角運動量 $\boldsymbol{L}$ は Schrödinger 方程式においては保存されるが，Dirac 方程式では保存されない．本節ではこれを確認し，次節でスピンが自然に導入される．

角運動量演算子は

$$
\begin{align}
\hat{\boldsymbol{L}} &= \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}} \tag{0.0.1}\\
&= \begin{pmatrix} \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y \\ \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z \\ \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x \end{pmatrix} \tag{0.0.2}
\end{align}
$$

である．これは自由粒子の Schrödinger 方程式

$$
\begin{align}
\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi &= \hat{H}\psi \tag{0.0.3}\\
\hat{H} &= \frac{1}{2m}\left(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2\right) \tag{0.0.4}
\end{align}
$$

においては，$\hat{\boldsymbol{L}}$ とハミルトニアンが交換するため保存する．実際に計算してみる．

$$
\begin{align}
[\hat{H}, \hat{L}_x] &= \frac{1}{2m}[\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2, \hat{L}_x] \tag{0.0.5}\\
&= \frac{1}{2m}\Big([\hat{p}_x^2, \hat{L}_x] + [\hat{p}_y^2, \hat{L}_y] + [\hat{p}_z^2, \hat{L}_x]\Big) \tag{0.0.6}\\
&= \frac{1}{2m}\Big(\hat{p}_x[\hat{p}_x, \hat{L}_x] + [\hat{p}_x, \hat{L}_x]\hat{p}_x + \hat{p}_y[\hat{p}_y, \hat{L}_x] + [\hat{p}_y, \hat{L}_x]\hat{p}_y + \hat{p}_z[\hat{p}_z, \hat{L}_x] + [\hat{p}_z, \hat{L}_x]\hat{p}_z\Big) \tag{0.0.7}\\
&= \frac{1}{2m}(0 + 0 - \mathrm{i}\hbar\hat{p}_y\hat{p}_z - \mathrm{i}\hbar\hat{p}_z\hat{p}_y + \mathrm{i}\hbar\hat{p}_z\hat{p}_y + \mathrm{i}\hbar\hat{p}_y\hat{p}_z) \tag{0.0.8}\\
&= 0 \tag{0.0.9}
\end{align}
$$

$\hat{L}_y$ と $\hat{L}_z$ も同様であり，よって，

$$
[\hat{H}, \hat{\boldsymbol{L}}] = 0 \tag{0.0.10}
$$

であることがわかる[1]．つまり，角運動量は保存量である．

これを Dirac 方程式で計算する．

$$
\hat{H} = c\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} + \beta mc^2 \tag{0.0.14}
$$

を使うと，

$$
\begin{align}
[\hat{H}, \hat{L}_x] &= [c\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} + \beta mc^2, \hat{L}_x] \tag{0.0.15}\\
&= c\Big([\alpha_x\hat{p}_x, \hat{L}_x] + [\alpha_y\hat{p}_y, \hat{L}_x] + [\alpha_z\hat{p}_z, \hat{L}_x]\Big) + [\beta mc^2, \hat{L}_x] \tag{0.0.16}\\
&= c\Big(\alpha_x[\hat{p}_x, \hat{L}_x] + \alpha_y[\hat{p}_y, \hat{L}_x] + \alpha_z[\hat{p}_z, \hat{L}_x]\Big) \tag{0.0.17}\\
&= -\mathrm{i}\hbar c(\alpha_y\hat{p}_z - \alpha_z\hat{p}_y) \tag{0.0.18}
\end{align}
$$

が得られる．同様に，

$$
\begin{align}
[\hat{H}, \hat{L}_y] &= -\mathrm{i}\hbar c(\alpha_z\hat{p}_x - \alpha_x\hat{p}_z) \tag{0.0.19}\\
[\hat{H}, \hat{L}_z] &= -\mathrm{i}\hbar c(\alpha_x\hat{p}_y - \alpha_y\hat{p}_x) \tag{0.0.20}
\end{align}
$$

が得られる．よって，

$$
[\hat{H}, \hat{\boldsymbol{L}}] \neq 0 \tag{0.0.21}
$$

であり，角運動量が保存量ではないことがわかる．しかし，対称性から，全角運動量が保存されないのは不自然である．このことは **$\boldsymbol{L}$ 以外の角運動量が存在することを示唆している．**

[1] 上記の計算には

$$
\begin{align}
[\hat{L}_i, \hat{p}_j] &= [\varepsilon_{ijk}\hat{x}_j\hat{p}_k, \hat{p}_j] \tag{0.0.11}\\
&= \varepsilon_{ijk}(\hat{x}_j[\hat{p}_k, \hat{p}_j] + [\hat{x}_j, \hat{p}_j]\hat{p}_k) \tag{0.0.12}\\
&= \mathrm{i}\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{p}_k \tag{0.0.13}
\end{align}
$$

を用いた．