
物件A	20	40	200	45,000
物件B	15	35	400	40,000
物件Y	8	45	500	60,000
物件Z	5	50	100	85,000

物件Aの情報と平均を比べよう

$$\boldsymbol{a} = (20, 40, 200, 45000)$$

$$\boldsymbol{\mu} = (12, 42.5, 300, 57500)$$

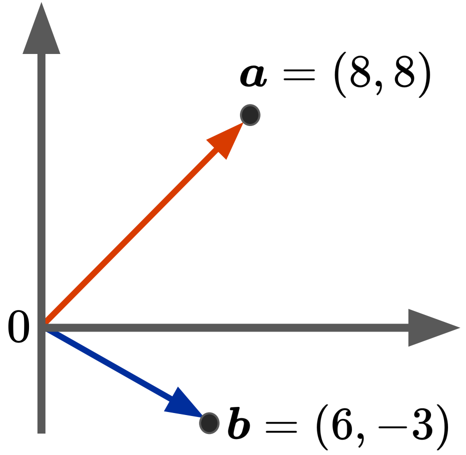
物件A	20	40	200	45,000
平均	12	42.5	300	57,500

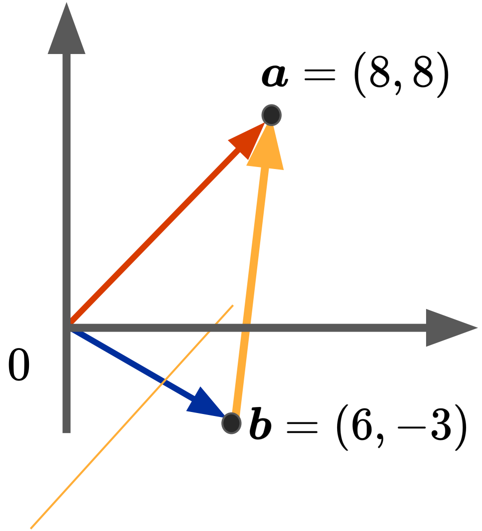
||

$$\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{\mu}$$

$$= (8, -2.5, -100, -12500)$$

ベクトルの差は成分ごとに引く
ベクトルが指す点と点を繋げるイメージ





$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (8 - 6, 8 + 3) = (2, 11)$$

ベクトルの積は２種類
よく使われるのは**内積**

要素積(アダマール積)

$$\boldsymbol{x} = (2, 1)$$
$$\boldsymbol{y} = (1, -1)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} \odot \boldsymbol{y} &= (2 \times 1, 1 \times (-1)) \\ &= (2, -1)\end{aligned}$$

要素同士の積をそのまま返す

内積

$$\boldsymbol{x} = (2, 1)$$
$$\boldsymbol{y} = (1, -1)$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} &= 2 \times 1 + 1 \times (-1) \\ &= 1\end{aligned}$$

要素同士の積を足し合わせる

内積で表現できる計算

賃貸物件の各情報と家賃 / 回帰による家賃の予測

	築年数（年）	専有面積[㎡]	駅からの距離[m]	家賃[円]
物件A	20	40	200	45,000
物件B	15	35	400	40,000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
物件Y	10	45	500	52,000
物件Z	8	50	100	83,000

$$20w_1 + 40w_2 + 200w_3 = 40000$$
$$+ 35w_2 + 400w_3 = 45000$$
$$\vdots$$
$$+ 45w_2 + 500w_3 = 52000$$
$$+ 50w_2 + 100w_3 = 83000$$

ベクトルによる表記

$\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3)$ とし、
各々の物件についての家賃以外の
データを $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ の様に表すとする

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{w} = 40000$$
$$\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{w} = 45000$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{w} = 52000$$
$$\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{w} = 83000$$

