

# プラズマ物理講義ノート

Yuto Masuda and Haruki Aoki

更新日: January 20, 2025

# Contents

<b>0</b>	<b>プラズマとは何か</b>	<b>3</b>
0.1	プラズマとは？	3
0.2	自然界のプラズマ	3
0.3	地上に太陽を	3
<b>1</b>	<b>プラズマの基本的性質</b>	<b>5</b>
1.1	プラズマの温度	5
1.2	電気的中性	6
1.3	Debye 遮蔽	7
1.4	プラズマ・パラメータ	8
1.5	プラズマ振動	9
<b>2</b>	<b>プラズマの生成</b>	<b>11</b>
2.1	イオン化エネルギー	11
2.2	解離過程	11
2.2.1	衝突電離	11
2.2.1.1	弾性衝突と非弾性衝突	12
2.2.1.2	衝突断面積	12
2.2.1.3	平均自由行程	12
2.2.1.4	衝突時間と衝突周波数	13
2.2.1.5	速度係数	14
2.2.2	光電離	14
2.2.3	励起過程	15
2.2.4	再結合過程	15
<b>3</b>	<b>単一荷電粒子の運動</b>	<b>16</b>
3.1	はじめに	16
3.2	一様磁場中での粒子の運動	16
3.2.1	磁場に垂直方向の運動	16
3.2.2	ドリフト運動	17
3.2.2.1	$E \times B$ ドリフト	18
3.2.2.2	一般的な力によるドリフト	18
3.2.2.3	非一様磁場中でのドリフト	19
3.2.2.3.1	磁場勾配ドリフト	19
3.2.2.3.2	曲率ドリフト	20
3.2.3	磁気鏡	20
3.2.3.1	磁気鏡とは	20
3.2.3.2	磁気モーメント	20
3.2.3.3	磁気鏡による粒子反射の物理機構	21
3.2.3.4	磁気モーメントの保存性の証明	22

---

<b>4 流体モデルによるプラズマのモデル化</b>	<b>25</b>
4.1 はじめに . . . . .	25
4.2 密度連続の式 . . . . .	25
4.3 流体の運動方程式 . . . . .	26
4.3.1 外力による運動量の時間変化 . . . . .	27
4.3.2 運動量の流入・流出 . . . . .	27
4.3.3 圧力勾配による力 . . . . .	28
4.3.4 運動方程式の保存形 . . . . .	29
4.3.5 Euler の運動方程式 . . . . .	29
4.4 流体のエネルギー方程式 . . . . .	30
4.5 流体モデルのまとめ . . . . .	31
<b>A 圧力項に関する運動量的考察</b>	<b>32</b>
<b>B 演習問題</b>	<b>33</b>

# Chapter 0

## プラズマとは何か

### 0.1 プラズマとは？

物質に熱を加えていくと、固体、液体、気体へと変化する。気体にさらに熱を加え、原子がイオンと電子に分離する。この状態を**プラズマ**という。

プラズマの定義

プラズマとは、荷電粒子を含んだほぼ中性の粒子集団。

ここで、粒子集団とは、**電離したイオンと電子を含む気体**のことである。プラズマと普通の中性気体との違いは以下のようになる。

1. 中性気体の相互作用は衝突を通してのみである。
2. プラズマは荷電粒子なので、相互作用は Coulomb 力である。これは多数の粒子間で遠距離まで及ぶ。

上記で「ほぼ中性」と述べたのは、プラズマには時間的空間的電荷の偏りがあるからである。しかし、プラズマにはこの偏りを打ち消す性質 (Debye 遮蔽, プラズマ振動) がある。ラフに言えばこうである。まず、ある正電荷の周りに電子が集まる。この領域は電子が増えるので電氣的に負になる。ほかの領域は電氣的に正になる。電子はこの正の領域に戻っていく。プラズマ物理ではエネルギーや温度が指標に使われる。

$$1 \text{ eV} \sim 1 \times 10^4 \text{ }^\circ\text{C} \quad (0.1.1)$$

である。

### 0.2 自然界のプラズマ

Einstein の関係式より、

$$E = mc^2 \quad (0.2.1)$$

であるから、1 g の水素の核融合によるエネルギーは、

$$6.5 \times 10^{11} \text{ J} \quad (0.2.2)$$

である。

### 0.3 地上に太陽を

ローソン条件

核融合反応が持続するために必要な温度、密度、閉じ込め時間の関係。

ローソン図

ローソン条件を満たす関係をエネルギー増倍率を  $Q$  として,

$$Q = \frac{(\text{核融合出力})}{(\text{加熱パワー})} \quad (0.3.1)$$

で図示したもの.

# Chapter 1

## プラズマの基本的性質

### 1.1 プラズマの温度

プラズマの温度は、密度とともにもっとも基本的かつ重要な物理量の一つである。壁の温度  $T$  が一定の容器に、十分長い時間気体粒子を閉じ込めると気体粒子は衝突を繰り返し熱平衡状態になる。粒子の速度分布は Maxwell 分布に従う。単位体積当たり  $n$  個の粒子が温度  $T$  で熱平衡状態にあるとする。速度が  $v_x$  と  $v_x + dv_x$  の範囲にある粒子の個数は、

$$f(v_x) dv_x, f(v_x) = A \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2k_B T}\right) \quad (1.1.1)$$

である。  $A$  は規格化条件から求められる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(v_x) dv_x = n \quad (1.1.2)$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} A \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2k_B T}\right) dv_x = n \quad (1.1.3)$$

$$\Rightarrow A = n \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \quad (1.1.4)$$

温度は速度分布の広がりを表すパラメータである。高温ほど、速度が大きい粒子が多い。粒子の平均エネルギーを計算する。

$$E_{av} = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m v_x^2 f(v_x) dv_x = \frac{1}{2} k_B T \quad (1.1.5)$$

熱速度を

$$v_{th} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \quad (1.1.6)$$

とすると、

$$f(\pm v_{th}) = \frac{1}{e} f(0) \quad (1.1.7)$$

である。

3次元に拡張すると分布関数は、

$$f(v_x, v_y, v_z) = n \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{k_B T} \right] \quad (1.1.8)$$

$$E_{av} = \frac{3}{2} k_B T \quad (1.1.9)$$

である。速さ  $v$  に関する速度分布は

$$F(v) = 4\pi n \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{m v^2}{k_B T} \right] \quad (1.1.10)$$

である。これは  $v = v_{\text{th}}$  で最大となる。また、速度ベクトルの向きに依らず、速さのみに依存する。**等方分布**である。

速度あるいは速さの平均値は、温度や熱速度と共に、**速度分布を特徴づける物理量**として、今後、重要となる。速度ベクトルの平均値は 0 である。

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{0} \quad (1.1.11)$$

次に速さの平均値を計算する。

$$\langle v \rangle = \frac{1}{n} \int_0^\infty v F(v) dv = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} \quad (1.1.12)$$

これは熱速度よりわずかに大きい。

速度分布関数についての平均は一般的に次のようになる。ある物理量  $X$  を考える。 $X$  の平均値は

$$\langle X \rangle = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty X f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z \quad (1.1.13)$$

である。特に、等方的な分布の場合、

$$\langle X \rangle = \frac{1}{n} \int_0^\infty X F(v) dv \quad (1.1.14)$$

である。これはプラズマを流体的に扱う時に用いられる。

## 1.2 電気的中性

電子の個数密度を  $n_e$ 、イオンの個数密度を  $n_i$  とする。イオンが 1 価ならば、

$$(-e)n_e + (+e)n_i = 0 \quad (1.2.1)$$

$$\Rightarrow n_e = n_i \quad (1.2.2)$$

が成り立つ。Z 価のイオンならば、

$$(-e)n_e + (+Ze)n_i = 0 \quad (1.2.3)$$

$$\Rightarrow n_e = Zn_i \quad (1.2.4)$$

イオンの種類が多数の場合には、

$$\sum_j (Z_j e) n_j = 0 \quad (1.2.5)$$

が成り立つ。ただし、 $j$  は荷電粒子の種類、例えば電子やイオンを表す。ヘリウムを例に考えてみる。ヘリウムには 1 価イオンと 2 価イオンがあるので、

$$(-e)n_e + (+e)n_{\text{He}^+} + (+2e)n_{\text{He}^{2+}} = 0 \quad (1.2.6)$$

が成り立つ。

以上はマクロに見た電気的中性であったが、プラズマはミクロに見ると揺らいでいる。プラズマは以下の機構により**準中性**と呼ばれる。まず、プラズマはランダムな熱運動をしている。この熱運動により、ある瞬間には揺動電場が形成される。プラズマはこの電場を打ち消すように運動する。よって、プラズマはほぼ中性であり、

$$n_i \simeq n_e \quad (1.2.7)$$

が成り立つ。

### 1.3 Debye 遮蔽

プラズマ粒子は互いに Coulomb 相互作用

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \quad (1.3.1)$$

を及ぼしあう。このときのポテンシャルは

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (1.3.2)$$

であるが、これはあくまで真空中でのポテンシャルであり、プラズマの存在を加味していない。プラズマによる遮蔽を考えたものとして、次の **Debye ポテンシャル**がある。

