北京大學

本科生毕业论文

题目： 关于弱收缩系统上平稳测度的正则性

On regularity of stationary measures on weakly contracting system

姓　　名： 焦宇翔

学　　号： 1800010629

院　　系： 数学科学学院

专　　业： 数学与应用数学

导师姓名： 何伟鲲、许地生

二〇二二年五月

北京大学本科毕业论文导师评阅表

学生姓名	焦宇翔	学号	1800010629
院系	数学科学学院	专业	数学与应用数学
指导教师	何伟鲲、许地生	职称	研究员
毕业论文题目	关于弱收缩系统上平稳测度的正则性		
导师评语	（包括但不限于对论文选题意义、行文逻辑、专业素养、学术规范以及是否符合培养方案目标等方面评价） 焦宇翔与许地生老师共同研究了一类随机游走对应的的平稳测度的性质。这项工作将线性变换框架下（Le Page，Guivarc’h 等人的）已知的工作推广到了光滑同胚的情形。他们提出了此类随机游走的弱收缩性质并在这一条件下证明了平稳测度的 Hölder 正则性。是一项具有重要意义的科研工作。 焦宇翔本科毕业论文介绍了随机游走和平稳测度的知识背景并汇报了以上工作。这篇论文思路清晰，数学逻辑严谨，格式工整，专业素养远超本科水平。是一篇难得的本科毕业论文。 导师签名：何伟鲲 许地生　　2022 年 6 月 9 日		

版权声明

摘要

设 Γ 是紧黎曼流形 M 上光滑自同胚构成的有限集 S 所生成的半群. 我们通常关心 Γ 在 M 上作用的轨道, 一个重要的工具是考虑 Γ 在 M 上的随机游走的平稳测度. 我们给出了一种新的观点, 即当一个系统在概率意义下具有收缩性质时, 这个系统的平稳测度具有 Hölder 连续性. 作为应用, 一方面我们推广了 Guivarc'h 的定理到非线性的情况, 即线性映射在射影空间上作用的 C^1 扰动后的情形, 另一方面我们也证明了 $\mathbb{S}^1$ 上一般的光滑随机游走的平稳测度的正则性. 而这两种概率学上的性质都会告诉我们 Γ-轨道的闭包一定具有正的 Hausdorff 维数.

关键词: 平稳测度, 随机游走, Hölder 连续性, Hausdorff 维数

ABSTRACT

Let Γ be a semigroup generated by a finite set S of smooth diffeomorphisms on a compact Riemannian manifold M. We usually consider the orbit of Γ acting on M. A very important tool to study these problems is to consider the stationary measure of a random walk generated by Γ. We give a new view that a probabilistic contraction property implies Hölder regularity of stationary measures. As applications, we generalize Guivarc'h's theorem to the non-homogeneous case, i.e. a C^1-perturbation of linear maps on projective space. Besides, we show that for a generic random walk on smooth maps on $\mathbb{S}^1$, the stationary measure is Hölder regular. These two probabilistic properties both lead to the fact that the Γ-orbit closure on M is with a positive Hausdorff dimension.

KEY WORDS: Stationary measure, Random walk, Hölder regularity, Hausdorff dimension

目录

第一章　引言

1.1　基本假设

在这篇文章中，我们关心平稳测度正则性刚性问题和半群作用轨道闭包问题，通常的研究对象是一个闭黎曼流形上的微分自同胚所构成的半群作用. 我们通常假设 M 是一个紧致无边的 d 维黎曼流形，用 TM 和 T^1M 分别表示其切丛和单位切丛. 对于正整数 r，我们用 $\mathrm{Diff}^r(M)$ 表示所有 M 上 C^r 自同胚所构成的群，用 $\mathrm{Diff}^{r,\alpha}(M)$ 表示所有 M 上 r 次微分具有 α-Hölder 连续性的自同胚.

我们通常假设 $S \subset \mathrm{Diff}^r(M)$ 或 $\mathrm{Diff}^{r,\alpha}(M)$ 是一个有限集合，其生成的半群用 Γ 表示. 对于一个点 $x \in M$，其Γ-轨道的闭包就是 $\overline{G \cdot x}$. 设 μ 是 S 上的一个非退化概率测度，即 $\mathrm{supp}\,\mu = S$，对于 M 上的一个 Borel 概率测度 ν 如果满足 $\mu * \nu = \nu$，也即

$$\int_S f_*\nu \mathrm{d}\mu(f) = \nu,$$

那么我们称 ν 是μ-平稳的.

1.2　主要结论

1.2.1　收缩性质与平稳测度正则性

为了叙述主要定理，我们首先介绍 M 上 Borel 概率测度的 Hölder 连续性的定义.

定义 1.2.1. *对于 M 上的一个 Borel 概率测度 ν，如果存在 $C > 0$ 和 $\alpha > 0$ 使得对任意 $x \in M$ 和 $\varepsilon > 0$，都有*

$$\nu(B(x,\varepsilon)) < C\varepsilon^{\alpha},$$

那么就称 ν 是 Hölder 连续的.

对于一个随机动力系统，我们引入了如下弱收缩性质. 我们对于平稳测度正则性的讨论就主要来自于对这一类具有收缩性质的系统的研究. 作为对应，可以参见在 [15, 18] 中所定义的弱扩张性质和在 [29] 所定义的一致扩张性质.

定义 1.2.2. *设 μ 是 $\mathrm{Diff}^{1,\alpha}(M)$ 上一个有限支撑的概率测度，其中 $\alpha > 0$.*

1. 如果对任意 $(x,v)\in TM\setminus\{0\}$, 都存在正整数 $N_+=N_+(x,v)$ 和 $N_-=N_-(x,v)$ 使得如下两个式子成立

$$\frac{1}{N_+}\int\log\frac{\|D_xf(v)\|}{\|v\|}\mathrm{d}\mu^{*N_+}(f)<0,\quad \frac{1}{N_-}\int\log\frac{\|D_xf^{-1}(v)\|}{\|v\|}\mathrm{d}\mu^{*N_-}(f)<0,$$

其中, $\mu^{*N}=\mu*\cdots*\mu$ 表示 μ 的 N 次卷积. 那么我们称 μ 是弱收缩的.

2. 如果存在正整数 N 和常数 $C>0$, 使得对任意 $(x,v)\in TM\setminus\{0\}$, 都有

$$\frac{1}{N}\int\log\frac{\|D_xf(v)\|}{\|v\|}\mathrm{d}\mu^{*N}(f)<-C,\quad \frac{1}{N}\int\log\frac{\|D_xf^{-1}(v)\|}{\|v\|}\mathrm{d}\mu^{*N}(f)<-C.$$

那么我们称 μ 是一致收缩的.

定义 1.2.3. 对于群 G 上的概率测度 μ, 我们用 μ^{*-1} 表示 G 上唯一的概率测度, 满足对任意可测集 $A\subset G$, 都有 $\mu^{*-1}(A)=\mu(\{g^{-1}:g\in A\})$. 如果 $\mu=\mu^{*-1}$, 我们称 μ 是对称的.

对于 μ 是对称的情形, 我们所定义的一致收缩性质恰好对应于 [15, 18] 中的一致扩张性质. 但对于非对称的情形, 正向和逆向的不等式都是必要的. 比如在 μ 的支撑集同时保持一个扩张 (收缩) 不动点的情形, 此时 μ 是可以只满足一个方向的不等式. 但相应地, 这时平稳测度就可以是支撑在这个共同不动点的 Dirac 测度.

注 1.2.4. *如同 [29] 中, 我们可以证明弱收缩性质可以推出一致收缩性质. 但是和扩张性不同的是, 在收缩的情形下, 利用三角不等式可以推出更强的收缩性质, 见定义2.2.1和命题2.2.2.*

注 1.2.5. *系统的 Lyapunov 指数也可以用来衡量收缩性质, 于是不难想象, 弱收缩性质和 Lyapunov 指数之间也会有密切的关系. 关于这个讨论, 见第3.2节.*

下面我们将叙述本文的主要定理, 在两种不同情形的应用和所有得到关于轨道闭包性质的刻画均来自于下面这个定理. 对比 [14, 15, 29] 中的结论, 这个定理可以看作它们在耗散系统中的类比.

定理 1. 如果 μ 是一个弱收缩概率测度, 那么任何 μ-平稳概率测度 ν 都是 *Hölder* 连续的.

对于满足一定条件的测度 μ, 讨论所有的 μ-平稳测度的共同性质是一个重要的主题. 比如 [10, 12] 就讨论 Furstenberg 测度在 Furstenberg 边界上的绝对连续性. 所以讨论平稳测度的 Hölder 连续性也是一个自然且具有一定挑战性的问题.

定义 1.2.6. 设有限集 $S\subset \mathrm{Diff}^{1,\alpha}(M)$ 对某个 $\alpha>0$ 成立, 如果 S 上支撑一个弱收缩的概率测度, 我们就称 S 是弱收缩集. 相应地, 此时 S 所生成的半群称为弱收缩半群.

注 1.2.7. 我们所引入的概念的核心在于，这是一个 C^1 稳定的条件. 即如果一个有限集合 S 是弱收缩的，那么对于另一个有限集 $S' \subset \mathrm{Diff}^{1,\alpha}(M)$ 在 C^1 拓扑下充分靠近 S, 那么 S' 也是弱收缩的.