内積の表記方法にはドット記法の他に
行ベクトル→列ベクトルの順に並べる記法がある

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

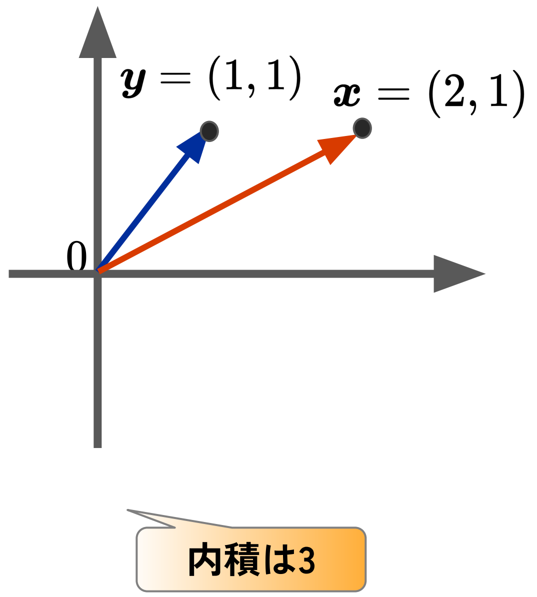
$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y} \\ &= (2, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= 2 \times 1 + 1 \times (-1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

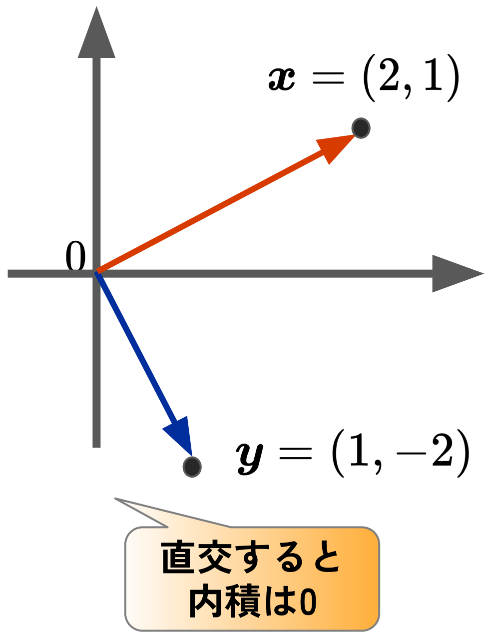
一般的には行ベクトルより
列ベクトルを基本とするため、

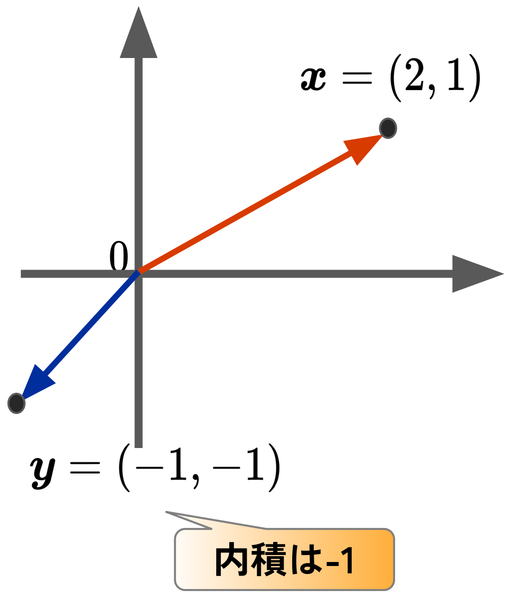
$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}$$

