非定常摂動の運動は Schrödinger 表示で

$$\begin{cases} \mathrm{i}\hbar\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\psi(t)\right\rangle = \left(\hat{H}^{(0)} + \hat{V}(t)\right)\left|\psi(t)\right\rangle \\ \left|\psi(t)\right\rangle = \displaystyle\sum_n c_n(t)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_n}{\hbar}t\right)\left|n\right\rangle \end{cases} \tag{0.0.1}$$

と書ける．これを次の**相互作用表示** (interaction picture) を用いて書き直す．

相互作用表示

$$\left|\psi(t)\right\rangle_{\mathrm{I}} = \exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_n}{\hbar}t\right)\left|\psi(t)\right\rangle \tag{0.0.2}$$

実際，相互作用表示を用いると，

$$\left|\psi(t)\right\rangle_{\mathrm{I}} = \exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_n}{\hbar}t\right)\sum_n c_n(t)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_n}{\hbar}t\right)\left|n\right\rangle \tag{0.0.3}$$

$$= \sum_n c_n(t)\left|n\right\rangle \tag{0.0.4}$$

であり．**式** (0.0.1) の 2 式目と同じものが得られる．相互作用表示の時間微分を計算してみる．

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\psi(t)\right\rangle_{\mathrm{I}} = \mathrm{i}\hbar\left(i\frac{\hat{H^{(0)}}}{\hbar}\right)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_n}{\hbar}t\right)\left|\psi(t)\right\rangle + i\hbar\exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_n}{\hbar}t\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\psi(t)\right\rangle \tag{0.0.5}$$

$$= \exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_n}{\hbar}t\right)\hat{V}(t)\left|\psi(t)\right\rangle \tag{0.0.6}$$

$$= \exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_n}{\hbar}t\right)\hat{V}(t)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_n}{\hbar}t\right)\left|\psi(t)\right\rangle \tag{0.0.7}$$

$$= \exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_n}{\hbar}t\right)\hat{V}(t)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right)\left|\psi(t)\right\rangle_{\mathrm{I}} \tag{0.0.8}$$

$$\equiv \hat{V}_{\mathrm{I}}(t)\left|\psi(t)\right\rangle_{\mathrm{I}} \tag{0.0.9}$$

Schrödinger 方程式に似た式が得られた．これを**朝永・Schwinger 方程式**という[1][2] [3] [4].

朝永・Schwinger 方程式

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\psi(t)\right\rangle_{\mathrm{I}} = \hat{V}_{\mathrm{I}}(t)\left|\psi(t)\right\rangle_{\mathrm{I}} \tag{0.0.10}$$

$$\hat{V}_{\mathrm{I}}(t) = \exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_n}{\hbar}t\right)\hat{V}(t)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\hat{H}^{(0)}}{\hbar}t\right) \tag{0.0.11}$$

式 (0.0.10) に左から $\left\langle m\right|$ を演算する ($\hat{H}^{(0)}\left|m\right\rangle = E_m\left|m\right\rangle$).
左辺は,

$$\left\langle m\right|\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_n c_n(t)\left|n\right\rangle \tag{0.0.12}$$

$$= \mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c_m(t) \tag{0.0.13}$$

[1] Schrödinger 描像は量子状態が時間発展するとみなす．Heisenberg 描像は物理量が時間発展するとみなす．相互作用表示はその中間であるといえる．
[2] 朝永振一郎 (1906-1979)
[3] Julian Schwinger(1918-1994)
[4] 朝永と Schwinger は 1964 年に Richard Feynmann とともにノーベル賞を受賞.

となる．右辺は．

$$\langle m|\,\hat{V}_{\mathrm{I}}(t)\sum_n c_n(t)\,|n\rangle \tag{0.0.14}$$

$$=\sum_n c_n(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{(E_n-E_m)t}{\hbar}}\,\langle m|\hat{V}(t)|n\rangle \tag{0.0.15}$$

となる．よって，非定常摂動の時間発展は以下の式を満たす．

$\hat{H}(t)=\hat{H}^{(0)}+\hat{V}(t)$

$$|\psi(t)\rangle_{\mathrm{I}}=\sum_n c_n(t)\,|n\rangle \tag{0.0.16}$$

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c_m(t)=\sum_n c_n(t)V_{mn}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{mn}t} \tag{0.0.17}$$

$$V_{mn}=\langle m|\,\hat{V}(t)\,|n\rangle \tag{0.0.18}$$

$$\omega_{mn}=\frac{E_m-E_n}{\hbar}=-\omega_{nm} \tag{0.0.19}$$

これは c_n の連立方程式になっており解くことは困難である．よって近似を加える．