

# プラズマ物理講義ノート

Yuto Masuda

更新日: December 20, 2024

# Contents

<b>0</b>	<b>プラズマとは何か</b>	<b>2</b>
0.1	プラズマとは？	2
0.2	自然界のプラズマ	2
0.3	地上に太陽を	2
<b>1</b>	<b>プラズマの基本的性質</b>	<b>4</b>
1.1	プラズマの温度	4
1.2	電気的中性	5
1.3	Debye 遮蔽	6
1.4	プラズマ・パラメータ	7
1.5	プラズマ振動	8
<b>2</b>	<b>プラズマの生成</b>	<b>10</b>
2.1	イオン化エネルギー	10
2.2	解離過程	10
2.2.1	衝突電離	10
2.2.1.1	弾性衝突と非弾性衝突	11
2.2.1.2	衝突断面積	11
2.2.1.3	平均自由行程	11
2.2.1.4	衝突時間と衝突周波数	12
2.2.1.5	速度係数	13
2.2.2	光電離	13
2.2.3	励起過程	14
2.2.4	再結合過程	14
<b>3</b>	<b>単一荷電粒子の運動</b>	<b>15</b>
3.1	はじめに	15
3.2	一様磁場中での粒子の運動	15
3.2.1	磁場に垂直方向の運動	15
3.2.2	ドリフト運動	16
3.2.2.1	$E \times B$ ドリフト	17
3.2.2.2	一般的な力によるドリフト	17

# Chapter 0

## プラズマとは何か

### 0.1 プラズマとは？

物質に熱を加えていくと、固体、液体、気体へと変化する。気体にさらに熱を加え、原子がイオンと電子に分離する。この状態を**プラズマ**という。

プラズマの定義

プラズマとは、荷電粒子を含んだほぼ中性の粒子集団。

ここで、粒子集団とは、**電離したイオンと電子を含む気体**のことである。プラズマと普通の中性気体との違いは以下のようになる。

1. 中性気体の相互作用は衝突を通してのみである。
2. プラズマは荷電粒子なので、相互作用は Coulomb 力である。これは多数の粒子間で遠距離まで及ぶ。

上記で「ほぼ中性」と述べたのは、プラズマには時間的空間的電荷の偏りがあるからである。しかし、プラズマにはこの偏りを打ち消す性質 (Debye 遮蔽, プラズマ振動) がある。ラフに言えばこうである。まず、ある正電荷の周りに電子が集まる。この領域は電子が増えるので電氣的に負になる。ほかの領域は電氣的に正になる。電子はこの正の領域に戻っていく。プラズマ物理ではエネルギーや温度が指標に使われる。

$$1 \text{ eV} \sim 1 \times 10^4 \text{ }^\circ\text{C} \quad (0.1.1)$$

である。

### 0.2 自然界のプラズマ

Einstein の関係式より、

$$E = mc^2 \quad (0.2.1)$$

であるから、1 g の水素の核融合によるエネルギーは、

$$6.5 \times 10^{11} \text{ J} \quad (0.2.2)$$

である。

### 0.3 地上に太陽を

ローソン条件

核融合反応が持続するために必要な温度、密度、閉じ込め時間の関係。

ローソン図

ローソン条件を満たす関係をエネルギー増倍率  $Q$  として,

$$Q = \frac{(\text{核融合出力})}{(\text{加熱パワー})} \quad (0.3.1)$$

で図示したもの.

# Chapter 1

## プラズマの基本的性質

### 1.1 プラズマの温度

プラズマの温度は、密度とともにもっとも基本的かつ重要な物理量の一つである。壁の温度  $T$  が一定の容器に、十分長い時間気体粒子を閉じ込めると気体粒子は衝突を繰り返し熱平衡状態になる。粒子の速度分布は Maxwell 分布に従う。単位体積当たり  $n$  個の粒子が温度  $T$  で熱平衡状態にあるとする。速度が  $v_x$  と  $v_x + dv_x$  の範囲にある粒子の個数は、

$$f(v_x) dv_x, f(v_x) = A \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2k_B T}\right) \quad (1.1.1)$$

である。  $A$  は規格化条件から求められる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(v_x) dv_x = n \quad (1.1.2)$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} A \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2k_B T}\right) dv_x = n \quad (1.1.3)$$

$$\Rightarrow A = n \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \quad (1.1.4)$$

温度は速度分布の広がりを表すパラメータである。高温ほど、速度が大きい粒子が多い。粒子の平均エネルギーを計算する。

$$E_{av} = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m v_x^2 f(v_x) dv_x = \frac{1}{2} k_B T \quad (1.1.5)$$

