前小節までで，角運動量の交換関係を満たす演算子は回転操作を生むことが分かった．まとめると，$\boldsymbol{n}$ 方向の角度 $\phi$ の回転は $\boldsymbol{\phi} = \phi\boldsymbol{n}$ として，

$$R(\boldsymbol{\phi}) = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{J}\right) \tag{0.0.1}$$

で与えられる．ここで，$\boldsymbol{J} = (J_1, J_2, J_3)$ は

$$[J_i, J_j] = \mathrm{i}\hbar\varepsilon_{ijk}J_k \tag{0.0.2}$$

を満たす．その一例として以下の行列がある．

$$J_1 = \mathrm{i}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ J_2 = \mathrm{i}\hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ J_3 = \mathrm{i}\hbar\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{0.0.3}$$

$z$ 軸に関する回転は

$$R(\phi\boldsymbol{e}_z) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\phi J_3\right) \tag{0.0.4}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{0.0.5}$$

となる．よく見る回転行列である．このような $R(\boldsymbol{\phi})$ が作用する 3 成分をもつ対象が 3 次元**ベクトル**である．

角運動量として Pauli 行列を採用してみる．

$$U(\boldsymbol{\phi}) = \exp\left(\mathrm{i}\boldsymbol{\phi}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) \tag{0.0.6}$$

この $U(\boldsymbol{\phi})$ が作用する対象が**スピノル**である．スピノルには驚くべき特徴がある．$z$ 軸方向の回転を考えてみる．

$$U(\phi\boldsymbol{e}_z) = \exp\left(\mathrm{i}\phi\sigma_z/2\right) \tag{0.0.7}$$

$$= \exp\left[\begin{pmatrix} -\mathrm{i}\dfrac{\phi}{2} & 0 \\ 0 & \mathrm{i}\dfrac{\phi}{2} \end{pmatrix}\right] \tag{0.0.8}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi/2} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2} \end{pmatrix} \tag{0.0.9}$$

に $\phi = 2\pi$ を代入してみる．

$$U(2\pi\boldsymbol{e}_z) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{0.0.10}$$

これは

$$U(2\pi\boldsymbol{e}_z)\left|\psi\right\rangle = -\left|\psi\right\rangle \tag{0.0.11}$$

となり，$z$ 軸まわりに 1 周回転させたときに，符号が逆になることを示している．さらにもう 1 回転させると元に戻る．これがベクトルとは大きく異なる特徴である．なお，位相の違いは観測に引っかからないため，物理的には問題はない．Ehrenfest はスピノルに対し，「等方的な 3 次元空間に棲む神秘的な種族」と言った．