例谈整体思想在高中数学解题中的应用

■王 斌

数学思想是对数学知识、方法构建呈一定规律的认知，具有完整性、理性的认识，灵活运用数学思想，可解决具体的数学问题，将复杂的数学问题转化为简单的解题过程，便于换算得出准确的解题结果，有着化难为易的解题效果. 整体思想在数学解题中，从解题的整体出发，对数学问题进行整体思考，进而培养出整体数学解题思维，能够从大局出发，获得化繁为简的理想效果. 本文通过高中数学解题实例，对整体思想在高中数学解题中的应用进行探讨.

一、整体代入，化简为易

整体代入在数学解题中的应用是指将若干子公式看作一个整体，或变形后视为一个整体，然后代入另一公式当中，减少单个变量，使解题过程变得简单，解题思路也相对明确.

例1 长方体的全面积为11，十二条棱长之和为24，求这个长方体的一条对角线长.

在解题时假设长方体未知量长、宽、高为 a、b、c，如果先验证求出长方体未知量长、宽、高，那么则不满足求个长方体的一条对角线长，因此，在这时采用整体思想，将未知量代人公式中，便可快速求出长方体的对角线长.

假设长方体未知量长、宽、高为 a、b、c，长方体的对角线长为 d，可得出:

①$2(ab+bc+ac)=11$；②$4(a+b+c)=24$，根据 $4(a+b+c)=24$ 可得 $a+b+c=6$，这时注意将这个公式代入求长方体的对角线长公式中，$d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)}=\sqrt{6^2-11}=5$，因此，这个长方体的一条对角线长为5.

在实际的高中数学解题中，整体代入法应用范围十分广泛，我们再来一个例子.

例2 若代数式 $4x^2-2x+5$ 的值为7，求代数式 $2x^2-x+1$ 的值等于多少?

在解题时，根据题目所给出的已知公式，$4x^2-2x+5=7$，若直接按照公式求出未知量，这个求解过程是比较困难的，仔细观察已知公式，发现 $4x^2-2x$ 可分解为两个 $2x^2-x$ 的式子，如果将这个式子看做是一个整体，由已知公式转化为求 $2x^2-x$ 式子的值，在整体公式中代人 $2x^2-x+1$，即可得 $x=2$，这样一来原本复杂的求解就变得简单许多，学生通过学习整体代入法后，解题能力得到培养，解题效率随之提高.

二、整体换元，化繁为简

整体换元是整体思想中的一部分，是指根据研究新元性质，对整体进行换元，将原本复杂的公式变为简单、富有条理的式子，从而能够保持清晰的思路来解决问题.

例3 计算 $(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})(a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n)-(a_2+a_3+\cdots+a_{n-1})(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n)$.

解题时，如果按照题意，将其逐一分解，那么这个求解过程是十分复杂而困难的，若采用整体换元法，找出题目中潜在的运算规律，则可轻松解决. 假设 $a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}$ 为未知量 x，原式可表示为 $(a_1+x)(x+a_n)-x(a_1+x+a_n)$，简化该式可得 $x^2+a_1x+a_nx+a_1a_n-a_1x-x^2-a_nx$，最终计算结果为 a_1a_n.

三、整体补形，迎刃而解

整体补形适用于解决数学图形题，将数学问题中的非规则图形、非特殊图形，在添加辅助线后，使原本图形转变为完整的特殊图形，为图形问题创造更多条件，能够将数学图形问题轻松解决.

例4 球面上四点 P、A、B、C，且 PA、PB、PC 两两垂直，$PA=PB=PC=a$，求球的半径是多少?

在解题时，将图形填补为一个完整的正方体，这个正方体正好对应球的内接正方体，假设正方体的对角线为球的直径，那么设球的半径为未知量 R，即可得出 $2R=\sqrt{3}a$，球的半径 $R=\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

四、构建数学整体意识，避免纠结于单个元素

在实际的高中数学教学中，学生在解题的时候往往会发现此种情况，数学问题中题目给出的已知条件比较有限，但对题目进行深入的分析后，则会发现在题目中隐藏着许多条件，学会灵活运用这些条件后，就可轻松解决数学问题. 如教师在讲到三角函数的计算这一章节时，虽然学生对三角函数的函数值比较了解，可是面对35°角，学生却难以计算其对应的三角函数值，若学生一直针对35°的角所对应的函数值来解题，将无法处理该类问题. 通过构建数学整体意识，学生就能根据三角函数定理，去解决此类问题，进一步深化学生对三角函数的理解，同时也能轻松解决数学问题.

例5 求 $\tan 20°+\tan 25°+\tan 20°\cdot\tan 25°$ 的值.

