1 粒子の量子力学では波動関数を導入し，位置演算子と運動量演算子の非可換性から量子化を行った．場の量子論では粒子数が量子的に変化しうるため，波動関数を生成消滅演算子で表す必要がある．生成消滅演算子の非可換性を用いた 2 度目の量子化を**第 2 量子化** (second quantization) という．

時空点 $(\boldsymbol{r}, t)$ に粒子を 1 つ生成する演算子を $\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r}, t)$ と表し，消滅させる演算子を $\hat{\psi}(\boldsymbol{r}, t)$ と表す．それぞれ粒子の**生成演算子**，**消滅演算子**という．これらは**粒子数演算子** $\hat{n}(\boldsymbol{r}, t)$ とは非可換である．なぜなら，粒子を生成してから粒子数を測定する操作 $\hat{n}\hat{\psi}^\dagger$ と粒子数を測定してから粒子を生成する操作 $\hat{\psi}^\dagger\hat{n}$ では，結果として得られる粒子数は 1 異なるからである．これを数式で表すと，同じ時空点の演算子の間には

$$\hat{n}\hat{\psi}^\dagger - \hat{\psi}^\dagger\hat{n} = \hat{\psi}^\dagger \tag{0.0.1}$$

が要請される．同様に，

$$\hat{n}\hat{\psi} - \hat{\psi}\hat{n} = -\hat{\psi} \tag{0.0.2}$$

が要請される．よって，これらを満たす $\hat{n}$ と $\hat{\psi}, \hat{\psi}^\dagger$ の間には

$$\hat{n} = \hat{\psi}^\dagger\hat{\psi} \tag{0.0.3}$$

$$\begin{cases} \left[\hat{\psi}^\dagger, \hat{\psi}\right] = -1 \\ \left[\hat{\psi}, \hat{\psi}\right] = \left[\hat{\psi}^\dagger, \hat{\psi}^\dagger\right] = 0 \end{cases} \tag{0.0.4}$$

または

$$\hat{n} = \hat{\psi}^\dagger\hat{\psi} \tag{0.0.5}$$

$$\begin{cases} \left\{\hat{\psi}^\dagger, \hat{\psi}\right\} = 1 \\ \left\{\hat{\psi}, \hat{\psi}\right\} = \left\{\hat{\psi}^\dagger, \hat{\psi}^\dagger\right\} = 0 \end{cases} \tag{0.0.6}$$

が満たされる必要がある．後で見るように**式** (0.0.4) はボゾンを表し，**式** (0.0.6) はフェルミオンを表す．

まず，**式** (0.0.4) を満たす演算子を考える．**式** (0.0.4) は時空の場所依存性を書くと

$$\left[\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r}', t'), \hat{\psi}(\boldsymbol{r}, t)\right] = -\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\delta(t - t') \tag{0.0.7}$$

$$\left[\hat{\psi}(\boldsymbol{r}', t'), \hat{\psi}(\boldsymbol{r}, t)\right] = \left[\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r}', t'), \hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r}, t)\right] = 0 \tag{0.0.8}$$

となる．

1 粒子系のハミルトニアン

$$\hat{H}_1 = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\boldsymbol{r}) \tag{0.0.9}$$

を多粒子系に拡張する．多粒子のハミルトニアンとして

$$\hat{H} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\, \hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r})\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\boldsymbol{r})\right)\hat{\psi}(\boldsymbol{r}) \tag{0.0.10}$$

を考える．上式は部分積分を実行することで

$$\hat{H} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\left(\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla\hat{\psi}^\dagger)(\nabla\hat{\psi}) + V(\boldsymbol{r})\hat{\psi}^\dagger\hat{\psi}\right) \tag{0.0.11}$$

と変形できる．

上のハミルトニアンが 1 粒子の量子力学を再現することを確認する．まず，真空を

$$\hat{\psi}(\boldsymbol{r})\left|0\right\rangle = 0 \tag{0.0.12}$$

として定義する．つまり，粒子が存在しないという状態である．また，粒子が $\boldsymbol{r}$ に存在する状態 $\left|\boldsymbol{r}\right\rangle$ は

$$\left|\boldsymbol{r}\right\rangle = \hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r})\left|0\right\rangle \tag{0.0.13}$$

と表される．点 $\boldsymbol{r}$ に粒子が存在する確率振幅を $\phi(\boldsymbol{r},t)$ とすると 1 粒子状態は

$$|\phi\rangle = \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\phi(\boldsymbol{r},t)\,|\boldsymbol{r}\rangle = \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\phi(\boldsymbol{r},t)\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r})\,|0\rangle \tag{0.0.14}$$

