

特殊相対性理論 (Special Relativity) は次の 2 つの事柄を原理とする。

特殊相対性原理

あらゆる慣性系で同じ物理法則が成り立つ。

光速不変の原理

あらゆる慣性系で真空中の光の速さは同一である。

この原理の下で成り立つ座標変換の法則 (Lorentz 変換) を導く。まず、慣性系 X 系の原点 O と X' 系の原点 O' が $t = t' = 0$ で一致している。 $t = t' = 0$ で光が原点 ($O = O'$) を通過したとする。 X 系の空間座標を (x, y, z) , X' 系の空間座標を (x', y', z') とすると、光速不変の原理より、

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{t} = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}{t'} = c \quad (0.0.1)$$

が成り立つ。上式から**世界長さ** (spacetime interval)

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 \quad (0.0.2)$$

が不変量であることが導かれる。

慣性系 X' が x 軸正の方向に速さ v で移動している.. このとき $y = y', z = z'$ である。わかりやすいように $T = it$ とおく。光速不変より、

$$x^2 - (ct)^2 = x'^2 - (ct')^2 \quad (0.0.3)$$

$$x^2 + (cT)^2 = x'^2 + (cT')^2 \quad (0.0.4)$$

が成り立つ。これが回転座標変換と類似していることから、

$$\begin{pmatrix} cT' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cT \\ x \end{pmatrix} \quad (0.0.5)$$

と置く。表示を t に戻すと

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & i \sin \theta \\ i \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (0.0.6)$$

である。さらに、 $\theta = i\phi$ とすると

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi \\ -\sinh \phi & \cosh \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (0.0.7)$$

となる。よって、

$$x' = (-\sinh \phi)ct + (\cosh \phi)x \quad (0.0.8)$$

を得る。 X 系において時刻 t が経過したとする。 X 系から見るお X' 系の原点の位置は $x = vt$ である。一方、 X' 系から見ると $x' = 0$ である。 よって上式から

$$0 = (-\sinh \phi)ct + (\cosh \phi)vt \quad (0.0.9)$$

が成り立つ。 よって、これを变形すると

$$\frac{v}{c} = \frac{\sinh \phi}{\cosh \phi} = \tanh \phi \quad (0.0.10)$$

である。以上より、

$$\begin{cases} \sinh \phi = \frac{v/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \\ \cosh \phi = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \end{cases} \quad (0.0.11)$$

であることがわかる。したがって、

Lorentz 変換

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v/c \\ -v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (0.0.12)$$

を得る。Lorentz 変換

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (0.0.13)$$

において $v \ll c$ とすると

$$x' = x - vt \quad (0.0.14)$$

となる。これは Galilei 変換と一致している。

次に、相対論的効果を取り込んだ速度の合成則について示す。状況は、 X 系は静止し、 X' 系が速さ v で x 軸方向に移動しているとする。さらに X' 系では粒子が速さ u' で x' 軸方向に運動している。 X 系から見た粒子の速度 V を求める。式 (0.0.12) において $v \rightarrow -v$ とすると

$$\begin{pmatrix} c dt' \\ dx' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \begin{pmatrix} 1 & v/c \\ v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c dt \\ dx \end{pmatrix} \quad (0.0.15)$$

となる。 $V = \frac{dx}{dt}$ なので

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{v dt' + dx'}{dt' + (v/c^2) dx'} \quad (0.0.16)$$

$$= \frac{v + \frac{dx'}{dt'}}{1 + (v/c^2) \frac{dx'}{dt'}} \quad (0.0.17)$$

$$= \frac{v + u'}{1 + \frac{vu'}{c^2}} \quad (0.0.18)$$

を得る。

速度の合成

$$V = \frac{v + u'}{1 + \frac{vu'}{c^2}} \quad (0.0.19)$$

例として $u' = v = c$ とすると

$$V = \frac{2c}{1 + c^2/c^2} = c \quad (0.0.20)$$

である。速度が合成されても光速を超えることは決していないことがわかる。

Lorentz 収縮について説明する。速さ v で運動している X' 系から、 $t' = 0$ において、静止している X 系の2点を見る。1点 は原点 $O : (x, t) = (0, 0)$ もう1点 は $P : (x, t) = (L, t)$ とする。まず、原点 O は X' 系から見ると

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v/c \\ -v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (0.0.21)$$

である。点 P を X' 系から見ると、

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \begin{pmatrix} 1 & -v/c \\ -v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ L \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \begin{pmatrix} ct - \frac{v}{c}L \\ -vt + L \end{pmatrix} \quad (0.0.22)$$

である。 $t' = 0$ で観測しているため、 $t' = 0$ を代入し

$$0 = ct - \frac{v}{c}L \quad (0.0.23)$$

$$t = \frac{v}{c^2} L \quad (0.0.24)$$

を得る。よって、

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \left(-\left(\frac{v}{c}\right)^2 L + L \right) = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} L \quad (0.0.25)$$

