

散乱の波動関数は

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{ikz} + \int G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{2m}{\hbar^2} V(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (0.0.1)$$

と表されるのであった。この波動関数を厳密に求めることは困難であるため近似をする。まず、式 (0.0.1) を簡略化して

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_0 + \int gV\psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (0.0.2)$$

と表現する。式 (0.0.2) を繰り返し代入していくと

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_0 + \int gV\psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (0.0.3)$$

$$= \psi_0 + \int gV \left(\psi_0 + \int gV\psi(\mathbf{r}'') d\mathbf{r}'' \right) d\mathbf{r}' \quad (0.0.4)$$

$$= \psi_0 + \int gV\psi_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \iint gVgV\psi(\mathbf{r}'') d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'' \quad (0.0.5)$$

$$= \psi_0 + \int gV\psi_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \iint gVgV\psi_0(\mathbf{r}'') d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'' + \iiint gVgVgV\psi_0(\mathbf{r}''') d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'' d\mathbf{r}''' + \dots \quad (0.0.6)$$

を得る。これを第 1 項までで近似する。これは散乱の波動関数を平面波で近似することに相当する。つまり、

$$\psi \simeq \psi_0 \quad (0.0.7)$$

とする。これを**第 1Born 近似**という¹²。

Born 近似を用いて散乱振幅を求める。 $\psi(\mathbf{r}') = e^{ikz} = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'}$ だから、

$$f^{(1)}(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \int e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} \frac{2m}{\hbar} V(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (0.0.8)$$

$$\simeq -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \int e^{-i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (0.0.9)$$

$$\equiv -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \int e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (0.0.10)$$

となる。ここで散乱による運動量変化を $\mathbf{q} \equiv \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ と置いた。つまり、散乱振幅はポテンシャル $V(\mathbf{r}')$ の Fourier 変換から得られることがわかる³。また、球対称ポテンシャルのときこれは簡略化でき、

$$f^{(1)}(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \int e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} V(r') d\mathbf{r}' \quad (0.0.11)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} 2\pi \iint e^{-iqr' \cos \theta'} V(r') r'^2 \sin \theta' d\theta' dr' \quad (0.0.12)$$

$$= -\frac{m}{\hbar^2} \int r'^2 dr' V(r') \left[\frac{e^{-iqr' \cos \theta}}{iqr'} \right]_{\cos \theta = 1}^{\cos \theta = -1} \quad (0.0.13)$$

$$= -\frac{m}{\hbar^2} \int r'^2 dr' \frac{2i \sin qr'}{iqr'} V(r') \quad (0.0.14)$$

$$= -\frac{2m}{\hbar^2 q} \int rV(r) \sin qr dr \quad (0.0.15)$$

となる。

球対称ポテンシャルの散乱振幅

$$f^{(1)}(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2 q} \int_0^\infty rV(r) \sin qr dr \quad (0.0.16)$$

¹Max Born(1882-1970)

²砂川, 散乱の量子論, 「第 1Born 近似がとくによく利用される理由は、何といてもその簡単さにある。したがって、ある散乱問題を手がけたとき、だれもが最初に試してみるのが、この近似である。そして思わしい結果がえられないとき、他の近似法を考えるのである。」

³ $f^{(n)}$ は第 n Born 近似による散乱振幅を意味する。

例題 0.1: 湯川ポテンシャル

湯川ポテンシャル

$$V(r) = V_0 \frac{e^{-\mu r}}{\mu r} \quad (0.0.17)$$

による散乱を考える^a。これは、 $V(r)$ の到達距離が $\frac{1}{\mu}$ ほどであり、核子同士に働く力を表す。物質中では、伝導電子に遮蔽された不純物の Coulomb ポテンシャルを表す。このポテンシャルの下で散乱振幅を求める。

$$f^{(1)}(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \iiint e^{-iqr' \cos \theta'} V(r') r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\phi' \quad (0.0.18)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} 2\pi \int_0^\infty \left(\frac{e^{iqr'} - e^{-iqr'}}{iqr'} \right) V(r') r'^2 dr' \quad (0.0.19)$$

$$= -\frac{mV_0}{i\hbar^2 q \mu} \int_0^\infty \left[e^{(-\mu+iq)r'} - e^{(-\mu-iq)r'} \right] dr' \quad (0.0.20)$$

$$= -\frac{2mV_0}{\hbar^2 \mu} \frac{1}{\mu^2 + q^2} \quad (0.0.21)$$

よって散乱断面積は

$$\sigma^{(1)}(\theta) = |f^{(1)}(\theta)|^2 \quad (0.0.22)$$

$$= \left(\frac{2mV_0}{\hbar^2 \mu} \right)^2 \frac{1}{(\mu^2 + q^2)^2} \quad (0.0.23)$$

$$= \left(\frac{2mV_0}{\hbar^2 \mu} \right)^2 \frac{1}{(\mu^2 + 4K^2 \sin^2 \theta/2)^2} \quad (0.0.24)$$

