

時間に依存する摂動を調和摂動という．摂動 \hat{V} が，

$$\hat{V}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 2\hat{V} \cos \omega t & t > 0 \end{cases} \quad (0.0.1)$$

で与えられるときを考える¹²． $2\hat{V} \cos \omega t = \hat{V}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$ であるので，

$$c_{f,i}^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t V_{fi}(t') e^{i\omega_{fi}t'} dt' \quad (0.0.2)$$

$$= -\frac{i}{\hbar} \int_0^t \langle f | \hat{V} | i \rangle (e^{i\omega t'} + e^{-i\omega t'}) e^{i\omega_{fi}t'} dt' \quad (0.0.3)$$

$$= -i \frac{V_{fi}}{\hbar} \left(\frac{e^{i(\omega_{fi}+\omega)t} - 1}{\omega_{fi} + \omega} + \frac{e^{i(\omega_{fi}-\omega)t} - 1}{\omega_{fi} - \omega} \right) \quad (0.0.4)$$

を得る．ここで $V_{fi} = \langle f | \hat{V} | i \rangle$ とした．

1. $\omega_{fi} - \omega \approx 0$ のとき

式 (0.0.4) の第 2 項は第 1 項より十分大きい．よって，

$$c_{f,i}^{(1)}(t) \approx -i \frac{V_{fi}}{\hbar} \frac{e^{i(\omega_{fi}-\omega)t} - 1}{\omega_{fi} - \omega} = -i \frac{V_{fi}}{\hbar} \exp\left(i \frac{\omega_{fi} - \omega}{2} t\right) \frac{\sin\left(\frac{\omega_{fi}-\omega}{2} t\right)}{\frac{\omega_{fi}-\omega}{2}} \quad (0.0.5)$$

と近似できる．このとき $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ の遷移確率は，

$$\left| c_{f,i}^{(1)}(t) \right|^2 = \frac{V_{fi}^2}{\hbar^2} \frac{\sin^2\left(\frac{\omega_{fi}-\omega}{2} t\right)}{\left(\frac{\omega_{fi}-\omega}{2}\right)^2} \quad (0.0.6)$$

$\frac{\sin^2 \frac{\omega_{fi}-\omega}{2} t}{\left(\frac{\omega_{fi}-\omega}{2}\right)^2}$ は $t \rightarrow \infty$ で $2\pi t \delta(\omega_{fi} - \omega) = 2\pi t \hbar \delta(E_f - E_i - \hbar\omega)$ と近似できるので単位時間当たりの遷移確率は，

$$\omega_{f \rightarrow i} = \frac{\left| c_{f,i}^{(1)}(t) \right|^2}{t} = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i - \hbar\omega) \quad (0.0.7)$$

である．これも Fermi の黄金律という． $E_f = E_i + \hbar\omega$ へと遷移することがわかる．

2. $\omega_{fi} + \omega \approx 0$ のとき

式 (0.0.4) の第 1 項が支配的となる． $\omega_{fi} - \omega \approx 0$ のときの議論を $\omega \rightarrow -\omega$ と置き換えて繰り返すと単位時間当たりの遷移確率として

$$\omega_{i \rightarrow f} = \frac{\left| c_{f,i}^{(1)}(t) \right|^2}{t} = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i + \hbar\omega) \quad (0.0.8)$$

を得る． $E_f = E_i - \hbar\omega$ へと遷移することがわかる．

¹光のイメージ

²2023 年度期末試験第 2 問 (3)．