本節では，次節にて行う部分波展開について，数学的な準備を行う．最初に，以下で扱う演算子のクラスであるStrum-Liouvillle 演算子についての性質を調べる．まず，Legendre 多項式と Legendre 陪多項式の性質を調べて，直交性を知る．次に，Bessel 微分方程式の解である Bessel 関数の表式を求めて，球 Bessel 関数と球 Neumann 関数，球 Hankel 関数を定義する．続いて，Legendre 多項式を用いて波動関数を展開して，展開係数 B_{ml} が満たすべき微分方程式を導く．最後に，展開係数 B_{ml} が球 Bessel 関数と球 Neumann 関数の線型結合で書けることを確かめて，線型結合の係数が波動関数を特徴づけるものだと知る．

0.0.1 Strum-Liouvillle 演算子の Hermite 性

$a < b$ として，$x \in [a, b]$ で定義された関数空間 V を考える．$\rho(x)$ を非負の実数関数として，$f, g \in V$ に対して，

$$\langle f, g\rangle \coloneqq \int_a^b f^*(x)g(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x \tag{0.0.1}$$

なる内積を入れる．関数空間 V 上の演算子として $\mathcal{L}$ を，

$$\mathcal{L} \coloneqq \frac{1}{\rho(x)}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right\} + q(x)\right] \tag{0.0.2}$$

とする．**式** (0.0.2) なる形をした演算子を Strum-Liouvillle 演算子という．境界条件を，$\forall f \in V$ について，

$$\begin{cases} f(a) = f(b) \\ p(a)f'(a) = p(b)f'(b) \end{cases} \tag{0.0.3}$$

とすると，

$$\langle f, \mathcal{L}g\rangle = \langle \mathcal{L}f, g\rangle \tag{0.0.4}$$

が成立する．**式** (0.0.4) なる関係が成り立つ演算子 $\mathcal{L}$ を Hermite 演算子という．

Proof. 内積の定義より，

$$\begin{aligned}
\langle f, \mathcal{L}g\rangle &= \int_a^b f^*(x)\frac{1}{\rho(x)}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)\right\} + q(x)g(x)\right]\rho(x)\,\mathrm{d}x && (0.0.5)\\
&= \int_a^b f^*(x)\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)\right\} + q(x)g(x)\right]\mathrm{d}x && (0.0.6)\\
&= \left[f^*(x)g'(x)\right]_a^b - \int_a^b f'^*(x)p(x)g'(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f^*(x)q(x)g(x)\,\mathrm{d}x && (0.0.7)\\
&= \left[f^*(x)p(x)g'(x)\right]_a^b - \left[f'^*(x)p(x)g(x)\right]_a^b + \int_a^b g(x)\frac{1}{\rho(x)}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^*(x)\right) + q(x)f^*(x)\right]\rho(x)\,\mathrm{d}x && (0.0.8)\\
&= \left[f^*(x)p(x)g'(x)\right]_a^b - \left[f'^*(x)p(x)g(x)\right]_a^b + \langle g, \mathcal{L}f\rangle^* && (0.0.9)\\
&= \left[f^*(x)p(x)g'(x)\right]_a^b - \left[g(x)p(x)f'^*(x)\right]_a^b + \langle \mathcal{L}f, g\rangle && (0.0.10)
\end{aligned}$$

となる．第 1 項と第 2 項について，第 1 項に $f(a) = f(b)$ を，第 2 項に $p(x)$ が実数値関数であり $p(a)f'(a) = p(b)f'(b)$ であることを用いると

$$\left[f^*(x)p(x)g'(x)\right]_a^b - \left[f'^*(x)p(x)g(x)\right]_a^b = \{p(b)g'(b) - p(a)f(a)\}f^*(a) - \{g(b) - g(a)\}p(a)f'(a) \tag{0.0.11}$$