熱速度を

$$v_{th} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \quad (1.1.6)$$

とすると、

$$f(\pm v_{th}) = \frac{1}{e} f(0) \quad (1.1.7)$$

である。

3次元に拡張すると分布関数は、

$$f(v_x, v_y, v_z) = n \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{k_B T} \right] \quad (1.1.8)$$

$$E_{av} = \frac{3}{2} k_B T \quad (1.1.9)$$

である。速さ  $v$  に関する速度分布は

$$F(v) = 4\pi n \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{m v^2}{k_B T} \right] \quad (1.1.10)$$

である。これは  $v = v_{\text{th}}$  で最大となる。また、速度ベクトルの向きに依らず、速さのみに依存する。**等方分布**である。

速度あるいは速さの平均値は、温度や熱速度と共に、**速度分布を特徴づける物理量**として、今後、重要となる。速度ベクトルの平均値は 0 である。

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{0} \quad (1.1.11)$$

次に速さの平均値を計算する。

$$\langle v \rangle = \frac{1}{n} \int_0^\infty v F(v) dv = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} \quad (1.1.12)$$

これは熱速度よりわずかに大きい。

速度分布関数についての平均は一般的に次のようになる。ある物理量  $X$  を考える。 $X$  の平均値は

$$\langle X \rangle = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty X f(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z \quad (1.1.13)$$

である。特に、等方的な分布の場合、

$$\langle X \rangle = \frac{1}{n} \int_0^\infty X F(v) dv \quad (1.1.14)$$

である。これはプラズマを流体的に扱う時に用いられる。

## 1.2 電気的中性

電子の個数密度を  $n_e$ 、イオンの個数密度を  $n_i$  とする。イオンが 1 価ならば、

$$(-e)n_e + (+e)n_i = 0 \quad (1.2.1)$$

$$\Rightarrow n_e = n_i \quad (1.2.2)$$

が成り立つ。Z 価のイオンならば、

$$(-e)n_e + (+Ze)n_i = 0 \quad (1.2.3)$$

$$\Rightarrow n_e = Zn_i \quad (1.2.4)$$

イオンの種類が多数の場合には、

$$\sum_j (Z_j e) n_j = 0 \quad (1.2.5)$$

が成り立つ。ただし、 $j$  は荷電粒子の種類、例えば電子やイオンを表す。ヘリウムを例に考えてみる。ヘリウムには 1 価イオンと 2 価イオンがあるので、

$$(-e)n_e + (+e)n_{\text{He}^+} + (+2e)n_{\text{He}^{2+}} = 0 \quad (1.2.6)$$

が成り立つ。

以上はマクロに見た電気的中性であったが、プラズマはミクロに見ると揺らいでいる。プラズマは以下の機構により**準中性**と呼ばれる。まず、プラズマはランダムな熱運動をしている。この熱運動により、ある瞬間には揺動電場が形成される。プラズマはこの電場を打ち消すように運動する。よって、プラズマはほぼ中性であり、

$$n_i \simeq n_e \quad (1.2.7)$$

が成り立つ。

### 1.3 Debye 遮蔽

プラズマ粒子は互いに Coulomb 相互作用

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \quad (1.3.1)$$

を及ぼしあう。このときのポテンシャルは

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (1.3.2)$$

であるが、これはあくまで真空中でのポテンシャルであり、プラズマの存在を加味していない。プラズマによる遮蔽を考えたものとして、次の **Debye ポテンシャル**がある。

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) \quad (1.3.3)$$

$\lambda_D$  を **Debye 遮蔽長**、 $\exp(-r/\lambda_D)$  を **Debye 遮蔽ファクター**という。プラズマ中で正電荷の偏りができると、そこに電子が引き寄せられる。この引き寄せられた電子たちが正電荷の電場を遮蔽する。

Debye の遮蔽長は以下の式を満たす。

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{e^2 n}} \quad (1.3.4)$$

つまり、 $T$  が大きいほど、電子はランダムな熱運動をするため、正電荷の周りにとどまらず、 $\lambda_D$  は大きくなる。一方、 $n$  が大きいほど電子が集まりやすいため、 $\lambda_D$  は小さくなる。また、係数を計算すると、

$$\lambda_D = 7.4 \times 10^3 \sqrt{\frac{T \text{ eV}}{n \text{ m}^{-3}}} \quad (1.3.5)$$