の記法がよく用いられる

似た方向のベクトル同士の内積→プラス
違う方向のベクトル同士の内積→マイナス

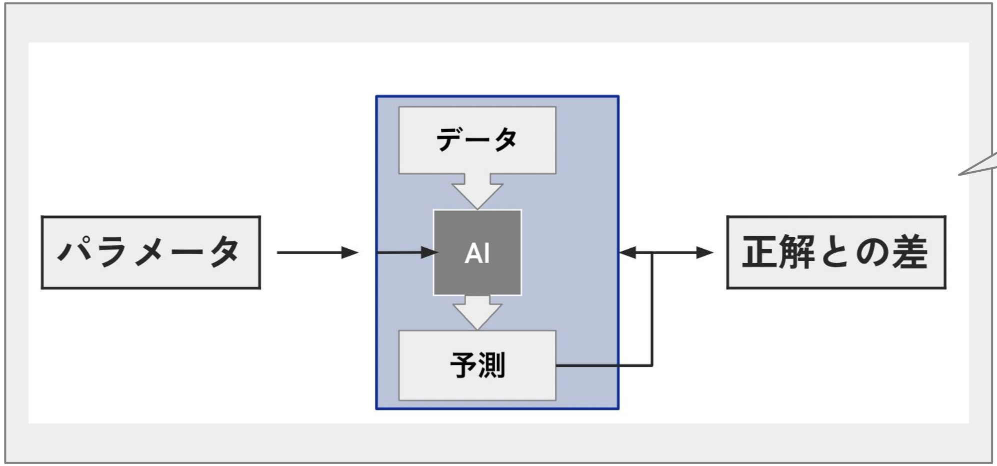






データ間の距離

機械学習ではAIが出力した予測データと実際の正解データを比較するため**損失関数**を考える。



損失関数は
予測データと正解データとの距離
を表している。

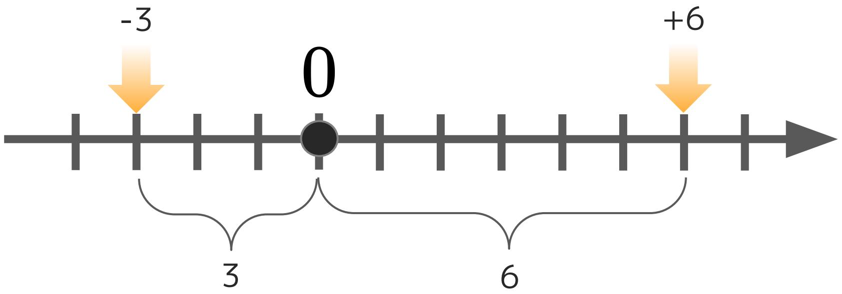
データは**ベクトルで表せる。**

ベクトルとベクトルの距離は
どの様に考える？

距離と**ノルム**

原点(0)からの距離のことを絶対値、または**ノルム**という。

スカラーを例に**ノルム**を考えてみよう。



スカラーのノルムは数直線上での
原点からの距離をみます。

2点の数値を数直線上で表現した際の、
原点からの距離は？

$$|+6| = 6$$

$$|-3| = 3$$

ノルムの記号

スカラーのノルム

問題
あるスカラー a のノルムはどんな式？

※ a の具体的な値はわからない。
「**原点からの距離**」も「**マイナスがついていたら外す**」も式にできない。

a の値が**正でも負でも結果が正になる計算**はどんなものがある？

二乗は正の値でも負の値でも、結果が正になる計算。
つまり二乗にしてから平方根をとれば正の値はそのまま、負の値は正に直せる。

$$|a| = \sqrt{a^2}$$

ベクトルのノルム

ベクトルのノルムもスカラーのノルムを参考にしよう。

スカラーのノルムは以下の式で計算できた。

$$|a| = \sqrt{a^2}$$

ベクトルのノルムも同様に考えよう。

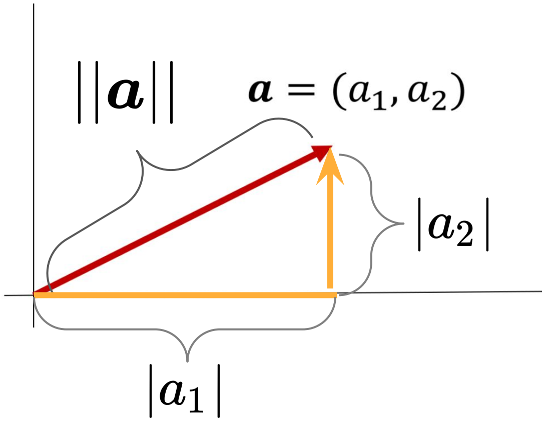
$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2} = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$$

