最後に，電磁場中の電子を考え，Dirac 方程式の非相対論的極限 ($|\hat{\boldsymbol{p}}| \ll c$) が Schrödinger 方程式であることを示す．Dirac 方程式は，

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = (c\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} + \beta mc^2)\psi \tag{0.0.1}$$

と書けるのであった．Dirac 方程式に電磁場を，

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{p}} \to \hat{\boldsymbol{p}} + e\boldsymbol{A} & e > 0 \\ \phi = 0 \end{cases} \tag{0.0.2}$$

のように導入する．**式** (0.0.2) を用いると，

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[c\boldsymbol{\alpha}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}} + e\boldsymbol{A}) + \beta mc^2\right]\psi \tag{0.0.3}$$

である．解の形を，

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} \tag{0.0.4}$$

とする．**式** (0.0.4) を**式** (0.0.3) に代入すると，

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}} + e\boldsymbol{A}) \\ c\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}} + e\boldsymbol{A}) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mc^2 & 0 \\ 0 & -mc^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} \tag{0.0.5}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = c\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}} + e\boldsymbol{A})\begin{pmatrix} \psi_b \\ \psi_a \end{pmatrix} + mc^2\begin{pmatrix} \psi_a \\ -\psi_b \end{pmatrix} \tag{0.0.6}$$

となる．また，粒子のエネルギーを静止質量エネルギー (mc^2) と非相対論的エネルギーの項 ($\varepsilon_{\mathrm{NR}}$) に分けて，

$$\varepsilon \sim mc^2 + \varepsilon_{\mathrm{NR}} \tag{0.0.7}$$

とする．波動関数の時間発展を，

$$\begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_a^{(0)} \\ \psi_b^{(0)} \end{pmatrix}\exp\left(-\mathrm{i}\frac{mc^2}{\hbar}t\right) \tag{0.0.8}$$

のように書く．**式** (0.0.8) を用いると**式** (0.0.6) は，

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = c\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}} + e\boldsymbol{A})\begin{pmatrix} \psi_b \\ \psi_a \end{pmatrix} + mc^2\begin{pmatrix} \psi_a \\ -\psi_b \end{pmatrix} \tag{0.0.9}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{i}\hbar\left[\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \psi_a^{(0)} \\ \psi_b^{(0)} \end{pmatrix} + \left(-\mathrm{i}\frac{mc^2}{\hbar}\right)\begin{pmatrix} \psi_a^{(0)} \\ \psi_b^{(0)} \end{pmatrix}\right]\exp\left(-\mathrm{i}\frac{mc^2}{\hbar}t\right) = c\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}} + e\boldsymbol{A})\begin{pmatrix} \psi_b^{(0)} \\ \psi_a^{(0)} \end{pmatrix}\exp\left(-\mathrm{i}\frac{mc^2}{\hbar}t\right) + mc^2\begin{pmatrix} \psi_a^{(0)} \\ -\psi_b^{(0)} \end{pmatrix}\exp\left(-\mathrm{i}\frac{mc^2}{\hbar}t\right) \tag{0.0.10}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \psi_a^{(0)} \\ \psi_b^{(0)} \end{pmatrix} = c\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}} + e\boldsymbol{A})\begin{pmatrix} \psi_b^{(0)} \\ \psi_a^{(0)} \end{pmatrix} - 2mc^2\begin{pmatrix} 0 \\ -\psi_b^{(0)} \end{pmatrix} \tag{0.0.11}$$

が得られる．**式** (0.0.11) の第 2 成分を抜き出して考える．両辺を mc^2 で割ると，

$$\frac{1}{mc^2}\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_b^{(0)}\right) = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}} + e\boldsymbol{A})}{mc}\psi_a^{(0)} - 2\psi_b^{(0)} \tag{0.0.12}$$

である．左辺は，

$$\frac{1}{mc^2}\left[\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\varepsilon_{\mathrm{NR}}}{\hbar}t\right)\right] \propto \frac{\varepsilon_{\mathrm{NR}}}{mc^2} \tag{0.0.13}$$

である．また，

$$\varepsilon_{\rm NR} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m} \tag{0.0.14}$$

だから非相対論的極限 ($|\hat{\boldsymbol{p}}| \ll c$) で左辺は 0 となる．よって，

$$\psi_b^{(0)} = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}}+e\boldsymbol{A})}{2mc}\psi_a^{(0)} \tag{0.0.15}$$

を得る．**式** (0.0.15) は粒子解と反粒子解を結ぶ式である．また，**式** (0.0.15) から，反粒子の成分 $\psi_b^{(0)}$ は粒子の成分 $\psi_a^{(0)}$ より v/c のオーダーで小さく，非相対論的極限では重要ではないことがわかる．**式** (0.0.15) を用いると**式** (0.0.11) の第 1 成分は，

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_a^{(0)} &= c\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}}+e\boldsymbol{A})\psi_b^{(0)} && (0.0.16)\\ &= \frac{[\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}}+e\boldsymbol{A})][\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}}+e\boldsymbol{A})]}{2m}\psi_a^{(0)} && (0.0.17)\end{aligned}$$

