

全角運動量が保存するために,

$$[\hat{H}, \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}] = 0 \quad (0.0.1)$$

なる物理量として, スピン $\hat{\mathbf{S}}$ が存在すると考える. スピン演算子を,

$$\hat{S}_x := \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix} \quad (0.0.2)$$

$$\hat{S}_y := \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{pmatrix} \quad (0.0.3)$$

$$\hat{S}_z := \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (0.0.4)$$

ただし, σ_i ($i = x, y, z$) は Pauli 行列である. このようにスピン演算子を導入すると, これらは α_i や β との交換関係において,

$$[\alpha_i, \hat{S}_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \alpha_k \quad (0.0.5)$$

$$[\beta, \hat{S}_i] = 0 \quad (0.0.6)$$

を満たすため,

$$[\hat{H}, \hat{S}_x] = i\hbar c(\alpha_y \hat{p}_z - \alpha_z \hat{p}_y) \quad (0.0.7)$$

$$[\hat{H}, \hat{S}_y] = i\hbar c(\alpha_z \hat{p}_x - \alpha_x \hat{p}_z) \quad (0.0.8)$$

$$[\hat{H}, \hat{S}_z] = i\hbar c(\alpha_x \hat{p}_y - \alpha_y \hat{p}_x) \quad (0.0.9)$$

が得られる. $\hat{\mathbf{S}}$ の定義より,

$$[\hat{H}, \hat{S}_i] = -[\hat{H}, \hat{L}_i] \quad (0.0.10)$$

であるため,

$$[\hat{H}, \hat{L}_x + \hat{S}_x] = [\hat{H}, \hat{L}_y + \hat{S}_y] = [\hat{H}, \hat{L}_z + \hat{S}_z] = 0 \quad (0.0.11)$$

が成り立つ. よって, Dirac 方程式において

$$[\hat{H}, \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}] = 0 \quad (0.0.12)$$

であり, 全角運動量 $\mathbf{J} := \mathbf{L} + \mathbf{S}$ が保存されることがわかる. ただし, $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma}$ はスピン角運動量である. まとめると, 非相対論的量子論では軌道角運動量 \mathbf{L} が保存量であった. しかし, 相対論を取り入れた Dirac 方程式ではスピン角運動量 \mathbf{S} も含めた全角運動量 \mathbf{J} が保存量なのである¹. 以上の議論では, スピンの存在が自然に導入された. この議論に用いた要請は,

スピンの存在のために用いた要請

1. Lorentz 共変性
2. 状態の時間発展が時間の 1 階微分で表されること

である. 1. は Schrödinger 方程式と相対論の矛盾を解決するために用いた. 2. は波動関数の確率解釈を可能にするために用いた. 以上の要請から Dirac 方程式が導かれ, その式にはスピンの存在が内包されていた.

¹ これを実験的に確かめたのが Einstein - de Haas 効果や Barnett 効果である. 前者は, 強磁性体の磁化の向きがそろった時, つまりスピン角運動量が変化したとき, 強磁性体全体が力学的回転をするというものであり, Einstein が生涯で行った唯一の実験と言われている. 後者は, 逆に, 力学的回転により磁化の向きがそろうというものである. これらは磁気回転効果 (gyromagnetic effect) と言われている. 磁気回転効果は常磁性体, 核スピン, 液体金属流体, 常磁性金属薄膜, 強磁性金属薄膜, クォーク・グルオンプラズマでも観測されている.

式 (??) から式 (??) で表した Dirac 方程式の平面波解と, \hat{S}_z の関係を調べる. 平面波解に \hat{S}_z を作用させると,

$$\begin{cases} \hat{S}_z \psi_{\uparrow}^+ = \frac{\hbar}{2} \psi_{\uparrow}^+ \\ \hat{S}_z \psi_{\downarrow}^+ = -\frac{\hbar}{2} \psi_{\downarrow}^+ \end{cases} \quad (0.0.13)$$

$$\begin{cases} \hat{S}_z \psi_{\uparrow}^- = \frac{\hbar}{2} \psi_{\uparrow}^- \\ \hat{S}_z \psi_{\downarrow}^- = -\frac{\hbar}{2} \psi_{\downarrow}^- \end{cases} \quad (0.0.14)$$

が成り立つ. よって, 平面波解は \hat{S}_z の固有状態であることがわかる.