

特殊相対性理論 (Special Relativity) は次の 2 つの事柄を原理とする。

特殊相対性原理

あらゆる慣性系で同じ物理法則が成り立つ。

光速不変の原理

あらゆる慣性系で真空中の光の速さは同一である。

### 0.0.1 Lorentz 変換

特殊相対性原理と光速不変の原理の下で成り立つ座標変換の法則 (Lorentz 変換) を導く。まず、慣性系  $X$  系の原点  $O$  と  $X'$  系の原点  $O'$  が  $t = t' = 0$  で一致している。  $t = t' = 0$  で光が原点 ( $O = O'$ ) を通過したとする。  $X$  系の空間座標を  $(x, y, z)$ ,  $X'$  系の空間座標を  $(x', y', z')$  とすると、光速不変の原理より、

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{t} = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{t'} = c \quad (0.0.1)$$

が成り立つ。上式から**世界長さ** (spacetime interval)

$$s^2 := x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 \quad (0.0.2)$$

が不変であることが導かれる。

次に、世界長さ不変性から、慣性系間の座標変換の法則である **Lorentz 変換** (Lorentz Transformation) を導く。慣性系  $X'$  が  $x$  軸正の方向に速さ  $v$  で移動しているとする。このとき  $y = y', z = z'$  である。わかりやすいように  $T = it$  とおく。世界長さは座標系に依らないから、

$$x^2 - (ct)^2 = x'^2 - (ct')^2 \quad (0.0.3)$$

$$x^2 + (cT)^2 = x'^2 + (cT')^2 \quad (0.0.4)$$

が成り立つ。これが回転座標変換と類似していることから、

$$\begin{pmatrix} cT' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cT \\ x \end{pmatrix} \quad (0.0.5)$$

と書ける。表示を  $t$  に戻すと、

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & i \sin \theta \\ i \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (0.0.6)$$

である。さらに、 $\theta = i\phi$  とすると

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi \\ -\sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (0.0.7)$$

となる。よって、

$$x' = (-\sinh \phi)ct + (\cosh \phi)x \quad (0.0.8)$$

を得る。  $X$  系において時刻  $t$  が経過したとする。  $X$  系から見る  $X'$  系の原点の位置は  $x = vt$  である。一方、  $X'$  系から見ると  $x' = 0$  である。よって上式から、

$$0 = (-\sinh \phi)ct + (\cosh \phi)vt \quad (0.0.9)$$

が成り立つ。よって、

$$\frac{v}{c} = \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi} = \tanh \phi \quad (0.0.10)$$

である。以上より、

$$\begin{cases} \sinh \phi = \frac{v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \\ \cosh \phi = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \end{cases} \quad (0.0.11)$$

であることがわかる。したがって、

Lorentz 変換

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v/c \\ -v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (0.0.12)$$

を得る。Lorentz 変換

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (0.0.13)$$

において  $v \ll c$  とすると

$$x' = x - vt \quad (0.0.14)$$

となる。これは Galilei 変換と一致している。

### 練習問題 0.1: Lorentz 変換の問題

1. Lorentz 変換式 (0.0.12) において、 $x^2 - (ct)^2$  が不変であることを確認せよ。
2.  $X'$  系の原点が  $X$  系から見ると速さ  $v$  で  $x$  軸正方向へ運動していることを示せ。

1. 式 (0.0.12) より、

$$x'^2 - (ct')^2 = \frac{x^2 - 2xvt + v^2t^2}{1 - (v/c)^2} - \frac{c^2t^2 - 2xvt + (v/c)^2x^2}{1 - (v/c)^2} \quad (0.0.15)$$

$$= \frac{[1 - (v/c)^2]x^2 - [1 - (v/c)^2](ct)^2}{1 - (v/c)^2} \quad (0.0.16)$$

$$= x^2 - (ct)^2 \quad (0.0.17)$$

2.  $X'$  系の原点は

$$x' = \frac{-vt + x}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = 0 \quad (0.0.18)$$

