高等数学 A 习题课讲义

焦宇翔

https://yuxiangjiao.github.io

目录

§1. 实数与序列极限

什么是**实数**? 现代数学对于实数有着一套公理化的严格定义, 通常使用**Dedekind 分割**或者**Cauchy 完备化**. 但一切均从这些抽象定义出发就会带来诸多实践上的不便. 《高等数学》的一个主要目的是能够建立和应用**微积分**. 而建立微积分的重要基础是在四则运算之外需要引入**极限**的概念. 对于实数的公理化定义也是为了保证各种关于极限的操作符合直觉.

所以在这一门课中我们可以忽略掉公理化定义实数带来的各种不便性, 只需要朴素地将**实数集** $\mathbb{R}$认可为**有理数集** $\mathbb{Q}$（有限小数和无限循环小数构成的集合, 也是全体分数构成的集合）和**无理数集**（无限不循环小数构成的集合）的并, 并记得实数集具有 “可以取极限” 这一优秀性质也就足够了.

例 1.1 (书习题 1.1.1)**.** 证明 $\sqrt{3}$ 是无理数.

证明. 反证法. 假设 $\sqrt{3}$ 为有理数, 设 $\sqrt{3} = p/q$, 其中 p, q 是互质的整数. 那么满足 $p^2 = 3q^2$. 这说明 p 是 3 的倍数. 设 $p = 3p_1$, 其中 p_1 为另一整数. 我们得到 $q^2 = 3p_1^2$. 这又说明 q 也是 3 的倍数. 这就与 p, q 互质矛盾. 从而我们知道 $\sqrt{3}$ 不是有理数. □

注 1.2 这种利用数论讨论整除性的方法是证明无理数的标准方法之一, 利用这一方法可以证明一般对于不是完全平方数的正整数 n, $\sqrt{n}$ 都是无理数.

例 1.3 (书习题 1.1.7 & 1.1.8)**.**
设 (a, b) 是一个开区间, 证明: (a, b) 中必同时有有理数和无理数.

证明. 先证存在有理数. 对于一个正整数 n, 我们总可以考虑集合 $A_n = \left\{ \frac{k}{n} : k \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{Q}$, 构成数轴上的一个 “网”. 如果 $(a, b) \cap A_n$ 为空, 那么说明必存在一个 $k \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\frac{k}{n} \leqslant a < b \leqslant \frac{k+1}{n}.$$

特别地, $b - a \leqslant 1/n$. 那么如果我们选取一个充分大的正整数 n 满足 $n > 1/(b - a)$, 就可以知道 $A_n \cap (a, b)$ 非空, 从而找到一个 (a, b) 中的有理数.

无理数的情形其实是类似的, 上一题已经告诉我们 $\sqrt{3}$ 是无理数, 所以我们可以考虑一个由无理数构成的 “网” $A'_n = \left\{ \frac{k}{n} + \sqrt{3} : k \in \mathbb{Z} \right\}$. 当 $n > 1/(b - a)$ 时我们同样可以知道 $(a, b) \cap A'_n$ 不是空集. □

从这一例题也可以看出实数集 $\mathbb{R}$ 与有理数集 $\mathbb{Q}$ 在数轴上均是稠密的. 但两者就在于**完备性**. 如果把 $\mathbb{R}$ 看成完整的数轴, $\mathbb{Q}$ 的形状则可以想象成一个 “筛子”—“密集但处处是空隙”. 而完备性就体现在允许我们求极限:

命题 1.4 $\mathbb{R}$ 上的单调有界序列有极限.

延伸 1.5 (完备性的一般表述: Cauchy 列的收敛性)

定义 1.6. 序列 $\{x_n\}$ 称为**Cauchy 列**如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N > 0$ 使得 $|x_m - x_n| < \varepsilon$ 对任意 $m, n > N$ 成立.

下述命题即为**实数集的 Cauchy 完备性**. 该性质也可以看作是从有理数集出发定义实数集的一种等价定义方式.

命题 1.7 $\mathbb{R}$ 上的 Cauchy 列有极限.

下述引理告诉我们可将单调有界序列的收敛性看作 Cauchy 完备性的特例.

引理 1.8 $\mathbb{R}$ 上的单调有界序列都是 Cauchy 列.

证明. 设 $\{x_n\}$ 是一个单调有界序列. 不妨设 $x_n \leqslant x_{n+1}$ 且对某个实数 C 有 $x_n \leqslant C$ 对所有 n 成立. 我们使用反证法, 假设 $\{x_n\}$ 不是 Cauchy 列. 那么存在一个 $\varepsilon > 0$ 使得对任意 $N > 0$ 都存在 $m > n > N$ 使得 $x_m - x_n \geqslant \varepsilon$.

我们取 $n_1 = 1$ 并归纳地选取 n_k 使得 $x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \geqslant \varepsilon$. 实际上, 假设 n_k 已经选好. 令 $N = n_k$, 那么我们可以找到 $m > n > n_k$ 使得 $x_m - x_n \geqslant \varepsilon$. 由序列单调性知 $x_m - x_{n_k} \geqslant x_m - x_n \geqslant \varepsilon$. 于是我们让 n_{k+1} 为这个 m 即可.

对于这个我们找出的序列, 我们可以知道

$$x_{n_{k+1}} - x_{n_1} = \sum_{i=1}^{k} (x_{n_{i+1}} - x_{n_i}) \geqslant \varepsilon k,$$

对任意正整数 k 都成立. 但另一方面, 根据序列的有界性, 上式左侧不超过 $C - x_1$. 当 k 充分大时我们得到矛盾. 从而单调有界序列一定是 Cauchy 列. □

下面这个例题说明了收敛序列、有界序列、Cauchy 列三者的关系, 也可以作为熟悉 $\varepsilon - N$ 语言的一个联系.

例 1.9. 设 $\{x_n\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的收敛序列 (极限存在的序列), 证明:

1. (书习题 1.3.3) $\{x_n\}$ 是一个有界序列.
2. $\{x_n\}$ 是一个 Cauchy 列.

证明. 1. 设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. 根据极限的定义, 存在 N 使得对任意 $n > N$ 都有 $|x_n - a| \leqslant 1$. 从而对 $n > N$ 都有 $|x_n| \leqslant |a| + 1$. 于是我们取

$$M = \max\left\{ |a| + 1, \max_{n \leqslant N} |x_n| \right\},$$

就有 $|x_n| \leqslant M$ 对所有 n 成立.

2. 设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. 对任意 $\varepsilon > 0$, 根据极限的定义, 存在 N 使得对任意 $n > N$ 都有 $|x_n - a| < \varepsilon/2$. 那么对于任意 $m, n > N$, 由三角不等式, 有

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) - (x_m - a)| \leqslant |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon.$$

从而 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列.

□

作为熟悉 "$\varepsilon - N$ 语言" 的练习, 有如下关于极限的**Cauchy 命题**及其变形版本.

例 1.10. 设序列 a_n, b_n 满足 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$, 证明:

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \alpha$.

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k} = \alpha\beta$.

证明. (1) **想法:** *根据极限定义, 我们需要对每个 $\varepsilon > 0$ 找到 N 使得当 $n > N$ 时*

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - \alpha\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k - \alpha)\right| < \varepsilon.$$

我们已知序列 a_n 收敛于 α, 所以可以知道在上述和式中, 对于较大的 k, $|a_k - \alpha|$ 是较小的. 而对于较小的 k, 我们希望这些 k 的数量占比是很小的 (这一点可以在 n 很大时做到), 再结合序列的有界性给出估计. 这种估计方法在分析中是十分常见的: 对于 "好项" 给出精确的估计, 对 "坏项" 给出粗糙的估计, 最后结合 "坏项" 的占比很小根据想要的估计.

现在给出详细的证明. 由于收敛序列都是有界序列, 我们可以假设存在 $C > 0$ 使得 $|a_n - \alpha| < C$ 对所有 $n > 0$ 成立. 对任意 $\varepsilon > 0$, 由于 $\lim_{k\to\infty} a_k = \alpha$, 我们可以找到 $N_0 > 0$ 使得当 $k > N_0$ 时 $|a_k - \alpha| \leqslant \varepsilon/2$. 我们令 $N = \lceil 2\varepsilon^{-1} C N_0 \rceil$. 对于 $n > N$ 时, 我们有

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k - \alpha)\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k - \alpha| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_0}|a_k - \alpha| + \frac{1}{n}\sum_{k=N_0+1}^{n}|a_k - \alpha|.$$

注意到

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_0}|a_k - \alpha| \leqslant \frac{N_0}{n}C < \frac{CN_0}{N} \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\frac{1}{n}\sum_{k=N_0+1}^{n}|a_k - \alpha| \leqslant \frac{n - N_0}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

我们得到 $\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - \alpha\right| < \varepsilon$ 对任意 $n > N$ 成立.

(2) 这一题的想法与上一题相似. 我们需要注意到

$$|a_k b_{n+1-k} - \alpha\beta| = |(a_k b_{n+1-k} - a_k\beta) + (a_k\beta - \alpha\beta)| \leqslant |a_k|\cdot|b_{n+1-k} - \beta| + |\beta|\cdot|a_k - \alpha|.$$

所以只要 $|b_{n+1-k} - \beta|$ 和 $|a_k - \alpha|$ 都足够小, 那么 $|a_k b_{n+1-k} - \alpha\beta|$ 也就很小, 即为 "好项".

首先根据收敛序列的有界性, 我们可以取 $C>0$ 使得 $|a_n|,|b_n|,|\alpha|,|\beta|<C$. 对于任意 $\varepsilon>0$, 由于 $a_k\to\alpha$ 和 $b_k\to\beta$, 我们可以找到 $N_0>0$ 使得对任意 $k>N_0$ 有 $|a_k-\alpha|\leqslant\varepsilon/(4C)$ 和 $|b_k-\beta|\leqslant\varepsilon/(4C)$. 我们令 $N=\lceil 8\varepsilon^{-1}C^2N_0\rceil$. 对 $n\geqslant N$, 我们有

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n+1-k}-\alpha\beta\right| &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(|a_k|\cdot|b_{n+1-k}-\beta|+|\beta|\cdot|a_k-\alpha|)\\ &\leqslant \frac{C}{n}\sum_{k=1}^{n}(|b_{n+1-k}-\beta|+|a_k-\alpha|)\\ &= \frac{C}{n}\sum_{n=1}^{N_0}(|b_k-\beta|+|a_k-\alpha|)+\frac{C}{n}\sum_{n=N_0+1}^{n}(|b_k-\beta|+|a_k-\alpha|)\\ &\leqslant \frac{4C^2N_0}{n}+\frac{2C(n-N_0)}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{4C}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

从而我们证明了上述极限.

(2)' 这一问还可以通过结合 (1) 和夹逼定理更直接地得到. 事实上, 根据 (1) 我们知道 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\alpha$. 我们令 $b_n'=b_n-\beta$, 那么我们只需证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n+1-k}'=0.$$

我们又注意到 $\lim_{n\to\infty}b_n'=0$, 从而 $\lim_{n\to\infty}|b_n'|=0$. 于是根据 (1) 我们还知道

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|b_{n+1-k}'|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|b_k'|=0.$$

最后我们利用收敛序列的有界性, 选取 $C>0$ 使得 $|a_n|<C$. 那么

$$-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|b_{n+1-k}'|\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n+1-k}'\leqslant C\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|b_{n+1-k}'|,$$

不等式两端极限均为 0, 从而由夹逼定理即得该极限.

□

注 1.11 证明中的 N_0 和 N 通常是根据最后放缩需要的大小凑出的, 如 (2) 中最后的放缩计算出一项为 $\frac{4C^2N_0}{n}$, 需要它不超过 $\frac{\varepsilon}{2}$, 所以我们选取 $N=\lceil 8\varepsilon^{-1}C^2N_0\rceil$.

实数完备性通常可以帮助我们证明序列的极限存在, 尤其在我们无法具体得知序列的极限时. 首要的一个例子就是关于 e 的定义, 即序列 $\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$ 的极限. 该序列极限的存在性就使用到了实数集的完备性. 事实上我们可以证明 e 不是有理数. 也就是说虽然这个序列的每一项都是有理数, 但该序列在 $\mathbb{Q}$ 上不存在极限, 这也一定程度上说明对于实数集完备性的使用在证明过程中是必不可少的一步.

延伸 1.12 (e 的无理性)

例 1.13 (书习题 1.3.9). 记 $S_n=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$, 证明 $\lim_{n\to\infty}S_n=e$.

证明. 注意到 $\{S_n\}$ 单调递增, 并且利用裂项可得

$$S_n=1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\leqslant 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}=3-\frac{1}{n}\leqslant 3.$$

从而 $\{S_n\}$ 有极限, 设该极限为 a. [书习题 1.3.8(4)]

我们有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\leqslant S_n.$$

于是 $\lim_{n\to\infty}S_n=a\geqslant e$.

为证明 $a\leqslant e$, 我们使用如下技巧: 对于每个固定的 n, 去证明 S_n 不大于 e. 此时我们将 e 看作极限

$$e=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+n}.$$

利用二项式展开, 我们可以发现

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+n}\geqslant 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\frac{m+n}{m}\cdots\frac{m+n-(k-1)}{m}\geqslant 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}=S_n.$$

也就得到了 $S_n\leqslant\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+n}=e$. 从而 $\lim_{n\to\infty}S_n=e$. □

命题 1.14 e 为无理数.

证明. 我们使用反证法, 假设 $e=p/q$, 其中 $p,q\geqslant 2$ 为整数 (这里我们可以不要求互质, 但需要 $q\geqslant 2$). 我们利用前述极限. 注意到对 $n\geqslant q+1$, 有

$$\begin{aligned}S_n&=1+\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{k!}+\sum_{k=q+1}^{n}\frac{1}{k!}=1+\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{k!}+\frac{1}{q!}\sum_{k=q+1}^{n}\frac{1}{k(k-1)\cdots(q+1)}\\&\leqslant 1+\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{k!}+\frac{1}{q!}\left(\frac{1}{q+1}+\sum_{k=q+2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}\right)\leqslant 1+\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{k!}+\frac{1}{q!}\cdot\frac{2}{q+1}.\end{aligned}$$

记 $A=q!\left(1+\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{k!}\right)$ 为一个整数. 那么对 $n\geqslant q+1$, 有

$$A+\frac{1}{q+1}\leqslant q!S_n\leqslant A+\frac{2}{q+1}.$$

根据假设, $\lim_{n\to\infty}q!S_n=p\cdot(q-1)!$ 为一个整数. 但当 $q\geqslant 2$ 时, 区间 $[A+1/(q+1),A+2/(q+1)]$ 上没有整数, 矛盾. □

注 1.15 不同于例1.1, 这个证明是利用整数的离散性来证明一个数是无理数. 这依赖于例1.13所给出的一种收敛到 e 且速度较快的极限表达式. 事实上, 被 Liouville 所证明的第一个超越数的例子也用到了这种“收敛速度快”的想法.

与证明序列 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 极限存在类似的还有一些其他证明极限存在的例子，通常都是使用完备性得到.

例 1.16 (书习题 1.3.8). 证明下述序列极限存在:

(1) $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

(2) $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k+1}$.

(3) $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$.

证明. (1) 显然 $\{x_n\}$ 单调递增. 为证明该序列有界, 只需注意到

$$x_n = 1+\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leqslant 1+\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 1+\sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) = 2-\frac{1}{n} \leqslant 2.$$

(2) 显然 $\{x_n\}$ 单调递增. 为证明该序列有界, 只需注意到

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k+1} \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = 1-\frac{1}{2^n} \leqslant 1.$$

(3) 注意到 $x_n \leqslant n\cdot\frac{1}{n} \leqslant 1$, 从而该序列有界. 同时

$$x_{n+1}-x_n = \frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2} > 0,$$

即该序列单调递增.

□

注 1.17 本题前两问体现了两个重要的估计求和式大小的方式, 一种是转化为可以进行裂项的求和, 一种是转化为等比数列求和. 本质目的都是转化为具有公式方便求和的式子进行估计.

在上述证明极限存在性的问题以外, 更多的一类问题是计算极限的取值. 常用的求极限的方式通常是从最基本的几个极限出发, 使用**极限的四则运算**和**夹逼定理**来得到一般序列极限. 一些困难的求极限问题则需要更巧妙的变形放缩或者其他技巧.

例 1.18 (书习题 1.3.6). 证明: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证明. 令 $x_n=\sqrt[n]{n}-1$, 只需证 $\lim_{n\to\infty}x_n=0$. 由于 $(1+x_n)^n=n$, 利用二项式展开, 我们得到 ($n\geqslant 2$ 时)

$$n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_n^k \geqslant \frac{n(n-1)}{2}x_n^2.$$

这里放缩只留下 x_n^2 的项是因为我们希望放缩得到 x_n 是很小的, 但同时希望形式尽量简单. 由此不等式我们得到

$$0 \leqslant x_n \leqslant \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

由于 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{n-1}}=0$. 由夹逼定理知 $\lim_{n\to\infty}x_n=0$. □

例 1.19 (书习题 1.3.8)**.** 求下列极限:

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2-100}{4n^3-n+2}$;

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$;

(3) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n}$.

证明. (1) 我们有

$$\frac{n^3+3n^2-100}{4n^3-n+2}=\frac{1+\frac{3}{n}-\frac{100}{n^3}}{4-\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}.$$

利用

$$\lim_{n\to\infty}1+\frac{3}{n}-\frac{100}{n^3}=1,\quad \lim_{n\to\infty}4-\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}=4,$$

和极限的四则运算知 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2-100}{4n^3-n+2}=\frac{1}{4}$.

(2) 观察到 $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\to e^{-1}$, 所以上述极限应该为 $\lim_{n\to\infty}e^{-n}=0$. 为了证明的严谨性, 我们可以以这个答案为目标采取一些粗糙但容易得到的放缩. 由二项式展开, 我们有

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-n}\leqslant\left(1+\frac{n}{n-1}\right)^{-1}\leqslant\frac{1}{2}.$$

从而 $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}\leqslant 2^{-n}$. 由夹逼定理知 $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}=0$.

(3) 观察到 $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\to e^{-1}$, 所以上述极限应该为 $\lim_{n\to\infty}e^{-\frac{1}{n}}=1$. 同样为了得到严格的证明我们可以根据答案进行一些放缩. 一方面 $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\leqslant 1$ 给出了上界. 另一方面

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{-n}=\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{-(n^2-1)\cdot\frac{n}{n^2-1}}\geqslant e^{-\frac{n}{n^2-1}}\geqslant e^{-\frac{1}{n-1}}.$$

其中利用了序列 $\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$ 单调递增收敛到 e 从而 $\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n^2-1}\leqslant e$. 而 $e^{-\frac{1}{n-1}}\to 1$, 从而由夹逼定理知 $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n=1$.

□

例 1.20 (书习题 1.9)**.** 求极限 $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2})$.

证明. 注意到

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{(2-1)(2+1)}{2^2}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\frac{n+1}{2n}.$$

从而该极限为 1/2. □

例 1.21. 计算如下极限:

(1) $\lim_{n\to\infty}(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$, 其中 $|a|<1$ 为给定实数.

(2) $\lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{1}{4}\cdots\cos\frac{1}{2^n}$.

证明. 这两个习题也都是使用裂项进行求极限

(1) 我们注意到 $(1-x^2)=(1+x)(1-x)$. 从而

$$(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})=\frac{1-a^2}{1-a}\cdot\frac{1-a^4}{1-a^2}\cdots\frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a^{2^n}}=\frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a}.$$

由于 $|a|<1$, 我们知道 $\lim_{n\to\infty}a^{2^{n+1}}=0$. 从而原序列极限为 $\frac{1}{1-a}$.

(2) 利用三角函数倍角公式 $\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x$, 我们有 $\cos x=\frac{\sin 2x}{2\sin x}$. 从而

$$\cos\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{1}{4}\cdots\cos\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sin 1}{\sin\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}}{\sin\frac{1}{4}}\cdots\frac{\sin\frac{1}{2^{n-1}}}{\sin\frac{1}{2^n}}=\frac{\sin 1}{2^n\sin\frac{1}{2^n}}.$$

最后我们需要用到重要的函数极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, 特别地 $\lim_{n\to\infty}2^n\sin\frac{1}{2^n}=1$. 于是原序列极限为 $\sin 1$.

□

§2. 序列极限、函数极限与连续函数 (一)

§2.i. 序列极限补充

此外, 还有一些通过迭代产生的序列求极限问题, 也是常见的题目类型.

> **例 2.1.** 判断下列序列极限是否存在, 如果序列极限存在那么求极限值:
>
> (1) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{1+x_n}$;
>
> (2) $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2}^{x_n}$;
>
> (3) $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$.

可以发现这一类问题的序列都是通过一个函数迭代产生的, 即给定一个 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 $f(x)$ 和序列的第一项 x_1, 然后序列通过 $x_{n+1} = f(x_n)$ 产生. 而且通常这一类问题中所给的函数 f 都是严格单调递增的, 即 $f(x) > f(y)$ 对所有 $x > y$ 成立. 这一类问题有着标准的套路.

首先可以证明这样的序列都是单调序列: 如果 $x_2 > x_1$ 则可以归纳法证明 $x_{n+1} > x_n$; 如果 $x_2 < x_1$ 则可以归纳法证明 $x_{n+1} < x_n$. 此后极限的存在性便归结为序列的有界性. 思路是我们先假定序列存在, 先把可能的极限值猜出来. 假设极限存在并且设极限为 a, 那么 a 必然满足

$$f(a) = a.$$

(这是因为序列 $\{x_n\}$ 和 $\{x_{n+1}\}$ 均收敛于 a, 而 $x_{n+1} = f(x_n)$, 从而 $a = f(a)$. 此处用到了 f 的连续性.)

如果序列是单调递增的, 那么这个极限值即为满足 $f(a) = a$ 且大于 x_1 的解中最小的一个; 如果序列是单调递减的, 那么这个极限值即为满足 $f(a) = a$ 且小于 x_1 的解中最大的一个; 如果满足上述条件的解 a 不存在的话, 那么说明序列发散到正无穷或者负无穷.

在满足上述条件的解存在时, 我们通常可以通过归纳法证明序列的有界性. 以单调递增的序列为例, 假设 a 为满足 $f(a) = a$ 且大于 x_1 的最小值, 那么我们可以通过归纳法结合 f 的单调性证明 $x_n < a$. 由此说明序列有界从而极限存在. 同时这一件事还额外帮助我们排除掉了极限的其他可能值.

上述例题中的三个问题分别为取 $f(x)$ 为 $1 + \frac{x}{1+x}$, $\sqrt{2}^x$ 和 $\frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})$. 我们以这三者为例来展现一下具体的证明过程.

解答. (1) 令 $f(x) = 1 + \frac{x}{1+x} = 2 - \frac{1}{1+x}$, 在 $x > 0$ 时为关于 x 的单调递增函数.*(想法: 计算出 $x_2 = f(x_1) = \frac{3}{2}$, 于是该序列是单调增的. 解方程 $f(x) = x$, 即 $x^2 - x - 1 = 0$, 得到 $x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. 由此猜出极限为 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.)*

现在我们利用数学归纳法证明对任意 $n \geqslant 2$, 都有 $x_n > x_{n-1}$ 且 $x_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 对 $n = 2$ 时直接验证即可. 对 $n \geqslant 3$ 时, 我们结合归纳假设和 f 的单调性可知

$$x_n = f(x_{n-1}) > f(x_{n-2}) = x_{n-1},$$
$$x_n = f(x_{n-1}) < f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

从而该序列单调递增有上界, 从而有极限. 设该极限为 a. 根据极限的性质和 f 的连续性可知,

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

于是 $a = f(a)$, 解出 $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 由于该序列位于区间 $[1, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$ 上, 从而极限为 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(2) 令 $f(x) = \sqrt{2}^x$, 在 $x > 0$ 时为关于 x 的单调递增函数. 其他证明过程与上题类似不再赘述, 唯一区别在于 $f(x) = x$ 有两个正根 $x = 2, 4$. 由于 $x_1 = \sqrt{2}$, 所以我们猜测极限是 2. 在证明序列有界的中我们需要归纳地证明 $x_n > x_{n-1}$ 和 $x_n < 2$, 由此帮助我们在计算极限时舍弃掉 4 这个解. 最终得到该序列极限为 2.

(3) 令 $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$, 该函数在 $x > 1$ 时是单调递增的. 由均值不等式, 我们知道 $x_2 = f(x_1) \geqslant 1$. 所以为了方便起见只考虑从 x_2 开始的这个序列.

如果 $x_1 = 1$ 则 x_n 均为 1, 自然极限为 1. 如果 $x_1 \neq 1$, 那么 $x_2 > 1$, 从而 $x_3 = f(x_2) < x_2$. 从而可以用归纳法证明该序列是单调递减的. 注意到 $f(x) = x$ 仅有一个正根 $x = 1$ 且 $x_n \geqslant 1$, 所以极限为 1.

□

最后, 我们提及一些序列发散的例子. 通常我们证明序列发散只需要找到两个收敛到不同极限的收敛子列即可. 或者我们不需要找到两个收敛子列, 只需要找到 $\{x_n\}$ 的两个不同子列 $\{x_{n_k}\}$ 和 $\{x_{n_k'}\}$ 以及 $a > b$ 使得

$$x_{n_k} \geqslant a > b \geqslant x_{n_k'}$$

对任意 k 成立即可. 但有时我们也可以使用一些巧妙的方法绕开上述相对麻烦的构造, 比如通过观察序列的形式给出极限所需要满足的一些特殊关系 (例如上述迭代产生的序列极限需要满足 $f(x) = x$), 然后导出矛盾.

例 2.2. 证明下述序列发散:

(1) $x_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})^n + \sin\frac{n\pi}{4}$;

(2) $x_n = \sin(\pi\sqrt{n})$;

(3) $x_n = \sin n$.

(4) $x_n = \sin(100n)$

证明. (1) 考虑 $n_k = 8k$, 可知 $x_{n_k} \to e$. 再考虑 $n_k' = 8k + 2$, 可知 $x_{n_k'} \to e + 1$. 从而该序列发散.

(2) 考虑 $n_k = k^2$, 那么 $x_{n_k} \to 0$. 为了让 $\sin(\pi\sqrt{n})$ 靠近 1, 我们需要 $\pi\sqrt{n}$ 靠近 $2k\pi + \frac{1}{2}\pi$, 也就希望 n 靠近 $(2k + \frac{1}{2})^2$. 我们选取 $n_k' = 4k^2 + 2k$., 从而

$$x_{n_k'} = \sin(\pi\sqrt{4k^2 + 2k}) = \sin(\pi(\sqrt{4k^2 + k} - 2k)) \to \sin\frac{1}{2}\pi = 1.$$

(3) 最直接的想法也是构造 n_k 使得 n_k 靠近 $2k\pi-\frac{1}{2}\pi$, 再构造 n_k' 使得 $2k\pi+\frac{1}{2}\pi$, 这样两个子列有一致的距离. 事实上, 利用 $\pi>3$, 我们可以知道区间 $[2k\pi-2\pi/3,2k\pi-\pi/3]$ 之中必存在一个整数 n_k. 再考虑区间 $[2k\pi+\pi/3,2k\pi+2\pi/3]$, 这之中也必存在一个整数 n_k'. 那么

$$\sin n_k \leqslant -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} \leqslant \sin n_k'.$$

于是序列极限不存在.

(4) 我们依然期待构造 $100n$ 分别靠近 $2k\pi\pm\frac{1}{2}\pi$, 但和上一问的区别在于 $\{100n\}$ 这个序列相邻两项间隔过大无法施行上述证明. 一种方法当然是使用一些组合的方法证明 $\frac{100n}{\pi}$ 的小数部分在区间 $[0,1)$ 上实际上是稠密的, 详细叙述可参见Dirichlet 逼近定理.(证明很简单, 但大抵与高数课的主线内容无关?)

我们换一种证明方式. 假设序列收敛于 α. 由和角公式, 有

$$\sin(100(n+1)) = \sin(100n+100) = \sin(100n)\cos 100 + \cos(100n)\sin 100.$$

移项平方后得到关系式

$$[x_{n+1}-x_n\cos 100]^2 = \sin^2 100(1-x_n^2),$$

即

$$x_{n+1}^2 - 2x_nx_{n+1}\cos 100 + x_n^2 = \sin^2 100.$$

取极限得到

$$2\alpha^2(1-\cos 100) = 1-\cos^2 100.$$

从而 $\boxed{2\alpha^2 = 1+\cos 100}$. 但同时, 我们可以考虑 $\sin(100(n+2)) = \sin(100n+200)$. 进行上述和角公式的论述, 可以得到 $\boxed{2\alpha^2 = 1+\cos 200}$. 但是 $\cos 100 \neq \cos 200$, 我们得到矛盾.

□

§2.ii. 函数极限与连续函数 (一)

函数极限是通过 "ε-δ 语言" 定义的, 其描述的是当自变量趋于一个值时, 函数的取值随自变量的趋势.

定义 2.3. 对于一个实数 a 和半径 $r>0$, 我们定义**邻域**$U_r(a) \coloneqq (a-r,a+r)$ 和**去心邻域**$U_r^0(a) \coloneqq U_r(a)\setminus\{a\}$.

由于我们关心的是函数 $f(x)$ 在自变量 x 趋于 a 时的趋势, 所以我们实际上不要求 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有定义, 只需要 $f(x)$ 在 a 的某个去心邻域上有定义即可.

定义 2.4. 设函数 $f(x)$ 在 a 的某个去心邻域 $U_r^0(a)$ 上有定义, 如果存在实数 l 使得对任意 $\varepsilon>0$, 都存在 $\delta>0$ 使得

$$|f(x)-l|<\varepsilon, \quad \forall x\in U_\delta^0(a),$$

那么就称函数 $f(x)$**在 a 处极限存在并且收敛于 l**, 记为$l=\lim_{x\to a}f(x)$.

函数极限同时可以与序列极限联系起来, 表述为下述归结定理. 这个借助序列极限来描述函数极限的方式更能体现出函数极限是关于 "函数值随自变量变动趋势" 刻画.

定理 2.5 (归结定理)
设函数 $f(x)$ 在 a 的某个去心邻域 $U_r^0(a)$ 上有定义, 那么以下两条等价:

(a) $f(x)$ 在 a 处的极限存在且 $\lim_{x\to a} f(x) = l$;

(b) 对于任意序列 $\{x_n\} \subset U_r^0(a)$, 如果 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ 那么 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

证明. **(a) $\Longrightarrow$ (b):** $\{x_n\} \subset U_r^0(a)$ 为一个满足 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ 的序列. 对任意 $\varepsilon > 0$, 由函数极限的定义知存在 $\delta > 0$ 使得当 $x \in U_\delta^0(a)$ 时 $|f(x) - l| < \varepsilon$. 又由于 $x_n \to a$, 从而存在 $N > 0$ 使得 $n > N$ 时 $|x_n - a| < \delta$, 即 $x_n \in U_\delta^0(a)$. 从而 $n > N$ 时 $|f(x) - l| < \varepsilon$.

(b) $\Longrightarrow$ (a): 反证法, 假设 $f(x)$ 在 a 处不收敛于 l. 根据函数极限的定义 (的逆否命题), 存在 $\varepsilon > 0$ 使得对任意 $\delta > 0$, 都存在 $x \in U_\delta^0(a)$ 使得 $|f(x) - l| \geqslant \varepsilon$. 现在对每个正整数 $n \geqslant 1$, 取 $\delta_n = r/n$, 那么我们可以选取 $x_n \in U_{\delta_n}^0(a) \subset U_r^0(a)$ 使得 $|f(x_n) - l| \geqslant \varepsilon$. 注意到 $|x_n - a| \leqslant r/n$, 从而 $x_n \to a$. 但是 $|f(x_n) - l| \geqslant \varepsilon$ 对所有 n 成立, 于是 $\{f(x_n)\}$ 不收敛于 l. 这与 (b) 之假设矛盾. □

注 2.6 归结定理最常用的场景还是在于由此证明函数的在 a 处极限不存在, 即只需要构造两列不同的收敛于 a 的序列使得它们函数值有着不同的极限即可.

注 2.7 函数极限是关于 "函数变动趋势" 的最粗略刻画. 我们后续学到的函数的导数以及高阶导数都是在此基础上对这一趋势更精细的刻画.

例 2.8. (1) 证明极限 $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ 发散.

(2) 证明极限 $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$ 收敛.

证明. (1) 考虑序列 $x_n = 1/(n\pi) \to 0$, 那么 $\sin 1/x_n = 0$ 从而 $\sin 1/x_n \to 0$. 考虑序列 $x_n' = 1/(2n\pi + \pi/2) \to 0$, 那么那么 $\sin 1/x_n' = 1$ 从而 $\sin 1/x_n' \to 1$. 于是 $\sin\frac{1}{x}$ 在 0 处发散.

(2) 注意到 $|x\sin\frac{1}{x}| \leqslant |x|$. 对任意 $\varepsilon > 0$, 可以取去心邻域 $U_\varepsilon^0(0)$, 对于任意 $x \in U_\varepsilon^0(0)$ 都有 $|x\sin\frac{1}{x}| < \varepsilon$. 从而 $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$.

□

需要注意的是, $f(x)$ 在 a 处的极限与 $f(x)$ 在 a 处的取值 $f(a)$ 本身并无关系. 但我们认为表现良好的函数应该满足 $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ 这样的性质, 这样的函数图像在直观上看起来是 "连续的". 借助函数极限由此我们给出了一个数学上严谨的 "连续性" 定义.

定义 2.9. 设函数 $f(x)$ 在 a 的某个邻域 $U_r(a)$ 上有定义, 如果满足 $f(x)$ 在 a 处极限存在并且 $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, 就称 **$f(x)$ 在 a 处连续**.

作为归结定理的推论, 函数的连续性也可以用序列极限来给出等价刻画.

推论 2.10

设函数 $f(x)$ 在 a 的某个邻域 $U_r(a)$ 上有定义, 那么以下两条等价:

(a) $f(x)$ 在 a 处连续;

(b) 对于任意序列 $\{x_n\} \subset U_r(a)$, 如果 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ 那么 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

例 2.11. 判断下列函数在各点处的连续性:

(1) Dirichlet 函数 $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

(2) Riemann 函数 $R(x) = \begin{cases} 1/q, & x = p/q \in \mathbb{Q}, \text{其中 } p, q \text{ 为互质整数}; \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

解答. (1) $D(x)$ 在任何点处均不连续. 反证法, 对于实数 a, 假设 $D(x)$ 在 a 处收敛于 l. 取 $\varepsilon = 1/2$, 那么存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $x \in U_\delta^0(a)$ 都有 $|D(x) - l| > 1/2$. 但根据有理数和无理数分别的稠密性, 我们可以找到有理数 $x_1 \in U_\delta^0(a)$ 和无理数 $x_2 \in U_\delta^0(a)$. 但是

$$1 = |D(x_1) - D(x_2)| \leqslant |D(x_1) - l| + |D(x_2) - l| < 1,$$

我们得到一个矛盾.

(2) 我们要证明 $R(x)$ 在有理点不连续, 在无理点连续. 首先考虑 a 为有理数的情形. 利用无理数的稠密性, 我们可以找到无理数序列 $x_n \to a$. 但此时 $R(x_n) = 0$ 收敛于 $0 \neq R(a)$, 从而 $R(x)$ 在有理数 a 处不连续.

现在取 a 为无理数, 我们证明任意 $\varepsilon > 0$, 总可以找到 $\delta > 0$ 使得对任意 $x \in U_\delta(a)$ 都有 $|R(x) - R(a)| < \varepsilon$, 也即 $|R(x)| < \varepsilon$. 注意到满足分母 $q \leqslant \varepsilon^{-1}$ 且在区间 $(a-1, a+1)$ 上的有理数 p/q 只有有限多个, 于是我们可以找到 $0 < \delta < 1$ 使得邻域 $U_\delta(a)$ 中不包含任何一个这样的有理数. 此时对任一 $x \in U_\delta(a)$, 要么 x 为无理数则 $R(x) = 0$, 从而满足 $|R(x)| < \varepsilon$; 要么 $x = p/q$ 为有理数且 $q > \varepsilon^{-1}$, 从而 $|R(x)| = 1/q < \varepsilon$ 满足要求.

□

§3. 函数极限与连续函数 (二)

§3.i. 函数极限的计算

例 3.1. (1) 设 k 为正整数, 证明 $\lim_{x\to+\infty} x^k/e^x = 0$.

(2) 设 $P(x) = a_kx^k + \cdots + a_1x + a_0$ 为一个多项式, 令

$$f(x) = \begin{cases} P(1/x)e^{-1/|x|}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

证明 $f(x)$ 为连续函数.

