z 軸に沿って粒子を単位時間単位面積当たり n 個入射する．

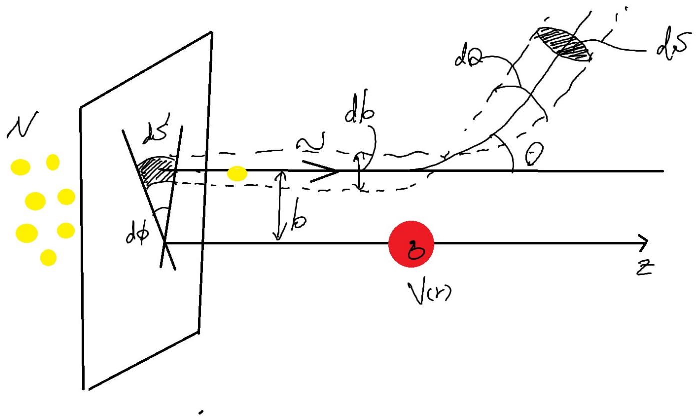

図 1: 古典力学における散乱

z 軸から距離 b (衝突パラメータ)，角度 $\mathrm{d}\phi$，面積 $\mathrm{d}S'$ のスリットを単位時間当たりに通過する粒子数は，

$$n\,\mathrm{d}S' = n\,\mathrm{d}\phi\,(b\,\mathrm{d}b) \tag{0.0.1}$$

を満たす．また，単位時間に検出器に到達する粒子数は微分断面積の定義から，

$$\mathrm{d}N = \sigma(\theta) n\,\mathrm{d}\Omega \tag{0.0.2}$$

である．古典力学ではスリットを通過した粒子は，必ず検出器で検出されるので，

$$n\,\mathrm{d}S' = \mathrm{d}N \tag{0.0.3}$$
$$\Leftrightarrow \sigma(\theta) n\,\mathrm{d}\Omega = n\,\mathrm{d}\phi\,(b\,\mathrm{d}\phi) \tag{0.0.4}$$

を得る．よって，微分断面積は，

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{\sin\theta} b \left| \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta} \right| \tag{0.0.5}$$

と表される．

例題 0.1: 剛体球

散乱体を半径 a の剛体球のポテンシャル $V(r)$ を，

$$V(r) = \begin{cases} \infty & r < a \\ 0 & r > a \end{cases} \tag{0.0.6}$$

とする．衝突パラメータを b として，粒子が散乱体の角度 ϕ の位置で散乱し，その散乱角を θ とする．これらのパラメータは，

$$\begin{cases} 2\phi + \theta = \pi \\ b = a\sin\phi \end{cases} \tag{0.0.7}$$

を満たすため，

$$b = a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{0.0.8}$$

を得る．よって，微分断面積は，

$$\begin{aligned}\sigma(\theta) &= \frac{1}{\sin\theta} b \left|\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}\right| &(0.0.9)\\ &= \frac{a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\theta}\left|-\frac{a}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| &(0.0.10)\\ &= \frac{a^2}{4} &(0.0.11)\end{aligned}$$

となる．θ に依存しない等方散乱であることがわかる．また，全断面積は，

$$\sigma^{\mathrm{tot}} = \int \sigma(\theta)\,\mathrm{d}\Omega = \pi a^2 \tag{0.0.12}$$

である．剛体球の断面積と一致する．