

力学の基礎

九州大学理学部 橋本正章
熊本大学理学部 荒井賢三

平成 32 年 4 月 18 日

目 次

第 1 章	位置，速度，加速度	1
1.1	座標系	1
1.2	ベクトル	2
1.3	位置，速度 および 加速度	5
1.4	自然座標系	11
第 2 章	運動の 3 法則	17
2.1	慣性の法則	17
2.2	運動の法則	18
2.3	作用・反作用の法則	20
2.4	運動方程式の成分表示	20
2.5	運動方程式の解	21
2.6	一様な重力のもとでの運動	22
2.7	束縛運動	24
第 3 章	振動	29
3.1	単振動	29
3.2	単振子の運動	32
3.3	減衰振動	33
3.4	強制振動	35
3.5	連結振動	38
3.6	LCR 回路における電気振動	40
第 4 章	エネルギー保存の法則	45
4.1	仕事	45
4.2	運動エネルギー	47
4.3	保存力	48
4.4	力学的エネルギー保存の法則	51

4.5	1次元の運動	53
第5章	中心力	59
5.1	中心力のポテンシャル	59
5.2	角運動量保存の法則	65
5.3	中心力による運動	66
5.4	有効ポテンシャル	67
5.5	惑星と彗星の運動	69
5.6	離心率ベクトル	73
5.7	クーロン散乱	75
第6章	加速度系における運動	81
6.1	並進座標系	81
6.2	回転座標系	83
6.3	自転する地球表面での運動	86
6.4	電磁場内での荷電粒子の運動	89
第7章	質点系の運動	93
7.1	運動量と角運動量の保存則	93
7.2	重心	95
7.3	質点系のエネルギー	99
7.4	質量の変化する物体の運動	101
7.5	二体問題	103
7.6	粒子の衝突	105
第8章	剛体の運動	113
8.1	自由度と運動方程式	113
8.2	固定軸のまわりの回転	114
8.3	慣性モーメント	116
8.4	剛体の平面運動	123
8.5	撃力による運動	128
第9章	剛体の空間運動	131
9.1	オイラーの運動方程式	131
9.2	オイラーの角	134

9.3	対称な物体の自由回転	137
9.4	こまの運動	141

第1章 位置，速度，加速度

物体の位置を表すために，まず基準となる座標系を設定することから始めよう．デカルト座標系は直感的でわかりやすいものであるけれど，考えている状況によっては，平面極座標系とか球座標系などに移り，視点をかえると問題の本質を見通すことができる場合もある．物理量をベクトルで表現することは非常に好都合であるから，ベクトルの概念を導入し，ベクトル代数を学ぼう．次にベクトルを用いて物体の位置を表し，さらにそれを時間で微分することによって，速度および加速度の表式を求めよう．

1.1 座標系

3次元空間内で点Pの位置を指定するためには基準となる座標系が必要になる．そこで，例えば図に示すように原点をOとし，互いに直交する3つの

軸を x, y, z 軸とする座標系を設定して，点Pの位置を座標 (x, y, z) で表す．これを **デカルト座標系** という．

座標系は1つとは限らなくて，原点を移すこともできるし，座標軸の方向も任意に選ぶことができるということに注意しよう．

さらに状況に応じて，以下に示す円柱座標系と球座標系を使うと便利な場合がある．

円柱座標系 では点Pの位置を (r, θ, z) で表す．このときデカルト座標系との関係は

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z \quad (1.1)$$

と書ける．ただし $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ である．

特に， $z = 0$ の面に限ったとき，それを **平面極座標系** という．

球座標系における点 P の位置は (r, θ, ϕ) で表され, デカルト座標系との関係は

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta \quad (1.2)$$

で与えられる. ただし $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ である.

1.2 ベクトル

(1) ベクトル

大きさだけを持った量をスカラー, 大きさと向きを持った量をベクトルと定義する. それぞれスカラー量, ベクトル量ともいう. ベクトルを太文字 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ などで表すことにする. ベクトル \mathbf{A} の大きさは $A = |\mathbf{A}|$ である.

ベクトルは次のような性質を持つ:

1. 平行移動してもベクトルは変化しない.
2. ベクトルのスカラー倍はベクトルである.
3. ベクトル \mathbf{A}, \mathbf{B} の和

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \quad (1.3)$$

もベクトルである.

図に示すようにベクトル \mathbf{A} を x, y, z 軸へ正射影したものをそれぞれ \mathbf{A} の x, y, z 成分とよび, (A_x, A_y, A_z) で

表す. (1.3) のベクトルの和は成分どうしの和

$$\begin{aligned} C_x &= A_x + B_x \\ C_y &= A_y + B_y \\ C_z &= A_z + B_z \end{aligned} \quad (1.4)$$

を意味する.

成分 $(0, 0, 0)$ からなるベクトルは向きを持たないが, これを零ベクトルといい, 太文字 $\mathbf{0}$ で表す. さらにベクトル \mathbf{A} の向きを逆にしたものを $-\mathbf{A}$ と書く. その成分は $(-A_x, -A_y, -A_z)$ である.

デカルト座標系において x, y, z 軸の正の向きにとった大きさ 1 の単位ベクトルを $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ とすると, ベクトル \mathbf{A} は

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} \quad (1.5)$$

と書くことができる

(2) スカラー積

ベクトル \mathbf{A} と \mathbf{B} があり, そのなす角を θ とするとき, スカラー積 または 内積 を

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta \quad (1.6)$$

と定義する. このことから

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2 \quad (1.7)$$

が得られる. \mathbf{A} と \mathbf{B} が直交するとき, そのスカラー積は 0 となる.

単位ベクトルに対しては

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \quad (1.8)$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0 \quad (1.9)$$

の関係が成り立つ.

例 1.1 スカラー積の成分表示

(1.5) のようにベクトル \mathbf{A} , \mathbf{B} を成分で書き

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \cdot (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}) \\ &= A_x B_x \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + A_x B_y \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + A_x B_z \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} + \dots\end{aligned}$$

と展開し, (1.8) と (1.9) を用いると

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1.10)$$

が得られる.

(3) ベクトル積

図に示すように \mathbf{A} と \mathbf{B} に垂直で, \mathbf{A} から \mathbf{B} へ π より小さい角 θ だけまわすとき右ネジの進む向きにベクトル \mathbf{C} をとる. その大きさは $AB \sin \theta$, すなわち \mathbf{A} , \mathbf{B} のつくる平行四辺形の面積に等しくする. この新たなベクトル \mathbf{C} をつくる演算を \mathbf{A} , \mathbf{B} のベクトル積または外積と定義し

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \quad (1.11)$$

と表す. このことから

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (1.12)$$

が得られる. \mathbf{A} と \mathbf{B} が平行であるとき, そのベクトル積は $\mathbf{0}$ となる.

単位ベクトルに対しては

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} \quad (1.13)$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \quad (1.14)$$

が成り立つ.

例 1.2 ベクトル積の成分表示

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \times (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}) \\ &= A_x B_x \mathbf{i} \times \mathbf{i} + A_x B_y \mathbf{i} \times \mathbf{j} + A_x B_z \mathbf{i} \times \mathbf{k} + \dots\end{aligned}$$

と展開し, (1.13) と (1.14) を用いると

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k} \quad (1.15)$$

が得られる. 添字 (x, y, z) について偶置換のとき $+$ 符号をとり, 奇置換のとき $-$ 符号をとればよい.

1.3 位置, 速度 および 加速度

物理で扱う量のほとんどはスカラーやベクトルであり, それらは長さ, 時間あるいは質量の次元, またはそれらの組合わさった次元を持つ量である. MKS 単位系において長さは m, 質量は kg, 時間は s を単位として測定される.

(1) 位置ベクトル

原点 O から点 P に向かう \overrightarrow{OP} を 位置ベクトル といい \mathbf{r} で表す. デカルト座標系における位置ベクトルは

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (1.16)$$

と表される.

時間の経過につれて, 位置ベクトル \mathbf{r} が変化するとき, 点 P の描く曲線を 径路 または 軌道 という.

(2) 速度

位置ベクトル \mathbf{r} の時間変化を考えよう. 時刻 t における位置を $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, 時刻 $t + \Delta t$ における位置を $\mathbf{r}' = \overrightarrow{OP'}$ とする. 変位ベクトル $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ を考え

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (1.17)$$

となるベクトルを **速度** という. すなわち, 速度は位置ベクトル \mathbf{r} の時間微分であり, その点における軌道の接線方向に一致する.

単位ベクトル ($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$) は空間に固定された一定のベクトルであることに注意して (1.16) を t で微分すると, 速度はデカルト座標系において

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} \quad (1.18)$$

と表される. ここで記号ドットは時間微分のことである.

速度 \mathbf{v} の大きさ

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \quad (1.19)$$

を **速さ** という.

速度の成分を 1.1 節で導入した平面極座標系 (r, θ) で求めてみよう. デカルト座標系からの変換は (1.1) より

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

である. 図に示すように \mathbf{r} 方向の単位ベクトルを \mathbf{e}_r とし, それに垂直で θ の増加する向きの単位ベクトルを \mathbf{e}_θ とすると, それらは

$$\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \quad (1.20)$$

$$\mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j} \quad (1.21)$$

と表される. \mathbf{i}, \mathbf{j} は空間に固定されているが, $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$ の向きは点 P の位置が動くにつれて変化することを考慮して, (1.20), (1.21) を t で微分すると

$$\dot{\mathbf{e}}_r = -\dot{\theta} \sin \theta \mathbf{i} + \dot{\theta} \cos \theta \mathbf{j} = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta \quad (1.22)$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta} \cos \theta \mathbf{i} - \dot{\theta} \sin \theta \mathbf{j} = -\dot{\theta} \mathbf{e}_r \quad (1.23)$$

が得られる. $\dot{\theta}$ は角速度の大きさを表す.

図からわかるように位置ベクトル \overrightarrow{OP} は

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r \quad (1.24)$$

と表されるので, これを t で微分し, (1.22) を代入することにより平面極座標系における速度は

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta \quad (1.25)$$

と書ける. 右辺の各項は微小時間 dt における動径方向の増分 dr と θ 方向の増分 $r d\theta$ を表している.

同じように球座標系 (r, θ, ϕ) における単位ベクトルを図に示すように $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$ とすると, それらは

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{k} \\ \mathbf{e}_\theta &= \cos \theta \mathbf{e}_1 - \sin \theta \mathbf{k} \\ \mathbf{e}_\phi &= -\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j} \end{aligned} \quad (1.26)$$

で与えられる. ただし

$$\mathbf{e}_1 = \cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j} \quad (1.27)$$

である. (1.26) を t で微分して

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_r &= \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \mathbf{e}_\phi \\ \dot{\mathbf{e}}_\theta &= -\dot{\theta} \mathbf{e}_r + \dot{\phi} \cos \theta \mathbf{e}_\phi \\ \dot{\mathbf{e}}_\phi &= -\dot{\phi} (\sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta) \end{aligned} \quad (1.28)$$

を得る.

位置ベクトルは $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ であるから, これを t で微分し, (1.28) を用いることにより速度は

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\phi}\sin\theta\mathbf{e}_\phi \quad (1.29)$$

と表せる [演習問題 7].

微小時間 dt における変位を $d\mathbf{s}$ とすると, それは

$$d\mathbf{s} = \mathbf{v}dt \quad (1.30)$$

で与えられる. 速度は径路の接線方向に一致しているから, $d\mathbf{s}$ は径路上の隣りあう2点を結ぶベクトルとなる. 次の3つの代表的な座標系において $d\mathbf{s}$ の表記を求めておこう.

デカルト座標系では (1.18) より

$$d\mathbf{s} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} \quad (1.31)$$

円柱座標系では (1.25) に z 方向の速度 $\dot{z}\mathbf{k}$ を加えて

$$d\mathbf{s} = dr\mathbf{e}_r + r d\theta\mathbf{e}_\theta + dz\mathbf{k} \quad (1.32)$$

球座標系では (1.29) より

$$d\mathbf{s} = dr\mathbf{e}_r + r d\theta\mathbf{e}_\theta + r \sin\theta d\phi\mathbf{e}_\phi \quad (1.33)$$

である. これらの $d\mathbf{s}$ を用いて, 曲線の長さや立体の体積を求めることができる.

(3) 加速度

速度を時間で微分したベクトル

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (1.34)$$

を **加速度** という. デカルト座標系における加速度は (1.18) を t で微分して

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k} \quad (1.35)$$

と表される.

平面極座標系における加速度は (1.25) を t で微分し, (1.22), (1.23) を用いることにより

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta \quad (1.36)$$

となることがわかる [演習問題 8].

例 1.3 等加速度運動

等加速度運動とは, \mathbf{a} , \mathbf{v}_0 , \mathbf{r}_0 を一定のベクトルとして, 位置 \mathbf{r} が

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2 + \mathbf{v}_0t + \mathbf{r}_0 \quad (1.37)$$

と表される運動である. (1.37) を t で微分することにより, \mathbf{a} が加速度, \mathbf{v}_0 が $t = 0$ での速度, \mathbf{r}_0 がそのときの位置であることがわかる.

例 1.4 単振動

単振動とは, A, ω, α を定数として, 位置 x が

$$x = A \cos(\omega t + \alpha) \quad (1.38)$$

で与えられる運動である (1.38) を t で微分すると, 速度は

$$\dot{x} = -A\omega \sin(\omega t + \alpha) \quad (1.39)$$

となり, 加速度は

$$\ddot{x} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x \quad (1.40)$$

となる. ここで A は振幅, α は初期位相であり, ω は角振動数で周期 T と

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1.41)$$

の関係がある.

例 1.5 等速円運動

等速円運動においては r_0, ω, α を定数として, 位置 x, y が

$$x = r_0 \cos(\omega t + \alpha) \quad (1.42)$$

$$y = r_0 \sin(\omega t + \alpha) \quad (1.43)$$

で与えられる. これを平面極座標系で書くと

$$r = r_0, \quad \theta = \omega t + \alpha \quad (1.44)$$

となる. つまり r_0 は円軌道の半径であり, $\dot{\theta} = \omega$ は, 6.2 節で詳しく述べるように, 角速度の大きさである.

(1.42), (1.43) を t で微分すると, 速度の成分は

$$\dot{x} = -r_0\omega \sin(\omega t + \alpha) = -\omega y$$

$$\dot{y} = r_0\omega \cos(\omega t + \alpha) = \omega x$$

と書ける. すなわち

$$\mathbf{v} = \omega(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) \quad (1.45)$$

であり, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ であるから $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0$ となる. つまり, 速度 \mathbf{v} は \mathbf{r} に直交している. 加速度の成分は

$$\ddot{x} = -r_0\omega^2 \cos(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x$$

$$\ddot{y} = -r_0\omega^2 \sin(\omega t + \alpha) = -\omega^2 y$$

となるから

$$\mathbf{a} = -\omega^2(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = -\omega^2\mathbf{r} \quad (1.46)$$

と表される. したがって加速度はつねに中心 O を向いている.

平面極座標系では (1.44) を t で微分して得られる $\dot{r} = 0$, $\dot{\theta} = \omega$ を (1.25) と (1.36) に代入することにより, 速度と加速度の成分は

$$v_r = 0, \quad v_\theta = r_0\omega \quad (1.47)$$

$$a_r = -r_0\omega^2 = -\frac{v^2}{r_0}, \quad a_\theta = 0 \quad (1.48)$$

と書ける. 速度が \mathbf{r} に直交していること, および加速度が中心を向いていることが確かめられる.

(4) 速度, 加速度の複素数表示

実数 x, y および虚数単位 i を用いて複素数

$$z = x + iy \quad (1.49)$$

を定義し, これを xy 平面上の点 $P(x, y)$ に対応させよう.

平面極座標系 (r, θ) においては (1.1) を (1.49) に代入して

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (1.50)$$

を得る．ここでオイラーの公式 [数学的補遺 (1) 参照]

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (1.51)$$

を用いると (1.50) は

$$z = r e^{i\theta} \quad (1.52)$$

と書ける． $e^{i\theta}$ は r 方向の単位ベクトルに対応していることに注意しよう．さらに (1.51) に $\theta = \pi/2$ を代入すると

$$i = e^{i\pi/2}$$

となるから， $i e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi/2)}$ は r に垂直な方向，すなわち θ 方向の単位ベクトルに対応する．

(1.52) を t で微分すると速度は

$$\dot{z} = (\dot{r} + i r \dot{\theta}) e^{i\theta} \quad (1.53)$$

と書ける．したがって，速度の r, θ 成分はそれぞれ \dot{r} , $r \dot{\theta}$ となり，これは (1.25) と一致する．さらに \dot{z} を t で微分することにより加速度は

$$\ddot{z} = [(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) + i(r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta})] e^{i\theta} \quad (1.54)$$

と表せる．加速度の r 成分は $\ddot{r} - r \dot{\theta}^2$ ， θ 成分は $r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta}$ となり，(1.31) と同じ結果が得られる．

1.4 自然座標系

図に示すように径路上の定点 A から径路に沿った距離 s を用いて点 P の位置を表してみよう．点 P および P' の位置を $\mathbf{r}(s)$, $\mathbf{r}'(s + \Delta s)$ とし， $\overrightarrow{PP'} = \Delta \mathbf{r}$ とすると， $\Delta \mathbf{r}/|\Delta \mathbf{r}|$ は PP' 方向の単位ベクトルであり， $\Delta s \rightarrow 0$ の極限で $|\Delta \mathbf{r}| \rightarrow \Delta s$ となる．そこで s の増加する向きに接線方向の単位ベクトル

$$\mathbf{e}_t = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad (1.55)$$

をとり, これを **接線ベクトル** という.

デカルト座標系における成分は

$$\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right)$$

である.

点 P, P' での接線ベクトルをそれぞれ $\mathbf{e}_t, \mathbf{e}_t'$ とする. \mathbf{e}_t と \mathbf{e}_t' との間の角を $\Delta\theta$ とすると, $\Delta\mathbf{e}_t = \mathbf{e}_t' - \mathbf{e}_t$ の大きさ $|\Delta\mathbf{e}_t|$ は $\Delta s \rightarrow 0$ の極限で $|\Delta\mathbf{e}_t| = |\mathbf{e}_t| \tan \Delta\theta \simeq \Delta\theta$ となるから

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta\mathbf{e}_t|}{\Delta s} = \frac{|d\mathbf{e}_t|}{ds} = \frac{d\theta}{ds} \quad (1.56)$$

は接線の回転の割合を表す. 図に示すように弧 PP' を円の一部とみなすとき, 円の中心 O を曲率中心, 半径 ρ を曲率半径という. このとき $ds = \rho d\theta$ であるから (1.56) は

$$\frac{|d\mathbf{e}_t|}{ds} = \frac{1}{\rho} \quad (1.57)$$

と書ける. 一方 $e_t^2 = 1$ を s で微分すると

$$\mathbf{e}_t \cdot \frac{d\mathbf{e}_t}{ds} = 0 \quad (1.58)$$

となるので $d\mathbf{e}_t/ds$ は \mathbf{e}_t に直交していることがわかる. そこで曲率中心 O を向いている単位ベクトル

$$\mathbf{e}_n = \frac{d\mathbf{e}_t/ds}{|d\mathbf{e}_t/ds|} = \rho \frac{d\mathbf{e}_t}{ds} \quad (1.59)$$

をとり, これを **法線ベクトル** という. 接線ベクトルと法線ベクトル, およびこの2つのベクトルに直交するベクトルを単位ベクトルとする座標系を **自然座標系** という.

(1.55) を用いると速度は

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{r}}{ds} = v \mathbf{e}_t, \quad v = \frac{ds}{dt} \quad (1.60)$$

と書ける．つまり速度は接線ベクトルの向きに一致する．

(1.60) を t で微分すると加速度は

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_t + v \frac{d\mathbf{e}_t}{dt} \quad (1.61)$$

と書ける．右辺第2項に

$$\frac{d\mathbf{e}_t}{dt} = \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{e}_t}{ds} = \frac{v}{\rho} \mathbf{e}_n$$

を代入すると

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_t + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{e}_n \quad (1.62)$$

が得られる． $\mathbf{a} = a_t \mathbf{e}_t + a_n \mathbf{e}_n$ と表すと，加速度の接線成分と法線成分は

$$a_t = \frac{dv}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad (1.63)$$

と書ける．

直線運動の場合には曲率半径は (1.57) から $\rho = \infty$ となるので $a_n = 0$ を得る．半径 r_0 の等速円運動の場合には $\rho = r_0$ であり， v は一定となるので $a_t = 0$, $a_n = v^2/r_0$ を得る． $\mathbf{e}_n = -\mathbf{e}_r$ であることに注意すると，これは例 1.5 の結果 (1.48) と一致することがわかる．

演習問題 1

- ベクトル \mathbf{A} , \mathbf{B} が $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{B} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ で与えられている． $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ および \mathbf{A} と \mathbf{B} となす角を求めよ．
- $\mathbf{A} = 7\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{C} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ であるとき， $a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{0}$ となるような a, b を求めよ．
- 次の等式を証明せよ．
 - (1) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$
 - (2) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$
 - (3) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$
- 3 辺を $2\mathbf{i}$ cm, $\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ cm, $5\mathbf{j} + \mathbf{k}$ cm とする平行六面体の体積を求めよ．
- ベクトル \mathbf{A} が x, y, z 軸となす角をそれぞれ α, β, γ とするとき，次のことを示せ．

$$(1) \mathbf{A} = A(\cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k})$$

$$(2) \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

6. ベクトル \mathbf{A} と単位ベクトル \mathbf{e} が与えられている. \mathbf{A} を \mathbf{e} の方向と \mathbf{e} に垂直な方向とに分解するとき $\mathbf{A} = \mathbf{e}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}) + \mathbf{e} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{e})$ となることを示せ.
7. 球座標系における速度の表式 (1.29) を求めよ.
8. 平面極座標系における加速度の表式 (1.36) を求めよ.
9. 球座標系における加速度の表式を求めよ.
10. 半径 0.1 m の円盤が中心軸のまわりに毎分 1200 回で一様に回転している. 角速度の大きさを計算し, 円盤の縁における速度, 加速度の大きさを求めよ.
11. 時刻 t の関数として $\mathbf{r}(x, y, z)$ が $x = R \cos \omega t$, $y = R \sin \omega t$, $z = b \omega t$ で与えられている. ただし R, b, ω は正の定数である. 速度, 加速度を求め, それらのベクトルの向きを図示せよ (ヒント: 円柱座標系を使う).
12. 半径 a の円盤が xy 平面内で x 軸に接しつつ原点から正の方向へすべることなく一定の角速度 ω で回転運動している. 円周上の一点 P の描く軌道, 速度, および加速度を求めよ.

少年老いやすく学なり難し. 一寸の光陰, 軽んずべからず.

***** 余談 *****

ガリレオと近代科学

ガリレオ (Galileo Galilei, 1564 – 1642) は近代科学の偉大な先駆者であった。力のモーメントの考察から始まって、力学の法則を経験と実験により見出し、望遠鏡を自ら製作して月のあばたを観察し、太陽の黒点や木星の衛星を発見した。このようにして中世の迷信を打破していったが、やがてローマ教皇庁の怒りに触れてしまい、宗教裁判にかけられ (正直者は損をするということか)、地動説の放棄を命ぜられた。しかし「新天文対話」を発表したため、異端審問所から有罪の判決をうけ幽閉された。晩年には両眼を失明しながらも、近代科学の思想を盛り込んだ「新科学対話」を出版した。まさに不屈の精神をもった人であった。

ガリレオは運動の3法則を全て知っていたともいわれる。ガリレオの相対性原理も忘れがたい。船上の人がボールを落としたとき、真下に落ちることからこの原理を思いついたという説がある。かれの相対性原理は、アインシュタンの相対性原理へと昇華されていったのである。人間的にも興味深く、大酒のみで喧嘩ずき、恋愛にもたけていたそうである。ガリレオの名言:「哲学は数学の言葉で宇宙の中に書かれている。」

ガリレオの顔

第2章 運動の3法則

物体の運動はある設定された座標系における位置と速度によって記述される。そして座標系が異なればその表記も異なる。物体の位置と速度を時間の関数として記述する方法は以下に述べるように、ニュートンの3つの運動の法則に基礎をおいている。

物体の運動を考えるに際して、その大きさを無視し、質量だけを持つ物体として **質点** を定義しよう。これは理想的な極限ではあるが、多くの場合に妥当である。例えば、地表付近でのボールの運動を考えるときには、ボールを質点とみなし地表を平面と近似することができるし、太陽のまわりの地球の運動を考えるときには、地球を質点とみなすことができる。

2.1 慣性の法則

水平でなめらかな床の上での物体の運動を考えよう。初めにそれをある速度で動かすと、力を加えないかぎり、物体はその速度を維持したまま運動を続けることが知られている。この経験則を普遍化したものが **運動の第1法則** であり、それは

“質点は力の作用を受けないとき、静止したままかあるいは等速直線運動をする”

と表現される。地上の実験室では摩擦や空気抵抗などがあるためこの法則を証明することはむずかしいけれど、宇宙船の中に無重力で真空の空間をつくり、この法則の正当性を実験的に証明することができる。

静止または等速直線運動している質点はその運動状態を持続しようとする性質、すなわち速度を変えようとしない性質を **慣性** という。したがって第1法則は **慣性の法則** ともいわれる。

慣性の法則が成り立つ座標系を **慣性系** という。地上に固定された実験室は通常十分な精度で慣性系とみなしてもよいが、6章で詳しく述べるように

地球規模に関わる大域的な運動を考えるとときには，地球の自転による慣性系からのずれは無視できなくなる．

力学の法則も含めて，物理法則はある精度内で実験または観測と一致することが確かめられたものである．したがって，その精度に応じて法則には適用可能な限界が存在する．この本で取り扱うニュートン力学，すなわち古典力学は完成された学問であるが当然，そこには適用限界があり，ミクロの世界の現象に関しては量子力学を，光速度に近い運動に対しては相対性理論を用いなければならない．

2.2 運動の法則

力には重力，クーロン力，磁気力，復元力，摩擦力，抗力などいろいろなタイプの力があるけれど，それらの力が作用している場合，質点の運動を統一的に記述することができる．

質量 m の質点が速度 \mathbf{v} で運動しているとき

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (2.1)$$

を **運動量** と定義する．

力が作用しているとき，質点の運動は慣性の法則からずれて，速度が変化する．このことを法則化したものが **運動の第2法則** であり，それは

“質点が力の作用を受けるとき，運動量の時間変化はその力に等しい”

と表現される．すなわち，作用する力を \mathbf{F} とすると

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad (2.2)$$

と書くことができる．これをニュートンの **運動方程式** という．質点の運動は (2.2) によって記述されるので，この法則は **運動の法則** ともいわれる．

力 $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ のとき，運動量 \mathbf{p} は一定に保たれる．あるいは，力の x 成分 $F_x = 0$ のとき，運動量の x 成分 p_x は一定となる．これを **運動量保存の法則** という．質点は運動するにつれて位置や速度を変化させていく．しかしながら時間が経過しても変化せずに一定に保たれる物理量があるならば，それは運動を解析する際に重要になってくる．運動量保存の法則は力学において非常に基本的な法則である．

さて運動方程式 (2.2) を時刻 t_1 から t_2 まで積分すると

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt \quad (2.3)$$

を得る．ここで $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ は時刻 t_1, t_2 における運動量であり，右辺の積分は力積といわれる．(2.3) は“運動量の変化はその間に質点に作用する力積に等しい”ことを意味している．

ボールをバットで打つときのように，十分に大きな力が非常に短い時間だけ作用して，力積が有限になる場合がある．このような力を**撃力**といい，その例を模式的に示そう．図で塗りつぶした部分の面積が力積の大きさに等しい．

質量 m は質点に固有な一定の量であるから，運動方程式 (2.2) は

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (2.4)$$

と書ける．このとき運動の第2法則は

“質点は力の作用を受けると，力の向きに，力の大きさに比例し，質量に反比例する加速度を持つ”

といいかえることができる．

力の単位としては N(ニュートン) が使われる．質量 1 kg の質点に 1 m/s^2 の加速度を生じさせる力の大きさが 1 N である．

質点が一定の力を受けるとき，質量が大きいほど生じる加速度は小さい．すなわち，速度変化が小さく，慣性大きい．このことから質量とは慣性の大きさを示す量であるといえる．

(2.4) において $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ ならば $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ，すなわち質点は等速度運動をすることになるから，第1法則は第2法則の特別な場合に含まれるのではないかと考えるかも知れない．しかし，速度や加速度を測定するためには基準となる座標系を設定することが必要となる．そこでまず第1法則によって慣性系が存在することを主張し，次に第2法則によってその系における質点の運動を記述すると考えるべきである．

2.3 作用・反作用の法則

2つの質点 P_1 と P_2 が互いに力をおよぼしあっている場合を考えよう． P_1 の受ける力を \mathbf{F}_{12} ， P_2 の受ける力を \mathbf{F}_{21} とすると，これらの力は大きさが等しく，反対を向いている．つまり

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \quad (2.5)$$

が成立する．これを **運動の第3法則** という．すなわち

“2つの質点の一方が他方に力をおよぼしているとき，一方の質点
は他方から逆向きで大きさが等しい力を受ける”．

一方の力を作用，他方の力を反作用というので，第3法則は **作用・反作用の法則** ともいわれる．

この法則は7章で述べるように，質点系における運動量保存の法則などを導くときに重要となる．

2.4 運動方程式の成分表示

運動方程式 (2.4)

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (2.6)$$

を 1.1 節で導入したデカルト座標系および平面極座標系における成分で表示しよう．

(1) デカルト座標系での運動方程式

単位ベクトル (\mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k}) を用いて力 \mathbf{F} を成分で書くと

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \quad (2.7)$$

であり，加速度は (1.35) であるから，運動方程式 (2.6) は各成分について

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z \quad (2.8)$$

となる．

(2) 平面極座標系での運動方程式

単位ベクトル ($\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$) を用いると力は

$$\mathbf{F} = F_r \mathbf{e}_r + F_\theta \mathbf{e}_\theta \quad (2.9)$$

と表される．加速度は (1.36) で与えられるから，運動方程式 (2.6) の r, θ 成分はそれぞれ

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r \quad (2.10)$$

$$m \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) = F_\theta \quad (2.11)$$

と書ける．

2.5 運動方程式の解

一般に力が質点の位置 \mathbf{r} ，速度 \mathbf{v} および時刻 t の関数として与えられたとき，運動方程式 (2.4) は

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} \left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}, t \right) \quad (2.12)$$

と書ける．これは t に関する 2 階の微分方程式であるから，2 個の初期条件，つまり $t = 0$ における質点の位置 \mathbf{r}_0 と速度 \mathbf{v}_0 の値を指定すれば，(2.12) を積分することによって，解 $\mathbf{r}(t)$ を一意に決めることができる．すなわち，力が与えられたときの質点の運動は初期条件に応じて運動方程式から完全に決定されるのである．

このことをさらに具体的にいえば次のようになる．2 階の微分方程式 (2.12) は 1 階の微分方程式の組

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} &= \mathbf{v}(t) \\ \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} &= \frac{1}{m} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), t) \end{aligned}$$

