

Naive Scattering Theory

Huang Yu-tong

School of Physics, Peking University

2021 年 11 月 6 日

目录

1	散射过程中态矢量的演化	2
1.1	Møller 算符	2
1.2	射出和射入本征态	3
2	散射截面与光学定理	5
2.1	散射截面	5
2.2	Lippmann-Schwinger 方程与散射振幅	7
2.3	散射振幅及其对称性	8
2.4	光学定理	9
2.5	全同粒子散射	9
3	相互作用绘景与 S 矩阵	10
3.1	相互作用绘景和时间发展算符	10
3.2	S 矩阵	11
3.3	S 矩阵的性质	12
4	散射的近似计算	13
4.1	Born 近似	13
4.2	部分势场散射的近似计算	17
4.3	球对称势散射浅析	18

1 散射过程中态矢量的演化

1.1 Møller 算符

算符 $\hat{U}(0, t_0)$

散射问题中，粒子的 Schrödinger 方程为

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = \hat{H}|\psi\rangle, \quad \hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$$

$|\psi(t)\rangle$ 解的形式地写为

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar}|\psi(0)\rangle$$

于是有

$$|\psi(0)\rangle = e^{i\hat{H}t_0/\hbar}|\psi(t_0)\rangle = e^{i\hat{H}t_0/\hbar}|\psi_0(t_0)\rangle$$

$|\psi_0(t_0)\rangle$ 为初始时刻 t_0 的自由粒子态，按自由粒子的 Schrödinger 方程发展，可以写为

$$|\psi_0(t_0)\rangle = e^{-i\hat{H}_0 t_0/\hbar}|\psi_0(t_0)\rangle$$

代回上式，即得

$$|\psi(0)\rangle = e^{i\hat{H}t_0/\hbar}e^{-i\hat{H}_0 t_0/\hbar}|\psi_0(t_0)\rangle = \hat{U}(0, t_0)|\psi_0(t_0)\rangle \quad (1)$$

算符 $\hat{U}(0, t_0) = e^{i\hat{H}t_0/\hbar}e^{-i\hat{H}_0 t_0/\hbar}$ 作用为：把 $t = 0$ 时刻的态 $|\psi_0(0)\rangle$ 先无相互作用的推到初始时刻 t_0 ，再引入相互作用，将其从 t_0 时刻开始在相互作用下发展到 $t = 0$ 时刻的态 $|\psi(0)\rangle$ 。

上述算符 $\hat{U}(0, t)$ 对时间求微商，有

$$\frac{d\hat{U}}{dt} = -\frac{1}{i\hbar}e^{i\hat{H}t/\hbar}\hat{V}e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}$$

从而得到算符 $\hat{U}(0, t)$ 的积分形式

$$\hat{U}(0, t_0) = 1 + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^0 dt e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{V} e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar} \quad (2)$$

取极限 $t_0 \rightarrow \pm\infty$

$$\hat{U}(0, \infty) = 1 + \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \xi(t) e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{V} e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar} \quad (3)$$

其中 $\xi(t)$ 为下述定义的阶跃函数

$$\xi(t) = \begin{cases} 0, & t > 0, \\ 1, & t < 0. \end{cases}$$

利用等式

$$\xi(t)e^{i\hat{H}t/\hbar} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dE \frac{e^{iEt\hbar}}{E - \hat{H} + i\epsilon} \quad (4)$$

即有

$$\hat{U}(0, -\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} dE \hat{\Omega}^+ \delta(E - \hat{H}_0)$$

其中

$$\hat{\Omega}^+ = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[1 + \frac{1}{E - \hat{H}_0 + i\epsilon} \hat{V} \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \hat{\Omega}_{\epsilon}^+(E)$$

类似地, 有

$$\hat{U}(0, \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} dE \hat{\Omega}^- \delta(E - \hat{H}_0)$$

$$\hat{\Omega}^- = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[1 + \frac{1}{E - \hat{H}_0 - i\epsilon} \hat{V} \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \hat{\Omega}_{\epsilon}^-(E)$$

上述公式中, 取极限以前的 $\hat{\Omega}_{\epsilon}^{\pm}(E)$ 为

$$\hat{\Omega}_{\epsilon}^{\pm}(E) = 1 + \frac{1}{E - \hat{H}_0 \pm i\epsilon} \hat{V} \quad (5)$$

算符 $\hat{U}(0, -\infty)$ 和 $\hat{U}(0, \infty)$ 称为 Møller 算符波算符, 简称 Møller 算符.

1.2 射出和射入本征态

定义

回到 (1) 式, 可以看出: 当 $t_0 \rightarrow -\infty$ 时, 用 Møller 算符 $\hat{U}(0, -\infty)$ 作用在自由粒子态 $|\psi_0(0)\rangle$ 上, 就可以得到 $t = 0$ 时刻的解 $|\psi(0)\rangle$; 当 $t_0 \rightarrow \infty$ 时, 用 Møller 算符 $\hat{U}(0, \infty)$ 作用在自由粒子态 $|\psi_0(0)\rangle$ 上, 也可以得到 $t = 0$ 时刻的解 $|\psi(0)\rangle$.

于是我们可以定义

$$|\psi^{\pm}\rangle \equiv \hat{U}(0, \mp\infty)|\psi_0(0)\rangle \quad (6)$$

$|\psi^+\rangle$ 态的含义为: 如果系统从 $t_0 \rightarrow -\infty$ 时无相互作用地自由发展到 $t = 0$ 时刻的态是 $|\psi_0(0)\rangle$, 则它从 $t_0 \rightarrow -\infty$ 时在相互作用下发展到 $t = 0$ 时刻的态是 $|\psi^+\rangle$, 即 $|\psi^+\rangle$ 是由过去 $t_0 \rightarrow -\infty$ 时的处条件确定的散射解.

类似地, $|\psi^-\rangle$ 态的含义为: 如果系统从 $t_0 \rightarrow \infty$ 时无相互作用地自由退回到 $t = 0$ 时刻的态是 $|\psi_0(0)\rangle$, 则它从 $t_0 \rightarrow \infty$ 时在相互作用下退回到 $t = 0$ 时刻的态是 $|\psi^-\rangle$, 即 $|\psi^-\rangle$ 是由将来 $t_0 \rightarrow \infty$ 时的“处条件”确定的散射解.

