散乱の波動関数は

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} + \int G_0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\frac{2m}{\hbar^2}V(r')\psi(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \tag{0.0.1}$$

と表されるのであった．この波動関数を厳密に求めることは困難であるため近似をする．まず，式 (**??**) を簡略化して

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \psi_0 + \int gV\psi(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \tag{0.0.2}$$

と表現する．式 (**??**) を繰り返し代入していくと

$$\begin{aligned}
\psi(\boldsymbol{r}) &= \psi_0 + \int gV\psi(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}' && (0.0.3)\\
&= \psi_0 + \int gV\left(\psi_0 + \int gV\psi(\boldsymbol{r}'')\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}''\right)\mathrm{d}\boldsymbol{r}' && (0.0.4)\\
&= \psi_0 + \int gV\psi_0(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}' + \iint gVgV\psi(\boldsymbol{r}'')\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}'' && (0.0.5)\\
&= \psi_0 + \int gV\psi_0(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}' + \iint gVgV\psi_0(\boldsymbol{r}'')\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}'' + \iiint gVgVgV\psi_0(\boldsymbol{r}''')\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}''\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}''' + \cdots && (0.0.6)
\end{aligned}$$

を得る．これを第 1 項まででで近似する．これは散乱の波動関数を平面波で近似することに相当する．つまり，

$$\psi \simeq \psi_0 \tag{0.0.7}$$

とする．これを**第 1Born 近似**という[1][2]．

Born 近似を用いて散乱振幅を求める．$\psi(\boldsymbol{r}') = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}$ だから，

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(\theta) &= -\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}'}\frac{2m}{\hbar}V(r')\psi(\boldsymbol{r}')\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}' && (0.0.8)\\
&\simeq -\frac{1}{4\pi}\frac{2m}{\hbar^2}\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{r}'}V(r')\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}' && (0.0.9)\\
&\equiv -\frac{1}{4\pi}\frac{2m}{\hbar^2}\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}'}V(r')\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}' && (0.0.10)
\end{aligned}$$

となる．ここで散乱による運動量変化を $\boldsymbol{q} \equiv \boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k}$ と置いた．つまり，散乱振幅はポテンシャル $V(r')$ の Fourier 変換から得られることがわかる[3]．また，球対称ポテンシャルのときこれは簡略化でき，

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(\theta) &= -\frac{1}{4\pi}\frac{2m}{\hbar^2}\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}'}V(r')\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}' && (0.0.11)\\
&= -\frac{1}{4\pi}\frac{2m}{\hbar^2}2\pi\iint \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qr'\cos\theta'}V(r')r'^2\sin\theta'\,\mathrm{d}\theta'\,\mathrm{d}r' && (0.0.12)\\
&= -\frac{m}{\hbar^2}\int r'^2\,\mathrm{d}r'\,V(r')\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qr'\cos\theta}}{\mathrm{i}qr'}\right]_{\cos\theta=1}^{\cos\theta=-1} && (0.0.13)\\
&= -\frac{m}{\hbar^2}\int r'^2\,\mathrm{d}r'\,\frac{2\mathrm{i}\sin qr'}{\mathrm{i}qr'}V(r') && (0.0.14)\\
&= -\frac{2m}{\hbar^2 q}\int rV(r)\sin qr\,\mathrm{d}r && (0.0.15)
\end{aligned}$$

となる．

球対称ポテンシャルの散乱振幅

$$f^{(1)}(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2 q}\int_0^\infty rV(r)\sin qr\,\mathrm{d}r \tag{0.0.16}$$

[1] Max Born(1882-1970)

[2] 砂川，散乱の量子論，「第 1Born 近似がとくによく利用される理由は，何といってもその簡単さにある．したがって，ある散乱問題を手がけたとき，だれもが最初に試してみるのが，この近似である．そして思わしい結果がえられないとき，他の近似法を考えるのである．」

[3] $f^{(n)}$ は第 nBorn 近似による散乱振幅を意味する．

例題 0.1: 湯川ポテンシャル

湯川ポテンシャル

$$V(r) = V_0 \frac{\mathrm{e}^{-\mu r}}{\mu r} \tag{0.0.17}$$

による散乱を考える[a]．これは，$V(r)$ の到達距離が $\dfrac{1}{\mu}$ ほどであり，核子同士に働く力を表す．物質中では，伝導電子に遮蔽された不純物の Coulomb ポテンシャルを表す．このポテンシャルの下で散乱振幅を求める．

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(\theta) &= -\frac{1}{4\pi}\frac{2m}{\hbar^2}\iiint \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qr'\cos\theta'} V(r') r'^2 \sin\theta' \,\mathrm{d}r' \,\mathrm{d}\theta' \,\mathrm{d}\phi' &(0.0.18)\\
&= -\frac{1}{4\pi}\frac{2m}{\hbar^2} 2\pi \int_0^\infty \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}qr'} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qr'}}{\mathrm{i}qr'}\right) V(r') r'^2 \,\mathrm{d}r' &(0.0.19)\\
&= -\frac{mV_0}{\mathrm{i}\hbar^2 q\mu}\int_0^\infty \left[\mathrm{e}^{(-\mu+\mathrm{i}q)r'} - \mathrm{e}^{(-\mu-\mathrm{i}q)r'}\right] \mathrm{d}r' &(0.0.20)\\
&= -\frac{2mV_0}{\hbar^2\mu}\frac{1}{\mu^2+q^2} &(0.0.21)
\end{aligned}$$

