



זהב, נפט

ושווקי המניות

בחינת האנטרקציה בין תוחלת
ושונות הזהב והנפט והשפעתם
על מדדי המניות
- הוכחות ממדד S&P500

יובל סמואלוב
ואלי פנחסוב

סמינריון במתמטיקה פיננסית
סמסטר קיץ 2017

תוכן עניינים

2	רקע ועיקרי הנושאים שיוצגו במאמר - סקירה
3	הנחות עבודה והמודל המוצע – הסבר
7	סיכום ומסקנות החוקרים
10	בבליוגרפיה
11	נספח א' – ההנחות הקלאסיות של רגרסיה ליניארית
12	נספח ב' – משפט גאוס מרקוב
13	נספח ג' – בחינת ממצאי המחקר בתקופת זמן שונה

1. רקע ועיקרי הנושאים שיוצגו במאמר - סקירה

א. רקע:

הקשר הפנימי בין עולם הסחורות עולם המוצרים הפיננסי מעסיק רבות כלכלנים, ומשקיעים מאז ומעולם, ובכלל זה, השאלה כיצד השונות של שוק/מוצר אחד תשפיע על המחירים של שוק אחר. שאלה זו בעלת ערך רב בהחלטות ניהול הסיכונים וגידור תיקי ההשקעות של המשקיעים. המאמר בוחן את הקשר שבין שונות מחירי הזהב והנפט בהשוואה לשווקי המניות. הבדיקה נעשתה מול מדד ה-S&P500 ובדקה את מחירי הנפט והזהב ואת נתוני השונות שלהם לאורך התקופה הנבדקת במטרה למדל את הקשר.

מחיר הנפט הגולמי מושפע בעיקר מגורמים גיאופוליטיים ומזג האוויר. גורמים אלה עשויים לגרום שינויים בלתי צפויים בהיצע ובביקוש להוביל לתנודתיות במחיר הנפט. הבנת התנודתיות של מחיר הנפט היא קריטית שכן התוצאה עלולה ליצור אי וודאות בכל מגזרי המשק, ולהוביל לחוסר יציבות במשק הן בגדר מדינות הייצוא והן בגדר מדינות היבוא. **זהב** הינו מתכת יקרה, שניתן להתייחס אליו גם כנכס פיננסי וגם כסחורה פיזית. משמעות הזהב השתנתה לאורך השנים וכיום הזהב הינה כלי לגיטימי להשקעה ומהווה מעין אינדיקטור של האינפלציה העתידית כנכס פיננסי. סחורה זו הינה נכס חשוב לגיוון תיק ההשקעות. בעבר ניתן היה לראות את השפעתה בעיקר במשברים פיננסיים וכיום משמשת בעיקר כאחד מיני אמצעים אלטרנטיביים נוספים לחשיפה מנייתית ישירה.

ב. מטרת המאמר:

הבעיה העיקרית שאותה מנסה המאמר לפתור הוא כיצד תנודתיות בשוק אחד משפיעה על המדדים האחרים. המאמר בעצם מציג את המשמעות של הזהב והנפט והראה מדוע ההשתנות של כל אחד מהם גוררת אחריה שינויים כלכליים אחרים. עליה בתנודתיות הזהב מדליקה נורת אזהרה למשקיעים וחושפת לסיכון את היצרנים. תנודתיות הנפט משפיעה למעשה גם על היצרנים וגם על הצרכנים. היצרנים לא יכול להציע את הסחורה והשירותים במחיר הוגן בגלל תנודתיות גבוהה במחיר ולכן ההשפעה היא גם על הצרכנים. כמו כן, תנודתיות מחיר הנפט גורמת לאינפלציה גבוהה יותר ושיעורי האבטלה גבוהים יותר.

שוק המניות מושפע גורמים רבים, ובכלל זה, גורמים כלכליים, פוליטיים וחברתיים. בשל העובדה שהשוק מושפע מגורמים רבים, עולה הצורך לבחון ולאמוד את השפעות הגורמים במידת האפשר, ופרט אמידת השפעת השינויים במחירי הנפט, הזהב והתנודות שלהם.

