

z 方向の角運動量は

$$L_z = xp_y - yp_x \quad (0.0.1)$$

で定義される．量子力学では演算子を用いて，

$$\hat{L}_z = -i\hbar(x\partial_y - y\partial_x) \quad (0.0.2)$$

と表される．上式を極座標に変換すると，

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (0.0.3)$$

となる．ここで， ε_z を微小量とし，

$$\hat{U}(\varepsilon_z) = e^{i\varepsilon_z \hat{L}_z / \hbar} \quad (0.0.4)$$

を定義する．波動関数 $\psi(r, \theta, \phi)$ に式 (0.0.4) を作用させると，

$$\hat{U}(\varepsilon_z)\psi(r, \theta, \phi) \simeq \left(\hat{I} - i\varepsilon_z \frac{\hat{L}_z}{\hbar} \right) \psi(r, \theta, \phi) \quad (0.0.5)$$

$$= \left(1 - \varepsilon_z \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \psi(r, \theta, \phi) \quad (0.0.6)$$

$$= \psi(r, \theta, \phi - \varepsilon_z) \quad (0.0.7)$$

が得られる．よって，角運動量演算子から回転操作をつくることができることがわかる．同様に， \hat{L}_x は x 軸まわりの回転を， \hat{L}_y は y 軸まわりの回転を生む．

次に，角運動量の交換関係

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{L}_k \quad (0.0.8)$$

が回転操作を定義することを確認する．以下の図1のような状況を考える． $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ は微小量とする．一方のルートでは x 軸中心に ε_x 回転， y 軸中心に ε_y 回転させた後， x 軸中心に $-\varepsilon_x$ 回転， y 軸中心に $-\varepsilon_y$ 回転させている．これらの操作を加えた後の状況は，もう一方のルート， z 軸中心に θ_z 回転させたときと一致している．これを数式的に書く．あるベクトル \mathbf{V} があるとする．これを x 軸， y 軸中心で回転させる行列はそれぞれ

$$\varepsilon_x R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon_x & -\sin \varepsilon_x \\ 0 & \sin \varepsilon_x & \cos \varepsilon_x \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{2}\varepsilon_x^2 & -\varepsilon_x \\ 0 & \varepsilon_x & 1 - \frac{1}{2}\varepsilon_x^2 \end{pmatrix} \quad (0.0.9)$$

$$\varepsilon_y R_y = \begin{pmatrix} \cos \varepsilon_y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varepsilon_y & 0 & \cos \varepsilon_y \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\varepsilon_y^2 & 0 & \varepsilon_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\varepsilon_y & 0 & 1 - \frac{1}{2}\varepsilon_y^2 \end{pmatrix} \quad (0.0.10)$$

である．これを使うと，

$$\varepsilon_x R_x \rightarrow \varepsilon_y R_y \rightarrow -\varepsilon_x R_x \rightarrow -\varepsilon_y R_y \quad (0.0.11)$$

という操作は

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\varepsilon_y^2 & 0 & -\varepsilon_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \varepsilon_y & 0 & 1 - \frac{1}{2}\varepsilon_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{2}\varepsilon_x^2 & \varepsilon_x \\ 0 & -\varepsilon_x & 1 - \frac{1}{2}\varepsilon_x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\varepsilon_y^2 & 0 & \varepsilon_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\varepsilon_y & 0 & 1 - \frac{1}{2}\varepsilon_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{2}\varepsilon_x^2 & -\varepsilon_x \\ 0 & \varepsilon_x & 1 - \frac{1}{2}\varepsilon_x^2 \end{pmatrix} \quad (0.0.12)$$

$$\simeq \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_x \varepsilon_y & 0 \\ -\varepsilon_x \varepsilon_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (0.0.13)$$

$$= -\varepsilon_x \varepsilon_y R_z \quad (0.0.14)$$

と計算できる．よって，前述の図を用いた議論は数式的に保証されている．つまり，

$$\varepsilon_x R_x \rightarrow \varepsilon_y R_y \rightarrow -\varepsilon_x R_x \rightarrow -\varepsilon_y R_y = -\varepsilon_x \varepsilon_y R_z \quad (0.0.15)$$

ということである．この関係からも式 (0.0.8) が回転操作を定義していることがわかるだろう．さらに，式 (0.0.4) より， z 軸まわりに ε_z 回転させるユニタリ演算子 $\hat{U}[\varepsilon_z R_z]$ は

$$\hat{U}[\varepsilon_z R_z] = e^{-i\varepsilon_z \hat{L}_z / \hbar} \simeq \hat{I} - i \frac{\varepsilon_z}{\hbar} \hat{L}_z + \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^2 \varepsilon_z^2 \hat{L}_z^2 + \dots \quad (0.0.16)$$

