

# 場の量子論講義ノート

Yuto Masuda

更新日: December 7, 2024

# Contents

0.1 第2量子化 . . . . .	1
---------------------	---

## 0.1 第2量子化

1 粒子の量子力学では波動関数を導入し、位置演算子と運動量演算子の非可換性から量子化を行った。場の量子論では粒子数が量的に変化するため、波動関数を生成消滅演算子で表す必要がある。生成消滅演算子の非可換性を用いた2度目の量子化を**第2量子化** (second quantization) という。

時空点  $(\mathbf{r}, t)$  に粒子を1つ生成する演算子を  $\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)$  と表し、消滅させる演算子を  $\hat{\psi}(\mathbf{r}, t)$  と表す。それぞれ粒子の**生成演算子**、**消滅演算子**という。これらは**粒子数演算子**  $\hat{n}(\mathbf{r}, t)$  とは非可換である。なぜなら、粒子を生成してから粒子数を測定する操作  $\hat{n}\hat{\psi}^\dagger$  と粒子数を測定してから粒子を生成する操作  $\hat{\psi}^\dagger\hat{n}$  では、結果として得られる粒子数は1異なるからである。これを数式で表すと、同じ時空点の演算子の間には

$$\hat{n}\hat{\psi}^\dagger - \hat{\psi}^\dagger\hat{n} = \hat{\psi}^\dagger \quad (0.1.1)$$

が要請される。同様に、

$$\hat{n}\hat{\psi} - \hat{\psi}\hat{n} = -\hat{\psi} \quad (0.1.2)$$

が要請される。よって、これらを満たす  $\hat{n}$  と  $\hat{\psi}, \hat{\psi}^\dagger$  の間には

$$\hat{n} = \hat{\psi}^\dagger\hat{\psi} \quad (0.1.3)$$

$$\begin{cases} [\hat{\psi}^\dagger, \hat{\psi}] = -1 \\ [\hat{\psi}, \hat{\psi}] = [\hat{\psi}^\dagger, \hat{\psi}^\dagger] = 0 \end{cases} \quad (0.1.4)$$

または

$$\hat{n} = \hat{\psi}^\dagger\hat{\psi} \quad (0.1.5)$$

$$\begin{cases} \{\hat{\psi}^\dagger, \hat{\psi}\} = 1 \\ \{\hat{\psi}, \hat{\psi}\} = \{\hat{\psi}^\dagger, \hat{\psi}^\dagger\} = 0 \end{cases} \quad (0.1.6)$$

が満たされる必要がある。後で見るように**式 (0.1.4)** はボゾンを表し、**式 (0.1.6)** はフェルミオンを表す。

まず、**式 (0.1.4)** を満たす演算子を考える。**式 (0.1.4)** は時空の場所依存性を書くと

$$[\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}', t'), \hat{\psi}(\mathbf{r}, t)] = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t') \quad (0.1.7)$$

$$[\hat{\psi}(\mathbf{r}', t'), \hat{\psi}(\mathbf{r}, t)] = [\hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}', t'), \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)] = 0 \quad (0.1.8)$$

となる。

1 粒子系のハミルトニアン

$$\hat{H}_1 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\mathbf{r}) \quad (0.1.9)$$

を多粒子系に拡張する．多粒子のハミルトニアンとして

$$\hat{H} = \int d\mathbf{r} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right) \hat{\psi}(\mathbf{r}) \quad (0.1.10)$$

を考える．上式は部分積分を実行することで

$$\hat{H} = \int d\mathbf{r} \left( \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \hat{\psi}^\dagger)(\nabla \hat{\psi}) + V(\mathbf{r}) \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} \right) \quad (0.1.11)$$

と変形できる．

上のハミルトニアンが1粒子の量子力学を再現することを確認する．まず，真空を

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) |0\rangle = 0 \quad (0.1.12)$$

として定義する．つまり，粒子が存在しないという状態である．また，粒子が $\mathbf{r}$ に存在する状態 $|\mathbf{r}\rangle$ は

$$|\mathbf{r}\rangle = \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) |0\rangle \quad (0.1.13)$$

