波動関数 $\psi(\boldsymbol{r})$ を次のように変換する．

$$\psi(\boldsymbol{r}) \to \psi'(\boldsymbol{r}) \coloneqq \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(\boldsymbol{r})}\psi(\boldsymbol{r}) \tag{0.0.1}$$

この場合，運動量がゲージ不変でなくなってしまう．例えば波動関数の微分を計算すると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\psi'(\boldsymbol{r}) &= \mathrm{i}\Big(\boldsymbol{\nabla}\alpha(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{i\alpha(\boldsymbol{r})}\Big)\psi(\boldsymbol{r}) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(\boldsymbol{r})}\boldsymbol{\nabla}\psi(\boldsymbol{r}) &(0.0.2)\\ &= \mathrm{e}^{i\alpha((r))}(\boldsymbol{\nabla} + \mathrm{i}\boldsymbol{\nabla}\alpha(\boldsymbol{r}))\psi(\boldsymbol{r}) &(0.0.3)\end{aligned}$$

余分な項が加わってしまう．よって，

$$\begin{cases}\mathrm{i}\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\psi' \neq -\dfrac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi' \\ \Big\langle\psi\Big|\hat{A}\Big|\psi\Big\rangle \neq \Big\langle\psi'\Big|\hat{A}\Big|\psi'\Big\rangle\end{cases} \tag{0.0.4}$$

である．したがって，局所ゲージ変換に対して物理は不変ではない．そこで，**局所ゲージ不変性を基本原理とする物理を再構築する．**

まずは，微分を次の共変微分として再定義する．

$$\boldsymbol{D} \coloneqq \boldsymbol{\nabla} + \mathrm{i}\frac{e}{\hbar}\boldsymbol{A} \tag{0.0.5}$$

ただし，ψ と $\boldsymbol{A}$ はゲージ変換により

$$\psi \to \psi' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\boldsymbol{r}}\psi \tag{0.0.6}$$

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} - \frac{\hbar}{e}\boldsymbol{\nabla}\alpha(\boldsymbol{r}) \tag{0.0.7}$$

このように微分を定義すると，

$$\boldsymbol{D}'\psi'(\boldsymbol{r}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(\boldsymbol{r})}\boldsymbol{D}\psi(\boldsymbol{r}) \tag{0.0.8}$$

つまり，局所ゲージ変換は波動関数の微分を

$$\boldsymbol{D}\psi(\boldsymbol{r}) \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(\boldsymbol{r})}\boldsymbol{D}\psi(\boldsymbol{r}) \tag{0.0.9}$$

と変換することがわかる．これは大域的ゲージ変換による $\boldsymbol{\nabla}\psi(\boldsymbol{r}) \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\boldsymbol{\nabla}\psi(\boldsymbol{r})$ と同じ形をしている．

次に，$\alpha(\boldsymbol{r})$ に時間依存性を持たせ，$\alpha(\boldsymbol{r}, t)$ とする．つまり波動関数を

$$\psi \to \psi' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(\boldsymbol{r},t)}\psi \tag{0.0.10}$$

と変換する．このとき，時間についての偏微分を

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} - \mathrm{i}\frac{e}{\hbar}\phi \tag{0.0.11}$$

と定義する．ただし，

$$\phi \to \phi' + \frac{\hbar}{e}\frac{\partial}{\partial t}\alpha(\boldsymbol{r}, t) \tag{0.0.12}$$

である．以上で定義した共変微分と時間微分を用いると Schrödinger 方程式は

$$\mathrm{i}\hbar D_t'\psi' = -\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{D}'^2\psi' \tag{0.0.13}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi &= -\frac{\hbar^2}{2m}\Big(\boldsymbol{\nabla} + \mathrm{i}\frac{e}{\hbar}\boldsymbol{A}\Big)^2\psi - e\phi\psi &(0.0.14)\\ &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{p} + \mathrm{i}\frac{e}{\hbar}\boldsymbol{A}\right)^2 - e\phi\right]\psi &(0.0.15)\end{aligned}$$

と変換される．よって，

局所ゲージ変換に対して不変な Schrödinger 方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[\frac{1}{2m}(\boldsymbol{p}+e\boldsymbol{A})^2 - e\phi\right]\psi \tag{0.0.16}$$

を得る．

以上の流れをまとめると，局所ゲージ不変性を要請した．それによりゲージ場 $\boldsymbol{A}$ が導入された．よって，電磁場の起源は局所ゲージ不変性であるといえる．