

---

全角運動量以外の保存量としてヘリシティがある.

$$S = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \quad (0.0.1)$$

として, ヘリシティは,

$$h := \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \quad (0.0.2)$$

と定義される. これが保存量であることは,

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}})\hat{h} = \frac{1}{p} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \quad (0.0.3)$$

$$= \frac{1}{p} \begin{pmatrix} 0 & (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \\ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}) & 0 \end{pmatrix} \quad (0.0.4)$$

$$= \frac{1}{p} \begin{pmatrix} 0 & \hat{\mathbf{p}}^2 \\ \hat{\mathbf{p}}^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (0.0.5)$$

$$= \hat{h}(\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \quad (0.0.6)$$

であるから,

$$[\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}}, \hat{h}] = 0 \quad (0.0.7)$$

$$[\beta, \hat{h}] = 0 \quad (0.0.8)$$

となることより,

$$[\hat{H}, \hat{h}] = 0 \quad (0.0.9)$$

したがって, Dirac 方程式においてヘリシティは保存量である.