特殊相対性理論 (Special Relativity) は次の 2 つの事柄を原理とする．

特殊相対性原理

あらゆる慣性系で同じ物理法則が成り立つ．

光速度不変の原理

あらゆる慣性形で進級中の光の速さは同一である．

この原理の下で成り立つ座標変換の法則 (Lorentz 変換) を導く．まず，慣性系 X 系の原点 O とと X' 系の原点 O' が $t = t' = 0$ で一致している．$t = t' = 0$ で光が原点 $(O = O')$ を通過したとする．X 系の空間座標を (x, y, z)，X' 系の空間座標を (x', y', z') とすると，光速度不変の原理より，

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{t} = \frac{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}{t'} = c \tag{0.0.1}$$

が成り立つ．上式から**世界長さ**

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 \tag{0.0.2}$$

が不変量であることが導かれる．

慣性系 X' が x 軸正の方向に速さ v で移動している．．このとき $y = y', z = z'$ である．わかりやすいように $T = it$ とおく．光速不変より，

$$x^2 - (ct)^2 = x'^2 - (ct')^2 \tag{0.0.3}$$

$$x^2 + (cT)^2 = x'^2 + (cT)^2 \tag{0.0.4}$$

が成り立つ．これが回転座標変換と類似していることから，

$$\begin{pmatrix} cT' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cT \\ x \end{pmatrix} \tag{0.0.5}$$

と置く．表示を t に戻すと

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{i}\sin\theta \\ \mathrm{i}\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \tag{0.0.6}$$

である．さらに，$\theta = \mathrm{i}\phi$ とすると

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & -\sinh\phi \\ -\sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \tag{0.0.7}$$

となる．よって，

$$x' = (-\sinh\phi)ct + (\cosh\phi)x \tag{0.0.8}$$

を得る．X 系において時刻 t が経過したとする．X 系から見るお X' 系の原点の位置は $x = vt$ である．一方，X' 系から見ると $x' = 0$ である．よって上式から

$$0 = (-\sinh\phi)ct + (\cosh\phi)vt \tag{0.0.9}$$

が成り立つ．よって，これを変形すると

$$\frac{v}{c} = \frac{\sinh\phi}{\cosh\phi} = \tanh\phi \tag{0.0.10}$$

である．以上より，

$$\begin{cases} \sinh\phi = \dfrac{v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \\ \cosh\phi = \dfrac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \end{cases} \tag{0.0.11}$$

であることがわかる．したがって，

Lorent 変換

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v/c \\ -v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \tag{0.0.12}$$

を得る．