ベクトルの積は内積を考えよう。
つまり、$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ とすると、

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$$

この様なノルムを特に**L2ノルム**または
ユークリッドノルムなどという。
また単にノルムということもある。

ベクトルのノルムも原点からの距離



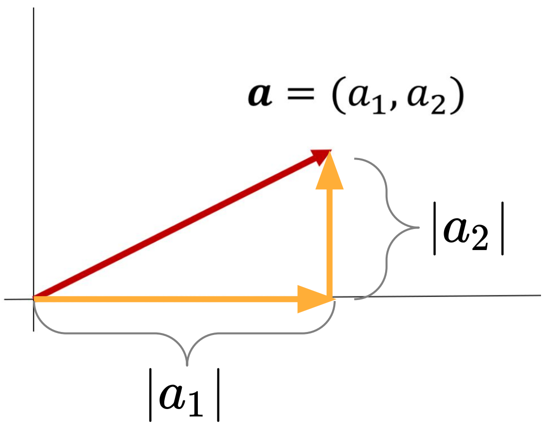
三平方の定理から、ベクトルが表す矢印が指す点と、原点の距離は計算できる。

$$||\boldsymbol{a}|| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$$

ノルムの記号

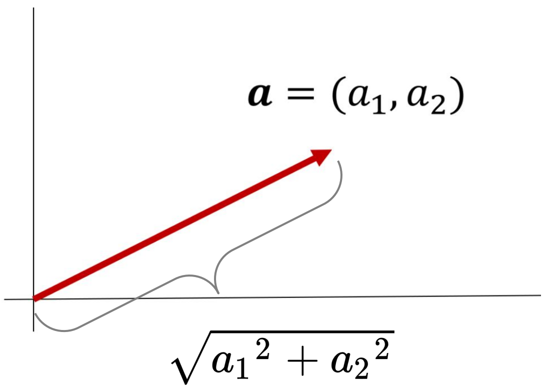
代表的なノルムは 2 種類

L1ノルム(マンハッタン距離)



$$||\boldsymbol{a}||_1 = |a_1| + |a_2|$$

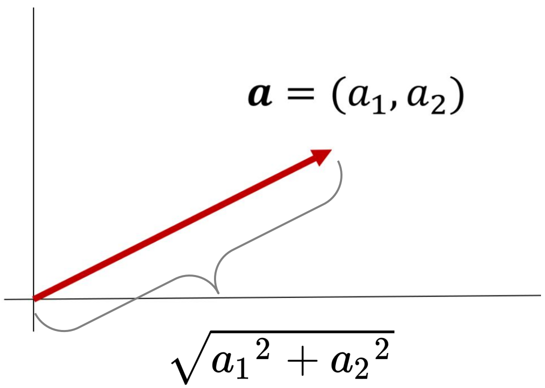
L2ノルム(ユークリッド距離)



$$||\boldsymbol{a}||_2 = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$$

Lpノルム ： 原点からの距離を一般化したノルム

L2ノルム(ユークリッド距離)



$$||\boldsymbol{a}||_2 = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$$

一般化

Lpノルム

L3ノルム

$$||\boldsymbol{a}||_3 = (|a_1|^3 + |a_2|^3)^{\frac{1}{3}}$$

L4ノルム

$$||\boldsymbol{a}||_4 = (|a_1|^4 + |a_2|^4)^{\frac{1}{4}}$$

⋮

Lpノルム

$$||\boldsymbol{a}||_p = (|a_1|^p + |a_2|^p)^{\frac{1}{p}}$$

L1ノルムの値が同じでも
L2ノルムの値が同じとは限らない

ベクトル	L1ノルム	L2ノルム
$\boldsymbol{a} = (1, 0.5, 1)$	$\|\|\boldsymbol{a}\|\|_1 = \boxed{2.5}$	$\|\|\boldsymbol{a}\|\|_2 = \boxed{1.5}$
$\boldsymbol{b} = (0.8, 0.7, 1)$	$\|\|\boldsymbol{b}\|\|_1 = \boxed{2.5}$	$\|\|\boldsymbol{b}\|\|_2 = \boxed{1.45...}$

スカラーとスカラーの距離

スカラーどうしの距離

3から5までの距離は？

$$L(3,5) = 5 - 3 = 2$$

5から3までの距離は？

$$L(5,3) = 5 - 3 = 2$$

つまり

$$L(a,b) = L(b,a)$$

この様な条件を満たすにはどんな式にすればいいだろうか？

絶対値・ノルムを使えばいい！

$$L(a,b) = |b - a| = \sqrt{(b-a)^2}$$

データ間の距離はノルムで計算できる

ベクトルとベクトルの距離も、
スカラーでの考え方が参考になる。

スカラーaとbの距離は？

$$L(a,b) = |b-a|$$

ベクトル$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{y}$の距離は？

$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = ||\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}||_2$$

以下の2つのn次元ベクトルの距離を
L1ノルム、**L2ノルム**で計算しよう。

$$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$
$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n)$$

