練習問題 0.1: Griffith Example7.1

[0,a] 無限井戸型ポテンシャルに次の摂動が加わったときの 1 次摂動によるエネルギーを求めよ.

$$V_1(x) = \begin{cases} V_0, \ 0 \leq x \leq a \\ 0, \ \text{otherwise} \end{cases} \tag{0.0.1}$$

$$V_2(x) = \begin{cases} V_0, \ 0 \leq x \leq a/2 \\ 0, \ \text{otherwise} \end{cases} \tag{0.0.2}$$

$V_1(x)$ の場合

$$E_n^1(x) = \left\langle \psi_n^{(0)} \middle| V_0 \middle| \psi_n^{(0)} \right\rangle = V_0 \tag{0.0.3}$$

$V_2(x)$ の場合

$$E_n^1 = \frac{2V_0}{a} \int_0^{a/2} \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = V_0/2 \tag{0.0.4}$$

練習問題 0.2: Griffith Example 7.3

2 次元調和振動子 $\hat{H}^0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(\hat{x}^2 + \hat{y}^2)$ の第 1 励起状態は縮退している.

$$\psi_a^0 = \psi_0(x)\psi_1(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{m\omega}{\hbar} y \exp\left(\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2+y^2)\right) \tag{0.0.5}$$

$$\psi_a^0 = \psi_1(x)\psi_0(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{m\omega}{\hbar} x \exp\left(\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2+y^2)\right) \tag{0.0.6}$$

ここに摂動 $\hat{H}' = \varepsilon m\omega^2 xy$ を加える.

$$\begin{pmatrix} \omega_{aa} - E_n^1 & \omega_{ab} \\ \omega_{ba} & \omega_{bb} - E_n^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{0.0.7}$$

を用いて摂動を加えた後の固有関数及び摂動による補正エネルギーを求めよ.

$$W_{aa} = \int\int \psi_a^0 \hat{H}' \psi_a^0 dxdy \tag{0.0.8}$$

$$= \varepsilon m\omega^2 \int |\psi_0(x)|^2 x dx \int |\psi_1(x)|^2 y dy \tag{0.0.9}$$

$$= 0 = W_{bb} \tag{0.0.10}$$

$$W_{ab} = \left[\int \psi_0(x)\varepsilon m\omega^2 x \psi_1(x) dx\right]^2 \tag{0.0.11}$$

$$= \varepsilon\frac{\hbar\omega}{2}\left[\int \psi_0(x)(\hat{a}_+ + \hat{a}_-)\psi_1(x)dx\right]^2 \tag{0.0.12}$$

$$= \varepsilon\frac{\hbar\omega}{2}\left[\int \psi_0(x)\psi_0(x)dx\right]^2 \tag{0.0.13}$$

$$= \varepsilon\frac{\hbar\omega}{2} \tag{0.0.14}$$

よって，摂動による補正エネルギーは $E_1 = \pm\varepsilon\dfrac{\hbar\omega}{2}$，固有関数は

$$\psi_{\pm}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\psi_b^0 \pm \psi_a^0\right) \tag{0.0.15}$$

である．