を得る．今度は，第 1 項に $p(x)$ が実数値関数であり $p(a)g'(a) = p(b)g'(b)$ であることを，第 2 項に $g(a) = g(b)$ を用いれば，

$$\langle f, \mathcal{L}g\rangle = \langle \mathcal{L}f, g\rangle \tag{0.0.12}$$

を得る． □

0.0.2 Legendre 多項式

式 (0.0.2) において，$a=-b=1$ とする．また，

$$\rho(x) \coloneqq 1 \tag{0.0.13}$$
$$p(x) \coloneqq 1-x^2 \tag{0.0.14}$$
$$q(x) \coloneqq -\frac{m^2}{1-x^2},\ m\in\{0,1,\cdots\} \tag{0.0.15}$$

とすると，

$$\mathcal{L}_m = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right\} - \frac{m^2}{1-x^2} \tag{0.0.16}$$

となる．関数の内積は，

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f^*(x)g(x)\,\mathrm{d}x \tag{0.0.17}$$

と定義しておく．また，境界条件は，

$$p(\pm1)f^*(\pm1)g'(\pm1)=0 \tag{0.0.18}$$

とする．これより，演算子 $\mathcal{L}$ が Hermite 演算子であると確かめられる．たとえば，$g'(x)=p(x)$ となるように $g(x)$ を定めれば，$f(1)=f(-1)=0$ となる．また，$f(x)=1$ となるように $f(x)$ を定めれば，$p(1)g'(1)=p(-1)g'(1)=0$ となるので，前節で示した境界条件を満足する．さて，Legendre 多項式 $P_n(x)$ は n を非負整数として，

$$\mathcal{L}_0 P_n(x) = -n(n+1)P_n(x) \tag{0.0.19}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_n(x)\right\} = -n(n+1)P_n(x) \tag{0.0.20}$$

なる $P_n(x)$ のうち，$x=0$ 周りで級数展開したもので，

$$P_n(x)=\sum_{j=0}^{\infty}u_jx^j \tag{0.0.21}$$

と書いたとき，

$$u_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} \tag{0.0.22}$$
$$u_{n+1}=0 \tag{0.0.23}$$

なるものである．**式** (0.0.21) を**式** (0.0.20) に代入すると，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{j=0}^{\infty}u_jx^j\right\} = -n(n+1)\sum_{j=0}^{\infty}u_jx^j \tag{0.0.24}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\infty}ju_j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^{j-1}-x^{j+1}\right) = -n(n+1)\sum_{j=0}^{\infty}u_jx^j \tag{0.0.25}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\infty}j(j-1)u_jx^{j-2} - \sum_{j=0}^{\infty}j(j+1)u_jx^j = -n(n+1)\sum_{j=0}^{\infty}u_jx^j \tag{0.0.26}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\infty}j(j-1)u_jx^{j-2} = \sum_{j=0}^{\infty}u_j[j(j+1)-n(n+1)]x^j \tag{0.0.27}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{j=2}^{\infty}j(j-1)u_jx^{j-2} = \sum_{j=0}^{\infty}u_j[j(j+1)-n(n+1)]x^j \tag{0.0.28}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)(j+2)u_{j+2}x^j = \sum_{j=0}^{\infty}u_j[j(j+1)-n(n+1)]x^j \tag{0.0.29}$$

となるから，

$$(j+1)(j+2)u_{j+2} = [j(j+1)-n(n+1)]u_j \tag{0.0.30}$$

なる漸化式が成立する．**式** (0.0.30) において $j=n$ を代入すると，$u_{n+2}=0$ となる．また，$j=n+1$ を代入すると**式** (0.0.23) より $u_{n+1}=0$ である．よって，

$$0 = u_{n+1} = u_{n+2} = u_{n+3} = u_{n+4} = \cdots \tag{0.0.31}$$

となる．また，**式** (0.0.30) に $j=n-2$ を代入すると，

$$u_{n-2} = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}u_n \tag{0.0.32}$$

となる．よって，**式** (0.0.22) と**式** (0.0.32) を用いて**式** (0.0.21) を表すと，

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} + \cdots\right] \qquad (0.0.33) \\ &= \sum_{s=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}(-1)^s\frac{(2n-2s)!}{2^n s!(n-s)!(n-2s)!}x^{n-2s} \qquad (0.0.34) \end{aligned}$$