この2つのベクトルについて、以下を計算すればいい。

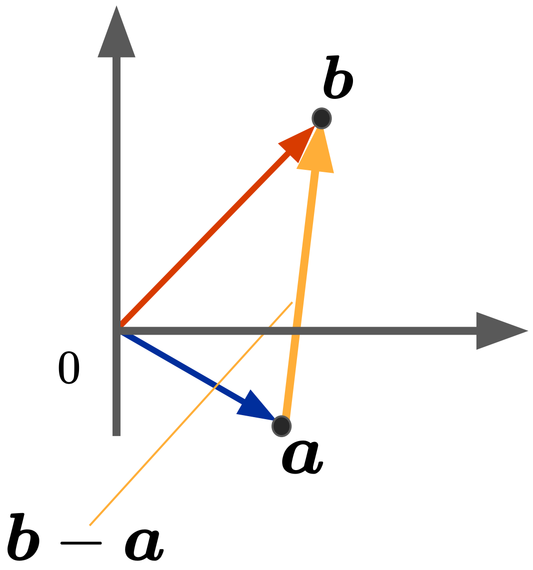
$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = ||\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}||$$
$$= ||(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_n - x_n)||$$

データ間の距離はノルムで計算できる

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = ||(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_n - x_n)||_1$$
$$= |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| + \ldots + |y_n - x_n| = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|$$

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = ||(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_n - x_n)||_2$$
$$= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$$

「データ間の距離」の図形的な意味



$$L(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = ||\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}||$$

2つのベクトルの距離は、
その2つのベクトルが指し示す点と点の間を結ぶベクトルの長さ。

つまりその**点と点の間の距離**を表している。

まとめ

01 ベクトルの演算は和と差は要素ごとにそのまま計算。**内積は**素要素どうしの掛け算の和。

02 ノルムを使うとベクトルデータ間の**距離を計算できる。**

1 機械学習に必要な線形代数の知識

2 スカラー・ベクトル・行列

3 ベクトルの演算

4 行列の演算

はじめに

Q | 行列の演算で何ができるの？

はじめに

Q

行列の演算で何ができるの？

A

データに対する計算処理を
数式で一気に書くことが出来る！

行列の和や差はベクトルと同じ考え方

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

行列の**和**は成分ごとの**和**を取ればいい

$$A + B = \begin{pmatrix} 1-1 & 2+1 \\ -1+1 & 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

行列の和や差はベクトルと同じ考え方

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

行列の**差**は成分ごとの**差**を取ればいい

$$A - B = \begin{pmatrix} 1-(-1) & 2-1 \\ -1-1 & 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

行列の和と差は形状が異なると計算できない

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2×2行列　　2×2行列

→ $$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

2×2行列　　2×3行列

→ 計算できない

行列の積はどの様に計算する？

２つの行列の、対応する**要素同士の積を**そのまま計算してみよう。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \circ B = \begin{pmatrix} 1 \times (-1) & 2 \times 1 \\ -1 \times 1 & 3 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

この様な積を特に**要素積、**または**アダマール積**という

ベクトルの内積の考え方で
行列の積を考えてみよう

回帰による家賃の予測モデル

	築年数（年）	専有面積[㎡]	駅からの距離[m]	家賃[円]
物件A	20	40	200	45,000
物件B	15	35	400	40,000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
物件Y	10	45	500	52,000
物件Z	8	50	100	83,000

$$20w_1 + 40w_2 + 200w_3 = 40000$$
$$15w_1 + 35w_2 + 400w_3 = 45000$$
$$10w_1 + 45w_2 + 500w_3 = 52000$$
$$8w_1 + 50w_2 + 100w_3 = 83000$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{w} = 40000$$
$$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{w} = 45000$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{w} = 52000$$
$$\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{w} = 83000$$

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \cdots, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ それぞれに対して、$\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3)$ との内積をとるという共通の計算をしている。

もっとまとめられる！

$$\begin{pmatrix} 20 & 40 & 200 \\ 15 & 35 & 400 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 10 & 45 & 500 \\ 8 & 50 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40000 \\ 45000 \\ \vdots \\ 52000 \\ 83000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \vdots \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 40000 \\ 45000 \\ \vdots \\ 52000 \\ 83000 \end{pmatrix}$$

