תהליכים סטוכסטיים

טל סידו, תשע"ז

סיכום על־פי הרצאות של פרופסור עלי מרצבך

שיעור 1

התורה הכללית של התהליכים הסטוכסטיים

הגדרה (משתנה מקרי) בהינתן מרחב הסתברות $\{\Omega, \mathcal{F}, p\}$- מרחב מדגם, שבט ופונקציית הסתברות - X ייקרא משתנה מקרי ביחס למרחב ההסתברות (או X מדיד ביחס ל-$\mathcal{F}$) אם הוא פונקציה $X : \Omega \to \mathbb{R}$ כך שלכל מספר ממשי $t \in \mathbb{R}$ מתקיים $X^{-1}(t) = \{w \in \Omega / X(w) \leq t\} \in \mathcal{F}$.

הגדרה (תהליך סטוכסטי) עבור קבוצת אינדקסים סדורה T (זמן), תהליך סטוכסטי $\{X_t, t \geq 0\}$ הוא סדרה של משתנים מקריים. תהליך סטוכסטי למעשה הוא תהליך אקראי שהתפתחותו תלויה בגורמים מקריים.

דוגמא X_t הוא שער הדולר בזמן t.

הגדרות (תהליכים זהים, תהליכים דומים) שני תהליכים סטוכסטיים X_t, Y_t נקראים זהים כאשר מתקיים $p(\{w|\exists t, X_t(w) \neq Y_t(w)\}) = 0$ ונקראים דומים כאשר $\forall t, p(\{w|X_t(w) \neq Y_t(w)\}) = 0$.

דוגמא נסתכל על מרחב המדגם $\Omega = [0,1]$, על קבוצת האינדקסים $T = [0,1]$ ועל התהליכים הבאים-

$$Y_t(w) = 0, X_t(w) = \begin{cases} 1, t = w \\ 0, otherwise \end{cases}.$$

אז מתקיים X_t, Y_t תהליכים דומים כי מתקיים $p\{w/X_t(w) \neq Y_t(w)\} = p\{w = t\} = 0$ (המידה של נקודה אחת על הישר היא אפס).

אבל הם אינם תהליכים זהים משום שקיים t עבור $t = w$ כך ש- $X_t(w) = Y_t(w)$ ולכן $p(\{w|\exists t, X_t(w) \neq Y_t(w)\}) = 1$.

הגדרה (רציפות) רציפות מימין : $p\{w : \lim_{n\to\infty} X_{t+\frac{1}{n}} = x_t\} = 1$, רציפות משמאל: $p\{w| \lim_{n\to\infty} X_{t-\frac{1}{n}} = x_t\} = 1$. מההגדרה, הגבול קיים פרט לקבוצה ממידה אפס.

משפט בהינתן שני תהליכים סטוכסטיים $\{X_t|t \geq 0\}, \{Y_t : t \geq 0\}$ רציפים מימין או משמאל או משני הצדדים, אז אם הם דומים - הם זהים.

הגדרה שני תהליכים סטוכסטיים X_t, Y_t נקראים בעלי אותה התפלגות: אם לכל $t_1, ..., t_n$ ולכל $A_1, ..., A_n \in B$ קבוצות בורל, מתקיים $p\{x_{t_1} \in A_1, ..., X_{t_n} \in A_n\} = p\{Y_{t_1} \in A_1, ..., Y_{t_n} \in A_n\}$. או לחלופין: $p\{x_{t_1} \leq a_1, ..., X_{t_n} \leq a_n\} = p\{Y_{t_1} \leq a_1, ..., Y_{t_n} \leq a_n\}$, $F_{x_{t_1}...,x_{t_n}}(a_1, ..., a_n) = F_{Y_{t_1},...,Y_{t_n}}(a_1, ..., a_n)$.

דוגמא נסתכל על התהליכים בדוגמא הקודמת, X_t, Y_t. אז $p(\forall t, Y_t \leq t\} = 1$ משום ש- $Y_t = 0$, אבל $p(\forall t, X_t \leq \frac{1}{2}) = 0$ כי קיים t כך ש-$X_t = 1$.

הגדרה (תוספות בלתי תלויות) בהינתן תהליך סטוכסטי $\{X_t|t \geq 0\}$, הוא ייקרא בעל תוספות בלתי תלויות כאם לכל זמן $t_0 < t_1 < ... < t_n$ המשתנים המקריים $X_{t_1} - X_{t_0}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ הם בלתי תלויים. בכל שלב בתהליך, אין תלות בשלב הקודם.

דוגמא אפשר לחשוב על תורים- כניסת כמות אנשים בשלב כלשהו ביום בלתי תלויה בכניסת כמות אנשים בשלבים אחרים ביום.

הגדרה (אי תלות) $x_1, ..., x_n$ נקראים בלתי תלויים, אם מתקיים $F_{x_1,...,x_n} = F_{x_1}...F_{x_n}$, $F_{x_1}(a) = p\{x_1 \leq a_1\}$.

הגדרה (תוספות סטוציונריות) תהליך סטוכסטי $\{X_t|t \geq 0\}$ נקרא בעל תוספות סטוציונריות (נייח) אם לכל סדרת זמנים $t_0 < t_1 < ... < t_n$ ולכל מספר $h \geq 0$, אם נסמן $t'_i = t_i + h$, המשתנים המקריים $X_{t'_0} - X_{t_o}, ..., X'_{t'_n} - X_{t_n}$ הם שווי התפלגות.

בפרט מתקיים- $E(x_{t'_0} - x_{t_o}) = E(x_{t'_1} - x_{t_1})$. כאן למעשה חילקנו את הזמן לחלקים שווים באורך h (קבוע). תיתכן חפיפה מסוימת בין הזמנים, כלומר התפלגות האנשים שייכנסו לבנק במשעה $8:00$ עד שעה $8:30$ תהיה שווה להתפלגות האנשים שייכנסו לבנק משעה $8:15$ עד שעה $8:45$. כל חצי שעה שניקח במהלך היום, התפלגות האנשים בה תהיה זהה.

הערה מקרה פרטי של נייחות ־ לכל שני זמנים $s < t$ ולכל מספר $h > 0$ המשתנים המקריים $X_t - X_s$, $X_{t+h} - X_{s+h}$ הם שווי התפלגות.

טענה אם $\{X_t\}, \{Y_t\}$ הם תהליכים סטוכסטיים בעלי תוספות בלתי תלויות, אז שתי ההגדרות של נייחות שקולות (המקרה הפרטי והמקרה הכללי). במקרה זה, ניתן להגדיר באופן פשוט יותר.

במקום להגדיר בצורה מורכבת, אפשר להגדיר בצורה פשוטה. באופן כללי, אם לא יודעים שהמשתנים המקריים בעלי תוספות בלתי תלויות, אז זה לא נכון לומר את זה וצריך להשתמש בהגדרה המורכבת יותר, הראשונה.

שיעור 2

הגדרה (סינון) בהינתן מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, p)$, סינון הוא אוסף של שבטים $\{F_t, t \geq 0\}$המקיים את התנאים הבאים:

1. $F_s \subseteq F_t$לכל $s < t$.
2. רציפות מימין: לכל tמתקיים $F_t = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_{t-\frac{1}{n}}$
3. לכל tמתקיים $F_t \subseteq F$.
4. שלמות ־ לכל $A \in F$ כך ש־$p(A) = 0$ מתקיים ש$A \in F_t$ לכל t.

הערה בתהליכים סטוכסטיים אנחנו מניחים שקיימת צבירת מידע עם הזמן. כלומר, ככל שעובר יותר זמן, המידע שלנו יכול רק לגדול.

רציפות בזמן פירושו שאם יודעים מה קורה בכל זמן, אז אפשר לדעת מה יקרה בעוד אפסילון זמן מעכשיו־ לא תהיה התרחקות גדול מידי.

דוגמא (סינון) יהי תהליך סטוכסטי $(X_t; t \geq 0\}$. נגדיר את הסינון הנוצר על־ידי התהליך הזה $\sigma(X_t) = \{F; F.mesure.by.X_s.\forall s \leq t\}$.

דוגמאות בהינתן שערי החליפין עד היום, ניתן לבנות את הסינון F_t הכולל את כל המידע עד זמן t.

תוצאות משחקי כדורגל- X_t- תוצאות המשחקים עד זמן t, Y_t- תוצאות המשחקים מזמן t. התהליכים קרובים אחד לשני ומוגדרים לכל זמן t.

הגדרה (תהליך מותאם לסינון) בהינתן תהליך סטוכסטי $\{X_t\}_{t\geq 0}$, וסינון $\{F_t\}_{t\geq 0}$, אז התהליך $\{X_t\}$ ייקרא מותאם לסינון $\{F_t\}$ אם לכל $t \geq 0$ X_t מדיד לפי F_t , כלומר- לכל a מתקיים $\{X_t \leq a\} \in F_t$, או לחלופין, $\sigma(X_t) \subseteq F_t$.

הגדרה (תהליך מרקוב) תהליך סטוכסטי $\{X_t\}$ נקרא תהליך מרקוב אם לכל $t_1 < t_2 < ... < t_n$ ולכל $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ מתקיים $p(X_t \leq a/X_{t_1} \leq a_1, ..., X_{t_n} \leq a_n) = p(X_t \leq a/X_{t_n} \leq t_n)$. הרעיון הוא שהמידע הרלוונטי הוא המידע האחרון.

משפט אם X_t מקבל מספר סופי של ערכים, אז X_t הוא תהליך מרקוב אם ורק אם לכל $t_1 < t_2 < ..t_n$ ולכל $a_1, a_2, ..., a_n$ מתקיים $p(X_t = a/X_{t_1} = a_1, ..., X_{t_n} = a_n) = p(X_t = a/X_{t_n} = a_n)$

הגדרה (שרשרת מרקוב) שרשרת מרקוב היא תהליך מרקוב המקבל מספר סופי של ערכים.

הגדרה (תהליך אינטגרבילי) תהליך סטוכסטי $\{X_t\}_{t\geq 0}$ נקרא אינטגרבילי (בעל אינטגרל) אם לכל t מתקיים $E[|X_t|] < \infty$.

תהליכים גאוסיאניים

הגדרה (התפלגות רב נורמלית/גאוסיאנית) יהי $X = (X_1, ..., X_n)$ וקטור משתנים מקריים. אז X מתפלג רב נורמלית/גאוסיאנית אם לכל $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ המשתנה המקרי $a_1X_1 + ... + a_nX_n$ מתפלג נורמלית, $a_1X_1 + ... + a_nX_n \sim N(\mu, \sigma^2)$

הגדרה (תהליך גאוסיאני) תהליך סטוכסטי $\{X_t\}_{t\geq 0}$ נקרא תהליך גאוסיאני אם לכל $t_0 < t_1 < ... < t_n$ המשתנה המקרי הוקטורי $(X_{t_1} - X_{t_0}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ בעל התפלגות רב נורמלית.

הערות בהינתן וקטור n מימדי, $\bar{X} = (X_1, ..., X_n)$ נוכל להסתכל על התוחלת $E[\bar{X}] = (E[X_1], ..., E[X_n])$ ועל מטריצת השונויות המשותפות, $\sigma_{ij} = cov(X_i, X_j)$, $\Omega = (\sigma_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. נשים לב שמטריצת השונויות המשותפות היא סימטרית.

משפט תהיי Ω מטריצת ריבועית מסדר n. הטענות הבאות שקולות:

1. קיים וקטור n מימדי $\bar{X}$ כך ש־Ω היא מטריצת השונויות המשותפות שלו.
2. Ω היא מטריצה סימטרית ואי שלילית לחלוטין.

הגדרה (מטריצה אי שלילית לחלוטין) מטריצה A תיקרא מטריצה אי שלילית לחלוטין אם לכל וקטור n מימדי, $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $\sum_{i=1,..,n} \sum_{j=1,...,n} v_{ij} a_i a_j \geq 0$.

הוכחה (1 ⇐2) נניח שקיים וקטור n מימדי $\bar{X}$ כך ש־Ω היא מטריצת השונויות המשותפות שלו. אז Ω סימטרית (השונות המשותפת סימטרית, $cov(i,j) = cov(j,i)$).

נסתכל על הביטוי הבא ־ $E[\sum_{i=1,..n}(x_i - Ex_i)a_i]^2 \geq 0$. תוחלת של מספרים אי שליליים בהכרח אי שלילית ולכן הביטוי אי שלילי. נפתח את הביטוי ונקבל־ $\sum_{i=1,..,n} \sum_{j=1,...,n} \sigma_{ij} a_i a_j$=$\leq 0$
$E[\sum_{i=1,..n}(x_i - Ex_i)a_i]^2 = E(\sum_{i=1,..,n} \sum_{j=1,..,n} (x_i - Ex_i)(x_j - Ex_j) a_i a_j) = \sum_{i=1,..,n} \sum_{j=1,..,n} E(x_i - Ex_i)(x_j - Ex_j) a_i a_j$וקיבלנו את הנדרש.

דוגמא (התפלגות רב נורמלית) נסתכל על משתנה מקרי נורמלי סטנדרטי $X \sim N(0,1)$ונגדיר משתנה חדש $e = \begin{cases} 1 & p = \frac{1}{2} \\ -1 & p = \frac{1}{2} \end{cases}$ ונגדיר בעזרתו $Y = eX$. אז $Y \sim N(0,1)$, נובע מכך ש־ $p(Y \leq a) = p\{Y \leq a | e = 1\} \cdot \frac{1}{2} + p\{Y \leq a | e = -1\} \cdot \frac{1}{2} = p\{X \leq a\} \cdot \frac{1}{2} + p\{X \leq a\} \cdot \frac{1}{2} = p\{X \leq a\}$ לפי נוסחת ההסתברות השלמה.

נסתכל כעת על הוקטור (X,Y)־ לא מתפלג רב נורמלי. נראה למשל ש־$X+Y$לא מתפלג נורמלי. לשם כך נחשב את ההסתברות לכך שהסכום $X+Y$ שווה לאפס. $p\{X + Y = 0\} = p\{X + eX = 0\} = p\{X(1+e) = 0\} = \frac{1}{2}$. בהתפלגות נורמלית, ההסתברות שהמשתנה שמתפלג נורמלית שווה לאפס (או לכל מספר ממשי אחר) היא אפס כי ההתפלגות רציפה.

משפט (פול לוי) אם $\bar{X}$מתפלג רב נורמלית, רכיביו בלתי תלויים אם ורק אם הם בלתי מתואמים, כלומר, Ω אלכסונית, לכל $i \neq j$ מתקיים $cov(X_i, X_j) = 0$.

הערה בדיקת אי קורלציה פשוטה יחסית לעומת בדיקת אי תלות והמשפט יכול לעזור בכך.

שיעור 3

משפט

יהי וקטור $\bar{M} = (m_1, ..., m_n)$ ומטריצה ריבועית מסדר n סימטרית ואי שלילית לחלוטין, V. אזי, קיים וקטור $\bar{X}$ בעל התפלגות נורמלית n־ מימדית, בעל תוחלת $\bar{M}$ ומטריצת שונויות משותפות V.

משפט

יהי וקטור $\underline{m} = (m_1, ..., m_n)$ומטריצה ריבועית nxnסימטרית ואי שלילית לחלוטין, V.
אזי, הטענות הבאות שקולות:

א. $det(V) \neq 0$ (Vהפיכה).

ב. קיים וקטור $\underline{x}$ בעל התפלגות נורמלית n־ מימדית בעל תוחלת $E\underline{x} = \underline{m}$ומטריצת שונויות משותפות V וההתפלגות המשותפת $F_{\underline{x}}$ גזירה n פעמים בכל רכיב ובעלת צפיפות משותפת: $f_{\underline{x}}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{det(V)}} exp(-\frac{1}{2} < t - \underline{m}, V^{-1}(t - \underline{m}) >)$, כאשר $t = (t_1, ..., t_n)$, V^{-1} היא המטריצה ההפוכה של V (שקיימת מ־א) ו־$< ., . >$.

מסקנה

יהי $\underline{x}$ וקטור נורמלי n־ מימדי, ותהיי B קבוצת בורל על הישר או על R^n, (קבוצה בסיגמא אלגברה הנוצרת על־ידי הקטעים הפתוחים), אז $p\{x \in B\} = p\{x \in B\} = \int_B f_{\underline{x}}(t)dt$ $p(x \leq 5) = \int_{-\infty}^{5} f_{\underline{x}}(t)dt$.

נשים לב שהאינטגרל רב מימדי כאשר מדובר על וקטור רב מימדי.

משפט

תהיינה שתי פונקציות־ $\mu : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ו־ $\kappa : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ (κ־ פונקצייה סימטרית כלומר, $\kappa(t,s) = \kappa(s,t)$ לכל t,s) ומתקיים $\forall n \in \mathbb{N}$ ו$\forall t_1....,t_n \in \mathbb{R}_+, a_1,...,a_n \in \mathbb{R}$, $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\kappa(t_i,t_j)a_ia_j \geq 0$ אז קיים תהליך גאוסיאני אחד ויחיד (לכל n זמנים, $t_1..t_n$ הוקטור $(x_{t_1},...,x_{t_n})$ הוא בעל התפלגות נורמלית n מימדית) $\{x_t : t \geq 0\}$ כך ש־ $E[x_t] = \mu(t)$ ולכל t,s מתקיים $cor(x_t,x_s) = \kappa(t,s)$. κ נקראת פונקציית השונות המשותפת ונותנת מעין קשר בין שני הזמנים.

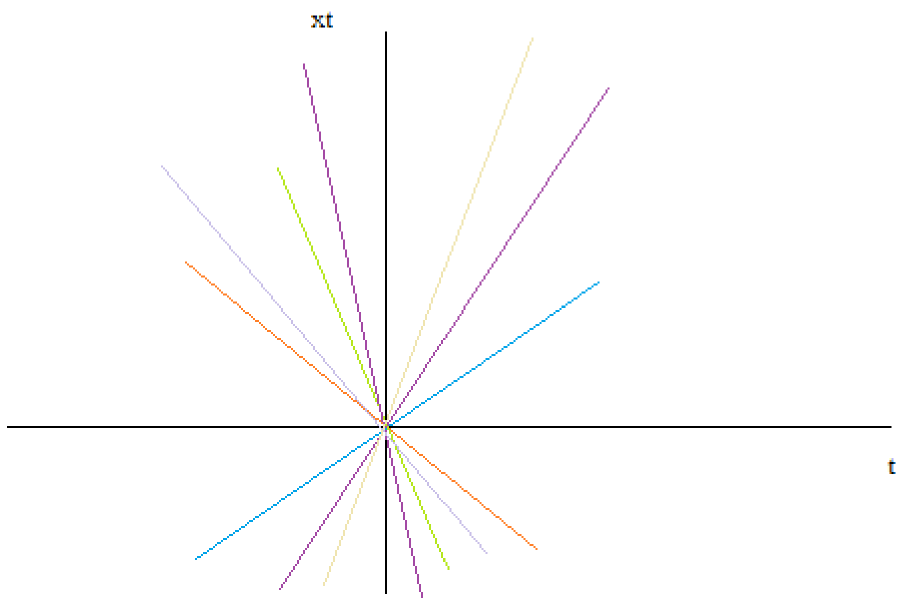
דוגמאות 1. $\mu(t) = 0$, $\kappa(t,s) = min(t,s)$. התהליך הגאוסיאני המתקבל הוא התנועה הבראונית, $\kappa(t,s) = cov(x_t,x_s) = cov(x_s,x_t) = \kappa(s,t)$.

