

0.1 イオン化エネルギー

高校物理の完全な復習なので式のみ示す．古典的な円運動は、

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \quad (0.1.1)$$

量子化条件は

$$m_e v r = n \frac{h}{2\pi} \quad (0.1.2)$$

許される軌道半径は

$$r_n = n^2 \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m_e e^2} \quad (0.1.3)$$

$$= n^2 \cdot 5.3 \times 10^{-11} \text{ m} \quad (0.1.4)$$

$n = 1$ のときの軌道半径を Bohr 半径と言い、 $5.3 \times 10^{-11} \text{ m}$ である．各軌道に対する電子の全エネルギーは、

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{8\pi\epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2} \quad (0.1.5)$$

$$= -\frac{1}{n^2} \cdot 13.6 \text{ eV} \quad (0.1.6)$$

$n = 1$ のとき、 -13.6 eV である．イオン化エネルギーの定義は、

$$\Delta E = E_\infty - E_1 = 13.6 \text{ eV} \quad (0.1.7)$$

であるから、水素原子のイオン化エネルギーは 13.6 eV である．常温・常圧では 2 原子あるいはそれ以上の原子が結合して分子の状態にあることが多い．この場合には、解離過程を経て原子になり、その後、電離することが多い．

0.2 解離過程

では、どのようにして電離に必要なエネルギーを与えるのだろうか．主に、電子による**衝突電離**と**光電離**がある．

0.2.1 衝突電離

イオン化エネルギー以上のエネルギーを衝突によって与えて中性粒子を電離させる方法が衝突電離である．1 個の原子を電離するにはおよそ、 5 eV から 25 eV のエネルギーが必要である．

衝突させる粒子としては荷電粒子が用いられる．なぜなら、電圧により容易に加速させられるからである．電子を使ったものを**電子衝突電離** (electron impact ionization) という．電子はイオンに比べ、「種」になる電子が作りやすく、衝突によるエネルギーの授受の効率が良い、という特徴がある．

0.2.1.1 弾性衝突と非弾性衝突

弾性衝突 (elastic collision) はでは、衝突前後で粒子の運動エネルギーが保存する．**非弾性衝突**では、運動エネルギーは保存しない．しかし、全エネルギーは保存されるため、運動エネルギーの一部が粒子の内部状態の変化に使われる．例えば、衝突電離過程や衝突励起過程に使われる．つまり、

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} + \Delta U \quad (0.2.1)$$

であり、 ΔU が粒子の内部状態変化に使われたエネルギーである．まとめると、弾性衝突は内部状態の変化を伴わず、粒子の軌道を変えるだけである．よって、粒子拡散や熱伝導など輸送過程で重要となる．一方、非弾性衝突では内部状態の変化を伴う．よって、プラズマ生成・消滅過程で重要となる．

0.2.1.2 衝突断面積

衝突過程を記述する物理量として**衝突断面積** (cross section of collision) がある。これは衝突のしやすさを示すパラメータである。例えば、半径 r_1 の粒子と半径 r_2 の粒子の衝突を考える。粒子は剛体球とみなすと、中心間距離が $r_1 + r_2$ 以下のときに衝突する。よって、半径 $r_1 + r_2$ の円の面積が衝突を表すパラメータとして有用である。したがって、衝突断面積は

$$\sigma = \pi(r_1 + r_2)^2 \quad (0.2.2)$$

である。この剛体球モデルが使えるのは、中性原子-中性原子の衝突や荷電粒子-中性原子の衝突である。これらは原子半径程度まで接近したときに力を及ぼしあう。一方、荷電粒子-荷電粒子は、Coulomb 力が遠距離まで及ぶため、剛体球として扱えない。

剛体球モデルでは、原子内の最外殻電子の軌道半径を球の半径とみなす。原子番号が大きくなるほど衝突はしやすくなる。また、電子の de Broglie 波長は

$$\lambda_d = \frac{h}{m_e v_e} \quad (0.2.3)$$

である。電子の速度やエネルギーが十分大きい時は電子の波動性を考慮する必要はなく、衝突断面積は原子半径程度と考えることができる。

一方、電子のエネルギーが低く、

$$\lambda_d \simeq (\text{原子半径}) \quad (0.2.4)$$

となると量子力学的な扱いが必要である。

非弾性衝突 (例えば電離反応) が起こるためには、衝突する粒子はイオン化エネルギー以上の運動エネルギーを持つ必要がある。イオン化エネルギー以下では衝突してもイオン化は起こらず、断面積は 0 である。よって、断面積にエネルギーの閾値があることがわかる。また、これらの断面積は反応断面積や電離断面積と呼ばれることもある。

