一般に、散乱の波動関数は、

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{ikz} + \int G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r'}) \frac{2m}{\hbar^2} V(\mathbf{r'}) \psi(\mathbf{r'}) d\mathbf{r'}$$
(0.0.1)

と表されるのであった.この波動関数を厳密に求めることは困難であるため近似を考える.まず,**式** (0.0.1) を簡略化して,

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_0 + \int gV\psi(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}\mathbf{r}' \tag{0.0.2}$$

と表現する. ただし,

$$g(\mathbf{r}) := G_0(\mathbf{r}) \frac{2m}{\hbar^2} \tag{0.0.3}$$

である. 式 (0.0.2) を再帰的に代入すると,

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_0 + \int gV\psi(\mathbf{r'}) \,\mathrm{d}\mathbf{r'} \tag{0.0.4}$$

$$= \psi_0 + \int gV \left(\psi_0 + \int gV \psi(\mathbf{r''}) \, d\mathbf{r'}\right) d\mathbf{r'}$$
(0.0.5)

$$= \psi_0 + \int gV \psi_0(\mathbf{r'}) \, d\mathbf{r'} + \iint gV gV \psi(\mathbf{r''}) \, d\mathbf{r'} \, d\mathbf{r''}$$
(0.0.6)

$$= \psi_0 + \int gV \psi_0(\mathbf{r'}) d\mathbf{r'} + \iint gV gV \psi_0(\mathbf{r''}) d\mathbf{r'} d\mathbf{r''} + \iiint gV gV gV \psi_0(\mathbf{r'''}) d\mathbf{r'} d\mathbf{r''} d\mathbf{r'''} + \cdots \qquad (0.0.7)$$

を得る. 式 (0.0.7) を第1項までで近似して,残りの項を捨てる.これは散乱の波動関数を平面波で近似することに相当する.つまり,

$$\psi \simeq \psi_0 \tag{0.0.8}$$

とする. これを第1 Born 近似という 12 .

Born 近似を用いて散乱振幅を求める. $\mathbf{k} \coloneqq k\mathbf{e}_z, \ \mathbf{r} \coloneqq z\mathbf{e}_z$ とすると, $\psi(\mathbf{r}') = e^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'}$ となるから,

$$f^{(1)}(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \int e^{i\mathbf{k'}\cdot\mathbf{r'}} \frac{2m}{\hbar} V(\mathbf{r'}) \psi(\mathbf{r'}) d\mathbf{r'}$$
(0.0.9)

$$= -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \int e^{-i(\mathbf{k'} - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r'}} V(r') d\mathbf{r'}$$

$$(0.0.10)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} V(r') d\mathbf{r}'$$
 (0.0.11)

となる.ただし,散乱による運動量変化に対応する物理量を q := k' - k と定義した.式 (0.0.11) を見ると,散乱振幅はポテンシャル V(r) の Fourier 変換から得られることがわかる³.また,球対称ポテンシャルのとき式 (0.0.11) は簡略化できて,

$$f^{(1)}(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \int e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}'} V(r') d\mathbf{r}'$$

$$(0.0.12)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \int_{\phi'=0}^{2\pi} d\phi' \int_{\theta'=0}^{\pi} d\theta' \int_{r'=0}^{\infty} r'^2 \sin\theta' dr' e^{-iqr'\cos\theta'} V(r')$$
 (0.0.13)

$$= -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} 2\pi \int_{r'=0}^{\infty} V(r') r'^2 \int_{\theta'=0}^{\pi} e^{-iqr'\cos\theta'} \sin\theta' dr' d\theta'$$
 (0.0.14)

$$= -\frac{m}{\hbar^2} \int_0^\infty r'^2 V(r') \frac{e^{iqr'} - e^{-iqr'}}{iqr'} dr'$$
 (0.0.15)

¹Max Born(1882-1970)

 $^{^2}$ 砂川,散乱の量子論,「第 1 Born 近似がとくによく利用される理由は,何といってもその簡単さにある.したがって,ある散乱問題を手がけたとき,だれもが最初に試してみるのが,この近似である.そして思わしい結果がえられないとき,他の近似法を考えるのである.」

 $^{^3}f^{(n)}$ は第 n Born 近似による散乱振幅を意味する.

$$= -\frac{m}{\hbar^2} \int_0^\infty rV(r) \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iq} dr \qquad (0.0.16)$$

$$= -\frac{2m}{\hbar^2 q} \int_0^\infty rV(r)\sin(qr)\,\mathrm{d}r \tag{0.0.17}$$

となる.