证明. (1) 为了将指数函数 e^x 与幂函数 x^k 联系起来, 我们使用二项式展开. 为方便起见, 我们先将 e^x 放缩为 2^x. 注意到对 $x > 0$ 有 $e^x \geqslant 2^x$, 我们只需对 2^x 施行放缩. 由二项式展开, 我们有

$$2^x \geqslant 2^{[x]} \geqslant \frac{[x]([x]-1)\cdots([x]-k)}{(k+1)!}.$$

注意到 $[x] > x - 1$, 从而对 $x > k+1$, 我们有

$$\frac{x^k}{e^x} \leqslant \frac{x^k}{2^x} \leqslant \frac{(k+1)!\cdot x^k}{[x]([x]-1)\cdots([x]-k)} \leqslant \frac{(k+1)!\cdot x^k}{(x-1)\cdots(x-k-1)}.$$

而右式在 $x \to +\infty$ 时极限为 0, 从而由夹逼定理知原极限为 0.

(2) 只需验证 0 点处的连续性. 由上述极限我们可知

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{y\to+\infty} P(y)e^{-y} = 0.$$

□

更一般地, 我们在形如对数函数、幂函数、指数函数的无穷大量之间总有量级估计

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\beta^x} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\beta^x}{x^x} = 0,$$

其中, $\alpha > 0, \beta > 1$. 结合上述量级估计和换元法, 我们可以计算出许多形式较为简单的函数极限 (分式型函数). 另外一类常见的极限是带有指数的函数极限, 通常方法可以利用取对数的方式将其化作分式型函数的极限问题.

例 3.2. 求极限 $\lim_{x\to 0+0} x^x$.

解答. 根据 e^x 的连续性, 我们有

$$\lim_{x\to 0+0} x^x = \lim_{x\to 0+0} e^{\ln x^x} = \exp\left(\lim_{x\to 0+0} x\ln x\right).$$

变量代换, 令 $x = 1/y$. 那么

$$\lim_{x\to 0+0} x\ln x = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{y}\ln\frac{1}{y} = \lim_{y\to+\infty} -\frac{\ln y}{y} = 0.$$

从而 $\lim_{x\to 0+0} x^x = e^0 = 1$. □

但许多求极限问题会形式更为复杂, 其中会出现分式与对数、三角函数、指数等混合的问题函数. 此时一种有效的方法是使用**等价无穷小量**化简函数.

我们以 $x \to 0$ 时的情况为例 (其他极限通常可以通过换元转化). 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x \to 0$ 时是两个**无穷小量**, 即 $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ 以及 $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. 我们称

- $f(x)$ 是 $g(x)$ 的**高阶无穷小量**, 如果 $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x) = 0$, 记为 $f(x) = o(g(x))$.
- $f(x)$ 是 $g(x)$ 的**等价无穷小量**, 如果 $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x) = 1$, 记为 $f(x) \sim g(x)$.

此外还可以类似定义同阶无穷小量和低阶无穷小量, 但是在具体应用中不常用.

我们复杂函数的极限的主要思路是化简, 所以主要方法为

- 利用高阶无穷小量抹去不影响极限计算的复杂项;
- 利用等价无穷小量将复杂项化简为容易计算的单项式或多项式.

例 3.3 (常用的等价无穷小)

- (三角函数) $\sin x \sim \tan x \sim x$, $1 - \cos x \sim x^2/2$;
- (指数函数和对数函数) $e^x - 1 \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$;
- (幂函数) $(1+x)^a - 1 \sim ax$.

但我们需要注意的是, 我们使用等价无穷小替换是一种记号上方便的方式, 并不能真正把两个函数看成同一个, 我们本质上还是使用的极限的乘除法运算. 这时就需要小心两个无穷小量作差的问题.

例 3.4 (等价无穷小量的差)

$\sin x$ 和 x 是等价无穷小, 当他们作差之后得到的是一个高阶无穷小. 实际上我们有 $x - \sin x \sim x^3/6$.

例 3.5. 计算极限 $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

解答. 我们有

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

□

例 3.6. 计算极限 $\lim_{x\to\infty} (\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x})^x$.

解答. 我们计算其取对数后的极限, 取对数并换元后得到

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left[\left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right)^x\right] = \lim_{x\to\infty} x \ln\left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\sin x + \cos x)}{x}.$$

然后我们注意到等价无穷小 (过程中不需要写这一步)

$$\ln(\sin x+\cos x)\sim \sin x+\cos x-1\sim x-\frac{x^2}{2}\sim x.$$

从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x+\cos x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\cos x-1}{x}\cdot\frac{\ln(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x-1}=1.$$

于是原极限为 e. □

例 3.7. 设 k 为正整数, $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 为非负实数. 求极限

(1) $\lim_{x\to 0+0}\sqrt[x]{\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_k^x}{k}}$;

(2) $\lim_{x\to +\infty}\sqrt[x]{\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_k^x}{k}}$.

解答. (1) 取对数后, 利用等价无穷小转化我们得到

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x}\ln\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_k^x}{k}=\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_k^x}{k}-1\right)$$
$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x}\cdot\frac{(a_1^x-1)+(a_2^x-1)+\cdots+(a_k^x-1)}{k}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_k}{k}.$$

从而原极限为

$$\exp\left(\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_k}{k}\right)=\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}.$$

(2) 不妨假设 a_1 为其中最大的一个, 那么 $a_1^x\leqslant a_1^x+a_2^x+\cdots+a_k^x\leqslant ka_1^k$. 注意到

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[x]{\frac{a_1^x}{k}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[x]{\frac{ka_1^x}{k}}=a_1.$$

从而由夹逼定理知原极限为 $\max\{a_1,\cdots,a_k\}$.

□

§3.ii. 连续函数的性质

前面我们已经回顾过函数在一点处连续的定义和其相关的等价性质. 而验证函数是否在一点处连续基本就是求函数极限的问题, 我们不再赘述. 现在我们聚焦于在一个区间上处处连续的函数, 也就是通常所说的连续函数, 研究其所具有的整体性质.

通常我们关心一个在有界闭区间上连续的函数, 设 $[a,b]$ 是一个有界闭区间, 一个定义在 $[a,b]$ 上的函数称为**连续的**如果其在 (a,b) 上连续并且在 a 处右连续、在 b 处左连续. 在 $[a,b]$ 上连续的全体函数构成的空间我们记为 $C([a,b])$(或者间记为 $C[a,b]$). 这样的函数具有许多良好的性质:

定理 3.8

设 $f(x)\in C[a,b]$, 那么:

(1) **有界性** $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界函数;

(2) **最值存在性** 存在 $x_1, x_2 \in [a,b]$ 使得对任意 $x \in [a,b]$ 都有 $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$;

(3) **介值原理** 如果实数 η 介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间, 则存在 $x_0 \in [a,b]$ 使得 $f(x_0) = \eta$.

作为推论, 我们知道 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的取值也构成一个闭区间.

我们需要注意的是, 对于开区间上的连续函数, 有界性和最值存在性一般是不成立的. 例如函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 定义在区间 $(0,1)$ 上就是无界函数, 自然也不存在最值.

回忆我们曾经证明过极限存在的序列都是有界序列, 对连续函数也有类似结论.

例 3.9. (1) 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 假设极限 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 和 $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ 分别存在, 证明 $f(x)$ 为有界函数.

(2) 设 $f(x)$ 是开区间 (a,b) 上的连续函数, 假设极限 $\lim_{x\to a+0} f(x)$ 和 $\lim_{x\to b-0} f(x)$ 分别存在, 证明 $f(x)$ 在上有界.

证明. (1) 设 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = y_2$. 取 $\varepsilon = 1$, 那么根据函数极限的定义知存在 $A > 0$ 使得 $x > A$ 时 $|f(x) - y_1| \leqslant 1$, 当 $x < -A$ 时 $|f(x) - y_2| \leqslant 1$. 由于 f 是连续函数, 从而 $f(x)$ 在闭区间 $[-A, A]$ 上是有界函数, 也即存在 $M > 0$ 使得 $|f(x)| \leqslant M$ 对任意 $x \in [-A, A]$ 成立. 于是我们知道

$$|f(x)| \leqslant \max\{|y_1| + 1, |y_2| + 1, M\}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

从而 $f(x)$ 为有界函数.

(2) <u>方法一</u>. 类比上一问的证明即可.

<u>方法二</u>. 构造闭区间 $[a,b]$ 上的函数 $\widetilde{f}(x)$ 为

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (a,b); \\ \lim\limits_{y\to a+0} f(y), & x = a; \\ \lim\limits_{y\to b-0} f(y), & x = b. \end{cases}$$

则 $\widetilde{f}(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 从而 $\widetilde{f}(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 特别地 $f(x)$ 有界. □

注 3.10 对于 (1) 也可以用类似 (2) 的方法二的方法, 但我们需要一个换元将 $\mathbb{R}$ 变成有界区域. 我们使用一个常用的换元 $x = \tan y$, 其中 $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ 即可.

关于连续函数最常见的问题类型就是对介值原理的运用.

例 3.11. 设 $f: [a,b] \to [a,b]$ 为一个闭区间到自身的连续函数, 证明存在 $x_0 \in [a,b]$ 使得 $f(x_0) = x_0$.

证明. 考虑 $g(x) = f(x) - x$, 则 $g(x)$ 也是连续函数. 注意到 $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$ 并且 $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$, 从而由介值原理知存在 $x_0 \in [a,b]$ 使得 $f(x_0) = x_0$. □

> **例 3.12** (压缩映射的不动点)**.** 令 $0 < c < 1$ 为一个常数. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的函数, 满足 $|f(x) - f(y)| \leqslant c \cdot |x - y|$ 对任意 $x, y \in \mathbb{R}$ 成立. 证明存在唯一的 $x_0 \in \mathbb{R}$ 使得 $f(x_0) = x_0$.

证明. 首先可以证明 $f(x)$ 是连续函数. 我们考虑连续函数 $g(x) = f(x) - x$.

根据介值原理, 我们只需要构造两个点 x_1 和 x_2 使得 $g(x_1) \leqslant 0$ 和 $g(x_2) \geqslant 0$. 对于 $x > y$, 我们注意到

$$g(x) - g(y) = (f(x) - f(y)) - (x - y) \leqslant -(1 - c)(x - y).$$

令 $g(0) = a$, 取 $x_1 = \max\left\{0, -\frac{a}{1-c}\right\}$, 则 $g(x_1) \leqslant 0$. 取 $x_2 = \min\left\{0, \frac{a}{1-c}\right\}$, 则 $g(x_2) \geqslant 0$. 这样根据介值原理可找到 $x_0 \in [x_2, x_1]$ 使得 $g(x_0)$.

现在证明唯一性. 假设存在 $x_0 \neq x_0'$ 均满足 $f(x) = x$. 根据条件有

$$|x_0 - x_0'| = |f(x_0) - f(x_0')| \leqslant c|x_0 - x_0'| < |x_0 - x_0'|$$

矛盾. □

§4. 导数

首先我们回忆导数的定义

定义 4.1. 设函数 $f(x)$ 在 a 的邻域 $U_r(a)$ 上有定义. 如果极限

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

存在且收敛于 l, 我们就称**$f(x)$ 在 a 处可导**且**称 l 为 $f(x)$ 在 a 处的导数**, 记为 $f'(a)=l$.

例 4.2 (初等函数的导数)

- (幂函数) 对常数 $\alpha\in\mathbb{R}$, 有 $(x^\alpha)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$.
- (三角函数) $(\sin x)'=\cos x$, $(\cos x)'=-\sin x$, $(\tan x)'=1/\cos^2 x$.
- (指数函数和对数函数) $(e^x)'=e^x$, $(\ln x)'=1/x$.

但这些初等函数的导数均为通过定义计算而得的, 并非是导数自身的定义. 而函数在一点处的可导性和取值只取决于极限 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. 所以对于一些人为定义的函数, 特别是分段函数, 还是需要借助导数的定义来证明可导性和计算导数取值.

这里需要注意的要点是, **一个函数 $f(x)$ 即使可导, 其导数 $f'(x)$ 也未必是一个连续函数.** 参见下面这一例题.

例 4.3. 判断如下函数是否可导, 如果可导则求其导数:

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

解答. 在 $x\neq 0$ 处, 可以直接根据初等函数的导数结合导数的运算法则得到

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}.$$

在 $x=0$ 时, 根据定义可以得到

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

上述极限的存在性证明和计算我们已经在例2.8(2) 进行过. 这也说明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是可导的, 从而 $f(x)$ 处处可导. □

但上述例子中我们可以看到, 其导数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处是不连续的, 这是因为 $\cos\frac{1}{x}$ 这一项的出现, 在例2.8(1) 我们也曾经说明过这一类函数在 $x\to 0$ 时的发散性. 但 $f(x)$ 确实在 0 处是可导的, 这里的 $f'(0)$ 只能通过定义计算.

所以对于一些分段函数的导数计算问题, 需要注意先计算其他点的导数然后对导数求极限得到临界点处的导数这一方法在逻辑上通常是有问题的. 但这一计算过程也不是完全错误的. 事实上, **如果 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上可导那么其导数 $f'(x)$ 在区间 (a,b) 上虽然未必连续但仍然满足介值原理.** 所以我们有如下命题

命题 4.4

如果函数 $f(x)$ 在 a 的邻域 $U_r(a)$ 上有定义且可导, 并且极限 $\lim_{x\to a} f'(x)$ 存在, 那么 $\lim_{x\to a} f'(x) = f'(a)$.

虽然有这一命题存在, 但对于分段函数我们还是建议从定义出发计算导数. 因为使用这种方法的前提是需要证明 $f(x)$ 的可导性, 这依然需要从定义出发进行证明.

与例4.3类似的是如下例题.

例 4.5. 令

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/|x|}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(1) 求 $f'(x)$;

(2) 对任意 $n \geqslant 1$, 证明 f 是 n 阶可导的并求 $f^{(n)}(0)$.

解答. 我们只给出证明概要, 事实上我们可以通过归纳法证明对任意 $n \geqslant 0$ 都存在多项式 $P_n(x), Q_n(x)$ 使得

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n(1/x)e^{-1/|x|}, & x > 0; \\ Q_n(1/x)e^{-1/|x|}, & x < 0. \end{cases}$$

在 $x > 0$ 和 $x < 0$ 时归纳法是容易证明的. 而在 $x = 0$ 处, 只需要利用例3.1中证明过的结论来得到

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = 0,$$

从而完成归纳法. □

注 4.6 这给出了一个在一点处各阶导数为 0 的无穷阶可导函数的例子. 这一类函数十分重要, 在之后接触到 Taylor 级数时我们还会遇到这一例子.

例4.3所给出的例子还对如下问题有所启发, 可以训练对于一些导数反常现象的直觉.

例 4.7. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上定义的函数且 $f'(0)$ 存在.

(1) 如果序列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 均收敛于 0 且 $x_n > 0, y_n < 0$, 证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = f'(0).$$

(2) 如果序列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 均收敛于 0 且 $x_n \neq y_n$ 均大于 0, 是否依然有上述极限成立?

解答. (1) 根据导数的性质有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = f'(0), \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(0)}{y_n - 0} = f'(0).$$

设 $a_n = \frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0}, b_n = \frac{f(y_n)-f(0)}{y_n-0}$, 那么

$$f(x_n) - f(y_n) = [f(x_n) - f(0)] - [f(y_n) - f(0)] = a_n x_n - b_n y_n.$$

由于 $x_n > 0, y_n < 0$, 我们知道

$$\frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = \frac{a_n x_n + b_n(-y_n)}{x_n + (-y_n)} \in [a_n, b_n].$$

由于 $a_n \to f'(0), b_n \to f'(0)$ 知原极限成立.

(2) 此情形该极限并不总是成立的. 以例4.3中的函数为例. 选取 $x_n = 1/(2n\pi+\pi/2), y_n = 1/(2n\pi - \pi/2)$. 那么

$$\frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = \frac{x_n^2 + y_n^2}{x_n - y_n} = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{2n\pi - \pi/2}{2n\pi + \pi/2} + \frac{2n\pi + \pi/2}{2n\pi - \pi/2}\right) \to -\frac{2}{\pi} \neq 0 = f'(0).$$

□

注 4.8 (a) 由于该题目中没有要求 $f(x)$ 在 $x \neq 0$ 处的可导性, 第二问有更简单的构造方式. 例如选取序列 x_n 并在 x_n 处修改函数 $f(x) = x^2$ 的值为零, 此时依然不影响在 0 处的可导性, 修改后的函数记作 $\widetilde{f}(x)$. 但是如果我们选取 y_n 十分靠近 x_n, 那么 $\widetilde{f}(y_n) - \widetilde{f}(x_n) = y_n^2$ 可以做到大于 $x_n - y_n$(例如 $x_n = 1/n, y_n = 1/n - 1/n^{10}$) 从而极限至少为 1.

(b) 如果我们假设 f 在 $\mathbb{R}$ 上的可导性, 中值定理可以找到 $\xi_n \in [y_n, x_n]$ 使得 $f'(\xi_n) = [f(x_n) - f(y_n)]/(x_n - y_n)$. 而且 $x_n \to 0, y_n \to 0$ 确实说明了 $\xi_n \to 0$. 但正因为一般导数并不具有连续性, 所以我们无法说明 $f'(\xi_n) \to f'(0)$. 这也是我们采用例4.3来尝试构造反例的原因.

导数的计算

一阶导数的计算常用的公式主要有两类:

- 函数四则运算的导数公式:
  - $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$;
  - $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
  - $[f(x)/g(x)]' = [f'(x)g(x) - f(x)g'(x)]/g(x)^2$.
- 一阶微分的形式不变性 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ 及其等价形式和衍生公式:
  - 复合函数求导的链式法则: $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$;
  - 反函数求导公式: $[f^{-1}(x)]' = 1/[f'(f^{-1}(x))]$;
  - 参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ 所决定的函数 $y = f(x)$ 满足 $f'(x) = y'(t)/x'(t)$;
  - 隐函数 $F(x, y) = 0$ 所决定的函数 $y = f(x)$ 的导数, 该导数可以通过对方程 $F(x, f(x)) \equiv 0$ 两侧同时求导, 利用复合函数求导公式得到关于 $f'(x)$ 的方程解出导数.

注 4.9 如果使用多元函数中偏导数的概念可以将隐函数求导公式的一般形式写作

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}f'(x)=0.$$

其中,$\partial F(x,y)/\partial x$ 和 $\partial F(x,y)/\partial y$ 为多元函数的**偏导数**. 简单来说, 以 $\partial F(x,y)/\partial x$ 为例, 就是将 y 看作参数后把 $F(x,y)$ 看成关于 x 的一元函数对 x 求导数.

例 4.10 (反三角函数的导数)

反函数求导公式的一个主要应用就是反三角函数的导数. 我们有

- $(\arcsin x)'=1/\sin'(\arcsin x)=1/\cos(\arcsin x)=1/\sqrt{1-x^2}$;
- $(\arccos x)'=1/\cos'(\arccos x)=-1/\sin(\arccos x)=-1/\sqrt{1-x^2}$;
- $(\arctan x)'=1/\tan'(\arctan x)=\cos^2(\arctan x)=1/(1+x^2)$.

这些反三角函数的求导最后一步需要用到反三角函数自身的值域. 这一点可能对求导结果的符号有影响, 需要小心.

例 4.11. 令 $f(x)=x^{x^x}$, 求 $f'(x)$.

解答. 首先将其化作指数函数与另一函数的复合, 即 $f(x)=e^{x^x\ln x}$. 令 $g(x)=x^x\ln x$, 那么 $f'(x)=e^{g(x)}g'(x)$. 为求 $g'(x)$, 我们有

$$g'(x)=(x^x)'\ln x+x^x(\ln x)'=(e^{x\ln x})'\ln x+x^{x-1}=e^{x\ln x}(\ln x+1)\ln x+x^{x-1}.$$

于是

$$f'(x)=x^{x^x}g'(x)=x^{x^x}\cdot x^x\cdot\left(\ln^2 x+\ln x+\frac{1}{x}\right).$$

□

例 4.12. 设函数 $y=f(x)$ 由下列参数方程决定, 求导数 $f'(x)$:

(1) $\begin{cases} x=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y=\arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}; \end{cases}$

(2) 设 $a>0$, $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t. \end{cases}$

解答. (1) 方法一. 注意到 $\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2+\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2=1$, 我们可以知道 $\sin x=\pm\sin y$. 实际上, 当 $t>0$ 时 $x,y\in(0,\pi/2)$ 从而 $x=y$. 当 $t<0$ 时 $x\in(0,\pi/2),y\in(-\pi/2,0)$ 从而 $x=-y$. 所以当 $t\neq 0$ 时 $f'(x)=\operatorname{sgn} t$, 当 $t=0$ 时 $f'(x)$ 不存在.

方法二. 直接求导有

$$x'(t) = -\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)'\sqrt{\frac{1+t^2}{t^2}} = \frac{\operatorname{sgn} t}{1+t^2},$$

$$y'(t) = \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)'\sqrt{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2}.$$

从而 $f'(x) = y'(t)/x'(t) = \operatorname{sgn} t$ 当 $t \neq 0$ 时.

(2) 直接求导有

$$x'(t) = -3a\sin t\cos^2 t, \quad y'(t) = 3a\cos t\sin^2 t.$$

从而 $y'(x) = y'(t)/x'(t) = -\tan t$.

□

高阶导数的计算

首先需要注意的一点是, 高阶导数并没有类似一阶微分的形式不变性的性质 (即高阶导数链式法则并不对). 例如我们考虑对复合函数 $f(g(x))$ 求二阶导数我们有

$$[f(g(x))]'' = [f'(g(x))g'(x)]' = f''(g(x))[g'(x)]^2 + f'(g(x))g''(x).$$

如果从微分的视角看, 如果令 $y = g(x)$, $z = f(y)$, 那么

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x})}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y})}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})}{\mathrm{d}x^2} \\ &= \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}y^2}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}.\end{aligned}$$

高阶导数链式法则的失效在实际应用中主要影响对于参数方程的高阶导数计算.

例 4.13. 设函数 $y = f(x)$ 由例4.12(2) 中的参数方程给出. 即给定常数 $a > 0$, 令 $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$ 求二阶导数 $f''(x)$.

解答. 根据 $y(t) = f(x(t))$ 对两侧关于 t 求二阶导数, 我们得到

$$y''(t) = [f(x(t))]'' = f''(x(t))[x'(t)]^2 + f'(x(t))x''(t).$$

首先我们可以计算出

$$x''(t) = (-3a\sin t\cos^2 t)' = -3a\cos^3 t + 6a\sin^2 t\cos t,$$

$$y''(t) = (3a\cos t\sin^2 t)' = -3a\sin^3 t + 6a\cos^2 t\sin t.$$

根据例4.12知 $f'(x(t)) = -\tan t$. 带入上式可得

$$\begin{aligned} f''(x(t)) &= \frac{y''(t) - f'(x(t))x''(t)}{x'(t)^2} = \frac{-3a\sin^3 t + 6a\cos^2 t\sin t - 3a\sin t\cos^2 t + 6a\sin^3 t}{(-3a\sin t\cos^2 t)^2} \\ &= \frac{-3a\sin t + 6a\sin t}{9a^2\sin^2 t\cos^4 t} = \frac{1}{3a\sin t\cos^4 t}. \end{aligned}$$

□

注 4.14 对于参数方程的另一种直接的计算方法是用反函数将 t 写成关于 x 的函数 $t=t(x)$, 然后直接研究函数 $f(x)=y=y(t(x))$. 利用复合函数求导和反函数求导可得. 这两种计算方式本质上是一样的.

对于更一般的高阶导数计算, 初等函数的 n 阶导数依然有直接的结果:

例 4.15 (初等函数的高阶导数)

- (幂函数) 对常数 $\alpha\in\mathbb{R}$, 有 $(x^\alpha)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\cdot x^{\alpha-n}$.
- (三角函数) $(\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\pi/2)$, $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\pi/2)$
- (指数函数和对数函数) $(e^x)^{(n)}=e^x$, $(\ln x)^{(n)}=(1/x)^{(n-1)}=(-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$.

但是复合函数的高阶导数结果已经十分复杂. 通常有函数间的四则运算的高阶导数有较好的表达式, 这其中主要的工具是对函数间乘法的高阶导数展开式, 即**Leibniz 公式**.

命题 4.16 (Leibniz 公式)

设 $f(x),g(x)$ 在区间 (a,b) 上 n 次可导, 那么 $f(x)g(x)$ 的 n 阶导数满足

$$[f(x)g(x)]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x).$$

然而这一公式在一般情形下得到的结果依然十分复杂, 我们通常也尽量避免直接使用这一公式. 但是当 $f(x)$ 和 $g(x)$ 中有一个为多项式时, 不妨 $f(x)$ 为一个 d-次多项式, 那么当 $k\geqslant d+1$ 时 $f^{(k)}(x)=0$. 此时右侧求和式只有较少几项, 便可以用来计算.

这引申出来一种技巧为 "化显为隐": 当我们需要求 $y=f(x)$ 的高阶导数时, 如果 $f(x)$ 具有一定的分式形式较为复杂, 我们可以通过将其转化为包含 x 和 y 的隐函数 $F(x,y)=0$. 理想情况下, 我们希望求和的每一项都形如 $P(x)\cdot y^{(m)}$, 其中 $P(x)$ 为一个多项式. 这样我们单独的每一项 $P(x)y^{(m)}$ 使用 *Leibniz* 公式可以得到一个较为简洁的求和, 且求和项只包含 x 的多项式与 y 的高阶导数的乘积, 由此可以给出关于 y 的高阶导数的递推关系. 我们在下列例题中可以具体感受.

例 4.17. 设 $f(x)=\arctan x$, 求 $f^{(n)}(0)$.

解答. 首先我们知道 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$. 令 $y=1/(1+x^2)$, 化作隐函数有

$$(1+x^2)y=1.$$

我们可以对该隐函数求 n 次导, 得到

$$(1+x^2)y^{(n)}+2nxy^{(n-1)}+n(n-1)y^{(n-2)}=0.$$

带入 $x=0$ 得到递推公式

$$y^{(n)}=-n(n-1)y^{(n-1)}.$$

结合 $y(0)=1$ 和 $y'(0)=0$ 可知

$$f^{(n)}(0)=y^{(n-1)}(0)=\begin{cases}0, & n\text{为偶数};\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!, & n\text{为奇数}.\end{cases}$$

□

注 4.18 对于形如 $f(x)=(1+\beta x^m)^\alpha$ 类的函数 (其中 m 为正整数, α,β 为实数) 在 $x=0$ 处的高阶导数可以通过 Taylor 展开快速得到结果. 其思路如下, 首先在 0 处考虑 $g(x)=(1+x)^\alpha$ 的 Taylor 展开 (严谨起见, 该展开在 $\{|x|<1\}$ 上收敛) 可以给出

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n.$$

那么对于 $f(x)=(1+\beta x^m)^\alpha$, 其有两种展开方式. 一方面根据 $f(x)$ 自身的 Taylor 展开有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

另一方面,

$$f(x)=g(\beta x^m)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\beta^k x^{km}.$$

对比 x^n 项的系数知,

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n\text{不是 } m \text{ 的倍数};\\ \dfrac{(km)!}{k!}\beta^k\cdot\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1), & n=km.\end{cases}$$

例 4.19

上例中 $y=1/(1+x^2)$ 即为 $m=2,\alpha=-1,\beta=1$ 的情形. 于是在 $n=2k$ 时有

$$y^{(n)}(0)=\frac{(2k)!}{k!}(-1)\cdot(-2)\cdots(-k)=(-1)^k(2k)!.$$

这一计算方式便于快速得到结果, 但如果对 Taylor 级数不够熟悉可能在证明严谨性上有所缺失, 可以用来作为检查答案正确性的辅助方法.

例 4.20. 设 $f(x)=(\arcsin x)^2$, 求 $f^{(n)}(0)$.

解答. 我们依然采用化为隐函数求递推的方式. 令 $y=(\arcsin x)^2$. 那么

$$y'=\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

平方之后带入 y, 则可以通过化作隐函数的方式消去不便处理的反三角函数. 也即

$$(y')^2=\frac{4(\arcsin x)^2}{1-x^2}=\frac{4y}{1-x^2}.$$

于是我们得到 $(y')^2(1-x^2)=4y$. 为去掉 $(y')^2$ 的项, 我们再求一次导数得到

$$2y'y''(1-x^2)-2x(y')^2=4y'.$$

即 $y''(1-x^2)-xy'=2$. 对隐函数两侧求 n 次导得到

$$y^{(n+2)}(1-x^2)-2nxy^{(n+1)}-n(n-1)y^{(n)}-xy^{(n+1)}-ny^{(n)}=0.$$

带入 $x=0$ 得到 $y^{(n+2)}(0)=n^2y^{(n)}(0)$. 结合 $y'(0)=0$ 和 $y''(0)=2$ 知

$$f^n(0)=y^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n\text{为奇数},\\ 2[(n-2)!!]^2, & n\text{为偶数}.\end{cases}$$

其中 $(n-2)!!=(n-2)(n-4)\cdots 2$.

□

注 4.21 本题更自然的想法是先求几阶导数试试看. 然后试图在各阶导数间建立联系, 化成隐函数消去反三角函数项, 并且让剩下的项只是关于 y 的导数的线性组合. 我们求导发现

$$y'=\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},\quad y''=2\left[\frac{1}{1-x^2}+\frac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}\right]=\frac{2(1+xy')}{1-x^2}.$$

此时也可以直接得到前述的隐函数方程.

§5. 不定积分

定义 5.1. 设 $f(x)$ 是区间 I 上定义的函数, 如果区间 I 上的函数 $F(x)$ 满足 $F'(x)=f(x)$, 就称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个**原函数**.

注意到常数函数的导数为 0, 从而对于函数 $F(x)$, 有

$$F'(x)=[F(x)+C]',$$

其中, C 为一个常数. 由于一个区间上导数恒为 0 的函数只有常数函数 (这一命题的证明需要使用微分中值定理, 见8.4), 所以我们知道一个函数的不同原函数之间两两相差一个常数函数. 给定一个 $f(x)$, 求出其原函数的一般表达式的过程称为**不定积分**, 记作

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C.$$

从定义的角度讲, 求不定积分就是求导的逆操作. 然而实践时求不定积分往往比求导困难得多, 甚至许多形式简单的函数的不定积分不具有显性表达式. 我们首先根据初等函数的求导公式总结一些基本的不定积分结果.

例 5.2 (基本积分表)

- 当 $\alpha\neq-1$ 时, $\int x^\alpha\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$; 当 $\alpha=-1$ 时, $\int x^\alpha\,\mathrm{d}x=\ln|x|+C$.
- $\int\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$; $\int\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$; $\int\sec^2 x\,\mathrm{d}x=\tan x+C$.
- $\int e^x\,\mathrm{d}x=e^x+C$; 一般地, 对 $a\neq1$ 有 $\int a^x=\frac{1}{\ln a}a^x+C$.
- $\int\frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\arcsin x+C$; $\int\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\arctan x+C$.

与求导不同, 两个函数做四则运算后得到的函数的原函数已经可以难以求解, 这给求不定积分带来了很大困难. 于是我们求不定积分的方法通常是通过化归的方式将问题转化为已知的不定积分结果. 乘法的求导法则和复合函数求导的链式法则为求不定积分带来了两类重要工具:

- **换元法**(对应求导的链式法则): 由于我们有 $[\varphi(\psi(t))]'=\varphi'(\psi(t))\psi'(t)$, 由此衍生出两种凑形式的换元方式
  - **第一类换元法**: 被积函数 $f(x)$ 形如 $\varphi'(\psi(x))\psi'(x)$ 的形式.
  - **第二类换元法**: 视 x 为 $\psi(t)$, 此时要求 $f(x)$ 具有 $\varphi'(x)\psi'(t)$ 的形式.

  第一类换元法又称**直接代换法**或者**凑微分法**, 需要凑出 $\psi(x)$ 的形式, 并使得剩余部分是关于 ψ 的函数; 第二类换元法又称**带入换元法**, 即带入 $x=\psi(t)$ 的形式, 但需要注意 t 的范围和 ψ 的可逆性, 此方式需要选取合适的 ψ 以起到化简的目的.

- **分部积分法**(对应乘法的求导法则): 由于我们有 $[\varphi(x)\psi(x)]'=\varphi'(x)\psi(x)+\varphi(x)\psi'(x)$, 从而有

  $$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)g(x)-\int g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

  此方法适用于 $g(x)f'(x)$ 的形式相较于 $f(x)g'(x)$ 更简单的情形.

第一类换元法. 借助凑微分 $\psi'(x)$ 来化简被积函数.

> **例 5.3.** 计算不定积分:
>
> (1) $\int \tan x \,\mathrm{d}x$;
>
> (2) $\int \sin^3 x \,\mathrm{d}x$.

解答. (1) 我们有

$$\int \tan x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x} \,\mathrm{d}x = \int -\frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

(2) <u>方法一</u>. 我们有

$$\int \sin^3 x \,\mathrm{d}x = \int -\sin^2 x \,\mathrm{d}\cos x = \int \cos^2 x - 1 \,\mathrm{d}\cos x = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C.$$

<u>方法二</u>. 利用三倍角公式 $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, 我们有

$$\int \sin^3 x \,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\int \sin x \,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int \sin 3x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}\cos 3x - \frac{3}{4}\cos x + C.$$

其中, 最后一个等号用到了 $\int \sin 3x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \sin 3x \,\mathrm{d}3x = -\frac{1}{3}\cos 3x$.

□

> **例 5.4.** 计算不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$.

解答. 首先变形被积函数为 $(x\cdot|x|\sqrt{1-1/x^2})^{-1}$. 此时我们利用函数 $\psi(x) = 1/x$ 做换元. 由于 $\psi'(x) = -1/x^2$, 我们得到

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = -\int \frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\sqrt{1-\psi(x)^2}} = -\arcsin\frac{1}{x} + C, \quad x > 0;$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\sqrt{1-\psi(x)^2}} = \arcsin\frac{1}{x} + C, \quad x < 0.$$

综合两种情况我们得到该不定积分为 $-\arcsin\frac{1}{|x|} + C$. □

> **例 5.5** (2023 高数 A 期中)**.** 求不定积分 $\int \frac{\arctan e^x}{e^x+e^{-x}} \,\mathrm{d}x$.

解答. 我们有

$$\int \frac{\arctan e^x}{e^x + e^{-x}} \,\mathrm{d}x = \int \frac{\arctan e^x}{1+e^{2x}} \,\mathrm{d}e^x = \int \arctan e^x \,\mathrm{d}(\arctan e^x) = \frac{1}{2}(\arctan e^x)^2 + C.$$

□

第二类换元法. 借助带入换元 $x = x(t)$ 来化简被积函数, 常见于通过这种带入换元消除根号.

例 5.6. 求不定积分 $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解答. 换元 $x=\sin t$, 其中 $-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$. 那么

$$\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\int\cos t\,\mathrm{d}(\sin t)=\int\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\int\frac{\cos 2t+1}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}(\sin 2t+2t)+C.$$

利用 $\sin 2t=2\sin t\cdot\cos t$, 带入 $t=\arcsin x$, 我们得到

$$\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)+C.$$

□

例 5.7. 计算不定积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$.

解答. 换元 $x=\sec t$, 其中 $t\in[0,\pi]\setminus\{\pi/2\}$. 原积分化为

$$\int\frac{\cos t\,\mathrm{d}(\sec t)}{\sqrt{\sec^2 t-1}}=\int\frac{\cos t\cdot|\cos t|}{\sin t}\frac{\sin t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=\int\operatorname{sgn}(\cos t)\,\mathrm{d}t=\operatorname{sgn}(\cos t)\cdot t+C.$$

带入 $t=\arccos(1/x)$ 得到原积分为 $\operatorname{sgn}(x)\cdot\arccos(1/x)+C$. □

注 5.8 我们已经在例5.4中计算过该不定积分, 此处是采用第二换元法的另一种解法. 这一例展示了在出现形如 $\sqrt{x^2-a^2}$ 的项时可以使用三角换元 $x=a\sec t$. 与此类似的是对形如 $\sqrt{a^2-x^2}$ 的项换元 $x=a\sin t$ 和对形如 $\sqrt{a^2+x^2}$ 的项换元 $x=a\tan t$.

例 5.9. 求不定积分 $\int\frac{1}{1+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$.

