角運動量演算子の行列表現を求める．使うのは交換関係

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = \mathrm{i}\hbar\varepsilon_{ijk}\hat{L}_k \tag{0.0.1}$$

のみである．まず，

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_i] = 0 \tag{0.0.2}$$

は簡単に確かめられる．よって，$\hat{L}^2$ と $\hat{L}_z$ は同時固有状態を持つ．同時固有状態を $|\alpha\beta\rangle$ とし固有値を

$$\hat{L}^2 |\alpha, \beta\rangle = \alpha |\alpha, \beta\rangle \tag{0.0.3}$$

$$\hat{L}_z |\alpha, \beta\rangle = \beta |\alpha, \beta\rangle \tag{0.0.4}$$

と定める．

次に，**昇降演算子** (ladder operator) を

$$\hat{L}_\pm \equiv \hat{L}_x \pm \mathrm{i}\hat{L}_y \tag{0.0.5}$$

と定義する．

$$\hat{L}_z(\hat{L}_+ |\alpha, \beta\rangle) = (\beta + \hbar)\hat{L}_+ |\alpha, \beta\rangle \tag{0.0.6}$$

が計算により確かめられるため，$\hat{L}_+ |\alpha\beta\rangle$ は $\hat{L}_z$ の固有値 $\beta + \hbar$ の固有状態である．一方，$[\hat{L}^2, \hat{L}_\pm] = 0$ であるため昇降演算子は L の大きさを変化させない．変化するのは β のみである．また，

$$\langle\psi| \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 |\psi\rangle \tag{0.0.7}$$

$$= \langle\psi| \hat{L}_x^2 |\psi\rangle + \langle\psi| \hat{L}_y^2 |\psi\rangle \geq 0 \tag{0.0.8}$$

$$\Rightarrow \langle\hat{L}_z^2\rangle \leq \langle\hat{L}^2\rangle \tag{0.0.9}$$

であるため，β には最大値 $\beta_{\max}$ が存在する．よって，あるところで

$$\hat{L}_+ |\alpha, \beta_{\max}\rangle = 0 \tag{0.0.10}$$

$$\hat{L}_- |\alpha, \beta_{\min}\rangle = 0 \tag{0.0.11}$$

が成り立つ．

$$\hat{L}_-\hat{L}_+ = \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 - \hbar\hat{L}_z \tag{0.0.12}$$

だから，

$$0 = (\alpha - \beta_{\max}^2 - \hbar\beta_{\max}) |\alpha, \beta_{\max}\rangle \tag{0.0.13}$$

である．よって，

$$\alpha = \beta_{\max}(\beta_{\max} + \hbar) \tag{0.0.14}$$

が得られる．同様に

$$\alpha = \beta_{\min}(\beta_{\min} - \hbar) \tag{0.0.15}$$

である．この 2 式を比べると

$$\beta_{\max} = \beta_{\min} \tag{0.0.16}$$

がわかる．また $\hat{L}_z$ の固有値は昇降演算子により $\hbar$ の整数倍で増減するから k を自然数として

$$\beta_{\max} = \beta_{\min} + k\hbar \tag{0.0.17}$$

と書ける．よって，

$$\beta_{\max} = \frac{k}{2}\hbar \tag{0.0.18}$$

である．つまり，$\hat{L}_z$ の最大値は $\dfrac{\hbar}{2}$ の自然数倍の値しかとらない．さらに，

$$\alpha = \hbar^2 \left(\frac{k}{2}\right)\left(\frac{k}{2}+1\right) \tag{0.0.19}$$

である．ここで

$$l \equiv \frac{k}{2} \tag{0.0.20}$$

とすれば

$$\hat{L}^2 \left|l,m\right\rangle = \hbar^2 l(l+1) \left|l,m\right\rangle \tag{0.0.21}$$
$$\hat{L}_z \left|l,m\right\rangle = m\hbar \left|l,m\right\rangle \tag{0.0.22}$$

と書ける．ここで，

$$l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \cdots \tag{0.0.23}$$
$$m = -l, -l+1, -l+2, \cdots, l-2, l-1, l \tag{0.0.24}$$