מטרת המסמך היא לחקור את היחסים (קצרי וארוכי הטווח) בין הנכסים באמצעות מודלים אקונומטריים. כאשר המשקיעים ידעו מהו הקשר בין הנכסים, יוכלו לגדר סיכונים אלה ולשפר את תוצאות התיק ההשקעות שלהם.

2. הנחות עבודה והמודל המוצע – הסבר

א. המודל המוצע במאמר – כללי

החוקרים בחרו את מדד המניות S&P500 שהוא מדד 500 המניות בעלות שווי השוק הגדול ביותר בנאסד"ק, כפונקציה של פרמטרים ידועים של זהב ונפט. במילים אחרות באופן כללי, החוקרים ניסו לאמוד פונקציה מהצורה הבאה:

$$GSPC = \text{Function}(\text{OIL}, \text{GOLD}, \text{OVX}, \text{GVZ})$$

המודל בודק מס' מודלים אפשריים לאמידת השינוי שבמחירי המניות ע"י הפרמטרים שנבחרו. המשתנה המוסבר במאמר זה הינו מחיר הסגירה של מדד S&P500 = GSPC. להלן המשתנים המסבירים, ומשמעותם¹:

(1) מחירי הנפט – OIL

(2) מחירי הזהב – GOLD

(3) שונות הנפט – OVX

(4) שונות הזהב – GVZ

המחקר התבסס על תקופת הזמן שבין ינואר 2013 ועד נובמבר 2014 וכלל 484 תצפיות. המידע על מדד המניות הופק מתוך אתר האינטרנט של Yahoo Finance, מחירי הזהב ההיסטוריים נלקחו מ-London PM Fix והמידע על הנפט מ-USEnergy. נתוני השונות הופקו מתוך האתר של בורסת שיקאגו.

אמידת המודל, נעשתה ע"י שימוש בפונקציה לוגריתמית מלאה². הנ"ל מאפשר פרשנות טובה יותר של השינויים בנתונים תחת כנה מידה אחיד. בנוסף, מודל זה מאפשר לאמוד את הגמישות המאפשרת פרשנות מיקרו-כלכלית מקובלת להשפעה בין מוצרים. כמו כן, כנדרש, החוקרים בחנו מודלים שונים:

(1) ללא חותך, וללא מגמה

(2) חותך מוגבל, וללא מגמה

(3) חותך לא מוגבל, וללא מגמה

(4) חותך לא מוגבל, מגמה מוגבלת

(5) חותך לא מוגבל, מגמה לא מוגבלת

¹ נציין כי כל המחירים נלקחו בדולרים, לא נעשה שימוש בשע"ח

² בטא, הנאמד במודל מסוג זה, יבטא **גמישות** (כמה שינוי ב-1% במשתנה מוסבר ישנה באחוזים את המשתנה המסביר

ב. המודל המוצע במאמר - המודל האוקונומטרי

החוקרים בחרו לשתמש במודל ARDL (Auto Regressive Distributed Lag) לבדיקת יחסי טווח ארוך בין הפרמטרים. שיטת OLS (ריבועים פחותים – אמידת גרסיה לינארית פשוטה, ע"ב האומדנים היעילים ביותר – BLUE) הנפוצה, בעייתית כאשר קיים חשש להיעדר סטציונריות של סדרות עתיות של משתנים, כפי שהראו והוכיחו Pesaran & Shin³. הפתרון שלהם לפי מאמר זה, הינו אמידת משוואה יחידה, שבה מקובצים הרמה והשינויים של המשתנים. את ההפרשים, ניתן לאמוד בצורה הפשוטה (OLS) שכן בדיר"כ ההפרשים מתנהגים בצורה סטציונרית. המודל הינו מודל אקונומטרי מוכר, לבדיקת השערות כאשר המשתנים בעלי שורש יחידתי, כך שישנה משמעות למובהקות המקדמים במשוואת הטווח הארוך. הוכח כי המודל הנ"ל הינו הטוב ביותר במדגמים קטנים. המודל משמש לביסוס אמפירי של פונקציה בטווח הארוך גם כשאין וודאות לגבי סטציונריות המשתנים. כפי שהוכיח Gils במאמרו ובפרסומיו משנת 2013, ובהתבסס על פיתוחיהם של Pesaran & Shin & Smith כדי לוודא היתכנות מבחינת אסמיפטוטית, חייבים להתקיים מס' תנאים:

