抽象函数单调性的证明探究

■王 斌

抽象函数是指没有给出具体的函数解析式，但给出了函数满足的一部分性质或运算法则的函数。此类函数单调性的证明既能全面考查学生对函数概念的理解及性质的代数推理和论证能力，又能综合考查学生对数学符号语言的理解与接受能力。

它的难点在于大多数这类函数具有抽象性与隐蔽性，一部分学生在判断 $f(x_2)-f(x_1)$ 的符号时，有时感到束手无策。下面通过一些常见的典型例题来谈谈抽象函数单调性的证明方法。

例1 设函数 $f(x)$ 是 R 上的增函数，令 $F(x)=f(x)-f(2-x)$，求证：$F(x)$ 在 R 上是增函数。

证明：任取 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1<x_2$，则 $2-x_1>2-x_2$，$x_2-x_1>0$。

因为 $f(x)$ 是 R 上的增函数，

所以 $f(x_1)<f(x_2)$，$f(2-x_1)>f(2-x_2)$。

即 $f(x_1)-f(x_2)<0$，$f(2-x_2)-f(2-x_1)<0$。

所以 $F(x_1)-F(x_2)=[f(x_1)-f(2-x_1)]-[f(x_2)-f(2-x_2)]$

$=[f(x_1)-f(x_2)]+[f(2-x_2)-f(2-x_1)]<0$。

所以 $F(x)$ 在 R 上是增函数。

点评：抽象函数单调性问题一般用定义法，本题就是运用定义法证明的。

例2 已知函数 $f(x)$ 对任意的 $x,y\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，且当 $x>0$ 时，$f(x)<0$。

(1)试判断 $f(x)$ 的单调性并证明；

(2)求 $f(x)$ 在 $[-3,3]$ 上的最值。

解：(1) $f(x)$ 在 R 上单调递减。证明如下：

因为函数 $f(x)$ 对任意的 $x,y\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，

所以，令 $x=y=0$，得 $f(0)=0$。

令 $y=-x$，得 $f(0)=f(x)+f(-x)$，即 $f(-x)=-f(x)$。

任取 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1<x_2$，则 $x_2-x_1>0$。

因为当 $x>0$ 时，$f(x)<0$，

所以 $f(x_2-x_1)<0$。

所以 $f(x_2)-f(x_1)=f(x_2)+f(-x_1)=f(x_2-x_1)<0$。

即 $f(x_1)>f(x_2)$。

所以 $f(x)$ 在 R 上单调递减。

(2)因为 $f(x)$ 在 R 上是减函数，

所以 $f(x)$ 在 $[-3,3]$ 上是减函数。

所以 $f(-3)$ 为最大值，$f(3)$ 为最小值。

又因为 $f(3)=f(2+1)$

$=f(2)+f(1)$

$=f(1+1)+f(1)=3f(1)$

$=-2$。

所以 $f(-3)=-f(3)=2$。

所以函数 $f(x)$ 在 $[-3,3]$ 上的最大值为2，最小值为 -2。

点评：函数的单调性，必须利用定义严格证明，不能用特殊值法去猜测。第2问中，采用特殊值法求函数值。

总之，由于抽象函数没有具体的解析式，因此判断其单调性通常采用定义法。但在判断过程中经常结合已知条件采用特殊值法，即给变量赋予特殊值来解决问题。

作者单位：江苏省江都中学