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) \quad (1.3.3)$$

$\lambda_D$  を **Debye 遮蔽長**、 $\exp(-r/\lambda_D)$  を **Debye 遮蔽ファクター**という。プラズマ中で正電荷の偏りができると、そこに電子が引き寄せられる。この引き寄せられた電子たちが正電荷の電場を遮蔽する。

Debye の遮蔽長は以下の式を満たす。

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{e^2 n}} \quad (1.3.4)$$

つまり、 $T$  が大きいほど、電子はランダムな熱運動をするため、正電荷の周りにとどまらず、 $\lambda_D$  は大きくなる。一方、 $n$  が大きいほど電子が集まりやすいため、 $\lambda_D$  は小さくなる。また、係数を計算すると、

$$\lambda_D = 7.4 \times 10^3 \sqrt{\frac{T \text{ eV}}{n \text{ m}^{-3}}} \quad (1.3.5)$$

である。

Debye 遮蔽と準中性条件は以下の関係にある。プラズマの特徴的な大きさや長さ  $L$  が Debye 遮蔽長  $\lambda_D$  より十分に大きい、つまり、

$$L \gg \lambda_D \quad (1.3.6)$$

のとき、空間的な電荷の偏りは無視でき、ほぼ中性とみなせる。

定性的な議論は以上として、次に Debye 遮蔽を導出する。出発点は式 (1.3.7) の Poisson 方程式である。

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (1.3.7)$$

ここで、1 価のイオンと電子で構成されるプラズマの場合、

$$\rho(\mathbf{r}) = e[n_i(\mathbf{r}) - n_e(\mathbf{r})] \quad (1.3.8)$$

である。モデルとして、プラズマ中で生じた電荷の偏りを試験電荷、つまり点電荷として近似する。試験電荷の電荷量を  $q_T$  として、これが原点にあるとする。試験電荷を含めると電荷密度は

$$\rho(\mathbf{r}) = e[n_i(\mathbf{r}) - n_e(\mathbf{r})] + q_T \delta(\mathbf{r}) \quad (1.3.9)$$

とかける。また、球対称性を仮定し、 $\theta$  と  $\phi$  依存性を捨てると、ラプラシアンは

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \quad (1.3.10)$$

となる。ここで、イオンの質量は電子に比較して大きく動きにくいとすると、イオンの電荷密度は試験電荷がない場合の様な密度にほぼ等しい。

$$n_i(r) \simeq n_0 \quad (1.3.11)$$



また、電子密度は Boltzmann 関係式

$$n_e(r) = n_0 \exp \left[ \frac{e\phi(r)}{k_B T} \right] \simeq n_0 \left[ 1 + \frac{e\phi(r)}{k_B T} \right] \quad (1.3.12)$$

を満たす。式 (1.3.9), 式 (1.3.12), 式 (1.3.11) を式 (1.3.7) に代入すると,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 k_B T} \phi(r) - \frac{q_T}{\varepsilon_0} \delta(r) \quad (1.3.13)$$

となる。ここで,  $\frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 k_B T} = \frac{1}{\lambda_D^2}$  とおくと,  $r \neq 0$  で,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \frac{1}{\lambda_D^2} \phi(r) \quad (1.3.14)$$

である。上式の一般解は

$$\phi(r) = \frac{A}{r} \exp \left( -\frac{r}{\lambda_D} \right) + \frac{B}{r} \exp \left( +\frac{r}{\lambda_D} \right) \quad (1.3.15)$$

である。次に境界条件を考える。無限遠でポテンシャルが発散することは無いので

$$B = 0 \quad (1.3.16)$$

試験電荷の極近傍ではポテンシャルは Coulomb ポテンシャルと一致するはずなので

$$\phi(0^+) = \frac{q_T}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad (1.3.17)$$

$$\Rightarrow A = \frac{q_T}{4\pi\varepsilon_0} \quad (1.3.18)$$

である。以上から Debye 遮蔽のポテンシャル

$$\phi(r) = \frac{q_T}{4\pi\varepsilon_0 r} \exp \left( -\frac{r}{\lambda_D} \right) \quad (1.3.19)$$

が得られる。

## 1.4 プラズマ・パラメータ

Debye の遮蔽長を半径とする球 (Debye 球) を考える。この球の中に含まれるプラズマ粒子の数  $N_\lambda$  はプラズマの密度を  $n$  として,

$$N_\lambda = \frac{4\pi}{3} n \lambda_D^3 \quad (1.4.1)$$

となる。Debye 遮蔽が有効に働くためには, Debye 球内に十分多数の荷電粒子が存在しなければならない。つまり,

$$N_\lambda \gg 1 \quad (1.4.2)$$

という条件を満たさなければならない。よって, この  $N_\lambda$  をプラズマ・パラメータという。一般に式 (1.4.2) が満たされるとき, Debye 遮蔽が有効に働き, 荷電粒子からなる気体は, ほぼ中性とみなせる。したがって,  $N_\lambda$  は対象がプラズマであることを示す一つの指標である。しかし, 負電荷が正電荷に完全に束縛されてしまうと, 荷電粒子から構成される期待と考えることはできない。よって, Coulomb 力を振り払うほどの運動エネルギーをもつことが, プラズマであるための条件となる。すなわち,

$$\frac{3}{2} k_B T \gg \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{d} \quad (1.4.3)$$

が条件となる．ここで， $d$  は粒子間の平均距離である．上式を変形すると，

$$\left(\frac{3}{2}k_B T\right)\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{d}\right)^{-1} \gg 1 \quad (1.4.4)$$

となる．以下に，式 (1.4.2) と式 (1.4.4) が等価であること，すなわち， $N_\lambda$  が運動エネルギーと Coulomb ポテンシャルの比に対応するパラメータであることを示す．まず，プラズマの密度が  $n$  であるから，プラズマ 1 つが占める体積は

$$V = \frac{1}{n} \quad (1.4.5)$$

である．また，プラズマの平均距離は  $d$  であるから，

$$V = d^3 \quad (1.4.6)$$

である．よって，

$$d \simeq n^{-1/3} \quad (1.4.7)$$

を得る．したがって，

$$N_\lambda = \frac{4\pi}{3} n \lambda_D^3 \quad (1.4.8)$$

$$= \frac{4\pi}{3} \frac{1}{d^3} \left( \frac{\epsilon_0 k_B T}{e^2/d^3} \right)^{3/2} \quad (1.4.9)$$

$$\Rightarrow N_\lambda \propto \left[ \frac{(3/2)k_B T}{(e^2/4\pi\epsilon_0 d)} \right]^{3/2} \quad (1.4.10)$$

である．右辺は運動エネルギーと Coulomb ポテンシャルの比となっている．

## 1.5 プラズマ振動

**プラズマ振動** (plasma oscillation) は以下のような機構で発生する．まず，プラズマはランダムな熱振動をしている．

1. そのため，電気的な中性が崩れる．
2. 中性が崩れたため電場が発生する．
3. この電場をシールドするためにプラズマ粒子が運動する．
4. この運動の慣性のために再び中性が崩れる．

1 から 4 を繰り返すことをプラズマ振動という．以下に，プラズマ振動の振動数，プラズマ振動数を求める．まず，プラズマの集団が  $x$  だけずれたとする．このとき，電子の平衡位置からのずれにより生じる電荷  $\sigma$  は

$$\sigma = 1 \times x \times ne \quad (1.5.1)$$

である．ここで，イオンは質量が大きいため動かないとした．次に，この電荷により生じる電場は

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (1.5.2)$$

である．よって， $n$  個の電子の運動方程式は

$$nm_e \frac{d^2 x}{dt^2} = n(-e)E \quad (1.5.3)$$

$$\Rightarrow nm_e \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{n^2 e^2}{\epsilon_0} x \quad (1.5.4)$$

である。これは振動数が

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m_e \varepsilon_0}} \quad (1.5.5)$$

である単振動の方程式であることがわかる。この  $\omega_p$  をプラズマ振動数という。プラズマ振動数はプラズマの密度が大きいほど大きくなることがわかる。また、物理定数を代入すると、具体的に

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m_e \varepsilon_0}} \quad (1.5.6)$$

$$= \sqrt{\frac{n \cdot (1.602 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{9.109 \times 10^{-31} \text{ kg} \cdot 8.854 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}}} \quad (1.5.7)$$

$$= 5.641 \times 10^{11} \sqrt{\frac{n}{10^{20}}} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad (1.5.8)$$

$$\Leftrightarrow f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = 8.98 \times 10^{10} \sqrt{\frac{n}{10^{20}}} \text{ Hz} \quad (1.5.9)$$

## Chapter 2

# プラズマの生成

### 2.1 イオン化エネルギー

高校物理の完全な復習なので式のみ示す．古典的な円運動は，

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \quad (2.1.1)$$

量子化条件は

$$m_e v r = n \frac{h}{2\pi} \quad (2.1.2)$$

許される軌道半径は

$$r_n = n^2 \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m_e e^2} \quad (2.1.3)$$

$$= n^2 \cdot 5.3 \times 10^{-11} \text{ m} \quad (2.1.4)$$

$n = 1$  のときの軌道半径を Bohr 半径と言い， $5.3 \times 10^{-11} \text{ m}$  である．各軌道に対する電子の全エネルギーは，