推论 2. 设 $\Gamma \subset \mathrm{Diff}^{1,\alpha}(M)$ 是一个有限生成的弱收缩半群，那么任何 Γ-轨道的闭包都具有正的 *Hausdorff* 维数.

1.2.2 圆周上微分同胚半群作用

作为我们引入的收缩性质的第一个应用，我们讨论了在维数 $d=1$ 时，即 $M=\mathbb{S}^1$ 上可微半群的作用的性质. 我们也是借助概率的工具来研究轨道的闭包，在概率意义下，我们可以得到如下结论.

定理 3. 如果 $S \subset \mathrm{Diff}^{1,\alpha}(\mathbb{S}^1)$ 对某个 $\alpha > 0$ 成立，且 S 不保持 $\mathbb{S}^1$ 上一个共同的不变概率测度. 设 μ 是支撑在 S 上的非退化概率测度，那么对于 $\mathbb{S}^1$ 上的任何一个 μ-平稳的概率测度 ν, 都有 ν 是 *Hölder* 连续的.

注意到这一结论的两种情况并非一个二分，在 S 保持同一个不变概率测度时，所有的平稳测度也可以都是 Hölder 连续的. 同时，也可以将这一结论和 Margulis 证明 Ghys 猜想的定理 [31] 作对比. 在 [30] 中也对不保同一个圆周上概率测度的自同胚有着相关的讨论.

一般情况下，我们也无法期待 ν 是绝对连续于 Lebesgue 测度的. 这是和其拓扑性质所紧密连接的，其半群作用的轨道闭包经常会是一个 Hausdorff 维数小于 1 的 Cantor 集，从而支撑的平稳测度也无法做到绝对连续于 Lebesgue 测度. 同时，作为这一测度刚性结论的推论，我们可以得到圆周上半群作用轨道闭包的性质刻画，即其 Hausdorff 维数在同样的假设下必须严格是正的.

推论 4. 设 $\alpha > 0$, 如果 Γ 是 $\mathrm{Diff}^{1,\alpha}(\mathbb{S}^1)$ 的一个有限生成的子半群，那要么在 $\mathbb{S}^1$ 上存在一个共同的 Γ-不变的概率测度，要么任何 Γ-轨道的闭包都具有正的 *Hausdorff* 维数[1].

1.2.3 Guivarc'h 定理的 C^1 稳定版本

作为我们引入的收缩性质的另一个应用，对于一般维数，我们考虑了线性映射在射影空间上作用的光滑扰动情形. Guivarc'h 在 [24] 中证明了实射影空间上线性随机游走的平稳测度的 Hölder 连续性，而我们给出了 C^1 稳定版本的 Guivarc'h 定理. 同时，我们的结论不止视为 Guivarc'h 定理的推论，而在我们的这一观点下，还可以给出 Guivarc'h 定理另一个直接的证明.

1 关于 Hausdorff 维数的定义，见定义2.1.2.

定理 5. 有限集 $S=\{g_1,\cdots,g_k\}\subset \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ 满足其生成的半群 Γ 在 $\mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ 是 *Zariski* 稠密的. 给定一组正实数 $(p_1,\cdots,p_k)$ 满足 $\sum_{i=1}^k p_i=1$. 对于 $S'=\{f_1,\cdots,f_k\}\subset \mathrm{Diff}^{1,\alpha}(\mathbb{RP}^{d-1})$ 对某个 $\alpha>0$ 成立, 且满足 f_i 在 C^1 拓扑下靠近 g_i. 令

$$\mu=p_1\delta_{f_1}+\cdots+p_k\delta_{f_k}$$

为一个 $\mathrm{Diff}^{1,\alpha}(\mathbb{RP}^{d-1})$ 上的概率测度, 那么 $\mathbb{RP}^{d-1}$ 上的任何 μ-平稳的概率测度 ν 都是 *Hölder* 连续的.

同样地, 作为这一概率上的结论的推论, 我们可以证明线性半群作用扰动情形下轨道闭包也都具有正的 Hausdorff 维数.

推论 6. 有限集 $S\subset \mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ 满足其生成的半群 Γ 在 $\mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ 是 *Zariski* 稠密的. 对于有限集 $S'\subset \mathrm{Diff}^{1,\alpha}(\mathbb{RP}^{d-1})$ 对某个 $\alpha>0$ 成立, 且 S' 在 C^1 拓扑下靠近 S. 设 Γ' 为 S' 生成的半群, 那么任何 Γ'-轨道的闭包都具有正的 *Hausdorff* 维数.

1.3 问题历史和相关结果

关于半群作用轨道闭包的分类问题, 可以追溯到著名的 Furstenberg $\times 2\times 3$ 问题 [21]. 在这里我们难以列出相关的全部历史, 只能简单列出一些和我们结论比较相关的一些结果.

随机游走和非交换半群齐性作用 随机游走在研究群或半群作用中是一个十分重要的工具, 而在随机游走中, 平稳测度往往是一个重要的关注对象. 借助在射影空间上的平稳测度, Furstenberg 证明了一般的 $\mathrm{SL}(d,\mathbb{R})$ 矩阵随机乘积都具有指数增长 [20], 其他一些相关的工作见 [5, 23]. 一个类似的问题是考虑 $\mathrm{SL}(d,\mathbb{Z})$ 的一个非交换子半群在 $\mathbb{T}^d$ 上的作用, 在 [25, 32] 中证明了如果这个半群是 Zariski 稠密的, 那么轨道只能是有限的或者是稠密的. 而借助平稳测度分类的结果, Bourgain-Furman-Lindenstrauss-Mozes 在 [13] 中从随机游走的视角揭示了这一现象.

在 [7, 8, 9] 这一系列文章中, Benoist 和 Quint 证明了若干轨道闭包的分类问题和相应的测度刚性问题. 在 [19] 中, Eskin-Mirzakhaini 发展了 [7] 中的方法并取得了重大突破, 他们证明了任何 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 的上三角子群在模空间上的作用所保持的遍历不变测度都是支撑在一个仿射子流形上.

光滑随机动力系统和半群作用 近来, 关于平稳测度和半群作用轨道闭包的分类问题也被拓广到一般非齐性的场合. Brown-Hertz 将 [7, 19] 中的方法推广到了曲面上一般的 C^2 作用,

并得到了许多测度刚性的结果. 在 [11] 中, Blumental-Xue-Young 证明了标准的映射在随机扰动的迭代下的遍历性. 基于 Brown-Hertz 的成果, 刘小川和许地生 [29] 以及 Chung[15] 研究了曲面上具有一致扩张性的保守的随机系统, 并且给出了平稳测度和轨道闭包的分类.

在另一方面, 对于曲面上的半群作用问题, 也可以从不借助概率工具的另一个视角进行研究. 例如在 [27] 中, Koropecki-Nassiri 证明紧可定向曲面上一般的保守的微分同胚半群作用通常包含至少一条稠密轨道. 使用到的工具就是一些曲面上的拓扑动力系统的工具.

一致收缩和一致扩张的对比　在 [18] 中, Eskin-Lindenstrauss 考虑了半单李群的具有一直扩张性质的子半群在齐性空间上的作用. 此后, [15, 29] 将这一概念推广到了曲面上的随机动力系统. 这些文章中, 一个 $\mathrm{Diff}^2(M)$ 上的紧支撑概率测度 μ 被称为是一致扩张的如果存在常数 $C > 0$ 和正整数 N, 使得对任意 $(x, v) \in TM \setminus \{0\}$, 有

$$\frac{1}{N}\int \log \frac{\|D_x f(v)\|}{\|v\|} \mathrm{d}\mu^{*N}(f) > C.$$

正如本文中研究的收缩性质, 这一扩张性质也是在 C^1 扰动下稳定的. 在二维保守系统中, 这一一致扩张的性质和正的纤维熵有着诸多关联, 从而可以给出许多测度刚性的现象.

简单来说, 一致扩张性质可以说明最大 Lyapunov 指数是正的, 并且扩张最慢的方向在 M 上的分布具备随机性. 关于这一点, 对于曲面上正交变换保体积扰动群作用的情况, 还可以参考 [17]. 在我们的情形下, 关于这一点的讨论可以见3.2节. 但一般来说, 圆周上的随机游走通常并不是一致扩张. 相反, 通常情形下是一致收缩的, 对应于我们的情形. 同时, 一些典型的例子其实对应于耗散的随机游走, 例如实射影空间上线性随机游走. 这一些情况下都是非一致扩张的, 并且是在扰动下稳定的. 这也是我们关心这一问题的动机, 即对于耗散系统给出其轨道闭包的分类和平稳测度正则性的讨论.

同时, 最大 Lyapunov 指数为正的情况对应于一致扩张的情形, 最大 Lyapunov 指数为负的情况对应于我们的一致收缩情形, 并且这两类系统都是稳定的. 那么一个自然的问题就是, 对于一个最大 Lyapunov 指数为 0 的情况下, 我们能否通过 C^1 扰动将它变为这两类系统之一, 或者更进一步, 是否两种系统都能通过扰动得到. 在这样的情形下, 是否我们可以给出一般的 (generic) 系统的轨道闭包刻画.

