
本章では、これから議論する場の量子論の準備を行う．場の量子論は、既存の量子力学などの物理法則あるいは方程式を **Poincaré 変換** に対して不変な形に書き直す理論である．ただし、Poincaré 変換は、Lorentz 変換と時空並進変換のことである．

まず、この要請から微小な時空間上の2点、 (ct, x, y, z) , $(ct + dt, x + dx, y + dy, z + dz)$ に対して、世界長さ ds^2 を考える．

$$ds^2 := c dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (0.0.1)$$

4次元時空座標を、

$$x^\mu := (ct, x, y, z) \quad (0.0.2)$$

$$x_\nu := (ct, -x, -y, -z) \quad (0.0.3)$$

と定義する．Einstein の縮約を使っていることに注意する．計量テンソル $\eta_{\mu\nu}$ を、

$$\eta_{\mu\nu} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (0.0.4)$$

と定義する．これらの道具を用いれば、

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (0.0.5)$$

と書ける．さて、世界長さ ds が Poincaré 変換に対して不変であることを示そう．