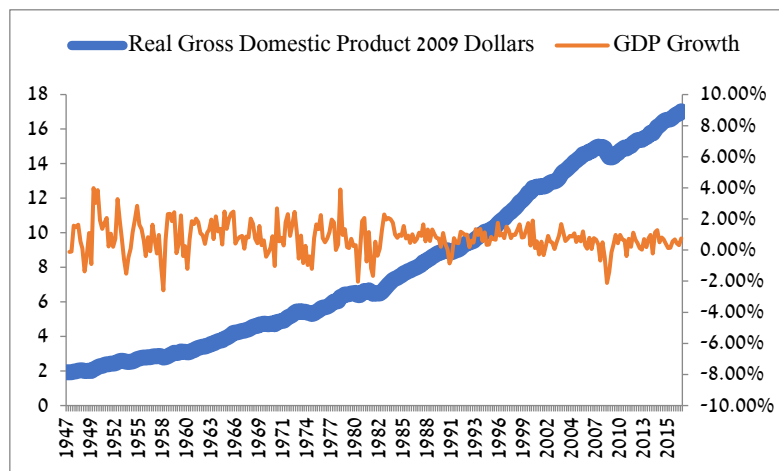
- (1) על כל המשתנים להיות סטציונרים או בעלי שורש יחידתי.
- (2) בדיקה שהמקדמים אינם רגישים למבנה הפיגורים שבמודל. קיימות מס' חלופות אך במקרים בהם יש חשש לאנדוגניות, נשתמש במודל ARDL
- (3) דחיית אפשרות למתאם סדרתי ואישוש הטענה ליציבות דינאמית המשמעות של מתודולוגיה זו, תחת הנחות העבודה שצוינו, הינה פרשנות בהירה של התוצאות. החסרון המשמעותי הינו קביעת קשר בין משתנים מראש (בעת בניית המודל היחיד, כמפורט לעיל). את קביעת הקשר הזו, עשו ע"ב התאוריה הכלכלית שבסיפא לעבודה זו (פרק 1). כפי שהוסבר לעיל, החוקרים עמדו בתנאים הללו ע"י מעבר לקנה מידה לוגריתמי, על מנת לאמוד במשוואה יחידה, ולקיים תנאי (1) וחלקית את תנאי (3). את תנאי (2) באופן כללי, ניתן לבדוק ע"י מבחן DF קלאסי או כל קריטריון לאמידת מודל למשתנים בעלי בעיית הפיגורים (AutoRegressive). משמעות של מקדם אפס או שואף לאפס הינה ברורה- אין מתאם סדרתי. כל עוד המקדם של המתאם הסדרתי קטן מ-1 (בערך מוחלט), ניתן מתמטית להוכיח בקלות כי מדובר בסדרה הנדסית מתכנסת בטווח הארוך, ולכן ניתן לאמוד את המשוואה. עבור מקדם גדול מ-1 (בערך מוחלט) הסדרה לא מתכנסת, ויש להמשיך ולבדוק את דרגת המתאם הסדרתי. קיימים ערכי לוח סטטסטי מתאימים לקריטריון זה, ומבוצעת בדיקת השערות סטדנרטית⁴.

ג. הנחות עבודה נוספות

- (1) **סטציונריות ומתאם סדרתי** - מגבלה מהותית במודל זה הינה סטציונריות המשתנים. ביצענו המחשה מדיסיפלינית הכלכלה, בכדי להסביר את המורכבות שבדבר. ביצענו שליפה פשוטה מאתר ה-FED לשני פרמטרים כלכליים מקובלים.

