Born 近似の適用範囲について考える．**式** (??) より，一般に散乱振幅は,

$$f(\theta) = -\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k'}\cdot\boldsymbol{r}}\frac{2m}{\hbar^2}V(r)\psi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{0.0.1}$$

と書けるのであった．また**式** (??) より，散乱の波動関数は,

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \psi_0(\boldsymbol{r}) + \int g(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'})V(r')\psi_0(\boldsymbol{r'})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r'} + \cdots \tag{0.0.2}$$

であった．第 1 Born 近似とは，波動関数 $\psi(\boldsymbol{r})$ を,

$$\psi(\boldsymbol{r}) \simeq \psi_0(\boldsymbol{r}) \tag{0.0.3}$$

と近似するのものであった．第 1 Born 近似が十分良い評価である，つまり,

$$\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k'}\cdot\boldsymbol{r}}\frac{2m}{\hbar^2}V(r)\psi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{0.0.4}$$

を正しく評価できるには，$V(r)\neq 0$ なる $r\simeq 0$ で,

$$\psi(\boldsymbol{r}) \simeq \psi_0(\boldsymbol{r}) \tag{0.0.5}$$

と近似できる必要がある．$r\simeq 0$ で**式** (0.0.2) の第 1 項がそれ以外の項より十分大きければ良いから,

$$|\psi_0(0)| \gg \left|\int g(0-\boldsymbol{r})V(r)\psi_0(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\right| \tag{0.0.6}$$

となればよい．整理すると,

$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\right| \gg \left|\int -\frac{2m}{\hbar^2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}V(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k'}\cdot\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\right| \tag{0.0.7}$$

$$1 \gg \frac{m}{2\pi\hbar^2}\left|\int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}V(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k'}\cdot\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\right| \tag{0.0.8}$$

を得る．これが第 1 Born 近似が有効であるための条件である．

例題 0.1: 第 1 Born 近似の適用条件

球対称ポテンシャル $V(r)$,

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & (r\leq a) \\ 0 & (r\geq a) \end{cases} \tag{0.0.9}$$

による散乱を考える．Born 近似の適用条件である**式** (0.0.8) を用いて，満たすべき条件とその物理的意味を述べよ．

式 (0.0.8) より Born 近似が成立する条件は,

$$1 \gg \frac{m}{2\pi\hbar^2}\left|\int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr'}}{r'}V(r')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k'}\cdot\boldsymbol{r'}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r'}\right| \tag{0.0.10}$$

$$= \frac{m}{2\pi\hbar^2}\left|\int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr'}}{r'}V(r')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k'}\cdot\boldsymbol{r'}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r'}\right| \tag{0.0.11}$$

$$= \frac{m}{2\pi\hbar^2}\left|\int_{\phi'=0}^{2\pi}\mathrm{d}\phi'\int_{\theta'=0}^{\pi}\mathrm{d}\theta'\int_{r'=0}^{\infty}\mathrm{d}r'\,V(r')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k'}\cdot\boldsymbol{r'}}r'^2\sin\theta'\right| \tag{0.0.12}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{mV_0}{2\pi\hbar^2}\left|\int_{\phi'=0}^{2\pi}\mathrm{d}\phi'\int_{\theta'=0}^{\pi}\mathrm{d}\theta'\int_{r'=0}^{a}\mathrm{d}r'\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr'}}{r'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr'\cos\theta'}r'^2\sin\theta'\right| &(0.0.13)\\
&= \frac{mV_0}{\hbar^2}\left|\int_{r'=0}^{a}r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr'}\,\mathrm{d}r'\int_{\theta'=0}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr'\cos\theta'}\sin\theta'\,\mathrm{d}\theta'\right| &(0.0.14)\\
&= \frac{mV_0}{\hbar^2}\left|\int_{r'=0}^{a}r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr'}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr'}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr'}}{\mathrm{i}kr'}\,\mathrm{d}r'\right| &(0.0.15)\\
&= \frac{mV_0}{\hbar^2 k}\left|\int_{r'=0}^{a}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}kr'}-1\right)\mathrm{d}r'\right| &(0.0.16)\\
&= \frac{mV_0}{2\hbar^2k^2}\left|\mathrm{e}^{2\mathrm{i}ka}-1-2\mathrm{i}ka\right| &(0.0.17)
\end{aligned}
$$

を得る[a]．これを低エネルギー散乱と高エネルギー散乱に場合分けして見積もる．**式** (0.0.17) の絶対値の中では，ka がまとめて 1 つの変数のようになっていることに注意する．また，**式** (**??**) で定めた κ の定義と，$\kappa \to k$ と書き換えたことより，

$$ka = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}a \tag{0.0.18}$$

であるから，ka はエネルギーの 1/2 乗に比例することに注意する．

1. 低エネルギー散乱 ($ka \ll 1$)
   式 (0.0.17) の絶対値の部分を近似すると，

$$
\begin{aligned}
\left|\mathrm{e}^{2\mathrm{i}ka}-1-2\mathrm{i}ka\right| &= \left|\left(1+2\mathrm{i}ka+\frac{1}{2}(2\mathrm{i}ka)^2+\cdots\right)-1-2\mathrm{i}ka\right| &(0.0.19)\\
&\simeq \left|\left(1+2\mathrm{i}ka+\frac{1}{2}(2\mathrm{i}ka)^2\right)-1-2\mathrm{i}ka\right| &(0.0.20)\\
&= 2k^2a^2 &(0.0.21)
\end{aligned}
$$

   となるから，Born 近似の適用条件は

$$1 \gg \frac{mV_0}{2\hbar^2k^2}2k^2a^2 = \frac{mV_0a^2}{\hbar^2} \tag{0.0.22}$$

   である．**式** (0.0.22) において，m と $\hbar$ は定数であるから，ポテンシャルの大きさ V_0 または半径 a が小さい時に近似が有効であることがわかる．

2. 高エネルギー散乱 ($ka \gg 1$)
   式 (0.0.17) の絶対値の部分を近似すると，$ka \gg 1$ の領域では，$\left|\mathrm{e}^{2\mathrm{i}ka}\right| \simeq |-1| \gg |2\mathrm{i}ka|$ であるから，

$$\left|\mathrm{e}^{2\mathrm{i}ka}-1-2\mathrm{i}ka\right| \simeq 2ka \tag{0.0.23}$$

   となる．よって Born 近似の適用条件は，

$$1 \gg \frac{mV_0a}{\hbar^2k} = \frac{mV_0a}{\hbar\sqrt{2mE}} \tag{0.0.24}$$

   である．**式** (0.0.24) を見ると，$k \to \infty$ に対して近似が成立することがわかる．つまり，Born 近似は高エネルギー粒子に対して常によい近似であることがわかる．

[a]授業中の教員の発言:「試験に出そうな計算.」