

一様な磁場中の荷電粒子の運動を考える．磁場は  $z$  軸と平行で大きさは  $B$  とする．これを満たすベクトルポテンシャルとして

$$\begin{cases} A_x = 0 \\ A_y = Bx \\ A_z = 0 \end{cases} \quad (0.0.1)$$

を採用する． $z$  に対しては対称なので，以降は  $xy$  平面内での運動を考える．ハミルトニアンは

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} [\hat{p}_x^2 + (\hat{p}_y + eB\hat{x})^2] \quad (0.0.2)$$

$$= \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{(eB)^2}{2m} \left( \hat{x} + \frac{\hat{p}_y}{eB} \right)^2 \quad (0.0.3)$$

である．このハミルトニアンは  $\hat{y}$  を含まないので

$$[\hat{H}, \hat{p}_y] = 0 \quad (0.0.4)$$

であることがわかる． $y$  方向に関しては自由粒子の運動となる．また， $p_y$  の固有値が定まるので，これを  $\hbar k_y$  とする．ハミルトニアンは

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{(eB)^2}{2m} \left( \hat{x} + \frac{\hbar k_y}{eB} \right)^2 \quad (0.0.5)$$

と書き換えられ，これは調和振動子型のハミルトニアン

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{m\omega_c^2 \hat{x}^2}{2} \quad (0.0.6)$$

と同じ形をしている．よって，エネルギー固有値は

$$E = \hbar\omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (0.0.7)$$

$$\omega_c = \frac{|e|B}{m} \quad (0.0.8)$$

である．平面内の自由粒子のエネルギーが垂直磁場を加えることで離散化された．これを **Landau 準位** (Landau level) という<sup>1</sup>．また， $\omega_c$  をサイクロトロン周波数という．

次に， $x$  方向に長さ  $L_x$ ， $y$  方向に長さ  $L_y$  の周期的境界条件を課す．すると，

$$k_y = \frac{2\pi}{L_y} l \quad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (0.0.9)$$

となる．また  $x$  方向の調和振動子は  $\frac{\hbar k_y}{eB}$  だけずれている．これが 0 と  $L_x$  の間にあるためには

$$0 \leq \frac{\hbar k_y}{eB} = \frac{\hbar}{eB} \frac{2\pi}{L_y} l \leq L_x \quad (0.0.10)$$

でなければならない．これは

$$0 \leq l \leq \frac{eB}{2\pi\hbar} L_x L_y \quad (0.0.11)$$

と直される．よって， $l$  は  $\frac{|e|B}{2\pi\hbar} L_x L_y$  通りの値を取ることがわかる．したがって，単位面積当たりの縮退度は

$$\frac{|e|B}{2\pi\hbar} \quad (0.0.12)$$

である．

<sup>1</sup>この現象は量子 Hall 効果へとつながる．