0.1 プラズマの温度

プラズマの**温度**は，**密度**とともにもっとも基本的かつ重要な物理量の一つである．

壁の温度 T が一定の容器に．十分長い時間気体粒子を閉じ込めると気体粒子は衝突を繰り返し熱平衡状態になる．

粒子の速度分布は Maxwell 分布に従う．単位体積当たり n 個の粒子が温度 T で熱平衡状態にあるとする．速度が v_x と $v_x + \mathrm{d}v_x$ の範囲にある粒子の個数は

$$f(v_x) = \mathrm{d}v_x \tag{0.1.1}$$

$$f(v_x) = A \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2k_BT}\right) \tag{0.1.2}$$

である．A は規格化条件から求められる．

$$\int_{\infty}^{\infty} f(v_x)\,\mathrm{d}v_x = n \tag{0.1.3}$$

$$\Rightarrow A = n\sqrt{\frac{m}{2\pi k_BT}} \tag{0.1.4}$$

温度は速度分布の広がりを表すパラメータである．高温ほど，速度が大きい粒子が多い．

粒子の平均エネルギーを計算する．

$$E_{av} = \frac{1}{n}\int_{\infty}^{\infty} \frac{1}{2}mv_x^2 f(v_x)\,\mathrm{d}v_x = \frac{1}{2}k_BT \tag{0.1.5}$$

熱速度

$$v_{th} = \sqrt{\frac{2k_BT}{m}} \tag{0.1.6}$$

とすると，

$$f(\pm v_{th}) = \frac{f(0)}{\mathrm{e}} \tag{0.1.7}$$

である．

3 次元に拡張する．

$$f(v_x, v_y, v_z) = n\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{k_BT}\right] \tag{0.1.8}$$

$$E_{av} = \frac{3}{2}k_BT \tag{0.1.9}$$

速さ v に関する速度分布は

$$F(v) = 4\pi n\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{mv^2}{k_BT}\right] \tag{0.1.10}$$

である．これは $v = v_{th}$ で最大となる．また，速度ベクトルの向きに依らず，速さのみに依存する．**等方分布**である．

速度あるいは速さの平均値は，温度や熱速度と共に，**速度分布を特徴づける物理量**として，今後，重要となる．速度ベクトルの平均値は 0 である．

$$\langle \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{0} \tag{0.1.11}$$

次に速さの平均値を計算する．

$$\langle v \rangle = \frac{1}{n}\int_0^{\infty} vF(v)ddv = \sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}} \tag{0.1.12}$$

これは熱速度よりわずかに大きい．

速度分布関数についての平均は一般的に次のようになる．ある物理量 X を考える．X の平均値は

$$\langle X \rangle = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X f(v_x, v_y, v_z) \, \mathrm{d}v_x \, \mathrm{d}v_y \, \mathrm{d}v_z \tag{0.1.13}$$

である．特に，等方的な分布の場合，

$$\langle X \rangle = \frac{1}{n} \int_{0}^{\infty} X F(v) \, \mathrm{d}v \tag{0.1.14}$$

である．これはプラズマを流体的に扱う時に用いられる．

0.2 電気的中性

電子の個数密度を n_e，イオンの個数密度を n_i とする．イオンが 1 価ならば，

$$(-e)n_e + (+e)n_i = 0 \tag{0.2.1}$$
$$\Rightarrow n_e = n_i \tag{0.2.2}$$

が成り立つ．Z 価のイオンならば，

$$(-e)n_e + (+Ze)n_i = 0 \tag{0.2.3}$$
$$\Rightarrow n_e = Zn_i \tag{0.2.4}$$

イオンの種類が多数の場合には，

$$\sum_j (Z_j e) n_j = 0 \tag{0.2.5}$$

が成り立つ．ただし，j は荷電粒子の種類，例えば電子やイオン，を表す．ヘリウムを例に考えてみる．ヘリウムには 1 価イオンと 2 価イオンがあるので，

$$(-e)n_e + (+e)n_{\mathrm{He}^+} + (+2e)n_{\mathrm{He}^{2+}} = 0 \tag{0.2.6}$$

が成り立つ．

以上はマクロに見た電気的中性であったが，プラズマはミクロに見ると揺らいでいる．プラズマは以下の機構により**準中性**と呼ばれる．まず，プラズマはランダムな熱運動をしている．この熱運動により，ある瞬間には揺動電場が形成される．プラズマはこの電場を打ち消すように運動する．よって，プラズマはほぼ中性であり，

$$n_i \simeq n_e \tag{0.2.7}$$

が成り立つ．

0.3 Debye 遮蔽

プラズマ粒子は互いに Coulomb 相互作用

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \tag{0.3.1}$$

を及ぼしあう．このときのポテンシャルは

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r} \tag{0.3.2}$$

であるが，これはあくまで真空中でのポテンシャルであり，プラズマの存在を加味していない．プラズマによる遮蔽を考えたものとして，次の **Debye ポテンシャル**がある．

