

変分法は,

1. 試行関数  $|\psi\rangle$  をたくさん用意し,
2. それぞれのエネルギー  $E(\psi)$  を計算し,
3. その中で最小の  $E(\psi)$  を  $E_0$  の近似解とする

近似法である. ここでは, 変分法の基本原理を説明する.

### 命題 0.1: 変分法の基本原理

任意の状態ベクトル  $|\psi\rangle$  に対して  $|\psi\rangle$  のエネルギー関数  $E(\psi)$  について, 式 (0.0.1) なる不等式が成り立つ.

$$E(\psi) = \frac{\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} \geq E_0 \quad (0.0.1)$$

ただし  $E_0$  は  $\hat{H}$  の固有エネルギーの中で最低のものである.

*Proof.* 任意の状態ベクトル  $|\psi\rangle$  を Hilbert 空間の基底  $|k\rangle$  を用いて,

$$|\psi\rangle = \sum_k c_k |k\rangle \quad (0.0.2)$$

と展開する. 左から  $\langle k'|$  を作用させると

$$\langle k'|\psi\rangle = \sum_k c_k \langle k'|k\rangle = \sum_k c_k \delta_{k',k} = c_{k'} \quad (0.0.3)$$

を得る. 式 (0.0.3) は任意の  $k$  に対して成り立つので式 (0.0.2) は以下のように変形できる.

$$|\psi\rangle = \sum_k \langle k|\psi\rangle |k\rangle \quad (0.0.4)$$

$$= \sum_k |k\rangle \langle k|\psi\rangle \quad (0.0.5)$$

式 (0.0.5) を用いて式 (0.0.1) の分子を以下のように変形する.

$$\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{H} \sum_k |k\rangle \langle k|\psi\rangle \quad (0.0.6)$$

$$= \sum_k \langle\psi|\hat{H}|k\rangle \langle k|\psi\rangle \quad (0.0.7)$$

$$= \sum_k E_k \langle\psi|k\rangle \langle k|\psi\rangle \quad (0.0.8)$$

$$= \sum_k E_k |\langle k|\psi\rangle|^2 \quad (0.0.9)$$

また,

$$\langle\psi|\psi\rangle = \sum_k |\langle k|\psi\rangle|^2 \quad (0.0.10)$$

であるから,

$$E(\psi) = \frac{\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} \quad (0.0.11)$$

$$= \frac{\sum_k E_k |\langle k|\psi\rangle|^2}{\sum_k |\langle k|\psi\rangle|^2} \quad (0.0.12)$$

$$\geq \frac{\sum_k E_0 |\langle k|\psi\rangle|^2}{\sum_k |\langle k|\psi\rangle|^2} = E_0 \quad (0.0.13)$$

を得る.

□

**命題 0.1** より. あらゆる状態ベクトル  $|\psi\rangle$  のエネルギーは基底エネルギー  $E_0$  以上である.

### 例題 0.1

ポテンシャル  $V(x) = \lambda x^4$  中に粒子がある系を考える. この系の Hamiltonian は

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \lambda x^4 \quad (0.0.14)$$

である. 予想される基底状態が満たすべき条件は

- $x = 0$  で存在確率が最大
- $|x| \rightarrow \infty$  で存在確率が 0
- 節がない<sup>a</sup>

である. この条件と変分法を用いて, エネルギーの近似値を求めよ.

<sup>a</sup>節があると微係数が大きい点が存在し, これは運動エネルギーを大きくしてしまう.

試行関数として  $\psi(x, \alpha) = e^{-\alpha x^2/2}$ ,  $\alpha > 0$  として, エネルギー関数を計算する. 見通しをよくするために,

$$I_0 := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx \quad (0.0.15)$$

$$I_1 := \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx \quad (0.0.16)$$

$$I_2 := \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\alpha x^2} dx \quad (0.0.17)$$

とすると,

$$E(\alpha) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \hat{H} \psi dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi dx} \quad (0.0.18)$$

$$= \frac{-\frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\alpha x^2} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx} \quad (0.0.19)$$

$$= \frac{-\frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m} I_1 + \lambda I_2}{I_0} \quad (0.0.20)$$

である.  $I_1$  は,

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{d}{dx} \left( -\frac{e^{-\alpha x^2}}{2\alpha} \right) dx \quad (0.0.21)$$

$$= -\frac{1}{2\alpha} \left( \left[ x e^{-\alpha x^2} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx \right) \quad (0.0.22)$$

$$= \frac{1}{2\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx \quad (0.0.23)$$

$$= \frac{1}{2\alpha} I_0 \quad (0.0.24)$$

と計算できる． $I_2$  は，

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\alpha x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \frac{d}{dx} \left( -\frac{e^{-\alpha x^2}}{2\alpha} \right) dx \quad (0.0.25)$$

$$= -\frac{1}{2\alpha} \left( \left[ x^3 e^{-\alpha x^2} \right]_{-\infty}^{\infty} - 3 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx \right) \quad (0.0.26)$$

$$= \frac{3}{2\alpha} I_1 \quad (0.0.27)$$

$$= \frac{3}{4\alpha^2} I_0 \quad (0.0.28)$$

であるから，式 (0.0.20) は，

$$E(\alpha) = \frac{-\frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m} \frac{1}{2\alpha} I_0 + \lambda \frac{3}{4\alpha} I_0}{I_0} \quad (0.0.29)$$

$$= -\frac{\hbar^2 \alpha}{4m} + \frac{3\lambda}{4\alpha^2} \quad (0.0.30)$$

となる．第 1 項は運動エネルギーを，第 2 項はポテンシャルエネルギーを，それぞれ表している<sup>a</sup>．式 (0.0.20) の最小値が基底エネルギー  $E_0$  の近似解である．よって， $\frac{d}{d\alpha} E(\alpha_0) = 0$  となる  $\alpha_0$  を式 (0.0.20) に代入することで近似解，

$$E(\alpha_0) = \frac{3}{8} \left( \frac{6\hbar^4 \lambda}{m^2} \right)^{1/3} \quad (0.0.31)$$

を得る．

---

<sup>a</sup>ポテンシャルエネルギーの項は  $\alpha$  が大きくなるほど小さくなる．これは，波動関数が狭まり  $x = 0$  での存在確率が大きくなるためである．一方，運動エネルギーの項は  $\alpha$  が大きくなるほど大きくなる．これは，不確定性関係  $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$  より，運動量のばらつきが大きくなるためである．