となる．なお，Legendre 多項式は，

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^2-1\right)^n &= \sum_{s=0}^{n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(-1)^s\binom{n}{k}x^{2n-2k} \qquad (0.0.35) \\ &= \sum_{s=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}(-1)^s\frac{n!}{s!(n-s)!}\frac{(2n-2s)!}{(n-2k)!} \qquad (0.0.36) \end{aligned}$$

なる関係を用いると，

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^2-1\right)^n \tag{0.0.37}$$

となる．

0.0.3 Legendre 陪多項式

Legendre 陪多項式 $P_n^m(x)$ は $m \leq n$ として，

$$P_n^m(x) \coloneqq \left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_n(x) \tag{0.0.38}$$

と定義されて，**式** (0.0.37) を用いれば，

$$\begin{aligned} P_n^m(x) &= \left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_n(x) \qquad (0.0.39) \\ &= \left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^2-1\right)^n \qquad (0.0.40) \\ &= \frac{1}{2^n n!}\left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}}\left(x^2-1\right)^n \qquad (0.0.41) \end{aligned}$$

となる．また，P_n^m は Legendre の陪微分方程式，

$$\mathcal{L}_m P_n^m(x) + n(n+1)P_n^m(x) = 0 \tag{0.0.42}$$

を満たす．Legendre 陪多項式の直交性は $\mathcal{L}_m$ が Hermite 演算子であり，その固有関数である $P_n^m(x)$ が直交することより従う．自分自身との内積，つまり，$\langle P_n^m(x), P_n^m(x)\rangle$ の値を計算する．**式** (0.0.41) を用いて，**式** (0.0.17) で示した内積の定義に従って計算する．$n+m$ 回部分積分を行うと，

$$
\begin{aligned}
\langle P_n^m(x), P_n^m(x)\rangle &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\left(1-x^2\right)^m\left\{\frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}}\left(x^2-1\right)^m\right\}\left\{\frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}}\left(x^2-1\right)^m\right\}\mathrm{d}x && (0.0.43)\\
&= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^m\left\{\frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}}\left(x^2-1\right)^m\right\}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{\mathrm{d}^{n+m-1}}{\mathrm{d}x^{n+m-1}}\left(x^2-1\right)^m\right\}\mathrm{d}x && (0.0.44)\\
&= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\left[\left(1-x^2\right)^m\left\{\frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}}\left(x^2-1\right)^m\right\}\left\{\frac{\mathrm{d}^{n+m-1}}{\mathrm{d}x^{n+m-1}}\left(x^2-1\right)^m\right\}\right]_{-1}^{1} && (0.0.45)\\
&\quad - \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1-x^2\right)^m\left\{\frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}}\left(x^2-1\right)^n\right\}\right\}\left\{\frac{\mathrm{d}^{n+m+1}}{\mathrm{d}x^{n+m+1}}\left(x^2-1\right)^m\right\}\mathrm{d}x && (0.0.46)\\
&= -\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1-x^2\right)^m\left\{\frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}}\left(x^2-1\right)^n\right\}\right\}\left\{\frac{\mathrm{d}^{n+m+1}}{\mathrm{d}x^{n+m+1}}\left(x^2-1\right)^m\right\}\mathrm{d}x && (0.0.47)\\
&= \cdots && (0.0.48)\\
&= \frac{(-1)^{n+m}}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^n\left\{\frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}}\left(1-x^2\right)^m\left\{\frac{\mathrm{d}^{n+m}}{\mathrm{d}x^{n+m}}\left(x^2-1\right)^n\right\}\right\}\mathrm{d}x && (0.0.49)\\
&= \frac{(-1)^{n+m}}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^n\left[\sum_{k=0}^{n+m}\binom{n+m}{k}\left\{\frac{\mathrm{d}^{n+m-k}}{\mathrm{d}x^{n+m-k}}\left(1-x^2\right)^m\right\}\left\{\frac{\mathrm{d}^{n+m+k}}{\mathrm{d}x^{n+m+k}}\left(x^2-1\right)^n\right\}\right]\mathrm{d}x && (0.0.50)
\end{aligned}
$$

