

一般に、散乱の波動関数は、

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{ikz} + \int G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{2m}{\hbar^2} V(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (0.0.1)$$

と表されるのであった。この波動関数を厳密に求めることは困難であるため近似を考える。まず、式 (0.0.1) を簡略化して、

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_0 + \int gV\psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (0.0.2)$$

と表現する。ただし、

$$g(\mathbf{r}) := G_0(\mathbf{r}) \frac{2m}{\hbar^2} \quad (0.0.3)$$

である。式 (0.0.2) を再帰的に代入すると、

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_0 + \int gV\psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (0.0.4)$$

$$= \psi_0 + \int gV \left(\psi_0 + \int gV\psi(\mathbf{r}'') d\mathbf{r}'' \right) d\mathbf{r}' \quad (0.0.5)$$

$$= \psi_0 + \int gV\psi_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \iint gVgV\psi(\mathbf{r}'') d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'' \quad (0.0.6)$$

$$= \psi_0 + \int gV\psi_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \iint gVgV\psi_0(\mathbf{r}'') d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'' + \iiint gVgVgV\psi_0(\mathbf{r}''') d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'' d\mathbf{r}''' + \dots \quad (0.0.7)$$

を得る。式 (0.0.7) を第 1 項までで近似して、残りの項を捨てる。これは散乱の波動関数を平面波で近似することに相当する。つまり、

$$\psi \simeq \psi_0 \quad (0.0.8)$$

とする。これを **第 1 Born 近似** という¹²³。

Born 近似を用いて散乱振幅を求める。 $\mathbf{k} := ke_z$, $\mathbf{r} := ze_z$ とすると、 $\psi(\mathbf{r}') = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'}$ となるから、

$$f^{(1)}(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \int e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} \frac{2m}{\hbar^2} V(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (0.0.9)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \int e^{-i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (0.0.10)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \int e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (0.0.11)$$

となる。ただし、散乱による運動量変化に対応する物理量を $\mathbf{q} := \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ と定義した。式 (0.0.11) を見ると、散乱振幅はポテンシャル $V(r)$ の Fourier 変換から得られることがわかる⁴。また、球対称ポテンシャルのとき式 (0.0.11) は簡略化できて、 $V(\mathbf{r}') \rightarrow V(r')$ としてよいから、

$$f^{(1)}(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \int e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}'} V(r') d\mathbf{r}' \quad (0.0.12)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \int_{\phi'=0}^{2\pi} d\phi' \int_{\theta'=0}^{\pi} d\theta' \int_{r'=0}^{\infty} r'^2 \sin \theta' dr' e^{-iqr' \cos \theta'} V(r') \quad (0.0.13)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} 2\pi \int_{r'=0}^{\infty} V(r') r'^2 \int_{\theta'=0}^{\pi} e^{-iqr' \cos \theta'} \sin \theta' d\theta' dr' \quad (0.0.14)$$

$$= -\frac{m}{\hbar^2} \int_0^{\infty} r'^2 V(r') \frac{e^{iqr'} - e^{-iqr'}}{iqr'} dr' \quad (0.0.15)$$

¹Max Born(1882-1970)

²砂川, 散乱の量子論, 「第 1 Born 近似がとくによく利用される理由は、何といてもその簡単さにある。したがって、ある散乱問題を手がけたとき、だれもが最初に試してみるのが、この近似である。そして思わしい結果がえられないとき、他の近似法を考えるのである。」

³2023 年度期末試験第 3 問 (4)。

⁴ $f^{(n)}$ は第 n Born 近似による散乱振幅を意味する。

$$= -\frac{m}{\hbar^2} \int_0^\infty rV(r) \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iq} dr \quad (0.0.16)$$

$$= -\frac{2m}{\hbar^2 q} \int_0^\infty rV(r) \sin(qr) dr \quad (0.0.17)$$

となる。

球対称ポテンシャルの散乱振幅

$$f^{(1)}(\theta) = -\frac{m}{\hbar^2} \int_0^\infty rV(r) \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iq} dr \quad (0.0.18)$$

