この章ではプラズマがどのような運動をするかを学ぶ.

0.1　はじめに

プラズマ輸送の解析には**流体モデル** (Fluid Model) と**運動論的モデル** (Kinetic Model) を用いる．前者はプラズマを連続体として扱い，巨視的なプラズマの振る舞いを記述する．後者は粒子個々の運動を解き，微視的なプラズマの振る舞いを記述する．

0.2　一様磁場中での粒子の運動

0.2.1　磁場に垂直方向の運動

一様磁場中では電荷はサイクロトロン運動をする．美束密度 $\boldsymbol{B}$ 中を電荷 q を持つ粒子が速度 $\boldsymbol{v}$ で運動しているとする．この粒子が受ける力は

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{0.2.1}$$

である．ここで，

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{0.2.2}$$

なので Lorentz 力は仕事をしないことがわかる．

この粒子の運動方程式は以下のようになる．

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{0.2.3}$$

ここで，$\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$，$\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$ とする．運動方程式の各成分は

$$m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = qv_yB \tag{0.2.4}$$

$$m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -qv_xB \tag{0.2.5}$$

$$m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{0.2.6}$$

となる．これらを整理すると，

$$\ddot{v_x} = \frac{qB}{m}v_x \to \ddot{v_x} = -\omega_\mathrm{c}^2 v_x \tag{0.2.7}$$

$$\ddot{v_y} = -\frac{qB}{m}v_y \to \ddot{v_y} = \omega_\mathrm{c}^2 v_y \tag{0.2.8}$$

となる．よって，荷電粒子は xy 平面上を**サイクロトロン周波数** (cyclotron frequency)$\omega_\mathrm{c} = qB/m$ で円運動することがわかる[1]．また，初期条件

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ v_x = v_\perp \\ v_y = 0 \end{cases} \text{at } t = 0 \tag{0.2.9}$$

の下で，この粒子の軌道は

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{v_\perp}{\omega_\mathrm{c}}\sin(\omega_\mathrm{c}t) \\ y(t) = \dfrac{v_\perp}{\omega_\mathrm{c}}(\cos(\omega_\mathrm{c}t) - 1) \end{cases} \tag{0.2.10}$$

[1] 通常，サイクロトロン周波数という場合には，電荷 q の絶対値をとって，$\omega_\mathrm{c} = |q|B/m$ とすることが多い．

となる．したがって，

$$x^2 + \left(y + \frac{v_\perp}{\omega_\mathrm{c}}\right)^2 = \left(\frac{v_\perp}{\omega_\mathrm{c}}\right)^2 \tag{0.2.11}$$

が成り立つので，この粒子の円運動の**旋回中心**は

$$(x_g, y_g) = (0, -\frac{v_\perp}{\omega_\mathrm{c}}) \tag{0.2.12}$$

で**旋回半径**は

$$r_\mathrm{L} = \frac{v_\perp}{|\omega_\mathrm{c}|} \tag{0.2.13}$$

である．

まとめると，電荷数 Z の粒子のサイクロトロン周波数は

$$\omega_{\mathrm{c}j} = \frac{ZeB}{m_j} \tag{0.2.14}$$

である[2]．サイクロトロン半径は

$$r_{\mathrm{L}j} = \frac{m_j v_\perp}{ZeB} \tag{0.2.15}$$

である．また，熱速度 $v_{\mathrm{th}j}$ を用いて

$$r_{\mathrm{L}j} = \frac{m_j v_{\mathrm{th}j}}{ZeB} \tag{0.2.16}$$

と表すことが多い．

z 軸方向には力は働かないので

$$v_\parallel = \dot{v_z} = \mathrm{const.} \tag{0.2.17}$$

$$z = z_0 + v_\parallel t \tag{0.2.18}$$

である．つまり，全体としてはらせん運動をしている．

0.2.2 ドリフト運動

ここでは一様磁場に加えて電場や重力などが働く場合の粒子の運動や磁場が空間的に変化する場合の粒子の運動を考える．

0.2.2.1 $E \times B$ ドリフト

磁場が z 軸方向に向いているとする．前節とり粒子は xy 平面上を円運動するのであった．ここに電場を x 方向に加える．このとき，粒子は一方では加速されもう一方では減速される．つまり，上方では $V_0 + V_1$，下方では $V_0 - V_1$ のように異なってしまう．速度が $V_0 + V_1$ のときは旋回半径が大きく，$V_0 - V_1$ のときは旋回半径が小さくなる．よって，旋回中心が下方へドリフトしていく．