である。これは動いている慣性系から静止系での距離 (L) を測る (L') と縮んで見えることを意味している。

Lorentz 収縮

$$L' = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} L \quad (0.0.26)$$

また、その対象に対して静止している観測者が測った距離を**固有長さ** (proper length) という。今回は L が固有長さである。

次に**時間の遅れ**について説明する。同様の X 系と X' 系を考える。時計が X' 系の原点 $x' = 0$ に置かれており、観測者は X' 系においてこの時計を見ている。 X' 系に置かれた時計の時刻が t' のときの時空点 P_1 , $t' + \Delta T_0$ の時空点を P_2 とする。 P_1 は、

$$\begin{pmatrix} ct_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \begin{pmatrix} 1 & v/c \\ v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \begin{pmatrix} ct' \\ vt' \end{pmatrix} \quad (0.0.27)$$

P_2 は、

$$\begin{pmatrix} ct_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \begin{pmatrix} 1 & v/c \\ v/c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c(t' + \Delta T_0) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \begin{pmatrix} c(t' + \Delta T_0) \\ v(t' + \Delta T_0) \end{pmatrix} \quad (0.0.28)$$

である。よって、 X 系での時間経過 $\Delta T = t_2 - t_1$ は、

$$\Delta T = t_2 - t_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \Delta T_0 \quad (0.0.29)$$

である。これは X' 系は X 系に比べて時間の流れが遅いことを示している。

時間の遅れ

$$\Delta T = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \Delta \tau \quad (0.0.30)$$

観測者に対して2つの事象が同一の空間座標で起きたとき、その時間間隔 $\Delta \tau$ を**固有時間** (proper time) という。

電磁場の双対性について説明する。マクスウェル方程式は3次元では次の4つの式である。

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \end{cases} \quad (0.0.31)$$

これを Lorentz 変換に対して共変な形式に書き直す。まず、 \mathbf{B} と bmE はベクトルポテンシャル \mathbf{A} とスカラーポテンシャル ϕ を用いて

$$\begin{cases} \mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \end{cases} \quad (0.0.32)$$

と表される。ここで、座標を

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \quad (0.0.33)$$

と表し、4元ベクトルポテンシャルを

$$A^\mu = (\phi, c\mathbf{A}) \quad (0.0.34)$$

$$A_\mu = (\phi, -c\mathbf{A}) \quad (0.0.35)$$

と定義する．この4元ベクトルポテンシャルを使うと電場と磁場は

$$B_x = c \frac{\partial A_z}{\partial y} - c \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad (0.0.36)$$

$$= -\frac{\partial A_3}{\partial x^2} + \frac{\partial A_2}{\partial x^3} \quad (0.0.37)$$

$$= \partial_3 A_2 - \partial_2 A_3 \quad (0.0.38)$$

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \quad (0.0.39)$$

$$= -\frac{\partial A_0}{\partial x^1} + \frac{\partial A_1}{\partial x^0} \quad (0.0.40)$$

$$= \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 \quad (0.0.41)$$

のように書ける．ここで，電磁場テンソル

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (0.0.42)$$

を定義する．これを行列の形で表すと

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} F_{00} & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{20} & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ -E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ -E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix} \quad (0.0.43)$$

である．明らかに $F_{\mu\nu} = F_{\nu\mu}$ である．また，この定義から

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0 \quad (0.0.44)$$

が成り立つ．実際に計算してみると

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} \quad (0.0.45)$$

$$= (\partial_\mu \partial_\nu A_\lambda - \partial_\mu \partial_\lambda A_\nu) + (\partial_\nu \partial_\lambda A_\mu - \partial_\nu \partial_\mu A_\lambda) + (\partial_\lambda \partial_\mu A_\nu - \partial_\lambda \partial_\nu A_\mu) \quad (0.0.46)$$

$$= 0 \quad (0.0.47)$$

である．これは Faraday の電磁誘導の法則と磁束密度に関する Gauss の法則を表している．例えば $\mu = 0, \nu = 1, \lambda = 2$ とすると

$$\partial_0 F_{12} + \partial_1 F_{20} + \partial_2 F_{01} \quad (0.0.48)$$

$$= -\frac{\partial(cB_z)}{\partial(ct)} + \frac{\partial}{\partial x}(-E_y) + \frac{\partial}{\partial y}(-E_x) \quad (0.0.49)$$

$$= -(\nabla \times \mathbf{E})_z - \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0 \quad (0.0.50)$$