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{8\pi\epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2} \quad (2.1.5)$$

$$= -\frac{1}{n^2} \cdot 13.6 \text{ eV} \quad (2.1.6)$$

$n = 1$  のとき， $-13.6 \text{ eV}$  である．イオン化エネルギーの定義は，

$$\Delta E = E_\infty - E_1 = 13.6 \text{ eV} \quad (2.1.7)$$

であるから，水素原子のイオン化エネルギーは  $13.6 \text{ eV}$  である．常温・常圧では 2 原子あるいはそれ以上の原子が結合して分子の状態にあることが多い．この場合には，解離過程を経て原子になり，その後，電離することが多い．

### 2.2 解離過程

では，どのようにして電離に必要なエネルギーを与えるのだろうか．主に，電子による**衝突電離**と**光電離**がある．

#### 2.2.1 衝突電離

イオン化エネルギー以上のエネルギーを衝突によって与えて中性粒子を電離させる方法が衝突電離である．1 個の原子を電離するにはおよそ， $5 \text{ eV}$  から  $25 \text{ eV}$  のエネルギーが必要である．

衝突させる粒子としては荷電粒子が用いられる．なぜなら，電圧により容易に加速させられるからである．電子を使ったものを**電子衝突電離** (electron impact ionization) という．電子はイオンに比べ，「種」になる電子が作りやすく，衝突によるエネルギーの授受の効率が良い，という特徴がある．

### 2.2.1.1 弾性衝突と非弾性衝突

**弾性衝突** (elastic collision) はでは、衝突前後で粒子の運動エネルギーが保存する。**非弾性衝突**では、運動エネルギーは保存しない。しかし、全エネルギーは保存されるため、運動エネルギーの一部が粒子の内部状態の変化に使われる。例えば、衝突電離過程や衝突励起過程に使われる。つまり、

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} + \Delta U \quad (2.2.1)$$

であり、 $\Delta U$  が粒子の内部状態変化に使われたエネルギーである。まとめると、弾性衝突は内部状態の変化を伴わず、粒子の軌道を変えるだけである。よって、粒子拡散や熱伝導など輸送過程で重要となる。一方、非弾性衝突では内部状態の変化を伴う。よって、プラズマ生成・消滅過程で重要となる。

### 2.2.1.2 衝突断面積

衝突過程を記述する物理量として**衝突断面積** (cross section of collision) がある。これは衝突のしやすさを示すパラメータである。例えば、半径  $r_1$  の粒子と半径  $r_2$  の粒子の衝突を考える。粒子は剛体球とみなすと、中心間距離が  $r_1 + r_2$  以下のときに衝突する。よって、半径  $r_1 + r_2$  の円の面積が衝突を表すパラメータとして有用である。したがって、衝突断面積は

$$\sigma = \pi(r_1 + r_2)^2 \quad (2.2.2)$$

である。この剛体球モデルが使えるのは、中性原子-中性原子の衝突や荷電粒子-中性原子の衝突である。これらは原子半径程度まで接近したときに力を及ぼしあう。一方、荷電粒子-荷電粒子は、Coulomb 力が遠距離まで及ぶため、剛体球として扱えない。

剛体球モデルでは、原子内の最外殻電子の軌道半径を球の半径とみなす。原子番号が大きくなるほど衝突はしやすくなる。また、電子の de Broglie 波長は

$$\lambda_d = \frac{h}{m_e v_e} \quad (2.2.3)$$

である。電子の速度やエネルギーが十分大きい時は電子の波動性を考慮する必要はなく、衝突断面積は原子半径程度と考えることができる。

一方、電子のエネルギーが低く、

$$\lambda_d \simeq (\text{原子半径}) \quad (2.2.4)$$

となると量子力学的な扱いが必要である。

非弾性衝突 (例えば電離反応) が起こるためには、衝突する粒子はイオン化エネルギー以上の運動エネルギーを持つ必要がある。イオン化エネルギー以下では衝突してもイオン化は起こらず、断面積は 0 である。よって、断面積にエネルギーの閾値があることがわかる。また、これらの断面積は反応断面積や電離断面積と呼ばれることもある。

### 2.2.1.3 平均自由行程

**平均自由行程** (mean free path) は、衝突と衝突の間の平均的な飛行距離である。位置  $x = 0$ 、面積  $S$  の面から、同じ速度  $v$  を持つ粒子 A のビームを一様に入射する。 $x = 0$  で未衝突の粒子 A の個数を  $N_{A0}$  とする。位置  $x$  での個数を  $N_A(x)$  とする。簡単のため粒子 B は止まっているとする。粒子 A と粒子 B の衝突断面積を  $\sigma_{AB}$  とすると、粒子 A が  $[x, x + dx]$  の微小区間で粒子 B と衝突する確率は

$$P_{AB} = \frac{\sigma_{AB} N_B}{S} \quad (2.2.5)$$

である。 $N_B$  は  $dx$  に含まれる粒子 B の個数である。粒子 B の密度を  $n_B$  とすると、

$$N_B = n_B \cdot S dx \quad (2.2.6)$$

である。よって、衝突確率は

$$P_{AB} \sim \sigma_{AB} n_B dx \quad (2.2.7)$$

である．衝突した粒子の数だけビーム粒子の数は減ると考えると，

$$dN_A = -n_A \sigma_{AB} n_B dx \quad (2.2.8)$$

である．よって，

$$\frac{dN_A}{N_A} = -\sigma_{AB} n_B dx \quad (2.2.9)$$

$$\Rightarrow N_A(x) = N_{A0} \exp\left(-\frac{x}{\lambda_{AB}}\right) \quad (2.2.10)$$

であり，平均自由行程は

$$\lambda_{AB} = \frac{1}{n_B \sigma_{AB}} \quad (2.2.11)$$

となる．

粒子 A が距離  $x$  だけ自由に飛行できる確率を求める．位置 0 から位置  $x$  まで衝突を受けない確率は

$$P_A(x) = \frac{N_A(x)}{N_{A0}} = \exp\left(-\frac{x}{\lambda_{AB}}\right) \quad (2.2.12)$$

である． $[x, x + dx]$  の範囲で衝突を受ける確率は

$$dP_A(x) = \left| \frac{dN_A}{N_A} \right| = \sigma_{AB} n_B dx = \frac{dx}{\lambda_{AB}} \quad (2.2.13)$$

である．よって，距離  $x$  だけ自由に飛行できる確率は

$$P_A \times dP_A = \exp\left(-\frac{x}{\lambda_{AB}}\right) \frac{dx}{\lambda_{AB}} \quad (2.2.14)$$

である．自由に飛行できる距離  $x$  の平均値は

$$\langle x \rangle = \int_0^\infty x \exp\left(-\frac{x}{\lambda_{AB}}\right) \frac{dx}{\lambda_{AB}} = \lambda_{AB} \quad (2.2.15)$$

である． $\lambda_{AB}$  はまさしく平均移動距離を表している．

#### 2.2.1.4 衝突時間と衝突周波数

衝突と衝突の間の平均的な経過時間を**衝突時間**  $\tau_{AB}$  という．これは平均自由行程を飛行するのに要する時間である．

$$\tau_{AB} = \frac{\lambda_{AB}}{v} \quad (2.2.16)$$

で与えられる．また，単位時間当たりの平均的な衝突回数を**衝突周波数**  $\nu_{AB}$  という．

$$\nu_{AB} = \frac{1}{\tau_{AB}} = n_B \sigma_{AB} v \quad (2.2.17)$$

で与えられる．式 (2.2.17) は粒子 1 個当たりの平均的な衝突回数である．粒子 A の密度を  $n_A$  とすると，単位体積単位時間当たりのイオンの生成量  $S$  は

$$S_{AB} = n_A n_B \sigma_{AB} v \quad (2.2.18)$$

である．

### 2.2.1.5 速度係数

実際には、速度分布は一樣ではない。衝突周波数の速度分布に関する平均値は

$$\langle v_{en} \rangle = n_n \langle \sigma_{en}(v) v \rangle \quad (2.2.19)$$

である。ここで、

$$\langle \sigma_{en}(v) \rangle = \int_0^\infty \sigma_{en}(v) f(v) dv \quad (2.2.20)$$

を**速度係数** (反応速度係数, rate coefficient) という。単位は  $\text{m}^3/\text{s}$  である。これを使うと、単位体積単位時間当たりの衝突回数は

$$S_{en} = n_e n_n \langle \sigma_{en}(v) v \rangle \quad (2.2.21)$$

と表される。

## 2.2.2 光電離

光子のエネルギーがイオン化エネルギーより大きければ、電離が起こるようになる。地球の電離層はこれによりできる。特に、太陽からの紫外線が電離を引き起こす。光電離の条件は

$$A + h\nu \rightarrow A^+ + e^- \quad (2.2.22)$$

であるので、

$$h\nu \geq eV_i \quad (2.2.23)$$

を満たさなければならない。左辺は光子のエネルギーで、右辺はイオン化エネルギーである。整理すると、

$$\lambda \leq \frac{1239.8 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{V_i} \quad (2.2.24)$$

