特殊相対性理論 (Special Relativity) は次の 2 つの事柄を原理とする．

特殊相対性原理

あらゆる慣性系で同じ物理法則が成り立つ．

光速度不変の原理

あらゆる慣性形で真空中の光の速さは同一である．

この原理の下で成り立つ座標変換の法則 (Lorentz 変換) を導く．まず，慣性系 X 系の原点 O とと X' 系の原点 O' が $t = t' = 0$ で一致している．$t = t' = 0$ で光が原点 $(O = O')$ を通過したとする．X 系の空間座標を (x, y, z)，X' 系の空間座標を (x', y', z') とすると，光速度不変の原理より，

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{t} = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{t'} = c \tag{0.0.1}$$

が成り立つ．上式から**世界長さ** (spacetime interval)

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 \tag{0.0.2}$$

が不変量であることが導かれる．

次に，世界長さ不変性から，慣性系間の座標変換の法則である **Lorentz 変換** (Lorentz Transformation) を導出する．慣性系 X' が x 軸正の方向に速さ v で移動しているとする．このとき $y = y', z = z'$ である．わかりやすいように $T = it$ とおく．光速不変より，

$$x^2 - (ct)^2 = x'^2 - (ct')^2 \tag{0.0.3}$$

$$x^2 + (cT)^2 = x'^2 + (cT)^2 \tag{0.0.4}$$

が成り立つ．これが回転座標変換と類似していることから，

$$\begin{pmatrix} cT' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cT \\ x \end{pmatrix} \tag{0.0.5}$$

と置く．表示を t に戻すと

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mathrm{i}\sin\theta \\ \mathrm{i}\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \tag{0.0.6}$$

である．さらに，$\theta = \mathrm{i}\phi$ とすると

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & -\sinh\phi \\ -\sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \tag{0.0.7}$$

となる．よって，

$$x' = (-\sinh\phi)ct + (\cosh\phi)x \tag{0.0.8}$$

を得る．X 系において時刻 t が経過したとする．X 系から見るお X' 系の原点の位置は $x = vt$ である．一方，X' 系から見ると $x' = 0$ である．よって上式から

$$0 = (-\sinh\phi)ct + (\cosh\phi)vt \tag{0.0.9}$$

が成り立つ．よって，これを変形すると

$$\frac{v}{c} = \frac{\sinh\phi}{\cosh\phi} = \tanh\phi \tag{0.0.10}$$

である．以上より，

$$\begin{cases} \sinh\phi = \dfrac{v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \\ \cosh\phi = \dfrac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \end{cases} \tag{0.0.11}$$

であることがわかる．したがって，

Lorentz 変換

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v/c \\ -v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \tag{0.0.12}$$

を得る．Lorentz 変換

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{0.0.13}$$

において $v \ll c$ とすると

$$x' = x - vt \tag{0.0.14}$$

となる．これは Galilei 変換と一致している．

次に，相対論的効果を取り込んだ速度の合成則について示す．状況は，X 系は静止し，X' 系が速さ v で x 軸方向に移動しているとする．さらに X' 系では粒子が速さ u' で x' 軸方向に運動している．X 系から見た粒子の速度 V を求める．式 (0.0.12) において $v \to -v$ とすると

$$\begin{pmatrix} c\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \begin{pmatrix} 1 & v/c \\ v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\,\mathrm{d}t' \\ \mathrm{d}x' \end{pmatrix} \tag{0.0.15}$$

となる．$V = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ なので

$$V = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{v\,\mathrm{d}t' + \mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t' + (v/c^2)\,\mathrm{d}x'} \tag{0.0.16}$$

$$= \frac{v + \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}}{1 + (v/c^2)\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}} \tag{0.0.17}$$

$$= \frac{v + u'}{1 + \frac{vu'}{c^2}} \tag{0.0.18}$$

を得る．

速度の合成

$$V = \frac{v + u'}{1 + \frac{vu'}{c^2}} \tag{0.0.19}$$

例として $u' = v = c$ とすると

$$V = \frac{2c}{1 + c^2/c^2} = c \tag{0.0.20}$$

である．速度が合成されても光速を超えることは決してないことがわかる．

Lorentz 収縮 (Length Contractions) について説明する．速さ v で運動している X' 系から，$t' = 0$ において，静止している X 系の 2 点を見る．1 点は原点 $O : (x,t) = (0,0)$ もう 1 点は $P : (x,t) = (L,t)$ とする．まず，原点 O は X' 系から見ると

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v/c \\ -v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{0.0.21}$$

である．点 P を X' 系から見ると，

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v/c \\ -v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ L \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \begin{pmatrix} ct - \dfrac{v}{c}L \\ -vt + L \end{pmatrix} \tag{0.0.22}$$

