例谈整体思想在高中数学解题中的应用

■王 斌

数学思想是对数学知识、方法构建呈一定规律的认知，具有完整性、理性的认识，灵活运用数学思想，可解决具体的数学问题，将复杂的数学问题转化为简单的解题过程，便于换算得出准确的解题结果，有着化难为易的解题效果. 整体思想在数学解题中，从解题的整体出发，对数学问题进行整体思考，进而培养出整体数学解题思维，能够从大局出发，获得化繁为简的理想效果. 本文通过高中数学解题实例，对整体思想在高中数学解题中的应用进行探讨.

一、整体代入，化简为易

整体代入在数学解题中的应用是指将若干子公式看作一个整体，或变形后视为一个整体，然后代入另一公式当中，减少单个变量，使解题过程变得简单，解题思路也相对明确.

例1 长方体的全面积为11，十二条棱长之和为24，求这个长方体的一条对角线长.

在解题时假设长方体未知量长、宽、高为 a、b、c，如果先验证求出长方体未知量长、宽、高，那么则不满足求个长方体的一条对角线长，因此，在这时采用整体思想，将未知量代人公式中，便可快速求出长方体的对角线长.

假设长方体未知量长、宽、高为 a、b、c，长方体的对角线长为 d，可得出：

①$2(ab+bc+ac)=11$；②$4(a+b+c)=24$，根据 $4(a+b+c)=24$ 可得 $a+b+c=6$，这时注意将这个公式代入求长方体的对角线长公式中，$d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{(a+b+c)^2-2(ab+ac+bc)}=\sqrt{6^2-11}=5$，因此，这个长方体的一条对角线长为5.

在实际的高中数学解题中，整体代入法应用范围十分广泛，我们再来一个例子.

例2 若代数式 $4x^2-2x+5$ 的值为7，求代数式 $2x^2-x+1$ 的值等于多少?

在解题时，根据题目所给出的已知公式，$4x^2-2x+5=7$，若直接按照公式求出未知量，这个求解过程是比较困难的，仔细观察已知公式，发现 $4x^2-2x$ 可分解为两个 $2x^2-x$ 的式子，如果将这个式子看做是一个整体，由已知公式转化为求 $2x^2-x$ 式子的值，在整体公式中代人 $2x^2-x+1$，即可得 $x=2$，这样一来原本复杂的求解就变得简单许多，学生通过学习整体代入法后，解题能力得到培养，解题效率随之提高.

二、整体换元，化繁为简

整体换元是整体思想中的一部分，是指根据研究新元性质，对整体进行换元，将原本复杂的公式变为简单、富有条理的式子，从而能够保持清晰的思路来解决问题.

例3 计算$(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})(a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n)-(a_2+a_3+\cdots+a_{n-1})(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n)$.

解题时，如果按照题意，将其逐一分解，那么这个求解过程是十分复杂而困难的，若采用整体换元法，找出题目中潜在的运算规律，则可轻松解决. 假设 $a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}$ 为未知量 x，原式可表示为$(a_1+x)(x+a_n)-x(a_1+x+a_n)$，简化该式可得 $x^2+a_1x+a_nx+a_1a_n-a_1x-x^2-a_nx$，最终计算结果为 a_1a_n.

三、整体补形，迎刃而解

整体补形适用于解决数学图形题，将数学问题中的非规则图形、非特殊图形，在添加辅助线后，使原本图形转变为完整的特殊图形，为图形问题创造更多条件，能够将数学图形问题轻松解决.

例4 球面上四点 P、A、B、C，且 PA、PB、PC 两两垂直，$PA=PB=PC=a$，求球的半径是多少?

在解题时，将图形填补为一个完整的正方体，这个正方体正好对应球的内接正方体，假设正方体的对角线为球的直径，那么设球的半径为未知量 R，即可得出 $2R=\sqrt{3}a$，球的半径 $R=\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

四、构建数学整体意识，避免纠结于单个元素

在实际的高中数学教学中，学生在解题的时候往往会发现此种情况，数学问题中题目给出的已知条件比较有限，但对题目进行深入的分析后，则会发现在题目中隐藏着许多条件，学会灵活运用这些条件后，就可轻松解决数学问题. 如教师在讲到三角函数的计算这一章节时，虽然学生对三角函数的函数值比较了解，可是面对35°角，学生却难以计算其对应的三角函数值，若学生一直针对35°的角所对应的函数值来解题，将无法处理该类问题. 通过构建数学整体意识，学生就能根据三角函数定理，去解决此类问题，进一步深化学生对三角函数的理解，同时也能轻松解决数学问题.

例5 求 $\tan20°+\tan25°+\tan20°\cdot\tan25°$的值.

学生在解题时，20°角、25°角的三角函数值很少接触到，运用整体思想，将其转化为自己熟知的三角函数，就可解决此道三角函数题. 由于 $20°+25°=45°$，因此，$\tan20°+\tan25°$ 可得出 $\tan(20°+25°)=\tan45°=1$ 的结论，将 $\tan20°\cdot\tan25°$ 转化为 $\tan(20°+25°)$，将其分解为$(\tan20°+\tan25°)/(1-\tan20°$