このときのドリフト速度は

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{g}E} = \frac{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}}{B^2} \tag{0.2.19}$$

である．以下に導出を行う．

まず，粒子の運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} + q\boldsymbol{E} \tag{0.2.20}$$

[2] j はイオンか電子かを示す．

である．この運動を旋回中心の運動と旋回中心のまわりの Larmor 運動に分ける．

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_{\mathrm{gc}} + \boldsymbol{r}_{\mathrm{c}} \tag{0.2.21}$$
$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{gc}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{c}} \tag{0.2.22}$$

式 (??) を**式** (??) に代入すると

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t} = q\boldsymbol{E} + q(\boldsymbol{v}_{\mathrm{gc}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{c}}) \times \boldsymbol{B} \tag{0.2.23}$$

となる．ここで $\boldsymbol{v}_{\mathrm{gc}}$ が一定であることを用いた．整理すると，

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t} = q(\boldsymbol{v}_{\mathrm{c}} \times \boldsymbol{B}) + q\boldsymbol{E} + q(\boldsymbol{v}_{\mathrm{gc}} \times \boldsymbol{B}) \tag{0.2.24}$$

である．左辺と右辺の第 1 項はサイクロトロン運動，右辺の第 2 項と第 3 項は旋回中心の運動を表している．旋回中心の運動に注目すると，

$$\boldsymbol{0} = q\boldsymbol{E} + q(\boldsymbol{v}_{\mathrm{gc}} \times \boldsymbol{B}) \tag{0.2.25}$$

この両辺を q で割り，$\boldsymbol{B}$ を外積する．ベクトル解析の公式より

$$B^2\boldsymbol{v}_{\mathrm{gc}} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{E} \tag{0.2.26}$$

が得られる．よって，

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{gc}} = \frac{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}}{B^2} \tag{0.2.27}$$

である．

0.2.2.2　一般的な力によるドリフト

$\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$ ドリフトによる旋回中心の移動は，電場による力によって粒子が加速 or 減速され，そのため場所によって Larmor 半径が変わることによるものであった．この考え方は他の場合にも適用できる．

一般な力 $\boldsymbol{F}$ のときは

$$q\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F} \tag{0.2.28}$$

とすればよく，ドリフト速度は

$$\boldsymbol{v}_F = \frac{1}{q}\frac{\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{B}}{B^2} \tag{0.2.29}$$

である．例えば重力の場合は

$$\boldsymbol{v}_F = \frac{m}{q}\frac{\boldsymbol{g} \times \boldsymbol{B}}{B^2} \tag{0.2.30}$$

となる．

0.2.2.3　非一様磁場中でのドリフト

0.2.2.3.1　磁場勾配ドリフト　**磁場勾配ドリフト** (grad-B drift motion) を考える．磁場が z 方向で，磁場勾配が x 方向にある場合を考える．以下にそれを見る．

非一様磁場中では Lorentz 力の大きさが位置ごとに変化する．磁場が大きいところでは旋回半径は大きく，磁場が小さいところでは旋回半径は小さくなる．よって，$\boldsymbol{B}, \nabla B$ の両方に垂直な方向にドリフト運動が生じる．また，イオンと電子はドリフトの縫合が逆なので電流が生じる．**磁場勾配ドリフト速度** (gradient-B drift velocity) は

$$\boldsymbol{v}_{\nabla B} = \pm\frac{1}{2}v_{\perp}r_{\mathrm{L}}\frac{\boldsymbol{B} \times \nabla B}{B^2} \tag{0.2.31}$$

である．

以下に導出を行う．まず，粒子の運動方程式の各成分は

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} & = qv_yB \\ m\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} & = -v_xB \\ m\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} & = 0 \end{cases} \tag{0.2.32}$$