である。

Debye 遮蔽と準中性条件は以下の関係にある。プラズマの特徴的な大きさや長さ  $L$  が Debye 遮蔽長  $\lambda_D$  より十分に大きい、つまり、

$$L \gg \lambda_D \quad (1.3.6)$$

のとき、空間的な電荷の偏りは無視でき、ほぼ中性とみなせる。

定性的な議論は以上として、次に Debye 遮蔽を導出する。出発点は式 (1.3.7) の Poisson 方程式である。

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (1.3.7)$$

ここで、1 価のイオンと電子で構成されるプラズマの場合、

$$\rho(\mathbf{r}) = e[n_i(\mathbf{r}) - n_e(\mathbf{r})] \quad (1.3.8)$$

である。モデルとして、プラズマ中で生じた電荷の偏りを試験電荷、つまり点電荷として近似する。試験電荷の電荷量を  $q_T$  として、これが原点にあるとする。試験電荷を含めると電荷密度は

$$\rho(\mathbf{r}) = e[n_i(\mathbf{r}) - n_e(\mathbf{r})] + q_T \delta(\mathbf{r}) \quad (1.3.9)$$

とかける。また、球対称性を仮定し、 $\theta$  と  $\phi$  依存性を捨てると、ラプラシアンは

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \quad (1.3.10)$$

となる。ここで、イオンの質量は電子に比較して大きく動きにくいとすると、イオンの電荷密度は試験電荷がない場合の様な密度にほぼ等しい。

$$n_i(r) \simeq n_0 \quad (1.3.11)$$

また、電子密度は Boltzmann 関係式

$$n_e(r) = n_0 \exp \left[ \frac{e\phi(r)}{k_B T} \right] \simeq n_0 \left[ 1 + \frac{e\phi(r)}{k_B T} \right] \quad (1.3.12)$$

を満たす。式 (1.3.9), 式 (1.3.12), 式 (1.3.11) を式 (1.3.7) に代入すると,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 k_B T} \phi(r) - \frac{q_T}{\varepsilon_0} \delta(r) \quad (1.3.13)$$

となる。ここで,  $\frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 k_B T} = \frac{1}{\lambda_D^2}$  とおくと,  $r \neq 0$  で,

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \frac{1}{\lambda_D^2} \phi(r) \quad (1.3.14)$$

である。上式の一般解は

$$\phi(r) = \frac{A}{r} \exp \left( -\frac{r}{\lambda_D} \right) + \frac{B}{r} \exp \left( +\frac{r}{\lambda_D} \right) \quad (1.3.15)$$

である。次に境界条件を考える。無限遠でポテンシャルが発散することは無いので

$$B = 0 \quad (1.3.16)$$

試験電荷の極近傍ではポテンシャルは Coulomb ポテンシャルと一致するはずなので

$$\phi(0^+) = \frac{q_T}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad (1.3.17)$$

$$\Rightarrow A = \frac{q_T}{4\pi\varepsilon_0} \quad (1.3.18)$$

である。以上から Debye 遮蔽のポテンシャル

$$\phi(r) = \frac{q_T}{4\pi\varepsilon_0 r} \exp \left( -\frac{r}{\lambda_D} \right) \quad (1.3.19)$$

が得られる。

## 1.4 プラズマ・パラメータ

Debye の遮蔽長を半径とする球 (Debye 球) を考える。この球の中に含まれるプラズマ粒子の数  $N_\lambda$  はプラズマの密度を  $n$  として,

$$N_\lambda = \frac{4\pi}{3} n \lambda_D^3 \quad (1.4.1)$$

となる。Debye 遮蔽が有効に働くためには, Debye 球内に十分多数の荷電粒子が存在しなければならない。つまり,

$$N_\lambda \gg 1 \quad (1.4.2)$$

という条件を満たさなければならない。よって, この  $N_\lambda$  をプラズマ・パラメータという。一般に式 (1.4.2) が満たされるとき, Debye 遮蔽が有効に働き, 荷電粒子からなる気体は, ほぼ中性とみなせる。したがって,  $N_\lambda$  は対象がプラズマであることを示す一つの指標である。しかし, 負電荷が正電荷に完全に束縛されてしまうと, 荷電粒子から構成される期待と考えることはできない。よって, Coulomb 力を振り払うほどの運動エネルギーをもつことが, プラズマであるための条件となる。すなわち,

$$\frac{3}{2} k_B T \gg \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{d} \quad (1.4.3)$$



が条件となる．ここで， $d$  は粒子間の平均距離である．上式を変形すると，

$$\left(\frac{3}{2}k_B T\right)\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{d}\right)^{-1} \gg 1 \quad (1.4.4)$$