圆周上的群作用　关于圆周上的自同胚群或半群作用, 通常可以证明具有一定的收缩性质或者同步性, 见 Antonov 的经典结论 [3] 和 Malicet 在 [30] 给出的更一般的结论. Navas 关于圆周微分同胚群十分优秀的教材 [33] 也提供了很好的参考. 关于圆周上的微分同胚群或者具有更高正则性的群或半群作用, 还可以参见 [1, 2, 16, 26].

平稳测度的 Fourier 系数衰减　在 [28] 中, 李嘉伦证明了对于一般的 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 在 $\mathbb{S}^1$ 上的随机游走, 唯一的平稳测度一定是 Rajchman 测度, 即其 Fourier 系数在无穷远处衰减到 0. 于是一个自然的问题是, 对于一般的 $\mathbb{S}^1$ 上的光滑随机游走, 我们是否可以说明其平稳测度都是 Rajchman 测度. 但由于的确存在一个 Hausdorff 维数为零的集合可以支撑一个 Rajchman 测度, 我们也并不知道这样的测度结果能否给出轨道闭包一些额外的刻画.

1.4　本文结构和一些说明

我们将在下一章第 1 节中首先介绍一些本文中会用到的一些基本概念, 并规定本文中的记号. 然后在下一章的第 2 节和第 3 节讨论我们引入的收缩性质概念的等价性, 以及这一性质的重要概率学特性–大偏差性质, 这也会是我们证明主要结论的重要工具. 然后在第 4 节和第 5 节分别介绍 $\mathbb{S}^1$ 上随机游走的 Avila-Viana 不变原理和一般线性矩阵随机乘积的重要结果, 这一部分只是作为后面我们展现具体应用时的必要结论介绍.

在第三章中, 我们将完成所有结论的证明. 借助我们已经讨论过的收缩性质所具有的性质, 我们将在第三章第 1 节证明收缩性质能够带来平稳测度正则性的结果. 第 2 节的作用则是一个过渡, 讨论了如何将收缩性质和通常的 Lyapunov 指数之间联系起来. 第 3 节和第 4 节则是利用我们在前两节已经搭建好的平台, 将我们的结论具体应用于 $\mathbb{S}^1$ 上的随机游走和高维实射影空间上的随机游走这两个场景.

这篇文章是作者在本科阶段一直在进行的工作, 一直受到北京大学基础数学拔尖计划和本科生科研计划的支持. 而文中前置知识的阅读学习, 以及这个问题的提出均是作者在本科期间的导师许地生老师介绍给作者的. 这个问题的解决也是作者和许地生老师一起合作完成的, 许地生老师在文中许多关键步骤提供了重要想法. 特在此说明.

第二章 准备工作

2.1 随机游走, 平稳测度, Hausdorff 维数

设 $S \subset \mathrm{Diff}^1(M)$ 是一个有限集合, μ 是支撑在 S 上的一个非退化概率测度. 令 $\Sigma = S^{\mathbb{N}}$, 并赋予乘积概率测度 $\mathbf{P} = \mu^{\mathbb{N}}$, 那么 $\mathbf{P}$ 也自然是一个 Radon 测度. 对于任何一个元素 $\omega \in \Sigma$, 记 $\omega = (f_0, f_1, \cdots, f_n, \cdots)$, 对任意正整数 n, 我们令

$$f_\omega^n = f_{n-1} \cdots f_1 f_0,$$

当 $n = 1$ 时, 也简写为 $f_\omega = f_\omega^1$. 同时我们记 $f_\omega^{-n} = (f_\omega^n)^{-1}$, 需要注意的是, 这里的 f_ω^{-n} 的定义和通常双向随机游走中的定义不同. 对正整数 $n < m$, 我们用 $f_\omega^{n,m}$ 表示 $f_{m-1} \cdots f_{n+1} f_n$.

我们令 $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ 表示移位映射, 即

$$\sigma : (f_0, f_1, \cdots) \mapsto (f_1, f_2, \cdots).$$

那么 $\mu^{\mathbb{N}}$ 是 σ-遍历不变的. 由 μ 诱导的 M 上的*随机游走*通过映射

$$F : \Sigma \times M \to \Sigma \times M, \quad (\omega, x) \mapsto (\sigma(\omega), f_\omega(x))$$

所给出. 同时, μ 或 F 也会诱导一个在 M 的单位切丛 T^1M 上的随机游走, 即映射

$$DF : \Sigma \times T^1M \to \Sigma \times T^1M, \quad (\omega, x, v) \mapsto (\sigma(\omega), f_\omega(x), \frac{D_x f_\omega(v)}{\|D_x f_\omega(v)\|}).$$

在这种意义下, 我们有时也会把 μ 看成是 Homeo(T^1M) 上的一个有限支撑的概率测度. 对于正整数 n, 我们用 μ^{*n} 表示 μ 的 n 次卷积, 那么 μ^{*n} 就是概率空间 $(\Sigma, \mathbf{P})$ 上 $\omega \mapsto f_\omega^n$ 的分布. 同样地, 我们有时也会将 μ^{*n} 视为 Homeo(T^1M) 上的概率测度.

回忆平稳测度的定义, 后文中我们将 M 上的 μ-平稳 Borel 概率测度都简称为 μ-平稳测度. 那么 M 上的所有 μ-平稳测度在全体 M 上 Radon 测度空间中构成一个凸集. 如果一个 μ-平稳测度 ν 是这个凸集的端点, 我们就称 ν 是*μ-遍历*的. 那么关于 μ-平稳测度在随机游走中的具体表现, 我们有如下命题.

命题 2.1.1. *对于 M 上的一个 Borel 概率测度 ν, 我们有*

1. *ν 是 μ-平稳的当且仅当 $\mathbf{P} \times \nu$ 是 F-不变的.*
2. *如果 ν 是 μ-平稳的, 那么它是 μ-遍历的当且仅当 $\mathbf{P} \times \nu$ 是 F-遍历的.*

同样地, 如果我们假设 η 是 T^1M 上的一个 Borel 概率测度, 那么 η 是 ν-平稳的（或 ν-遍历的）当且仅当 $\mathbf{P}\times\eta$ 是 DF-不变的（或 DF-遍历的）. 特别地, 如果 η 是一个 μ-平稳的概率测度, 那么 η 投影在 M 上得到概率测度 ν 也是 μ-平稳的.

现在我们假设 X 是度量空间, 令 A 是 X 的一个子集. 对任意 $\alpha,\delta>0$, 定义

$$H_\delta^\alpha(A)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(\mathrm{diam}\,U_i)^\alpha : U_i\text{ 为开集}, \bigcup_{i=1}^{\infty}U_i\supseteq A,\ \mathrm{diam}\,U_i<\delta\right\}.$$

令 $\lim_{\delta\to 0}H_\delta^\alpha(A)$ 表示 A 的 α-Hausdorff 外测度, 记作 $H^\alpha(A)$.

定义 2.1.2. *集合 A 的 Hausdorff 维数定义为*

$$\dim_{\mathrm{H}}(A)=\inf\{\alpha\geqslant 0 : H^\alpha(A)=0\}.$$

2.2 收缩性质的等价性

定义 2.2.1. *设 μ 是 $\mathrm{Diff}^{1,\alpha}(M)$ 上一个有限支撑的概率测度, 其中 $\alpha>0$. 如果存在正整数 N 和常数 $C>0$, 使得对任意 $x\in M$, 都有*

$$\frac{1}{N}\int\log\|D_xf\|\mathrm{d}\mu^{*N}(f)<-C,\quad \frac{1}{N}\int\log\|D_xf^{-1}\|\mathrm{d}\mu^{*N}(f)<-C,$$

那么我们称 μ 是强收缩的.

下面的命题说明了弱收缩性质可以推出一致收缩性质和强收缩性质. 作为对比, 这一点结论对于扩张性质是并不成立的, 即在 [29] 中考虑的一致扩张条件并不能推出相应的强扩张性质.

命题 2.2.2. *设 μ 是 $\mathrm{Diff}^{1,\alpha}(M)$ 上一个有限支撑的概率测度, 其中 $\alpha>0$. 那么以下三条等价:*

(1) μ 是弱收缩的.

(2) μ 是一致收缩的.

(3) μ 是强收缩的.

证明. (3) 推出 (1) 是平凡的. (1) 推出 (2) 的证明和 [29] 中引理 4.3.1 的证明一致, 只需将扩张改变为收缩并相应地调整符号即可. 只需证明 (2) 推出 (3), 这一点将在下一节进行. □

2.3 鞅和大偏差性质

我们首先介绍对于差一致有界的鞅的大偏差定理, 即著名的 Azuma 不等式. 借助这个不等式, 我们将给出弱收缩系统的大偏差性质.

