小節??ではプラズマ粒子が平均速度 $\boldsymbol{u}$ で全て同じ速度で運動していることを仮定した．しかし，実際には粒子の速度は

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \tilde{\boldsymbol{v}} \tag{0.0.1}$$

となる．ここで，$\tilde{\boldsymbol{v}}$ は平均速度 $\boldsymbol{u}$ からのずれを表す．微視的な熱運動の速度である．このとき，**小節??**で導出した運動量流速密度は，個々の粒子について，

$$mnv_iv_j = mn(u_i + \tilde{v}_i)(u_j + \tilde{v}_j) \tag{0.0.2}$$

と書ける．

今，プラズマの速度分布関数 $f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)$ が平均速度 $\boldsymbol{u}$ を持つ次の **Shifted Maxwellian** で表されるとする．

$$f(\boldsymbol{r}, v_x, v_y, v_z) = n_e(\boldsymbol{r})\left[\frac{m_e}{2\pi k_{\mathrm{B}}T_e}\right]^{3/2}\exp\left(-\frac{m_e}{2k_{\mathrm{B}}T_e}[(v_x-u_x)^2+(v_y-u_y)^2+(v_z-u_z)^2]\right) \tag{0.0.3}$$

このとき，**式** (**??**) の平均は以下のように計算される．

$$\begin{aligned}\langle P_{ij}\rangle = mn\langle v_iv_j\rangle = mn\langle (u_i+\tilde{v}_i)(u_j+\tilde{v}_j)\rangle &= mn\langle u_iu_j\rangle + mnu_i\langle\tilde{v}_j\rangle + mnu_j\langle\tilde{v}_i\rangle + mn\langle\tilde{v}_i\tilde{v}_j\rangle && (0.0.4)\\ &= mnu_iu_j + mn\langle\tilde{v}_i\tilde{v}_j\rangle && (0.0.5)\end{aligned}$$

第 1 項は**小節??**で考えた平均的な流れによる運動量流速密度，第 2 項はランダムな熱運動に起因する運動量の流れである．また，Maxwell 分布の場合には

$$\langle\tilde{v}_i\tilde{v}_j\rangle = \frac{1}{3}\langle\tilde{v}^2\rangle\delta_{ij} \tag{0.0.6}$$

が成り立つ．したがって，

$$\langle P_{ij}\rangle = mnu_iu_j + \frac{1}{3}mn\langle\tilde{v}^2\rangle\delta_{ij} = mnu_iu_j + nk_{\mathrm{B}}T\delta_{ij} = mnu_iu_j + p\delta_{ij} \tag{0.0.7}$$

が得られる．これを行列で表すと一般化された運動量流速密度テンソル

$$\overleftrightarrow{\Pi} = \overleftrightarrow{P} + \overleftrightarrow{p} = \begin{pmatrix} P_{xx}+p & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & P_{yy}+p & P_{yz} \\ P_{zx} & P_{zy} & P_{zz}+p \end{pmatrix} \tag{0.0.8}$$

と書くことができる．