となる．以下に，式 (1.4.2) と式 (1.4.4) が等価であること，すなわち， $N_\lambda$  が運動エネルギーと Coulomb ポテンシャルの比に対応するパラメータであることを示す．まず，プラズマの密度が  $n$  であるから，プラズマ 1 つが占める体積は

$$V = \frac{1}{n} \quad (1.4.5)$$

である．また，プラズマの平均距離は  $d$  であるから，

$$V = d^3 \quad (1.4.6)$$

である．よって，

$$d \simeq n^{-1/3} \quad (1.4.7)$$

を得る．したがって，

$$N_\lambda = \frac{4\pi}{3} n \lambda_D^3 \quad (1.4.8)$$

$$= \frac{4\pi}{3} \frac{1}{d^3} \left( \frac{\epsilon_0 k_B T}{e^2/d^3} \right)^{3/2} \quad (1.4.9)$$

$$\Rightarrow N_\lambda \propto \left[ \frac{(3/2)k_B T}{(e^2/4\pi\epsilon_0 d)} \right]^{3/2} \quad (1.4.10)$$

である．右辺は運動エネルギーと Coulomb ポテンシャルの比となっている．

## 1.5 プラズマ振動

**プラズマ振動** (plasma oscillation) は以下のような機構で発生する．まず，プラズマはランダムな熱振動をしている．

1. そのため，電気的な中性が崩れる．
2. 中性が崩れたため電場が発生する．
3. この電場をシールドするためにプラズマ粒子が運動する．
4. この運動の慣性のために再び中性が崩れる．

1 から 4 を繰り返すことをプラズマ振動という．以下に，プラズマ振動の振動数，プラズマ振動数を求める．まず，プラズマの集団が  $x$  だけずれたとする．このとき，電子の平衡位置からのずれにより生じる電荷  $\sigma$  は

$$\sigma = 1 \times x \times ne \quad (1.5.1)$$

である．ここで，イオンは質量が大きいため動かないとした．次に，この電荷により生じる電場は

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (1.5.2)$$

である．よって， $n$  個の電子の運動方程式は

$$nm_e \frac{d^2 x}{dt^2} = n(-e)E \quad (1.5.3)$$

$$\Rightarrow nm_e \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{n^2 e^2}{\epsilon_0} x \quad (1.5.4)$$

である。これは振動数が

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m_e \varepsilon_0}} \quad (1.5.5)$$

である単振動の方程式であることがわかる。この  $\omega_p$  をプラズマ振動数という。プラズマ振動数はプラズマの密度が大きいほど大きくなることがわかる。また、物理定数を代入すると、具体的に

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m_e \varepsilon_0}} \quad (1.5.6)$$

$$= \sqrt{\frac{n \cdot (1.602 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{9.109 \times 10^{-31} \text{ kg} \cdot 8.854 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}}} \quad (1.5.7)$$

$$= 5.641 \times 10^{11} \sqrt{\frac{n}{10^{20}}} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad (1.5.8)$$

$$\Leftrightarrow f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = 8.98 \times 10^{10} \sqrt{\frac{n}{10^{20}}} \text{ Hz} \quad (1.5.9)$$

## Chapter 2

# プラズマの生成

## 2.1 イオン化エネルギー

高校物理の完全な復習なので式のみ示す。古典的な円運動は、

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \quad (2.1.1)$$

量子化条件は

$$m_e v r = n \frac{h}{2\pi} \quad (2.1.2)$$

許される軌道半径は

$$r_n = n^2 \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m_e e^2} \quad (2.1.3)$$

$$= n^2 \cdot 5.3 \times 10^{-11} \text{ m} \quad (2.1.4)$$

$n = 1$  のときの軌道半径を Bohr 半径と言い、 $5.3 \times 10^{-11} \text{ m}$  である。各軌道に対する電子の全エネルギーは、

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{8\pi\epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2} \quad (2.1.5)$$

$$= -\frac{1}{n^2} \cdot 13.6 \text{ eV} \quad (2.1.6)$$

$n = 1$  のとき、 $-13.6 \text{ eV}$  である。イオン化エネルギーの定義は、

$$\Delta E = E_\infty - E_1 = 13.6 \text{ eV} \quad (2.1.7)$$

であるから、水素原子のイオン化エネルギーは  $13.6 \text{ eV}$  である。常温・常圧では 2 原子あるいはそれ以上の原子が結合して分子の状態にあることが多い。この場合には、解離過程を経て原子になり、その後、電離することが多い。

## 2.2 解離過程

では、どのようにして電離に必要なエネルギーを与えるのだろうか。主に、電子による**衝突電離**と**光電離**がある。

### 2.2.1 衝突電離

イオン化エネルギー以上のエネルギーを衝突によって与えて中性粒子を電離させる方法が衝突電離である。1 個の原子を電離するにはおよそ、 $5 \text{ eV}$  から  $25 \text{ eV}$  のエネルギーが必要である。

