全角運動量が保存するために，

$$\left[\hat{H}, \hat{\boldsymbol{L}} + \hat{\boldsymbol{S}}\right] = 0 \tag{0.0.1}$$

なる物理量として，スピン $\hat{\boldsymbol{S}}$ が存在すると考える．スピン演算子を，

$$\hat{S}_x \coloneqq \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix} \tag{0.0.2}$$

$$\hat{S}_y \coloneqq \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{pmatrix} \tag{0.0.3}$$

$$\hat{S}_z \coloneqq \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix} \tag{0.0.4}$$

ただし，σ_i $(i = x, y, z)$ は Pauli 行列である．このようにスピン演算子を導入すると，これらは α_i や β との交換関係において，

$$\left[\alpha_i, \hat{S}_j\right] = \mathrm{i}\hbar\varepsilon_{ijk}\alpha_k \tag{0.0.5}$$

$$\left[\beta, \hat{S}_i\right] = 0 \tag{0.0.6}$$

を満たすため，

$$\left[\hat{H}, \hat{S}_x\right] = \mathrm{i}\hbar c(\alpha_y \hat{p}_z - \alpha_z \hat{p}_y) \tag{0.0.7}$$

$$\left[\hat{H}, \hat{S}_y\right] = \mathrm{i}\hbar c(\alpha_z \hat{p}_x - \alpha_x \hat{p}_z) \tag{0.0.8}$$

$$\left[\hat{H}, \hat{S}_x\right] = \mathrm{i}\hbar c(\alpha_x \hat{p}_y - \alpha_y \hat{p}_x) \tag{0.0.9}$$

が得られる．$\hat{\boldsymbol{S}}$ の定義より，

$$\left[\hat{H}, \hat{S}_i\right] = -\left[\hat{H}, \hat{L}_i\right] \tag{0.0.10}$$

であるため，

$$\left[\hat{H}, \hat{L}_x + \hat{S}_x\right] = \left[\hat{H}, \hat{L}_y + \hat{S}_y\right] = \left[\hat{H}, \hat{L}_z + \hat{S}_z\right] = 0 \tag{0.0.11}$$

が成り立つ．よって，Dirac 方程式において

$$\left[\hat{H}, \hat{\boldsymbol{L}} + \hat{\boldsymbol{S}}\right] = 0 \tag{0.0.12}$$

であり，**全角運動量** $\boldsymbol{J} \coloneqq \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$ が保存されることがわかる．ただし，$\boldsymbol{S} = \dfrac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$ は**スピン角運動量**である．まとめると，非相対論的量子論では軌道角運動量 $\boldsymbol{L}$ が保存量であった．しかし，相対論を取り入れた Dirac 方程式ではスピン角運動量 $\boldsymbol{S}$ も含めた全角運動量 $\boldsymbol{J}$ が保存量なのである[1]．以上の議論では，スピンの存在が自然に導入された．この議論に用いた要請は，

スピンの存在のために用いた要請

1. Lorentz 共変性
2. 状態の時間発展が時間の 1 階微分で表されること

である．1. は Schrödinger 方程式と相対論の矛盾を解決するために用いた．2. は波動関数の確率解釈を可能にするために用いた．以上の要請から Dirac 方程式が導かれ，その式にはスピンの存在が内包されていた．

[1] これを実験的に確かめたのが **Einstein - de Haas 効果**や **Barnett 効果**である．前者は，強磁性体の磁化の向きがそろった時，つまりスピン角運動量が変化したとき，強磁性体全体が力学的回転をするというものであり，Einstein が生涯で行った唯一の実験と言われている．後者は，逆に，力学的回転により磁化の向きがそろうというものである．これらは**磁気回転効果** (gyromagnetic effect) と言われている．磁気回転効果は常磁性体，核スピン，液体金属流体，常磁性金属薄膜，強磁性金属薄膜，クォーク・グルオンプラズマでも観測されている．

式 (??) から式 (??) で表した Dirac 方程式の平面波解と，$\hat{S}_z$ の関係を調べる．平面波解に $\hat{S}_z$ を作用させてみると，

$$\begin{cases} \hat{S}_z \psi_\uparrow^+ = \dfrac{\hbar}{2}\psi_\uparrow^+ \\ \hat{S}_z \psi_\downarrow^+ = -\dfrac{\hbar}{2}\psi_\downarrow^+ \end{cases} \tag{0.0.13}$$

$$\begin{cases} \hat{S}_z \psi_\uparrow^- = \dfrac{\hbar}{2}\psi_\uparrow^- \\ \hat{S}_z \psi_\downarrow^- = -\dfrac{\hbar}{2}\psi_\downarrow^- \end{cases} \tag{0.0.14}$$

が成り立つ．よって，平面波解は $\hat{S}_z$ の固有状態であることがわかる．

全角運動量以外の保存量として**ヘリシティ**がある[2]．

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \tag{0.0.15}$$

として，ヘリシティは

$$h = \frac{\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|} \tag{0.0.16}$$

と定義される．これが保存量であることは以下のように確かめられる．

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})\hat{h} &= \frac{1}{p}\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}} \end{pmatrix} && (0.0.17) \\
&= \frac{1}{p}\begin{pmatrix} 0 & (\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}) \\ (\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}) & 0 \end{pmatrix} && (0.0.18) \\
&= \frac{1}{p}\begin{pmatrix} 0 & \hat{\boldsymbol{p}}^2 \\ \hat{\boldsymbol{p}}^2 & 0 \end{pmatrix} && (0.0.19) \\
&= \hat{h}(\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}) && (0.0.20)
\end{aligned}$$

よって

$$[\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}, \hat{h}] = 0 \tag{0.0.21}$$

$$[\beta, \hat{h}] = 0 \tag{0.0.22}$$

したがって，

$$[\hat{H}, \hat{h}] = 0 \tag{0.0.23}$$

ヘリシティは保存量である．

[2] 授業では触れていない．