と表される．**式** (0.0.14) に**式** (0.0.11) を作用させると，

$$\hat{H}\,|\phi\rangle = \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\,\phi(\boldsymbol{r},t)\bigg(\frac{\hbar^2}{2m}\Big(\nabla_{\boldsymbol{r}'}\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r}')\Big)\Big(\nabla_{\boldsymbol{r}'}\hat{\psi}(\boldsymbol{r}')\Big) + V(\boldsymbol{r}')\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r}')\hat{\psi}(\boldsymbol{r}')\bigg)\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r})\,|0\rangle \tag{0.0.15}$$

を得る．さらに第 1 項を部分積分して

$$\hat{H}\,|\phi\rangle = \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\,\phi(\boldsymbol{r},t)\bigg(-\frac{\hbar^2}{2m}\Big(\nabla^2_{\boldsymbol{r}'}\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r}')\Big)\hat{\psi}(\boldsymbol{r}') + V(\boldsymbol{r}')\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r}')\hat{\psi}(\boldsymbol{r}')\bigg)\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r})\,|0\rangle \tag{0.0.16}$$

を得る．ここで，

$$\hat{\psi}(\boldsymbol{r}')\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r})\,|0\rangle = \delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}) \tag{0.0.17}$$

だから，さらに変形することができ，

$$\begin{aligned}\hat{H}\,|\phi\rangle &= \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\,\phi(\boldsymbol{r},t)\bigg(-\frac{\hbar^2}{2m}\Big(\nabla^2_{\boldsymbol{r}'}\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r}')\Big) + V(\boldsymbol{r}')\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r})\bigg)\delta(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}) &(0.0.18)\\ &= \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,\bigg[\bigg(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\boldsymbol{r})\bigg)\phi(\boldsymbol{r},t)\bigg]\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r})\,|0\rangle &(0.0.19)\end{aligned}$$

を得る．**式** (0.0.19) に左から $\langle\boldsymbol{r}|$ を作用すると，

$$\langle\boldsymbol{r}|\,\hat{H}\,|\phi\rangle = \bigg(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\boldsymbol{r})\bigg)\phi(\boldsymbol{r},t) \tag{0.0.20}$$

となる．上式の左辺は Schrödinger 方程式

$$\bigg(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\boldsymbol{r})\bigg)\phi(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi(\boldsymbol{r},t) \tag{0.0.21}$$

の左辺と一致する．よって，

$$\hat{H}\,|\phi\rangle = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,|\phi\rangle \tag{0.0.22}$$

を得る．これが，多体の量子論の時間発展を記述する方程式である．

次に 2 粒子系を考える．粒子が $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2$ にいる状態は

$$|\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2\rangle = \hat{\psi}(\boldsymbol{r}_1)^\dagger\hat{\psi}(\boldsymbol{r}_2)^\dagger\,|0\rangle \tag{0.0.23}$$

である．さらに 2 粒子状態 $|\phi_2\phi_1\rangle$ は

$$|\phi_2\phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\,\phi_2(\boldsymbol{r}')\phi_1(\boldsymbol{r})\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r}')\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r})\,|0\rangle \tag{0.0.24}$$

と表される．よって，$\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2$ で粒子を観測する確率振幅は

$$\begin{aligned}\langle\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2|\phi_2\phi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\,\phi_2(\boldsymbol{r}')\phi_1(\boldsymbol{r})\,\langle 0|\,\hat{\psi}(\boldsymbol{r}_1)\hat{\psi}(\boldsymbol{r}_2)\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r}')\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r})\,|0\rangle &(0.0.25)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\,\phi_2(\boldsymbol{r}')\phi_1(\boldsymbol{r})\,\langle 0|\,\Big(\delta(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}')\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r}) + \delta(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r})\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r}')\Big)\,|0\rangle &(0.0.26)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\,(\phi_2(\boldsymbol{r}_2)\phi_1(\boldsymbol{r}) + \phi_2(\boldsymbol{r})\phi_1(\boldsymbol{r}_2))\,\langle 0|\,\hat{\psi}(\boldsymbol{r}_1)\hat{\psi}^\dagger(\boldsymbol{r})\,|0\rangle &(0.0.27)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_2(\boldsymbol{r}_2)\phi_1(\boldsymbol{r}_1) + \phi_2(\boldsymbol{r}_1)\phi_1(\boldsymbol{r}_2)) &(0.0.28)\end{aligned}$$

となる．これは 2 つの粒子の分布を対称化した確率振幅となっている．つまり，どちらの粒子がどちらの波動関数の状態にあるのか区別できない．また，これは Bose 統計に従う粒子，ボゾンを表している．思い出してほしいのは，出発点は**式** (0.0.4) であったことである．