である．$t' = 0$ で観測しているため，$t' = 0$ を代入し

$$0 = ct - \frac{v}{c}L \tag{0.0.23}$$

$$t = \frac{v}{c^2}L \tag{0.0.24}$$

を得る．よって，

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\left(-\left(\frac{v}{c}\right)^2 L + L\right) = \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}L \tag{0.0.25}$$

である．これは動いている慣性系から静止系での距離 (L) を測る (L') と縮んで見えることを意味している．

Lorentz 収縮

$$L' = \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}L \tag{0.0.26}$$

また，その対象に対して静止している観測者が測った距離を**固有長さ** (proper length) という．今回は L が固有長さである．

次に**時間の遅れ** (Time Dilations) について説明する．同様の X 系と X' 系を考える．時計が X' 系の原点 $x' = 0$ に置かれており，観測者は X' 系においてこの時計を見ている．X' 系に置かれた時計の時刻が t' のときの時空点 P_1，$t' + \Delta T_0$ の時空点を P_2 とする．P_1 は，

$$\begin{pmatrix} ct_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\begin{pmatrix} 1 & v/c \\ v/c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ct' \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\begin{pmatrix} ct' \\ vt' \end{pmatrix} \tag{0.0.27}$$

P_2 は，

$$\begin{pmatrix} ct_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\begin{pmatrix} 1 & v/c \\ v/c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c(t'+\Delta T_0) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\begin{pmatrix} c(t'+\Delta T_0) \\ v(t'+\Delta T_0) \end{pmatrix} \tag{0.0.28}$$

である．よって，X 系での時間経過 $\Delta T = t_2 - t_1$ は，

$$\Delta T = t_2 - t_1 = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\Delta T_0 \tag{0.0.29}$$

である．これは X' 系は X 系に比べて時間の流れが遅いことを示している．

時間の遅れ

$$\Delta T = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\Delta \tau \tag{0.0.30}$$

観測者に対して 2 つの事象が同一の空間座標で起きたとき，その時間間隔 $\Delta\tau$ を**固有時間** (proper time) という．

電磁場の双対性について説明する．マクスウェル方程式は 3 次元では次の 4 つの式である．

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{j} \end{cases} \tag{0.0.31}$$

これを Lorentz 変換に対して共変な形式に書き直す．まず，$\boldsymbol{B}$ と bmE はベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ とスカラーポテンシャル ϕ を用いて

$$\begin{cases} \boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \\ \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \end{cases} \tag{0.0.32}$$

と表される．ここで，座標を

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \tag{0.0.33}$$

と表し，4 元ベクトルポテンシャルを

$$A^\mu = (\phi, c\boldsymbol{A}) \tag{0.0.34}$$
$$A_\mu = (\phi, -c\boldsymbol{A}) \tag{0.0.35}$$

と定義する．この 4 元ベクトルポテンシャルを使うと電場と磁場は

$$B_x = c\frac{\partial A_z}{\partial y} - c\frac{\partial A_y}{\partial z} \tag{0.0.36}$$
$$= -\frac{\partial A_3}{\partial x^2} + \frac{\partial A_2}{\partial x^3} \tag{0.0.37}$$
$$= \partial_3 A_2 - \partial_2 A_3 \tag{0.0.38}$$
$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \tag{0.0.39}$$
$$= -\frac{\partial A_0}{\partial x^1} + \frac{\partial A_1}{\partial x^0} \tag{0.0.40}$$
$$= \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 \tag{0.0.41}$$

のように書ける．ここで，電磁場テンソル

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{0.0.42}$$

を定義する．これを行列の形で表すと

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} F_{00} & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{20} & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ -E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ -E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix} \tag{0.0.43}$$

である．明らかに $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ である．また，この定義から

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0 \tag{0.0.44}$$

が成り立つ．実際に計算してみると

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} \tag{0.0.45}$$
$$= (\partial_\mu\partial_\nu A_\lambda - \partial_\mu\partial_\lambda A_\nu) + (\partial_\nu\partial_\lambda A_\mu - \partial_\nu\partial_\mu A_\lambda) + (\partial_\lambda\partial_\mu A_\nu - \partial_\lambda\partial_\nu A_\mu) \tag{0.0.46}$$
$$= 0 \tag{0.0.47}$$

である．これは Faraday の電磁誘導の法則と磁束密度に関する Gauss の法則を表している．例えば $\mu = 0, \nu = 1, \lambda = 2$ とすると

$$\partial_0 F_{12} + \partial_1 F_{20} + \partial_2 F_{01} \tag{0.0.48}$$
$$= -\frac{\partial(cB_z)}{\partial(ct)} + \frac{\partial}{\partial x}(-E_y) + \frac{\partial}{\partial y}(-E_x) \tag{0.0.49}$$
$$= -(\nabla \times \boldsymbol{E})_z - \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0 \tag{0.0.50}$$

$\mu = 1, \nu = 2, \lambda = 3$ とすると

$$\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} \tag{0.0.51}$$
$$= c(\partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_Z) \tag{0.0.52}$$
$$= c\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{0.0.53}$$