となる．最終行で Leibniz の公式を用いた．**式** (0.0.50) の和の中の $n+m-k$ 階微分と $n+m-k$ 階微分を考える．$\left(1-x^2\right)^m$ と $(x^2-1)^n$ の最高次数は，それぞれ $2m$ と $2n$ であるから，$2m \geq n+m-k$ かつ $2n \geq n+m+k$ なる k でのみ和の中は 0 でなくなる．つまり，$n-m \leq k$ かつ $n-m \geq k$ なる k は $k=n-m$ のみである．よって，**式** (0.0.50) は，

$$
\begin{aligned}
\langle P_n^m(x), P_n^m(x)\rangle &= \frac{(-1)^{n+m}}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^n\left[\sum_{k=0}^{n+m}\binom{n+m}{k}\left\{\frac{\mathrm{d}^{n+m-k}}{\mathrm{d}x^{n+m-k}}\left(1-x^2\right)^m\right\}\left\{\frac{\mathrm{d}^{n+m+k}}{\mathrm{d}x^{n+m+k}}\left(x^2-1\right)^n\right\}\right]\mathrm{d}x && (0.0.51)\\
&= \frac{(-1)^{n+m}}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^n\left[\binom{n+m}{n-m}\left\{\frac{\mathrm{d}^{2m}}{\mathrm{d}x^{2m}}\left(1-x^2\right)^m\right\}\left\{\frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}x^{2n}}\left(x^2-1\right)^n\right\}\right]\mathrm{d}x && (0.0.52)\\
&= \frac{(-1)^{n+m}}{2^{2n}(n!)^2}(-1)^m(2m)!(2n)!\frac{(n+m)!}{(n-m)!(2m)!}\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^n\mathrm{d}x && (0.0.53)
\end{aligned}
$$

積分は，$x=\cos\theta$ と置換すると，

$$
\int_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^n\mathrm{d}x = (-1)n\int_{-1}^{1}\sin^{2n+1}\theta\,\mathrm{d}\theta \tag{0.0.54}
$$

となる．I_{2n+1} を，

$$
I_{2n+1} \coloneqq \int_0^{\pi}\sin^{2n+1}\theta\,\mathrm{d}\theta \tag{0.0.55}
$$

と定義すると，

$$
\begin{aligned}
I_{2n+1} &= \int_0^{\pi}\sin^{2n}\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(-\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta && (0.0.56)\\
&= \left[\sin^{2n}\theta\cdot(-\cos\theta)\right]_0^{\pi} + 2n\int_0^{\pi}\sin^{2n-1}\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta && (0.0.57)\\
&= 2nI_{2n-1} - 2nI_{2n+1} && (0.0.58)
\end{aligned}
$$

となるので，

$$
\begin{aligned}
I_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} && (0.0.59)\\
&= \frac{2n}{2n+1}\frac{2n-2}{2n-1} I_{2n-3} && (0.0.60)\\
&= \cdots && (0.0.61)\\
&= \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} I_1 && (0.0.62)\\
&= 2\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} && (0.0.63)\\
&= 2\cdot 2^n n! \cdot \frac{2^n n!}{(2n+1)!} && (0.0.64)
\end{aligned}
$$

となる．2 重階乗について，

$$
\begin{aligned}
(2n)!! &= 2^n n! && (0.0.65)\\
(2n+1)!! &= \frac{(2n+1)!}{(2n)!!} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!} && (0.0.66)
\end{aligned}
$$