$\mu = 1, \nu = 2, \lambda = 3$ とすると

$$\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} \quad (0.0.51)$$

$$= c(\partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z) \quad (0.0.52)$$

$$= c\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (0.0.53)$$

が得られる．さらに，磁場/電束密度テンソル $H_{\mu\nu}$ を

$$H_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} H_{00} & H_{01} & H_{02} & H_{03} \\ H_{10} & H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{20} & H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{30} & H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & cD_x & cD_y & cD_z \\ -cD_x & 0 & -H_z & H_y \\ -cD_y & H_z & 0 & -H_x \\ -cD_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \quad (0.0.54)$$

4次元の電流密度を j^μ を

$$j^\mu = (c\rho, \mathbf{j}) \quad (0.0.55)$$

と定義する．明らかに $H_{\mu\nu} = -H_{\nu\mu}$ である．すると，電束密度に関する Gauss の法則と Ampère の法則は次の式で表される．

$$\partial^\nu H_{\nu\mu} = j_\mu \quad (0.0.56)$$

例えば $\mu = 0$ とすると

$$\partial^1 H_{10} + \partial^2 H_{20} + \partial^3 H_{30} = j_0 \quad (0.0.57)$$

$$\partial_x D_x + \partial_y D_y + \partial_z D_z = \rho \quad (0.0.58)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (0.0.59)$$

が導かれる．さらに，電荷保存則

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (0.0.60)$$

から

$$\frac{\partial(c\rho)}{\partial(ct)} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (0.0.61)$$

よって

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (0.0.62)$$

が得られる．以上をまとめると Maxwell 方程式は

$$\begin{cases} \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0 \\ \partial^\nu H_{\nu\mu} = j_\mu \\ \partial_\mu j^\mu = 0 \end{cases} \quad (0.0.63)$$

と書くことができる．これらの式はテンソルとテンソル，ベクトルとベクトルというように，Lorentz 変換に対して同じ変換則をもつものが結びされている．よってこれらは Lorentz 変換に対して共変である．

Lorentz 変換に対して共変な Maxwell 方程式

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0 \quad (0.0.64)$$

$$\partial^\nu H_{\nu\mu} = j_\mu \quad (0.0.65)$$

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (0.0.66)$$

運動する電荷と電流を例に電磁場の双対性を確認してみよう．導線には z 軸上向きに電流 I が流れている．電荷 $+q$ が z 軸上向きに速さ v_0 で運動している．導線の中では面電荷密度 $\lambda_\pm = \pm\lambda/2$ の正(負)電荷が速さ v で上(下)向きに動いているとする．まずは静止系で考える．導線の中では

$$\lambda_+ + \lambda_- = 0 \quad (0.0.67)$$

が成り立つため，電氣的に中性である．よって導線の周りには電場は無い．電流は $I = \lambda v$ と表される．導線の周りには

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\phi = \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi r} \mathbf{e}_\phi \quad (0.0.68)$$

の磁束密度が発生している．よって電荷は

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -qv_0 \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi r} \mathbf{e}_r \quad (0.0.69)$$

の力を感じる。

これを電荷とともに動く系で考える。非相対論的に感がると $v = 0$ であるため電荷は力を感じない。しかし、特殊相対性原理よりこれはありえない。相対論的效果を考慮してこの状況を眺める必要がある。観測者からは導線中の正電荷は $v - v_0$ で、負電荷は $v + v_0$ で運動して見える。それぞれで Lorentz 収縮を計算する。

$$\lambda_+ = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v-v_0}{c}\right)^2}} \frac{\lambda}{2} \quad (0.0.70)$$

$$\lambda_- = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v+v_0}{c}\right)^2}} \left(-\frac{\lambda}{2}\right) \quad (0.0.71)$$

明らかに

$$\lambda_+ + \lambda_- \neq 0 \quad (0.0.72)$$

であることがわかる。よって、導線の周りには電場が発生している。 $v, v_0 \ll c$ とすると

$$\lambda_+ + \lambda_- = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v-v_0}{c}\right)^2}} \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v+v_0}{c}\right)^2}} \frac{\lambda}{2} \quad (0.0.73)$$

$$\simeq \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v-v_0}{c}\right)^2\right) \frac{\lambda}{2} - \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v+v_0}{c}\right)^2\right) \frac{\lambda}{2} \quad (0.0.74)$$

$$= -\frac{\lambda v_0 v}{c^2} \quad \equiv \Delta\lambda \quad (0.0.75)$$

と計算でき、導線は負に帯電していることがわかる。よって、電荷の受ける力は

$$\mathbf{F} = q \frac{\Delta\lambda}{2\pi r \varepsilon_0} \mathbf{e}_r \quad (0.0.76)$$

$$= -qv_0 \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi r} \mathbf{e}_r \quad (0.0.77)$$

これは先ほどの計算結果と一致している。よって、電場と磁場は観測する系によって入り混じることがわかる。