が得られる．さらに，磁場/電束密度テンソル $H_{\mu\nu}$ を

$$H_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} H_{00} & H_{01} & H_{02} & H_{03} \\ H_{10} & H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{20} & H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{30} & H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & cD_x & cD_y & cD_z \\ -cD_x & 0 & -H_z & H_y \\ -cD_y & H_z & 0 & -H_x \\ -cD_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \tag{0.0.54}$$

4 次元の電流密度を j^μ を

$$j^\mu = (c\rho, \boldsymbol{j}) \tag{0.0.55}$$

と定義する．明らかに $H_{\mu\nu} = -H_{\nu\mu}$ である．すると，電束密度に関する Gauss の法則と Ampère の法則は次の式で表される．

$$\partial^\nu H_{\nu\mu} = j_\mu \tag{0.0.56}$$

例えば $\mu = 0$ とすると

$$\partial^1 H_{10} + \partial^2 H_{20} + \partial^3 H_{30} = j_0 \tag{0.0.57}$$

$$\partial_x D_x + \partial_y D_y + \partial_z D_z = \rho \tag{0.0.58}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho \tag{0.0.59}$$

が導かれる．さらに，電荷保存則

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0 \tag{0.0.60}$$

から

$$\frac{\partial (c\rho)}{\partial (ct)} + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0 \tag{0.0.61}$$

よって

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{0.0.62}$$

が得られる．以上をまとめると Maxwell 方程式は

$$\begin{cases} \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0 \\ \partial^\nu H_{\nu\mu} = j_\mu \\ \partial_\mu j^\mu = 0 \end{cases} \tag{0.0.63}$$

と書くことができる．これらの式はテンソルとテンソル，ベクトルとベクトルというように，Lorentz 変換に対して同じ変換則をもつものどうしが結ばれている．よってこれらは Lorentz 変換に対して共変である．

Lorentz 変換に対して共変な Maxwell 方程式

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0 \tag{0.0.64}$$

$$\partial^\nu H_{\nu\mu} = j_\mu \tag{0.0.65}$$

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{0.0.66}$$

運動する電荷と電流を例に電磁場の双対性を確認してみよう．導線には z 軸上向きに電流 I が流れている．電荷 $+q$ が z 軸上向きに速さ v_0 で運動している．導線の中では面電荷密度 $\lambda_\pm = \pm\lambda/2$ の正 (負) 電荷が速さ v で上 (下) 向きに動いているとする．まずは静止系で考える．導線の中では

$$\lambda_+ + \lambda_- = 0 \tag{0.0.67}$$

が成り立つため，電気的に中性である．よってm導線の周りには電場は無い．電流は $I = \lambda v$ と表される．導線の周りには

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\boldsymbol{e}_\phi = \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi r}\boldsymbol{e}_\phi \tag{0.0.68}$$

の磁束密度が発生している．よって電荷は

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = -qv_0 \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi r} \boldsymbol{e}_r \tag{0.0.69}$$

の力を感じる．

　これを電荷とともに動く系で考える．非相対論的に考えると $\boldsymbol{v} = 0$ であるため電荷は力を感じない．しかし，特殊相対性原理よりこれはありえない．相対論的効果を考慮してこの状況を眺める必要がある．観測者からは導線中の正電荷は $v - v_0$ で，負電荷は $v + v_0$ で運動して見える．それぞれで Lorentz 収縮を計算する．

$$\lambda_+ = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v-v_0}{c}\right)^2}} \frac{\lambda}{2} \tag{0.0.70}$$

$$\lambda_- = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v+v_0}{c}\right)^2}} \left(-\frac{\lambda}{2}\right) \tag{0.0.71}$$

明らかに

$$\lambda_+ + \lambda_- \neq 0 \tag{0.0.72}$$

であることがわかる．よって，導線の周りには電場が発生している．$v, v_0 \ll c$ とすると

$$\begin{aligned}
\lambda_+ + \lambda_- &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v-v_0}{c}\right)^2}} \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v+v_0}{c}\right)^2}} \frac{\lambda}{2} && (0.0.73)\\
&\simeq \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v-v_0}{c}\right)^2\right)\frac{\lambda}{2} - \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v+v_0}{c}\right)^2\right)\frac{\lambda}{2} && (0.0.74)\\
&= -\frac{\lambda v_0 v}{c^2} \qquad \equiv \Delta\lambda && (0.0.75)
\end{aligned}$$

と計算でき，導線は負に帯電していることがわかる．よって，電荷の受ける力は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= q\frac{\Delta\lambda}{2\pi r \varepsilon_0} \boldsymbol{e}_r && (0.0.76)\\
&= -qv_0 \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi r} \boldsymbol{e}_r && (0.0.77)
\end{aligned}$$

これは先ほどの計算結果と一致している．以上の考察から，電場と磁場は観測する系によって入り混じることがわかる．