定理 2.3.1 (Azuma). 设 $\{S_n\}_{n\geqslant 1}$ 是概率空间 $(\Omega, \boldsymbol{P})$ 上的一列零均值的鞅, 其中 $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. 如果存在 $a > 0$ 使得 $|X_k| \leqslant a < \infty$ 对任意 $k \geqslant 1$ 成立, 那么对任意 $\varepsilon > 0$, 都有

$$\mathbf{P}\{S_n \geqslant n\varepsilon\} \leqslant \exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2a^2}\right), \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

命题 2.3.2. 设 μ 是一个一致收缩概率测度, 那么存在 $c, \tau > 0$ 和正整数 N, 使得对任意 $n \geqslant N$ 和 $(x, v) \in T^1M$, 都有

$$\mu^{*n}\{f : \|D_x f(v)\| \leqslant e^{-\tau n}\} \geqslant 1 - e^{-cn}, \quad \mu^{*n}\{f : \|D_x f^{-1}(v)\| \leqslant e^{-\tau n}\} \geqslant 1 - e^{-cn}.$$

证明. 这个命题的证明基本和 [29] 中引理 4.4.2 一致, 这里只列出证明的梗概而略去一些具体细节. 因为 μ 是一致收缩的, 我们令 N_0 是一致收缩性质所取出的常数. 对于每个 $(x, v) \in T^1M, \omega \in \Sigma$, 令

$$(x_{\omega,n}, v_{\omega,n}) = (f_\omega^n(x), \frac{D_x f_\omega^n(v)}{\|D_x f_\omega^n(v)\|}).$$

定义

$$\begin{aligned} X_k = &\log \|D_{x_{\omega,(k-1)N_0}} f_\omega^{(k-1)N_0, kN_0}(v_{\omega,(k-1)N_0})\| \\ &- \int \log \|D_{x_{\omega,(k-1)N_0}} g(v_{\omega,(k-1)N_0})\| \mathrm{d}\mu^{*N_0}(g). \end{aligned}$$

令 $\{\mathcal{F}_n\}$ 是 Σ 中固定前 nN_0 位对应的柱状集生成的 σ-代数, 那么 $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ 就是一个适应于 $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geqslant 1}$ 的鞅序列. 因为 μ 是有限生成的, 从而 X_k 是一致有界的. 利用 Azuma 不等式可知, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在常数 $c_1 > 0$ 使得

$$\mathbf{P}\{\omega : S_n \geqslant n\varepsilon\} \leqslant e^{-c_1 n}.$$

结合 μ 是有限支撑的, 我们可以对任意充分大不是 N_0 倍数的 n 也给出相应的控制. 再结合 N_0 的选取保证了

$$\frac{1}{N_0} \int \log \|D_{x_{\omega,(k-1)N_0}} g(v_{\omega,(k-1)N_0})\| \mathrm{d}\mu^{*N_0}(g) < -C < 0,$$

只需要取 $\varepsilon < \frac{C}{2}$, 即得结论成立. □

推论 2.3.3. 设 μ 是一个一致收缩概率测度, 那么存在 $c, \tau > 0$ 和正整数 N, 使得对任意 $n \geqslant N$ 和 $x \in M$, 都有

$$\mu^{*n}\{f : \|D_x f\| \leqslant e^{-\tau n}\} \geqslant 1 - e^{-cn}, \quad \mu^{*n}\{f : \|D_x f^{-1}\| \leqslant e^{-\tau n}\} \geqslant 1 - e^{-cn}.$$

证明. 对于一致收缩概率测度 μ, 我们先选取上一命题中的常数 c', τ', N'. 对于任意 $x \in M$, 选取 $T_x^1 M$ 的一组基 $v_1, v_2, \cdots, v_d$. 那么对于任意 $v \in T^1 M$, 设 $v = \sum_{i=1}^d c_i v_i$, 那么 $\sum_{i=1}^n c_i^2 = 1$. 从而

$$\|D_x f(v)\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^d c_i D_x f(v_i)\right\|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^d c_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^d \|D_x f(v_i)\|^2\right) = \sum_{i=1}^d \|D_x f(v_i)\|^2.$$

令 $\Lambda_i = \{f : \|D_x f(v_i)\| \leqslant e^{-\tau' n}\}$, 令 $\Lambda = \cap_{i=1}^d \Lambda_i$. 那么对任意 $n > N'$, 都有 $\mu^{*n}(\Lambda) \geqslant 1 - de^{-c'n}$, 且对任意 $f \in \Lambda$, 都有 $\|D_x f\| \leqslant \sqrt{d} e^{-\tau' n}$. 那么取

$$c = \frac{c'}{2}, \quad \tau = \frac{\tau'}{2}, \quad N = \max\{N', 2\log(d/c'), \log(d/\tau')\}$$

即可. 对于逆的估计是一样的. □

借助这个大偏差性质, 我们可以完成收缩性质之间等价性的证明. 于是在后文应用中, 对于三种收缩性质我们不再加以本质上的区分.

命题2.2.2的证明. 我们只证明对于正向的情形, 逆的情形是一样的. 根据上一推论, 对于任一充分大的正整数 N, 令 $\Lambda = \{\omega : \|D_x f_\omega^N\| \leqslant e^{-\tau N}\}$, 有

$$\int_{\Sigma \setminus \Lambda} \log \|D_x f_\omega^N\| \mathrm{d}\mathbf{P}(\omega) \leqslant \mathbf{P}(\Sigma \setminus \Lambda) \cdot N \log L \leqslant e^{-cN} N \log L,$$

其中, $L = \max\{\|f\|_{C^1} : f \in \operatorname{supp}\mu\} < \infty$. 从而

$$\frac{1}{N}\int \log \|D_x f_\omega^N\| \mathrm{d}\mathbf{P}(\omega) \leqslant -\tau + e^{-cN} \log L.$$

选取充分大的 N 和正常数 C 使得 $-\tau + e^{-cN} \log L < -C < 0$ 即可. 而这里的 N 和 C 的选取是独立于 $x \in M$ 的选取和正向或逆向的. □

2.4 Lyapunov 指数, 不变原理

设 $F : \Sigma \times M \to \Sigma \times M, (\omega, x) \mapsto (\sigma x, f_\omega x)$ 是 M 上的一个可微随机游走, 那么我们可以定义

$$\lambda(\omega, x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \|D_x f_\omega^n\|$$

称为 (ω, x) 处的*极大 Lyapunov 指数*（如果极限存在）. 如果 m 是 F-不变的概率测度, 并且我们假设 m 在 Σ 上的投影得到的测度为 $\mathbf{P}$, 那么由 Kingman 的次可加遍历定理知对 m-几乎处处的 (ω, x), 极大 Lyapunov 指数都存在. 当 m 形如 $\mathbf{P} \times \nu$ 时, 其中 ν 是一个 M 上的 μ-平稳测度, 那么 $\lambda(\omega, x)$ 关于 m 的本性上界我们称为 ν 的最大 Lyapunov 指数. 下面我们叙述 $\mathbb{S}^1$ 上可微随机游走的 Avila-Viana 不变原理 [6], 这重要结论对我们在 $\mathbb{S}^1$ 的情形进行应用时十分有帮助.

定理 2.4.1 ($\mathbb{S}^1$ 上 Avila-Viana 不变原理)**.** *对于 $\Sigma\times\mathbb{S}^1$ 任意 F-不变的概率测度 m, 设 m 具有形式 $\mathrm{d}m(\omega,x)=\mathrm{d}m_\omega(x)\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega)$, 那么以下两者至少有一个成立:*

(1) 对几乎处处 (ω,x) 有 $\lambda(\omega,x)<0$.

(2) 对 $\mathbf{P}$-几乎处处的 ω, 有 $m_{\sigma\omega}=(f_\omega)_*m_\omega$.

2.5 矩阵随机乘积

另外一种情形是矩阵的随机乘积, 此时我们假设 μ 是支撑在 $\mathrm{SL}(d,\mathbb{R})$ 上的一个概率测度, 并同样用记号 Σ 表示空间 $\mathrm{GL}(d,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ 并赋予概率测度 $\mathbf{P}=\mu^{\mathbb{N}}$. 对于任意 $\omega\in\Sigma$, 我们写成 $\omega=(g_0,g_1,\cdots)$, 并相应地用 g_ω^n 表示 $g_{n-1}\cdots g_1g_0$, 当 $n=1$ 时偶尔用 g_ω 简写. 在这种情形下, 我们用

$$\widehat{\lambda}(\omega)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|g_\omega^n\|$$

表示矩阵随机乘积的极大 Lyapunov 指数. 如果我们附加可积性条件

$$\int_{\mathrm{SL}(d,\mathbb{R})}\log\|g\|\mathrm{d}\mu(g)<\infty, \tag{2.5.1}$$

那么根据 Kingman 次可加遍历定理同样可以说明 $\widehat{\lambda}(\omega)$ 是几乎处处存在的, 并且为常值 $\widehat{\lambda}$. 而 Furstenberg-Kesten 的定理拓宽了矩阵随机乘积情形下 Lyapunov 指数的含义 [22], 进一步, 我们在矩阵随机乘积的情形也拥有 Oeledec 乘法遍历定理 [4].

