

全角運動量が保存するために,

$$[\hat{H}, \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}] = 0 \quad (0.0.1)$$

を満たす \mathbf{S} が Dirac 方程式に含まれていると考える. スピン演算子を次のように導入する.

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix} \quad (0.0.2)$$

$$\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{pmatrix} \quad (0.0.3)$$

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (0.0.4)$$

σ_i ($i = x, y, z$) は Pauli 行列である. このようにスピン演算子を導入すると, これらは交換関係

$$[\alpha_i, \hat{S}_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \alpha_k \quad (0.0.5)$$

$$[\beta, \hat{S}_i] = 0 \quad (0.0.6)$$

を満たすため

$$[\hat{H}, \hat{S}_x] = i\hbar c(\alpha_y \hat{p}_z - \alpha_z \hat{p}_y) \quad (0.0.7)$$

$$[\hat{H}, \hat{S}_y] = i\hbar c(\alpha_z \hat{p}_x - \alpha_x \hat{p}_z) \quad (0.0.8)$$

$$[\hat{H}, \hat{S}_z] = i\hbar c(\alpha_x \hat{p}_y - \alpha_y \hat{p}_x) \quad (0.0.9)$$

であり,

$$[\hat{H}, \hat{L}_x + \hat{S}_x] = [\hat{H}, \hat{L}_y + \hat{S}_y] = [\hat{H}, \hat{L}_z + \hat{S}_z] = 0 \quad (0.0.10)$$

が成り立つ. よって, Dirac 方程式において

$$[\hat{H}, \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}] = 0 \quad (0.0.11)$$

であり, **全角運動量** $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ が保存される. ここで, $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma}$ は**スピン角運動量**である.

以上の議論では, スピンの存在が自然に導入された. この議論に用いた要請は

スピンの存在のために用いた要請

1. Lorentz 共変性
2. 状態の時間発展が時間の 1 階微分で表されること

である. 1 は Schrödinger 方程式と相対論の矛盾を解決するために用いた. 2 は波動関数の確率解釈を可能にするために用いた. 以上の要請から Dirac 方程式が導かれ, その式にはスピンの存在が内包されていた.

ここで, Dirac 方程式の平面波解

$$\psi_{\uparrow}^{+} = e^{i(kz - \omega t)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \psi_{\downarrow}^{+} = e^{i(kz - \omega t)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \psi_{\uparrow}^{-} = e^{i(kz - \omega t)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \psi_{\downarrow}^{-} = e^{i(kz - \omega t)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (0.0.12)$$

に \hat{S}_z を作用させてみると,

$$\begin{cases} \hat{S}_z \psi_{\uparrow}^{+} &= \frac{\hbar}{2} \psi_{\uparrow}^{+} \\ \hat{S}_z \psi_{\downarrow}^{+} &= -\frac{\hbar}{2} \psi_{\downarrow}^{+} \end{cases} \quad (0.0.13)$$

$$\begin{cases} \hat{S}_z \psi_{\uparrow}^{-} &= \frac{\hbar}{2} \psi_{\uparrow}^{-} \\ \hat{S}_z \psi_{\downarrow}^{-} &= -\frac{\hbar}{2} \psi_{\downarrow}^{-} \end{cases} \quad (0.0.14)$$

が成り立つ。よって、平面波解は \hat{S}_z の固有状態であることがわかる。
全角運動量以外の保存量としてヘリシティがある¹。

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \quad (0.0.15)$$

として、ヘリシティは

$$h = \frac{\Sigma \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \quad (0.0.16)$$

と定義される。これが保存量であることは以下のように確かめられる。

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}})\hat{h} = \frac{1}{p} \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \quad (0.0.17)$$

$$= \frac{1}{p} \begin{pmatrix} 0 & (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \\ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}) & 0 \end{pmatrix} \quad (0.0.18)$$

$$= \frac{1}{p} \begin{pmatrix} 0 & \hat{\mathbf{p}}^2 \\ \hat{\mathbf{p}}^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (0.0.19)$$

$$= \hat{h}(\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \quad (0.0.20)$$

よって

$$[\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}}, \hat{h}] = 0 \quad (0.0.21)$$

$$[\beta, \hat{h}] = 0 \quad (0.0.22)$$

したがって、

$$[\hat{H}, \hat{h}] = 0 \quad (0.0.23)$$

ヘリシティは保存量である。

¹授業では触れていない。