

まず，大域的 Gauge 変換を議論する．波動関数 $\psi(\mathbf{r}, t)$ を，

$$\psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow e^{i\alpha} \psi(\mathbf{r}, t) =: \psi'(\mathbf{r}, t) \quad (0.0.1)$$

のように変換することを大域的ゲージ変換という． $\psi(\mathbf{r}, t) = e^{-i\alpha} \psi'(\mathbf{r}, t)$ を Schrödinger 方程式に代入すると，

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) \quad (0.0.2)$$

$$\Leftrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} e^{-i\alpha} \psi'(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 e^{-i\alpha} \psi'(\mathbf{r}, t) \quad (0.0.3)$$

$$\Leftrightarrow e^{-i\alpha} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi'(\mathbf{r}, t) = -e^{-i\alpha} \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi'(\mathbf{r}, t) \quad (0.0.4)$$

$$\Leftrightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi'(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi'(\mathbf{r}, t) \quad (0.0.5)$$

となる．つまり，大域的ゲージ変換によって，Schrödinger 方程式は影響を受けない．当然，期待値も，

$$\langle \psi' | \hat{A} | \psi' \rangle = \langle \psi | e^{-i\alpha} \hat{A} e^{i\alpha} | \psi \rangle \quad (0.0.6)$$

$$= \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \quad (0.0.7)$$

となるから，物理は大域的ゲージ変換に対して不変であると言える．