

角運動量  $\mathbf{L}$  は Schrödinger 方程式においては保存されるが、Dirac 方程式では保存されない。本節ではこれを確認し、次節でスピンの導入に導かれる。

角運動量演算子は

$$\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}} \quad (0.0.1)$$

$$= \begin{pmatrix} \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y \\ \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z \\ \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x \end{pmatrix} \quad (0.0.2)$$

である。これは自由粒子の Schrödinger 方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi \quad (0.0.3)$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2) \quad (0.0.4)$$

においては、 $\hat{\mathbf{L}}$  とハミルトニアンが交換するため保存する。実際に計算してみる。

$$[\hat{H}, \hat{L}_x] = \frac{1}{2m} [\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2, \hat{L}_x] \quad (0.0.5)$$

$$= \frac{1}{2m} ([\hat{p}_x^2, \hat{L}_x] + [\hat{p}_y^2, \hat{L}_x] + [\hat{p}_z^2, \hat{L}_x]) \quad (0.0.6)$$

$$= \frac{1}{2m} (\hat{p}_x [\hat{p}_x, \hat{L}_x] + [\hat{p}_x, \hat{L}_x] \hat{p}_x + \hat{p}_y [\hat{p}_y, \hat{L}_x] + [\hat{p}_y, \hat{L}_x] \hat{p}_y + \hat{p}_z [\hat{p}_z, \hat{L}_x] + [\hat{p}_z, \hat{L}_x] \hat{p}_z) \quad (0.0.7)$$

$$= \frac{1}{2m} (0 + 0 - i\hbar \hat{p}_y \hat{p}_z - i\hbar \hat{p}_z \hat{p}_y + i\hbar \hat{p}_z \hat{p}_y + i\hbar \hat{p}_y \hat{p}_z) \quad (0.0.8)$$

$$= 0 \quad (0.0.9)$$

$\hat{L}_y$  と  $\hat{L}_z$  も同様であり、よって、

$$[\hat{H}, \hat{\mathbf{L}}] = 0 \quad (0.0.10)$$

であることがわかる<sup>1</sup>。つまり、角運動量は保存量である。

これを Dirac 方程式で計算する。

$$\hat{H} = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \beta mc^2 \quad (0.0.14)$$

を使うと、

$$[\hat{H}, \hat{L}_x] = [c\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \beta mc^2, \hat{L}_x] \quad (0.0.15)$$

$$= c([\alpha_x \hat{p}_x, \hat{L}_x] + [\alpha_y \hat{p}_y, \hat{L}_x] + [\alpha_z \hat{p}_z, \hat{L}_x]) + [\beta mc^2, \hat{L}_x] \quad (0.0.16)$$

$$= c(\alpha_x [\hat{p}_x, \hat{L}_x] + \alpha_y [\hat{p}_y, \hat{L}_x] + \alpha_z [\hat{p}_z, \hat{L}_x]) \quad (0.0.17)$$

$$= -i\hbar c(\alpha_y \hat{p}_z - \alpha_z \hat{p}_y) \quad (0.0.18)$$

が得られる。同様に、

$$[\hat{H}, \hat{L}_y] = -i\hbar c(\alpha_z \hat{p}_x - \alpha_x \hat{p}_z) \quad (0.0.19)$$

$$[\hat{H}, \hat{L}_z] = -i\hbar c(\alpha_x \hat{p}_y - \alpha_y \hat{p}_x) \quad (0.0.20)$$

が得られる。よって、

$$[\hat{H}, \hat{\mathbf{L}}] \neq 0 \quad (0.0.21)$$

であり、角運動量が保存量ではないことがわかる。しかし、対称性から、全角運動量が保存されないのは不自然である。このことは  $\mathbf{L}$  以外の角運動量が存在することを示唆している。

<sup>1</sup> 上記の計算には

$$[\hat{L}_i, \hat{p}_j] = [\varepsilon_{ijk} \hat{x}_j \hat{p}_k, \hat{p}_j] \quad (0.0.11)$$

$$= \varepsilon_{ijk} (\hat{x}_j [\hat{p}_k, \hat{p}_j] + [\hat{x}_j, \hat{p}_j] \hat{p}_k) \quad (0.0.12)$$

$$= i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{p}_k \quad (0.0.13)$$

を用いた。