Schrödinger 表示の非定常摂動基本方程式は，**式** (0.0.1) と**式** (**??**) であり，

$$\begin{cases} \mathrm{i}\hbar\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\psi(t)\right\rangle = \left(\hat{H}^{(0)}+\hat{V}(t)\right)\left|\psi(t)\right\rangle \\ \left|\psi(t)\right\rangle = \displaystyle\sum_n c_n(t)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_n}{\hbar}t\right)\left|n\right\rangle \end{cases} \tag{0.0.1}$$

と書けるのであった．**相互作用表示** (interaction picture) を**式** (0.0.2) のような $\left|\psi(t)\right\rangle \to \left|\psi(t)\right\rangle_{\mathrm{I}}$ の変換を行って得られる状態ベクトルと定義する．

相互作用表示

$$\left|\psi(t)\right\rangle_{\mathrm{I}} \coloneqq \exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right)\left|\psi(t)\right\rangle \tag{0.0.2}$$

**式** (0.0.2) を用いて，**式** (0.0.1) と等価な基本方程式である，相互作用表示の非定常摂動基本方程式を導く．まず，**式** (0.0.1) の第 2 式を用いて，

$$\begin{aligned} \left|\psi(t)\right\rangle_{\mathrm{I}} &= \exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right)\sum_n c_n(t)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_n}{\hbar}t\right)\left|n\right\rangle && (0.0.3)\\ &= \sum_n c_n(t)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_n}{\hbar}t\right)\exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right)\left|n\right\rangle && (0.0.4)\\ &= \sum_n c_n(t)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_n}{\hbar}t\right)\exp\left(\mathrm{i}\frac{E_n}{\hbar}t\right)\left|n\right\rangle && (0.0.5)\\ &= \sum_n c_n(t)\left|n\right\rangle && (0.0.6) \end{aligned}$$

と計算できる．

次に，相互作用表示の時間微分を計算する．相互作用表示での摂動項 $\hat{V}_{\mathrm{I}}$ を，

$$\hat{V}_{\mathrm{I}} \coloneqq \exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right)\hat{V}(t)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \tag{0.0.7}$$

とする．計算の途中で，**式** (0.0.1) の第 1 式を用いると，

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\psi(t)\right\rangle_{\mathrm{I}} &= \mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right)\right]\left|\psi(t)\right\rangle + \exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right)\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\psi(t)\right\rangle && (0.0.8)\\ &= -\hat{H}^{(0)}\exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right)\left|\psi(t)\right\rangle + \exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right)\left(\hat{H}^{(0)}+\hat{V}(t)\right)\left|\psi(t)\right\rangle && (0.0.9)\\ &= \left[\exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right),\hat{H}^{(0)}\right]\left|\psi(t)\right\rangle + \exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right)\hat{V}(t)\left|\psi(t)\right\rangle && (0.0.10)\\ &= \exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right)\hat{V}(t)\left|\psi(t)\right\rangle && (0.0.11)\\ &= \exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right)\hat{V}(t)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right)\exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right)\left|\psi(t)\right\rangle && (0.0.12)\\ &= \exp\left(\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right)\hat{V}(t)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right)\left|\psi(t)\right\rangle_{\mathrm{I}} && (0.0.13)\\ &= \hat{V}_{\mathrm{I}}(t)\left|\psi(t)\right\rangle_{\mathrm{I}} && (0.0.14) \end{aligned}$$

を得る．**式** (0.0.14) と**式** (0.0.7) は Schödinger 表示の非定常摂動基本方程式と等価な方程式であるから，これを**朝永・Schwinger 方程式**と呼ぶ.[1][2][3].

