

前節の最後に、一般に時間発展する量子系を正確に追跡すること、すなわち、 $c_n(t)$ の厳密解を求めることが困難であると述べた。にもかかわらず、ある特殊な条件下では近似を行うことなく、厳密解を得ることができる。以下の例題 0.1 では、そのような物理現象として **Rabi 振動** (Rabi cycle)^{1 2} を議論する。

例題 0.1: Rabi 振動

厳密に解くことのできる 2 準位系,

$$|1\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (0.0.1)$$

$$|2\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (0.0.2)$$

$$\hat{H}^{(0)} := \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \quad (0.0.3)$$

を考える。明らかに、 E_1 と E_2 は $\hat{H}^{(0)}$ のエネルギー固有値で、それぞれに属する固有ベクトルは $|1\rangle$ と $|2\rangle$ である。この 2 準位系に、時刻 $t = 0$ から $\hat{V}(t)$ なる摂動を加える。ただし、 $\hat{V}(t)$ は、

$$\hat{V}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma e^{i\omega t} \\ \gamma e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix} \quad (0.0.4)$$

によって与えられる^a。ただし、 $\gamma \in \mathbb{R}$ である。系全体のハミルトニアンを $\hat{H} := \hat{H}^{(0)} + \hat{V}(t)$ とする。系の状態ベクトルを相互作用表示を用いて、

$$|\psi(t)\rangle_I := c_1(t) |1\rangle + c_2(t) |2\rangle \quad (0.0.5)$$

と書いたとき、以下の問いに答えよ。

1. $c_1(t)$ と $c_2(t)$ の時間発展を調べよ。ただし、初期条件は $c_1(0) = 1$, $c_2(0) = 0$ とする。
2. 1. の条件のもとで、 $c_2(t)$ の確率振幅が最大となる ω を求めよ。

^a γ は摂動の強さを表す。

1. $c_1(t)$ と $c_2(t)$ の時間発展

今回の設定での ω_{mn} や V_{mn} を計算すると、

$$\omega_{11} = \omega_{22} = 0 \quad (0.0.6)$$

$$\omega_{21} = -\omega_{12} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} \quad (0.0.7)$$

$$V_{11} = V_{22} = 0 \quad (0.0.8)$$

$$V_{21} = V_{12}^* = \gamma e^{-i\omega t} \quad (0.0.9)$$

である。非定常摂動の時間発展の式より、

$$\begin{cases} i\hbar \frac{d}{dt} c_1(t) = c_1(t) V_{11} e^{i\omega_{11}t} + c_2(t) V_{12} e^{i\omega_{12}t} = c_2(t) \gamma e^{i(\omega + \omega_{12})t} \\ i\hbar \frac{d}{dt} c_2(t) = c_1(t) V_{21} e^{i\omega_{21}t} + c_2(t) V_{22} e^{i\omega_{22}t} = c_1(t) \gamma e^{-i(\omega - \omega_{21})t} \end{cases} \quad (0.0.10)$$

が成り立つ。次に、 $\Delta\omega := \omega - \omega_{21}$ として式 (0.0.10) を解く。2 式目を 1 式目に代入して $c_1(t)$ を消去すると、

$$\frac{d^2}{dt^2} c_2(t) + i\Delta\omega \frac{d}{dt} c_2(t) + \left(\frac{\gamma}{\hbar}\right)^2 c_2 = 0 \quad (0.0.11)$$

¹I.I.Rabi(1898 - 1988)

²量子状態の振動を Rabi 振動という。

2 階の斉次微分方程式の解は $c_2(t) = e^{i\lambda t}$ と書けるので、これを式 (0.0.11) に代入すると、

$$\lambda^2 + \Delta\omega\lambda - \left(\frac{\gamma}{\hbar}\right)^2 = 0 \quad (0.0.12)$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{\Delta\omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\hbar}\right)^2} \quad (0.0.13)$$

を得る。 Ω を、

$$\Omega := \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\hbar}\right)^2} \quad (0.0.14)$$

と定義して、これを Rabi 周波数と呼ぶ。 c_2 の一般解は、

$$c_2(t) = \exp\left(-i\frac{\Delta\omega}{2}t\right)(Ae^{i\Omega t} + Be^{-i\Omega t}) \quad (0.0.15)$$

と書ける。式 (0.0.15) を式 (0.0.10) の第 2 式に代入すると、

$$c_1(t) = \frac{\hbar}{\gamma} \exp\left(-i\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \left[\frac{\Delta\omega}{2}(Ae^{i\Omega t} + Be^{-i\Omega t}) - \Omega(Ae^{i\Omega t} - Be^{-i\Omega t}) \right] \quad (0.0.16)$$

となる。初期条件を考えると、

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = -\frac{\gamma}{\hbar\Omega} \end{cases} \quad (0.0.17)$$

であるから、

$$B = -A = \frac{\gamma}{2\hbar\Omega} \quad (0.0.18)$$

となる。よって、

$$c_1(t) = \exp\left(-i\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \left(\cos\Omega t - i\frac{\Delta\omega}{2\Omega} \sin\Omega t \right) \quad (0.0.19)$$

$$c_2(t) = -i\frac{\gamma}{\hbar\Omega} \exp\left(-i\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \sin\Omega t \quad (0.0.20)$$

である。時刻 t で $|1\rangle$, $|2\rangle$ に状態を見出す確率、 $|c_1(t)|^2$, $|c_2(t)|^2$ はそれぞれ、

$$|c_1(t)|^2 = \cos^2\Omega t + \left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 \frac{1}{\Omega^2} \sin^2\Omega t \quad (0.0.21)$$

$$|c_2(t)|^2 = \frac{\gamma^2}{\hbar^2\Omega^2} \sin^2\Omega t \quad (0.0.22)$$

である。簡単な計算により、 $|c_1(t)|^2 + |c_2(t)|^2 = 1$ となることが容易に確かめられる。

2. $c_2(t)$ の振幅が最大となる ω の値

振幅の大きさは Ω の定義式 (0.0.14) より、

$$\frac{(\gamma/\hbar)^2}{(\gamma/\hbar)^2 + (\Delta\omega/2)^2} \quad (0.0.23)$$

と表されるので、 $\Delta\omega = \omega - \omega_{21} = 0$ のときに最大となる。つまり、摂動の周波数 ω と 2 準位のエネルギー差に由来する ω_{21} が一致したときに遷移が起こりやすい。

例題 0.1 では, Rabi 振動に関する 2 つの重要な物理量を得たので, 下にまとめる.

Rabi 周波数

$$\Omega = \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\hbar}\right)^2} \quad (0.0.24)$$

共鳴条件

$$\omega = \omega_{21} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} \quad (0.0.25)$$

