

חישוב סטטיסטי - פרוייקט 1 - סימולציות

- יש לענות על כל השאלות.
- יש להגיש את הפרוייקט אל תיבת ההגשה במודל.
- את הפרוייקטים יש להגיש בזוגות.
- על גבי הקודים שאתם מגישים אתם מתבקשים להוסיף הערות (באנגלית) המסבירות מה כל קטע קוד אמור לבצע. המטרה היא לעזור לבודקת להבין איך התכוונתם לפתור את השאלה ומה הקוד אמור לעשות, צעד אחרי צעד. אם הפרוייקט יוגש ללא הסברים, הציון ייפגע. כתבו את הקוד וההערות בצורה מסודרת שתקל על הקריאה.
- השתדלו שהקוד יהיה יעיל כדי שזמן הריצה יהיה סביר (אם כי היעילות לא משפיעה על הציון)
- בנוסף לקוד, הגישו מסמך נפרד ובו מפורטות התוצאות שהתקבלו לכם, לפי הנדרש בשאלה: אומדנים, גרפים, ותשובות מילוליות לשאלה. ניתן גם להגיש הכל כקובץ אחד עם Rmarkdown.
- עגלו את התשובות הסופיות לשלוש ספרות אחרי הנקודה (פרט לשאלה 2).

סימולציות הן חלק בלתי נפרד מהעבודה הסטטיסטית. כתיבת הסימולציה לא תמיד פשוטה, זהו אתגר תכנותי ומחשבתי שעשוי להיות מורכב. פרוייקט זה עוסק בסימולציות ומטרתו לתת לכם טעימה מהעולם הזה. בפרוייקט אתם נדרשים לבצע שלוש סימולציות שונות. בהצלחה!

1) סולמות ונחשים:

לחיליק הנחש יש הרבה זמן פנוי, ופעילות הפנאי האהובה עליו היא לשחק עם עצמו במשחק האהוב "סולמות ונחשים". חיליק מעוניין שתעזרו לו למצוא מהי תוחלת מספר הטלות הקובייה הנדרשות עד אשר יצליח להגיע לנקודת הסיום המיוחלת. חישוב אנליטי של התוחלת הינו מסובך ומפותל (כמעט כמו חיליק), אז במקום זאת אתם תספקו לחיליק אומדן לתוחלת, עם רווח סמך בר"ס 0.95.

צרו פונקצייה ב-R המסמלצת משחק סולמות ונחשים. חזרו על הסימולציה 5000 פעם, וספקו לחיליק את מבוקשו.

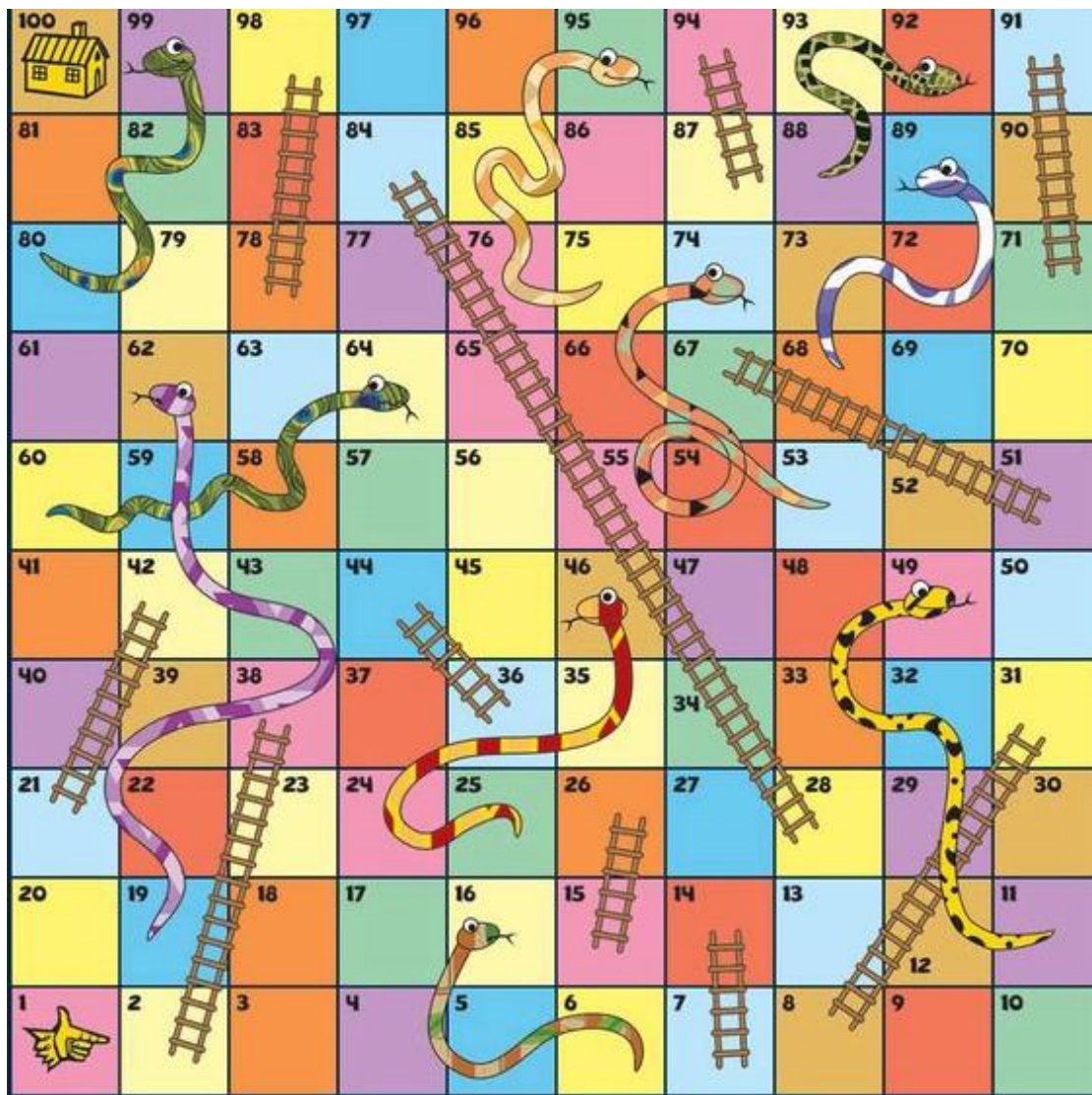
תזכורת לחוקי המשחק:

