

Schrödinger 表示の非定常摂動基本方程式は、式 (0.0.1) と式 (??) であり、

$$\begin{cases} i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = (\hat{H}^{(0)} + \hat{V}(t)) |\psi(t)\rangle \\ |\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) \exp\left(-i\frac{E_n}{\hbar}t\right) |n\rangle \end{cases} \quad (0.0.1)$$

と書けるのであった。相互作用表示 (interaction picture) を式 (0.0.2) のような $|\psi(t)\rangle \rightarrow |\psi(t)\rangle_I$ の変換を行って得られる状態ベクトルと定義する。

相互作用表示

$$|\psi(t)\rangle_I := \exp\left(i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) |\psi(t)\rangle \quad (0.0.2)$$

式 (0.0.2) を用いて、式 (0.0.1) と等価な基本方程式である、相互作用表示の非定常摂動基本方程式を導く。まず、式 (0.0.1) の第 2 式を用いて、

$$|\psi(t)\rangle_I = \exp\left(i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \sum_n c_n(t) \exp\left(-i\frac{E_n}{\hbar}t\right) |n\rangle \quad (0.0.3)$$

$$= \sum_n c_n(t) \exp\left(-i\frac{E_n}{\hbar}t\right) \exp\left(i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) |n\rangle \quad (0.0.4)$$

$$= \sum_n c_n(t) \exp\left(-i\frac{E_n}{\hbar}t\right) \exp\left(i\frac{E_n}{\hbar}t\right) |n\rangle \quad (0.0.5)$$

$$= \sum_n c_n(t) |n\rangle \quad (0.0.6)$$

と計算できる。

次に、相互作用表示の時間微分を計算する。相互作用表示での摂動項 \hat{V}_I を、

$$\hat{V}_I := \exp\left(i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \hat{V}(t) \exp\left(-i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \quad (0.0.7)$$

とする。計算の途中で、式 (0.0.1) の第 1 式を用いると、

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I = i\hbar \frac{d}{dt} \left[\exp\left(i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \right] |\psi(t)\rangle + \exp\left(i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle \quad (0.0.8)$$

$$= -\hat{H}^{(0)} \exp\left(i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) |\psi(t)\rangle + \exp\left(i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) (\hat{H}^{(0)} + \hat{V}(t)) |\psi(t)\rangle \quad (0.0.9)$$

$$= \left[\exp\left(i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right), \hat{H}^{(0)} \right] |\psi(t)\rangle + \exp\left(i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \hat{V}(t) |\psi(t)\rangle \quad (0.0.10)$$

$$= \exp\left(i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \hat{V}(t) |\psi(t)\rangle \quad (0.0.11)$$

$$= \exp\left(i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \hat{V}(t) \exp\left(-i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \exp\left(i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) |\psi(t)\rangle \quad (0.0.12)$$

$$= \exp\left(i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \hat{V}(t) \exp\left(-i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) |\psi(t)\rangle_I \quad (0.0.13)$$

$$= \hat{V}_I(t) |\psi(t)\rangle_I \quad (0.0.14)$$

を得る。式 (0.0.14) と式 (0.0.7) は Schrödinger 表示の非定常摂動基本方程式と等価な方程式であるから、これを**朝永・Schwinger 方程式**と呼ぶ。^{12 3}

朝永・Schwinger 方程式

$$\begin{cases} i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I = \hat{V}_I(t) |\psi(t)\rangle_I \\ \hat{V}_I(t) = \exp\left(i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \hat{V}(t) \exp\left(-i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \end{cases} \quad (0.0.15)$$

さて、定常状態の Schrödinger 方程式が、

$$\forall m \quad \hat{H}^{(0)} |m\rangle = E_m |m\rangle \quad (0.0.16)$$

を満たすとする。式 (0.0.15) の第 1 式に左から $\langle m|$ を演算する。途中、式 (0.0.6) を用いて $|\psi(t)\rangle_I$ を展開し、式 (0.0.15) の第 2 式を用いて $\hat{V}_I(t)$ を $\hat{V}(t)$ に戻す。また、 $\hat{V}_I(t)$ は $c_n(t)$ に作用しないものとする、

$$\left\langle m \left| i\hbar \frac{d}{dt} \right| \psi(t) \right\rangle_I = \left\langle m \left| \hat{V}_I(t) \right| \psi(t) \right\rangle_I \quad (0.0.17)$$

$$\Leftrightarrow \langle m | i\hbar \sum_n \frac{d}{dt} c_n(t) |n\rangle = \sum_n c_n(t) \left\langle m \left| \exp\left(i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \hat{V}(t) \exp\left(-i\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \right| n \right\rangle \quad (0.0.18)$$

$$\Leftrightarrow i\hbar \sum_n \frac{d}{dt} c_n(t) \langle m | n \rangle = \sum_n c_n(t) \exp\left(-i\frac{E_m - E_n}{\hbar}t\right) \langle m | \hat{V}(t) | n \rangle \quad (0.0.19)$$

$$\Leftrightarrow i\hbar \frac{d}{dt} c_m(t) = \sum_n c_n(t) \exp\left(i\frac{E_m - E_n}{\hbar}t\right) \langle m | \hat{V}(t) | n \rangle \quad (0.0.20)$$

となる。 ω_{mn} と V_{mn} を、

$$\omega_{mn} := \frac{E_m - E_n}{\hbar} \quad (0.0.21)$$

$$V_{mn}(t) := \langle m | \hat{V}(t) | n \rangle \quad (0.0.22)$$

と定義する。非定常摂動量子系の時間発展は以下の式を満たす。

非定常摂動量子系の時間発展

$$\forall m \quad i\hbar \frac{d}{dt} c_m(t) = \sum_n c_n(t) V_{mn}(t) e^{i\omega_{mn}t} \quad (0.0.23)$$

これは $c_n(t)$ の連立方程式になっていて、一般に解くことは困難である。例えば $\hat{V}(t)$ が有限次元であり、行列表示ができたとすると式 (0.0.23) は、

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11}(t) & V_{12}(t)e^{i\omega_{12}t} & \cdots & V_{1n}(t)e^{i\omega_{1n}t} \\ (V_{12}(t)e^{i\omega_{12}t})^* & V_{22}(t) & \cdots & V_{2n}(t)e^{i\omega_{2n}t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (V_{1n}(t)e^{i\omega_{1n}t})^* & (V_{2n}(t)e^{i\omega_{2n}t})^* & \cdots & V_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad (0.0.24)$$

となる。途中で、

$$(V_{mn}(t)e^{i\omega_{mn}t})^* = V_{mn}(t)^* (e^{i\omega_{mn}t})^* \quad (0.0.25)$$

¹Schrödinger 描像は量子状態が時間発展するとみなす。Heisenberg 描像は物理量が時間発展するとみなす。相互作用表示はその中間であるといえる。

²朝永振一郎 (1906-1979), Julian Schwinger(1918-1994)

³朝永と Schwinger は 1964 年に Richard Feynmann とともにノーベル賞を受賞。

$$= \langle m | \hat{V}(t) | n \rangle^* \exp \left(-i \frac{E_m - E_n}{\hbar} t \right) \quad (0.0.26)$$

$$= \langle n | \hat{V}(t) | m \rangle \exp \left(i \frac{E_n - E_m}{\hbar} t \right) \quad (0.0.27)$$

$$= (V_{nm}(t) e^{i\omega_{nm}t}) \quad (0.0.28)$$

を用いた. 式 (0.0.24) の行列の部分も時間に依存することを考えると n が大きくなるときに厳密に解くことは困難である.