解答. 令 $\sqrt{x-1}=t$, 即 $x=1+t^2$, 其中 $t\geqslant 0$. 那么原积分变为

$$\int\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}\left(t^2+1\right)=\int\frac{2t}{1+t}\,\mathrm{d}t=\int(2-\frac{2}{1+t})\,\mathrm{d}t=2t-2\ln(1+t)+C.$$

带入 $t=\sqrt{x-1}$ 得到原积分为 $2\sqrt{x-1}-2\ln(1+\sqrt{x-1})+C$. □

例 5.10 (2023 高数 A 期中)**.** 设函数 $y=y(x)$ 满足方程 $y^2\cdot(x-y)=x^2$, 求不定积分

$$\int\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}x.$$

解答. 设 $x/y=t$, 那么我们得到 $x-y=t^2$. 由此得到参数表达式

$$x=\frac{t^3}{t-1},\quad y=\frac{t^2}{t-1}.$$

于是原不定积分化为

$$\int\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}x=\int\frac{(t-1)^2}{t^4}\,\mathrm{d}\left(\frac{t^3}{t-1}\right)=\int\frac{2t-3}{t^2}\,\mathrm{d}t=2\ln|t|+\frac{3}{t}+C.$$

带入 $t=x/y$ 得到原不定积分为 $2\ln|x/y|+3y/x+C$. □

分部积分法.

例 5.11. 求不定积分 $\int e^x \sin x \, \mathrm{d}x$.

解答. 我们有

$$\int e^x \sin x \, \mathrm{d}x = \int \sin x \, \mathrm{d}e^x = e^x \sin x - \int e^x \, \mathrm{d}(\sin x) = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, \mathrm{d}x.$$

注意到出现 $\int e^x \cos x \, \mathrm{d}x$ 项, 我们再对其做分部积分得到

$$\int e^x \cos x \, \mathrm{d}x = \int \cos x \, \mathrm{d}e^x = e^x \cos x - \int e^x \, \mathrm{d}(\cos x) = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, \mathrm{d}x.$$

带入第一个式子得到

$$\int e^x \sin x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$$

□

注 5.12 如果熟悉复数的话此题还可以借助复数给出一种更直接的方式. 设 i 为虚数单位, 由 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ 知 $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$. 于是

$$\int e^x \sin x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2i} \int (e^{(1+i)x} - e^{(1-i)x}) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{1+i} e^{(1+i)x} - \frac{1}{1-i} e^{(1-i)x} \right) + C.$$

化简后得到相同的结果.

例 5.13. 求不定积分 $\int \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^2} \, \mathrm{d}x$.

解答. 我们有

$$\int \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^2} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \int \arctan x \, \mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x^2} \right) = -\frac{1}{2} \left[\frac{\arctan x}{1+x^2} - \int \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}(\arctan x) \right].$$

现在我们计算

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}(\arctan x) = \int \frac{1}{(1+x^2)^2} \, \mathrm{d}x.$$

换元 $x = \tan t$, 其中 $-\pi/2 < t < \pi/2$. 于是有

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2} \, \mathrm{d}x = \int \cos^4 t \, \mathrm{d}(\tan t) = \int \cos^2 t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{4}(\sin 2t + 2t) + C,$$

最后一个用到了我们在例5.6中计算的结果. 从而

$$\int \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^2} \, \mathrm{d}x = -\frac{\arctan x}{2(1+x^2)} + \frac{x}{4(1+x^2)} + \frac{1}{4} \arctan x + C.$$

□

特定形式函数的不定积分. 某些具有特定形式的函数积分具有通用的求解方式, 但有时计算量会较大, 我们总结这几类求不定积分常见的函数.

- **有理函数的不定积分**: 一个有理函数 $R(x)$ 是指其可以写成 $R(x) = P(x)/Q(x)$ 的形式, 其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 都是多项式. 通过多项式的带余除法, 我们可以得到

$$R(x) = R_0(x) + \frac{P_0(x)}{Q(x)}$$

的形式, 其中 $R_0(x), P_0(x)$ 均为多项式且 $P_0(x)$ 的次数严格小于 $Q(x)$. 下面我们针对 $P_0(x)/Q(x)$ 的部分求其积分. 首先将 $Q(x)$ 在多项式范围内做因式分解, 其可以写成

$$Q(x) = c(x - x_1)^{\alpha_1} \cdots (x - x_k)^{\alpha_k} (x^2 + a_1 x + b_1 x)^{\beta_1} \cdots (x^2 + a_\ell x + b_\ell x)^{\beta_\ell}$$

的形式. 此时 $P_0(x)/Q(x)$ 可以写成**部分分式**的和, 即形如

$$\frac{A}{(x - x_i)^n}, \quad \frac{Ax + B}{(x^2 + a_i x + b_i)^m}$$

的项的求和, 其中 $n \leqslant \alpha_i, m \leqslant \beta_i$. 每个部分分式上的系数 A, B 都是通过待定系数求解得到的. 实际操作时我们通常使用带入多项式的根的方式可以更快地确定系数, 这一方法将在下面的例题中具体展示. 而每一个独立的部分分式我们是有已知的积分结果的, 由此得到 $R(x)$ 的不定积分.

> **注 5.14** 如果在复数范围内进行 $Q(x)$ 的因式分解, 则可以保证 $Q(x)$ 分解为形如 $(x - z_1)^{\alpha_1} \cdots (x - z_k)^{\alpha_k}$ 的形式. 此时其部分分式的形式更简单, 积分计算会更简单, 但需要将一些复数计算的结果化简为实函数 (例如反三角函数) 的形式.

- **三角有理式的不定积分**: 三角有理式指的是一个形如 $f(x) = R(\sin x, \cos x)$ 的函数, 其中 R 是一个 (二元) 有理函数. 此时的通用方法是借助换元 $t = \tan(x/2)$ 和万能公式

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

将被积函数转化为有理函数, 划归为上一情形.

- **无理函数 (根式函数) 的不定积分**: 一般的无理函数并不总是可以在初等函数范畴积出来的. 即使是在最基本的情形 $f(x) = x^m(ax^n + b)^p$, 其中 m, n 为整数, p 为有理数, 不定积分 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 也仅在 $p, (m+1)/n, (m+1)/n + p$ 其中之一为整数这三种情况能积出来. 对应于后两种情况, 我们通常只需考虑

$$t = \sqrt[k]{ax^\ell + b} \quad 或 \quad t = \sqrt[k]{\frac{ax^\ell + b}{cx^\ell + d}}$$

这两类换元即可. 对于能够积出来的无理函数, 这两类换元已经足够将根式函数的积分转化为有理函数的积分了.

例 5.15. 令有理函数 $R(x)=\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}$.

(1) 将 $R(x)$ 写作部分分式的和;

(2) (2020 高数 B 期中) 求不定积分 $\int R(x)\,\mathrm{d}x$.

解答. (1) 记 $P(x)=x^3+1, Q(x)=x^4-3x^3+3x^2-x$, 那么 $R(x)=P(x)/Q(x)$. 首先对分母 $Q(x)$ 做因式分解得 $Q(x)=x(x-1)^3$. 从而 $R(x)$ 写作部分分式的和形如

$$R(x)=\frac{A}{x}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{B_3}{(x-1)^3}.$$

此处可以直接通分比对系数计算, 但计算量较大, 我们采取另一方法. 注意到

$$P(x)=R(x)Q(x)=A\frac{Q(x)}{x}+B_1\frac{Q(x)}{x-1}+B_2\frac{Q(x)}{(x-1)^2}+B_3\frac{Q(x)}{(x-1)^3},$$

右式中除 $A\frac{Q(x)}{x}$ 以外其余三项均有因子 x, 而 $Q(x)/x=(x-1)^3$. 于是我们带入 $x=0$ 可以知道 $A(0-1)^3=P(0)=1$, 从而 $A=-1$. 类似地, 右式除 $B_3\cdot Q(x)/(x-1)^3=B_3x$ 以外均有因子 $(x-1)$. 带入 $x=1$ 得到 $B_3=P(1)=2$.

接下来我们依次计算 B_2, B_1. 计算 B_2 时我们利用已经算出的 $B_3=2$, 考虑

$$P(x)-2x=P(x)-B_3\frac{Q(x)}{(x-1)^3}=A\frac{Q(x)}{x}+B_1\frac{Q(x)}{x-1}+B_2\frac{Q(x)}{(x-1)^2},$$

此时等式两侧均为 $(x-1)$ 的倍数. 两侧约去 $(x-1)$ 后得到

$$x^2+x-1=\frac{P(x)-2x}{x-1}=A\frac{Q(x)}{x(x-1)}+B_1\frac{Q(x)}{(x-1)^2}+B_2\frac{Q(x)}{(x-1)^3},$$

类似之前计算 B_3 的方法我们此时带入 $x=1$ 可以计算出 $B_2=1$. 类似地我们可以计算出 $B_1=2$. 从而 $R(x)$ 的部分分式表达式为

$$R(x)=-\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}.$$

(2) 根据上述部分分式表达式可得

$$\int R(x)\,\mathrm{d}x=-\ln|x|+2\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+C.$$

□

例 5.16. 设 a,b 为非零实数, 求不定积分 $\int\frac{1}{a+b\cos x}\,\mathrm{d}x$.

解答. 首先我们换元 $t=\tan\frac{x}{2}$, 也即 $x=2\arctan t$. 带入得到

$$\int\frac{1}{a+b\cos x}\,\mathrm{d}x=2\int\frac{1+t^2}{a(1+t^2)+b(1-t^2)}\,\mathrm{d}(\arctan t)=\int\frac{2\,\mathrm{d}t}{(a+b)+(a-b)t^2}.$$

根据 $(a+b)$ 与 $(a-b)$ 的符号我们分为以下四类:

(i) $|a|>|b|$, 此时 $(a+b)(a-b)>0$. 我们有

$$\int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(a+b)+(a-b)t^2}=\frac{2}{a+b}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}t\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right)+C.$$

注 5.17 该结果并不严谨, 因为换元 $t=\tan\frac{x}{2}$ 在 $x=k\pi$ 时无定义 (且不是单射), 该不定积分结果这只能给出 $x\in(-\pi,\pi)$ 的情形. 实际上严谨的结果为

$$\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right)+\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}\left\lfloor\frac{x+\pi}{2\pi}\right\rfloor+C.$$

(ii) $|a|<|b|$, 此时 $(a+b)(a-b)<0$. 我们有

$$\begin{aligned}\int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(a+b)+(a-b)t^2}&=\frac{2}{a+b}\int \frac{\mathrm{d}t}{1-\left(\sqrt{\frac{b-a}{a+b}}t\right)^2}\\&=\frac{1}{a+b}\int\left(\frac{1}{1+\sqrt{\frac{b-a}{a+b}}t}+\frac{1}{1-\sqrt{\frac{b-a}{a+b}}t}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+b}+t\sqrt{b-a}}{\sqrt{a+b}-t\sqrt{b-a}}\right|+C\\&=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{b+a\cos x+\sqrt{b^2-a^2}\sin x}{a+b\cos x}\right|+C.\end{aligned}$$

(iii) $a=b$, 此时

$$\int\frac{1}{a(1+\cos x)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2a\cos^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\tan\frac{x}{2}+C.$$

(iv) $a=-b$, 此时

$$\int\frac{1}{a(1-\cos x)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2a\sin^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{a}\cot\frac{x}{2}+C.$$

□

注 5.18 此题的一个特殊情况是 Poisson 积分, 给定 $-1<r<1$, 我们有**Poisson 积分**

$$\int\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\,\mathrm{d}x=2\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\tan\frac{x}{2}\right)+C.$$

特别地, 该结果给出定积分

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\,\mathrm{d}x=\lim_{\theta\to\pi-0}2\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\tan\frac{x}{2}\right)\Big|_{-\theta}^{\theta}=2\pi.$$

§6. 定积分

定积分的定义. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义.

1. 分割区间: 选取闭区间 $[a,b]$ 的一个**分割**$T=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b\}$. 记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, 称 $\lambda(T):=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i$ 为 T 的**细度**.
2. 计算**Riemann 和**: 对于分割 T 给出的每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 选取介点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, 称
$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$
为 f 在区间 $[a,b]$ 上的一个 Riemann 和.
3. 取极限: 如果存在实数 I 满足
$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=I, \tag{6.1}$$
就称 f 在区间 $[a,b]$ 上**Riemann 可积**且称 I 为 f 在区间 $[a,b]$ 上的**Riemann 积分**或**定积分**, 记作
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=I.$$
这里我们需要强调极限(6.1)所具备的含义, 其要求该收敛针对不同分割和介点的选取具备一致性: 对任意 $\varepsilon>0$, 都存在 $\delta>0$ 使得对任意满足 $\lambda(T)<\delta$ 的分割 T 和任意相对于 T 的介点集 $\{\xi_i\}$, 都有
$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\varepsilon.$$

定理 6.1 (微积分基本定理)
设 $f(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 令 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数, 那么
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=F(x)\big|_a^b.$$

定积分的定义通常可以帮助我们计算一些和式性数列的极限, 一些具有特定形式的和式可以转化为函数的 Riemann 和然后根据定积分的定义可知极限为一个定积分.

例 6.2. 计算下列极限:

(1) (2020 高数 B 期中)$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+i^2}$;

(2) (2023 高数 A 期中)$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\ln(n+k)-\frac{n+1}{2n}\ln n$.

解答. (1) 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+i^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n}}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right),$$

其中 $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$. 此时上述极限为函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的 Riemann 和的极限, 从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1=\frac{\ln 2}{2}.$$

(2) <u>最开始大脑宕机写出的麻烦做法.</u> 首先我们将求和进行变形

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\ln(n+k)-\frac{n+1}{2n}\ln n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}(\ln(n+k)-\ln n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

为将右式化作 Riemann 和的形式, 我们考虑区间 $[0,1/2]$ 的划分 $x_k=k(k+1)/2n^2$,$1\leqslant k\leqslant n-1$ 和 $x_0=0,x_n=1/2$. 此时对 $1\leqslant k\leqslant n-1$ 均有 $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}=k/n^2$. 由于 $\Delta x_n=x_n-x_{n-1}=1/2n$, 从而

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\ln 2\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot\Delta x_k.\end{aligned}$$

现在我们选取介点 $\xi_k=k^2/2n^2\in[x_{k-1},x_k]$, 那么

$$\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=f(\xi_k),$$

其中 $f(x)=\ln(1+\sqrt{2x})$. 由于该分割的细度为 $(n-1)/n^2\to 0$, 从而原极限为

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2}\ln(1+\sqrt{2x})\,\mathrm{d}x&=\int_0^1\ln(1+t)\,\mathrm{d}\frac{t^2}{2}\\&=\frac{1}{2}\left(t^2\ln(1+t)\Big|_0^1-\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}\ln(1+t)\right)\\&=\frac{1}{2}\left[\ln 2-\int_0^1\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\ln 2-\left(\frac{1}{2}t^2-t+\ln(1+t)\right)\Big|_0^1\right]=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

<u>正常的简洁做法.</u> 首先我们将求和进行变形

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\ln(n+k)-\frac{n+1}{2n}\ln n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}(\ln(n+k)-\ln n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

右式此时化作函数 $x\ln(1+x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的 Riemann 和, 从而极限为

$$\int_0^1 x\ln(1+x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+x)\,\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}\ln 2-\int_0^1\frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.$$

□

我们需要指出的是, 几乎只有这一类特殊的序列求极限问题才需要用到 Riemann 和的概念. 在这一类问题中, 将序列转化为 Riemann 和的方式被视为一种技巧.

Riemann 和自身作为一种符合直觉的概念, 其在公理化的微积分体系中的主要作用是明确函数 "可积性". 而如果我们已经限制在可积函数的范围内讨论问题, 例如在一些关于定积分的证明题中, Riemann 和本身并不是一个好用的对象, 我们也一般避免使用这一概念. 实际上, 对于这一类问题我们直接使用定积分的若干基本性质即可完成推导.

例 6.3 (定积分的性质)

- 区域划分:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- 单调性: 如果在区间 $[a,b]$ 上满足 $f(x) \leqslant g(x)$, 那么

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

- 不等式估计 (单调性的特例): 如果 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足 $m \leqslant f(x) \leqslant M$, 那么

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

- 三角不等式

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

例 6.4 (2020 高数 C 期末)**.** 设 f 是区间 (A,B) 上的连续函数, 证明对任意 (A,B) 内的两点 $a<b$ 都有

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\mathrm{d}x = f(b)-f(a).$$

解答. 根据变量代换, 我们有

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\mathrm{d}x &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_{a+h}^{b+h} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_b^{b+h} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{a+h} f(x)\,\mathrm{d}x\right)\\
&= f(b)-f(a).
\end{aligned}$$

其中最后一个等号利用到了 $f(x)$ 在 a,b 处的连续性: 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得对任意 $x\in U_\delta(a)$ 都有 $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$, 从而对任意 $|h|<\delta$ 都有

$$\left|\int_a^{a+h} f(x)\,\mathrm{d}x - hf(a)\right| = \left|\int_a^{a+h}[f(x)-f(a)]\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^{a+h}|f(x)-f(a)|\,\mathrm{d}x \leqslant |h|\varepsilon.$$

从而 $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(x)\,\mathrm{d}x = f(a)$, 对 b 处同理.(此步骤也可用积分中值定理代替.) □

注 6.5 此题还有一种看起来直接但并不正确的想法:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b)-f(a).\end{aligned}$$

我们要指出这一证法的三个等号均为错误的:

- 在一般情形, 求极限和积分这两个操作并不能交换顺序;
- 我们没有假定 $f(x)$ 是可导的;
- 即使 $f(x)$ 是可导的, 其导数也未必连续从而不能使用微积分基本定理. 实际上, **一个可导函数的导数未必是 Riemann 可积的**. 例如 $f(x)=x\sin\frac{1}{x}(x>0)$ 的导数是无界的, 从而并不是 Riemann 可积的.

例 6.6 (2021 高数 B 期中)**.** 设 $f(x)$ 是闭区间 $[0,2\pi]$ 上的连续函数, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \to 0.$$

证明. 由于 $f(x)$ 是有界闭区间上的连续函数, 从而 $f(x)$ 是**一致连续**的: 对任意 $\varepsilon>0$ 都存在 $\delta>0$ 使得对任意 $x_1,x_2\in[0,2\pi]$ 满足 $|x_1-x_2|<\delta$ 都有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

我们选取 N 充分大使得 $2\pi/N<\delta$. 于是当 $|n|>N$ 时, 对任意 $1\leqslant k\leqslant n$ 我们都有

$$\left|\int_{2(k-1)\pi/|n|}^{2k\pi/|n|}\left[f(x)-f\left(\frac{2k\pi}{|n|}\right)\right]\sin nx\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2\pi}{|n|}\varepsilon.$$

注意到

$$\int_{2(k-1)\pi/|n|}^{2k\pi/|n|} f\left(\frac{2k\pi}{|n|}\right)\sin nx\,\mathrm{d}x = f\left(\frac{2k\pi}{|n|}\right)\cdot\int_{2(k-1)\pi/|n|}^{2k\pi/|n|}\sin nx\,\mathrm{d}x = 0.$$

所以我们有

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\right| \leqslant \sum_{k=1}^{|n|}\left|\int_{2(k-1)\pi/|n|}^{2k\pi/|n|} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right| \leqslant 2\pi\varepsilon,$$

对任意 $|n|>N$ 成立. 从而原极限为 0. □

注 6.7 此题实际上是 Fourier 变换中十分重要的Riemann-Lebesgue 引理的特殊形式. 在一般情形, 该结论只需要假设 $|f(x)|$ 的可积性即可成立.

变限定积分. 与变限定积分相关的主要问题就是对变限定积分进行求导, 微积分基本定理保证了这一类问题的本质就是复合函数求导. 设 $\varphi(x),\psi(x)$ 是两个可导的函数, $f(t)$ 是连续函数, 那么

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = [F(\psi(x))-F(\varphi(x))]' = f(\psi(x))\psi'(x)-f(\varphi(x))\varphi'(x),$$

其中 F 是 f 的一个原函数. 这一类问题基本就是求导练习, 只需关注清楚变量较多时各变量之间的从属关系即可.

例 6.8. 求函数 $G(x) = \int_x^{x^2} \left(e^t \int_0^t \sin z \,\mathrm{d}z\right) \mathrm{d}t$ 的二阶导数.

解答. 我们有

$$G'(x) = 2x \cdot e^{x^2} \int_0^{x^2} \sin z \,\mathrm{d}z - e^x \int_0^x \sin z \,\mathrm{d}z = 2x(1-\cos x^2)e^{x^2} - e^x(1-\cos x).$$

从而

$$G''(x) = 2e^{x^2}[(1-\cos x^2) + 2x^2 \sin x^2 + 2x^2(1-\cos x^2)] - e^x(1-\cos x + \sin x).$$

□

定积分的计算.

微积分基本定理的存在使得许多情形下定积分的计算的关键还是在于对被积函数的原函数的求解, 与计算不定积分类似, 我们也经常使用换元法和分部积分法.

- **换元法**: 计算 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 的定积分时, 考虑换元 $x = \psi(t)$, **我们要求** $\psi(t)$ **具有连续的导函数,** $\psi(\alpha) = a, \psi(\beta) = b$ **且对任意** $t \in [\alpha, \beta]$ **都有** $\psi(t) \in [a,b]$, 那么

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\psi(t))\psi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

- **分部积分法**: 与不定积分的分部积分基本相同, 即

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

例 6.9 (2023 高数 B 期中)**.** (1) 证明对 $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ 都有

$$-1 < \frac{4\sin x}{3+\sin^2 x} < 1.$$

(2) 对 $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ 求 $f'(x)$, 其中函数 $f(x)$ 为

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{4\sin x}{3+\sin^2 x}\right).$$

(3) 证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4\cos^2 x + \sin^2 x}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{9}{4}\cos^2 x + 2\sin^2 x}}.$$

解答. (1) 由 $1 > \sin x$ 和 $1 + \sin^2 x \geqslant 2\sin x$ 知 $3 + \sin^2 x > 4\sin x$. 另一个不等号同理.

(2) 我们有

$$f'(x)=\frac{3+\sin^2 x}{\sqrt{(3+\sin^2 x)^2-16\sin^2 x}}\cdot\frac{4\cos x(3-\sin^2 x)}{(3+\sin^2 x)^2}.$$

注意到 $(3+\sin^2 x)^2-16\sin^2 x=9-10\sin^2 x+\sin^4 x=(9-\sin^2 x)(1-\sin^2 x)=(9-\sin^2 x)\cos^2 x$, 我们可以化简得到

$$f'(x)=\frac{3-\sin^2 x}{3+\sin^2 x}\cdot\frac{4}{\sqrt{9-\sin^2 x}}.$$

(3) 令 $y=f(x)=\arcsin\left(\frac{4\sin x}{3+\sin^2 x}\right)$, 那么

$$4\cos^2 y+\sin^2 y=4-3\cdot\frac{16\sin^2 x}{(3+\sin^2 x)^2}=\frac{4[(3+\sin^2 x)^2-12\sin^2 x]}{(3+\sin^2 x)^2}=4\left(\frac{3-\sin^2 x}{3+\sin^2 x}\right)^2.$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{4\cos^2 y+\sin^2 y}}=\frac{2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{9-\sin^2 x}}=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{9}{4}\cos^2 x+2\sin^2 x}}.$$

由于 x 从 0 变动到 $\pi/2$ 时 $f(x)$ 也从 0 变动到 $\pi/2$, 从而

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{9}{4}\cos^2 x+2\sin^2 x}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}f(x)}{\sqrt{4\cos^2 f(x)+\sin^2 f(x)}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4\cos^2 x+\sin^2 x}}.$$

□

注 6.10 此结果的一般版本被称为椭圆积分的高斯定理, 对于任意 $a,b>0$ 有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\cos^2\theta+ab\sin^2\theta}}.$$

证明方法是考虑换元

$$\sin\varphi=\frac{2a\sin\theta}{(a+b)+(a-b)\sin^2\theta}.$$

本题即为 $a=2,b=1$ 的情形.

例 6.11 (2023 高数 A 期中). 令 $f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{\pi-t}\,\mathrm{d}t$ 为定义在 $[0,\pi]$ 上的函数, 计算定积分 $\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x$.

解答. 我们有

$$\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x=xf(x)|_0^\pi-\int_0^\pi xf'(x)\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^\pi\frac{\sin x}{\pi-x}\,\mathrm{d}x-\int_0^\pi\frac{x\sin x}{\pi-x}\,\mathrm{d}x.$$

$$=\int_0^\pi(\pi-x)\frac{\sin x}{\pi-x}\,\mathrm{d}x=\int_0^\pi\sin x\,\mathrm{d}x=2.$$

□

例 6.12. 设 n 为正整数, 计算 $\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x$.

解答. 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\,\mathrm{d}(\cos x) = -\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}(\sin^{n-1}x)\\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin^{n-2}x\,\mathrm{d}x = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\sin^{n-2}x\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

令 $I_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n x\,\mathrm{d}x$, 那么上式给出关系式 $I_n=(n-1)(I_{n-2}-I_n)$, 即 $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$. 带入 $I_0=\pi/2$ 和 $I_1=1$, 我们得到结果:

$$I_n=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{为奇数};\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为偶数}.\end{cases}$$

□

例 6.13. 设 $F(x)=\int_0^x \sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, 求 $F'(0)$.

解答. 注意到 $\sin\frac{1}{t}$ 在 $t=0$ 处并不连续, 我们无法使用之前的方法计算该变限积分在 $x=0$ 处的导数, 我们尝试直接变形该积分. 用分部积分公式得到

$$F(x)=\int_0^x t^2\,\mathrm{d}\cos\frac{1}{t}=t^2\cos\frac{1}{t}\Big|_0^x-\int_0^x 2t\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=x^2\cos\frac{1}{x}-2\int_0^x t\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

注意到

$$\left|\int_0^x t\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\left|\int_0^x\left|t\cos\frac{1}{t}\right|\,\mathrm{d}t\right|\leqslant x^2.$$

于是

$$F'(0)=\lim_{x\to0}\frac{F(x)}{x}=\lim_{x\to0}x\cos\frac{1}{x}-\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x t\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}=0.$$

□

然而, 有一些原函数难以求解的被积函数也能够计算定积分的值. 这经常依赖于函数和积分区域的对称性, 最基本的例子是对于 (可积的) 奇函数 $f(x)$ 总有

$$\int_{-T}^{T}f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

更常见的例子来自含有三角函数的被积函数, 利用三角函数的诱导公式我们往往能找到被积函数的许多对称性, 利用这些对称性配对的方法消去被积函数中难以处理的三角函数化简被积函数也是一种常见的技巧.

例 6.14. 计算定积分

(1) $\int_{-1}^{1}\left(\frac{\sin^2 x}{1+e^x}+\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\right)\mathrm{d}x$;

(2) (2020 高数 B 期中)$\int_{-1}^{1}\frac{x^2(1+\arcsin x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

解答. (1) 为了消去被积函数中较为难以处理的三角函数, 我们利用配对求和的方法. 令被积函数为 $f(x)$, 那么我们有

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 [f(x)+f(-x)]\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{\sin^2 x}{1+e^x}+\frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}+\frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}+\frac{\cos^2 x}{1+e^x}\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1\left(\frac{1}{1+e^x}+\frac{1}{1+e^{-x}}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1.\end{aligned}$$

(2) 此被积函数中的反三角函数是计算积分中较难处理的项, 但我们注意到函数

$$\frac{x^2\arcsin x}{1+x^2}$$

是奇函数, 从而其在 $[-1,1]$ 上的积分为 0. 于是原积分值为

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} 1-\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = (x-\arctan x)|_{-1}^{1} = 2-\frac{\pi}{2}.$$

□

例 6.15 (2022 高数 B 期中). 对于 $x\in(-1,1)$, 令函数

$$f(x)=\int_0^{2\pi}\ln(1-2x\cos t+x^2)\,\mathrm{d}t.$$

(1) 证明 $2f(x)=f(x^2)$ 对任意 $x\in(-1,1)$ 成立;

(2) 证明 $f(x)$ 在区间 $(-1/2,1/2)$ 上有界;

(3) 求 $f(x)$ 在 $x\in(-1,1)$ 上的显性表达式.

解答. (1) 由于 $\cos(t+\pi)=-\cos t$, 从而我们有

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_0^{\pi}[\ln(1-2x\cos t+x^2)+\ln(1-2x\cos(t+\pi)+x^2)]\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\pi}\ln[(1+x^2)^2-4x^2\cos^2 t]\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\pi}\ln[1+x^4-2x^2(2\cos^2 t-1)]\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\pi}\ln(1+x^4-2x^2\cos 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}f(x^2).\end{aligned}$$

(2) 由于 $(1-|x|)^2\leqslant 1-2x\cos t+x^2\leqslant(1+|x|)^2$, 从而对任意 $x\in(-1/2,1/2)$ 我们总有

$$-4\pi\ln 2\leqslant f(x)\leqslant 4\pi\ln\frac{3}{2}.$$

(3) 反复利用 (1), 我们知道 $f(x)=f(x^{2^n})/2^n$ 对任意 $x\in(-1,1)$ 和正整数 n 成立. 固定 $x\in(-1,1)$, 由于 $\lim_{n\to\infty}x^{2^n}=0$, 从而当 n 充分大时 $x^{2^n}\in(-1/2,1/2)$. 利用上一问的有界性知对于充分大的 n 总有

$$-\frac{4\pi\ln 2}{2^n}\leqslant f(x)\leqslant\frac{4\pi\ln(3/2)}{2^n}.$$

令 n 趋于无穷, 根据夹逼定理知 $f(x)=0$. 从而 $f(x)$ 在 $x\in(-1,1)$ 上恒为 0.

□

注 6.16 (3) 也可以通过先计算 $f(0)=0$ 然后利用 $f(x^{2^n})\to f(0)$ 的方式得到. 本质上与我们的解法相同, 但需要注意的是这种方法需要先证明 $f(x)$ 的连续性.

注 6.17 此题的另一解法是考虑 $f'(x)$, 我们给出该方法的大致思路. 首先我们可以证明对 $x\in(-1,1)$ 有

$$f'(x)=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\ln(1-2x\cos t+x^2)]\,\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2x-2\cos t}{1-2x\cos t+x^2}\,\mathrm{d}t.$$

这里第一个等号利用到了求导与积分交换计算顺序, 我们要强调这一步是需要证明的而且证明并不平凡. 此时右式被积函数化作一个关于 t 的三角有理式, 根据上一节的技巧我们换元 $s=\tan\frac{t}{2}$ 可解出其原函数. 实际上, 右式与注5.18中的 Poisson 积分高度相关. 利用 Poisson 积分的结果, 我们有 ($x\neq 0$ 时)

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2x-2\cos t}{1-2x\cos t+x^2}\,\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{x}+\frac{x-\frac{1}{x}}{1-2x\cos t+x^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2\pi}{x}-\frac{2\pi}{x}=0.$$

由此知 $f'(x)\equiv 0$. 结合 $f(0)=0$ 知 $f(x)\equiv 0$.

定积分的应用.

定积分常见的应用是计算一些几何对象的长度/面积/体积等等.

例 6.18 (曲线弧长)

计算曲线弧长通常有以下公式:

- 一般方程 $y=f(x)$ 所给出的曲线弧长 $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$;
- 参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ 所给出的曲线弧长 $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$;
- 极坐标方程 $r=r(\theta)$ 所给出的曲线弧长 $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[r'(\theta)]^2+r^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$.

例 6.19 (2021 高数 B 期中). 计算抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 在 $(0,0)$ 到 $(1,1/2)$ 之间的曲线弧长.

解答. 由于 $f'(x)=x$. 根据弧长公式我们有

$$\begin{aligned} s &= \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}(\tan t) = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^3 t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^4 t}\,\mathrm{d}(\sin t) = \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{(1-u^2)^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{4(1+u)^2} + \frac{1}{4(1-u)^2} + \frac{1}{4(1+u)} + \frac{1}{4(1-u)}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-u} - \frac{1}{1+u} + \ln(1+u) - \ln(1-u)\right]\Bigg|_0^{\sqrt{2}/2} \\ &= \frac{\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})}{2}. \end{aligned}$$

关于 $\sqrt{1+x^2}$ 的不定积分计算最快捷的方法是采用双曲换元, 见例7.16. □

例 6.20 (旋转体体积和侧面积)

考虑一条曲线绕 x 轴旋转构成的旋转体, 其体积和侧面积具有以下公式:

- 一般方程 $y=f(x)$ 所给出的旋转体体积 $V=\pi\int_\alpha^\beta f^2(x)\,\mathrm{d}x$;
- 一般方程 $y=f(x)$ 所给出的旋转体侧面积 $F=2\pi\int_\alpha^\beta f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$;
- 参数方程 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ 给出的旋转体侧面积 $F=2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$;
- 极坐标方程 $r=r(\theta)$ 给出的旋转体侧面积 $F=2\pi\int_\alpha^\beta r\sin\theta\sqrt{[r'(\theta)]^2+r^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$.

例 6.21 (平面图形面积)

关于平面上曲线围成的区域面积我们有如下公式:

- 两条曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 夹出的曲边四边形面积 $S=\int_\alpha^\beta |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$;
- 极坐标方程 $r=r(\theta)$ 所围成图形面积 $S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

例 6.22 (2021 高数 B 期中). 给定奇数 $n\geqslant 3$, 设 n 叶玫瑰线由极坐标方程 $r=\sin n\theta$ 给出, 求其围成的区域面积.

解答. 该极坐标方程仅在 $\theta\in[2k\pi/n,(2k+1)\pi/n]$ 有良定义, 其中 $k=0,\cdots,n-1$. 共 n 叶, 每一叶的面积相同, 从而总面积为

$$S=\frac{n}{2}\int_0^{\pi/n}\sin^2 n\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/n}\frac{1-\cos 2n\theta}{2}\,\mathrm{d}(2n\theta)=\frac{\pi}{4}.$$

此题主要需要小心定义域的问题, 直接在 $[0,2\pi]$ 上积分 $r^2(\theta)/2$ 得到的结果是不正确的. □

其他相关的证明题.

一个有用的工具是连续函数的积分中值定理. 虽然这一结论实际上就是连续函数的介值定理的直接推论, 且这一结论的多数使用场景可以直接被例6.3中关于积分的不等式估计所替代, 但一些时候直接使用这个结果还是可以期待简化证明的作用的.

定理 6.23

如果 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 那么存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\cdot(b-a).$$

例 6.24 (2020 高数 B 期中). 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的可导函数且 $f'(x)$ 连续, 证明对于任意 $x\in[0,1]$ 都有

$$|f(x)|\leqslant\int_0^1|f(t)|\,\mathrm{d}t+\int_0^1|f'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

解答. 由于 $f'(x)$ 连续, 从而对任意 $[0,1]$ 上的实数 x,y 都有

$$|f(y)-f(x)|=\left|\int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_x^y|f'(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1|f'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

同时, 由于 $f(x)$ 的连续性知 $|f(x)|$ 也连续, 从而由积分中值定理知存在 $\xi\in[0,1]$ 使得

$$|f(\xi)|=\int_0^1|f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

结合前一不等式, 可知对任意 $x\in[0,1]$ 都有

$$|f(x)|\leqslant|f(\xi)|+|f(x)-f(\xi)|\leqslant\int_0^1|f(t)|\,\mathrm{d}t+\int_0^1|f'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

□

§7. 期中考试例题

说明. 此部分为 2024 年唐思远老师的《高等数学 A》课程作业, 内容是由部分往年高等数学课程考试题所构成的模拟练习. 但所有题目均来自往年考生的回忆版本, 与考场上的实际考试题可能有所出入. 同时这一部分的题目部分解答可能较为简略, 且可能有所错漏, 这些解答并不可视为考试的标准答案, 请谨慎参考.

模拟练习一.

例 7.1 (2022 高数 A 期中). 构造数列 $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ 使得下面两个极限同时成立:

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n - e^n) = 0$;

(2) $\lim_{n\to\infty}(f(a_n) - f(e^n)) \neq 0$, 其中 $f(x) = x\ln x$.

解答. 令 $a_n = e^n + b_n$, 那么要求 $b_n \to 0$. 我们让 $b_n \geqslant 0$, 那么

$$f(a_n) - f(e^n) = (e^n + b_n)\ln(e^n + b_n) - e^n \ln e^n \geqslant n(e^n + b_n) - ne^n \geqslant nb_n.$$

只需选取 $b_n = 1/n$ 即可. □

例 7.2 (2023 高数 A 期中). 确定实数 a, b 的取值使得 $\mathbb{R}$ 上的函数函数

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$$

连续.

解答. 计算可得

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & |x| > 1; \\ \dfrac{a+b+1}{2}, & x = 1; \\ \dfrac{a-b-1}{2}, & x = -1; \\ ax^2 + bx, & |x| < 1. \end{cases}$$

在 $x = \pm 1$ 处的连续性分别给出方程

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{a+b+1}{2} = a + b; \\ -1 = \dfrac{a-b-1}{2} = a - b. \end{cases}$$

解出 $a = 0, b = 1$. 经验证 f 此时确实连续. □

例 7.3 (2022 高数 A 期中). 是否存在实数序列 $\{a_n\}$ 同时满足

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$,

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n^n = 1.001$.

