

z 軸に沿って粒子を単位時間単位面積当たり n 個入射する． z 軸から距離 b (衝突パラメータ), 角度 $d\phi$, 面積 dS' のスリットを単位時間当たりに通過する粒子数は,

$$n dS' = n d\phi (b d\phi) \quad (0.0.1)$$

を満たす．また, 単位時間に検出器に到達する粒子数は微分断面積の定義から,

$$dN = \sigma(\theta) N d\Omega \quad (0.0.2)$$

である．古典力学ではこれらは必ず一致するため,

$$\sigma(\theta) n d\Omega = n d\phi (b d\phi) \quad (0.0.3)$$

を得る．よって, 微分断面積は,

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{\sin \theta} b \left| \frac{db}{d\theta} \right| \quad (0.0.4)$$

と表される．

例題 0.1: 剛体球

散乱体を半径 a の剛体球

$$V(r) = \begin{cases} \infty & r < a \\ 0 & r > a \end{cases} \quad (0.0.5)$$

とする．衝突パラメータを b , 粒子が散乱体の角度 ϕ の位置で散乱し, その散乱角を θ とする．これらのパラメータは,

$$\begin{cases} 2\phi + \theta = \pi \\ b = a \sin \phi \end{cases} \quad (0.0.6)$$

を満たすため,

$$b = a \cos \frac{\theta}{2} \quad (0.0.7)$$

を得る．よって, 微分断面積は

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{\sin \theta} b \left| \frac{db}{d\theta} \right| \quad (0.0.8)$$

$$= \frac{a^2}{4} \quad (0.0.9)$$

となる． θ に依存しない等方散乱であることがわかる．また, 全断面積は

$$\sigma^{\text{tot}} = \int \sigma(\theta) d\Omega = \pi a^2 \quad (0.0.10)$$

である．剛体球の断面積と一致する．