よくでる微分方程式

Yuto

2020 年 9 月 17 日

その 1.　$m\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lambda x(t)$

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \lambda x \\
\int \frac{\mathrm{d}x}{x} &= \int \frac{\lambda}{m}\mathrm{d}t \\
\log x &= \frac{\lambda}{m}t + c \\
x &= \exp\left[\frac{\lambda}{m}t + c\right] \\
&= e^c \exp\left[\frac{\lambda}{m}t\right] \\
&= C\exp\left[\frac{\lambda}{m}t\right] \quad (\because e^c = \mathrm{const.} = C)
\end{aligned}
$$

その 2.　$m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx(t)$

2.1　解

$x(t) = f(t)$ としたとき，$f''(t) = -\dfrac{k}{m}f(t)$ になる t を考える．
ここで,

$$f(t) = \sin t \text{ のとき}, f''(t) = -\sin t$$
$$f(t) = \cos t \text{ のとき}, f''(t) = -\cos t$$

が成り立つことは有名である．

すなわち，これに任意係数が付いた

$$f(t) = D_1 \sin t \text{ のとき}, f''(t) = -\sin t$$
$$f(t) = D_2 \cos t \text{ のとき}, f''(t) = -\cos t$$

も当然だが成り立つ．

線形性より,

$$f(t) = D_1 \sin t + D_2 \cos t \Rightarrow f''(t) = -(D_1 \sin t + D_2 \cos t)$$

したがって,

$$f(t) = D_1 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + D_2\sqrt{\frac{k}{m}}\cos t \Rightarrow f''(t) = -\frac{k}{m}(D_1 \sin t + D_2 \cos t)$$

すなわち，$f''(t) = -\dfrac{k}{m}f(t)$ の解は,

$$f(t) = D_1 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + D_2 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

2.2 別解 (厳密な求め方)

その 1 と同じように $x(t)$ の解を $e^{\lambda t}$ とした上で微分方程式を解く.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} &= -\frac{k}{m}x \\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(e^{\lambda t}\right) &= -\frac{k}{m}e^{\lambda t} \\
\lambda^2 e^{\lambda t} &= -\frac{k}{m}e^{\lambda t} \\
\lambda^2 &= -\frac{k}{m} \\
\lambda &= \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} \\
\therefore x(t) &= \exp\left[i\sqrt{\frac{k}{m}}\right], \exp\left[-i\sqrt{\frac{k}{m}}\right]
\end{aligned}$$

このとき係数がついていても微分には影響しないので，$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ とすると，

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= c_1 \exp\left[i\sqrt{\frac{k}{m}}\right] \\
x_2(t) &= c_2 \exp\left[-i\sqrt{\frac{k}{m}}\right]
\end{aligned}$$

が成り立つ.

線形性より，

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_1(t) + x_2(t) \\
&= c_1 \exp\left[i\sqrt{\frac{k}{m}}\right] + c_2 \exp\left[-i\sqrt{\frac{k}{m}}\right]
\end{aligned}$$

が言える.

ここで，オイラーの等式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を用いると，

$$\begin{aligned}
x(t) &= c_1\left(\cos\sqrt{\frac{k}{m}} + i\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\right) + c_2\left(\cos\sqrt{\frac{k}{m}} + i\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\right) \\
&= (c_1 + c_2)\left(\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\right) + i(c_2 - c_1)\left(\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\right)
\end{aligned}$$

となる．ここで $c_1 + c_2 = C_1, i(c_2 - c_1) = C_2$ と再定義して，

$$x(t) = C_1\left(\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\right) + C_2\left(\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\right)$$