本征态

入射波近似为 $\Delta \mathbf{k}_0 \rightarrow 0$ 的平面波时, 有

$$|\psi^{\pm}\rangle = \hat{U}(0, \mp\infty)|\mathbf{k}\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} dE \hat{\Omega}_{\epsilon}^{\pm} \delta(E - \hat{H}_0)|\mathbf{k}\rangle = \hat{\Omega}^{\pm}(E_{\mathbf{k}})|\mathbf{k}\rangle$$

则 $|\psi^{\pm}\rangle$ 为 \hat{H} 的本征态, 具有本征值 $E = E_{\mathbf{k}}$.

于是，我们在形式上得到散射解

$$|\psi^\pm(t)\rangle = e^{-iE_\mathbf{k}t/\hbar}|\psi^\pm\rangle$$

由于 $|\psi^\pm\rangle$ 是 \hat{H} 的本征态，有

$$\hat{H}\hat{U}(0, \mp\infty) = \hat{U}(0, \mp\infty)\hat{H}_0 \quad (7)$$

正交归一性和完备性问题

我们有

$$\langle\psi(0)|\psi'(0)\rangle = \langle\psi(0)_0|\hat{U}^\dagger(0, t_0)\hat{U}(0, t_0)|\psi'(0)_0\rangle = \langle\psi(0)_0|\psi'(0)_0\rangle$$

当 $\psi(0)_0$ 和 $\psi'(0)_0$ 中的动量分布宽度都趋于 0 时，有

$$\langle\psi_\mathbf{k}^+|\psi_\mathbf{k}'^+\rangle = \langle\mathbf{k}|\mathbf{k}'\rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

用 Møller 算符来表示，上式给出

$$\hat{U}^\dagger(0, -\infty)\hat{U}(0, -\infty) = 1$$

若系统具有时间反演不变性，则还有

$$\hat{U}^\dagger(0, \infty)\hat{U}(0, \infty) = 1$$

或等价的

$$\langle\psi_\mathbf{k}^-|\psi_\mathbf{k}'^-\rangle = \langle\mathbf{k}|\mathbf{k}'\rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

射出本征态组和入射本征态组都可以分别构成系统 \hat{H} 的散射态的正交归一完备组，但其对全体态矢量的空间并不完备，因为其未包含束缚态，

$$\int d^3\mathbf{k}|\psi_\mathbf{k}^+\rangle\langle\psi_\mathbf{k}^+| = \int d^3\mathbf{k}|\psi_\mathbf{k}^-\rangle\langle\psi_\mathbf{k}^-| \neq 1 \quad (8)$$

等价地，这给出

$$\hat{U}(0, -\infty)\hat{U}^\dagger(0, -\infty) = \hat{U}(0, \infty)\hat{U}^\dagger(0, \infty) \neq 1 \quad (9)$$

2 散射截面与光学定理

2.1 散射截面

散射截面定义

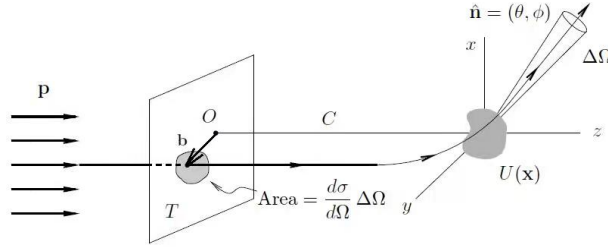


图 1: 散射

考虑一探测器探测 (θ, φ) 处 $\Delta\Omega$ 立体角的散射粒子，有

$$\frac{dw}{d\Omega} \Delta\Omega = J_{inc} \frac{d\sigma}{d\Omega} \Delta\Omega \quad (10)$$

上式中各量的物理意义为： $\frac{dw}{d\Omega}$ 为单位立体角探测到出射粒子的概率； $\mathbf{J}_{inc} = n\mathbf{v}$ 为入射粒子流密度； σ 具有面积的量纲，称为总散射截面， $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ 称为微分散射截面，含义为单位时间内入射到单位靶面积上的一个粒子被散射到 (θ, φ) 方向单位立体角内的概率。

微分散射截面可理解为一将 (θ, φ) 处 $\Delta\Omega$ 立体角对应于靶面上一区域 ΔA 的映射，通过该区域的粒子将被散射到 (θ, φ) 处 $\Delta\Omega$ 立体角内。

散射截面

求解 $E \geq 0$ （粒子不被束缚）的定态 Schrödinger 方程

$$\hat{H}\psi(\mathbf{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{x}) + \hat{V}(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) = E(\mathbf{x}) \quad (11)$$

势能满足 $\lim_{r \rightarrow \infty} V(\mathbf{x}) = 0$.

方程的解在 $r \rightarrow \infty$ 时的散射振幅 $f(\theta, \varphi)$ 满足边界条件：解可表为

$$\psi_E(\mathbf{x}) = \psi_{inc}(\mathbf{x}) + \psi_{scatt}(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \psi_{scatt}(\mathbf{x}) \quad (12)$$

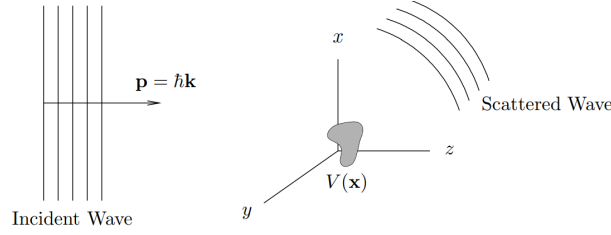


图 2: 入射波和散射波

散射波函数的无穷远渐进式有 $\psi_{scatt}(\mathbf{x}) \sim \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta, \varphi)$

现考虑入射和散射波函数：入射波为平面波，又有 $E \geq 0$ ，故入射和散射波函数无界且不可归一化， $\rho = |\psi|^2$ 不可表示为概率密度。为协调此问题， ρ 可被解释为粒子束密度，相应的，粒子“概率流”

$$\mathbf{J}_{inc} = \text{Re}[\psi^* (-\frac{i\hbar\nabla}{m})\psi]$$

可解释为粒子流。波函数整体的归一化是任意的，表示的是束流的密度。我们所感兴趣的物理量，如微分散射截面，与归一化无关。故现令 $n_{inc} = |\psi_{inc}(\mathbf{x})|^2 = 1$ ，则

$$\mathbf{J}_{inc} = \text{Re}[e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} (-\frac{i\hbar\nabla}{m}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}] = \frac{\hbar\mathbf{k}}{m} = \mathbf{v}$$