と書ける．ある時刻 $t = t_1$ における位置 $\mathbf{r}(t_1)$ と速度 $\mathbf{v}(t_1)$ が知られているならば，微小時間 Δt 後の $t_2 = t_1 + \Delta t$ での位置と速度は

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t_2) &= \mathbf{r}(t_1) + \mathbf{v}(t_1)\Delta t \\ \mathbf{v}(t_2) &= \mathbf{v}(t_1) + \frac{1}{m}\mathbf{F}(\mathbf{r}(t_1), \mathbf{v}(t_1), t_1)\Delta t\end{aligned}$$

となる．同様にして次の時刻 t_3 での位置と速度も求められる．図に示すように，このような手続きをくりかえすことにより質点の運動を完全に決定できる．

2.6 一様な重力のもとでの運動

地表付近における落体の運動を考えよう．質量 m の質点には鉛直下向きに重力 mg が作用する．ここで g は重力加速度の大きさであり，あまり広い領域を考えなければ一定とみなすことができ， $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ である．

(1) 自由落下

鉛直上向きに y 軸をとると，運動方程式は

$$m\ddot{y} = -mg \quad (2.13)$$

と書ける．これは等加速度運動である．初期条件を $t = 0$ で $y = h$, $\dot{y} = 0$ とすると，(2.13) を t で積分して速度

$$\dot{y} = -gt \quad (2.14)$$

と位置

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + h \quad (2.15)$$

を得る．

(2) 放物運動

図に示すように水平と角 α をなす方向に初速 v_0 で質点を投げる場合を考えよう．水平方向に x 軸，鉛直上向きに y 軸をとると，運動方程式は

$$m\ddot{x} = 0, \quad (2.16)$$

$$m\ddot{y} = -mg \quad (2.17)$$

となる．初期条件は $t = 0$ で $x = y = 0$, $\dot{x} = v_0 \cos \alpha$, $\dot{y} = v_0 \sin \alpha$ である． t で積分して速度

$$\dot{x} = v_0 \cos \alpha, \quad \dot{y} = -gt + v_0 \sin \alpha \quad (2.18)$$

と位置

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \alpha \quad (2.19)$$

を得る．

(3) 空気抵抗があるときの落下運動

一般に空気中を運動する物体は空気抵抗を受ける．その抵抗の大きさは、物体の速度が小さい場合には、速度に比例し、物体の速度が大きい場合には、速度の 2 乗に比例するということが経験的に知られている．

質量 m の質点が速度 \mathbf{v} に比例する抵抗 $b\mathbf{v}$ を受ける場合を考えよう．ただし b は正の定数である．鉛直上向きに y 軸をとり、その向きの単位ベクトルを \mathbf{i} , y 方向の速度を v とすると、質点に作用する力は

$$\mathbf{F} = mg(-\mathbf{i}) + b(-\mathbf{v}) \quad (2.20)$$

であるから運動方程式は

$$m\ddot{y} = -mg - bv, \quad v = \dot{y} \quad (2.21)$$

と書ける．質点が上昇する場合には下向きの抵抗を受け、質点が下降する場合には $v < 0$ であるから上向きの抵抗を受ける．

運動方程式 (2.21) を

$$\ddot{y} = \frac{dv}{dt} = -g - \beta v \quad (\beta = b/m) \quad (2.22)$$

と書き、初期条件を $t = 0$ で $y = 0$, $v = v_0$ とする．(2.22) より

$$\frac{dv}{\beta v + g} = -dt$$

であるから両辺を積分すると

$$\frac{1}{\beta} \log(\beta v + g) = -t + C_0$$

が得られる．すなわち

$$\beta v + g = C_1 e^{-\beta t}$$

となる．ただし C_0, C_1 は積分定数である． $t = 0$ で $v = v_0$ より積分定数 C_1 を決めると

$$v = -\frac{g}{\beta} + \frac{\beta v_0 + g}{\beta} e^{-\beta t} \quad (2.23)$$

を得る． $v = dy/dt$ であるから，さらに (2.23) を t で積分し， $t = 0$ で $y = 0$ を用いると

$$y = -\frac{g}{\beta} t + \frac{1}{\beta} \frac{\beta v_0 + g}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) \quad (2.24)$$

が得られる．

十分時間がたつと， $t \rightarrow \infty$ で $e^{-\beta t} \rightarrow 0$ となるので (2.23) より速度は

$$v \rightarrow -\frac{g}{\beta} = -\frac{mg}{b} \quad (2.25)$$

となる．つまり落下速度は初期条件に関係しない一定の値に近づく．これを終端速度という．この値は (2.22) で

$\dot{v} = 0$ とおいても得られる．

初速 v_0 の値を変えたとき (2.23) で与えられる v を図に示す．終端速度よりも大きな初速で質点が下降するときは重力よりも大きな上向きの抵抗を受けるので，質点はむしろ減速されるということに注意しよう．

2.7 束縛運動

質点の運動がある定まった曲面あるいは曲線上に限られている場合，この運動を **束縛運動** という．水平な床の上に静かに置かれた質量 m の物体を考えよう．鉛直下向きの重力 mg が作用しているにもかかわらず，この物体が静止しているのは重力に等しい上向きの力を床から受けているからである．面に垂直に作用するこの力を **垂直抗力** という．

この静止している物体に水平方向の力を作用させてみよう．力が小さい場合には物体は静止したままである．これは作用力と等しい逆向きの力が床面との接触によって生じるためである．この力を **摩擦力** という．作用力をだんだん大きくしていくと、ついに物体が動き始める．このときの摩擦力の大きさ F は垂直抗力の大きさ R に比例して

$$F = \mu_0 R \quad (2.26)$$

と表される．比例定数 μ_0 を静止摩擦係数という．

$\mu_0 R$ より大きな力を作用すると物体は運動する．動いているときに物体が受ける摩擦力の大きさは

$$F = \mu R \quad (2.27)$$

と書くことができる．この比例定数 μ を運動摩擦係数という．

μ_0, μ の値は接触面の状態によって決まるが、一般には $\mu_0 \geq \mu$ である． $\mu_0 = \mu = 0$ であり、摩擦が作用しない場合、束縛は **滑らか** であるという．

例 2.1 斜面上の運動

図に示すように水平と角 α をなす斜面上を落下する質量 m の物体を考えよう．斜面に沿って下向きに x 軸，斜面に垂直上向きに y 軸をとると運動方程式は

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - F \quad (2.28)$$

$$m\ddot{y} = -mg \cos \alpha + R \quad (2.29)$$

と書ける． $\ddot{y} = 0$ であるから (2.29) より R が求められる．

いま角 α を十分小さくすると、物体は斜面上に静止したまま動かない．この場合には

$$F = mg \sin \alpha < \mu_0 mg \cos \alpha \quad (2.30)$$

が成り立っている．斜面の角度を少しづつ大きくしていくと、ある角になったとき物体が動き始める．そのときの角 α は $F = \mu_0 R$ より

$$\tan \alpha = \mu_0 \quad (2.31)$$

によって与えられる．

物体が運動している場合の摩擦力は

$$F = \mu R = \mu mg \cos \alpha \quad (2.32)$$

であるから (2.28) より

$$\ddot{x} = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \quad (2.33)$$

を得る. これは等加速度運動を表している. t で積分し, 初期条件を $t = 0$ で $x = \dot{x} = 0$ とすると

$$\dot{x} = gt(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \quad (2.34)$$

$$x = \frac{1}{2}gt^2(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \quad (2.35)$$

が得られる.

演習問題 2

1. 地上 h の高さから水平と角 α をなす方向に初速 v_0 で質点を投げるとき, 地上での到達距離を求めよ. さらにその距離を最大とする角 α を求めよ.
2. 原点 O から初速 v_0 でいろいろな方向に質点を投げ上げるとき, その最高点を結ぶ曲線は楕円となることを示せ.
3. 初速 v_0 で原点 O から投げ上げられた質点が, ある点 P を通るようにするには初速度の方向が一般に 2 つあることを示し, それらが水平となす角を α_1, α_2 , OP が水平となす角を β とするとき, $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta + \pi/2$ であることを示せ.
4. 水平面と角 α をなす斜面の最大傾斜を含む鉛直面内で, 斜面と角 β をなす方向へ初速 v_0 で質点を投げ上げる. 斜面上の到達距離を求めよ.
5. 質量 M の自動車が水平な直線上を速度 v で走っている. ブレーキをかけたときに受ける制動力を $F = a + bv$ (a, b は正の定数) とする. ブレーキをかけてから停止するまでに要する時間を求めよ.
6. 質量 m の質点が速度の 2 乗に比例する抵抗 bv^2 (b は正の定数) を受ける場合, 原点から初速 v_0 で鉛直上方に投げ上げられた質点の到達する高さおよび落下して原点にもどってきたときの速さを求めよ.
7. 質量は異なるけれど, 形状が同じ 2 つの物体があり, 同じ速度で運動しているときに受ける空気抵抗は等しいとする. これらの物体を同じ高さから初速 0 で同時に落下させるとき, どちらが先に地面に到達するか.
8. 重力加速度が地表からの高さ y の関数として $g(1 + y/R)^{-2}$ で与えられるとき, 鉛直上方へ初速 v_0 で投げられた質点の到達できる高さを求めよ. ただし R は地球の半径である.

9. 水平と角 α をなす斜面に沿って上向きに初速 v_0 で質点をすべらせる．運動摩擦係数を μ として，質点が静止するまでに上った距離を求めよ．
10. 質量 m の質量が力 $F = ae^{-bt}$ (a, b は正の定数) を受けながら，水平に直線運動している．初期条件を $t = 0$ で $x = \dot{x} = 0$ として，運動方程式の解を求めよ．

習うより慣れろ．

余談

ニュートンと科学法則

ニュートン (Isaac Newton, 1642 – 1727) は物理学ばかりでなく，数学の天才でもあった．速度，加速度を数学的に記述するために，自ら微積分学をつくった．しかし，彼が万有引力の法則を発見できたのはケプラーの3法則のおかげでもあった．時代的環境が整ったとき，自然科学は大いに飛躍するのであろうか．ニュートンをして‘わたしは巨人の肩にのって力学の法則を発見した’といわしめたことは意味深い．かれは理屈を考えたばかりでなく，自ら実験も行なった．光のスペクトルの研究に使ったニュートンリングは有名である．偉大な業績をもとにニュートンは17世紀の科学界に君臨した．

しかし，同時代の忘れ難い科学者としてフック (Robert Hooke, 1635 – 1703) がいた．ばねの法則で有名だが，真空ポンプの制作，木星の大赤班の発見，植物の細胞構造の発見，万有引力の研究など目を見張る多面的研究を行った．おもしろいことに，ニュートンとフックは発見の優先権を争って論争し続けた不倶戴天の敵であった．

ニュートンは政治にも若い頃から積極的にかかわりをもち，国会議員にもなっている．1699年に造幣局長官になってからは辣腕をふるったとある．ニュートンの性格は冷血無慈悲だったらしく，彼の伝記からは人間的な暖かみは読みとれない．晩年は錬金術に没頭し，死後彼の頭髪から水銀が検出されている．また聖書の年代学にもたいへんこったようだ．この時代はまだ科学と神秘主義が区別できなかったのである．

ニュートンの人間的顔

第3章 振動

ばねの振動や振子の運動など周期的な往復運動は日常よく見かける現象であり、ガリレオは揺れるランプを見て、振子の周期性を見出したといわれる。この章では、運動方程式を解くことにより、振動を厳密に取り扱ってみよう。また、空気抵抗などを考慮に入れた場合のばねの振動や、外部から強制的に力を加えた場合の振動も、解析的に調べてみる。振動は電気振動、分子振動、格子振動など応用例がきわめて豊富である。振動の問題は同じ型の微分方程式を解くことに帰着でき、力学系の問題としてまとめあげることができる。

3.1 単振動

図に示すようにばね定数 k の弾性ばねの一端を固定し、他端に質量 m の質点をつけて、水平で滑らかな台の上で振動させる。ばねの伸び x に対する復元力は $F = -kx$ で与えられるから、運動方程式は

$$m\ddot{x} = -kx \quad (3.1)$$

となり、ここで $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ とおくと

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x \quad (3.2)$$

である。例 1.4 の単振動の結果より、この方程式の解は

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (3.3)$$

と表され、振動の周期は

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (3.4)$$

である。

さて運動方程式 (3.1) を積分してみよう。両辺に dx/dt をかけると

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{dx}{dt} = -kx \frac{dx}{dt}$$

となる。これは

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} kx^2 \right] = 0$$

と書けるので、積分すると

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 \quad (3.5)$$

を得る。ここで A は初期条件から決まる定数である。(3.5) を変形して

$$\frac{dx}{dt} = \pm \omega_0 (A^2 - x^2)^{1/2}$$

すなわち

$$\omega_0 dt = \pm \frac{dx}{(A^2 - x^2)^{1/2}} \quad (3.6)$$

を得る。さらに積分するため $x = A \cos \theta$ とおくと (3.6) は

$$\omega_0 dt = \mp d\theta$$

となるので、 $\theta = \mp(\omega_0 t + \alpha)$ を得る。ここで α は初期条件から決まる定数である。したがって、運動方程式の解は

$$x = A \cos(\omega_0 t + \alpha) \quad (3.7)$$

となり、(3.3) に一致する。

次に同次線形微分方程式 (3.2) を一般的に解いてみよう [数学的補遺 (2) 参照]。解を求めるため

$$x = e^{\lambda t} \quad (3.8)$$

とおくと (3.2) は代数方程式

$$\lambda^2 = -\omega_0^2 \quad (3.9)$$

となる．根は

$$\lambda = \pm i\omega_0 \quad (3.10)$$

であるから，独立な2つの解

$$x_1 = e^{i\omega_0 t}, \quad x_2 = e^{-i\omega_0 t} \quad (3.11)$$

を得る．したがって， C_1, C_2 を定数として，(3.11) の一次結合

$$x = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t} \quad (3.12)$$

も解である．これを (3.2) の一般解という．

さらにオイラーの公式 [数学的補遺 (1) 参照]

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (3.13)$$

を代入すると (3.12) は

$$x = C_1 (\cos \omega_0 t + i \sin \omega_0 t) + C_2 (\cos \omega_0 t - i \sin \omega_0 t)$$

となる．ばねの伸び x は実数であるから， C, D を実数の定数として

$$C_1 + C_2 = C, \quad C_1 - C_2 = -iD$$

とおける．つまり， C_1 と C_2 は共役な複素数である．このとき一般解は

$$\begin{aligned} x &= C \cos \omega_0 t + D \sin \omega_0 t \\ &= A \cos(\omega_0 t + \alpha) \end{aligned} \quad (3.14)$$

と表され，ふたたび (3.3) に一致する．

例 3.1 鉛直方向の単振動

鉛直下向きに y 軸をとり，自然長の位置からのばねの伸びを y とする．ばねの質量を無視すると，質点には重力 mg と復元力 $-ky$ が作用するから，運動方程式は

$$m\ddot{y} = mg - ky \quad (3.15)$$

と書ける．重力と復元力が釣りあっている位置を y_0 とすると， $\ddot{y}_0 = 0$ であるから (3.15) より

$$y_0 = \frac{mg}{k}$$

である．このつりあいの位置からのずれを $x = y - y_0$ とすると (3.15) は

$$m\ddot{x} = -kx$$

と表され，(3.1) と同じ形になるので

$$y = A \cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{mg}{k} \quad (3.16)$$

が (3.15) の解となる．つまり質点をつるしたとき，ばねは y_0 だけ伸び，その点を中心として上下に単振動を行う．重力はつりあいの位置を決めるだけで振動には直接関与しないことがわかる．

3.2 単振子の運動

図に示すように固定点からつるした長さ l の糸の先に質量 m の質点をつけ，鉛直面内で振動させよう．これを **単振子** という．糸が鉛直下方となす角を θ とし，糸の張力を S とすると，(2.10), (2.11) より運動方程式は

$$ml\dot{\theta}^2 = S - mg \cos \theta \quad (3.17)$$

$$ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \quad (3.18)$$

と表せる．(3.17) は張力 S を求めるときに使う．

振幅 $\theta \ll 1$ である振動を微小振動という．この場合には $\sin \theta \simeq \theta$ と近似できる [数学的補遺 (1) 参照] ので，(3.18) は

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \theta \quad (\omega = \sqrt{g/l}) \quad (3.19)$$

と書ける．これは単振動の運動方程式 (3.2) と同じ形であるから，解は

$$\theta = A \cos(\omega t + \alpha) \quad (3.20)$$

であり，振動の周期は

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (3.21)$$

となる．振幅が大きい場合には (3.18) の解を初等関数で表すことはできない．

3.3 減衰振動

図に示すように、質量 m の質点が復元力 $-kx$ と速さに比例する空気抵抗 $b\dot{x}$ を受ける場合を考えよう。ただし b は正の定数とする。運動方程式は

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \quad (3.22)$$

すなわち

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2\beta = b/m, \omega_0 = \sqrt{k/m}) \quad (3.23)$$

と書ける。 $x = e^{\lambda t}$ とおくと (3.23) は

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

となるから、根は

$$\lambda = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad (3.24)$$

である。解のふるまいを抵抗 β の大きさに応じて 3 つの場合に分けて調べよう。

(1) 抵抗が弱い場合 ($\beta < \omega_0$)

$\sigma = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ とおくと、 $\lambda = -\beta \pm i\sigma$ となるので、独立な解は

$$x_1 = e^{-(\beta+i\sigma)t}, \quad x_2 = e^{-(\beta-i\sigma)t} \quad (3.25)$$

である。したがって、 C_1, C_2 を定数として一般解は

$$\begin{aligned} x &= C_1 x_1 + C_2 x_2 \\ &= e^{-\beta t} (C_1 e^{-i\sigma t} + C_2 e^{i\sigma t}) \end{aligned}$$

と表される。(3.12) と同様に、オイラーの公式を代入すれば一般解として

$$x = A e^{-\beta t} \cos(\sigma t + \alpha) \quad (3.26)$$

を得る。質点は角振動数 σ で振動しながら、振幅が $A e^{-\beta t}$ で減衰していく。このような振動を減衰振動という。

(2) 抵抗が強い場合 ($\beta > \omega_0$)

$\nu = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$ とおくと, $\lambda = -(\beta \pm \nu)$ となる. したがって, B_1, B_2 を定数として一般解は

$$x = B_1 e^{-(\beta+\nu)t} + B_2 e^{-(\beta-\nu)t} \quad (3.27)$$

と書ける. $\beta > \nu > 0$ であるから, この解は, 振動しないで減衰する運動を表す. ただし抵抗が非常に強く, $\beta \gg \omega_0$ の場合には $\beta - \nu \simeq \frac{\omega_0^2}{2\beta} \ll \omega_0$ となるから, (3.27) の第2項は非常にゆっくりと減衰する. 解の定性的な様子は図に示すように係数 B_1, B_2 の大きさと符号によって3つに分けられる.

(3) 抵抗が臨界の場合 ($\beta = \omega_0$)

$\lambda = -\beta$ は重根となり、解は $e^{-\beta t}$ である。もう一つの解を求めるため $x = u(t)e^{-\beta t}$ において (3.23) に代入すると

$$\ddot{u} = 0$$

となるので、 A, B を定数として $u = At + B$ を得る。したがって、一般解は

$$x = (At + B)e^{-\beta t} \quad (3.28)$$

と書ける。この解も振動しないで減衰する運動を表す。その定性的な様子は $\beta > \omega_0$ の場合と同じになるけれど、減衰はこの場合が最も速い [演習問題 5].

3.4 強制振動**(1) 単振動系への線形的強制力**

復元力 $-kx$ と強制力 mf_0t が作用する場合を考えよう。ここで f_0 は定数である。運動方程式は

$$m\ddot{x} = -kx + mf_0t \quad (3.29)$$

となる。初期条件を $t = 0$ で $x = \dot{x} = 0$ とする。(3.29) は

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0t \quad (3.30)$$

と書くことができる。これは非同次線形微分方程式であるので、解は同次方程式の一般解と非同次方程式の特殊解の和で与えられる [数学的補遺 (2) 参照].

同次方程式

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (3.31)$$

の解は A_1 と α を定数として

$$x = A_1 \sin(\omega_0 t + \alpha) \quad (3.32)$$

と表すことができる。非同次方程式

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0t$$

の特殊解は

$$x = \frac{f_0}{\omega_0^2} t \quad (3.33)$$

である。したがって、(3.30) の一般解は

$$x = A_1 \sin(\omega_0 t + \alpha) + \frac{f_0}{\omega_0^2} t \quad (3.34)$$

と書ける。このとき速度は

$$\dot{x} = A_1 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{f_0}{\omega_0^2} \quad (3.35)$$

となる。 $t = 0$ で $x = \dot{x} = 0$ より

$$\alpha = 0, \quad A_1 = -\frac{f_0}{\omega_0^3} \quad (3.36)$$

であるので、(3.29) の解として

$$x = \frac{f_0}{\omega_0^3} (\omega_0 t - \sin \omega_0 t) \quad (3.37)$$

を得る。

(2) 単振動系への周期的強制力

復元力 $-kx$ と強制力 $mf_0 \sin \omega t$ が作用する場合を考えよう。運動方程式は

$$m\ddot{x} = -kx + mf_0 \sin \omega t \quad (3.38)$$

すなわち

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \sin \omega t \quad (3.39)$$

と書ける。同次方程式の解は

$$x = A_1 \sin(\omega_0 t + \alpha) \quad (3.40)$$

である。特殊解を求めるため $x = A \sin \omega t$ とおいて (3.39) に代入すると

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A = f_0 \quad (3.41)$$

を得る。

$\omega \neq \omega_0$ の場合は

$$A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

となるので特殊解は

$$x = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t$$

であり, (3.39) の一般解

$$x = A_1 \sin(\omega_0 t + \alpha) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t \quad (3.42)$$

が得られる.

$\omega = \omega_0$ の場合には (3.41) から A を決めることができない. そこで $x = u(t) \cos \omega_0 t$ とおきなおして (3.39) に代入すると

$$\ddot{u} \cos \omega_0 t - 2\omega_0 \dot{u} \sin \omega_0 t = f_0 \sin \omega_0 t$$

となる. $\cos \omega_0 t, \sin \omega_0 t$ の係数を比べると

$$\ddot{u} = 0, \quad 2\omega_0 \dot{u} = -f_0$$

であるから, 解として

$$u = -\frac{f_0}{2\omega_0} t + B$$

を得る. ここで B は定数である. したがって特殊解は

$$x_2 = -\left(\frac{f_0}{2\omega_0} t - B\right) \cos \omega_0 t \quad (3.43)$$

となり, (3.39) の一般解は

$$x = A_1 \sin(\omega_0 t + \alpha) - \left(\frac{f_0}{2\omega_0} t - B\right) \cos \omega_0 t \quad (3.44)$$

と書ける. 特殊解 (3.43) から明らかなように, f_0 が十分小さくても, 振動系

に固有の周期 $T = 2\pi/\omega_0$ と同じ周期で力を作用しつづけると, 振幅は時間 t に比例して増大する. このような現象を **共鳴** という. 実際には 4.4 節で述べるように振幅が大きくなると復元力が $F = -kx$ からずれ, 非線形の項が現れてくるので, 振幅は無限に大きくはならない.

3.5 連結振動

図に示すように固定点からつるした長さ l_1 の糸の先に質量 m_1 の質点をつけ，さらにそこからつるした長さ l_2 の糸の先端に質量 m_2 の質点をつけたものを鉛直面内で振動させよう．これを **二重振子** という．2本の糸が鉛直下方となす角をそれぞれ θ_1, θ_2 とすると，質点 m_1 と m_2 の位置は

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin \theta_1 \\ y_1 &= -l_1 \cos \theta_1 \\ x_2 &= l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \\ y_2 &= -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2 \end{aligned}$$

である．張力を $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$ とすると運動方程式の各成分は

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -S_1 \sin \theta_1 + S_2 \sin \theta_2 \\ m_1 \ddot{y}_1 &= -m_1 g + S_1 \cos \theta_1 - S_2 \cos \theta_2 \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -S_2 \sin \theta_2 \\ m_2 \ddot{y}_2 &= -m_2 g + S_2 \cos \theta_2 \end{aligned} \tag{3.45}$$

と書ける．

微小振動の場合には $\theta_1 \ll 1, \theta_2 \ll 1$ であるから

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \theta_1, & y_1 &= -l_1 \\ x_2 &= l_1 \theta_1 + l_2 \theta_2, & y_2 &= -(l_1 + l_2) \end{aligned}$$

となる． y 方向の運動方程式より

$$S_1 = (m_1 + m_2)g, \quad S_2 = m_2 g$$

を得る． x 方向の運動方程式は

$$m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 = -(m_1 + m_2)g \theta_1 + m_2 g \theta_2 \tag{3.46}$$

$$m_2(l_1\ddot{\theta}_1 + l_2\ddot{\theta}_2) = -m_2g\theta_2 \quad (3.47)$$

となる．これは線形微分方程式であるから，解を求めるために

$$\theta_1 = Ae^{i\omega t}, \quad \theta_2 = Be^{i\omega t} \quad (3.48)$$

とおくと A, B に関する連立一次方程式

$$(m_1l_1\omega^2 - m_1g - m_2g)A + m_2gB = 0 \quad (3.49)$$

$$l_1\omega^2A + (l_2\omega^2 - g)B = 0 \quad (3.50)$$

が得られる．

自明な解 $A = B = 0$ は $\theta_1 = \theta_2 = 0$ となり，質点が鉛直に静止している状態を表す． $A = B = 0$ 以外に解を持つ条件は係数の行列式が

$$\begin{vmatrix} m_1l_1\omega^2 - (m_1 + m_2)g & m_2g \\ l_1\omega^2 & l_2\omega^2 - g \end{vmatrix} = 0 \quad (3.51)$$

すなわち

$$m_1l_1l_2\omega^4 - (m_1 + m_2)(l_1 + l_2)g\omega^2 + (m_1 + m_2)g^2 = 0 \quad (3.52)$$

である． ω^2 に対する根は

$$\omega^2 = \frac{(m_1 + m_2)(l_1 + l_2) \pm \sqrt{D}}{2m_1l_1l_2}g \quad (3.53)$$

となる．ここで

$$D = (m_1 + m_2)^2(l_1 + l_2)^2 - 4m_1(m_1 + m_2)l_1l_2 \quad (3.54)$$

である．判別式 $D > 0$ であるから， ω^2 は正の実根をもつ．したがって振動解が存在する．

(3.53) で複号の $+$ をとったものを ω_+ ， $-$ をとったものを ω_- とする．一般解は $C_1, \dots, C_4, D_1, \dots, D_4$ を定数として

$$\begin{aligned} \theta_1 &= C_1e^{i\omega_+t} + C_2e^{-i\omega_+t} + C_3e^{i\omega_-t} + C_4e^{-i\omega_-t} \\ \theta_2 &= D_1e^{i\omega_+t} + D_2e^{-i\omega_+t} + D_3e^{i\omega_-t} + D_4e^{-i\omega_-t} \end{aligned}$$

と表される．オイラーの公式を代入すると，(3.14) と同じように， θ_1, θ_2 が実数となる解は

$$\theta_1 = A_+ \cos(\omega_+ t + \alpha) + A_- \cos(\omega_- t + \beta) \quad (3.55)$$

$$\theta_2 = B_+ \cos(\omega_+ t + \alpha) + B_- \cos(\omega_- t + \beta) \quad (3.56)$$

と書ける． ω_+, ω_- を 規準振動数， $\cos(\omega_+ t + \alpha), \cos(\omega_- t + \beta)$ を 規準振動という．(3.50) より振幅の比は

$$\frac{A_+}{B_+} = -\frac{l_2 \omega_+^2 - g}{l_1 \omega_+^2}, \quad \frac{A_-}{B_-} = -\frac{l_2 \omega_-^2 - g}{l_1 \omega_-^2} \quad (3.57)$$

で与えられるので， A_+, A_-, α, β が初期条件から決められる定数となる．

(3.53) を (3.57) に代入して A/B の符号を調べよう．(3.57) の分子は

$$l_2 \omega_{\pm}^2 - g = \frac{g}{2m_1 l_1} \{(m_1 + m_2)(l_1 + l_2) - 2m_1 l_1 \pm \sqrt{D}\}$$

となり

$$\{(m_1 + m_2)(l_1 + l_2) - 2m_1 l_1\}^2 - D = -4m_1 m_2 l_1^2 < 0$$

であるから

$$\frac{A_+}{B_+} < 0, \quad \frac{A_-}{B_-} > 0$$

となる．すなわち，質点 m_1 と m_2 は振動数 ω_+ で互いに逆向きに， ω_- で同じ向きに振動している．

3.6 LCR 回路における電気振動

図のように，コイルとコンデンサーを直列につないだ回路を考えよう．あらかじめコンデンサーを充電してから，スイッチを閉じるとコンデンサーに蓄えられていた電荷が流れはじめる．しかし，コンデンサーの電荷がなくなっても，コイルの自己誘導起電力のために同じ向きに電流が流れ続け，コンデンサーの極板は初めとは逆の電荷で充電される．その結果，こんどは逆向きに電流が流れるようになる．このようにして回路に振動が実現される．これを 電気振動 という．

容量 C のコンデンサーに蓄えられている電荷を Q とすると、極板間の電位差は

$$V_C = \frac{Q}{C}$$

である。一方、自己インダクタンス L のコイルを流れる電流を I とすると、コイルに生じる起電力は

$$V_L = -L \frac{dI}{dt}$$

となる。ただし電流は $I = dQ/dt$ である。

回路全体で $V_C = V_L$ であるから、 Q に関する微分方程式は

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0 \quad (3.58)$$

と表される。この式はばねの振動における運動方程式 (3.1) と同じ形をしているから、単振動の解

$$Q = Q_0 \cos \omega_0 t, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3.59)$$

を得る。ここで Q_0 は $t = 0$ においてコンデンサーに充電されていた電荷である。回路を流れる電流は

$$I = -\omega_0 Q_0 \sin \omega_0 t \quad (3.60)$$

となる。

次に、コイル L 、コンデンサー C および抵抗 R を直列につないだ回路を考える。これを LCR 回路という。抵抗による電圧降下は RI であるから、 Q についての微分方程式は

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \quad (3.61)$$

と書ける．これは減衰振動の運動方程式 (3.22) と同じ形なので，電気抵抗が空気抵抗に対応していることがわかる．(3.61) の振動解は (3.26) を参考にすると

$$Q = Q_0 \exp \left[-\frac{R}{2L} t \right] \cos \omega t \quad (3.62)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L} \right)^2} \quad (3.63)$$

と表される．このように電気回路の問題は力学の問題に帰着できることがわかる．

演習問題 3

1. $x = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t$ は単振動であることを示せ．ただし A_1, A_2 は定数である．
2. 単振動の解 $x = A \cos(\omega t + \alpha)$ において $t = 0$ で次の初期条件を満足する解を求めよ．
 - (1) $x = x_0, \dot{x} = 0$
 - (2) $x = 0, \dot{x} = v_0$
 - (3) $x = x_0, \dot{x} = v_0$
3. 振子が微小振動をする条件は $\theta \ll 1$ である．例えば $\theta = 0.1$ のときの角は何度であるか．
4. 長さ l の糸の先に質量 m の質点をつけ，鉛直線と糸のなす角 θ を一定に保って，質点を円運動させる．その周期を求めよ．
5. 減衰振動のふるまいは抵抗 β の大きさによって分けられた．減衰が最も速いのは $\beta = \omega_0$ の場合であることを示せ．
6. 質量 m の質点が復元力 $-kx$ と速さに比例する小さな抵抗 $b\dot{x}$ および強制力 $mf_0 \sin \omega t$ を受けている．運動方程式の解を求めよ．
7. 角振動数 ω_0 の単振動系に強制力 $mf_0 \cos \omega t$ を作用する．ただし m は質点の質量である． $t = 0$ で $x = \dot{x} = 0$ という初期条件のもとで，運動方程式の解を求めよ．さらに， $\Delta\omega$ を微小量として， $\omega = \omega_0 - \Delta\omega$ のときの解のふるまいを調べよ．
8. 角振動数 ω_0 の単振動系に以下で与えられる強制力 $F(t)$ を作用させる． $t = 0$ で $x = 0, \dot{x} = 0$ という初期条件のもとで，運動方程式の解を求めよ．
 - (1) $F = F_0$ (F_0 は正の定数)

(2) $F = F_0 e^{-bt}$ (b は正の定数)

(3) $t < 0$ で $F = 0$, $0 \leq t \leq t_0$ で $F = F_0 t/t_0$, $t \geq t_0$ で $F = F_0$

9. 固定点から自然の長さ l , ばね定数 k のばねで質量 m の質点をつるす. さらにその先に同じ自然の長さ l , ばね定数 k のばねで質量 m の質点をつるし, 鉛直線に沿って振動させる. 規準振動を求めよ.
10. 質量 M の質点の両側に自然の長さ l , ばね定数 k の 2 本のばねで質量 m の質点をつなぎ, 滑らかな水平台にのせて一直線にならべ, その方向に振動させる. 規準振動を求めよ.
11. 質量 m の N 個の質点を等間隔につないだ長さ $(N+1)a$ の弾性糸を滑らかな水平台にのせる. 糸の両端を固定して強く張り, 糸に垂直な方向に微小振動させる. 質点には糸の張力 S だけが作用するものとする.
 - (1) $N = 1$ の場合, 質点は単振動することを示せ.
 - (2) $N = 2$ の場合の規準振動を求めよ.
 - (3) $N = 3$ の場合の規準振動を求めよ.
12. 容量 C のコンデンサー, 抵抗 R および起電力 V の電池を直列につなぐ. この回路を流れる電流を求めよ. ただし $t = 0$ で $Q = Q_0$ とする.
13. LCR 回路に交流電源を直列につなぎ, $V_0 \cos \omega_0 t$ となる起電力を与える. コンデンサーに蓄えられる電気量を求めよ. ただし $R^2 C < 4L$ とし, $t = 0$ で $Q = 0, I = 0$ とする.