³ הפניות למאמרים בהם נעזרו בבליוגרפיה בסיפא של עבודה זו
⁴ DF סטטיסטי מול מחושב, בהתאם לרמת מובהקות נדרשת

ראשית, GDP – תמ"ג (תוצר המקומי הגולמי) של ארה"ב. בנוסף, שלפנו לאותה תקופה את נתוני הצמיחה. הצגת הנתונים בגרף משותף מעלה ומסבירה את סוגיית הסטציונריות.



כפי שניתן לראות, התוצר הריאלי - (GDP קו כחול) אינו סטציונרי. התוחלת שלו משתנה עם הזמן, ואינה מתכנסת סביב ממוצע קבוע. לעומת זאת, הצמיחה (GDP Growth – קו כתום) מאוד תנודתית, אך מתכנסת סביב ממוצע קבוע בטווח הארוך. המשמעות, כידוע בכלכלה, היא שהצמיחה לרוב סטציונרית, בעוד כי התוצר מתנהג כלא סטציונרי בטווח הארוך. פתרונות הסוגיה, מתאפשרים ע"י התאמה לוגריתמית של הנתונים, כמקובל במודל ARDL. האילוץ לכך הינו מתמטי בכלל, ואקונומטרי בפרט. משפט גאוס מרקוב אינו מתקיים כשקיימת סטציונריות של משתנים, ונדרשת העמקה ובחינת סדר המתאם הסדרתי שבנתונים, לצורך ביטול תופעה זו. במאמר זה, מצאו כי מדובר במתאם מסדר ראשון, ולכן ניתן לאמוד המודל כמקובל במודל ARDL. בנוסף, קיימת התייחסות להפרעות במודל (קריזות), ונאמדה השגיאה במונחי ECM - כמה מהר השגיאה חוזרת לממוצע.

(2) **הנחות קלאסיות** - בדומה לרוב המודלים האקונומטרים המקובלים, בעת אמידת רגרסיה לינארית בין משתנים, המשתנים נדרשים לקיים את **ההנחות הקלאסיות**, כמפורט בנספח א'. חסרונם ברור, לא בכל התרחישים מתקיימות כל ההנחות. שגיאות אמידה כגון מתאם סדרתי, מולטיקולנאריות, הטרוסקדסטיות, ומשתנים אנדוגניים נפוצים ויש לבצע התאמות בכל מקרה לגופו.

האילוץ הינו מתמטי, שכן הנ"ל נדרש בכדי לקיים את **משפט גאוס מרקוב**, ובכך להיות האומדים היעילים ביותר כמפורט בנספח ב'. יש לציין כי עבור חלק מהנתונים הנחות אלה מהוות מגבלות, ולכן הוצג ניתוח שלעיל.

(3) **בסיס הנתונים** - מועד הנתונים הקצר, לטעמנו מהווה חסרון מהותי במודל זה. הממצאים הללו מגבילים משמעותית את המודל. הסיבה שהחוקרים בחרו דווקא תקופת זמן זו⁵, היא אילוץ בגין יישימות המודל. מדובר על ציטוטים יומיים, אשר תנודתיים מאוד. גזירה רחבת היקף של הנתונים, עלולה להקשות על אמידת המודל, ותדרש התאמה ידנית של אירועים חריגים, ע"ב ניתוח טכני.

⁵ מעבר לספקולציה כי מועד רחב יותר ככל הנראה לא היה תואם את הממצאים שהם ביקשו לאמוד

לסיכום: המאמר סוקר ברמת המאקרו את מבני הנתונים, מבלי להסביר את הסיבה בגינה לא אמדו את המודל בצורה הפשוטה, ברורה או נסתרת ככל שתיהיה. ניכר, כי מדובר בסדרות עתיות של משתנים אנדוגניים, וקיים קושי אקונומטרי לאמוד זאת בצורה הרגילה, נוכח העדר קיום ההנחות הקלאסיות הנדרשות לאמידת רגרסיה לינארית פשוטה לחיזוי אומדני המשתנים, כמפורט לעיל. החוקרים בחרו בשיטה מקובלת לפתרון בעיית הפיגורים (AutoRegressive) של המודל. הצגנו שיטה זו בהתאם לשימושה במאמר ועמדנו על יתרונותיה, חסרונותיה, ומסקנותיה.

