Born 近似の適用範囲について考える．**式** (??) より，一般に散乱振幅は,

$$f(\theta) = -\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k'}\cdot\boldsymbol{r}}\frac{2m}{\hbar^2}V(r)\psi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{0.0.1}$$

と書けるのであった．また**式** (??) より，散乱の波動関数は,

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \psi_0(\boldsymbol{r}) + \int g(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'})V(r')\psi_0(\boldsymbol{r'})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r'} + \cdots \tag{0.0.2}$$

であった．第 1 Born 近似とは，波動関数 $\psi(\boldsymbol{r})$ を,

$$\psi(\boldsymbol{r}) \simeq \psi_0(\boldsymbol{r}) \tag{0.0.3}$$

と近似するのものであった．第 1 Born 近似が十分良い評価である，つまり,

$$\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k'}\cdot\boldsymbol{r}}\frac{2m}{\hbar^2}V(r)\psi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{0.0.4}$$

を正しく評価できるには，$V(r) \neq 0$ なる $r \simeq 0$ で,

$$\psi(\boldsymbol{r}) \simeq \psi_0(\boldsymbol{r}) \tag{0.0.5}$$

と近似できる必要がある．$r \simeq 0$ で**式** (0.0.2) の第 1 項がそれ以外の項より十分大きければ良いから,

$$|\psi_0(0)| \gg \left|\int g(0-\boldsymbol{r})V(r)\psi_0(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\right| \tag{0.0.6}$$

となればよい．整理すると,

$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz}\right| \gg \left|\int -\frac{2m}{\hbar^2}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{4\pi r}V(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k'}\cdot\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\right| \tag{0.0.7}$$

$$1 \gg \frac{m}{2\pi\hbar^2}\left|\int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}V(r)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k'}\cdot\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}\right| \tag{0.0.8}$$

を得る．これが第 1 Born 近似が有効であるための条件である．

例題 0.1: 第 1 Born 近似の適用条件

球対称ポテンシャル $V(r)$,

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & (r \leq a) \\ 0 & (r \geq a) \end{cases} \tag{0.0.9}$$

による散乱を考える．Born 近似の適用条件である**式** (0.0.8) を用いて，満たすべき条件とその物理的意味を述べよ．

式 (0.0.8) より Born 近似が成立する条件は,

$$\begin{aligned} 1 &\gg \frac{m}{2\pi\hbar^2}\left|\int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr'}}{r'}V(r')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k'}\cdot\boldsymbol{r'}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r'}\right| && (0.0.10)\\ &= \frac{m}{2\pi\hbar^2}\left|\int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr'}}{r'}V(r')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k'}\cdot\boldsymbol{r'}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{r'}\right| && (0.0.11)\\ &= \frac{m}{2\pi\hbar^2}\left|\int_{\phi'=0}^{2\pi}\mathrm{d}\phi'\int_{\theta'=0}^{\pi}\mathrm{d}\theta'\int_{r'=0}^{\infty}\mathrm{d}r'\,V(r')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k'}\cdot\boldsymbol{r'}}r'^2\sin\theta'\right| && (0.0.12) \end{aligned}$$

$$= \frac{mV_0}{2\pi\hbar^2}\left|\int_{\phi'=0}^{2\pi} \mathrm{d}\phi' \int_{\theta'=0}^{\pi} \mathrm{d}\theta' \int_{r'=0}^{a} \mathrm{d}r' \, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr'}}{r'} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr'\cos\theta'} r'^2 \sin\theta'\right| \tag{0.0.13}$$

$$= \frac{mV_0}{\hbar^2}\left|\int_{r'=0}^{a} r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr'} \, \mathrm{d}r' \int_{\theta'=0}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr'\cos\theta'} \sin\theta' \, \mathrm{d}\theta'\right| \tag{0.0.14}$$

$$= \frac{mV_0}{\hbar^2}\left|\int_{r'=0}^{a} r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr'} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr'} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kr'}}{\mathrm{i}kr'} \, \mathrm{d}r'\right| \tag{0.0.15}$$

$$= \frac{mV_0}{\hbar^2 k}\left|\int_{r'=0}^{a} \left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}kr'} - 1\right) \mathrm{d}r'\right| \tag{0.0.16}$$

$$= \frac{mV_0}{2\hbar^2 k^2}\left|\mathrm{e}^{2\mathrm{i}ka} - 1 - 2\mathrm{i}ka\right| \tag{0.0.17}$$

を得る[a]．これを低エネルギー散乱と高エネルギー散乱に場合分けして見積もる．**式** (0.0.17) の絶対値の中では，ka がまとめて 1 つの変数のようになっていることに注意する．また，**式** (**??**) で定めた κ の定義と，$\kappa \to k$ と書き換えたことより，

$$ka = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} a \tag{0.0.18}$$

であるから，ka はエネルギーの 1/2 乗に比例することに注意する．

1. 低エネルギー散乱 ($ka \ll 1$)

   式 (0.0.17) の絶対値の部分を近似すると，

$$\left|\mathrm{e}^{2\mathrm{i}ka} - 1 - 2\mathrm{i}ka\right| = \left|\left(1 + 2\mathrm{i}ka + \frac{1}{2}(2\mathrm{i}ka)^2 + \cdots\right) - 1 - 2\mathrm{i}ka\right| \tag{0.0.19}$$

$$\simeq \left|\left(1 + 2\mathrm{i}ka + \frac{1}{2}(2\mathrm{i}ka)^2\right) - 1 - 2\mathrm{i}ka\right| \tag{0.0.20}$$

$$= 2k^2a^2 \tag{0.0.21}$$

   となるから，Born 近似の適用条件は

$$1 \gg \frac{mV_0}{2\hbar^2 k^2} 2k^2a^2 = \frac{mV_0 a^2}{\hbar^2} \tag{0.0.22}$$

   である．**式** (0.0.22) において，m と $\hbar$ は定数であるから，ポテンシャルの大きさ V_0 または半径 a が小さい時に近似が有効であることがわかる[b]．

2. 高エネルギー散乱 ($ka \gg 1$)

   式 (0.0.17) の絶対値の部分を近似すると，$ka \gg 1$ の領域では，$\left|\mathrm{e}^{2\mathrm{i}ka}\right| \simeq |-1| \gg |2\mathrm{i}ka|$ であるから，

$$\left|\mathrm{e}^{2\mathrm{i}ka} - 1 - 2\mathrm{i}ka\right| \simeq 2ka \tag{0.0.23}$$

   となる．よって Born 近似の適用条件は，

$$1 \gg \frac{mV_0 a}{\hbar^2 k} = \frac{mV_0 a}{\hbar\sqrt{2mE}} \tag{0.0.24}$$

   である．**式** (0.0.24) を見ると，$k \to \infty$ に対して近似が成立することがわかる．つまり，Born 近似は高エネルギー粒子に対して常によい近似であることがわかる．

[a]授業中の教員の発言:「試験に出そうな計算.」
[b]2023 年度期末試験第 3 問 (5).