特殊相対性理論 (Special Relativity) は次の 2 つの事柄を原理とする．

特殊相対性原理

あらゆる慣性系で同じ物理法則が成り立つ．

光速度不変の原理

あらゆる慣性形で真空中の光の速さは同一である．

この原理の下で成り立つ座標変換の法則 (Lorentz 変換) を導く．まず，慣性系 X 系の原点 O とと X' 系の原点 O' が $t = t' = 0$ で一致している．$t = t' = 0$ で光が原点 $(O = O')$ を通過したとする．X 系の空間座標を (x, y, z)，X' 系の空間座標を (x', y', z') とすると，光速度不変の原理より，

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{t} = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{t'} = c \tag{0.0.1}$$

が成り立つ．上式から**世界長さ** (spacetime interval)

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 \tag{0.0.2}$$

が不変量であることが導かれる．

慣性系 X' が x 軸正の方向に速さ v で移動している．．このとき $y = y', z = z'$ である．わかりやすいように $T = it$ とおく．光速不変より，

$$x^2 - (ct)^2 = x'^2 - (ct')^2 \tag{0.0.3}$$

$$x^2 + (cT)^2 = x'^2 + (cT)^2 \tag{0.0.4}$$

が成り立つ．これが回転座標変換と類似していることから，

$$\begin{pmatrix} cT' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cT \\ x \end{pmatrix} \tag{0.0.5}$$

と置く．表示を t に戻すと

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{i}\sin\theta \\ \mathrm{i}\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \tag{0.0.6}$$

である．さらに，$\theta = \mathrm{i}\phi$ とすると

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & -\sinh\phi \\ -\sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \tag{0.0.7}$$

となる．よって，

$$x' = (-\sinh\phi)ct + (\cosh\phi)x \tag{0.0.8}$$

を得る．X 系において時刻 t が経過したとする．X 系から見るお X' 系の原点の位置は $x = vt$ である．一方，X' 系から見ると $x' = 0$ である．よって上式から

$$0 = (-\sinh\phi)ct + (\cosh\phi)vt \tag{0.0.9}$$

が成り立つ．よって，これを変形すると

$$\frac{v}{c} = \frac{\sinh\phi}{\cosh\phi} = \tanh\phi \tag{0.0.10}$$

である．以上より，

$$\begin{cases} \sinh\phi = \dfrac{v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \\ \cosh\phi = \dfrac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \end{cases} \tag{0.0.11}$$

であることがわかる．したがって，

Lorentz 変換

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v/c \\ -v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \tag{0.0.12}$$

を得る．Lorentz 変換

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{0.0.13}$$

において $v \ll c$ とすると

$$x' = x - vt \tag{0.0.14}$$

となる．これは Galilei 変換と一致している．

次に，相対論的効果を取り込んだ速度の合成則について示す．状況は，X 系は静止し，X' 系が速さ v で x 軸方向に移動しているとする．さらに X' 系では粒子が速さ u' で x' 軸方向に運動している．X 系から見た粒子の速度 V を求める．式 (0.0.12) において $v \to -v$ とすると

$$\begin{pmatrix} c\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \begin{pmatrix} 1 & v/c \\ v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\,\mathrm{d}t' \\ \mathrm{d}x' \end{pmatrix} \tag{0.0.15}$$

となる．$V = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ なので

$$\begin{aligned} V = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \frac{v\,\mathrm{d}t' + \mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t' + (v/c^2)\,\mathrm{d}x'} && (0.0.16) \\ &= \frac{v + \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}}{1 + (v/c^2)\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}} && (0.0.17) \\ &= \frac{v + u'}{1 + \frac{vu'}{c^2}} && (0.0.18) \end{aligned}$$

を得る．

速度の合成

$$V = \frac{v + u'}{1 + \frac{vu'}{c^2}} \tag{0.0.19}$$

例として $u' = v = c$ とすると

$$V = \frac{2c}{1 + c^2/c^2} = c \tag{0.0.20}$$

である．速度が合成されても光速を超えることは決してないことがわかる．

Lorentz 収縮について説明する．速さ v で運動している X' 系から，$t' = 0$ において，静止している X 系の 2 点を見る．1 点は原点 $O : (x,t) = (0,0)$ もう 1 点は $P : (x,t) = (L,t)$ とする．まず，原点 O は X' 系から見ると

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v/c \\ -v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{0.0.21}$$

である．点 P を X' 系から見ると，

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v/c \\ -v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ L \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \begin{pmatrix} ct - \frac{v}{c}L \\ -vt + L \end{pmatrix} \tag{0.0.22}$$

である．$t' = 0$ で観測しているため，$t' = 0$ を代入し

$$0 = ct - \frac{v}{c}L \tag{0.0.23}$$

$$t = \frac{v}{c^2} L \tag{0.0.24}$$

を得る．よって，

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\left(-\left(\frac{v}{c}\right)^2 L + L\right) = \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} L \tag{0.0.25}$$

である．これは動いている慣性系から静止系での距離 (L) を測る (L') と縮んで見えることを意味している．

Lorentz 収縮

$$L' = \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} L \tag{0.0.26}$$

また，その対象に対して静止している観測者が測った距離を**固有長さ** (proper length) という．今回は L が固有長さである．

次に**時間の遅れ**について説明する．同様の X 系と X' 系を考える．時計が X' 系の原点 $x' = 0$ に置かれており，観測者は X' 系においてこの時計を見ている．X' 系に置かれた時計の時刻が t' のときの時空点 P_1，$t' + \Delta T_0$ の時空点を P_2 とする．P_1 は，

$$\begin{pmatrix} ct_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \begin{pmatrix} 1 & v/c \\ v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \begin{pmatrix} ct' \\ vt' \end{pmatrix} \tag{0.0.27}$$

P_2 は，

$$\begin{pmatrix} ct_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \begin{pmatrix} 1 & v/c \\ v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(t' + \Delta T_0) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \begin{pmatrix} c(t' + \Delta T_0) \\ v(t' + \Delta T_0) \end{pmatrix} \tag{0.0.28}$$

である．よって，X 系での時間経過 $\Delta T = t_2 - t_1$ は，

$$\Delta T = t_2 - t_1 = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \Delta T_0 \tag{0.0.29}$$

である．これは X' 系は X 系に比べて時間の流れが遅いことを示している．

時間の遅れ

$$\Delta T = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \Delta \tau \tag{0.0.30}$$

観測者に対して 2 つの事象が同一の空間座標で起きたとき，その時間間隔 $\Delta\tau$ を**固有時間** (proper time) という．