2. $\mu(t) = 0$, $\kappa(s,t) = e^{(-\alpha|s-t|^2)}, \alpha > 0$

3. תהליך מעריכי בריבוע־ תהליך אורנשטיין ־ אולנבק ־$\mu(t) = 0$, לכל $\kappa(s,t) = e^{(-\alpha|s-t|)}, \alpha > 0$ תהליך גאוסיאני עם פונקציית שונות משותפת κ.

4. $\mu(t) = 0$, $\kappa(s,t) = \frac{1}{2}(|t|^{2h} + |s|^{2h} - |t-s|^{2h})$ כאשר $0 < h < 1$. התהליך נקרא תנועה בראונית תשבורתית $(fractional)$. נשים לב שעבור $h = \frac{1}{2}$ נקבל תנועה בראונית. המודל טוב יותר משום שניתן להתאים את h לתנודתיות.

5. גאומטריה־ קווים אקראיים־ $w \sim N(0,1)$ משתנה מקרי המתפלג נורמלי סטנדרטי. נגדיר תהליך סטוכסטי, $x_t = t \cdot w$.התהליך גאוסיאני־ כל צירוף לינארי מתפלג נורמלי. נקבל קווים אקראיים שעוברים דרך הראשית והשיפוע משתנה כל הזמן.



מרטינגלים

סעיף 1: התוחלת המותנית

הגדרה (תוחלת) עבור משתנה מקרי בדיד X המקבל את הערכים $x_1, ..., x_n$ התוחלת מוגדרת להיות $E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(X = x_i)$.

עבור משתנה מקרי רציף X, בעל פונקציית צפיפות f, התוחלת מוגדרת להיות $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$.

הגדרה שקולה התוחלת מאופיינת על־ידי 2 תכונות:

1. לינאריות - $E(ax + by) = aE(x) + bE(y)$
2. התוחלת של קבוע היא קבוע־ התוחלת שומרת על קבועים־ $E(c) = c$

אם קיימת פונקציה המקיימת את התכונות הללו (אופרטור לינארי השומר על קבועים), היא תוחלת.

תוחלת מותנת במאורע A אנחנו יודעים על מאורע מסוים, ואנחנו רוצים לחשב את התוחלת בהינתנו.

הגדרה $E(x|A)=\int_{-\infty}^{\infty}tdF_{x/A}(t)$

חישוב בהנתן שהפונקצייה גזירה, $E(x|A)=\frac{1}{p(A)}\int_{-\infty}^{\infty}tf_{x,A}(t)dt$. התפלגות מותנית, $f_{x/A}(t)=p\{x\leq t|A\}=\frac{1}{p(A)}\cdot p\{x\leq t,A\}$

תכונות דטרמיניסטי

הגדרה שקולה

הכללה המקרה הזה מכליל את הדוגמא הקודמת אם המאורע A הוא כל המרחב, כלומר, $A=\Omega$. אז תוחלת מותנית בכל מרחב המדגם היא התוחלת שהגדרנו קודם לכן.

תוחלת מותנית במשתנה מקרי Y

הגדרה $E(x/y)=\int_{-\infty}^{\infty}tdF_{x/y}(t)$כאשר $F_{x/y}$היא ההתפלגות המותנית של x ב־y (ההתפלגות של xבהינתן y)

חישוב בהנחה והכל גזיר, אז $E(x/y)=\frac{1}{f_y(y)}\int_{-\infty}^{\infty}tf_{x/y}(t,y)dt$

תכונות במקרה זה העניין כבר אקראי. הוא תלוי במשתנה המקרי y ולכן כבר לא דטרמיניסטי.

בנוסף, $E(x)=E(E(x/y))$

הגדרה שקולה פונקציה של y , ולכל $A\in\sigma(y)$ מתקיים $E(x/A)=E(E(x/y)/A)$.

בהינתן משתנה מקרי y, אז $\sigma(y)$ היא השבט הקטן ביותר המכיל את y־ כל המאורעות התלויים ב ־y.

תוחלת של x בהינתן y היא פונקציה של y כך שאם ניקח את התוחלת שלה ביחס למאורע A, היא שווה לתוחלת של x בהינתן המאורע A.

הכללה $y = I_A$ הפונקציה המציינת של המאורע A. כלומר $I_A(w) = \begin{cases} 1 & w \in A \\ 0 & w \notin A \end{cases}$.

תוחלת מותנית בשבט G הכללה של השלב הקודם.

הגדרה בהינתן שבט G, $E(x/G)$ הוא משתנה מקרי בעל שתי התכונות הבאות־

1. המשתנה המקרי מדיד לפי G, כלומר G היא סיגמא אלגברה על x.
2. לכל מאורע $A \in G$ מתקיים $E(x/A) = E(E(x/G)/A)$.

תכונות המשתנה מקרי אקראי .

הטלה מF לתוך G.

הגדרה שקולה אופרטור הטלה

הכללה $G = \sigma(y)$

אינטגרל סטילטס

בהינתן פונקציה, g אז $\int_a^b g(t)dt$ יהיה בעצם סכומים של שטחים, $lim_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} g(t'_i)(t_i - t_{i-1}), t_{i-1} < t'_i < t_i$.

נרצה להסתכל על $\int_a^b g(t)dF(t)$, במקום להסתכל על ההפרש בקטעים־ כלומר בבסיסי המלבנים, נסתכל על הסכומים, $\int_a^b g(t)dF(t) = \sum g(t'_i)(F(t_i) - F(t_{i-1})), t_{i-1} < t'_i < t_i$ אם הגבול של הביטוי קיים, אז הוא נקרא אינטגרל סטילטס. אם F גזירה, אז זו הכללה של משפט הערך הממוצע־ לפיו, $F'(t'_i) = \frac{F(t_i)-F(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}$, ולכן יש שוויון לאינטגרל רימן.

הערות

משפט (משפט הפירוק של לבג) תהיי μמידה חיובית σסופית ($X = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_n$ וגם $\mu(E_n) < \infty$ לכל n) על Mוλ מידה מרוכבת על M אז קיימות מידות מרוכבות יחידות על M, λ_a, λ_s כך ש־ $\lambda_s \perp \mu$ וגם $\lambda_a \ll \mu$ (כלומר לא רואה קבוצות שμ לא רואה־ נותנת מידה אפס לקבוצות שμנותרת להן מידה אפס) ולא $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$. וגם, אם λמידה חיובית סופית אז גם λ_a, λ_s.

שיעור 4

נסתכל על האינטגרל הבא:

$Ex=\int_\Omega xdp=\int_\Omega x(w)dp(w)$ זהו אינטגרל ביחס למרחב המדגם (אינטגרל לבג).

הרעיון של אינטגרל לבג הוא הסתכלות ביחס למידת הסתברות- לכל ערך של הפונקציה מואמת מידתו. באינטגרל רימן זה עובד הפוך- לכל קטע על הישר מתאימים את הגובה שלו.

דוגמא $x=I_A$ האינדיקטור של המאורע A. אז $Ex=EI_A=1\cdot p(A)+0\cdot p(A^c)=$ $\int_A dp=p(A)$

תוחלת מותנית (דוגמא) בכד מסוים יש a כדורים לבנים וb כדורים שחורים. מוציאים כדורים בזה אחר זה ללא החזרה עד שמקבלים כדור לבן אחד ואז עוצרים. מהי תוחלת מספר הכדורים השחורים שהוצאו?

נסמן ב- x את מספר הכדורים השחורים שהוצאו ונרצה למעשה לחשב את $E(x)$.

נסמן $M_{a,b}=$ התוחלת של מספר הכדורים השחורים שהוצאו כאשר יש a לבנים וb שחורים.

נגדיר משתנה מקרי, $y=\begin{cases}1 & first.is.white\\ 0 & Otherwise\end{cases}$, אז $p(y)=\frac{a}{a+b}$.

נשתמש בכך שמתקיים $Ex=E(E(x/y))$.

$E(x/y)=p\{y=1\}E(x/y=1)+p\{y=0\}E(x/y=0)=\frac{a}{a+b}\cdot 0+\frac{b}{a+b}\cdot(1+M_{a,b-1})$,

מאחר והוצאנו אחד שחור, אז בכד יש כעת $b-1$ שחורים ולכן התוחלת תהיה $M_{a,b-1}$, כלומר- $M_{a,b}=\frac{b}{a+b}[1+M_{a,b-1}]$

נחשב באופן רקורסיבי:

$M_{a,0}=0$ כי אם אין כדורים שחורים, אז מוציאים לבן בשלב הראשון בהכרח ולכן תוחלת הכדורים השחורים היא אפס.

$$M_{a,1}=\frac{1}{a+1}[1+0]$$

$$M_{a,2}=\frac{2}{a+2}[1+\frac{1}{a+1}]=\frac{2}{a+2}+\frac{2}{(a+1)(a+2)}=\frac{2a+4}{(a+1)(a+2)}=\frac{2}{(a+1)}$$

ניתן להמשיך באופן זה, ונשים לב שנקבל $Ex=\frac{b}{a+1}=M_{a,b}$.

תוחלת מותנית

הגדרה (מידה) נתון מרחב הסתברות (Ω, F, p) ויהי $G \subseteq F$. פונקציה $Q : G \to \mathbb{R}_+$ נקראת מידה אם היא σ־ חיבורית, כלומר, לכל $A_1, ..., A_n, ...$ כך ש־ $A_i \cap A_j = \emptyset$ לכל $i \neq j$, מתקיים $Q(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} Q(A_i)$. מידת הסתברות מקיימת, $p : G \to [0, 1]$.

הגדרה (רציפות ביחס למידה) בהינתן שתי מידות, Q, R על אותו שבט G, נאמר כי Q רציפה בהחלט ביחס לR ($absolutly\ continouos$) ונסמן $Q \ll R$ אם לכל קבוצה $A \in G$ כך ש־ $R(A) = 0$ מתקיים $Q(A) = 0$. הרעיון הוא שQ לא "רואה" מידות שR לא רואה. אם מאורע אפסי ביחס למידת הסתברות מסוימת, הוא ישאר אפסי גם ביחס למידת הסתברות אחרת.

משפט (רדון־ניקודים) בהינתן שתי מידות Q, R על שבט G. נניח שQ רציפה לחלוטין ביחס לR, אזי, קיימת פונקציה יחידה f שהיא מדידה ביחס לG, כלומר לכל מספר t מתקיים $\{w|f(w) \leq t\} \in G$, כך שלכל $A \in G$ מתקיים $Q(A) = \int_A f dR$. כלומר, המידה של כל מאורע שווה לאינטגרל על־פני המאורע של הפונקציה לפי המידה שהיא רציפה לחלוטין ביחס אליה. f נקראת "נגזרת רדון ניקודים" של Q ביחס לR ונסמן, $f = \frac{dQ}{dR}$. כלומר, $dQ = f dR$.

הגדרה (תוחלת מותנית בשבט) יהי x משתנה מקרי אינטגרבילי ויהי G שבט בתוך F. אז $E[x/G]$ מוגדרת להיות משתנה מקרי המקיימת שתי תכונות:

1. המשתנה המקרי מדיד לפי G.
2. לכל $A \in G$, $E[x/A] = E[E[x/G]/A]$.

נראה קיום ויחידות־ בהינתן x ובהינתן G.

משפט קיימת תוחלת מותנית בשבט שהיא יחידה.

הוכחה נגדיר שתי מידות: $R = p$ מידת ההסתברות של מרחב ההסתברות הנתון, $Q(A) = E[x/A] \cdot p(A) = E[x/A] \cdot R(A)$.

Q מקיים את התכונות של מידה כפי שראינו־ המידה של מאורע A שווה לתוחלת של המשתנה המקרי האינטגרבילי הנתון ביחס למאורע כפול ההסתברות של המאורע. מהגדרת

המידות נובע כי אם $R(A)=0$ אז $Q(A)=0$כלומר Q רציפה לחלוטין ביחס ל־R. כעת נשתמש במשפט רדון ניקודים־ לפיו קיימת fאחת ויחידה, מדידה לפי G, המקיימת את התכונה הבאה: לכל $A\in G$, $Q(A)=\int_A fdR$. אותה f היא מועמדת להיות התוחלת המותנית. היא פונקצייה מדידה ולכן משתנה מקרי. היא מקיימת: $Q(A)=\int_A fdR$. נציב: $Q(A)=E[x/A]\cdot p(A)=\int_A fdp$. מכאן נובע כי $E[x/A]=\frac{1}{p(A)}\int_A fdp=E[f/A]$. f נקראת התוחלת המותנית של f בהינתן G. אם נציב $f=E[x/G]$ אז נקבל, $E[x/A]=E[E[x/G]/A]$כנדרש.

הערה תנאי 2, לכל $A\in G$, $E[x/A]=E[E[x/G]/A]$, שקול לתנאי הבא: לכל $A\in G$, מתקיים $E[x:I_A]=E[E[x/G]:I_A]$.

משפט $E[x/y]=E[x/\sigma(y)]$, ($\sigma(y)$הוא השבט הכי קטן כך ש־yמדיד לפיו).

הערה מהמשפט נובע שההגדרה של תוחלת מותנית בשבט היא הכללה של תוחלת מותנית במשתנה מקרי.

תכונות התוחלת המותנית

1. אם $G=F$ אזי $E[x/G]=x$.
2. אם x מדיד לפי G, אזי $E[x/G]=x$.
3. אם G מינימלית, כלומר, $G=\{\Omega,\emptyset\}$אז $E[x/G]=E[x]$.
4. אם x בלתי תלוי בG, אזי $E[x/G]=Ex$.
5. אם $G_1\subseteq G_2$ אז $E[x/G_1]=E[E[x/G_1]/G_2]=E[E[x/G_2]/G_1]$.
6. אם x מדיד לפי G, לכל משתנה מקרי y מתקיים $E[x\cdot y/G]=xE[y/G]$.
7. $E[\cdot/G]$ אופרטור לינארי ומונוטוני: $E[ax+by/G]=aE[x/G]+bE[y/G]$ וגם $x\le y$⇐$E[x/G]\le E[y/G]$.
8. לכל $\alpha\ge 1$ תמיד מתקיים: $|E[x/G]|^\alpha\le E(|x|/G)^\alpha\le E[|x|^\alpha|G]$.
9. בהינתן סדרה המתכנסת מונוטונית , $x_{n-1}\le x_n$לכל nוגם $lim_{n\to\infty}x_n=x$אז $E[x_n|G]\to X[x/G]$ גם באופן מונוטוני, כלומר, $E[x_{n-1}|G]\le X[x_n|G]$.

10. אי שוויון ינסן: אם f פונקציה קמורה, אז $f(E[x/G]) \leq E[f(x)/G]$ (הכללה של 8).

11. החזאי הטוב ביותר ל־x בהינתן G הוא $E[x/G]$ מבחינת השגיאה הריבועית־השונות. כלומר: לכל אומדן אחר, משתנה מקרי מדיד לפי G, שנסמנו ב־Y, מתקיים $E[(x-E[x/G])^2] \leq E[(x-Y)^2]$.

הוכחת התכונות 1. לשם הוכחת השוויון $E[x/G]=x$ צריך להראות שx מקיים את שתי התכונות של תוחלת מותנית בשבט. xמדיד לפי F, ישירות מההגדרה של משתנה מקרי, ומכיוון ש־ $G=F$, אז x מדיד לפי G. התכונה השנייה, לכל $A \in G$, $E[x/A]=E[x/A]$ מתקיים באופן טריוויאלי.

2. נתון כי xמדיד לפי Gולכן מתקיימת התכונה הראשונה. במקרה זה, המועמד ממלא גם את 2 הדרישות כאשר התכונה השנייה תמיד מתקיימת. $E[x/A]=E[x/A]$.

באופן אינטואיטיבי, אם xמדיד לפי G־ כלומר אם אנחנו מכירים את G והמשתנה המקרי מדיד לפיו, אז הוא יהיה x.

3. Gהוא השבט המינימלי, כלומר, $G=\{\emptyset,\Omega\}$. מההגדרה, $E[x]$ המועמדת להיות התוחלת המותנית בשבט G, על מנת לבדוק אם זה נכון, צריך לבדוק את שתי התכונות. התוחלת של xהיא מספר ממשי־ משתנה מקרי מנוון־ נסמנו בc, אז $\{c \leq t\} \in \{\Omega,\emptyset\}$־ ייתכן שזה נכון או לא נכון־ אם נכון, זה המרחב כולו, אם לא נכון, זו הקבוצה הריקה. בכל מקרה הוא נמצא בשבט הקטן ביותר. ולכן, לכל tמתקיים, $\{(E[x]=)c \leq t\} \in \{\Omega,\emptyset\}$. התכונה השנייה־ $E[E[(x/G)\cdot IA]=E[x \cdot IA]$, נחליף את $E[x/G]$ב$E[x]$: $E[E[x]\cdot I_A]=E[x \cdot I_A]$. A יכול להיות כל דבר בG , אבל כאן השבט הוא קטן ונבדוק את שתי האפשרויות, אם $A=\emptyset$אז הצד הימני שווה לאפס־ הסתברות של הקבוצה הריקה. וגם גם הצד הימני כי $I_A=0$כל הזמן. במקרה בו $A=\Omega$ אז $I_A=1$ ולכן $E[x]=E[x]$ויש שוויון.

4. מניחים כי x בלתי תלוי בשבט G. אז לכל מספר t ולכל מאורע $A \in G$, המאורעות $\{x \leq t\}=\{w;X(w) \leq t\}$ וAהם בלתי תלויים. כלומר: $p(A \cap \{x \leq t\})=p(A)\cdot p(\{x \leq t\})$. התוחלת של x הוא קבוע ולכן הוא מדיד לפי כל שבט שהוא. $E[(E[x])\cdot I_A]=E[x \cdot I_A]=E[x]\cdot E[I_A]$ולכן יש שוויון.

.5

שיעור 5

הגדרה (מרטינגל) יהיו תהליך סטוכסטי $\{X_t : t \geq 0\}$ וסינון $\{F_t : t \geq 0\}$. נאמר שX_t הוא מרטינגל ביחס לסינון $\{F_t\}$ אם לכל tמתקיים X_t אינטגרבילי (כלומר־ $E[|X_t|] <$ ∞) ולכל $s \leq t$מתקיים $E[X_t|F_s] = X_s$.

הרעיון של מרטינגל הוא שהתוחלת המותנית של העתיד בהינתן העבר שווה לערך הנוכחי.

דוגמא נחשוב על משחקים הוגנים. מהמרות על סכום כסף X_0, ונסמן ב־X_n אז כמות הכסף לאחר n סיבובים. במקרה זה, משוב שהמשחקים הוגנים, $E[X_n/F_{n-1}] = X_{n-1}$.