辛抱する木に花が咲く.

余談

世の中は全て振動している？

振動といえばばねを連想するが, 話を力学に限らず物理現象全般に拡張するとどうだろう. 万有引力による惑星の軌道運動は, 周期をもつので振動の一種である. LCR 回路では, 電磁氣的現象が振動の形態をとってあらわれる. ミクロの現象を考えてみると, たとえば, 固体をつくる結晶の格子振動は無限個の単振動の重ね合わせと解釈できる. さらに, 量子力学で原子や原子核を記述するとき, 調和振動子ポテンシャルという‘ばね’のポテンシャルを量子化して使う. 物質の最小単位も振動しているのだ. 古典物理学にしたがえば, 絶対零度では振動も含めて, あらゆる運動は停止する. しかし驚くことに, 絶対零度でも原子や分子の運動は決して止まらないことが量子力学

によって明らかになった！これを零点振動という。いっぽう、物質は、粒子性と波動性の二重性をもつということも量子力学の教えるところである。光もやはり二重性をもっており、波動は振動の一形態として表現できる。このように、ばねの運動は自然を記述する、基本的な数学的方法を内蔵しているのだ。光の二重性についての比喩的な物語として、朝永振一郎 (1906-1979) の著作「光子の裁判」がおもしろい。



朝永さんの顔

第4章 エネルギー保存の法則

エネルギーは物理学における基本的な概念の1つであり、エネルギー保存の法則は物理学の指導原理ともいえる非常に重要な法則である。力学においては運動エネルギーとポテンシャルおよびそれらの和としての力学的エネルギーだけを扱う。力学的エネルギーが保存される場合には、保存力という概念が導入でき、ポテンシャルが存在する。このとき、たとえ運動方程式の解が求められなくても、運動を定性的に解析することができる。一方、力学的エネルギーが保存されずに例えば減少する場合には、そのエネルギーは熱など他の形態のエネルギーに変換されたのであって、系全体のエネルギーの総和はやはり保存されているのである。

4.1 仕事

物体が一定の力 \mathbf{F} を受けて力の方向と角 θ をなす方向に距離 s だけ動いたとしよう。このとき

$$W = Fs \cos \theta \quad (4.1)$$

を力のした **仕事** という。物体の変位ベクトルを \mathbf{s} とすれば、スカラー積の定義 (1.6) により

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} \quad (4.2)$$

と書ける。 \mathbf{F} と \mathbf{s} が直交している場合の仕事は0であることに注意しよう。

仕事の単位には J(ジュール) をつかう。1 N の力で質点を力の方向に 1 m 動かすときの仕事を 1 J と定義する。

次に、復元力のように力が位置の関数 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ であり、質点が運動するにつれて力が変化する場合を考えよう。図に示すように、径路を細かく分割し、その区間では力が一定とみなせるものとする。 j 番目の微小変位ベクトルを $\Delta \mathbf{s}_j$ 、力を \mathbf{F}_j とすると、(4.2) から、その間の仕事は

$$\Delta W_j = \mathbf{F}_j \cdot \Delta \mathbf{s}_j \quad (4.3)$$

である。質点がある径路に沿って点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ から点 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ まで動く間の仕事は (4.3) を加えることによって

$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \mathbf{F}_j \cdot \Delta \mathbf{s}_j$$

と書ける。 $|\Delta \mathbf{s}_j| \rightarrow 0$ の極限をとることにより、和を積分におきかえることができるので、仕事は

$$W = \lim_{|\Delta \mathbf{s}_j| \rightarrow 0} \sum_j \mathbf{F}_j \cdot \Delta \mathbf{s}_j = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (4.4)$$

と表される。

デカルト座標系で力は $\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$ であり、微小変位は $d\mathbf{s} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$ であるから、仕事 (4.4) は

$$\begin{aligned} W &= \int_{P_1}^{P_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z dz \end{aligned} \quad (4.5)$$

と表される。この積分は径路に沿っておこなわれるので **線積分** といわれる[数学的補遺 (4) 参照]。力 \mathbf{F} は一般に x, y, z の関数であるから、例えば F_x を x で積分するとき y, z を x の関数として知っておく必要がある。

例 4.1 径路に依存する仕事

$F_x = x - y$, $F_y = ax$ を図に示す 2 つの径路に沿って積分してみよう。まず径路 $O(0,0) \rightarrow A(x,0) \rightarrow P(x,y)$ に沿って積分する。径路 $O \rightarrow A$ に沿つ

ては $dy = 0$ であるから F_y は仕事をしない. この直線上では $y = 0$ であるから $F_x = x$ である. したがって, 積分 (4.5) への寄与は

$$W_{OA} = \int_0^x F_x dx = \int_0^x x dx = \frac{1}{2}x^2$$

と書ける. さらに径路 $A \rightarrow P$ に沿っては $dx = 0$ であり, x は一定であるから積分は

$$W_{AP} = \int_0^y F_y dy = \int_0^y ax dy = axy$$

となる. この2つを加えると

$$W_A = W_{OA} + W_{AP} = \frac{1}{2}x^2 + axy$$

が得られる.

次に同じ力を異なる径路 $O(0,0) \rightarrow B(0,y) \rightarrow P(x,y)$ に沿って積分する. 径路 $O \rightarrow B$ に沿っては $dx = 0, F_y = 0$ であるから積分は0であり, 径路 $B \rightarrow P$ に沿って y は一定であるから積分は

$$W_B = W_{BP} = \int_0^x F_x dx = \int_0^x (x - y) dx = \frac{1}{2}x^2 - xy$$

となる.

一般に a の値は任意であるから $W_A \neq W_B$ となり, 仕事は積分径路によって異なる. しかし特に $a = -1$ の場合には $W_A = W_B$ となり, 仕事は径路に依存しない.

4.2 運動エネルギー

運動方程式 (2.4) を

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} \quad (4.6)$$

と書き, これと速度 \mathbf{v} とのスカラー積をとれば

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (4.7)$$

となる.

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} &= \frac{dv_x}{dt}v_x + \frac{dv_y}{dt}v_y + \frac{dv_z}{dt}v_z \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)\end{aligned}$$

であるから (4.7) は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (4.8)$$

と書ける. ここで左辺の

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \quad (4.9)$$

を **運動エネルギー** という.

質点が時刻 t_1 に速さ v_1 で点 P_1 を通り, 時刻 t_2 に速さ v_2 で点 P_2 を通るとする. (4.8) を t_1 から t_2 まで積分すると

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (4.10)$$

が得られる. ただし最後の等式においては (1.30) より $\mathbf{v}dt = d\mathbf{s}$ を用いた. 右辺の積分は仕事 (4.4) に等しいから, (4.10) は “力がした仕事だけ運動エネルギーが増加した” ことを示している.

エネルギーは仕事と等価であるので, その単位は J である.

4.3 保存力

力 \mathbf{F} の積分 (4.4) は質点の径路に依存し, その径路は運動方程式の解で与えられるので, 運動方程式を解かないと積分 W が求められないことになる. しかし, 例 4.1 で示したように力が特別な形をしているとき, 積分 W が端点 P と Q の位置だけに依存し, 途中の径路に無関係となることがある. このとき図に示す任意の径路 C_1, C_2 に沿っての積分に関して

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (4.11)$$

が成り立つ。径路 C_2 に沿って P から Q までもどる径路を $-C_2$ とすると $d\mathbf{s}$ の向きが反対になるから

$$\int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (4.12)$$

である。(4.11), (4.12) より

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (4.13)$$

を得る。これは任意の閉曲線 $C = C_1 + (-C_2)$ に沿って一まわりした積分となり

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (4.14)$$

と表される。この条件を満足する力を **保存力** という。

力が保存力のとき、仕事 W は点 $P(x, y, z)$ と $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$ の位置だけで決まるので

$$W = \int_Q^P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -[U(x, y, z) - U(x_Q, y_Q, z_Q)] \quad (4.15)$$

となる関数 U を導入できる。負の符号を付けた理由は後に明らかにしよう。 U の基準点として Q をとり、 $U(x_Q, y_Q, z_Q) = 0$ とすると

$$U(x, y, z) = - \int_Q^P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (4.16)$$

と表すことができる。この U を **ポテンシャル** という。ポテンシャルはその差だけが意味をもつことに注意しよう。

保存力の条件 (4.14) は任意の閉曲線全てについて調べる必要があるので不便である。そこで、これと等価な条件を導いてみよう。点 $P(x, y, z)$ におけるポテンシャル $U(x, y, z)$ とそこから x 方向に微小距離 Δx だけ離れた点 $P'(x + \Delta x, y, z)$ におけるポテンシャル $U(x + \Delta x, y, z)$ の差は

$$U(x, y, z) - U(x + \Delta x, y, z) = - \int_{P'}^P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{(x+\Delta x, y, z)}^{(x, y, z)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \\
&= - \int_{x+\Delta x}^x F_x dx \\
&= F_x \Delta x
\end{aligned} \tag{4.17}$$

となる．ここで Δx が十分小さいとした．(4.17) を書きかえと

$$F_x = - \frac{U(x + \Delta x, y, z) - U(x, y, z)}{\Delta x}$$

を得る．この式で $\Delta x \rightarrow 0$ の極限をとると

$$F_x = - \frac{\partial U}{\partial x} \tag{4.18}$$

と表せる．ただし $\partial/\partial x$ は y, z を固定したまま x で微分することを意味し，偏微分といわれる[数学的補遺(3) 参照]．さらに y, z 方向についても同様の演算をおこなうと

$$F_y = - \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = - \frac{\partial U}{\partial z} \tag{4.19}$$

を得る． $\partial/\partial y, \partial/\partial z$ はそれぞれ y, z についての偏微分である．

(4.19) と (4.18) の F_y と F_x をそれぞれ x と y で偏微分すると

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial y} = - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$$

となるが， U の偏微分は微分する順序に関係しないから，これらは等しい．他の成分についても同様のことがいえるので

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \tag{4.20}$$

が得られる．これが(4.14)と等価な保存力の条件である．これは微分形であるから，力 \mathbf{F} が任意の点でこの条件を満足すれば，それは保存力となる．

(4.18), (4.19) をまとめると

$$\mathbf{F} = - \left(\mathbf{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial U}{\partial z} \right) \tag{4.21}$$

あるいは簡潔に

$$\mathbf{F} = - \nabla U \tag{4.22}$$

と書ける．ここで ∇U はポテンシャル U の勾配を意味するベクトルである [数学的補遺 (6) 参照]．(4.16) と (4.22) は互いに微分・積分の関係であることに注意しよう．

$U(x, y, z)$ が一定である面を等ポテンシャル面という．この面上に 2 点 $P(x, y, z)$ と $Q(x + dx, y + dy, z + dz)$ をとると

$$\overrightarrow{PQ} = d\mathbf{s} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$$

である．このとき

$$\nabla U \cdot d\mathbf{s} = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = dU = 0$$

となるので， ∇U は $d\mathbf{s}$ に直交する．すなわち，力は等ポテンシャル面に直交している．(4.22) の負の符号は (4.15) の符号に対応しているものであるが，これは力がポテンシャルの減少する向きに作用することを示している．

例 4.2 保存力の条件

前の例 4.1 における力 $F_x = x - y$, $F_y = ax$ に対しては

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = a$$

となるから $a = -1$ の場合，保存力の条件 (4.20) を満足する．これは積分によって得られた結果と一致する．

4.4 力学的エネルギー保存の法則

保存力に対して (4.10), (4.15) より

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = -[U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1)]$$

すなわち

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + U(x_2, y_2, z_2) = \frac{1}{2}mv_1^2 + U(x_1, y_1, z_1)$$

である．したがって，一般に E を定数として

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x, y, z) = E \quad (4.23)$$

と書ける．定数 E は 力学的エネルギー といわれ， U は 位置エネルギー ともいわれる．(4.23) は

“質点が運動している間，位置や速度は変化するけれど，運動エネルギーと位置エネルギーの和は一定に保たれる ”

ことを示しており，力学的エネルギー保存の法則 といわれる．このことから保存力とはエネルギーの保存則を導く力であることがわかる．

例 4.3 自由落下

鉛直上向きに y 軸をとると，力 \mathbf{F} の成分は $(0, -mg, 0)$ である．これは保存力の条件 (4.20) を満たし，ポテンシャルは

$$U = - \int_0^y (-mg) dy = mgy$$

となる．力学的エネルギー保存の式 (4.23) は

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = E \quad (4.24)$$

となる．これは (2.14) と (2.15) から t を消去することによっても得られる．

例 4.4 単振動

ばねの伸びの方向に x 軸をとると，力 \mathbf{F} の成分は $(-kx, 0, 0)$ である．これも条件 (4.20) を満たし

$$U = - \int_0^x (-kx) dx = \frac{1}{2}kx^2 \quad (4.25)$$

である．エネルギー保存の式 (4.23) は

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E \quad (4.26)$$

となる．これは (3.5) と同じ形である．

例 4.5 摩擦力のする仕事

垂直抗力は常に軌道に直交しているから，垂直抗力のする仕事は 0 である．しかし摩擦力は運動と反対向きに作用するから $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} < 0$ であり，したがって，これを閉曲線に沿って一まわり積分したものも負の値をとる．つまり保存力の条件 (4.14) を満足しないので，摩擦力は保存力ではない．例 2.1 における摩擦

力を受けながら斜面に沿って落下する物体を考えよう．摩擦係数 $F = \mu mg \cos \alpha$ は一定であるから，斜面に沿って距離 x だけ落下したときの仕事は

$$W_f = -\mu mgx \cos \alpha \quad (4.27)$$

となる．一方， $x = 0$ を位置エネルギーの基準点とすると $U = -mgx \sin \alpha$ であるから，(2.34), (2.35) を用いると力学的エネルギーは

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U = -\frac{1}{2}\mu mg^2 t^2 \cos \alpha (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = W_f < 0 \quad (4.28)$$

と書ける [演習問題 10]．すなわち，力学的エネルギーは保存されず，摩擦力のした仕事だけ減少する．この仕事は主に熱となって系から解放される．

例 4.6 減衰振動

減衰振動は運動方程式 (3.22) によって

$$m\dot{v} = -kx - bv \quad (4.29)$$

と記述される．この式に v をかけると

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right] = -bv^2 \quad (4.30)$$

となる．右辺の量は単振動における力学的エネルギーの減少率を表す．すなわち抵抗が作用する場合，エネルギーの一部が熱などに変換され系から放出されるので，力学的エネルギーは保存されない．

4.5 1次元の運動

(1) 運動の定性的記述

たとえ運動方程式の解が求められなくても，ポテンシャルの関数形がわかるならば，運動を定性的に理解することができる．このことを x 軸方向の 1 次元運動で考えてみよう．力が x だけの関数 $F(x)$ とすると運動方程式は

$$m\ddot{x} = F(x) \quad (4.31)$$

である．

この力は保存力の条件 (4.20) を満たすのでポテンシャル $U(x)$ が存在し

$$U(x) = - \int^x F(x) dx \quad (4.32)$$

である。力学的エネルギー保存の式 (4.23) より

$$\frac{1}{2}mv^2 = E - U(x) \quad (4.33)$$

となるから、力学的エネルギー E をもつ質点が運動できる範囲は

$$U(x) \leq E \quad (4.34)$$

である。例えば図に示すポテンシャルの場合、 E は定数であるから、この図において質点の運動は横軸に平行な直線で表され、縦方向の差 $E - U$ が運動エネルギー T に等しい。 x_1, x_2, x_3 の各点で $v = 0$ となり、 $x_1 \leq x \leq x_2$ および $x \geq x_3$ の領域に運動が実現される。

例 4.7 バネの振動

復元力 $F = -kx$ に対するポテンシャル $U = \frac{1}{2}kx^2$ を図に示す。運動が実現される領域は

$$|x| \leq A = \sqrt{2E/k}$$

である。ここで A は単振動の振幅である。

力学的エネルギーが大きくなり振動の振幅も大きくなると、復元力は $F = -kx$ かわらずれ、高次の項が現れてくる。例えば γ を正の微小量として力が

$$F = -kx - \gamma x^3 \quad (4.35)$$

で与えられる場合を考えよう。このとき運動方程式は非線形となるので、解を t の関数として求めることはむずかしい。力 (4.35) に対するポテンシャルは、 x で積分して

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{4}\gamma x^4 \quad (4.36)$$

と書ける．これを図に破線で示す．力学的エネルギー E をもつ質点の運動は

$$|x| \leq \left[\frac{k}{\gamma} \left\{ \left(1 + \frac{4\gamma E}{k^2} \right)^{1/2} - 1 \right\} \right]^{1/2}$$

に限られた範囲の振動となるが，単振動のように三角関数では表されない．

(2) 平衡点と安定性

ポテンシャル U が存在するとき力は

$$F = -\frac{dU}{dx} \quad (4.37)$$

で与えられる． $dU/dx < 0$ の領域では x が増加する向きに力が作用し， $dU/dx > 0$ の領域では x が減少する向きに力が作用する． U が極値となる点，つまり $dU/dx = 0$ の点では $F = 0$ となり，作用する力がつりあっているので，この点を **平衡点** という．

この平衡点の安定性を調べてみよう．質点を平衡点から少しずらして静かにおくと，質点が平衡点へもどるように動く場合，その平衡は安定である

といい，平衡点から遠ざかるように動く場合，その平衡は不安定であるという．力はポテンシャルが減少する向きに作用するから， U が極小値をとるとき安定，極大値をとるとき不安定となる．図に示したポテンシャルに対しては a_2 が安定な平衡点であり， a_1, a_3 が不安定な平衡点である．

平衡点を x_0 とし，その点からの微小変位を ξ とすると $x = x_0 + \xi$ である．ポテンシャル U を x_0 のまわりにテイラー展開すると [数学的補遺 (1) 参照]

$$\begin{aligned} U(x) &= U(x_0 + \xi) \\ &= U(x_0) + U'(x_0)\xi + \frac{1}{2!}U''(x_0)\xi^2 + \frac{1}{3!}U'''(x_0)\xi^3 + \dots \end{aligned} \quad (4.38)$$

となる． x_0 は平衡点であるので $U'(x_0) = 0$ である． $x = x_0$ をポテンシャルの基準点とすれば $U(x_0) = 0$ となり，微小量 ξ の高次の項を無視すれば

$$U = \frac{1}{2}U''(x_0)\xi^2 \quad (4.39)$$

を得る．これを単振動のポテンシャル (4.25) と比べると， $k = U''(x_0)$ としての復元力に対応していることがわかる．

$U''(x_0) > 0$ の場合， $k > 0$ となるから質点は平衡点 x_0 のまわりに単振動をおこなう．すなわち， U が極小値となる平衡点は安定である．

一方， $U''(x_0) < 0$ の場合， $k < 0$ となり，(3.2) を参考にすると運動方程式は

$$\ddot{\xi} = \lambda^2 \xi \quad (\lambda = \sqrt{|U''(x_0)|/m}) \quad (4.40)$$

と表される．一般解は (3.12) と同様に B_1, B_2 を定数として

$$\xi = B_1 e^{\lambda t} + B_2 e^{-\lambda t} \quad (4.41)$$

と書ける．時間が経過するにつれて，平衡点からのずれ ξ が大きくなるので， U が極大値となる平衡点は不安定である．

$U''(x_0) = 0$ の場合には，質点を平衡点からわずかにずらしても，質点は平衡点にもどることも，平衡点から遠ざかることもなく，ずらされた位置に留まり続ける．したがって，この平衡点を中立という．中立平衡点が広い領域にわたって安定であるかどうかを調べるためには，(4.38) で ξ^3 の項が効いてくるほど質点を大きくずらす必要がある．

演習問題 4

1. 以下の場合において運動量と運動エネルギーを計算せよ．

- (1) 速さ 10 m/s で走っている 60 kg の人
- (2) 速さ 60 km/h で走っている 10 t のトラック
- (3) 速さ 300 km/h で走っている 500 kg のレーシングカー

2. 1次元の運動における力が $F_x = -5 - 3x + x^2$ N の場合，物体が $x = 2$ から 5 m まで移動する間に，この力のする仕事を計算せよ．

3. 速度 \mathbf{v} で運動している質点に力 $\mathbf{F} = \mathbf{b} \times \mathbf{v}$ が作用しているとき，仕事が 0 となることを示せ．ただし \mathbf{b} は一定のベクトルである．

4. 次の力に関して，それぞれ径路 $O(0,0) \rightarrow A(x, 0) \rightarrow P(x, y)$ および $O \rightarrow B(0, y) \rightarrow P$ に沿って質点を運ぶときの仕事を計算せよ．さらに，ポテンシャルをもつならば，そのとき定数 a, b の満たすべき関係を求めよ．

- (1) $F_x = axy^2, F_y = bx^2y$
- (2) $F_x = axy, F_y = bx$

$$(3) F_x = ax^2y, F_y = bx^3$$

5. 前問の力に対して保存力の条件 (4.20) を適用することにより, a, b の満たすべき関係を求めよ.
6. 力の成分が次式で与えられている.

$$F_x = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z$$

$$F_y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z$$

$$F_z = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z$$

ポテンシャルをもつための条件を求め, 点 $P(x, y, z)$ でのポテンシャルを計算せよ. ただし a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) は定数である.

7. \mathbf{A} を一定のベクトルとするとき, 力 $\mathbf{F} = \mathbf{A} \times \mathbf{r}$ は保存力の条件 (4.20) を満たさないことを示せ. さらに xy 面上で半径 a の円に沿ってなされた仕事を求めよ.
8. 単振動している系の振幅を 2 倍にしたとき, 最大速度, 力学的エネルギー, 周期はどう変化するか.
9. 質点が単振動しているとき, 1 周期についての運動エネルギーの平均と位置エネルギーの平均は等しいことを示せ.
10. 運動方程式 (2.28) を積分して (4.28) を導け.
11. (3.58) および (3.61) を積分することにより, LCR 回路における電氣的エネルギーの保存則を調べよ.
12. 原点からの距離が r である点のポテンシャルが $U = \frac{C}{r}$ で与えられる. 力の成分 F_x, F_y, F_z を求め, \mathbf{F} が \mathbf{r} に比例することを示せ. ただし C は定数である.
13. ポテンシャル

$$U(x) = Ae^{-2x} - 2Ae^{-x}$$

に関して, 運動の平衡点を求め, その安定性を調べよ.

14. ポテンシャルが次式で与えられている.

$$U(x) = C \left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a} \right), \quad (C > 0, a > 0)$$

質量 m の質点の運動について, 安定平衡点付近における微小振動の周期を求めよ.

読書百遍，意自ずから通ず.

余談

保存則いろいろ

力学的エネルギーは，摩擦などがあると保存しない．しかし，摩擦で発生した熱までを含めると全エネルギーは保存するというのが物理学の主張である．証明はなく，経験的事実と認めている．この法則は一見，絶対的といえよう．ところがである．量子力学によれば，不確定性原理の結果，エネルギーと時間には不確定な関係が厳然と存在している．この不確定性原理の範囲内ではエネルギー保存則といえども破れていると解釈するのが現代物理学の立場なのだ！ただし素粒子の世界のような極微の世界の話であり，日常生活とはほとんど関係ない．このように極微の世界においては，日常では考えられないことが‘常識的’に起こっている．たとえば，われわれは壁を通り抜けることはできないが，電子は波動性のために，壁を透過することができる．現代物理学ではこの‘トンネル効果’を確率的に取り扱うからである．反導体におけるトンネル効果を初めて明らかにしたのは，江崎玲於奈 (1925-) である．



第5章 中心力

2つの質点の及ぼす力が質点間を結ぶ直線上に沿っているとき、この力を中心力という。中心力の典型的な例が万有引力であり、惑星の運動に関するケプラーの法則は万有引力を導入することによって合理的に説明された。さらに天王星の運動の解析に基づいて予言された位置に海王星が発見されたということはニュートン力学の大きな成果であった。地上に落下するリンゴの運動と地球のまわりの月の運動とが同じ力に支配されていることが明らかになった。このように一見異なる現象を統一的に解釈し、一般化していくことは、自然現象を理解する上での物理学の典型的なアプローチである。

5.1 中心力のポテンシャル

点 $P(x, y, z)$ に存在する質点が点 $P'(x', y', z')$ に存在する質点から中心力 \mathbf{F} を受けている場合を考えよう。力の大きさは相対距離 r だけの関数とする。相対位置ベクトルは

$$\mathbf{r} = (x - x')\mathbf{i} + (y - y')\mathbf{j} + (z - z')\mathbf{k} \quad (5.1)$$

であり、相対距離は

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad (5.2)$$

であるから、中心力は

$$\mathbf{F} = f(r)\frac{\mathbf{r}}{r} \quad (5.3)$$

と表せる。すなわち、 \mathbf{F} は \mathbf{r} に平行である。(5.3) を成分で書けば

$$F_x = f(r)\frac{x - x'}{r}, \quad F_y = f(r)\frac{y - y'}{r}, \quad F_z = f(r)\frac{z - z'}{r} \quad (5.4)$$

となる。

この力が保存力の条件 (4.20) を満たすことを示そう. (5.2) の偏微分は

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x - x'}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y - y'}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z - z'}{r}$$

であり, f が r だけの関数であることに注意すると

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = (y - y') \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f}{r} \right) = (y - y')(x - x') \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{f}{r} \right)$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = (x - x') \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f}{r} \right) = (x - x')(y - y') \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{f}{r} \right)$$

と書ける. 他の成分も同様に表され

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}$$

が成り立つので, 中心力は保存力であるといえる.

このときポテンシャル (4.16) は

$$U(r) = - \int_{r_0}^r \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{r_0}^r f(r) dr \quad (5.5)$$

で与えられる. ここで r_0 はポテンシャルの基準点である.

例 5.1 万有引力のポテンシャル

質量 m, m' の2つの質点が距離 r だけ離れているとき作用する万有引力は

$$\mathbf{F} = -G \frac{mm'}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (5.6)$$

で与えられる. ここで G は万有引力定数といわれ, その値は $G = 6.673 \times 10^{-11}$ N m²/kg² である. ポテンシャルは (5.5) から

$$\begin{aligned} U &= - \int_{r_0}^r \left(-G \frac{mm'}{r^2} \right) dr \\ &= -G \frac{mm'}{r} \end{aligned} \quad (5.7)$$

となる. ただし $r_0 \rightarrow \infty$ とした.