と表される．点 $\mathbf{r}$ に粒子が存在する確率振幅を $\phi(\mathbf{r}, t)$ とすると1粒子状態は

$$|\phi\rangle = \int d\mathbf{r} \phi(\mathbf{r}, t) |\mathbf{r}\rangle = \int d\mathbf{r} \phi(\mathbf{r}, t) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) |0\rangle \quad (0.1.14)$$

と表される．式(0.1.14)に式(0.1.11)を作用させると，

$$\hat{H} |\phi\rangle = \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \phi(\mathbf{r}, t) \left( \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla_{\mathbf{r}'} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}')) (\nabla_{\mathbf{r}'} \hat{\psi}(\mathbf{r}')) + V(\mathbf{r}') \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}') \right) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) |0\rangle \quad (0.1.15)$$

を得る．さらに第1項を部分積分して

$$\hat{H} |\phi\rangle = \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \phi(\mathbf{r}, t) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla_{\mathbf{r}'}^2 \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}')) \hat{\psi}(\mathbf{r}') + V(\mathbf{r}') \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}') \right) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) |0\rangle \quad (0.1.16)$$

を得る．ここで，

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}') \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) |0\rangle = \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \quad (0.1.17)$$

だから，さらに変形することができ，

$$\hat{H} |\phi\rangle = \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \phi(\mathbf{r}, t) \left( -\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla_{\mathbf{r}'}^2 \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}')) + V(\mathbf{r}') \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}') \right) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \quad (0.1.18)$$

$$= \int d\mathbf{r} \left[ \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right) \phi(\mathbf{r}, t) \right] \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) |0\rangle \quad (0.1.19)$$

を得る．式(0.1.19)に左から $\langle \mathbf{r} |$ を作用すると，

$$\langle \mathbf{r} | \hat{H} |\phi\rangle = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right) \phi(\mathbf{r}, t) \quad (0.1.20)$$

となる．上式の左辺はSchrödinger方程式

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right) \phi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) \quad (0.1.21)$$

の左辺と一致する．よって，

$$\hat{H} |\phi\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\phi\rangle \quad (0.1.22)$$

を得る．これが，多体の量子論の時間発展を記述する方程式である．

次に2粒子系を考える．粒子が  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  にいる状態は

$$|\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\rangle = \hat{\psi}(\mathbf{r}_1)^\dagger \hat{\psi}(\mathbf{r}_2)^\dagger |0\rangle \quad (0.1.23)$$

である．さらに2粒子状態  $|\phi_2\phi_1\rangle$  は

$$|\phi_2\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \phi_2(\mathbf{r}') \phi_1(\mathbf{r}) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) |0\rangle \quad (0.1.24)$$

と表される．よって， $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  で粒子を観測する確率振幅は

$$\langle \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 | \phi_2 \phi_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \phi_2(\mathbf{r}') \phi_1(\mathbf{r}) \langle 0 | \hat{\psi}(\mathbf{r}_1) \hat{\psi}(\mathbf{r}_2) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) | 0 \rangle \quad (0.1.25)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \phi_2(\mathbf{r}') \phi_1(\mathbf{r}) \langle 0 | \left( \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}') \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) + \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}') \right) | 0 \rangle \quad (0.1.26)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int d\mathbf{r} (\phi_2(\mathbf{r}_2) \phi_1(\mathbf{r}) + \phi_2(\mathbf{r}) \phi_1(\mathbf{r}_2)) \langle 0 | \hat{\psi}(\mathbf{r}_1) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) | 0 \rangle \quad (0.1.27)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_2(\mathbf{r}_2) \phi_1(\mathbf{r}_1) + \phi_2(\mathbf{r}_1) \phi_1(\mathbf{r}_2)) \quad (0.1.28)$$

となる．これは2つの粒子の分布を対称化した確率振幅となっている．つまり，どちらの粒子がどちらの波動関数の状態にあるのか区別できない．また，これは Bose 統計に従う粒子，ボゾンを表している．思い出してほしいのは，出発点は式 (0.1.4) であったことである．