

前節の最後に、一般に時間発展する量子系を正確に追跡すること、すなわち、 $c_n(t)$  の厳密解を求めることが困難であると述べた。にもかかわらず、ある特殊な条件下では近似を行うことなく、厳密解を得ることができる。以下の例題 0.1 では、そのような物理現象として **Rabi 振動** (Rabi cycle)<sup>1 2</sup> を議論する。

### 例題 0.1: Rabi 振動

厳密に解くことのできる 2 準位系,

$$|1\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (0.0.1)$$

$$|2\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (0.0.2)$$

$$\hat{H}^{(0)} := \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \quad (0.0.3)$$

を考える。明らかに、 $E_1$  と  $E_2$  は  $\hat{H}^{(0)}$  のエネルギー固有値で、それぞれに属する固有ベクトルは  $|1\rangle$  と  $|2\rangle$  である。この 2 準位系に、時刻  $t = 0$  から  $\hat{V}(t)$  なる摂動を加える。ただし、 $\hat{V}(t)$  は、

$$\hat{V}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma e^{i\omega t} \\ \gamma e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix} \quad (0.0.4)$$

によって与えられる<sup>a</sup>。系全体のハミルトニアンを  $\hat{H} := \hat{H}^{(0)} + \hat{V}(t)$  とする。系の状態ベクトルを相互作用表示を用いて、

$$|\psi(t)\rangle_I := c_1(t) |1\rangle + c_2(t) |2\rangle \quad (0.0.5)$$

と書いたとき、以下の問いに答えよ。

1.  $c_1(t)$  と  $c_2(t)$  の時間発展を調べよ。ただし、初期条件は  $c_1(0) = 1$ ,  $c_2(0) = 0$  とする。
2. 1. の条件のもとで、 $c_2(t)$  の確率振幅が最大となる  $\omega$  を求めよ。

<sup>a</sup> $\gamma$  は摂動の強さを表す。

1.  $c_1(t)$  と  $c_2(t)$  の時間発展

今回の設定での  $\omega_{mn}$  や  $V_{mn}$  を計算すると、

$$\omega_{11} = \omega_{22} = 0 \quad (0.0.6)$$

$$\omega_{21} = -\omega_{12} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} \quad (0.0.7)$$

$$V_{11} = V_{22} = 0 \quad (0.0.8)$$

$$V_{21} = V_{12}^* = \gamma e^{-i\omega t} \quad (0.0.9)$$

である。非定常摂動の時間発展の式より、

$$\begin{cases} i\hbar \frac{d}{dt} c_1(t) = c_1(t) V_{11} e^{i\omega_{11}t} + c_2(t) V_{12} e^{i\omega_{12}t} = c_2(t) \gamma e^{i(\omega + \omega_{12})t} \\ i\hbar \frac{d}{dt} c_2(t) = c_1(t) V_{21} e^{i\omega_{21}t} + c_2(t) V_{22} e^{i\omega_{22}t} = c_1(t) \gamma e^{-i(\omega - \omega_{21})t} \end{cases} \quad (0.0.10)$$

が成り立つ。次に、 $\Delta\omega := \omega - \omega_{21}$  として式 (0.0.10) を解く。2 式目を 1 式目に代入して  $c_1(t)$  を消去すると、

$$\frac{d^2}{dt^2} c_2(t) + i\Delta\omega \frac{d}{dt} c_2(t) + \left(\frac{\gamma}{\hbar}\right)^2 c_2 = 0 \quad (0.0.11)$$

<sup>1</sup>I.I.Rabi(1898 - 1988)

<sup>2</sup>量子状態の振動を Rabi 振動という。

2 階の斉次微分方程式の解は  $c_2(t) = e^{i\lambda t}$  と書けるので、これを式 (0.0.11) に代入すると、

$$\lambda^2 + \Delta\omega\lambda - \left(\frac{\gamma}{\hbar}\right) = 0 \quad (0.0.12)$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{\Delta\omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\hbar}\right)^2} \quad (0.0.13)$$

を得る。  $\Omega$  を、

$$\Omega := \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma}{\hbar}\right)^2} \quad (0.0.14)$$

と定義して、これを Rabi 周波数と呼ぶ。  $c_2$  の一般解は、

$$c_2(t) = \exp\left(-i\frac{\Delta\omega}{2}t\right)(Ae^{i\Omega t} + Be^{-i\Omega t}) \quad (0.0.15)$$

と書ける。式 (0.0.15) を式 (0.0.10) の第 2 式に代入すると、

$$c_1(t) = \frac{\hbar}{\gamma} \exp\left(-i\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \left[ \frac{\Delta\omega}{2}(Ae^{i\Omega t} + Be^{-i\Omega t}) - \Omega(Ae^{i\Omega t} - Be^{-i\Omega t}) \right] \quad (0.0.16)$$

となる。初期条件を考えると、

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = -\frac{\gamma}{\hbar\Omega} \end{cases} \quad (0.0.17)$$

であるから、

$$B = -A = \frac{\gamma}{2\hbar\Omega} \quad (0.0.18)$$

となる。よって、

$$c_1(t) = \exp\left(-i\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \left( \cos\Omega t - i\frac{\Delta\omega}{2\Omega} \sin\Omega t \right) \quad (0.0.19)$$

$$c_2(t) = -i\frac{\gamma}{\hbar\Omega} \exp\left(-i\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \sin\Omega t \quad (0.0.20)$$

である。時刻  $t$  で  $|1\rangle$ ,  $|2\rangle$  に状態を見出す確率、 $|c_1(t)|^2$ ,  $|c_2(t)|^2$  はそれぞれ、

$$|c_1(t)|^2 = \cos^2\Omega t + \left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)^2 \frac{1}{\Omega^2} \sin^2\Omega t \quad (0.0.21)$$

$$|c_2(t)|^2 = \frac{\gamma^2}{\hbar^2\Omega^2} \sin^2\Omega t \quad (0.0.22)$$

である。簡単な計算により、 $|c_1(t)|^2 + |c_2(t)|^2 = 1$  となることが容易に確かめられる。

## 2. $c_2(t)$ の振幅が最大となる $\omega$ の値

振幅の大きさは  $\Omega$  の定義式 (0.0.14) より、

$$\frac{(\gamma/\hbar)^2}{(\gamma/\hbar)^2 + (\Delta\omega/2)^2} \quad (0.0.23)$$

と表されるので、 $\Delta\omega = \omega - \omega_{21} = 0$  のときに最大となる。つまり、摂動の周波数  $\omega$  と 2 準位のエネルギー差に由来する  $\omega_{21}$  が一致したときに遷移が起こりやすい。

**例題 0.1** では, Rabi 振動に関する 2 つの重要な物理量を得たので, 下にまとめる.

Rabi 周波数

$$\Omega = \sqrt{(\Delta\omega/2)^2 + (\gamma/\hbar)^2} \quad (0.0.24)$$

共鳴条件

$$\omega = \omega_{21} = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} \quad (0.0.25)$$