例 5.2 物体からの万有引力のポテンシャル

点 $P(x, y, z)$ にある質量 m の質点が大きさをもった物体から受ける万有引力のポテンシャルを求めよう．その物体の微小部分の質量 dm' が $P'(x', y', z')$ にあるとする．(5.7) より dm' が及ぼすポテンシャルは

$$dU = -G \frac{m dm'}{r}$$

である．ここで r は相対距離 (5.2) である．物体全体からのポテンシャルはこれを積分して

$$U = -G \int \frac{m dm'}{r} \quad (5.8)$$

となる．物体の密度を $\rho(x', y', z')$ 、体積要素を dV' とすると $dm' = \rho dV'$ であるから (5.8) は体積積分

$$U = -Gm \iiint \frac{\rho(x', y', z') dV'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \quad (5.9)$$

で表される [数学的補遺 (5) 参照]．

さてここで、3つの代表的な座標系における体積要素 dV を列記しておこう．それぞれの座標系において単位ベクトルは互いに直交しているから、2点間の微小距離 ds の各成分をかけあわせることにより dV を求めることができる．デカルト座標系では (1.31) より dx, dy, dz をかけて

$$dV = dx dy dz \quad (5.10)$$

と表せる．円柱座標系では (1.32) より各成分 $dr, r d\theta, dz$ をかけると

$$dV = r dr d\theta dz \quad (5.11)$$

である．さらに球座標系では (1.33) より各成分 $dr, r \sin \theta d\theta, r d\phi$ をかけると

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (5.12)$$

が得られる．

例 5.3 球の体積

半径 a の球の体積を計算しよう．体積要素 (5.12) を r について 0 から a まで， θ について 0 から π まで， ϕ について 0 から 2π まで積分することにより

$$V = \int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{4}{3}\pi a^3$$

を得る．

例 5.4 球からの万有引力のポテンシャル

球の半径を a とし、密度 ρ を一定とする。図に示すように球の中心 O を原点とし、球座標系で P の位置を $(r, 0, 0)$, P' の位置を (r', θ', ϕ') とする。(5.9) は

$$U = -Gm \iiint \frac{\rho dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

であり、相対距離 (5.2) は

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'}$$

である。体積要素 (5.12) を用いると

$$\begin{aligned} U &= -Gm\rho \int_0^a dr' \int_0^\pi d\theta' \int_0^{2\pi} d\phi' \frac{r'^2 \sin \theta'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta'}} \\ &= -Gm\rho \frac{2\pi}{r} \int_0^a r'(r + r' - |r - r'|) dr' \end{aligned}$$

と書ける。

点 P が球の外部にあるときは $r > r'$ であるから、 r' についての積分は

$$\int_0^a r' 2r' dr' = \frac{2}{3} a^3$$

となる。球の質量は

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho a^3$$

であるから

$$U = -G \frac{mM}{r} \quad (r \geq a) \quad (5.13)$$

を得る。これは (5.7) と同じ形である。つまり球の外部のポテンシャルは全質量が球の中心に集まったものとみなすことができる。

点 P が球の内部にあるときは $|r - r'|$ の正負に応じて積分の範囲を分けると

$$\int_0^r r' 2r' dr' + \int_r^a r' 2r dr' = r \left(a^2 - \frac{1}{3} r^2 \right)$$

となる。したがってポテンシャルは

$$U = -\frac{3}{2}G\frac{mM}{a}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{r^2}{a^2}\right) \quad (r \leq a) \quad (5.14)$$

と表される。これは $r = a$ で (5.13) に一致することに注意しよう。

例 5.5 地球による引力のポテンシャル

地表から高さ y のところにある質点の位置エネルギーを万有引力のポテンシャルから求めてみよう。地球を質量 M , 半径 R の密度一様な球とすると, (5.13) より $r = R + y$ の点のポテンシャルは

$$U = -G\frac{mM}{R+y}$$

である。ここで $y/R \ll 1$ であるから、テイラー展開 [数学的補遺 (1) 参照]

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots \quad (5.15)$$

を用い、1次までとると

$$U = -G\frac{mM}{R}\left(1 - \frac{y}{R}\right)$$

と近似できる。したがって

$$U_0 = -G\frac{mM}{R}, \quad g = \frac{GM}{R^2}$$

とおくと

$$U = U_0 + mgy$$

と書ける。 U_0 は定数であるから、基準点の選び方で0とすることができる。 U は例 4.3 の結果に帰着し、 g は重力加速度の大きさであることに注意しよう。

5.2 角運動量保存の法則

点 P の位置ベクトルを $\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}$ とするとき、図に示すように \mathbf{r} と運動量 \mathbf{p} とのベクトル積

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (5.16)$$

を **角運動量** と定義する. \mathbf{L} は \mathbf{r} と \mathbf{p} に直交していることに注意しよう. (5.16) を成分で表すと

$$\begin{aligned} L_x &= y p_z - z p_y \\ L_y &= z p_x - x p_z \\ L_z &= x p_y - y p_x \end{aligned} \quad (5.17)$$

である.

角運動量 (5.16) を時間 t で微分すると

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (5.18)$$

と書ける. 右辺第 1 項は $d\mathbf{r}/dt$ が \mathbf{p} に平行であるから 0 となり, 第 2 項に運動方程式 $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ を用いると, (5.18) は

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{N} \quad (5.19)$$

となる. ここで \mathbf{N} を O のまわりの力のモーメントという. (5.19) は

“角運動量の時間変化が作用した力のモーメントに等しい”

ことを示している.

力のモーメント $\mathbf{N} = \mathbf{0}$ であるならば \mathbf{L} は一定に保たれる. あるいは, 成分 $N_z = 0$ であるならば L_z は一定である. これを **角運動量保存の法則** という.

例 5.6 円運動する質点の角運動量

質量 m の質点が等速円運動をしている．円軌道の半径を r_0 ，角速度の大きさを ω とすると，例 1.5 より回転の速さは $v = r_0\omega$ であるから，角運動量の大きさは

$$L = mr_0v = mr_0^2\omega$$

となる．

5.3 中心力による運動

2点 P, P' にある質点が中心力を及ぼし合っているとしよう．点 P' にある質点の質量が十分大きければ，その点はほぼ静止しているとみなせるので，点 P' を座標原点 O に固定できる．このとき (5.1) の \mathbf{r} は点 P の位置ベクトルとなり， $\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ となるから，(5.19) より角運動量 \mathbf{L} は一定のベクトルとなる．つまり角運動量の大きさ $|\mathbf{L}|$ が一定となるばかりでなく，ベクトル

\mathbf{L} の向きも一定に保たれる． \mathbf{r} および \mathbf{v} は常に \mathbf{L} に垂直であるから，質点の運動は \mathbf{L} に直交する一定の平面内に限られる．

図に示すように点 P の位置 \mathbf{r} が時間 dt 後， $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ になったとしよう．その間に \overline{OP} が描いた三角形の面積は

$$dS = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times (\mathbf{r} + d\mathbf{r})| = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| dt$$

となり

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = \frac{1}{2m} |\mathbf{L}| \quad (5.20)$$

と書けるから，これは一定となる．この dS/dt を 面積速度 という．すなわち質点が中心力のもとで運動するとき，面積速度は一定に保たれる．

質点の運動は平面運動となるから平面極座標系を導入すると，運動方程式が簡潔に表せる．すなわち，中心力 (5.3) は

$$F_r = f(r), \quad F_\theta = 0 \quad (5.21)$$

となり，(2.10), (2.11) より運動方程式は

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = f(r) \quad (5.22)$$

$$\frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) = 0 \quad (5.23)$$

と書ける. (5.23) を積分して

$$r^2 \dot{\theta} = h \quad (5.24)$$

を得る. ここで h は定数であるが, (5.20) に (1.24), (1.25) を代入すると

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{h}{2} \quad (5.25)$$

となるので, 定数 h は面積速度の 2 倍, つまり単位質量当たりの角運動量の大きさに等しいことがわかる.

5.4 有効ポテンシャル

運動方程式 (5.22) を

$$m\ddot{r} = f(r) + mr\dot{\theta}^2 \quad (5.26)$$

と書きかえてみよう. このとき項 $mr\dot{\theta}^2$ は遠心力に対応している.

(5.24) を用いて $\dot{\theta}$ を消去すると (5.26) は

$$m\ddot{r} = f(r) + m \frac{h^2}{r^3} \quad (5.27)$$

となり, 両辺に \dot{r} を掛けて t で積分すると

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U(r) + \frac{mh^2}{2r^2} = E \quad (5.28)$$

が得られる. ただし $U(r)$ は (5.5) で与えられる中心力のポテンシャルである. E は定数で, 力学的エネルギーであり, (5.28) は力学的エネルギー保存の法則を表している. この式は運動エネルギーを

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v^2 &= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) \\ &= \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} \right) \end{aligned}$$

と書きかえ, (4.23) に代入することによっても得られる.

さて1次元の運動に関する(4.33)との対応を保つために 有効ポテンシャル

$$U_{ef}(r) = U(r) + \frac{mh^2}{2r^2} \quad (5.29)$$

を導入しよう. 右辺第2項を遠心力のポテンシャルという. (5.28) は

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E - U_{ef}(r) \quad (5.30)$$

となるから, 力学的エネルギー E をもつ質点が運動できる領域は

$$U_{ef}(r) \leq E \quad (5.31)$$

に制限される. $U_{ef} = E$ が成り立つ点では $\dot{r} = 0$ となり, 速度の r 成分は0となるが θ 成分 $r\dot{\theta}$ は0とはならないことに注意しよう.

$U_{ef}(r)$ が極値となる半径のところでは中心力と遠心力とがつりあっており, 円運動が実現される.

例 5.7 万有引力に対する有効ポテンシャル

万有引力のポテンシャルは(5.7)で与えられるから有効ポテンシャルは

$$U_{ef}(r) = -G\frac{mm'}{r} + \frac{mh^2}{2r^2} \quad (5.32)$$

と書ける. $U_{ef}(r)$ を図に示す. $E = E_1 \geq 0$ の場合には質点が運動できる領域は $r \geq r_1$ となり, 無限遠まで達することができる. 一方 $E = E_2 < 0$ の場合の運動領域は $r_2 \leq r \leq r_3$ に制限される. U_{ef} が極値となる位置

$$R = \frac{h^2}{Gm'} \quad (5.33)$$

は円軌道の半径であり, このときの力学的エネルギーは

$$E_c = -\frac{Gmm'}{2R} = -\frac{m}{2} \left(\frac{Gm'}{h} \right)^2 \quad (5.34)$$

と書ける. 図から明らかなように, R でポテンシャルは極小となるから, この円軌道は安定である. 定数 h の値が与えられたとき, 運動は $E \geq E_c$ の場合だけに実現されることに注意しよう.

5.5 惑星と彗星の運動

太陽のまわりの惑星や彗星の運動を考えよう．太陽の質量は $M \simeq 2 \times 10^{30}$ kg であり，太陽系最大の惑星である木星でも質量はその 1/100 程度であるから，太陽を座標原点に固定することができる．質量 m の惑星に作用する万有引力は太陽からの距離を r として

$$f = -G \frac{Mm}{r^2} \quad (5.35)$$

と書ける．(5.22) より運動方程式は

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -G \frac{Mm}{r^2} \quad (5.36)$$

となり，エネルギーの保存則は (5.28) より

$$\frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{mh^2}{2r^2} - G \frac{Mm}{r} = E \quad (5.37)$$

と表される．

r を θ の関数とみなすと (5.24) より

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{d\theta} = \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta}$$

となり，これを (5.37) に代入して

$$\frac{1}{2}m \frac{h^2}{r^4} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \frac{mh^2}{2r^2} - G \frac{Mm}{r} = E$$

を得る． $u = 1/r$ とおくと，この式は

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 &= \frac{2E}{mh^2} + 2 \frac{GM}{h^2} u - u^2 \\ &= A^2 - (u - B)^2 \end{aligned} \quad (5.38)$$

と書きかえられる．ここで

$$A^2 = \frac{2E}{mh^2} + \left(\frac{GM}{h^2} \right)^2, \quad B = \frac{GM}{h^2}$$

である．例 5.6 で述べたように $E \geq E_c$ であるから $A^2 \geq 0$ である．(5.38) は

$$d\theta = \pm \frac{du}{\sqrt{A^2 - (u - B)^2}} \quad (5.39)$$

と変数分離できる．これは (3.6) と同じ形であるから，積分すると

$$u = B + A \cos(\theta + \alpha) \quad (5.40)$$

が得られる．ただし α は定数である．ここで

$$l = \frac{1}{B} = \frac{h^2}{GM}, \quad \varepsilon = \frac{A}{B} = \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{G^2M^2m}} \quad (5.41)$$

とおくことにより (5.40) は

$$r = \frac{l}{1 + \varepsilon \cos(\theta + \alpha)} \quad (5.42)$$

と表される．これは惑星や彗星の軌道が太陽を焦点とする円錐曲線，つまり図に示すように，円錐をある平面で切ったとき，その切り口の示す曲線であることを意味している． l を半直弦， ε を離心率という． $\cos(\theta + \alpha) = 1$ となると惑

星や彗星は太陽に最も近づくので，この点を近日点という．

軌道は ε の値，つまり (5.41) によれば E の値によって分類され

$E > 0$ のとき $\varepsilon > 1$ で 双曲線

$E = 0$ のとき $\varepsilon = 1$ で 放物線

$E_c < E < 0$ のとき $0 < \varepsilon < 1$ で 楕円

$E = E_c$ のとき $\varepsilon = 0$ で 円

となる．

(1) 楕円軌道

$E < 0$ である楕円運動を考えよう．楕円の標準方程式は

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (5.43)$$

である．ここで a は長半径， b は短半径である． a, b, l, ε の間には

$$a = \frac{l}{1 - \varepsilon^2}, \quad b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2} = \sqrt{al} \quad (5.44)$$

の関係があり, (5.41) を用いると

$$a = \frac{GMm}{-2E}, \quad b = \sqrt{\frac{mh^2}{-2E}} \quad (5.45)$$

と書ける. すなわち軌道の長半径 a は力学的エネルギー E の値で決まる. つまり a が同じ楕円軌道を運動する質点はすべて同じエネルギー E を持っているといえる.

惑星の運動に関する **ケプラーの法則** は次のようにまとめられる:

1. 惑星の軌道は太陽を焦点とする楕円である.
2. 面積速度は一定である.
3. 公転周期の 2 乗は長半径の 3 乗に比例する.

第 1 法則は (5.42), 第 2 法則は (5.20) のことであり, これらについてはすでに述べたから, ここでは第 3 法則を示そう. 楕円の面積は πab であるから [演習問題 8], 公転周期を T とすると (5.25) より

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\pi ab}{T} = \frac{h}{2}$$

と書ける. (5.44) の b を代入し, (5.41) の l を用いると

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \quad (5.46)$$

となる. このようにして第 3 法則が得られる.

次に r と t の関係を求めよう. (5.37) より

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r} - \frac{h^2}{r^2} \quad (5.47)$$

となり, 楕円軌道のときは $E < 0$ であるから

$$dt = \pm \sqrt{\frac{m}{-2E}} \frac{r dr}{\sqrt{-r^2 + \frac{GMm}{-E}r - \frac{mh^2}{-2E}}} \quad (5.48)$$

と変数分離できる．(5.48) の分母の平方根の中は (5.44), (5.45) を用いると

$$\begin{aligned} -r^2 + \frac{GMm}{-E}r - \frac{mh^2}{-2E} &= -r^2 + 2ar - b^2 \\ &= a^2\varepsilon^2 - (a-r)^2 \end{aligned}$$

と変形できる．ここで

$$r = a(1 - \varepsilon \cos \varphi) \quad (5.49)$$

とおくと (5.48) は

$$dt = \sqrt{\frac{m}{-2E}} a(1 - \varepsilon \cos \varphi) d\varphi$$

と書ける．これを積分すると

$$t = \sqrt{\frac{m}{-2E}} a(\varphi - \varepsilon \sin \varphi) \quad (5.50)$$

が得られる．ただし惑星は $t = 0$ で近日点 $\varphi = 0$, $r = a(1 - \varepsilon)$ にあるとした．(5.50) に 1 周期 $\varphi = 2\pi$ を代入し, (5.45) を用いると

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{-2E}} a = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$

が得られる．これはケプラーの第3法則 (5.46) と同じである．

(2) 双曲線軌道

$E > 0$ である双曲線運動を考えよう．双曲線の標準方程式は

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (5.51)$$

であり, 2つの分枝がある．極座標系を用いるとそれぞれは

$$r_I = \frac{l}{1 + \varepsilon \cos \theta}, \quad r_{II} = \frac{l}{-1 + \varepsilon \cos \theta} \quad (5.52)$$

と表される． r_I は引力の場合, r_{II} は斥力の場合の軌道に対応している． a, b は (5.44), (5.45) と同様に

$$a = \frac{l}{\varepsilon^2 - 1} = \frac{GMm}{2E}, \quad b = \sqrt{al} = \sqrt{\frac{mh^2}{2E}} \quad (5.53)$$

と書ける.

楕円軌道の場合と同様に (5.47) を積分することにより (5.49), (5.50) と似た形の解

$$t = \sqrt{\frac{a^3}{GM}}(\varepsilon \sinh \varphi - \varphi) \quad (5.54)$$

$$r = a(\varepsilon \cosh \varphi - 1) \quad (5.55)$$

を得ることができる [演習問題 11]. ただし

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (5.56)$$

は双曲線関数である [数学的補遺 (7) 参照].

5.6 離心率ベクトル

運動方程式 (5.36) を積分することなく, 軌道の式 (5.42) を導いてみよう. ベクトルで表した運動方程式

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -GMm \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (5.57)$$

の両辺に角運動量 \mathbf{L} をかけると

$$\mathbf{L} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -GMm \frac{\mathbf{L} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (5.58)$$

となる. 5.3 節でみたように, \mathbf{L} は一定のベクトルであるから (5.58) の左辺は

$$\mathbf{L} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{L} \times \mathbf{p})$$

と書ける. 一方, 演習問題 1 の 2(2) で与えたベクトルの公式を使うと

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{L} \times \mathbf{r}}{r^3} &= m \frac{(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \times \mathbf{r}}{r^3} \\ &= m \left[\frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \frac{(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}})}{r^3} \mathbf{r} \right] \\ &= m \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) \end{aligned}$$

と書き換えられる．ただし $\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = r\dot{r}$ を用いた．したがって (5.58) は

$$\frac{d}{dt} \left[\mathbf{L} \times \mathbf{p} + GMm^2 \frac{\mathbf{r}}{r} \right] = 0 \quad (5.59)$$

となる．

ここで無次元のベクトル

$$\boldsymbol{\epsilon} = -\frac{\mathbf{L} \times \mathbf{p}}{GMm^2} - \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (5.60)$$

を導入しよう．(5.59) より，これは一定のベクトルである．このベクトルの大きさの2乗は

$$\epsilon^2 = \frac{(\mathbf{L} \times \mathbf{p})^2}{(GM)^2 m^4} + 2 \frac{(\mathbf{L} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{r}}{GMm^2 r} + 1 \quad (5.61)$$

である． $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ と 5.3 節で導入した単位質量あたりの角運動量の大きさ h を使うと

$$(\mathbf{L} \times \mathbf{p})^2 = L^2 p^2 = m^2 h^2 p^2$$

$$(\mathbf{L} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{p} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{L} = -L^2 = -m^2 h^2$$

となるから (5.61) は

$$\begin{aligned} \epsilon^2 &= \frac{h^2 p^2}{G^2 M^2 m^2} - \frac{2h^2}{GM r} + 1 \\ &= \frac{2h^2}{G^2 M^2 m} \left(\frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r} \right) + 1 \\ &= \frac{2h^2 E}{G^2 M^2 m} + 1 \end{aligned}$$

と書ける．ただし (5.37) を用いた．この結果と (5.41) をくらべると ϵ が離心率に等しいことがわかる．さて (5.60) より

$$\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{r} = -\frac{(\mathbf{L} \times \mathbf{p}) \cdot \mathbf{r}}{GMm^2} - r \quad (5.62)$$

である． $\boldsymbol{\epsilon}$ と \mathbf{r} のなす角を $\theta + \alpha$ とすると (5.62) は

$$\epsilon r \cos(\theta + \alpha) = \frac{h^2}{GM} - r$$

となり, (5.41) で定義した半直弦 l を用いて

$$r = \frac{l}{1 + \epsilon \cos(\theta + \alpha)}$$

と書ける. このようにして軌道の式 (5.42) が得られる. ベクトル ϵ は大きさが離心率に等しく, 焦点から近日点を向いている. これは 離心率ベクトル といわれる.

5.7 クーロン散乱

図に示すように電荷 $+Ze$ の粒子が原点に静止している. 質量 m , 電荷 $+Z'e$ の粒子が $t = 0$ で十分遠方の r_i の位置から速度 v_i で入射し, クーロン斥力を受けて軌道が曲げられる場合を考えよう.

クーロン力の大きさは

$$f = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ZZ'e^2}{r^2} \quad (5.63)$$

である. ただし ϵ_0 は真空の誘電率である. (5.63) を (5.35) と比べれば, 万有引力の GM を $-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ZZ'e^2}{m}$ で置きかえればよいことになる.

ポテンシャルは

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ZZ'e^2}{r} \quad (5.64)$$

であり, $t = 0$ で $r_i \rightarrow \infty$ とすると $U \rightarrow 0$ であるから力学的エネルギーは

$$E = \frac{1}{2}mv_i^2$$

と書ける. $E > 0$ であるから粒子は双曲線軌道を描く. (5.20) と (5.25) から

$$h = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = r_i v_i \sin \beta$$

を得る. ここで β はベクトル \mathbf{r}_i と \mathbf{v}_i のなす角である. 原点から軌道の漸近線に下した垂線の距離

$$b = r_i \sin \beta \quad (5.65)$$

を 衝突パラメータ という．これを用いると

$$h = bv_i = b\sqrt{\frac{2E}{m}} \quad (5.66)$$

と書ける．

一方 (5.52) で述べたように，斥力の場合の軌道は

$$r = \frac{l'}{-1 + \varepsilon \cos \theta} \quad (5.67)$$

となる．ただし l' は正の量であり，(5.41) より

$$l' = -l = \frac{4\pi\varepsilon_0 m h^2}{Z Z' e^2}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + 2E m h^2 \left(\frac{4\pi\varepsilon_0}{Z Z' e^2} \right)^2} \quad (5.68)$$

と書ける．さらに粒子が最も接近したときの角を $\theta = 0$ とした．(5.66) を用いると (5.68) の離心率は

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\varepsilon_0}{Z Z' e^2} 2Eb \right)^2} \quad (5.69)$$

と表される．(5.67) において $r \geq 0$ であるから

$$\cos \theta \geq \frac{1}{\varepsilon}$$

が運動可能な領域を表す．漸近線の方法は等号が成り立つときで

$$\cos \theta_i = \frac{1}{\varepsilon} \quad (5.70)$$

である．図からわかるように，散乱角を Θ とすると $\Theta + 2\theta_i = \pi$ であるから

$$\sin \frac{\Theta}{2} = \cos \theta_i = \frac{1}{\varepsilon}$$

となる．(5.69) を用いると

$$\cot \frac{\Theta}{2} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{Z Z' e^2} 2Eb \quad (5.71)$$

を得る．

次に、初速 v_i の粒子の一樣な流束を考えよう。流れに垂直な面の単位面積を単位時間に通過する粒子の数を I とすると、十分遠方で衝突パラメータが b と $b+db$ のリングを単位時間に通過する粒子の数は $I 2\pi b db$ で

ある。これらの粒子が散乱角 Θ と $\Theta + d\Theta$ の方向の立体角 $d\Omega$ 内に散乱されたとする。ここで半径 r の球面上の微小面積を考えよう。それは (5.12) の体積要素を dr で割ったものであるから $r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ と書ける。この微小面積を r^2 で割ったものを立体角といい、いまの場合は $\theta = \Theta$ であるから、立体角は

$$d\Omega = \sin \Theta d\Theta d\phi \quad (5.72)$$

と表される。一樣な粒子の流束は軸対称であるから ϕ について 0 から 2π まです積分すると (5.72) は

$$d\Omega = 2\pi \sin \Theta d\Theta$$

と書ける。 $d\Omega$ 内に単位時間に散乱される粒子の数を

$$I \sigma(\Theta) d\Omega \quad (5.73)$$

とし、この $\sigma(\Theta)$ を散乱の 微分断面積 という。

(5.73) はリングを通過した入射粒子の数に等しいので

$$I 2\pi b db = -I 2\pi \sigma(\Theta) \sin \Theta d\Theta$$

と書ける。負の符号がついているのは、 b が増加するとクーロン力が弱くなり散乱角 Θ が減少するからである。したがって

$$\sigma(\Theta) = -\frac{b}{\sin \Theta} \frac{db}{d\Theta} \quad (5.74)$$

を得る。(5.71) より

$$b = \frac{ZZ'e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2E} \cot \frac{\Theta}{2}$$

であるから微分断面積 (5.74) は

$$\sigma(\Theta) = \frac{1}{4} \left(\frac{ZZ'e^2}{8\pi\epsilon_0 E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\Theta}{2}} \quad (5.75)$$

となる.

これは ラザフォードの散乱式 といわれる. 金 ($Z = 79$) の薄箔に α 粒子 ($Z' = 2$) を入射する実験において散乱角 Θ への依存性は理論式 (5.75) とよく一致することが確かめられ, その結果, 原子核の存在が実証された.

散乱の全断面積 σ_t を求めよう. それは

$$\sigma_t = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\Theta) \sin \Theta d\Theta \quad (5.76)$$

であるが, 計算してみると無限大になってしまう [演習問題 14]. これは $1/r^2$ の形のクーロン力が無限の遠方まで及ぶことを示している. しかし実際には, 原子内の電子によって原子核のクーロン力は打ち消され, 有限な距離までしか及ばない (遮蔽^{しゃへい} 効果という) ので, 全断面積もある有限の値になっている.

演習問題 5

1. 平面運動する質点の角運動量が一定のとき, この質点の加速度は常に定点を向くことを示せ.
2. 質量 m の質点が中心力 $f(r) = -kr$ (k は正の定数) を受けて運動している. 運動方程式の解を求めよ.
3. 質量 M , 半径 a の密度一様な円輪の中心 O を通り円輪の平面に垂直な直線上で O から距離 x の点における, 円輪による万有引力のポテンシャルと力を求めよ.
4. 質量 M , 半径 a の密度一様な球殻の中心 O から距離 r の点における, 球殻による万有引力のポテンシャルと力を $r < a$ と $r \geq a$ の場合について求めよ.
5. 地球を質量 M , 半径 R の密度一様な球とする. その直径を貫いて穴をつくり, 質点を落とすときその運動を求めよ. さらに他の質点が地表すれすれに円運動をする場合, その周期を求めよ.
6. 滑らかな水平台に小穴をあけ, 長さ l の糸を通す. その一端に質量 m_1 の質点をつけて台の上におき, 他端に質量 m_2 の質点をつけて鉛直につるす. 台上の糸の長さが a のとき, 糸に直角に水平な速度 v_0 を質点 m_1 に与える. 有効ポテンシャルを用いて運動を定性的に調べよ.

7. 半径 R の地球表面から水平方向に初速 v_0 で質点を投射するとき, v_0 の値によって質点の軌道を分類せよ.
8. 長半径 a , 短半径 b の楕円の面積を計算せよ.
9. 万有引力による楕円運動において, 1 周期について動径 r を平均すれば $a(1 + \varepsilon^2/2)$ となることを示せ.
10. 惑星が遠心力と万有引力のつりあいのもとで半径 a の円運動をしているとして, 力学的エネルギー E_c を求め, さらにケプラーの第 3 法則を導け.
11. 双曲線軌道に対する解 (5.54), (5.55) を導け.
12. 主な惑星およびハレー彗星に対する軌道の定数などを表にまとめた [理科年表 1995 年, 丸善]. これに基づいて各々の公転運動に関する次の量を計算せよ.
 - (1) 平均速度の大きさ
 - (2) a^3/T^2 の値
 - (3) 角運動量の大きさ

	質量 (地球=1)	長半径 a (天文単位)	離心率 ε	公転周期 T (年)
水星	0.055	0.3871	0.2056	0.2409
金星	0.815	0.7233	0.0068	0.6152
地球	1.000	1.0000	0.0167	1.0000
火星	0.107	1.5237	0.0934	1.8809
木星	317.8	5.2026	0.0485	11.862
土星	95.16	9.5549	0.0555	29.458
ハレー彗星	10^{-9}	17.75	0.967	74.7

ただし地球の質量は 5.974×10^{24} kg, 1 天文単位は 1.496×10^{11} m である.

13. 太陽からの万有引力の他に微小な引力 $-\gamma/r^3$ (γ は正の定数) を受ける場合, 惑星の軌道を求め, 近日点が進むことを示せ.
11. (5.76) を積分して散乱の全断面積が無限大になることを示せ.


石の上にも三年.