$$= -\frac{2m}{\hbar^2 q} \int_0^\infty rV(r) \sin(qr) dr \quad (0.0.19)$$

例題 0.1: 湯川ポテンシャル

球対称ポテンシャル $V(r)$ が、湯川ポテンシャルの場合を考える。湯川ポテンシャル、

$$V(r) = V_0 \frac{e^{-\mu r}}{\mu r} \quad (0.0.20)$$

による散乱を考える^a。 $V(r)$ は到達距離が μ^{-1} ほどであり、核子同士に働く力を表す。物質中では、伝導電子に遮蔽された不純物の Coulomb ポテンシャルを表す。 $\mu = 1, 2$ 及び Coulomb ポテンシャルのグラフを図 1 に示す。このポテンシャルの下で散乱振幅 $f^{(1)}(\theta)$ と散乱断面積 $\sigma^{(1)}(\theta)$ を求めよ。

^a湯川秀樹 (1907-1981)

散乱振幅は式 (0.0.18) より、

$$f^{(1)}(\theta) = -\frac{m}{\hbar^2} \int_0^\infty rV(r) \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iq} dr \quad (0.0.21)$$

$$= -\frac{m}{i\hbar^2 q \mu} \int_0^\infty rV_0 \frac{e^{-\mu r}}{\mu r} \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{iq} dr \quad (0.0.22)$$

$$= -\frac{mV_0}{i\hbar^2 q \mu} \int_0^\infty [\exp\{(-\mu + iq)r\} - \exp\{(-\mu - iq)r\}] dr \quad (0.0.23)$$

$$= -\frac{2mV_0}{\hbar^2 \mu} \frac{1}{\mu^2 + q^2} \quad (0.0.24)$$

散乱振幅は、

$$\sigma^{(1)}(\theta) = |f^{(1)}(\theta)|^2 \quad (0.0.25)$$

$$= \left(\frac{2mV_0}{\hbar^2 \mu} \right)^2 \frac{1}{(\mu^2 + q^2)^2} \quad (0.0.26)$$

$$= \left(\frac{2mV_0}{\hbar^2 \mu} \right)^2 \frac{1}{[\mu^2 + 4k^2 \sin^2(\theta/2)]^2} \quad (0.0.27)$$

である。なお、 k' と k のなす角が θ であるので余弦定理より、 $q = 2k \sin \theta/2$ であることを用いた。



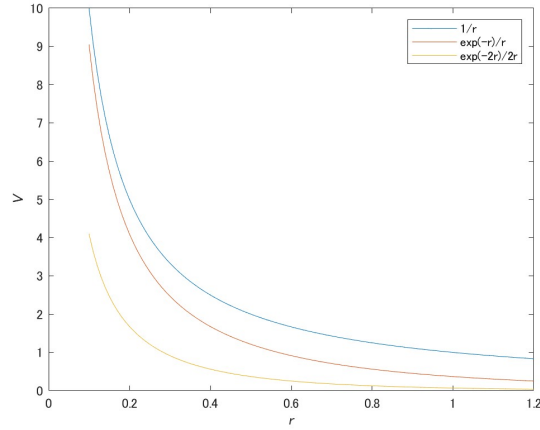


図 1: 湯川ポテンシャルと Coulomb ポテンシャルの比較

例題 0.2: Rutherford 散乱 (Griffith Example 10.6)

湯川ポテンシャルで $V_0 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}$, $\mu = 0$ とすると Coulomb ポテンシャル

$$V(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \quad (0.0.28)$$

と一致する．式 (0.0.19) に代入して散乱振幅を求める．

$$f(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2 q} \int_0^\infty r \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} \sin(qr) dr \quad (0.0.29)$$

$$= -\frac{2m}{\hbar^2 q} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \sin(qr) dr \quad (0.0.30)$$

$$= -\frac{2m}{\hbar^2 q} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{q} [\cos(qr)]_0^\infty \right) \quad (0.0.31)$$

$$\simeq -\frac{mq_1 q_2}{2\pi\epsilon_0 \hbar^2 q^2} \quad (0.0.32)$$

$$= -\frac{mq_1 q_2}{8\pi\epsilon_0 \hbar^2 \sin^2 \theta/2} \quad (0.0.33)$$