即 $\mathbf{J}_{inc} = n_{inc}\mathbf{v} = \mathbf{v}$ 。对散射流，有

$$\mathbf{J}_{scatt} \sim \text{Re} \left\{ \left[\frac{e^{ikr}}{r} f^*(\theta, \varphi) \right] \left(-\frac{i\hbar}{m} \right) \left[\nabla \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta, \varphi) \right] \right\} \quad (13)$$

注意到

$$\nabla \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta, \varphi) = \hat{\mathbf{r}} \left[\frac{ike^{ikr}}{r} f(\theta, \varphi) \right] + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

代入 (13) 式中，得

$$\mathbf{J}_{scatt} \sim v \frac{|f(\theta, \varphi)|^2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

此处用到事实：探测器探测立体角 $\Delta\Omega$ 面积正比于 r^2 ，且 r 远大于散射势尺度，故 $O(\frac{1}{r^3})$ 略去。得到

$$\frac{dw}{d\Omega} \Delta\Omega = \int_{\text{aperture}} \mathbf{J}_{scatt} \cdot d\mathbf{a} = v |f(\theta, \varphi)|^2 \Delta\Omega \quad (14)$$

带入散射截面定义，即得

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \varphi)|^2 \quad (15)$$

2.2 Lippmann-Schwinger 方程与散射振幅

坐标表象中的 Lippmann-Schwinger 方程

散射粒子的 Schrödinger 方程 $(E - \hat{H}_0)\psi(\mathbf{x}) = \hat{V}(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})$ 的形式解满足 Lippmann-Schwinger 方程

$$|\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\rangle = |\mathbf{k}\rangle + \frac{1}{E_k - \hat{H}_0 + i\epsilon} \hat{V} |\psi_{\mathbf{k}}\rangle \quad (16)$$

在坐标表象中写出上述方程，记入射初始波矢为 k_0 ，有

$$\psi_{\mathbf{k}_0}(\mathbf{x}) = \phi_{\mathbf{k}_0}(\mathbf{x}) + \int d^3\mathbf{x}' \langle \mathbf{x} | \frac{1}{E_{k_0} - \hat{H}_0 + i\epsilon} | \mathbf{x}' \rangle V(\mathbf{x}') \psi_{\mathbf{k}_0}(\mathbf{x}') \quad (17)$$

用完备性公式 $\int |\mathbf{k}\rangle \langle \mathbf{k}| d^3\mathbf{k} = 1$ 和回路积分定理可得下列自由粒子 Green 函数

$$\langle \mathbf{x} | \frac{1}{E_{k_0} - \hat{H}_0 + i\epsilon} | \mathbf{x}' \rangle \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0^+} -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ik_0|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \quad (18)$$

积分过程如下：

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \langle \mathbf{x} | \frac{1}{E_{k_0} - \hat{H}_0 + i\epsilon} | \mathbf{x}' \rangle &= \int d^3\mathbf{k} \langle \mathbf{x} | \frac{1}{E_{k_0} - \hat{H}_0 + i\epsilon} | \mathbf{k} \rangle \langle \mathbf{k} | \mathbf{x}' \rangle \\ &= \int d^3\mathbf{k} \frac{1}{E_{k_0} - \hat{H}_0 + i\epsilon} \frac{1}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{1}{E_{k_0} - \hat{H}_0 + i\epsilon} \frac{1}{(2\pi)^3} e^{ikr\cos\theta} k^2 \sin\theta \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{1}{iR} \frac{k}{E_{k_0} - \hat{H}_0 + i\epsilon} \int_0^{\frac{\pi}{2}} ikR \sin\theta e^{ikR\cos\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{1}{iR} \frac{k}{E_{k_0} - \hat{H}_0 + i\epsilon} (e^{ikR} - 1) \\ &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ik_0R}}{R} \end{aligned}$$

代回坐标表象下的 Lippmann-Schwinger 方程，得

$$\psi_{\mathbf{k}_0}(\mathbf{x}) = \phi_{\mathbf{k}_0}(\mathbf{x}) - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3\mathbf{x}' \frac{e^{ik_0|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} V(\mathbf{x}') \psi_{\mathbf{k}_0}(\mathbf{x}') \quad (19)$$

渐进解与散射截面

在散射问题中，令 $\mathbf{x} = \mathbf{r}, \mathbf{x}' = \mathbf{r}', V(\mathbf{r})$ 为短程势，故当 r 充分大时可作近似

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r}, \quad \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{r}$$

代入坐标表象下的 Lippmann-Schwinger 方程, 完成对 \mathbf{r}' 的积分, 得到

$$\psi_{\mathbf{k}_0}(\mathbf{x}) \approx \phi_{\mathbf{k}_0}(\mathbf{x}) + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} f(\theta, \phi) \frac{e^{ik_0 r}}{r}$$

其中散射振幅

$$f(\theta, \phi) = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} \langle \mathbf{k} | \hat{V} | \psi_{\mathbf{k}_0} \rangle_{k=k_0} \quad (20)$$

(θ, ϕ) 为散射波矢 \mathbf{k} 相对于入射波矢 \mathbf{k}_0 的方位角. 于是我们得到微分散射截面公式

$$\frac{d}{d\Omega} \sigma(\theta, \phi) = |f(\theta, \phi)|^2 = \frac{16\pi^4 m^2}{\hbar^4} |\langle \mathbf{k} | \hat{V} | \psi_{\mathbf{k}_0} \rangle_{k=k_0}|^2 \quad (21)$$

2.3 散射振幅及其对称性

散射振幅 $f(\theta, \phi) = f(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} \langle \mathbf{k} | \hat{T}_E | \mathbf{k}_0 \rangle$, 其中 \hat{T}_E 为一迭代得出的算符. 散射振幅具有时间反演不变性和空间反演不变性.

