

Schrödinger 表示の非定常摂動基本方程式は、式 (0.0.1) と式 (??) であり、

$$\begin{cases} i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = (\hat{H}^{(0)} + \hat{V}(t)) |\psi(t)\rangle \\ |\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) \exp\left(-i\frac{E_n}{\hbar}t\right) |n\rangle \end{cases} \quad (0.0.1)$$

と書けるのであった。相互作用表示 (interaction picture) を式 (0.0.2) のような  $|\psi(t)\rangle \rightarrow |\psi(t)\rangle_I$  の変換を行って得られる状態ベクトルと定義する。

相互作用表示

$$|\psi(t)\rangle_I := \exp\left(i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) |\psi(t)\rangle \quad (0.0.2)$$

式 (0.0.2) を用いて、式 (0.0.1) と等価な基本方程式である、相互作用表示の非定常摂動基本方程式を導く。まず、式 (0.0.1) の第 2 式を用いて、

$$|\psi(t)\rangle_I = \exp\left(i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \sum_n c_n(t) \exp\left(-i\frac{E_n}{\hbar}t\right) |n\rangle \quad (0.0.3)$$

$$= \sum_n c_n(t) \exp\left(-i\frac{E_n}{\hbar}t\right) \exp\left(i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) |n\rangle \quad (0.0.4)$$

$$= \sum_n c_n(t) \exp\left(-i\frac{E_n}{\hbar}t\right) \exp\left(i\frac{E_n}{\hbar}t\right) |n\rangle \quad (0.0.5)$$

$$= \sum_n c_n(t) |n\rangle \quad (0.0.6)$$

と計算できる。

次に、相互作用表示の時間微分を計算してみる。相互作用表示での摂動項  $\hat{V}_I$  を、

$$\hat{V}_I := \exp\left(i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \hat{V}(t) \exp\left(-i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \quad (0.0.7)$$

とする。計算の途中で、式 (0.0.1) の第 1 式を用いると、

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I = \frac{d}{dt} \left[ \exp\left(i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \right] |\psi(t)\rangle + \exp\left(i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle \quad (0.0.8)$$

$$= i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar} \exp\left(i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) |\psi(t)\rangle + \exp\left(i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \frac{1}{i\hbar} (\hat{H}^{(0)} + \hat{V}(t)) |\psi(t)\rangle \quad (0.0.9)$$

$$= \frac{i}{\hbar} \left[ \hat{H}^{(0)}, \exp\left(i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \right] |\psi(t)\rangle + \exp\left(i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \hat{V}(t) |\psi(t)\rangle \quad (0.0.10)$$

$$= \exp\left(i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \hat{V}(t) |\psi(t)\rangle \quad (0.0.11)$$

$$= \exp\left(i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \hat{V}(t) \exp\left(-i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \exp\left(i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) |\psi(t)\rangle \quad (0.0.12)$$

$$= \exp\left(i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \hat{V}(t) \exp\left(-i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) |\psi(t)\rangle_I \quad (0.0.13)$$

$$= \hat{V}_I(t) |\psi(t)\rangle_I \quad (0.0.14)$$

を得る．式 (0.0.14) と式 (0.0.7) は Schrödinger 表示の非定常摂動基本方程式と等価な方程式であるから，これを**朝永・Schwinger 方程式**と呼ぶ．<sup>1 2 3 4</sup>

朝永・Schwinger 方程式

$$\begin{cases} i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I = \hat{V}_I(t) |\psi(t)\rangle_I \\ \hat{V}_I(t) = \exp\left(i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \hat{V}(t) \exp\left(-i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \end{cases} \quad (0.0.15)$$