と表される． x 、 y に関しても同様である．これらを用いて，

$$\varepsilon_x R_x \rightarrow \varepsilon_y R_y \rightarrow -\varepsilon_x R_x \rightarrow -\varepsilon_y R_y = -\varepsilon_x \varepsilon_y R_z \quad (0.0.17)$$

を角運動量演算子で表すと

$$\left(\hat{I} + i \frac{\varepsilon_y}{\hbar} \hat{L}_y + \left(\frac{i}{\hbar} \right)^2 \varepsilon_y^2 \hat{L}_y^2 + \dots \right) \left(\hat{I} + i \frac{\varepsilon_x}{\hbar} \hat{L}_x + \left(\frac{i}{\hbar} \right)^2 \varepsilon_x^2 \hat{L}_x^2 + \dots \right) \left(\hat{I} - i \frac{\varepsilon_y}{\hbar} \hat{L}_y + \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^2 \varepsilon_y^2 \hat{L}_y^2 + \dots \right) \quad (0.0.18)$$

$$\left(\hat{I} - i \frac{\varepsilon_x}{\hbar} \hat{L}_x + \left(\frac{-i}{\hbar} \right)^2 \varepsilon_x^2 \hat{L}_x^2 + \dots \right) = \left(\hat{I} + \frac{i}{\hbar} \varepsilon_x \varepsilon_y \hat{L}_z + \dots \right) \quad (0.0.19)$$

と書ける．上式の左辺を整理すると

$$\hat{I} - \left(\frac{i}{\hbar} \right)^2 \varepsilon_x \varepsilon_y [\hat{L}_x, \hat{L}_y] \quad (0.0.20)$$

である．よって，

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z \quad (0.0.21)$$

が成立する．角運動量演算子の交換関係 $[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z$ は z 軸まわりの回転操作を意味していたのである．逆に，交換関係式 (0.0.4) を満たす演算子 $\hat{\mathbf{L}}$ で

$$\hat{R}(\phi \mathbf{n}) = \exp \left(\frac{i}{\hbar} \phi \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{L}} \right) \quad (0.0.22)$$

というユニタリ演算子を作れば，それは \mathbf{n} 軸まわりの角度 ϕ の回転操作を意味するのである．注目すべきは，以上の議論で $\hat{\mathbf{L}}$ の行列の次元や表現を指定していないことである．

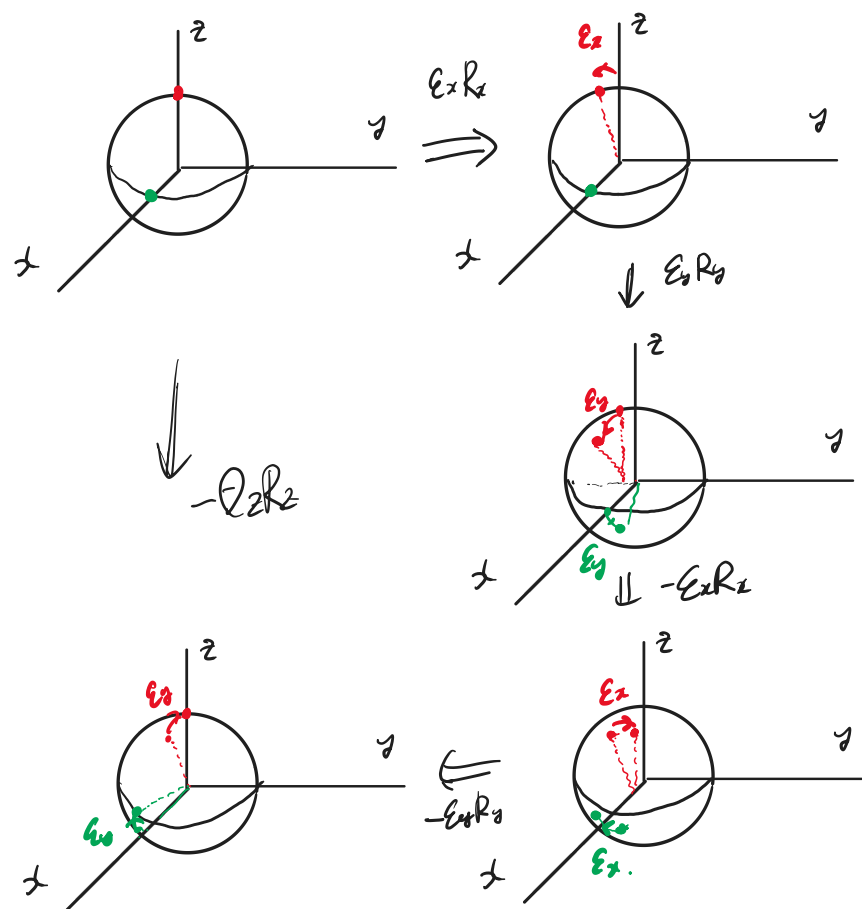


図 1: 回転操作