衝突させる粒子としては荷電粒子が用いられる。なぜなら、電圧により容易に加速させられるからである。電子を使ったものを**電子衝突電離** (electron impact ionization) という。電子はイオンに比べ、「種」になる電子が作りやすく、衝突によるエネルギーの授受の効率が良い、という特徴がある。

### 2.2.1.1 弾性衝突と非弾性衝突

**弾性衝突** (elastic collision) はでは、衝突前後で粒子の運動エネルギーが保存する。**非弾性衝突**では、運動エネルギーは保存しない。しかし、全エネルギーは保存されるため、運動エネルギーの一部が粒子の内部状態の変化に使われる。例えば、衝突電離過程や衝突励起過程に使われる。つまり、

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} + \Delta U \quad (2.2.1)$$

であり、 $\Delta U$  が粒子の内部状態変化に使われたエネルギーである。まとめると、弾性衝突は内部状態の変化を伴わず、粒子の軌道を変えるだけである。よって、粒子拡散や熱伝導など輸送過程で重要となる。一方、非弾性衝突では内部状態の変化を伴う。よって、プラズマ生成・消滅過程で重要となる。

### 2.2.1.2 衝突断面積

衝突過程を記述する物理量として**衝突断面積** (cross section of collision) がある。これは衝突のしやすさを示すパラメータである。例えば、半径  $r_1$  の粒子と半径  $r_2$  の粒子の衝突を考える。粒子は剛体球とみなすと、中心間距離が  $r_1 + r_2$  以下のときに衝突する。よって、半径  $r_1 + r_2$  の円の面積が衝突を表すパラメータとして有用である。したがって、衝突断面積は

$$\sigma = \pi(r_1 + r_2)^2 \quad (2.2.2)$$

である。この剛体球モデルが使えるのは、中性原子-中性原子の衝突や荷電粒子-中性原子の衝突である。これらは原子半径程度まで接近したときに力を及ぼしあう。一方、荷電粒子-荷電粒子は、Coulomb 力が遠距離まで及ぶため、剛体球として扱えない。

剛体球モデルでは、原子内の最外殻電子の軌道半径を球の半径とみなす。原子番号が大きくなるほど衝突はしやすくなる。また、電子の de Broglie 波長は

$$\lambda_d = \frac{h}{m_e v_e} \quad (2.2.3)$$

である。電子の速度やエネルギーが十分大きい時は電子の波動性を考慮する必要はなく、衝突断面積は原子半径程度と考えることができる。

一方、電子のエネルギーが低く、

$$\lambda_d \simeq (\text{原子半径}) \quad (2.2.4)$$

となると量子力学的な扱いが必要である。

非弾性衝突 (例えば電離反応) が起こるためには、衝突する粒子はイオン化エネルギー以上の運動エネルギーを持つ必要がある。イオン化エネルギー以下では衝突してもイオン化は起こらず、断面積は 0 である。よって、断面積にエネルギーの閾値があることがわかる。また、これらの断面積は反応断面積や電離断面積と呼ばれることもある。

### 2.2.1.3 平均自由行程

**平均自由行程** (mean free path) は、衝突と衝突の間の平均的な飛行距離である。位置  $x = 0$ 、面積  $S$  の面から、同じ速度  $v$  を持つ粒子 A のビームを一様に入射する。 $x = 0$  で未衝突の粒子 A の個数を  $N_{A0}$  とする。位置  $x$  での個数を  $N_A(x)$  とする。簡単のため粒子 B は止まっているとする。粒子 A と粒子 B の衝突断面積を  $\sigma_{AB}$  とすると、粒子 A が  $[x, x + dx]$  の微小区間で粒子 B と衝突する確率は

$$P_{AB} = \frac{\sigma_{AB} N_B}{S} \quad (2.2.5)$$

である。 $N_B$  は  $dx$  に含まれる粒子 B の個数である。粒子 B の密度を  $n_B$  とすると、

$$N_B = n_B \cdot S dx \quad (2.2.6)$$

である。よって、衝突確率は

$$P_{AB} \sim \sigma_{AB} n_B dx \quad (2.2.7)$$

である．衝突した粒子の数だけビーム粒子の数は減ると考えると，

$$dN_A = -n_A \sigma_{AB} n_B dx \quad (2.2.8)$$

である．よって，

$$\frac{dN_A}{N_A} = -\sigma_{AB} n_B dx \quad (2.2.9)$$

$$\Rightarrow N_A(x) = N_{A0} \exp\left(-\frac{x}{\lambda_{AB}}\right) \quad (2.2.10)$$