余談

ケプラーと宇宙の調和

ケプラー (Johannes Kepler, 1571 – 1630) は師ブラーエ (Tycho Brahe, 1546 – 1601) から遺言として受け継いだ観測資料を解析し, 火星の軌道計算に取

り組んだ。25年間にわたってブラーエが観測した星の位置は、望遠鏡を使わないにもかかわらず、誤差が角度にして1分以内であったという。この精度の高い観測と、火星の離心率が比較的大きかったことが幸いした。ケプラーは多大の時間と労力を費やしたすえに、3つの法則を発見した。かれはまず、太陽中心の円軌道を仮定することによって、面積速度が一定になることを見出した。しかしながら、それは完全に一定とはならず、わずかなずれを生じた。その要因を詳しく検討した結果、ギリシャ以来の伝統であった‘円の魔力’を捨て、火星の軌道が楕円であるという結論に到達した。それからさらに10年の歳月を経て、‘宇宙の調和’ともいうべき第3法則を見出した。こうして物理学、天文学の発展に大きな足跡を残したが、一方で占星術にたけており、戦争の予言も行った。病弱で生活は不遇であり、今では考えられないことだが、最期は路上で死んだという。ともかくも、ブラーエもケプラーも生涯を天文学に捧げた。



ケプラーの顔

第6章 加速度系における運動

すでに2章で述べたように、物体の運動を記述するためには基準となる座標系を設定しなければならない。これまでは慣性系における運動を調べてきたが、例えばエレベーターの中での質点の運動を考える場合にはエレベーターと共に運動している座標系を用いた方が便利である。さらに、地球は自転しているので、厳密にいうと地上に固定した座標系は慣性系ではない。この章では一般の運動を並進と回転とに分け、それらを個別に扱うことにより、慣性系に対して加速度運動をしている座標系における運動方程式を導出し、さまざまな運動を調べてみよう。

6.1 並進座標系

慣性系 S における運動方程式は

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (6.1)$$

である。

この S 系に対して並進運動をしているもう1つの系 S' を考えよう。ただし $t = 0$ で S 系の原点 O と S' 系の原点 O' は一致していたものとする。図に示すように、 S' 系の原点の位置ベクトルを \mathbf{r}_0 とし、 S および S' 系での点 P の位置ベクトルをそれぞれ \mathbf{r}, \mathbf{r}' とすると

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}' \quad (6.2)$$

である。これを t で微分すると速度、加速度は

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}' \quad (6.3)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}' \quad (6.4)$$

となる。

S系からS'系に移っても質量は質点に固有の量であるから変化しない。また力 \mathbf{F} もそれをS'系における量で表すだけで、ベクトルとしては変化しない。すなわち、 $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$ である。(6.4)を(6.1)に代入すると、S'系での運動方程式

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F}' + (-m\mathbf{a}_0) \quad (6.5)$$

が得られる。つまり並進加速度系では座標系の加速度運動による見かけの力 $-m\mathbf{a}_0$ が生じる。

しかし、特に \mathbf{v}_0 が一定の場合にはこの見かけの力は $\mathbf{0}$ となり、運動方程式は(6.1)と変わらない。すなわち、慣性系に対して等速直線運動をしている座標系はすべて慣性系となる。この場合(6.2)は

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{v}_0 t \quad (6.6)$$

と書ける。これをガリレイ変換という。したがって

“運動方程式はガリレイ変換に対して不変に保たれる”

といえる。

6.2 回転座標系

まず半径 r の円に沿った運動を考えよう。角度 $d\varphi$ だけ回したとき右ネジの進む向きをもち、大きさが $d\varphi/dt$ であるベクトルとして角速度 $\boldsymbol{\omega}$ を定義する。このとき例 1.5 でみたように、回転の速さは $v = r\omega$ となる。

次に図に示すように、位置ベクトル \mathbf{r} と角速度 $\boldsymbol{\omega}$ が角 θ をなす場合を考えよう。 $\boldsymbol{\omega}$ に直交する平面に投影した円軌道の半径は $r \sin \theta$ であるから、回転の速さは $v = \omega r \sin \theta = |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|$ となる。したがって、ベクトルの向きを考慮すると

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (6.7)$$

が得られる。これが座標回転によって生じる位置ベクトル \mathbf{r} の時間変化である。

さて原点を固定したまま静止系 S に対して角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転している S' 系での運動を考える。 S 系における質点の位置は

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (6.8)$$

であり、 S' 系の単位ベクトルを $(\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$ とすると、その位置は

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}' \quad (6.9)$$

と書け、 $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ である。ただし $(\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$ は S' 系の運動につれて変化することに注意しよう。(6.8), (6.9) を t で微分することにより質点の速度は

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \\ &= \frac{dx'}{dt}\mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt}\mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt}\mathbf{k}' + x'\frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y'\frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z'\frac{d\mathbf{k}'}{dt} \end{aligned} \quad (6.10)$$

となる。ここで (6.10) の右辺の最初の 3 項は S' 系で見た質点の速度 \mathbf{v}' である。第 4 項以下は (6.7) の \mathbf{r} を $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$ とおけば

$$\frac{d\mathbf{i}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}', \quad \frac{d\mathbf{j}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}', \quad \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}' \quad (6.11)$$

となるから

$$x' \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + y' \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + z' \frac{d\mathbf{k}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times (x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}') = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$$

である。したがって (6.10) は

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad (6.12)$$

と書ける。すなわち、慣性系における質点の速度は回転系における質点の速度と座標回転によって生じる速度の和となる。

(6.10) をさらに t で微分すると、質点の加速度は

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = & \frac{d^2 x'}{dt^2} \mathbf{i}' + \frac{d^2 y'}{dt^2} \mathbf{j}' + \frac{d^2 z'}{dt^2} \mathbf{k}' + 2 \left(\frac{dx'}{dt} \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\mathbf{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\mathbf{k}'}{dt} \right) \\ & + x' \frac{d^2 \mathbf{i}'}{dt^2} + y' \frac{d^2 \mathbf{j}'}{dt^2} + z' \frac{d^2 \mathbf{k}'}{dt^2} \end{aligned} \quad (6.13)$$

となる。右辺の最初の3項は S' 系で見た質点の加速度 \mathbf{a}' であり、その次の3項は (6.11) を用いて

$$2 \left(\frac{dx'}{dt} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}' + \frac{dy'}{dt} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}' + \frac{dz'}{dt} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}' \right) = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$$

とまとめられる。最後の3項には (6.11) を t で微分した関係式

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{i}'}{dt^2} &= \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{i}'}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{i}' \\ &= \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}') + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{i}' \end{aligned}$$

などを代入する。このことより (6.13) は

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' \quad (6.14)$$

と書ける。(6.14) を (6.1) に代入すると、回転系 S' での運動方程式

$$m\mathbf{a}' = \mathbf{F}' - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}' \quad (6.15)$$

が得られる．つまり，回転座標系では3つの見かけの力が生じる． $-2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$ はコリオリ力で，運動しているとき進行方向に垂直に作用する． $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$ は遠心力で，図に示すように回転軸に垂直で外向きに作用する．この項は5.4節で述べた $mr\dot{\theta}^2$ に対応するものである．最後の $-m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}'$ は角加速度による力であり，角速度が一定のときには現れない．

例 6.1 回転する管に束縛された運動

図に示すように水平面内で，固定点 O のまわりに一定の角速度 ω で回転するまっすぐな管の内部に滑らかに束縛された質点の運動を調べよう．管に沿って x' 軸，角速度の方向に z' 軸をとり，管からの垂直抗力を \mathbf{R} とすると， S' 系での運動方程式 (6.15) の x', y' 成分は

$$m\ddot{x}' = mx'\omega^2 \quad (6.16)$$

$$0 = R - 2m\omega\dot{x}' \quad (6.17)$$

と書ける．(6.16) の一般解は (3.12) と同様にして

$$x' = B_1 e^{\omega t} + B_2 e^{-\omega t} \quad (6.18)$$

と表される．ただし B_1, B_2 は初期条件から決まる定数である．この解を (6.17) に代入すれば垂直抗力 R が得られる．

慣性系 S での運動方程式は (2.10), (2.11) で $\dot{\theta} = \omega$ とおくと

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\omega^2) &= F_r = 0 \\ m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\omega) &= F_\theta = R \end{aligned}$$

となる． $r = x'$ であるから，これは (6.16), (6.17) と同じ式になる．

6.3 自転する地球表面での運動

地球を一定の角速度で回転する球として，地表近くでの物体の運動を考えよう．地球は1日に1回転するので，その角速度の大きさは $\omega = 7.3 \times 10^{-5}$ rad/s であり，半径は $R = 6.4 \times 10^6$ m であるから，赤道面上での単位質量あたりの遠心力は $\omega^2 R = 3.4 \times 10^{-2}$ m/s² となる．これは重力加速度 g の約 0.3% にすぎない．ここではコリオリ力の効果を調べてみよう．

地球の引力を $m\mathbf{g}_0$ ，それ以外の力を \mathbf{F} とする．運動方程式は (6.15) で $\dot{\omega} = 0$ とおき，プライム記号をはずすと，地球に固定した座標系で

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + m\mathbf{g}_0 - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (6.19)$$

と書ける．引力と遠心力を合成して (有効) 重力

$$m\mathbf{g} = m\mathbf{g}_0 - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (6.20)$$

を得る．この \mathbf{g} の方向を鉛直方向という．運動方程式 (6.19) は

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + m\mathbf{g} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \quad (6.21)$$

と書きかえられる．

図に示すように，北緯 λ の地点で，鉛直上向きに z 軸，水平面南向きに x 軸をとる． y 軸は水平面東向きとなる．この座標系で角速度の成分は $(-\omega \cos \lambda, 0, \omega \sin \lambda)$ となるから，運動方程式 (6.21) の各成分は

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + 2m\omega\dot{y} \sin \lambda \\ m\ddot{y} &= F_y - 2m\omega(\dot{x} \sin \lambda + \dot{z} \cos \lambda) \\ m\ddot{z} &= F_z - mg + 2m\omega\dot{y} \cos \lambda \end{aligned} \quad (6.22)$$

と書ける．

(1) 自由落下

高さ h のところから初速度 0 で自由落下する質点を考えよう．運動方程式は (6.22) で $F_x = F_y = F_z = 0$ とおいたものであり，初期条件は $t = 0$ で

$x = y = 0, z = h, \dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ である。運動方程式を積分すると

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2\omega y \sin \lambda \\ \dot{y} &= -2\omega[x \sin \lambda + (z - h) \cos \lambda] \\ \dot{z} &= -gt + 2\omega y \cos \lambda\end{aligned}\tag{6.23}$$

が得られる。ここで ω が小さいため、逐次近似法を用いて解を求めよう。まず (6.23) で $\omega = 0$ とおくと、近似解 (x_0, y_0, z_0) は

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + h$$

である。これを (6.23) の右辺に代入すると

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = \omega gt^2 \cos \lambda, \quad \dot{z} = -gt$$

となる。 t で積分すると、 ω の 1 次までの解として

$$x = 0, \quad y = \frac{1}{3}\omega gt^3 \cos \lambda, \quad z = -\frac{1}{2}gt^2 + h$$

が得られる。落下点がコリオリ力のため東にずれることになる。しかし $\lambda = 45^\circ, h = 100 \text{ m}$ とした場合、このずれはわずか 1.5 cm にすぎない。

(2) フーコー振子

図に示すように、固定点 $(0, 0, l)$ からつるした長さ l の振子の微小振動を考えよう。質点の位置を (x, y, z) とすると、質点は球面

$$x^2 + y^2 + (l - z)^2 = l^2\tag{6.24}$$

の上を運動する。張力 \mathbf{S} の成分は $(-Sx/l, -Sy/l, S(l - z)/l)$ であるから運動方程式 (6.22) は

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= -S\frac{x}{l} + 2m\omega\dot{y} \sin \lambda \\ m\ddot{y} &= -S\frac{y}{l} - 2m\omega(\dot{x} \sin \lambda + \dot{z} \cos \lambda) \\ m\ddot{z} &= S\frac{l - z}{l} - mg + 2m\omega\dot{y} \cos \lambda\end{aligned}\tag{6.25}$$

と書ける．微小振動の場合 $x \ll l, y \ll l$ であるから，(6.24) より

$$l - z = l \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{l^2}} \simeq l \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{2l^2} \right)$$

と近似でき

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2l}$$

と書ける．つまり， z/l は $x/l, y/l$ の2次の微小量となる．したがって， $\dot{z} = \ddot{z} = 0$ とおくことができ，(6.25) の第3式より $S = mg$ を得る．第1, 2式は

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + 2\omega_z \dot{y} \quad (6.26)$$

$$\ddot{y} = -\omega_0^2 y - 2\omega_z \dot{x} \quad (6.27)$$

となる．ただし $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ は振子の角振動数， $\omega_z = \omega \sin \lambda$ は自転の角速度の z 成分である．

運動は xy 面内の振動であるから，平面極座標系を導入すると，(6.26) と (6.27) より

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\omega_0^2 r + 2\omega_z r\dot{\theta} \quad (6.28)$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = -2\omega_z \dot{r} \quad (6.29)$$

が得られる [演習問題 4]．(6.29) の特殊解は

$$\dot{\theta} = -\omega_z \quad (6.30)$$

であるから，これを積分して

$$\theta = -\omega_z t + \beta$$

を得る．ここで β は定数である．(6.30) を (6.28) に代入し， $\omega_0 \gg \omega_z$ であることを考慮すると

$$\ddot{r} = -(\omega_0^2 + \omega_z^2)r \simeq -\omega_0^2 r$$

と書ける．解は A と α を定数として

$$r = A \cos(\omega_0 t + \alpha)$$

と表される。図に示すように振子は ω_0 の角振動数で振動し、その振動面が

鉛直軸のまわりに $-\omega \sin \lambda$ の角速度で回転している。例えば北極に置かれた振子は慣性系に対して一定の振動面で振動するが、その下で自転している地球から見れば振子の振動面が地球の自転とは逆向きに 1 日で 1 回転することになる。

6.4 電磁場内での荷電粒子の運動

質量 m 、電荷 q の粒子が電場 \mathbf{E} 、磁束密度 \mathbf{B} の電磁場内を速度 \mathbf{v} で運動しているとき受ける力は

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (6.31)$$

である。これを ローレンツ力 という。この力を受けて運動する質点の運動を考えよう。

(1) 一様な電場の場合

運動方程式は

$$m\mathbf{a} = q\mathbf{E} \quad (6.32)$$

となるので、粒子は電場の方向に等加速度運動をおこなう。

(2) 一様な磁場の場合

運動方程式は

$$m\mathbf{a} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (6.33)$$

となる。 \mathbf{B} の方向に z 軸をとり、(6.33) を成分で表すと

$$\dot{v}_x = \omega v_y, \quad \dot{v}_y = -\omega v_x, \quad \dot{v}_z = 0 \quad (6.34)$$

と書ける。ただし $\omega = qB/m$ である。第 3 式より粒子は z 方向に等速直線運動をすることがわかる。第 1, 2 式より

$$\ddot{v}_x = -\omega^2 v_x$$

を得る．この解は v_0 と α を定数として

$$v_x = v_0 \cos(\omega t + \alpha)$$

と表され，これを (6.34) の第1式に代入すると

$$v_y = -v_0 \sin(\omega t + \alpha)$$

となる．さらにこれらを積分して

$$x = r_0 \sin(\omega t + \alpha) = r_0 \cos(-\omega t + \pi/2 - \alpha)$$

$$y = r_0 \cos(\omega t + \alpha) = r_0 \sin(-\omega t + \pi/2 - \alpha)$$

を得る．ただし $r_0 = v_0/\omega$ であり，積分定数は0とした．したがって，運動は z 方向へのらせん運動となり， xy 面に射影すると半径 r_0 の円周上を角速度 $-\omega$ で回転していることになる． $q > 0$ の粒子の軌跡を図 6.9 に示す． $q < 0$ の場合には回転の向きを逆にすればよい．

(3) 一様な電磁場の場合

\mathbf{B} の方向に z 軸をとると, 運動方程式の各成分は

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= qE_x + q\dot{y}B \\ m\ddot{y} &= qE_y - q\dot{x}B \\ m\ddot{z} &= qE_z \end{aligned} \quad (6.35)$$

である. ここで z 軸のまわりに一定の角速度 ω で回転している系 S' を考えよう. (6.15) より S' 系での運動方程式は

$$\begin{aligned} m\ddot{x}' &= qE'_x + q\dot{y}'B + 2m\omega\dot{y}' + m\omega^2x' \\ m\ddot{y}' &= qE'_y - q\dot{x}'B - 2m\omega\dot{x}' + m\omega^2y' \\ m\ddot{z}' &= qE'_z \end{aligned} \quad (6.36)$$

となる. ω が小さいとして, ω^2 の項を無視し, 角速度 ω として

$$\omega_L = -\frac{qB}{2m} \quad (6.37)$$

の値をとれば, 磁場の項を消すことができ, 運動方程式は電場だけの場合の (6.32) と同じになる. この ω_L をラーモア振動数という.

演習問題 6

1. 一定の加速度 α で一直線の水平なレールの上を走る列車の中で, 質点を静かに落とす. 運動方程式の解を求めよ.
2. 一定の加速度 α で鉛直に上昇するエレベーターの中で, 床から h の高さの所から水平に初速 v_0 で質点を投げる. 運動方程式の解を求めよ.
3. 一定の加速度 α で鉛直に上昇するエレベーターの中で, 長さ l の振子を振らせる. 微小振動の周期を求めよ.
4. 北緯 λ の地点で地上から初速 v_0 で鉛直上方に質点を投げ上げる. 落下地点は近似的に $\frac{4\omega v_0^3}{3g^2} \cos \lambda$ だけ西にずれることを示せ.
5. (6.26) と (6.27) より表式 (6.28) と (6.29) を導け.
6. 滑らかな水平面の上を一定の速度 v で運動している質点は地球の自転のために円軌道を描く. その軌道半径を求めよ. ただしその地点の北緯を λ とする.
7. y 軸を鉛直線とする放物線 $y = ax^2$ (a は正の定数) の上に質点が滑らかに束縛されている. この放物線を y 軸のまわりに一定の角速度 ω で回転させるとき, 質点の平衡位置を求め, その安定性を調べよ.

8. 自然の長さ l , ばね定数 k のばねの下端に質量 m の質点をつるす. 上端を鉛直方向に動かし, 変位が $a \cos \omega t$ となる振動を与える. 運動方程式の解を求めよ. ただし $\omega \neq \sqrt{k/m}$ とする.
9. 自然の長さ l , ばね定数 k のばねをまっすぐで滑らかな長い管の中に入れ, ばねの一端を O に固定し, 他端に質量 m の質点をつなぐ. 水平面内で点 O のまわりに管を一定の角速度 ω でまわすとき, 質点の運動を求めよ.

艱難辛苦, 汝を玉にす.

余談

アインシュタインと古典力学

アインシュタイン (Albert Einstein, 1879 – 1955) は, 20 世紀最大の天才といわれる. 1905 年に発表した光量子説, ブラウン運動, 特殊相対性理論に関する論文は 20 世紀の奇跡とまで科学史家にいわしめている. ついでながら, 1895 年チューリッヒ工科大学の入学試験に失敗している. 彼はよき友人に恵まれていた. スイスの特許局時代には, 友人達と ‘アテネの学堂’ と称する集まりを開き, 自由奔放に想像力を飛躍させ, ついに特殊相対性理論を発見した. しかし, 最新の数学的知識を物理学に導入するにはたいへんな努力を要する. アインシュタインでさえ, 一般相対性理論を完成するために, 数学者の友人グロスマンに微分幾何学を学ぶ必要があった.

アインシュタインの革命も 30 才代で終わりを告げていく. ひとは年齢とともに保守的になる. 光量子の導入, ボーズ・アインシュタイン統計など量子力学の建設にも重要な役割を果たしたが, 死ぬまで, 量子力学の基本原理である確率論的解釈を認めなかった. かれの有名な言葉: 「神はサイコロを振らない」.

アインシュタインの舌

第7章 質点系の運動

これまで主として1個の質点の力学を考えてきたが、この章では多くの質点の運動を取り扱う。質点の集まりを **質点系** という。質点系を構成する質点が相互に及ぼす力を内力、系の外から作用する力を外力という。内力はお互いの質点を結ぶ直線に沿って作用し、作用・反作用の法則を満たしている。一般に内力は個々の質点の位置に依存しているので、各質点の運動方程式を連立させて解を求めれば、質点系の運動を原理的には決定できる。しかし粒子数が多い場合には、運動方程式を解くことが極めて難しくなる。ところが、たとえ個々の運動が求められなくても、外力さえわかるならば質点系全体の運動を決めることができる。特に、質点系を代表する点としての重心の果たす役割に着目しよう。

7.1 運動量と角運動量の保存則

(1) 運動量保存の法則

質量 m_1, m_2, \dots の質点の位置ベクトルを $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots$ 、速度を $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$ としよう。 i 番目の質点の運動量は $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$ である。その質点が受ける外力を \mathbf{F}_i 、 k 番目の質点から受ける内力を \mathbf{F}_{ik} とする。このとき内力の和は $\sum_{k \neq i} \mathbf{F}_{ik}$ である。ただし k の和は i を除く全ての質点についてとられる。 i 番目の質点の運動方程式は

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{F}_i + \sum_{k \neq i} \mathbf{F}_{ik} \quad (7.1)$$

で与えられる。系の全運動量を

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \quad (7.2)$$

とすると、その時間変化は (7.1) を用いて

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i + \sum_i \sum_{k \neq i} \mathbf{F}_{ik}$$

と書ける。右辺第2項には \mathbf{F}_{ik} と \mathbf{F}_{ki} が対として存在するが、図に示すように作用・反作用の法則 (2.5) より

$$\mathbf{F}_{ik} + \mathbf{F}_{ki} = \mathbf{0}$$

となるので、 $\sum_i \sum_{k \neq i} \mathbf{F}_{ik} = \mathbf{0}$ である。したがって、質点系の運動方程式は

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i \quad (7.3)$$

と表せる。すなわち

“全運動量の時間変化は外力の和に等しく、内力には関係しない”

といえる。

孤立系の場合、外力 $\mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ であるから系の全運動量は一定に保たれる。あるいは、外力の和が $\mathbf{0}$ の場合にも系の全運動量は一定に保たれる。

(2) 角運動量保存の法則

i 番目の質点の角運動量は $\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ であるから系の全角運動量は

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i \quad (7.4)$$

である。(5.18) と同様にして \mathbf{L} の時間変化は

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_i \sum_{k \neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ik}$$

と表せる。ここで (7.1) を用いた。右辺第2項には $\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ik}$ と $\mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{ki}$ が対となって存在するが、作用・反作用の法則より

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ik} + \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_{ki} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k) \times \mathbf{F}_{ik}$$

となる．図 7.1 からわかるように内力 \mathbf{F}_{ik} は $(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k)$ に平行であるから，このベクトル積は $\mathbf{0}$ となり

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{N}_i \quad (7.5)$$

を得る．すなわち

“全角運動量の時間変化は原点のまわりの外力のモーメントの和に等しく，内力には関係しない”

といえる．

孤立系の場合，外力 $\mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ であるから系の全角運動量は一定に保たれる．あるいは， \mathbf{F}_i がそれぞれ \mathbf{r}_i に平行である場合にも $\mathbf{N}_i = \mathbf{0}$ となり，全角運動量は一定に保たれる．

7.2 重心

(1) 重心の位置

以下に見るように，質点系全体を特徴づける代表的な点が **重心** であるから，まず重心の位置を求めてみよう．

図に示すように，1 次元の場合の 2 個の質点から始めよう．原点を O とし，質量 m_1, m_2 の質点の位置を x_1, x_2 とすると

$$m_1(x_G - x_1) = m_2(x_2 - x_G)$$

が成り立つ点，つまり

$$x_G = x_{12} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \quad (7.6)$$

が重心の位置である．

この系に質量 m_3 の 3 番目の質点加わると，位置 x_{12} に質量 $m_1 + m_2$ の質点があるとみなして，重心の位置は

$$x_G = \frac{(m_1 + m_2)x_{12} + m_3 x_3}{(m_1 + m_2) + m_3}$$

であり, x_{12} に (7.6) を代入すると

$$x_G = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

となる.

この結果をさらに多数の質点の系に拡張すると, 重心の位置は

$$x_G = \sum_i m_i x_i / M \quad (7.7)$$

と書ける. ここで $M = \sum_i m_i$ は質点系の全質量である.

質点が3次元的に分布している場合には y, z 成分に関しても (7.7) と同様の表式が得られるから, 重心の位置ベクトルは

$$\mathbf{r}_G = \sum_i m_i \mathbf{r}_i / M \quad (7.8)$$

と表される. つまり, これは質量の重みをつけた位置ベクトルの平均値である. 本来 (7.8) は質量中心を意味しているが, 重力が一様であるならば重心と質量中心とは同一の点になる.

(2) 重心の運動

座標原点を重心にとった座標系を **重心系** という。その系での i 番目の質点の位置ベクトルを \mathbf{r}'_i とすると、重心は原点にあるから

$$\sum_i m_i \mathbf{r}'_i = \mathbf{0} \quad (7.9)$$

であり、これを t で微分することにより、重心系における全運動量に対して

$$\mathbf{P}' = \sum_i m_i \mathbf{v}'_i = \mathbf{0} \quad (7.10)$$

が成り立つ。重心系への座標変換は

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_G + \mathbf{r}'_i \quad (7.11)$$

で与えられるから、これを (7.8) に代入することにより (7.9) を確かめることができる。

(7.8) を t で微分して (7.2) に代入すると、系の全運動量は

$$\mathbf{P} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = M \mathbf{v}_G \quad (7.12)$$

と書ける。したがって、運動方程式 (7.3) は

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M \frac{d^2 \mathbf{r}_G}{dt^2} = \sum_i \mathbf{F}_i \quad (7.13)$$

と表される。これは質点の運動方程式と同じ形であるから、質点系の運動は全質量が重心に集まり、そこへ外力の和が作用している質点の運動として扱えることがわかる。孤立系の場合、外力 $\mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ であるから重心は等速直線運動をする。

全角運動量 (7.4) を重心系へ変換しよう。(7.11) を t で微分すると

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_G + \mathbf{v}'_i \quad (7.14)$$

であり、これと (7.11) を (7.4) に代入すると

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_i m_i (\mathbf{r}_G + \mathbf{r}'_i) \times (\mathbf{v}_G + \mathbf{v}'_i) \\ &= M \mathbf{r}_G \times \mathbf{v}_G + \mathbf{L}' \end{aligned} \quad (7.15)$$

となる．ここで (7.9), (7.10) を用いた． $\mathbf{L}' = \sum_i m_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i$ は重心系でみた全角運動量である．(7.15) を t で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= M\mathbf{r}_G \times \frac{d\mathbf{v}_G}{dt} + \frac{d\mathbf{L}'}{dt} \\ &= \mathbf{r}_G \times \sum_i \mathbf{F}_i + \frac{d\mathbf{L}'}{dt} \end{aligned} \quad (7.16)$$

と書ける．一方，(7.5) に (7.11) を代入すると

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{r}_G \times \sum_i \mathbf{F}_i + \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i \quad (7.17)$$

となるので (7.16) と (7.17) を比べて

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{N}'_i \quad (7.18)$$

を得る． \mathbf{N}'_i は重心のまわりの外力のモーメントである．(7.18) は (7.5) と同じ形であることに注意しよう．

例 7.1 板の移動

水平で滑らかな床の上においた質量 M ，長さ l の板の上を質量 m の人が端から端まで歩くとき，床に対して動いた板の距離を求めてみよう．人と板からなる系を考えると，この系には外力が作用していないから，人の運動の前後で重心の位置は変化しない．したがって，人が端まで歩いたとき，板が動いた距離を x とすると

$$(M + m)x + ml = 0$$

が成り立つ．この式から x が得られる． x の値が負になるのは，人が歩いた方向と反対の向きに板が動くからである．

次に，人が一定の速度で歩くとして，運動量保存の法則を適用してみよう．慣性系に対する人の速度を v ，板の速度を V とすると，運動量保存の法則より $mv + MV = 0$ であるから，板は $V = -(m/M)v$ で動く．このとき板に対する人の速度は

$$v + \frac{m}{M}v = \frac{M + m}{M}v$$

となり、人が端から端まで歩くに要する時間は

$$t = \frac{M}{M+m} \frac{l}{v}$$

となるから、板が動いた距離

$$x = -\frac{m}{M} vt = -\frac{m}{M+m} l$$

を得る。これは先に得られた結果と一致する。

7.3 質点系のエネルギー

(1) 全運動エネルギー

系の全運動エネルギーは

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (7.19)$$

である。(7.14) より

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{v}_G + \mathbf{v}'_i)^2 \\ &= \frac{1}{2} M v_G^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 \end{aligned} \quad (7.20)$$

となる。ここで (7.10) を用いた。全運動エネルギーは重心の運動エネルギーと重心系での運動エネルギーの和となる。

(2) 内力のポテンシャル

内力が保存力であるならば、内力のポテンシャルを考えることができる。質点 i と k の間に作用する力は

$$\mathbf{F}_{ik} = -\text{grad}_i U_{ik}, \quad \mathbf{F}_{ki} = -\text{grad}_k U_{ki} \quad (7.21)$$

である。ただし

$$\text{grad}_i = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y_i} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z_i}$$

は i 番目の質点の位置における勾配である。

ポテンシャル U_{ik} と U_{ki} が相対距離 r_{ik} の関数とすると

$$\begin{aligned} r_{ik} &= |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k| \\ &= \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2} \end{aligned}$$

であるので (7.21) の x 成分は

$$-\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_i} = -\frac{dU_{ik}}{dr_{ik}} \frac{x_i - x_k}{r_{ik}}, \quad -\frac{\partial U_{ki}}{\partial x_k} = \frac{dU_{ki}}{dr_{ik}} \frac{x_i - x_k}{r_{ik}}$$

となる. y, z 成分も同様に書け, $\mathbf{F}_{ik} = -\mathbf{F}_{ki}$ であるから

$$U_{ik} = U_{ki} \quad (7.22)$$

を得る. 質点 i に作用する内力の和は

$$\sum_{k \neq i} \mathbf{F}_{ik} = -\text{grad}_i \sum_{k \neq i} U_{ik} = -\text{grad}_i U_i \quad (7.23)$$

と書ける. ここで

$$U_i = \sum_{k \neq i} U_{ik}$$

とした. (7.23) は (7.22) を用いると

$$\begin{aligned} \sum_{k \neq i} \mathbf{F}_{ik} &= -\text{grad}_i (U_{i1} + U_{i2} + \dots) \\ &= -\frac{1}{2} \text{grad}_i (U_{i1} + U_{1i} + U_{i2} + U_{2i} + \dots) \end{aligned}$$

となる. さらに i に等しくない j, k については

$$\frac{\partial U_{jk}}{\partial x_i} = \frac{\partial U_{jk}}{\partial y_i} = \frac{\partial U_{jk}}{\partial z_i} = 0$$

であるので, それらを加えると

$$\begin{aligned} \sum_{k \neq i} \mathbf{F}_{ik} &= -\frac{1}{2} \text{grad}_i (U_{i1} + U_{1i} + U_{i2} + U_{2i} + \dots + U_{jk} + U_{kj} + \dots) \\ &= -\frac{1}{2} \text{grad}_i \sum_j \sum_{k \neq j} U_{jk} \end{aligned}$$

と書ける．全ての対について2回加えていることを考慮すると，数因子 $1/2$ も含めて

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{k \neq i} U_{ik} = \frac{1}{2} \sum_i U_i \quad (7.24)$$

が内力の全ポテンシャルに相当する．これを用いると，質点 i に作用する内力の和は

$$\sum_{k \neq i} \mathbf{F}_{ik} = -\text{grad}_i U \quad (7.25)$$

と表せる．

例 7.2 万有引力のポテンシャル

質量 m_1, m_2, m_3, \dots の系における万有引力のポテンシャルは

$$U_1 = - \left(G \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + G \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \dots \right)$$

$$U_2 = - \left(G \frac{m_2 m_1}{r_{21}} + G \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \dots \right)$$

などと書けるので，全ポテンシャルは

$$U = - \left(G \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + G \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \dots + G \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \dots \right) \quad (7.26)$$

で与えられる．

7.4 質量の変化する物体の運動

ガスを噴射しながら上昇するロケット，霧を付着しながら落下する雨滴など質量の変化する物体の運動を考えよう．

時刻 t に速度 \mathbf{v} で運動している質量 m の物体が時刻 $t + dt$ に速度 $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ で運動する質量 $m + dm$ の物体と速度 $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ で運動する質量 $(-dm)$ の部分に分かれたとしよう．ここで \mathbf{u} は $(-dm)$ の部分が m に対してもつ相対速度である．このとき全運動量の変化は

$$d\mathbf{P} = (m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) + (-dm)(\mathbf{v} + \mathbf{u}) - m\mathbf{v} \quad (7.27)$$

である．微小量 $dm, d\mathbf{v}$ の1次の項までをとると

$$d\mathbf{P} = m d\mathbf{v} - \mathbf{u} dm$$

となるから、作用力を \mathbf{F} として運動方程式は

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{u} \frac{dm}{dt} = \mathbf{F}$$

すなわち

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{u} \frac{dm}{dt} \quad (7.28)$$

と書ける．右辺第2項は変化した質量の部分からの反作用を表す．ロケットがガスを噴出するときは $dm < 0$ であるから，ガスを \mathbf{v} と逆向きに噴射すれば推進力， \mathbf{v} の向きに噴射すれば減速力になる．

雨滴のように質量が増加する場合は $dm > 0$ である．静止している霧を付着しながら落下する雨滴の場合， $\mathbf{u} = -\mathbf{v}$ であるから (7.28) は

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v} \frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F} \quad (7.29)$$

となり，通常の運動方程式に帰着する．ただし $m = m(t)$ となっていることに注意する必要がある．

例 7.3 ロケットの運動

一様な重力のもとで，下方に一定の相対速度 u でガスを噴出しながら鉛直に上昇するロケットを考えよう．鉛直上向きに y 軸をとり，時刻 t におけるロケットの質量を m ，速度を v とすると，運動方程式は (7.28) より

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - u \frac{dm}{dt}$$

と書ける．すなわち

$$dv = -gdt - u \frac{dm}{m}$$

である．両辺を積分すると

$$v = -gt - u \log m + C$$

が得られる．初期条件を $t = 0$ で $v = 0, m = m_0$ とすると，上昇速度は

$$v = -gt + u \log \frac{m_0}{m} \quad (7.30)$$

となる．

さらにガスの噴出率が一定の場合には α を正の定数として

$$-\frac{dm}{dt} = \alpha m_0$$

とおけるから、時刻 t での質量は

$$m = m_0(1 - \alpha t)$$

と表される。このとき (7.30) は

$$v = -gt - u \log(1 - \alpha t)$$

となる。これを積分し $t = 0$ で $y = 0$ とおくと、 t までに上昇した高度

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{u}{\alpha}[(1 - \alpha t) \log(1 - \alpha t) + \alpha t] \quad (7.31)$$