המשחק מתחיל כאשר חיליק נמצא במשבצת מספר 1. בכל תור חיליק מטיל קובייה (סטנדרטית והוגנת) ומתקדם כמספר הצעדים שמראה הקובייה.

- במידה וחיליק הגיע לתחתיתו של סולם, הוא יטפס עד לראשו.
 - במידה וחיליק הגיע לראש של נחש, הוא יחליק עד לזנבו.
 - במידה וחיליק "עובר" את נקודת הסוף, הוא יחזור אחורה כמספר הצעדים העודפים. למשל, אם חיליק נמצא במשבצת 98 ובקובייה יצא לו 3, אז הוא יתקדם שני צעדים למשבצת הסיום, ויחזור צעד אחד אחורנית (ויחליק על הנחש).
 - תוספת לא סטנדרטית למשחק: אם המספר שעל הקובייה זהה לסכום הספרות (הסופי) שעל המשבצת שאליה הגיע חיליק, הוא יחזור אחורה חצי מהדרך שעשה עד כה (מעוגל כלפי מטה אם זה אי זוגי).
- למשל: נניח ובתור מסויים יצא לחיליק 1 בקובייה וזה הביא אותו למשבצת 64, אז מכיוון ש $1 + 0 = 1 \Rightarrow 10 = 4 + 6$, חיליק יחזור אחורה עד משבצת $\left\lfloor \frac{64}{2} \right\rfloor = 32$

דוגמא נוספת: נניח וחיליק היה במשבצת 45 ויצא לו 4, אז מכיוון שהוא הגיע למשבצת 49, ומכיוון ש $1 + 3 = 4 \Rightarrow 13 = 4 + 9$ אז הוא ילך חזרה למשבצת $\left\lfloor \frac{49}{2} \right\rfloor = 24$. שימו לב שבמקרה זה, למרות שמשבצת 49 מכילה ראש של נחש, חיליק **לא** מחליק עליו. לעומת זאת, נניח ובמשבצת 24 היה סולם/נחש, הוא **כן** היה משתמש בהם.

לוח המשחק:



(2) איקס-עיגול

עליכם לסמלץ משחק איקס-עיגול בין שני שחקנים (כך ששחקן 1 הינו X ושחקן 2 הינו O). בכל תור, השחקן **מגדיל בצורה אקראית** את אחת המשבצות הפנויות על הלוח. אם אחד מהשחקנים מצליח למלא שורה/עמודה/אלכסון, הוא מנצח. אם המשחק נגמר מבלי שאף שחקן מצליח, מוכרז תיקו.

עבור לוח בגדלים: 3-15 וכן 25 ו-50 סמלצו 5000 משחקים בכל פעם, ודווחו את התוצאות הבאות לכל גודל של לוח (דווחו גם תוצאה מספרית, וגם הציגו גרפית באמצעות גרף מתאים):

- א. האומדן להסתברות ששחקן א' ינצח
- ב. האומדן להסתברות ששחקן ב' ינצח
- ג. האומדן להסתברות לתיקו

מה המגמה הכללית שמתרחשת ככל שהלוח גדל? מה האינטואיציה לכך?

*השתדלו לחשוב על דרכים יעילות לכתוב את הסימולציות, כדי שתוכלו להריץ אותן בפרק זמן סביר. אם אינכם מצליחים להריץ 5000 משחקים, הריצו רק 500.

סעיף בונוס (5 נקודות): עבור לוחות בגדלים 25 ו-50 חזרו על סעיפים א'-ג' לעיל על סמך 5,000,000 סימולציות.

בשאלה זו אל תעגלו את התוצאות כלל, השאירו אותן כמו שהן עם כל הספרות אחרי הנקודה (ולא כפי שנכתב בהוראות לעיל).



