

Born 近似の適用範囲について考える．式 (??) より，一般に散乱振幅は，

$$f(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \int e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} \frac{2m}{\hbar^2} V(r) \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (0.0.1)$$

と書けるのであった．また式 (??) より，散乱の波動関数は，

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi_0(\mathbf{r}) + \int g(\mathbf{r} - \mathbf{r}') V(r') \psi_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \dots \quad (0.0.2)$$

であった．第 1 Born 近似とは，波動関数  $\psi(\mathbf{r})$  を，

$$\psi(\mathbf{r}) \simeq \psi_0(\mathbf{r}) \quad (0.0.3)$$

と近似するものであった．第 1 Born 近似が十分良い評価である，つまり，

$$\int e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} \frac{2m}{\hbar^2} V(r) \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (0.0.4)$$

を正しく評価できるには， $V(r) \neq 0$  なる  $r \simeq 0$  で，

$$\psi(\mathbf{r}) \simeq \psi_0(\mathbf{r}) \quad (0.0.5)$$

と近似できる必要がある． $r \simeq 0$  で式 (0.0.2) の第 1 項がそれ以外の項より十分大きければ良いから，

$$|\psi_0(0)| \gg \left| \int g(0 - \mathbf{r}) V(r) \psi_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right| \quad (0.0.6)$$

となればよい．整理すると，

$$|e^{ikz}| \gg \left| \int -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{4\pi r} V(r) e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \right| \quad (0.0.7)$$

$$1 \gg \frac{m}{2\pi\hbar^2} \left| \int \frac{e^{ikr}}{r} V(r) e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r} \right| \quad (0.0.8)$$

を得る．これが第 1 Born 近似が有効であるための条件である．

#### 例題 0.1: 第 1 Born 近似の適用条件

球対称ポテンシャル  $V(r)$ ,

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & (r \leq a) \\ 0 & (r \geq a) \end{cases} \quad (0.0.9)$$

による散乱を考える．Born 近似の適用条件である式 (0.0.8) を用いて，満たすべき条件とその物理的意味を述べよ．

式 (0.0.8) より Born 近似が成立する条件は，

$$1 \gg \frac{m}{2\pi\hbar^2} \left| \int \frac{e^{ikr'}}{r'} V(r') e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} d\mathbf{r}' \right| \quad (0.0.10)$$

$$= \frac{m}{2\pi\hbar^2} \left| \int \frac{e^{ikr'}}{r'} V(r') e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} d\mathbf{r}' \right| \quad (0.0.11)$$

$$= \frac{m}{2\pi\hbar^2} \left| \int_{\phi'=0}^{2\pi} d\phi' \int_{\theta'=0}^{\pi} d\theta' \int_{r'=0}^{\infty} dr' V(r') e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} r'^2 \sin \theta' \right| \quad (0.0.12)$$

$$= \frac{mV_0}{2\pi\hbar^2} \left| \int_{\phi'=0}^{2\pi} d\phi' \int_{\theta'=0}^{\pi} d\theta' \int_{r'=0}^a dr' \frac{e^{ikr'}}{r'} e^{ikr' \cos \theta'} r'^2 \sin \theta' \right| \quad (0.0.13)$$

$$= \frac{mV_0}{\hbar^2} \left| \int_{r'=0}^a r' e^{ikr'} dr' \int_{\theta'=0}^{\pi} e^{ikr' \cos \theta'} \sin \theta' d\theta' \right| \quad (0.0.14)$$

$$= \frac{mV_0}{\hbar^2} \left| \int_{r'=0}^a r' e^{ikr'} \frac{e^{ikr'} - e^{-ikr'}}{ikr'} dr' \right| \quad (0.0.15)$$

$$= \frac{mV_0}{\hbar^2 k} \left| \int_{r'=0}^a \left( e^{2ikr'} - 1 \right) dr' \right| \quad (0.0.16)$$

$$= \frac{mV_0}{2\hbar^2 k^2} |e^{2ika} - 1 - 2ika| \quad (0.0.17)$$

を得る<sup>a</sup>。これを低エネルギー散乱と高エネルギー散乱に場合分けして見積もる。式 (0.0.17) の絶対値の中では、 $ka$  がまとめて1つの変数のようになっていることに注意する。また、式 (??) で定めた  $\kappa$  の定義と、 $\kappa \rightarrow k$  と書き換えたことより、

$$ka = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} a \quad (0.0.18)$$

であるから、 $ka$  はエネルギーの  $1/2$  乗に比例することに注意する。

#### 1. 低エネルギー散乱 ( $ka \ll 1$ )

式 (0.0.17) の絶対値の部分を近似すると、

$$|e^{2ika} - 1 - 2ika| = \left| \left( 1 + 2ika + \frac{1}{2}(2ika)^2 + \dots \right) - 1 - 2ika \right| \quad (0.0.19)$$

$$\simeq \left| \left( 1 + 2ika + \frac{1}{2}(2ika)^2 \right) - 1 - 2ika \right| \quad (0.0.20)$$

$$= 2k^2 a^2 \quad (0.0.21)$$

となるから、Born 近似の適用条件は

$$1 \gg \frac{mV_0}{2\hbar^2 k^2} 2k^2 a^2 = \frac{mV_0 a^2}{\hbar^2} \quad (0.0.22)$$

である。式 (0.0.22) において、 $m$  と  $\hbar$  は定数であるから、ポテンシャルの大きさ  $V_0$  または半径  $a$  が小さい時に近似が有効であることがわかる<sup>b</sup>。

#### 2. 高エネルギー散乱 ( $ka \gg 1$ )

式 (0.0.17) の絶対値の部分を近似すると、 $ka \gg 1$  の領域では、 $|e^{2ika}| \simeq |-1| \gg |2ika|$  であるから、

$$|e^{2ika} - 1 - 2ika| \simeq 2ka \quad (0.0.23)$$

となる。よって Born 近似の適用条件は、

$$1 \gg \frac{mV_0 a}{\hbar^2 k} = \frac{mV_0 a}{\hbar \sqrt{2mE}} \quad (0.0.24)$$

である。式 (0.0.24) を見ると、 $k \rightarrow \infty$  に対して近似が成立することがわかる。つまり、Born 近似は高エネルギー粒子に対して常によい近似であることがわかる。

<sup>a</sup>授業中の教員の発言:「試験に出そうな計算。」

<sup>b</sup>2023 年度期末試験第 3 問 (5)。