最後に，電磁場中の電子を考え，Dirac 方程式の非相対論的極限 ($|\boldsymbol{p}| \ll c$) が Schrödinger 方程式であることを示す．Dirac 方程式は

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = (c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta mc^2)\psi \tag{0.0.1}$$

である．ここに電磁場を次のように導入する．

$$\begin{cases} \boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A} (e > 0) \\ \phi = 0 \end{cases} \tag{0.0.2}$$

これを用いると

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = (c\boldsymbol{\alpha}\cdot(\boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A}) + \beta mc^2)\psi \tag{0.0.3}$$

である．ここで，解の形を

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} \tag{0.0.4}$$

とする．これを**式** (0.0.3) に代入する．

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & c\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A}) \\ c\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A}) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mc^2 & 0 \\ 0 & -mc^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} && (0.0.5) \\ &= c\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A})\begin{pmatrix} \psi_b \\ \psi_a \end{pmatrix} + mc^2\begin{pmatrix} \psi_a \\ -\psi_b \end{pmatrix} && (0.0.6) \end{aligned}$$

また，粒子のエネルギーを静止質量エネルギー (mc^2) と非相対論的エネルギーの項 ($\varepsilon_{\mathrm{NR}}$) に分け，

$$\varepsilon \sim mc^2 + \varepsilon_{\mathrm{NR}} \tag{0.0.7}$$

波動関数の時間発展を次のように記述する．

$$\begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_a^0 \\ \psi_b^0 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{mc^2}{\hbar}t} \tag{0.0.8}$$

この表式を用いると**式** (0.0.3) の左辺は

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = \mathrm{i}\hbar\left[\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \psi_a^0 \\ \psi_b^0 \end{pmatrix}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{mc^2}{\hbar}t} + mc^2\begin{pmatrix} \psi_a^0 \\ \psi_b^0 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{mc^2}{\hbar}t} \tag{0.0.9}$$

となる．これより，

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\hbar\left[\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \psi_a^0 \\ \psi_b^0 \end{pmatrix}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{mc^2}{\hbar}t} + mc^2\begin{pmatrix} \psi_a^0 \\ \psi_b^0 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{mc^2}{\hbar}t} &= c\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A})\begin{pmatrix} \psi_b^0 \\ \psi_a^0 \end{pmatrix} + mc^2\begin{pmatrix} \psi_a \\ -\psi_b \end{pmatrix} && (0.0.10) \\ \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \psi_a^0 \\ \psi_b^0 \end{pmatrix} &= c\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A})\begin{pmatrix} \psi_b^0 \\ \psi_a^0 \end{pmatrix} - 2mc^2\begin{pmatrix} 0 \\ \psi_b^0 \end{pmatrix} && (0.0.11) \end{aligned}$$

が得られる．上式の 2 行目に着目する．両辺を mc^2 で割ると

$$\frac{1}{mc^2}\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_b^0\right) = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A})}{mc}\psi_a^0 - 2\psi_b^0 \tag{0.0.12}$$

である．ここで左辺は

$$\frac{1}{mc^2}\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\varepsilon_{\mathrm{NR}}}{\hbar}t}\right) \propto \frac{\varepsilon_{\mathrm{NR}}}{mc^2} \tag{0.0.13}$$

である．また，

$$\varepsilon_{\mathrm{NR}} = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} \tag{0.0.14}$$

だから非相対論的極限 ($|\boldsymbol{p}| \ll c$) で左辺は 0 となる．よって

$$\psi_b^0 = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}+e\boldsymbol{A})}{2mc}\psi_a^0 \tag{0.0.15}$$

$$\tag{0.0.16}$$

を得る．これは粒子解と反粒子解を結ぶ式である．この式から，反粒子の成分 ψ_b^0 は粒子の成分 ψ_a^0 より v/c のオーダーで小さく，非相対論的極限では重要ではないことがわかる．これを用いると 1 行目は

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_a^0 = c\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}+e\boldsymbol{A})\psi_b^0 \tag{0.0.17}$$

$$= \frac{[\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}+e\boldsymbol{A})][\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}+e\boldsymbol{A})]}{2m}\psi_a^0 \tag{0.0.18}$$

と書き直される．次に $[\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}+e\boldsymbol{A})][\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}+e\boldsymbol{A})]$ を計算する．まず，Pauli 行列には次の性質がある．