朝永・Schwinger 方程式

$$\begin{cases} \mathrm{i}\hbar \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left| \psi(t) \right\rangle_{\mathrm{I}} = \hat{V}_{\mathrm{I}}(t) \left| \psi(t) \right\rangle_{\mathrm{I}} \\ \hat{V}_{\mathrm{I}}(t) = \exp\left( \mathrm{i}\dfrac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar} t \right) \hat{V}(t) \exp\left( -\mathrm{i}\dfrac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar} t \right) \end{cases} \tag{0.0.15}$$

さて，定常状態の Schrödinger 方程式が，

$$\forall m \ \hat{H}^{(0)} \left| m \right\rangle = E_m \left| m \right\rangle \tag{0.0.16}$$

を満たすとする．**式** (0.0.15) の第 1 式に左から $\langle m|$ を演算する．途中，**式** (0.0.6) を用いて $\left|\psi(t)\right\rangle_{\mathrm{I}}$ を展開し，**式** (0.0.15) の第 2 式を用いて $\hat{V}_{\mathrm{I}}(t)$ を $\hat{V}(t)$ に戻す．また，$\hat{V}_{\mathrm{I}}(t)$ は $c_n(t)$ に作用しないものとすると，

$$\left\langle m \middle| \mathrm{i}\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \middle| \psi(t) \right\rangle_{\mathrm{I}} = \left\langle m \middle| \hat{V}_{\mathrm{I}}(t) \middle| \psi(t) \right\rangle_{\mathrm{I}} \tag{0.0.17}$$

$$\Leftrightarrow \left\langle m \right| \mathrm{i}\hbar \sum_n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} c_n(t) \left| n \right\rangle = \sum_n c_n(t) \left\langle m \middle| \exp\left( \mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar} t \right) \hat{V}(t) \exp\left( -\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar} t \right) \middle| n \right\rangle \tag{0.0.18}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{i}\hbar \sum_n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} c_n(t) \left\langle m | n \right\rangle = \sum_n c_n(t) \exp\left( -\mathrm{i}\frac{E_n - E_m}{\hbar} t \right) \left\langle m \middle| \hat{V}(t) \middle| n \right\rangle \tag{0.0.19}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{i}\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} c_m(t) = \sum_n c_n(t) \exp\left( \mathrm{i}\frac{E_m - E_n}{\hbar} t \right) \left\langle m \middle| \hat{V}(t) \middle| n \right\rangle \tag{0.0.20}$$

となる．$\omega_{mn}$ と $V_{mn}$ を，

$$\omega_{mn} \coloneqq \frac{E_m - E_n}{\hbar} \tag{0.0.21}$$

$$V_{mn}(t) \coloneqq \left\langle m \middle| \hat{V}(t) \middle| n \right\rangle \tag{0.0.22}$$

と定義する．非定常摂動量子系の時間発展は以下の式を満たす．

非定常摂動量子系の時間発展

$$\forall m \ \mathrm{i}\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} c_m(t) = \sum_n c_n(t) V_{mn}(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{mn} t} \tag{0.0.23}$$

これは $c_n(t)$ の連立方程式になっていて，一般に解くことは困難である．例えば $\hat{V}(t)$ が有限次元であり，行列表示ができたとすると**式** (0.0.23) は，

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11}(t) & V_{12}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{12}t} & \cdots & V_{1n}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{1n}t} \\ \left(V_{12}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{12}t}\right)^* & V_{22}(t) & \cdots & V_{2n}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{2n}t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(V_{1n}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{1n}t}\right)^* & \left(V_{2n}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{2n}t}\right)^* & \cdots & V_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \tag{0.0.24}$$

となる．途中で，

$$\left(V_{mn}(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{mn}t}\right)^* = V_{mn}(t)^* \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{mn}t}\right)^* \tag{0.0.25}$$

[1] Schrödinger 描像は量子状態が時間発展するとみなす．Heisenberg 描像は物理量が時間発展するとみなす．相互作用表示はその中間であるといえる．

[2] 朝永振一郎 (1906-1979)，Julian Schwinger(1918-1994)

[3] 朝永と Schwinger は 1964 年に Richard Feynmann とともにノーベル賞を受賞.

$$= \left\langle m \middle| \hat{V}(t) \middle| n \right\rangle^{*} \exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_m - E_n}{\hbar} t\right) \tag{0.0.26}$$

$$= \left\langle n \middle| \hat{V}(t) \middle| m \right\rangle \exp\left(\mathrm{i}\frac{E_n - E_m}{\hbar} t\right) \tag{0.0.27}$$

$$= \left(V_{nm}(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{nm} t}\right) \tag{0.0.28}$$

を用いた．**式** (0.0.24) の行列の部分も時間に依存することを考えると $n$ が大きなときに厳密に解くことは困難である．