最後に，電磁場中の電子を考え，Dirac 方程式の非相対論的極限 ($|\hat{\boldsymbol{p}}| \ll c$) が Schrödinger 方程式であることを示す．Dirac 方程式は，

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = (c\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} + \beta mc^2)\psi \tag{0.0.1}$$

と書けるのであった．Dirac 方程式に電磁場を，

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{p}} \to \hat{\boldsymbol{p}} + e\boldsymbol{A} \quad e > 0 \\ \phi = 0 \end{cases} \tag{0.0.2}$$

のように導入する．**式** (0.0.2) を用いると，

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[c\boldsymbol{\alpha}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}} + e\boldsymbol{A}) + \beta mc^2\right]\psi \tag{0.0.3}$$

である．解の形を，

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} \tag{0.0.4}$$

とする．**式** (0.0.4) を**式** (0.0.3) に代入すると，

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}} + e\boldsymbol{A}) \\ c\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}} + e\boldsymbol{A}) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mc^2 & 0 \\ 0 & -mc^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} \tag{0.0.5}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = c\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}} + e\boldsymbol{A})\begin{pmatrix} \psi_b \\ \psi_a \end{pmatrix} + mc^2\begin{pmatrix} \psi_a \\ -\psi_b \end{pmatrix} \tag{0.0.6}$$

となる．また，粒子のエネルギーを静止質量エネルギー (mc^2) と非相対論的エネルギーの項 ($\varepsilon_{\mathrm{NR}}$) に分けて，

$$\varepsilon \sim mc^2 + \varepsilon_{\mathrm{NR}} \tag{0.0.7}$$

とする．波動関数の時間発展を，

$$\begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_a^{(0)} \\ \psi_b^{(0)} \end{pmatrix}\exp\left(-\mathrm{i}\frac{mc^2}{\hbar}t\right) \tag{0.0.8}$$

のように書く．**式** (0.0.8) を用いると**式** (0.0.6) は，

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = c\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}} + e\boldsymbol{A})\begin{pmatrix} \psi_b \\ \psi_a \end{pmatrix} + mc^2\begin{pmatrix} \psi_a \\ -\psi_b \end{pmatrix} \tag{0.0.9}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{i}\hbar\left[\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \psi_a^{(0)} \\ \psi_b^{(0)} \end{pmatrix} + \left(-\mathrm{i}\frac{mc^2}{\hbar}\right)\begin{pmatrix} \psi_a^{(0)} \\ \psi_b^{(0)} \end{pmatrix}\right]\exp\left(-\mathrm{i}\frac{mc^2}{\hbar}t\right) = c\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}} + e\boldsymbol{A})\begin{pmatrix} \psi_b^{(0)} \\ \psi_a^{(0)} \end{pmatrix}\exp\left(-\mathrm{i}\frac{mc^2}{\hbar}t\right) + mc^2\begin{pmatrix} \psi_a^{(0)} \\ -\psi_b^{(0)} \end{pmatrix}\exp\left(-\mathrm{i}\frac{mc^2}{\hbar}t\right) \tag{0.0.10}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \psi_a^{(0)} \\ \psi_b^{(0)} \end{pmatrix} = c\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}} + e\boldsymbol{A})\begin{pmatrix} \psi_b^{(0)} \\ \psi_a^{(0)} \end{pmatrix} - 2mc^2\begin{pmatrix} 0 \\ -\psi_b^{(0)} \end{pmatrix} \tag{0.0.11}$$

が得られる．**式** (0.0.11) の第 2 成分を抜き出して考える．両辺を mc^2 で割ると，

$$\frac{1}{mc^2}\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_b^{(0)}\right) = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}} + e\boldsymbol{A})}{mc}\psi_a^{(0)} - 2\psi_b^{(0)} \tag{0.0.12}$$

である．左辺は，

$$\frac{1}{mc^2}\left[\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\varepsilon_{\mathrm{NR}}}{\hbar}t\right)\right] \propto \frac{\varepsilon_{\mathrm{NR}}}{mc^2} \tag{0.0.13}$$

である．また，

$$\varepsilon_{\mathrm{NR}} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}^2}{2m} \tag{0.0.14}$$

だから非相対論的極限 ($|\hat{\boldsymbol{p}}| \ll c$) で左辺は 0 となる．よって，

$$\psi_b^{(0)} = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\boldsymbol{p}} + e\boldsymbol{A})}{2mc} \psi_a^{(0)} \tag{0.0.15}$$

を得る．**式** (0.0.15) は粒子解と反粒子解を結ぶ式である．また，**式** (0.0.15) から，反粒子の成分 $\psi_b^{(0)}$ は粒子の成分 $\psi_a^{(0)}$ より v/c のオーダーで小さく，非相対論的極限では重要ではないことがわかる．**式** (0.0.15) を用いると**式** (0.0.11) の第 1 成分は，

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_a^{(0)} = c\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\boldsymbol{p}} + e\boldsymbol{A}) \psi_b^{(0)} \tag{0.0.16}$$

$$= \frac{[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\boldsymbol{p}} + e\boldsymbol{A})][\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\boldsymbol{p}} + e\boldsymbol{A})]}{2m} \psi_a^{(0)} \tag{0.0.17}$$