解答. 令 $b_n = a_n^n$, 那么 $a_n = b_n^{1/n}$. 可见只需取 $b_n \equiv 1.001$, 那么自然有 $b_n^{1/n} \to 1$. □

例 7.4 (2022 高数 A 期中)**.** 求 n 阶导数 $y^{(n)}$, 其中 $y = (x^2+2x+2)e^{-x}$.

解答. 设 $y^{(n)} = (a_n x^2 + b_n x + c_n)e^{-x}$, 那么

$$a_{n+1} = -a_n, \quad b_{n+1} = -b_n + 2a_n, \quad c_{n+1} = -c_n + b_n.$$

计算出 $a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^{n+1}(2n-2), c_n = (-1)^n(n^2-3n+6)$ 对 $n \geqslant 1$ 时. 当 $n = 0$ 时 $c_n = 2$. □

例 7.5 (2023 高数 C 期中)**.** (1) 令函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln\left(2+\cos\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

求 $f'(x)$ 并判断其各点处连续性, 探讨其间断点的类型;

(2) 设 $g(x)$ 是一个在 0 处可导的函数, 且其满足

$$|g(x)| \leqslant \ln(1+|\arcsin x|)$$

对任意 $|x|<1$ 成立. 证明 $|g'(0)| \leqslant 1$.

解答. (1) 在 $x \neq 0$ 时

$$f'(x) = 2x\ln\left(2+\cos\frac{1}{x}\right) + \frac{\sin\frac{1}{x}}{2+\cos\frac{1}{x}}.$$

在 $x = 0$ 处有

$$f'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} x\ln\left(2+\cos\frac{1}{x}\right) = 0.$$

在 0 处不连续, 是第二类间断点.

(2) 首先 $|g(0)| \leqslant 0$ 从而 $g(0) = 0$. 然后有

$$|g'(0)| = \lim_{x\to 0}\frac{|g(x)|}{|x|} \leqslant \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+|\arcsin x|)}{|x|} = \lim_{x\to 0}\frac{|\arcsin x|}{|x|} = 1.$$

□

例 7.6 (2021 高数 B 期中)**.** (1) 计算定积分 $\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$;

(2) 计算抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 在 $(0,0)$ 到 $(1,1/2)$ 之间的曲线弧长;

(3) 给定奇数 $n \geqslant 3$, 设 n 叶玫瑰线由极坐标方程 $r = \sin n\theta$ 给出, 求其围成的区域

面积.

解答. (1) 我们有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}\sin x = \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big|_0^1 = \frac{\ln 2}{2}.$$

(2) 见例6.19.

(3) 见例6.19

□

例 7.7 (2022 高数 A 期中). 设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数. 对 $x\in[a,b]$, 令

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

证明:

(1) $F(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数;

(2) $F(x)$ 是 (a,b) 上的可导函数且 $F'(x)=f(x)$.

解答. 此题即为微积分基本定理, 证明可直接使用积分中值定理或者关于定积分的不等式估计. 严格的书写过程可参见《高等数学》教材 134 页定理 2. □

例 7.8 (2020 高数 B 期中). 求导数 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^3+1}^{2^x}\frac{\sin t}{t^4+2}\,\mathrm{d}t$.

解答. 结果为 $\frac{2^x\ln 2\sin 2^x}{2^{4x}+2} - \frac{3x^2\sin(x^3+1)}{(x^3+1)^4+2}$. □

例 7.9 (2022 高数 B 期中). 求不定积分

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)(x-1)^5}}.$$

解答. 注意到原式可变形为

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{2}{x-1}}}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x-1}\right).$$

此时换元 $t=\sqrt[3]{1+\frac{2}{x-1}}$, 那么 $\frac{1}{x-1}=\frac{t^3-1}{2}$. 从而原积分为

$$-\int \frac{3t^2\,\mathrm{d}t}{2t} = -\frac{3}{4}t^2 + C = -\frac{3}{4}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{2}{3}} + C.$$

此题的换元可能需要尝试, 先尝试直接的 $t=\sqrt[3]{x+1}$ 或 $\sqrt[3]{x-1}$ 发不奏效后联想到需要做 $t=\sqrt[k]{\frac{ax^\ell+b}{cx^\ell+d}}$ 型换元, 见特定形式函数的不定积分中无理函数不定积分部分. □

例 7.10 (2022 高数 C 期中)**.** 计算定积分

$$\int_{-1}^{1}(1+x^7)(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

解答. 配对法, 原积分化为

$$\int_0^1\left[(1+x^7)(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+(1-x^7)(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]\mathrm{d}x=2\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

换元 $x=\sin t$, 原积分值为

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,\mathrm{d}t=\frac{3\pi}{8}.$$

最后一个积分有多种算法, 一种方法可直接参见例6.12. □

例 7.11 (2022 高数 C 期中)**.** 设 $f(x)$ 是 $[0,T]$ 上的连续函数. 证明

$$\int_0^T f(t)\left(\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2$$

解答. 令 $F(t)=\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$, 那么由 f 的连续性知 $F'(t)=f(t)$. 利用分部积分, 左式化为

$$\int_0^T F'(t)F(t)\,\mathrm{d}t=[F(t)]^2|_0^T-\int_0^T F(t)\,\mathrm{d}F(t)=[F(T)]^2-\int_0^T F'(t)F(t)\,\mathrm{d}t.$$

从而

$$\int_0^T f(t)\left(\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t=\int_0^T F'(t)F(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}[F(T)]^2=\frac{1}{2}\left(\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2$$

□

例 7.12 (2021 高数 B 期中)**.** 设 $x_1>0$, 序列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right).$$

判断该序列极限是否存在, 如果序列极限存在则求极限值.

解答. 见例2.1(3), 过程书写方式可参见例2.1(1). □

模拟练习二.

例 7.13 (2023 高数 A 期中)**.** 计算下列极限:

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!}$;

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^3}+\frac{2}{(n+2)^3}+\cdots+\frac{n}{(2n)^3}$;

(3) $\lim_{x\to+\infty}\sin((\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})\pi)$;

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\ln(n+k)-\frac{n+1}{2n}\ln n$.

解答. (1) 0.

(2) 放缩, 每一项不超过 $\frac{1+2+\cdots+n}{(2n)^3}\leqslant\frac{n(n+1)}{16n^3}$, 夹逼定理知极限为 0.

(3) $\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}\to 1$, 由 sin 的连续性知极限为 0.

(4) 见例6.2(2).

□

例 7.14 (2022 高数 B 期中)**.** 计算下列极限:

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{2n^k}\right)$;

(2) $\lim_{x\to 0}(1+\tan^2 x)^{1/\sin^2 x}$.

解答. (1) 和差化积 $|\sin x-\sin y|=2|\cos\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}|\leqslant|x-y|$. 所以

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{2n^k}\right)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^k}\leqslant\frac{1}{2n}\to 0.$$

用转化为 Riemann 和的方法知 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\sin x\,\mathrm{d}x=1-\cos 1$. 从而原极限为 $1-\cos 1$.

(2) 取对数得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\tan^2 x)}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{\sin^2 x}=1.$$

利用 e^x 的连续性知原极限为 e.

□

例 7.15 (2022 高数 B 期中)**.** (1) 令 $f(x)=x^{\sqrt{x}}$, 其中 $x>0$, 计算 $f'(x)$;

(2) 令 $f(x)=\int_0^{\sin x}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^3}}$, 其中 $|x|<\pi/2$;

(3) 计算 $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ 在 $x\neq\pm 1$ 处的 4 阶导数 $f^{(4)}(x)$.

解答. (1) $f'(x)=\frac{1}{2}x^{\sqrt{x}-1/2}(\ln x+2)$.

(2) $f'(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^3 x}}$.

(3) $f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$, 从而 $f^{(4)}(x)=\frac{1}{48}\left(\frac{1}{(x-1)^5}-\frac{1}{(x+1)^5}\right)$.

□

例 7.16 (2023 高数 A 期中)**.** (1) 计算定积分 $\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;

(2) 计算定积分 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\sin^2 x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$;

(3) 计算不定积分 $\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

解答. (1) 原积分值为

$$\int_0^1 \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t^2 = \int_0^1 2\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = 2\ln 2 - 1.$$

(2) 配对, 原积分值为

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin^2 x}{1+e^x} + \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$

(3) 方法一. 换元 $x=\tan t$ 和 $u=\sin t$, 有

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}(\tan t) = \int \frac{1}{\cos^3 t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\cos^4 t}\,\mathrm{d}(\sin t) \\ &= \int \frac{1}{(1-u^2)^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \int \frac{1}{4(1+u)^2} + \frac{1}{4(1-u)^2} + \frac{1}{4(1+u)} + \frac{1}{4(1-u)}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-u} - \frac{1}{1+u} + \ln(1+u) - \ln(1-u)\right] + C \\ &= \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+1} + \ln(\sqrt{1+x^2}+x)\right] + C.\end{aligned}$$

方法二. 此题更快的做法是采用双曲函数换元 $x=\sinh t$. 那么原积分为

$$\int \cosh^2 t\,\mathrm{d}t = \int \frac{\cosh 2t + 1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sinh 2t + 2t}{4} + C = \frac{\sinh t\cdot\cosh t + t}{2} + C.$$

带入 $\sinh t = x, \cosh t = \sqrt{1+x^2}$ 和 $t=\ln(\sqrt{1+x^2}+x)$ 即可.

□

例 7.17 (2020 高数 C 期末)**.** 设 f 是区间 (A,B) 上的连续函数, 证明对任意 (A,B) 内的两点 $a<b$ 都有

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\mathrm{d}x = f(b)-f(a).$$

解答. 见例6.4. □

例 7.18 (2020 高数 B 期中)**.** 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的可导函数且 $f'(x)$ 连续, 证明对于任意 $x\in[0,1]$ 都有

$$|f(x)| \leqslant \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t + \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

解答. 见例6.24. □

例 7.19 (2020 高数 B 期中). 设函数 $f:[a,b]\to[a,b]$ 满足 $|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|$ 对任意 $x,y\in[a,b]$ 成立. 给定 $x_1\in[a,b]$ 并构造数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+f(x_n))$. 证明 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 极限存在.

解答. 此题基本纳入例2.1的框架, 但具体细节上稍有差异, 现给出本题的一个证明概要.

令 $g(x)=\frac{1}{2}(x+f(x))$, 那么 $g(x)$ 也是区间 $[a,b]$ 到自身的函数. 同时对任意 $x>y$ 有

$$g(x)-g(y)=\frac{1}{2}[(x-y)+(f(x)-f(y))]\geqslant\frac{1}{2}[(x-y)-(x-y)]\geqslant 0.$$

从而 $g(x)$ 是一个单调递增的函数. 注意到 $x_{n+1}=g(x_n)$, 我们分为如下三种情况:

- 如果 $x_2>x_1$, 那么可以归纳法证明 $x_{n+1}=g(x_n)\geqslant g(x_{n-1})=x_n$. 从而 $\{x_n\}$ 是一个单调递增序列且有上界 b, 从而 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 极限存在;
- 如果 $x_2<x_1$, 那么可以归纳法证明 $x_{n+1}=g(x_n)\leqslant g(x_{n-1})=x_n$. 从而 $\{x_n\}$ 是一个单调递减序列且有下界 a, 从而 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 极限存在;
- 如果 $x_2=x_1$, 那么序列为常值从而极限存在.

□

注 7.20 此题虽然可以证明 f 的连续性以及利用介值定理证明 f 存在不动点, 但这些是本题证明中不需要的. 因为该序列有自然的下界 a 和上界 b, 从而我们并不需要利用不动点来辅助证明序列的有界性, 这是此题相较于例2.1更简单的地方.

例 7.21 (2020 高数 B 期中). 给定正整数 m, 令函数

$$f(x)=\begin{cases}x^m\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

求 $f'(x)$ 和 $f''(x)$. 并求出使得 $f''(x)$ 连续的 m.

解答. 当 $m=1$ 时 $f(x)$ 在 0 处不可导, 当 $m\geqslant 2$ 时,

$$f'(x)=\begin{cases}mx^{m-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{m-2}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

当 $m=2,3$ 时 $f'(x)$ 在 0 处不可导, 当 $m\geqslant 4$ 时,

$$f''(x)=\begin{cases}m(m-1)x^{m-2}\sin\dfrac{1}{x}-2(m-1)x^{m-3}\cos\dfrac{1}{x}-x^{m-4}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

当 $m\geqslant 5$ 时 $f''(x)$ 连续. □

其他练习题.

例 7.22 (2023 高数 B 期中)**.** (1) 证明对 $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ 都有

$$-1 < \frac{4\sin x}{3+\sin^2 x} < 1.$$

(2) 对 $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ 求 $f'(x)$, 其中函数 $f(x)$ 为

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{4\sin x}{3+\sin^2 x}\right).$$

(3) 证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4\cos^2 x + \sin^2 x}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{9}{4}\cos^2 x + 2\sin^2 x}}.$$

解答. 见例6.9. □

例 7.23 (2020 高数 B 期中)**.** 令 $f(x), g(x)$ 是两个 $[0,1]$ 上的连续函数, 且满足

$$f(0) = g(0), \quad \sin f(1) = \sin g(1), \quad \cos f(1) = \cos g(1),$$

并且对任意 $x \in [0,1]$ 都有

$$(\cos f(x) + \cos g(x))^2 + (\sin f(x) + \sin g(x))^2 \neq 0.$$

证明 $f(1) = g(1)$.

解答. 根据第一个条件我们可以知道 $f(1) - g(1) = 2k\pi$, 其中 k 为一个正整数. 现在假设 $k \neq 0$ 我们导出矛盾. 注意到 $f(x) - g(x)$ 为连续函数且 $f(0) - g(0) = 0$. 如果 $k > 0$, 由介值定理可以找到 $x_0 \in [0,1]$ 使得 $f(x_0) - g(x_0) = \pi$. 此时

$$\cos f(x_0) + \cos g(x_0) = 0, \quad \sin f(x_0) + \sin g(x_0) = 0$$

与第二个条件矛盾. 类似地, 如果 $k < 0$, 可以找到 $x_0 \in [0,1]$ 使得 $f(x_0) - g(x_0) = -\pi$, 亦矛盾. 从而 $f(1) = g(1)$. □

例 7.24 (2020 高数 A 期中)**.** 求下列极限:

(1) $\lim_{x\to 0+0} x^x$;

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x+\tan x}$;

(3) $\lim_{n\to\infty} \cos\frac{a}{2} \cdot \cos\frac{a}{4} \cdots \cos\frac{a}{2^n}$, 其中 $a \in (0,1)$;

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

解答. (1) 见例3.2.

(2) 极限为

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+\tan x}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}=\frac{1}{6}.$$

(3) 结果为 $\frac{\sin a}{a}$, 见例1.21(2).

(4) 取对数得到

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\ln 2+\sum_{k=1}^{n}\ln k-n\ln n\right).$$

由 Riemann 和技巧可知, 对任意 $\gamma\in(0,1)$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=[\gamma n]}^{n}\ln k-n\ln n\right)=\int_{\gamma}^{1}\ln x\,\mathrm{d}x=(x\ln x-x)|_{\gamma}^{1}=(\gamma-1)-\gamma\ln\gamma.$$

由于 $\lim_{\gamma\to 0+0}(\gamma-1)-\gamma\ln\gamma=-1<-\ln 2$, 我们可以选取 $\gamma_0>0$ 使得 $(\gamma_0-1)-\gamma_0\ln\gamma_0<-\ln 2$. 由于 $\ln k\leqslant\ln n$ 对 $k<[\gamma_0 n]$ 成立, 从而

$$n\ln 2+\sum_{k=1}^{n}\ln k-n\ln n\leqslant n\ln 2+\sum_{k=[\gamma_0 n]}^{n}\ln k-n\ln n\to-\infty.$$

由此知原极限为 0.

注 7.25 本题中选取 $\gamma>0$ 是为了规避 $\ln x$ 在无界处的积分, 算是一种放缩技巧. 而原题中的 2 可以替换为任意一个小于 e 的正实数, 我们总可以选取适当的 γ_0 来证明极限为 0. 事实上, 我们有**Stirling 公式**

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\cdot\frac{n^n}{e^n}.$$

□

例 7.26 (2020 高数 A 期中). (1) 设序列 $\{x_n\}$ 满足对任意正整数 k 都有

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+k}-x_n)=0,$$

问序列 $\{x_n\}$ 是否收敛?

(2) 设序列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty}x_n=l$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(x_1+2x_2+\cdots+nx_n)=\frac{l}{2}.$$

解答. (1) 不一定收敛. 考虑 $x_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$. 那么对固定的 k 都有 $x_{n+k}-x_n\leqslant\frac{k}{n}\to 0$. 但 $\{x_n\}$ 发散.

(2) 利用序列的有界性和序列收敛性的定义直接证明, 可完全类比例1.10的证明方法.

□

例 7.27 (2020 高数 A 期中)**.** (1) 给定 $a > 0$, 令 $f(x)$ 是区间 $[0, 2a]$ 上的连续函数满足 $f(0) = f(2a)$. 证明存在 $x_0 \in [0, a]$ 使得 $f(x_0) = f(x_0 + a)$.

(2) 是否存在函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是局部无界的, 即对任意 $x \in \mathbb{R}$ 和任意 $\varepsilon > 0, M > 0$, 都存在 $y \in \mathbb{R}$ 满足 $|y - x| < \varepsilon$ 且 $|f(y)| > M$?

解答. (1) 考虑连续函数 $g(x) = f(x) - f(x + a)$. 那么

$$g(0) = f(0) - f(a) = -(f(a) - f(2a)) = -g(a).$$

由介值定理可知存在 x_0 使得 $g(x_0) = 0$.

(2) 存在. 考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} q, & x = p/q \in \mathbb{Q} \text{ 且 } p, q \text{ 互质}; \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

利用有理数集在实数集中的稠密性即可.

□

例 7.28 (2020 高数 A 期中)**.** 给定闭区间 $[a, b]$, 设 $f : [a, b] \to [a, b]$ 为一个函数. 给定 $x_1 \in [a, b]$, 定义数列 $x_{n+1} = f(x_n)$. 假设 $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$, 问极限 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 是否存在?

解答. 不一定存在. 只需要先随意选取一个两两不同的序列满足 $x_{n+1} - x_n \to 0$ 且 x_n 不收敛, 例如让序列 x_n 在 $[0, 1]$ 内来回震荡, 但步长趋于 0. 然后我们选取函数 f 满足 $f(x_n) = x_{n+1}$ 即可.

一种显式的构造是将 $(0, 1)$ 上的所有有理数选取出来, 规定

$$f\left(\frac{\ell}{2k-1}\right) = \frac{\ell+1}{2k-1}, \quad \forall 1 \leqslant \ell \leqslant 2k-3;$$

$$f\left(\frac{2k-2}{2k-1}\right) = \frac{2k-1}{2k};$$

$$f\left(\frac{\ell}{2k}\right) = \frac{\ell-1}{2k}, \quad \forall 2 \leqslant \ell \leqslant 2k-1;$$

$$f\left(\frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2k+1}.$$

□

注 7.29 在不假设 f 的连续性的情况下, 函数 f 在此题目中几乎不起到任何限制条件. 此题原始版本应该要假设 f 的连续性的, 再次情形下此题的结论是肯定的. 但证明需要用到一些数学分析的内容 (早年的《高等数学 A》是教授数学分析的), 我们在此给出证明概要:

由于数列 $\{x_n\}$ 有界, 其具有收敛子列. 为证明数列本身收敛, 我们只需证明其任何一个收敛子列的极限均相同. 首先我们证明 $\{x_n\}$ 的任何一个收敛子列的极限均

为 $f(x)$ 的不动点. 假设 $\{x_{n_k}\}$ 为一个收敛子列且 $x_{n_k} \to \alpha$. 由函数的连续性知

$$x_{n_k+1} = f(x_{n_k}) \to f(\alpha).$$

但另一方面 $(x_{n_k+1} - x_{n_k}) \to 0$, 从而知 $f(\alpha) = \alpha$.

现在假设 $\{x_{n_k}\}$ 和 $\{x_{n'_k}\}$ 为任意两个收敛子列, 他们的极限分别为 α, β 且不妨假设 $\alpha \leqslant \beta$. 注意到 $(x_{n+1} - x_n) \to 0$, 从而 $[\alpha, \beta]$ 中的任何一个数都是 $\{x_n\}$ 中某个子列的极限. 进而由之前的推理知对任意 $x \in [\alpha, \beta]$ 都有 $f(x) = x$.

但此时如果序列中一项 $x_n \in [\alpha, \beta]$, 那么将导致对所有 $m \geqslant n$ 均有 $x_m = x_n$, 从而序列收敛. 于是我们可不妨设该序列中任何一项均不在 $[\alpha, \beta]$ 中. 但如果 $\alpha < \beta$, 那么任何一个数 $x \in (\alpha, \beta)$ 就不可能成为该序列子列的极限. 与前述讨论矛盾.

由此我们证明了 $\{x_n\}$ 的任何两个收敛子列的极限相同, 从而 x_n 收敛.

§8. 微分中值定理

我们在研究定积分的时候, 曾经对连续函数证明过积分中值定理 (定理6.23): 对任何闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$, 总存在 $\xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\cdot(b-a).$$

如果我们令 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 并将关注对象从 f 变成 F, 那么结合微积分基本定理就可以将上述结果重新翻译成

$$F(b)-F(a) = f(\xi)\cdot(b-a) = F'(\xi)\cdot(b-a),$$

或者重新写成

$$F'(\xi) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}.$$

如果我们从几何直观上看, 考虑坐标系中 $y=F(x)$ 所画出的函数图像, 那么 $F'(\xi)$ 是该图像在点 $(\xi, F(\xi))$ 处的切线斜率 (瞬时斜率), 而右侧 $\frac{F(b)-F(a)}{b-a}$ 则是连接 $(a,F(a))$ 和 $(b,F(b))$ 两点的直线斜率 (平均斜率). 这就是微分中值定理所要表达的几何含义: *在一条可微曲线上, 总能找到一点的切线平行于连接该曲线两端点的直线.*

实际上, 微分中值定理所涵盖的范围要比我们上述讨论的更广泛一些. 我们可以注意到, 上面的论述要求 F 的导数 f 在 $[a,b]$ 上是一个连续函数, 而我们曾经也提及过区间上可导的函数导数未必连续 (例4.3). 但是这个关于导数连续性的条件并不是必要的, 现在我们叙述微分中值定理 (也被称为 Lagrange 中值定理).

定理 8.1 (微分中值定理, Lagrange)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续, 在开区间 (a,b) 可导, 那么存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

微分中值定理的一个特殊形式是 Rolle 中值定理, 我们证明时也会先给出 Rolle 中值定理的证明, 然后借助这个结论来证明微分中值定理.

定理 8.2 (Rolle)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续, 在开区间 (a,b) 可导, 且满足 $f(a)=f(b)$. 那么存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f'(\xi)=0.$$

借助 Rolle 定理导出微分中值定理的方式并不困难, 但体现了一种**构造辅助函数**的重要思想. 在后续各种情形下应用微分中值定理解决问题时我们需要经常使用这一思想.

由 Rolle 中值定理推导微分中值定理. 考虑连接 $(a,f(a))$ 与 $(b,f(b))$ 两点的直线方程为

$$\ell(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a).$$

现在我们考虑函数 $g(x)=f(x)-\ell(x)$, 其满足 $g(a)=g(b)=0$. 对 $g(x)$ 使用 Rolle 中值定理可知存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$0=g'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

从而 ξ 满足要求. □

Rolle 中值定理的证明. 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为常值则结论显然成立. 不然, 由 $f(x)$ 的连续性知其在 $[a,b]$ 上能取到最大值和最小值, 从而其必然在 (a,b) 内取到其中之一. 不妨 $f(\xi)$ 取到 $f(x)$ 的最大值且 $\xi\in(a,b)$. 为说明 $f'(\xi)=0$, 我们需要用到如下 Fermat 定理. 其证明只需要利用导数的定义和极限的保号性即可, 我们在此略去.

定理 8.3 (Fermat)

如果 ξ 是 $f(x)$ 的极值点, 即在 ξ 的某个邻域 $U_\delta(\xi)$ 上恒有 $f(x)\leqslant f(\xi)$($x=\xi$ 为极大值点) 或者恒有 $f(x)\geqslant f(\xi)$($x=\xi$ 为极小值点), 那么 $f'(\xi)=0$.

□

推论 8.4

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续, 在开区间 (a,b) 可导且满足 $F'(x)\equiv 0$. 那么 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为常值函数.

解答. 如果 $f(x)$ 不为常值函数, 我们可以找到 $x_1<x_2$ 使得 $f(x_1)\neq f(x_2)$. 那么由微分中值定理知存在 $\xi\in(x_1,x_2)$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\neq 0,$$

与导数恒零矛盾. □

练习 8.5 (书习题 4.1.7)**.** 设两个函数 $f(x),g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续, 在开区间 (a,b) 可导且 $g(x)$ 在 (a,b) 内恒不为零. 如果对任意 $x\in(a,b)$ 都满足 $f'(x)g(x)=g'(x)f(x)$, 证明存在常数 k 使得 $f(x)=k\cdot g(x)$.

解答. 考虑函数 $h(x)=f(x)/g(x)$, 那么

$$h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}\equiv 0.$$

从而 $h(x)$ 为一个常数 k, 即 $f(x)=k\cdot g(x)$. □

作为微分中值定理的一个应用, 我们在此讨论 Darboux 中值定理, 即一个可导函数的导数总是具有介值性的, 这个性质我们在刚引入导数的定义时曾经有所提及.

定理 8.6 (Darboux, **书习题** 4.1.12)

设函数 $f(x)$ 在开区间 (A,B) 内可导. 对于 (A,B) 内的任意两点 $a<b$ 和任何严格介于 $f'(a),f'(b)$ 之间的实数 η, 都存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\eta$.

想法. 由于 $f'(x)$ 并不连续, 我们转而考虑两点间的斜率函数

$$T(x,y)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

根据微分中值定理, 我们只需要找到 $T(x,y)=\eta$ 即可. 而直观上, 这个函数关于两个变量都是连续的 (只要在 $x\neq y$ 的地方), 同时当 x,y 趋于 p 时 $T(x,y)$ 趋于 p 的斜率 (严格来说这并不正确, 会有例4.7(2) 的情形发生). 所以类比介值原理, 当我们让实数对 (x,y) 从 (a,a) 变动到 (b,b) 时, $T(x,y)$ 会从 $f'(a)$ 连续地变动到 $f'(b)$. 而实际上, 我们可以自己选取从 (a,a) 变动到 (b,b) 的方式, 即沿着 $(a,a)\to(a,b)\to(b,b)$ 的方式变动, 以此规避二元函数所带来的问题并保证逻辑的完整性和正确性.

解答. 根据中值定理, 存在 $\xi_0\in(a,b)$ 使得

$$f'(\xi_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

下面考虑当 $\eta\neq f'(x_0)$ 时. 根据那么此时可以假设 η 严格介于 $f'(a)$ 与 $f'(x_0)$ 之间或者严格介于 $f'(x_0)$ 与 $f'(b)$.

对于前一种情形, 我们考虑 $[a,b]$ 上的函数

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, & x\in(a,b];\\ f'(a), & x=a.\end{cases}$$

那么 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数且 $g(a)=f'(a),g(b)=f'(\xi_0)$. 从而对任意 η 严格介于 $f'(a)$ 与 $f'(x_0)$ 之间, 我们总能找到 $c\in(a,b)$ 使得 $g(c)=\eta$. 再在区间 $[a,c]$ 上对 $f(x)$ 使用微分中值定理就可以找到 $\xi\in(a,c)\subset(a,b)$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=g(c)=\eta.$$

对于后一种情形, 我们类似考虑 $[a,b]$ 上的函数

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}, & x\in[a,b);\\ f'(a), & x=b,\end{cases}$$

那么 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $g(a)=f'(\xi_0),g(b)=f'(b)$. 类似可以找到满足条件的 ξ. □

注 8.7 Darboux 定理还有一种普遍采用的标准证法, 就是考察辅助函数 $g(x)=f(x)-\eta x$, 只需找到一个 ξ 使得 $g'(\xi)=0$. 使用导数的定义可以证明: 如果 $g'(a)<0$ 且 $g'(b)>0$, 那么 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值在 (a,b) 内取到; 如果 $g'(a)>0$ 且 $g'(b)<0$, 那么 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值在 (a,b) 内取到. 最后对最值点使用 Fermat

定理即可 (定理8.3).

微分中值定理还有一个更广泛的版本是 Cauchy 中值定理:

定理 8.8 (Cauchy)
设两个函数 $f(x), g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续, 在开区间 (a,b) 可导且 $g'(x)$ 在 (a,b) 内恒不为零, 那么存在一点 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

解答. 从几何直观上, Cauchy 中值定理是针对由参数方程 $\begin{cases} x = g(t); \\ y = f(t), \end{cases}$ 给出的曲线应用微分中值定理的结果. 所以我们类比微分中值定理的证明, 考虑直线方程 ($(g(t), \ell(t))$ 的图像为直线)

$$\ell(t) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(t)-g(a)) + f(a)$$

然后考虑函数 $h(t) = f(t) - \ell(t)$, 那么 $h(a) = h(b) = 0$. 对 $h(t)$ 使用 Rolle 中值定理知存在 $\xi \in (a,b)$ 使得

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi),$$

满足要求. □

例 8.9 (Rolle 定理在无界区间的推广)**.** 设 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续, 在区间 $(a,+\infty)$ 内可导, 且满足 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$. 证明存在一点 $\xi \in (a,+\infty)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.

解答. 方法一. 为使用 Rolle 定理, 我们只需找到两个点的函数值相等即可. 如果 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 为常数, 则结论自然成立. 否则, 我们可以找到 $b \in (a,+\infty)$ 使得 $f(b) \neq f(a)$. 现在我们选取 $y_0 = [f(a)+f(b)]/2$, 那么根据介值原理, 在区间 $[a,b]$ 内存在一点 a_1 使得 $f(a_1) = y_0$.

同时, 由于 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(a)$, 从而我们可以找到 $c > b$ 使得 $|f(c) - f(a)| < |y_0 - f(a)|$. 于是 y_0 也介于 $f(b)$ 与 $f(c)$ 之间, 就可以利用介值定理在区间 $[b,c]$ 内找到一点 b_1 使得 $f(b_1) = y_0$.(这一步就是无界区间版本的介值定理).

由于 $a_1 < b < b_1$ 且 $f(a_1) = f(b_1) = y_0$, 利用 Rolle 定理知存在 $\xi \in (a_1, b_1)$ 使得 $f'(\xi) = 0$.

方法二. 回忆我们曾介绍过使用 tan 换元的方法将无界区间转换为有限区间 (见注3.10). 考虑 $x = \tan t$, 其中 $t \in [\arctan a, \pi/2)$. 令

$$g(t) = \begin{cases} f(\tan t), & t \in [\arctan a, \pi/2); \\ f(a), & t = \pi/2, \end{cases}$$

为闭区间 $[\arctan a, \pi/2]$ 上的连续函数, 且 $g(t)$ 在 $(\arctan a, \pi/2)$ 内可导并且满足

$$g'(t) = \frac{f'(\tan t)}{\cos^2 t}.$$

由于 $g(\arctan a) = g(\pi/2)$, 由 Rolle 定理知存在 $\theta \in (\arctan a, \pi/2)$ 使得 $g'(\theta) = 0$. 令 $\xi = \tan\theta$, 那么 $f'(\xi) = 0$ 成立. □

> **例 8.10** (2021 高数 B 期末)**.** 证明存在定义在全体实数且取值于 $(0,1)$ 的函数 $\theta(x)$ 使得 $\arctan x = \frac{x}{1+[x\theta(x)]^2}$.

解答. 当 $x = 0$ 时任取一个 $\theta(x) \in (0,1)$ 即可. 当 $x > 0$ 时, 我们在区间 $[0,x]$ 上对函数 arctan 使用微分中值定理, 那么存在 $\xi = \xi(x) \in (0,x)$ 使得

$$\frac{1}{1+\xi^2} = \frac{\arctan x - \arctan 0}{x - 0} = \frac{\arctan x}{x}.$$

令 $\theta(x) = \xi(x)/x$, 则 $\theta \in (0,1)$ 且满足 $\arctan x = \frac{x}{1+[x\theta(x)]^2}$. 当 $x < 0$ 时, 考虑在区间 $[x,0]$ 上对函数 arctan 使用微分中值定理, 同理可构造函数 $\theta(x)$. □

> **练习 8.11** (2023 高数 C 期中)**.** 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续, 在开区间 (a,b) 可导且满足
>
> $$f(a) = 0, \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2(b-a)}|f(x)|.$$
>
> 证明 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上恒为零.

解答. 由于 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 从而我们可以找到 $c \in [a,b]$ 使得

$$|f(c)| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

假设 $f(x)$ 不恒为零, 那么 $|f(c)| > 0$ 且 $c > a$. 现在我们在区间 $[a,c]$ 上对 $f(x)$ 使用微分中值定理, 那么存在 $\xi \in (a,c)$ 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} = \frac{f(c)}{c - a}.$$

另一方面, 我们有

$$|f'(\xi)| \leqslant \frac{1}{2(b-a)}|f(\xi)| \leqslant \frac{|f(c)|}{2(b-a)}.$$

从而得到 $c - a \geqslant 2(b-a)$, 矛盾. 从而 $f(x) \equiv 0$. □

> **注 8.12** 本题目前所给出的方法依赖不等式中的参数 $\frac{1}{2(b-a)}$, 最后导出矛盾的方式需要用到 $2(b-a) > (b-a)$. 然而事实上, 对任意 $M \geqslant 0$, 我们都可以证明满足
>
> $$f(a) = 0, \quad |f'(x)| \leqslant M|f(x)|$$
>
> 的函数恒为零 (Grönwall 不等式). 其证明方式是构造辅助函数, 即注意到 $[\ln f(x)]' = f'(x)/f(x)$, 这种方法也是本题的另一种证法. 但需要的小心是 $\ln f(x)$ 只能定义在 $f(x) > 0$ 的地方, 所以这种做法有许多逻辑细节需要处理, 其中无法避免地要使用一些数学分析的工具, 可以只作为了解. 我们下面给出其证明过程:
>
> 反证法. 假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不恒为零, 不妨设对某个 $c \in [a,b]$ 有 $f(c) \neq 0$. 因为将 $f(x)$ 换成 $-f(x)$ 并不影响条件, 我们可以假设 $f(c) > 0$. 我们目的是证明

$f(a) > 0$ 从而导出矛盾.

对于一个点 $t \in [a,c]$, 如果满足 $f(x)$ 在区间 $[t,c]$ 上均大于 0, 那么我们在区间 $[t,c]$ 上定义函数 $g(x) = \ln f(x)$. 从而 $g(x)$ 在 $[t,c]$ 上连续并且在 (t,c) 内可导, 根据条件, 对任意 $x \in [t,c]$ 都有

$$|g'(x)| = \frac{|f'(x)|}{|f(x)|} \leqslant M.$$

我们在区间 $[t,c]$ 上使用微分中值定理可知存在 $\xi \in [t,c]$,

$$\frac{|g(c)-g(t)|}{|c-t|} = |g'(\xi)| \leqslant M.$$

带入 $g(x) = \ln f(x)$, 我们得到

$$f(t) \geqslant e^{-M(c-t)} f(c) \geqslant e^{-M(c-a)} f(c).$$

我们总结上一段论述所得到的结论: 对于任意 $t \in [a,c]$, 如果 $f(x)$ 在 $x \in [t,c]$ 上恒为正, 那么 $f(x) \geqslant e^{-M(c-a)} f(c)$. 现在我们考虑下确界

$$t_0 = \inf\{\, t \in [a,c] : f(x) > 0, \quad \forall x \in [t,c]\,\}.$$

利用前面的推理知对任意 $t \in (t_0, c]$, 我们都有 $f(x) \geqslant e^{-M(c-a)} f(c)$. 利用 $f(x)$ 的连续性知 $f(t_0) \geqslant e^{-M(c-a)} f(c)$. 如果 $t_0 > a$, 那么再次利用 $f(x)$ 的连续性知存在 $\delta > 0$ 使得 $f(x)$ 在 $(t_0 - \delta, t_0]$ 上也为正, 与 t_0 的定义矛盾. 从而 $t_0 = a$, 于是 $f(a) > 0$, 亦矛盾.

