

角運動量演算子の行列表現を求める．使うのは交換関係

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{L}_k \quad (0.0.1)$$

のみである．まず,

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_i] = 0 \quad (0.0.2)$$

は簡単に確かめられる．よって, \hat{L}^2 と \hat{L}_z は同時固有状態を持つ．同時固有状態を $|\alpha\beta\rangle$ とし固有値を

$$\hat{L}^2 |\alpha, \beta\rangle = \alpha |\alpha, \beta\rangle \quad (0.0.3)$$

$$\hat{L}_z |\alpha, \beta\rangle = \beta |\alpha, \beta\rangle \quad (0.0.4)$$

と定める．

次に, 昇降演算子 (ladder operator) を

$$\hat{L}_{\pm} \equiv \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y \quad (0.0.5)$$

と定義する．

$$\hat{L}_z(\hat{L}_{+} |\alpha, \beta\rangle) = (\beta + \hbar) \hat{L}_{+} |\alpha, \beta\rangle \quad (0.0.6)$$

が計算により確かめられるため, $\hat{L}_{+} |\alpha\beta\rangle$ は \hat{L}_z の固有値 $\beta + \hbar$ の固有状態である．一方, $[\hat{L}^2, \hat{L}_{\pm}] = 0$ であるため昇降演算子は L の大きさを変化させない．変化するのは β のみである．また,

$$\langle \psi | \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 | \psi \rangle \quad (0.0.7)$$

$$= \langle \psi | \hat{L}_x^2 | \psi \rangle + \langle \psi | \hat{L}_y^2 | \psi \rangle \geq 0 \quad (0.0.8)$$

$$\Rightarrow \langle \hat{L}_z^2 \rangle \leq \langle \hat{L}^2 \rangle \quad (0.0.9)$$

であるため, β には最大値 β_{\max} が存在する．よって, あるところで

$$\hat{L}_{+} |\alpha, \beta_{\max}\rangle = 0 \quad (0.0.10)$$

$$\hat{L}_{-} |\alpha, \beta_{\min}\rangle = 0 \quad (0.0.11)$$

が成り立つ．

$$\hat{L}_{-} \hat{L}_{+} = \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 - \hbar \hat{L}_z \quad (0.0.12)$$

だから,

$$0 = (\alpha - \beta_{\max}^2 - \hbar \beta_{\max}) |\alpha, \beta_{\max}\rangle \quad (0.0.13)$$

である．よって,

$$\alpha = \beta_{\max}(\beta_{\max} + \hbar) \quad (0.0.14)$$

が得られる．同様に

$$\alpha = \beta_{\min}(\beta_{\min} - \hbar) \quad (0.0.15)$$

である．この2式を比べると

$$\beta_{\max} = \beta_{\min} \quad (0.0.16)$$

がわかる．また \hat{L}_z の固有値は昇降演算子により \hbar の整数倍で増減するから k を自然数として

$$\beta_{\max} = \beta_{\min} + k\hbar \quad (0.0.17)$$

と書ける。よって、

$$\beta_{\max} = \frac{k}{2}\hbar \quad (0.0.18)$$

である。つまり、 \hat{L}_z の最大値は $\frac{\hbar}{2}$ の自然数倍の値しかとらない。さらに、

$$\alpha = \hbar^2 \left(\frac{k}{2}\right) \left(\frac{k}{2} + 1\right) \quad (0.0.19)$$

である。ここで

$$l \equiv \frac{k}{2} \quad (0.0.20)$$

とすれば

$$\hat{L}^2 |l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1) |l, m\rangle \quad (0.0.21)$$

$$\hat{L}_z |l, m\rangle = m\hbar |l, m\rangle \quad (0.0.22)$$

と書ける。ここで、

$$l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \quad (0.0.23)$$

$$m = -l, -l+1, -l+2, \dots, l-2, l-1, l \quad (0.0.24)$$

である。
次に、

$$\hat{L}_+ |l, m\rangle = C_+ |l, m+1\rangle \quad (0.0.25)$$

とおく。 $\hat{L}_+^\dagger = \hat{L}_-$ だから、

$$|C_+|^2 = \langle l, m | \hat{L}_- \hat{L}_+ |l, m\rangle = [l(l+1) - m(m+1)]\hbar^2 \quad (0.0.26)$$

