よくでる微分方程式

Yuto

2020 年 9 月 16 日

その 1.

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \lambda x \\
\int \frac{\mathrm{d}x}{x} &= \int \frac{\lambda}{m}\mathrm{d}t \\
\log x &= \frac{\lambda}{m}t + c \\
x &= \exp\left[\frac{\lambda}{m}t + c\right] \\
&= e^c \exp\left[\frac{\lambda}{m}t\right] \\
&= C \exp\left[\frac{\lambda}{m}t\right] \quad (\because e^c = \mathrm{const.} = C)
\end{aligned}
$$

その 2.

$$
m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx
$$

ここで，$f''(x) = -\dfrac{k}{m}f(x)$ になる x を考える．

例えば

$$
f(x) = \sin x \text{ のとき}, f''(x) = -\sin x
$$
$$
f(x) = \cos x \text{ のとき}, f''(x) = -\cos x
$$

線形性より，

$$
f(x) = \sin x + \cos x \Rightarrow f''(x) = -(\sin x + \cos x)
$$

したがって，

$$
f(x) = \sin\sqrt{\frac{k}{m}}x + \sqrt{\frac{k}{m}}\cos x \Rightarrow f''(x) = -\frac{k}{m}(\sin x + \cos x)
$$

すなわち，$f''(x) = -\dfrac{k}{m}f(x)$ の解は，$f(x) = \sin\sqrt{\dfrac{k}{m}}x + \sqrt{\dfrac{k}{m}}\cos x$