一様な磁場中の荷電粒子の運動を考える．磁場は z 軸と平行で大きさは B とする．これを満たすベクトルポテンシャルとして

$$\begin{cases} A_x = 0 \\ A_y = Bx \\ A_z = 0 \end{cases} \tag{0.0.1}$$

を採用する．z に対しては対称なので，以降は xy 平面内での運動を考える．ハミルトニアンは

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left[\hat{p}_x^2 + (\hat{p}_y + eB\hat{x})^2\right] \tag{0.0.2}$$

$$= \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{(eB)^2}{2m}\left(\hat{x} + \frac{\hat{p}_y}{eB}\right)^2 \tag{0.0.3}$$

である．このハミルトニアンは $\hat{y}$ を含まないので

$$[\hat{H}, \hat{p}_y] = 0 \tag{0.0.4}$$

であることがわかる．y 方向に関しては自由粒子の運動となる．また，p_y の固有値が定まるので，これを $\hbar k_y$ とする．ハミルトニアンは

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{(eB)^2}{2m}\left(\hat{x} + \frac{\hbar k_y}{eB}\right)^2 \tag{0.0.5}$$

と書き換えられ，これは調和振動子型のハミルトニアン

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2} \tag{0.0.6}$$

と同じ形をしている．よって，エネルギー固有値は

$$E = \hbar\omega_{\mathrm{c}}\left(n + \frac{1}{2}\right)\ (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{0.0.7}$$

$$\omega_{\mathrm{c}} = \frac{|e|B}{m} \tag{0.0.8}$$

である．平面内の自由粒子のエネルギーが垂直磁場を加えることで離散化された．これを **Landau 準位** (Landau level) という[1]．また，ω_{c} を**サイクロトロン周波数**という．

次に，x 方向に長さ L_x，y 方向に長さ L_y の周期的境界条件を課す．すると，

$$k_y = \frac{2\pi}{L_y} l\ (l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \tag{0.0.9}$$

となる．また x 方向の調和振動子は $\dfrac{\hbar k_y}{eB}$ だけずれている．これが 0 と L_x の間にあるためには

$$0 \leq \frac{\hbar k_y}{eB} = \frac{\hbar}{eB}\frac{2\pi}{L_y} l \leq L_x \tag{0.0.10}$$

でなければならない．これは

$$0 \leq l \leq \frac{eB}{2\pi\hbar} L_x L_y \tag{0.0.11}$$

と直される．よって，l は $\dfrac{|e|B}{2\pi\hbar} L_x L_y$ 通りの値を取ることがわかる．したがって，単位面積当たりの縮退度は

$$\frac{|e|B}{2\pi\hbar} \tag{0.0.12}$$

である．

[1] この現象は量子 Hall 効果へとつながる．