Schrödinger 表示の非定常摂動基本方程式は，**式** (0.0.1) と**式** (**??**) であり，

$$
\begin{cases}
\mathrm{i}\hbar \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\psi(t)\rangle = \left(\hat{H}^{(0)} + \hat{V}(t)\right) |\psi(t)\rangle \\
|\psi(t)\rangle = \displaystyle\sum_n c_n(t) \exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_n}{\hbar}t\right) |n\rangle
\end{cases}
\tag{0.0.1}
$$

と書けるのであった．**相互作用表示** (interaction picture) を**式** (0.0.2) のような $|\psi(t)\rangle \to |\psi(t)\rangle_{\mathrm{I}}$ の変換を行って得られる状態ベクトルと定義する．

相互作用表示

$$
|\psi(t)\rangle_{\mathrm{I}} \coloneqq \exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) |\psi(t)\rangle \tag{0.0.2}
$$

式 (0.0.2) を用いて，**式** (0.0.1) と等価な基本方程式である，相互作用表示の非定常摂動基本方程式を導く．まず，**式** (0.0.1) の第 2 式を用いて，

$$
\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle_{\mathrm{I}} &= \exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \sum_n c_n(t) \exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_n}{\hbar}t\right) |n\rangle & (0.0.3)\\
&= \sum_n c_n(t) \exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_n}{\hbar}t\right) \exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) |n\rangle & (0.0.4)\\
&= \sum_n c_n(t) \exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_n}{\hbar}t\right) \exp\left(\mathrm{i}\frac{E_n}{\hbar}t\right) |n\rangle & (0.0.5)\\
&= \sum_n c_n(t) |n\rangle & (0.0.6)
\end{aligned}
$$

と計算できる．

次に，相互作用表示の時間微分を計算してみる．相互作用表示での摂動項 $\hat{V}_{\mathrm{I}}$ を，

$$
\hat{V}_{\mathrm{I}} \coloneqq \exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \hat{V}(t) \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \tag{0.0.7}
$$

とする．計算の途中で，**式** (0.0.1) の第 1 式を用いると，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\psi(t)\rangle_{\mathrm{I}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right)\right] |\psi(t)\rangle + \exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\psi(t)\rangle & (0.0.8)\\
&= \mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar} \exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) |\psi(t)\rangle + \exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \frac{1}{\mathrm{i}\hbar} \left(\hat{H}^{(0)} + \hat{V}(t)\right) |\psi(t)\rangle & (0.0.9)\\
&= \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[\hat{H}^{(0)}, \exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right)\right] |\psi(t)\rangle + \exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \hat{V}(t) |\psi(t)\rangle & (0.0.10)\\
&= \exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \hat{V}(t) |\psi(t)\rangle & (0.0.11)\\
&= \exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \hat{V}(t) \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) |\psi(t)\rangle & (0.0.12)\\
&= \exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \hat{V}(t) \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) |\psi(t)\rangle_{\mathrm{I}} & (0.0.13)\\
&= \hat{V}_{\mathrm{I}}(t) |\psi(t)\rangle_{\mathrm{I}} & (0.0.14)
\end{aligned}
$$

を得る．**式** (0.0.14) と**式** (0.0.7) は Schödinger 表示の非定常摂動基本方程式と等価な方程式であるから，これを**朝永・Schwinger 方程式**と呼ぶ．[1][2] [3] [4]．

朝永・Schwinger 方程式

$$
\begin{cases}
\mathrm{i}\hbar\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\psi(t)\right\rangle_{\mathrm{I}} = \hat{V}_{\mathrm{I}}(t)\left|\psi(t)\right\rangle_{\mathrm{I}} \\
\hat{V}_{\mathrm{I}}(t) = \exp\left(\mathrm{i}\dfrac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right)\hat{V}(t)\exp\left(-\mathrm{i}\dfrac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right)
\end{cases}
\tag{0.0.15}
$$

さて，定常状態の Schrödinger 方程式が，

$$
\forall m \ \hat{H}^{(0)}\left|m\right\rangle = E_m\left|m\right\rangle \tag{0.0.16}
$$