である。ここで、 \mathbf{k}' と \mathbf{k} のなす角が θ であるため $q = 2k \sin \theta/2$ であることを用いた。

^a湯川秀樹 (1907-1981)

例題 0.2: Rutherford 散乱 (Griffith Example 10.6)

湯川ポテンシャルで $V_0 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}$, $\mu = 0$ とすると Coulomb ポテンシャル

$$V(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (0.0.25)$$

と一致する。式 (0.0.16) に代入して散乱振幅を求める。

$$f(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2 q} \int_0^\infty r \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} \sin qr dr \quad (0.0.26)$$

$$= -\frac{2m}{\hbar^2 q} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \sin qr dr \quad (0.0.27)$$

$$= -\frac{2m}{\hbar^2 q} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{q} [\cos qr]_0^\infty \right) \quad (0.0.28)$$

$$\simeq -\frac{mq_1 q_2}{2\pi\epsilon_0 \hbar^2 q^2} \quad (0.0.29)$$

$$= -\frac{mq_1 q_2}{8\pi\epsilon_0 \hbar^2 \sin^2 \theta/2} \quad (0.0.30)$$

次に、Born 近似の適用範囲について考える。散乱振幅は

$$f(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{2m}{\hbar^2} V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (0.0.31)$$

であり、散乱の波動関数は

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_0(\mathbf{r}) + \int g(\mathbf{r} - \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \psi_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \dots \quad (0.0.32)$$

である。この波動関数を

$$\psi(\mathbf{r}) \simeq \psi_0(\mathbf{r}) \quad (0.0.33)$$

と近似するのが第 1Born 近似であった。この近似がうまくいく、つまり、

$$\int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{2m}{\hbar^2} V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (0.0.34)$$

を正しく評価するには、 $V(\mathbf{r}) \neq 0$ となる $r \simeq 0$ で、

$$\psi(\mathbf{r}) \simeq \psi_0(\mathbf{r}) \quad (0.0.35)$$

と近似できる必要がある。

$r \simeq 0$ で式 (0.0.26) の第 1 項がそれ以外の項より十分大きければいいため、

$$|\psi_0(\mathbf{0})| \gg \left| \int g(\mathbf{0} - \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \psi_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right| \quad (0.0.36)$$

これを整理すると、

$$|e^{ikz}| \gg \left| \int -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{e^{ikr'}}{4\pi r'} V(\mathbf{r}') e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} d\mathbf{r}' \right| \quad (0.0.37)$$

$$1 \gg \frac{m}{2\pi\hbar^2} \left| \int \frac{e^{ikr'}}{r'} V(\mathbf{r}') e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} d\mathbf{r}' \right| \quad (0.0.38)$$

を得る。これが第 1Born 近似が有効であるための条件じゃ。

例題 0.3: Born 近似の適用条件

ポテンシャル

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & (r \leq a) \\ 0 & (r \geq a) \end{cases} \quad (0.0.39)$$

による散乱を考える。Born 近似の適用条件 (0.0.32) より、

$$1 \gg \frac{m}{2\pi\hbar^2} \left| \int \frac{e^{ikr'}}{r'} V_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} d\mathbf{r}' \right| \quad (0.0.40)$$

$$= \frac{mV_0}{2\pi\hbar^2} \left| \int e^{ikr'} e^{ikr' \cos \theta'} r' \sin \theta' dr' d\theta' d\phi' \right| \quad (0.0.41)$$

$$= \frac{mV_0}{2\hbar^2 k^2} |e^{2ika} - 1 - 2ika| \quad (0.0.42)$$

を得る^a。これを低エネルギー散乱と高エネルギー散乱に場合分けして見積もる。

(i) 低エネルギー散乱 ($ka \ll 1$)

$$|e^{2ika} - 1 - 2ika| \simeq \left| \left(1 + 2ika + \frac{1}{2}(2ika)^2 \right) - 1 - 2ika \right| \quad (0.0.43)$$

$$= 2k^2 a^2 \quad (0.0.44)$$

より，適用条件は

$$1 \gg \frac{mV_0}{2\hbar^2 k^2} 2k^2 a^2 = \frac{mV_0 a^2}{\hbar^2} \quad (0.0.45)$$

である．つまり，ポテンシャルの大きさ V_0 または半径 a が小さい時に近似が有効であることがわかる．

(ii) 高エネルギー散乱 ($ka \gg 1$)

$$|e^{2ika} - 1 - 2ika| \simeq 2ka \quad (0.0.46)$$

より，適用条件は

$$1 \gg \frac{mV_0 a}{\hbar^2 k} \quad (0.0.47)$$

である． $k \rightarrow \infty$ に対して近似が成立することがわかる．つまり，Born 近似は高エネルギー粒子に対して常により近似であることがわかる．

^a 「試験に出そうな計算．」