と書き直される．$[\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}}+e\boldsymbol{A})][\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}}+e\boldsymbol{A})]$ を計算する．Pauli 行列には，

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{a}})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{b}}) &= (\sum_i \sigma_i\hat{a}_i)(\sum_j \sigma_j\hat{a}_j) && (0.0.18)\\ &= \sum_i\sum_j \sigma_i\sigma_j\hat{a}_i\hat{b}_j && (0.0.19)\\ &= \sum_i\sum_j \frac{1}{2}(\{\sigma_i,\sigma_j\}+[\sigma_i,\sigma_j])\hat{a}_i\hat{b}_j && (0.0.20)\\ &= \sum_i\sum_j \frac{1}{2}(2\delta_{i,j}+2\mathrm{i}\sum_k\varepsilon_{ijk}\sigma_k)\hat{a}_i\hat{b}_j && (0.0.21)\\ &= \sum_i \hat{a}_i\hat{b}_i + \mathrm{i}\sigma_k\sum_i\sum_j\sum_k\varepsilon_{ijk}\hat{a}_i\hat{b}_j && (0.0.22)\\ &= \hat{\boldsymbol{a}}\cdot\hat{\boldsymbol{b}} + \mathrm{i}\sum_k\sigma_k(\hat{\boldsymbol{a}}\times\hat{\boldsymbol{b}})_k && (0.0.23)\\ &= \hat{\boldsymbol{a}}\cdot\hat{\boldsymbol{b}} + \mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{a}}\times\hat{\boldsymbol{b}}) && (0.0.24)\end{aligned}$$

なる性質がある．ここで ε_{ijk} は Levi-Civita の完全反対称テンソルで

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i,j,k)=(x,y,z),(y,z,x),(z,x,y) \\ -1 & (i,j,k)=(z,y,x),(y,x,z),(x,z,y) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{0.0.25}$$

である．Levi-Civita の完全反対称テンソルを使えば外積は，

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_k = \sum_i\sum_j \varepsilon_{ijk}a_ib_j \tag{0.0.26}$$

と表される．また，$\left\{\hat{A},\hat{B}\right\}$ は反交換関係で

$$\left\{\hat{A},\hat{B}\right\} := \hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A} \tag{0.0.27}$$

という演算子である．**式** (0.0.24) を用いると，

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}}+e\boldsymbol{A})][\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}}+e\boldsymbol{A})] &= (\hat{\boldsymbol{p}}+e\boldsymbol{A})^2 + \mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\cdot[(\hat{\boldsymbol{p}}+e\boldsymbol{A})\times(\hat{\boldsymbol{p}}+e\boldsymbol{A})] && (0.0.28)\\ &= (\hat{\boldsymbol{p}}+e\boldsymbol{A})^2 + \mathrm{i}e\boldsymbol{\sigma}\cdot[(\boldsymbol{A}\times\hat{\boldsymbol{p}})+(\hat{\boldsymbol{p}}\times e\boldsymbol{A})] && (0.0.29)\\ & && (0.0.30)\end{aligned}$$

と変形される．ここで，

$$\begin{aligned}[(\boldsymbol{A}\times\hat{\boldsymbol{p}})+(\hat{\boldsymbol{p}}\times e\boldsymbol{A})]\psi &= (\boldsymbol{A}\times\hat{\boldsymbol{p}})\psi+(\hat{\boldsymbol{p}}\times\boldsymbol{A})\psi &\quad(0.0.31)\\ &= -\mathrm{i}\hbar[(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{\nabla})\psi+(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\psi] &\quad(0.0.32)\\ &= -\mathrm{i}\hbar[\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{\nabla}\psi)+(\boldsymbol{\nabla}\psi)\times\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\psi] &\quad(0.0.33)\\ &= -\mathrm{i}\hbar[-(\boldsymbol{\nabla}\psi)\times\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{\nabla}\psi)\times\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\psi] &\quad(0.0.34)\\ &= -\mathrm{i}\hbar(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\psi &\quad(0.0.35)\end{aligned}$$

が成り立つ．以上より，

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}}+e\boldsymbol{A})][\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}}+e\boldsymbol{A})] &= (\hat{\boldsymbol{p}}+e\boldsymbol{A})^2+e\hbar\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) &\quad(0.0.36)\\ &= (\hat{\boldsymbol{p}}+e\boldsymbol{A})^2+e\hbar\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B} &\quad(0.0.37)\end{aligned}$$

したがって，

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_a^{(0)}=\left[\frac{1}{2m}(\hat{\boldsymbol{p}}+e\boldsymbol{A})^2+\frac{e\hbar}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}\right]\psi_a^{(0)} \tag{0.0.38}$$

が得られる．右辺第 2 項 $\dfrac{e\hbar}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}$ は Zeeman 相互作用によるエネルギーを表す．これは磁場中の自由粒子の Schrödinger 方程式と一致している．つまり，電磁場中の自由粒子の Dirac 方程式の非相対論的極限は，電磁場中の自由粒子の Schrödinger 方程式と一致する．