が得られる。ただし、これらの結果は $t < \alpha^{-1}$ の間だけで成り立っている。

7.5 二体問題

質量 m_1, m_2 の質点が位置 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ にあり、相対距離 r の関数である力を互いに及ぼしながら運動している系を考えよう。相対位置ベクトルは

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (7.32)$$

であるが、 m_1 が受ける力を $\mathbf{F}(r)$ とすると、 m_2 は $-\mathbf{F}(r)$ の力を受けるので、運動方程式は

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}(r) \quad (7.33)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\mathbf{F}(r)$$

となる。和をとると

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = 0 \quad (7.34)$$

すなわち $\ddot{\mathbf{r}}_G = 0$ となり、重心は等速直線運動をする。

一方、差をとると

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \mathbf{F}(r) \quad (7.35)$$

となる．ここで

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad (7.36)$$

とおき， μ を **換算質量** という．すると (7.35) は

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \quad (7.37)$$

と書ける． m_2 に対する m_1 の相対運動は質量 m_1 を μ でおきかえた運動と同じであることがわかる．5.5 節で扱った惑星の運動のように $m_2 \gg m_1$ の場合には，(7.36) より $\mu = m_1$ とおけることがわかる．

例 7.4 二体運動

相対位置ベクトル (7.32) を用いると，重心系における質点の位置ベクトルと速度は (7.8), (7.11) より

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, & \mathbf{r}'_2 &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \\ \mathbf{v}'_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v}, & \mathbf{v}'_2 &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v} \end{aligned}$$

と書ける．ただし $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ である．重心系での全角運動量は

$$\begin{aligned} \mathbf{L}' &= m_1 \mathbf{r}'_1 \times \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{r}'_2 \times \mathbf{v}'_2 \\ &= m_1 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \mathbf{r} \times \mathbf{v} + m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \mathbf{r} \times \mathbf{v} \\ &= \mu \mathbf{r} \times \mathbf{v} \end{aligned}$$

となるから，(7.15) より，系の全角運動量は

$$\mathbf{L} = M \mathbf{r}_G \times \mathbf{v}_G + \mu \mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad (7.38)$$

と表される．

全運動エネルギーについても同様にして，(7.20) より

$$T = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} \mu v^2 \quad (7.39)$$

が得られる．

7.6 粒子の衝突

運動量保存の法則の適用として2つの粒子の衝突を考えよう。衝突の前後で力学的エネルギーが保存されるとき、この衝突を **弾性衝突** といい、保存されないとき、**非弾性衝突** という。

(1) 1次元の衝突

図に示すように、質量 m_1 の粒子が速度 u_1 で入射し、静止している質量 m_2 の粒子に弾性衝突した後、 m_1, m_2 はそれぞれ速度 v_1, v_2 で運動しているとしよう。運動量保存の式は

$$m_1 u_1 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad (7.40)$$

であり、力学的エネルギー保存の式は

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad (7.41)$$

である。(7.40), (7.41) より衝突後の速度

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1$$

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1$$

が得られる。特に、 $m_1 = m_2$ の場合には $v_1 = 0, v_2 = u_1$ となる。

次に衝突した後、 m_1 と m_2 の粒子が一体となって速度 V で運動する場合を考えよう。運動量保存は

$$m_1 u_1 = (m_1 + m_2) V$$

と表されるから、衝突の前後における運動エネルギーの差は

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2 = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} u_1^2 \quad (7.42)$$

となる．運動エネルギーが減少しているので，これは非弾性衝突である．一般に失われたエネルギーは一体となった粒子の熱に変換される．

換算質量を用いると (7.42) は $-\frac{1}{2}\mu u_1^2$ と書くことができる．すなわち，相対運動で考えるならば，衝突後の相対速度が0になるので，衝突前に速度 u_1 で運動していた質量 μ の粒子の運動エネルギー $\frac{1}{2}\mu u_1^2$ がすべて失われたことになる．

(2) 2次元の衝突

図に示すように、速度 \mathbf{u}_1 で入射してきた質量 m_1 の粒子が静止している質量 m_2 の粒子に弾性衝突した後、 m_1 は速度 \mathbf{v}_1 で θ_1 の方向に、 m_2 は速度 \mathbf{v}_2 で θ_2 の方向に運動する場合を考えよう。 m_2 が静止している座標系を **実験室系** という。この系で運動量保存の式は

$$m_1 u_1 = m_1 v_1 \cos \theta_1 + m_2 v_2 \cos \theta_2 \quad (7.43)$$

$$0 = m_1 v_1 \sin \theta_1 - m_2 v_2 \sin \theta_2 \quad (7.44)$$

であり、力学的エネルギーの保存の式は

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad (7.45)$$

と表される。

4つの未知量 $v_1, v_2, \theta_1, \theta_2$ に対して3本の方程式があるから、2つの量の間関係式を導くことができる。

まず (7.44) より

$$v_2 = \frac{m_1 \sin \theta_1}{m_2 \sin \theta_2} v_1$$

であり、(7.43) より

$$u_1 = (\cos \theta_1 + \sin \theta_1 \cot \theta_2) v_1$$

である。これらを (7.45) に代入し、 $\tan \theta_1$ について解くと、 θ_1 と θ_2 の関係式

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin 2\theta_2}{m_1/m_2 - \cos 2\theta_2} \quad (7.46)$$

が得られる [演習問題 8]。

次に (7.43), (7.44) より θ_2 を消去すると

$$m_1^2 (u_1 - v_1 \cos \theta_1)^2 + m_1^2 v_1^2 \sin^2 \theta_1 = m_2^2 v_2^2$$

であり, v_2^2 に (7.45) を代入すると, v_1 と θ_1 の関係式

$$(m_1 + m_2)v_1^2 - 2m_1u_1v_1\cos\theta_1 + (m_1 - m_2)u_1^2 = 0 \quad (7.47)$$

が導かれる [演習問題 9]. v_1 が実数となるためには

$$\sin\theta_1 \leq \frac{m_2}{m_1} \quad (7.48)$$

でなければならない. ただし $0 \leq \theta_1 \leq \pi$ とする.

$m_1 < m_2$ の場合には θ_1 は 0 から π まで任意の値をとることができる. 一方, $m_1 > m_2$ の場合には θ_1 に上限が存在し, その値は

$$\sin\theta_{max} = \frac{m_2}{m_1} \quad (7.49)$$

で与えられる. すなわち, この場合, 粒子の運動は前方の限られた領域だけになる.

さて以上のことを重心系で考えてみよう. 重心系における運動量保存の式は (7.10) より

$$\mathbf{P}' = m_1\mathbf{u}'_1 + m_2\mathbf{u}'_2 = m_1\mathbf{v}'_1 + m_2\mathbf{v}'_2 = 0 \quad (7.50)$$

と表される. つまり図に示すように, \mathbf{u}'_1 と \mathbf{u}'_2 および \mathbf{v}'_1 と \mathbf{v}'_2 は互いに逆向きであり, $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$ の方向を θ'_1, θ'_2 とすると

$$\theta'_1 + \theta'_2 = \pi$$

である. (7.50) を使うと, 衝突の前後における m_2 の速度は

$$\mathbf{u}'_2 = -\frac{m_1}{m_2}\mathbf{u}'_1, \quad \mathbf{v}'_2 = -\frac{m_1}{m_2}\mathbf{v}'_1$$

であり, これを力学的エネルギー保存の式

$$\frac{1}{2}m_1u_1'^2 + \frac{1}{2}m_2u_2'^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \quad (7.51)$$

に代入すると

$$u'_1 = v'_1, \quad u'_2 = v'_2 \quad (7.52)$$

を得る．すなわち，弾性衝突を重心系でみると，衝突の前後で各粒子の速さは変化しないことになる．

(7.12) より重心の速度は

$$\mathbf{v}_G = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{u}_1 \quad (7.53)$$

であるから， m_1 の衝突前の速度は

$$\mathbf{u}'_1 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_G = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{u}_1 \quad (7.54)$$

となり，衝突後の速度は

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_G + \mathbf{v}'_1 \quad (7.55)$$

と書ける．図からわかるように

$$\tan \theta_1 = \frac{v'_1 \sin \theta'_1}{v_G + v'_1 \cos \theta'_1}$$

であり，(7.53), (7.54) より

$$\frac{v_G}{u'_1} = \frac{m_1}{m_2}$$

が得られる．(7.52) を用いると， θ_1 と θ'_1 の間に

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \theta'_1}{\cos \theta'_1 + m_1/m_2} \quad (7.56)$$

の関係があることがわかる．

一方，衝突前の m_2 の速度は

$$\mathbf{u}'_2 = -\mathbf{v}_G = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{u}_1 \quad (7.57)$$

となる．実験室系と重心系における速度の関係は図に示すようになり

$$v'_2 = u'_2 = v_G$$

であるから $\theta'_2 = 2\theta_2$ を得る．したがって， $\theta'_1 = \pi - 2\theta_2$ となるから，(7.56) に代入すると (7.46) と同じ関係式が得られる．

$m_1 < m_2$ の場合には $v_G < v'_1$ であるから、点 O は半径 v'_1 の円の内部に存在する。点 P は円周上の任意の点をとることができるので、 θ'_1 が 0 から π まで変化するにつれて θ_1 も 0 から π まで変化

する。逆に、 $m_1 > m_2$ の場合には $v_G > v'_1$ であるから、点 O は円の外にでる。したがって、 θ'_1 が 0 から π まで変化するとき、 θ_1 に上限が存在し、それは

$$\sin \theta_{max} = \frac{v'_1}{v_G} = \frac{m_2}{m_1} \quad (7.58)$$

である。この結果は (7.49) と一致する。

演習問題 7

1. 質量 1 kg の物体が速度 $(5\mathbf{i} - \mathbf{j})$ m/s で、3 kg の物体が速度 $(\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$ m/s で運動している。系の全運動量と重心の速度を計算せよ。
2. 水平で滑らかな机の上に傾斜角 α の滑らかな斜面をもつ質量 m_1 の台をおき、この斜面の上に質量 m_2 の質点を静かにのせる。質点および台の重心の運動を求めよ。
3. 滑らかな針金に質量 m_1 の環を通し水平に張る。環に長さ l の糸を結び、その先に質量 m_2 の質点をつるして、針金と同じ鉛直面内で振動させる。微小振動の周期を求めよ。
4. 雨滴が静止している霧を付着し、単位時間に質量を α (α は正の定数) だけ増加しながら落下している。 $t = 0$ での質量を m_0 、速さを 0 とし、時刻 t までに落下した距離を求めよ。
5. 机の上にある線密度 (単位長さあたりの質量) ρ の鎖の一端をもって、一定の速度で鉛直に引き上げる。引き上げられた鎖の長さが x のとき、引き上げる力を求めよ。
6. 机の端に静止していた線密度 ρ の鎖がその一端からほどけて、落下し始める。鎖が長さ x だけ垂れたときの落下速度とそれまでに要した時間を求めよ。さらに力学的エネルギーを計算し、それが保存されていないことを示せ。
7. 質量 m_1 と m_2 の星が互いに万有引力を及ぼしながら、重心のまわりを公転運動している。ケプラーの第3法則はどのように表されるか。
8. (7.43)–(7.45) から関係式 (7.46) を導け。
9. (7.43)–(7.45) から関係式 (7.47) と条件 (7.48) を導け。

10. 2次元の弾性衝突において2つの粒子の質量が等しい場合には衝突後の速度ベクトルは互いに直交することを示せ.
11. 等しい速さで反対向きに運動している質量 m_1, m_2 の2つの粒子が衝突し、その後 m_2 は静止する. 弾性衝突であるとして、質量比 m_2/m_1 を求めよ.

木を見て森を見ず.

余談

第三の革命カオスとラプラスの魔

現代物理学における3つの革命とは、相対性理論、量子力学、そしてカオスの発見といわれる。質点系の運動では二体運動までしか厳密には、あるいは解析的には解くことができない。三体以上の質点の運動は原理的に、コンピュータで解くしかないのである。ポアンカレ (Jules Henri Poincaré, 1854 – 1912) は三体問題の研究中、初期条件のわずかな違いが粒子の軌道を大きく変えることを発見した。こういう現象を‘バタフライ現象’という。蝶の羽ばたきも、地球規模の運動に関与するということである。したがって、カオスの力学系では一寸先は闇なのである。

一方、ニュートンの法則によれば初期条件さえ与えれば、あらゆる物体の運動は原理的に決定できることになる。ラプラス (Pierre Simon de Laplace, 1749 – 1827) は象徴的に、‘神の一撃’により世の中は始まり、全宇宙の運命はすでに決まっているといった。このことを‘ラプラスの魔’という。どうも現実の世界は騒がしく、‘神の一撃’だけでは不十分らしい。ラプラスは数学、天文学、物理学に秀で、メートル原器を作成したが、政治家としても有名である。フランス革命を生き残り、ナポレオンのもとで大臣をつとめ、王政復古後は侯爵となった。彼が抜きんでた才能を発揮したのは科学ばかりでなく政治においてもであった。

蝶々さん

第8章 剛体の運動

通常の物体は力を加えると変形するけれども、力を加えても変形しない理想的な物体を **剛体** という。すなわち剛体は質点系の特別な場合であり、任意の2点間の距離が不変な系である。したがって、剛体の運動に関して **7.1** ～ **7.3** 節で述べたことがそのまま適用される。この章では剛体に固有の量である慣性モーメントを導入し、剛体の回転を考えてみよう。

8.1 自由度と運動方程式

3次元空間の中での1個の質点の運動はその位置、例えば (x, y, z) 、あるいは (r, θ, ϕ) という3つの量を時刻 t の関数として求めれば決定される。このことを運動の **自由度** が3であるという。質点が2個の場合、それぞれの位置は6つの量で決まるけれど、2点間の距離が一定であるという条件を課すると、自由度は5となり、3個の場合には、各質点間の距離が一定という条件は3つあるので、自由度は6となる。さて、この系に4番目の質点を加えてみよう。他の3個の質点からの距離が一定であるから、その位置は一意に決まり、自由度は6のままである。さらに質点の個数を増やしていても自由度が増えることはない。したがって、剛体の自由度は6である。

剛体の空間的配置は一般に重心の位置 (x_G, y_G, z_G) と重心のまわりの回転で決定される。回転は回転軸の方向を指定する2つの量とその軸のまわりの回転角によって規定される。つまり剛体の配置は6つの量で決まることになり、これは前に述べた自由度6と対応している。したがって、運動方程式は重心の運動に関する (7.13)

$$M \frac{d^2 \mathbf{r}_G}{dt^2} = \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{F} \quad (8.1)$$

および重心のまわりの回転に関する (7.18)

$$\frac{d\mathbf{L}'}{dt} = \sum_i \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{N}'_i = \mathbf{N}' \quad (8.2)$$

で十分である.

しかし (8.2) の代わりに原点のまわりの回転に関する (7.5)

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{N}_i = \mathbf{N} \quad (8.3)$$

を使う方が便利な場合もある.

8.2 固定軸のまわりの回転

剛体が固定軸のまわりを回転している場合を考えよう. 図に示すように固定軸を z 軸にとり, 角速度を ω とする. 添字 z を省くと, 角運動量は

$$L = \sum_i m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) \quad (8.4)$$

と書ける. 質点の位置を円柱座標系で表すと

$$\begin{aligned} x_i &= r_i \cos \theta_i \\ y_i &= r_i \sin \theta_i \end{aligned}$$

であるので, これを t で微分し, 剛体では各点で $\dot{\theta}_i = \omega$ が成り立つから, (8.4) は

$$L = \sum_i m_i r_i^2 \omega = I \omega \quad (8.5)$$

となる. ここで

$$I = \sum_i m_i r_i^2 \quad (8.6)$$

を剛体の 慣性モーメント という. 慣性モーメントの次元は kg m^2 である.

固定軸まわりの回転においては r_i は一定であるから I は定数となる．このとき運動方程式 (8.3) の z 成分は

$$\frac{dL}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d^2\theta}{dt^2} = N \quad (8.7)$$

と書ける．これを質点の運動方程式

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F$$

と比べ、質量 m が慣性の大きさを表すことを思い出すと、慣性モーメント I は回転に関する慣性の大きさを表していることがわかる．ただし質量 m は質点固有の量で常に一定であるが、慣性モーメントは回転軸をどのように選ぶかに依存していることに注意しよう．

回転の速さは $v_i = r_i \omega$ であるから、運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (8.8)$$

となる．

固定軸のまわりの回転は自由度が 1 であるから、質点の直線運動との間に類似性がみられる．それを表にまとめておこう．

直線運動		固定軸のまわりの回転	
質量	m	慣性モーメント	I
変位	x	回転角	θ
速度	$v = \dot{x}$	角速度	$\omega = \dot{\theta}$
運動量	$p = mv$	角運動量	$L = I\omega$
力	F	力のモーメント	N
運動方程式	$\frac{dp}{dt} = F$	運動方程式	$\frac{dL}{dt} = N$
運動エネルギー	$\frac{1}{2}mv^2$	運動エネルギー	$\frac{1}{2}I\omega^2$

例 8.1 実体振り子

図に示すように、水平な固定軸 O のまわりを回転する質量 M の剛体を考えよう． O から重心 G までの距離を h 、 OG が鉛直線となす角を θ 、 O のまわりの慣性モーメントを I とすると、運動方程式 (8.7) は

$$I\ddot{\theta} = -Mgh \sin \theta \quad (8.9)$$

と書ける．単振子の運動方程式 (3.18) と比べると，実体振子は長さ

$$l = \frac{I}{Mh} \quad (8.10)$$

の単振子と等しい運動をすることがわかる．したがって，微小振動の周期は

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgh}} \quad (8.11)$$

となる．

8.3 慣性モーメント

すでに (8.6) で z 軸のまわりの慣性モーメントを導入したが，それを一般化して，任意の軸のまわりの慣性モーメントを求めよう．角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転している剛体各部の回転速度は $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$ であるから，全角運動量は

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \quad (8.12)$$

である．この x 成分は

$$\begin{aligned} L_x &= \sum_i m_i [y_i(\omega_x y_i - \omega_y x_i) - z_i(\omega_z x_i - \omega_x z_i)] \\ &= \omega_x \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum_i m_i x_i y_i - \omega_z \sum_i m_i x_i z_i \end{aligned}$$

と書ける． L_y, L_z も同様に表される．いま

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2), & I_{xy} &= I_{yx} = - \sum_i m_i x_i y_i \\ I_{yy} &= \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2), & I_{yz} &= I_{zy} = - \sum_i m_i y_i z_i \\ I_{zz} &= \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2), & I_{zx} &= I_{xz} = - \sum_i m_i z_i x_i \end{aligned} \quad (8.13)$$

とおこう． I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} を慣性モーメント， I_{xy} , I_{yz} , ... を慣性乗積という．このとき全角運動量の成分は

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z \\ L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z \\ L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{aligned} \quad (8.14)$$

となり，行列形式で

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (8.15)$$

と表される．

行列 I_{ij} は実数の対称行列であるから，対角化できて，その固有値は実数である．すなわち，固有値方程式は

$$\begin{vmatrix} I_{xx} - I & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} - I & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} - I \end{vmatrix} = 0 \quad (8.16)$$

となる．固有値 I_1, I_2, I_3 を主慣性モーメント，固有ベクトルに合致した座標軸を 慣性主軸 という．一般に回転対称な物体ではその対称軸が慣性主軸になり，慣性乗積は 0 となるので，主慣性モーメントと慣性モーメントを区別しない．

慣性主軸の単位ベクトルを $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ とすると，角速度は

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3 \quad (8.17)$$

であり，全角運動量は

$$\mathbf{L} = L_1 \mathbf{e}_1 + L_2 \mathbf{e}_2 + L_3 \mathbf{e}_3 \quad (8.18)$$

と書ける．ただし

$$L_1 = I_1 \omega_1, \quad L_2 = I_2 \omega_2, \quad L_3 = I_3 \omega_3 \quad (8.19)$$

である．

ここで慣性モーメントを計算する際に有用な関係式をまとめておこう．

平行軸の場合

点 O を通る z 軸のまわりの慣性モーメント
を I とすると

$$I = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

である．重心系に変換すると，(7.11) を代入して

$$\begin{aligned} I &= \sum_i m_i [(x_G + x'_i)^2 + (y_G + y'_i)^2] \\ &= \sum_i m_i (x_G^2 + y_G^2) + \sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2) \end{aligned}$$

となる．ここで (7.9) を用いた．右辺第2項は重心 G を通る z' 軸のまわりの慣性モーメント I_G であり， z 軸と z' 軸との距離を h とすると $h^2 = x_G^2 + y_G^2$ であるから

$$I = I_G + Mh^2 \quad (8.20)$$

が得られる．したがって，慣性モーメントは重心を通る軸のまわりのものが最小となる．

薄い板の場合

薄い板の平面を xy 面とする． $z_i = 0$ であるから慣性モーメントは

$$I_x = \sum_i m_i y_i^2, \quad I_y = \sum_i m_i x_i^2, \quad I_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

と書ける．したがって，関係式

$$I_z = I_x + I_y \quad (8.21)$$

が成り立つ．特に板が z 軸のまわりに対称な場合には

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} I_z \quad (8.22)$$

となる．

連続体の場合

物質が連続的に分布している物体の場合は (7.8) や (8.13) の和を積分におきかえる必要がある。密度を ρ , 体積要素を dV とすると, 質量要素は $dm = \rho dV$ であるから物体の質量は

$$M = \int dm = \int \rho dV \quad (8.23)$$

である。ただし dV は物体の形に応じて (5.10), (5.11), (5.12) のいずれかを用いる。重心の位置, たとえば x_G は

$$x_G = \frac{1}{M} \int x \rho dV \quad (8.24)$$

となり, z 軸のまわりの慣性モーメントは

$$I_z = \int (x^2 + y^2) \rho dV \quad (8.25)$$

と表される。

例 8.2 主慣性モーメント

4 つの質点が図に示すように配置されている場合の慣性モーメントを計算しよう。(8.13) より

$$I_{xx} = I_{yy} = 6ma^2, \quad I_{zz} = 12ma^2, \quad I_{xy} = -2ma^2, \quad I_{yz} = I_{zx} = 0$$

であるから, $J = 2ma^2$ とおくと (8.16) は

$$\begin{vmatrix} 3J - I & -J & 0 \\ -J & 3J - I & 0 \\ 0 & 0 & 6J - I \end{vmatrix} = 0$$

すなわち

$$(2J - I)(4J - I)(6J - I) = 0$$

と書ける。したがって固有値として

$$I = 2J, 4J, 6J \quad (8.26)$$

を得る。

固有値に属する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 3J - I & -J & 0 \\ -J & 3J - I & 0 \\ 0 & 0 & 6J - I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad (8.27)$$

から求められる． $I_1 = 2J = 4ma^2$ のときは

$$x - y = 0, \quad -x + y = 0, \quad z = 0$$

を解いて，固有ベクトルの方向

$$y = x, \quad z = 0$$

を得る．同様にして， $I_2 = 4J = 8ma^2$ のときの固有ベクトルの方向は

$$y = -x, \quad z = 0$$

であり， $I_3 = 6J = 12ma^2$ のときは

$$x = y = 0, \quad z \text{ は不定}$$

つまり z 軸が固有ベクトルの方向となる．

したがって，主慣性モーメントと慣性主軸の単位ベクトルは

$$\begin{aligned} I_1 &= 4ma^2, \quad \mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) \\ I_2 &= 8ma^2, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) \\ I_3 &= 12ma^2, \quad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1) \end{aligned} \tag{8.28}$$

と決められる．

例 8.3 長方形の板の慣性モーメント

質量 M ，辺の長さ $2a, 2b$ の長方形の薄い板の重心を通る軸のまわりの慣性モーメントを計算しよう．密度は一様であるとする．質量は $M = 4ab\rho$ となる．図のように x 軸， y 軸をとると， x 軸のまわりの慣性モーメントは

$$I_x = \int y^2 dm = \rho \int_{-a}^a dx \int_{-b}^b y^2 dy = \frac{4}{3} \rho ab^3 = \frac{1}{3} b^2 M \tag{8.29}$$

となる．同様に y 軸のまわりの慣性モーメントは

$$I_y = \int x^2 dm = \frac{1}{3} a^2 M \tag{8.30}$$

となる． z 軸のまわりの慣性モーメントは (8.21) より

$$I_z = I_x + I_y = \frac{1}{3}(a^2 + b^2)M \quad (8.31)$$

と書ける．

例 8.4 半円板の重心の位置と慣性モーメント

密度一様な質量 M ，半径 a の半円について重心の位置を求めよう．図のように x 軸， y 軸をとると，対称性から $x_G = 0$ である．重心の y 座標

$$y_G = \frac{\int y dm}{M}, \quad M = \frac{1}{2}\pi a^2 \rho$$

を計算する．平面極座標系を用いると

$$y = r \sin \theta, \quad dm = \rho r dr d\theta$$

であるから

$$\int y dm = \rho \int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{2}{3}\rho a^3$$

を得る．したがって

$$y_G = \frac{4}{3\pi}a \quad (8.32)$$

となる．

x 軸のまわりの慣性モーメントは

$$I_x = \int y^2 dm = \rho \int_0^a r^3 dr \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{4}a^2 M \quad (8.33)$$

となり， y 軸のまわりの慣性モーメントは

$$I_y = \int x^2 dm = \rho \int_0^a r^3 dr \int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{4}a^2 M \quad (8.34)$$

となる．

重心を通る y 軸のまわりの慣性モーメントは (8.34) と変わらず，重心を通る x 軸に平行な軸のまわりの慣性モーメントは (8.20) より

$$I_G = \frac{1}{4}a^2 M - \left(\frac{4}{3\pi}a\right)^2 M$$

となる．

例 8.5 対称物体の慣性モーメント

典型的な物体の慣性モーメントを図表にまとめる．ただし，その計算は演習問題として残しておこう．

細い棒

長方形板

直方体

$$I_y = \frac{1}{3}a^2 M$$

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{1}{3}b^2 M \\ I_y &= \frac{1}{3}a^2 M \\ I_z &= \frac{1}{3}(a^2 + b^2)M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{1}{3}(b^2 + c^2)M \\ I_y &= \frac{1}{3}(c^2 + a^2)M \\ I_z &= \frac{1}{3}(a^2 + b^2)M \end{aligned}$$

円輪

円板

円筒

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{1}{2}a^2 M \\ I_z &= a^2 M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{1}{4}a^2 M \\ I_z &= \frac{1}{2}a^2 M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_x &= (\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}l^2)M \\ I_z &= a^2 M \end{aligned}$$

円柱

球殻

球

$$\begin{aligned} I_x &= (\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{3}l^2)M \\ I_z &= \frac{1}{2}a^2 M \end{aligned}$$

$$I = \frac{2}{3}a^2 M$$

$$I = \frac{2}{5}a^2 M$$

8.4 剛体の平面運動

剛体の各点がある一定の平面に平行に運動するとき，回転軸はその平面に垂直である．この平面を xy 面にとると，運動方程式は重心の運動 (8.1)

$$M\ddot{x}_G = F_x$$

$$M\ddot{y}_G = F_y$$

と重心のまわりの回転 (8.2)

$$\frac{dL'}{dt} = N'$$

になる． $L' = I_G\omega$ を代入すると

$$I_G \frac{d\omega}{dt} = I_G \frac{d^2\theta}{dt^2} = N' \quad (8.35)$$

となる．

運動エネルギーは，(7.20) の第 2 項が固定軸のまわりの回転の運動エネルギー (8.8) になるので

$$T = \frac{1}{2}Mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2 \quad (8.36)$$

と書ける．

例 8.6 斜面を落下する円柱

図に示すように，質量 M ，半径 a の円柱が水平と角 α をなす斜面に沿って落下する運動を考えよう．作用する力は重力 Mg ，垂直抗力 R ，摩擦力 F である．斜面に沿って下向きに x 軸をとると，運動方程式は

$$\begin{aligned} M\ddot{x} &= Mg \sin \alpha - F \\ 0 &= -Mg \cos \alpha + R \\ I\dot{\omega} &= aF, \quad I = \frac{1}{2}a^2M \end{aligned} \quad (8.37)$$

と書ける.

静止摩擦係数を μ_0 として

$$F < \mu_0 R = \mu_0 M g \cos \alpha \quad (8.38)$$

の場合, 円柱は斜面を滑らずに転がる. このとき円柱の回転角を θ とすると

$$x = a\theta, \quad \dot{x} = a\omega, \quad \ddot{x} = a\dot{\omega}$$

であるから

$$F = \frac{1}{a} I \dot{\omega} = \frac{1}{2} M \ddot{x} \quad (8.39)$$

となる. したがって, (8.37) の第1式より

$$\ddot{x} = \frac{2}{3} g \sin \alpha \quad (8.40)$$

を得る. これは等加速度運動であり, 円柱が落下する加速度は質点の場合の $2/3$ 倍になっている. (8.40) を積分し, 初期条件を $t = 0$ で $\dot{x} = x = 0$ とすると

$$x = \frac{1}{3} g t^2 \sin \alpha \quad (8.41)$$

が得られる.

円柱が滑らない場合, 摩擦力は仕事をしないから力学的エネルギーは保存される. すなわち位置エネルギーは $x = 0$ を基準点とすると $U = -Mgx \sin \alpha$ であるから, 力学的エネルギー保存の法則は

$$\frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 - Mgx \sin \alpha = 0 \quad (8.42)$$

と書ける. ここで円柱回転の運動エネルギーは

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{4} M a^2 \omega^2 = \frac{1}{4} M \dot{x}^2$$

であるから, (8.42) の右辺第1項と第2項の比は $2:1$ となる. したがって, 位置エネルギーから変換された運動エネルギーのうち $1/3$ が回転に使われ, $2/3$ が重心の落下運動に使われることになる.