$$\Rightarrow C_+ = \hbar \sqrt{(l-m)(l+m+1)} \quad (0.0.27)$$

である。 \hat{L}_- に関しても同様に計算すると、

$$\hat{L}_+ |l, m\rangle = \hbar \sqrt{(l-m)(l+m+1)} |l, m+1\rangle \quad (0.0.28)$$

$$\hat{L}_- |l, m\rangle = \hbar \sqrt{(l+m)(l-m+1)} |l, m-1\rangle \quad (0.0.29)$$

を得る。よって、上2式と式 (0.0.21) と式 (0.0.22) を使えば \hat{L}_z と \hat{L}^2 の行列表現が得られる。

$$\hat{L}_z = \quad (0.0.30)$$

$$\begin{pmatrix} \langle 0, 0 | \hat{L}_z | 0, 0 \rangle & \langle 0, 0 | \hat{L}_z | 1/2, 1/2 \rangle & \langle 0, 0 | \hat{L}_z | 1/2, -1/2 \rangle & \langle 0, 0 | \hat{L}_z | 1, 1 \rangle & \langle 0, 0 | \hat{L}_z | 1, 0 \rangle & \dots \\ \langle 1/2, 1/2 | \hat{L}_z | 0, 0 \rangle & \langle 1/2, 1/2 | \hat{L}_z | 1/2, 1/2 \rangle & \langle 1/2, 1/2 | \hat{L}_z | 1/2, -1/2 \rangle & \langle 1/2, 1/2 | \hat{L}_z | 1, 1 \rangle & \langle 1/2, 1/2 | \hat{L}_z | 1, 0 \rangle & \dots \\ \langle 1/2, -1/2 | \hat{L}_z | 0, 0 \rangle & \langle 1/2, -1/2 | \hat{L}_z | 1/2, 1/2 \rangle & \langle 1/2, -1/2 | \hat{L}_z | 1/2, -1/2 \rangle & \langle 1/2, -1/2 | \hat{L}_z | 1, 1 \rangle & \langle 1/2, -1/2 | \hat{L}_z | 1, 0 \rangle & \dots \\ \langle 1, 1 | \hat{L}_z | 0, 0 \rangle & \langle 1, 1 | \hat{L}_z | 1/2, 1/2 \rangle & \langle 1, 1 | \hat{L}_z | 1/2, -1/2 \rangle & \langle 1, 1 | \hat{L}_z | 1, 1 \rangle & \langle 1, 1 | \hat{L}_z | 1, 0 \rangle & \dots \\ \langle 1, 0 | \hat{L}_z | 0, 0 \rangle & \langle 1, 0 | \hat{L}_z | 1/2, 1/2 \rangle & \langle 1, 0 | \hat{L}_z | 1/2, -1/2 \rangle & \langle 1, 0 | \hat{L}_z | 1, 1 \rangle & \langle 1, 0 | \hat{L}_z | 1, 0 \rangle & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (0.0.31)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\hbar}{2} & & & & \\ 0 & & -\frac{\hbar}{2} & & & \\ \vdots & & & \hbar & & \dots \\ \vdots & & & & 0 & \dots \\ \vdots & & & & & -\hbar \end{pmatrix} \quad (0.0.32)$$

$$\hat{L}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & \\ 0 & \frac{3}{4}\hbar^2 & & & \\ & & \frac{3}{4}\hbar^2 & & \\ & & & 2\hbar^2 & \\ & & & & 2\hbar^2 \\ & & & & & 2\hbar^2 \end{pmatrix} \quad (0.0.33)$$

注目すべきは l ごとにブロック状になっていることである. $l = 1/2$ の部分だけ取り出せば

$$\hat{L}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (0.0.34)$$

が得られる.

