0.1 Klein-Gordon 方程式の「導出」

非相対論的・古典的エネルギーの関係式,

$$E = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} \tag{0.1.1}$$

の両辺に波動函数 $\psi(t, \boldsymbol{x})$ 掛けて

$$E \to \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} \tag{0.1.2}$$

$$\boldsymbol{p} \to -\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla} \tag{0.1.3}$$

なる変換を行えば,

$$E = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} \tag{0.1.4}$$

$$\Rightarrow E\psi(t, \boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}\psi(t, \boldsymbol{x}) \tag{0.1.5}$$

$$\Rightarrow \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi(t, \boldsymbol{x}) = \frac{1}{2m}(-\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla})^2\psi(t, \boldsymbol{x}) \tag{0.1.6}$$

$$\Rightarrow \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi(t, \boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2m}\boldsymbol{\nabla}^2\psi \tag{0.1.7}$$

となり，Schrödinger 方程式を得る．

では相対論的なエネルギーの関係式,

$$E^2 = \boldsymbol{p}^2 + m^2 \tag{0.1.8}$$

を変換すると，どのようになるだろう．自然単位系を用いているため，静止エネルギーの 2 乗について $m^2c^4 = m^2$ となっていることに注意する．**式** (0.1.8) の両辺に波動函数 $\psi(x^\mu)$ 掛けて，**式** (0.1.2)，**式** (0.1.3) を用いれば,

$$E^2 = \boldsymbol{p}^2 + m^2 \tag{0.1.9}$$

$$E\psi(x^\mu) = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}\psi(x^\mu) + m^2\psi(x^\mu) \tag{0.1.10}$$

$$\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\psi(x^\mu) = \left[(-\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla})^2 + m^2\right]\psi(x^\mu) \tag{0.1.11}$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(x^\mu) = -\boldsymbol{\nabla}^2\psi(x^\mu) + m^2\psi(x^\mu) \tag{0.1.12}$$

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu - m^2\right)\psi(x^\mu) = 0 \tag{0.1.13}$$

が成立する．

Klein-Gordon 方程式が Poincaré 変換に対して不変であるためには,

$$\left(\partial'_\nu\partial'^\nu - m^2\right)\psi'(x^\mu) = 0 \tag{0.1.14}$$

$$\Leftrightarrow \left(\partial_\rho\left(\Lambda^{-1}\right)^\rho{}_\nu\Lambda^\nu{}_\rho\partial^\rho - m^2\right)\psi'(x'^\mu) = 0 \tag{0.1.15}$$

$$\Leftrightarrow \left(\partial_\rho\partial^\rho - m^2\right)\psi'(x'^\mu) = 0 \tag{0.1.16}$$

であることより,

$$\psi'(x'^\mu) = \psi(x^\mu) \tag{0.1.17}$$

が成立すればよい．このような函数 $\psi(x)$ のことをスカラー函数という．