0.2.1.3 平均自由行程

平均自由行程 (mean free path) は、衝突と衝突の間の平均的な飛行距離である。位置 $x = 0$ 、面積 S の面から、同じ速度 v を持つ粒子 A のビームを一様に入射する。 $x = 0$ で未衝突の粒子 A の個数を N_{A0} とする。位置 x での個数を $N_A(x)$ とする。簡単のため粒子 B は止まっているとする。粒子 A と粒子 B の衝突断面積を σ_{AB} とすると、粒子 A が $[x, x + dx]$ の微小区間で粒子 B と衝突する確率は

$$P_{AB} = \frac{\sigma_{AB} N_B}{S} \quad (0.2.5)$$

である。 N_B は dx に含まれる粒子 B の個数である。粒子 B の密度を n_B とすると、

$$N_B = n_B \cdot S dx \quad (0.2.6)$$

である。よって、衝突確率は

$$P_{AB} \sim \sigma_{AB} n_B dx \quad (0.2.7)$$

である。衝突した粒子の数だけビーム粒子の数は減ると考えると、

$$dN_A = -n_A \sigma_{AB} n_B dx \quad (0.2.8)$$

である。よって、

$$\frac{dN_A}{N_A} = -\sigma_{AB} n_B dx \quad (0.2.9)$$

$$\Rightarrow N_A(x) = N_{A0} \exp\left(-\frac{x}{\lambda_{AB}}\right) \quad (0.2.10)$$

であり、平均自由行程は

$$\lambda_{AB} = \frac{1}{n_B \sigma_{AB}} \quad (0.2.11)$$

となる。

粒子 A が距離 x だけ自由に飛行できる確率を求める。位置 0 から位置 x まで衝突を受けない確率は

$$P_A(x) = \frac{N_A(x)}{N_{A0}} = \exp\left(-\frac{x}{\lambda_{AB}}\right) \quad (0.2.12)$$

である。 $[x, x + dx]$ の範囲で衝突を受ける確率は

$$dP_A(x) = \left| \frac{dN_A}{N_A} \right| = \sigma_{AB} n_B dx = \frac{dx}{\lambda_{AB}} \quad (0.2.13)$$

である。 よって、距離 x だけ自由に飛行できる確率は

$$P_A \times dP_A = \exp\left(-\frac{x}{\lambda_{AB}}\right) \frac{dx}{\lambda_{AB}} \quad (0.2.14)$$

である。自由に飛行できる距離 x の平均値は

$$\langle x \rangle = \int_0^\infty x \exp\left(-\frac{x}{\lambda_{AB}}\right) \frac{dx}{\lambda_{AB}} = \lambda_{AB} \quad (0.2.15)$$

である。 λ_{AB} はまさしく平均移動距離を表している。

0.2.1.4 衝突時間と衝突周波数

衝突と衝突の間の平均的な経過時間を**衝突時間** τ_{AB} という。これは平均自由行程を飛行するのに要する時間である。

$$\tau_{AB} = \frac{\lambda_{AB}}{v} \quad (0.2.16)$$

で与えられる。また、単位時間当たりの平均的な衝突回数を**衝突周波数** ν_{AB} という。

$$\nu_{AB} = \frac{1}{\tau_{AB}} = n_B \sigma_{AB} v \quad (0.2.17)$$

で与えられる。**式** (0.2.17) は粒子 1 個当たりの平均的な衝突回数である。粒子 A の密度を n_A とすると、単位体積単位時間当たりのイオンの生成量 S は

$$S_{AB} = n_A n_B \sigma_{AB} v \quad (0.2.18)$$

である。

0.2.1.5 速度係数

実際には、速度分布は一様ではない。衝突周波数の速度分布に関する平均値は

$$\langle v_{en} \rangle = n_n \langle \sigma_{en}(v) v \rangle \quad (0.2.19)$$

である。ここで、

$$\langle \sigma_{en}(v) \rangle = \int_0^\infty \sigma_{en}(v) f(v) dv \quad (0.2.20)$$