空间反演

空间反演算符 \hat{P} 满足

$$\begin{aligned} \hat{P}|\mathbf{k}\rangle &= |-\mathbf{k}\rangle \\ [\hat{P}, \hat{H}] &= [\hat{P}, \hat{V}] = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

故

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} \langle \mathbf{k} | \hat{T}_E | \mathbf{k}_0 \rangle = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} \langle -\mathbf{k} | \hat{T}_E | -\mathbf{k}_0 \rangle = f(-\mathbf{k}, -\mathbf{k}_0) \quad (23)$$

时间反演

时间反演算符 \hat{T} (对 $\hat{H}^* = \hat{H}$ 的系统即为取复共轭算符) 满足

$$[\hat{T}, \hat{H}] = [\hat{T}, \hat{V}] = 0 \Rightarrow \hat{T} \frac{1}{E + i\epsilon - \hat{H}_0} \hat{T}^\dagger = \frac{1}{E - i\epsilon - \hat{H}_0} = \left(\frac{1}{E + i\epsilon - \hat{H}_0} \right)^\dagger$$

且有

$$\begin{aligned} \hat{T} \hat{T}_E \hat{T}^\dagger &= \hat{T}_E^\dagger \\ \hat{T}|\mathbf{k}\rangle &= |-\mathbf{k}\rangle \end{aligned} \quad (24)$$

故

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} \langle \mathbf{k} | \hat{T}_E | \mathbf{k}_0 \rangle = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} [\langle -\mathbf{k}_0 | \hat{T}_E^\dagger | -\mathbf{k} \rangle] = f(-\mathbf{k}_0, -\mathbf{k})$$

时空反演

完美的对称: $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = f(\mathbf{k}_0, \mathbf{k})$

2.4 光学定理

考虑圆心为散射中心的一球面，由于粒子不被束缚，有

$$\int_{sphere} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (25)$$

其中

$$\mathbf{J} \sim \text{Re} \left[e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \frac{e^{-ikr}}{r} f^*(\theta, \phi) \right] \left(-\frac{i\hbar \nabla}{m} \right) \left[e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta, \phi) \right] = \mathbf{J}_{inc} + \mathbf{J}_{scatt} + \mathbf{J}_x \quad (26)$$

现分别计算各粒子流密度，有

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{inc} &= v \hat{\mathbf{z}} \Rightarrow \int_{sphere} \mathbf{J}_{inc} \cdot d\mathbf{a} = 0 \\ \mathbf{J}_{scatt} &= v \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} |f(\theta, \phi)|^2 \Rightarrow \int_{sphere} \mathbf{J}_{scatt} \cdot d\mathbf{a} = \sigma v \end{aligned}$$

$$\mathbf{J}_x = \frac{v}{r} \text{Re} \left[\hat{\mathbf{z}} e^{-ikr(1-\cos\theta)} f^*(\theta, \phi) + \hat{\mathbf{r}} e^{ikr(1-\cos\theta)} f(\theta, \phi) \right]$$

利用围道积分可求得

$$\int_{sphere} \mathbf{J}_x \cdot d\mathbf{a} = v \text{Re} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \frac{1}{ik} de^{ikr(1-\cos\theta)} (1 + \cos\theta) f(\theta, \phi) = \frac{v}{k} \text{Re} \int_0^{2\pi} d\phi 2if(0) \quad (27)$$

将计算结果代入 (24) 式，得

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \text{Im} f(0) \quad (28)$$

上述结果称为光学定理，其对包括非弹性散射截面的总散射截面成立，表明散射总截面与向前弹性散射振幅的虚部成正比，与入射动量成反比。

2.5 全同粒子散射

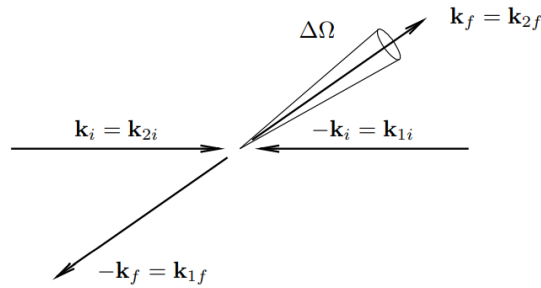


图 3: 全同粒子散射

经典可分辨粒子

对经典的，可分辨的粒子，近似有

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} (e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r})$$

故

$$\frac{d\sigma_{cl}}{d\Omega} = |f(\theta, \phi)|^2 + |f(\pi - \theta, \phi + \pi)|^2 \quad (29)$$

全同粒子

对交换对称下的全同粒子，即玻色子，有

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{x}) &= (e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}) + [f(\theta, \phi) + f(\pi - \theta, \phi + \pi)] \frac{e^{ikx}}{x} \\ \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} &= |f(\theta, \phi) + f(\pi - \theta, \phi + \pi)|^2 \end{aligned} \quad (30)$$

类似的，对费米子，交换反对称，有

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{x}) &= (e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}) + [f(\theta, \phi) - f(\pi - \theta, \phi + \pi)] \frac{e^{ikx}}{x} \\ \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} &= |f(\theta, \phi) - f(\pi - \theta, \phi + \pi)|^2 \end{aligned} \quad (31)$$

3 相互作用绘景与 S 矩阵

3.1 相互作用绘景和时间发展算符

相互作用绘景

我们将系统在 Schrödinger 绘景中的 Hamilton 算符写为

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$$

并且假设其不含时间 t. 从 Schrödinger 绘景到相互作用绘景的么正变换为

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &\rightarrow |\psi_I(t)\rangle = e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} |\psi(t)\rangle, \\ \hat{A} &\rightarrow \hat{A}_I = e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} \hat{A} e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}. \end{aligned}$$

在相互作用绘景中，态矢量和可观测量算符随时间变化的运动方程分别为

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_I(t)\rangle &= \hat{V}_I |\psi_I(t)\rangle, \\ \frac{d}{dt} \hat{A}_I &= \frac{\partial}{\partial t} \hat{A}_I + \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}_I, \hat{H}_0], \end{aligned}$$

其中 \hat{V}_I 为相互作用绘景中的相互作用算符,

$$\hat{V}_I = \hat{V}_I(t) = e^{i\hat{H}_0 t/\hbar} \hat{V} e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}.$$

在相互作用绘景中, 观测量算符的变化由无相互作用的 Hamilton 算符 \hat{H}_0 支配, 而态矢量的变化由相互作用项 \hat{V}_I 支配. 在没有相互作用时, 态矢量不随时间变化. 在没有相互作用时的态矢量已经知道的情况下, 就可以用相互作用绘景来求由于相互作用引起的态矢量随时间的变化. 所以, 相互作用绘景是用来处理散射问题的一个恰当的绘景.