注 8.13 根据上一注中我们可以看到 $f'(x)/f(x) = [\ln f(x)]'$. 在一些涉及微分中值定理的问题中, 可能需要研究一个同时包含 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的式子所具有的性质. 此时可以通过构造相应的的辅助函数 $g(x)$ 并借助对 $g(x)$ 使用微分中值定理来得到结果.

- 研究 $f(x) + f'(x)$ 时可以考虑 $g(x) = f(x)e^x$, 则 $g'(x) = [f(x) + f'(x)]e^x$;
- 研究 $f(x)f'(x)$ 时可以考虑 $g(x) = f(x)^2$, 则 $g'(x) = 2f(x)f'(x)$.
- 研究 $f'(x)/f(x)$ 时可以考虑 $g(x) = \ln f(x)$, 则 $g'(x) = f'(x)/f(x)$.

例 8.14. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续, 在开区间 (a,b) 可导且 $f(a) = f(b) = 0$. 证明存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f(\xi) + f'(\xi) = 0$.

解答. 考虑 $g(x) = f(x)e^x$, 则 $g(x)$ 也在闭区间 $[a,b]$ 连续, 在开区间 (a,b) 可导且 $g(a) = g(b) = 0$. 由 Rolle 中值定理, 存在存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $g'(\xi) = 0$. 由于 $g'(\xi) = [f(\xi) + f'(\xi)]e^{\xi}$, 从而 $f(\xi) + f'(\xi) = 0$. □

中值定理在其他类型问题中的应用

关于函数零点的问题. 中值定理的第一类应用是关于函数零点的问题. 这包含两种问题: 一种是证明函数的零点存在性, 此时就需要将函数看成一个函数的导数然后借助 Rolle 定理来证明结果; 另一种则是估计函数的零点个数, 假设函数 $f(x)$ 有 n 个零点 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, 即

$$f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_n) = 0,$$

那么在每个区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上使用 Rolle 定理就可以给 $f'(x)$ 找到 $n-1$ 个零点, 然后反复重复此过程得到 $f^{(n-1)}(x)$ 至少有一个零点, 借此估计 n 的大小.

> **例 8.15** (书习题 4.1.6)**.** 设 k 为正整数, $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 为实数. 证明方程 $c_1 \cos x + c_2 \cos 2x + \cdots + c_k \cos kx = 0$ 在区间 $(0, \pi)$ 有解.

解答. 令 $f(x) = c_1 \cos x + c_2 \cos 2x + \cdots + c_k \cos kx$. 考虑函数

$$F(x) = c_1 \sin x + \frac{c_2}{2} \sin 2x + \cdots + \frac{c_k}{k} \sin kx.$$

那么 $F'(x) = f(x)$. 由于 $F(0) = F(\pi) = 0$, 从而由 Rolle 定理知存在 $\xi \in (0, \pi)$ 使得 $F'(\xi) = f(\xi) = 0$. □

> **例 8.16.** 设 $P(x)$ 为一个 k 次多项式, 其中 k 为正整数, 证明方程 $e^x + P(x) = 0$ 至多只有 $(k+1)$ 个根.

解答. 设 $f(x) = e^x + P(x)$ 有 n 个不同的零点 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, 每个区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上使用 Rolle 定理, 那么对每个 $1 \leqslant i \leqslant n-1$ 可以找到 $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ 使得 $f'(\xi_i) = 0$. 于是 $f'(x)$ 即 $f'(x)$ 有至少 $(n-1)$ 个零点. 依次类推可知 $f^{(n-1)}$ 至少有一个零点. 但我们又注意到 $f^{(k+1)}(x) = e^x$ 没有零点, 从而 $n-1 < k+1$, 也即 $n \leqslant k+1$. □

不等式证明. 微分中值定理的另一类直接应用是辅助证明一些初等函数之间的不等式. 微分中值定理的主要应用场景为涉及多个变量的不等式, 如果我们能够凑出形如 $f(x) - f(y)$ 的项, 那么我们可以将其转化为 $f'(\xi)(x-y)$ 的方式起到简化不等式的效果. 具体使用时可以随机应变, 对使用中值定理的不同方式尝试一番, 选取较为简单可行的方式进行.

> **例 8.17** (书习题 4.1.4)**.** 证明下列不等式:
>
> (1) $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$;
>
> (2) $|\tan x - \tan y| \geqslant |x - y|$, 其中 $x, y \in (-\pi/2, \pi/2)$;
>
> (3) $\frac{b-a}{b} \leqslant \ln \frac{b}{a} \leqslant \frac{b-a}{a}$, 其中 $0 < a < b$.

解答. (1) 当 $x = y$ 时结论成立, 现在不妨设 $x < y$. 那么根据微分中值定理, 存在 $\xi \in (x, y)$ 使得

$$\left| \frac{\sin x - \sin y}{x - y} \right| = |\cos \xi| \leqslant 1.$$

(2) 当 $x=y$ 时结论成立, 现在不妨设 $x<y$. 那么根据微分中值定理, 存在 $\xi\in(x,y)$ 使得

$$\left|\frac{\tan x-\tan y}{x-y}\right|=\frac{1}{\cos^2\xi}\geqslant 1.$$

(3) 在区间 $[a,b]$ 上对函数 $\ln x$ 使用微分中值定理, 于是存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\ln\frac{b}{a}=\ln b-\ln a=\frac{b-a}{\xi}.$$

带入 $a\leqslant\xi\leqslant b$ 知原不等式成立.

□

例 8.18 (书习题 4.27)**.** 对实数 $a,b>0$, 证明不等式 $(1+a)\ln(1+a)+(1+b)\ln(1+b)\leqslant(1+a+b)\ln(1+a+b)$

解答. 考虑函数 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)$, 那么我们需要证明 $f(a)+f(b)\leqslant f(a+b)$. 在区间 $[a,a+b]$ 上对 $f(x)$ 使用微分中值定理知存在 $\xi\in(a,a+b)$ 使得

$$f(a+b)-f(a)=bf'(\xi)=b(\ln(1+\xi)+1).$$

我们希望证明右式大于等于 $(1+b)\ln(1+b)$. 首先注意到 $b\geqslant\ln(1+b)$, 我们只需要 $\ln(1+\xi)\geqslant\ln(1+b)$ 即可. 注意到 $\xi>a$, 我们只需要在最最开始不妨设 $a\geqslant b$, 那么 $\xi>b$ 就可以完成证明. □

注 8.19 此题还有一种看法, 我们在此进行解释. 实际上该结论还可以翻译为

$$f(a)+f(b)\leqslant f(0)+f(a+b).$$

其中不等式两侧的自变量满足 $a+b=(a+b)+0$. 这样的不等式实际上与函数 $f(x)$ 的凹凸性有关系 (即 $f''(x)$ 的正负). 不妨设 $a\geqslant b$, 首先利用微分中值定理, 我们可以找到 $\xi_1\in(a,a+b)$ 和 $\xi_2\in(0,b)$ 满足

$$f(a+b)-f(a)=bf'(\xi_1),\quad f(b)-f(0)=bf'(\xi_2).$$

注意到 $\xi_1>a\geqslant b>\xi_2$, 我们再在区间 $[\xi_1,\xi_2]$ 上对 $f'(x)$ 使用微分中值定理可知存在 $\xi_0\in(\xi_1,\xi_2)$

$$[f(a+b)-f(a)]-[f(b)-f(0)]=b(f'(\xi_1)-f'(\xi_2))=b(\xi_1-\xi_2)f''(\xi_0).$$

而 $f''(\xi_0)=1/(1+\xi_0)>0$, 从而原不等式成立. 从该证明可以看出本题的函数 $f(x)$ 可以换成任何一个满足 $f''(x)\geqslant 0$ 的函数 (即凸函数, 但教材上管此类函数叫凹函数, 术语习惯有差别), 而该类型不等式的一般性结论可参见Karamata 不等式.

此外, 微分中值定理还具有一类应用是求序列或函数的极限. 这基本来自 Cauchy 中值定理以及它的一个重要推论 L'Hôpital 法则. 相关例题我们将在下次展现.

§9. 微分学的应用 (一): L'Hôpital 法则及 Taylor 公式

高等数学/微积分这门学科的一个重要组成部分是求极限, 微分中值定理的几个推论可以帮助我们求出更多的极限. 此前计算极限时, 我们遇到的难以求出极限的一大类情形是不定式, 例如

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ (+\infty)-(+\infty),\ 1^{\infty},\ (+\infty)^{0},\ 0^{0},$$

等等. 本质上, 这些都可以转化为 0/0 型不定式, 例如 (但一般并不会真这么使用)

$$(+\infty)-(+\infty)=\ln\frac{e^{+\infty}}{e^{+\infty}}=\ln\frac{+\infty}{+\infty}=\ln\frac{0}{0},\qquad 1^{\infty}=e^{0\cdot\infty}=e^{0/0}.$$

而求 0/0 型不定式的极限值就相当于判断两个无穷小量之间的阶数, 对于这一类问题的极限我们在第3.i节中曾经有过讨论, 当时我们的处理方法是通过使用等价无穷小量化简. 其中的一个关键想法是将求极限的式子转化为由幂函数 x^{α} 构成的分式, 而由于 x^{α} 之间的大小关系我们是明确的, 从而我们可以比较这些小量之间的大小.

但此前受工具所限我们能得到的等价无穷小关系是比较少的, 例如

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$$

这一极限在此前是较难得到的. 这一节中我们将借由微分中值定理推导 L'Hôpital 法则来求出这种类型的极限. 特别是对于形如 $\frac{f(x)}{P(x)}$ 型函数的极限, 其中 $P(x)$ 为一个多项式, L'Hôpital 法则基本上可以帮助我们求出其极限值. 作为这类极限的应用, 我们可以用多项式来逼近大多数函数, 也称为函数**(带 Peano 余项的)Taylor 公式**, 例如

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2}).$$

此时计算 0/0 型不定式的极限就可以转化为比较分子分母的 Taylor 公式的首项. 但这也有局限性, 需要要求分子分母函数的高阶可导性. 下面我们会详细讨论这两个工具.

§9.i. L'Hôptial 法则

回忆 Cauchy 中值定理,

定理 9.1 (Cauchy)

设两个函数 $f(x),g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续, 在开区间 (a,b) 可导且 $g'(x)$ 在 (a,b) 内恒不为零, 那么存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

如果现在我们尝试计算一个 0/0 型极限

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{f(x)}{g(x)},$$

假设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在 0 的某个邻域可导, 那么上式又可以翻译成

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\lim_{x\to 0+0}\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}.$$

其中, ξ_x 是区间 $(0,x)$ 上的某个点, 依赖于 x. 注意到当 x 趋于 0 时 ξ_x 也趋于 0 (夹逼定理), 所以如果我们假设极限 $\lim_{x\to 0+0} f'(x)/g'(x)$ 存在, 那么

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0+0}\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}=\lim_{x\to 0+0}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

这就是 L'Hôpital 法则. 下面我们叙述定理的一般表述.

定理 9.2 (L'Hôpital 法则)
设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域可导 (可以是单侧邻域, 也允许 a 为无穷), 且 $g'(a)\neq 0$. 如果

a) (0/0 型) $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$, 或者

b) (∞/∞ 型) $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\infty$,

并且 $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ 极限存在, 那么

$$\lim_{x\to a} f(x)/g(x)=\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x).$$

注 9.3 L'Hôpital 法则有两个使用条件, 一个是极限本身是 0/0 型或者 ∞/∞ 型不定式, 另一个是 $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ 极限存在. 当 $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ 极限不存在时, 并不能说明 $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$ 极限也不存在. 例如

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x+\cos x}=1 \quad 但 \quad \lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1-\sin x} 不存在.$$

所以不能直接把 L'Hôpital 法则简单地理解为 $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)=\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$, 这一点需要小心.

例 9.4. 计算极限 $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$.

解答. 该极限为 0/0 型不定式, 利用 L'Hôpital 法则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}.$$

回忆等价无穷小 $1-\cos x\sim x^2/2$, 我们得到原极限为 1/6. □

注 9.5 最后一步也可以不使用等价无穷小代换, 而是继续反复使用 L'Hôpital 法则. 于是有

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}.$$

例 9.6. 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处二阶可导, 证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-2f(a+h)+f(a)}{h^2}=f''(a).$$

解答. 利用 L'Hôpital 法则, 我们有

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-2f(a+h)+f(a)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{2f'(a+2h)-2f'(a+h)}{2h}.$$

此时利用导数的定义, 我们有

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{2f'(a+2h)-2f'(a+h)}{2h}&=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+2h)-f'(a)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}\\&=2f''(a)-f''(a)=f''(a).\end{aligned}$$

□

注 9.7 此题条件并没有要求 $f(x)$ 在 a 的某个邻域内二阶可导, 所以在求第二个极限 $\lim_{h\to 0}\frac{2f'(a+2h)-2f'(a+h)}{2h}$ 时不能再次使用 L'Hôpital 法则.

对于不同的不定式, 我们可以尝试通过**取对数**、**取指数**、**通分**等方式将其转化为 $0/0$ 型或 ∞/∞ 型不定式然后使用 L'Hôpital 法则. 同时, 我们也可以借助一些换元或代数变形的方法先对求极限的式子进行一些简化处理, 目的是尽量避免使用 L'Hôpital 法则后的求导结果太过复杂. 有时需要稍微多尝试一些不同的变形, 然后选择一种较简单的方式进行后续计算.

例 9.8. 求下列函数极限:

(1) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$;

(2) $\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^{1/x^2}$;

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}-\frac{1}{\ln(1+x)}$.

解答. (1) 为方便计算, 我们换元 $y=\frac{\pi}{2}-\arctan x$, 那么 $x=\cot y$. 我们只需计算 $y\to 0+$ 时的极限. 取对数后, 我们有

$$\lim_{y\to 0+}\frac{\ln y}{\ln\cot y}=\lim_{y\to 0+}-\frac{\sin^2 y\cdot\cot y}{y}=\lim_{y\to 0+}-\frac{\sin y\cos y}{y}=-1.$$

于是原极限为 $1/e$.

(2) 取对数后, 使用 L'Hôpital 法则我们得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{2x\left(\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)}.$$

我们希望再次使用 L'Hôpital 法则以消去我们难以处理的积分项, 但此时分母为 $2x\left(\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)$ 求导后依然会剩下积分项. 所以我们将 $e^{x^2}/(2x)$ 看作分子, 将

$\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ 单独看作分母, 可以验证此时依然是一个 ∞/∞ 型不定式, 我们对此利用 L'Hôpital 法则得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}/(2x)}{\left(\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2e^{x^2}-e^{x^2}}{2x^2e^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-1}{2x^2}=1.$$

从而原极限为 e.

(3) 我们换元 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, 那么 $x=\sinh y$. 反复利用 L'Hôpital 法则得到

$$\begin{aligned}\lim_{y\to0}\frac{\frac{\ln(1+\sinh y)}{y}-1}{\ln(1+\sinh y)}&=\lim_{y\to0}\frac{y\cosh y-(1+\sinh y)\ln(1+\sinh y)}{y^2\cosh y}\\&=\lim_{y\to0}\frac{y\sinh y-\cosh y\cdot\ln(1+\sinh y)}{2y\cosh y+y^2\sinh y}\\&=\lim_{y\to0}\frac{\sinh y+y\cosh y-\sinh y\cdot\ln(1+\sinh y)-\frac{\cosh^2 y}{1+\sinh y}}{2\cosh y+4y\sinh y+y^2\cosh y}\\&=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

> **注 9.9** 这一计算过程也稍有复杂, 实际上我们可以结合等价小量的方式来简化计算. 例如使用 $\ln(1+\sinh y)\sim\sinh y$. 同时双曲函数换元在本题中也并非必须的, 可以使用等价小量来化简通分后的式子, 然后使用 L'Hôpital 法则即可. 这一类求极限的方法通常有多种计算方式, 可以只要选取一种能让自己算出来的方式即可.

□

此外, L'Hôpital 法则也可以帮助我们求序列的极限. 但这一类问题需要结合归结定理 (定理2.5) 将序列极限转化为求函数极限, 然后借助 L'Hôpital 法则求函数极限.

> **例 9.10.** 求序列极限 $\lim_{n\to\infty} n[e-(1+\frac{1}{n})^n]$.

解答. 令函数 $f(x)=\frac{e-(1+x)^{1/x}}{x}$ 和序列 $x_n=1/n$, 则原极限为 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$. 由归结定理, 只需求函数极限 $\lim_{x\to0+0} f(x)$. 由 L'Hôpital 法则, 我们有

$$\lim_{x\to0+0}\frac{e-(1+x)^{1/x}}{x}=\lim_{x\to0+0}-(1+x)^{1/x}\cdot\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}.$$

注意到 $\lim_{x\to0+0}-(1+x)^{1/x}=-e$, 而 $\lim_{x\to0+0}\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$ 依然是 $0/0$ 型不定式, 再次使用 L'Hôpital 法则得到

$$\lim_{x\to0+0}\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to0+0}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to0+0}-\frac{1}{2(1+x)^2}=-\frac{1}{2}.$$

从而原极限为 $e/2$. □

§9.ii. 带 Peano 余项的 Taylor 公式

为了理解一个函数 $f(x)$, 我们希望用最简单的多项式函数去逼近它. 如果考虑在 $x = x_0$ 附近用 n 次多项式

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

去逼近 $f(x)$, 那么一种想法是让 $P(x)$ 在 x_0 处的各阶导数与 $f(x)$ 相同 (假设 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导). 从而就得到

$$P^{(k)}(x_0) = k! \cdot a_k = f^{(k)}(x_0),$$

由此解出的多项式称为 $f(x)$**在 $x = x_0$ 处的 n 阶 Taylor 多项式**

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

使用 L'Hôpital 法则我们可以证明 Taylor 多项式在 $x \to x_0$ 时渐进意义下确实给出了 $f(x)$ 的一个很好的逼近.

定理 9.11 (带 Peano 余项的 Taylor 公式)

设 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义, 且在 x_0 处有 n 阶导数, 那么 $f(x)$ 在 x_0 的邻域上有如下展开式

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

该公式称为 $f(x)$**在 x_0 处带 Peano 余项的 Taylor 公式**, 也称**局部 Taylor 公式**.

一个特殊情形是选取 $x_0 = 0$, 此时的 Taylor 公式也称为**Maclaurin 公式**.

例 9.12 (初等函数的 Maclaurin 公式)

当 $x \to 0$ 时, 我们有如下 Maclaurin 公式:

- $e^n = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o\left(x^n\right);$
- $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o\left(x^{2n}\right);$
- $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right);$
- $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o\left(x^n\right);$
- $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o\left(x^n\right).$

上述定理说明了 Taylor 多项式 T_n 给出了在 $x = x_0$ 附近是一个 $f(x)$ 的好的逼近, 而实际上, 这一多项式还是唯一的:

定理 9.13 (局部 Taylor 公式的唯一性)
设 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义, 且在 x_0 处有 n 阶导数. 令

$$T_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的 n 阶 Taylor 多项式. 如果 n 次多项式 $P(x)$ 也满足当 $x\to x_0$ 时 $f(x)-P(x)=o((x-x_0)^n)$, 那么 $P(x)=T_n(x)$.

这一唯一性结果有着重要的意义: 当我们需要计算由两个函数 $f(x),g(x)$ 做四则运算、复合函数等操作得到的函数的 Taylor 公式时, 我们可以先分别求 $f(x),g(x)$ 的 Taylor 公式, 然后再对 Taylor 公式做相应的四则运算或复合函数操作即可. 当然这一操作的过程中需要注意余项的对应关系.

例 9.14. 求 $f(x)=\frac{1}{1+x+x^2}$ 的 Maclaurin 公式并对正整数 n 求 $f^{(n)}(0)$.

解答. 我们有 $f(x)=\frac{1-x}{1-x^3}$. 由于

$$\frac{1}{1-x^3}=\sum_{k=0}^{m}x^{3k}+o(x^{3m}),$$

从而得到 Maclaurin 公式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{m-1}(x^{3k}-x^{3k+1})+x^{3m}+o(x^{3m}).$$

对 $n=3m$ 有 $f^{(n)}(0)=n!$; 对 $n=3m+1$ 有 $f^{(n)}(0)=-n!$; 对 $n=3m+2$ 有 $f^{(n)}(0)=0$. □

例 9.15. 令 $f(x)=(1+\beta x^m)^\alpha$, 其中 α,β 为实数, m 为整数. 对正整数 n, 求 $f^{(n)}(0)$.

这一结论我们曾在注4.18提及过, 现在可以利用 Maclaurin 公式给出严谨的证明过程.

解答. 令 $g(x)=(1+x)^\alpha$, 我们有 $g(x)$ 的 k 阶 Maclaurin 公式

$$g(x)=(1+x)^\alpha=\sum_{\ell=0}^{k}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\ell+1)}{\ell!}x^\ell+o(x^k).$$

那么我们得到 $f(x)$ 的 km 阶 Maclaurin 公式为

$$f(x)=g(\beta x^m)=\sum_{\ell=0}^{k}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\ell+1)}{\ell!}(\beta x^m)^\ell+o(x^{km}).$$

由 Maclaurin 公式的唯一性我们得到

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n\text{不是 } m \text{ 的倍数;}\\ \dfrac{(km)!}{k!}\beta^k\cdot\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1), & n=km.\end{cases}$$

□

例 9.16. 求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$.

解答. 我们需要将分子的 Maclaurin 公式展开到 x^3 项. 注意到

$$(\cos x)^{\sin x}=e^{\sin x\cdot\ln\cos x}=1+\sin x\cdot\ln\cos x+o(\sin x\cdot\ln\cos x).$$

注意到

$$\sin x\cdot\ln\cos x=[x-o(x)][(\cos x-1)+o(\cos x-1)]=[x-o(x)]\left[-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]=-\frac{x^3}{2}+o(x^3).$$

从而

$$(\cos x)^{\sin x}=1-\frac{x^3}{2}+o(x^3),$$

由此知原极限为 1/2. □

注 9.17 此题其实只用等价小量就可以解决, 因为此题中只用到了 Taylor 公式的第一项. 但实际解决问题时, 使用 Taylor 公式往往更加保险, 因为我们可以根据需要浮动地选择展开到合适的一项, 也能避免错误地使用等价小量带来的错误计算结果。

例 9.18. 求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

解答. 只需将分子的 Maclaurin 公式展开到 x^4 项, 我们有

$$\begin{aligned}\cos(\sin x)-\cos x&=1-\frac{1}{2!}(\sin x)^2+\frac{1}{4!}(\sin x)^4-\left(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4\right)+o(x^4)\\&=\frac{1}{2}\left(x^2-(\sin x)^2\right)+o(x^4)\\&=\frac{1}{2}(x+\sin x)(x-\sin x)+o(x^4)\\&=(x+o(x))\left(\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)+o(x^4)=\frac{1}{6}x^4+o(4).\end{aligned}$$

从而原极限为 1/6. □

例 9.19. 求序列极限: $\lim_{n\to\infty}n^2\ln\left(n\sin\frac{1}{n}\right)$.

解答. 令 $x_n=\frac{1}{n}$ 和函数

$$f(x)=\frac{\ln(\frac{\sin x}{x})}{x^2}.$$

那么原序列转化为 $f(x_n)$, 从而利用归结定理我们只需计算函数极限 $\lim_{x\to 0+0}f(x)$. 我们只需将分子的 Maclaurin 公式展开到 x^2 项. 我们有

$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)-o\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)=-\frac{1}{6}x^2+o(x^2).$$

从而原极限为 $-1/6$. □

§10. 微分学的应用 (二): Taylor 公式和函数的性质

§10.i. 带 Lagrange 余项的 Taylor 公式

回忆上一节我们已经叙述过在 $x = x_0$ 处带 Peano 余项的 Taylor 公式

$$f(x) = T_n(x) + o((x-x_0)^n) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n).$$

但上述公式只告诉我们在极限意义下 $T_n(x)$ 可以逼近 $f(x)$, 也就是说当 x 趋于 x_0 时, $f(x) - T_n(x)$ 是一个相对于 $(x-x_0)^n$ 的高阶小量. 如果对于一个给定的 $x \neq x_0$, 我们无法估计 $f(x)$ 和 $T_n(x)$ 具体相差多少. 为了得到余项的具体形式, 我们引入带 Lagrange 余项的 Taylor 公式.

定理 10.1 (带 Lagrange 余项的 Taylor 公式)
设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内 $n+1$ 阶可导, 则对于 (a,b) 中的任意一点 x_0 及任意 $x \in (a,b)$, 有

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中 ξ 是介于 x_0 与 x 之间的一点.

可以发现这一 Taylor 公式在 $n = 0$ 时的情形就是微分中值定理. 同时这一 Taylor 公式的要求更强一些, 为了明确给出余项的大小, 需要 $f(x)$ 在一个区间上有 $n+1$ 阶导数.

例 10.2 (初等函数带 Lagrange 余项的 Taylor 公式)
当 $x \to 0$ 时, 我们有如下带 Lagrange 余项的 Taylor 公式:

- $e^n = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$;
- $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{\cos\xi}{(2n+1)!}x^{2n+1}$;
- $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{\cos\xi}{(2n+2)!}x^{2n+2}$;
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\xi)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$;
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$.

例 10.3. 设 $f(x)$ 在 a 的某个邻域 $U_\delta(a)$ 内具有连续的二阶导数且 $f''(a) \neq 0$. 对任意 $0 < |h| < \delta$, 根据微分中值定理, 存在 $\theta(h) \in (0,1)$ 使得

$$f'(a + h\theta(h)) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

证明 $\lim_{h\to 0}\theta(h) = \frac{1}{2}$.

解答. 我们的想法就是同时考虑左右两式带 Lagrange 余项的 Taylor 公式, 然后对比系数关于 h 的各幂次的系数. 左式我们可以考虑 $f'(x)$ 在 a 处的 Taylor 公式, 就有

$$f'(a+h\theta(h)) = f'(a) + f''(\xi_1(h))h\theta(h),$$

其中 $\xi_1(h)$ 介于 a 与 $a+h\theta(h)$ 之间. 右式直接考虑 $f(x)$ 在 a 处的 Taylor 公式, 就有

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) + \frac{f''(\xi_2(h))}{2}h,$$

其中 $\xi_2(h)$ 介于 a 与 $a+h$ 之间. 根据 $f''(x)$ 的连续性, 我们有

$$\lim_{h\to 0} f''(\xi_1(h)) = \lim_{h\to 0} f''(\xi_2(h)) = f''(a).$$

联立之前的等式, 我们得到 $\theta(h) = f''(\xi_2(h))/2f''(\xi_1(h))$. 由于 $f''(a)\neq 0$, 从而我们有

$$\lim_{h\to 0}\theta(h) = \lim_{h\to 0}\frac{f''(\xi_2(h))}{2f''(\xi_1(h))} = \frac{f''(a)}{2f''(a)} = \frac{1}{2}.$$

□

例 10.4 (书习题 4.32)**.** 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内二阶可导, 如果存在 $A,B\geqslant 0$ 使得对所有 $x>0$ 都有

$$|f(x)|\leqslant A, \quad |f''(x)|\leqslant B.$$

证明对所有 $x>0$ 都有 $|f'(x)|\leqslant 2\sqrt{AB}$.

解答. 对任意 $x>0$ 和 $h>0$, 根据带 Lagrange 余项的 Taylor 公式, 存在 $\xi\in(x,x+h)$ 使得

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2$$

于是

$$|f'(x)| = \frac{1}{h}\left|f(x+h) - f(x) - f''(\xi)\frac{h^2}{2}\right| \leqslant \frac{2A}{h} + \frac{hB}{2}.$$

令 $h = 2\sqrt{A/B}$, 那么我们得到 $|f'(x)|\leqslant 2\sqrt{AB}$. □

例 10.5. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 可导, 且存在有限极限 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, 那么

(1) 举例说明极限 $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ 未必成立;

(2) 如果额外假设 $f(x)$ 具有有界的二阶导数, 证明 $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

解答. (1) 我们可以让 $f(x)\leqslant \frac{1}{x}$ 保证 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 存在. 但同时可以让 $f(x)$ 的震荡很快, 例如选取 $f(x) = \sin x^3/x$. 那么

$$f'(x) = \frac{3x^3\cos x^3 - \sin x^3}{x^2}$$

是无界的.

(2) 对 $x>0$ 和 $h>0$, 根据带 Lagrange 余项的 Taylor 公式, 存在 $\xi\in(x,x+h)$ 使得

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(\xi)}{2}h^2.$$

令 $M>0$ 使得 $|f''(y)|\leqslant M$ 对所有 $y>0$ 均成立, 那么

$$|f'(x)|\leqslant\frac{1}{h}\left(|f(x+h)-f(x)|+\frac{h^2}{2}|f''(\xi)|\right)\leqslant\frac{1}{h}(|f(x+h)-f(x)|)+\frac{hM}{2}.$$

我们可以通过选取 h 很小让第二项很小, 此时再根据极限 $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ 收敛选取 x 充分大让第一项也很小.

具体来说, 对任意 $\varepsilon>0$, 首先选取 $h=\varepsilon/M$, 那么 $hM/2=\varepsilon/2$. 设极限 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=l$, 那么可以选取 $A>0$ 使得当 $x>0$ 时, $|f(x)-l|<\varepsilon^2/4M=h\varepsilon/4$. 那么当 $x>A$ 时, $|f(x+h)-f(x)|\leqslant|f(x+h)-l|+|f(x)-l|\leqslant h\varepsilon/2$, 从而

$$|f'(x)|\leqslant\frac{h\varepsilon}{2h}+\frac{hM}{2}=\varepsilon.$$

也就证明了 $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

□

§10.ii. 函数的性质

导数的一个重要作用是可以帮助我们认识函数, 并且能通过函数的一些基本性质来大致想象函数的几何形状, 增加我们对函数的直觉. 函数几个主要的基本属性包括

- 单调性;
- 凹凸性;
- 极值点与最值点.

借助求导来研究这些问题实际上在高中就已经进行过, 但许多结论当时缺乏严谨的证明和叙述. 但利用微分中值定理等工具我们能够更严谨地讨论函数的这些性质, 下面我们将一一讨论他们.

单调性. 给定区间 I 和在 I 上有定义的函数 $f(x)$, 我们称 $f(x)$ 在 I 上是**单调递增 (递减)**的, 如果对任意 $x<y$ 都有 $f(x)\leqslant f(y)$ $(f(x)\geqslant f(y))$. 称 $f(x)$ 在 I 上是**严格单调递增 (递减)**的, 如果对任意 $x<y$ 都有 $f(x)<f(y)$ $(f(x)>f(y))$.

利用微分中值定理, 我们可以证明

命题 10.6

给定区间 I 和在 I 上有定义的函数 $f(x)$, 假设 $f(x)$ 在 I 上可导. 则 $f(x)$ 在 I 上是单调递增 (递减) 的当且仅当对任意 $x\in I$ 都有 $f'(x)\geqslant 0$ $(f'(x)\leqslant 0)$. 进一步, 如果对任意 $x\in I$ 都有 $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$ 那么 $f(x)$ 在 I 上是严格单调递增 (递减) 的.

注 10.7 严格单调递增 (递减) 是无法推出 $f'(x)$ 恒正 (恒负) 的, 例如 $f(x)=x^3$ 是严格单调递增的但是 $f'(0)=0$. 实际上, 如果额外假设 $f'(x)$ 是连续的, 那么可以证明严格单调函数的导数零点都是孤立的, 但是对一般情形的刻画还是比较困难的.

注 10.8 但是在没有导数连续性的条件下, 在一点处的导数信息 $f'(a)>0$ 是无法得到 $f(x)$ 在 a 的某个邻域 $U_\delta(a)$ 内是单调递增的, 例如

$$f(x)=\begin{cases} x+2x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

我们有 $f'(0)=1>0$, 但 $f'(x)$ 在 0 的任何邻域内都能取到负值, 所以 $f(x)$ 不在 0 的任何邻域内单调增.

例 10.9. 给定正整数 n, 证明方程 $x^{n+2}-2x^n-1=0$ 只有唯一正根.

解答. 令 $f(x)=x^{n+2}-2x^n-1$, 首先注意到 $f(0)=-1$ 和 $f(2)=2^{n+1}-1>0$, 从而 $f(x)=0$ 有正根. 同时注意到

$$f'(x)=(n+2)x^{n+1}-2nx^{n-1}.$$

令 $\xi=\sqrt{2n/(n+2)}$, 则当 $0\leqslant x\leqslant\xi$ 时 $f(x)$ 单调递减; 当 $x\geqslant\xi$ 时 $f(x)$ 单调递增, 并且当 $x>\xi$ 时 $f(x)$ 严格单调递增. 结合 $f(0)<0$ 可知 $f(x)=0$ 仅有一个根. □

极值点与最值点. 一个点 x_0 称为 $f(x)$ 的**极大 (小) 值点**如果存在 x_0 的某个邻域 $U_\delta(x_0)$ 使得 $f(x)$ 在该邻域上有定义且对任意 $x\in U_\delta(x_0)$ 都有 $f(x)\leqslant f(x_0)$ ($f(x)\geqslant f(x_0)$), 此时我们称 $f(x_0)$ 为该函数的一个**极大 (小) 值**. 使用这个定义我们可以重新叙述证明 Rolle 中值定理时使用到的 Fermat 定理.

定理 10.10 (Fermat)

如果 x_0 是 $f(x)$ 的极值点且 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 那么 $f'(x_0)=0$.

注 10.11 但满足 $f'(x_0)=0$ 的点未必是极值点, 例如 $f(x)=x^3$ 在 $x=0$ 处.

但如果额外假设 $f(x)$ 在 x_0 处有二阶导数, 那么其二阶导数的符号可以给出一个判断极值点的充分条件:

命题 10.12

如果 $f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)>0$, 那么 $f(x)$ 是极小值点; 如果 $f'(x_0)=0$ 且 $f''(x_0)<0$, 那么 $f(x)$ 是极大值点.

这一命题的本质是考虑 $f(x)$ 在 x_0 处的 Taylor 公式. 更一般地, 如果 $f''(x_0)$ 依然等于零且 $f(x)$ 在 x_0 处高阶可导, 我们依然可以使用 Taylor 公式给出判定极值点的充分条件.

与极值点相关的一个概念是最值点. 给定集合 I 和 I 上有定义的函数 $f(x)$, 称 $x_0 \in I$ 为 $f(x)$ 在集合 I 上的**最大 (小) 值点**如果对任意 $x \in I$ 都有 $f(x) \leqslant f(x_0)$ ($f(x) \geqslant f(x_0)$), 此时我们称 $f(x_0)$ 为该函数的一个**最大 (小) 值**.

极值点与最值点的对比. 最值点需要规定自变量的取值范围 I, 而极值点并不需要. 极值点只是函数在一个点附近的局部性质, 而最值点是一个整体的性质. 所以极值点不一定是函数的最值点. 反过来, 如果 x_0 是 $f(x)$ 在 I 上的最值点且 x_0 的某个邻域 $U_\delta(x_0)$ 包含在 I 中, 则 x_0 一定也是极值点.

> **例 10.13.** 给定 $a, b > 0$. 证明对不同的参数 λ, 函数 $f(x) = a^2e^{\lambda x} + b^2e^{-\lambda x}$ 存在相同的极小值.

解答. 我们有

$$f'(x) = \lambda a^2e^{\lambda x} - \lambda b^2e^{-\lambda x}.$$

如果 $x = x_0$ 为极值点, 那么 $f(x_0) = 0$, 解出 $x_0 = (\ln b - \ln a)/\lambda$. 计算二阶导得到

$$f''(x_0) = \lambda^2a^2e^{\lambda x_0} + \lambda^2b^2e^{-\lambda x_0} > 0,$$

从而 $x = x_0$ 确为极小值点. 带入得到极小值为

$$f(x_0) = a^2e^{\ln b - \ln a} + b^2e^{\ln a - \ln b} = 2ab.$$

□

> **例 10.14** (2020 高数 B 期末)**.** 求定义域为 $[-1, 1]$ 的函数 $f(x) = x^{2/3} - (x^2 - 1)^{1/3}$ 的所有极值点与最值点.

解答. 首先我们求导数 $f'(x)$, 但需要注意的是 $x = 0, \pm 1$ 时导数是不存在的. 所以对 $x \neq 0, \pm 1$ 时, 我们有

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{2x}{3}(x^2 - 1)^{-\frac{2}{3}}.$$

解方程 $f'(x) = 0$, 即 $(x^2 - 1)^{2/3} = x^{4/3}$. 解出 $x = \pm\sqrt{2}/2$.

