מתמטיקה בדידה **אביב תשפ"א**

תרגיל בית מספר 10

תאריך פרסום: 03/06/2021 תאריך הגשה : 13/06/2021

הוראות והערות:

- יש להגיש סריקה של הקובץ המקורי עם המסגרות, בכתב יד קריא וברור.
- ניתן להגיש את שיעורי הבית בקובץ שכתוב בעורך טקסט כמו WORD או LYX .היקף פתרון מוקלד יהיה זהה להיקף שניתןלתרגילים הכתובים בכתב יד.
- ההגשה בפורמט PDF בלבד.
- סריקה מטושטשת, סריקת דפים בבלאגן או במהופך, כתיבה לא ברורה של התרגיל וכדומה יגררו הורדת נקודות. לאחר הגשת התרגיל במודל בדקו שהתרגיל הועלה בצורה תקינה.
- החלק השני של שיעורי הבית הוא אמריקאי, המענה עליו דרך מערכת המודל.
- לרשימת הנהלים המלאה ראה באתר הקורס.

תרגיל 1. היעזרו בנוסחת הבינום ופתרו את הסעיפים הבאים.

א. פתחו את הביטוי $(2x-3)^4$.

ב. יהי $r \in \mathbb{R}$ קבוע כלשהו. מצאו ביטוי ללא סכימה לסכום הבא:

$$\sum_{k=0}^{n} kr^k \binom{n}{k}$$

ג. יהי $r \in \mathbb{R}$ קבוע כלשהו. מצאו ביטוי ללא סכימה לסכום הבא:

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)r^k \binom{n}{k}$$

ד. יהי $r \in \mathbb{R}$ קבוע כלשהו. מצאו ביטוי ללא סכימה לסכום הבא:

$$\sum_{k=0}^{n} P(k)r^k \binom{n}{k}$$

כאשר $P(k) = 3k^3 + 2k^2 - 3k + 2$.

תרגיל 2. פתרו את הסעיפים הבאים באמצעות עיקרון שובך היונים.

א. יהיו 101 מספרים שלמים חיוביים מסודרים במעגל שנסכמים למספר 300. הוכיחו כי קיים מקטע של מספרים עוקבים על המעגל שסכומם שווה 200. רמז: תחילה הוכיחו כי קיים מקטע שמתחלק ב־ 100. כיצד תוכלו להסיק את הדרוש?

ב. תהי $S = \{z_1, \dots, z_{100}\} \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה של מספרים ממשיים. הראו כי קיימת תת קבוצה $T \subseteq S$ שמקיימת כי קיים שלם $m \in \mathbb{Z}$ עבורו $\left|\sum_{x\in T} x - m\right| \leq \frac{1}{100}$.

תרגיל 3. פתרו את הסעיפים הבאים:

א. כמה מחרוזות מעגל הא"ב $\{A, B, C, D\}$ באורך n ישנן שבהן מספר זוגי של A? מספר זוגי של A וגם מספר זוגי של B?

ב. כמה פונקציות $f \in \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,k\}$ ישנן שהן על?

ג. כמה תמורות של הא"ב האנגלי $A, B, C, \ldots, Z$ לא מכילות את המילים $EAT, ME, PINK, TINY$? הערה: תמורה זהו סידור ללא חזרות של כל האותיות $A, B, C, \ldots, Z$.

ד. נתון גרף המעגל $C_n = \langle\{1,2,\ldots,n\},\{\{1,2\},\{2,3\},\ldots,\{n-1,n\},\{n,1\}\}$ עם $n \geq 4$ צמתים. בכמה דרכים ניתן לצבוע את קודקודי הגרף באמצעות $d \geq 3$ צבעים שונים כך שאין קשת ששני קצותיה צבועים באותו הצבע. <u>הדרכה</u>: השתמשו בעיקרון ההכלה וההדחה ופשטו את הביטוי כדי לקבל תשובה ללא סכימה.

תרגיל 4. הוכיחו קומבינטורית את הזהות,

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{2n-r}{r}2^{2n-2r}=2n+1$$

רמז: התבוננו בבעיה הקומבינטורית של מספר הווקטורים הבינארים באורך $2n$ שבהם לא מופיע אחד לפני אפס.