时间发展算符

在相互作用绘景中的时间发展算符 $\hat{U}(t, t_0)$ 可以定义为

$$|\psi_I(t)\rangle(t) = \hat{U}(t, t_0)|\psi_I(t)\rangle(t_0)$$

显然有

$$\begin{aligned}\hat{U}(t, t) &= 1, \\ \hat{U}(t, t_1)\hat{U}(t_1, t_0) &= \hat{U}(t, t_0), \\ \hat{U}^\dagger(t, t_0) &= \hat{U}^{-1}(t, t_0) = \hat{U}(t_0, t).\end{aligned}$$

代入态矢量运动方程, 得到

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t, t_0) = \hat{V}_I(t) \hat{U}(t, t_0),$$

其积分形式为

$$\hat{U}(t, t_0) = 1 + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' \hat{V}_I(t') \hat{U}(t', t_0). \quad (32)$$

用迭代法求解上述积分方程, 即可得到 $\hat{U}(t, t_0)$ 的具体形式, 其为关于 $\hat{V}_I(t)$ 的一个级数.

不难看出, $\hat{U}(t, t_0)$ 在 $t = 0, t_0 \rightarrow \infty$ 时即为 Møller 算符.

3.2 S 矩阵

散射算符

我们可以用下述散射算符来描述散射过程:

$$\hat{S} \equiv \hat{U}(\infty, -\infty).$$

可用 Møller 波算符表为

$$\hat{S} = \hat{U}(\infty, 0)\hat{U}(0, -\infty) = \hat{U}^\dagger(0, \infty)\hat{U}(0, -\infty).$$

时间发展算符 $\hat{U}(t, t_0)$ 描述系统的态在 t_0 到 t 这段时间内在相互作用下的发展变化, 散射算符 $\hat{S} = \hat{U}(\infty, -\infty)$ 描述系统从入射 $t_0 \rightarrow -\infty$ 到出射 $t \rightarrow \infty$ 的时间内在相互作用下的发展变化. 所以, 散射算符包含了系统从入射初态到散射末态的散射过程全部可观测的实际信息.

散射问题的研究，也就是散射算符的研究.

S 矩阵

现求散射算符在散射初态和末态之间的矩阵元，即求散射算符在动量表象中的矩阵元 $\langle \varphi_{\mathbf{p}} | \hat{S} | \varphi_{\mathbf{p}_0} \rangle$ ，得到

$$\langle \varphi_{\mathbf{p}} | \hat{S} | \varphi_{\mathbf{p}_0} \rangle = \langle \psi_{\mathbf{p}}^- | \psi_{\mathbf{p}_0}^+ \rangle$$

即散射算符在动量表象中的矩阵元，等于在射入本征态上测得射出本征态的概率幅. 由于这个关系，我们习惯把算符 \hat{S} 叫做散射矩阵，简称 S 矩阵.

只要求出 S 矩阵，即可从其矩阵元求出散射问题的全部可观察结果. 而我们用迭代法求解时间发展算符的积分方程，可以得到 $\hat{U}(t, t_0)$ 依赖于 $\hat{V}_I(t)$ 的一个级数表达式，再求 $t \rightarrow \infty$ 和 $t \rightarrow -\infty$ 极限，即可得到 S 矩阵依赖于 $\hat{V}_I(t)$ 的一个级数表达式. 于是，相互作用 $\hat{V}_I(t)$ 可以当作微扰，在该级数收敛的情况下，我们可以求得 S 矩阵，从而得到散射问题的解.

3.3 S 矩阵的性质

变换性质

若系统具有转动不变性，则 Hamilton 算符具有转动不变性，S 矩阵具有转动不变性.

其次，若系统具有时间反演不变性，即 $[\hat{T}, \hat{H} = 0]$ ，则有

$$\hat{T} \hat{S} \hat{T}^{-1} = \hat{S}^\dagger$$

S 矩阵与 \hat{H}_0 对易，且有 $\hat{S}^\dagger \hat{S} = \hat{S} \hat{S}^\dagger = 1$ ，即 S 矩阵为幺正的.

S 矩阵元与散射振幅

将 Lippmann-Schwinger 方程 (16) 改写为

$$|\psi_{\mathbf{p}}^+\rangle = |\varphi_{\mathbf{p}}\rangle + \frac{1}{E_k - \hat{H} + i\epsilon} \hat{V} |\varphi_{\mathbf{p}}\rangle$$

类似地，有

$$|\psi_{\mathbf{p}}^-\rangle = |\varphi_{\mathbf{p}}\rangle + \frac{1}{E_k - \hat{H} - i\epsilon} \hat{V} |\varphi_{\mathbf{p}}\rangle$$

于是，我们得到

$$|\psi_{\mathbf{p}}^-\rangle = |\psi_{\mathbf{p}}^+\rangle + \{|\psi_{\mathbf{p}}^-\rangle - |\psi_{\mathbf{p}}^+\rangle\} = |\psi_{\mathbf{p}}^+\rangle + i2\pi\delta(E - \hat{H})\hat{V}|\varphi_{\mathbf{p}}\rangle \quad (33)$$

继而算出

$$\langle \varphi_{\mathbf{p}} | \hat{S} | \varphi_{\mathbf{p}_0} \rangle = \langle \psi_{\mathbf{p}}^- | \psi_{\mathbf{p}}^+ \rangle = \langle \varphi_{\mathbf{p}} | \varphi_{\mathbf{p}_0} \rangle - i2\pi\delta(E_p - E_{p_0}) \langle \psi_{\mathbf{p}}^- | \hat{V} | \psi_{\mathbf{p}}^+ \rangle$$

从而有

$$\langle \varphi_{\mathbf{p}} | \hat{S} - 1 | \varphi_{\mathbf{p}_0} \rangle = -i2\pi\delta(E_p - E_{p_0}) \langle \varphi_{\mathbf{p}} | \hat{V} | \psi_{\mathbf{p}_0}^+ \rangle$$

类似地,

$$\langle \varphi_{\mathbf{p}} | \hat{S} - 1 | \varphi_{\mathbf{p}_0} \rangle = -i2\pi\delta(E_p - E_{p_0}) \langle \psi_{\mathbf{p}}^- | \hat{V} | \varphi_{\mathbf{p}_0} \rangle$$

最后得到

$$\langle \varphi_{\mathbf{p}} | \hat{S} - 1 | \varphi_{\mathbf{p}_0} \rangle = \frac{i}{2\pi\hbar m} f(\theta, \phi) \delta(E_p - E_{p_0}) \quad (34)$$

其中 (θ, ϕ) 为出射动量 \mathbf{p} 相对入射动量 \mathbf{p}_0 的方位角.