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{a}})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{b}}) = (\sum_i \sigma_i \hat{a}_i)(\sum_j \sigma_j \hat{a}_j) \tag{0.0.19}$$

$$= \sum_i\sum_j \sigma_i\sigma_j\hat{a}_i\hat{b}_j \tag{0.0.20}$$

$$= \sum_i\sum_j \frac{1}{2}(\{\sigma_i,\sigma_j\}+[\sigma_i,\sigma_j])\hat{a}_i\hat{b}_j \tag{0.0.21}$$

$$= \sum_i\sum_j \frac{1}{2}(2\delta_{i,j}+2\mathrm{i}\sum_k\varepsilon_{ijk}\sigma_k)\hat{a}_i\hat{b}_j \tag{0.0.22}$$

$$= \sum_i \hat{a}_i\hat{b}_i + \mathrm{i}\sigma_k\sum_i\sum_j\sum_k\varepsilon_{ijk}\hat{a}_i\hat{b}_j \tag{0.0.23}$$

$$= \hat{\boldsymbol{a}}\cdot\hat{\boldsymbol{b}} + \mathrm{i}\sum_k\sigma_k(\hat{\boldsymbol{a}}\times\hat{\boldsymbol{b}})_k \tag{0.0.24}$$

$$= \hat{\boldsymbol{a}}\cdot\hat{\boldsymbol{b}} + \mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\cdot(\hat{\boldsymbol{a}}\times\hat{\boldsymbol{b}}) \tag{0.0.25}$$

ここで ε_{ijk} は Levi-Civita の完全反対称テンソルで

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i,j,k) = (x,y,z),(y,z,x),(z,x,y) \\ -1 & (i,j,k) = (z,y,x),(y,x,z),(x,z,y) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{0.0.26}$$

である．これを使えば外積は

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})_k = \sum_i\sum_j\varepsilon_{ijk}a_ib_j \tag{0.0.27}$$

と表される．また，$\left\{\hat{A},\hat{B}\right\}$ は反交換関係で

$$\left\{\hat{A},\hat{B}\right\} = \hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A} \tag{0.0.28}$$

という演算子である．**式** (**??**) を用いると

$$[\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}+e\boldsymbol{A})][\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}+e\boldsymbol{A})] = (\hat{\boldsymbol{p}}+e\boldsymbol{A})^2 + \mathrm{i}\boldsymbol{\sigma}\cdot[(\hat{\boldsymbol{p}}+e\boldsymbol{A})\times(\hat{\boldsymbol{p}}+e\boldsymbol{A})] \tag{0.0.29}$$

$$= (\hat{\boldsymbol{p}}+e\boldsymbol{A})^2 + \mathrm{i}e\boldsymbol{\sigma}\cdot[(\boldsymbol{A}\times\hat{\boldsymbol{p}})+(\hat{\boldsymbol{p}}\times e\boldsymbol{A})] \tag{0.0.30}$$

$$\tag{0.0.31}$$

と変形される．ここで，

$$
\begin{aligned}
[(\boldsymbol{A}\times\hat{\boldsymbol{p}})+(\hat{\boldsymbol{p}}\times e\boldsymbol{A})]\psi &= (\boldsymbol{A}\times\hat{\boldsymbol{p}})\psi+(\hat{\boldsymbol{p}}\times\boldsymbol{A})\psi \qquad (0.0.32)\\
&= -\mathrm{i}\hbar[(\boldsymbol{A}\times\nabla)\psi+(\nabla\times\boldsymbol{A})\psi] \qquad (0.0.33)\\
&= -\mathrm{i}\hbar[\boldsymbol{A}\times(\nabla\psi)+(\nabla\psi)\times\boldsymbol{A}+(\nabla\times\boldsymbol{A})\psi] \qquad (0.0.34)\\
&= -\mathrm{i}\hbar[-(\nabla\psi)\times\boldsymbol{A}+(\nabla\psi)\times\boldsymbol{A}+(\nabla\times\boldsymbol{A})\psi] \qquad (0.0.35)\\
&= -\mathrm{i}\hbar(\nabla\times\boldsymbol{A})\psi \qquad (0.0.36)
\end{aligned}
$$

が成り立つ．以上より，

$$
\begin{aligned}
[\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}+e\boldsymbol{A})][\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{p}+e\boldsymbol{A})] &= (\hat{\boldsymbol{p}}+e\boldsymbol{A})^2+e\hbar\boldsymbol{\sigma}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) \qquad (0.0.37)\\
&= (\hat{\boldsymbol{p}}+e\boldsymbol{A})^2+e\hbar\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B} \qquad (0.0.38)
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_a^0=\left[\frac{1}{2m}(\hat{\boldsymbol{p}}+e\boldsymbol{A})^2+\frac{e\hbar}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}\right]\psi_a^0 \qquad (0.0.39)
$$

が得られる．右辺第 2 項 $\frac{e\hbar}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}$ は Zeeman 相互作用によるエネルギーを表す．これは磁場中の自由粒子の Schrödinger 方程式と一致している．つまり，電磁場中の自由粒子の Dirac 方程式の非相対論的極限は，電磁場中の自由粒子の Schrödinger 方程式と一致する．