הגדרה (מרטינגל בדיד ־ דיסקרטי) במקרה בו התהליך הוא בדיד־ $X = \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$, לכל $n \leq m$ מתקיים $E[X_m|F_n] = X_n$.

טענה יהי $X = \{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ כך ש־X_nאינטגרבילי, אזי, Xהוא מרטינגל אם"ם לכל nמתקיים $E[X_{n+1}|F_n] = X_n$.

הערה הטענה נכונה רק במקרה הפרטי של תהליכים בדידים. במקרה של תהליכים רציפים זה לא מתקיים ־ רק כיוון אחד נכון, אם Xמרטינגל אז $E[X_{t+1}|F_t] = X_t$ אבל ההפך לא מתקיים.

הוכחה כיוון ראשון ($\Leftarrow$) אם X מרטינגל, אז לכל $n \leq m$ מתקיים $E[X_m/F_n] = X_n$. נבחר $m = n+1$ (זה נכון לכל מספר טבעי ובפרט עבור $n+1$) ונקבל $E[X_{n+1}/F_n] = X_n$.

כיוון שני ($\Rightarrow$) נראה שאם מתקיים לכל n $E[X_{n+1}/F_n] = X_n$, אזי לכל $n \leq m$ מתקיים $E[X_m/F_n] = X_n$.

יהי m כך ש־ $n \leq m$. נסמן $k = m - n$ (k מספר טבעי כהפרש של שני מספרים טבעיים).

אם $k = 1$ סיימנו.

נניח שזה נכון עבור $k - 1$ כללי, כלומר $E[X_{n+(k-1)}/F_n] = X_n$.

ונראה עבור k־ צריך להראות ש־X_n $E[X_{n+k}/F_n] =$

אז מתקיים $E[X_{k+n}/F_n] = X_n$.

$E[X_{k+1+n}/F_n] =$

אחרת, נסתכל על $E[X_n]$. מכך ש־ $X_n = E[X_{n+1}/F_n]$ מתקיים $E[X_n] = E[E[X_{n+1}/F_n]$.

אזי, $E[X_{n+k}/F_n] = E[X_{n+k+1-1}/F_n] = E[E[X_{n+k+1-1}/F_{n+k-1}]/F_n] =$

המעבר האחרון נובע מתכונה 5 (מתקיים אם $G_1 \subseteq G_2$ אז $E[x/G_1] = E[E[x/G_1]/G_2] =$ $E[E[x/G_2]/G_1]$).

כאן ניקח $F_n \subseteq F_{n+k-1}$ ולכן נקבל את הנדרש.

ומכיוון שלכל q טבעי $E[X_{q+1}/F_q] = X_q$, אז ניקח $q = n + k - 1$ ולכן נקבל $E[X_{n+k-1+1}/F_{n+k-1}] = X_{n+k-1}$.

ומכאן הביטוי יהיה שווה ל־

$= E[X_{n+k-1}/F_n]$.

מהנחת האינדוקציה־ $E[X_{n+k-1}/F_n] = X_n$

ולכן הביטוי מקיים את השוויון

$E[X_m/F_n] = E[X_{n+k}/F_n] = E[X_{n+k-1}/F_n] = X_n$ כנדרש.

הערה תהליך סטוכסטי אינטגרבילי הוא מרטינגל אם ורק אם לכל s, t מתקיים $E[X_t|F_s] = X_{min(s,t)}$.

הטענה מאוד דומה לטענה הקודמת פרט לכך שהתוחלת המותנית שווה לאינדקס המינימלי. אם $s \leq t$, קיבלנו את ההגדרה. ובמקרה ההפוך, $E[X_t/F_s] = X_t$. במקרה שאנחנו מתקנים את העבר בעתיד, קיבלנו את העבר־ זה נ ובע מכך שהסינון הוא משפחה מונוטונית עולה ולכן אם X_t מדיד לפי F_t הוא יהיה מדיד גם לפי F_s ($F_t \subseteq F_s$) ונקבל את השוויון לפי תכונה 2.

הגדרות (על מרטינגל, תת מרטינגל) יהיו $\{X_t : t \geq 0\}$תהליך סטוכסטי ו־: $\{F_t$ $t \geq 0\}$סינון, אזי, X נקרא על־מרטינגל אם הוא אינטגרבילי, מותאם ולכל $s \leq t$, $E[X_t|F_s] \leq X_s$.

X נקרא תת־מרטינגל אם הוא אינטגרבילי, מותאם ולכל $s \leq t$, $E[X_t|F_s] \geq X_s$.

הגדרה (תהליך ניתן לחיזוי) תהליך סטוכסטי נקרא ניתן לחיזוי ($Predictable$) אם לכל t, X_t מדיד לפי $F_{t^-} = \underset{s<t}{\veebar} F_s$. במקרה הבדיד, X נקרא ניתן לחיזוי אם לכל n X_n מדיד לפי F_{n-1}.

הרעיון של תהליך ניתן לחיזוי הוא שניתן לנבא את העתיד.

הערה הסימן $\veebar$ הוא השבט שנוצר מכל השבטים המכילים את איחוד השבטים של העבר. במקרה הבדיד, F_{t^-}הוא השבט האחרון. זה למעשה האיחוד והוא גם שבט בגלל ההכלה: $F_0 \subseteq F_1 \subseteq ... \subseteq F_{n-1} \subseteq F_n$. התהליך עדיין אקראי אבל הוא ניתן לחיזוי (ידיעה קרובה משפיעה עליו).

משפט (תכונות)
1. X הוא תת מרטינגל אם ורק אם $-X$ הוא על־מרטינגל.
2. X הוא תת מרטינגל וגם על מרטינגל אם ורק אם X הוא מרטינגל.
3. כל מרטינגל הניתן לחיזוי הוא קבוע ביחס לזמן t.
4. נניח ש־ X הוא על מרטינגל (או תת מרטינגל) אז X מרטינגל אם ורק אם $E[X_t]$ קבועה.
5. אם X, Y מרטינגלים, אזי $aX + bY$ מרטינגלים.
6. אם X, Y מרטינגלים וגם $a, b > 0$ אז $aX + bY$ על מרטינגל.
7. אם X, Y על מרטינגלים, אזי $min(X, Y) = X \wedge Y$ הוא גם על מרטינגל.
8. אם X, Y הם תתי מרטינגל, אז $max(X, Y) = X \vee Y$ הוא תת מרטינגל.
9. אם X הוא מרטינגל, ו־f פונקציה קמורה (קעורה) אז $f(X)$ הוא תת מרטינגל (על מרטינגל).
10. אם X הוא על מרטינגל ו־f פונקציה עולה וקעורה, וגם $f(X)$ אינטגרבילי, אזי $f(X)$ על מרטינגל.

הוכחה (חלקית) נוכיח את 3 במקרה הבדיד (נכונה גם במקרה הרציף).

מכיוון שהתהליך ניתן לחיזוי, X_{n+1} מדיד לפי F_n ולפי תכונה 2 של תוחלת מותנית מתקיים $X_{n+1} = E[X_{n+1}/F_n]$. מכיוון שהתהליך מרטינגל $E[X_{n+1}/F_n] = X_n$. ממכאן נובע ש־$X_n = X_{n+1}$ וזה נכון לכל n ולכן התהליך קבוע בזמן.

נוכיח את 4 למקרה הכללי־ בכיוון הראשון $(\Leftarrow)$ X הוא מרטינגל ולכן לכל $s \le t$ מתקיים $E[X_t/F_s] = X_s$. נפעיל תוחלת על שני הצדדים ונקבל: $E[E[X_t/F_s]] = E[X_t] = E[X_s]$. קיבלנו שלכל s,t התוחלת שווה. מכיוון שהתוחלת היא מספר, ולכן $E[X_t]$ קבועה. בכיוון השני $(\Rightarrow)$: נתון X על או תת מרטינגל עם תוחלת קבועה. צריך להראות שלכל $s \le t$ מתקיים $E[X_t/F_s] = X_s$. נתון כי התוחלת קבועה, אז למעשה לכל s,t , $E[X_s] = E[X_t]$.

מתקיים $E[X_t] = E[E[X_t/F_s]]$ ולכן $E[E[X_t/F_s]] = E[X_s]$.

מכאן נובע ש־ $E[E[X_t/F_s]] - E[X_s] = 0$, $E[E[X_t/F_s]] - E[X_s] = E[E[X_t/F_s] - E[X_s]] = 0$, מכיוון ש$X$ הוא על או תת מרטינגל, אז $E[X_t/F_s] - X_s \overset{\le}{\ge} = 0$. אבל־ ביטוי שהממוצע שלו הוא אפס אבל הוא מקבל רק ערכים חיובים או רק עכשיו שליליים, אז בהכרח הוא אפס ולכן מרטינגל. כלומר בהכרח $E[X_t/F_s] - X_s = 0$.

נוכיח את 10: נתון כי X הוא על מרטינגל, כלומר, הוא אינטגרבילי, מותאם ולכל $s \le t$, $E[X_t|F_s] \le X_s$. ותהיי f פונקציה עולה וקעורה. מכיוון שהיא עולה, אז $f(E[X_t/F_s]) \le f(X_s)$ אבל מהקמירות, ניתן להכניס את הפונקציה לתוחלת ונקבל $E[f(X_t)/F_s] \le f(E[X_t/F_s])$ (אי שוויון ינסן). כמסקנה מיידית: אם Xמרטינגל אז $|X|^p$הוא תת מרטינגל לכל $p \ge 1$.

דוגמאות (מרטינגלים)

דוגמא 1 יהיו X משתנה מקרי אינטגרבילי ($E[|X|] < \infty$) וסינון $\{F_t\}$. נגדיר את התהליך הסטוכסטי הבא: $X_t = E[X/F_t]$. אזי X_t הוא מרטינגל־

נשים לב שאם ניקח $s \le t$, אזי,

$X_s = E[X/F_s] = E[E[X/F_s]/F_t] = E[E[X/F_t]/F_s] = E[X_t/F_s]$. כאשר המעבר השלישי נובע מתכונה 5.

דוגמא 2 הילוך מקרי על הישר־ דוגמא בדידה. יהיו משתנים מקריים $Y_0 = 0$, ו־ $\{Y_n\}$ סדרה של משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי תוחלות סופיות, כלומר: $E[|Y_n|] < \infty$וגם $E[Y_n] = 0$. הרעיון הוא שמחליטים בכל שלב האם ללכת שמאלה או ימינה בהסתברות $\frac{1}{2}$.

נגדיר: $X_0 = 0$, $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$, אז $\{X_n\}$ מרטינגל ביחס לסינון העצמי. נראה שמתקיים $E[X_{n+1}/F_n] = X_n$.

זה נובע מכך ש־

$E[X_{n+1}/F_n] = E[X_n + Y_{n+1}/F_n] = E[X_n/F_n] + E[Y_{n+1}/F_n] = X_n + E[Y_{n+1}] = X_n$.

המעבר האחרון־ $E[Y_{n+1}/F_n] = E[Y_{n+1}]$ נובע משום שY_{n+1} הוא בלתי תלוי בF_n.

כאן F_nהוא הסינון העצמי (כל המאורעות שידועים על־ידי הסדרה $\{Y_n\}$).

וגם $E[X_n/F_n] = X_n$ משום ש־X_nמדיד לפי F_n.

דוגמא 3 אותם נתונים לגביי 2, כאשר בדוגמא זו נבדוק את השונות. נוסף על כך, נניח ש־$var(Y_n) = E[Y_n^2] = \sigma^2$. אזי, נסמן $X_n = (\sum_{i=1}^{n} Y_i)^2 - n\sigma^2$.

צריך להוכיח: $E[X_{n+1}/F_n] = X_n$.

מתקיים: $E[X_{n+1}/F_n] = E[(Y_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} Y_i)^2 - (n+1)\sigma^2/F_n] =$.

$= E[(Y_{n+1}^2 + 2Y_{n+1} \sum_{i=1}^{n} Y_i + (\sum_{i=1}^{n} Y_i)^2 - (n+1)\sigma^2/F_n]$.

$= E[(Y_{n+1})^2] + 2\,(\sum_{i=1}^{n} Y_i) E[Y_{n+1}/F_n] + (\sum_{i=1}^{n} Y_i)^2 - (n+1)\sigma^2$.

במעבר השלישי נובע ש־ $E[(Y_{n+1})^2/F_n] = E[(Y_{n+1})^2]$ משום שהוא בלתי תלוי.

ניתן להוציא את המחובר הנוסף החומה משום שהוא בלתי תלוי, והמחובר האחרון קבוע.

מכאן נובע־

$$= E[(Y_{n+1})^2] + (\sum_{i=1}^{n} Y_i)^2 - (n+1)\sigma^2 = \sigma^2 + X_n - \sigma^2 = X_n$$

נשים לב שהמחובר השני מתאפס משום ש־ $E[Y_{n+1}/F_n] = E[Y_{n+1}] = 0$. זה נובע מכך ש־$Y_{n+1}$ בלתי תלוי.

והמעבר החמישי הוא הביטוי של X_n.

שיעור 6

דוגמאות נוספות למרטינגלים

דוגמא 1 בזמן $t = 0$ יש בכד מסוים כדור אחד אדום וכדור אחד ירוק. מוציאים באופן אקראי כדור אחד, מחזירים אותו ובנוסף אליו מחזירים עוד כדור באותו צבע. נסמן

ב־X_n את יחס הכדורים האדומים בכד בזמן n. $X_n = \frac{red}{red+green}$.

נראה ש־X_n הוא מרטינגל. מדובר בתהליך סופי ולכן $E[|X_n|] = E[X_n] < \infty$.

נסמן ב־Y_n את מספר האדומים בזמן n. מכאן כי־ $Y_n = (n+2)X_n$.

בהינתן $Y_n = k$, אז $Y_{n+1} = \begin{cases} k+1 & \frac{k}{n+2} \\ k & 1-\frac{k}{n+2} \end{cases}$ (ההסתברות לקבל אדום בשלב ה־$n+1$ תהיה כמות האדומים חלקי הכדורים בכד).

אז $E[Y_{n+1}|Y_n = k] = (k+1)\frac{k}{n+2} + k(1-\frac{k}{n+2}) =$.

$$= \frac{k(k+1)}{n+2} + k - \frac{k^2}{n+2} = \frac{k+k(n+2)}{n+2} = \frac{k(n+3)}{n+2} = Y_n\frac{n+3}{n+2} = X_n(n+3)$$

נשים לב שמתקיים־ $E[X_{n+1}/F_n] = E[X_{n+1}/Y_n]$. הרעיון הוא שאנחנו נשארים עם אותו מידע אם נשנה סינון.

ולכן: $E[X_{n+1}/F_n] = E[X_{n+1}/Y_n] = E[\frac{Y_{n+1}}{n+3}/Y_n] = \frac{1}{n+3}E[Y_{n+1}/Y_n] = Y_n\frac{1}{n+2} = X_n$.

דוגמא 2 נסתכל על מרחבי המידה הבאים: $(\Omega, F, p), (\Omega, F, q)$ עם אותו מרחב והסתברויות שונות וסינון $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

נסמן $p_n = \frac{p}{F_n}$. p_n היא מידה מצומצמת־ מאפשרת לי לתת הסתברויות רק על מידע ב־F_n. מכאן לכל n טבעי, נקבל מידה כך שהמידות שוות על השבטים המצומצמים.

אז $F \in F_n = p_n(F) = p(F)$

נסמן $q_n = \frac{q}{F_n}$.

ונוסף על כך, נניח ש־ $p_n \ll q_n$ לכל n , (רציפה בהחלט־ לא רואה מידות ש־ p_n לא רואה). מכאן, לפי משפט רדון ניקודים, קיימת פונקציה אחת ויחידה $X_n = \frac{dq_n}{dp_n}$. נגזרת רדון ניקודים של q_n ביחס ל־p_n היא מרטינגל.

אז מתקיים: $\{X_n\}$ מרטינגל. מכאן נובע כי לכל $F \in F_n$, מתקיים $Q_n(F) = \int_F X_n dp_n$.

לכל $F \in F_n$ מתקיים $\int_F X_n dp_n = Q_n(F)$ אבל היות ו־$F_n \subseteq F_{n+1}$, מתקיים $\int_F X_n dp_n = Q_n(F) = Q_{n+1}(F)$ וזה נכון לכל איברי F_n (צמצום של Q), ומפני ש־ $p_{n+1} = p_n$ בשבט F_{n+1}, מתקיים

$\int_F X_n dp_n = Q_n(F) =$.

$$= Q_{n+1}(F) = \int_F X_n dp_{n+1} = \int_F X_{n+1} dp = \int_F X_n dp =$$
$$= \int_F X_{n+1} dp = E[X_{n+1}/F_n] = X_n$$

משפט העצירה של $J.L.\ Doob$

הגדרה (התמרת ברוקהולדר) יהיו שני תהליכים בדידים־ $X = \{X_0, X_1, X_2...\}$ ו־ $V = \{V_0, V_1, V_2, ...\}$. נגדיר תהליך חדש הנקרא התמרת $Burkholder$ ונסמנו ב־ $V \bullet X$ על־ידי $V \bullet X = \{(V \bullet X)_n\} = V_0X_0 + V_1(X_1 - X_0) + ... + V_n(X_n - X_{n-1})$. בתהליך למעשה מכליפים את V_i בתוספת את התהליך X_i. V נותן משקולות להשתנות של X.

בהינתן שני תהליכים סטוכסטיים בדידים, התמרת ברוקהולדר היא תהליך שלישי המוגדר על־ידם.

משפט יהי X (על) מרטינגל , V תהליך הניתן לחיזוי וחיובי (אי שלילי), אזי, אם $(V \bullet X)_n$ אינטגרבילי לכל n, $(V \bullet X)$ הוא (על) מרטינגל.

הוכחה $E[(V \bullet X)_{n+1} - (V \bullet X)_n/F_n] = E[V_{n+1}(X_{n+1} - X_n)/F_n] = V_{n+1}E[X_{n+1} - X_n/F_n]$

השוויון השלישי נובע מכך שV_{n+1} ניתן לחיזוי על־ידי F_n ולכן הוא מדיד וניתן להוציא אותו החוצה.

מתקיים $E[X_{n+1}/F_n] = X_n$ - X_n מרטינגל.

וגם $E[X_n/F_n] = X_n$ ולכן $E[X_{n+1} - X_n/F_n] = X_n - X_n = 0$.

קיבלנו ש־ $E[(V \bullet X)_{n+1} - (V \bullet X)_n/F_n] = 0$

ולכן $E[(V \bullet X)_{n+1}/F_n] = E[(V \bullet X)_n/F_n] = (V \bullet X)_n$

השוויון האחרון נובע מכך ש־$(V \bullet X)_n$ מדיד לפי F_n.

באופן דומה ניתן להראות עבור על־מרטינגל.

הערה בתת מרטינגלים המשפט נכון אבל צריך לדרוש חיוביות על מנת שהמכפלה תהיה חיובית.

