

特殊相対性理論 (Special Relativity) は次の 2 つの事柄を原理とする。

特殊相対性原理

あらゆる慣性系で同じ物理法則が成り立つ。

光速不変の原理

あらゆる慣性系で進級中の光の速さは同一である。

この原理の下で成り立つ座標変換の法則 (Lorentz 変換) を導く。まず、慣性系 X 系の原点 O と X' 系の原点 O' が $t = t' = 0$ で一致している。 $t = t' = 0$ で光が原点 ($O = O'$) を通過したとする。 X 系の空間座標を (x, y, z) , X' 系の空間座標を (x', y', z') とすると、光速不変の原理より、

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{t} = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{t'} = c \quad (0.0.1)$$

が成り立つ。上式から**世界長さ**

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 \quad (0.0.2)$$

が不変量であることが導かれる。

慣性系 X' が x 軸正の方向に速さ v で移動している.. このとき $y = y', z = z'$ である。わかりやすいように $T = it$ とおく。光速不変より、

$$x^2 - (ct)^2 = x'^2 - (ct')^2 \quad (0.0.3)$$

$$x^2 + (cT)^2 = x'^2 + (cT')^2 \quad (0.0.4)$$

が成り立つ。これが回転座標変換と類似していることから、

$$\begin{pmatrix} cT' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cT \\ x \end{pmatrix} \quad (0.0.5)$$

と置く。表示を t に戻すと

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & i \sin \theta \\ i \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (0.0.6)$$

である。さらに、 $\theta = i\phi$ とすると

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi \\ -\sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (0.0.7)$$

となる。よって、

$$x' = (-\sinh \phi)ct + (\cosh \phi)x \quad (0.0.8)$$

を得る。 X 系において時刻 t が経過したとする。 X 系から見るお X' 系の原点の位置は $x = vt$ である。一方、 X' 系から見ると $x' = 0$ である。 よって上式から

$$0 = (-\sinh \phi)ct + (\cosh \phi)vt \quad (0.0.9)$$

が成り立つ。 よって、これを変形すると

$$\frac{v}{c} = \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi} = \tanh \phi \quad (0.0.10)$$

である。以上より、

$$\begin{cases} \sinh \phi = \frac{v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \\ \cosh \phi = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \end{cases} \quad (0.0.11)$$

であることがわかる。したがって,

Lorent 変換

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v/c \\ -v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (0.0.12)$$

を得る.