複数の回帰モデルを同時に検証できる様な行列の積は？

複数の回帰モデルを検証しよう

$\boldsymbol{w}^1, \boldsymbol{w}^2, \cdots, \boldsymbol{w}^{n-1}, \boldsymbol{w}^n$ という複数のモデルを適用した結果を同時に表す！

$$\begin{pmatrix}\mathbf{20}&\mathbf{40}&\mathbf{200}\\ \mathbf{15}&\mathbf{35}&\mathbf{400}\\ \vdots&\vdots&\vdots\\ \mathbf{10}&\mathbf{45}&\mathbf{500}\\ \mathbf{8}&\mathbf{50}&\mathbf{100}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w^1_1&w^2_1&\cdots&w^{n-1}_1&w^n_1\\ w^1_2&w^2_2&\cdots&w^{n-1}_2&w^n_2\\ w^1_3&w^2_3&\cdots&w^{n-1}_3&w^n_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}40000&45000&\cdots&39000&41000\\ 45000&49000&\cdots&42000&46000\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ 52000&48000&\cdots&51000&54000\\ 83000&90000&\cdots&80000&85000\end{pmatrix}$$

行列積は対応する行ベクトル・列ベクトルの内積が成分になる

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} ① \\ ② \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \ ①\quad ② \end{array}$$

$$AB = \begin{pmatrix} \text{Aの1行目とBの1列目の内積} & \text{Aの1行目とBの2列目の内積} \\ \text{Aの2行目とBの1列目の内積} & \text{Aの2行目とBの2列目の内積} \end{pmatrix}$$

行列積は対応する行ベクトル・列ベクトルの内積が成分になる

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} ① \\ ② \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} ① & ② \end{array} \end{array}$$

$$AB = \begin{pmatrix} (1,2)\cdot(-1,1) & (1,2)\cdot(1,0) \\ (-1,3)\cdot(-1,1) & (-1,3)\cdot(1,0) \end{pmatrix}$$

行列積は対応する行ベクトル・列ベクトルの内積が成分になる

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 2} \\ \boxed{-1 \quad 3} \end{pmatrix} \begin{array}{l} ① \\ ② \end{array} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} ① & ② \end{array}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

行列積を計算してみよう！

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

2×2行列　　2×2行列

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad CD = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -2 & -7 & 10 \\ 4 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

3×2行列　　2×3行列

左側行列の行ベクトルと右側行列の列ベクトルの次元が合えば積が計算できる

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

次元が一致している

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 10 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

次元が一致している

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

次元が一致している

- ベクトルの内積は次元数が同じじゃないと計算できない
- (m,n)の行列と(k,l)の行列を掛け算したい場合、n=kであれば行列積が計算できる
- (m,n)の行列と(n,l)の行列の行列積は(m,l)の形になる

行列積の交換法則は成り立つ？

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

行列の積はかける順番により計算結果が変わることがわかる。

一般に、2つの行列A, Bの行列積について

$$AB \neq BA$$

行列積における「1」

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AE = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$EA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

対角成分以外は0、対角成分は全て1 の行列を**単位行列**という。

一般に、ある**行列A**と**単位行列E**について

$$AE = EA = A$$

単位行列との積は交換法則が成り立つ

行列の積は要素積(アダマール積)と行列積の2種類

要素積(アダマール積)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \circ B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

要素同士の積をそのまま返す

行列積

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

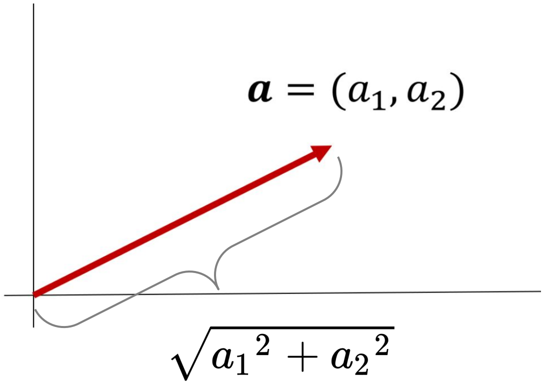
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

それぞれの行ベクトルと列ベクトルの内積を計算

発展

行列ノルムの一例

L2ノルム(ユークリッド距離)



$$||\boldsymbol{a}||_2 = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}$$

行列に応用

フロベニウスノルム

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$||A||_F = \sqrt{{a_{11}}^2 + {a_{12}}^2 + {a_{21}}^2 + {a_{22}}^2}$$
$$= \sqrt{9 + 4 + 1 + 9} = 4.79...$$

まとめ

01

行列の演算は和と差はそのまま
要素積は単純な掛け算、**行列積**は内積の応用。

02

行列積を使うと
回帰モデルを**簡潔に記述できる。**