Schrödinger 表示の非定常摂動基本方程式は，**式** (??) と**式** (??) であり，

$$\begin{cases} \mathrm{i}\hbar \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\psi(t)\rangle = \left(\hat{H}^{(0)} + \hat{V}(t)\right) |\psi(t)\rangle \\ |\psi(t)\rangle = \displaystyle\sum_n c_n(t) \exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_n}{\hbar}t\right) |n\rangle \end{cases} \tag{0.0.1}$$

と書けるのであった．**相互作用表示** (interaction picture) を**式** (0.0.2) のような $|\psi(t)\rangle \to |\psi(t)\rangle_{\mathrm{I}}$ の変換を行って得られる状態ベクトルと定義する．

相互作用表示

$$|\psi(t)\rangle_{\mathrm{I}} \coloneqq \exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) |\psi(t)\rangle \tag{0.0.2}$$

式 (0.0.2) を用いて，**式** (0.0.1) 等価な基本方程式，相互作用表示の非定常摂動基本方程式を導く．まず**式** (0.0.1) の第 2 式を用いて，

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle_{\mathrm{I}} &= \exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \sum_n c_n(t) \exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_n}{\hbar}t\right) |n\rangle \qquad (0.0.3) \\ &= \sum_n c_n(t) \exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_n}{\hbar}t\right) \exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) |n\rangle \qquad (0.0.4) \\ &= \sum_n c_n(t) \exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_n}{\hbar}t\right) \exp\left(\mathrm{i}\frac{E_n}{\hbar}t\right) |n\rangle \qquad (0.0.5) \\ &= \sum_n c_n(t) |n\rangle \qquad (0.0.6) \end{aligned}$$

と計算できる．

次に，相互作用表示の時間微分を計算してみる．相互作用表示での摂動項 $\hat{V}_{\mathrm{I}}$ を，

$$\hat{V}_{\mathrm{I}} \coloneqq \exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \hat{V}(t) \tag{0.0.7}$$

とする．計算の途中で，**式** (0.0.1) の第 1 式を用いると，

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\psi(t)\rangle_{\mathrm{I}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right)\right] |\psi(t)\rangle + \exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} |\psi(t)\rangle \qquad (0.0.8) \\ &= \mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar} \exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) |\psi(t)\rangle + \exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\left(\hat{H}^{(0)} + \hat{V}(t)\right) |\psi(t)\rangle \qquad (0.0.9) \\ &= \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[\hat{H}^{(0)}, \exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right)\right] |\psi(t)\rangle + \exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \hat{V}(t) |\psi(t)\rangle \qquad (0.0.10) \\ &= \exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \hat{V}(t) |\psi(t)\rangle \qquad (0.0.11) \\ &= \exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \hat{V}(t) \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) |\psi(t)\rangle \qquad (0.0.12) \\ &= \exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \hat{V}(t) \exp\left(-\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) |\psi(t)\rangle_{\mathrm{I}} \qquad (0.0.13) \\ &= \hat{V}_{\mathrm{I}}(t) |\psi(t)\rangle_{\mathrm{I}} \qquad (0.0.14) \end{aligned}$$

を得る．**式** (0.0.14) と**式** (0.0.6) は Schödinger 表示の非定常摂動基本方程式と等価な方程式であるから，これを**朝永・Schwinger 方程式**と呼ぶ. [1][2] [3] [4].

朝永・Schwinger 方程式

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\psi(t)\right\rangle_{\mathrm{I}} = \hat{V}_{\mathrm{I}}(t)\left|\psi(t)\right\rangle_{\mathrm{I}} \tag{0.0.15}$$

$$\hat{V}_{\mathrm{I}}(t) = \exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right)\hat{V}(t)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \tag{0.0.16}$$

式 (**??**) に左から $\langle m|$ を演算する ($\hat{H}^{(0)}\left|m\right\rangle = E_m\left|m\right\rangle$).
左辺は,

$$\langle m|\,\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_n c_n(t)\left|n\right\rangle \tag{0.0.17}$$

$$= \mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c_m(t) \tag{0.0.18}$$

となる．右辺は.

$$\langle m|\,\hat{V}_{\mathrm{I}}(t)\sum_n c_n(t)\left|n\right\rangle \tag{0.0.19}$$

$$= \sum_n c_n(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{(E_n-E_m)t}{\hbar}}\langle m|\hat{V}(t)|n\rangle \tag{0.0.20}$$

となる．よって，非定常摂動の時間発展は以下の式を満たす.

$\hat{H}(t) = \hat{H}^{(0)} + \hat{V}(t)$

$$\left|\psi(t)\right\rangle_{\mathrm{I}} = \sum_n c_n(t)\left|n\right\rangle \tag{0.0.21}$$

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c_m(t) = \sum_n c_n(t)V_{mn}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{mn}t} \tag{0.0.22}$$

$$V_{mn} = \langle m|\,\hat{V}(t)\left|n\right\rangle \tag{0.0.23}$$

$$\omega_{mn} = \frac{E_m - E_n}{\hbar} = -\omega_{nm} \tag{0.0.24}$$

これは c_n の連立方程式になっており解くことは困難である．よって近似を加える．

[1] Schrödinger 描像は量子状態が時間発展するとみなす．Heisenberg 描像は物理量が時間発展するとみなす．相互作用表示はその中間であるといえる．
[2] 朝永振一郎 (1906-1979)
[3] Julian Schwinger(1918-1994)
[4] 朝永と Schwinger は 1964 年に Richard Feynmann とともにノーベル賞を受賞.