z 方向の角運動量は

$$L_z = xp_y - yp_x \tag{0.0.1}$$

で定義される．量子力学では演算子を用いて，

$$\hat{L}_z = -\mathrm{i}\hbar(x\partial_y - y\partial_x) \tag{0.0.2}$$

と表される．上式を極座標に変換すると，

$$\hat{L}_z = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{0.0.3}$$

となる．ここで，ε_z を微小量とし，

$$\hat{U}(\varepsilon_z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varepsilon_z\hat{L}_z/\hbar} \tag{0.0.4}$$

を定義する．波動関数 $\psi(r,\theta,\phi)$ に**式** (0.0.4) を作用させると，

$$\begin{align}
\hat{U}(\varepsilon_z)\psi(r,\theta,\phi) &\simeq \left(\hat{I} - \mathrm{i}\varepsilon_z\frac{\hat{L}_z}{\hbar}\right)\psi(r,\theta,\phi) \tag{0.0.5}\\
&= \left(1 - \varepsilon_z\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\psi(r,\theta,\phi) \tag{0.0.6}\\
&= \psi(r,\theta,\phi-\varepsilon_z) \tag{0.0.7}
\end{align}$$

が得られる．よって，角運動量演算子から回転操作をつくることができることがわかる．同様に，$\hat{L}_x$ は x 軸まわりの回転を，$\hat{L}_y$ は y 軸まわりの回転を生む．

次に，角運動量の交換関係

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = \mathrm{i}\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k \tag{0.0.8}$$

が回転操作を定義することを確認する．以下の図 1 のような状況を考える．$\varepsilon_x, \varepsilon_y$ は微小量とする．一方のルートでは x 軸中心に ε_x 回転，y 軸中心に ε_y 回転させた後，x 軸中心に $-\varepsilon_x$ 回転，y 軸中心に $-\varepsilon_y$ 回転させている．これらの操作を加えた後の状況は，もう一方のルート，z 軸中心に θ_z 回転させたときと一致している．これを数式的に書く．あるベクトル $\boldsymbol{V}$ があるとする．これを x 軸，y 軸中心で回転させる行列はそれぞれ

$$\varepsilon_x R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon_x & -\sin\varepsilon_x \\ 0 & \sin\varepsilon_x & \cos\varepsilon_x \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\frac{1}{2}\varepsilon_x^2 & -\varepsilon_x \\ 0 & \varepsilon_x & 1-\frac{1}{2}\varepsilon_x^2 \end{pmatrix} \tag{0.0.9}$$

$$\varepsilon_y R_y = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon_y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varepsilon_y & 0 & \cos\varepsilon_y \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2}\varepsilon_y^2 & 0 & \varepsilon_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\varepsilon_y & 0 & 1-\frac{1}{2}\varepsilon_y^2 \end{pmatrix} \tag{0.0.10}$$

である．これを使うと，

$$\varepsilon_x R_x \to \varepsilon_y R_y \to -\varepsilon_x R_x \to -\varepsilon_y R_y \tag{0.0.11}$$

という操作は

$$\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2}\varepsilon_y^2 & 0 & -\varepsilon_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \varepsilon_y & 0 & 1-\frac{1}{2}\varepsilon_y^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\frac{1}{2}\varepsilon_x^2 & \varepsilon_x \\ 0 & -\varepsilon_x & 1-\frac{1}{2}\varepsilon_x^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2}\varepsilon_y^2 & 0 & \varepsilon_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\varepsilon_y & 0 & 1-\frac{1}{2}\varepsilon_y^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\frac{1}{2}\varepsilon_x^2 & -\varepsilon_x \\ 0 & \varepsilon_x & 1-\frac{1}{2}\varepsilon_x^2 \end{pmatrix} \tag{0.0.12}$$

$$\simeq \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_x\varepsilon_y & 0 \\ -\varepsilon_x\varepsilon_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{0.0.13}$$

$$= -\varepsilon_x\varepsilon_y R_z \tag{0.0.14}$$

と計算できる．よって，前述の図を用いた議論は数式的に保証されている．つまり，

$$\varepsilon_x R_x \to \varepsilon_y R_y \to -\varepsilon_x R_x \to -\varepsilon_y R_y = -\varepsilon_x\varepsilon_y R_z \tag{0.0.15}$$

ということである．この関係からも**式** (0.0.8) が回転操作を定義していることがわかるだろう．さらに，**式** (0.0.4) より，z 軸まわりに ε_z 回転させるユニタリ演算子 $\hat{U}[\varepsilon_z R_z]$ は

$$\hat{U}[\varepsilon_z R_z] = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon_z \hat{L}_z/\hbar} \simeq \hat{I} - \mathrm{i}\frac{\varepsilon_z}{\hbar}\hat{L}_z + \left(\frac{-\mathrm{i}}{\hbar}\right)^2 \varepsilon_z^2\hat{L}_z^2 + \cdots \tag{0.0.16}$$