学生在解题时，20°角、25°角的三角函数值很少接触到，运用整体思想，将其转化为自己熟知的三角函数，就可解决此道三角函数题. 由于 $20°+25°=45°$，因此，$\tan 20°+\tan 25°$ 可得出 $\tan(20°+25°)=\tan 45°=1$ 的结论，将 $\tan 20°\cdot\tan 25°$ 转化为 $\tan(20°+25°)$，将其分解为 $(\tan 20°+\tan 25°)/(1-\tan 20°$

巧用不等关系解圆锥曲线的最值与范围问题

■ 赵思博

解析几何中的最值与范围问题一直是高考热点,由于教材对这些问题没有作专门介绍,因此也成了高中数学的难点之一. 范围与最值的确定,其背景多依赖于一个不等关系,解题的关键就在于如何依据解析几何本身的特点,建立起这一不等关系.

一、结合定义,利用图形中的几何量之间的大小关系

例1 已知 $A(4,0)$, $B(2,2)$, M 是椭圆 $9x^2+25y^2=225$ 上的动点,求 $|MA|+|MB|$ 的最大值与最小值.

解:由题意,点 $A(4,0)$ 为椭圆的右焦点,设左焦点为 $A_1(-4,0)$,由椭圆的定义有:

$|MA|+|MB|=2a+(|MB|-|MA|)$.

在 $\triangle A_1BM$ 中, $||MB|-|MA_1||\leqslant|A_1B|=2\sqrt{10}$.

所以, $-2\sqrt{10}\leqslant||MB|-|MA_1||\leqslant2\sqrt{10}$.

又 $2a=10$,故 $|MA|+|MB|$ 的最大值为 $10+2\sqrt{10}$,最小值为 $10-2\sqrt{10}$.

本例利用了"三角形两边之差小于第三边"这一平面几何知识,结合圆锥曲线的定义与平面几何知识求解,直观而方便.

二、利用题中隐含的不等关系求解

例2 已知点 F_1、F_2 分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点,过点 F_1 且垂直于 x 轴的直线与双曲线交于 A、B 两点,若 $\triangle ABF_2$ 为锐角三角形,求该双曲线离心率 e 的取值范围.

解:依题意得, $0<\angle AF_2F_1<\frac{\pi}{4}$,故 $0<\tan\angle AF_2F_1<1$,

则 $\frac{\frac{b^2}{a}}{2c}=\frac{c^2-a^2}{2ac}<1$,即 $e-\frac{1}{e}<2$, $e^2-2e-1<0$, $(e-1)^2<2$.

所以 $1<e<1+\sqrt{2}$.

已知条件没有给出相关量之间明确的不等关系,可根据题目所提供的信息,挖掘出合适的不等关系,建立不等式求范围.

三、利用题中已知的不等关系(或参变量范围)转化求解

例3 已知椭圆: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 的两个焦点分别为 F_1、F_2,斜率为 k 的直线 l 过左焦点 F_1 且与椭圆的交点为 A、B,与 y 轴交点为 C,若 B 为线段 CF_1 的中点, $|k|\leqslant\frac{\sqrt{14}}{2}$,求椭圆离心率 e 的取值范围.

解:设 $F_1(-c,0)$,则直线 l 的方程为 $y=k(x+c)$.

令 $x=0$ 得 $y=kc$,所以点 C 的坐标为 $(0,kc)$,从而点 B 的坐标为 $(-\frac{c}{2},\frac{kc}{2})$.

因为点 B 在椭圆上,

$\cdot\tan25°)$,即可得出 $\tan20°+\tan25°=1\cdot(1-\tan20°\cdot\tan25°)$, $\tan20°+\tan25°+\tan20°\cdot\tan25°=1$.

五、整体构造,峰回路转

整体构造是基于已知条件、题目求解下,对题目进行整体构造,并建立对应的公式,运用两个公式共同解决问题,学生在解决数学问题的时候,经常会面对问题无从下手的情况,在对数学问题采用整体构造后,就可快速求出结果.

例6 求值 $\sin10°\sin30°\sin50°\sin70°$.

在解题时,假设 $\sin10°\sin30°\sin50°\sin70°$ 这个式子为未知量 a,建立相应的式子 $\cos10°\cos30°\cos50°\cos70°$ 为 b, $ab=\frac{1}{2}\sin20°=\frac{1}{2}\sin60°=\frac{1}{2}\sin100°=\frac{1}{2}\sin140°$; $ab=1/16\cos70°\cos30°\cos10°\cos50°=\frac{1}{16}b$,因此, b 不等于 0, $a=1/16$.

综上所述,通过上述数学问题的求解过程与求解方法,我们可以得出如下结论,在解决数学问题时,应从整体出发,运用整体思维便于获得理想的解题效果,从大局出发树立全局思考意识,保持清晰明确的解题思路,数学问题便能迎刃而解. 若在解决数学问题时,不注重整体结构与思维,解题能力相对受限,易于被绕在数学问题的圈子,增加数学解题难度,数学解题效果不佳. 在实际的高中数学教学中,学生还应加强数学基础知识的学习,掌握基础的数学定理、概念,并能够对基础知识进行归纳和总结,从而构建系统、完整的数学知识体系,在使用整体思想解决数学问题的时候,也能灵活运用,获得事半功倍的效果.

[江苏省江都中学(225002)]