よって散乱断面積は

$$\begin{aligned}
\sigma^{(1)}(\theta) &= \left|f^{(1)}(\theta)\right|^2 &(0.0.22)\\
&= \left(\frac{2mV_0}{\hbar^2\mu}\right)^2 \frac{1}{(\mu^2+q^2)^2} &(0.0.23)\\
&= \left(\frac{2mV_0}{\hbar^2\mu}\right)^2 \frac{1}{(\mu^2+4K^2\sin^2\theta/2)^2} &(0.0.24)
\end{aligned}$$

である．ここで，$\boldsymbol{k'}$ と $\boldsymbol{k}$ のなす角が θ であるため $q = 2k\sin\theta/2$ であることを用いた．

[a] 湯川秀樹 (1907-1981)

例題 0.2: Rutherford 散乱 (Griffith Example 10.6)

湯川ポテンシャルで $V_0 = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}$，$\mu = 0$ とすると Coulomb ポテンシャル

$$V(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \tag{0.0.25}$$

と一致する．式 (**??**) に代入して散乱振幅を求める．

$$\begin{aligned}
f(\theta) &= -\frac{2m}{\hbar^2 q}\int_0^\infty r\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}\sin qr \,\mathrm{d}r &(0.0.26)\\
&= -\frac{2m}{\hbar^2 q}\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^\infty \sin qr \,\mathrm{d}r &(0.0.27)\\
&= -\frac{2m}{\hbar^2 q}\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{q}[\cos qr]_0^\infty\right) &(0.0.28)\\
&\simeq -\frac{mq_1 q_1}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2 q^2} &(0.0.29)\\
&= -\frac{mq_1 q_1}{8\pi\varepsilon_0\hbar^2\sin^2\theta/2} &(0.0.30)
\end{aligned}$$

次に，Born 近似の適用範囲について考える．散乱振幅は

$$f(\theta) = -\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\frac{2m}{\hbar^2}V(r)\psi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{0.0.31}$$

であり，散乱の波動関数は

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \psi_0(\boldsymbol{r}) + \int g(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'})V(r')\psi_0(\boldsymbol{r'})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r'} + \cdots \tag{0.0.32}$$

である．この波動関数を

$$\psi(\boldsymbol{r}) \simeq \psi_0(\boldsymbol{r}) \tag{0.0.33}$$

と近似するのが第 1Born 近似であった．この近似がうまくいく，つまり，

$$\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\frac{2m}{\hbar^2}V(r)\psi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{0.0.34}$$

を正しく評価するには，$V(r) \neq 0$ となる $r \simeq 0$ で，

$$\psi(\boldsymbol{r}) \simeq \psi_0(\boldsymbol{r}) \tag{0.0.35}$$

と近似できる必要がある．

$r \simeq 0$ で式 (??) の第 1 項がそれ以外の項より十分大きければいいため，

$$|\psi_0(\boldsymbol{0})| \gg \left|\int g(\boldsymbol{0}-\boldsymbol{r'})V(r')\psi_0(\boldsymbol{r'})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r'}\right| \tag{0.0.36}$$

これを整理すると，

$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\right| \gg \left|\int -\frac{2m}{\hbar^2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr'}}{4\pi r'}V(r')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r'}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r'}\right| \tag{0.0.37}$$

$$1 \gg \frac{m}{2\pi\hbar^2}\left|\int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr'}}{r'}V(r')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r'}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r'}\right| \tag{0.0.38}$$

を得る．これが第 1Born 近似が有効であるための条件じゃ．

例題 0.3: Born 近似の適用条件

ポテンシャル

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & (r \leq a) \\ 0 & (r \geq a) \end{cases} \tag{0.0.39}$$

による散乱を考える．Born 近似の適用条件 (??) より，

$$\begin{aligned} 1 &\gg \frac{m}{2\pi\hbar^2}\left|\int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr'}}{r'}V_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r'}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r'}\right| && (0.0.40)\\ &= \frac{mV_0}{2\pi\hbar^2}\left|\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr'\cos\theta'}r'\sin\theta'\,\mathrm{d}r'\,\mathrm{d}\theta'\,\mathrm{d}\phi'\right| && (0.0.41)\\ &= \frac{mV_0}{2\hbar^2k^2}\left|\mathrm{e}^{2\mathrm{i}ka} - 1 - 2\mathrm{i}ka\right| && (0.0.42)\end{aligned}$$

を得る[a]．これを低エネルギー散乱と高エネルギー散乱に場合分けして見積もる．

(i) 低エネルギー散乱 ($ka \ll 1$)

$$\left|\mathrm{e}^{2\mathrm{i}ka} - 1 - 2\mathrm{i}ka\right| \simeq \left|\left(1 + 2\mathrm{i}ka + \frac{1}{2}(2\mathrm{i}ka)^2\right) - 1 - 2\mathrm{i}ka\right| \tag{0.0.43}$$

$$= 2k^2a^2 \tag{0.0.44}$$

より，適用条件は

$$1 \gg \frac{mV_0}{2\hbar^2k^2}2k^2a^2 = \frac{mV_0a^2}{\hbar^2} \tag{0.0.45}$$

である．つまり，ポテンシャルの大きさ V_0 または半径 a が小さい時に近似が有効であることがわかる．
(ii) 高エネルギー散乱 ($ka \gg 1$)

$$\left|\mathrm{e}^{2\mathrm{i}ka} - 1 - 2\mathrm{i}ka\right| \simeq 2ka \tag{0.0.46}$$

より，適用条件は

$$1 \gg \frac{mV_0a}{\hbar^2k} \tag{0.0.47}$$

である．$k \to \infty$ に対して近似が成立することがわかる．つまり，Born 近似は高エネルギー粒子に対して常によい近似であることがわかる．

[a]「試験に出そうな計算.」