3. סיכום ומסקנות החוקרים

א. מסקנות החוקרים: מחירי הנפט והזהב והתנודות שלהם משפיעים על הפעילות הכלכלית והפיננסית של ארה"ב. להלן פירוט והסבר לגבי מסקנותיהם של החוקרים:

(1) בטווח קצר - בטווח הקצר לתנודות הנפט והזהב אין השפעה על שוק המניות S & P500. לא נמצאה כל מובהקות בסחורות הללו למחירי המניות. מכאן, אין כל טעם בהעבירה של השקעות לשווקים אלה בטווח הקצר. הממצאים מדגישים גם את ההשפעה בטווח הקצר דווקא של השינויים במחיר הנפט על שוק המניות, בהתחשב בעובדה כי 10% משוק המניות שייך לחברות סקטור האנרגיה ואלה יעלו כאשר יעלה מחיר הנפט.

(2) טווח ארוך – ע"פ ממצאי המאמר, **מדד מחירי המניות של S & P500 מתכנס לרמתו ארוכת הטווח ב -1.2% (ברמה היומית) בהשפעת הנפט, הזהב והתנודות שלהם.** בעוד שלכל המשתנים יש השפעה ארוכת טווח על מחירי המניות, **למחיר הזהב יש את ההשפעה הגבוהה ביותר** על מחיר המניה בטווח הארוך והקצר. לתוצאות אלה יש השפעה רבה על המשקיעים. המשקיעים יכולים להגיב כנגד השינויים במחיר הזהב, בהתחשב בכך וכמסקנה מובהקת מהמאמר, זהב הוא תחליף טוב מאוד של המניה. ולכן, ניתן לגדר תיק מניות בעזרת הזהב כנגד האינפלציה בטווח הארוך.

(3) הרחבת המודל והשלכותיו - לדעת המחברים אפשרות להרחבת המאמר הינה בחינה פרטנית של ההשפעות של מחירי הנפט והזהב על סקטורים בתוך מדד המניות כגון מגזר התחבורה, מגזר התעשייה, מגזר האנרגיה וכו'. השימוש בכך יהיה, שניתן יהיה לגדר טוב יותר את ההשקעות, תוך מיפוי ענפי והתאמת החשיפה למשתנים מאקרו-כלכליים. הנ"ל יתאפשר באמצעות אומדנים לקשר בין המשתנים הבלתי תלויים למשתנה התלוי (המגזר הנבדק) ונידע להתאים טוב יותר את גובה הגידור. המחברים לא ציינו השלכות מתמטיות. לדעתנו ההשלכה המתמטית והאקונומטרית הינה שנתוני הבסיס שלנו יצטרכו להיות מגזריים ולא כוללים כפי שהיה במחקר, כמו גם בנטרול המתאם הסדרתי ע"י הטמעת LAG⁶, ויתכן שנצליח להגיע לרמות מובהקות גבוהות יותר במגזרים מסויימים⁷.

⁶ הפרש מול תצפית קודמת

⁷ כגון מגזר התחבורה מול מחירי הנפט, ביטוח מול נדל"ן וכדומה..