(8.40) を (8.39) に代入すると摩擦力は

$$F = \frac{1}{3} M g \sin \alpha$$

となるから，滑らない条件 (8.38) は

$$\tan \alpha < 3\mu_0 \quad (8.43)$$

と書ける．

斜面の傾斜角が大きくなり

$$\tan \alpha > 3\mu_0$$

の場合には，円柱は滑りながら転がる．このとき運動摩擦係数を μ とすると摩擦力は

$$F = \mu Mg \cos \alpha \quad (8.44)$$

であるから，運動方程式 (8.37) は

$$M\ddot{x} = Mg \sin \alpha - \mu Mg \cos \alpha$$

$$I\dot{\omega} = a\mu Mg \cos \alpha$$

と書ける．つまり

$$\ddot{x} = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

$$\dot{\omega} = \frac{2\mu g}{a} \cos \alpha$$

である．これも等加速度運動であるから，積分し $t = 0$ で $\dot{x} = \omega = 0$ とすると

$$\dot{x} = gt(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

$$\omega = \frac{2\mu g}{a} t \cos \alpha$$

$$x = \frac{1}{2}gt^2(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

が得られる．滑りの速度は

$$u = \dot{x} - a\omega = gt(\sin \alpha - 3\mu \cos \alpha) \quad (8.45)$$

となる．

円柱が滑る場合，力学的エネルギーは

$$\frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 - Mgx \sin \alpha = -\frac{1}{2}\mu Mg^2t^2 \cos \alpha(\sin \alpha - 3\mu \cos \alpha)$$

となり、保存されずに減少する。円柱の滑りにともなって摩擦力がする仕事は

$$W_f = - \int_0^t F u dt$$

であり、(8.44), (8.45) を代入し、積分すると、減少したエネルギーに等しいことが確かめられる。

例 8.7 つるした棒の振動

図に示すように、長さ l の糸の先に質量 M 、長さ $2a$ の一様な棒の一端を結び、鉛直面内で振動させよう。水平に x 軸、鉛直上向きに y 軸をとり、糸と棒が鉛直線となす角をそれぞれ θ , ϕ とする。糸の張力を S とすると、運動方程式は

$$\begin{aligned} M\ddot{x} &= -S \sin \theta \\ M\ddot{y} &= -Mg + S \cos \theta \\ I\ddot{\omega} = I\ddot{\phi} &= -Sa \sin(\phi - \theta), \quad I = \frac{1}{3}a^2 M \end{aligned} \quad (8.46)$$

と書ける。

重心の位置は

$$\begin{aligned} x &= l \sin \theta + a \sin \phi \\ y &= -l \cos \theta - a \cos \phi \end{aligned}$$

であるから、微小振動の場合には

$$x = l\theta + a\phi, \quad y = -(l + a)$$

と近似できる。 y 方向の運動方程式より $S = Mg$ となるから (8.46) は

$$\begin{aligned} l\ddot{\theta} + a\ddot{\phi} &= -g\theta \\ a\ddot{\phi} &= -3g(\phi - \theta) \end{aligned}$$

と表される。3.5 節の二重振子の場合と同様に

$$\theta = Ae^{i\omega t}, \quad \phi = Be^{i\omega t} \quad (8.47)$$

とおくと代数方程式

$$(l\omega^2 - g)A + a\omega^2 B = 0 \quad (8.48)$$

$$3gA + (a\omega^2 - 3g)B = 0 \quad (8.49)$$

が得られる． $A = B = 0$ 以外に解があるためには，行列式が

$$\begin{vmatrix} l\omega^2 - g & a\omega^2 \\ 3g & a\omega^2 - 3g \end{vmatrix} = 0 \quad (8.50)$$

となる必要がある．すなわち

$$al\omega^4 - (3l + 4a)g\omega^2 + 3g^2 = 0$$

である． ω^2 に対する根は

$$\omega^2 = \frac{(3l + 4a) \pm \sqrt{D}}{2al} g \quad (8.51)$$

となる．ここで

$$D = (3l + 4a)^2 - 12al$$

である． ω^2 は正の実根となるので，振動解が存在し

$$\theta = A_+ \cos(\omega_+ t + \alpha) + A_- \cos(\omega_- t + \beta) \quad (8.52)$$

$$\phi = B_+ \cos(\omega_+ t + \alpha) + B_- \cos(\omega_- t + \beta) \quad (8.53)$$

と書ける．ここで規準振動数 ω_{\pm} は (8.51) の複号に対応している．

振幅の比は

$$\frac{B}{A} = -\frac{l\omega^2 - g}{a\omega^2}$$

で与えられ

$$\omega = \omega_+ \text{ のとき } \frac{A_+}{B_+} < 0$$

$$\omega = \omega_- \text{ のとき } \frac{A_-}{B_-} > 0$$

となる．

8.5 撃力による運動

剛体に撃力 $\bar{\mathbf{F}}$ が作用して、重心の速度の変化 $\Delta \mathbf{v}_G$ 、重心のまわりの角速度の変化 $\Delta \boldsymbol{\omega}$ が生じたとしよう。運動量の変化 $\Delta \mathbf{P}$ と角運動量の変化 $\Delta \mathbf{L}'$ は (8.1), (8.2) より

$$\Delta \mathbf{P} = M \Delta \mathbf{v}_G = \int \mathbf{F} dt = \bar{\mathbf{F}} \quad (8.54)$$

$$\Delta \mathbf{L}' = I_G \Delta \boldsymbol{\omega} = \int \mathbf{N}' dt = \bar{\mathbf{N}}' \quad (8.55)$$

で与えられる。

例 8.8 衝撃の中心

図に示すように、静止している剛体に撃力 $\bar{\mathbf{F}}$ を点 P において線 OGP に垂直に与えよう。 $\overline{GP} = x$ とすると、(8.54), (8.55) は

$$\Delta P = M v_G = \bar{F}$$

$$\Delta L' = I_G \omega = \bar{N}' = x \bar{F}$$

となる。 $\overline{OG} = h$ とすると、点 O の速度の OG に垂直な成分は

$$v_O = v_G - h\omega = \bar{F} \left(\frac{1}{M} - \frac{hx}{I_G} \right)$$

となる。したがって

$$x = \frac{I_G}{Mh}$$

のとき点 O は動かないので、点 P に与えた撃力の衝撃を点 O は受けることはなく、剛体は O を中心として回転する。点 P を点 O に対する衝撃の中心という。

このとき OP 間の距離は

$$x + h = \frac{1}{Mh} (I_G + Mh^2) = \frac{I}{Mh}$$

となり，これは実体振子の単振子に相当する長さ (8.10) に等しい．

演習問題 8

1. 次の形の密度一様な物体の重心の位置を求めよ．
 - (1) 半径 a の半球
 - (2) 底面の半径 a ，高さ h の直円錐
2. 次の形の物体の重心を通る対称軸のまわりの慣性モーメントを求めよ．ただし質量はすべて M とし，密度は一様とする．
 - (1) 長さ $2a$ の細い棒
 - (2) 辺の長さ $2a, 2b, 2c$ の直方体
 - (3) 半径 a の細い円輪
 - (4) 半径 a の薄い円板
 - (5) 半径 a ，高さ $2l$ の中空円筒
 - (6) 半径 a ，高さ $2l$ の円柱
 - (7) 半径 a の球殻
 - (8) 半径 a の球
3. 質量 M の密度一様な直角二等辺三角形において，等しい辺の長さを $3a$ とするとき，重心を通る軸のまわりの主慣性モーメントを求めよ．
4. 質量 M ，底面の半径 a ，高さ h の直円錐の頂点のまわりの慣性モーメントを求めよ．
5. 質量 M ，半径 a の球の内部の密度が次の式で与えられる．

$$\rho = \frac{M}{2\pi a^2 r}$$

球の中心を通る軸のまわりの慣性モーメントを求めよ．

6. 密度一様な球が直径を通る軸のまわりに一定の角速度で回転している．この球が角運動量を保存したまま一様に収縮して半径が $1/n$ になったとき，慣性モーメント，角速度，回転の周期および運動エネルギーの変化を求めよ．
7. 半径 a ，慣性モーメント I の定滑車に軽い糸をかけ，その両端に質量 m_1, m_2 の質点をつけて静かに放す．質点の加速度と糸の張力を求めよ．ただし，糸は滑らないものとする．
8. 質量 M ，半径 a の密度一様な球と球殻が水平と角 α をなす斜面上に沿って滑らずに転がり落ちる．それぞれの加速度を求めよ．

9. 質量 M 、半径 a の密度一様な円板がその中心 O を通る鉛直軸のまわりに滑らかに回転できる．円板の中心に静止していた質量 m の人が円板の上を歩き、直径 a の円を描いて O にもどるとき、円板が回転した角を求めよ．
10. 質量 M 、内半径 a の中空円筒が水平に固定した円筒軸のまわりに自由に回転できるようになっている．その中に質量 m 、半径 b の小球を入れ、円筒の軸に垂直な面内で振動させる．小球は円筒の内面に沿って滑らずに転がるとして微小振動の周期を求めよ．
11. 水平な台の上に質量 M 、半径 a の球を静止しておき、球の中心を通る鉛直面内で水平に中心から高さ h の点に撃力 F を与える．球と台の運動摩擦係数を μ として、球の運動を求めよ．

思う一念、剛体をも通す．

余談

物質はどこまで硬くなれる？

世の中で最も硬い物質は何だろうか．実はこれが星なのである、中性子星という、太陽程度の質量をもつ半径約 10km の星である．密度はなんと $10^{15} \text{ g cm}^{-3}$ ．つまり、のど飴 1 個あたり 10 億トンもある．物質のなかで剛体にもっとも近いといえよう．ちなみに、太陽の中心密度はのど飴 1 個あたり 100 g である．中性子星には高速で自転しているものもあり、パルサーともいわれる．速いものはミリ秒の周期でまわっていて、超新星爆発後に残されると考えられているが、極限状態の物質といえるこの星の中身のことはよくわかっていない．中性子星の質量を初めて定量的に計算したのは、マンハッタン計画で有名なオッペンハイマー (John Robert Oppenheimer, 1904 – 1967) であった．超新星爆発という宇宙最大の核爆発後に残ると思われる中性子星と核爆弾... オッペンハイマーは水爆開発に反対し、スパイ容疑で 1954 年公職を追放されたが、1963 年には名誉を回復した．

オッペンハイマーの顔

第9章 剛体の空間運動

こまの運動のように、自転軸を傾けながら回転している剛体を考えよう。剛体が運動するにつれて慣性主軸の向きも変化するので、慣性モーメントはもはや一定とはならない。そのため慣性系での運動方程式はきわめて複雑になってしまう。そこで 6.2 節で導入した回転座標系を剛体に適用して、運動方程式を書きなおしてみよう。こうすることによって、運動をある程度、解析的に取り扱えるようになる。

9.1 オイラーの運動方程式

固定点のまわりを角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転している剛体を考えよう。空間に固定した座標系 (静止系) での運動方程式は (8.3) より

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i \mathbf{N}_i = \mathbf{N} \quad (9.1)$$

である。この座標系は剛体の慣性主軸に一致していないので、慣性乗積の項が現れる。たとえば、角運動量の x 成分は (8.14) より

$$L_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z$$

である。剛体が回転するにつれて、その配置が変わるから $I_{xx}, I_{xy}, I_{xz}, \dots$ も時間とともに変化し、(9.1) の x 成分は結局

$$\frac{dL_x}{dt} = I_{xx}\frac{d\omega_x}{dt} + \frac{dI_{xx}}{dt}\omega_x + I_{xy}\frac{d\omega_y}{dt} + \dots = N_x \quad (9.2)$$

となってしまう。

したがって、 $N_x = 0$ のような特別な場合を除いて一般に (9.2) を積分することは困難である。

そこで剛体に固定した座標系を導入し、これを剛体系とよぶことにしよう。この系は静止系に対して角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で回転しているので、(6.12) と同様に静止系における角運動量の時間変化は

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{L}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}'$$

で与えられる。 $d\mathbf{L}'/dt$ は剛体系における角運動量の時間変化である。したがって、剛体系での運動方程式はプライム記号をはずすことにして

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{N} \quad (9.3)$$

と表される。

慣性主軸の方向に座標軸をとった座標系を (x_1, x_2, x_3) とする。主慣性モーメント I_1, I_2, I_3 は定数であるから、(8.18), (8.19) より運動方程式 (9.3) の各成分は

$$\begin{aligned} I_1 \frac{d\omega_1}{dt} - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 &= N_1 \\ I_2 \frac{d\omega_2}{dt} - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 &= N_2 \\ I_3 \frac{d\omega_3}{dt} - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 &= N_3 \end{aligned} \quad (9.4)$$

と書ける。これを **オイラーの運動方程式** という。これは剛体系における角速度 $\boldsymbol{\omega}$ の時間変化を決める方程式である。

剛体回転の運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i)$$

であり、回転速度は $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$ であるから

$$m_i (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i) = \mathbf{p}_i \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i)$$

と変形できる。したがって

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}$$

を得る。剛体系では (8.18), (8.19) を代入すれば

$$T = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) \quad (9.5)$$

と表せる.

例 9.1 2 粒子回転系

図に示すような剛体の対称軸と回転軸とが一致しない例を考えよう. 質量 m の 2 個の質点を長さ $2a$ の軽い棒の両端につけ, 棒の中心を通り, 棒に対して角 θ だけ傾いた軸のまわりに一定の角速度 ω で回転させる.

まず, 静止系で考えよう. 図のように x, y, z 軸と角 ϕ をとると, $\omega = d\phi/dt$ であり, 角速度は $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ であるから (8.14) は

$$L_x = I_{xz}\omega, \quad L_y = I_{yz}\omega, \quad L_z = I_{zz}\omega$$

と書ける. それぞれの質点の位置は

$$(a \sin \theta \cos \phi, a \sin \theta \sin \phi, a \cos \theta)$$

$$(-a \sin \theta \cos \phi, -a \sin \theta \sin \phi, -a \cos \theta)$$

であるから, 慣性モーメントは (8.13) より

$$I_{xz} = -2ma^2 \sin \theta \cos \theta \cos \phi$$

$$I_{yz} = -2ma^2 \sin \theta \cos \theta \sin \phi$$

$$I_{zz} = 2ma^2 \sin^2 \theta$$

となり, 角運動量の成分は

$$L_x = -(2ma^2\omega \sin \theta) \cos \theta \cos \phi$$

$$L_y = -(2ma^2\omega \sin \theta) \cos \theta \sin \phi \tag{9.6}$$

$$L_z = (2ma^2\omega \sin \theta) \sin \theta$$

と表される. つまり, 角運動量 \mathbf{L} は棒と z 軸のつくる平面内であって, 常に棒に直交しており, この関係を保ったまま \mathbf{L} は z 軸のまわりを回転する.

(9.6) を t で微分すると力のモーメントの成分

$$N_x = \dot{L}_x = 2ma^2\omega^2 \sin \theta \cos \theta \sin \phi$$

$$N_y = \dot{L}_y = -2ma^2\omega^2 \sin \theta \cos \theta \cos \phi \tag{9.7}$$

$$N_z = \dot{L}_z = 0$$

が求められる. ベクトル \mathbf{N} は xy 面内であって, 棒に直交したまま z 軸のまわりを回転する.

棒を一定の角速度でまわし続けるためには (9.7) の力のモーメントを与える必要がある。

次に、この運動を剛体系で考えよう。ただし、6.2 節で取り扱った遠心力

とコリオリ力は無視できるほど小さいものとする。図に示すように棒に沿って x_3 軸をとり、 x_1x_3 面に ω があるように x_1 軸をとる。このとき主慣性モーメントは

$$I_1 = I_2 = 2ma^2, \quad I_3 = 0$$

であり、角速度の成分は

$$\omega_1 = -\omega \sin \theta, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega \cos \theta$$

である。これらを (9.4) の右辺に代入すると

$$N_2 = -2ma^2\omega^2 \sin \theta \cos \theta, \quad N_1 = N_3 = 0 \quad (9.8)$$

が得られ、静止系に変換すると

$$N_x = -N_2 \sin \phi, \quad N_y = N_2 \cos \phi, \quad N_z = 0$$

となり、(9.7) と同じ結果が得られる。

さらに角運動量の成分は

$$L_1 = -2ma^2\omega \sin \theta, \quad L_2 = L_3 = 0 \quad (9.9)$$

と書ける。

9.2 オイラーの角

空間に固定した $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ を単位ベクトルとする静止系 (x, y, z) から剛体に固定した慣性主軸を座標軸とする剛体系 (x_1, x_2, x_3) への変換を考えよう。剛体系の単位ベクトルは $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ である。2つの座標系は、剛体系の x_3 軸の方向を示す角 (θ, ϕ) と x_3 軸のまわりの回転角 ψ によって関係づけることができ、角 (θ, ϕ, ψ) を **オイラーの角** という。静止系から剛体系への変換式は次の (i), (ii), (iii) の操作により、途中に単位ベクトル $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ および $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ の系をはさんで求められる。

(i) z 軸のまわりの回転

この回転によって $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ から変換された単位ベクトルを $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ とする. 5 ページで示したように, 座標軸の回転によって単位ベクトルは (1.20), (1.21) のように変換されることを思い出そう. z 軸のまわりに角 ϕ だけ回転するとき, 単位ベクトルは

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \mathbf{k} \quad (9.10)$$

と変換される. これをまとめると変換式は

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \quad (9.11)$$

と表される. ここで変換の行列を D とおいた.

(ii) ベクトル \mathbf{a}_1 のまわりの回転

座標系をベクトル \mathbf{a}_1 のまわりに角 θ だけ回転することによって $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ から変換された単位ベクトルを $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ とすると

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} \quad (9.12)$$

である。このとき変換式は

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} \quad (9.13)$$

となる。ただし変換の行列を \mathbf{C} とする。

(iii) ベクトル \mathbf{b}_3 のまわりの回転

座標系をベクトル \mathbf{b}_3 のまわりに角 ψ だけ回転することによって単位ベクトルが $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ から $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ に変換される。変換式は (9.11) の角 ϕ を ψ でおきかえることにより

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{pmatrix} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{pmatrix} \quad (9.14)$$

と書ける。この変換の行列 \mathbf{B} は

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.15)$$

である。

以上 3 つの変換を重ねると $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ から $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ への変換が得られる。その変換の行列はそれぞれの行列の積 $\mathbf{A} = \mathbf{BCD}$ となるから、(9.11), (9.13), (9.15) より

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \psi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & \sin \phi \cos \psi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & \sin \theta \sin \psi \\ -\cos \phi \sin \psi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi & -\sin \phi \sin \psi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & \sin \theta \cos \psi \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (9.16)$$

と表される [演習問題 1].

この一連の操作における角速度は

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi} \mathbf{k} + \dot{\theta} \mathbf{a}_1 + \dot{\psi} \mathbf{e}_3 \quad (9.17)$$

で与えられる．このベクトルの $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ 方向の成分 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ を求めよう．まず， \mathbf{a}_1 すなわち \mathbf{b}_1 を $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ で表そう．それは操作 (iii) を逆にすることで求められる．(9.15) より行列 \mathbf{B} の行列式は $|\mathbf{B}| = 1$ となるから， \mathbf{B} の逆行列 \mathbf{B}^{-1} と転置行列 ${}^t\mathbf{B}$ は等しくなり

$$\mathbf{B}^{-1} = {}^t\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.18)$$

と書ける．この行列は (9.15) において回転角 ψ を $-\psi$ でおきかえても得られる．したがって，(9.18) より

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{b}_1 = \cos \psi \mathbf{e}_1 - \sin \psi \mathbf{e}_2 \quad (9.19)$$

となる．同様に， $\mathbf{A}^{-1} = {}^t\mathbf{A}$ であるからベクトル \mathbf{k} に対して (9.16) より

$$\mathbf{k} = \sin \theta \sin \psi \mathbf{e}_1 + \sin \theta \cos \psi \mathbf{e}_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3 \quad (9.20)$$

が得られる．(9.19), (9.20) を (9.17) に代入すると，角速度の成分は

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_2 &= \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_3 &= \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{aligned} \quad (9.21)$$

と表される．

オイラーの運動方程式 (9.4) を解いて $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ が時刻 t の関数として定まれば，(9.21) よりオイラーの角 (θ, ϕ, ψ) が t の関数として求められ，静止系に対する剛体の運動が決定できる．

9.3 対称な物体の自由回転

外力のモーメント $\mathbf{N} = 0$ の場合における剛体の回転を考えよう．このとき (9.1) より角運動量 \mathbf{L} は一定のベクトルとなる．剛体の対称軸を x_3 軸にとると，慣性モーメントは $I_1 = I_2$ である．

剛体系および静止系に対する角速度の変化と，剛体の運動すなわち慣性主軸の方向 (θ, ϕ, ψ) の変化を調べよう．

(1) 剛体系から見た角速度

オイラーの運動方程式 (9.4) は

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 &= (I_1 - I_3) \omega_2 \omega_3 \\ I_1 \dot{\omega}_2 &= (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= 0 \end{aligned} \quad (9.22)$$

と書ける．第3式より

$$\omega_3 = \omega_0 \quad (9.23)$$

を得る．ここで ω_0 を正の定数にとる．これを (9.22) の第1, 2式に代入すると

$$\dot{\omega}_1 = -\Omega \omega_2, \quad \dot{\omega}_2 = \Omega \omega_1 \quad (9.24)$$

となる．ただし

$$\Omega = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_0 \quad (9.25)$$

とおいた．(9.24) の解は A と α を定数として

$$\omega_1 = A \cos(\Omega t + \alpha) \quad (9.26)$$

$$\omega_2 = A \sin(\Omega t + \alpha) \quad (9.27)$$

と表せる．角速度の大きさは $\omega = \sqrt{A^2 + \omega_0^2}$ となり，一定である．した

がって，剛体系から見た角速度は次のようになる． ω と ω_3 が一定であるから，ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ は x_3 軸と一定の角を保って，角速度 Ω で回転する．回転の向きは， $I_3 > I_1$ の場合は $\Omega > 0$ であるから，反時計まわりであり， $I_3 < I_1$ の場合は時計まわりである．

(2) 慣性主軸の方向

一定のベクトル \mathbf{L} の方向を z 軸にとると $\mathbf{L} = L\mathbf{k}$ であり，(9.20) を用いると

$$\mathbf{L} = L(\sin \theta \sin \psi \mathbf{e}_1 + \sin \theta \cos \psi \mathbf{e}_2 + \cos \theta \mathbf{e}_3)$$

と表せるので、各成分は

$$L_1 = I_1 \omega_1 = L \sin \theta \sin \psi \quad (9.28)$$

$$L_2 = I_1 \omega_2 = L \sin \theta \cos \psi \quad (9.29)$$

$$L_3 = I_3 \omega_3 = I_3 \omega_0 = L \cos \theta \quad (9.30)$$

となる。(9.30) より

$$\cos \theta = \frac{I_3 \omega_0}{L} \quad (9.31)$$

は一定、すなわち、 \mathbf{L} と \mathbf{e}_3 のなす角 θ が一定となる。

(9.28), (9.29) に (9.26), (9.27) を代入すると

$$\tan \psi = \omega_1 / \omega_2 = \cot(\Omega t + \alpha)$$

となるから

$$\psi = -\Omega t - \alpha + \frac{\pi}{2} \quad (9.32)$$

を得る。さらに、 $\dot{\psi} = -\Omega$ となるので、これを (9.21) の第3式に代入すると

$$\dot{\phi} \cos \theta = \omega_0 + \Omega$$

となり、(9.25), (9.31) を代入して

$$\dot{\phi} = \frac{L}{I_1}$$

つまり

$$\phi = \frac{L}{I_1} t + \gamma \quad (9.33)$$

を得る。ただし γ は定数である。

これでオイラーの角 (θ, ϕ, ψ) の時間変化が得られた。

(3) 静止系から見た角速度

角運動量を静止系と剛体系で表すと

$$\mathbf{L} = L\mathbf{k} = I_1(\omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2) + I_3 \omega_0 \mathbf{e}_3$$

である。これより

$$\omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 = \frac{1}{I_1} (L\mathbf{k} - I_3 \omega_0 \mathbf{e}_3)$$

となる．これを角速度 $\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_0 \mathbf{e}_3$ に代入し，(9.25) を用いると

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{L}{I_1} \mathbf{k} - \Omega \mathbf{e}_3$$

を得る．これを

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_L \mathbf{k} + \omega^* \mathbf{e}_3 \quad (9.34)$$

と書く．ここで

$$\omega_L = \frac{L}{I_1}, \quad \omega^* = -\Omega$$

とおいた．図に示すように，角速度 $\boldsymbol{\omega}$ は一定の \mathbf{L} の方向である静止系の z 軸と剛体の x_3 軸が作る平面内にあり，剛体は z 軸のまわりに ω_L で回転

し， x_3 軸のまわりに ω^* で回転している．ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ と x_3 軸のなす角を β とすると

$$\begin{aligned} \omega_0 \tan \beta &= (\omega_0 - \omega^*) \tan \theta \\ &= (\omega_0 + \Omega) \tan \theta \\ &= \frac{I_3}{I_1} \omega_0 \tan \theta \end{aligned}$$

である．ここで (9.25) を用いた．したがって

$$\tan \beta = \frac{I_3}{I_1} \tan \theta \quad (9.35)$$

を得る． \mathbf{L} と x_3 軸のなす角 θ は一定であるから β も一定となる． $I_3 > I_1$ の場合は $\beta > \theta$ となり， $\boldsymbol{\omega}$ が z 軸のまわりに回転する向きと $\boldsymbol{\omega}$ が x_3 軸のまわりに回転する向きとは同じになるが， $I_3 < I_1$ の場合は $\beta < \theta$ となり，それらの向きは互いに逆になる．

9.4 こまの運動

図に示すように，対称軸をもつこまがその軸の下端の点 O を固定して，重力のもとで回転している場合を考えよう．対称軸を x_3 軸にとると，慣性モーメントは $I_1 = I_2$ である．こまの質量を M ，固定点 O から重心までの距離を l とし，鉛直上方に z 軸をとると，点 O の

まわりの重力のモーメントは (9.20) を用いると

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= l\mathbf{e}_3 \times (-Mg)\mathbf{k} \\ &= Mgl(\sin\theta \cos\psi \mathbf{e}_1 - \sin\theta \sin\psi \mathbf{e}_2)\end{aligned}\tag{9.36}$$

となる．したがって，オイラーの運動方程式 (9.4) は

$$I_1\dot{\omega}_1 = (I_1 - I_3)\omega_2\omega_3 + Mgl \sin\theta \cos\psi \tag{9.37}$$

$$I_1\dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 - Mgl \sin\theta \sin\psi \tag{9.38}$$

$$I_3\dot{\omega}_3 = 0 \tag{9.39}$$

と書ける．(9.39) より

$$\omega_3 = \omega_0 \tag{9.40}$$

を得る．ただし ω_0 は定数である．これを (9.21) に代入すると

$$\dot{\psi} = \omega_0 - \dot{\phi} \cos\theta \tag{9.41}$$

が得られる．

一方，(9.37) $\times \sin\psi$ + (9.38) $\times \cos\psi$ を計算すると

$$I_1(\dot{\omega}_1 \sin\psi + \dot{\omega}_2 \cos\psi) = (I_1 - I_3)\omega_0(\omega_2 \sin\psi - \omega_1 \cos\psi)$$

となり，(9.37) $\times \cos\psi$ - (9.38) $\times \sin\psi$ は

$$\begin{aligned}I_1(\dot{\omega}_1 \cos\psi - \dot{\omega}_2 \sin\psi) &= (I_1 - I_3)\omega_0(\omega_2 \cos\psi + \omega_1 \sin\psi) \\ &\quad + Mgl \sin\theta\end{aligned}$$

となる．さらに (9.21) を用いて $\omega_1, \omega_2, \dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2$ を消去すると

$$I_1(\ddot{\phi} \sin \theta + \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta} \dot{\psi}) = -(I_1 - I_3)\omega_0 \dot{\theta} \quad (9.42)$$

$$I_1(\ddot{\theta} + \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta) = (I_1 - I_3)\omega_0 \dot{\phi} \sin \theta + Mgl \sin \theta \quad (9.43)$$

と変形できる [演習問題 2].

(9.41) を (9.42) に代入し, $\sin \theta$ をかけると

$$I_1(\ddot{\phi} \sin^2 \theta + 2\dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \sin \theta) - I_3\omega_0 \dot{\theta} \sin \theta = 0 \quad (9.44)$$

となるから, これは積分できて

$$I_1 \dot{\phi} \sin^2 \theta + I_3 \omega_0 \cos \theta = L_0 \quad (9.45)$$

が得られる．ただし L_0 は定数である．

静止系では $N_z = 0$ であるから L_z は一定である． $L_z = \mathbf{L} \cdot \mathbf{k}$ に (8.18), (8.19), (9.20), (9.21), (9.40) を代入すると (9.45) の左辺に等しくなるので $L_0 = L_z$ である．

(9.41) を (9.43) に代入すると

$$I_1(\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) + I_3\omega_0 \dot{\phi} \sin \theta - Mgl \sin \theta = 0$$

となる．これに $\dot{\theta}$ を掛け (9.44) を用いて I_3 の項を消去すると

$$I_1(\ddot{\theta} \dot{\theta} + \dot{\phi} \dot{\phi} \sin^2 \theta + \dot{\phi}^2 \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta) - Mgl \dot{\theta} \sin \theta = 0$$

となり, t で積分すると

$$\frac{1}{2} I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) + Mgl \cos \theta = C \quad (9.46)$$

を得る．ここで C は定数である．左辺第2項 $Mgl \cos \theta$ は位置エネルギーであり, 運動エネルギー (9.5) は (9.21) と (9.40) を使うと

$$T = \frac{1}{2}(I_1 \dot{\theta}^2 + I_1 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + I_3 \omega_0^2)$$

と書ける． $\frac{1}{2} I_3 \omega_0^2$ は定数であるから, 結局 (9.46) は力学的エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}(I_1 \dot{\theta}^2 + I_1 \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + I_3 \omega_0^2) + Mgl \cos \theta = E \quad (9.47)$$

を表している．

(9.41), (9.45), (9.47) をまとめると

$$\dot{\psi} = \omega_0 - \dot{\phi} \cos \theta \quad (9.48)$$

$$\dot{\phi} \sin^2 \theta = a_1 - a_2 \cos \theta \quad (9.49)$$

$$\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta = a_3 - a_4 \cos \theta \quad (9.50)$$

と書ける．ここで

$$a_1 = \frac{L_0}{I_1}, \quad a_2 = \frac{I_3 \omega_0}{I_1}, \quad a_3 = \frac{2E - I_3 \omega_0^2}{I_1}, \quad a_4 = \frac{2Mgl}{I_1}$$

とおいた． $\dot{\psi}$ は対称軸のまわりの回転で自転を表し， $\dot{\phi}$ はその軸を傾けたまま鉛直軸のまわりの回転で歳差運動といわれ， $\dot{\theta}$ はこまの軸が起きたり倒れたりする運動で章動といわれる．

(9.49), (9.50) より

$$\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + (a_1 - a_2 \cos \theta)^2 = (a_3 - a_4 \cos \theta) \sin^2 \theta$$

が得られ， $u = \cos \theta$ とおくと

$$\left(\frac{du}{dt} \right)^2 = (a_3 - a_4 u)(1 - u^2) - (a_1 - a_2 u)^2 = f(u) \quad (9.51)$$

と書ける．関数 $f(u)$ は

$$f(+\infty) = +\infty, \quad f(\pm 1) < 0, \quad f(-\infty) = -\infty$$

であり，運動は $|u| \leq 1$, $f(u) \geq 0$ の領域に実現される．関数 $f(u)$ の概略を図に示す． $f(u) = 0$ の根を小さい順に u_1, u_2, u_3 とすると， $u_3 > 1$ であるから，こまは $u_1 \leq u \leq u_2$ ，すなわち $\theta_1 \geq \theta \geq \theta_2$ の範囲を運動することになる．

(9.49) で $\dot{\phi} = 0$ となる u の値を $u^* = a_1/a_2$ とおいてみよう． $u_2 < u^*$ の場合には， $a_1 - a_2 u > 0$ であるから $\dot{\phi} > 0$ となり，こまは順行の歳差運動を行う．一方， $u_1 < u^* < u_2$ の場合には， $u_1 \leq u < u^*$ の範囲で $\dot{\phi} > 0$ であるが， $u^* < u \leq u_2$ の範囲で $\dot{\phi} < 0$ となるので，こまは順行と逆行の歳差運動を繰り返す．

演習問題 9

1. $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ から $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ への変換行列 (9.16) を導き, その逆行列を求めよ.
2. 表式 (9.42), (9.43) を導け.
3. こまが軸を鉛直に立てて, あたかも静止しているかのような状態で回転している. 速くまわっているときは安定であることを示せ.