である．ここで y 方向について着目する．

$$m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -qv_xB \tag{0.2.33}$$

磁場を原点周りで Taylor 展開する．

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 + (\boldsymbol{r}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} \tag{0.2.34}$$

$$B_z = B_0 + y\frac{\partial B_z}{\partial y} \tag{0.2.35}$$

ここで，初期条件より

$$v_x = v_\perp\cos(\omega_\mathrm{c}t) \tag{0.2.36}$$

$$y = \frac{v_\perp}{\omega_\mathrm{c}}\cos(\omega_\mathrm{c}t) \tag{0.2.37}$$

である．よって，

$$m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -qv_xB \tag{0.2.38}$$

$$= -qv_\perp\cos(\omega_\mathrm{c}t)(B_0 + \frac{v_\perp}{\omega_\mathrm{c}}\cos(\omega_\mathrm{c}t)\frac{\partial B_z}{\partial y}) \tag{0.2.39}$$

$$\tag{0.2.40}$$

第 1 項は通常の Lorentz 力なので，第 2 項に着目する．

一般的な力 $\boldsymbol{F}$ によるドリフトの式より，

$$\boldsymbol{v}_\mathrm{gc} = \frac{\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{B}}{B^2} \tag{0.2.41}$$

$$= \mp\frac{1}{2}\frac{r_\mathrm{L}v_\perp}{B}\frac{\partial B_z}{\partial y}\boldsymbol{e}_x \tag{0.2.42}$$

$$= \mp\frac{1}{2}\frac{v_\perp r_\perp}{B}\frac{\partial B_z}{\partial y}\boldsymbol{e}_y\times\boldsymbol{e}_z \tag{0.2.43}$$

$$= \mp\frac{1}{2}v_\perp r_\mathrm{L}\frac{\boldsymbol{B}\times\nabla B}{B^2} \tag{0.2.44}$$

が得られる．

0.2.2.3.2　曲率ドリフト　曲率ドリフト (curvature drift) を考える．磁力線が湾曲整定る場合には，磁場勾配ドリフトに加えて，遠心力に起因する曲率ドリフトが生じる．

粒子が感じる平均的な遠心力は

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{cf} = \frac{mv_\parallel^2}{R_\mathrm{c}}\boldsymbol{e}_r = mv_\parallel^2\frac{\boldsymbol{R}_\mathrm{c}}{R_\mathrm{c}^2} \tag{0.2.45}$$

である．よって，一般的な力によるドリフト速度の式より，曲率ドリフト速度は

$$\boldsymbol{v}_R = \frac{mv_\parallel^2}{qB^2}\frac{\boldsymbol{R}_\mathrm{c}\times\boldsymbol{B}}{R_\mathrm{c}^2} \tag{0.2.46}$$

となる．

次に，磁場勾配を曲率を使って表す．電流 I のまわりには

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_\mathrm{c}} \tag{0.2.47}$$

$$\nabla B \parallel \boldsymbol{e}_r \tag{0.2.48}$$

となる．よって，

$$\frac{\nabla B}{B} = -\frac{\boldsymbol{R}_\mathrm{c}}{R_\mathrm{c}^2} \tag{0.2.49}$$

が得られる．したがって，磁場勾配ドリフトは，

$$\boldsymbol{v}_{\nabla B} = \frac{1}{2}\frac{m}{q}v_\perp^2 \frac{\boldsymbol{R}_\mathrm{c} \times \boldsymbol{B}}{R_\mathrm{c}^2 B^2} \tag{0.2.50}$$

となる．

以上より，曲率ドリフトと磁場勾配ドリフトの和である**磁気ドリフト** (magnetic drift) は

$$\boldsymbol{v}_R + \boldsymbol{v}_{\nabla B} = \frac{1}{2}\left(v_\parallel^2 + \frac{1}{2}v_\perp^2\right)\frac{\boldsymbol{R}_\mathrm{c} \times \boldsymbol{B}}{R_\mathrm{c}^2 B^2} \tag{0.2.51}$$

である．