となる。例えばセシウムの場合  $V_i = 3.98 \text{ eV}$  なので、 $\lambda \leq 320 \text{ nm}$  である。これは紫外線の領域である。大気中では高度の高い方が短い波長、高度の低い方が長い波長の光が吸収される。

大気の構造と組成について補足する。圧力に関する運動方程式は

$$\frac{dp}{dz} = -mgn \quad (2.2.25)$$

である。ここで、 $p = nk_B T$  なので、 $T \sim \text{const.}$  のとき

$$\frac{dn}{dz} = -\frac{mg}{k_B T} n \quad (2.2.26)$$

となる。この解は

$$n(z) = n_0 \exp\left(-\frac{mgz}{k_B T}\right) = n_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right) \quad (2.2.27)$$

である。ここで、

$$H := \frac{k_B T}{mg} \quad (2.2.28)$$

を**スケールハイト** (scale height) という。大気密度が  $1/e$  に減衰する高度を表す。質量が大きいほど早く減衰し、質量が小さいほど遅く減衰する。

### 2.2.3 励起過程

イオン化エネルギー以下でも、原子や分子の内部状態の変化を起こさせる可能性がある。これを、**励起過程** (excitation process) という。

電子が高準位に励起されたとする。励起状態は一般に不安定であるため、より低い準位へと遷移し、結局は基底状態に戻る。低準位への遷移の際、エネルギーを光として放出する。 $E_m$  から  $E_n$  への遷移に伴い放出される光は

$$h\nu = E_m - E_n \quad (2.2.29)$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{hc}{E_m - E_n} \quad (2.2.30)$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{1 \text{ nm}} = \frac{1239.8 \text{ eV}}{E_m - E_n} \quad (2.2.31)$$

の波長をもつ。整理すると

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (2.2.32)$$

である。 $R_H$  は Rydberg 定数で  $R_H = 1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$  である。 $n = 1$  のときを Lyman 系列、 $n = 2$  のときを Balmer 系列という。Balmer 系列は可視領域である。例えば、 $m = 2 \rightarrow n = 1$  のとき  $\lambda = 121.6 \text{ nm}$  で真空紫外線  $L_{y\alpha}$  と呼ばれる。 $m = 3 \rightarrow n = 2$  のとき  $\lambda = 656.3 \text{ nm}$  で  $H_\alpha$  線と呼ばれる。

### 2.2.4 再結合過程

**再結合過程** (recombination process) は代表的なプラズマの消滅過程であり、正負の荷電粒子が結合して中性原子あるいは分子に戻る過程をいう。低温プラズマ (1 eV 以下) では、空間中での再結合 (**体積再結合**) が重要である。

例えば、体積再結合には**放射再結合**,



と **3 体再結合**,



がある。2 つ目の  $e^-$  は触媒のように作用し、 $A^+$  と  $e^-$  の運動エネルギーを受け取る。また、固体表面での再結合過程である**表面再結合**がある。

さらに、**荷電交換過程**という生成方法がある。



原子 B の電子が原子 A に受け渡されると、もともとイオンだった A が中性原子となり、B がイオンとなる。この過程では電荷の交換のみが起き、A, B の運動エネルギーは変化しない。同種粒子の場合、例えば水素では



となるが、電荷の変化ではなく、イオンから中性原子への運動エネルギーの受け渡しが重要な意味をもつ。



## Chapter 3

# 単一荷電粒子の運動

この章ではプラズマがどのような運動をするかを学ぶ。

### 3.1 はじめに

プラズマ輸送の解析には**流体モデル** (Fluid Model) と**運動論的モデル** (Kinetic Model) を用いる。前者はプラズマを連続体として扱い、巨視的なプラズマの振る舞いを記述する。後者は粒子個々の運動を解き、微視的なプラズマの振る舞いを記述する。

### 3.2 一様磁場中での粒子の運動

#### 3.2.1 磁場に垂直方向の運動

一様磁場中では電荷はサイクロトロン運動をする。磁束密度  $\mathbf{B}$  中を電荷  $q$  を持つ粒子が速度  $\mathbf{v}$  で運動しているとす。この粒子が受ける力は

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (3.2.1)$$

である。ここで、

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.2.2)$$

なので、Lorentz 力は仕事をしないことがわかる。粒子の運動方程式は以下ようになる。

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (3.2.3)$$

$\mathbf{B} = (0, 0, B)$ ,  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  とする。運動方程式の各成分は

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = qv_y B \\ m \frac{dv_y}{dt} = -qv_x B \\ m \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases} \quad (3.2.4)$$

となる。これらを整理すると、

$$\ddot{v}_x = \frac{qB}{m} v_x \implies \ddot{v}_x = -\omega_c^2 v_x \quad (3.2.5)$$

$$\ddot{v}_y = -\frac{qB}{m} v_y \implies \ddot{v}_y = \omega_c^2 v_y \quad (3.2.6)$$

となる．よって，荷電粒子は  $xy$  平面上をサイクロトロン周波数 (cyclotron frequency)  $\omega_c = qB/m$  で円運動することがわかる<sup>1</sup>．また，初期条件

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ v_x = v_\perp \\ v_y = 0 \end{cases} \quad \text{at } t = 0 \quad (3.2.7)$$

の元で，この粒子の軌道は，

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_\perp}{\omega_c} \sin(\omega_c t) \\ y(t) = \frac{v_\perp}{\omega_c} (\cos(\omega_c t) - 1) \end{cases} \quad (3.2.8)$$

となる．したがって，

$$x^2 + \left(y + \frac{v_\perp}{\omega_c}\right)^2 = \left(\frac{v_\perp}{\omega_c}\right)^2 \quad (3.2.9)$$

が成り立つので，この粒子の円運動の旋回中心は

$$(x_g, y_g) = \left(0, -\frac{v_\perp}{\omega_c}\right) \quad (3.2.10)$$

で旋回半径は

$$r_L = \frac{v_\perp}{|\omega_c|} \quad (3.2.11)$$

である．

まとめると，電荷数  $Z$  の粒子のサイクロトロン周波数は

$$\omega_{cj} = \frac{ZeB}{m_j} \quad (3.2.12)$$

である<sup>2</sup>．サイクロトロン半径は

$$r_{Lj} = \frac{m_j v_\perp}{ZeB} \quad (3.2.13)$$

である．また，熱速度  $v_{thj}$  を用いて

$$r_{Lj} = \frac{m_j v_{thj}}{ZeB} \quad (3.2.14)$$

と表すことが多い． $z$  軸方向には力は働かないので

$$v_\parallel = \dot{z} = \text{const.} \quad (3.2.15)$$

$$z = z_0 + v_\parallel t \quad (3.2.16)$$

である．つまり，全体としてはらせん運動をしている．

### 3.2.2 ドリフト運動

ここでは一様磁場に加えて電場や重力などが働く場合の粒子の運動や磁場が空間的に変化する場合の粒子の運動を考える．

<sup>1</sup>通常，サイクロトロン周波数という場合には，電荷  $q$  の絶対値をとって， $\omega_c = |q|B/m$  とすることが多い．

<sup>2</sup> $j$  はイオンか電子かを示す．

### 3.2.2.1 $E \times B$ ドリフト

磁場が  $z$  軸方向に向いているとする。前節より粒子は  $xy$  平面上を円運動するのであった。ここに電場を  $x$  方向に加える。このとき、粒子は一方では加速されもう一方では減速される。つまり、上方では  $V_0 + V_1$ 、下方では  $V_0 - V_1$  のように異なってしまう。速度が  $V_0 + V_1$  のときは旋回半径が大きく、 $V_0 - V_1$  のときは旋回半径が小さくなる。よって、旋回中心が下方へドリフトしていく。

このときのドリフト速度は

$$\mathbf{v}_{gE} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (3.2.17)$$

である。この、ドリフト速度の式は以下のように導かれる。まず、粒子の運動方程式は

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} + q\mathbf{E} \quad (3.2.18)$$

である。この運動を旋回中心の運動と旋回中心のまわりの Larmor 運動に分ける。

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{gc} + \mathbf{r}_c \quad (3.2.19)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{gc} + \mathbf{v}_c \quad (3.2.20)$$

式 (3.2.20) を式 (3.2.18) に代入すると

$$m \frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v}_{gc} + \mathbf{v}_c) \times \mathbf{B} \quad (3.2.21)$$

となる。ここで  $\mathbf{v}_{gc}$  が一定であることを用いた。整理すると、

$$m \frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = q(\mathbf{v}_c \times \mathbf{B}) + q\mathbf{E} + q(\mathbf{v}_{gc} \times \mathbf{B}) \quad (3.2.22)$$

である。左辺と右辺の第 1 項はサイクロトロン運動、右辺の第 2 項と第 3 項は旋回中心の運動を表している。旋回中心の運動に注目すると、

$$\mathbf{0} = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v}_{gc} \times \mathbf{B}) \quad (3.2.23)$$

