

一様な磁場中の荷電粒子の運動を考える．磁場は z 軸と平行で大きさは B とする．これを満たすベクトルポテンシャルとして、

$$\begin{cases} A_x = 0 \\ A_y = Bx \\ A_z = 0 \end{cases} \quad (0.0.1)$$

を採用する． z に対しては対称なので、以降は xy 平面内での運動を考える．ハミルトニアンは、

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} [\hat{p}_x^2 + (\hat{p}_y + eB\hat{x})^2] \quad (0.0.2)$$

$$= \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{(eB)^2}{2m} \left(\hat{x} + \frac{\hat{p}_y}{eB} \right)^2 \quad (0.0.3)$$

である．このハミルトニアンは \hat{y} を含まないので、

$$[\hat{H}, \hat{p}_y] = 0 \quad (0.0.4)$$

であることがわかる． y 方向に関しては自由粒子の運動となる．また、 p_y の固有値が定まるので、これを $\hbar k_y$ とする．ハミルトニアンは、

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{(eB)^2}{2m} \left(\hat{x} + \frac{\hbar k_y}{eB} \right)^2 \quad (0.0.5)$$

と書き換えられ、これは調和振動子型のハミルトニアン、

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{m\omega_c^2 \hat{x}^2}{2} \quad (0.0.6)$$

と同じ形をしている．よって、エネルギー固有値は、

$$E = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (0.0.7)$$

$$\omega_c = \frac{|e|B}{m} \quad (0.0.8)$$

である．平面内の自由粒子のエネルギーが垂直磁場を加えることで離散化された．これを **Landau 準位** (Landau level) という¹．また、 ω_c を**サイクロトロン周波数**という．

次に、 x 方向に長さ L_x 、 y 方向に長さ L_y の周期的境界条件を課す．すると、

$$k_y = \frac{2\pi}{L_y} l \quad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (0.0.9)$$

となる．また x 方向の調和振動子は $\frac{\hbar k_y}{eB}$ だけずれている．これが 0 と L_x の間にあるためには、

$$0 \leq \frac{\hbar k_y}{eB} = \frac{\hbar}{eB} \frac{2\pi}{L_y} l \leq L_x \quad (0.0.10)$$

でなければならない．これは、

$$0 \leq l \leq \frac{eB}{2\pi\hbar} L_x L_y \quad (0.0.11)$$

と直される．よって、 l は $\frac{|e|B}{2\pi\hbar} L_x L_y$ 通りの値を取ることがわかる．したがって、単位面積当たりの縮退度は、

$$\frac{|e|B}{2\pi\hbar} \quad (0.0.12)$$

である．

¹この現象は量子 Hall 効果へとつながる．