由于端点 ± 1 的任何邻域不在定义域中, 所以可能的极值点只能是 $\pm\sqrt{2}/2$ 和 0. 注意到当 $x \in (-1, -\sqrt{2}/2)$ 时 $f'(x) > 0$, 当 $x \in (-\sqrt{2}/2, 0)$ 是 $f'(x) < 0$, 从而 $-\sqrt{2}/2$ 是 $f(x)$ 的极大值点. 类似地, $\sqrt{2}/2$ 也是 $f(x)$ 的极大值点. 对于 $x = 0$ 时, 由于 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续且在 $(-\sqrt{2}/2, 0) \cup (0, \sqrt{2}/2)$ 上可导. 从而由微分中值定理可知 $f(x)$ 在 $(-\sqrt{2}/2, 0]$ 上单调递减, 在 $[0, \sqrt{2}/2)$ 上单调递增, 从而 $x = 0$ 为极小值点. 综上, 我们有 $x = \pm\sqrt{2}/2$ 是极大值点, $x = 0$ 是极小值点.

对于最值点, 我们则需要考虑五个点 $x = \pm 1, \pm\sqrt{2}/2, 0$. 我们有

$$f(\pm 1) = f(0) = 1, \quad f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^{\frac{2}{3}}.$$

结合 $f(x)$ 在区间 $[-1, -\sqrt{2}/2]$ 上单调递增, 在 $[-\sqrt{2}/2, 0]$ 上单调递减和 $f(x)$ 为偶函数可知, $x = \pm 1, 0$ 均为最小值点, $x = \pm\sqrt{2}/2$ 为最大值点. □

例 10.15. 考虑闭区间 $[a,b]$ 上的常微分方程边值问题

$$f''(x)+p(x)f'(x)+q(x)f(x)=r(x), \quad f(a)=A, f(b)=B,$$

其中, A,B 为给定实数, $p(x),q(x),r(x)$ 为给定函数, 且 $p(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为负. 证明该方程至多有一个解 $f(x)$.

解答. 假设有两个解 $f_1(x),f_2(x)$, 令 $g(x)=f_1(x)-f_2(x)$, 那么 $g(x)$ 满足方程

$$g''(x)+p(x)g'(x)+q(x)g(x)=0, \quad g(a)=g(b)=0.$$

我们来证明 $g(x)\equiv 0$. 反证法, 如果 $g(x)$ 不恒为 0, 那么 $g(x)$ 必有正的最大值或有负的最小值. 不妨设 x_0 为 $g(x)$ 的最大值点且 $g(x_0)>0$, 由于 $x_0\in(a,b)$ 从而 x_0 必然也是极大值点. 此时有 $g'(x_0)=0$, 从而

$$g''(x_0)=-q(x_0)g(x_0)>0.$$

这说明 x_0 是一个极小值点, 矛盾. □

凹凸性. 书上给出了可导函数凹凸性的定义, 我们在此叙述对一般函数凹凸性的定义, 可以验证对可导函数这两者是一致的. 同时, 我们此处依然使用上凸函数和下凸函数的术语, 因为教材中的术语凸函数和凹函数与英文语境中习惯使用的凹凸函数是相反的.[1]

定义 10.16. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 称 $f(x)$ 为 I 上的**下凸函数**如果对任意 $x_1,x_2\in I$ 以及实数 $\lambda\in(0,1)$ 都有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

称 $f(x)$ 为 I 上的**上凸函数**如果对任意 $x_1,x_2\in I$ 以及实数 $\lambda\in(0,1)$ 都有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geqslant \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

函数的凹凸性与函数的二阶导有密切的联系, 这一结论的证明我们暂且略去.

定理 10.17

设 $f(x)$ 在区间 I 上有二阶导数, 则 $f(x)$ 是 I 上的下凸函数当且仅当对任意 $x\in I$ 都有 $f''(x)\geqslant 0$; 则 $f(x)$ 是 I 上的上凸函数当且仅当对任意 $x\in I$ 都有 $f''(x)\leqslant 0$.

定理 10.18 (Jensen 不等式)

设 f 为区间 I 上的二阶可导下凸函数, 那么对任意 $x_1,\cdots,x_n\in I$ 和满足条件

[1]英文语境中 convex function 的定义对应我们定义的下凸函数, 然而教材称此类函数为凹函数; concave function 的定义对应我们定义的上凸函数, 然而教材称此类函数为凸函数.

$\lambda_1+\cdots+\lambda_n=1$ 的正实数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$, 我们都有不等式

$$f(\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n)\leqslant\lambda_1f(x_1)+\cdots+\lambda_nf(x_n).$$

证明. 令 $\overline{x}=\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n$, 我们考虑 $f(x)$ 在 $\overline{x}$ 处带 Lagrange 余项的 Taylor 公式. 那么存在 ξ_i 介于 $\overline{x}$ 与 x_i 之间使得

$$f(x_i)=f(\overline{x})+f'(\overline{x})(x_i-\overline{x})+\frac{f''(\xi_i)}{2}(x_i-\overline{x})^2.$$

将上式乘 λ_i 然后求和, 由于 $\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$ 和 $\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i=\overline{x}$, 得到

$$\sum_{i=1}^n\lambda_if(x_i)=f(\overline{x})+\sum_{i=1}^n\frac{\lambda_if''(\xi_i)}{2}(x_i-\overline{x})^2\geqslant f(\overline{x}).$$

□

§11. 多元函数微分学 (一)

§11.i. 多元函数的极限

回忆单变量函数在 x_0 处极限的定义, 粗略来说就是 "当自变量离 x_0 很近时, 函数值离极限值也很近". 对于多元函数, 我们也据此定义极限. 所以我们需要对多元函数明确何为 "自变量离得近", 及其对应的自变量邻域的概念. 一个 n 个变量的函数可以写成

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

但我们从另一个角度也可以将其看成 "单变量函数", 即将 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 看作 n 维欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中的一个点, 该函数也看作是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}$ 的一个映射. 利用 $\mathbb{R}^n$ 中自然的欧式距离, 我们可以给出一个点半径为 r 的邻域的定义: 对于 $P_0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$, 其半径为 r 的邻域为

$$U_r(P_0) = U_r(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0) \coloneqq \left\{ (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \cdots + (x_n - x_n^0)^2} < r \right\}.$$

类似地, 我们可以定义 P_0 处的去心邻域 $U_r^0(P_0) = U_r(P_0) \setminus \{ P_0 \}$. 此时我们仿照单变量函数极限的 "$\varepsilon - \delta$ 语言" 来给出多元函数的极限定义.

定义 11.1. 设函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 的某个去心邻域有定义. 如果存在实数 A 使得对任意 $\varepsilon > 0$ 都存在 $\delta > 0$ 使得

$$|f(x_1, x_2, \cdots, x_n) - A| < \varepsilon, \quad \forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in U_\delta^0(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0),$$

那么就称 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ **在** $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ **处收敛于** A, 记作

$$\lim_{(x_1, \cdots, x_n) \to (x_1^0, \cdots, x_n^0)} f(x_1, \cdots, x_n) = A, \text{ 或 } \lim_{x_1 \to x_1^0, \cdots, x_n \to x_n^0} f(x_1, \cdots, x_n) = A.$$

这一部分书上主要只涉及了二元函数的情形, 我们后续也主要以二元和三元函数为例. 对于二元函数的情形, 我们可以从几何上想象这一极限过程: 在二维空间 $\mathbb{R}^2$ 中, 一个点 P_0 的去心邻域为一个圆盘挖去中心, 我们要求当这个圆盘半径逐渐减小到 0 时, 该圆盘中任何一个点的函数值一致地靠近极限值. 而这里可以看到二元函数和一元函数极限的一些区别, 对于二元函数而言, 直观上来讲自变量趋于 P_0 的方式有许多 (在圆盘内随意画一条连续的、以 P_0 为终点的曲线即可), 而二元函数的极限存在实际要求了所有这些不同的方式都会得到相同的极限值. 我们可以将这一结论严格地写成命题:

命题 11.2

设函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 在 $(x_1^0, \cdots, x_n^0)$ 的某个去心邻域 $U_r^0(x_1^0, \cdots, x_n^0)$ 有定义, 假设 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 在 $(x_1^0, \cdots, x_n^0)$ 处收敛于 A. 那么对任意一条连续 (参数) 曲线 $\mathbf{r}(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$(即每个 $x_i(t)$ 是关于 t 的连续函数), 其中 $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, 如果满足对任意 $\alpha \leqslant t < \beta$ 都有 $\mathbf{r}(t) \in U_r^0(x_1^0, \cdots, x_n^0)$ 且对每个 $1 \leqslant i \leqslant n$ 都有 $\lim_{t \to \beta} x_i(t) = x_i^0$, 那么

$$\lim_{t \to \beta} f(x_1(t), \cdots, x_n(t)) = \lim_{(x_1, \cdots, x_n) \to (x_1^0, \cdots, x_n^0)} f(x_1, \cdots, x_n) = A.$$

证明. 对任意 $\varepsilon>0$, 由多元函数极限的定义, 存在 $\delta_1>0$ 使得对任意 $(x_1,\cdots,x_n)$ 满足

$$0<(x_1-x_1^0)^2+\cdots+(x_n-x_n^0)^2<\delta_1^2$$

都有 $|f(x_1,\cdots,x_n)-A|<\varepsilon$. 由于 $x_i(t)$ 均为连续函数且 $\lim_{t\to\beta}x_i(t)=x_i^0$, 从而存在 $\delta>0$ 使得对任意 $t\in(\beta-\delta,\beta)$ 都有 $(x_i(t)-x_i^0)^2<\delta_1^2/n$. 从而对任意 $t\in(\beta-\delta,\beta)$ 都有 $0<(x_1-x_1^0)^2+\cdots+(x_n-x_n^0)^2<\delta_1^2$, 即有

$$|f(x_1(t),\cdots,x_n(t))-A|<\varepsilon.$$

□

实际应用时, 这一结论经常被用来判断多元函数极限的发散性, 即我们只需要找到两种不同的趋于 $(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 的方式分别给出不同的极限, 那么我们就可以说明该极限的发散性, 我们会在后续的一些具体例子中展现.

与单变量函数类似我们可以定义多元函数一点处连续性的概念, 只需要该函数在该点处收敛且极限值与该点处函数值相同即可, 我们不再赘述.

多元函数极限的计算. 这一部分我们主要以二元和三元函数为例. 除了直接采用定义计算极限之外, 我们通常采用的方法依然是以夹逼定理、等价小量替换和换元法这三种.

通过对自变量做平移换元, 我们以计算二元函数在 $(x,y)\to(0,0)$ 时的极限为例, 此时我们记 $r=\sqrt{x^2+y^2}$. 对于收敛的极限, 由于多元函数的收敛性本质是 r 趋于 0 时的函数性质, 所以我们在求函数极限值时通常的方法是通过放缩、代换的方式将其转化为关于 r 的函数, 再求极限值. 在换元时, 我们也可以考虑使用极坐标换元

$$\begin{cases} x=r\cos\theta;\\ y=r\sin\theta, \end{cases}$$

其中 $r>0,\theta\in[0,2\pi)$. 此时问题直接转化为 $r\to0+0$ 的极限.

> **例 11.3.** 求极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{xy}$.

解答. 记 $r=\sqrt{x^2+y^2}$, 取对数后, 我们有

$$|xy\ln(x^2+y^2)|\leqslant r^2\ln r^2.$$

由于我们熟知右式在 $r\to0+0$ 时极限为 0, 从而由夹逼定理知

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}xy\ln(x^2+y^2)=0.$$

于是原极限为 1. □

> **例 11.4.** 求极限 $\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)}(\frac{|xy|}{x^2+y^2})^{|x|}$.

解答. 本题我们采取直接放缩的方式, 注意到 $|xy| \leqslant (x^2+y^2)/2$, 从而

$$0 \leqslant \left(\frac{|xy|}{x^2+y^2}\right)^{|x|} \leqslant \frac{1}{2^{|x|}}.$$

当 $(x,y) \to (\infty,\infty)$ 时, 右式极限为 0. 从而由夹逼定理知原极限为 0. □

注 11.5 此题另有两个变种极限都是发散的, 见例11.7.

例 11.6 (2023 数分 III 期中). 判断如下极限是否存在, 如果存在则求极限值:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\sin(xyz)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

解答. 记 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 那么 $|x|, |y|, |z| \leqslant r$. 于是我们得到

$$\left|\frac{\sin(xyz)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right| = \frac{|\sin(xyz)|}{r} \leqslant \frac{|xyz|}{r} \leqslant r^2.$$

由于 $\lim_{(x,y,z)\to 0} r^2 = \lim_{(x,y,z)\to 0} x^2+y^2+z^2 = 0$, 从而由夹逼定理知原极限存在且极限为 0. □

极限发散的判定. 根据命题11.2, 极限存在的多元函数应当在不同曲线上应该得到相同的极限结果. 实际应用中, 以二元函数在 $(x,y) \to (0,0)$ 为例, 我们通常只需要考虑几类特殊的曲线即可: 直线 $x = ky$ 或 $y = kx$, 以及幂函数 $y = x^\alpha$. 但具体选取哪种曲线则需要尝试, 如果发现对于尝试的曲线都有相同的极限值则可以考虑证明极限的存在性.

例 11.7. 判断如下极限是否存在, 如果存在则求极限值:

(1) $\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} (\frac{2|xy|}{x^2+y^2})^{|x|}$;

(2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (\frac{|xy|}{x^2+y^2})^{|x|}$;

(3) (2017 数分 III 期中) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} (\frac{|xyz|}{x^2+y^2+z^2})^{|x|+|y|}$.

注 11.8 本题 (2), (3) 两问严格意义上函数分别在 $x = 0, y \neq 0$ 和 $x = y = 0, z \neq 0$ 的地方无定义, 为了严谨性我们在这些地方补充定义函数值为 1, 以保证函数在原点之外都是连续的. 但由于这两个函数在原点处极限都是不存在的, 我们构造不同趋于原点的方式时其实可以避开这两类无定义的地方.

解答. (1) 取 $x = y = t$ 时, 我们有 $(\frac{2|xy|}{x^2+y^2})^{|x|} = 1$, 从而 $\lim_{t\to\infty} 1 = 1$. 取 $x = t, y = 2t$ 时, 我们有 $(\frac{2|xy|}{x^2+y^2})^{|x|} = (\frac{4}{5})^{|t|}$, 当 t 趋于无穷时右式极限为 0. 结合这两者知原极限不存在.

(2) 首先取 $y = 0, x \neq 0$ 我们有 $(\frac{|xy|}{x^2+y^2})^{|x|} = 0$, 从而 $\lim_{x\to 0}(\frac{|xy|}{x^2+y^2})^{|x|} = 0$. 再取 $x = y = t \neq 0$, 我们有 $(\frac{|xy|}{x^2+y^2})^{|x|} = 2^{-|t|}$, 从而 $\lim_{t\to 0} 2^{-t} = 1$. 于是原极限不存在.

(3) 本题与上一问类似, 我们简述过程: 首先取 $z=0$, 得到极限为 0; 我们再取 $x=y=z=t$, 得到极限为 $\lim_{t\to 0}(|t|/3)^{2|t|}=1$, 从而原极限不存在.

$\square$

累次极限. 此前我们讨论的多元函数极限也叫做重极限 (全面极限), 此外还有一种极限叫做累次极限. 以二元函数 $f(x,y)$ 为例, 其一个累次极限形如

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y).$$

其中, 里面的部分 $g(y)=\lim_{x\to x_0} f(x,y)$ 的含义是对于每个固定的 $y\neq y_0$, 将 y 看作常数后将 $f(x,y)$ 视为关于 x 的一元函数并求其在 x_0 处的极限. 之后再求 $y\to y_0$ 时 $g(y)$ 的极限. 但是在一般情形下, 累次极限与重极限两者的存在性并没有直接关系, 存在时极限值也未必相等, 我们有如下例子:

例 11.9. 判断如下函数在 $(0,0)$ 处的累次极限和重极限的存在性, 存在时求其值:

(1) $f(x,y)=\begin{cases} x\sin(1/y), & y\neq 0;\\ 0, & y=0;\end{cases}$

(2) $f(x,y)=\begin{cases} x/y, & y\neq 0;\\ 0, & y=0;\end{cases}$

(3) $f(x,y)=(x^2-y^2)/(x^2+y^2)$.

解答. (1) 由于 $|x\sin(1/y)|\leqslant |x|$, 从而由夹逼定理知重极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$. 同时累次极限

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0} 0=0$$

也存在. 但是累次极限 $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$ 不存在, 因为对于固定的 $x\neq 0$ 极限 $\lim_{y\to 0} x\sin(1/y)$ 不存在.

(2) 通过选取 $x=2y$ 和 $x=3y$ 得到不同的极限值可知 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的重极限发散. 但是累次极限

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0} 0=0$$

存在, 而累次极限 $\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)$ 发散.

(3) 我们可以计算出两个累次极限为

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0} -1=-1,$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0} 1=1,$$

均存在. 但通过考虑 $x=0$ 和 $y=0$ 两条直线的极限值可知 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的重极限不存在.

注 11.10 事实上, 两个累次极限存在但值不同时, 累次极限是一定不存在的, 参见命题11.11, 这也可以视为一种证明重极限不存在的方式. 而且通常这种方式所需要的尝试更少, 但由于需要结论的支撑, 考试时未必适用 (可以先用来猜结果).

□

此外, 累次极限和重极限的另一个细节上的区别是累次极限

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

可以允许函数 $f(x,y)$ 在两条直线 $\{x=x_0\}$ 和 $\{y=y_0\}$ 上均没有定义, 或者说 $f(x,y)$ 在两条直线 $\{x=x_0\}$ 和 $\{y=y_0\}$ 并不影响累次极限的存在性和极限值. 但是重极限是要考虑这两条直线上的函数值的 (仅仅不考虑 (x_0,y_0) 这一点处的函数值). 这给出了一类构造累次极限均存在但重极限不存在的函数的例子: 只需要在两条直线 $\{x=x_0\}$ 和 $\{y=y_0\}$ 修改函数值即可.

不过直觉上, 由于重极限的要求更强, 也蕴含了充分多的信息 (沿不同曲线的极限值均为 A). 所以在重极限和累次极限均存在的情况下, 极限值是相等的:

命题 11.11

假设重极限 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在且极限值为 A, 那么

(1) 如果累次极限 $\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$ 存在, 那么 $\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=A$;

(2) 如果累次极限 $\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$ 存在, 那么 $\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=A$.

§11.ii. 多元函数的偏导数和全微分

偏导数. 我们以二元函数为例, 一个二元函数 $f(x,y)$ 我们既可以考虑其关于 x 的变化趋势也可以考虑其关于 y 的变化趋势, 为了刻画这两者, 我们引入偏导数的概念. 当我们希望刻画其关于 x 的变化趋势时, 我们可以讲 y 看作参数固定下来, 将这一函数看成关于 x 的函数并求其导数. 这就是函数在一点 (x_0,y_0) 处关于 x 的偏导数

$$\partial_x f(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

偏导数的记号有许多种, 通常使用的有如下三种: 函数 f 关于 x 的偏导数记作 $\partial_x f$ 或 $\partial f/\partial x$ 或 f_x.

在一元函数的情形, 如果函数在一点处可导那么该函数在这一点处一定是连续的. 但是多元函数则不然, **例如一个二元函数 $f(x,y)$ 在一点 (x_0,y_0) 处即使关于 x 和 y 的两个偏导数均存在, 也无法保证 f 在 (x_0,y_0) 处是连续的.** 容易发现在 (x_0,y_0) 处的两个偏导数只依赖于 $f(x,y)$ 在两条直线 $\{x=x_0\}$ 和 $\{y=y_0\}$ 上的取值, 偏导数的存在性是无法限制函数在其他点处的取值的, 自然无法保证函数在 (x_0,y_0) 处的连续性.

例 11.12. 求二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 在各点处的偏导数.

解答. 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时, 我们可以直接计算得到

$$\partial_x f(x,y)=\frac{y(x^2+y^2)-2x\cdot xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},\quad \partial_y f(x,y)=\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

在 $(x,y)\neq(0,0)$ 处, 我们根据定义计算偏导数, 有

$$\partial_x f(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0.$$

类似地, $\partial_y f(0,0)=0$. □

注 11.13 容易看出该函数在 $(0,0)$ 处不是连续的, 由于 $f(x,x)=1/2$ 在 $x\to 0$ 时不收敛于 0.

全微分. 另一个将一元函数推广到多元函数的概念是微分, 我们希望完整地描述函数在一点处的近似变化趋势, 而不仅仅是关于某一变量的. 即我们 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 附近有

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+A\Delta x+B\Delta y+o(r),$$

其中 $r=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, $o(r)$ 这一项表示 $\lim_{r\to 0+0}o(r)/r=0$. 如果这样的实数 A,B 存在, 我们就称 **f 在 (x_0,y_0) 处可微**, 记为**全微分** $\mathrm{d}f=A\,\mathrm{d}x+B\,\mathrm{d}y$. 我们将多元函数的连续性、可导性和可微性的关系总结如下.

定理 11.14

设二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某个邻域内有定义, 那么

(1) 如果 f 在 (x_0,y_0) 处可微且具有全微分 $\mathrm{d}f=A\,\mathrm{d}x+B\,\mathrm{d}y$, 那么 f 在 (x_0,y_0) 处连续且两个偏导数均存在, 并且有 $\partial_x f(x_0,y_0)=A,\partial_y f(x_0,y_0)=B$;

(2) 如果 f 在 (x_0,y_0) 的某个邻域内均存在偏导数 $\partial_x f,\partial_y f$ 且两个偏导数在 (x_0,y_0) 处均连续, 那么 f 在 (x_0,y_0) 处可微且具有全微分 $\mathrm{d}f=\partial_x f(x_0,y_0)\,\mathrm{d}x+\partial_y f(x_0,y_0)\,\mathrm{d}y$.

这里也可以看出多元函数和一元函数的一些差别: 一元函数可导和可微是等价的, 而多元函数可导和可微并不等价. 而我们通常使用的关系是, **如果函数 $f(x,y)$ 在一个区域 D 上有连续的导函数, 那么其在 D 上可微.**

例 11.15. 设 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$, 证明:

(1) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续;

(2) $\partial_x f(0,0),\partial_y f(0,0)$ 均存在;

(3) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

解答. 令 $r=\sqrt{x^2+y^2}$, 那么 $|f(x,y)|\leqslant r$, 从而由夹逼定理知

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0),$$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续. 由注意到 $f(x,0)=f(y,0)=0$, 从而两个偏导数均存在且

$$\partial_x f(0,0),\quad \partial_y f(0,0)=0.$$

现在证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微. 反证法假设 f 在 $(0,0)$ 处可微, 那么就有

$$f(x,y)=f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y+o(\sqrt{x^2+y^2})=o(\sqrt{x^2+y^2}).$$

这也就是

$$0=\lim_{(x,y)\to 0}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to 0}\sqrt{\frac{|xy|}{x^2+y^2}}.$$

但通过取 $x=2y$ 和 $x=3y$ 可知右式极限不存在, 矛盾. □

多元函数微分的一个性质依然是一阶微分的形式不变性, 作为推论我们给出多元函数求导的链式法则.

定理 11.16

设函数 $u(x,y),v(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处偏导数均存在, 并记 $u_0=u(x_0,y_0),v_0=v(x_0,y_0)$. 设函数 $f(u,v)$ 在点 (u_0,v_0) 处的偏导数存在且连续, 那么复合函数 $f(u(x,v),v(x,y))$ 在 (x_0,y_0) 的偏导数存在且满足关系式

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0);$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial u}(u_0,v_0)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial v}(u_0,v_0)\cdot\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0).$$

例 11.17. 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 有连续的偏导数且满足 $f(x,x^2)\equiv 1$.

(1) 若 $f_x(x,x^2)=x$, 求 $f_y(x,x^2)$;

(2) 若 $f_y(x,y)=x^2+2y$, 求 $f(x,y)$.

解答. (1) 对 $f(x,x^2)\equiv 1$ 两侧关于 x 求导可得

$$f_x(x,x^2)+2xf_y(x,x^2)=0.$$

带入 $f_x(x,x^2)=x$ 可知当 $x\neq 0$ 时 $f_y(x,x^2)=-1/2$, 再由偏导数的连续性知 $f_y(x,x^2)=-1/2$ 对所有 x 成立.

(2) 令 $F(x,y)=f(x,y)-(x^2y+y^2)$, 那么可知 $F_y(x,y)\equiv 0$. 这说明存在关于 x 的函数 $\varphi(x)$ 使得 $\varphi(x)=F(x,y)$. 现在带入 $y=x^2$, 就得到

$$\varphi(x)=F(x,x^2)=f(x,x^2)-(x^3+x^4)=1-(x^3+x^4).$$

从而 $f(x,y)=\varphi(x)+(x^2y+y^3)=1-x^3-x^4+x^2y+y^2$.

$\square$

§12. 多元函数微分学 (二)

§12.i. 多元函数的高阶偏导数与 Taylor 公式

与一元函数类似, 我们可以对多元函数的偏导数继续求偏导数, 这就是多元函数的高阶偏导数. 然而高阶偏导数会面临对不同变量求偏导数的顺序问题, 例如对二元函数 $f(x,y)$ 的二阶偏导数中有两个分别为

$$f_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right);$$

$$f_{yx}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

称为**二阶混合偏导数**. 这两者在一般情况下并不相等, 然而实际应用中通常是相等的, 这是由于以下结论保证了这一点.[2]

定理 12.1

如果二阶混合偏导数 f_{xy}, f_{yx} 在区域 D 内连续, 那么这两者在 D 内相等.

这一结论也可以推广到多元函数的高阶混合偏导数. 所以对于区域 D 上的多元函数来说, 我们研究函数时一般会假设该函数是属于 $C^k(D)$ 的, 其中$C^k(D)$表示所有在区域 D 上具有连续的 k 阶偏导数构成的集合.

在有变量换元时计算高阶导数需要小心一些, 因为多元函数记号上较为复杂, 书写时经常会省略自变量. 但在变量换元时这些自变量依然是函数, 计算高阶导数时就需要使用乘法的求导法则分别计算, 比如下面这个例子.

> **例 12.2.** 设函数 $u=u(x,y)$ 具有连续的二阶偏导数, 换元 $x=e^s\cos t, y=e^s\sin t$, 求 $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$ 和 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, 并计算 $\Delta_{(s,t)}u=\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

解答. 首先有

$$\frac{\partial u}{\partial s}=u_x\frac{\partial x}{\partial s}+u_y\frac{\partial y}{\partial s}=u_xe^s\cos t+u_ye^s\sin t,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}=u_x\frac{\partial x}{\partial t}+u_y\frac{\partial y}{\partial t}=-u_xe^s\sin t+u_ye^s\cos t.$$

需要注意, 上式右侧我们省略了自变量, 右式中的 u_x, u_y 均取值于点 $(e^s\cos t, e^s\sin t)$ 处. 现在计算二阶导数

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}&=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)=\frac{\partial}{\partial s}\left(u_xe^s\cos t+u_ye^s\sin t\right)\\&=e^s\frac{\partial(u_x\cos t+u_y\sin t)}{\partial s}+\frac{\partial e^s}{\partial s}(u_x\cos t+u_y\sin t)\\&=e^s\left(\cos t\left(u_{xx}\frac{\partial x}{\partial s}+u_{xy}\frac{\partial y}{\partial s}\right)+\sin t\left(u_{xy}\frac{\partial x}{\partial s}+u_{yy}\frac{\partial y}{\partial s}\right)\right)+e^s(u_x\cos t+u_y\sin t)\\&=e^{2s}\left(u_{xx}\cos^2 t+2u_{xy}\cos t\sin t+u_{yy}\sin^2 t\right)+e^s(u_x\cos t+u_y\sin t).\end{aligned}$$

[2]事实上, 例如 f_{xy} 和 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ 这样的记号在不同习惯下所表达的求导也不相同, 然而大部分情形下这个求导顺序并不是重要的. 如果遇到了求导顺序会影响结果的情况, 个人认为还是要采用如 $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ 的记号避免歧义.

类似地, 我们有 (我们写成二阶导数的换元公式)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= u_{xx}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + 2u_{xy}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t} + u_{yy}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + u_x\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + u_y\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ &= e^{2s}\left(u_{xx}\cos^2 t - 2u_{xy}\cos t\sin t + u_{yy}\sin^2 t\right) - e^s(u_x\cos t + u_y\sin t)\end{aligned}$$

由此得到

$$\Delta_{(s,t)}u = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = e^{2s}(u_{xx}+u_{yy}) = e^{2s}\Delta_{(x,y)}u.$$

□

对于属于 $C^k(D)$ 的二元函数 $f(x,y)$, 该函数同样是 k 阶可微的. 回忆一阶微分

$$\mathrm{d}f = f_x(x,y)\,\mathrm{d}x + f_y(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

两侧再次求微分得到二阶微分

$$\mathrm{d}^2 f = \mathrm{d}(\mathrm{d}f) = f_{xx}\,\mathrm{d}x^2 + 2f_{xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + f_{yy}\,\mathrm{d}y^2 = \left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f.$$

更一般地, 对 $f(x,y)\in C^k(D)$, 我们都有 k 阶微分

$$\mathrm{d}^k f = \left(\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{d}y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f.$$

在定义了多元函数的高阶导数和高阶微分后, 我们可以建立多元函数的 Taylor 公式. 首先来看 Taylor 公式在零阶的特殊形式, 即 Lagrange 中值定理 (微分中值定理) 在多元函数的情形.

定理 12.3 (Lagrange 中值定理)

设 D 为 $\mathbb{R}^2$ 中的一个区域, 函数 $f(x,y)\in C^1(D)$, 对于两点 $P_0(x_0,y_0), P_1(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in D$, 如果线段 $P_0P_1\subset D$, 那么存在 $0<\theta<1$ 使得

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta x + f_y(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta y.$$

定理 12.4 (带 Lagrange 余项的 Taylor 公式)

设 D 为 $\mathbb{R}^2$ 中的一个区域, 函数 $f(x,y)\in C^{k+1}(D)$, 对于两点 $P_0(x_0,y_0), P_1(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in D$, 如果线段 $P_0P_1\subset D$, 那么存在 $0<\theta<1$ 使得

$$\begin{aligned}f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) &+ \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0,y_0) \\ &+ \frac{1}{2!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0) + \cdots \\ &+ \frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k 2f(x_0,y_0) \\ &+ \frac{1}{(k+1)!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k+1} f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y),\end{aligned}$$

或写成如下形式,

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = \sum_{i+j=0}^{k} \frac{1}{i!j!}\frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(x_0,y_0)\cdot(\Delta x)^i(\Delta y)^j + \sum_{i+j=k+1} \frac{1}{i!j!}\frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\cdot(\Delta x)^i(\Delta y)^j.$$

这两结论的证明本质都是考虑一元函数 $\varphi(t) = f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)$ 在 $t=0$ 处的 Taylor 公式, 结合求导的链式法则得到结果. 如果令 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, 由夹逼定理和 f 的 $(k+1)$-阶导数连续性可知

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to 0} \frac{\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k+1} f(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)}{\rho^k} = 0.$$

从而上述带 Lagrange 余项的 Taylor 公式也可以写成带 Peano 余项的形式, 即

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) + \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0,y_0) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0,y_0) + o(\rho^k).$$

这里的余项 $o(\rho^k)$ 实际上是 $O(\rho^{k+1})$ 量级的, 但这其实源于我们假设了 $f\in C^{k+1}(D)$, 相较于一元函数的假设是更强的 (一元函数带 Peano 余项的 Taylor 公式一般只需假设 k 阶可导性). 其中, 关于 $\Delta x, \Delta y$ 的多项式

$$f(x_0,y_0) + \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0,y_0) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x_0,y_0)$$

也称为**(k 阶)Taylor 多项式**. 与一元函数一样, 多元函数的 Taylor 多项式也具有唯一性:

定理 12.5 (Taylor 公式的唯一性)

设 $f(x,y)$ 在一点 (x_0,y_0) 的邻域内具有连续的 $k+1$ 阶偏导数, 如果在 (x_0,y_0) 附近具有展开式

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = \sum_{i+j=0}^{k} A_{ij}(\Delta x)^i(\Delta y)^j + o(\rho^k),$$

其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, 那么

$$A_{ij} = \frac{1}{i!j!}\frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(x_0,y_0).$$

和一元函数类似, 这一结论可以用来帮助我们计算一点处的高阶偏导数, 但是应用时需要小心余项的大小.

例 12.6 (2020,2022 高数 B 期末)**.** 设 $a, b \in \mathbb{R}$, 其中 $b \neq 0$. 令 $f(x,y) = \arctan(x/y)$, 求其在 (a,b) 处的二阶 Taylor 多项式.

解答. 直接求导得到

$$f_x(x,y) = \frac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad f_y(x,y) = -\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$f_{xx}(x,y) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_{xy}(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_{xx}(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

带入得到 Taylor 多项式为

$$\begin{aligned} P(\Delta x, \Delta y) = &\arctan\frac{a}{b} + \frac{b}{a^2+b^2}\Delta x - \frac{a}{a^2+b^2}\Delta y \\ &- \frac{ab}{(a^2+b^2)^2}(\Delta x)^2 + \frac{a^2-b^2}{(a^2+b^2)^2}\Delta x \Delta y + \frac{ab}{(a^2+b^2)^2}(\Delta y)^2. \end{aligned}$$

□

例 12.7 (2022 高数 B 期末)**.** 求 $f(x,y) = x^{\sqrt{y}}$ 在 $(1,1)$ 处带 Peano 余项的 2 阶 Taylor 公式.

解答. <u>方法一</u>. 直接求偏导得到

$$f_x = \sqrt{y} \cdot x^{\sqrt{y}-1}, \quad f_y = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot x^{\sqrt{y}} \ln x.$$

从而 $f_x(1,1) = 1, f_y(1,1) = 0$. 接下来计算二阶偏导

$$f_{xx} = \sqrt{y}(\sqrt{y}-1)x^{\sqrt{y}-2}, \quad f_{xy} = \frac{1}{2\sqrt{y}} x^{\sqrt{y}-1}\left(1 + \sqrt{y}\ln x\right).$$

带入 $(x,y) = (1,1)$ 可知 $f_{xx}(1,1) = 0, f_{xy} = 1/2$. 又注意到 $f_y(1,y) \equiv 0$, 从而 $f_{yy}(1,1) = \frac{\partial}{\partial y} f_y(1,1) = 0$. 所以得到 Taylor 公式

$$f(x,y) = 1 + (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)(y-1) + o((x-1)^2 + (y-1)^2).$$

<u>方法二</u>. 令 $x - 1 = u, y - 1 = v$, 那么

$$\begin{aligned} x^{\sqrt{y}} &= e^{\ln(1+u)\sqrt{1+v}} \\ &= 1 + \ln(1+u)\sqrt{1+v} + \frac{1}{2}(\ln(1+u)\sqrt{1+v})^2 + o((\ln(1+u)\sqrt{1+v})^2) \\ &= 1 + (u - \frac{1}{2}u^2 + o(u))(1 + \frac{1}{2}v + o(v)) + \frac{1}{2}u^2 + o(u^2+v^2) \\ &= 1 + u + \frac{1}{2}uv + o(u^2+v^2), \end{aligned}$$

或者直接用

$$\begin{aligned}x^{\sqrt{y}} &= (1+u)^{\sqrt{y}} = 1 + \sqrt{y}u + \frac{\sqrt{y}(\sqrt{y}-1)}{2}u^2 + o(u^2) \\ &= 1 + u(1 + \frac{1}{2}v + o(v)) + o(u^2) \\ &= 1 + u + \frac{1}{2}uv + o(u^2+v^2).\end{aligned}$$

由 Taylor 公式的唯一性知这就是我们要求的 Taylor 公式. □

注 12.8 一般来说用计算偏导数的方式得到 Taylor 公式的方式计算量较大, 因为偏导数过多. 我们可以使用一元函数现有的 Taylor 公式直接带入计算, 而且可以自由选取一种计算量小的方式得到结果.

例 12.9. 设

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x(x^2+y^2)-1}}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

求 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处带 Peano 余项的 4 阶 Taylor 公式以及在 $(0,0)$ 处的四阶偏导数.

