

波動関数 $\psi(\mathbf{r})$ を次のように変換する.

$$\psi(\mathbf{r}) \rightarrow \psi'(\mathbf{r}) = e^{i\alpha} \psi(\mathbf{r}) \quad (0.0.1)$$

これを Schrödinger 方程式に代入する.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi' = e^{i\alpha} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi \quad (0.0.2)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi \rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi' = -e^{i\alpha} \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi \quad (0.0.3)$$

よって,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi' = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi' \quad (0.0.4)$$

が成り立つことがわかる. また期待値も

$$\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \langle \psi' | \hat{A} | \psi' \rangle \quad (0.0.5)$$

である. つまり, 物理は大域的 Gauge 変換に対して不変である.