であり，平均自由行程は

$$\lambda_{AB} = \frac{1}{n_B \sigma_{AB}} \quad (2.2.11)$$

となる．

粒子 A が距離  $x$  だけ自由に飛行できる確率を求める．位置 0 から位置  $x$  まで衝突を受けない確率は

$$P_A(x) = \frac{N_A(x)}{N_{A0}} = \exp\left(-\frac{x}{\lambda_{AB}}\right) \quad (2.2.12)$$

である． $[x, x + dx]$  の範囲で衝突を受ける確率は

$$dP_A(x) = \left| \frac{dN_A}{N_A} \right| = \sigma_{AB} n_B dx = \frac{dx}{\lambda_{AB}} \quad (2.2.13)$$

である．よって，距離  $x$  だけ自由に飛行できる確率は

$$P_A \times dP_A = \exp\left(-\frac{x}{\lambda_{AB}}\right) \frac{dx}{\lambda_{AB}} \quad (2.2.14)$$

である．自由に飛行できる距離  $x$  の平均値は

$$\langle x \rangle = \int_0^\infty x \exp\left(-\frac{x}{\lambda_{AB}}\right) \frac{dx}{\lambda_{AB}} = \lambda_{AB} \quad (2.2.15)$$

である． $\lambda_{AB}$  はまさしく平均移動距離を表している．

#### 2.2.1.4 衝突時間と衝突周波数

衝突と衝突の間の平均的な経過時間を**衝突時間**  $\tau_{AB}$  という．これは平均自由行程を飛行するのに要する時間である．

$$\tau_{AB} = \frac{\lambda_{AB}}{v} \quad (2.2.16)$$

で与えられる．また，単位時間当たりの平均的な衝突回数を**衝突周波数**  $\nu_{AB}$  という．

$$\nu_{AB} = \frac{1}{\tau_{AB}} = n_B \sigma_{AB} v \quad (2.2.17)$$

で与えられる．式 (2.2.17) は粒子 1 個当たりの平均的な衝突回数である．粒子 A の密度を  $n_A$  とすると，単位体積単位時間当たりのイオンの生成量  $S$  は

$$S_{AB} = n_A n_B \sigma_{AB} v \quad (2.2.18)$$

である．

### 2.2.1.5 速度係数

実際には、速度分布は一樣ではない。衝突周波数の速度分布に関する平均値は

$$\langle v_{en} \rangle = n_n \langle \sigma_{en}(v) v \rangle \quad (2.2.19)$$

である。ここで、

$$\langle \sigma_{en}(v) \rangle = \int_0^\infty \sigma_{en}(v) f(v) dv \quad (2.2.20)$$

を**速度係数** (反応速度係数, rate coefficient) という。単位は  $\text{m}^3/\text{s}$  である。これを使うと、単位体積単位時間当たりの衝突回数は

$$S_{en} = n_e n_n \langle \sigma_{en}(v) v \rangle \quad (2.2.21)$$

と表される。

## 2.2.2 光電離

光子のエネルギーがイオン化エネルギーより大きければ、電離が起こるようになる。地球の電離層はこれによりできる。特に、太陽からの紫外線が電離を引き起こす。光電離の条件は

$$A + h\nu \rightarrow A^+ + e^- \quad (2.2.22)$$

であるので、

$$h\nu \geq eV_i \quad (2.2.23)$$

を満たさなければならない。左辺は光子のエネルギーで、右辺はイオン化エネルギーである。整理すると、

$$\lambda \leq \frac{1239.8 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{V_i} \quad (2.2.24)$$

となる。例えばセシウムの場合  $V_i = 3.98 \text{ eV}$  なので、 $\lambda \leq 320 \text{ nm}$  である。これは紫外線の領域である。大気中では高度の高い方が短い波長、高度の低い方が長い波長の光が吸収される。

大気の構造と組成について補足する。圧力に関する運動方程式は

$$\frac{dp}{dz} = -mgn \quad (2.2.25)$$

である。ここで、 $p = nk_B T$  なので、 $T \sim \text{const.}$  のとき

$$\frac{dn}{dz} = -\frac{mg}{k_B T} n \quad (2.2.26)$$

となる。この解は

$$n(z) = n_0 \exp\left(-\frac{mgz}{k_B T}\right) = n_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right) \quad (2.2.27)$$

である。ここで、

$$H := \frac{k_B T}{mg} \quad (2.2.28)$$

を**スケールハイト** (scale height) という。大気密度が  $1/e$  に減衰する高度を表す。質量が大きいほど早く減衰し、質量が小さいほど遅く減衰する。