この両辺を  $q$  で割り、 $\mathbf{B}$  を外積する。ベクトル解析の公式より

$$B^2 \mathbf{v}_{gc} = -\mathbf{B} \times \mathbf{E} \quad (3.2.24)$$

が得られる。よって、

$$\mathbf{v}_{gc} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (3.2.25)$$

である。

### 3.2.2.2 一般的な力によるドリフト

$\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  ドリフトによる旋回中心の移動は、電場による力によって粒子が加速 or 減速され、そのため場所によって Larmor 半径が変わることによるものであった。この考え方は他の場合にも適用できる。

一般的な力  $\mathbf{F}$  のときは

$$q\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F} \quad (3.2.26)$$

とすればよく、ドリフト速度は

$$\mathbf{v}_F = \frac{1}{q} \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (3.2.27)$$

である。例えば重力の場合は

$$\mathbf{v}_F = \frac{m}{q} \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (3.2.28)$$

となる。

### 3.2.2.3 非一様磁場中でのドリフト

**3.2.2.3.1 磁場勾配ドリフト** 磁場勾配ドリフト (grad- $B$  drift motion) を考える。磁場が  $z$  方向で、磁場勾配が  $x$  方向にある場合を考える。以下にそれを見る。

非一様磁場中では Lorentz 力の大きさが位置ごとに変化する。磁場が大きいところでは旋回半径は大きく、磁場が小さいところでは旋回半径は小さくなる。よって、 $\mathbf{B}, \nabla B$  の両方に垂直な方向にドリフト運動が生じる。また、イオンと電子はドリフトの縫合が逆なので電流が生じる。**磁場勾配ドリフト速度** (gradient- $B$  drift velocity) は

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \pm \frac{1}{2} v_{\perp} r_L \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2} \quad (3.2.29)$$

である。

以下に導出を行う。まず、粒子の運動方程式の各成分は

$$\begin{cases} m \frac{dv_x}{dt} = qv_y B \\ m \frac{dv_y}{dt} = -v_x B \\ m \frac{dv_z}{dt} = 0 \end{cases} \quad (3.2.30)$$

である。ここで  $y$  方向について着目する。

$$m \frac{dv_y}{dt} = -qv_x B \quad (3.2.31)$$

磁場を原点周りで Taylor 展開する。

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (3.2.32)$$

$$B_z = B_0 + y \frac{\partial B_z}{\partial y} \quad (3.2.33)$$

ここで、初期条件より

$$v_x = v_{\perp} \cos(\omega_c t) \quad (3.2.34)$$

$$y = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} \cos(\omega_c t) \quad (3.2.35)$$

である。よって、

$$m \frac{dv_y}{dt} = -qv_x B \quad (3.2.36)$$

$$= -qv_{\perp} \cos(\omega_c t) \left( B_0 + \frac{v_{\perp}}{\omega_c} \cos(\omega_c t) \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) \quad (3.2.37)$$

$$(3.2.38)$$

第 1 項は通常の Lorentz 力なので、第 2 項に着目する。

一般的な力  $\mathbf{F}$  によるドリフトの式より、

$$\mathbf{v}_{gc} = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (3.2.39)$$

$$= \mp \frac{1}{2} \frac{r_L v_{\perp}}{B} \frac{\partial B_z}{\partial y} \mathbf{e}_x \quad (3.2.40)$$

$$= \mp \frac{1}{2} \frac{v_{\perp} r_{\perp}}{B} \frac{\partial B_z}{\partial y} \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z \quad (3.2.41)$$

$$= \mp \frac{1}{2} v_{\perp} r_L \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2} \quad (3.2.42)$$

が得られる。

**3.2.2.3.2 曲率ドリフト** 曲率ドリフト (curvature drift) を考える。磁力線が湾曲している場合には、磁場勾配ドリフトに加えて、遠心力に起因する曲率ドリフトが生じる。

粒子が感じる平均的な遠心力は

$$\mathbf{F}_{cf} = \frac{mv_{\parallel}^2}{R_c} \mathbf{e}_r = mv_{\parallel}^2 \frac{\mathbf{R}_c}{R_c^2} \quad (3.2.43)$$

である。よって、一般的な力によるドリフト速度の式より、曲率ドリフト速度は

$$\mathbf{v}_R = \frac{mv_{\parallel}^2}{qB^2} \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{R_c^2} \quad (3.2.44)$$

となる。

次に、磁場勾配を曲率を使って表す。電流  $I$  のまわりには

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_c} \quad (3.2.45)$$

$$\nabla B \parallel \mathbf{e}_r \quad (3.2.46)$$

となる。よって、

$$\frac{\nabla B}{B} = -\frac{\mathbf{R}_c}{R_c^2} \quad (3.2.47)$$

が得られる。したがって、磁場勾配ドリフトは、

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \frac{1}{2} \frac{m}{q} v_{\perp}^2 \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{R_c^2 B^2} \quad (3.2.48)$$

となる。

以上より、曲率ドリフトと磁場勾配ドリフトの和である**磁気ドリフト** (magnetic drift) は

$$\mathbf{v}_R + \mathbf{v}_{\nabla B} = \frac{1}{2} \left( v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2 \right) \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{R_c^2 B^2} \quad (3.2.49)$$

である。磁場勾配で表すと、

$$\mathbf{v}_R + \mathbf{v}_{\nabla B} = \frac{m}{qB} \left( v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2 \right) \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2} \quad (3.2.50)$$

となる。しかし、上の式を見てわかるように、電子とイオンでドリフトの向きが逆である。よって、荷電分離により電場が発生する。そのため、 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  ドリフトが生じる。これは外側に向いている。したがって、プラズマ全体が損失してしまう。つまり、単純なトーラス磁場では、プラズマの閉じ込めは不完全である。

## 3.2.3 磁気鏡

### 3.2.3.1 磁気鏡とは

**磁気鏡** (magnetic mirror) は、磁場が強いところに荷電粒子が近づくと、そこで反射される現象をいう<sup>3</sup>。

### 3.2.3.2 磁気モーメント

磁気ミラー配位での粒子の運動を考えるための準備として、ここでは荷電粒子が有する磁気モーメントについて述べる。また、磁気モーメント及びその断熱不変性は、磁気ミラー配位に限らずいろいろな磁場配位での運動を考えるうえで重要となる。

磁化  $m$  が長さ  $L$  離れて存在しているとき、磁気モーメント

$$\mu = 2mL \quad (3.2.51)$$

<sup>3</sup>地球は巨大な磁気鏡である。

である。円電流による磁気モーメントは

$$\mu = I \times S \quad (3.2.52)$$

である。

ここで、磁場  $B$  中の荷電粒子を考える。荷電粒子は半径  $r_L$  でサイクロトロン運動をしているので

$$S = \pi \times r_L^2 \quad (3.2.53)$$

である。また、電流は、巡回時間を  $T_c$  として

$$I = e \times \left( \frac{1}{T_c} \right) \quad (3.2.54)$$

である。よって、荷電粒子のつくる磁気モーメントは

$$\mu = IS = \frac{e\pi r_L^2}{T_c} \quad (3.2.55)$$

となる。さらに、

$$r_L = v_{\perp} / \omega_c, \quad T_c = 2\pi / \omega_c, \quad \omega_c = eB/m \quad (3.2.56)$$

より、

$$\mu = \frac{(1/2)mv_{\perp}^2}{B} \quad (3.2.57)$$

となる。もともとの磁場と反対方向であることに注意。反磁性である。

磁場の空間的時期的変化が緩やかなとき、磁気モーメントは保存される<sup>4</sup>。

### 3.2.3.3 磁気鏡による粒子反射の物理機構

粒子は磁力線に沿って Larmor 旋回しながら磁場の強い領域へと運動していく。このとき、なぜ、粒子の反射が生じるのか。

円柱座標系  $(r, \theta, z)$  を考える。軸対称で  $\frac{\partial B}{\partial \theta} = 0$  とする。磁場の成分を  $\mathbf{B} = (B_r, 0, B_z)$  とする。粒子の感じる力の  $z$  成分は

$$F_z = v_{\theta} B_r \quad (3.2.58)$$

である。

磁束密度に関する Gauss の法則より、

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial r B_r}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (3.2.59)$$

$r = 0$  の近傍を考え、 $\frac{\partial B_z}{\partial z} = \text{const.}$  とすると、

$$r B_r \simeq -\frac{1}{2} r^2 \left[ \frac{\partial B_z}{\partial z} \right]_{r=0} \quad (3.2.60)$$

磁場の  $r$  成分は  $r$  に比例する。

$$\mathbf{F} = q[v_{\theta} \mathbf{e}_r + (v_z B_r - v_r B_z) \mathbf{e}_{\theta} - v_{\theta} B_r \mathbf{e}_z] \quad (3.2.61)$$

であるのでよって、 $F_z$  は

$$F_z = \frac{1}{2} q v_{\theta} r \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\mu \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (3.2.62)$$

