0.1 はじめに

本章ではプラズマの**流体モデル** (Fluid Model) によるモデル化を進める．流体モデルは一般に以下の 3 つの方程式及び Maxwell 方程式に基礎を置く．

1. 密度連続の式
2. 運動方程式
3. エネルギー方程式

流体モデルはプラズマの集団的・巨視的な振る舞いの理解に役立つ．

0.2 密度連続の式

プラズマの存在する空間内に，閉曲面 S を考え，その体積を V とする．体積中の粒子の総数 N を考える．密度を n とする．粒子 (数) 密度の連続の式は

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (n\boldsymbol{u}) = 0 \tag{0.2.1}$$

である．ここで，$\boldsymbol{u}$ はプラズマの流れの平均速度ベクトルである．粒子の生成あるは消滅がある場合は生成消滅項 S_i を右辺に加える[1]．

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (n\boldsymbol{u}) = S_i \tag{0.2.2}$$

また，質量密度の連続の式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho\boldsymbol{u}) = 0 \tag{0.2.3}$$

である．

場の考え方に慣れるために，波形を保ったまま，一定速度で海岸に打ち寄せる波を例に考える．簡単のために 1 次元とし $\rho(x,t)$，流体の速度は空間的，時間的に変化しないとする $u_x = \mathrm{const.}$[2]．これらを粒子密度の連続の式に代入すると，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \tag{0.2.4}$$

が得られる．**図 0.2.4** の解は

$$\rho(x,t) = \rho(x - u_x t) = \mathrm{const.} \tag{0.2.5}$$

である．これは波形を保ったまま，x 方向に伝わる波を表している．**図 0.2.4** の第 1 項は固定した位置における密度の時間変化，第 2 項は流体の対流による密度の変化を表している．つまり，生成・消滅がないとき，空間の各点での密度変化は流体の対流による流入・流出によって生じる．

また，波の頂点にいる観測者から見ると，

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{0.2.6}$$

なので，

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \tag{0.2.7}$$

つまり，

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + u_x \frac{\partial}{\partial x}\right]\rho = 0 \tag{0.2.8}$$

[1] $S_i > 0$ で生成．$S_i < 0$ で消滅．
[2] 一般的には空間と時間に依存する．

である．この，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + u_x \frac{\partial}{\partial x} \tag{0.2.9}$$

を**対流微分** (Convective Derivative) という．

より一般的には，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{u}) = 0 \tag{0.2.10}$$

である．ここで，非圧縮性流体 $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{u} = 0$ を考えると，

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} \cdot \nabla \rho \tag{0.2.11}$$

よって，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \rho = 0 \tag{0.2.12}$$

である．

また，次節では以下の **Euler 方程式**を導出する．

$$mn\left[\frac{\partial}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\right]\boldsymbol{u} = nq(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}) - \nabla p \tag{0.2.13}$$

また，対流微分は

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \tag{0.2.14}$$

とも書かれる．

0.3 流体の運動方程式

粒子 1 個当たりの運動量は $m\boldsymbol{u}$ である．単位体積当たりの運動量は $nm\boldsymbol{u}$ である．ここで，粒子の質量を m，粒子の数密度を n とする．体積 V に含まれる粒子が持つ全体の運動量 $\boldsymbol{M}$ は $\boldsymbol{M} = \int_V nm\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}V$ である．

$\boldsymbol{M}$ の時間変化を考える．時間変化に寄与するのは，(1) 外力による運動量の変化 (2) 面 S を通しての流体の流入・流出 (3) 面 S を介して，面の外側の流体が及ぼす圧力，がある．

0.3.1 外力による運動量の時間変化

位置 $\boldsymbol{r}$ 時刻 t において流体粒子 1 個あたりに働く力を $\boldsymbol{f}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{r}, t)$ とする[3]．体積 V 全体に働く力は，流体密度を $n(\boldsymbol{r}, t)$ とすると，$\int_V n(\boldsymbol{r}, t)\boldsymbol{f}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{r}, t)\,\mathrm{d}V$ である．よって，$\boldsymbol{M}$ の時間変化は，