ב. הצעות לשיפור והרחבה של המודל

- החוקרים לא התייחסו להרחבת המודל והשלכות של הרחבה שכזו, פרט לסעיף 3 שיפורט מטה. לדעתנו הרחבה של המודל אפשרית במספר דרכים:
- (1) הרחבת גודל המדגם: המאמר בחן תקופה של פחות משנתיים, ובזאת פחות מ-500 תצפיות⁸. לדעתנו התקופה שבמחקר אינה בהכרח מייצגת מכיוון שבתקופה זו התרחשו שינויים גאופוליטיים רבים שיתכן והטו את התצפיות שבבסיס המאמר בכלל ואת מובהקות המודל בפרט. הצעתנו הינה בעיקר הגדלת כמות התצפיות, ללא משמעות מתמטית אמיתית מעבר להגדלת רמת המובהקות ועלות עיבוד הנתונים. ביצוע עבודה בקנה מידה רחב תאפשר מסקנות אמיתיות, מובהקות ומבוססות יותר, גם אם לא בהכרח ברמת מובהקות גבוהה.
- (2) הכנסת משתנים איכותיים למודל: משתנים נוספים יכלו להשפיע על תוצאות האמידה, אך הושמטו לצורכי המאמר. צמיחה, תוצר, רמת ריביות, ביקושים ועוד פרמטרים מאקרו כלכליים עלולים להשפיע על רמות מחירים, וניכר כי לא הייתה התייחסות למשתנים אלה במעבר, מעבר ליישום המודל הכלכלי כהנחת עבודה למחקר זה. לטעמינו לפרמטרים אלה השפעה רבה ליישום במודל כמשתנים מסבירים. בדומה להרחבת גודל המדגם, הנ"ל יאפשר תוצאות אמיתיות ואמינות יותר גם מבחינה מאקרו-כלכלית.
- (3) בחינה על מדד מניות נוסף: כאמור החוקרים בחרו מדד מניות ספציפי והמחקר מתבסס רק עליו. כמו כן, הם ציינו במפורש כי ייתכן מאוד שבמדדי מניות אחרים התוצאות יהיו שונות ולכן מעניין יהיה לבחור מדדי מניות נוספים ולהריץ את בדיקת הקשר גם עליהם. מעבר למדדי מניות נבחרים (כגון: הדאקס הגרמני והנייקי היפני), לדעתנו בחירה של מדדי מניות ממדינות אשר מבוססות על משאבי טבע אלו (כגון איראן ורוסיה) יכולה להוביל למסקנות שונות מהמחקר הנוכחי בגלל השפעות גאופוליטיות רבות.
- (4) נטרול מניות האנרגיה מהמדד: מדד המניות הנבחר מכיל בתוכו מניות של חברות אנרגיה שונות אשר מטות את תשואת המדד. כיום משקל מניות האנרגיה עומד על כ-10% אך בשנת 2008 משקל זה הגיע עד לכ-17%. ייתכן מאוד כי נטרול של מניות האנרגיה או לחלופין בחינה סקטוריאלית של המדד תאפשר להגיע למסקנות נוספות שהחוקרים לא זיהו או נטרלו.
- (5) יישום מודלים מתמטיים מתקדמים על הנתונים: ניתן היה ליישם מודלים מתקדמים לאמידת השינוי, ולחיזוי/אפיון וסיווג פונקציות השינוי במשתנים בצורה יותר פרקטית. יישום שיטות למידה מתקדמות⁹ על ההממצאים, תוך התייחסות לנתונים רחבים יותר ובהמשך לסעיף (1), היה מאפשר ממצאים מרתקים, ויצירת תחזיות הניתנות לאמידה ולשינויים בטווח הארוך. בנוסף, ניתן היה לאמת את תוצאותיהם על הטווח הארוך. בחינת ממצאיהם על תקופה זמן שונה בנספח ג'.

⁸ כ-252 ימי מסחר בשנה, ככל הנראה נעשה "ניקוי" של תוצאות חריגות.

⁹ לדוגמא למידת מכונה ולמידה עמוקה

ג. סיכום:

החוקרים הוכיחו, ואמדו בט"א את השפעות השינויים במחירי ושונויותי הפקטורים שחושבו במאמר זה. ניתן לראות, כי עיקר ההשפעה הינה של מחירי הזהב. תרומתו העיקרית הפרקטית, אותה מציינים במפורש החוקרים כי ניתן לגדר את תיקי ההשקעות של המשקיעים, ע"י שילוב של חשיפה לתעודת סל אשר עוקבות אחר מחירי הזהב והנפט. ניהול סיכונים באמצעות גידור של ההשקעות הינו נושא שמאתגר כרגע את כלל העולם הפיננסי. ההבנה כי בעזרת ניהול סיכונים נכון יכולות חברות להגיע לתוצאות טובות יותר בשורות הרווח גורמות גם לעולם האקדמי להתחיל ולחקור את הנושאים הללו. באמצעות מחקרים מסוג זה יכולים להשפיע על המשקיעים הפרטיים בעזרת שינוי תמהיל תיק ההשקעות ואופטימיזציה שלו. מעניין היה לראות כיצד האקדמיה התאורטית והנאורה מציגה מסקנות אשר רלווטיות גם לעולם ההשקעות הפרקטי. לדעתנו המשך מחקרים אמפיריים מסוג זה יכולים לתת ערך מוסף רב לכלל האוכלוסיה, ובכלל זה לאקדמיה, לעולם הפיננסי ואף לחברות עצמן.