定理 2.5.1 (Oseledec 乘法遍历定理)**.** *设 μ 是 $\mathrm{GL}(d,\mathbb{R})$ 上的一个概率测度, 满足可积性条件(2.5.1). 那么存在一个 $\mathbf{P}$ 满测的 σ-不变子集 $X\subset\Sigma$, 使得对任意 $\omega\in X$, 有如下结论成立:*

1. *$\overline{g}_\omega=\lim_{n\to+\infty}((g_\omega^n)^tg_\omega^n)^{\frac{1}{2n}}$ 存在.*
2. *存在与 ω 无关的常数 $-\infty\leqslant\lambda_d\leqslant\cdots\leqslant\lambda_2\leqslant\lambda_1$, 使得 $e^{\lambda_d}\leqslant\cdots e^{\lambda_2}\leqslant e^{\lambda_1}$ 为 $\overline{g}_\omega$ 的全部特征值. 并假设 $\lambda_{i_p}<\cdots<\lambda_{i_1}$ 是其中所有不同的, 以 $U_j(\omega)$ 表示 λ_{i_j} 所对应的特征子空间, 那么 $d_j=\dim U_j(\omega)$ 也是常数.*
3. *令 $V_{p(\omega)+1}(\omega)=\{0\}$, $V_j(\omega)=U_{p(\omega)}\oplus\cdots\oplus U_j(\omega)$. 那么对任意 $u\in V_j(\omega)\setminus V_{j+1}(\omega)$, 有*
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|g_\omega^nu\|=\lambda_{i_j}.$$
4. *对任意 j, 有 $g_\omega V_j(\omega)\subset V_j(\sigma\omega)$.*

诸常数 $(\lambda_d,\cdots,\lambda_2,\lambda_1)$ 称为 μ 的 *Lyapunov* 谱, 每个常数都称为 μ 的一个 Lyapunov 指数, 不难看出 $\lambda_1=\widehat{\lambda}$. 对于概率测度 μ, 我们用 Γ_μ 表示 $\operatorname{supp}\mu$ 生成的半群. Furstenberg[20] 和 Gol'dsheid-Margulis[23] 分别证明了, 当我们对 Γ_μ 附加一定的条件时, μ 的 Lyapunov 谱具有间隔. 我们在此只列出我们需要用到的 Gol'dsheid-Margulis 所证明的版本. 需要指出的

是, 使用 Furstenberg 的原始版本确实可以将我们证明的结论条件适当减弱, 但这已经脱离了本文主旨.

定理 2.5.2 (Gol'dsheid-Margulis)**.** *如果 Γ_μ 在* GL$(d,\mathbb{R})$ *中是 Zariski 稠密的, 那么 μ 的 Lyapunov 谱是单的, 即 $\lambda_d < \cdots < \lambda_2 < \lambda_1$.*

在我们应用时, 对于矩阵随机乘积的情形, 一般也会假设 μ 是有限支撑的. 其支撑集 S 作为 GL$(d,\mathbb{R})$ 的有限子集, 我们不加区分地将其视为 Diff$^\infty(M)$ 的子集, 其中 $M = \mathbb{RP}^{d-1}$ 为 $d-1$ 维实射影空间. 对于 $g \in$ GL$(d,\mathbb{R})$, 其在 M 上的作用通过 $g : [u] \mapsto [gu]$ 给出. 对于一个点 $[u]$, 其在 M 上的切空间 $T_{[u]}M$ 可以视为 $[u]$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中的正交补空间. 而 g 在 $[u]$ 处的切映射实际上通过

$$D_{[u]}g(v) = \frac{\|u\|}{\|gu\|}gv \text{ 在 } T_{[gu]}M \text{上的正交投影}, \quad \forall v \in T_{[u]}M,$$

所给出. 对于 $g \in$ GL$(d,\mathbb{R})$, 我们还会考虑 $\wedge^2 g$ 作为 $\wedge^2\mathbb{R}^d$ 上的线性映射, 通过

$$\wedge^2 g : u \wedge v \mapsto gu \wedge gv$$

所给出.

第三章　定理证明

3.1　弱收缩系统平稳测度的正则性

引理 3.1.1. 设 μ 是一个弱收缩概率测度, 那么存在常数 $c,\tau>0$ 以及正整数 N, 使得对任意 $x,y\in M$ 和正整数 $n\geqslant N$, 都有

$$\mu^{*n}\left\{f:d(x,fy)<e^{-\tau n}\right\}\leqslant e^{-cn}.$$

证明. 由推论2.3.3可找到相应的参数 c',τ' 和 N'. 那么对于给定两点 $x,y\in M$, 对任意正整数 $n>N'$, 设

$$\Lambda_n=\{f:\|D_xf^{-1}\|\leqslant e^{-\tau' n}\}\cap\{f:\|D_yf\|\leqslant e^{-\tau' n}\},$$

就有 $\mu^{*n}(\Lambda_n)\geqslant 1-2e^{-c'n}$. 令 J_xf 表示 f 在 x 处的 Jacobi 行列式, 那么对于 $f\in\Lambda_n$, 有

$$|J_xf^{-1}|\leqslant e^{-d\tau' n},\quad |J_{fy}f^{-1}|=|J_yf|^{-1}\geqslant e^{d\tau' n}.$$

现在设有限集 $S=\operatorname{supp}\mu\subset \mathrm{Diff}^{1,\alpha}(M)$ 对某个 $\alpha>0$ 成立. 那么对于 $f\in S$, $\|Df^{-1}\|_\infty$ 具有一致上界 L_1, $\log|Jf^{-1}|$ 也具有一致 α-Hölder 模 L_2, 记 $L=\max\{2,L_1,L_2\}$. 现在对于每个正整数 n, 我们将 Λ_n 中的元素 f 写成 $f=f_\omega^n$ 的形式, 其中 $\omega\in\Sigma$. 由于 ω 服从概率 $\mathbf{P}$, 从而 f_ω^n 服从分布 $\mu^{*\mathbb{N}}$. 那么对于一个 $\omega=(f_0,f_1,\cdots,f_n,\cdots)$, 令

$$x_k=f_{n-k}^{-1}\cdots f_{n-1}^{-1}(x),\quad y_k=f_{n-k}^{-1}\cdots f_{n-1}^{-1}(fy).$$

那么

$$\log|J_xf_\omega^{-n}|=\sum_{k=0}^{n-1}\log|J_{x_k}f_{n-k-1}^{-1}|,\quad \log|J_{fy}f_\omega^{-n}|=\sum_{k=0}^{n-1}\log|J_{y_k}f_{n-k-1}^{-1}|.$$

于是对 ω 使得 $f_\omega^n\in\Lambda_n$, 我们有

$$\begin{aligned}2d\tau' n&\leqslant\left|\log|J_xf_\omega^{-n}|-\log|J_{fy}f_\omega^{-n}|\right|\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\left|\log|J_{x_k}f_{n-k-1}^{-1}|-\log|J_{y_k}f_{n-k-1}^{-1}|\right|\\&\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}L_2\cdot d(x_k,y_k)^\alpha\leqslant L_2\sum_{k=0}^{n-1}L_1^k\cdot d(x,fy)^\alpha\leqslant nL^n\cdot d(x,fy)^\alpha.\end{aligned}$$

从而对于 $f\in\Lambda_n$, 总有 $d(x,fy)^\alpha\geqslant\frac{2d\tau'}{L^n}$. 由于 $\mu^{*n}(\Lambda_n)\geqslant 1-2e^{-c'n}$, 我们取 $\tau=\frac{2}{\alpha}\log L$, $c=\frac{c'}{2}$, $N>N'$ 充分大即可. □

引理 3.1.2. 设 μ 是一个弱收缩概率测度, 设 ν 是 M 上的一个 μ-平稳测度. 那么存在常数 $\alpha > 0$, 使得

$$\sup_{x\in M}\int_M \frac{1}{d(x,y)^\alpha}\mathrm{d}\nu(y) < \infty.$$

证明. 借助上一个引理, 我们可以选取相应的参数 $c, \tau, N > 0$. 我们令 $\alpha = \frac{c}{4\tau}$, 那么对于任意 $n \geqslant N$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\nu\{y : d(x,y) < e^{-\tau n}\} = (\mu^{*n} * \nu)\{y : d(x,y) < e^{-\tau n}\} \\
&= \int_M \mu^{*n}\{f : d(x,fz) < e^{-\tau n}\}\mathrm{d}\nu(z) \leqslant \int_M e^{-cn}\mathrm{d}\nu(z) = e^{-cn}.
\end{aligned}$$

对任意 $n \geqslant N$, 令 $E_n = \{y : e^{-\tau(n+1)} \leqslant d(x,y) < e^{-\tau n}\}$,$E' = \{y : d(x,y) \geqslant e^{-\tau N}\}$. 那么

$$\begin{aligned}
&\int_M \frac{1}{d(x,y)^\alpha}\mathrm{d}\nu(y) \\
&= \int_{E'} \frac{1}{d(x,y)^\alpha}\mathrm{d}\nu(y) + \sum_{n=N}^{\infty}\int_{E_n}\frac{1}{d(x,y)^\alpha}\mathrm{d}\nu(y) \\
&\leqslant \nu(E')\cdot e^{\tau N} + \sum_{n=N}^{\infty}\nu(E_n)\cdot e^{\alpha\tau(n+1)} \\
&\leqslant e^{\tau N} + \sum_{n=N}^{\infty} e^{-(c-2\alpha\tau)n} \leqslant e^{\tau N} + \frac{e^{-cN/2}}{1-e^{-c/2}}.
\end{aligned}$$

右边得到的是一个与 $x \in M$ 选取无关的界, 从而结论成立. □

借助以上两个引理, 我们容易得到关于弱收缩系统平稳测度正则性的结果和弱收缩半群轨道闭包的结论, 即定理1和推论2.