4 散射的近似计算

4.1 Born 近似

Dyson 级数

考虑积分方程 (32), 由迭代法展开成级数, 有

$$\hat{U}(t, t_0) = 1 + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' \hat{V}_I(t') + \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \hat{V}_I(t') \hat{V}_I(t'') + \cdots \quad (35)$$

此级数称为 Dyson 级数. 注意到 \hat{V}_I 任意, 故此级数对任意时间微扰下的时间发展算符成立.

微扰展开

设系统初态为 $|i\rangle$, 无相互作用时的 Hamilton 算符本征态为 $|n\rangle$, 则相互作用绘景中态矢量在无微扰本征态下可展开为

$$|\psi_I(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |n\rangle$$

左乘 $\langle n|$, 得到

$$c_n(t) = \langle n | \hat{U}(t, t_0) | i \rangle$$

即表明: 相互作用绘景中时间发展算符 $\hat{U}(t, t_0)$ 在无相互作用下系统本征态展开的矩阵元, 为相互作用绘景下态矢量的跃迁概率幅.

在 Schrödinger 绘景中, 有

$$\begin{aligned} c_n(t, t_0) &= \langle n | \hat{U}(t, t_0) | i \rangle = \langle n | e^{-i\hat{H}(t-t_0)/\hbar} e^{i\hat{H}_0(t-t_0)/\hbar} | i \rangle \\ &= e^{iE_{0i}(t-t_0)/\hbar} \langle n | e^{-i\hat{H}(t-t_0)/\hbar} | i \rangle \end{aligned}$$

即相互作用绘景中的跃迁概率幅与 Schrödinger 绘景中的跃迁概率幅由一相位联系, 两绘景下的跃迁概率相等, 有

$$P_n(t, t_0) = |c_n(t, t_0)|^2 = |\langle n | \hat{U}(t, t_0) | i \rangle|^2 = |\langle n | e^{-i\hat{H}(t-t_0)/\hbar} | i \rangle|^2$$

由方程 (35) 容易得出 $c_n(t)$ 的微扰展开, 即

$$c_n(t, t_0) = \delta_{ni} + c_n^{(1)}(t, t_0) + c_n^{(2)}(t, t_0) + \cdots \quad (36)$$

其中

$$c_n^{(1)}(t, t_0) = \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' \langle n | \hat{V}_I(t') | i \rangle,$$

$$c_n^{(2)}(t, t_0) = \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \langle n | \hat{V}_I(t') \hat{V}_I(t'') | i \rangle.$$

为得到 $c_n^{(r)}(t, t_0)$ 的表达式我们回到 Schrödinger 绘景. 相互作用绘景对导出微扰展开非常有用, 而在 Schrödinger 绘景进行随后的计算更为简易方便.

对 $c_n^{(1)}(t, t_0)$ 我们有

$$\begin{aligned} c_n^{(1)}(t, t_0) &= \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' \langle n | e^{i\hat{H}_0(t'-t_0)/\hbar} \hat{V}(t') e^{-i\hat{H}_0(t'-t_0)/\hbar} | i \rangle \\ &= \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' e^{i\omega_{ni}t'} \langle n | \hat{V}(t') | i \rangle, \end{aligned} \quad (37)$$

其中 $\omega_{ni} = \frac{E_n - E_i}{\hbar}$ 为跃迁频率.

对 $c_n^{(2)}(t, t_0)$ 我们有

$$c_n^{(2)}(t, t_0) = \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \sum_k e^{i\omega_{nk}t' + i\omega_{ki}t''} \langle n | \hat{V}_I(t') | k \rangle \langle k | \hat{V}_I(t'') | i \rangle \quad (38)$$

通过类似的方法我们可以求得微扰理论的任意次项. 式 (38) 中态 $|k\rangle$ 被认为是中间态, 其显示了由 $|i\rangle$ 到 $|n\rangle$ 态跃迁的时序性.

Born 近似

跃迁概率 $P_n(t, t_0)$ 将表示为微扰展开

$$P_n(t, t_0) = |c_n(t, t_0)|^2 = |\delta_{ni} + c_n^{(1)}(t, t_0) + c_n^{(2)}(t, t_0) + \dots|^2 \quad (39)$$

现假设我们关心的末态非初态, 即 $n \neq i$, 令 $t_0 = 0$, 并将 $c_n(t, t_0)$ 和 $P_n(t, t_0)$ 简记为 $c_n(t)$ 和 $P_n(t)$, 且我们只考虑微扰展开的第一项, 即做近似

$$P_n(t) = |c_n^{(1)}(t)|^2 = \left| \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' e^{i\omega_{ni}t'} \langle n | \hat{V}(t') | i \rangle \right|^2 \quad (40)$$

这被称为 Born 近似.