なる関係が成り立つことを用いると，

$$
\begin{aligned}
\langle P_n^m(x), P_n^m(x)\rangle &= \frac{(-1)^{n+m}}{2^{2n}(n!)^2}(-1)^m(2m)!(2n)!\frac{(n+m)!}{(n-m)!(2m)!}(-1)^n 2\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} && (0.0.67)\\
&= \frac{(-1)^{n+m}}{2^{2n}(n!)^2}(-1)^m(2m)!(2n)!\frac{(n+m)!}{(n-m)!(2m)!}(-1)^n 2\cdot 2^n n!\cdot\frac{2^n n!}{(2n+1)!} && (0.0.68)\\
&= \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!} && (0.0.69)
\end{aligned}
$$

となる．Legendre 多項式の直交性とまとめて書くと，

$$
\langle P_{n'}^m(x), P_n^m(x)\rangle = \delta_n^{n'}\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!} \qquad (0.0.70)
$$

となる．

0.0.4 Bessel 関数

Legendre 陪多項式を考えていたときとは別の Strum-Liouvillle 演算子を考える．式 (0.0.2) において，$a \to 0$，$b \to a$ とする．また，

$$
\begin{aligned}
\rho(z) &\coloneqq x && (0.0.71)\\
p(z) &\coloneqq x && (0.0.72)\\
q(z) &\coloneqq -\frac{\nu^2}{z},\ \nu \geq 0 && (0.0.73)
\end{aligned}
$$

とする．すなわち，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_\nu &= \frac{1}{z}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left\{z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right\} - \frac{\nu^2}{z}\right] && (0.0.74)\\
\langle f, g\rangle &= \int_0^a f^*(z)g(z)x\,\mathrm{d}z && (0.0.75)
\end{aligned}
$$

である．さて，

$$
\mathcal{L}_\nu J_\nu(z) = -J_\nu(z) \qquad (0.0.76)
$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}+\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}+1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)=0 \tag{0.0.77}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}J_\nu(z)+\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}J_\nu(z)-\frac{\nu^2}{z^2}J_\nu(z)=J_\nu(z) \tag{0.0.78}$$

なる $J_\nu(z)$ を考える．1 階微分の項と微分をしない項は $z=0$ で発散するが，それぞれ z と z^2 をかければ発散しないので確定特異点である．このとき，$z=0$ の周りで $J_\nu(z)$ を指数 α の Frobenius 展開をすると，

$$J_\nu(z)=z^\alpha\sum_n u_n z^n \tag{0.0.79}$$

となる．ただし，計算の簡単のために $n<0$ なる任意の n に対して $u_n=0$ と定めた．また，$u_0\neq 0$ とする．**式** (0.0.79) を**式** (0.0.78) に代入することを考える．$J_\nu(z)$ の 1 階微分と 2 階微分が，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}J_\nu(z)=\sum_n(n+\alpha)u_nz^{n+\alpha-1} \tag{0.0.80}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}J_\nu(z)=\sum_n(n+\alpha)(n+\alpha-1)u_nz^{n+\alpha-2} \tag{0.0.81}$$

と書けることを用いると，

$$\sum_n\left[(n+\alpha)(n+\alpha-1)+(n+\alpha)-\nu^2\right]u_nz^{n+\alpha-2}=-\sum_n u_nz^{n+\alpha} \tag{0.0.82}$$

$$\Leftrightarrow \sum_n\left[(n+\alpha)(n+\alpha-1)+(n+\alpha)-\nu^2\right]u_nz^{n+\alpha-2}=-\sum_n u_{n-2}z^{n+\alpha-2} \tag{0.0.83}$$