定理1的证明. 设 μ 是一个弱收缩测度, 选取 $\alpha > 0$ 为上一引理中的常数. 令

$$C = \sup_{x\in M}\int_M \frac{1}{d(x,y)^\alpha}\mathrm{d}\nu(y),$$

那么 C 为一个有限的常数. 于是对任意 $x \in M$,$\varepsilon > 0$, 都有

$$\nu(B(x,\varepsilon)) = \int_{B(x,\varepsilon)} \frac{d(x,y)^\alpha}{d(x,y)^\alpha}\mathrm{d}\nu(y) \leqslant \varepsilon^\alpha \int_M \frac{1}{d(x,y)^\alpha}\mathrm{d}\nu(y) \leqslant C\varepsilon^\alpha.$$

□

推论2的证明. 对于一个弱收缩半群 Γ, 选取 S 为一个弱收缩集合使得 S 生成 Γ, 并选取 S 上支撑的一个弱收缩概率测度 μ. 对任意 $x \in M$, 我们考虑 M 上的概率测度序列

$$\nu_n = \mu^{*n} * \delta_x, \quad \forall n \geqslant 1.$$

取 $\{\nu_n\}_{n\geqslant 1}$ 的一个弱 $*$ 极限测度 ν, 那么它是 M 上的一个 μ-平稳测度, 且支撑在 $\overline{\Gamma\cdot x}$ 上. 由定理1知, 存在 $\alpha>0$ 使得 ν 是 α-Hölder 连续的. 那么对任意 $0<\beta<\alpha$ 和任意 $0<\delta<1$, 对任何 $\overline{\Gamma\cdot x}$ 的满足 diam $U_i<\delta$ 的开覆盖 $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$, 我们有

$$\sum_{i=1}^{\infty}(\mathrm{diam}\,U_i)^{\beta}\geqslant\frac{1}{\delta^{\alpha-\beta}}\sum_{i=1}^{\infty}(\mathrm{diam}\,U_i)^{\alpha}\geqslant\frac{1}{C\cdot\delta^{\alpha-\beta}}\sum_{i=1}^{\infty}\nu(U_i)\geqslant\frac{1}{C\cdot\delta^{\alpha-\beta}}.$$

当 $\delta\to 0$ 时, 右式趋于 $+\infty$, 从而 $\overline{\Gamma\cdot x}$ 的 Hausdorff 维数至少为 $\alpha>0$. □

3.2 Lyapunov 指数和收缩性质

对于一个系统, Lyapunov 指数衡量了每点附近长期的渐进行为. 于是不难想象, 弱收缩系统应该对应于 Lyapunov 指数为负的情形. 在这一节中, 我们将讨论这一现象.

引理 3.2.1. *设 μ 是弱收缩测度, 存在 $\tau>0$, 使得对任意 $x\in M$, 对 $\mathbf{P}$-几乎处处 $\omega\in\Sigma$ 有,*

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\|D_xf_\omega^n\|\leqslant-\tau<0.$$

证明. 由推论2.3.3, 知存在常数 $\tau,c,N>0$, 满足对任意正整数 $n\geqslant N$, 都有

$$\mathbf{P}\{\omega:\|D_xf_\omega^n\|\leqslant e^{-\tau n}\}\geqslant 1-e^{-cn}.$$

注意到 $\sum_{n=N}^{\infty}e^{-cn}<\infty$, 于是由 Borel-Cantelli 引理知, 对 $\mathbf{P}$-几乎处处 $\omega\in\Sigma$ 有,

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\|D_xf_\omega^n\|\leqslant-\tau<0.$$

□

引理 3.2.2. *设有限集 $S\subset\mathrm{Diff}^{1,\alpha}(M)$ 对某个 $\alpha>0$ 成立,μ 为支撑在 S 上的一个概率测度. 如果对于 M 上的任何 μ-平稳测度 ν 和任何 μ^{*-1}-平稳测度 ν', 它们的最大 Lyapunov 指数均为负, 那么 μ 是一个弱收缩测度.*

证明. 如果所有的 μ-平稳测度的最大 Lyapunov 指数均为负, 我们来证明对于任意 $(x,v)\in T^1M$, 都存在正整数 n, 使得

$$\frac{1}{n}\int\log\|D_xf(v)\|\mathrm{d}\mu^{*n}(f)<0.$$

于是我们只需证明存在 $n\in\mathbb{Z}_+$, 使得

$$\frac{1}{n}\int\log\|D_xf_\omega^n(v)\|\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega)<0.$$

令 $\Phi:\Sigma\times T^1M\to\mathbb{R}$, 通过 $\Phi(\omega,x,v)=\log\|D_xf_\omega(v)\|$ 给出. 回忆 DF 给出了 T^1M 上的随机游走. 给定 $(x_0,v_0)\in T^1M$, 对任意 $\omega\in\Sigma, n\geqslant 0$, 令

$$(x_{\omega,n},v_{\omega,n})=(f_\omega^n(x_0),\frac{D_{x_0}f_\omega^n(v_0)}{\|D_{x_0}f_\omega^n(v_0)\|}).$$

那么

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\int_\Sigma\log\|D_{x_0}f_\omega^n(v_0)\|\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega)&=\int_\Sigma\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\Phi\circ DF^k(\omega,x_0,v_0)\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega)\\&=\int_\Sigma\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\Phi(\sigma^k(\omega),x_{\omega,k},v_{\omega,k})\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega).\end{aligned}$$

对任意 $n\geqslant 0$, 我们定义 T^1M 上的 Borel 概率测度

$$\eta_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int\delta_{(x_{\omega,k},v_{\omega,k})}\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mu^{*k}*\delta_{(x_0,v_0)}.$$

由于独立性, 我们可以看到 $(\sigma^k(\omega),x_{\omega,k},v_{\omega,k})$ 的分布就是 $\mu^{\mathbb{N}}\times(\mu^{*k}*\delta_{(x_0,v_0)})$, 从而

$$\frac{1}{n}\int_\Sigma\log\|D_{x_0}f_\omega^n(v_0)\|\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega)=\int_\Sigma\int_{T^1M}\Phi\mathrm{d}\mathbf{P}d\eta_n.$$

现在我们考虑 $\{eta_n\}_{n\geqslant 1}$ 在 T^1M 上的 Radon 测度空间中的一个弱 $*$ 极限测度, 记作 η. 那么 η 是一个 T^1M 上的 μ-平稳概率测度. 如果对任意正整数 n, 上述积分均非负, 那么

$$\int_\Sigma\int_{T^1M}\Phi\mathrm{d}\mathbf{P}\mathrm{d}\eta$$

同样也非负. 由于 η 是 μ-平稳的, 从而 $\mathbf{P}\times\eta$ 是 DF-不变的. 考虑 Φ 的 Birkhoff 平均

$$\overline{\Phi}(\omega,x,v)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\Phi\circ DF^k(\omega,x,v)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\log\|D_xf_\omega^n(v)\|.$$

那么 $\overline{\Phi}(\omega,x,v)$ 在 $(\mathbf{P}\times\eta)$-几乎处处意义下就是 (ω,x,v) 的 Lyapunov 指数. 假设 η 在 M 上的投影诱导测度为 ν, 那么 ν 也是一个 μ-平稳测度. 根据假设,ν 的最大 Lyapunov 指数为负, 从而对 $(\mathbf{P}\times\eta)$-几乎处处的 (ω,x,v), 都有 $\overline{\Phi}(\omega,x,v)<0$. 这和

$$\int_\Sigma\int_{T^1M}\overline{\Phi}\mathrm{d}\mathbf{P}\mathrm{d}\eta=\int_\Sigma\int_{T^1M}\Phi\mathrm{d}\mathbf{P}\mathrm{d}\eta\geqslant 0$$

矛盾. 从而对任意 $(x,v)\in T^1M$, 一定存在 $n\in\mathbb{Z}_+$ 使得

$$\frac{1}{n}\int\log\|D_xf(v)\|\mathrm{d}\mu^{*n}(f)<0.$$

对于 μ^{*-1} 的情况类似讨论, 我们就验证了 μ 的确是弱收缩测度. □

综合以上两个引理, 我们容易得到另一个从 Lyapunov 指数角度给出的弱收缩系统的等价刻画.

定理 3.2.3. 设有限集 $S \subset \mathrm{Diff}^{1,\alpha}(M)$ 对某个 $\alpha > 0$ 成立,μ 为支撑在 S 上的一个概率测度. 那么 μ 是弱收缩的当且仅当对任意 M 上的 μ-平稳测度 ν 和 μ^{*-1}-平稳测度 ν', 它们的最大 *Lyapunov* 指数均为负.

3.3 圆周微分同胚半群作用

利用上一节中讨论的弱收缩系统和 Lyapunov 指数的关系, 借助 Avila-Viana 的不变原理, 我们就可以证明圆上可微半群作用的平稳测度正则性的结果.