<sup>4</sup>項 3.2.3.4 にて述べる。

である。つまり、粒子は磁場勾配と反対方向の力を受ける。これにより反射が起きる。ここで、以下に示すように  $\frac{1}{2}qv_{\theta}r = -\mu$  を用いた。

$$v_{\theta} = \begin{cases} -v_{\perp} \text{ ion} \\ v_{\perp} \text{ electron} \end{cases} \quad (3.2.63)$$

$$r \rightarrow \frac{mv_{\perp} r}{eB} \quad (3.2.64)$$

$$q = \begin{cases} +e \text{ ion} \\ -e \text{ electron} \end{cases} \quad (3.2.65)$$

$$F_z = -\frac{1}{2}qv_{\theta}r \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{mv_{\perp}^2}{2B} \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\mu \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (3.2.66)$$

となる。一般には

$$F_{\parallel} = -\mu \nabla_{\parallel} B \quad (3.2.67)$$

である<sup>5</sup>。この力が、磁気鏡、すなわち磁場の強い領域での粒子の反射の物理的機構となる。

#### 3.2.3.4 磁気モーメントの保存性の証明

$d\mu/dt = 0$  を示す。

粒子の全運動エネルギーは

$$W = \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}mv_{\perp}^2 \quad (3.2.68)$$

$$= \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 + \mu B \quad (3.2.69)$$

と書ける<sup>6</sup>。時間微分は

$$\frac{dW}{dt} = mv_{\parallel} \frac{dv_{\parallel}}{dt} + \frac{d\mu B}{dt} \quad (3.2.70)$$

である。磁力線方向の距離を  $s$  とすると、

$$v_{\parallel} = \frac{ds}{dt} \quad (3.2.71)$$

だから、

$$m \frac{dv_{\parallel}}{dt} = F_{\parallel} \quad (3.2.72)$$

である。式 (3.2.62) より、

$$F_{\parallel} = -\mu \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (3.2.73)$$

である。以上より、

$$\frac{dW}{dt} = -\mu \frac{dB_z}{dz} + \frac{d\mu B}{dt} \quad (3.2.74)$$

が得られる。さらに、2 項目の微分は

$$\frac{d\mu B}{dt} = B \frac{d\mu}{dt} + \mu \frac{dB}{dt} \quad (3.2.75)$$

<sup>5</sup>  $F_{\parallel}$  は Mirror Force と呼ばれる。

<sup>6</sup> 変形には式 (3.2.57) を用いた。

だから,

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d\mu}{dt} B \quad (3.2.76)$$

となる. 全エネルギーは保存されるから,

$$\frac{dW}{dt} = 0 \implies \frac{d\mu}{dt} = 0 \quad (3.2.77)$$

を得る. したがって, 磁気モーメントは保存される<sup>7 89</sup>.

以下ではミラー磁場による補足の条件を導出する.

再び, 全エネルギーについて考えると,

$$W = \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 + \mu B(z) = \text{const.} \quad (3.2.79)$$

と書ける. 磁気鏡の長さを  $2L$  とする.  $B(0) = B_{\min}, B(\pm L) = B_{\max}$  である. このとき,

$$\frac{1}{2}mv_{\parallel 0}^2 + \mu B_{\min} = \frac{1}{2}mv_{\parallel L}^2 + \mu B_L \quad (3.2.80)$$

が成り立つ. これを整理すると,

$$v_{\parallel L} = \sqrt{\frac{2\mu B(0)}{m} \left[ 1 - \frac{B(L)}{B(0)} \right] + v_{\parallel 0}^2} \quad (3.2.81)$$

を得る. 反射が起きる条件は根号の中が負であることから,

$$\frac{2\mu B(0)}{m} \left[ 1 - \frac{B(L)}{B(0)} \right] + v_{\parallel 0}^2 \leq 0 \quad (3.2.82)$$

である. ここで,  $\mu = mv_{\perp 0}^2/2B(0)$  を用いると,

$$\frac{v_{\parallel 0}^2}{v_{\perp 0}^2} \leq \frac{B(L)}{B(0)} - 1 \quad (3.2.83)$$

が反射が起きるための条件である.

ミラー磁場による反射条件

$$\frac{v_{\parallel 0}^2}{v_{\perp 0}^2} \leq \frac{B_{\max}}{B_{\min}} - 1 \quad (3.2.84)$$

この条件から, 磁力線方向の速度成分が小さい粒子ほど, 磁気鏡内に閉じ込められやすい. また, 磁束密度の最大値と最小値の比を**磁気ミラー比**という.

磁気ミラー比

$$R_m = \frac{B_{\max}}{B_{\min}} \quad (3.2.85)$$

磁気ミラー比が大きいほど閉じ込められやすい.

<sup>7</sup> 保存性を導く過程で, 磁場の変化が緩やかであることを仮定した. 定量的には, 磁場の変化の特徴的長さが, Larmor 半径に比較して大きいことが必要となる.

$$r_L \ll L = \left[ \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial z} \right] \quad (3.2.78)$$

<sup>8</sup> 実には, 磁場の時間変化がゆっくりであることも仮定している.

<sup>9</sup> これらの過程は多くの場合で成り立つ.



逆に補足されないための条件は

$$\frac{v_{\parallel 0}^2}{v_{\perp 0}^2} \geq \frac{B_{\max}}{B_{\min}} - 1 \quad (3.2.86)$$

である．これを  $v_x, v_y, v_z$  空間に図示すると， $v_x^2 + v_y^2 = v_{\perp}^2, v_z = v_{\parallel}$  だから，円錐を描く．この円錐を**ロス・コーン** (Loss Cone) という．この円錐に含まれるような速度を持つ粒子は補足されず損失してしまう．

## Chapter 4

# 流体モデルによるプラズマのモデル化

### 4.1 はじめに

本章ではプラズマの**流体モデル** (Fluid Model) によるモデル化を進める．流体モデルは一般に以下の3つの方程式及び Maxwell 方程式に基礎を置く．

1. 密度連続の式
2. 運動方程式
3. エネルギー方程式

流体モデルはプラズマの集団的・巨視的な振る舞いの理解に役立つ．

### 4.2 密度連続の式

プラズマの存在する空間内に，閉曲面  $S$  を考え，その体積を  $V$  とする．体積中の粒子の総数  $N$  を考える．密度を  $n$  とする．粒子 (数) 密度の連続の式は

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) = 0 \quad (4.2.1)$$

である．ここで， $\mathbf{u}$  はプラズマの流れの平均速度ベクトルである．粒子の生成あるいは消滅がある場合は生成消滅項  $S_i$  を右辺に加える<sup>1</sup>．

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) = S_i \quad (4.2.2)$$

また，質量密度の連続の式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) = 0 \quad (4.2.3)$$

である．

場の考え方に慣れるために，波形を保ったまま，一定速度で海岸に打ち寄せる波を例に考える．簡単のために1次元とし  $\rho(x, t)$ ，流体の速度は空間的，時間的に変化しないとする  $u_x = \text{const.}$ <sup>2</sup>．これらを粒子密度の連続の式に代入すると，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (4.2.4)$$

が得られる．式 (4.2.4) の解は

$$\rho(x, t) = \rho(x - u_x t) = \text{const.} \quad (4.2.5)$$

---

<sup>1</sup>  $S_i > 0$  で生成， $S_i < 0$  で消滅．

<sup>2</sup> 一般的には空間と時間に依存する．

である．これは波形を保ったまま， $x$  方向に伝わる波を表している．図 4.2.4 の第 1 項は固定した位置における密度の時間変化，第 2 項は流体の対流による密度の変化を表している．つまり，生成・消滅がないとき，空間の各点での密度変化は流体の対流による流入・流出によって生じる．

また，波の頂点にいる観測者から見ると，

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (4.2.6)$$

なので，

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (4.2.7)$$

つまり，

$$\left[ \frac{\partial}{\partial t} + u_x \frac{\partial}{\partial x} \right] \rho = 0 \quad (4.2.8)$$

である．この，

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_x \frac{\partial}{\partial x} \quad (4.2.9)$$

を対流微分 (Convective Derivative) という．

より一般的には，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (4.2.10)$$

である．ここで，非圧縮性流体  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  を考えると，

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla \rho \quad (4.2.11)$$

よって，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0 \quad (4.2.12)$$

である．

また，次節では以下の **Euler 方程式** を導出する．

$$mn \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \right] \mathbf{u} = nq(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \nabla p \quad (4.2.13)$$

また，対流微分は

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \quad (4.2.14)$$

とも書かれる．

## 4.3 流体の運動方程式

粒子 1 個当たりの運動量は  $m\mathbf{u}$  である．単位体積当たりの運動量は  $n m \mathbf{u}$  である．ここで，粒子の質量を  $m$ ，粒子の数密度を  $n$  とする．体積  $V$  に含まれる粒子が持つ全体の運動量  $\mathbf{M}$  は  $\mathbf{M} = \int_V n m \mathbf{u} dV$  である．

$\mathbf{M}$  の時間変化を考える．時間変化に寄与するのは，(1) 外力による運動量の変化 (2) 面  $S$  を通しての流体の流入・流出 (3) 面  $S$  を介して，面の外側の流体が及ぼす圧力，がある．

### 4.3.1 外力による運動量の時間変化

位置  $\mathbf{r}$  時刻  $t$  において流体粒子 1 個あたりに働く力を  $\mathbf{f}^{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$  とする<sup>3</sup>。体積  $V$  全体に働く力は、流体密度を  $n(\mathbf{r}, t)$  とすると、 $\int_V n(\mathbf{r}, t) \mathbf{f}^{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) dV$  である。よって、 $\mathbf{M}$  の時間変化は、