となる．係数を比較すると，

$$\left[(n+\alpha)^2-\nu^2\right]u_n=-u_{n-2} \tag{0.0.84}$$

となる．**式** (0.0.84) に $n=1$ を代入すると $u_{-1}=0$ より，

$$0=u_1=u_3=\cdots \tag{0.0.85}$$

を得る．また，$n=0$ を代入すると $u_0\neq 0$ より，

$$(0+\alpha)^2-\nu^2=0 \tag{0.0.86}$$

$$\Rightarrow \alpha=\pm\mu \tag{0.0.87}$$

となる．$\alpha=\nu$ を採用して**式** (0.0.84) を用いると，

$$u_{n+2}=-\frac{1}{(n+\nu+2)^2-\nu^2}u_n \tag{0.0.88}$$

を得る．$\nu\in\mathbb{Z}$ のときは，

$$J_\nu(z)=u_0z^\nu\left(1-\frac{1}{2(2\nu+2)}z^2+\frac{1}{2\cdot4(2\nu+2)(2\nu+4)}z^4+\cdots+(-1)^n\frac{(2\nu)!!}{(2n)!!(2\nu+2n)!!}z^{2n}+\cdots\right) \tag{0.0.89}$$

$$=u_0z^\nu\sum_{n=0}(-1)^n\frac{2^\nu\nu!}{2^nn!(\nu+n)!2^{\nu+n}}z^{2n} \tag{0.0.90}$$

$$=u_0\nu!2^\nu\sum_{n=0}\frac{1}{n!(\nu+n)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2n} \tag{0.0.91}$$

となる．$\nu\notin\mathbb{Z}$ のときも，表せるようにガンマ関数をもちいて一般化する．**式** (0.0.78) の形より，明らかに定数倍が許容されるから，

$$u_0=\frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)} \tag{0.0.92}$$

となるように u_0 を定めておくと，

$$J_\nu(z) = \sum_n \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2n} \tag{0.0.93}$$

を得る．$J_\nu(z)$ を Bessel 関数という．また，$\alpha = -\nu$ を採用したときは，

$$J_{-\nu}(z) = \sum_n \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(-\nu+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu+2n} \tag{0.0.94}$$

となり，これは $\nu \notin \mathbb{Z}$ のときに $J_\nu(z)$ と独立な解となることが示せる．$J_{-\nu}(z)$ を Neumann 関数という．

得られた Bessel 関数と Neumann 関数を用いて，

$$j_n(z) \coloneqq \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+\frac{1}{2}}(z) \tag{0.0.95}$$

$$y_n(z) \coloneqq (-1)^{n+1}\sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{-n-\frac{1}{2}}(z) \tag{0.0.96}$$

$$\tag{0.0.97}$$

を定義する．$j_n(z)$ と $y_n(z)$ はそれぞれ，球 Bessel 関数，球 Neumann 関数という．さらに，球 Bessel 関数と球 Neumann 関数を用いて，

$$h_n^{(1)}(z) \coloneqq j_n(z) + \mathrm{i}y_n(z) \tag{0.0.98}$$

$$h_n^{(2)}(z) \coloneqq j_n(z) - \mathrm{i}y_n(z) \tag{0.0.99}$$

を定義する．$h_n^{(1)}$ と $h_n^{(2)}$ はそれぞれ，第 1 種 Hankel 関数，第 2 種 Hankel 関数という．

0.0.5 Helmholtz 方程式

Helmholtz 方程式，

$$(\boldsymbol{\nabla}^2 + \kappa^2)u(r,\theta,\phi) = 0 \tag{0.0.100}$$

を考える．$u(\boldsymbol{r})$ を正規直交基底である $\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$ で展開すると，

$$A_m(r,\theta) \coloneqq \int_0^{2\pi} u(r,\theta,\phi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi}\,\mathrm{d}\phi \tag{0.0.101}$$

$$u(r,\theta,\phi) = \sum_m A_m(r,\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi} \tag{0.0.102}$$

$$\tag{0.0.103}$$

となる．また，極座標ラプラシアンは，

$$\boldsymbol{\nabla}^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \tag{0.0.104}$$

である．**式** (0.0.100) に**式** (0.0.104) を用いて，**式** (0.0.102) を代入すると，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\sum_m A_m(r,\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\sum_m A_m(r,\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\sum_m A_m(r,\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}\\
&+\kappa^2\sum_m A_m(r,\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi} = 0
\end{aligned} \tag{0.0.105}$$

$$\Leftrightarrow \sum_m \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}A_m(r,\theta)\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}A_m(r,\theta)\right) - \frac{m^2}{r^2\sin^2\theta}A_m(r,\theta) + \kappa^2 A_m(r,\theta)\right] = 0 \tag{0.0.106}$$