זמן עצירה

הגדרה זמן עצירה הוא משתנה מקרי אקראי $T:\Omega\to\mathbb{R}\cup\infty,\mathbb{N}\cup\infty$ כך שלכל t מתקיים $\{T\le t\}\in F_t$, או לכל n, $\{T\le n\}\in F_n$.

הרעיון של הזמן עצירה הוא שזמן עצירה כולל את העבר. אפשר לחשוב על דוגמאות כמו להוציא את הכסף כשהדולר יגיע ל־4, או להוציא את הכסף שבוע אחרי שהדולר יגיע לשער חליפין של 4 או לסיים את המשחק כשמכפילים את הכסף פעם ראשונה אבל אי אפשר לתת זמן עצירה האומר להוציא את הכסף יומיים לפני שהדולר מגיע ל־4.

הערה במקרה הבדיד אפשר לתת הגדרה פשוטה יותר. T הוא זמן עצירה אם ורק אם לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\{T=n\}\in F_n$.

הוכחה נניח $\{T\le n\}\in F_n$, אזי $\{T=n\}=\{T\le n\}\cap\{T>n-1\}=\{T\le n\}\cap\{T\le n-1\}^c$. מתקיים $\{T\le n-1\}\in F_{n-1}\subseteq F_n$ ולכן גם המשלים שלו (סיגמא אלגברה). ומשום שיש סגירות לחיתוכים, אז $\{T=n\}\in F_n$.

במקרה ההפוך־ נניח שוויון־ כלומר, נניח ש־ $\{T=n\}\in F_n$, ונוכיח את ההפך־ אז $\{T\le n\}=\{T=0\}\cup\{T=1\}\cup...\cup\{T=n\}$ כך שלכל $1\le i\le n$ מתקיים $\{T=i\}\in F_i$ ובפרט, $\{T=i\}\in F_n$ לכל i, מכך שמתקיימת ההכלה. מכאן נובע כי האיחוד הסופי מוכל ב־F_n ־ יש סגירות לאיחודים בני מנייה בסיגמא אלגברה. מסיבה זו לא ניתן להגיד דבר על המקרה הרציף־ אין סגירות לאיחודים לא בני מנייה/סופיים.

דוגמאות (זמני עצירה)

דוגמא 1 זמן עצירה קבוע־ ניקח פונקציה קבועה כלשהי והיא מקיימת את הדרישותץ

דוגמא 2 בהינתן זמני עצירה T_1,T_2, אז $T_1\vee T_2$־ המקסימום, ו־$T_1\wedge T_2$ ־ המינימום, הם זמני עצירה.

הוכחה (מקסימום) $\{T_1\vee T_2\le t\}=\{max(T_1,T_2\}\le t\}=\{T_1\le t\}\cap\{T_2\le t\}$.
מכיוון ש־T_1,T_2 זמני עצירה, אז $\{T_1\le t\},\{T_2\le t\}\in F_t$. ומכיוון ש־$F_t$ הוא סיגמא אלגברה, אז הוא סגור לחיתוכים.

דוגמא 3 בהינתן $\{S_n\}$ סדרה מונוטונית של זמני עצירה, אזי $S = lim_{n\to\infty} S_n$ הוא גם זמן עצירה.

דוגמא 4 זמן פגיעה: יהי X_tתהליך מותאם, אז בהינתן קבוצת מספרים ממשיים, $B \subseteq \mathbb{R}$, אז נגדיר את זמן הפגיעה של X_t ב־B כפעם הראשונה ש־X_t פוגע ב־B,

$$D_B(w) = \begin{cases} inf_t\{t : X_t(w) \in B\} & \{t : X_t(w) \in B\} \neq \emptyset \\ +\infty & inf\{t : X_t(w) \in B\} = \emptyset \end{cases}.$$

אם המאורע מתרחש, ניקח את הזמן המינימלי בו הוא התרחש ואם לא, ניקח אינסוף (אם הקבוצה $\{t : X_t(w) \in B\}$ ריקה).

נסתכל על המקרה הבדיד ונוכיח שזמן פגיעה הוא זמן עצירה. נסתכל על הביטוי $\{D_B = n\}$, מתקיים:

$$\{D_B = n\} = \bigcap_{m=0}^{n-1} \{X_m \notin B\} \cap \{X_m \in B\} -$$

כלומר, לא פגעתי לכל $t < n$ וכן פגעתי ב־$t = n$. אבל X_n הוא תהליך מותאם ולכן $\{X_m \notin B\} \in F_m$ וגם $\{X_m \in B\} \in F_n$ ומההכלה נקבל את הנדרש.

שיעור 7

בהינתן זמן עצירה T, נגדיר את שבט המאורעות לפני T (המאורעות שידועים לי ביחס לזמן העצירה T) -$F_T = \{F : F \in \mathcal{F}, F \cap \{T \leq t\} \in F_t, \forall t\}$. כלומר- כל המאורעות שהחיתוך שלהם עם t הוא ב־F_t. במקרה הבדיד, השבט הזה שווה לשבט הפשוט יותר- $\{F : F \in \mathcal{F}, F \cap \{T = t\} \in F_t \forall t\}$.

טענה יהי $F \in \mathcal{F}$ מאורע כלשהו. אזי, $F \in F_T$ עבור T זמן עצירה אם ורק אם $T_F(w) = \begin{cases} T & w \in F \\ +\infty & w \notin F \end{cases}$ הוא זמן עצירה.

פירוש הטענה הוא שמאורע הוא ב־F_T כאשר אני חותכת את T ומחוץ לה הוא אינסוף.

המשך יהי $X = \{X_t, t \geq 0\}$ תהליך סטוכסטי ויהי T זמן עצירה. נסתכל על תהליך חדש $X^T = \{X_{min(T,t)}, t \geq 0\}$. (נסמן $t \wedge T = min(t, T)$). התהליך הזה נמשך עד שהגענו ל־T ולאחר מכן לא נזוז. נשים לב שאם $T = \infty$, התהליך לעולם לא יעצור.

$$X^T = X_{min(T,t)}(w) = \begin{cases} X_t(w) & t \leq T(w) \\ X_{T(w)}(w) & t \geq T(w) \end{cases}$$

משפט אם X הוא (על) מרטינגל, וT הוא זמן עצירה, אזי, X^T הוא (על) מרטינגל.

הערה נשים לב שמאחר ומרטינגל הוא מעין רווח הוגן, ואם נוסיף כללי עצירה־ תכסיסי עצירה שונים־ התהליך הנעצר יהיה גם הוא מרטינגל.

הוכחה (במקרה הבדיד) נגדיר תהליך חדש־ $V_n = \begin{cases} 1 & n \leq T \\ 0 & n > T \end{cases}$. אז $(V \circ X)_n =$ $\sum V_n(X^n - X^{n-1}) = X_{min(n,T)}$.

השוויון נובע מההגדרה־ האיברים מתבטלים כל הזמן עד שמקבלים את המינימום. ברגע ש־n מגיע ל־T מקבלים אפסים ואז לוקחים את המינימום.

נראה שלכל n , V_n מדיד לפי F_{n-1}. מאחר ו־V_n חסום־ אז נקבל ש־ $(V \circ X)_n =$ $X_{min(n,T)}$ מרטינגל כנדרש (התמרת ברוקהולדר של תהליך ניתן לחיזוי עם מרטינגל הוא מרטינגל).

צריך להוכיח שלכל t מתקיים $\{V_n \leq t\} \in F_{n-1}$.

אם $t \geq 1$ א $\{V_n \leq t\} = \Omega$ בגלל שV_n יכול לקבל את הערכים 0 ו־1 בלבד.

אם $t < 0$ אז $\{V_n \leq t\} = \emptyset$.

אם $0 \leq t < 1$ ואז $\{V_n \leq t\} = \{V_n = 0\}$.

$\{V_n = 0\} = \{n > T\} = \{T \leq n-1\} \in F_{n-1}$

השוויון הראשון נובע מההגדרה של V_n. השוויון השני נובע ישירות והשלישי מכך ש־T זמן עצירה ולכן מדיד.

טענה (תכונות זמני עצירה)

יהיו T, S זמני עצירה. אזי, מתקיימים הבאים־

1. T תמיד מדיד לפי F_T.
2. המאורעות $\{S < T\}, \{S = T\}, \{S \leq T\}$ שייכים גם ל־F_T וגם ל־F_S.
3. $F \in F_s \Leftarrow F \cap \{s \leq T\} \in F_T$.

4. אם $S \le T$ כמעט תמיד אז $F_S \subseteq F_T$ כמעט תמיד .
5. אם $S \le T$ כמעט תמיד ו־T מדיד לפי F_Sאז T הוא זמן עצירה.

הוכחה חלקית 1. צריך להוכיח שלכל t המאורע $\{T \le t\} \in F_T$.

מההגדרה $F_T = \{F : F \in \mathcal{F}, F \cap \{T \le t\} \in F_t \forall t\}$.

נראה ש־$\{T \le t\} \cap \{T \le s\} \in F_s$ לכל s. אבל $\{T \le t\} \cap \{T \le s\} = \{T \le min(t,s) = t \wedge s\} \in F_{t \wedge s} \subseteq F_s$ וסיימנו. הרעיון שאם אנחנו מכירים את T אז אנחנו יודעים את כל מה שהיה לפניו.

2. נראה ש־ $\{S < T\} \cap \{S = n\} \in F_n$ לכל n. אז $\{S < T\} \cap \{S = n\} = \{S = n\} \cap \{T > n\}$ ־ ישירות מההגדרה. אבל $\{S = n\}, \{T > n\} \in F_n$. ולכן, האירוע $\{S < T\} \in F_S$.

$\{S = T\} \cap \{S = n\} = \{S = n\} \cap \{T = n\} \in F_n$ ולכן $\{S = T\} \in F_S$.

$\{S \le T\} = \{S = T\} \cup \{S < T\}$ ומאחר ושניהם נמצאים בסיגמא אלגברה אז גם האיחוד שלהם נמצא מסגירות לאיחודים.

5. לא מניחים ש־T זמן עצירה, אלא רק ש־S הוא זמן עצירה. אם $S \le T$ כמעט תמיד, וT מדיד לפי F_S, אז T הוא זמן עצירה. צריך להוכיח שלכל $t \in \mathbb{R}_+$, $\{T \le t\} \in F_t$. אז מתקיים $\{T \le t\} = \{T \le t\} \cap \{S \le t\}$ נתון ש־$S \le T$. מכאן נקבל $\{T \le t\} \cap \{S \le t\} \in F_t$ כי T מדיד לפי F_S= אז כל מאורע של T־ כלומר $\{T \le t\} \in F_S$ בחיתוך עם F_Sנמצא ב־F_t.

משפט העצירה של דוב יהי X (על) מרטינגל ויהיו T, S זמני עצירה חסומים כך ש־$S \le T$. אזי, X_S ו־X_T אינטגרביליים ומתקיים $E[X_T/F_S] = (\le) X_S$.

הוכחה (מקרה בדיד) מכך שמניחים שזמני העצירה חסומים, קיים k כך ש־$T \le k$. ולכן: $|X_S|, |X_T| \le |X_0| + ... + |X_k| < \infty$. הסופיות נובבעת מכך ש־$X$ (על) מרטינגל. קיבלנו ש־X_T, X_S אינטגרביליים.

$F \in F_S$ולכן לכל $j \le k$, מתקיים $F \cap \{S = j\} \in F_j$. מכאן כי: $E[(X_k - X_j) I_{F \cap \{s=j\}}] = E[(X_k - X_j) I_{F \cap \{S=j\}}] = 0 (\le 0)$. הביטוי מתאפס משום ש־X מרטינגל.

מכאן נובע כי $E[X_k/F_j]=(\leq)X_j$.

$E[X_k-X_j/F_j]=(\leq)0$

ולכן $E[(X_k-X_s)I_F]=0=\sum E[X_k-X_s)I_{\{F\cap\{s=j\}\}}]$ ומכאן נובע ש־ $E[X_k-X_s/F_S]=0$.

קיבלנו $E[X_k/F_S]-E[X_s/F_S]=0$ ולכן $E[X_k/F_S]=X_S$.

קיבלנו עבור k החסם של T ונרצה לקבל עבור T. אבל מהמשפט הקודם ראינו שאם X הוא (על) מרטינגל ואני עוצרת אותו ב־T, אז X^T הוא (על) מרטינגל.

ולכן הנ"ל חל גם עבור המרטינגל X^T. כלומר־ $E[X_k^T/F_S]=X_S^T$ אבל $T\leq k$ ולכן $X_k^T=X^T$, וגם $X_s^T=X_S$ כי $S\leq T\leq k$.

הגדרה (אינטגרביליות באופן אחיד) אוסף $\mathcal{H}$ של משתנים מקריים נקרא אינטגרבילי באופן אחיד ($Uniformly\ integrable$) אם מתקיים התנאי הבא: $sup_{x\in\mathcal{H}}(E[X\cdot I_{\{|X|\geq k\}}]\underset{k\to\infty}{\to}$

0. באופן שקול־ אם נסמן $X^{(k)}=\begin{cases}0 & |X|\leq k\\ X & |X|>k\end{cases}$ ־ההפך של פעולת הקיטום־ אם הוא קטן הוא נחתך ואם גדול, מקבל את הערך שלו, נוכל להגיד ש־ $\mathcal{H}$ אינטגרבילי באופן אחיד אם לכל $\varepsilon>0$ קיים k מספר כך שלכל $X\in\mathcal{H}$ מתקיים $E(|X^{(k)}|)<\varepsilon$.

סיכום (הכללות משפט העצירה)

משפט נניח ש־X הוא מרטינגל מהצורה $X_t=E[Y/F_t]$ כאשר Y הוא משתנה מקרי אינטגרבילי. נסמן $X_\infty=Y$. אזי:

1. אוסף המשתנים המקריים $\{X_S\}$ כאשר S זמן עצירה (סופי או לא) הוא אינטגרבילי באופן אחיד.
2. אם $S\leq T$ זמני עצירה כלשהם, אזי $E[X_T/F_S]=X_S$.

שיעור 8

הגדרה אומרים שתהליך סטוכסטי $X=\{X_t\}_{t\geq 0}$ שייך למחלקה D אם הוא מקיים את תנאי א של המשפט. כלומר

$sup_{s,stopping,time}E[X_sI_{\{|X_s|\geq 0\}}]\underset{n\to\infty}{\to}0$.

מסקנה כל מרטינגל מהצורה (היפה) של $E[Y/F_t]$ שייך למחלקה D.

משפט עצירה (שימושי אבל ללא הוכחה) יהי תהליך סטוכסטי $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ ונסמן $X_\infty = 0$. אם X הוא על מרטינגל חיובי, לכל שני זמני עצירה $S \leq T$ (סופיים או אינסופיים) מתקיים $X_S \geq E[X_T/F_S]$.

הערה משפט העצירה דורש הרבה פחות דרישות מממשפט העצירה של דוב. החיסרון המרכזי הוא שהוא משפט על על מרטינגלים ולא על מרטינגלים־ מתקיים רק אי שוויון ולא שוויון.

דוגמא חשובה (שוויון ווילד) נסתכל על סדרת משתנים מקריים, $y_1, y_2, ...$ בלתי תלויים ושווי התפלגות. בהינתן זמן עצירה T מדיד לפי F_n ($\{T = n\} \in F_n$) הסינון העצמי של התהליך, מתקיים $E[\sum_{i=1}^{T} y_i] = E[T]E[y_1]$.

הוכחה נסמן את התוחלת של המשתנים המקריים ב־μ. כלומר, לכל i מתקיים $E[y_i] = \mu$. נסתכל על סדרת המשתנים המקריים הבאה $x_n = \sum_{i=1}^{n} y_i - n\mu$. אזי, x_n מרטינגל.

אינטגרביליות:

$$E[|x_n|] = E[|\sum_{i=1}^{n} y_i - n\mu|] = E[|\sum_{i=1}^{n} y_i|] - n\mu$$

נסתכל על הביטוי $E[|\sum_{i=1}^{n} y_i|]$

$$E[|\sum_{i=1}^{n} y_i|] = E[|y_1 + ... + y_n|] \leq E[|y_1| + .. + |y_n|] \leq$$

$$\leq E[\sqrt{1^2 + ... + 1^2}\sqrt{y_1^2 + ... + y_n^2}] = E[\sqrt{n}\sqrt{y_1^2 + ... + y_n^2}] =$$

$$= \sqrt{n}E[\sqrt{y_1^2 + ... + y_n^2}] \leq \sqrt{n}E[\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}] \leq$$

$$\leq \sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} E[y_i^2]}$$

המעברים לפי קושי שוורץ ואי שוויון ינסן.

נסמן ב־σ^2 את השונות של המשתנים המקריים. אזי $var(y_i) = \sigma^2 = E[y_i^2] - E[y_i]^2 = E[y_i^2] - \mu^2$.

ולכן $E[y_i^2] = \sigma^2 + \mu^2$.

ונקבל־

$$\leq \sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} E[y_i^2]} = \sqrt{n}\sqrt{n(\sigma^2 + \mu^2)} = n(\sqrt{\sigma^2 + \mu^2}) < \infty.$$

מרטינגל־

$$E[x_n/F_{n-1}] = E[\sum_{i=1}^{n} y_i - n\mu/F_{n-1}] = E[\sum_{i=1}^{n} y_i/F_n] - n\mu =$$
$$= E[\sum_{i=1}^{n-1} y_i/F_{n-1}] + E[y_n/F_{n-1}] - n\mu =$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} y_i + E[y_n] - n\mu = \sum_{i=1}^{n-1} y_i + \mu - n\mu =$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} y_i - \mu(n-1) = x_{n-1}$$

כעת, מכיוון ש־y_i בלתי תלויים, נסמן $T_n = T \wedge n$ זמן עצירה חסום לכל n. מכאן נובע לפי משפט דוב, $\{x_{T_n}\}$ מרטינכל ולכן $E[x_{T_n}] = E[x_1] = 0$.

נשים לב שמתקיים $x_{T_n} = \sum_{i=1}^{T_n} y_i - T_n\mu$. ולכן אם נסתכל על התוחלות נקבל־

$$E[x_{T_n}] = 0 = E[\sum_{i=1}^{T_n} y_i] - \mu E[T_n]$$

ולכן $E[\sum_{i=1}^{T_n} y_i] = \mu E[T_n]$.

כאשר $n \to \infty$, $T_n \to T$ ולכן נקבל $E[\sum_{i=1}^{T} y_i] = \mu E[T]$.

דוגמא (זמן עצירה לא חסום) נסתכל על הילוך מקרי פשוט על הישר. הולכים ימינה או שמאלה בהסתברות שווה. נסתכל על $T = inf\{n/X_n = 1\}$־ הפעם הראשונה בה נגיע ל־1. אזי, T לא חסום. הוא יגיע ל־1 בשלב מסוים אבל לא ניתן לומר שזה חסום על־ידי k.

אי שוויון דוב

יהי X תת מרטינגל חיובי, אזי לכל מספר $p > 1$ מתקיים: $E[(sup_t|X_t|)^p]^{\frac{1}{p}} \leq q(sup_t E|X_t|^p)^{\frac{1}{p}}$ כאשר $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. נשים לב שתוחלת של סופרימום לא שווה לסופרימום התוחלות כפי שקורה עם סכומים, כלומר, $E[sup_t X_t] \neq sup_t(E[X_t])$.

