

最後に、電磁場中の電子を考え、Dirac 方程式の非相対論的極限 ( $|\hat{\mathbf{p}}| \ll c$ ) が Schrödinger 方程式であることを示す。Dirac 方程式は、

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = (c\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \beta mc^2) \psi \quad (0.0.1)$$

と書けるのであった。Dirac 方程式に電磁場を、

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{p}} \rightarrow \hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A} & e > 0 \\ \phi = 0 \end{cases} \quad (0.0.2)$$

のように導入する。式 (0.0.2) を用いると、

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = [c\boldsymbol{\alpha} \cdot (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A}) + \beta mc^2] \psi \quad (0.0.3)$$

である。解の形を、

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} \quad (0.0.4)$$

とする。式 (0.0.4) を式 (0.0.3) に代入すると、

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A}) \\ c\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mc^2 & 0 \\ 0 & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} \quad (0.0.5)$$

$$\Leftrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = c\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A}) \begin{pmatrix} \psi_b \\ \psi_a \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \psi_a \\ -\psi_b \end{pmatrix} \quad (0.0.6)$$

となる。また、粒子のエネルギーを静止質量エネルギー ( $mc^2$ ) と非相対論的エネルギーの項 ( $\varepsilon_{\text{NR}}$ ) に分けて、

$$\varepsilon \sim mc^2 + \varepsilon_{\text{NR}} \quad (0.0.7)$$

とする。波動関数の時間発展を、

$$\begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_a^{(0)} \\ \psi_b^{(0)} \end{pmatrix} \exp\left(-i\frac{mc^2}{\hbar}t\right) \quad (0.0.8)$$

のように書く。式 (0.0.8) を用いると式 (0.0.6) は、

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = c\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A}) \begin{pmatrix} \psi_b \\ \psi_a \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \psi_a \\ -\psi_b \end{pmatrix} \quad (0.0.9)$$

$$\Leftrightarrow i\hbar \left[ \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_a^{(0)} \\ \psi_b^{(0)} \end{pmatrix} + \left(-i\frac{mc^2}{\hbar}\right) \begin{pmatrix} \psi_a^{(0)} \\ \psi_b^{(0)} \end{pmatrix} \right] \exp\left(-i\frac{mc^2}{\hbar}t\right) = c\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A}) \begin{pmatrix} \psi_b^{(0)} \\ \psi_a^{(0)} \end{pmatrix} \exp\left(-i\frac{mc^2}{\hbar}t\right) + mc^2 \begin{pmatrix} \psi_a^{(0)} \\ -\psi_b^{(0)} \end{pmatrix} \exp\left(-i\frac{mc^2}{\hbar}t\right) \quad (0.0.10)$$

$$\Leftrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_a^{(0)} \\ \psi_b^{(0)} \end{pmatrix} = c\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A}) \begin{pmatrix} \psi_b^{(0)} \\ \psi_a^{(0)} \end{pmatrix} - 2mc^2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\psi_b^{(0)} \end{pmatrix} \quad (0.0.11)$$

が得られる。式 (0.0.11) の第 2 成分を抜き出して考える。両辺を  $mc^2$  で割ると、

$$\frac{1}{mc^2} \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_b^{(0)} \right) = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})}{mc} \psi_a^{(0)} - 2\psi_b^{(0)} \quad (0.0.12)$$

である。左辺は、

$$\frac{1}{mc^2} \left[ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \exp\left(-i\frac{\varepsilon_{\text{NR}}}{\hbar}t\right) \right] \propto \frac{\varepsilon_{\text{NR}}}{mc^2} \quad (0.0.13)$$

である。また,

$$\varepsilon_{\text{NR}} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} \quad (0.0.14)$$

だから非相対論的極限 ( $|\hat{\mathbf{p}}| \ll c$ ) で左辺は0となる。よって,

$$\psi_b^{(0)} = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})}{2mc} \psi_a^{(0)} \quad (0.0.15)$$

を得る。式 (0.0.15) は粒子解と反粒子解を結ぶ式である。また, 式 (0.0.15) から, 反粒子の成分  $\psi_b^{(0)}$  は粒子の成分  $\psi_a^{(0)}$  より  $v/c$  のオーダーで小さく, 非相対論的極限では重要ではないことがわかる。式 (0.0.15) を用いると式 (0.0.11) の第1成分は,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_a^{(0)} = c\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A}) \psi_b^{(0)} \quad (0.0.16)$$

$$= \frac{[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})][\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})]}{2m} \psi_a^{(0)} \quad (0.0.17)$$

