

波動関数 $\psi(\mathbf{r})$ を次のように変換する.

$$\psi(\mathbf{r}) \rightarrow \psi'(\mathbf{r}) = e^{i\alpha(\mathbf{r})}\psi(\mathbf{r}) \quad (0.0.1)$$

この場合, 運動量が Gauge 不変でなくなってしまう. 例えば波動関数の微分を計算すると

$$\nabla\psi'(\mathbf{r}) = i(\nabla\alpha(\mathbf{r})e^{i\alpha(\mathbf{r})})\psi(\mathbf{r}) + e^{i\alpha(\mathbf{r})}\nabla\psi(\mathbf{r}) = e^{i\alpha(\mathbf{r})}(\nabla + i\nabla\alpha(\mathbf{r}))\psi(\mathbf{r}) \quad (0.0.2)$$

余分な項が加わってしまう. よって,

$$\begin{cases} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi' \neq -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi' \\ \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle \neq \langle\psi'|\hat{A}|\psi'\rangle \end{cases} \quad (0.0.3)$$

である. したがって, 局所 Gauge 変換に対して物理は不変ではない.

局所 Gauge 不変性を基本原理とする物理を再構築する.

まずは, 微分を次の共変微分として再定義する.

$$\mathbf{D} = \nabla + i\frac{e}{\hbar}\mathbf{A} \quad (0.0.4)$$

ただし, ψ と \mathbf{A} は Gauge 変換により

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha}\psi \quad (0.0.5)$$

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} - \frac{\hbar}{e}\nabla\alpha(\mathbf{r}) \quad (0.0.6)$$

このように微分を定義すると,

$$\mathbf{D}'\psi'(\mathbf{r}) = e^{i\alpha(\mathbf{r})}\mathbf{D}\psi(\mathbf{r}) \quad (0.0.7)$$

つまり, 局所 Gauge 変換は波動関数の微分を

$$\mathbf{D}\psi(\mathbf{r}) \rightarrow e^{i\alpha(\mathbf{r})}\mathbf{D}\psi(\mathbf{r}) \quad (0.0.8)$$

と変換することがわかる. これは大域的 Gauge 変換による $\nabla\psi(\mathbf{r}) \rightarrow e^{i\alpha}\nabla\psi(\mathbf{r})$ と同じ形をしている.

次に, $\alpha(\mathbf{r})$ に時間依存性を持たせ, $\alpha(\mathbf{r}, t)$ とする. つまり波動関数を

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha(\mathbf{r}, t)}\psi \quad (0.0.9)$$

と変換する. このとき, 時間についての偏微分を

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} - i\frac{e}{\hbar}\phi \quad (0.0.10)$$

と定義する. ただし,

$$\phi \rightarrow \phi' + \frac{\hbar}{e}\frac{\partial}{\partial t}\alpha(\mathbf{r}, t) \quad (0.0.11)$$

である. 以上で定義した共変微分と時間微分を用いると Schrödinger 方程式は

$$i\hbar D_t'\psi' = -\frac{\hbar^2}{2m}\mathbf{D}'^2\psi' \quad (0.0.12)$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla + i\frac{e}{\hbar}\mathbf{A}\right)^2\psi - e\phi\psi \quad (0.0.13)$$

$$= \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{p} + i\frac{e}{\hbar}\mathbf{A}\right)^2 - e\phi\right]\psi \quad (0.0.14)$$

と変換される. よって,

局所 Gauge 変換に対して不変な Schrödinger 方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[\frac{1}{2m}(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 - e\phi\right]\psi \quad (0.0.15)$$

を得る.

以上の流れをまとめると, 局所 Gauge 不変性を要請した. それにより Gauge 場 \mathbf{A} が導入された. よって, 電磁場の起源は局所 Gauge 不変性であるといえる.