

特殊相対性理論 (Special Relativity) は次の 2 つの事柄を原理とする。

特殊相対性原理

あらゆる慣性系で同じ物理法則が成り立つ。

光速不変の原理

あらゆる慣性系で真空中の光の速さは同一である。

この原理の下で成り立つ座標変換の法則 (Lorentz 変換) を導く。まず、慣性系 X 系の原点 O と X' 系の原点 O' が $t = t' = 0$ で一致している。 $t = t' = 0$ で光が原点 ($O = O'$) を通過したとする。 X 系の空間座標を (x, y, z) , X' 系の空間座標を (x', y', z') とすると、光速不変の原理より、

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{t} = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{t'} = c \quad (0.0.1)$$

が成り立つ。上式から**世界長さ** (spacetime interval)

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 \quad (0.0.2)$$

が不変量であることが導かれる。

次に、世界長さ不変性から、慣性系間の座標変換の法則である **Lorentz 変換** (Lorentz Transformation) を導出する。慣性系 X' が x 軸正の方向に速さ v で移動しているとする。このとき $y = y', z = z'$ である。わかりやすいように $T = it$ とおく。光速不変より、

$$x^2 - (ct)^2 = x'^2 - (ct')^2 \quad (0.0.3)$$

$$x^2 + (cT)^2 = x'^2 + (cT')^2 \quad (0.0.4)$$

が成り立つ。これが回転座標変換と類似していることから、

$$\begin{pmatrix} cT' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cT \\ x \end{pmatrix} \quad (0.0.5)$$

と置く。表示を t に戻すと

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & i \sin \theta \\ i \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (0.0.6)$$

である。さらに、 $\theta = i\phi$ とすると

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi \\ -\sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (0.0.7)$$

となる。よって、

$$x' = (-\sinh \phi)ct + (\cosh \phi)x \quad (0.0.8)$$

を得る。 X 系において時刻 t が経過したとする。 X 系から見るお X' 系の原点の位置は $x = vt$ である。一方、 X' 系から見ると $x' = 0$ である。よって上式から

$$0 = (-\sinh \phi)ct + (\cosh \phi)vt \quad (0.0.9)$$

が成り立つ。よって、これを变形すると

$$\frac{v}{c} = \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi} = \tanh \phi \quad (0.0.10)$$

である。以上より、

$$\begin{cases} \sinh \phi = \frac{v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \\ \cosh \phi = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \end{cases} \quad (0.0.11)$$

であることがわかる。したがって、

Lorentz 変換

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v/c \\ -v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (0.0.12)$$

を得る。Lorentz 変換

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad (0.0.13)$$

において $v \ll c$ とすると

$$x' = x - vt \quad (0.0.14)$$

となる。これは Galilei 変換と一致している。

次に、相対論的効果を取り込んだ速度の合成則について示す。状況は、 X 系は静止し、 X' 系が速さ v で x 軸方向に移動しているとする。さらに X' 系では粒子が速さ u' で x' 軸方向に運動している。 X 系から見た粒子の速度 V を求める。式 (0.0.12) において $v \rightarrow -v$ とすると

$$\begin{pmatrix} c dt \\ dx \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \begin{pmatrix} 1 & v/c \\ v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c dt' \\ dx' \end{pmatrix} \quad (0.0.15)$$

となる。 $V = \frac{dx}{dt}$ なので

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{v dt' + dx'}{dt' + (v/c^2) dx'} \quad (0.0.16)$$

$$= \frac{v + \frac{dx'}{dt'}}{1 + (v/c^2) \frac{dx'}{dt'}} \quad (0.0.17)$$

$$= \frac{v + u'}{1 + \frac{vu'}{c^2}} \quad (0.0.18)$$

を得る。

速度の合成

$$V = \frac{v + u'}{1 + \frac{vu'}{c^2}} \quad (0.0.19)$$

例として $u' = v = c$ とすると

$$V = \frac{2c}{1 + c^2/c^2} = c \quad (0.0.20)$$

である。速度が合成されても光速を超えることは決してないことがわかる。

Lorentz 収縮 (Length Contractions) について説明する。速さ v で運動している X' 系から、 $t' = 0$ において、静止している X 系の 2 点を見る。1 点は原点 $O : (x, t) = (0, 0)$ もう 1 点は $P : (x, t) = (L, t)$ とする。まず、原点 O は X' 系から見ると

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v/c \\ -v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (0.0.21)$$

である。点 P を X' 系から見ると、

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v/c \\ -v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ L \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \begin{pmatrix} ct - \frac{v}{c}L \\ -vt + L \end{pmatrix} \quad (0.0.22)$$