となる．式 (0.0.106) に左から $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\phi}$ をかける，すなわち，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi}$ に射影すると，

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}A_m(r,\theta)\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}A_m(r,\theta)\right)-\frac{m^2}{r^2\sin^2\theta}A_m(r,\theta)+\kappa^2A_m(r,\theta)=0 \tag{0.0.107}$$

を得る．Legendre 陪多項式を定義するときに用いた $\mathcal{L}_m$ において，$x=\cos\theta$ とすると，

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_m &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{(1-\cos^2\theta)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right\}-\frac{m^2}{1-\cos^2\theta} && (0.0.108)\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\sin^2\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right\}-\frac{m^2}{\sin^2\theta} && (0.0.109)\\
&= \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\sin^2\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right\}-\frac{m^2}{\sin^2\theta} && (0.0.110)\\
&= -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\sin^2\theta\left(-\frac{1}{\sin\theta}\right)\right\}-\frac{m^2}{\sin^2\theta} && (0.0.111)\\
&= \frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\right\}-\frac{m^2}{\sin^2\theta} && (0.0.112)
\end{aligned}$$

であるから，式 (0.0.107) は，

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}A_m(r,\theta)\right)+\frac{1}{r^2}\mathcal{L}_{|m|}A_m(r,\theta)+\kappa^2A_m(r,\theta)=0 \tag{0.0.113}$$

となる．

続いて，$A_m(r,\theta)$ を直交基底である Legendre 陪多項式を用いて，

$$A_m(r,\theta)=\sum_{n=|m|}^{\infty}B_{nm}(r)P_n^{|m|}(\cos\theta) \tag{0.0.114}$$

と展開する．式 (0.0.113) の両辺に $P_n^{|m|}(\cos\theta)$ との内積をとる．式 (0.0.70) より，

$$\langle P_n^m(\cos\theta),P_n^m(\cos\theta)\rangle=\delta_n^{n'}\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!} \tag{0.0.115}$$

であることと，式 (0.0.42) より，

$$\mathcal{L}_mP_n^m(x)+n(n+1)P_n^m(x)=0 \tag{0.0.116}$$

であることを用いれば，

$$\begin{aligned}
&\left\langle P_n^m(\cos\theta),\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}A_m(r,\theta)\right)+\frac{1}{r^2}\mathcal{L}_{|m|}A_m(r,\theta)+\kappa^2A_m(r,\theta)\right\rangle=0 && (0.0.117)\\
\Leftrightarrow&\frac{1}{r^2}\left\langle P_n^m(\cos\theta),\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}A_m(r,\theta)\right)\right\rangle+\frac{1}{r^2}\left\langle P_n^m(\cos\theta),\mathcal{L}_{|m|}A_m(r,\theta)\right\rangle+\left\langle P_n^m(\cos\theta),\kappa^2A_m(r,\theta)\right\rangle=0 && (0.0.118)\\
\Leftrightarrow&\frac{1}{r^2}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}r^2\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}B_{nm}(r)\right\}\right\}\langle P_n^m(\cos\theta),P_n^m(\cos\theta)\rangle+\frac{1}{r^2}B_{nm}(r)\left\langle P_n^m(\cos\theta),\mathcal{L}_{|m|}P_n^m(\cos\theta)\right\rangle\\
&+\kappa^2B_{nm}(r)\langle P_n^m(\cos\theta),P_n^m(\cos\theta)\rangle=0 && (0.0.119)\\
\Leftrightarrow&\left(\frac{1}{r^2}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}r^2\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}B_{nm}(r)\right\}\right\}-\frac{1}{r^2}n(n+1)B_{nm}(r)+\kappa^2B_{nm}(r)\right)\langle P_n^m(\cos\theta),P_n^m(\cos\theta)\rangle=0 && (0.0.120)\\
\Rightarrow&\frac{1}{r^2}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}r^2\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}B_{nm}(r)\right\}\right\}-\frac{1}{r^2}n(n+1)B_{nm}(r)+\kappa^2B_{nm}(r)=0 && (0.0.121)
\end{aligned}$$