を**速度係数** (反応速度係数, rate coefficient) という。単位は m^3/s である。これを使うと、単位体積単位時間当たりの衝突回数は

$$S_{en} = n_e n_n \langle \sigma_{en}(v) v \rangle \quad (0.2.21)$$

と表される。

0.2.2 光電離

光子のエネルギーがイオン化エネルギーより大きければ、電離が起こるようになる。地球の電離層はこれによりできる。特に、太陽からの紫外線が電離を引き起こす。光電離の条件は

$$A + h\nu \rightarrow A^+ + e^- \quad (0.2.22)$$

であるので、

$$h\nu \geq eV_i \quad (0.2.23)$$

を満たさなければならない。左辺は光子のエネルギーで、右辺はイオン化エネルギーである。整理すると、

$$\lambda \leq \frac{1239.8 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{V_i} \quad (0.2.24)$$

となる。例えばセシウムの場合 $V_i = 3.98 \text{ eV}$ なので、 $\lambda \leq 320 \text{ nm}$ である。これは紫外線の領域である。大気中では高度の高い方が短い波長、高度の低い方が長い波長の光が吸収される。

大気の構造と組成について補足する。圧力に関する運動方程式は

$$\frac{dp}{dz} = -mgn \quad (0.2.25)$$

である。ここで、 $p = nk_B T$ なので、 $T \sim \text{const.}$ のとき

$$\frac{dn}{dz} = -\frac{mg}{k_B T} n \quad (0.2.26)$$

となる。この解は

$$n(z) = n_0 \exp\left(-\frac{mgz}{k_B T}\right) = n_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right) \quad (0.2.27)$$

である。ここで、

$$H := \frac{k_B T}{mg} \quad (0.2.28)$$

を**スケールハイト** (scale height) という。大気密度が $1/e$ に減衰する高度を表す。質量が大きいほど早く減衰し、質量が小さいほど遅く減衰する。

0.2.3 励起過程

イオン化エネルギー以下でも、原子や分子の内部状態の変化を起こさせる可能性がある。これを、**励起過程** (excitation process) という。

電子が高準位に励起されたとする。励起状態は一般に不安定であるため、より低い準位へと遷移し、結局は基底状態に戻る。低準位への遷移の際、エネルギーを光として放出する。 E_m から E_n への遷移に伴い放出される光は

$$h\nu = E_m - E_n \quad (0.2.29)$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{hc}{E_m - E_n} \quad (0.2.30)$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{1 \text{ nm}} = \frac{1239.8 \text{ eV}}{E_m - E_n} \quad (0.2.31)$$

の波長をもつ。整理すると

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (0.2.32)$$

である。 R_H は Rydberg 定数で $R_H = 1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ である。 $n = 1$ のときを Lyman 系列、 $n = 2$ のときを Balmer 系列という。Balmer 系列は可視領域である。例えば、 $m = 2 \rightarrow n = 1$ のとき $\lambda = 121.6 \text{ nm}$ で真空紫外線 $L_{y\alpha}$ と呼ばれる。 $m = 3 \rightarrow n = 2$ のとき $\lambda = 656.3 \text{ nm}$ で H_α 線と呼ばれる。

0.2.4 再結合過程

再結合過程 (recombination process) は代表的なプラズマの消滅過程であり，正負の荷電粒子が結合して中性原子あるいは分子に戻る過程をいう．低温プラズマ (1 eV 以下) では，空間中での再結合 (**体積再結合**) が重要である．

例えば，体積再結合には**放射再結合**，



と **3 体再結合**，



がある．2 つ目の e^- は触媒のように作用し， A^+ と e^- の運動エネルギーを受け取る．また，固体表面での再結合過程である**表面再結合**がある．

さらに，**荷電交換過程**という生成方法がある．



原子 B の電子が原子 A に受け渡されると，もともとイオンだった A が中性原子となり，B がイオンとなる．この過程では電荷の交換のみが起き，A，B の運動エネルギーは変化しない．同種粒子の場合，例えば水素では



となるが，電荷の変化ではなく，イオンから中性原子への運動エネルギーの受け渡しが重要な意味をもつ．