- 球対称ポテンシャルの散乱振幅

$$f^{(1)}(\theta) = -\frac{m}{\hbar^2} \int_0^\infty rV(r) \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iq} dr$$
 (0.0.18)

$$= -\frac{2m}{\hbar^2 q} \int_0^\infty rV(r)\sin(qr)\,\mathrm{d}r \tag{0.0.19}$$

例題 0.1: 湯川ポテンシャル

球対称ポテンシャルV(r)が、湯川ポテンシャルの場合を考える。湯川ポテンシャルは、

$$V(r) = V_0 \frac{e^{-\mu r}}{\mu r} \tag{0.0.20}$$

と書ける.による散乱を考える^a.これは,V(r) の到達距離が μ^{-1} ほどであり,核子同士に働く力を表す.物質中では,伝導電子に遮蔽された不純物の Coulomb ポテンシャルを表す. $\mu=1,2$ 及び Coulomb ポテンシャルのグラフを図 1 に示す.このポテンシャルの下で散乱振幅 $f^{(1)}(\theta)$ と散乱断面積 $\sigma^{(1)}(\theta)$ を求めよ.

^a湯川秀樹 (1907-1981)

散乱振幅は式 (0.0.18) より,

$$f^{(1)}(\theta) = -\frac{m}{\hbar^2} \int_0^\infty rV(r) \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iq} dr$$
 (0.0.21)

$$= -\frac{m}{i\hbar^2 q\mu} \int_0^\infty r V_0 \frac{e^{-\mu r}}{\mu r} \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iq} dr$$
 (0.0.22)

$$= -\frac{mV_0}{i\hbar^2 q\mu} \int_0^\infty \left[\exp\left\{ (-\mu + iq)r \right\} - \exp\left\{ (-\mu - iq)r \right\} \right] dr \tag{0.0.23}$$

$$= -\frac{2mV_0}{\hbar^2\mu} \frac{1}{\mu^2 + q^2} \tag{0.0.24}$$

散乱振幅は,

$$\sigma^{(1)}(\theta) = \left| f^{(1)}(\theta) \right|^2 \tag{0.0.25}$$

$$= \left(\frac{2mV_0}{\hbar^2\mu}\right)^2 \frac{1}{(\mu^2 + q^2)^2} \tag{0.0.26}$$

$$= \left(\frac{2mV_0}{\hbar^2 \mu}\right)^2 \frac{1}{\left[\mu^2 + 4k^2 \sin^2\left(\theta/2\right)\right]^2}$$
(0.0.27)

である. なお、k'とkのなす角が θ であるので余弦定理より、 $q=2k\sin\theta/2$ であることを用いた.

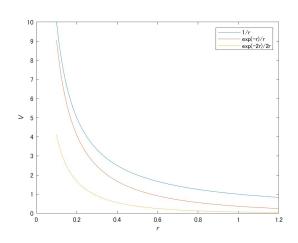


図 1: 湯川ポテンシャルと Coulomb ポテンシャルの比較

例題 0.2: Rutherford 散乱 (Griffith Example 10.6)

湯川ポテンシャルで $V_0=rac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0},\;\;\mu=0$ とすると Coulomb ポテンシャル

$$V(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \tag{0.0.28}$$

と一致する. 式 (0.0.19) に代入して散乱振幅を求める.

$$f(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2 q} \int_0^\infty r \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0 r} \sin\left(qr\right) dr \qquad (0.0.29)$$

$$= -\frac{2m}{\hbar^2 q} \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^\infty \sin(qr) dr$$
 (0.0.30)

$$\simeq -\frac{mq_1q_1}{2\pi\varepsilon_0\hbar^2q^2} \tag{0.0.32}$$

$$= -\frac{mq_1q_1}{8\pi\varepsilon_0\hbar^2\sin^2\theta/2} \tag{0.0.33}$$