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (nm\mathbf{u}) dV = \int_V n(\mathbf{r}, t) \mathbf{f}^{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) dV \quad (4.3.1)$$

である。したがって、この式が恒等的に成り立つのは

$$\frac{\partial}{\partial t} (nm\mathbf{u}) = n\mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (4.3.2)$$

が満たされるときである。密度が時間的に変化しない時、

$$\frac{\partial}{\partial t} (m\mathbf{u}(\mathbf{u}, t)) = \mathbf{f}^{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) \quad (4.3.3)$$

である。

### 4.3.2 運動量の流入・流出

体積  $V$  中の粒子総数  $N$  の時間変化を考える。

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \int_S n\mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} \quad (4.3.4)$$

である。ここで、 $\mathbf{\Gamma} = n\mathbf{u}$  を粒子束密度 (Particle Flux Density) という。表面を通しての運動量の流入・流出は、 $(m\mathbf{u})(n\mathbf{u} \cdot d\mathbf{S})$  である。したがって、 $\mathbf{M}$  の時間変化は、

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = - \int_S (m\mathbf{u})(n\mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}) \quad (4.3.5)$$

である。左辺は  $\int_V \frac{\partial}{\partial t} (nm\mathbf{u}) dV$  と書けるので、 $x$  成分で考えると、Gauss の定理を使うと、

$$\int_V \left[ \frac{\partial}{\partial t} (mnu_x) + \nabla \cdot (mnu_x \mathbf{u}) \right] dV = 0 \quad (4.3.6)$$

である。よって、各成分は

$$\frac{\partial}{\partial t} (mnu_x) + \nabla \cdot (mnu_x \mathbf{u}) = 0 \quad (4.3.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (mnu_y) + \nabla \cdot (mnu_y \mathbf{u}) = 0 \quad (4.3.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (mnu_z) + \nabla \cdot (mnu_z \mathbf{u}) = 0 \quad (4.3.9)$$

である。ここで  $\nabla \cdot (mnu_x \mathbf{u})$  の物理的意味を考察する。右辺に移項すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} (mnu_x) = -\nabla \cdot (mnu_x \mathbf{u}) \quad (4.3.10)$$

と書けるので、 $-\nabla \cdot (mnu_x \mathbf{u})$  は、流体の単位体積あたりに働く力に相当する。さらにベクトル解析の公式を用いて展開すると、

$$\nabla \cdot (mnu_x \mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial x} (mnu_x u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (mnu_x u_y) + \frac{\partial}{\partial z} (mnu_x u_z) \quad (4.3.11)$$

となる。ここで、運動量流速密度 (Momentum Flux Density) を  $P_{ij} = mnu_i u_j$  を用いると、

$$\nabla \cdot (mnu_x \mathbf{u}) = \frac{\partial}{\partial x} P_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} P_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} P_{xz} \quad (4.3.12)$$

と書ける<sup>4</sup>。 $-\frac{\partial P_{xx}}{\partial x}$  は外力と等価な働きを持つ。

<sup>3</sup>例： $\mathbf{f}^{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) = q[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]$

<sup>4</sup> $P_{xx} = mnu_x u_x = (mu_x)(nu_x)$  と書けるので、これは単位時間に  $x$  軸に垂直な単位面積を横切る  $x$  方向の運動量を表している。また、 $\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} [\frac{\text{N}}{\text{m}^3}]$  は流体の単位体積あたりに働く力に相当する。

次に,  $P_{xy}, P_{xz}, \frac{\partial P_{xy}}{\partial y}, \frac{\partial P_{xz}}{\partial z}$  の物理的意味を考えよう.

$$P_{xy} = mn u_x u_y = (m u_x)(n u_y) \quad (4.3.13)$$

と書ける.  $m u_x$  は粒子 1 個が持つ  $x$  方向の運動量.  $n u_y$  は単位時間に,  $y$  軸に垂直な単位面積を横切る粒子の個数である. よって,  $P_{xy}$  は単位時間に,  $y$  軸に垂直な単位面積を横切る  $x$  方向の運動量である. 同様に,  $P_{xz}$  は単位時間に,  $z$  軸に垂直な単位面積を横切る  $x$  方向の運動量である.

以上を踏まえると, 運動量の流入・流出は次のように表現できる.

$$\frac{\partial}{\partial t} mn \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{xx} & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & P_{yy} & P_{yz} \\ P_{zx} & P_{zy} & P_{zz} \end{pmatrix} = 0 \quad (4.3.14)$$

つまり,

$$\frac{\partial}{\partial t} mn \mathbf{u} + \nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{P} = 0 \quad (4.3.15)$$

である. ここで,  $\overset{\leftrightarrow}{P}$  は運動量流速密度を成分とするテンソルである. また,  $\overset{\leftrightarrow}{P}$  は対称テンソルであり,  $P_{ij} = P_{ji}$  を満たす.

ところで, 粒子数の保存則は

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Gamma} = 0 \quad (4.3.16)$$

と書けるのであった. 運動量の流入・流出の式は

$$\frac{\partial}{\partial t} mn \mathbf{u} + \nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{P} = 0 \quad (4.3.17)$$

である. よって式 (4.3.16) と式 (4.3.17) を比較すると, 式 (4.3.17) は流体の運動量密度の保存則を表していることがわかる.

(1) 外力によって生じる運動量の時間変化と (2) 運動量の流入・流出によって生じる運動量の時間変化の両方が存在する場合についてまとめると

$$\frac{\partial}{\partial t} (mn \mathbf{u}) + \nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{P} = \mathbf{F}^{\text{ext}} = n \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (4.3.18)$$

となる.

### 4.3.3 圧力勾配による力

辺が  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  の立方体を考える. この微小体積に働く  $x$  方向の正味の力は, 圧力を  $p$  として,

$$-\frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \mathbf{i} \quad (4.3.19)$$

である. 同様に,  $y, z$  方向についても,

$$-\frac{\partial p}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z \mathbf{j} \quad (4.3.20)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \mathbf{k} \quad (4.3.21)$$

となる. よって, 立方体全体に働く力は,

$$-\left[ \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k} \right] \Delta x \Delta y \Delta z \quad (4.3.22)$$

である.  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$  とすると,  $-\nabla p \Delta V$  と書けるので, 単位体積あたりに働く力は

$$\mathbf{F}^{\text{p}} = -\nabla p \quad (4.3.23)$$

である．以上で求めた力は流体の各点  $(x, y, z)$  に単位体積当たりに働く力と考えることができる．よって，式 (4.3.18) は

$$\frac{\partial}{\partial t}(mn\mathbf{u}) + \nabla \overleftrightarrow{P} = \mathbf{F}^{\text{ext}} + \mathbf{F}^{\text{p}} \quad (4.3.24)$$

と書ける<sup>5</sup>．

#### 4.3.4 運動方程式の保存形

式 (4.3.24) は，(1) 外力 (2) 運動量の流入・流出 (3) 圧力の全てを考慮した運動量密度の時間変化を表す式である．

$$\frac{\partial}{\partial t}(mn\mathbf{u}) = \mathbf{F}^{\text{ext}} - \nabla \overleftrightarrow{P} - \nabla p \quad (4.3.25)$$

ここで，

$$\overleftrightarrow{p} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (4.3.26)$$

を定義すると，

$$\nabla p = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial y} & \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (4.3.27)$$

と書ける．よって，

$$\frac{\partial}{\partial t}(mn\mathbf{u}) = \mathbf{F}^{\text{ext}} - \nabla \overleftrightarrow{P} - \nabla \overleftrightarrow{\Pi} = \mathbf{F}^{\text{ext}} - \nabla \overleftrightarrow{\Pi} \quad (4.3.28)$$

が得られる．これを整理した，

$$\frac{\partial}{\partial t}(mn\mathbf{u}) + \nabla \overleftrightarrow{\Pi} = \mathbf{F}^{\text{ext}} \quad (4.3.29)$$

が保存系の運動方程式である．

#### 4.3.5 Euler の運動方程式

$$\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{xz}}{\partial z} = mu_x \nabla \cdot (n\mathbf{u}) + mn(\mathbf{u} \cdot \nabla)u_x \quad (4.3.30)$$

$y, z$  に関しても同様である．また， $\overleftrightarrow{P}$  は

$$\nabla \overleftrightarrow{P} = m\mathbf{u} \nabla \cdot (n\mathbf{u}) + mn(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \quad (4.3.31)$$

これらを式 (4.3.29) に代入して整理すると

$$mn \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + m\mathbf{u} \left[ \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) \right] + mn(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \mathbf{F}^{\text{ext}} - \nabla p \quad (4.3.32)$$

[] 内は密度連続の式より 0 である．よって，Euler の運動方程式が得られる．

$$mn \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + mn(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \mathbf{F}^{\text{ext}} - \nabla p \quad (4.3.33)$$

また， $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$  を用いると，

$$mn \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F}^{\text{ext}} - \nabla p \quad (4.3.34)$$