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t} = \int_V \frac{\partial}{\partial t}(nm\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}V = \int_V n(\boldsymbol{r}, t)\boldsymbol{f}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{r}, t)\,\mathrm{d}V \tag{0.3.1}$$

である．したがって，この式が恒等的に成り立つのは

$$\frac{\partial}{\partial t}(nm\boldsymbol{u}) = n\boldsymbol{f}^{\mathrm{ext}} \tag{0.3.2}$$

が満たされるときである．密度が時間的に変化しない時，

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}, t)) = \boldsymbol{f}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{r}, t) \tag{0.3.3}$$

である．

[3] 例：$\boldsymbol{f}^{\mathrm{ext}}(\boldsymbol{r}, t) = q[\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}]$

0.3.2　運動量の流入・流出

体積 V 中の粒子総数 N の時間変化を考える．

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \int_S n\boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{0.3.4}$$

である．ここで，$\boldsymbol{\Gamma} = n\boldsymbol{u}$ を**粒子束密度** (Particle Flux Density) という．表面を通しての運動量の流入・流出は，$(m\boldsymbol{u})(n\boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S})$ である．したがって，$\boldsymbol{M}$ の時間変化は，

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t} = -\int_S (m\boldsymbol{u})(n\boldsymbol{u} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}) \tag{0.3.5}$$

である．左辺は $\displaystyle\int_V \frac{\partial}{\partial t}(nm\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}V$ と書けるので，x 成分で考えると，Gauss の定理を使うと，

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t}(mnu_x) + \nabla \cdot (mnu_x\boldsymbol{u})\right] \mathrm{d}V = 0 \tag{0.3.6}$$

である．よって，各成分は

$$\frac{\partial}{\partial t}(mnu_x) + \nabla \cdot (mnu_x\boldsymbol{u}) = 0 \tag{0.3.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(mnu_y) + \nabla \cdot (mnu_y\boldsymbol{u}) = 0 \tag{0.3.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(mnu_z) + \nabla \cdot (mnu_z\boldsymbol{u}) = 0 \tag{0.3.9}$$

である．ここで $\nabla \cdot (mnu_x\boldsymbol{u})$ の物理的意味を考察する．右辺に移項すると，

$$\frac{\partial}{\partial t}(mnu_x) = -\nabla \cdot (mnu_x\boldsymbol{u}) \tag{0.3.10}$$

と書けるので，$-\nabla \cdot (mnu_x\boldsymbol{u})$ は，流体の単位体積当たりに働く力に相当する．さらにベクトル解析の公式を用いて展開すると，

$$\nabla \cdot (mnu_x\boldsymbol{u}) = \frac{\partial}{\partial x}(mnu_xu_x) + \frac{\partial}{\partial y}(mnu_xu_y) + \frac{\partial}{\partial z}(mnu_xu_z) \tag{0.3.11}$$

となる．ここで，**運動量流速密度** (Momentum Flux Density) を $P_{ij} = mnu_iu_j$ を用いると，

$$\nabla \cdot (mnu_x\boldsymbol{u}) = \frac{\partial}{\partial x}P_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}P_{xy} + \frac{\partial}{\partial z}P_{xz} \tag{0.3.12}$$

と書ける[4]．

次に，$P_{xy}, P_{xz}, \dfrac{\partial P_{xy}}{\partial y}, \dfrac{\partial P_{xz}}{\partial z}$ の物理的意味を考えよう．

[4] $P_{xx} = mnu_xu_x = (mu_x)(nu_x)$ と書けるので，これは単位時間に x 軸に垂直な単位面積を横切る x 方向の運動量を表している．また，$\dfrac{\partial P_{xx}}{\partial x}$ $[\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^3}]$ は流体の単位体積当たりに働く力に相当する．