(3) מערכות תורים:

בעיר Dogcatia, שתושביה הם כלבים וחתולים, פועלת חברה בשם סטטיספורט, המעניקה שירותי רחצה וספרות לפרוותם של הלקוחות.

על פי אומדנים מהעבר, ידוע כי כלבים מופיעים לשירות בקצב פואסוני עם פרמטר 3, ואילו חתולים מופיעים בקצב פואסוני עם פרמטר 1.5.

כמו כן, על פי אומדנים, זמן השירות של כלב מתפלג מעריכית עם קצב 3 ואילו זמן השירות של חתול (מאחר וחתולים קטנים יותר) מתפלג מעריכית עם קצב 5.

הפרמטרים לעיל הם ביחידות זמן של דקות.

בחברה עובדת ארנבת אחת מהעיר Bunnipolis השכנה, כלומר רק לקוח אחד יכול לקבל שירות בכל זמן נתון.

מכיוון שהחתולים הם לקוחות מפונקים, חתול יצטרף לתור ההמתנה רק אם התור ריק (כלומר רק אם הארנבת כרגע לא עובדת, או שהיא מטפלת בלקוח, אבל אין אף לקוח אחר שממתין בתור). כלבים ימתינו בתור בכל מקרה.

בבניין החברה ישנו אולם המתנה עם 10 מקומות בלבד.

מאחר והחתולים דורשים טיפול מושקע יותר, וחומרים איכותיים יותר, הרווח מטיפול בחתול הינו כדור צמר, ואילו הרווח מטיפול בכלב הינו כדור טניס (כדורי טניס הם יחידת ה"מטבע" הבסיסית ביותר, וכדור צמר שווה ל-3 כדורי טניס).

כאשר כלב אינו משורת, החברה סופגת נזק למוניטין שלה (כי כלבים, בניגוד לחתולים, מתנהגים כלהקה), שמבחינת החברה שווה ערך להפסד של 0.1 כדור טניס.

החברה פועלת 12 שעות ביממה (אל דאגה, יש חילופי משמרות לארנבות לאחר 6 שעות. החברה דואגת לתנאי העסקה נאותים). הניחו שלאחר 12 שעות, הסימולציה "נגמרת", ואפשר להתעלם מהלקוח המשורת ומהלקוחות הממתינים.

1. סמלצו 100 ימי עבודה ודווחו את התוצאות הבאות:

א. תנו אומדן למספר הכלבים והחתולים (לחוד) ששורתו, ושנדחו.

ב. תנו אומדן לאורך התור הממוצע. הסבר:

מספר הלקוחות בתור לא משתנה בכל רגע, אלא רק אחרי שמתרחשים אירועים ספציפיים כמתואר בשאלה. בין האירועים הללו ישנם אינטרוולים של זמן בהם מספר הלקוחות קבוע. מכאן, שהגדרה מתבקשת עבור מספר הלקוחות הממוצע בתור היא:

$$\frac{\sum_{i=1}^K N_i * T_i}{\sum_{i=1}^K T_i}$$

T_i = Length of time interval i

N_i = Number of queuing customers at time interval i

$$\sum_{i=1}^K T_i \approx 12 \text{ hours}$$

ג. תנו אומדן לרווח של החברה ביום עבודה (ביחידות של כדורי טניס).

2. החברה החליטה להשקיע סכום כסף מסוים בשיפור השירות עבור הלקוחות. בפני החברה עומדות שלוש אפשרויות:
- (א) לשפץ את בניין החברה, כך שאולם ההמתנה יכיל כעת 20 מקומות. מה החסרון הברור באפשרות זו? מי סובל מההצעה?
- (ב) להוציא את הארנבות להשתלמות מקצועית, כך שזמני השירות הממוצעים שלהן יהיו מהירים יותר. ההשתלמות תגדיל את הפרמטרים של זמני השירות ב-10%.
- (ג) להעסיק שני נותני שירות, כך שאחד יטפל רק בחתולים ואחר רק בכלבים. להעסיק ארנבת נוספת אינו במסגרת התקציב, אז ניתן רק להעסיק שני צבים, כך שזמני השירות שלהם יהיו איטיים פי 3 לכל סוג לקוח (כלומר הפרמטר לזמן השירות לכלב יהיה 1, ועבור חתול 5/3). תחת חלופה זו, מקום המתנה אחד ישמש את החתולים, ו-9 המקומות הנותרים ישמשו את הכלבים. כלב לא יכול לתפוס מקום של חתול גם כאשר תור זה ריק.
- על סמך סימולציות של 100 ימי עבודה לכל תרחיש, המליצו לחברה על האפשרות האופטימלית.

תוצאות שיכולות לעזור לכם:

חישבו על הקשר בין תהליך פואסון ובין הזמן הבין-מופעי.

if $X_1 \sim \exp(\lambda_1), X_2 \sim \exp(\lambda_2)$ then $Y = \min(X_1, X_2) \sim \exp(\lambda_1 + \lambda_2)$

$$P(X_1 \leq X_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$



בהצלחה!!