より、 $X$  系から見ると

$$x = vt \quad (0.0.19)$$

となる。よって、速さ  $v$  で  $x$  軸正方向へ運動していることがわかる。

### 0.0.2 速度の合成則

次に、相対論的効果を取り込んだ速度の合成則について示す。 $X$  系は静止し、 $X'$  系が速さ  $v$  で  $x$  軸方向に移動しているとする。さらに  $X'$  系では粒子が速さ  $u'$  で  $x'$  軸方向に運動している。 $X$  系から見た粒子の速度  $V$  を求める。式 (0.0.12) において  $v \rightarrow -v$  とすると、

$$\begin{pmatrix} c dt \\ dx \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \begin{pmatrix} 1 & v/c \\ v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c dt' \\ dx' \end{pmatrix} \quad (0.0.20)$$

となる． $V = \frac{dx}{dt}$  なので，

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{v dt' + dx'}{dt' + (v/c^2) dx'} \quad (0.0.21)$$

$$= \frac{v + \frac{dx'}{dt'}}{1 + (v/c^2) \frac{dx'}{dt'}} \quad (0.0.22)$$

$$= \frac{v + u'}{1 + vu'/c^2} \quad (0.0.23)$$

を得る．

速度の合成

$$V = \frac{v + u'}{1 + vu'/c^2} \quad (0.0.24)$$

例として  $u' = v = c$  とすると

$$V = \frac{2c}{1 + c^2/c^2} = c \quad (0.0.25)$$

である．速度が合成されても光速を超えることは決してないことがわかる．

### 0.0.3 Lorentz 収縮

**Lorentz 収縮** (Length Contractions) について説明する．速さ  $v$  で運動している  $X'$  系から， $t' = 0$  において，静止している  $X$  系の 2 点を見る．1 点は原点  $O : (x, t) = (0, 0)$ ，もう 1 点は  $P : (x, t) = (L, t)$  である．まず，原点  $O$  は  $X'$  系から見ると，

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v/c \\ -v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (0.0.26)$$

である．点  $P$  を  $X'$  系から見ると，

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v/c \\ -v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ L \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \begin{pmatrix} ct - \frac{v}{c}L \\ -vt + L \end{pmatrix} \quad (0.0.27)$$

である． $t' = 0$  で観測しているため， $t' = 0$  を代入し

$$0 = ct - \frac{v}{c}L \quad (0.0.28)$$

$$t = \frac{v}{c^2}L \quad (0.0.29)$$

を得る．よって，

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \left[ -\left(\frac{v}{c}\right)^2 L + L \right] = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} L \quad (0.0.30)$$

である．これは動いている慣性系から静止系での距離 ( $L$ ) を測ると縮んで見える ( $L'$ ) ことを意味している．

Lorentz 収縮

$$L' = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} L \quad (0.0.31)$$

また，ある対象に対して静止している観測者が測った距離を**固有長さ** (proper length) という．今回は  $L$  が固有長さである．

### 0.0.4 時間の遅れ

次に**時間の遅れ** (Time Dilations) について説明する。同様の  $X$  系と  $X'$  系を考える。時計が  $X'$  系の原点  $x' = 0$  に置かれていて、観測者は  $X'$  系においてこの時計を見ている。 $X'$  系に置かれた時計の時刻が  $t'$  のときの時空点  $P_1$ ,  $t' + \Delta T_0$  の時空点を  $P_2$  とする。 $P_1$  は,

$$\begin{pmatrix} ct_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \begin{pmatrix} 1 & v/c \\ v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \begin{pmatrix} ct' \\ vt' \end{pmatrix} \quad (0.0.32)$$

$P_2$  は,

$$\begin{pmatrix} ct_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \begin{pmatrix} 1 & v/c \\ v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(t' + \Delta T_0) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \begin{pmatrix} c(t' + \Delta T_0) \\ v(t' + \Delta T_0) \end{pmatrix} \quad (0.0.33)$$

である。よって、 $X$  系での時間経過  $\Delta T = t_2 - t_1$  は,

$$\Delta T = t_2 - t_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \Delta T_0 \quad (0.0.34)$$

である。これは  $X'$  系は  $X$  系に比べて時間の流れが遅いことを示している。

時間の遅れ

$$\Delta T = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \Delta \tau \quad (0.0.35)$$

観測者に対して 2 つの事象が同一の空間座標で起きたとき、その時間間隔  $\Delta \tau$  を**固有時間** (proper time) という。

### 0.0.5 電磁場の双対性♠

電磁場の双対性について説明する。マクスウェル方程式は,

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \end{cases} \quad (0.0.36)$$

