

最後に、電磁場中の電子を考え、Dirac 方程式の非相対論的極限 ($|p| \ll c$) が Schrödinger 方程式であることを示す。Dirac 方程式は

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = (c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2) \psi \quad (0.0.1)$$

である。ここに電磁場を次のように導入する。

$$\begin{cases} \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + e\mathbf{A} (e > 0) \\ \phi = 0 \end{cases} \quad (0.0.2)$$

これを用いると

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = (c\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) + \beta mc^2) \psi \quad (0.0.3)$$

である。ここで、解の形を

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} \quad (0.0.4)$$

とする。これを式 (0.0.3) に代入する。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \\ c\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mc^2 & 0 \\ 0 & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} \quad (0.0.5)$$

$$= c\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \begin{pmatrix} \psi_b \\ \psi_a \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \psi_a \\ -\psi_b \end{pmatrix} \quad (0.0.6)$$

また、粒子のエネルギーを静止質量エネルギー (mc^2) と非相対論的エネルギーの項 (ε_{NR}) に分け、

$$\varepsilon \sim mc^2 + \varepsilon_{\text{NR}} \quad (0.0.7)$$

波動関数の時間発展を次のように記述する。

$$\begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_a^0 \\ \psi_b^0 \end{pmatrix} e^{-i \frac{mc^2}{\hbar} t} \quad (0.0.8)$$

この表式を用いると式 (0.0.3) の左辺は

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = i\hbar \left[\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_a^0 \\ \psi_b^0 \end{pmatrix} \right] e^{-i \frac{mc^2}{\hbar} t} + mc^2 \begin{pmatrix} \psi_a^0 \\ \psi_b^0 \end{pmatrix} e^{-i \frac{mc^2}{\hbar} t} \quad (0.0.9)$$

となる。これより、

$$i\hbar \left[\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_a^0 \\ \psi_b^0 \end{pmatrix} \right] e^{-i \frac{mc^2}{\hbar} t} + mc^2 \begin{pmatrix} \psi_a^0 \\ \psi_b^0 \end{pmatrix} e^{-i \frac{mc^2}{\hbar} t} = c\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \begin{pmatrix} \psi_b \\ \psi_a \end{pmatrix} + mc^2 \begin{pmatrix} \psi_a \\ -\psi_b \end{pmatrix} \quad (0.0.10)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_a^0 \\ \psi_b^0 \end{pmatrix} = c\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \begin{pmatrix} \psi_b^0 \\ \psi_a^0 \end{pmatrix} - 2mc^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_b^0 \end{pmatrix} \quad (0.0.11)$$

が得られる。上式の 2 行目に着目する。両辺を mc^2 で割ると

$$\frac{1}{mc^2} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_b^0 \right) = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A})}{mc} \psi_a^0 - 2\psi_b^0 \quad (0.0.12)$$

である。ここで左辺は

$$\frac{1}{mc^2} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} e^{-i \frac{\varepsilon_{\text{NR}}}{\hbar} t} \right) \propto \frac{\varepsilon_{\text{NR}}}{mc^2} \quad (0.0.13)$$

である。また、

$$\varepsilon_{\text{NR}} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \quad (0.0.14)$$

だから非相対論的極限 ($|\mathbf{p}| \ll c$) で左辺は 0 となる。よって

$$\psi_b^0 = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A})}{2mc} \psi_a^0 \quad (0.0.15)$$

$$(0.0.16)$$

を得る。これは粒子解と反粒子解を結ぶ式である。これを用いると 1 行目は

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_a^0 = c \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A}) \psi_b^0 \quad (0.0.17)$$

$$= \frac{[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A})][\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A})]}{2m} \psi_a^0 \quad (0.0.18)$$

と書き直される。次に $[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A})][\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A})]$ を計算する。まず、Pauli 行列には次の性質がある。

