波動関数 $\psi(\boldsymbol{r})$ を次のように変換する．

$$\psi(\boldsymbol{r}) \to \psi'(\boldsymbol{r}) = \mathrm{e}^{i\alpha(\boldsymbol{r})}\psi(\boldsymbol{r}) \tag{0.0.1}$$

この場合，運動量が Gauge 不変でなくなってしまう．例えば波動関数の微分を計算すると

$$\nabla\psi'(\boldsymbol{r}) = i(\nabla\alpha(\boldsymbol{r})\mathrm{e}^{i\alpha(\boldsymbol{r})})\psi(\boldsymbol{r}) + \mathrm{e}^{i\alpha(\boldsymbol{r})}\nabla\psi(\boldsymbol{r}) = \mathrm{e}^{i\alpha((r))}(\nabla + i\nabla\alpha(\boldsymbol{r}))\psi(\boldsymbol{r}) \tag{0.0.2}$$

余分な項が加わってしまう．よって，

$$\begin{cases} i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\psi' \neq -\dfrac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi' \\ \langle\psi|\,\hat{A}\,|\psi\rangle \neq \langle\psi'|\,\hat{A}\,|\psi'\rangle \end{cases} \tag{0.0.3}$$

である．したがって，局所 Gauge 変換に対して物理は不変ではない．

局所 Gauge 不変性を基本原理とする物理を再構築する．

まずは，微分を次の共変微分として再定義する．

$$\boldsymbol{D} = \nabla + \mathrm{i}\frac{e}{\hbar}\boldsymbol{A} \tag{0.0.4}$$

ただし，ψ と $\boldsymbol{A}$ は Gauge 変換により

$$\psi \to \psi' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\boldsymbol{r}}\psi \tag{0.0.5}$$

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} - \frac{\hbar}{e}\nabla\alpha(\boldsymbol{r}) \tag{0.0.6}$$

このように微分を定義すると，

$$\boldsymbol{D}'\psi'(\boldsymbol{r}) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(\boldsymbol{r})}\boldsymbol{D}\psi(\boldsymbol{r}) \tag{0.0.7}$$

つまり，局所 Gauge 変換は波動関数の微分を

$$\boldsymbol{D}\psi(\boldsymbol{r}) \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(\boldsymbol{r})}\boldsymbol{D}\psi(\boldsymbol{r}) \tag{0.0.8}$$

と変換することがわかる．これは大域的 Gauge 変換による $\nabla\psi(\boldsymbol{r}) \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\nabla\psi(\boldsymbol{r})$ と同じ形をしている．

次に，$\alpha(\boldsymbol{r})$ に時間依存性を持たせ，$alpha(\boldsymbol{r}, t)$ とする．つまり波動関数を

$$\psi \to \psi' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(\boldsymbol{r},t)}\psi \tag{0.0.9}$$

と変換する．このとき，時間についての偏微分を

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} - \mathrm{i}\frac{e}{\hbar}\varphi \tag{0.0.10}$$

と定義する．ただし，

$$\varphi \to \varphi' + \frac{\hbar}{e}\frac{\partial}{\partial t}\alpha(\boldsymbol{r}, t) \tag{0.0.11}$$

である．以上で定義した共変微分と時間微分を用いると Schrödinger 方程式は

$$\mathrm{i}\hbar D_t'\psi' = -\frac{\hbar^2}{2m}\boldsymbol{D}'^2\psi' \tag{0.0.12}$$

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla + \mathrm{i}\frac{e}{\hbar}\boldsymbol{A}\right)^2\psi - e\varphi\psi \tag{0.0.13}$$

$$= \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{p} + \mathrm{i}\frac{e}{\hbar}\boldsymbol{A}\right)^2 - e\varphi\right]\psi \tag{0.0.14}$$

と変換される．よって，

局所 Gauge 変換に対して不変な Schrödinger 方程式

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[\frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A})^2 - e\varphi\right]\psi \tag{0.0.15}$$

を得る．

以上の流れをまとめると，局所 Gauge 不変性を要請した．それにより Gauge 場 $\boldsymbol{A}$ が導入された．よって，電磁場の起源は局所 Gauge 不変性であるといえる．