定理3的证明. 对任何 μ-平稳测度 ν, 考虑 $\Sigma \times \mathbb{S}^1$ 上的 F-不变概率测度 $m = \mathbf{P} \times \nu$, 若设 $\mathrm{d}m(\omega, x) = \mathrm{d}m_\omega(x)\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega)$, 由分解的唯一性可知对 $\mathbf{P}$-几乎处处的 ω, 有 $m_\omega(x) = \nu$. 如果 ν 的最大 Lyapunov 指数非负, 那么根据 Avila-Viana 不变原理可知, 对 $\mathbf{P}$-几乎处处的 ω, 有 $(f_\omega)_*\nu = \nu$. 这和 S 不保持一个 $\mathbb{S}^1$ 上共同的不变概率测度相矛盾. 对 μ^{*-1} 我们也可以使用相同的论断, 结合定理3.2.3知,μ 是一个弱收缩概率测度. 利用定理1知, 任何 μ-平稳测度 ν 都是 Hölder 连续的. □

推论4的证明. 根据推论2, 我们只需说明如果 Γ 不保持一个 $\mathbb{S}^1$ 上共同的不变概率测度, 那么 Γ 是一个弱收缩半群. 这只需要取 Γ 的一个有限生成集 S, 然后考虑概率测度

$$\mu = \frac{1}{|S|} \sum_{f \in S} \delta_f.$$

利用上一证明中的论断过程就可以说明 μ 是一个弱收缩概率测度, 从而 Γ 是弱收缩半群. □

3.4 射影空间上线性系统的扰动

现在我们考虑 $M = \mathbb{RP}^{d-1}$, 概率测度 μ 支撑在有限集 $S \subset \mathrm{GL}(d, \mathbb{R}) \subset \mathrm{Diff}^\infty(M)$ 上,Γ 为 S 生成的半群. 我们首先叙述有限支撑版本的 Guivarc'h 定理, 而且从弱收缩性质的观点出发, 我们给出了一种新的更为直接的证明. 同时我们借助弱收缩集合的 C^1 稳定性, 我们将给出 C^1 稳定版本的 Guivarc'h 定理.

定理 3.4.1 (Guivarc'h)**.** 设 μ 支撑在有限集 $S \subset \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ 上,Γ 为 S 生成的半群, 设 Γ 在 $\mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ 中是 *Zariski* 稠密的. 那么对于 $\mathbb{RP}^{d-1}$ 上任何一个 μ-平稳的概率测度 ν, 都有 ν 是 *Hölder* 连续的.

证明. 根据 Goldsheid-Margulis 的定理, 我们知道 μ 的 Lyapunov 谱是单的. 可设 μ 所对应的矩阵随机乘积的 Lyapunov 指数为

$$\lambda_d < \cdots < \lambda_2 < \lambda_1.$$

现在我们考虑 ν 是 $M = \mathbb{RP}^{d-1}$ 上的一个 μ-平稳测度, 我们来计算 ν 的最大 Lyapunov 指数. 事实上, 对于任意 $[u] \in M, v \in T_{[u]}M, g \in \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$, 我们有

$$\frac{\|D_{[u]}g(v)\|}{\|v\|} = \frac{\|u\|}{\|gu\|} \frac{\|gv \wedge gu\|}{\|gu\|\|v\|} = \frac{\|u\|^2}{\|gu\|^2} \frac{\|gu \wedge gv\|}{\|u \wedge v\|}.$$

因为 ν 在任何 $\mathbb{RP}^{d-1}$ 的线性子空间上都是零测, 从而对 $(\mathbf{P} \times \nu)$-几乎所有的 $(\omega, [u]) \in \Sigma \times M$, 我们有

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \frac{\|g_\omega^n u\|}{\|u\|} = \lambda_1, \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \| \wedge^2 g_\omega^n\| = \lambda_1 + \lambda_2.$$

从而 ν 在的最大 Lyapunov 指数不超过 $\lambda_2 - \lambda_1 < 0$. 同样的论断也可以对 μ^{*-1} 进行, 从而可以说明 μ 是弱收缩的. 应用定理1, 即得结论. □

注 3.4.2. *注意到我们的证明只需要 $\lambda_2 < \lambda_1$ 即可, 于是对 Γ 的限制可以减弱到具有强不可约性和渐进性 (proximality), 这与 Guivarch 定理原本的假设相一致. 但这里需要注意的是, 我们需要需要对 μ^{*-1} 也执行相应的操作, 从而我们需要对 $\Gamma^{-1} = \{g^{-1} : g \in \Gamma\}$ 也验证相应的条件, 而渐进性的验证是相对不平凡的. 这一事实可以模仿 Gol'dsheid-Margulis 在 [23] 中定理 3.6 的证明方法, 结合一些代数群的知识去说明 Γ 具有渐进性当且仅当其 Zariski 闭包具有渐进性, 而 Γ 和 Γ^{-1} 总是具有相同的 Zariski 闭包的. 由于这一对条件减弱的过程背离了本文主旨, 我们在此就不列出具体的证明细节.*

定理5的证明. 我们考虑概率测度

$$\mu_0 = p_1 \delta_{g_1} + \cdots + p_k \delta_{g_k},$$

那么根据我们所给出的 Guivarc'h 定理的证明过程可以看出, μ_0 是一个弱收缩概率测度. 从而根据命题2.2.2, μ_0 是一个强收缩概率测度. 于是存在正整数 N 和常数 $C > 0$, 使得对任意 $x \in M$, 都有

$$\frac{1}{N} \int \log \|D_x g\| \mathrm{d}\mu_0^{*N}(g) < -C, \quad \frac{1}{N} \int \log \|D_x g^{-1}\| \mathrm{d}\mu_0^{*N}(g) < -C.$$

当 S' 在 C^1 拓扑下充分接近 S 时, 对任意 $(i_1, \cdots, i_N) \in \{1, \cdots, k\}^N$, 都有

$$|\log \|D_x(f_{i_N} \cdots f_{i_1})\| - \log \|D_x(g_{i_N} \cdots g_{i_1})\|| \leqslant \frac{C}{2} N,$$

$$|\log\|D_x(f_{i_N}\cdots f_{i_1})^{-1}\| - \log\|D_x(g_{i_N}\cdots g_{i_1})^{-1}\|| \leqslant \frac{C}{2}N.$$

于是

$$\frac{1}{N}\int \log\|D_x f\|\mathrm{d}\mu^{*N}(f) < -\frac{C}{2}, \quad \frac{1}{N}\int \log\|D_x f^{-1}\|\mathrm{d}\mu^{*N}(f) < -\frac{C}{2}.$$

从而 μ 也是强收缩测度, 利用定理1知, 任何 μ-平稳测度 ν 都是 Hölder 连续的. □

推论6的证明. 对于有限集 $S = \{g_1, \cdots, g_k\} \subset \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$, 我们取定

$$(p_1, \cdots, p_k) = (1/k, \cdots, 1/k).$$

利用上一定理的证明可知, 对任何有限集 $S' \subset \mathrm{Diff}^{1,\alpha}(\mathbb{RP}^{d-1})$ 对某个 $\alpha > 0$ 成立, 且 S' 在 C^1 拓扑下靠近 S, 我们都有 S' 是一个弱收缩集合. 应用推论2即可. □

参考文献

[1] Juan Alonso, S'ebastien Alvarez, Dominique Malicet, Carlos Menino Cot'on, and Michele Triestino. 2019. Ping-pong partitions and locally discrete groups of real-analytic circle diffeomorphisms, I: Construction. *arXiv preprint, arXiv: 1906.03578* (2019).

[2] S'ebastien Alvarez, Pablo G. Barrientos, D. A. Filimonov, Victor Kleptsyn, Dominique Malicet, Carlos Menino, and Michele Triestino. 2021. Ping-pong partitions and locally discrete groups of real-analytic circle diffeomorphisms, II: Applications. *arXiv preprint, arXiv: 2104.03348*.

[3] V. A. Antonov. 1984. Modeling cyclic evolution processes: Synchronization by means of a random signal.

[4] Ludwig Arnold. 1991. *Random dynamical systems*.

[5] A. Avila and M. Viana. 2007. Simplicity of Lyapunov spectra: proof of the Zorich-Kontsevich conjecture. *Acta Mathematica* 198, 1 (2007), 1–56.

[6] A. Avila and M. Viana. 2010. Extremal Lyapunov exponents: an invariance principle and applications. *Inventiones Mathematicae* 181, 1 (2010), 115–178.

[7] Y. Benoist and J. F. Quint. 2011. Mesures stationnaires et fermés invariants des espaces homogènes. *Annals of Mathematics* 174, 2 (2011), 1111–1162.

[8] Y. Benoist and J. F. Quint. 2013. Stationary measures and invariant subsets of homogeneous spaces (II). *J. Amer. Math. Soc.* (2013).

[9] Y. Benoist and J. F. Quint. 2013. Stationary measures and invariant subsets of homogeneous spaces (III). *Annals of Mathematics* 178, 3 (2013), 1017–1059.

[10] Y. Benoist and J.-F. Quint. 2018. On the regularity of stationary measures. *Israel Journal of Mathematics* 226, 1 (2018), 1–14.

[11] Alex Blumenthal, Jinxin Xue, and Lai-Sang Young. 2017. Lyapunov exponents for random perturbations of some area-preserving maps including the standard map. *Annals of Mathematics* 185 (2017), 285–310.

[12] J. Bourgain. 2012. Finitely Supported Measures on $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ Which are Absolutely Continuous at Infinity. *Springer Berlin Heidelberg* (2012).

[13] J. Bourgain, A. Furman, E. Lindenstrauss, and S. Mozes. 2010. Stationary measures and equidistribution for orbits of nonabelian semigroups on the torus. *Journal of the American Mathematical Society* 24, 1 (2010), 231–231.

[14] A. Brown and F.R. Hertz. 2017. Measure rigidity for random dynamics on surfaces and related skew products. *Journal of the American Mathematical Society* 30, 4 (2017), 1055–1132.