の 4 つである。これを Lorentz 変換に対して共変な形式に書き直す。まず、 $\mathbf{B}$  と  $\mathbf{E}$  はベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  とスカラーポテンシャル  $\phi$  を用いて,

$$\begin{cases} \mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \end{cases} \quad (0.0.37)$$

と表される。座標を,

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) := (ct, x, y, z) \quad (0.0.38)$$

と定義する<sup>1</sup>。また 4 元ベクトルポテンシャルを,

$$A^\mu := (\phi, c\mathbf{A}) \quad (0.0.39)$$

$$A_\mu := (\phi, -c\mathbf{A}) \quad (0.0.40)$$

と定義する。4 元ベクトルポテンシャルを使うと電場と磁場は,

$$B_1 := B_x = c \frac{\partial A_z}{\partial y} - c \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad (0.0.41)$$

<sup>1</sup>このような 4 次元空間を **Minkowski 空間** という。

$$= -\frac{\partial A_3}{\partial x^2} + \frac{\partial A_2}{\partial x^3} \quad (0.0.42)$$

$$= \partial_3 A_2 - \partial_2 A_3 \quad (0.0.43)$$

$$E_1 := E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \quad (0.0.44)$$

$$= -\frac{\partial A_0}{\partial x^1} + \frac{\partial A_1}{\partial x^0} \quad (0.0.45)$$

$$= \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 \quad (0.0.46)$$

のように書ける．電磁場テンソルを，

$$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (0.0.47)$$

を定義する．これを行列の形で表すと，

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} F_{00} & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{20} & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ -E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ -E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix} \quad (0.0.48)$$

である．明らかに  $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$  である．また電磁場テンソルの定義から，

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0 \quad (0.0.49)$$

が成り立つ．実際に計算してみると

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = \partial_\mu (\partial_\nu A_\lambda - \partial_\lambda A_\nu) + \partial_\nu (\partial_\lambda A_\mu - \partial_\mu A_\lambda) + \partial_\lambda (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \quad (0.0.50)$$

$$= (\partial_\mu \partial_\nu A_\lambda - \partial_\mu \partial_\lambda A_\nu) + (\partial_\nu \partial_\lambda A_\mu - \partial_\nu \partial_\mu A_\lambda) + (\partial_\lambda \partial_\mu A_\nu - \partial_\lambda \partial_\nu A_\mu) \quad (0.0.51)$$

$$= 0 \quad (0.0.52)$$

である．これは Faraday の電磁誘導の法則と磁束密度に関する Gauss の法則を表している．例えば  $\mu = 0$ ,  $\nu = 1$ ,  $\lambda = 2$  とすると，

$$\partial_0 F_{12} + \partial_1 F_{20} + \partial_2 F_{01} \quad (0.0.53)$$

$$= -\frac{\partial(cB_z)}{\partial(ct)} + \frac{\partial}{\partial x}(-E_y) + \frac{\partial}{\partial y}(-E_x) \quad (0.0.54)$$

$$= -(\nabla \times \mathbf{E})_z - \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0 \quad (0.0.55)$$

また， $\mu = 1$ ,  $\nu = 2$ ,  $\lambda = 3$  とすると，

$$\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} \quad (0.0.56)$$

$$= c(\partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z) \quad (0.0.57)$$

$$= c\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (0.0.58)$$

が得られる．

磁場/電束密度テンソル  $H_{\mu\nu}$  を，

$$H_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} H_{00} & H_{01} & H_{02} & H_{03} \\ H_{10} & H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{20} & H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{30} & H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & cD_x & cD_y & cD_z \\ -cD_x & 0 & -H_z & H_y \\ -cD_y & H_z & 0 & -H_x \\ -cD_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \quad (0.0.59)$$

4 次元の電流密度を  $j^\mu$  を，

$$j^\mu := (c\rho, \mathbf{j}) \quad (0.0.60)$$

と定義する．明らかに  $H_{\mu\nu} = -H_{\nu\mu}$  である．すると，電束密度に関する Gauss の法則と Ampère の法則は，

$$\partial^\nu H_{\nu\mu} = j_\mu \quad (0.0.61)$$

と表される．Einstein の縮約記法を用いた．例えば  $\mu = 0$  とすると

$$\partial^1 H_{10} + \partial^2 H_{20} + \partial^3 H_{30} = j_0 \quad (0.0.62)$$

$$\partial_x D_x + \partial_y D_y + \partial_z D_z = \rho \quad (0.0.63)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (0.0.64)$$