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) \tag{0.3.3}$$

λ_D を Debye の遮蔽長，$\exp(-r/\lambda_D)$ を Debye の遮蔽ファクターという．プラズマ中で正電荷の偏りができると，そこに電子が引き寄せられる．この引き寄せられた電子たちが正電荷の電場を遮蔽する．

Debye の遮蔽長は以下の式を満たす．

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T}{e^2 n}} \tag{0.3.4}$$

つまり，T が大きいほど，電子はランダムな熱運動をするため，正電荷の周りにとどまらず，λ_D は大きくなる．一方，n が大きいほど電子が集まりやすいため，λ_D は小さくなる．また，係数を計算すると，

$$\lambda_D \text{ m} = 7.4 \times 10^3 \sqrt{\frac{T \text{ eV}}{n \text{ m}^{-3}}} \tag{0.3.5}$$

である．

Debye 遮蔽と準中性条件は以下の関係にある．プラズマの特徴的な大きさや長さ L が Debye 遮蔽長 λ_D より十分に大きい，つまり，

$$L \gg \lambda_D \tag{0.3.6}$$

のとき，空間的な電荷の偏りは無視でき，ほぼ中性とみなせる．

定性的な議論は以上として，次に Debye 遮蔽を導出する．出発点は**式** (0.3.7) の Poisson 方程式である．

$$\nabla^2 \phi(\boldsymbol{r}) = -\frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0} \tag{0.3.7}$$

ここで，1 価のイオンと電子で構成されるプラズマの場合，

$$\rho(\boldsymbol{r}) = e[n_i(\boldsymbol{r}) - n_e(\boldsymbol{r})] \tag{0.3.8}$$

である．モデルとして，プラズマ中で生じた電荷の偏りを試験電荷，つまり点電荷として近似する．試験電荷の電荷量を q_T として，これが原点にあるとする．試験電荷を含めると電荷密度は

$$\rho(\boldsymbol{r}) = e[n_i(\boldsymbol{r}) - n_e(\boldsymbol{r})] + q_\mathrm{T}\delta(\boldsymbol{r}) \tag{0.3.9}$$

とかける．また，球対称性を仮定し，θ, ϕ 依存性を捨てると，ラプラシアンは

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r}\right) \tag{0.3.10}$$

となる．ここで，イオンの質量は電子に比較して大きく動きにくいとすると，イオンの電荷密度は試験電荷がない場合の一様な密度にほぼ等しい．

$$n_i(r) \simeq n_0 \tag{0.3.11}$$

また，電子密度は Boltzmann 関係式

$$n_e(r) = n_0 \exp\left[\frac{e\phi(r)}{k_B T}\right] \simeq n_0\left[1 + \frac{e\phi(r)}{k_B T}\right] \tag{0.3.12}$$

を満たす．**式** (0.3.9)，**式** (0.3.12)，**式** (0.3.11) を**式** (0.3.7) に代入すると，

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r}\right) = \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 k_B T}\phi(r) - \frac{q_\mathrm{T}}{\varepsilon_0}\delta(r) \tag{0.3.13}$$

となる．ここで，$\dfrac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 k_B T} = \dfrac{1}{\lambda_D^2}$ とおくと，$r \neq 0$ で，

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r}\right) = \frac{1}{\lambda_D^2}\phi(r) \tag{0.3.14}$$

である．上式の一般解は

$$\phi(r) = \frac{A}{r}\exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) + \frac{B}{r}\exp\left(+\frac{r}{\lambda_D}\right) \tag{0.3.15}$$

である．次に境界条件を考える．無限遠でポテンシャルが発散することは無いので

$$B = 0 \tag{0.3.16}$$

試験電荷の極近傍ではポテンシャルは Coulomb ポテンシャルと一致するはずなので

$$\phi(0^+) = \frac{q_{\mathrm{T}}}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{0.3.17}$$

$$\Rightarrow A = \frac{q_{\mathrm{T}}}{4\pi\varepsilon_0} \tag{0.3.18}$$

である．以上から Debye 遮蔽のポテンシャル

$$\phi(r) = \frac{q_{\mathrm{T}}}{4\pi\varepsilon_0 r}\exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) \tag{0.3.19}$$

が得られる．