解答. 利用 e^x 的 Taylor 公式, 我们有

$$e^{x(x^2+y^2)} = 1 + x(x^2+y^2) + \frac{1}{2}x^2(x^2+y^2)^2 + o(x^2(x^2+y^2)^2).$$

从而

$$\frac{e^{x(x^2+y^2)-1}}{x^2+y^2} = x + \frac{1}{2}x^2(x^2+y^2) + o(x^2(x^2+y^2)).$$

由于 $x^2(x^2+y^2) \leqslant (x^2+y^2)^2 = \rho^4$, 其中 $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, 从而上式还可以写成

$$\frac{e^{x(x^2+y^2)-1}}{x^2+y^2} = x + \frac{1}{2}x^2(x^2+y^2) + o(\rho^4).$$

由 Taylor 公式的唯一性知这就是 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的 Taylor 公式, 并且得到

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0) = 24 \cdot \frac{1}{2} = 12, \quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}(0,0) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

□

§12.ii. 多元函数微分学的应用

隐函数存在定理. 我们通常会面临由隐函数 $F(x,y)=0$ 所给出的函数 $y=f(x)$, 此时对函数 $f(x)$ 求导可以通过对方程 $F(x,f(x)) \equiv 0$ 两侧同时对 x 求导得到

$$F_x(x,f(x)) + f'(x)F_y(x,f(x)) = 0.$$

也即在 $y=f(x)$ 处的导数为

$$f'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}.$$

这一结果我们曾在一元函数求导时提及过. 现在我们会面临更复杂的情形, 即更多变量的隐函数所决定的多元函数, 以及多个隐函数方程联合决定的函数.

在此之前, 一个基本问题是一个 (高阶) 连续可导的多元隐函数所决定的函数是否存在, 存在时是否该函数也具有偏导数. 这一问题实际上被隐函数存在定理所回答. 但我们仍然需要注意隐函数存在定理只能保证在一点的某个小邻域上解出这样性质良好的函数, 而无法做到在大范围的定义域上. 现在我们叙述隐函数存在定理.[3]

定理 12.10

设多元函数 $F(x_1,\cdots,x_n,y)$ 在点 $(x_1^0,\cdots,x_n^0,y^0)$ 的某个邻域内有连续的一阶偏导数. 如果假设 $F(x_1^0,\cdots,x_n^0,y^0)=0$ 且 $F_y(x_1^0,\cdots,x_n^0,y^0)\neq 0$, 那么在 $(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 的某个领域内存在唯一由方程 $F(x_1,\cdots,x_n,f(x_1,\cdots,x_n))\equiv 0$ 所决定的且满足 $f(x_1^0,\cdots,x_n^0)=y^0$ 的函数 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$. 并且, 该函数具有连续的偏导数

$$f_{x_i}(x_1,\cdots,x_n)=-\frac{F_{x_i}(x_1,\cdots,x_n,y)}{F_y(x_1,\cdots,x_n,y)}.$$

例 12.11. 设函数 $F(x,y)$ 具有连续的二阶偏导数, 设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $F(x-y,y-z)=0$ 所决定的隐函数, 求 f_x,f_y 及 f_{xy}.

解答. 对方程 $F(x-y,y-z)=0$ 两侧分别关于 x 和 y 求偏导数, 我们得到

$$F_x-f_xF_y=0,\quad -F_x+(1-f_y)F_y=0.$$

即

$$f_x(x,y)=\frac{F_x(x-y,y-z)}{F_y(x-y,y-z)},\quad f_y(x,y)=1-\frac{F_x(x-y,y-z)}{F_y(x-y,y-z)}.$$

为求二阶混合导数, 我们对 $F_x-f_xF_y=0$ 两侧关于 y 求偏导数. 但我们要注意这一写法省略了自变量取值, 这一等式实际上写作

$$F_x(x-y,y-z)-f_x(x,y)F_y(x-y,y-z)=0.$$

那么有

$$-F_{xx}+(1-f_y)F_{xy}-f_{xy}F_y+f_xF_{xy}-f_xF_{yy}+f_xf_yF_{yy}=0.$$

由此解得

$$\begin{aligned}f_{xy}&=\frac{1}{F_y}\left(-F_{xx}+\frac{F_x}{F_y}\cdot F_{xy}+\frac{F_x}{F_y}\cdot F_{xy}-\frac{F_x}{F_y}\cdot F_{yy}+\frac{F_x}{F_y}\left(1-\frac{F_x}{F_y}\right)F_{yy}\right)\\&=\frac{1}{F_y^3}\left(-F_y^2F_{xx}+2F_xF_yF_{xy}-F_x^2F_{yy}\right).\end{aligned}$$

□

[3] 由于隐函数存在定理在高等数学这门课程中的主要作用是为我们计算时提供理论基础, 确保我们做的看似合理的计算在逻辑也是上正确的. 所以个人认为如果对隐函数存在定理难以有深刻理解的话, 可以暂时不过多纠结于此, 只需记忆结论确保在面对需要利用隐函数存在定理证明函数存在的试题时能够正确套用定理即可. 对于后面提到的隐函数组和 Jacobian 行列式部分亦是如此.

注 12.12 这一类求导过程中我们用 F_x, F_y 分别代表了 F 关于两个分量的偏导数, 如果这样的记号感觉会产生符号上的混淆那么可以用 F_1, F_2 这样的记号. 同时, 在求高阶导数时需要注意函数的自变量取值, 例如此题中 f 的自变量取值为 (x, y) 时对应的 F 自变量取值为 $(x-y, y-z)$.

在隐函数的基础上更进一步的是隐函数组的概念, 我们通常考虑如下方程组

$$\begin{cases} F(x_1, \cdots, x_n, u, v) = 0; \\ G(x_1, \cdots, x_n, u, v) = 0, \end{cases}$$

我们希望用这个方程组解出 $u = u(x_1, \cdots, x_n), v = v(x_1, \cdots, x_n)$. 为了保证这一方程能够 (局部) 存在唯一解, 我们需要引入**Jacobian 行列式**的概念

$$J = \frac{\mathrm{D}(F, G)}{\mathrm{D}(u, v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}.$$

实际上, 我们一般会考虑**Jacobian 矩阵**

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{bmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{bmatrix},$$

Jacobian 行列式非零意味着 Jacobian 矩阵是满秩的 (或者说非退化).

定理 12.13 (隐函数组的存在定理)

设多元函数 $F(x_1, \cdots, x_n, u, v), G(x_1, \cdots, x_n, u, v)$ 在点 $(x_1^0, \cdots, x_n^0, u^0, v^0)$ 的某个邻域内有连续的一阶偏导数. 如果假设 $F(x_1^0, \cdots, x_n^0, u^0, v^0) = G(x_1^0, \cdots, x_n^0, u^0, v^0) = 0$ 且 Jacobi 行列式 $\frac{\mathrm{D}(F,G)}{\mathrm{D}(u,v)}$ 在 $(x_1^0, \cdots, x_n^0, u^0, v^0)$ 处不为零, 那么在 $(x_1^0, \cdots, x_n^0)$ 的某个领域内存在唯一由方程组

$$\begin{cases} F(x_1, \cdots, x_n, u(x_1, \cdots, x_n), v(x_1, \cdots, x_n)) = 0; \\ G(x_1, \cdots, x_n, u(x_1, \cdots, x_n), v(x_1, \cdots, x_n)) = 0, \end{cases}$$

所决定的且满足 $u(x_1^0, \cdots, x_n^0) = u^0, v(x_1^0, \cdots, x_n^0) = v^0$ 的函数 $u(x_1, \cdots, x_n)$ 和 $v(x_1, \cdots, x_n)$. 并且, 这两个函数具有连续的偏导数, 并且偏导数可以通过方程组

$$\begin{cases} F_{x_i} + u_{x_i} F_u + v_{x_i} F_v = 0; \\ G_{x_i} + u_{x_i} G_u + v_{x_i} G_v = 0, \end{cases}$$

所解出.

通常情况我们只需要考虑 $n = 1, 2$ 的情形即可. 该定理的前半部分, 即隐函数组存在性的条件可以直接以记忆为主, 核心在于 Jacobian 行列式非零 (Jacobian 矩阵非退化). 后半部分的偏导数计算则需要适当理解其计算方法, 实际上是对隐函数组直接使用复合函数求导的链式法则所得到的, 在一些试题中需要用到这样的计算方法.

> **例 12.14** (2023 高数 A 期末考试)**.** 给定方程组
> $$\begin{cases} xy + yz^2 + 4 = 0; \\ x^2y + yz - z^2 + 5 = 0. \end{cases}$$
> 讨论在点 $P_0(1,-2,1)$ 附近方程组能确定哪些隐函数, 并计算出所决定的隐函数在 P_0 处的导数.

解答. 注意到这是一个三个变量两个方程构成的方程组, 所以有三种可能的隐函数决定方式

$$\begin{cases} y = y(x); \\ z = z(x); \end{cases} \quad \begin{cases} x = x(y); \\ z = z(y); \end{cases} \quad \begin{cases} x = x(z); \\ y = y(z). \end{cases}$$

为了验证哪些是可行的, 我们需要用到隐函数组的存在定理. 令 $F(x,y,z) = xy + yz^2 + 4, G(x,y,z) = x^2y + yz - z^2 + 5$, 我们来计算在 P_0 处的三个 Jacobian 行列式的值. 我们有

$$\frac{\mathrm{D}(F,G)}{\mathrm{D}(y,z)} = \begin{vmatrix} x+z^2 & 2yz \\ x^2+z & y-2z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\frac{\mathrm{D}(F,G)}{\mathrm{D}(x,z)} = \begin{vmatrix} y & 2yz \\ 2xy & y-2z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} = -8;$$

$$\frac{\mathrm{D}(F,G)}{\mathrm{D}(x,y)} = \begin{vmatrix} y & x+z^2 \\ 2xy & x^2+z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

于是以 x 为自变量的隐函数无法确定存在 (此处实际上并不严谨, 但此题考察目的是应该就是定理的直接使用), 另外两个根据隐函数存在定理可知局部存在性. 下面计算导数:

- 对于以 y 为自变量的隐函数, 我们有

  $$\begin{cases} 0 = F_y + x'(y)F_x + z'(y)F_z = (x+z^2) + y \cdot x'(y) + 2yz \cdot z'(y); \\ 0 = G_y + x'(y)G_x + z'(y)G_z = (x^2+z) + 2xy \cdot x'(y) + (y-2z) \cdot z'(y), \end{cases}$$

  带入 $x = 1, y = -2, z = 1$ 解出

  $$\begin{cases} x'(y)_{P_0} = 0; \\ z'(y)_{P_0} = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

- 对于以 z 为自变量的隐函数, 类似可得

  $$\begin{cases} x'(z)_{P_0} = 0; \\ y'(z)_{P_0} = 2. \end{cases}$$

□

注 12.15 实际上最后求导的解方程结果可以直接用 Jacobian 行列式写出, 例如

$$x'(y) = -\frac{\mathrm{D}(F,G)/\mathrm{D}(y,z)}{\mathrm{D}(F,G)/\mathrm{D}(x,z)}.$$

多元函数的极值与最值. 另一类问题是研究多元函数 $f(x,y)$ 在区域 D 内的极值和最值问题. 与一元函数类似, 一个 D 的内点 (x_0,y_0) 称为**极大 (小) 值点**如果存在其一个邻域 U 使得对任意 $(x,y)\in U$ 都有 $f(x,y)\leqslant f(x_0,y_0)$ $(f(x,y)\geqslant f(x_0,y_0))$. 一个点 (x_0,y_0) 称为**最大 (小) 值点**如果对任意 $(x,y)\in D$ 都有 $f(x,y)\leqslant f(x_0,y_0)$ $(f(x,y)\geqslant f(x_0,y_0))$. 所以**一个最值点要么是极值点, 要么在 D 的边界上.**

与一元函数类似, 如果 $f(x,y)$ 具有一阶偏导数, 那么其极值点一定满足一阶偏导数均为 0 的性质 (一阶偏导数均为 0 的点也称为**稳定点**). 同样地, 这并不能确定该点一定是极值点 (和一元函数 x^3 在 $x=0$ 处一样). 判断其是否为极值点的一种方法是直接验证性质 $f(x,y)\leqslant f(x_0,y_0)$ 或 $f(x,y)\geqslant f(x_0,y_0)$. 如果无法验证则可以通过一些其他的充分条件来得到: 通过借助 Hessian 矩阵. 如果额外假设 $f(x,y)$ 具有连续的三阶偏导数, 并且在 (x_0,y_0) 处一阶导均为 0, 那么我们有二阶 Taylor 公式

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0) + o((\Delta x)^2+(\Delta y)^2).$$

但实际上右式第二项还可以写成二次型的形式, 即

$$\frac{1}{2!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\Delta x & \Delta y\end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{xy}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta x \\ \Delta y\end{bmatrix},$$

其中, 矩阵 $\begin{bmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{xy}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0)\end{bmatrix}$ 称为**Hessian 矩阵**, 记作 $\mathbf{H}_f(x_0,y_0)$. 如果

- Hessian 矩阵正定或负定, 那么分别对应 (x_0,y_0) 一定是极小值点或极大值点;
- Hessian 矩阵不定, 那么 (x_0,y_0) 一定不是极值点;
- Hessian 矩阵不满秩, 那么无法确定 (x_0,y_0) 是否为极值点.

这三种情况分别对应于 Hessian 矩阵的行列式大于 0、小于 0 和等于 0 的情形. 其中第二种情形是在一元函数时我们未曾遇到过的, 要注意区分.

例 12.16 (2023 高数 A 期末)**.** 求函数 $f(x,y)=(y-x^2)(y-x^3)$ 的所有极值点.

解答. 首先求偏导数

$$f_x = 5x^4 - 3yx^2 - 2yx, \quad f_y = 2y - x^2 - x^3.$$

解出所有可能得稳定点为

$$P_1(0,0), \quad P_2(1,1), \quad P_3\left(\frac{2}{3},\frac{10}{27}\right).$$

现在我们计算二阶偏导数

$$f_{xx} = 20x^3 - 6yx - 2y, \quad f_{xy} = -2x - 3x^2, \quad f_{yy} = 2.$$

下面计算在三个点处 Hessian 矩阵的行列式, 我们有

$$\det \mathbf{H}_f(P_1) = 0, \quad \det \mathbf{H}_f(P_2) = -1 < 0, \quad \det \mathbf{H}_f(P_3) = \frac{8}{27} > 0.$$

注意到 $\mathbf{H}_f(P_3) = \begin{bmatrix} 100/27 & -8/3 \\ -8/3 & 2 \end{bmatrix}$, 所以 Hessian 矩阵正定, 知 P_3 为极小值点, 极小值为 $-4/729$. 而 P_2 不为极值点, P_1 则暂时不能确定.

为了确定 $P_1(0,0)$ 是否为极值点, 我们直接带入计算. 注意到 $f(0,0) = 0, f(x,0) = x^5$, 所以在 P_1 的任意小邻域内都同时有 > 0 和 < 0 的点. 这说明 P_1 不是极值点.

综上, f 只有一个极值点在 $(2/3, 10/27)$ 处, 是极小值点, 极小值为 $-4/729$. □

最后我们讨论含有约束条件的极值和最值问题, 许多情形我们要考虑函数 $f(x,y)$ 在给定限制条件 $\varphi(x,y) = 0$ 的极值与最值问题. 此时 Lagrange 乘数法能告诉我们这类问题的极值点 (x_0, y_0) 一定是满足如下方程的稳定点: 存在实数 λ 使得

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0) + \lambda\varphi_x(x_0,y_0) = 0; \\ f_y(x_0,y_0) + \lambda\varphi_y(x_0,y_0) = 0; \\ \varphi(x_0,y_0) = 0. \end{cases}$$

对于最值问题时, 我们需要注意最值点只能取在区域边界上或者是极值点处, 前者需要纳入考虑.

例 12.17. 设正整数 $n \geqslant 3$, 求单位圆内接 n 边形面积的最大值.

解答. 设 n 条边所对圆心角为 $\theta_1, \cdots, \theta_n$, 其中 $\theta_i \in (0, 2\pi)$ 且满足 $\theta_1 + \cdots + \theta_n = 2\pi$. 多边形面积为

$$S = f(\theta_1, \cdots, \theta_n) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \sin\theta_i.$$

为了严谨性, 我们需要考虑 $\theta_i \in [0, 2\pi]$, 此时满足 $\theta_1 + \cdots + \theta_n = 2\pi$ 的点 $(\theta_1, \cdots, \theta_n)$ 构成一个有界闭集, 从而 f 为有界闭集上的连续函数, 一定存在最大值. 如果该最大值不在边界取到, 根据 Lagrange 乘数, 必定满足

$$\frac{1}{2}\cos\theta_i + \lambda = 0$$

对所有 i 成立. 此时所有 θ_i 均相等, 即 $\theta_i = 2\pi/n$, $S = \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$.

如果在边界上, 那么存在一个 θ_i 为 $0, 2\pi$, 后者 $S = 0$ 不为最大值. 对于前一情形, 化为 $(n-1)$ 边形的情形, 我们考虑对 n 施行归纳法即可. 当 $n = 3$ 时, 如果有某个 θ_i 为 0, 那么可得到 $S = 0$, 也不可能为最大值. 从而可知面积最大值为 $S = \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$. □

注 12.18 此题还可以使用 Jensen 不等式来证明, 但需要注意到 $\sin\theta$ 仅在 $\theta \in [0, \pi]$ 是上凸的, 所以需要先处理存在一个圆心角大于 π 的情况. 在此情形, 不妨 $\theta_1 > \pi$, 那么利用和差化积可知

$$\sin\theta_1 + \sin\theta_2 = 2\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2} \leqslant 2\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2},$$

于是我们可以用圆心角为 $\frac{\theta_1+\theta_2}{2}, \frac{\theta_1+\theta_2}{2}, \theta_3, \cdots, \theta_n$ 的多边形替代原本的多边形, 此时

面积不减. 然后针对这个多边形, 利用 $\sin\theta$ 的上凸性和 Jensen 不等式可知

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sin\theta_i \leqslant \frac{n}{2}\sin\frac{\theta_1+\cdots+\theta_n}{n} = \frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}.$$

§13. 期末考试复习

一元函数微分学应用. 这一部分主要有三个重要的知识板块.

- **微分中值定理** (见第8节).
  - 函数零点问题, 证明存在性, 估计零点个数.
  - 导数与斜率的转化, 将构造满足要求的导数的问题转化为构造满足要求的斜率的问题 (例13.1, Darboux 定理8.6的证明).
  - 构造辅助函数, 对不同函数使用中值定理 (例13.5, 14.18).
  - 利用中值定理证明 $f(x)-f(y)$ 型不等式.
- **L'Hôpital 法则及 Taylor 公式** (见第9, 10节).
  - 利用这两者求极限 (例13.4).
  - 利用基本函数的 Taylor 公式求复杂函数的 Taylor 公式和高阶导数 (多元情形例13.12, 13.16).
  - 利用带 Lagrange 余项的 Taylor 公式证明不等式 (例14.1).
- **函数的性质** (见第10节).
  - 函数的极值和最值 (例14.13), 以及相关的利用极值点证明函数恒零 (例13.3, 多元情形例13.13).
  - 单调性与凹凸性 (例14.17).

例 13.1 (2023 高数 B 期末). 令 $P(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数, 满足 $P(0)=0, P(1)=1$. 假设 $P(x)$ 在 $(0,1)$ 上可导且 $P'(x)>0$ 对任意 $x\in(0,1)$ 成立. 证明对任意正实数 A,B 和正整数 n, 都存在 $\theta_0,\cdots,\theta_n\in(0,1)$ 使得

$$0<\theta_0<\cdots<\theta_n<1,$$

并且

$$(A+B)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{f'(\theta_k)}\frac{n!}{k!(n-k)!}A^{n-k}B^k.$$

解答. 本题选取的自由度过多, 但又不能太随意地选取 θ_i, 否则无法保证顺序条件. 所以我们转而求助于微分中值定理, 希望先选取分点

$$0=x_0<x_1<\cdots<x_n<x_{n+1}=1$$

满足等式

$$(A+B)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{x_{k+1}-x_k}{P(x_{k+1})-P(x_k)}\frac{n!}{k!(n-k)!}A^{n-k}B^k,$$

然后只需要在区间 (x_k,x_{k+1}) 中找 θ_k 使得

$$P'(\theta_k)=\frac{P(x_{k+1})-P(x_k)}{x_{k+1}-x_k}$$

即可. 为让前一个等式成立, 我们令

$$t_k=\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{A^{n-k}B^k}{(A+B)^n},$$

那么 $\sum_{k=0}^n t_k=1$. 前述求和等式化为

$$1=\sum_{k=0}^n t_k\frac{x_{k+1}-x_k}{P(x_{k+1})-P(x_k)},$$

只需要取 $P(x_{k+1})-f(x_k)=t_k$, 即让 $P(x_k)=\sum_{i=0}^{k-1}t_i$ 即可. 这样的 x_k 的存在性可以按 k 从小到大的顺序依次由介值定理保证 (在 $P'(x)>0$ 的情形下 P 是严格单调递增的, 所以可以直接唯一地选取这些 x_k, 但在一般情形只需要利用介值定理一个一个选即可). 从而我们可以找到满足条件的 θ_i. □

注 13.2 此题中的条件 $P'(x)>0$ 是并不需要的. 但是在原题中并没有要求 A,B 均为正, 这应该是不对的. 对 A,B 中可以有负数的情形, 例如取 $P(x)=x^2$ 并让 $n=1,A+B=0$, 那么我们是无法找到 $0<\theta_1<\theta_2<1$ 使得 $\frac{1}{2\theta_1}-\frac{1}{2\theta_2}=0$ 的.

例 13.3 (2020 数分 I 期末). 令 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是一个连续函数, 且在 (a,b) 上二阶可导. 假设 $f(a)=f(b)=0$ 且存在 $B:(a,b)\to\mathbb{R}$ 和 $C:(a,b)\to(-\infty,0)$ 使得

$$f''(x)+B(x)f'(x)+C(x)f(x)=0$$

对任意 $x\in(a,b)$ 成立, 证明 f 在 $[a,b]$ 上恒为零.

解答. 此为例10.15中 $A=B=0,r(x)\equiv 0$ 的特殊情形, 也是证明的本质. 但本题只假设了 f 是二阶可导的, 使用 Taylor 公式时需要小心, 如果展开到二阶则只能使用带 Peano 余项的版本. 在此我们再提供一个逻辑上更加严谨的书写范式.

由于 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 从而 f 可以在 $[a,b]$ 上取到最大值和最小值. 为证明 f 恒等于零, 只需证明 f 的最大最小值均为 0. 由于 $f(a)=f(b)=0$, 那么 f 的最大值非负. 如果 f 在 x_0 处取到严格正的最大值, 那么 $x_0\in(a,b)$ 从而 x_0 也是极大值点. 由 Fermat 定理知 $f'(x_0)=0$. 带入方程可知

$$f''(x_0)=-C(x_0)f(x_0)>0.$$

另一方面, 在 x_0 处做带 Peano 余项的二阶 Taylor 公式, 有

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)h^2+o(h^2).$$

结合 $f''(x_0)>0$ 知当 h 充分小时,

$$f(x_0+h)\geqslant f(x_0)+\frac{1}{4}f''(x_0)h^2>f(x_0),$$

与 x_0 是极大值点矛盾. 所以 f 的最大值为 0, 类似可证 f 的最小值为 0, 从而 f 在 $[a,b]$ 上恒为零. □

例 13.4 (2022 数分 I 期末)**.** 计算极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{[1+\ln(1+x)]^{\frac{1}{\tan x}}-e(1-x)}{x^2}.$$

解答. 我们目的是将分子做带 Peano 余项的 Taylor 展开到二阶, 核心在于处理分子的第一项. 我们将其变为 e 的指数, 得到

$$[1+\ln(1+x)]^{\frac{1}{\tan x}}=\exp\left(\frac{\ln[1+\ln(1+x)]}{\tan x}\right)=e\cdot\exp\left(\frac{\ln[1+\ln(1+x)]}{\tan x}-1\right)$$

由于

$$\begin{aligned}\frac{\ln[1+\ln(1+x)]}{\tan x}&=\frac{\ln[1+\ln(1+x)]}{x}\cdot\frac{x}{\tan x}\\&=\frac{\ln[1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)]}{x}\cdot\frac{x}{x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}\\&=\left[\left(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\right)-\frac{1}{2}\left(x-x^2\right)+\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right]\cdot\left(1-\frac{x^2}{3}+o(x^2)\right)\\&=1-x+\frac{5}{6}x^2+o(x^2).\end{aligned}$$

由此给出

$$[1+\ln(1+x)]^{\frac{1}{\tan x}}=e\left(1+\left(-x+\frac{5}{6}x^2+o(x^2)\right)+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right).$$

由此得到原式分子为 $\frac{4e}{3}\cdot x^2+o(x^2)$, 从而原极限为 $\frac{4e}{3}$.

□

例 13.5 (2020 数分 I 期末)**.** 令 $f(x)$ 是闭区间 $[0,1]$ 上的连续函数且在开区间 $(0,1)$ 可导. 证明存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$f(1)-f(0)=(\ln\sqrt{3})(1+2\xi)f'(\xi).$$

解答. 为凑出 $(1+2\xi)f'(\xi)$ 的形式, 我们希望对形如 $f(\varphi(x))$ 的函数使用微分中值定理. 此时我们注意到有 $[f(\varphi(x))]'=f'(\varphi(x))\varphi'(x)$, 为了取 $\varphi(x)=\xi$ 时得到我们想要的形式, 我们需要找函数 $\varphi(x)$ 满足微分方程

$$\varphi'(x)=2\varphi(x)+1=2\left(\varphi(x)+\frac{1}{2}\right).$$

该微分方程的通解满足 $\varphi(x)+\frac{1}{2}=Ce^{2x}$, 我们此处只需取 $\varphi(x)=e^{2x}-\frac{1}{2}$ 即可.

令函数 $g(x)=f(e^{2x}-\frac{1}{2})$, 令 $a=\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2})$, $b=\frac{1}{2}\ln(\frac{3}{2})$, 那么由微分中值定理知存在 $\eta\in(a,b)$ 使得 (这里还需要验证当 $x\in[a,b]$ 时 $e^{2x}-\frac{1}{2}\in[0,1]$, 但这由单调性易得)

$$g'(\eta)=\frac{g(b)-g(a)}{b-a}=\frac{f(1)-f(0)}{\ln\sqrt{3}}.$$

现在令 $\xi = e^{2\eta} - \frac{1}{2} \in (0,1)$(依然由 $e^{2x} - \frac{1}{2}$ 的单调性), 从而

$$\frac{f(1)-f(0)}{\ln\sqrt{3}} = g'(\eta) = f'(\varphi(\eta))\varphi'(\eta) = f'(\xi)(2\xi+1),$$

知该 ξ 满足要求.

沈城烽的另解. 另一种方式可以不用解常微分方程, 考虑

$$g(x) = \frac{f(1)-f(0)}{(\ln\sqrt{3})(1+2x)}$$

是 $[0,1]$ 上的连续函数, 并且 $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = f(1)-f(0)$. 现在考虑函数

$$h(x) = f(x) - f(0) - \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t.$$

那么 $h(0)=h(1)=0$, $h(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 在 $(0,1)$ 可导并且 $h'(x) = f'(x) - g(x)$. 根据 Rolle 中值定理, 存在 $\xi \in (0,1)$ 使得

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(1)-f(0)}{(\ln\sqrt{3})(1+2\xi)}.$$

满足题目要求. □

解析几何. 这一部分没有太多知识上的难度和太困难的题目 (题目可以参考书上习题), 主要是一些概念的记忆, 我们大致罗列如下.

- 向量代数的运算 (内积、外积等等), 运算的几何直观.
- 空间平面与直线方程, 平面的法向量、直线的方向向量.
- 平面与直线、直线与直线的位置关系, 距离的计算.
- 曲面与曲线的计算, 二次曲面的分类 (名称可能需要记忆). 曲线的弧长、切线、法平面.

多元函数微分学. 多元函数的一部分考察要点是概念性的, 多元函数有许多概念上的细微差别和一元函数不同, 需要对一些概念的定义有更深刻的理解.

- **定义及计算.**(见第11节).
  - 多元函数极限的定义, 极限计算及极限不存在的判断方式 (例14.3, 14.11).
  - 多元函数的连续性, 可导性和可微性的区别和互推关系. 可微的定义, 以及可微和偏导存在之间的区别. 从定义出发证明函数的可微性或不可微性 (例14.11, 14.15).
  - 梯度、方向导数的概念和计算 (例14.15).
  - 链式求导法则的求导计算 (例13.6, 14.4).
- **应用.**(见第12节).
  - 中值定理 (例13.10) 与 Taylor 公式 (例13.7), 辅助计算高阶导数 (例13.12, 13.16).

- 隐函数定理, 套用定理证明函数存在以及隐函数的导数计算 (例13.8, 13.12, 13.15).
- 极值问题、条件极值问题 (例14.5), 证明函数恒零 (例13.13).

例 13.6 (2023 数分 III 期末)**.** 令 m, n 为正整数. 一个函数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 称为 m 次齐次的如果对任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 和 $t \in \mathbb{R}$ 都有

$$f(t\mathbf{x}) = t^m f(\mathbf{x}).$$

证明一个可微函数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是 m 次齐次的当且仅当

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f_{x_i}(\mathbf{x}) = m f(\mathbf{x}).$$

解答. 对任意给定的 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 我们令 $F(t) = f(t\mathbf{x})$, 那么 $F(1) = f(\mathbf{x})$. 如果 f 可微那么 F 是可导函数, 且满足

$$F'(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_{x_i}(t\mathbf{x}).$$

如果 F 是 m 次齐次的, 那么我们还有 $F'(t) = mt^{m-1} f(\mathbf{x})$, 带入 $t = 1$ 得到

$$m f(\mathbf{x}) = F'(1) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_{x_i}(\mathbf{x}).$$

反之, 如果等式 $\sum_{i=1}^{n} x_i f_{x_i}(\mathbf{x}) = m f(\mathbf{x})$ 成立, 那么我们带入得到

$$F'(t) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{n} t x_i f_{x_i}(t\mathbf{x}) = \frac{m}{t} f(t\mathbf{x}) = \frac{m}{t} F(t).$$

这给出一个常微分方程, 分离变量得 $F'(t)/F(t) = m/t$, 两侧同时对 t 作不定积分得到 $\ln|F(t)| = m \ln|t| + C$, 可知 $F(t) = Ct^m$. 带入初值 $F(1) = f(\mathbf{x})$ 得到 $F(t) = t^m f(\mathbf{x})$, 由此知 f 是齐次的. □

例 13.7. 设 $f(u, v)$ 为微分足够多次的函数, 试按照 r 的方幂将函数

$$F(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + r\cos\varphi, y + r\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$

展开到 r^4 项.

解答. 我们承认关于 Taylor 公式和积分交换计算顺序的事实. 先将 f 作展开得到

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = \sum_{i+j=0}^{4} \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(x_0, y_0) \cdot (\Delta x)^i (\Delta y)^j + o(\rho^4).$$

带入 $(\Delta x, \Delta y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, 就得到

$$F(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i+j=0}^{4} \frac{r^{i+j}}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(x_0, y_0) \cdot \cos^i\varphi \sin^j\varphi\,\mathrm{d}\varphi + o(r^4).$$

右式对三角函数的积分结果可以参见例6.12, 要注意到只有 $\sin\varphi$ 和 $\cos\varphi$ 的幂次均为偶数的项定积分结果不为零. 最后我们得到

$$F(r)=f(x,y)+\frac{r^2}{4}(f_{xx}(x,y)+f_{yy}(x,y))+\frac{r^4}{64}(f_{xxxx}(x,y)+2f_{xxyy}(x,y)+f_{yyyy}(x,y))+o(r^4).$$

此题书上的答案系数有误. □

例 13.8 (2021 高数 B 期末)**.** 令函数

$$F(x,y,z)=x^3+(y^2-1)z^3-xyz.$$

(1) 证明存在一个 $(1,1)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中的邻域, 使得在该邻域上存在隐函数 $z(x,y)$ 满足 $z(1,1)=1$ 且 $F(x,y,z(x,y))=0$;

(2) 找出使得函数 $z(x,y)$ 下降最快的方向 $\mathbf{v}$;

(3) 假设 $\mathbf{n}\in\mathbb{R}^3$ 是平面 $x+2y-2z=1$ 的法向量, 并且 $\mathbf{n}$ 的 z-分量为正. 求向量 $\mathbf{n}$ 和 $(\mathbf{v},0)$ 的余弦值.

解答. (1) 我们计算出

$$F(1,1,1)=0,\quad F_z(1,1,1)=-1\neq 0,$$

从而由隐函数存在定理知结论成立.

(2) 我们计算出

$$F_x(1,1,1)=3-1=2,\quad F_y(1,1,1)=2-1=1.$$

从而由隐函数存在定理知

$$z_x(1,1)=-\frac{F_x(1,1,1)}{F_z(1,1,1)}=2,\quad z_y(1,1)=-\frac{F_y(1,1,1)}{F_z(1,1,1)}=1.$$

由此得到 $z(x,y)$ 在 $(1,1)$ 处的**梯度**为

$$\operatorname{grad} f(1,1)=(z_x(1,1),z_y(1,1))=(2,1).$$

对于一个方向向量 $\mathbf{v}$, 我们有方向导数 $\partial_{\mathbf{v}}z(1,1)=\operatorname{grad} f(1,1)\cdot\mathbf{v}$. 于是函数下降最快的方向为负梯度方向, 即

$$\mathbf{v}=-\frac{\operatorname{grad} f(1,1)}{|\operatorname{grad} f(1,1)|}=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

注 13.9 这里下降最快的方向和最慢的方向来自 Cauchy 不等式的取等条件, 分别对应梯度方向和负梯度方向, 写过程时将这一部分更详细地展开证一下. 同时需要注意的是方向导数的概念只对单位向量有意义, 这类求方向的问题最终得到的结果需要化为单位向量.

(3) 我们可以选取一个 $\mathbf{n}$ 为 $(-1,-2,2)$. 于是夹角余弦值为

$$\cos\langle\mathbf{n},(\mathbf{v},0)\rangle=\frac{\mathbf{n}\cdot(\mathbf{v},0)}{|\mathbf{n}|\cdot|(\mathbf{v},0)|}=\frac{4/\sqrt{5}}{3}=\frac{4}{15}\sqrt{5}.$$

□

例 13.10 (2022 高数 B 期末)**.** 令 $r > 0, D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} : x^2 + y^2 < r^2\right\}$. 函数 $f : D \to \mathbb{R}$ 满足 $f \in C^3(D), f(0,0) = 0$ 且 $\mathrm{d}f(0,0) = 0$. 假设 f 在 $(0,0)$ 处的二阶微分满足

$$\mathrm{d}^2 f = E\,\mathrm{d}x^2 + F\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + G\,\mathrm{d}y^2.$$

(1) 证明存在 D 上的两个函数 $a : D \to \mathbb{R}$ 和 $b : D \to \mathbb{R}$ 使得对任意 $(x,y) \in D$ 有

$$f(x,y) = xa(x,y) + yb(x,y).$$

(2) 如果 $E > 0, EG - F^2 < 0$, 那么在 $\mathbb{R}^3$ 中 $(0,0,0)$ 的充分小邻域内曲面 $z = f(x,y)$ 近似于哪类二次曲面, 画出此类二次曲面的草图. 并由此判断是否存在 $\mathbb{R}^2$ 中 $(0,0)$ 的充分小邻域 D_1 使得存在 D_1 上的一一 C^1 变量变换 $x = x(u,v), y = y(u,v)$ 使得

$$f(x(u,v), y(u,v)) = u^2 - v^2.$$

解答. (1) 使用微分中值定理可知对任意 $(x,y) \in D$ 都存在 $\theta = \theta(x,y) \in (0,1)$ 使得

$$f(x,y) = f(0,0) + f_x(\theta x, \theta y)x + f_y(\theta x, \theta y)y, \quad a(0,0) = 0,\ b(0,0) = 0.$$

当 $(x,y) \neq (0,0)$ 时, 令 $a(x,y) = f_x(\theta x, \theta y), b(x,y) = f_y(\theta x, \theta y)$ 即可.

(2) 近似曲面为 $z = Ex^2 + Fxy + Gy^2$, 由于 $E > 0, EG - F^2 < 0$ 知该曲面为双曲抛物面 (马鞍面). 这样的变量代换是存在的.

□

注 13.11 这是一道十分怪异的题目, 第一问没有要求任何连续性条件, 完全可以随意选取 a, b 两个函数, 只需要人为规定 $a(0,0) = b(0,0) = 0$ 即可. 第二问最后变量代换存在性的证明完全超越了高等数学的范畴, 这一题目的目的应该就是根据近似曲面是马鞍面从而回答一个 “存在” 即可. 对于具体的函数 f 这样的构造方式可以见例14.33.

例 13.12 (2022 数分 III 期中)**.** 令函数 $z = z(x,y)$ 由方程

$$x + e^{yz} + z^2 = 0.$$

求点 $(-2,0,1)$ 处的偏导数 z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}.