אם נסמן $X^* = sup_t|X_t|$ אז $||X^*||_p \leq q||X||_p$. חשיבות אי השוויון מגיעה מיכולתו לחסום ולאפשר התכנסויות על־ידי משפטי סנדביץ'.

משפטי התכנסות

בהסתברות יש 4 סוגים של התכנסות־

1. התכנסות בהסתברות ־ החוק החלש־ הסכום מתכנס ל־μ בהסתברות 1.
2. התכנסות כמעט תמיד ־ החוק החזק־ הסכום מתכנס כמעט תמיד ל־μ.
3. התכנסות במומנטים.

הערה גם בחוק החלש וגם בחוק החזק דרשו אי תלות של המשתנים. כאשר יש תלות, הפיתרון יהיה על־ידי מרטינגלים (אפשר להכליל על־ידי כך את החוק החלש והחוק החזק בהינתן תנאים מסומים). נשים לב שבמרטינגלים קיימת תלות $E[y_n/y_{n-1}] = y_{n-1}$ אך תלות זו חלשה.

משפט התכנסות (על מרטינגלים) יהי X על מרטינגל. נניח כי X שייך למחלקה D או שהוא אינטגרבילי באופן אחיד או שהוא חיובי ($X_t \geq 0$ לכל t). אזי, $\{X_t\}$ מתכנס כמעט תמיד למשתנה מקרי אינטגרבילי l.

הערה הרעיון הוא שהעל מרטינגל חסום במובן מסוים ולא "משתגע". במקרה זה, $X_t \underset{t\to+\infty}{\overset{a.s}{\to}} l$. כמעט תמיד פירושו 1=$p\{w : X_t(w)$ מתכנסת$\}$.

משפט התכנסות (מרטינגלים) יהי $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ מרטינגל. אזי,

1. אם X שייך למחלקה D אזי $l = lim_{t\to\infty} X_t$ מתוך המשפט הקודם, מתקיים $X_t = E[l/F_t]$ ובנוסף $E[|X_t - l|] \underset{t\to\infty}{\to} 0$.
2. להיפך, אם קיים משתנה מקרי X_∞כך ש־ $X_t = E[X_\infty/F_t]$ אזי $\{X_t\}$ שייך למחלקה של D ומתקיים $l = E[X_\infty/F_\infty]$.
3. אם $\{X_t\}$ חסום ב־L^p עבור $1 < p < \infty$, כלומר $sup_t E[|X_t|^p] < \infty$ אזי $E[|X_t - l|^p] \underset{t\to\infty}{\to} 0$.

הערה מהמשפט הקודם ראינו שיש גבול (כל מרטינגל הוא בפרט על מרטינגל). במשפט זה נשים לב שלגבול יש שתי תכונות חשובות נוספות. הראשונה היא שהוא מאפשר לתת הצגה נוחה של המרטינגל. נוסף על כך, ההתכנסות היא התכנסות של המומנט הראשון (התכנסות בתוחלת) מעבר להתכנסות כמעט תמיד. החלק השני הוא ההפך של החלק הראשון ולפיו אם יש משתנים מקריים כך שלמרטינגל יש הצגה יפה, אזי X_t שייך למחלקה D. אם קייםX_∞, (ולא בהכרח קיים) אז יש עליו עוד משהו. במקרה השלישי נשים לב שאם ניקח $p = 2$ נקבל את השונות. מעבר לכך, המומנטים בהכרח חסומים ולכן מומנט ההפרש שואף

לאפס.

דוגמא (הקלפי של פוליה) יש לנו כד עם c כדורים לבנים, ו$r-c$ כדורים שחורים. מוציאים כדור, מסתכלים, מכניסים בחזרה ומוסיפים כדור נוסף באותו צבע.

נסמן ב־X_n את יחס הכדורים הלבנים לפני הבחירה ה־n. כלומר־ $X_n = \frac{c}{r}(n-1)$.

אז מתקיים $X_1 = \frac{c}{r}$ ־ היחס לפני שמבצעים איזשהי פעולה.

ראינו ש־X_n מרטינגל. נרצה לדעת מה יקרה אחרי מספיק שלבים ($n \to \infty$).

נראה ש־ $X_n \to X_\infty$ כך ש־ $E[X_\infty] = \frac{c}{r}$. התוצאה היא שהיחס לא ישתנה בסופו של דבר.

X_n הוא מרטינגל החסום על־ידי 1 (יחס), $|X_n| \leq 1$ ולכן שייך למחלקה D. ממשפט ההתכנסות, מהחסימות, התוחלת של הגבול שווה לגבול התוחלות־ $X_n \overset{a.s}{\to} X_\infty$.

צריך להראות ש־ $E[X_\infty] = \underset{n\to\infty}{lim} E[X_n] = \underset{n\to\infty}{lim} E[X_1] = \frac{c}{r}$.

בהינתן חסימות, ממשפט ההתכנסות החסומה של לבג, תוחלת הגבול שווה לגבול התוחלות.

משפט ההתכנסות החסומה של לבג בהינתן סדרת משתנים מקריים חסומה $|X_n| \leq k$, אם קיים הגבול ־ מתקיים $E(limX_n) = lim(EX_n)$.

משפט (פירוק דוב־מייר) יהי $Z = \{Z_t\}_{t\geq 0}$ על (תת) מרטינגל. אזי, $Z = M - (+)A$ כאשר M הוא מרטינגל וA תהליך עולה הניתן לחיזוי. אם $M_0 = 0$ אזי פירוק Z הוא יחיד־ כלומר, אם קבענו את ההתחלה, אין שני פירוקים שונים. כל על מרטינגל ניתן לפירוק ל־2 חלקים־ מרטינגל פחות תהליך עולה וניתן לחיזוי. אם הוא תת מרטינגל, אז ניתן לפירוק של מרטינגל פלוס תהליך עולה ניתן לחיזוי. נשים לב שעל־ידי העברת אגפים, כל מרטינגל הוא על או תת מרטינגל פרט לקזז (מפצה). ולכן $Z \pm A = M$.

הערה מהמשפט נובע שאפשר להפוך כל על או תת מרטינגל למרטינגל על ידי קזז ניתן לחיזוי ויחיד.

הוכחה (מקרה בדיד) נניח בלי הגבלת הכלליות ש־ $\{Z_n, n \in \mathbb{N}\}$ על מרטינגל (ההוכחה עבור תת מרטיגנל באופן הפוך). נגדיר $a_0 = 0$

ולכל $k > 0$, נגדיר $a_k = Z_{k-1} - E[Z_k/F_{k-1}]$.

כעת נסמן $A_k = \sum_{k=0}^{n} a_k$. נשים לב שבכל שלב מוסיפים איבר חיובי לסכום (מכיוון ש־Z_k על מרטינגל, $E[Z_k/F_{k-1}] \le Z_{k-1}$ ולכן $a_k \ge 0$) ולכן A_k הוא תהליך עולה.

נגדיר בנוסף $m_0 = Z_0$ ולכל $k > 0$, $m_k = Z_k - E[Z_k/F_{k-1}]$.

נסמן $M_k = \sum_{k=0}^{n} m_k$.

אז $E[m_k/F_{k-1}] = E[Z_k/F_{k-1}] - E[Z_k/F_{k-1}] = 0$.

אז נקבל לכל $k < n$ שהתוחלת היא אפס־ $E[m_k/F_{k-1}] = 0$, פרט לאחרון־ $E[M_k/F_{k-1}] = M_{k-1}$ ולכן $\{M_n\}$ מרטינגל־

$$E[M_n/F_{n-1}] = E[\sum_{k=0}^{n} m_k/F_{n-1}] = \sum_{k=0}^{n} E[m_k/F_{k-1}] = M_{n-1}$$

נשים לב כי לכל m מתקיים $Z_n = M_n - A_n$ (הכל מצטמצם פרט אליהם) ומתקיים ש־$\{A_n\}$ ניתן לחיזוי, ו־A_n מדיד לפי F_{n-1}.

נשים לב שאם Z הוא מרטינגל, אז $A = 0$.

יחידות:

נניח בשלילה ש־ $Z = M - A = M' - A'$ כאשר M, M' מרטינגלים, ו־A, A' ניתנים לחיזוי. זה נכון לכל n, $Z_n = M_n - A_n = M'_n - A'_n$

$$Z_{n+1} = M_{n+1} - A_{n+1} = M'_{n+1} - A'_{n+1}$$

ולכן $A_{n+1} - A_n = -(Z_{n+1} - Z_n) + (M_{n+1} - M_n)$

ניקח תוחלת של הביטוי בהינתן F_nונקבל:

ולכן $E[A_{n+1} - A_n/F_n] = -E[(Z_{n+1} - Z_n)/F_n] + E[(M_{n+1} - M_n)/F_n]$

מאחר ו־M_n הוא מרטינגל, אז $E[M_{n+1} - M_n/F_n] = 0$ ולכן:

$A_{n+1} - A_n = -E[Z_{n+1}/F_n] + Z_n$.

באופן דומה,

$$A'_{n+1} - A'_n = -E[Z_{n+1}/F_n] + Z_n$$

ולכן $A_{n+1} - A_n = A'_{n+1} - A'_n$ אבל מההנחה ש־ $A_0 = 0$ אז באינדוקציה נקבל $A_n = A'_n$ ונקבל $M_n = M'_n$ ויש יחידות.

נסמן ב־$<M>$ את התהליך העולה הניתן לחיזוי המתאים לתת מרטינגל M^2 (ראינו שאם M מרטינגל, אז M^2 הוא תת מרטינגל). ואז $M^2-<M>$ הוא מרטינגל, ו־$<M>$ נקרא הקזז של M.

שיעור 9

התנועה הבראונית

הגדרה תנועה בראונית היא תהליך סטוכסטי (נהוג לסמנו ב־$B=\{B_t\}_{t\geq 0}$) המקיים את התכונות הבאות:

1. $B_0=0$ ־ מתחילים באפס. התכונה לא עקרונית, אבל היא עוזרת לפשט את החישובים.
2. תוספות בלתי תלויות־ לכל חלוקת זמן $t_0<t_1<...<t_n$, $B_{t_1}-B_{t_0},...,B_{t_n}-B_{t_{n-1}}$ בלתי תלויים. בכל שלב, אין תלות בשלב הקודם.
3. נייח ־ תוספות סטוציונריות־ לכל חלוקת זמן $t_0<t_1<...<t_n$ ולכל מספר $h\geq 0$, אם נסמן $t_i'=t_i+h$, אז המשתנים המקריים, $B_{t_0'}-B_{t_0},...,B_{t_n'}-B_{t_n}$ שווי התפלגות. הזמן מחולק לחלקים שווים באורך h.
4. קיים מספר חיובי $c>0$ כך שלכל זמן t , $B_t\sim N(0,ct)$. נשים לב שהשונות גדלה עם הזמן.
5. B רציף.

הערות 1. אנחנו נשתמש ברוב $c=1$.

2. הצפיפות של B_tתהיה, מכיוון שאנחנו מניחים נורמליות־ $g_t(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}$. הפונקציה מקיימת את משוואת החום־ $\frac{\partial g_t(x)}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g_t(x)}{\partial x^2}$הפתרון היחיד של משוואת החום הוא $g_t(x)$.

למה לכל $s\leq t$ מתקיים: $B_t-B_s\sim N(0,c(t-s))$ וגם $E[B_sB_t]=cs$.

הוכחה נסתכל על המשתנה המקרי, $B_{t-s}-B_0$, אז מתכונה 3, $B_{t-s}-B_0\sim B_t-B_s$ ־ התהליך הוא נייח. ומתכונה 1, מתקיים $B_{t-s}-B_0=B_{t-s}\sim B_t-B_s$.

לפי תכונה 4, $B_t - B_s = B_{t-s} \sim N(0, c(t-s))$.

$$E[B_sB_t] = E[(B_s - B_0)(B_t - B_0)] = E[B_s - B_0]E[B_t - B_0]$$

המעבר הראשון נובע מכך ש־$B_0 = 0$ והמעבר השני נובע מכך שהתוספות בלתי תלויות.

$$E[(B_s - B_0)(B_t - B_s)] = E[B_s]E[B_t - B_s] = 0$$

ומצד שני,

$$0 = E[(B_s - B_0)(B_t - B_s)] = E[B_sB_t - B_s^2] = E[B_tB_s] - E[B_s^2] = E[B_tB_s] - cs$$

ולכן $E[B_tB_s] = cs$ (זה נובע מכך ש־$var(B_t) = E[B_t^2] = ct$)

הגדרות שקולות (תנועה בראונית)

הגדרה במקום תכונות 3 ו־4 , נדרוש, לכל $s \le t$, $B_t - B_s \sim N(0, c(t-s))$. ניקח $s = 0$ ובמקרה זה, $B_t \sim N(0, ct)$. נסתכל על $B_t - B_s$ ועל $B_{t+h} - B_{s+h}$. הנייחות אומרת שההתפלגות בראשון שווה להתפלגות בשני. אבל $B_t - B_s \sim N(0, c(t-s))$ ומאותה הגדרה, $B_{t+h} - B_{s+h} \sim N(0, c(t+h-s-h)) = N(0, c(t-s))$.

הגדרה במקום 3 ו־4 , נדרוש שהתהליך הוא גאוסיאני , כלומר, לכל חלוקת זמנים $t_0 <$ $t_1 < ... < t_n$המשתנה המקרי הוקטורי $(B_{t_1} - B_{t_o}, ..., X = B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ הוא בעל התפלגות רב נורמלית. אם לוקחים n רווחי זמן, ההתפלגות המשותפת של n המשתנים המקריים היא רב נורמלית. וגם $E[B_t] = 0$, $E[B_sB_t] = min(s,t)$.

הגדרה במקום תכונות 2 ו־4 , נדרוש תהליך גאוסיאני ובעל דמיון עצמי עבור $H = \frac{1}{2}$. נסתכל על $a^{\frac{1}{2}}X_t$. אז $X_t \sim N(0,t)$, ולכן $E[a^{\frac{1}{2}}X_t] = 0$ ו־$var(a^{\frac{1}{2}}X_t) = at$. נסתכל על X_{at} אז מההגדרה, $x_{at} \sim N(0, at)$. ולכן $a^{\frac{1}{2}}B_t \sim B_{at}$.

הגדרה (תהליך בעל דמיון) תהליך סטוכסטי X נקרא בעל דמיון עצמי עבור H ($H > 0$) כאשר לכל מספר a ($a > 0$) ולכל זמנים $t_1, ..., t_n$ מתקיים $(a^H X_{t_1}, ..., a^H X_{t_n}) \sim (X_{at_1}, ..., X_{at_n})$. למשל, התנועה הבראונית היא לא גזירה, אבל יש לה נגזרת שברית עד החצי.

משפט פליי־וינר־זיגמונד (1993) 1. כל תהליך בעל דמיון עצמי אינו גזיר באף נקודה (הגרף שלו תזזיתי).

2. B רציף (זה נכנס בהגדרה) אבל לא גזיר באף נקודה (זה נובע מ־1 משום שתנועה בראונית הוא תהליך גאוסיאני בעל דמיון עצמי).

3. B איננו בעל השתנות חסומה אבל ההשתנות הריבועית מקיימת־ $lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n}(B_{\frac{kt}{2^n}}-B_{\frac{(k-1)t}{2^n}})^2=t$.

הוכחה 3. נסתכל על הסכום בביטוי וניתן לראות שמתקיים אי השוויון הבא־ $\sum_{k=1}^{2^n}|B_{\frac{kt}{2^n}}-B_{\frac{(k-1)t}{2^n}}|\geq\frac{\sum(B_{\frac{kt}{2^n}}-B_{\frac{(k-1)t}{2^n}})^2}{max_j|B_{\frac{jt}{2^n}}-B_{\frac{(j-1)2}{2^n}}|}$.

זה נכון משום שהמונה בצד ימין הוא הביטוי הריבוע אבל מחלקים אותו בביטוי המקסימלי ולכן בהכרח נקטין את הביטוי.

נשאיף את הביטוי הימני לאינסוף כאשר המונה שואף ל־t והמכנה ל־0. ולכן־ קיבלנו שההשתנות החסומה גדולה מביטוי ששואף לאינסוף ולכן היא לא בעלת השתנות חסומה.

על מנת להוכיח את החלק השני, נסתמך על כך שאם X הוא משתנה מקרי כך ש־ $X\sim N(0,\sigma^2)$ אזי, $E[X^{2n}]=\frac{(2n!)\sigma^{2n}}{n!2^n}$.

נסמן $\Delta_{nk}=B_{\frac{kt}{2^n}}-B_{\frac{(k-1)t}{2^n}}$ אז $W_{nk}=\Delta_{nk}^2-\frac{t}{2^n}$.

אז צריך להוכיח ש־ $\sum_{k=1}^{2^n}\Delta_{nk}^2\to t$ ואז למעשה נקבל, $\sum_{k=1}^{2^n}W_{nk}^2\to_{n\to\infty}0$

מכיוון ש־$\{W_{nk}\}$ בלתי תלויים שווי התפלגות, אז:

$$E[W_{nk}]=E[\Delta_{nk}^2-\frac{t}{2^n}]=0$$

$$E[W_{nk}^2]=E[(\Delta_{nk}^2-\frac{t}{2^n})^2]=E[\Delta_{nk}^4]-\frac{2t}{2^n}E[\Delta_{nk}^2]+\frac{t^2}{2^{2n}}$$

התוחלת של הריבוע היא השונות, והשונות היא אורך הקטע מההגדרה, ולכן אורך הקטע $[\frac{(k-1)t}{2^n}\ ,\frac{kt}{2^n}]$ הוא $\frac{t}{2^n}$

ועבור החלק האחרון של הביטוי - $-\frac{2t}{2^n}\frac{t}{2^n}+\frac{t^2}{2^{2n}}=-\frac{2t^2}{2^{2n}}+\frac{t^2}{2^{2n}}=-\frac{t^2}{2^{2n}}$

נשאר לנו המומנט הרביעי־ נעבוד עם הנוסחה , $E[X^{2n}]=\frac{(2n!)\sigma^{2n}}{n!2^n}$ כאשר נציב $n=2$ ונקבל־ $E[W_{nk}^4]=\frac{4!(\frac{t}{2^n})^2}{2!2^2}=3\frac{t^2}{2^{2n}}$

ולכן הביטוי יהיה שווה ל־

$$E[W_{nk}^2]=E[(\Delta_{nk}^2-\frac{t}{2^n})^2]=E[\Delta_{nk}^4]-\frac{2t}{2^n}E[\Delta_{nk}^2]+\frac{t^2}{2^{2n}}=\frac{3t^2}{2^{2n}}-\frac{t^2}{2^{2n}}=\frac{2t^2}{4^n}$$

דוגמאות (תנועה בראונית)

דוגמא 1 בהינתן $\{B_t, t \geq 0\}$ניקח $\{B_{t+s} - B_s, t \geq 0\}$־ עבור s קבוע. כלומר־ במקום להתחיל במקום מסוים מתחילים במקום אחר ועדיין מקבלים תנועה בראונית.