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{a}})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{b}}) = \left(\sum_i \sigma_i \hat{a}_i \right) \left(\sum_j \sigma_j \hat{b}_j \right) \quad (0.0.19)$$

$$= \sum_i \sum_j \sigma_i \sigma_j \hat{a}_i \hat{b}_j \quad (0.0.20)$$

$$= \sum_i \sum_j \frac{1}{2} (\{\sigma_i, \sigma_j\} + [\sigma_i, \sigma_j]) \hat{a}_i \hat{b}_j \quad (0.0.21)$$

$$= \sum_i \sum_j \frac{1}{2} (2\delta_{ij} + 2i \sum_k \varepsilon_{ijk} \sigma_k) \hat{a}_i \hat{b}_j \quad (0.0.22)$$

$$= \sum_i \hat{a}_i \hat{b}_i + i \sum_k \sigma_k \sum_i \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} \hat{a}_i \hat{b}_j \quad (0.0.23)$$

$$= \hat{\mathbf{a}}^2 + i \sum_k \sigma_k (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{b}})_k \quad (0.0.24)$$

$$= \hat{\mathbf{a}}^2 + i \boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\mathbf{a}} \times \hat{\mathbf{b}}) \quad (0.0.25)$$

ここで ε_{ijk} は Levi-Civita の完全反対称テンソルで

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i, j, k) = (x, y, z), (y, z, x), (z, x, y) \\ -1 & (i, j, k) = (z, y, x), (y, x, z), (x, z, y) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (0.0.26)$$

である。これを使えば外積は

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_k = \sum_i \sum_j \varepsilon_{ijk} a_i b_j \quad (0.0.27)$$

と表される。また、 $\{\hat{A}, \hat{B}\}$ は反交換関係で

$$\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} \quad (0.0.28)$$

という演算子である。式 (??) を用いると

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A})][\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A})] = (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})^2 + i \boldsymbol{\sigma} \cdot [(\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A}) \times (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})] \quad (0.0.29)$$

$$= (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})^2 + i e \boldsymbol{\sigma} \cdot [(\mathbf{A} \times \hat{\mathbf{p}}) + (\hat{\mathbf{p}} \times e\mathbf{A})] \quad (0.0.30)$$

$$(0.0.31)$$

と変形される．ここで，

$$[(\mathbf{A} \times \hat{\mathbf{p}}) + (\hat{\mathbf{p}} \times e\mathbf{A})]\psi = (\mathbf{A} \times \hat{\mathbf{p}})\psi + (\hat{\mathbf{p}} \times \mathbf{A})\psi \quad (0.0.32)$$

$$= -i\hbar[(\mathbf{A} \times \nabla)\psi + (\nabla \times \mathbf{A})\psi] \quad (0.0.33)$$

$$= -i\hbar[\mathbf{A} \times (\nabla\psi) + (\nabla\psi) \times \mathbf{A} + (\nabla \times \mathbf{A})\psi] \quad (0.0.34)$$

$$= -i\hbar[-(\nabla\psi) \times \mathbf{A} + (\nabla\psi) \times \mathbf{A} + (\nabla \times \mathbf{A})\psi] \quad (0.0.35)$$

$$= -i\hbar(\nabla \times \mathbf{A})\psi \quad (0.0.36)$$

が成り立つ．以上より，

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A})][\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} + e\mathbf{A})] = (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})^2 + e\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \quad (0.0.37)$$

$$= (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})^2 + e\hbar\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \quad (0.0.38)$$

したがって，

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_a^0 = \left[\frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})^2 + \frac{e\hbar}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \right] \psi_a^0 \quad (0.0.39)$$

が得られる．右辺第2項 $\frac{e\hbar}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}$ は Zeeman 相互作用によるエネルギーを表す．これは磁場中の自由粒子の Schrödinger 方程式と一致している．つまり，電磁場中の自由粒子の Dirac 方程式の非相対論的極限は，電磁場中の自由粒子の Schrödinger 方程式と一致する．