とも書ける．

<sup>5</sup> 付録 A にて，圧力勾配による力の微視的起源を運動論に基づき考察する．

## 4.4 流体のエネルギー方程式

流体の運動方程式

$$mn \left[ \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \right] \mathbf{u} = \mathbf{F}^{\text{ext}} - \nabla p \quad (4.4.1)$$

に対し、 $\mathbf{u}$  との内積を取る.

$$mn\mathbf{u} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + mn\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}^{\text{ext}} - \mathbf{u} \cdot \nabla p \quad (4.4.2)$$

第1項は

$$\frac{\partial \frac{mn\mathbf{u}^2}{2}}{\partial t} - \frac{mu^2}{2} \frac{\partial n}{\partial t} \quad (4.4.3)$$

第2項は

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \left[ \frac{mn\mathbf{u}^2}{2} \right] - \frac{1}{2} mu^2 (\mathbf{u} \cdot \nabla) n \quad (4.4.4)$$

と書ける. よって,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} mu^2 n \right) + \nabla \cdot \left[ \left( \frac{1}{2} mu^2 \right) (n\mathbf{u}) \right] = \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}^{\text{ext}} - \mathbf{u} \cdot \nabla p \quad (4.4.5)$$

が得られる. 第1項は単位体積当たりの流体としての運動エネルギー (運動エネルギー密度), 第2項は単位時間単位面積を通過する運動エネルギーである (運動エネルギー流速密度).

式 (4.4.5) において,  $\mathbf{F} = 0, \nabla p = 0$  の場合を考える. 体積分する.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{2} mu^2 n dV + \int_S \left( \frac{1}{2} mu^2 \right) (n\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (4.4.6)$$

が得られる. 第1項を  $W_k$  とおくと,

$$\frac{\partial W_k}{\partial t} = - \int_S \left( \frac{1}{2} mu^2 \right) (n\mathbf{u}) \cdot d\mathbf{S} \quad (4.4.7)$$

と表される. また, 式 (4.4.5) は流体の運動エネルギー密度の時間変化と考えられる. つまり, 外力, 圧力勾配が無い場合には流体の運動エネルギー密度は保存される.

しかし, プラズマ粒子は微視的に見るとランダムな熱運動をしている. よって, 内部エネルギーも考慮する必要がある. プラズマ流体の内部エネルギー密度は  $w_{\text{th}} = \varepsilon_{\text{th}} \times n = \frac{3}{2} nk_{\text{B}}T$  である. 内部エネルギー密度の時間変化は以下のように議論できる.

$$\frac{\partial \varepsilon_{\text{th}}}{\partial t} = \varepsilon_{\text{th}} \left[ \frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot (n\mathbf{u}) \right] + n \left[ \frac{\partial \varepsilon_{\text{th}}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon_{\text{th}} \right] \quad (4.4.8)$$

第1項の  $[\ ]$  内を  $S_i$  とおく. 第2項は流れと共に動く座標系から見た内部エネルギーの変化を表し,  $\frac{D\varepsilon_{\text{th}}}{Dt}$  と書ける. これは, 圧縮性流体で流体の圧縮・膨張による体積変化が断熱的に行われるときには,

$$\frac{D\varepsilon_{\text{th}}}{Dt} = - \frac{p \nabla \cdot \mathbf{u}}{n} \quad (4.4.9)$$

よって,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_{\text{th}} n) + \nabla \cdot (\varepsilon_{\text{th}} n\mathbf{u}) = -p \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (4.4.10)$$

が得られる.

運動エネルギーも考慮すると、エネルギー密度は

$$W = \left( \frac{1}{2} m u^2 + \varepsilon_{\text{th}} \right) n = \frac{1}{2} m n u^2 + \frac{3}{2} n k_{\text{B}} T \quad (4.4.11)$$

である。この時間変化は、

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot (W \mathbf{u} + p \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}^{\text{ext}} \quad (4.4.12)$$

である。

## 4.5 流体モデルのまとめ

密度連続の式

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \gamma = S_i \quad (4.5.1)$$

$n$  は粒子密度,  $\gamma = n \mathbf{u}$  は粒子束密度,  $S_i$  は生成消滅項.

運動方程式

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{\Pi} = \mathbf{F}^{\text{ext}} \quad (4.5.2)$$

$\mathbf{M} = m n \mathbf{u}$  は運動量密度,  $\overset{\leftrightarrow}{\Pi} = m n \mathbf{u} \mathbf{u} + p \delta_{ij}$  は運動量流束密度,  $\mathbf{F}^{\text{ext}}$  は外力.

エネルギー方程式

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{F}^{\text{ext}} \quad (4.5.3)$$

$W = \frac{1}{2} m n u^2 + \frac{3}{2} n k_{\text{B}} T$  はエネルギー密度,  $\mathbf{Q} = W \mathbf{u} + p \mathbf{u}$  はエネルギー流束密度.



# Appendix A

## 圧力項に関する運動量的考察

小節 4.3.2 ではプラズマ粒子が平均速度  $\mathbf{u}$  で全て同じ速度で運動していることを仮定した。しかし、実際には粒子の速度は

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \tilde{\mathbf{v}} \quad (\text{A.0.1})$$

となる。ここで、 $\tilde{\mathbf{v}}$  は平均速度  $\mathbf{u}$  からのずれを表す。微視的な熱運動の速度である。このとき、小節 4.3.2 で導出した運動量流速密度は、個々の粒子について、

$$mnv_i v_j = mn(u_i + \tilde{v}_i)(u_j + \tilde{v}_j) \quad (\text{A.0.2})$$

と書ける。

今、プラズマの速度分布関数  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  が平均速度  $\mathbf{u}$  を持つ次の **Shifted Maxwellian** で表されたとする。

$$f(\mathbf{r}, v_x, v_y, v_z) = n_e(\mathbf{r}) \left[ \frac{m_e}{2\pi k_B T_e} \right]^{3/2} \exp \left( -\frac{m_e}{2k_B T_e} [(v_x - u_x)^2 + (v_y - u_y)^2 + (v_z - u_z)^2] \right) \quad (\text{A.0.3})$$

このとき、式 (A.0.2) の平均は以下のように計算される。

$$\langle P_{ij} \rangle = mn \langle v_i v_j \rangle = mn \langle (u_i + \tilde{v}_i)(u_j + \tilde{v}_j) \rangle = mn \langle u_i u_j \rangle + mn u_i \langle \tilde{v}_j \rangle + mn u_j \langle \tilde{v}_i \rangle + mn \langle \tilde{v}_i \tilde{v}_j \rangle \quad (\text{A.0.4})$$

$$= mn u_i u_j + mn \langle \tilde{v}_i \tilde{v}_j \rangle \quad (\text{A.0.5})$$

第 1 項は小節 4.3.2 で考えた平均的な流れによる運動量流速密度、第 2 項はランダムな熱運動に起因する運動量の流れである。また、Maxwell 分布の場合には

$$\langle \tilde{v}_i \tilde{v}_j \rangle = \frac{1}{3} \langle \tilde{v}^2 \rangle \delta_{ij} \quad (\text{A.0.6})$$

が成り立つ。したがって、

$$\langle P_{ij} \rangle = mn u_i u_j + \frac{1}{3} mn \langle \tilde{v}^2 \rangle \delta_{ij} = mn u_i u_j + nk_B T \delta_{ij} = mn u_i u_j + p \delta_{ij} \quad (\text{A.0.7})$$

が得られる。これを行列で表すと一般化された運動量流速密度テンソル

$$\overset{\leftrightarrow}{\Pi} = \overset{\leftrightarrow}{P} + \overset{\leftrightarrow}{p} = \begin{pmatrix} P_{xx} + p & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & P_{yy} + p & P_{yz} \\ P_{zx} & P_{zy} & P_{zz} + p \end{pmatrix} \quad (\text{A.0.8})$$

と書くことができる。

## Appendix B

### 演習問題

secret

# Index

Euler の運動方程式, 29  
Euler 方程式, 26

Mirror Force, 22

Shifted Maxwellian, 32

運動量流速密度, 27  
運動論的モデル, 16

エネルギー増倍率, 4

核融合, 3

曲率ドリフト, 20

サイクロトロン運動, 16  
サイクロトロン周波数, 17

磁気鏡, 20  
磁気ドリフト, 20  
磁気ミラー比, 23  
磁気モーメント, 20  
磁場勾配ドリフト, 19  
磁場勾配ドリフト速度, 19  
準中性, 6  
衝突電離, 11

旋回中心, 17  
旋回半径, 17

対流微分, 26

Debye 球, 8  
Debye 遮蔽長, 7  
Debye 遮蔽ファクター, 7  
Debye ポテンシャル, 7

等方分布, 6

光電離, 11

プラズマ, 3  
プラズマ振動数, 10  
プラズマ・パラメータ, 8

Bohr 半径, 11  
保存系の運動方程式, 29

Maxwell 分布, 5

ミラー磁場, 23

揺動電場, 6

粒子集団, 3  
粒子束密度, 27  
流体モデル, 16, 25

ローソン条件, 4  
ロス・コーン, 24