前節の最後に，一般に時間発展する量子系を正確に追跡すること，すなわち，$c_n(t)$ の厳密解を求めることが困難であると述べた．にもかかわらず，ある特殊な条件下では近似を行うことなく，厳密解を得ることができる．以下の**例題 0.1** では，そのような物理現象として **Rabi 振動** (Rabi cycle)[1] [2]を議論する．

例題 0.1: Rabi 振動

厳密に解くことのできる 2 準位系，

$$|1\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{0.0.1}$$

$$|2\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{0.0.2}$$

$$\hat{H}^{(0)} := \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \tag{0.0.3}$$

を考える．明らかに，E_1 と E_2 は $\hat{H}^{(0)}$ のエネルギー固有値で，それぞれに属する固有ベクトルは $|1\rangle$ と $|2\rangle$ である．この 2 準位系に，時刻 $t = 0$ から $\hat{V}(t)$ なる摂動を加える．ただし，$\hat{V}(t)$ は，

$$\hat{V}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma e^{i\omega t} \\ \gamma e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix} \tag{0.0.4}$$

によって与えられる[a]．系全体のハミルトニアンを $\hat{H} := \hat{H}^{(0)} + \hat{V}(t)$ とする．系の状態ベクトルを相互作用表示を用いて，

$$|\psi(t)\rangle_{\mathrm{I}} := c_1(t)\,|1\rangle + c_2(t)\,|2\rangle \tag{0.0.5}$$

と書いたとき，以下の問いに答えよ．

1. $c_1(t)$ と $c_2(t)$ の時間発展を調べよ．ただし，初期条件は $c_1(0) = 1$，$c_2(0) = 0$ とする．
2. 1. の条件のもとで，$c_2(t)$ の確率振幅が最大となる ω を求めよ．

[a] γ は摂動の強さを表す．

---

1. $c_1(t)$ と $c_2(t)$ の時間発展

   今回の設定での ω_{mn} や V_{mn} を計算すると，

$$\omega_{11} = \omega_{22} = 0 \tag{0.0.6}$$

$$\omega_{21} = -\omega_{12} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} \tag{0.0.7}$$

$$V_{11} = V_{22} = 0 \tag{0.0.8}$$

$$V_{21} = V_{12}^* = \gamma e^{-i\omega t} \tag{0.0.9}$$

   である．非定常摂動の時間発展の式より，

$$\begin{cases} i\hbar \dfrac{d}{dt} c_1(t) = c_1(t) V_{11} e^{i\omega_{11} t} + c_2(t) V_{12} e^{i\omega_{12} t} = c_2(t)\gamma e^{i(\omega+\omega_{12})t} \\ i\hbar \dfrac{d}{dt} c_2(t) = c_1(t) V_{21} e^{i\omega_{21} t} + c_2(t) V_{22} e^{i\omega_{22} t} = c_1(t)\gamma e^{-i(\omega-\omega_{21})t} \end{cases} \tag{0.0.10}$$

   が成り立つ．次に，$\Delta\omega := \omega - \omega_{21}$ として**式** (0.0.10) を解く．2 式目を 1 式目に代入して $c_1(t)$ を消去すると，

$$\frac{d^2}{dt^2} c_2(t) + i\Delta\omega \frac{d}{dt} c_2(t) + \left(\frac{\gamma}{\hbar}\right)^2 c_2 = 0 \tag{0.0.11}$$

[1] I.I.Rabi(1898 - 1988)
[2] 量子状態の振動を Rabi 振動という．

2 階の斉次微分方程式の解は $c_2(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}$ と書けるので，これを**式** (0.0.11) に代入すると，

$$\lambda^2 + \Delta\omega\lambda - \left(\frac{\gamma}{\hbar}\right) = 0 \tag{0.0.12}$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{\Delta\omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\hbar}\right)^2} \tag{0.0.13}$$

を得る．Ω を，

$$\Omega := \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\hbar}\right)^2} \tag{0.0.14}$$

と定義して，これを Rabi 周波数と呼ぶ．c_2 の一般解は，

$$c_2(t) = \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\left(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}\right) \tag{0.0.15}$$

と書ける．**式** (0.0.15) を**式** (0.0.10) の第 2 式に代入すると，

$$c_1(t) = \frac{\hbar}{\gamma}\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\left[\frac{\Delta\omega}{2}\left(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}\right) - \Omega\left(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} - B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Omega t}\right)\right] \tag{0.0.16}$$

となる．初期条件を考えると，

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = -\dfrac{\gamma}{\hbar\Omega} \end{cases} \tag{0.0.17}$$

であるから，

$$B = -A = \frac{\gamma}{2\hbar\Omega} \tag{0.0.18}$$

となる．よって，

$$c_1(t) = \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\left(\cos\Omega t - \mathrm{i}\frac{\Delta\omega}{2\Omega}\sin\Omega t\right) \tag{0.0.19}$$

$$c_2(t) = -\mathrm{i}\frac{\gamma}{\hbar\Omega}\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\Delta\omega}{2}t\right)\sin\Omega t \tag{0.0.20}$$

である．時刻 t で $|1\rangle$，$|2\rangle$ に状態を見出す確率，$|c_1(t)|^2$，$|c_2(t)|^2$ はそれぞれ，

$$|c_1(t)|^2 = \cos^2\Omega t + \left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2\frac{1}{\Omega^2}\sin^2\Omega t \tag{0.0.21}$$

$$|c_2(t)|^2 = \frac{\gamma^2}{\hbar^2\Omega^2}\sin^2\Omega t \tag{0.0.22}$$

である．簡単な計算により，$|c_1(t)|^2 + |c_2(t)|^2 = 1$ となることが容易に確かめられる．

2. $c_2(t)$ の振幅が最大となる ω の値
振幅の大きさは Ω の定義**式** (0.0.14) より，

$$\frac{(\gamma/\hbar)^2}{(\gamma/\hbar)^2 + (\Delta\omega/2)^2} \tag{0.0.23}$$

と表されるので，$\Delta\omega = \omega - \omega_{21} = 0$ のときに最大となる．つまり，摂動の周波数 ω と 2 準位のエネルギー差に由来する ω_{21} が一致したときに遷移が起こりやすい．

例題 0.1 では，Rabi 振動に関する 2 つの重要な物理量を得たので，下にまとめる．

Rabi 周波数

$$\Omega = \sqrt{(\Delta\omega/2)^2 + (\gamma/\hbar)^2} \tag{0.0.24}$$

共鳴条件

$$\omega = \omega_{21} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} \tag{0.0.25}$$