である。 $t' = 0$ で観測しているため、 $t' = 0$ を代入し

$$0 = ct - \frac{v}{c}L \quad (0.0.23)$$

$$t = \frac{v}{c^2}L \quad (0.0.24)$$

を得る。 よって、

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \left(-\left(\frac{v}{c}\right)^2 L + L \right) = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} L \quad (0.0.25)$$

である。 これは動いている慣性系から静止系での距離 (L) を測る (L') と縮んで見えることを意味している。

Lorentz 収縮

$$L' = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} L \quad (0.0.26)$$

また、その対象に対して静止している観測者が測った距離を**固有長さ** (proper length) という。 今回は L が固有長さである。

次に**時間の遅れ** (Time Dilations) について説明する。 同様の X 系と X' 系を考える。 時計が X' 系の原点 $x' = 0$ に置かれており、観測者は X' 系においてこの時計を見ている。 X' 系に置かれた時計の時刻が t' のときの時空点 P_1 , $t' + \Delta T_0$ の時空点を P_2 とする。 P_1 は、

$$\begin{pmatrix} ct_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \begin{pmatrix} 1 & v/c \\ v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \begin{pmatrix} ct' \\ vt' \end{pmatrix} \quad (0.0.27)$$

P_2 は、

$$\begin{pmatrix} ct_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \begin{pmatrix} 1 & v/c \\ v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(t' + \Delta T_0) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \begin{pmatrix} c(t' + \Delta T_0) \\ v(t' + \Delta T_0) \end{pmatrix} \quad (0.0.28)$$

である。 よって、 X 系での時間経過 $\Delta T = t_2 - t_1$ は、

$$\Delta T = t_2 - t_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \Delta T_0 \quad (0.0.29)$$

である。 これは X' 系は X 系に比べて時間の流れが遅いことを示している。

時間の遅れ

$$\Delta T = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \Delta \tau \quad (0.0.30)$$

観測者に対して2つの事象が同一の空間座標で起きたとき、その時間間隔 $\Delta \tau$ を**固有時間** (proper time) という。

電磁場の双対性について説明する。 マクスウェル方程式は3次元では次の4つの式である。

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \end{cases} \quad (0.0.31)$$

これを Lorentz 変換に対して共変な形式に書き直す。 まず、 \mathbf{B} と bmE はベクトルポテンシャル \mathbf{A} とスカラーポテンシャル ϕ を用いて

$$\begin{cases} \mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \end{cases} \quad (0.0.32)$$

と表される。ここで、座標を

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \quad (0.0.33)$$

と表し、4元ベクトルポテンシャルを

$$A^\mu = (\phi, c\mathbf{A}) \quad (0.0.34)$$

$$A_\mu = (\phi, -c\mathbf{A}) \quad (0.0.35)$$

と定義する。この4元ベクトルポテンシャルを使うと電場と磁場は

$$B_x = c \frac{\partial A_z}{\partial y} - c \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad (0.0.36)$$

$$= -\frac{\partial A_3}{\partial x^2} + \frac{\partial A_2}{\partial x^3} \quad (0.0.37)$$

$$= \partial_3 A_2 - \partial_2 A_3 \quad (0.0.38)$$

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \quad (0.0.39)$$

$$= -\frac{\partial A_0}{\partial x^1} + \frac{\partial A_1}{\partial x^0} \quad (0.0.40)$$

$$= \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 \quad (0.0.41)$$

のように書ける。ここで、電磁場テンソル

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (0.0.42)$$

を定義する。これを行列の形で表すと

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} F_{00} & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{20} & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ -E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ -E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix} \quad (0.0.43)$$

である。明らかに $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ である。また、この定義から

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0 \quad (0.0.44)$$

が成り立つ。実際に計算してみると

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} \quad (0.0.45)$$

$$= (\partial_\mu \partial_\nu A_\lambda - \partial_\mu \partial_\lambda A_\nu) + (\partial_\nu \partial_\lambda A_\mu - \partial_\nu \partial_\mu A_\lambda) + (\partial_\lambda \partial_\mu A_\nu - \partial_\lambda \partial_\nu A_\mu) \quad (0.0.46)$$

$$= 0 \quad (0.0.47)$$

である。これは Faraday の電磁誘導の法則と磁束密度に関する Gauss の法則を表している。例えば $\mu = 0, \nu = 1, \lambda = 2$ とすると

$$\partial_0 F_{12} + \partial_1 F_{20} + \partial_2 F_{01} \quad (0.0.48)$$

$$= -\frac{\partial(cB_z)}{\partial(ct)} + \frac{\partial}{\partial x}(-E_y) + \frac{\partial}{\partial y}(-E_x) \quad (0.0.49)$$

$$= -(\nabla \times \mathbf{E})_z - \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0 \quad (0.0.50)$$