[15] P. N. Chung. 2020. Stationary measures and orbit closures of uniformly expanding random dynamical systems on surfaces. *arXiv preprint, arXiv:2006.03166* (2020).

[16] Bertrand Deroin, Victor Kleptsyn, and Andrés Navas. 2013. On the ergodic theory of free group actions by real-analytic circle diffeomorphisms. *Inventiones mathematicae* 212 (2013), 731–779.

[17] Dmitry Dolgopyat and R. Krikorian. 2007. On simultaneous linearization of diffeomorphisms of the sphere. *Duke Mathematical Journal* 136 (2007), 475–505.

[18] A. Eskin and E. Lindenstrauss. [n.d.]. Random walks on locally homogeneous spaces. *Preprint*.

[19] A. Eskin and M. Mirzakhani. 2018. Invariant and stationary measures for the SL(2,R) action on Moduli space. *Publications mathématiques de lÏHéS* (2018).

[20] H. Furstenberg. 1963. Noncommuting random products. *Trans. Amer. Math. Soc.* 108, 3 (1963), 377–428.

[21] H. Furstenberg. 1967. Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in diophantine approximation. *Mathematical Systems Theory* 1, 1 (1967), 1–49.

[22] H. Furstenberg and H. Kesten. 1960. Products of Random Matrices. *The Annals of Mathematical Statistics* 31, 2 (1960), 457–469.

[23] I. Gol'Dsheid and G. A. Margulis. 1989. Lyapunov indices of a product of random matrices. *Russian Mathematical Surveys* (1989).

[24] Yves Guivarc'h. 1990. Produits de matrices aléatoires et applications aux propriétés géometriques des sous-groupes du groupe linéaire. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 10, 3 (1990), 483−512.

[25] Y. GUIVARC'H and Alexander N. Starkov. 2004. Orbits of linear group actions, random walks on homogeneous spaces and toral automorphisms. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 24 (2004), 767 – 802.

[26] Victor Kleptsyn, Yu. Yu. Kudryashov, and Alexey Okunev. 2018. Classification of generic semigroup actions of circle diffeomorphisms. *arXiv preprint, arXiv: 1804.00951* (2018).

[27] Andres Koropecki and Meysam Nassiri. 2010. Transitivity of generic semigroups of area-preserving surface diffeomorphisms. *Mathematische Zeitschrift* 266 (2010), 707–718.

[28] Jialun Li. 2018. Decrease of Fourier coefficients of stationary measures. *Math. Ann.* 372 (2018), 1189–1238.

[29] X.-C. Liu and D. Xu. 2017. A Large deviation theorem for random walks on the surface (Part of X.-C. Liu's Ph. D. thesis). *Prepint* (2017).

[30] D. Malicet. 2017. Random Walks on Homeo($\mathbb{S}^1$). *Communications in Mathematical Physics* 356, 3 (2017), 1083–1116.

[31] G. Margulis. 2000. Free subgroups of the homeomorphism group of the circle. *Comptes Rendus De Lacadémie Des Sciences* (2000).

[32] Roman Muchnik. 2005. Semigroup Actions on $\mathbb{T}^n$. *Geometriae Dedicata* 110 (2005), 1–47.

[33] Andrés Navas. 2006. Groups of Circle Diffeomorphisms. (2006).

致谢

大学四年转瞬即逝，写完这篇致谢，本科生涯基本也算是画上了句号。这篇文章的内容可以算得上是做出来的第一个成果了，而且我对于这个结论的叙述还是比较满意的，所以一直觉得还是应该将它写在毕业论文中。也正是因为有如此多想要真诚感谢的人和事，于是也更想把这对自己来说十分有意义的第一个成果展现在这里，希望能和诸位一起分享这一份喜悦。

首先要感谢许地生老师。他对数学诸多领域有着广泛的兴趣和热情，对待问题时又通常有着敏锐的洞察力和独到的见解，这些都一直在深深地影响着我。同时，在数学品味方面我也感到和他十足的志趣相投，在他的带领下我也逐渐在自己感兴趣的方向找到前行的路。学术之外，许老师也毫不吝啬他对学生的关心和帮助，在我若干次挣扎迷茫的时刻，许老师的鼓励和耐心总会成为照亮我的一抹光。也要感谢毕业论文的导师何伟鲲老师，对于本文他也提出了许多宝贵且细致的修改意见。同时，他这学期开设的《和积定理》短期课程让我对这一领域相关的问题和应用都逐渐有了认识，而且他在我关心的许多五花八门的方向上都有所涉猎，因此他也给我指明了不少前进的方向。

同时感谢在数学之路上遇到的其他诸多老师们，我常常会感激自己的运气如此之好能恰逢这么多良师。高中时期的张端阳老师带领我们走上了数学的路。大学期间在史逸老师的带领下我得以初窥动力系统的门径，张润林老师这学期开设的《齐性动力系统》和各种耐心的指导让我受益匪浅。还要感谢甘少波老师，安金鹏老师，孙文祥老师，李欣意老师，许惟钧老师，王家军老师，他们在学术上或是生活上都给予了我许多帮助。而最让我印象深刻的，不止是这些老师们广博的学识和深厚的学术水平，而是他们身上的纯粹与谦和。在和他们交流时从不需要过多顾忌什么，他们也总会知无不言、倾囊相授。正是因为他们的存在，我也会更加希望未来能够成为他们那样的人。

还要感谢我许多的好友们，但篇幅所限可能无法列出每一位的名字，只能忍痛从略。感谢从中学到现在一直在数学之路上共同前行的杨泓暕、杨向谦、杨舍、王梓晗、盛翊伦、沈家河、侯悦石、于惠施、陈远洲、孔鼎问、欧阳铭辉，正是因为如此多志同道合的好友的存在，我在数学道路上的前行才从不会感到单调或孤单。感谢沈元哲、刘禹泽、蒋天阳、房东柯、付煜、刘心怡、刘溯晨、夏琪这些“栏目组”的兄弟们，和他们共度过太多开心快乐的时光，我也因此做出过一些重要的选择。感谢“捞捞捞”群的几片“雪花”，王泽韬、王启晗和几位之前提及的好友们，在我黯然消沉的时候，他们的陪伴给予了我许多精神上的支

撑。感谢大学期间新的相遇，感谢张洁松、林左、郑奥扬、吴泳晟、吴乘洋、江屿山、丁力煌，他们关心的数学内容与我都有着不少的交集，和他们的讨论常常能让我受到不少启发；感谢我的室友们，李艺康、谢鹏志、吴正诚，虽然平时交流不太多，但保持着淡如水般君子之交；感谢欧阳泽轩、梁渝涛、冯煜阳、张质源、杨铮，感谢王坤学长，在本科期间参与的各种高中数学竞赛相关的志愿活动都是我一直珍存的回忆，我也有幸在这些经历中结识了这些好友并共享了许多精彩瞬间。

感谢 CTY 粉丝群的群友们、感谢人大附中招生志愿组，特别是“焦宇翔等 20 人”群的群友们、感谢 EDP2011 的同学们。其中有许多是我相识十多年的好友，也有一些是近年才有所交集。不论如何，和他们在一起时我总能有着一种归属感，总会感到一种平静和自如。

还要感谢一些特殊的存在，包括哔哩哔哩、switch、steam，以及若干手游、综艺和剧，它们为我提供了许多快乐的源泉和平复情绪的方式。我一直承认自己具有着的很大惰性与玩心，通过这些存在也确实帮助我能以更好的心情和状态面对着一些艰深数学。当然还要感谢 latex 和腾讯会议，日常使用前者敲一些什么和利用后者线上聊天，这两件事已然成为我日常主要的解压方式。

最后要郑重感谢我的父母，感谢他们对于我毫无保留的支持和生活上的关心。我庆幸于自己成长在这样一个家庭中，一方面可以相对衣食无忧的生活着，暂时不用为生计所迫，可以安心追寻着自己的数学梦；另一方面，我又常常十分叛逆与执拗，但他们却给予了我最大的宽容与支持，给了我强大的保护。虽然他们看不懂这一篇文章中的任何数学内容，但他们一直尽着自己的努力为我营造着最安静的治学环境，让我总可以毫无顾忌地完成着当下的这一切。

我从来不是一个勤奋的人，也从不认为自己有着多么高的天赋。正如上文中所提及的，我是一个玩心很重的人。我一直相信一切都是最好的安排，所以我感激生命中的每一次相遇，也正是这些人和事塑造了今天的我，支撑着我不断前行。我也感激在现在这样一个不太安稳的大环境下仍有着这样一个相对安稳的环境来进行数学的学习研究，这样一方净土来之不易。就是希望自己能够一直保持一颗平常心，继续好好做数学，但求无愧于心吧。

北京大学学位论文原创性声明和使用授权说明

原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品或成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律结果由本人承担。

论文作者签名：焦宇翔

日期：2022 年 6 月 9 日

学位论文使用授权说明

本人完全了解北京大学关于收集、保存、使用学位论文的规定，即：

- 按照学校要求提交学位论文的印刷本和电子版本；
- 学校有权保存学位论文的印刷本和电子版，并提供目录检索与阅览服务，在校园网上提供服务；
- 学校可以采用影印、缩印、数字化或其它复制手段保存论文；

论文作者签名：焦宇翔　　导师签名：

日期：2022 年 6 月 9 日