を満たすとする．**式** (0.0.15) の第 1 式に左から $\langle m|$ を演算する．途中，**式** (0.0.6) を用いて $|\psi(t)\rangle_{\mathrm{I}}$ を展開し，**式** (0.0.15) の第 2 式を用いて $\hat{V}_{\mathrm{I}}(t)$ を $\hat{V}(t)$ に戻す．また，$\hat{V}_{\mathrm{I}}(t)$ は $c_n(t)$ に作用しないものとすると，

$$
\left\langle m\middle|\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\middle|\psi(t)\right\rangle_{\mathrm{I}} = \left\langle m\middle|\hat{V}_{\mathrm{I}}(t)\middle|\psi(t)\right\rangle_{\mathrm{I}} \tag{0.0.17}
$$

$$
\Leftrightarrow \left\langle m\right|\mathrm{i}\hbar\sum_n c_n(t)\left|n\right\rangle = \sum_n c_n(t)\left\langle m\middle|\exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right)\hat{V}(t)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right)\middle|n\right\rangle \tag{0.0.18}
$$

$$
\Leftrightarrow \mathrm{i}\hbar\sum_n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c_n(t)\left\langle m|n\right\rangle = \sum_n c_n(t)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_n-E_m}{\hbar}t\right)\left\langle m\middle|\hat{V}(t)\middle|n\right\rangle \tag{0.0.19}
$$

$$
\Leftrightarrow \mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c_m(t) = \sum_n c_n(t)\exp\left(\mathrm{i}\frac{E_m-E_n}{\hbar}t\right)\left\langle m\middle|\hat{V}(t)\middle|n\right\rangle \tag{0.0.20}
$$

となる．ω_{mn} と V_{mn} を，

$$
\omega_{mn} \coloneqq \frac{E_m-E_n}{\hbar} \tag{0.0.21}
$$

$$
V_{mn}(t) \coloneqq \left\langle m\middle|\hat{V}(t)\middle|n\right\rangle \tag{0.0.22}
$$

と定義する．非定常摂動量子系の時間発展は以下の式を満たす．

非定常摂動量子系の時間発展

$$
\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c_m(t) = \sum_n c_n(t)V_{mn}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{mn}t} \tag{0.0.23}
$$

これは $c_n(t)$ の連立方程式になっていて，一般に解くことは困難である．例えば $\hat{V}(t)$ が有限次元であり，行列表示ができたとすると**式** (0.0.23) は，

$$
\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11}(t) & V_{12}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{12}t} & \cdots & V_{1n(t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{1n}t} \\ (V_{12}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{12}t})^* & V_{22}(t) & \cdots & V_{2n}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{2n}t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (V_{1n}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{1n}t})^* & (V_{2n}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{2n}t})^* & \cdots & V_{nn}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \tag{0.0.24}
$$

となる．途中で，

$$
(V_{mn}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{mn}t})^* = V_{mn}(t)^*\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{mn}t}\right)^* \tag{0.0.25}
$$

[1] Schrödinger 描像は量子状態が時間発展するとみなす．Heisenberg 描像は物理量が時間発展するとみなす．相互作用表示はその中間であるといえる．

[2] 朝永振一郎 (1906-1979)

[3] Julian Schwinger(1918-1994)

[4] 朝永と Schwinger は 1964 年に Richard Feynmann とともにノーベル賞を受賞．

$$
\begin{aligned}
&= \left\langle m \middle| \hat{V}(t) \middle| n \right\rangle^{*} \exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_m - E_n}{\hbar}t\right) && (0.0.26)\\
&= \left\langle n \middle| \hat{V}(t) \middle| m \right\rangle \exp\left(\mathrm{i}\frac{E_n - E_m}{\hbar}t\right) && (0.0.27)\\
&= (V_{nm}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{nm}t}) && (0.0.28)
\end{aligned}
$$

を用いた．**式** (0.0.24) の行列の部分も時間に依存することを考えると n が大きなときに厳密に解くことは困難である．