桃栗三年柿八年.

余談

こま, 独楽

こまの運動はオイラーの運動方程式で記述される. しかし解析的に解くことはとても難しい. 重心のまわりの主慣性モーメントが全部等しいこまを‘球こま’, 2つだけが等しいものを‘対称こま’, 全部異なるものを‘非対称こま’という. 外力が作用していない場合を‘オイラーごま’, 普通のこまのように対称こまで支点が対称軸上にある場合を‘ラグランジュごま’, ふたつの主軸に関する主慣性モーメントが等しく, 残りがその半分である場合を‘コワレスカヤごま’という. これら3つの場合にのみ, 運動方程式を積分することができる. 例えばラグランジュごまの運動は, 楕円関数を用いて記述できる.

こまを床の上でまわすと, 摩擦力による力のモーメントのために, こまは重心を高くするように起き上がり, 回転軸を鉛直に保ってまわり続けるようになる. この性質を利用したものが‘逆立ちごま’であり, こまが, あたかもひとりで逆立ちをするように見えて, 不思議に思える. また, 量子力学ではミクロの世界の粒子を区別するために, 粒子がこまのように‘スピン’しているという考えを導入する. このように‘こま’の世界も奥が深いのだ.

こまの運動方程式を解けなくても, こまを回してだれでも楽しむことができる. 力学の勉強にいきづまったら, 一人で‘独楽’でもまわして気分転換しよう!

様々な独楽の絵

数学的補遺

(1) テイラー展開

連続関数 $f(x)$ を $x = x_0$ のまわりで展開すると

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots \quad (\text{A.1})$$

である．ここで $f'(x_0)$ は $f(x)$ の 1 階導関数に $x = x_0$ を代入したものである．これをテイラー展開という．

e^x を $x = 0$ のまわりで展開すると

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots \quad (\text{A.2})$$

となる． $\cos \theta$, $\sin \theta$ の展開は

$$\cos \theta = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \dots \quad (\text{A.3})$$

$$\sin \theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + \dots \quad (\text{A.4})$$

である．

さらに $e^{i\theta}$ を展開し

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{1}{2!}(i\theta)^2 + \frac{1}{3!}(i\theta)^3 + \frac{1}{4!}(i\theta)^4 + \dots \quad (\text{A.5})$$

実数部と虚数部をまとめると

$$e^{i\theta} = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \dots + i\left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + \dots\right)$$

であるから，これを (A.3), (A.4) と比べると

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (\text{A.6})$$

が得られる．これをオイラーの公式という．

(2) 微分方程式

実数 x ，および x の未知関数 y とその導関数 $y', y'', \dots, y^{(n)}$ についての関数

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}, x) = 0$$

を n 階微分方程式という．この方程式を満足する $y(x)$ を解といい， n 個の任意定数 C_1, C_2, \dots, C_n を含む解

$$y = \phi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

を一般解， C_1, \dots, C_n に特定の値を与えたものを特殊解という．

ここでは力学で必要になる2階の微分方程式のみを考えよう. $p_2(x), p_1(x), p_0(x)$ を x の既知関数とすると

$$p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0 \quad (\text{A.7})$$

を同次線形微分方程式という. 解 y_1 と y_2 が見出されたとすると

$$\begin{aligned} p_2(x)y_1'' + p_1(x)y_1' + p_0(x)y_1 &= 0 \\ p_2(x)y_2'' + p_1(x)y_2' + p_0(x)y_2 &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ. 微分方程式 (A.7) は y に関して線形であるから, C_1, C_2 を定数として, C_1y_1, C_2y_2 を直接 (A.7) に代入することによって, これらが解であることを確かめることができる. さらに y_1, y_2 の一次結合

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 \quad (\text{A.8})$$

も解である. これが (A.7) の一般解である.

解 y_1 と y_2 が独立である条件は行列式

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0 \quad (\text{A.9})$$

で与えられる.

$q(x)$ を x の既知関数として, (A.7) の右辺に加えた方程式

$$p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = q(x) \quad (\text{A.10})$$

を非同次線形微分方程式という. この方程式を満足する1つの特殊解 $Y(x)$ が見出されたとし, 同次方程式 (A.7) の解を y_1, y_2 とすると, それらの一次結合

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + Y \quad (\text{A.11})$$

が (A.10) の一般解である.

(3) 偏微分

関数 $f(x)$ の微分を

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (\text{A.12})$$

と定義する. このとき f の増分は

$$df = \frac{df}{dx} dx \quad (\text{A.13})$$

である. これを全微分という.

独立変数 x, y, z の関数 $f(x, y, z)$ に対する偏微分を

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y} \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z} \quad (\text{A.16})$$

と定義する．偏微分の記号は ∂ が使われる．微分に直接関与しない変数は定数のように扱われることに注意しよう．

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (\text{A.17})$$

である．

(4) 線積分

独立変数 x の関数を $y = f(x)$ とし， x と y の関数 $F(x, y)$ を x について a から b まで積分する．線積分は

$$\int_a^b F(x, y) dx = \int_a^b F(x, f(x)) dx \quad (\text{A.18})$$

と表される． x が変化するつれて，従属変数 y も変化することに注意しよう．一般に線積分は a から b へ至る径路に依存している．

(5) 重積分

独立変数 x, y の関数 $f(x, y)$ を x について区間 $[a, b]$ ， y について区間 $[c, d]$ にわたって積分する．重積分は

$$\begin{aligned} \iint f(x, y) dx dy &= \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx \\ &= \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

と表される． x と y は独立であるから，一方の変数について積分するとき他方は定数のように扱われることに注意しよう．

特に，関数 $f(x, y, z)$ の積分

$$\iiint f(x, y, z) dx dy dz$$

を体積積分という．

(6) 勾配

スカラー $\phi(x, y, z)$ に対して

$$\text{grad } \phi = \mathbf{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (\text{A.20})$$

となるベクトルを勾配という.

微小変位 $d\mathbf{r} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$ と $\text{grad } \phi$ とのスカラー積をとれば (A.17) より

$$\text{grad } \phi \cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz = d\phi \quad (\text{A.21})$$

となる. これを点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ から点 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ まで積分すると

$$\int_{P_1}^{P_2} \text{grad } \phi \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_2} d\phi = \phi(x_2, y_2, z_2) - \phi(x_1, y_1, z_1) \quad (\text{A.22})$$

であるから, 任意の閉曲線 C に沿って一まわり積分すると

$$\oint_C \text{grad } \phi \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (\text{A.23})$$

と書ける. 逆にベクトル $\mathbf{B}(x, y, z)$ に対して

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

ならば $\mathbf{B} = \text{grad } \phi$ となるスカラー $\phi(x, y, z)$ が存在する.

(7) 双曲線関数

オイラーの公式 (A.6) より

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos \theta + i \sin \theta \\ e^{-i\theta} &= \cos \theta - i \sin \theta \end{aligned}$$

であるから

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad (\text{A.24})$$

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad (\text{A.25})$$

が得られる. これと類似した関数

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\text{A.26})$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (\text{A.27})$$

を双曲線関数という. $\cosh x$ は偶関数, $\sinh x$ は奇関数である.

(A.26), (A.27) より

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad (\text{A.28})$$

が成り立ち、双曲線関数の微分は

$$\frac{d \cosh x}{dx} = \sinh x, \quad \frac{d \sinh x}{dx} = \cosh x \quad (\text{A.29})$$

であることがわかる。三角関数とは符号が異なる。

(8) スカラー積とベクトル積

1.2 節でスカラーは大きさだけを持った量、ベクトルは大きさと向きを持った量と定義したが、ここでは座標変換との対応性を考えてみよう。

スカラーは大きさしか持たないから、座標変換をしても何ら変化はしない。あるいは逆に、座標変換に対して変化しない量をスカラーということもできる。

ではベクトルはどうなるであろうか。S 系から S' 系への座標変換として、まず回転を考える。図に示すように、原点 O を固定したまま、座標系を z 軸のまわりに角 θ だけ回転する。このとき位置ベクトル \mathbf{r} の成分は

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta \\ z' &= z \end{aligned}$$

と変換される。

位置ベクトルと同じように変換されるベクトルを \mathbf{A}, \mathbf{B} としよう。例えば \mathbf{A} の変換式は

$$\begin{aligned} A'_x &= A_x \cos \theta + A_y \sin \theta \\ A'_y &= -A_x \sin \theta + A_y \cos \theta \\ A'_z &= A_z \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

と書ける。

\mathbf{A} と \mathbf{B} のスカラー積を計算すると

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}' &= A'_x B'_x + A'_y B'_y + A'_z B'_z \\ &= (A_x \cos \theta + A_y \sin \theta)(B_x \cos \theta + B_y \sin \theta) \\ &\quad + (-A_x \sin \theta + A_y \cos \theta)(-B_x \sin \theta + B_y \cos \theta) + A_z B_z \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \\ &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \end{aligned}$$

となるから、これはスカラー量であることがわかる。これがスカラー積という名前の由来である。特に、 $\mathbf{B} = \mathbf{A}$ の場合、 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2$ はベクトル \mathbf{A} の大きさの2乗となる。ベクトルの大きさは座標系を回転しても変化しないスカラー量である。

ベクトル積 $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ の x 成分を計算すると

$$\begin{aligned} C'_x &= A'_y B'_z - A'_z B'_y \\ &= (-A_x \sin \theta + A_y \cos \theta) B_z - A_z (-B_x \sin \theta + B_y \cos \theta) \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \cos \theta + (A_z B_x - A_x B_z) \sin \theta \\ &= C_x \cos \theta + C_y \sin \theta \end{aligned}$$

となる。同様に y, z 成分も

$$\begin{aligned} C'_y &= -C_x \sin \theta + C_y \cos \theta \\ C'_z &= C_z \end{aligned}$$

と書ける。これはベクトルの変換式 (A.30) と同じである。これがベクトル積といわれる理由である。

次に、 S 系から S' 系への変換として、座標系の反転を考える。位置ベクトルの成分は

$$x' = -x, \quad y' = -y, \quad z' = -z$$

と変換される。あるいは簡潔に

$$\mathbf{r}' = -\mathbf{r}$$

と書ける。ベクトル \mathbf{A}, \mathbf{B} も位置ベクトルと同じように変換されるから

$$\mathbf{A}' = -\mathbf{A}, \quad \mathbf{B}' = -\mathbf{B} \quad (\text{A.31})$$

である。

スカラー積は

$$\mathbf{A}' \cdot \mathbf{B}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$$

となるから、やはりスカラー量である。一方、ベクトル積は

$$\mathbf{C}' = \mathbf{A}' \times \mathbf{B}' = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{C}$$

となり、ベクトルの変換式 (A.31) と符号が異なる。

座標系を回転するときはベクトルと同じように変換するけれど、反転するとき符号を変えないベクトルを **軸性ベクトル** という。これに対して通常のベクトルを **極性ベクトル** という。

問題解答

演習問題 1

4. 6 cm^3

9. $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta, \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta,$
 $a_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\phi} \sin^2 \theta)$

12. $x = a(\theta - \sin \theta), \quad y = a(1 - \cos \theta), \quad \theta = \omega t + \alpha$

演習問題 2

1. $\frac{v_0^2}{g} \cos \alpha \left[\sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + 2gh/v_0^2} \right], \quad \tan \alpha = \frac{v_0^2}{v_0^2 + 2gh}$

4. $\frac{2v_0^2}{g} \frac{\sin \beta}{\cos^2 \alpha} \cos(\alpha + \beta)$

5. $\frac{M}{b} \log \left(1 + \frac{b}{a} v \right)$

6. 高さ $\frac{1}{2b} \log \left(1 + \frac{b}{g} v_0^2 \right), \quad$ 速さ $\sqrt{\frac{g}{g + bv_0^2}} v_0$

8. $v_0^2 < 2gR$ のとき $\frac{v_0^2 R}{2gR - v_0^2}, \quad v_0^2 \geq 2gR$ のとき無限遠

9. $\frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}$

10. $x = \frac{a}{mb} \left[t - \frac{1}{b} (1 - e^{-bt}) \right]$

演習問題 3

2. (1) $x = x_0 \cos \omega t$

(2) $x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$

(3) $x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$

4. $2\pi \sqrt{l \cos \theta / g}$

5. $x = A_1 e^{-\beta t} \cos(\sigma t + \alpha) + A \sin \omega t - B \cos \omega t \quad$ ただし $2\beta = b/m,$
 $\omega_0 = \sqrt{k/m}, \quad A = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2} f_0, \quad B = \frac{2\beta \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2} f_0$

6. $x = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t)$

$\omega = \omega_0 - \Delta\omega$ のとき $x = \frac{f_0}{\omega_0 \Delta\omega} \sin \omega_0 t \sin \frac{\Delta\omega}{2} t$

7. (1) $x = \frac{F_0}{m\omega_0^2}(1 - \cos \omega_0 t)$
 (2) $x = \frac{F_0}{m(b^2 + \omega_0^2)}(e^{-bt} - \cos \omega_0 t + \frac{b}{\omega_0} \sin \omega_0 t)$
 (3) $t \leq t_0$ で $x = \frac{F_0}{m\omega_0^3 t_0}(\omega_0 t - \sin \omega_0 t)$,
 $t \geq t_0$ で $x = -\frac{2F_0}{m\omega_0^3 t_0} \sin \frac{\omega_0 t_0}{2} \cos \omega_0(t - t_0/2) + \frac{F_0}{m\omega_0^2}$
8. $\omega = (\sqrt{5} + 1)\omega_0/2$ のとき $B_1/A_1 = (1 - \sqrt{5})/2$
 $\omega = (\sqrt{5} - 1)\omega_0/2$ のとき $B_2/A_2 = (1 + \sqrt{5})/2$, $(\omega_0 = \sqrt{k/m})$
9. $\omega = \sqrt{k/m}$ のとき $B_1 = 0$, $C_1/A_1 = -1$
 $\omega = \sqrt{(k/m) + (2k/M)}$ のとき $C_2/A_2 = 1$, $B_2/A_2 = -2m/M$
 $\omega = 0$ のとき $A_3 = B_3 = C_3 = at + b$
10. (2) $\omega = \omega_0$ のとき $B_1/A_1 = 1$
 $\omega = \sqrt{3}\omega_0$ のとき $B_2/A_2 = -1$ ただし $\omega_0 = \sqrt{S/(ma)}$
 (3) $\omega = \sqrt{2}\omega_0$ のとき $B_1 = 0$, $C_1/A_1 = -1$
 $\omega = \sqrt{2 + \sqrt{2}}\omega_0$ のとき $B_2/A_2 = -\sqrt{2}$, $C_2/A_2 = 1$
 $\omega = \sqrt{2 - \sqrt{2}}\omega_0$ のとき $B_3/A_3 = \sqrt{2}$, $C_3/A_3 = 1$
11. $\frac{V}{R} - \frac{RQ_0}{L} \exp\left[-\frac{R}{L}t\right]$
12. $-\left[A \cos \omega t + \frac{1}{\omega} \left(\frac{R}{2L}A + \omega_0 t\right) \sin \omega t\right] \exp\left[-\frac{R}{2L}t\right]$
 $+ A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$ ただし $\omega = \simeq qrt \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2$
 $A = \frac{V_0(1/C - L\omega_0^2)}{(1/C - L\omega_0^2)^2 + (R\omega_0)^2}$, $B = \frac{V_0 R \omega_0}{(1/C - L\omega_0^2)^2 + (R\omega_0)^2}$

演習問題 4

4. (1) $\frac{1}{2}bx^2y^2$, $\frac{1}{2}ax^2y^2$, $a = b$
 (2) bx^2y , $\frac{1}{2}ax^2y$, $a = b = 0$
 (3) bx^3y , $\frac{1}{3}ax^3y$, $a = 3b$
5. $a_{ij} = a_{ji}$, $U = -\frac{1}{2}(a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx)$
6. $W = A_z a^2(\theta + 2n\pi)$, n は整数
13. 平衡点は $x = 0$ で, $A > 0$ のとき安定, $A < 0$ のとき不安定

14. $\pi a \sqrt{2m/C}$

演習問題 5

2. $r = \sqrt{A - B \cos(2\omega_0 t + \alpha)}$, ただし $A = E/(m\omega_0^2)$, $B = \sqrt{A^2 - (h/\omega_0)^2}$,
 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

4. $U = -\frac{GmM}{(x^2 + a^2)^{1/2}}$, $F_x = -\frac{GmMx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$, $F_y = F_z = 0$

5. $r \geq a$ の場合 $U = -G\frac{mM}{r}$, $F_r = -G\frac{mM}{r^2}$
 $r < a$ の場合 $U = -G\frac{mM}{a}$, $F_r = 0$

6. 角振動数 $\omega = \sqrt{GM/R^3}$ の単振動, 円運動の周期は $2\pi/\omega$

7. $U_{ef} = \frac{m_1 a^2 v_0^2}{2r^2} + m_2 gr$

8. $v_0 = \sqrt{gR}$ のとき円, $\sqrt{gR} < v_0 < \sqrt{2gR}$ のとき楕円, $v_0 = \sqrt{2gR}$ のとき放物線, $v_0 > \sqrt{2gR}$ のとき双曲線, ($g = GM/R^2$)

9. πab

13. $r = \frac{l}{1 + \varepsilon \cos(\lambda\theta + \alpha)}$ ただし $\lambda = \sqrt{1 - \frac{\gamma}{mh^2}}$, $l = \frac{h^2}{GM}\lambda^2$,
 $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{G^2 M^2 m}}\lambda^2$, $\lambda\theta + \alpha = 2\pi$ の位置が近日点

演習問題 6

1. $x = -\frac{1}{2}\alpha t^2$, $y = -\frac{1}{2}gt^2 = -\frac{g}{\alpha}x$

2. $x = v_0 t$, $y = -\frac{1}{2}(g + \alpha)t^2 + h$

3. $T = 2\pi\sqrt{l/(g + \alpha)}$

6. $r = \frac{v}{2\omega \sin \lambda}$

7. $U = \frac{1}{2}m(2ag - \omega^2)x^2$
 平衡点は $x = 0$ で, $\omega^2 < 2ag$ のとき安定, $\omega^2 > 2ag$ のとき不安定

8. $y = A \cos(\omega_0 t + \alpha) + \frac{\omega_0^2 a}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t + l + \frac{mg}{k}$, ($\omega_0 = \sqrt{k/m}$)

$$\begin{aligned}
9. \quad & \omega < \omega_0 \text{ のとき } r = A \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2} t + \alpha) + \frac{\omega_0^2 l}{\omega_0^2 - \omega^2} \\
& \omega > \omega_0 \text{ のとき } r = B_1 \exp[\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2} t] + B_2 \exp[-\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2} t] - \frac{\omega_0^2 l}{\omega^2 - \omega_0^2} \\
& \omega = \omega_0 \text{ のとき } r = \frac{1}{2} \omega_0^2 l t^2 + C_1 t + C_2, \quad (\omega_0 = \sqrt{k/m})
\end{aligned}$$

演習問題 7

$$\begin{aligned}
2. \quad & x_1 = \frac{1}{2} \frac{m_2 \sin \alpha \cos \alpha}{m_1 + m_2 \sin^2 \alpha} g t^2 \\
& x_2 = -\frac{1}{2} \frac{m_1 \sin \alpha \cos \alpha}{m_1 + m_2 \sin^2 \alpha} g t^2, \quad y_2 = -\frac{1}{2} \frac{(m_1 + m_2) \sin^2 \alpha}{m_1 + m_2 \sin^2 \alpha} g t^2 \\
3. \quad & 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{l}{g}} \\
4. \quad & y = \frac{1}{2} g \left[\frac{1}{2} t^2 + \frac{m_0}{\alpha} t - \frac{m_0^2}{\alpha^2} \log(1 + \frac{\alpha}{m_0} t) \right] \\
5. \quad & F = \rho(xg + v^2) \\
6. \quad & v = \sqrt{2gx/3}, \quad t = \sqrt{6x/g}, \quad E = -\frac{1}{6} \rho g x^2 \\
7. \quad & T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3 \\
11. \quad & m_2/m_1 = 3
\end{aligned}$$

演習問題 8

$$\begin{aligned}
1. \quad & (1) \frac{3}{8} a \quad (2) \frac{1}{4} h \\
3. \quad & I_x = \frac{1}{4} a^2 M, \quad I_y = \frac{3}{4} a^2 M, \quad I_z = a^2 M \\
4. \quad & I_x = I_y = \frac{3}{20} (a^2 + 4h^2) M, \quad I_z = \frac{3}{10} a^2 M \\
5. \quad & \frac{1}{3} a^2 M \\
6. \quad & \text{慣性モーメントは } 1/n^2, \text{ 角速度は } n^2, \text{ 回転周期は } 1/n^2, \text{ 運動エネルギーは } n^2 \\
7. \quad & \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + I/a^2} g, \\
& S_1 = \frac{2m_2 + I/a^2}{m_1 + m_2 + I/a^2} m_1 g, \quad S_2 = \frac{2m_1 + I/a^2}{m_1 + m_2 + I/a^2} m_2 g \\
8. \quad & \text{球は } \frac{5}{7} g \sin \alpha, \quad \text{球殻は } \frac{3}{5} g \sin \alpha \\
9. \quad & \pi \left(1 - \sqrt{\frac{M}{M + 2m}} \right)
\end{aligned}$$

$$10. 2\pi\sqrt{\frac{7M+2m}{5M+2m}\frac{a-b}{g}}$$

11. $h < \frac{2}{5}a$ のとき球は前方にすべり，摩擦力が後向きに働く， $h = \frac{2}{5}a$ のとき球はすべらずに転がる， $h > \frac{2}{5}a$ のとき球は後方にすべり，摩擦力が前向きに働く

演習問題 9

3. 回転軸が鉛直になった平衡点では $\theta_0 = \dot{\theta}_0 = \dot{\phi}_0 = 0$ であるから， $u_0 = 1$ であり， $a_1 = a_2$, $a_3 = a_4$ である．このとき (9.51) より $f(u_0) = f'(u_0) = 0$. つまり $u_0 = 1$ は重根．運動が $u_0 = 1$ 付近に保たれる条件は $f''(u_0) < 0$ すなわち $\omega_0^2 > \frac{4MglI_1}{I_3^2}$

付録

さらに勉強したい人のために

力学のテキストは非常に多く出版されている。そのうちで本書の内容をさらに深く理解するために役立つと思われるものをあげておこう。

(1) ファインマンほか (坪井忠二訳)「ファインマン物理学 I 力学」 岩波書店

カリフォルニア工科大学での講義をまとめたもの。数式は極めて少なく、素粒子から宇宙に及ぶ題材を用いて力学法則の概念を明らかにしている。相対論の章もある。

(2) 原島鮮「力学 I－質点・剛体の力学－, II－解析力学－」 裳華房
記述はていねいであり、標準的な教科書である。II には前期量子論と相対論が含まれている。

(3) ランダウ, リフシッツ (広重徹, 水戸巖訳)「力学」 東京図書
簡潔ではあるが、内容は豊富。論旨は明解であり、物理系大学院に進学しようと考えている学生には読んでほしい。

(4) 山内恭彦「一般力学」 岩波書店
表現は古風であるけれど、レベルの高い古典的な書物である。

(5) ゴールドスタイン (瀬川富士ほか訳)「新版古典力学 上, 下」 吉岡書店
量子力学や場の理論への発展を念頭におき、力学の基礎知識を前提とした上級コースである。

力学をマスターするためには実際に問題を解くことも必要である。演習書としては
(6) 山内恭彦ほか「大学演習 力学」 裳華房
例題も含めて 377 の問題が載せられている。問題 [C] はかなり難易度が高い。

(7) 後藤憲一ほか「力学演習」 共立出版
基礎的なものから高度なものまで 760 の問題が詳しく解説されている。

数学の参考書としては

(8) 寺澤寛一「自然科学者のための数学概論」 岩波書店
物理数学の古典的書物。読めない漢字は多いだろうが、数式の表現は古今東西みな同じ。通称「寺寛」。

(9) 高木貞治「解析概論」 岩波書店

初等関数，微分積分学の基礎を丁寧に解説しており，数学的厳密性にもふれることができ，著者の細かい配慮のうかがえる書物である．

(10) 矢野健太郎「微分方程式」 裳華房

微分方程式のテキストも数多いが，ここではこの一つだけをあげておこう．

歴史的な側面を学ぶためには

(11) 朝永振一郎「物理学とは何だろうか 上，下」 岩波書店

ケプラー，ガリレオ，ニュートンの思惟方法をわかりやすく解説したもの．熱力学から分子運動論までの展開も興味深い読み物である．

(12) 朝永振一郎「量子力学 I, II」 みすず書房

量子力学がどのように作られてきたかを急がないで勉強するためのユニークな本である．特に，I は現代物理学への入門書として定評がある．

(13) マッハ (伏見譲訳)「マッハ力学」 講談社

アインシュタインが18歳のときに読んで感銘を受けた，‘個性’あふれる古典力学の本格的な発展史である．

ギリシャ文字

大文字	小文字	読み方
A	α	アルファ
B	β	ベータ
Γ	γ	ガンマ
Δ	δ	デルタ
E	ϵ, ε	イプシロン
Z	ζ	ツェータ
H	η	イータ
Θ	θ, ϑ	シータ
I	ι	イオタ
K	κ	カッパ
Λ	λ	ラムダ
M	μ	ミュー
N	ν	ニュー
Ξ	ξ	グザイ
O	o	オミクロン
Π	π	パイ
P	ρ	ロー
Σ	σ	シグマ
T	τ	タウ
Υ	υ	ウプシロン
Φ	ϕ, φ	ファイ
X	χ	カイ
Ψ	ψ	プサイ
Ω	ω	オメガ

索引

- 安定性, 55
- 位置エネルギー, 52
- 位置ベクトル, 5, 7
- 一般解, 31, 33, 145
- 雨滴, 102
- 運動エネルギー, 48, 115, 132
- 運動の第 1 法則, 17
- 運動の第 2 法則, 18
- 運動の第 3 法則, 20
- 運動の法則, 18
- 運動方程式, 18, 20
- 運動摩擦係数, 25, 125
- 運動量, 18
- 運動量保存の法則, 18, 93
- LCR 回路, 41
- 円軌道, 10, 68
- 遠心力, 67, 85
- 円錐曲線, 70
- 円柱座標系, 1, 8, 61
- オイラーの運動方程式, 132
- オイラーの角, 134
- オイラーの公式, 11, 31, 145
- 外積, 4
- 回転座標系, 83
- 外力, 93
- 角運動量, 65
- 角運動量保存の法則, 65, 94
- 角加速度, 85
- 角振動数, 9
- 角速度, 10, 83
- 加速度, 8
- 荷電粒子, 89
- ガリレイ変換, 82
- 換算質量, 104
- 慣性, 17, 19, 115
- 慣性系, 17, 81
- 慣性主軸, 117, 132
- 慣性乗積, 117
- 慣性の法則, 17
- 慣性モーメント, 114
- 規準振動, 40
- 規準振動数, 40, 127
- 軌道, 5
- 球座標系, 2, 7, 8, 61
- 強制振動, 35
- 強制力, 35
- 共鳴, 37
- 曲率中心, 12
- 曲率半径, 12
- 近日点, 72
- 空気抵抗, 23, 33
- クーロン力, 75
- 径路, 5
- 撃力, 19, 128
- ケプラーの法則, 71
- 原子核, 78
- 減衰振動, 33, 53
- 減速力, 102
- 剛体, 113
- 剛体系, 132, 134
- 公転周期, 71
- 勾配, 51, 148
- 古典力学, 18
- こま, 141
- 固有値, 117

- 固有値方程式, 117
固有ベクトル, 117
コリオリ力, 85
孤立系, 94, 97

歳差運動, 143
作用・反作用の法則, 20, 93
散乱角, 76
散乱の全断面積, 78
散乱の微分断面積, 77

仕事, 45
自然座標系, 12
磁束密度, 89
実験室系, 107
実体振子, 115
質点, 17
質点系, 93
質量, 19
自転, 143
遮蔽効果, 78
周期, 9, 29, 32, 116
重心, 95, 119
重心系, 97, 108
重積分, 147
終端速度, 24
自由度, 113
自由落下, 22, 52, 86
重力, 22, 86
重力加速度, 22, 86
主慣性モーメント, 117
衝撃の中心, 128
章動, 143
衝突パラメータ, 76
初期位相, 9
初期条件, 21
振幅, 9, 54

推進力, 102
垂直抗力, 24, 52, 123
スカラー, 2
スカラー積, 3, 45

静止摩擦係数, 25, 124
接線ベクトル, 12

全運動エネルギー, 99
全運動量, 93
全角運動量, 94
全質量, 96
線積分, 46, 147
全微分, 146
全ポテンシャル, 101

双曲線関数, 73, 148
双曲線軌道, 72
相対位置ベクトル, 59, 103
相対距離, 59
速度, 6
束縛運動, 24

体積要素, 61, 119
楕円軌道, 71
単位ベクトル, 3, 6, 7, 11, 117
単振子, 32
単振動, 9, 29, 32, 52
弾性衝突, 105
短半径, 70

力, 18
力のモーメント, 65
中心力, 59
長半径, 70
張力, 32

逐次近似法, 87

テイラー展開, 55, 64, 145
デカルト座標系, 1, 8, 20, 61
電気振動, 40
電場, 89

等加速度運動, 9, 22, 89
同次線形微分方程式, 30, 146
等速円運動, 9, 66
等速直線運動, 17, 82, 97, 103
等ポテンシャル面, 51
特殊解, 36, 37, 145

内積, 3
内力, 93, 99

二重振子, 38
二体問題, 103
ニュートン力学, 18, 59

ばね定数, 29
速さ, 6
半直弦, 70
万有引力, 60, 101
万有引力定数, 60

微小振動, 32, 38, 87, 116, 126
微小変位, 46
非弾性衝突, 105
非同次線形微分方程式, 35, 146
微分方程式, 21, 145

フーコー振子, 87
復元力, 29

平衡点, 55
並進加速度系, 82
並進座標系, 81
平面極座標系, 1, 6, 9, 20, 66
ベクトル, 2
ベクトル積, 4, 65
変位ベクトル, 6
偏微分, 50, 146

法線ベクトル, 12
放物運動, 22
保存力, 49, 60
ポテンシャル, 49, 60

摩擦力, 24, 52, 123

見かけの力, 82
密度, 61, 119

面積速度, 66

有効ポテンシャル, 68
誘電率, 75

ラーモア振動数, 91
ラザフォードの散乱式, 78
らせん運動, 90

力学的エネルギー, 52
力学的エネルギー保存の法則, 52
力積, 19
離心率, 70, 76
立体角, 77

零ベクトル, 3

ローレンツ力, 89
ロケット, 102

惑星の運動, 69