角運動量 $\boldsymbol{L}$ は Schrödinger 方程式においては保存されるが，Dirac 方程式では保存されない．本節ではこれを確認し，次節でスピンが自然に導入される．

0.0.1 Schrödinger 方程式における角運動量

角運動量演算子は，

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{L}} &= \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}} &(0.0.1)\\ &= \begin{pmatrix}\hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y\\ \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z\\ \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x\end{pmatrix} &(0.0.2)\end{aligned}$$

である．自由粒子の Schrödinger 方程式，

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi &= \hat{H}\psi &(0.0.3)\\ \hat{H} &= \frac{1}{2m}\left(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2\right) &(0.0.4)\end{aligned}$$

において，$\hat{H}$ と $\hat{L}_x$ の交換関係を計算すると，

$$\begin{aligned}\left[\hat{H}, \hat{L}_x\right] &= \frac{1}{2m}\left[\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2, \hat{L}_x\right] &(0.0.5)\\ &= \frac{1}{2m}\left(\left[\hat{p}_x^2, \hat{L}_x\right] + \left[\hat{p}_y^2, \hat{L}_y\right] + \left[\hat{p}_z^2, \hat{L}_x\right]\right) &(0.0.6)\\ &= \frac{1}{2m}\left(\hat{p}_x\left[\hat{p}_x, \hat{L}_x\right] + \left[\hat{p}_x, \hat{L}_x\right]\hat{p}_x + \hat{p}_y\left[\hat{p}_y, \hat{L}_x\right] + \left[\hat{p}_y, \hat{L}_x\right]\hat{p}_y + \hat{p}_{\left[\hat{p}_z, \hat{L}_x\right]} + \left[\hat{p}_z, \hat{L}_x\right]\hat{p}_z\right) &(0.0.7)\\ &= \frac{1}{2m}(0 + 0 - \mathrm{i}\hbar\hat{p}_y\hat{p}_z - \mathrm{i}\hbar\hat{p}_z\hat{p}_y + \mathrm{i}\hbar\hat{p}_z\hat{p}_y + \mathrm{i}\hbar\hat{p}_y\hat{p}_z) &(0.0.8)\\ &= 0 &(0.0.9)\end{aligned}$$

となる．$\hat{L}_y$ と $\hat{L}_z$ も同様であり，よって，

$$\left[\hat{H}, \hat{\boldsymbol{L}}\right] = 0 \qquad (0.0.10)$$

であることがわかる[1]．つまり，Schrödinger 方程式において角運動量は保存量である．

0.0.2 Dirac 方程式における角運動量

角運動量を Dirac 方程式で計算する．ハミルトニアン $\hat{H}$ は，

$$\hat{H} = c\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} + \beta mc^2 \qquad (0.0.14)$$

と書けるので，$\hat{H}$ と $\hat{L}_x$ の交換関係は，

$$\begin{aligned}\left[\hat{H}, \hat{L}_x\right] &= \left[c\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} + \beta mc^2, \hat{L}_x\right] &(0.0.15)\\ &= c\left(\left[\alpha_x\hat{p}_x, \hat{L}_x\right] + \left[\alpha_y\hat{p}_y, \hat{L}_x\right] + \left[\alpha_z\hat{p}_z, \hat{L}_x\right]\right) + \left[\beta mc^2, \hat{L}_x\right] &(0.0.16)\\ &= c\left(\alpha_x\left[\hat{p}_x, \hat{L}_x\right] + \alpha_y\left[\hat{p}_y, \hat{L}_x\right] + \alpha_z\left[\hat{p}_z, \hat{L}_x\right]\right) &(0.0.17)\\ &= -\mathrm{i}\hbar c(\alpha_y\hat{p}_z - \alpha_z\hat{p}_y) &(0.0.18)\end{aligned}$$

[1] 上記の計算には

$$\begin{aligned}[\hat{L}_i, \hat{p}_j] &= [\varepsilon_{ijk}\hat{x}_j\hat{p}_k, \hat{p}_j] &(0.0.11)\\ &= \varepsilon_{ijk}(\hat{x}_j[\hat{p}_k, \hat{p}_j] + [\hat{x}_j, \hat{p}_j]\hat{p}_k) &(0.0.12)\\ &= \mathrm{i}\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{p}_k &(0.0.13)\end{aligned}$$

を用いた．

が得られる．同様に，

$$\left[\hat{H}, \hat{L}_y\right] = -\mathrm{i}\hbar c(\alpha_z \hat{p}_x - \alpha_x \hat{p}_z) \tag{0.0.19}$$

$$\left[\hat{H}, \hat{L}_z\right] = -\mathrm{i}\hbar c(\alpha_x \hat{p}_y - \alpha_y \hat{p}_x) \tag{0.0.20}$$

が得られる．よって，

$$\left[\hat{H}, \hat{\boldsymbol{L}}\right] \neq 0 \tag{0.0.21}$$

であり，Dirac 方程式において角運動量が保存量ではないことがわかる．しかし，空間の等方性を考えると，全角運動量が保存されないのは不自然である．言い換えれば，Dirac 方程式において角運動量が保存量ではないことは **$\boldsymbol{L}$ 以外の角運動量が存在することを示唆している．**