が導かれる．さらに電荷保存則，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (0.0.65)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial(c\rho)}{\partial(ct)} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (0.0.66)$$

を用いて，

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (0.0.67)$$

が得られる．以上をまとめると Maxwell 方程式は，

$$\begin{cases} \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0 & \text{Faraday の電磁誘導の法則・磁束密度に関する Gauss の法則} \\ \partial^\nu H_{\nu\mu} = j_\mu & \text{電束密度に関する Gauss の法則・Ampère の法則} \\ \partial_\mu j^\mu = 0 & \text{電荷保存則} \end{cases} \quad (0.0.68)$$

と書くことができる．これらの式はテンソルとテンソル，ベクトルとベクトルというように，Lorentz 変換に対して同じ変換則をもつものどうしが結ばれている．よってこれらは Lorentz 変換に対して共変である．

Lorentz 変換に対して共変な Maxwell 方程式

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0 \quad (0.0.69)$$

$$\partial^\nu H_{\nu\mu} = j_\mu \quad (0.0.70)$$

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (0.0.71)$$

## 0.0.6 電磁場の双対性の例題

### 例題 0.1

運動する電荷と電流を例に電磁場の双対性を確認してみよう．座標系は導線を中心を  $z$  軸とした円筒座標系を入れる．導線に  $z$  軸上向きに電流  $I$  が流れている．電荷  $+q$  が  $z$  軸上向きに速さ  $v_0$  で運動している．導線の中では面電荷密度  $\lambda_\pm = \pm\lambda/2$  の正(負)電荷が速さ  $v$  で上(下)向きに動いているとする．まずは静止系で考える．導線の中では，

$$\lambda_+ + \lambda_- = 0 \quad (0.0.72)$$

が成り立つため，電氣的に中性である．よって導線の周りには電場は無い．電流は  $I = \lambda v$  と表される．導線の周りには，

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\phi = \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi r} \mathbf{e}_\phi \quad (0.0.73)$$

の磁束密度が発生している．よって電荷は，

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -qv_0 \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi r} \mathbf{e}_r \quad (0.0.74)$$

の力を感じる．

同様の設定を電荷とともに動く系で考える．非相対論的に考えると  $\mathbf{v} = 0$  であるため電荷は力を感じないことになるが，電子が力を受けて運動している実験事実と矛盾する．相対論的效果を考慮してこの状況を眺める必

要がある．観測者からは導線中の正電荷は  $v - v_0$  で，負電荷は  $v + v_0$  で運動して見える．それぞれで Lorentz 収縮を計算する．

$$\lambda_+ = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v - v_0}{c}\right)^2}} \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (0.0.75)$$

$$\lambda_- = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v + v_0}{c}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{\lambda}{2}\right) \quad (0.0.76)$$

明らかに，

$$\lambda_+ + \lambda_- \neq 0 \quad (0.0.77)$$

であることがわかる．よって，導線の周りには電場が発生している． $v, v_0 \ll c$  とすると

$$\Delta\lambda := \lambda_+ + \lambda_- = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v - v_0}{c}\right)^2}} \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v + v_0}{c}\right)^2}} \frac{\lambda}{2} \quad (0.0.78)$$

$$\simeq \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v - v_0}{c}\right)^2\right] \frac{\lambda}{2} - \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v + v_0}{c}\right)^2\right] \frac{\lambda}{2} \quad (0.0.79)$$

$$= -\frac{\lambda v_0 v}{c^2} \quad (0.0.80)$$

と計算できて，導線は負に帯電していることがわかる．よって電荷の受ける力は，

$$\mathbf{F} = q \frac{\Delta\lambda}{2\pi r \varepsilon_0} \mathbf{e}_r \quad (0.0.81)$$

$$= -q v_0 \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi r} \mathbf{e}_r \quad (0.0.82)$$

これは先ほどの計算結果と一致している．以上の考察から，電場と磁場は観測する系によって入り混じることがわかる．