למאמר תרומה כלכלית מרתקת, בצורת הוכחת מודלים הכלכליים לקשר ולגמישות שבין הנכסים הללו. הנ"ל מכיוון שהחוקרים למעשה בדקו את טענותיהם לגבי מדד מניות מייצג ורחב היקף והשפעה בקנה מידה עולמי. בעבודה זו סקרנו והצגנו את הרקע והעניין הפרקטי בשוק והמדעי-כלכלי הקיים שבגין החליטו החוקרים לבצע את המחקר, המודל שבבסיס המאמר תוך עמידה על מגבלותיו, יתרונותיו והחסרונותיו בשלל ההיבטים. בנוסף, הצגנו את מסקנות החוקרים והדרך ליישום השלכות המחקר והרחבתו. חלק ניכר מההצעות שהצענו נובעות מהרצון לבדד את המרכיב המתמטי מהמרכיב הכלכלי (וההיפך) בכדי להגיע לתוצאות טובות אף יותר ולהבין את המסקנות בצורה מעמיקה יותר.

למיטב ידיעתנו, קיימים מס' רב של אלגוריתמים המיישמים מודלים מתמטיים מתקדמים לניתוחי רשתות, (לדוגמא יישום למידת מכונה ולמידה עמוקה לייצור תחזיות ברמת וודאות משתנות) ומתיימרים להציג את הממצאים והתחזיות, בשילוב ניתוחים פודנמטליים (מהותיים) וניתוחים טכניים של הנתונים האמפיריים, ולכן להערכתנו לא קיים ערך מתמטי רב למודל זה.

1. Korhan K. Gokmenoglua, Negar Fazlollahia. (2015). *The Interactions among Gold, Oil, and Stock Market: Evidence from S&P500*. 16th Annual Conference on Finance and Accounting
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2212567115007601>
2. Fed site:
<https://www.federalreserve.gov/data.htm>
3. Shin, Y & Pesaran, An Autoregressive Distributed Lag Modelling Approach to Cointegration Analysis. *in S Strom (ed.), Econometrics and Economic Theory in the 20th century (1999)*
4. Giles, D. (2013). ARDL Models – part II – Bounds Tests. Retrieved from
<http://davegiles.blogspot.co.il/2013/06/ardl-models-part-ii-bounds-tests.html>
5. S&P500Dow, 2014, December 15, Yahoo Finance. Retrieved from:
<http://finance.yahoo.com/q?s=^gspc>
6. CBOE. 2014, December 15, Volatility indexes at CBOE. (CBOE, Producer, & Chicago Board Options Exchange) Retrieved from Chicago Board Option: <http://www.cboe.com>
7. S&P500energy. 2015, December 15, S&P500 energy. Retrieved from S&P500 indices: <http://us.spindices.com/indices/equity/sp-500-energysector>
8. Google
9. Wikipedia


נספח א' – ההנחות הקלאסיות של רגרסיה ליניארית

<p>3</p>  <p>Normal Distribution "Bell Curve"</p> <p>$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$</p>	<p>2</p>  <p>הומוסקדסטיות $V(\varepsilon_i) = \sigma^2$</p>	<p>1</p>  <p>קיים קשר ליניארי בין המסביר למוסבר</p>
<p>6</p>  <p>איסור מולטיקולינאריות במשתנים המסבירים</p>	<p>5</p>  <p>$Cov(x_i, \varepsilon_i) = 0$</p>	<p>4</p>  <p>$\forall i \neq j, Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ חוסר מתאם בין שגיאות האמידה (ד': מתאם סדרתי)</p>