である．

次に，

$$\hat{L}_+ \left|l,m\right\rangle = C_+ \left|l,m+1\right\rangle \tag{0.0.25}$$

とおく．$\hat{L}_+^\dagger = \hat{L}_-$ だから，

$$|C_+|^2 = \left\langle l,m\right| \hat{L}_- \hat{L}_+ \left|l,m\right\rangle = [l(l+1) - m(m+1)]\hbar^2 \tag{0.0.26}$$
$$\Rightarrow C_+ = \hbar\sqrt{(l-m)(l+m+1)} \tag{0.0.27}$$

である．$\hat{L}_-$ に関しても同様に計算すると，

$$\hat{L}_+ \left|l,m\right\rangle = \hbar\sqrt{(l-m)(l+m+1)} \left|l,m+1\right\rangle \tag{0.0.28}$$
$$\hat{L}_- \left|l,m\right\rangle = \hbar\sqrt{(l+m)(l-m+1)} \left|l,m+1\right\rangle \tag{0.0.29}$$

を得る．よって，上 2 式と**式** (0.0.21) と**式** (0.0.22) を使えば $\hat{L}_z$ と $\hat{L}^2$ の行列表現が得られる．

$$\hat{L}_z = \begin{pmatrix} \langle 0,0|\hat{L}_z|0,0\rangle & \langle 0,0|\hat{L}_z|1/2,1/2\rangle & \langle 0,0|\hat{L}_z|1/2,-1/2\rangle & \langle 0,0|\hat{L}_z|1,1\rangle & \langle 0,0|\hat{L}_z|1,0\rangle & \cdots \\ \langle 1/2,1/2|\hat{L}_z|0,0\rangle & \langle 1/2,1/2|\hat{L}_z|1/2,1/2\rangle & \langle 1/2,1/2|\hat{L}_z|1/2,-1/2\rangle & \langle 1/2,1/2|\hat{L}_z|1,1\rangle & \langle 1/2,1/2|\hat{L}_z|1,0\rangle & \cdots \\ \langle 1/2,-1/2|\hat{L}_z|0,0\rangle & \langle 1/2,-1/2|\hat{L}_z|1/2,1/2\rangle & \langle 1/2,-1/2|\hat{L}_z|1/2,-1/2\rangle & \langle 1/2,-1/2|\hat{L}_z|1,1\rangle & \langle 1/2,-1/2|\hat{L}_z|1,0\rangle & \cdots \\ \langle 1,1|\hat{L}_z|0,0\rangle & \langle 1,1|\hat{L}_z|1/2,1/2\rangle & \langle 1,1|\hat{L}_z|1/2,-1/2\rangle & \langle 1,1|\hat{L}_z|1,1\rangle & \langle 1,1|\hat{L}_z|1,0\rangle & \cdots \\ \langle 1,0|\hat{L}_z|0,0\rangle & \langle 1,0|\hat{L}_z|1/2,1/2\rangle & \langle 1,0|\hat{L}_z|1/2,-1/2\rangle & \langle 1,0|\hat{L}_z|1,1\rangle & \langle 1,0|\hat{L}_z|1,0\rangle & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \end{pmatrix} \tag{0.0.30}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{\hbar}{2} & & & & \\ 0 & & -\frac{\hbar}{2} & & & \\ \vdots & & & \hbar & & \cdots \\ \vdots & & & & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & & -\hbar \end{pmatrix} \tag{0.0.31}$$

$$\hat{L}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & & \\ 0 & \dfrac{3}{4}\hbar^2 & & & & \\ & & \dfrac{3}{4}\hbar^2 & & & \\ & & & 2\hbar^2 & & \\ & & & & 2\hbar^2 & \\ & & & & & 2\hbar^2 \end{pmatrix} \tag{0.0.32}$$

注目すべきは l ごとにブロック状になっていることである．$l = 1/2$ の部分だけ取り出せば

$$\hat{L}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{0.0.33}$$

が得られる．