摂動が無い状態の Schödinger 方程式,

$$\hat{H}^{(0)}\left|n^{(0)}\right\rangle = E_0^{(0)}\left|n^{(0)}\right\rangle \tag{0.0.1}$$

が厳密に解くことができるとする．ここに摂動 $\hat{V}$ を加わったこと[1]を考えると，摂動ハミルトニアンを $\hat{V}$ として，

$$\left(\hat{H}^{(0)}+\hat{V}\right)|n\rangle = E_n|n\rangle \tag{0.0.2}$$

とかける．摂動の大きさを表すパラメータを $\lambda$ として**式** (0.0.2) を

$$\hat{H} = \hat{H}^{(0)} + \lambda\hat{V} \tag{0.0.3}$$

とする．$\lambda \to 0$ ならば明らかに，

$$\begin{cases} |n\rangle \to \left|n^{(0)}\right\rangle \\ E_n \to E_n^{(0)} \end{cases} \tag{0.0.4}$$

である．ここで，**式** (0.0.3) の解が，

$$\begin{cases} |n\rangle & = \left|n^{(0)}\right\rangle + \lambda\left|n^{(1)}\right\rangle + \lambda^2\left|n^{(2)}\right\rangle + \cdots \\ E_n & = E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \cdots \end{cases} \tag{0.0.5}$$

と書けたとする．$\left|n^{(1)}\right\rangle$，$\left|n^{(2)}\right\rangle$，$E_n^{(1)}$，$E_n^{(2)}$ を考える．規格化条件として

$$\left\langle n^{(0)}\middle|n\right\rangle = 1 \tag{0.0.6}$$

を定める．**式** (0.0.5) を**式** (0.0.3) に代入して，$\lambda$ の次数ごとにまとめると，

$$(E_n^{(0)} - \hat{H}^{(0)})\left|n^{(0)}\right\rangle = 0 \tag{0.0.7}$$

$$(E_n^{(0)} - \hat{H}^{(0)})\left|n^{(1)}\right\rangle + E_n^{(1)}\left|n^{(0)}\right\rangle = \hat{V}\left|n^{(0)}\right\rangle \tag{0.0.8}$$

$$(E_n^{(0)} - \hat{H}^{(0)})\left|n^{(2)}\right\rangle + E_n^{(1)}\left|n^{(1)}\right\rangle + E_n^{(2)}\left|n^{(0)}\right\rangle = \hat{V}\left|n^{(1)}\right\rangle \tag{0.0.9}$$

$$\tag{0.0.10}$$

を得る．

[1] 摂動の例: 光，電場