### 2.2.3 励起過程

イオン化エネルギー以下でも、原子や分子の内部状態の変化を起こさせる可能性がある。これを、**励起過程** (excitation process) という。

電子が高準位に励起されたとする。励起状態は一般に不安定であるため、より低い準位へと遷移し、結局は基底状態に戻る。低準位への遷移の際、エネルギーを光として放出する。 $E_m$  から  $E_n$  への遷移に伴い放出される光は

$$h\nu = E_m - E_n \quad (2.2.29)$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{hc}{E_m - E_n} \quad (2.2.30)$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{1 \text{ nm}} = \frac{1239.8 \text{ eV}}{E_m - E_n} \quad (2.2.31)$$

の波長をもつ。整理すると

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (2.2.32)$$

である。 $R_H$  は Rydberg 定数で  $R_H = 1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$  である。 $n = 1$  のときを Lyman 系列、 $n = 2$  のときを Balmer 系列という。Balmer 系列は可視領域である。例えば、 $m = 2 \rightarrow n = 1$  のとき  $\lambda = 121.6 \text{ nm}$  で真空紫外線  $L_{y\alpha}$  と呼ばれる。 $m = 3 \rightarrow n = 2$  のとき  $\lambda = 656.3 \text{ nm}$  で  $H_\alpha$  線と呼ばれる。

### 2.2.4 再結合過程

**再結合過程** (recombination process) は代表的なプラズマの消滅過程であり、正負の荷電粒子が結合して中性原子あるいは分子に戻る過程をいう。低温プラズマ (1 eV 以下) では、空間中での再結合 (**体積再結合**) が重要である。

例えば、体積再結合には**放射再結合**,



と **3 体再結合**,



がある。2 つ目の  $e^-$  は触媒のように作用し、 $A^+$  と  $e^-$  の運動エネルギーを受け取る。また、固体表面での再結合過程である**表面再結合**がある。

さらに、**荷電交換過程**という生成方法がある。



原子 B の電子が原子 A に受け渡されると、もともとイオンだった A が中性原子となり、B がイオンとなる。この過程では電荷の交換のみが起き、A, B の運動エネルギーは変化しない。同種粒子の場合、例えば水素では



となるが、電荷の変化ではなく、イオンから中性原子への運動エネルギーの受け渡しが重要な意味をもつ。

## Chapter 3

# 単一荷電粒子の運動

この章ではプラズマがどのような運動をするかを学ぶ。

### 3.1 はじめに

プラズマ輸送の解析には**流体モデル** (Fluid Model) と**運動論的モデル** (Kinetic Model) を用いる。前者はプラズマを連続体として扱い、巨視的なプラズマの振る舞いを記述する。後者は粒子個々の運動を解き、微視的なプラズマの振る舞いを記述する。

### 3.2 一様磁場中での粒子の運動

#### 3.2.1 磁場に垂直方向の運動

一様磁場中では電荷はサイクロトロン運動をする。束密度  $B$  中で電荷  $q$  を持つ粒子が速度  $\mathbf{v}$  で運動しているとす。この粒子が受ける力は

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (3.2.1)$$

である。ここで、

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.2.2)$$

なので Lorentz 力は仕事をしないことがわかる。  
この粒子の運動方程式は以下ようになる。

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (3.2.3)$$

ここで、 $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ ,  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  とする。運動方程式の各成分は

$$m \frac{dv_x}{dt} = qv_y B \quad (3.2.4)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = -qv_x B \quad (3.2.5)$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = 0 \quad (3.2.6)$$

となる。これらを整理すると、

$$\ddot{v}_x = \frac{qB}{m} v_x \rightarrow \ddot{v}_x = -\omega_c^2 v_x \quad (3.2.7)$$

$$\ddot{v}_y = -\frac{qB}{m} v_y \rightarrow \ddot{v}_y = \omega_c^2 v_y \quad (3.2.8)$$



となる．よって，荷電粒子は  $xy$  平面上をサイクロトロン周波数 (cyclotron frequency)  $\omega_c = qB/m$  で円運動することがわかる<sup>1</sup>．また，初期条件

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ v_x = v_{\perp} \\ v_y = 0 \end{cases} \quad \text{at } t = 0 \quad (3.2.9)$$

の下で，この粒子の軌道は

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} \sin(\omega_c t) \\ y(t) = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} (\cos(\omega_c t) - 1) \end{cases} \quad (3.2.10)$$

となる．したがって，

$$x^2 + \left(y + \frac{v_{\perp}}{\omega_c}\right)^2 = \left(\frac{v_{\perp}}{\omega_c}\right)^2 \quad (3.2.11)$$