を得る．

式 (0.0.121) において，

$$\rho\coloneqq\kappa r \tag{0.0.122}$$

と変数変換して，

$$C_{nm}(\rho) \coloneqq \sqrt{\rho} B_{nm}(r) \tag{0.0.123}$$

と定義して代入すれば，

$$\left\{ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} + 1 - \frac{1}{\rho^2}\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \right\} C_{nm}(\rho) = 0 \tag{0.0.124}$$

を得る．**式** (0.0.124) と**式** (0.0.77) である，

$$\mathcal{L}_\nu J_\nu(z) = -J_\nu(z) \tag{0.0.125}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} + \frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} + 1 - \frac{\nu^2}{z^2} \right) = 0 \tag{0.0.126}$$

を比べると，**式** (0.0.126) において，

$$z \to x \tag{0.0.127}$$

$$\nu = n + \frac{1}{2} \tag{0.0.128}$$

としたものであると分かる．つまり，$C_{nm}(\rho)$ は Bessel 関数 $J_{n+\frac{1}{2}}(\rho)$ と Neumann 関数 $J_{-n-\frac{1}{2}}(\rho)$ の線型結合で書かれるので，係数をそれぞれ a'_{nm}，b'_{nm} として，

$$C_{nm}(\rho) = a'_{nm} J_{n+\frac{1}{2}}(\rho) + b'_{nm} J_{-n-\frac{1}{2}}(\rho) \tag{0.0.129}$$

と書く．今後の変形のために，球 Bessel 関数 $j_n(\rho)$ と球 Neumann 関数 $y_n(\rho)$ を用いて**式** (0.0.129) を書き直せば，

$$\begin{aligned} C_{nm}(\rho) &= a'_{nm} J_{n+\frac{1}{2}}(\rho) + b'_{nm} J_{-n-\frac{1}{2}}(\rho) && (0.0.130)\\ &= \sqrt{\frac{2\rho}{\pi}} a'_{nm} \pi^{-1} j_n(\rho) + \sqrt{\frac{2\rho}{\pi}} b'_{mn} y_n(\rho) && (0.0.131)\\ &= \sqrt{\rho}[a_{nm} j_n(\rho) + b_{mn} y_n(\rho)] && (0.0.132) \end{aligned}$$

である．ただし，

$$a_{nm} \coloneqq a'_{nm}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \tag{0.0.133}$$

$$b_{nm} \coloneqq b'_{nm}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \tag{0.0.134}$$

と定めた．

さて，今 Helmholtz 方程式の解の基底展開を行っているのであった．今までに定義した展開を全てまとめると，

$$\textbf{式}\ (0.0.102)\ \text{より}\ u(\boldsymbol{r}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m(r,\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi} \tag{0.0.135}$$

$$\textbf{式}\ (0.0.114)\ \text{より}\ A_m(r,\theta) = \sum_{n=|m|}^{\infty} B_{nm}(r) P_n^{|m|}(\cos\theta) \tag{0.0.136}$$

$$\textbf{式}\ (0.0.122)\ \text{より}\ \rho = \kappa r \tag{0.0.137}$$

$$\textbf{式}\ (0.0.123)\ \text{より}\ B_{nm}(r) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} C_{nm}(\rho) \tag{0.0.138}$$

$$\textbf{式}\ (0.0.132)\ \text{より}\ C_{nm}(\rho) = \sqrt{\rho}[a_{nm} j_n(\rho) + b_{mn} y_n(\rho)] \tag{0.0.139}$$

となる．下から上に全て代入して整理すると，

$$u(\boldsymbol{r}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} [a_{nm} j_n(\kappa r) + b_{nm} y_n(\kappa r)] P_n^{|m|}(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi} \tag{0.0.140}$$

となる．