と表される．x．y に関しても同様である．これらを用いて，

$$\varepsilon_x R_x \to \varepsilon_y R_y \to -\varepsilon_x R_x \to -\varepsilon_y R_y = -\varepsilon_x\varepsilon_y R_z \tag{0.0.17}$$

を角運動量演算子で表すと

$$\left(\hat{I} + \mathrm{i}\frac{\varepsilon_y}{\hbar}\hat{L}_y + \left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\right)^2 \varepsilon_y^2\hat{L}_y^2 + \cdots\right)\left(\hat{I} + \mathrm{i}\frac{\varepsilon_x}{\hbar}\hat{L}_x + \left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\right)^2 \varepsilon_x^2\hat{L}_x^2 + \cdots\right)\left(\hat{I} - \mathrm{i}\frac{\varepsilon_y}{\hbar}\hat{L}_y + \left(\frac{-\mathrm{i}}{\hbar}\right)^2 \varepsilon_y^2\hat{L}_y^2 + \cdots\right) \tag{0.0.18}$$

$$\left(\hat{I} - \mathrm{i}\frac{\varepsilon_x}{\hbar}\hat{L}_x + \left(\frac{-\mathrm{i}}{\hbar}\right)^2 \varepsilon_x^2\hat{L}_x^2 + \cdots\right) = \left(\hat{I} + \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\varepsilon_x\varepsilon_y\hat{L}_z + \cdots\right) \tag{0.0.19}$$

と書ける．上式の左辺を整理すると

$$\hat{I} - \left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\right)^2 \varepsilon_x\varepsilon_y[\hat{L}_x, \hat{L}_y] \tag{0.0.20}$$

である．よって，

$$\left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right] = \mathrm{i}\hbar\hat{L}_z \tag{0.0.21}$$

が成立する．角運動量演算子の交換関係 $\left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right] = \mathrm{i}\hbar\hat{L}_z$ は z 軸まわりの回転操作を意味していたのである．逆に，交換関係**式** (0.0.4) を満たす演算子 $\hat{\boldsymbol{L}}$ で

$$\hat{R}(\phi\boldsymbol{n}) = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\phi\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{L}\right) \tag{0.0.22}$$

というユニタリ演算子を作れば，それは $\boldsymbol{n}$ 軸まわりの角度 ϕ の回転操作を意味するのである．注目すべきは，以上の議論で $\hat{\boldsymbol{L}}$ の行列の次元や表現を指定していないことである．

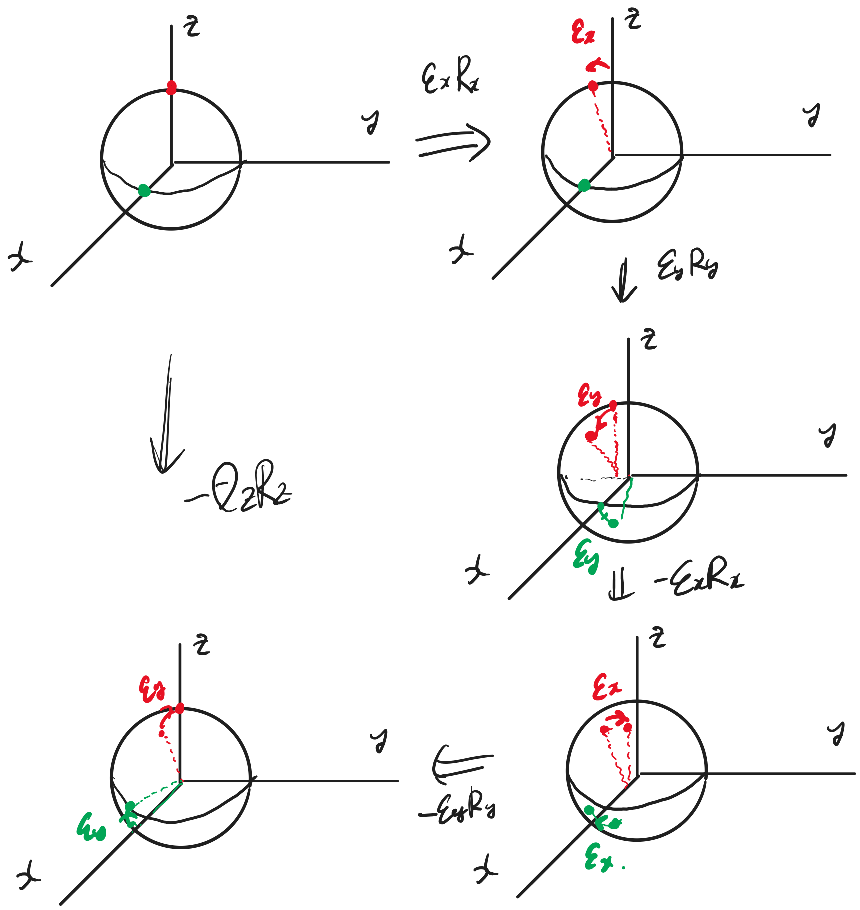

図 1: 回転操作