が成り立つので，この粒子の円運動の旋回中心は

$$(x_g, y_g) = \left(0, -\frac{v_{\perp}}{\omega_c}\right) \quad (3.2.12)$$

で旋回半径は

$$r_L = \frac{v_{\perp}}{|\omega_c|} \quad (3.2.13)$$

である．

まとめると，電荷数  $Z$  の粒子のサイクロトロン周波数は

$$\omega_{cj} = \frac{ZeB}{m_j} \quad (3.2.14)$$

である<sup>2</sup>．サイクロトロン半径は

$$r_{Lj} = \frac{m_j v_{\perp}}{ZeB} \quad (3.2.15)$$

である．また，熱速度  $v_{thj}$  を用いて

$$r_{Lj} = \frac{m_j v_{thj}}{ZeB} \quad (3.2.16)$$

と表すことが多い．

$z$  軸方向には力は働かないので

$$v_{\parallel} = \dot{z} = \text{const.} \quad (3.2.17)$$

$$z = z_0 + v_{\parallel} t \quad (3.2.18)$$

である．つまり，全体としてはらせん運動をしている．

### 3.2.2 ドリフト運動

ここでは一様磁場に加えて電場や重力などが働く場合の粒子の運動や磁場が空間的に変化する場合の粒子の運動を考える．

<sup>1</sup>通常，サイクロトロン周波数という場合には，電荷  $q$  の絶対値をとって， $\omega_c = |q|B/m$  とすることが多い．

<sup>2</sup> $j$  はイオンか電子かを示す．

### 3.2.2.1 $E \times B$ ドリフト

磁場が  $z$  軸方向に向いているとする。前節より粒子は  $xy$  平面上を円運動するのであった。ここに電場を  $x$  方向に加える。このとき、粒子は一方では加速されもう一方では減速される。つまり、上方では  $V_0 + V_1$ 、下方では  $V_0 - V_1$  のように異なってしまう。速度が  $V_0 + V_1$  のときは旋回半径が大きく、 $V_0 - V_1$  のときは旋回半径が小さくなる。よって、旋回中心が下方へドリフトしていく。

このときのドリフト速度は

$$\mathbf{v}_{gE} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (3.2.19)$$

である。以下に導出を行う。

まず、粒子の運動方程式は

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} + q\mathbf{E} \quad (3.2.20)$$

である。この運動を旋回中心の運動と旋回中心のまわりの Larmor 運動に分ける。

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{gc} + \mathbf{r}_c \quad (3.2.21)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{gc} + \mathbf{v}_c \quad (3.2.22)$$

式 (3.2.22) を式 (3.2.20) に代入すると

$$m \frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v}_{gc} + \mathbf{v}_c) \times \mathbf{B} \quad (3.2.23)$$

となる。ここで  $\mathbf{v}_{gc}$  が一定であることを用いた。整理すると、

$$m \frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = q(\mathbf{v}_c \times \mathbf{B}) + q\mathbf{E} + q(\mathbf{v}_{gc} \times \mathbf{B}) \quad (3.2.24)$$

である。左辺と右辺の第 1 項はサイクロトロン運動、右辺の第 2 項と第 3 項は旋回中心の運動を表している。旋回中心の運動に注目すると、

$$\mathbf{0} = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v}_{gc} \times \mathbf{B}) \quad (3.2.25)$$

この両辺を  $q$  で割り、 $\mathbf{B}$  を外積する。ベクトル解析の公式より

$$B^2 \mathbf{v}_{gc} = -\mathbf{B} \times \mathbf{E} \quad (3.2.26)$$

が得られる。よって、

$$\mathbf{v}_{gc} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (3.2.27)$$

である。

### 3.2.2.2 一般的な力によるドリフト

$\mathbf{E} \times \mathbf{B}$  ドリフトによる旋回中心の移動は、電場による力によって粒子が加速 or 減速され、そのため場所によって Larmor 半径が変わることによるものであった。この考え方は他の場合にも適用できる。

一般な力  $\mathbf{F}$  のときは

$$q\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F} \quad (3.2.28)$$

とすればよく、ドリフト速度は

$$\mathbf{v}_F = \frac{1}{q} \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (3.2.29)$$

である。例えば重力の場合は

$$\mathbf{v}_F = \frac{m}{q} \frac{\mathbf{g} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (3.2.30)$$

となる。

磁場勾配ドリフト速度は

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \pm \frac{1}{2} v_{\perp} r_L \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2} \quad (3.2.31)$$

である。

# Index

運動論的モデル, 15

サイクロトロン運動, 15

サイクロトロン周波数, 16

準中性, 5

旋回中心, 16

旋回半径, 16

Debye 遮蔽長, 6

Debye 遮蔽ファクター, 6

Debye ポテンシャル, 6

プラズマ, 2

Maxwell 分布, 4

粒子集団, 2

流体モデル, 15