在 \hat{V} 与时间无关的情况下, 完成其中积分, 有

$$\int_0^t dt' e^{i\omega t'} = 2e^{i\omega t/2} \frac{\sin \omega t/2}{\omega}$$

得到

$$P_n(t) = |c_n^{(1)}(t)|^2 = \frac{4}{\hbar^2} \left(\frac{\sin^2 \omega_{ni} t/2}{\omega_{ni}^2} \right) |\langle n | \hat{V} | i \rangle|^2 \quad (41)$$

Born 近似下的散射理论

$\Delta_t(\omega)$ 函数

现观察 $P_n(t)$ 与末态能量 E_n 之间的关系, 注意到

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\sin^2 \omega t / 2}{\omega^2} = \frac{\pi t}{2} \quad (42)$$

其可由下列积分得到

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}.$$

(42) 式两边除以 t , 在 $t \rightarrow \infty$ 时我们得到下述 δ -函数

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \frac{\sin^2 \omega t / 2}{\omega^2} = \frac{\pi}{2} \delta(\omega). \quad (43)$$

定义函数 $\Delta_t(\omega)$ 为

$$\frac{\sin^2 \omega t / 2}{\omega^2} = \frac{\pi t}{2} \Delta_t(\omega) \quad (44)$$

则 $t \rightarrow \infty$ 极限可写为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta_t(\omega) = \delta(\omega).$$

现在我们可以将跃迁概率 $P_n(t)$ 写为

$$P_n(t) = \frac{2\pi t}{\hbar^2} \Delta_t(\omega_{ni}) |\langle n | \hat{V} | i \rangle|^2 \quad (45)$$

此式用于第一阶微扰时, 有 $n \neq i$.

散射过程的 Born 近似

如前所述, 散射过程中的波函数由于其无界性无法归一化. 为解决此问题, 我们可假设散射系统处于一边长为 L 的大立方体中, 立方体体积 $V = L^3$, 立方体边长 L 远大于散射势的有效尺度, 在取 $V \rightarrow \infty$ 时即得到物理上的解. 此时以波矢描述非微扰情况的本征态, 波函数归一化为

$$\phi(\mathbf{k}) = \langle \mathbf{x} | \mathbf{k} \rangle = \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{\sqrt{V}} \quad (46)$$

散射的跃迁振幅为

$$c_{\mathbf{k}}^{(1)}(t) = \frac{2}{i\hbar} e^{i\omega t/2} \left(\frac{\sin \omega t / 2}{\omega} \right) \langle \mathbf{k} | \hat{V}(\mathbf{x}) | \mathbf{k} \rangle \quad (47)$$

其中

$$\omega = \frac{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}_0}}{\hbar} = \frac{\hbar}{2m} (k^2 - K_0^2)$$

散射跃迁概率为

$$P_n(t) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{2\pi}{\hbar^2} t \Delta_t(\omega_{ni}) |\langle \mathbf{k} | \hat{V}(\mathbf{x}) | \mathbf{k}_0 \rangle|^2 \quad (48)$$

其中我们对一些 $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_0$ 的态求和.

现考虑散射过程, 跃迁率等于单位时间的跃迁概率, 在 $\Delta\Omega$ 立体角内有

$$\frac{dw}{d\Omega}\Delta\Omega = \sum_{\mathbf{k} \in cone} \frac{2\pi}{\hbar^2} \Delta_t(\omega) |\langle \mathbf{k} | \hat{V}(\mathbf{x}) | \mathbf{k}_0 \rangle|^2 \quad (49)$$

散射过程中有 $t \rightarrow \infty$, 即 $\Delta_t(\omega) \rightarrow \delta(\omega)$, 将 $\delta(\omega)$ 变换为,

$$\delta(\omega) = \frac{\delta(k - k_0)}{|dw/dk|} = \frac{m}{\hbar k} \delta(k - k_0) \quad (50)$$

在极限 $V \rightarrow \infty$ 下, 对 \mathbf{k} -空间的格点求和化为

$$\sum_{\mathbf{k} \in cone} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int_{cone} d^3\mathbf{k} = \frac{V}{(2\pi)^3} \Delta\Omega \int_0^\infty k^2 dk, \quad (51)$$

其中 $V/(2\pi)^3$ 为 \mathbf{k} -空间中单位体积的态密度 ($\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L}\mathbf{n}$).

计算式 (49), 其中

$$\langle \mathbf{k} | \hat{V}(\mathbf{x}) | \mathbf{k}_0 \rangle = \int d^3\mathbf{x} \psi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}) \psi_{\mathbf{k}_0}(\mathbf{x}) = \frac{1}{V} \int d^3\mathbf{x} e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)\cdot\mathbf{x}} V(\mathbf{x}) = \frac{(2\pi)^{3/2}}{V} \tilde{V}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \quad (52)$$

此处定义 $V(\mathbf{x})$ 的 Fourier 变换 $\tilde{V}(\mathbf{x})$

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) = \int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^3/2} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} V(\mathbf{x})$$

代回 (49) 式, 得到

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{Vm}{\hbar k_0} \frac{1}{\Delta\Omega} \frac{V}{(2\pi)^3} \Delta\Omega \int_0^\infty k^2 dk \frac{2\pi}{\hbar^2} \frac{m}{\hbar k_0} \delta(k - k_0) \frac{(2\pi)^3}{V^2} |\tilde{V}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)|^2 \\ &= \frac{2\pi}{\hbar^2} \left(\frac{m}{\hbar k_0} \right)^2 \int_0^\infty k^2 dk \delta(k - k_0) |\tilde{V}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)|^2, \end{aligned}$$

即 V 和 $\Delta\Omega$ 均消去, 归一化对结果无影响. 上式中的 $\delta(k - k_0)$ 为仅对 $k = k_0$ 出射态求和, 符合弹性碰撞预期. 最终我们得到

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 2\pi \frac{m^2}{\hbar^4} |\tilde{V}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)|^2, \quad (53)$$

其中有

$$\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = \hbar \mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i.$$

此为 $E_0 \gg V$ 下 Born 近似的结果.

