

まず，大域的 Gauge 変換を議論する．波動関数  $\psi(\mathbf{r})$  を，

$$\psi(\mathbf{r}) \rightarrow \psi'(\mathbf{r}) = e^{i\alpha} \psi(\mathbf{r}) \quad (0.0.1)$$

のように変換することを大域的ゲージ変換という．これを Schrödinger 方程式に代入すると，

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi' = e^{i\alpha} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi \quad (0.0.2)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi \rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi' = -e^{i\alpha} \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi \quad (0.0.3)$$

となる．よって，

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi' = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi' \quad (0.0.4)$$

が成り立つので，大域的ゲージ変換を行う前と後で Schrödinger 方程式の形が変わらないことが分かる．当然期待値も，

$$\langle \psi' | \hat{A} | \psi' \rangle = \langle \psi | e^{-i\alpha} \hat{A} e^{i\alpha} | \psi \rangle \quad (0.0.5)$$

$$= \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \quad (0.0.6)$$

となるから，物理は大域的ゲージ変換に対して不変であると言える．