$E(\varepsilon_i) = 0$

$V(\varepsilon_i) < \infty$




$\forall i \neq j, Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$

BLUE – Best linear Unbiased Estimator

הכי יעיל – אומד הריבועים הפחותים

$$\hat{\beta} = \frac{\sum x_i y_i - \frac{1}{n} \sum x_i \sum y_i}{\sum x_i^2 - \frac{1}{n} (\sum x_i)^2} = \frac{Cov[x, y]}{Var[x]}, \quad \hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x}$$

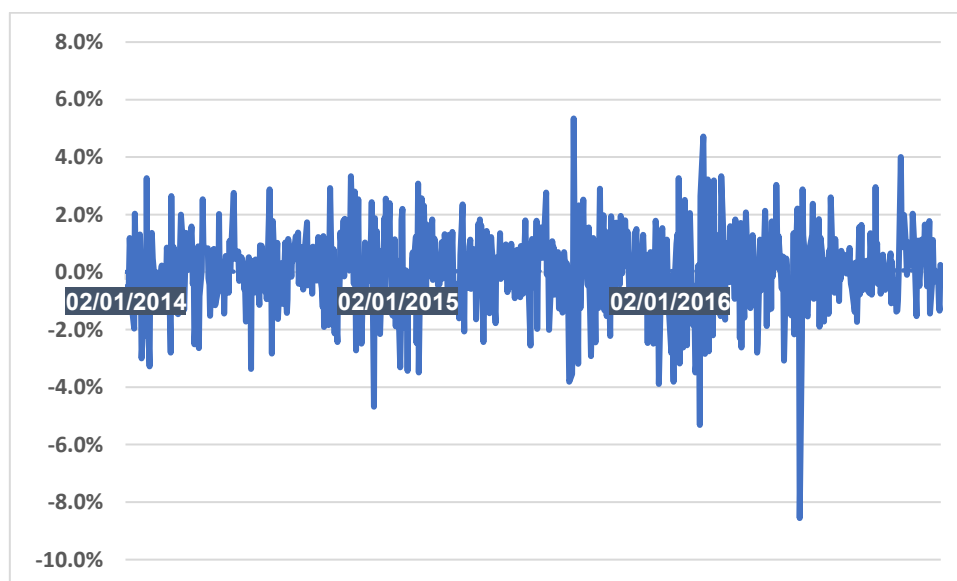


1. שינויים בטווח הארוך:

12/2013 - 12/2016			
שינוי ממוצע הנדסי שנתי*	שינוי כולל במשך תקופה	מחיר סגירה 2016	מחיר סגירה 2013
-1.90%	-5.61%	109.61	116.12
6.57%	21.03%	186.12	184.69

- שלפנו ציטוטי מחירי סגירה של המניות מגוגל, לבחינת השינוי בין השנים 2013-2016 במדד S&P לעומת השינוי בזהב (שנמצא כמובהק במאמר זה).
- ניתן לראות כי בעוד שמדד המניות עלה ב-21%, מחירי הזהב ירדו בכ- 5.6% בתקופה הזו.
- הנ"ל ממחיש כי לאחר ממצאי מאמר זה, לפחות בטווח של 3 שנים, מסקנתם אינה מתכנסת.
- כנ"ל ע"ב ממוצע הנדסי שנתי, לא זיהו את המסקנות שצוינו
- מימוני – אחד חלקי מספר השנים – נכון יותר שכן זה שינוי מצטבר בתקופה זו

2. הפרשי השינויים במחירי המדדים, ברמה יומית:



- למעשה, כמעט ולא קיים מתאם (שלילי נמוך מאוד - $1.48 \cdot 10^{-5}$) בין השינויים היומיים בערכים הללו. קרי, הערכים בלתי מתואמים.
- רגרסיה לינארית כמעט ולא מתקיימת עבור ההפרשים ($R^2 = 0.01\%$)
- יישום פונקציה לוגריתמית לנתונים הוליד מתאם שלילי של 0.0014 בקירוב.