4.2 部分势场散射的近似计算

Coulomb 势

Coulomb 势场中, 场强由电荷分布 $\rho(\mathbf{x})$ 决定, 满足 Poisson 方程

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{x}) = -4\pi\rho(\mathbf{x}). \quad (54)$$

记入射束中粒子所带电荷为 Q_b , 则 $V(\mathbf{x}) = Q_b\Phi(\mathbf{x})$. 微分散射截面的计算需要 $V(\mathbf{x})$ 的 Fourier 变换 $\tilde{V}(\mathbf{q})$. 在 \mathbf{q} -空间中, \mathbf{x} -空间的 $-\nabla^2$ 变为乘上 $q^2 = |\mathbf{q}|^2$, 由 Poisson 方程, 有

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{q}) = \frac{4\pi}{q^2} \tilde{\rho}(\mathbf{q}) \quad (55)$$

我们定义 $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$, 则动量变换为 $\hbar\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0$, 散射截面式 (53) 可被写为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4m^2 Q_b^2}{\hbar^4 q^4} |f(\mathbf{q})|^2, \quad (56)$$

其中

$$f(\mathbf{q}) = (2\pi)^3 2\tilde{\rho}(\mathbf{q}) = \int d^3\mathbf{x} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \rho(\mathbf{x}). \quad (57)$$

由因

$$\hbar^2 q^2 = 4p^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 8mE \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

故得

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Q_b^2}{16E^2 \sin^4(\theta/2)} |f(\mathbf{q})|^2. \quad (58)$$

若靶为点电荷, 即

$$\rho(\mathbf{x}) = Q_t \delta(\mathbf{x})$$

则 $f(\mathbf{q}) = Q_t$, 微分散射截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Q_b^2 Q_t^2}{16E^2 \sin^4(\theta/2)}, \quad (59)$$

即为 Rutherford 散射截面.

Yukawa 势

我们常用 Yukawa 势描述核子 (如中子和质子) 之间相互作用的简单模型, Yukawa 势为

$$V(r) = A \frac{e^{-\kappa r}}{r}, \quad (60)$$

其中 A 和 κ 为常数. Yukawa 势是一种修正的 Coulomb 势, 其因子 $e^{-\kappa r}$ 使其作用被限制在一定尺度下. 在 Yukawa 的年代这被认为是 10^{-13}cm 尺度的核力.

其傅里叶变换可由积分直接导出:

$$\begin{aligned}\tilde{V}(\mathbf{q}) &= \int d^3\mathbf{x} \frac{e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^3/2} A \frac{e^{-\kappa r}}{r} \\ &= \frac{A}{(2\pi)^3/2} 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta e^{-iqx\cos\theta} e^{-\kappa x} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{A}{\kappa^2 + q^2}\end{aligned}$$

代入 $\hbar^2 q^2 = 4p^2 \sin^2(\frac{\theta}{2})$, 得到散射截面

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4A^2 m^2}{\hbar^4} \frac{1}{(\kappa^2 + 4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2})^2}. \quad (61)$$

我们还可以由 Poisson 方程的推广得到散射截面表达式, 注意到

$$(\nabla^2 - \kappa^2) \left(\frac{e^{-\kappa r}}{r} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{x}), \quad (62)$$

此式表明 Yukawa 势为下 Klein-Gordon 方程静态解的 Green 函数,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \nabla^2 \psi = -\kappa^2 \psi,$$

此为质量为 M 的粒子最简单的相对论性方程, 其中

$$\kappa = M/\hbar c$$

. Yukawa 的想法为, 在他的势中以关系 $\kappa = M/\hbar c$ 得到的质量为 M 的粒子为强相互作用的玻色子, 其通过和光子承载电磁相互作用一样的方式承载强相互作用.

在 $M \rightarrow 0$ 时 Klein-Gordon 方程化为常规波方程, 后化为 Maxwell 方程, Yukawa 势化为 Coulomb 势, 若 $A = Q_b Q_t$, 则 Yukawa 势散射截面等于 Rutherford 散射截面.

4.3 球对称势散射浅析

散射振幅有

$$f(\theta, \phi) = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} \langle \mathbf{k} | \hat{V} | \psi_{\mathbf{k}_0} \rangle_{k=k_0}$$

在 Born 近似下, 近似有 $|\psi_{\mathbf{k}_0}\rangle = |\mathbf{k}_0\rangle$, 故

$$f^{(1)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3\mathbf{x} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)\cdot\mathbf{x}} V(\mathbf{x}). \quad (63)$$

略去整体因子, 一阶散射振幅即为势 V 对 $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0$ 的三维 Fourier 变换.

球对称下, $f^{(1)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$ 是 $q \equiv |\mathbf{q}|$ 的函数, 有

$$q = |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0| = 2k \sin \frac{\theta}{2}.$$

可具体对 (63) 式的角度积分, 得到

$$\begin{aligned} f^{(1)}(\theta) &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} 2\pi \frac{1}{iq} \int_0^\infty rV(r)(e^{iqr} - e^{-iqr})dr \\ &= -\frac{2m}{q\hbar^2} \int_0^\infty rV(r)\sin qr dr. \end{aligned} \quad (64)$$

对一维无限深方势阱的散射, 有

$$V(r) = \begin{cases} V_0, r \leq a, \\ 0, r > a. \end{cases} \quad (65)$$

完成 (64) 式积分, 得

$$f^{(1)}(\theta) = -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{V_0 a^3}{(qa)^2} \left(\frac{\sin qa}{qa} - \cos qa \right). \quad (66)$$

应用于 Yukawa 势, 得到

$$f^{(1)}(\theta) = -\left(\frac{2mA}{\hbar^2} \right) \frac{1}{q^2 + \kappa^2} \quad (67)$$

其中应用了 $\sin qr = \text{Im}(e^{iqr})$, 并使用了

$$\text{Im} \left[\int_0^\infty e^{-\kappa r} e^{iqr} dr \right] = -\text{Im} \left(\frac{1}{-\kappa + iq} \right) = \frac{q}{\kappa^2 + q^2} \quad (68)$$

最终我们得到 Yukawa 势的微分散射截面

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4A^2 m^2}{\hbar^4} \frac{1}{(\kappa^2 + 4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2})^2}.$$

回到 (61) 式, 球对称势下的散射振幅, 如果 $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}_0)$ 能用相应的一阶 Born 近似振幅 $f^{(1)}$ 来近似, 则有

1. $d\sigma/d\Omega$, 或 $f(\theta)$, 仅仅是 q 的函数, 即 $f(\theta)$ 仅通过组合 $2k^2(1 - \cos\theta)$ 依赖于能量 $\hbar^2 k^2/2m$ 和 θ .
2. $f(\theta)$ 总是实的.
3. $d\sigma/d\Omega$ 与 V 的符号无关.
4. 对很小的 k (q 必然很小),

$$f^{(1)}(\theta) = -4\pi \frac{2m}{\hbar^2} \int V(r) d^3\mathbf{x}, \quad (69)$$

包含一个与 θ 无关的体积分.

5. 对大 q , 由于被积函数快速振荡, $f(\theta)$ 很小.