$\mu = 1, \nu = 2, \lambda = 3$ とすると

$$\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} \quad (0.0.51)$$

$$= c(\partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z) \quad (0.0.52)$$

$$= c\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (0.0.53)$$

が得られる。さらに、磁場/電束密度テンソル $H_{\mu\nu}$ を

$$H_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} H_{00} & H_{01} & H_{02} & H_{03} \\ H_{10} & H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{20} & H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{30} & H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & cD_x & cD_y & cD_z \\ -cD_x & 0 & -H_z & H_y \\ -cD_y & H_z & 0 & -H_x \\ -cD_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \quad (0.0.54)$$

4 次元の電流密度を j^μ を

$$j^\mu = (c\rho, \mathbf{j}) \quad (0.0.55)$$

と定義する。明らかに $H_{\mu\nu} = -H_{\nu\mu}$ である。すると、電束密度に関する Gauss の法則と Ampère の法則は次の式で表される。

$$\partial^\nu H_{\nu\mu} = j_\mu \quad (0.0.56)$$

例えば $\mu = 0$ とすると

$$\partial^1 H_{10} + \partial^2 H_{20} + \partial^3 H_{30} = j_0 \quad (0.0.57)$$

$$\partial_x D_x + \partial_y D_y + \partial_z D_z = \rho \quad (0.0.58)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (0.0.59)$$

が導かれる。さらに、電荷保存則

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (0.0.60)$$

から

$$\frac{\partial(c\rho)}{\partial(ct)} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (0.0.61)$$

よって

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (0.0.62)$$

が得られる。以上をまとめると Maxwell 方程式は

$$\begin{cases} \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0 \\ \partial^\nu H_{\nu\mu} = j_\mu \\ \partial_\mu j^\mu = 0 \end{cases} \quad (0.0.63)$$

と書くことができる。これらの式はテンソルとテンソル、ベクトルとベクトルというように、Lorentz 変換に対して同じ変換則をもつものが結び合っている。よってこれらは Lorentz 変換に対して共変である。

Lorentz 変換に対して共変な Maxwell 方程式

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0 \quad (0.0.64)$$

$$\partial^\nu H_{\nu\mu} = j_\mu \quad (0.0.65)$$

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (0.0.66)$$

運動する電荷と電流を例に電磁場の双対性を確認してみよう。導線には z 軸上向きに電流 I が流れている。電荷 $+q$ が z 軸上向きに速さ v_0 で運動している。導線の中では面電荷密度 $\lambda_\pm = \pm\lambda/2$ の正(負)電荷が速さ v で上(下)向きに動いているとする。まずは静止系で考える。導線の中では

$$\lambda_+ + \lambda_- = 0 \quad (0.0.67)$$

が成り立つため、電氣的に中性である。よって導線の周りには電場は無い。電流は $I = \lambda v$ と表される。導線の周りには

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\phi = \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi r} \mathbf{e}_\phi \quad (0.0.68)$$

の磁束密度が発生している。よって電荷は

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -qv_0 \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi r} \mathbf{e}_r \quad (0.0.69)$$

の力を感じる。

これを電荷とともに動く系で考える。非相対論的に考えると $\mathbf{v} = 0$ であるため電荷は力を感じない。しかし、特殊相対性原理よりこれはありえない。相対論的效果を考慮してこの状況を眺める必要がある。観測者からは導線中の正電荷は $v - v_0$ で、負電荷は $v + v_0$ で運動して見える。それぞれで Lorentz 収縮を計算する。

$$\lambda_+ = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v-v_0}{c}\right)^2}} \frac{\lambda}{2} \quad (0.0.70)$$

$$\lambda_- = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v+v_0}{c}\right)^2}} \left(-\frac{\lambda}{2}\right) \quad (0.0.71)$$

明らかに

$$\lambda_+ + \lambda_- \neq 0 \quad (0.0.72)$$

であることがわかる。よって、導線の周りには電場が発生している。 $v, v_0 \ll c$ とすると

$$\lambda_+ + \lambda_- = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v-v_0}{c}\right)^2}} \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v+v_0}{c}\right)^2}} \frac{\lambda}{2} \quad (0.0.73)$$

$$\simeq \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v-v_0}{c}\right)^2\right) \frac{\lambda}{2} - \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v+v_0}{c}\right)^2\right) \frac{\lambda}{2} \quad (0.0.74)$$

$$= -\frac{\lambda v_0 v}{c^2} \equiv \Delta\lambda \quad (0.0.75)$$

と計算でき、導線は負に帯電していることがわかる。よって、電荷の受ける力は

$$\mathbf{F} = q \frac{\Delta\lambda}{2\pi r \varepsilon_0} \mathbf{e}_r \quad (0.0.76)$$

$$= -qv_0 \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi r} \mathbf{e}_r \quad (0.0.77)$$

これは先ほどの計算結果と一致している。以上の考察から、電場と磁場は観測する系によって入り混じることがわかる。