דוגמא 2 $B_t^{(1)} = aB_{\frac{t}{a^2}}$.

דוגמא 3 $B_t^{(2)} = tB_{\frac{1}{t}}$.

דוגמא 4 $B_t^{(3)} = \{B_s - B_{s-t}, t \geq 0\}$ עבור $s \geq t \geq 0$, s קבוע. תנועה בראונית אחורית. התהליך כאן הוא לא על פני כל הישר אלא רק על הקטע $[0, t]$.

משפט התהליכים הבאים הם מרטינגלים:

$B = \{B_t, t \geq 0\}$ התנועה הבראונית, $\{B_t^2 - t\}$, $\{e^{\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t}\}$ $\lambda>0$.

הוכחה התנועה הבראונית־

נסתכל על $\{B_t\}$ביחס לסינון העצמי, $F_s = \sigma(B_{s'}, s' \leq s)$.

אז־ $E[B_t/F_s] = E[B_t - B_s + B_s/F_s] = E[B_t - B_s/F_s] + E[B_s/F_s] = E[B_t - B_s] + B_s = 0 + B_s$

זה נובע מכך ש־ $B_t - B_s$ בלתי תלוי ב־F_s־ יש הוספות בלתי תלויות. זה התוספות על הקטע וזה בלתי תלוי בעבר. ולכן התוחלת המותנית שווה לתוחלת ששווה לאפס מההגדרה.

נסתכל על $\{B_t^2 - t\}$ביחס לסינון העצמי F_s־

נסמן $B_t^2 - t = X_t$

$$E[B_t^2 - t/F_s] = E[X_t/F_s] = E[B_t^2/F_s] - t$$

זה נובע מכך שt הוא קבוע.

$$E[B_t^2/F_s] - t = E[B_t^2 - 2B_tB_s + B_s^2 + 2B_tB_s - 2B_s^2 + B_s^2] - t = E[(B_t - B_s)^2] + 2E[B_s(B_t - B_s)/F_s] + E[B_s^2/F_s] - t =$$

$$= E[(B_t - B_s)^2] + 2B_sE[(B_t - B_s)/F_s] + B_s^2 - t = (t - s) + 0 + B_s^2 - t = B_s^2 - t$$

זה נובע מכך ש־ $E[(B_t - B_s)^2] = var(B_t - B_s)$

מכאן נובע שהקזז של B_t הוא t.־ $< B >_t = t$

נוסף על כך־ הוכחנו יחידות. ולכן הוא היחיד.

יהי $\lambda > 0$, נסתכל על $\{e^{\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t}\}$.

$$E[e^{\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t}/F_s] = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\lambda^2 t}} E[e^{\lambda B_t}/F_s] =$$
$$= \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\lambda^2 t}} E[e^{\lambda B_t}/F_s]$$

נסתכל על הביטוי $E[e^{\lambda B_t}/F_s]$.

$$E[e^{\lambda B_t}/F_s] = E[e^{\lambda(B_t - B_s + B_s)}/F_s] = E[e^{\lambda B_s}/F_s] + E[e^{\lambda(B_t - B_s)}/F_s] =$$
$$= e^{\lambda B_s} + E[e^{\lambda(B_t - B_s)}] = e^{\lambda B_s} + e^{\lambda^2 (t-s)/2}$$

מכיוון ש$\lambda(B_t - B_s) \sim N(0, \lambda^2(t-s))$ אזי $E[e^{\lambda(B_t - B_s)}] = e^{\lambda^2 \frac{t-s}{2}}$.

נציב ונקבל־

$$E[e^{\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t}/F_s] = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\lambda^2 t}} E[e^{\lambda B_t}/F_s] =$$
$$= \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\lambda^2 t}} (e^{\lambda B_s + \lambda^2 \frac{t-s}{2}}) = e^{\lambda B_s - \lambda^2 \frac{s}{2}}$$

משפט לוי אם X_t מרטינגל רציף כך ש־ $X_t^2 - t$ מרטינגל, אז X_t הוא תנועה בראונית.

הגדרה פונקציה f נקראת פונקציה בעלת השתנות חסומה אם מתקיים $lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n} |f(\frac{kt}{2^n}) - f(\frac{(k-1)t}{2^n})| < +\infty$.

הרעיון הוא לבדוק עד כמה הפונציה משתגעת.

הערות כל פונקציה מונוטונית היא בעלת השתנות חסומה.

פונקציה היא בעלת השתנות חסומה אם ורק אם היא הפרש של שתי פונקציות מונוטוניות.

שיעור 10

הוכחה (המשך) נרצה להוכיח שהתנועה הבראונית בעלת השתנות חסומה.

B איננו בעל השתנות חסומה אבל ההשתנות הריבועית מקיימת־ $lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n} (B_{\frac{kt}{2^n}} - B_{\frac{(k-1)t}{2^n}})^2 = t$

ראינו שמספיק להראות ש־ $\sum_{i=1}^{2^n} W_k \to_{n\to\infty} 0$

$E[(\sum_{i=1}^{2^n} W_{nk})^2] = \sum_k E[W_{nk}^2] = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{2t^2}{4^n} = 2^n \frac{2t^2}{4^n} = \frac{2t^2}{2^n} \to_{n\to\infty} 0$.

השונות שווה למומנט השני, כי המומנט הראשון מתאפס.

קיבלנו שהשונות של $\sum W_{nk}$ שואפת לאפס כאשר $n \to \infty$.

תזכורת (אי שוויון צ'בישב) $p\{|\sum_{k=1}^{2^n} W_{nk}| > \epsilon\} \le \frac{2t^2}{\epsilon^2}(\frac{1}{2})^n \to_{n\to\infty} 0$

קיבלנו שהסכום הוא טור מתכנס־ ולפי הלמה של בורל קנטלי־ $0 \underset{n\to\infty}{\overset{p}{\to}} \sum_{k=1}^{2^n} W_{nk}$.

ראינו שהחלק הראשון מתקיים־ התנועה הבראונית איננה בעלת השתנות חסומה־ אבל גם החלק השלישי־ התנועה הבראונית בעלת השתנות ריבועית חסומה.

משפט דבורצקי־ארדש־קקוטני א. על הישר, $\mathbb{R}$, התנועה הבראונית פוגשת כל נקודה אינסוף פעמים. בפרט, $p[\cap_{n=1}^{\infty}\{B_t = 0, t > n\}] = 1$.

ב. ב־$\mathbb{R}^2$, התנועה הבראונית לא חייבת להגיע לכל נקודה, אבל היא צפופה בכל המישור. היא תגיע בהכרח לסביבה של כל נקודה.

ג. ב־ $\mathbb{R}^n$ עבור $n \ge 3$ זה לא נכון, אבל עבור $n = 3$ יש נקודות כפולות־ כלומר יש חזרה על הנקודות, עבור $n > 3$ זה לא נכון.

משפט (1) $\underset{t\to\infty}{limsup}\frac{B_t}{\sqrt{t}} = \infty$, הגבול העליון של B_t שואף לאינסוף מהר יותר מ־ $\sqrt{t}$

$\underset{t\to\infty}{liminf}\frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty$

$\underset{t\to 0}{limsup}\frac{|B_t|}{\sqrt{2tln(ln\frac{1}{t})}} = 1$. מתקיים $B_0 = 0$ ב$t = 0$. במקרה זה הגבול מתאר כמה מהר התנועה עוזבת את אפס.

משפט ($arccos$) נסמן $L = sup\{t < 1, B_t = 0\}$ (הפעם האחרונה אחרי 1 שהתנועה הגיעה ל־0). אזי $p\{L \le s\} = \frac{1}{\pi}\int_0^s \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} = \frac{2}{\pi}Arcsin(\sqrt{s})$.

אם נסמן $R = inf\{t > 1, B_t = 0\}$ (הt הראשון אחרי שהתנועה הגיעה ל־0) אזי, $f_R(1+t) = \frac{1}{\pi\sqrt{t}(1+t)}$. פונקצית הצפיפות של המשתנה המקרי.

משפט (2) לכל $a > 0$ נסמן $T_a = inf\{t, B_t = a\}$־ זמן פגיעה מינימלי. T_a מתאר את הפעם הראשונה בה B_t מגיעה ל־a.

אזי־ א. T_a זמן עצירה.

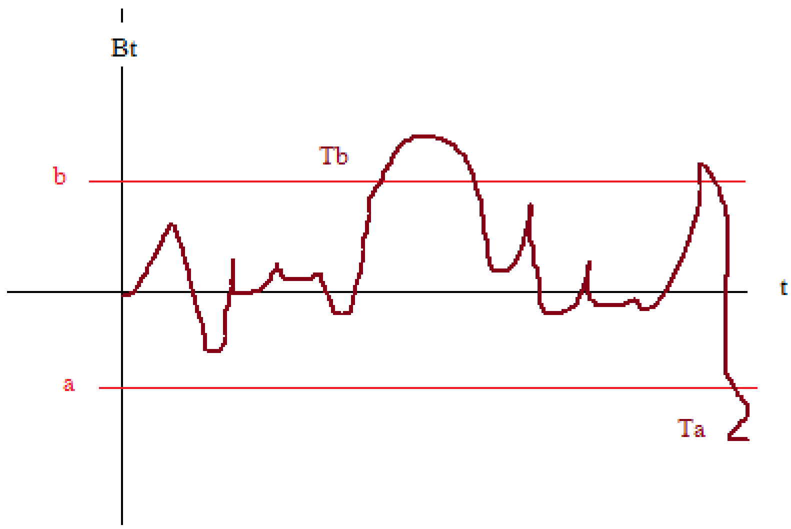
ב. $\{T_{a_s}, s \ge 0\}$ הוא תהליך בעל הוספות בלתי תלויות ונייחות.

ג. $E[e^{-\lambda T_a}] = e^{-a\sqrt{2\lambda}}$ לכל $\lambda > 0$

ד. עיקרון הסימטריות־ $p\{T_a < t\} = 2p\{B_t > a\}$. את ההסתברות $p\{B_t > a\}$ קל לחשב מתוך התפלגות נורמלית. הרעיון הוא שכאשר יש לנו a, אז בפעם הראשונה שהתנועה

הבראונית תגיע ל־a־ יש משם אותה הסתברות שהוא יעלה ושהוא ירד. כלומר־ לשבת ב־a, משום שאנחנו חסרי זיכרון־ זה כמו להתחיל מהתחלה.

ה. לכל $a < 0 < b$, $p\{T_a < T_b\} = \frac{b}{b-a}$. אם נסתכל על שני זמני עצירה־



ההסתברות שהוא יגיע ל־a לפני שהוא יגיע ל־b תלויה במרחק ביניהם.

הוכחה־ נסמן $T = min(T_a, T_b)$ כלומר־ הפעם הראשונה שהתנועה הבראונית עוברת את המלבן או מלמטה (דרך a) או מלמעלה (דרך b). יש לנו בעיה ש־T לא חסום־ לא יודעים מתי זה קורה, אז ניקח $t \in \mathbb{R}_+$, ולכן $T \wedge t$ חסום על ידי t. לפי משפט העצירה, $E[B_{T\wedge t}] = E[B_0] = 0$. ולכן אם נשאיף את $t \to \infty$, אז $E[B_T] = 0$.

אז נקבל־ $E[B_T] = ap\{T_a < T_b\}+b(1-p\{T_a < T_b\} = 0$ ולכן $p\{T_a < T_b\} = \frac{b}{b-a}$.

נשים לב ש־ $B_{T_a} = a, B_{T_b} = b$.

משפט (3) יהי $T = inf\{t, B_t \notin [a,b]\}$ עבור $a < 0 < b$ ־ הפעם הראשונה שיש יציאה מהגבולות. אז $E[T] = -ab$.

הוכחה ראינו ש־$B_t^2 - t$ הוא מרטינגל. התוחלת של כל מרטינגל היא קבועה, ומאחר וב־$t = 0$ זה אפס, אז $E[B_t^2 - t] = E[B_0^2 - 0] = -$ (ממשפט העצירה).

אז $E[B_T^2 - T] = 0$ ולכן $E[B_T^2] = E[T]$.

אז נציב ונקבל־ $E[B_T^2] = a^2\frac{b}{b-a} + b^2 \cdot -\frac{a}{b-a} = \frac{ab(a-b)}{(b-a)} = -ab = E[T]$.

משפט (משפט העצירה של סקורוחוב) יהי משתנה מקרי X כך ש־ $E[X] = 0, var(X) < \infty$, אז קיים זמן עצירה T כך ש־$B_T \sim X, E[T] = E[X^2]$.

משפט (סטראסן) הכללה של משפט העצירה של סקורוחוב־ יהי $\{S_n, n \geq 0\}$ מרטינגגל בדיד עם $S_n = 0$, אזי, קיימת סדרה של זמני עצירה $0 = T_0 \leq T_1 \leq ...$ כך שלכל k $(S_0, S_1, .., S_k) \sim (B_{T_0}, B_{T_1}, ..., B_{T_k})$.

הערה המשפטים הללו מקשרים בין זמני עצירה ותנועה בראונית.

סימולציות נרצה כעת לתת שני קירובים לתנועה הבראונית.

משפט (דונסקר) השיטה הראשונה מאוד קרובה למשפט סטראסן. המשפט נותן אפשרויות לעשות קירובים לתנועה הבראונית. תהיי סדרה של משתנים מקריים בלתי תלויים $\{X_n\}$ עם תוחלת אפס ושונות 1.

נסמן $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, וגם $\bar{S_{nt}} = \frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}}$כאשר $S_{[nt]}$ הוא הערך השלם (nt לא תמיד שלם משום ש־t לא שלם) אזי, $\bar{S_{nt}} \underset{n\to\infty}{\to} B_t$ לכל t.

הצגת פאליי־וינר יהיו $\{X_n\}$ משתנים מקריים בלתי תלויים שווי התפלגות עם תוחלת 0 ושונות 1, אז $B_t = X_0\frac{t}{\sqrt{2\pi}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n sin(\frac{nt}{2})}{n}$

תהליכים הנגזרים מהתנועה הבראונית

הגשר הבראוני $X_t = B_t - tB_1$ עבור $0 \leq t \leq 1$, $X_0 = 0 = X_1$. מתחילים ומסיימים באותה נקודה.

תהליך גאוסיאני $E[X_t] = 0, cov(X_s, X_t) = E[X_tX_s] = min(s,t) - st$. נשים לב שאחד הדברים החשובים בתהליכים גאוסיאנים הוא שהם מתאפיינים בתוחלת ובשונות משותפת־ שני המומנטים הראשונים מאפיינים תהליכים גאוסיאניים.

תנועה בראונית עם סחף $X_t = \sigma B_t + \mu t$. $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. זהו תהליך גאוסיאני $E[X_t] = \mu t$ ו־ $cov(X_t, X_s) = \sigma^2 min(s,t)$.

תנועה בראונית גאומטרית $X_t = X_0 e^{At+\sigma B_t}$. בדרך כלל $X_0 = 1$. היתרון הגדול של התהליך הזה הוא שהוא תמיד חיובי ולכן הוא מתאים למחירים. נהוג לבחור את A להיות־ $A = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$

X_t איננו גאוסיאני.

$$E[X_t] = e^{(A+\frac{\sigma^2}{2})t}$$

$$cov(X_t, X_s) = e^{(A+\frac{\sigma^2}{2})(t+s)}(e^{\sigma^2 s} - 1)$$

$$var(X_t) = e^{(2A+\sigma^2)t}(e^{\sigma^2 t} - 1)$$

הוכחה $Z \sim N(0,1)$ אז $E[e^{\lambda Z}) = e^{\frac{\lambda^2}{2}}$

$$E[X_t] = e^{At}E[e^{\sigma B_t}] = e^{At}E[e^{\sigma\sqrt{t}B_1}]$$

המעבר האחרון נובע מכך שבחרנו משתנה מקרי שמתפלג כמו B_t מתקיים $B_t \sim N(0,t)$ וגם $B_1 \sim (0,1)$, ולכן $B_t \sim \sqrt{t}B_1$.

מכאן נקבל־

$$E[X_t] = e^{At}E[e^{\sigma\sqrt{t}B_1}] = e^{At}e^{\frac{\sigma^2 t}{2}}$$

רעש צבוע $X_t = \frac{B_{t+h} - B_t}{h}$ עבור $h > 0$ קבוע.

התהליך הוא תהליך גאוסיאני, נייח, $E[X_t] = 0$ וגם $cov(X_t, X_s) = \frac{s+h-min(s+h,t)}{h^2}$, $var(X_s) = \frac{1}{h}$.

התנועה הבראונית השברית תהליך גאוסיאני X_t כך ש־ $E[X_t] = 0, cov(X_t, X_s) = \frac{1}{2}[|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}]$ עבור $0 < H < 1$. נשים לב שעבור $H = \frac{1}{2}$, מתקיים $cov(X_t, X_s) = min(s,t)$ ולכן נקבל את התנועה הבראונית.

כל הדברים הללו הם הגדרה משום שתהליך גאוסיאני מאופיין על ידי התוחלת והשונות המשותפת.

שיעור 11

תהליכי פואסון

הגדרה (תהליך נקודתי) תהליך סטוכסטי המקיים שלוש תכונות:

1. $X_0 = 0$
2. אם $s < t$ אז $X_s \leq X_t$ ־ מונוטוניות.
3. $X_t \in \mathbb{N}$ ־ כלומר, התהליך מקבל מספרים טבעיים.

הערה תהליך נקודתי X_t הוא למעשה תהליך ספירה/מנייה־ מקבל ערכים עולים וטבעיים.

הגדרה (תהליך פואסון) תהליך $X = \{X_t\}_{t\leq 0}$ נקרא תהליך פואסון (סטנדרטי) אם הוא מקיים את שלוש התכונות הבאות־

1. $X_0 = 0$.
2. התהליך בעל הוספות בלתי תלויות.
3. קיים מספר חיובי λ כך שלכל $s < t$, מתקיים $X_t - X_s \sim poiss(\lambda(t-s))$.

(פרמטר כפול אורך הקטע).

הגדרה (תהליך פואסון לא הומוגני) אם במקום 3 מניחים שיש פונקציה חיובית $\lambda(t) \geq 0$ כך שלכל $s < t$, $X_t - X_s \sim poiss(\int_s^t \lambda(u)du$ אז התהליך נקרא תהליך פואסון לא הומוגני. אם בוחרים פונקציה קבועה $\lambda(t) = \lambda$ אז ההגדרה זהה.

תכונות תהליך פואסון (סטנדרטי) יהי $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ תהליך פואסון, אזי מתקיים:

1. X תהליך נקודתי.
2. X תהליך נייח.
3. X תהליך בעל הוספות בלתי תלויות.
4. כל הקפיצות של X הן בגודל אחד. כלומר־ $X_t = lim_{n\to\infty} X_{t-\frac{1}{n}} = X_t - X_{t^-} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$
5. לכל h, t זמנים, $p\{X_{t+h} - X_t \geq 1\} = \lambda h + o(h)$.