と書き直される。  $[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})][\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})]$  を計算する。Pauli 行列には,

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{a}})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{b}}) = \left( \sum_i \sigma_i \hat{a}_i \right) \left( \sum_j \sigma_j \hat{b}_j \right) \quad (0.0.18)$$

$$= \sum_i \sum_j \sigma_i \sigma_j \hat{a}_i \hat{b}_j \quad (0.0.19)$$

$$= \sum_i \sum_j \frac{1}{2} (\{\sigma_i, \sigma_j\} + [\sigma_i, \sigma_j]) \hat{a}_i \hat{b}_j \quad (0.0.20)$$

$$= \sum_i \sum_j \frac{1}{2} (2\delta_{ij} + 2i \sum_k \varepsilon_{ijk} \sigma_k) \hat{a}_i \hat{b}_j \quad (0.0.21)$$

$$= \sum_i \hat{a}_i \hat{b}_i + i\sigma_k \sum_i \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} \hat{a}_i \hat{b}_j \quad (0.0.22)$$

$$= \hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}} + i \sum_k \sigma_k (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{b}})_k \quad (0.0.23)$$

$$= \hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{b}}) \quad (0.0.24)$$

なる性質がある。ここで  $\varepsilon_{ijk}$  は Levi-Civita の完全反対称テンソルで

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i, j, k) = (x, y, z), (y, z, x), (z, x, y) \\ -1 & (i, j, k) = (z, y, x), (y, x, z), (x, z, y) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (0.0.25)$$

である。Levi-Civita の完全反対称テンソルを使えば外積は,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_k = \sum_i \sum_j \varepsilon_{ijk} a_i b_j \quad (0.0.26)$$

と表される。また,  $\{\hat{A}, \hat{B}\}$  は反交換関係で

$$\{\hat{A}, \hat{B}\} := \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} \quad (0.0.27)$$

という演算子である。式 (0.0.24) を用いると,

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})][\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})] = (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})^2 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot [(\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A}) \times (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})] \quad (0.0.28)$$

$$= (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})^2 + i\boldsymbol{\sigma} \cdot [(\mathbf{A} \times \hat{\mathbf{p}}) + (\hat{\mathbf{p}} \times e\mathbf{A})] \quad (0.0.29)$$

$$(0.0.30)$$

と変形される。ここで,

$$[(\mathbf{A} \times \hat{\mathbf{p}}) + (\hat{\mathbf{p}} \times e\mathbf{A})]\psi = (\mathbf{A} \times \hat{\mathbf{p}})\psi + (\hat{\mathbf{p}} \times \mathbf{A})\psi \quad (0.0.31)$$

$$= -i\hbar[(\mathbf{A} \times \nabla)\psi + (\nabla \times \mathbf{A})\psi] \quad (0.0.32)$$

$$= -i\hbar[\mathbf{A} \times (\nabla\psi) + (\nabla\psi) \times \mathbf{A} + (\nabla \times \mathbf{A})\psi] \quad (0.0.33)$$

$$= -i\hbar[-(\nabla\psi) \times \mathbf{A} + (\nabla\psi) \times \mathbf{A} + (\nabla \times \mathbf{A})\psi] \quad (0.0.34)$$

$$= -i\hbar(\nabla \times \mathbf{A})\psi \quad (0.0.35)$$

が成り立つ。以上より,

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})][\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})] = (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})^2 + e\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (0.0.36)$$

$$= (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})^2 + e\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \quad (0.0.37)$$

したがって,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_a^{(0)} = \left[ \frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})^2 + \frac{e\hbar}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \right] \psi_a^{(0)} \quad (0.0.38)$$

が得られる。右辺第2項  $\frac{e\hbar}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}$  は Zeeman 相互作用によるエネルギーを表す。これは磁場中の自由粒子の Schrödinger 方程式と一致している。つまり、電磁場中の自由粒子の Dirac 方程式の非相対論的極限は、電磁場中の自由粒子の Schrödinger 方程式と一致する。