さて，定常状態の Schrödinger 方程式が，

$$\forall m \quad \hat{H}^{(0)} |m\rangle = E_m |m\rangle \quad (0.0.16)$$

を満たすとする．式 (0.0.15) の第 1 式に左から  $\langle m|$  を演算する．途中，式 (0.0.6) を用いて  $|\psi(t)\rangle_I$  を展開し，式 (0.0.15) の第 2 式を用いて  $\hat{V}_I(t)$  を  $\hat{V}(t)$  に戻す．また， $\hat{V}_I(t)$  は  $c_n(t)$  に作用しないものとする，

$$\left\langle m \left| i\hbar \frac{d}{dt} \right| \psi(t) \right\rangle_I = \left\langle m \left| \hat{V}_I(t) \right| \psi(t) \right\rangle_I \quad (0.0.17)$$

$$\Leftrightarrow \langle m | i\hbar \sum_n c_n(t) | n \rangle = \sum_n c_n(t) \left\langle m \left| \exp\left(i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \hat{V}(t) \exp\left(-i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \right| n \right\rangle \quad (0.0.18)$$

$$\Leftrightarrow i\hbar \sum_n \frac{d}{dt} c_n(t) \langle m | n \rangle = \sum_n c_n(t) \exp\left(-i\frac{E_n - E_m}{\hbar}t\right) \langle m | \hat{V}(t) | n \rangle \quad (0.0.19)$$

$$\Leftrightarrow i\hbar \frac{d}{dt} c_m(t) = \sum_n c_n(t) \exp\left(i\frac{E_m - E_n}{\hbar}t\right) \langle m | \hat{V}(t) | n \rangle \quad (0.0.20)$$

となる． $\omega_{mn}$  と  $V_{mn}$  を，

$$\omega_{mn} := \frac{E_m - E_n}{\hbar} \quad (0.0.21)$$

$$V_{mn}(t) := \langle m | \hat{V}(t) | n \rangle \quad (0.0.22)$$

と定義する．非定常摂動量子系の時間発展は以下の式を満たす．

非定常摂動量子系の時間発展

$$i\hbar \frac{d}{dt} c_m(t) = \sum_n c_n(t) V_{mn}(t) e^{i\omega_{mn}t} \quad (0.0.23)$$

これは  $c_n(t)$  の連立方程式になっていて，一般に解くことは困難である．例えば  $\hat{V}(t)$  が有限次元であり，行列表示ができたとすると式 (0.0.23) は，

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11}(t) & V_{12}(t)e^{i\omega_{12}t} & \cdots & V_{1n}(t)e^{i\omega_{1n}t} \\ (V_{12}(t)e^{i\omega_{12}t})^* & V_{22}(t) & \cdots & V_{2n}(t)e^{i\omega_{2n}t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (V_{1n}(t)e^{i\omega_{1n}t})^* & (V_{2n}(t)e^{i\omega_{2n}t})^* & \cdots & V_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad (0.0.24)$$

となる．途中で，

$$(V_{mn}(t)e^{i\omega_{mn}t})^* = V_{mn}(t)^* (e^{i\omega_{mn}t})^* \quad (0.0.25)$$

<sup>1</sup>Schrödinger 描像は量子状態が時間発展するとみなす．Heisenberg 描像は物理量が時間発展するとみなす．相互作用表示はその中間であるといえる．

<sup>2</sup>朝永振一郎 (1906-1979)

<sup>3</sup>Julian Schwinger (1918-1994)

<sup>4</sup>朝永と Schwinger は 1964 年に Richard Feynmann とともにノーベル賞を受賞．

$$= \langle m | \hat{V}(t) | n \rangle^* \exp \left( -i \frac{E_m - E_n}{\hbar} t \right) \quad (0.0.26)$$

$$= \langle n | \hat{V}(t) | m \rangle \exp \left( i \frac{E_n - E_m}{\hbar} t \right) \quad (0.0.27)$$

$$= (V_{nm}(t) e^{i\omega_{nm}t}) \quad (0.0.28)$$

を用いた。式 (0.0.24) の行列の部分も時間に依存することを考えると  $n$  が大きくなるときに厳密に解くことは困難である。