6. $p\{X_{t+h}-X_t>1\}=o(h)$. ההסתברות שבקטע קטן ייכנסו שני אנשים או יותר לבנק היא אפשרית־ היא לא אפס, אבל היא שואפת לאפס מהר מאוד.

הגדרה ($o(h)$) פונקציה f נקראת $o(h)$ אם מתקיים $\frac{f(h)}{h}\rightarrow_{h\rightarrow 0}0$. הפונקציה שואפת לאפס מהר יותר מ־h. למשל $f(x)=x^2$.

הערות סכום של שתי פונקציות שהן $o(h)$ גם הוא $o(h)$. כלומר־ $f(x)=o(x)$ וגם $g(x)=o(x)$ אז $\frac{f(x)+g(x)}{x}=\frac{f(x)}{x}+\frac{g(x)}{x}\rightarrow_{x\rightarrow 0}0$.

מכפלה של שתי פונקציות שהן $o(h)$ גם הוא $o(h)$. כלומר־ $f(x)=o(x)$ וגם $g(x)=o(x)$ אז $\frac{f(x)\cdot g(x)}{x}=\frac{f(x)}{x}\cdot\frac{g(x)}{x}\rightarrow_{x\rightarrow 0}0$.

7. כל תהליך פואסון הוא תת מרטינגל.

8. הקזז של תהליך פואסון הוא λt (כמו בתנועה הבראונית, רק עם קבוע). כלומר־ $X_t-\lambda t$ הוא מרטינגל.

הוכחות (של חלק מהתכונות) 1. התהליך נקודתי־ התכונה הראשונה־ מתחילים מאפס, נובעת מההגדרה. התכונה השנייה, מונוטוניות־ $s<t$, אז $X_t-X_s\sim poiss(\lambda(t-s))$. בהתפלגות פואסון־ הערכים שמקבלים הם חיוביים־ $0,1,2,3,4..$ ולכן , $X_t-X_s\geq 0$ תמיד, ולכן $X_t\geq X_s$. התהליך מקבל מספרים טבעיים מההגדרה של תהליך פואסון. כלומר־ $X_t-X_0=X_t\sim pois(\lambda t), X_t=0,1,2,3...\in\mathbb{N}$ ולכן הוכחנו שתהליך פואסון הוא תהליך נקודתי.

2. תכונה 2 נכונה רק אם התהליך הוא פואסון סטנדרטי. נייחות פירושה שאם לוקחים שני קטעים באותו אורך, ההתפלגות אותה התפלגות. כלומר־ $X_t-X_s\sim X_{t+h}-X_{s+h}$. אז $X_t-X_s\sim poiss(\lambda(t-s))$ וגם $X_{t+h}-X_{s+h}\sim poiss(\lambda(t+h-s-h))=poiss(\lambda(t-s))$ ולכן ההתפלגות זהה.

3. נובעת ישירות מההגדרה.

4. לא נוכיח.

5. $p\{X_{t+h}-X_t\geq 1\}=1-p\{X_{t+h}-X_t=0\}=1-e^{-\lambda h}=1-\frac{1}{e^{\lambda h}}$

נרצה להראות ש־ $1-e^{-\lambda h}=\lambda h+o(h)$.

נחלק את שני האגפים ב־h - $\frac{1}{h} - \frac{1}{he^{\lambda h}} = \lambda h + \frac{o(h)}{h}$. נשאיף את h ל־0 ונקבל־ על־ידי כלל לופיטל־ $\lambda = \frac{\lambda e^{-\lambda h}}{1} \rightarrow \frac{1-e^{-\lambda h}}{h}$.

מכאן נובע כי יש שוויון ולכן קיבלנו את הנדרש.

6. $p\{X_{t+h} - X_t > 1\} = 1 - p\{X_{t+h} - X_t = 0\} - p\{X_{t+h} - X_t = 1\} =$
$1 - e^{-\lambda h} - \lambda h e^{-\lambda h} = o(h)$

7. כל תהליך מונוטוני הוא תת מרטינגל ומכיוון שתהליך פואסון הוא נקודתי הוא גם מונוטוני.

$$E[X_t/F_s] \geq E[X_s/F_s] = X_s$$

$$E[X_t/F_s] = E[X_s + (X_t - X_s)/F_s] = E[X_s/F_s] + E[(X_t - X_s)/F_s] =$$

$$= X_s + E[X_t - X_t] = X_s + \lambda(t-s) \geq X_s$$

ולכן תהליך פואסון הוא תת מרטינגל. המעברים האחרונים נובעים מכך שX_s מדיד לפי F_s ושההפרשים בלתי תלויים.

8. $E[X_t - \lambda t/F_s] = E[X_t/F_s] - \lambda t = X_s + \lambda t - \lambda s - \lambda t = X_s - \lambda s$ ולכן מרטינגל.

משפט יהי X תהליך פואסון לא הומוגני, אזי X נייח אם ורק אם X סטנדרטי. (אם ורק אם $\lambda(t) = \lambda$). λ היא למעשה פונקציית עוצמה ומודדת שינויים. אם היא לא קבועה, מקבלים שטחים שונים בהזזת הקטעים.

משפט (טים בראון 1984) אם X תהליך המקיים את 4 התכונות הראשונות אזי הוא תהליך פואסוני. תהליך נקודתי, נייח, בעל הוספות בלתי תלויות, קפיצות של 1, אז הוא בהכרח פואסוני.

משפט (ווטאנאבה 1964) יהי X תהליך נקודתי. אזי X תהליך פואסון אם ורק אם קיים מספר $\lambda > 0$ כך ש־ $X_t - \lambda t$ מרטינגל.

משפט יהי X המקיים את התכונות 1,2,3,5,6 אזי X תהליך פואסוני.

במשפט זה נוותר על תכונה 4 ונבחר במקומה את תכונות 5,6 ־ זה גורר פואסוניות.

הוכחה נסמן $p(t)=\sum_{n=1}^{\infty}p_n(t)$, $p_n(t)=p\{X_t=n\}$.

אז לפי תכונה 5, אפשר לומר־ $p(t)=\lambda t+o(t)$.

ומתכונה 6 ־ $\sum_{n=2}^{\infty}p_n(t)=o(t)$.

אנחנו צריכים להראות שהתהליך פואסון.

$p_0(t+h)=p_0(t)p_0(t)=p_0(t)(1-p_0(h)$

$p_0(h)$ פירושו שאף אחד לא נכנס בקטע באורך h.

נעביר אגפים ונקבל־ $p_0(t+h)-p_0(t)=-p_0(t)p(h)$

נחלק ב־h ונקבל־

$\frac{p_0(t+h)-p_0(t)}{h}=\frac{-p_0(t)p(h)}{h}$

אם נשאיף $h\to 0$, נשים לב שאגף שמאל הוא נגזרת ונקבל־

$p'(t)=-p_0(t)\frac{\lambda h+o(h)}{h}=-\lambda p_0(t)$

קיבלנו $p'_0(t)=-\lambda p_0(t)$.

האקספוננט היא הפונקציה היחידה שאם גוזרים אותה נשארים ללא שינוי.

מתוך זה, אנחנו יודעים ש־p_0 היא פונקציה מעריכית עם פרמטרים מסוימים. כלומר־ $p_0(t)=ce^{-at}$ (זה הפיתרון של משוואה דיפרנציאלית)

יש לנו תנאי שפה ועל־ידם נמצא את הפרמטרים. $p_0(0)=1$ זה מכך ש־ $p_0(0)$ היא ההסתברות ש־X_0 יהיה שווה ל־0 אבל זאת התכונה הראשונה ולכן ההסתברות היא 1. אז נציב ונמצא־ $p_0(0)=ce^0=c=1$.

קיבלנו כעת ש־ $p_0(t)=e^{-at}$

תנאי נוסף הוא ש־

$p'_0(t)=-ae^{-at}$ ולכן $a=\lambda$ ונקבל $p_0(t)=e^{-\lambda t}$.

$p_n(t+h)=p_n(t)p_0(h)+p_{n-1}(t)p_1(h)+(\sum_{i=2}^{n}p_{n-i}(t)p_i(h))$

אפשרות ראשונה שנכנסו n אנשים עד זמן t, ואפס אנשים עד זמן h. אפשרות שנייה שנכנסו $n-1$ אנשים עד זמן t ואדם אחד בזמן $t+h$. שאר האפשרויות הן זניחות מבחינה הסתברותית ומסתכמות במחובר השלישי.

נסתכל על המחובר השלישי ונטען שהוא $o(h)$.

$0\le\sum_{i=2}^{n}p_{n-i}(t)p_i(h)\le\sum_{i=2}^{n}p_i(h)\le\sum_{i=2}^{\infty}p_i(h)=o(h)$

אז מצד אחד הביטוי גדול שווה מאפס כי זה סכום של הסתברויות. מצד שני, הסתברות תמיד קטנה מ־1 . סכום של פונקציות שהן $o(h)$ הוא $o(h)$.

$$p_n(t+h) = p_n(t)(1-p(h)) + p_{n-1}(t)p_1(h) + o(h)$$

נעביר אגפים ונקבל־

$$p_n(t+h) - p_n(t) = -p(h)p_n(t) + p_{n-1}(t)p_1(h) + o(h)$$

נחלק את שני האגפים ב־h ונקבל־

$$\frac{p_n(t+h)-p_n(t)}{h} = \frac{-p(h)p_n(t)}{h} + \frac{p_{n-1}(t)p_1(h)}{h} + \frac{o(h)}{h}$$

לאחר השאפה של $h \to 0$ נקבל־

$$p_n'(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t)$$

נפתור על־ידי נוסחת נסיגה־

עבור $n=1$, נקבל

$$p_1'(t) = -\lambda p_1(t) + \lambda e^{-\lambda t}$$

הפתרון של המשוואה הוא $p_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$.

ובאופן רקורסיבי־

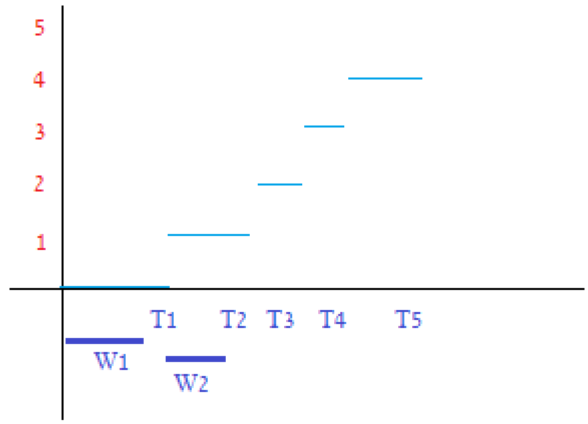
$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$.

משפט (גליבנקו־קנטלי) תהיי $\{X_n\}$ סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות חסומים ורציפים אזי לכל t, $\sum_{i=1}^n I_{\{X_i \le \frac{t}{n}\}} \to_{n\to\infty} X_t$ כאשר X_t תהליך פואסון.

I האינדיקטור סופר כמה משתנים מקריים מהסדרה עד n שקטנים מ־$\frac{t}{n}$.

טענה יהי X תהליך נקודתי. נסמן $T_n = inf_t\{t : X_t = n\}$, $W_n = T_n - T_{n-1}$ הזמן בין מופע ומופע־ $Waiting$. אזי, $T_n = \sum_{i=1}^n W_i$ וגם $X_t = \sum_{i=1}^\infty I_{\{T_n \le t\}}$.

הרעיון הוא שיש לנו תהליך נקודתי שמתחיל באפס. T_n= פעם ראשונה שמגיעים ל־n. כלומר־ זמן עצירה. אז, למעשה, אם מכירים רק את W_i אפשר לבנות את T_n כסכום שלהם. X_t הוא סכום האינדיקטורים ולפיכך, יש התאמה חד חד ערכית בין תהליך נקודתי ובין סדרת זמנים בין מופע ומופע שלו. אז למעשה, כאשר אנחנו רוצים להגדיר תהליך נקודתי אפשר לעשות זאת ישירות או להסתכל על הזמנים בין מופע למופע, מהם מקבלים את הזמני עצירה ואז בונים את התהליך.



טענה תהליך הוא פואסון אם ורק אם זמני העצירה הם בלתי תלויים ומעריכיים.

משפט יהי X תהליך נקודתי, אזי הטענות הבאות שקולות־

1. X תהליך פואסון.
2. הסדרה $\{W_n\}$ היא בלתי תלויה ושוות התפלגות עם התפלגות מעריכים.
3. $\{W_n\}$ בלתי תלויים ולכל $0 \leq s \leq t$ בהינתן $\{X_t = n\}$ מתקיים $X_s \sim Bin(n, \frac{s}{t})$.
4. לכל תהליך פואסון Y_tבלתי תלוי ב־X_t , התהליך $X_t + Y_t$ הוא תהליך פואסון.

הכללות חשובות של תהליך פואסון

הגדרה (תהליך פואסון מורכב) X נקרא תהליך פואסון מורכב־ $(Compound)$ אם הוא ניתן לכתיבה על־ידי $X_t = \sum_{i=1}^{Y_t} Z_i$ כאשר Y_t תהליך פואסון ו$\{Z_i\}$ משתנים מקריים בלתי תלויים שווי התפלגות. אם כל ה־Z_i שווים ל־1 , אז $X_t = Y_t$ וזה תהליך פואסון כללי.

=

$$E[X_t] = \lambda t E[Z_1]$$

$$var(X_t) = \lambda t E[Z_1^2]$$

הגדרה (תהליך פואסון סטוכסטי כפול/תהליך קוקס) יהי $X = \{X_t\}$ תהליך נקודתי המותאם לסינון F_t ותהיי $\{\lambda_t\}$ תהליך סטוכסטי נוסף חיובי, $\lambda_t \geq 0$, כך ש־ λ_t מדיד לפי F_0 וכך ש־$\int_0^t \lambda_s ds < \infty$ אזי X נקרא תהליך סטוכסטי כפול/ תהליך קוקס אם לכל k מתקיים $p\{X_t - X_s = k/F_s\} = [e^{-\int_s^t \lambda_u du}(\int_s^t \lambda_u du)^k]/k!$

בעיה נפוצה היא שהרבה פעמים לא יודעים מהו הפרמטר λ (כשהוא בעצמו תהליך סטוכסטי) ואז במקרה זה מקבלים תהליך סטוכסטי כפול.

אם התהליך דטרמיניסטי, כלומר λ_t קבוע. אז קיבלנו תהליך פואסון כללי.

משפט (ברמו־ הכללה של וואטאנאבה) יהי X תהליך נקודתי מותאם לסינון F_t. ו־ $\{\lambda_t\}$ תהליך מדיד לפי F_0 אינטגרבילי אזי X הוא תהליך קוקס ומתקיים $X_t - \int_0^t \lambda_u du$ מרטינגל ביחס לסינון $\{F_t\}$. כלומר־ כאן הקזז הוא לא דטרמיניסטי.

שיעור 12

האינטגרל הסטוכסטי

האינטגרל הראשון שראינו היה אינטגרל רימן. אם יש פונקציה כלשהי ואנחנו רוצים לדעת מה השטח בין הפונקציה ובין ציר x בקטע של גבולות מסוימים על הציר, למשל $[a, b]$, הרעיון הוא להכיר את השטח כגבול שטחים של מלבנים. אנחנו מחלקים את הקטע $[a, b]$ לקטעים קטנים ונסתכל על השטחים ביניהם. $\int_a^b f(x)dx = lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f(t_i')(t_{i+1} - t_i)$ כאשר $a \leq t_1 ... \leq t_n \leq b$, ולכל i, $t_i \leq t_i' \leq t_{i+1}$. יש תנאים מאוד בסיסיים.

עם זאת, אינטגרל רימן לא עולה על כל הצרכים, והאינטגרל הבא היה אינטגרל סטילטסט, בסוף המאה ה19. הרעיון של סטילטסט היה שהבסיס יוכל להשתנות. $\int_a^b f(x)dg(x) = lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f(t_i')[g(t_i) - g(t_{i-1})]$. נשים לב שאינטגרל סטילטסט הוא הכללה של אינטגרל רימן כך שאם ניקח $g(x) = x$ נקבל את אינטגרל רימן. הוכח שיש אם f רציפה, אינטגרל סטילטסט קיים אם ורק אם g בעלת השתנות חסומה (אם ורק אם g היא הפרש של שתי פונקציות מונוטוניות). פונקציה g נותנת מעין מסות שונות וזאת למעשה הסיבה ההיסטורית שהומצא אינטגרל סטילטסט. האינטגרל הבא הוא אינטגרל וינר שעשה ניסיון לחשב אינטגרל של פונקציות ביחס לתנועה הבראונית. $\int_a^b f(t)dB_t$ כאשר $\{B_t\}$ התנועה הבראונית. החשיבות הגיעה מפיתרון בעיות של רעשים. מכיוון שהתנועה הבראונית לא בעלת

השתנות חסומה, האינטגרל לא יכול להתקיים בשל המשפט של סטילטסט. וינר הצליח לתת מובן לביטוי הזה ונתן הגדרה אמיתית למרות שהתנועה הבראונית איננה בעלת השתנות חסומה. הרעיון הוא להשתמש בעובדה שהתנועה הבראונית אקראית למרות זאת. במקרה זה, האינטגרל הוא משתנה מקרי. ניזכר שהשתנות חסומה היא $\sum|B_{t_i}-B_{t_{i-1}}|$ ובתנועה בראונית הביטוי הוא אינסופי.

אינטגרל איטו 1944 איטו הכליל את וינר והגדיר את האינטגרל הסטוכסטי מ־a ל־b ובמקום לקחת פונקציה $f(t)$ הוא לקח תהליך סטוכסטי X_t. הוא הגדיר־ $\int_a^b X_t dB_t$ כאשר X_t תהליך סטוכסטי ־ פונקציה התלויה ב־w. מבחינה מתמטית אין הרבה חידושים מול וינר. החידוש הבא היה בשנת 1967 על־ידי שני מתמטיקאים יפנים נוספים־ קוניטה ווטאנאבה־ הם שמו לב שאפשר להכליל את איטו ובמקום תנועה בראונית לקחת כל מרטינגל שהוא M_t ולהסתכל על $\int_a^b X_t dM_t$. הרעיון של קוניטה־ ווטאנאבה היה שהם שמו לב שעל מנת להוכיח קיום איטגרל איטו משתמשים בשתי תכונות יסודיות־ הראשונה היא ש־B_t מרטינגל והשנייה היא ש־B_t^2-t מרטינגל (את שתי התכונות הללו הוכחנו). ההכללה שלהם הייתה־ תהיי f פונקציה גזירה פעמיים, אזי, $f(M_t)-f(M_0)=\int_o^t f'(M_s)dM_s+\frac{1}{2}\int_0^t f''(M_s)d<M>_s$. משפט מאייר מ־1978 אומר שניתן להכליל את האינטגרל הסטוכסטי עבור סמי מרטינגלים (מרטינגלים למחצה) ואי אפשר להכליל יותר. מרטינגלים למחצה כוללים תתי מרטינגלים, עלי מרטינגגלים ומרטינגלים מקומיים.