と書き直される．$[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\boldsymbol{p}} + e\boldsymbol{A})][\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\boldsymbol{p}} + e\boldsymbol{A})]$ を計算する．Pauli 行列には，

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{a}})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{b}}) = (\sum_i \sigma_i \hat{a}_i)(\sum_j \sigma_j \hat{a}_j) \tag{0.0.18}$$

$$= \sum_i \sum_j \sigma_i \sigma_j \hat{a}_i \hat{b}_j \tag{0.0.19}$$

$$= \sum_i \sum_j \frac{1}{2} (\{\sigma_i, \sigma_j\} + [\sigma_i, \sigma_j]) \hat{a}_i \hat{b}_j \tag{0.0.20}$$

$$= \sum_i \sum_j \frac{1}{2} (2\delta_{i,j} + 2\mathrm{i} \sum_k \varepsilon_{ijk} \sigma_k) \hat{a}_i \hat{b}_j \tag{0.0.21}$$

$$= \sum_i \hat{a}_i \hat{b}_i + \mathrm{i}\sigma_k \sum_i \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} \hat{a}_i \hat{b}_j \tag{0.0.22}$$

$$= \hat{\boldsymbol{a}} \cdot \hat{\boldsymbol{b}} + \mathrm{i} \sum_k \sigma_k (\hat{\boldsymbol{a}} \times \hat{\boldsymbol{b}})_k \tag{0.0.23}$$

$$= \hat{\boldsymbol{a}} \cdot \hat{\boldsymbol{b}} + \mathrm{i}\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\boldsymbol{a}} \times \hat{\boldsymbol{b}}) \tag{0.0.24}$$

なる性質がある．ここで ε_{ijk} は Levi-Civita の完全反対称テンソルで

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i,j,k) = (x,y,z), (y,z,x), (z,x,y) \\ -1 & (i,j,k) = (z,y,x), (y,x,z), (x,z,y) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{0.0.25}$$

である．Levi-Civita の完全反対称テンソルを使えば外積は，

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_k = \sum_i \sum_j \varepsilon_{ijk} a_i b_j \tag{0.0.26}$$

と表される．また，$\left\{\hat{A}, \hat{B}\right\}$ は反交換関係で

$$\left\{\hat{A}, \hat{B}\right\} \coloneqq \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} \tag{0.0.27}$$

という演算子である．**式** (0.0.24) を用いると，

$$[\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\boldsymbol{p}} + e\boldsymbol{A})][\boldsymbol{\sigma} \cdot (\hat{\boldsymbol{p}} + e\boldsymbol{A})] = (\hat{\boldsymbol{p}} + e\boldsymbol{A})^2 + \mathrm{i}\boldsymbol{\sigma} \cdot [(\hat{\boldsymbol{p}} + e\boldsymbol{A}) \times (\hat{\boldsymbol{p}} + e\boldsymbol{A})] \tag{0.0.28}$$

$$= (\hat{\boldsymbol{p}} + e\boldsymbol{A})^2 + \mathrm{i}e\boldsymbol{\sigma} \cdot [(\boldsymbol{A} \times \hat{\boldsymbol{p}}) + (\hat{\boldsymbol{p}} \times e\boldsymbol{A})] \tag{0.0.29}$$

(0.0.30)

と変形される．ここで，

$$
\begin{aligned}
[(\boldsymbol{A}\times\hat{\boldsymbol{p}})+(\hat{\boldsymbol{p}}\times e\boldsymbol{A})]\psi &= (\boldsymbol{A}\times\hat{\boldsymbol{p}})\psi+(\hat{\boldsymbol{p}}\times\boldsymbol{A})\psi && (0.0.31)\\
&= -\mathrm{i}\hbar[(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{\nabla})\psi+(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\psi] && (0.0.32)\\
&= -\mathrm{i}\hbar[\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{\nabla}\psi)+(\boldsymbol{\nabla}\psi)\times\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\psi] && (0.0.33)\\
&= -\mathrm{i}\hbar[-(\boldsymbol{\nabla}\psi)\times\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{\nabla}\psi)\times\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\psi] && (0.0.34)\\
&= -\mathrm{i}\hbar(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\psi && (0.0.35)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．以上より，

$$
\begin{aligned}
[\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}}+e\boldsymbol{A})][\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{p}}+e\boldsymbol{A})] &= (\hat{\boldsymbol{p}}+e\boldsymbol{A})^2+e\hbar\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) && (0.0.36)\\
&= (\hat{\boldsymbol{p}}+e\boldsymbol{A})^2+e\hbar\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B} && (0.0.37)
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_a^{(0)} = \left[\frac{1}{2m}(\hat{\boldsymbol{p}}+e\boldsymbol{A})^2+\frac{e\hbar}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}\right]\psi_a^{(0)} \tag{0.0.38}
$$

が得られる．右辺第 2 項 $\frac{e\hbar}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}$ は Zeeman 相互作用によるエネルギーを表す．これは磁場中の自由粒子の Schrödinger 方程式と一致している．つまり，電磁場中の自由粒子の Dirac 方程式の非相対論的極限は，電磁場中の自由粒子の Schrödinger 方程式と一致する．