全角運動量が保存するために，

$$[\hat{H}, \hat{\boldsymbol{L}} + \hat{\boldsymbol{S}}] = 0 \tag{0.0.1}$$

を満たす $\boldsymbol{S}$ が Dirac 方程式に含まれていると考える．スピン演算子を次のように導入する．

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x\end{pmatrix} \tag{0.0.2}$$

$$\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_y\end{pmatrix} \tag{0.0.3}$$

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z\end{pmatrix} \tag{0.0.4}$$

$\sigma_i$ $(i = x, y, z)$ は Pauli 行列である．このようにスピン演算子を導入すると，これらは交換関係

$$[\alpha_i, \hat{S}_j] = \mathrm{i}\hbar\varepsilon_{ijk}\alpha_k \tag{0.0.5}$$

$$[\beta, \hat{S}_i] = 0 \tag{0.0.6}$$

を満たすため

$$[\hat{H}, \hat{S}_x] = \mathrm{i}\hbar c(\alpha_y \hat{p}_z - \alpha_z \hat{p}_y) \tag{0.0.7}$$

$$[\hat{H}, \hat{S}_y] = \mathrm{i}\hbar c(\alpha_z \hat{p}_x - \alpha_x \hat{p}_z) \tag{0.0.8}$$

$$[\hat{H}, \hat{S}_x] = \mathrm{i}\hbar c(\alpha_x \hat{p}_y - \alpha_y \hat{p}_x) \tag{0.0.9}$$

であり，

$$[\hat{H}, \hat{L}_x + \hat{S}_x] = [\hat{H}, \hat{L}_y + \hat{S}_y] = [\hat{H}, \hat{L}_z + \hat{S}_z] = 0 \tag{0.0.10}$$

が成り立つ．よって，Dirac 方程式において

$$[\hat{H}, \hat{\boldsymbol{L}} + \hat{\boldsymbol{S}}] = 0 \tag{0.0.11}$$

であり，**全角運動量** $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$ が保存される．ここで，$\boldsymbol{S} = \dfrac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$ は**スピン角運動量**である．

以上の議論では，スピンの存在が自然に導入された．この議論に用いた要請は

**スピンの存在のために用いた要請**

1. Lorentz 共変性
2. 状態の時間発展が時間の 1 階微分で表されること

である．1 は Schrödinger 方程式と相対論の矛盾を解決するために用いた．2 は波動関数の確率解釈を可能にするために用いた．以上の要請から Dirac 方程式が導かれ，その式にはスピンの存在が内包されていた．

ここで，Dirac 方程式の平面波解

$$\psi_\uparrow^+ = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \psi_\downarrow^+ = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \psi_\uparrow^- = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \quad \psi_\downarrow^- = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \tag{0.0.12}$$

に $\hat{S}_z$ を作用させてみると，

$$\begin{cases}\hat{S}_z\psi_\uparrow^+ &= \dfrac{\hbar}{2}\psi_\uparrow^+ \\ \hat{S}_z\psi_\downarrow^+ &= -\dfrac{\hbar}{2}\psi_\downarrow^+\end{cases} \tag{0.0.13}$$

$$\begin{cases}\hat{S}_z\psi_\uparrow^- &= \dfrac{\hbar}{2}\psi_\uparrow^- \\ \hat{S}_z\psi_\downarrow^- &= -\dfrac{\hbar}{2}\psi_\downarrow^-\end{cases} \tag{0.0.14}$$

が成り立つ．よって，平面波解は $\hat{S}_z$ の固有状態であることがわかる．
全角運動量以外の保存量として**ヘリシティ**がある[1]．

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \tag{0.0.15}$$

として，ヘリシティは

$$h = \frac{\boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|} \tag{0.0.16}$$

と定義される．これが保存量であることは以下のように確かめられる．

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\boldsymbol{p}})\hat{h} &= \frac{1}{p} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}} \end{pmatrix} && (0.0.17) \\
&= \frac{1}{p} \begin{pmatrix} 0 & (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}) \\ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}) & 0 \end{pmatrix} && (0.0.18) \\
&= \frac{1}{p} \begin{pmatrix} 0 & \hat{\boldsymbol{p}}^2 \\ \hat{\boldsymbol{p}}^2 & 0 \end{pmatrix} && (0.0.19) \\
&= \hat{h}(\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}) && (0.0.20)
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}, \hat{h}] &= 0 && (0.0.21) \\
[\beta, \hat{h}] &= 0 && (0.0.22)
\end{aligned}$$

したがって，

$$[\hat{H}, \hat{h}] = 0 \tag{0.0.23}$$

ヘリシティは保存量である．

[1] 授業では触れていない．