

電磁場中の Hamiltonian は

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 - e\phi \quad (0.0.1)$$

である．今回は $\phi = 0$ とする．電磁場が十分弱いとし，

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 \quad (0.0.2)$$

$$\simeq \frac{1}{2m}(\mathbf{p}^2 + e\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}) \quad (0.0.3)$$

$$(0.0.4)$$

と近似する．ここで， $\hat{H}^0 \equiv \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$ ，摂動項 $\hat{V}(t) \equiv \frac{e}{2m}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{p})$ とする．さらに， $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ となるように \mathbf{A} を決める¹．すると，

$$(\mathbf{p} \cdot \mathbf{A})\psi = -i\hbar \nabla \cdot (\mathbf{A}\psi) \quad (0.0.5)$$

$$= i\hbar[(\nabla \cdot \mathbf{A})\psi + \mathbf{A} \cdot (\nabla\psi)] \quad (0.0.6)$$

$$= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{p})\psi \quad (0.0.7)$$

となる．よって，電子と電磁場の相互作用を摂動として加えた Hamiltonian,

$$\hat{H} = \hat{H}^0 + \frac{e}{m}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}) \quad (0.0.8)$$

を得る．

例題 0.1: 直線偏光

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 2A_0 \mathbf{e}_x \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (0.0.9)$$

を加える．ただし， $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{e}_z$ とする．ベクトルポテンシャルと電磁場の関係より，

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = E_0 \mathbf{e}_x \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{E_0}{c} \mathbf{e}_y \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \\ E_0 = -2\omega A_0 \end{cases} \quad (0.0.10)$$

が成り立っている．摂動項は，

$$\hat{V}(t) = \frac{e}{m}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{p}) \quad (0.0.11)$$

$$= \frac{2eA_0}{m} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{p} \quad (0.0.12)$$

$$= \frac{eA_0}{m} \left[e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right] p_x \quad (0.0.13)$$

$$= \frac{eA_0}{m} (e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} p_x e^{-i\omega t} + e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} p_x e^{i\omega t}) \quad (0.0.14)$$

と表せる．光の吸収を考えると，第 1 項 $\frac{eA_0}{m} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} p_x$ が支配的なのでこの項を \hat{V} とする．単位時間当たりの遷移確率を計算する．

$$\omega_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle f | \hat{V} | i \rangle \right|^2 \delta(E_f - E_i - \hbar\omega) \quad (0.0.15)$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{eA_0}{m} \right)^2 \left| \langle f | e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} p_x | i \rangle \right|^2 \delta(E_f - E_i - \hbar\omega) \quad (0.0.16)$$

¹Coulomb Gauge

と表せるので $\left| \langle f | e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}_x} | i \rangle \right|^2$ を電気双極子近似を用いて計算する．原子の準位間隔は $E_f - E_i$ eV である．これと相互作用する電磁場のエネルギーは $\hbar\omega$ eV である．これを波長に換算すると、

$$\lambda = \frac{2\pi}{\hbar} = \frac{2\pi c}{\omega} 1000 \text{ nm} \quad (0.0.17)$$

である．これは原子のスケール 1 \AA よりもはるかに大きいので、電子・原子を扱う上では電磁場は空間的に一様だとみなせる．よって、

$$e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \simeq 1 + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \dots \simeq 1 \quad (0.0.18)$$

と近似できる．これを電気双極子近似という．この近似を用いると、

$$\langle f | e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} | i \rangle \simeq \langle f | p_x | i \rangle \quad (0.0.19)$$

を得る．さらに

$$[x, \hat{H}^0] = \frac{i\hbar}{m} p_x \quad (0.0.20)$$

であるため

$$\langle f | p_x | i \rangle = \frac{m}{i\hbar} \langle f | [x, \hat{H}^0] | i \rangle \quad (0.0.21)$$

$$= \frac{m}{i\hbar} (\langle f | x E_i | i \rangle - \langle f | E_f x | i \rangle) \quad (0.0.22)$$

$$= \frac{m}{i\hbar} (E_i - E_f) \langle f | x | i \rangle \quad (0.0.23)$$

を得る．よって、電磁場による単位時間当たりの遷移確率

$$\omega_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar^3} (eA_0)^2 (E_i - E_f)^2 |\langle f | x | i \rangle|^2 \delta(E_f - E_i - \hbar\omega) \quad (0.0.24)$$

を得る．これは $\langle f | x | i \rangle \neq 0$ のときのみ $\omega_{i \rightarrow f} \neq 0$ という選択則を表している．