הגדרה (מרטינגל מקומי) תהליך X_t נקרא מרטינגל מקומי אם קיימת סדרה עולה של זמני עצירה $T_1\le T_2\le ..$ כך ש־ $\{X^{T_n}\}$ מרטינגל לכל n . כלומר־ אם אפשר למצוא זמני עצירה כך שאותו תהליך, אם נעצור אותו בזמן עצירה (קבוע משלב מסוים) יקיים את הדרישה שהתהליכיים הנעצרים הם מרטינגלים. נסמן $X_t^{T_n}=X_{T_n\wedge t}$.

בניית האינטגרל הסכטוסטי (אינטגרל איטו) במקום לקחת a,b כלליים, ניקח $[0,t]$ עם חלוקה של $a=t_0<t_1<...<t_n=t$, ונסמן $X=\{X_t,t\ge 0\}$, $\Delta_i=t_i-t_{i-1}$, $\Delta_i X=X_{t_i}-X_{t_{i-1}}$.

נגדיר מספר משתנים נוספים:

$S_n(X,t)=\sum_{i=1}^n X_{t_{i-1}}\cdot\Delta_i X$ ־ הקירוב של האינטגרל.

$Q_n(X,t) = \sum_{i=1}^{n} (\Delta_i X)^2$ - ההשתנות הריבועית.

המטרה שלנו תהיה ש-S_n יתכנס. נשים לב שלפי משפט סטילטסט, ההשתנות הריבועית לא מתכנסת לכאורה.

אם $Q_n(X,t)$ מתכנס, קיים הגבול ונסמנו ב-$Q(X,t)$.

אם X הוא התנועה הבראונית, ראינו שההשתנות החסומה קיימת ושווה ל-t.

טענה 1 לכל תהליך X_t כך ש-$X_0 = 0$, כך ש-X מרטינגל, אזי $S_n(X,t)$ מרטינגל ומתכנס, $S_n(X,t) = \frac{1}{2}X_t^2 - \frac{1}{2}Q_n(X,t)$.

הוכחה נסמן תהליך חדש $Y_{t_i} = X_{t_{i-1}}$. היות ו-X מותאם לסינון, אזי Y_{t_i} ניתן לחיזוי, ולכן $S_n(X,t) = (Y \bullet X)_n$. קיבלנו התמרת ברוקהולדר ולכן מרטינגל.

נתחיל באגף ימין- $\frac{1}{2}X_t^2 - \frac{1}{2}Q_n(X,t) = \frac{1}{2}X_t^2 - \frac{1}{2}\sum_i (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 =$

$= \frac{1}{2}X_t^2 - \frac{1}{2}[\sum X_{t_i}^2 + \sum X_{t_{i-1}}^2 - 2\sum X_{t_i}X_{t_{i-1}}] =$

מאחר ומדובר בטור טלסקופי, אז $X_n = X_t$-

$\frac{1}{2}X_t^2 - \frac{1}{2}[X_t^2 + 2\sum X_{t_{i-1}}^2 - 2\sum X_{t_i}X_{t_{i-1}}] = \sum X_{t_{i-1}}(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) = S_n(X,t)$.

טענה 2 א. $Q_n(B,t)$ מתכנס במומנט שני ל-t.

ב. ניתן להגדיר את האינטגרל הסטוכסטי $\int_0^t B_s dB_s$ להיות שווה ל- $\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t)$.

ג. $(dB_t)^2 \simeq (B_{t+dt} - B_t)^2$

ד. $\int_0^t (dB_s)^2 = \int_0^t ds = t$

הוכחה (ב) מהטענה הקודמת, $S_n(X,t) = \frac{1}{2}X_t^2 - \frac{1}{2}Q_n(X,t)$

$S_n(B,t) = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}Q_n(B,t)$

נשאיף את שני האגפים- $n \to \infty$

ונקבל-

$lim_{n\to\infty} S_n(B,t) = \frac{1}{2}(B_t^2 - t)$

B_t^2 לא תלוי ב-n, ו $lim_{n\to\infty} Q_n(B,t) = t$

קיבלנו-

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} B_{t_{i-1}}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = \frac{1}{2}(B_t^2 - t)$$

ולכן־ $\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t)$.

הגדרה תהליך סטוכסטי $C = \{C_t, t \geq 0\}$ נקרא תהליך פשוט של חלוקה $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$ וסדרה של משתנים מקריים $Z_1, ..., Z_n$ כך ש־ $C_t = \begin{cases} Z_n & t = T \\ Z_i & t_{i-1} \leq t \leq t_i \end{cases}$

וכך שלכל i, Z_i מדיד לפי $F_{t_{i=1}}-$ ו־ $E[Z_i^2] < \infty$.

דוגמאות 1. פונקציה דטרמיניסטית־

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{n-1}{n} & t = T \\ \frac{i-1}{n} & \frac{i-1}{n} \leq t \leq \frac{i}{n} \end{cases}$$

.2 $$C_t = \begin{cases} Z_n = B_{t_{n-1}} & t = T \\ Z_i = B_{t_{i-1}} & t_{i-1} \leq t \leq t_i \end{cases}$$

הגדרה האינטגרל הסטוכסטי של תהליך פשוט C ביחס לתנועה בראונית, $\int_0^t C_s dB_s = \sum_{i=1}^{n} C_{t_{i-1}}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = \sum_{i=1}^{n} Z_i \Delta_i B$.

כאשר התהליך איננו פשוט־ מגיע החידוש של איטו.

עבור $t_{k-1} \leq t \leq t_k$, $\int_0^t C_s dB_s = \int_0^T C_s I_{[0,t]}(s) dB_s = \sum_{i=1}^{k-1} Z_i \Delta_i B + Z_k(B_t - B_{t_{k-1}})$.

דוגמאות 1. $\int_0^t f_n(s) dB_s = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{i-1}{n}(B_{\frac{i}{n}} - B_{\frac{i-1}{n}}) + \frac{k-1}{n}(B_t - B_{\frac{k-1}{n}})$.

.2 $\int_0^t C_s dB_s = \sum_{i=1}^{k-1} B_{t_{i-1}} \Delta_i B + B_{t_{k-1}}(B_t - B_{t_{k-1}})$.

נשים לב שמתקיים $E[\int_0^t C_s dB_s] = 0$.

תוחלת של סכום היא סכום התוחלות ולכן־

$$E[\sum_{i=1}^{k-1} Z_i \Delta_i B] = \sum_{i=1}^{k-1} E[Z_i \Delta_i B]$$

Z_i הוא ניתן לחיזוי, מדיד לפי $F_{t_{i-1}}$, בלתי תלוי, וניתן להפריד בין התוחלות,

$$E[\sum_{i=1}^{k-1} Z_i \Delta_i B] = \sum_{i=1}^{k-1} E[Z_i \Delta_i B] = \sum_{i=1}^{k-1} E[Z_i] E[\Delta_i B]$$

מכיוון שB התנועה הבראונית, אז $\Delta_i B \sim M(0, \Delta t_i)$ ולכן התוחלת אפס.

משפט (האיזומטריה הריבועית) $E\left[(\int_0^t C_s dB_s)^2\right] = \int_0^t E[C_s^2]ds$

אגף שמאל הוא משתנה מקרי $\int_0^t C_s dB_s$- אנחנו יודעים שהתוחלת שלו היא אפס, ונרצה לדעת מה השונות שלו. אז מכיוון שהתוחלת היא אפס, $var(\int_0^k C_s dB_s) = E[(\int_0^t C_s B_s)^2]$.

אגף ימין הוא אינטגרל רימן רגיל ולכן הוא תמיד מוגדר ומתוך השוויון הזה נוכל להגדיר את האינטגרל הסטוכסטי האמיתי. אחרי שנוכיח את זה, אגף ימין מוגדר לא רק עבור C_s פשוט אלא עבור כל תהליך, כל פונקציה f כי התוחלת היא פונקציה ואינטגרל של פונקציה ds אינטגרל רגיל.

הוכחה נניח $t = t_k$, $W_i = Z_i \Delta_i B$.

אז $E[(\int_0^t C_s dB_s)^2] = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k E[W_i W_j]$

$E[(\sum W_i)^2] = E[\sum_i \sum_j W_i W_j] = \sum_i \sum_j E[W_i W_j]$

עבור $i \neq j$, המשתנים המקריים W_i, W_j בלתי תלויים (התנועה הבראונית בעלת תוספות בלתי תלויות).

ולכן- $E[W_i W_j] = E[W_j Z_i] E[\Delta_i B] = 0$

במקום- W_i נכתוב $Z_i \Delta_i B$.

כלומר- כאשר i שונה מ-j הכל מתאפס. ונשארים רק המקרים בהם $i = j$.

מכאן כי-

$$E[(\int_0^t C_s dB_s)^2] = \sum_{i=1}^k E[W_i^2] = \sum_{i=1}^k E[(Z_i \Delta_i B)^2] = \sum_{i=1}^k E[Z_i^2] E[(\Delta_i B)^2] =$$
$$\sum_{i=1}^k E[Z_i^2](t_i - t_{i-1}) = \int_0^t E[C_s]ds$$

המעבר הראשון הוא חישוב, השני הוא הצבה של W_i, השלישי הוא פירוק מכך שיש אי תלות, הרביעי נובע מכך שהשונות של התנועה הבראונית שווה ל-$t_i - t_{i-1}$ והשלישי הוא הגדרה של אינטגרל רימן.

משפט יהי $C = \{C_t\}$ תהליך כללי המקיים שני תנאים-

1. C מותאם לסינון של התנועה הבראונית.
2. האינטגרל $\int_0^T E[C_s^2]ds$ קיים.

אזי, קיימת סדרה $C^{(n)}$ של תהליכים סטוכסטיים פשוטים המתכנסל ל-C ומתקיים $\int_0^t C dB_s = lim_{n\to\infty} \int_0^t C_s^{(n)} dB_s$.

זאת בעצם ההגדרה של איטו. אנחנו טוענים שלכל תהליך כללי, יש סדרה של תהליכים פשוטים שמתכנסת אליו. לשם ההוכחה נצטרך להראות שני דברים־ אם ניקח תהליכים פשוטים שמתכנסים למשהו, הגבול של האינטגרל הסטוכסטי קיים.

שיעור 13

הגדרה (סימון) נסמן ב־ $m^2(B)$ את אוסף התהליכים הסטוכסטיים $C = \{C_t, t \geq 0\}$ המקיימים את התנאים הבאים־

1. C מותאם לסינון של התנועה הבראונית.
2. $\int_0^\infty E[C_s^2]ds < \infty$.

באופן כללי יותר, תהיי M מרטינגל כך ש־ $E[M_t^2] < \infty$ אזי, $m^2(M)$ הוא אוסף כל התהליכים הסטוכסטיים $C = \{C_t, t \geq 0\}$ המקיימים־

1. C ניתן לחיזוי ביחס לסינון של M.
2. $\int_0^T E[C_s^2]d < M >_s < \infty$.

לכאורה אלו שתי הגדרות שונות אבל בפועל זה אותו דבר.

משפט יהי $C \in m^2(B)$ אזי קיימת סדרה של תהליכים פשוטים $\{C^{(n)}\}$ כך ש־

1. $\int_0^T E[(C_s - C_s^{(n)})^2]ds \to_{n\to\infty} 0$.
2. קיים תהליך סטוכסטי $I(C) = \{I_t(C), t \geq 0\}$ כך ש־ $E[sup_{0\leq t\leq T}(I(C) - \int_0^t C_s^{(n)}dB_s)^2] \to_{n\to\infty} 0$. תהליך זה נקרא האינטגרל הסטוכסטי של C ביחס ל־B והוא מסומן ב־ $I_t(C) = \int_0^t C_s dB_s$.

שבוע שעבר בנינו אינטגרל סטוכסטי עבור תהליכים פשוטים (תהליכים שמקבלים n ערכים בלבד). המשפט הזה אומר שניקח תהליך סטוכסטי ככל שנרצה והדרישה היחידה שלנו תהיה קיום התנאים בהגדרה, אזי, קיימת סדרה שנוכל להתקרב אליה במובן של השונות. זה ביחס לB והסימון שלו הוא $I_t(C) = \int_0^t C_s dB_s$.

תכונות האינטגרל הסטוכסטי 1. לינאריות עבור תהליכים־ $\int(C_s+X_s)dB_s = \int C_s dB_s + \int X_s dB_s$

2. לינאריות ביחס לקטעים־ $\int_a^b C_s dB_s = \int_a^c C_s dB_s + \int_c^b C_s dB_s$ עבור $a < c < b$.

3. $\int_0^t C_s dB_s$ הוא מרטינגל ־ התכונה חשובה כי אז נשארים באותה משפחה, כלומר, אפשר להפעיל שוב אינטגרל סטוכסטי על האינטגרל הזה וכן הלאה.

4. התוחלת היא אפס.

5. האינטגרל הסטוכסטי הוא תהליך רציף־צריך להיזהר כי במידה ומחליפים את התנועה הבראונית בתהליך לא רציף אז התנאי לא מתקיים.

6. שוויון האיזומטריה הריבועית־ $E[(\int_0^t C_s dB_s)^2] = \int_0^t E[C_s^2]ds$.

באופן כללי יותר, שוויון האיזומטריה הריבועית המוכללת הוא $E[(\int_0^t C_s dM_s)^2] = E\left[\int_0^t E[C_s^2]d < M >_s\right]$. לא ביחס לתנועה הבראונית אלא ביחס למרטינגל כללי.

נוסחאות איטו

הנוסחה הבסיסית תהיי f פונקציה גזירה פעמיים. אזי, $f(B_t)-f(B_s) = \int_s^t f^{'}(B_u)dB_u + \frac{1}{2}\int_s^t f^{''}(B_u)du$.

דוגמאות 1. $f(t) = t^2$. אזי־ $f(B_t) = B_t^2$ ולכן, מנוסחת איטו נקבל־ $B_t^2 - B_s^2 = \int_s^t 2B_u dB_u + \frac{1}{2}\int_s^t 2du = 2\int_s^t B_u dB_u + (t-s)$

עבור $s=0$, $B_t^2 = 2\int_0^t B_u dB_u + t$

ולכן־ $\int_0^t B_u dB_u = \frac{1}{2}(B_t^2 - t)$.

אז אכן קיבלנו ש־ $\int_0^t B_u dB_u$ מרטינגל כפי שראינו בתכונה 3 .

משהו נוסף שנשים לב אליו הוא שיש להחסיר או להוסיף את הקיזז לאינטגרל.

2. $f(t) = t^3$, אז $f(B_t) = B_t^3$, ולכן מנוסחת איטו נקבל־ $B_t^3 - B_s^3 = \int_s^t 3B_u^2 dB_u + \frac{1}{2}\int_s^t 6B_u du = 3\int_s^t B_u^2 dB_u + 3\int_s^t B_u du$

אם ניקח $s=0$, אז $B_t^3 = 3\int_0^t B_u^2 dB_u + 3\int_0^t B_u du$

ואז נקבל־ B_t^3 הוא תת מרטינגל, ומאחר ו־ $\int_0^t B_u^2 dB_u$ הוא מרטינגל, אז $\int_0^t B_u^2 dB_u = \frac{1}{3}B_t^3 - \int_0^t B_u du$. ולכן הקיזז של תת המרטינגל B_t^3 הוא $\int_0^t B_u du$.

נוסחת איטו השנייה ניקח פונקציית שני משתנים לתוך $\mathbb{R}$.

תהיי $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ פונקציה עם נגזרות שניות רציפות. אזי, $f(t, B_t) - f(s, B_s) = \int_s^t \left[f_1(u, B_u) + \frac{1}{2}f_{22}(u, B_u)\right]du + \int_s^t f_2(u, B_u)dB_u$.

f_i היא הגזרת לפי הרכיב ה־i (הראשונה) f_{ii} היא הנגזרת ה־i לפי הרכיב ה־i.

דוגמאות 1. תנועה בראונית גאומטריית ($e^{B_t+sahaf}$)

$f(t,u)=e^{u-\frac{1}{2}t}$, אז נסתכל על הנגזרות־

$f_1(t,u)=-\frac{1}{2}f(t,u)$

$f_2(t,u)=f(t,u)$

$f_{22}(t,u)=f(t,u)$

נשתמש בנוסחת איטו $f(t,B_t)-f(s,B_s)=\int_s^t\left[-\frac{1}{2}f(t,u)+\frac{1}{2}f(t,u)\right]du+\int_s^t f(t,u)dB_u=$ $\int_s^t f(u,B_u)dB_u$.

כאן קיבלנו ביטוי שהוא שווה לאינטגרל של עצמו. ולכן־ אם נגדיר תהליך X_t להיות $e^{B_t-\frac{1}{2}t}$ אז אפשר להגיד ש־X_t הוא מרטינגל והתהליך הזה פותר את המשוואה – $f(t,B_t)-f(s,B_s)=\int_s^t f(u,B_u)dB_u$. נקבל $e^{B_t-\frac{1}{2}t}=\int_0^t e^{B_u-\frac{u}{2}}dB_u$ שהוא מרטיננגל בגלל שהוא אינטגרל סטוכסטי (תמיד מרטינגל).

האם קיים תהליך X_t כך ש־ $X_t=X_0+\int_0^t a(s,X_s)ds+\int_0^t b(s,X_s)dB_s$ עבור פונקציה של שני משתנים a,b.

באופן שקול, האם קיים תהליך X_t כך ש־ $dX_t=a(t,X_t)dt+b(t,X_t)dB_t$ וכך ש־ $X_0(w)=y(w)$ שווה לאיזשהו משתנה מקרי. מתברר שכן.

מִשפט יש פתרון־ כלומר־ קיים תהליך X_t כך ש־ $X_t=X_0+\int_0^t a(s,X_s)ds+\int_0^t b(s,X_s)dB_s$.

משפט נניח כי לX_0 יש מומנט שני סופי ו־X_0 בלתי תלוי בתנועה הבראונית. נניח שלכל x,y,t הפונקציות $a(t,x)$ ו־$b(t,x)$ רציפות וקיים מספר k כך ש־

$|a(t,x)-a(t,y)|+|b(t,x)-b(t,y)|\le k|x-y|$

אז קיים ל$X_t=X_0+\int_0^t a(s,X_s)ds+\int_0^t b(s,X_s)dB_s$ פתרון אחד ויחיד.

דוגמא האם יש תהליך X_t המקיים $X_t=X_0+c\int_0^t X_sds+\sigma\int_0^t X_sdB_s$?

בלשון של דיפרנציאל זה שקול לכך ש־ $dX_t=cX_tdt+\sigma X_tdB_t$.

לפי המשפט יש פתרון אחד ויחיד־ קיים תהליך סטוכסטי אחד ויחיד המקיים את המשוואה הדיפרנציאלית הנ"ל והוא בדיוק התנועה הבראונית הגאומטרית־

$$X_t = X_0e^{(c-\frac{\sigma^2}{2})t\sigma B_t}$$

הערה התנועה הבראונית הגאומטרית היא חשובה בדיוק בגלל שהיא פותרת את המשוואה הבאה $X_t = X_0 + c\int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t X_s dB_s$.