解答. 此题可以直接隐函数求导算, 此处提供另外一种 Taylor 公式待定系数的计算方式, 这种方式有时可以降低计算高阶导数的计算量, 同时也可以作为一种辅助检查计算正确性的方式.

令 $u = x + 2, v = y$, 将 $z(x,y)$ 在 $(-2,0)$ 附近作展开有

$$z(x,y) = z(-2+u, v) = 1 + Au + Bv + Cu^2 + Duv + Ev^2 + \cdots.$$

然后我们带入原方程, 将所有项都展开成关于 u, v 和 $(z-1)$ 的幂次求和. 这里尤其要注意, 需要将 e^{yz} 写成 $e^y \cdot e^{y(z-1)}$ 的形式再作展开. 然后只保留关于 $u, v, z-1$ 三者的二次以下的项 (因为这三个都是小量, 所以舍弃高阶项是合理的), 得到

$$u - 2 + (1 + y + \frac{y^2}{2} + \cdots)(1 + y(z-1) + \cdots) + (z-1)^2 + 2(z-1) + 1 = 0.$$

带入所设的 $z-1$ 的表达式, 有

$$u + \left(v + \frac{v^2}{2} + Auv + Bv^2\right) + (A^2u^2 + 2ABuv + B^2v^2) + 2(Au + Bv + Cu^2 + Duv + Ev^2) + \cdots = 0.$$

其中 $\cdots$ 代表关于 u, v 至少三次的项. 然后我们比对各项系数, 需要各项系数均为 0. 首先利用一次项的系数解出 $A = B = -1/2$. 然后利用二次项系数解出

$$C = -\frac{1}{8}, \quad D = 0, \quad E = -\frac{1}{8}.$$

利用 Taylor 公式的唯一性, 我们知

$$z_{xx}(-2,0) = 2C = -\frac{1}{4}, \quad z_{xy}(-2,0) = D = 0, \quad z_{yy}(-2,0) = 2E = -\frac{1}{4}.$$

□

例 13.13 (2017 数分 III 期中)**.** 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个满足 $f(0) = 0$ 的严格单调递增函数. 令 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是一个有界区域. 假设函数 $z(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 上连续且在 D 上具有两个偏导数 z_x, z_y, 并且满足:

(1) $z(x,y) = 0$ 对所有 $(x,y) \in \partial D$ 成立;

(2) $z_x(x,y) + z_y(x,y) = f(z(x,y))$ 对任意 $(x,y) \in D$ 成立.

证明 $z(x,y)$ 在 D 上恒为 0.

解答. 这一类针对给定导数条件去证明有界闭集上函数恒为零的一种常用方法是去证明该函数无法取到正的最大值和负的最小值, 一个经典的例子是例13.3.

由于 z 是有界闭集 $\overline{D}$ 上的连续函数, 那么 z 可以取到最大最小值, 我们只需证明这两者均为 0 即可. 由于 z 在 ∂D 上取值均为 0, 那么 z 的最大值至少为 0. 假设 z 在 (x_0, y_0) 处取到严格大于 0 的最大值, 那么 (x_0, y_0) 一定位于 D 的内部. 根据条件

$$z_x(x_0,y_0) + z_y(x_0,y_0) = f(z(x_0,y_0)) > f(0) = 0.$$

于是 $z_x(x_0,y_0), z_y(x_0,y_0)$ 中至少一个严格大于 0. 不妨设 $z_x(x_0,y_0) > 0$, 那么我们考虑一元函数 $z(x,y_0)$, 该函数在 $x = x_0$ 处为一个极大值点, 根据偏导数的定义和 Fermat 定理知 $z_x(x_0,y_0) = 0$, 矛盾. 同样地, 我们可以说明 z 在 D 内部无法取到一个严格小于 0 的最小值. 所以 z 在 $\overline{D}$ 上恒为零. □

注 13.14 这里用到了当 (x_0, y_0) 是 D 的内点时, 集合 $\{x : (x, y_0) \in D\} \subset \mathbb{R}$ 也包含 x_0 的一个邻域, 从而固定变量 $y = y_0$ 时, $x = x_0$ 依然是一元函数 $z(x, y_0)$ 的极大值点. 本题需要注意的一个重点是**题目中并没有要求 z 是可微的, 所以 z 可能不存在其他方向的方向导数.** 此时如果考虑沿方向 $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ 具有方向导数 $\partial_{\mathbf{v}} z = \frac{1}{\sqrt{2}} f(z)$ 是有逻辑错误的, 替代方法就是直接考虑 x-方向和 y-方向即可.

例 13.15 (2022 高数 B 期末)**.** 在 $\mathbb{R}^2$ 中, 计算曲线

$$x^2(y+1)^2 + \int_0^{xy} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^3+1}} = 1$$

在 $(1,0)$ 处的切线.

解答. 记 $F(x,y) = x^2(y+1)^2 + \int_0^{xy} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^3+1}} - 1$, 那么

$$F_x(x,y) = 2x(y+1)^2 + \frac{y}{\sqrt{(xy)^3+1}},$$

$$F_y(x,y) = 2x^2(y+1) + \frac{x}{\sqrt{(xy)^3+1}}.$$

由此得到 $F_x(1,0) = 2, F_y(1,0) = 3$. 于是根据隐函数定理, 在 $(1,0)$ 处切线的斜率为

$$y'(x)|_{(1,0)} = -\frac{F_y(1,0)}{F_x(1,0)} = -\frac{3}{2}.$$

从而切线方程为

$$y = -\frac{3}{2}(x-1).$$

□

例 13.16 (2023 数分 III 期中)**.** 计算 $f(x,y) = e^{-x^2 y}\sin x$ 在 $(0,0)$ 处的 2023 阶偏导数.

解答. 我们考虑 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的 2023 阶 Taylor 公式, 我们有

$$f(x,y) = \left(\sum_{m=0}^{674} \frac{(-1)^m}{m!}(x^2 y)^m + o(\rho^{2023})\right)\left(\sum_{n=0}^{1011} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o\left(\rho^{2023}\right)\right).$$

为计算 2023 阶导数, 我们需要考虑所有次数为 2023 的项, 即 $3m + 2n + 1 = 2023$. 这给出 $m = 2k, n = 1011 - 3k$, 其中 $0 \leqslant k \leqslant 337$, 对应于 $x^{2023-2k}y^{2k}$ 的项. 于是我们得到

$$\frac{\partial^{2023} f}{\partial x^{2023-2k}\partial y^{2k}}(0,0) = (2023-2k)!(2k)!\frac{(-1)^{2k}}{(2k)!}\cdot\frac{(-1)^{1011-3k}}{(2023-6k)!} = (-1)^{k+1}\frac{(2023-2k)!}{(2023-6k)!},$$

其中 $0 \leqslant k \leqslant 337$, 其余 2023 阶偏导数均为 0. □

§14. 往年题例题

说明. 此部分为 2024 年唐思远老师的《高等数学 A》课程作业, 内容是由部分往年高等数学和数学分析课程考试题所构成的额外作业题和模拟练习. 但所有题目均来自往年考生的回忆版本, 与考场上的实际考试题可能有所出入. 同时这一部分的题目部分解答可能较为简略, 且可能有所错漏, 这些解答并不可视为考试的标准答案, 请谨慎参考.

作业题拾遗.

例 14.1 (2022 数分 I 期末)**.** 假设函数 $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ 满足对任意 $k \geqslant 0$ 都存在正实数 M_k 使得

$$|x|^k f(x) + |f^{(k)}(x)| < M_k, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

证明对任意 $k, \ell \geqslant 0$ 都存在正实数 $M_{k,\ell}$ 使得

$$|x|^k |f^{(\ell)}|(x) < M_{k,\ell}.$$

解答. **想法.** 我们使用带 *Lagrange* 余项的 *Taylor* 公式来证明本题. 为了得到带 $x^k f^\ell(x)$ 的项, 我们注意到如下展开

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^\ell}{\ell!} f^{(\ell)}(x) + \frac{h^{\ell+1}}{(\ell+1)!} f^{(\ell+1)}(\xi),$$

其中 ξ 介于 x 与 $x+h$ 之间. 如果我们对 ℓ 施行数学归纳法, 并取 h 为 x 的若干次方, 那么上式左右两端只有 $\frac{h^\ell}{\ell!} f^{(\ell)}(x)$ 和 $\frac{h^{\ell+1}}{(\ell+1)!} f^{(\ell+1)}(\xi)$ 是没有控制的, 其余每一项都可以被某个 $M_{k,j}$ 控制, 其中 $j < \ell$. 而我们的目的是估计 $\frac{h^\ell}{\ell!} f^{(\ell)}(x)$, 所以我们需要精心选取 h 使得 $\frac{h^{\ell+1}}{(\ell+1)!} f^{(\ell+1)}(\xi)$ 能够被估计. 但我们关于 $\ell+1$ 阶导数仅有的估计来自条件, 所以我们将原等式两侧乘 x^m, 得到

$$x^m f(x+h) = x^m f(x) + x^m hf'(x) + \cdots + x^m \frac{h^\ell}{\ell!} f^{(\ell)}(x) + x^m \frac{h^{\ell+1}}{(\ell+1)!} f^{(\ell+1)}(\xi).$$

并取 (m, h) 使得 $x^m h^\ell = x^k$, $x^m h^{\ell+1} = 1$. 这得到 $h = x^{-k}, m = k(\ell+1)$.

现在我们给出详细的证明过程. 我们对 ℓ 施行归纳法, $\ell = 0$ 时结论由条件保证. 对于一般的 ℓ 时和一个给定的 k, 我们有

$$x^m f(x+h) = x^m f(x) + x^m hf'(x) + \cdots + x^m \frac{h^\ell}{\ell!} f^{(\ell)}(x) + x^m \frac{h^{\ell+1}}{(\ell+1)!} f^{(\ell+1)}(\xi),$$

其中 ξ 介于 x 与 $x+h$ 之间. 现在对于 $x \neq 0$, 我们选取 $h = |x|^{-k} \cdot (\operatorname{sgn} x), m = k(\ell+1)$. 于是得到

$$\begin{aligned}
&|x^k||f^{(\ell)}(x)| = |x^m h^\ell f^{(\ell)}(x)| \\
=&\ell! \left| x^m f(x+h) - x^m f(x) - x^m hf'(x) - \cdots - x^m \frac{h^{\ell+1}}{(\ell+1)!} f^{(\ell+1)}(\xi) \right| \\
\leqslant&\ell! \left(|x^{k(\ell+1)} f(x+h)| + |x^{k(\ell+1)} f(x)| + |x^{k\ell} f'(x)| \cdots + \frac{|x^{2\ell} f^{\ell-1}(x)|}{(\ell-1)!} + \frac{|f^{(\ell+1)}(\xi)|}{(\ell+1)!} \right) \\
\leqslant&\ell! \left(2M_{k(\ell+1),0} + M_{k\ell,1} + \cdots + M_{2k,\ell-1} + M_{\ell+1} \right).
\end{aligned}$$

其中我们利用到了 h 与 x 同号, 从而保证了

$$|x^{k(\ell+1)}f(x+h)| \leqslant \left(\frac{|x|}{|x+h|}\right)^{k(\ell+1)} M_{k(\ell+1),0} \leqslant M_{k(\ell+1),0}.$$

于是我们只需选取 $M_{k,\ell} = \ell!\left(2M_{k(\ell+1),0} + M_{k\ell,1} + \cdots + M_{2k,\ell-1} + M_{\ell+1}\right)$ 即可. □

例 14.2 (2022 数分 I 期末)**.** 设 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上二阶可导且满足 $|f(x)| \leqslant 1$ 和

$$[f(0)]^2 + [f'(0)]^2 = 4.$$

证明存在 $\xi \in (-2,2)$ 使得 $f(\xi) + f''(\xi) = 0$.

解答. 方法一. 我们考虑函数 $g(x) = [f(x)]^2 + [f'(x)]^2$, 那么 $g'(x) = 2f'(x)[f(x) + f''(x)]$, 我们希望找到 ξ 使得 $g'(\xi) = 0$ 同时规避 $f'(\xi) = 0$. 规避的方法是希望在 $g'(\xi) = 0$ 的同时让 $g(\xi)$ 足够大, 从而我们目标是在区间内部找 $g(x)$ 的最大值点.

为了让 $g(x)$ 在某区间内部有不小于 4 的最大值点, 我们要先找到两个使得 $g(x)$ 较小的点, 同时让这两个点所构成的区间包含 0 即可. 在 $[-2,0]$ 和 $[0,2]$ 上分别对 $f(x)$ 使用中值定理, 可以找到 $c_1 \in (-2,0)$ 和 $c_2 \in (0,2)$ 使得

$$|f'(c_1)| = \frac{|f(-2) - f(0)|}{2} \leqslant 1, \quad |f'(c_2)| = \frac{|f(2) - f(0)|}{2} \leqslant 1.$$

从而 $g(c_1) \leqslant 2, g(c_2) \leqslant 2$. 此时在区间 $[c_1, c_2]$ 上考虑函数 $g(x)$, 由于 $g(0) = 4 > g(c_1), g(c_2)$, 从而 $g(x)$ 在 (c_1, c_2) 内取到最大值且该值至少为 4. 不妨 $g(\xi)$ 取到 $g(x)$ 在 $[c_1, c_2]$ 内的最大值, 那么

$$g'(\xi) = 0, \quad g(\xi) \geqslant 4.$$

后者蕴含 $|f'(\xi)| \geqslant \sqrt{3}$, 这也说明了 $f(\xi) + f''(\xi) = 0$.

方法二 (本人原始做法). 我们考虑函数 $g(x) = [f(x)]^2 + [f'(x)]^2$, 那么 $g'(x) = 2f'(x)[f(x) + f''(x)]$, 我们希望找到 ξ 使得 $g'(\xi) = 0$ 同时规避 $f'(\xi) = 0$.

反证法. 假设不存在 $\xi \in (-2,2)$ 使得 $f(\xi) + f''(\xi) = 0$. 为了方便后续讨论, 我们先做一些简单的处理. 由于 $|f'(0)| \geqslant \sqrt{3}$, 所以我们可以假设 $g'(0) \neq 0$, 否则取 $\xi = 0$ 即可. 并且我们可以不妨假设 $g'(0) > 0$, 不然我们可以将函数 $f(x)$ 替换为 $f(-x)$. 同时我们还可以不妨设 $f'(0) > \sqrt{3}$, 不然我们可以将 $f(x)$ 替换为 $-f(x)$.

假设 $g'(x)$ 在区间 $[0,2)$ 恒正, 那么对任意 $x \in [0,2]$ 都有 $g(x) \geqslant g(0) = 4$, 从而 $|f'(x)| \geqslant \sqrt{3}$. 由于 $f'(0) > 0$ 和 $f'(x)$ 的连续性知 $f'(x) \geqslant \sqrt{3}$ 对任意 $x \in [0,2]$ 均成立. 于是存在 $c \in (0,2)$ 使得

$$2 \geqslant |f(2) - f(0)| = 2|f'(c)| \geqslant 2\sqrt{3},$$

矛盾.

这说明 $g'(x)$ 在区间不恒正, 由 Darboux 定理 ($g'(x)$ 具有介值性) 知 $g'(x)$ 有零点. 但为了避免该零点也是 $f'(x)$ 的零点, 我们考虑下确界

$$x_0 = \inf\left\{\, x > 0 : g'(x) = 0 \,\right\}.$$

同样由 Darboux 定理知 $g'(x)$ 在区间 $[0, x_0]$ 上恒正, 特别地 $g(x_0) \geqslant g(0) = 4$, 并且和之前类似讨论可知 $f'(x_0) \geqslant \sqrt{3} > 0$. 但由于 $g'(x)$ 不一定连续所以我们分成以下两种情况:

- 如果 $g'(x_0)=0$, 那么由 $f'(x_0)\neq 0$ 知取 $\xi=x_0$ 即可;
- 如果 $g'(x_0)\neq 0$, 那么存在序列 $x_n\to x_0$, 使得 $g'(x_n)=0$. 此时我们利用 $f'(x)$ 的连续性和 $f'(x_0)>0$ 知当 n 充分大时都有 $f'(x_n)>0$. 那么就可以选取 ξ 为某个 x_n 满足 $g'(\xi)=0$ 且 $f'(\xi)>0$, 满足要求.

□

模拟练习一.

例 14.3 (2022 高数 B 期末)**.** 判断下列极限是否存在, 存在时求其极限:

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2+x^4}-1}{[\ln(1+x)]^2}$;

(2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(e^y-1)\frac{xy}{x^2+y^2}$;

(3) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+(e^y-1)^2}$.

解答. (1) 存在, 极限为

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{3}x^2+o(x^2)-1}{x^2+o(x^2)}=\frac{1}{3}.$$

(2) 存在, 极限为

$$\lim_{(x,y)\to 0}(y+o(\rho))\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^2}=0.$$

严格说明可以使用夹逼定理.

(3) 不存在. 选取 $y=0$ 时极限为 0, 选取 $y=x$ 时极限为

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+(e^x-1)^2}=\frac{1}{2}.$$

这两个极限不同.

□

例 14.4 (2022 高数 B 期末)**.** 令 $a\in\mathbb{R}$, 函数 $f,g\in C^2(\mathbb{R})$. 令函数 $h(x,t)=f(x+at)-g(x-at)$, 求 $h_{tt}-a^2h_{xx}$.

解答. 我们有

$$h_t=af'+ag',\quad h_x=f'-g'.$$

$$h_{tt}=a^2f''-a^2g'',\quad h_{xx}=f''-g''.$$

从而 $h_{tt}-a^2h_{xx}=0$. □

例 14.5 (2018 数分 III 期中)**.** 令曲线 $E\subset\mathbb{R}^3$ 由方程

$$\begin{cases}x^2+2y^2+2z^2=2;\\ x+y+z=0,\end{cases}$$

所给出. 令 $Q=(1,0,0)\in\mathbb{R}$. 求曲线 E 上的两点 P_1,P_2 分别满足

$$|P_1Q|=\min_{P\in E}|PQ|,\quad |P_2Q|=\max_{P\in E}|PQ|$$

解答. $|PQ|^2=(x-1)^2+y^2+z^2$. 注意到曲线 E 是一个椭球面和平面的交线, 是一个椭圆, 没有边界点. 从而最值点一定是极值点, 于是我们可以用 Lagrange 乘数法求得. 对于极值点 (x,y,z), 一定存在 λ,μ 使得

$$\begin{cases}2(x-1)+2\lambda x+\mu=0;\\ 2y+4\lambda y+\mu=0;\\ 2z+4\lambda z+\mu=0;\\ x^2+2y^2+2z^2=2;\\ x+y+z=0.\end{cases}$$

由前三个方程可知 $y=z$, 结合最后一个方程 $x+y+z=0$ 可知 $x:y:z=2:-1:-1$. 于是可能 (x,y,z) 只能为 $(1,-1/2,-1/2)$ 和 $(-1,1/2,1/2)$. 带入计算距离知前者为极小值后者为极大值, 从而

$$P_1=\left(1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\quad P_2=P_1=\left(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

[令一种方式是可以通过椭球面方程转化为 $|PQ|^2=1-2x+2=3-2x$. 变成求 x 的最值, 此时可以用均值不等式得到.] □

例 14.6 (2023 高数 A 期末)**.** 求函数 $f(x,y)=(y-x^2)(y-x^3)$ 的所有极值点.

解答. 见例12.16. □

例 14.7 (2020&2022 高数 B 期末)**.** 设空间 $\mathbb{R}^3$ 中不在平面 Oxy 上的一点 $P(x,y,z)$ 处的电势 $V=(\frac{2y}{z})^x$, 求在 $(1,\frac{1}{2},1)$ 处电势下降最快的方向.

解答. 我们有梯度

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}V\left(1,\frac{1}{2},1\right)&=\left(\left(\frac{2y}{z}\right)^x\ln\frac{2y}{z},\frac{2x}{z}\left(\frac{2y}{z}\right)^{x-1},-\frac{2xy}{z^2}\left(\frac{2y}{z}\right)^{x-1}\right)\Bigg|_{(1,\frac{1}{2},1)}\\&=(0,2,-1).\end{aligned}$$

所以下降最快方向为负梯度方向 $\mathbf{v}=\frac{1}{\sqrt{5}}(0,-2,1)$. □

例 14.8 (2020 数分 I 期末)**.** 令 $f(x)$ 是闭区间 $[0,1]$ 上的连续函数且在开区间 $(0,1)$ 可导. 证明存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$f(1)-f(0)=(\ln\sqrt{3})(1+2\xi)f'(\xi).$$

解答. 见例13.5. □

模拟练习二.

例 14.9 (2022 数分 I 期末). 计算极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{[1+\ln(1+x)]^{\frac{1}{\tan x}}-e(1-x)}{x^2}.$$

解答. 见例13.4. □

例 14.10 (2022 高数 B 期末). 在 $\mathbb{R}^2$ 中, 计算曲线

$$x^2(y+1)^2+\int_0^{xy}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^3+1}}=1$$

在 $(1,0)$ 处的切线.

解答. 见例13.15. □

例 14.11 (2018 数分 III 期末). 令

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续但是并不可微.

解答. 利用

$$\frac{|xy^3|}{x^2+y^4}\leqslant\frac{|y|(x^2+y^4)}{2(x^2+y^4)}\leqslant\frac{|y|}{2}$$

结合夹逼定理易知在 $(0,0)$ 处连续. 可以计算出两个偏导数在 $(0,0)$ 处均为 0. 如果在 $(0,0)$ 处可微那么必然有 $f(x,y)=o(\sqrt{x^2+y^2})$, 但是极限

$$\lim_{x\to(0,0)}\frac{xy^3}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}}$$

不存在. 这一点可以通过 $x=y^2$ 时极限发散来证明. □

例 14.12 (2022 高数 B 期末). 求 $f(x,y)=x^{\sqrt{y}}$ 在 $(1,1)$ 处带 Peano 余项的 2 阶 Taylor 公式.

解答. 见例12.7. □

例 14.13 (2022 高数 B 期末). 令实数 $p>4$, 求 $f(x)=(x^4)^{1/p}+(1-x^4)^{1/p}$ 在 $x\in[-1,1]$ 中的所有极小值.

解答. 有 $f'(x)=\frac{4}{p}x^{\frac{4}{p}-1}-\frac{4}{p}x^3(1-x^4)^{\frac{1}{p}-1}$, 解出 $f'(x)=0$ 的稳定点有 $\pm1/\sqrt[4]{2}$. 同时还需要考虑在 $x=0$ 处不可导, 但依然可能是极值点. 之后可验证出 0 是极小值点, $\pm1/\sqrt[4]{2}$ 是极大值点. 此题与例10.14基本一致, 可以参见那一题的详细过程. □

例 14.14 (2023 数分 III 期中)**.** 给定不全为 0 的实数 a, b, c, 求函数

$$f(x,y) = \frac{ax+by+c}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$$

的所有极值点.

解答. 此题可以直接求导做, 也可以考虑该函数的几何直观. 我们考虑

$$g(x,y) = \frac{f(x,y)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \cos\langle(a,b,c),(x,y,1)\rangle.$$

那么 $f(x,y)$ 的极值即为 $g(x,y)$ 的极值, 也只需要看向量 (a,b,c) 与向量 $(x,y,1)$ 的夹角. 即向量 (a,b,c) 与平面 $\{z=1\}$ 上向量的夹角余弦值最大和最小. 通过画图可以看出, 有如下三类:

(1) $c>0$ 时, 有极大值点在 $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$ 处;

(2) $c=0$ 时, 无极值点;

(3) $c<0$ 时, 有极小值点在 $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$ 处.

但需要利用空间几何解释这三类情况. □

例 14.15 (2018 数分 III 期中)**.** 构造一个函数 $f(x,y)$ 满足其在 $(0,0)$ 处两个偏导数和各方向导数均存在, 但是在 $(0,0)$ 处不可微.

解答. 实际上各方向导数存在只限制了 $f(x,y)$ 在直线 $y=kx$ 上的可导性, 但当 k 变动时对函数没有任何连续性上的限制, 所以我们有充分自由度来进行构造. 一个简单的例子是令

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & y \neq 0; \\ x, & y = 0. \end{cases}$$

此时对 $\mathbf{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$, 当 $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时都有 $\partial_{\mathbf{v}} f(0,0) = 0$; 但 $\partial_{(0,1)} f(0,0) = \partial_y f(0,0) = 1$. 这与可微性是矛盾的, 因为可微要求 $\partial_{\mathbf{v}} f = \mathbf{v} \cdot (\partial_x f, \partial_y f)$. □

例 14.16 (2022 高数 B 期末)**.** 对任意给定的实数 $p \in \mathbb{R}$, 考虑方程

$$x^p - 3x^2y + 3xy^2 - y^p = 0.$$

证明存在 1 的两个邻域 $U, W \subset \mathbb{R}$ 使得存在唯一由该方程决定的函数 $y = f(x) : U \to W$.

解答. $(1,1)$ 为该方程的解, 左侧函数关于 y 的偏导数为

$$(-3x^2 + 6xy - py^{p-1})_{(x,y)=(1,1)} = 3 - p.$$

当 $p \neq 3$ 时可以直接套用隐函数定理得到结果. 当 $p = 3$ 时该方程变为 $(x-y)^3 = 0$, 此时有唯一解 $y = x$. □

例 14.17 (2020 数分 I 期末). 对 $x \in (0, +\infty)$, 定义函数

$$f(x) = x \ln(2^{\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}}).$$

(1) 证明 f 是严格单调递增的;

(2) 求 f 的渐进线;

(3) 证明 f 是严格下凸的.

解答. (1) 换元 $y = 1/x$, 令 $g(y) = \ln(2^y + 3^y)/y$, 那么

$$g'(y) = \frac{y\frac{2^y \ln 2 + 3^y \ln 3}{2^y + 3^y} - \ln(2^y + 3^y)}{y^2} = \frac{2^y \ln 2^y + 3^y \ln 3^y - (2^y + 3^y)\ln(2^y + 3^y)}{y^2(2^y + 3^y)} < 0.$$

从而 $g(y)$ 严格单调减, $f(x)$ 严格单调增.

(2) 设**渐进线**为 $ax + b$, 那么

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ln 2, \quad b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - x \ln 2] = \lim_{y \to 0+0} \frac{\ln(\frac{2^y + 3^y}{2})}{y} = \frac{\ln 6}{2}.$$

从而渐进线为 $x \ln 2 + \frac{\ln 6}{2}$.

(3) 我们只需判断导数的单调性. 我们有

$$f'(x) = \frac{(2^{\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}})\ln(2^{\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}}) - 2^{\frac{1}{x}} \ln 2^{\frac{1}{x}} - 3^{\frac{1}{x}} \ln 3^{\frac{1}{x}}}{2^{\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}}}.$$

令 $\lambda(x) = \frac{2^{\frac{1}{x}}}{2^{\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1 + (\frac{3}{2})^{\frac{1}{x}}}$, 那么 $1 - \lambda(x) = \frac{3^{\frac{1}{x}}}{2^{\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}}}$. 我们还可以写成

$$f'(x) = -\lambda(x) \ln \lambda(x) - (1 - \lambda(x)) \ln(1 - \lambda(x)).$$

注意到 $\lambda(x)$ 关于 x 是严格单调递增. 令 $h(z) = -z \ln z - (1 - z)\ln(1 - z)$, 其中 $z \in (0, 1/2)$. 那么 $f'(x) = h(\lambda(x))$, 注意到

$$h'(z) = -\ln z + \ln(1 - z) > 0.$$

从而 $f'(x)$ 关于 x 是严格单调增的, 所以 $f(x)$ 是严格下凸的.

□

例 14.18 (2021 数分 I 期末). 设函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 连续, 在 $(-1, 1)$ 三阶可导. 假设 $f(0) = f'(0) = f(-1) = 0, f(1) = 1$. 证明存在 $\xi \in (-1, 1)$ 使得 $f'''(\xi) = 3$.

解答. 如果所给的条件均为在不同点处取值为 0 的条件, 那么只需反复利用中值定理即可. 对于这一类所给条件中函数取值不为 0 的情况, 我们的常用办法是用多项式拟合后考虑两个函数的差. 具体来说, 我们首先构造一个多项式 $P(x)$ 满足 $P(0) = P'(0) = P(-1) = 0, P(1) = 1$, 一般情形可能需要待定系数法, 这里形式特殊可

以直接写出 $P(x)$. 根据前三个条件, 可以取 $P(x)=Cx^2(x+1)$, 最后带入 $P(1)=1$, 找到一个 $P(x)$ 为 $\frac{1}{2}x^2(x+1)$.

现在我们考虑 $g(x)=f(x)-P(x)$, 那么注意到 $g(-1)=g(0)=g'(0)=g(1)=0$, 并且 $g'''(x)=f'''(x)-3$. 只需找 ξ 使得 $g'''(\xi)=0$. 首先利用中值定理可以找到 $x_1\in(-1,0),x_2\in(1,0)$ 使得 $f'(x_1)=f'(x_2)=0$. 此时找到 $f'(x)$ 的三个不同零点, 然后反复利用中值定理即可找到 $f'''(x)$ 的一个零点. □

模拟练习三.

例 14.19 (2020 数分 I 期末)**.** 两个函数 $f,g\in C^2(\mathbb{R})$ 满足

$$f''(x)<0,\quad g''(x)>0,\quad f(x)\neq g(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

证明存在常数 k,b 使得

$$f(x)<kx+b<g(x),\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

解答. 此题难度较大, 我们简述思路. 我们考虑函数

$$h(x)=\inf_{y\in\mathbb{R}} g(x+y)-f(y).$$

可以说明该函数依然是下凸函数. 同时 $h(0)\geqslant 0$, 于是可以找到 k 使得 $h(x)\geqslant kx$. 如果令 $y=x_1,x+y=x_2$, 那么我们得到

$$g(x_2)-kx_2\geqslant f(x_1)-kx_1,\quad \forall x_1,x_2\in\mathbb{R}.$$

进而可以找到 b 使得 $g(x)-kx\geqslant b\geqslant f(x)-kx$. 然后使用严格凸性保证无法取等.

□

注 14.20 该结果为凸集分离定理的特殊形式, 几何直观如下: 区域 $\{(x,y):y\leqslant f(x)\}$ 和 $\{(x,y):y\geqslant g(x)\}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 中两个不交的凸区域, 结论是我们可以找到一条直线分开这两个区域.

例 14.21 (2023 高数 A 期末)**.** 令椭圆 E 是平面 $x+y+z=1$ 与 $x^2+y^2=1$ 的交线, 令 $O(0,0,0)$ 为原点. 求 E 上两点 P_1,P_2 使得

$$|P_1O|=\min_{P\in E}|PO|,\quad |P_2O|=\max_{P\in E}|PO|.$$

解答. 此题使用 Lagrange 乘数法与例14.5基本一致. 我们给出另一种不等式直接做法. 对于 E 上一点 $P(x,y,z)$, 我们有 $|PO|^2=x^2+y^2+z^2=1+z^2$, 从而化为求 $|z|$ 的最大最小值. 我们将条件转化为 $x+y=1-z$ 和 $x^2+y^2=1$, 得到

$$(1-z)^2=(x+y)^2\leqslant 2(x^2+y^2)=2.$$

所以 $0\leqslant|z|\leqslant 1+\sqrt{2}$. 于是我们得到 $\min|PO|=1$, 当 $P_1=(1,0,0)$ 或 $(0,1,0)$ 时取到; $\max|PO|=\sqrt{4+2\sqrt{2}}$, 当 $P_2=(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},1+\sqrt{2})$ 时取到. □

例 14.22 (2022 数分 III 期中)**.** 下述极限是否存在, 如果存在则求其值:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^3}.$$

解答. 该题实际上并不严谨, 因为在 $y=-x^{2/3}$ 上该函数并没有定义, 而实际上我们证明该函数极限不存在也是来自于这事实.

如果直接观察 x 的次数会发现分子的次数比分母次数高, 第一想法是分子为高阶小量, 整体极限为零. 但分母还有一项 y^3 可以为负数, 那么当 y 很接近 $-x^{2/3}$ 时, 分母可以远比分子小. 所以我们考虑选取 $y=-(x^2-x^4)^{\frac{1}{3}}$, 那么原式变成 $\frac{1}{x}$, 当 x 趋于 0 时极限不存在, 从而该二元函数极限不存在. □

例 14.23 (2022 高数 B 期末)**.** 令函数 $z(x,y)$ 由函数 $z^3+xz-2y=0$ 所给出, 满足 $z(1,1)=1$. 求 $z(x,y)$ 在 $(1,1)$ 处的最大方向导数.

解答. 设 $F=z^3+xz-2y, P=(1,1,1)$. 我们有

$$F_x(P)=1,\quad F_y(P)=-2,\quad F_z(P)=4.$$

从而 $z_x(1,1)=-1/4, z_y(1,1)=1/2$. 所以沿方向 $\mathbf{v}=\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)$ 有最大的方向导数, 该导数值为 $\sqrt{5}$. □

例 14.24 (2023 数分 III 期中)**.** 计算 $f(x,y)=e^{-x^2y}\sin x$ 在 $(0,0)$ 处的 2023 阶偏导数.

解答. 见例13.16. □

例 14.25 (2021 高数 B 期末)**.** 设正整数 $n\geqslant 2$, 求函数

$$f(x)=\frac{1-2x+5x^2}{(1-2x)(1+x^2)}$$

在 $x=0$ 处的 $(2n+1)$ 阶局部 Taylor 公式.

解答. 首先写出部分分式分解

$$f(x)=\frac{1}{1-2x}-\frac{2x}{1+x^2}.$$

于是得到

$$f(x)=\sum_{i=0}^{2n+1}2^ix^i-\sum_{j=0}^{n}2(-1)^jx^{2j+1}+o(x^{2n+1}).$$

□

注 14.26 此类问题其实有更一般的方式, 可以说明展开式一定形如 $\sum(A2^k+Bi^k+C(-i)^k)x^k$, 其中 $2,i,-i$ 是分母多项式的根的倒数. 只需通过前三项解出系数 A,B,C.

例 14.27 (2022 高数 B 期末)**.** 令 $f(x)=(\sin x)^{2/3}+(\cos x)^{2/3}$, 其中 $x\in[-\pi/2,\pi/2]$, 求 $f(x)$ 的所有极值.

解答. 此题与例10.14基本一致, 可以直接类比讨论. 另一种看法是注意到 $\sin x$ 的严格单调性 (在 $x\in[-\pi/2,\pi/2]$ 时), 所以换元 $y=\sin x$, 其中 $y\in[-1,1]$, 就转化为例10.14. 可以说明当 $x=0$ 时取到极小值 1; 当 $x=\pm\frac{\pi}{4}$ 时取到极大值 $2^{\frac{2}{3}}$. □

例 14.28 (2020 数分 I 期末)**.** 找到两个函数 $f,g\in C^\infty(\mathbb{R})$ 使得下面两条同时满足:

- $f^{(n)}(0)=g^{(n)}(0)=0$ 对任意 $n\geqslant 0$,
- 0 是 f 的极值点但不是 g 的极值点.

解答. 首先考虑定义在 $[0,+\infty)$ 的函数 $\varphi(x)=\begin{cases}e^{-1/x}, & x>0;\\ 0, & x=0\end{cases}$, 见例4.5. 那么 $\varphi(x)$ 严格单调递增且在 0 处各阶导数为零. 然后我们只需令

$$f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\geqslant 0;\\ \varphi(-x), & x<0,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\geqslant 0;\\ -\varphi(-x), & x<0,\end{cases}$$

则 f,g 依然在 0 处可导且各阶导数为 0, 但 f 是偶函数所以 0 是极小值而 g 是奇函数所以是单调递增的. □

其他练习题.

例 14.29 (2020 数分 I 期末)**.** 求下列极限:

(1) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-0}(\tan x)^{\tan 2x}$;

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin x-\cos x}$;

(3) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t}{e^{x^2}}$.

解答. (1) 换元 $y=1-\tan x$, 那么 $\tan 2x=\frac{2(1-y)}{1-(1-y)^2}=\frac{2(1-y)}{2y-y^2}$. 取对数得

$$\lim_{y\to 0+}\frac{2(1-y)\ln(1-y)}{2y-y^2}=-1.$$

从而原极限为 $1/e$.

(2) $\sin x-\cos x\to -1$ 而 $\tan x-\sin x\to 0$ 从而极限为 0.

(3) L'Hôpital 法则得到极限为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{2xe^{x^2}}=0.$$

□

例 14.30 (2020 数分 I 期末)**.** 令 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是一个连续函数, 且在 (a,b) 上二阶可导. 假设 $f(a)=f(b)=0$ 且存在 $B:(a,b)\to\mathbb{R}$ 和 $C:(a,b)\to(-\infty,0)$ 使得

$$f''(x)+B(x)f'(x)+C(x)f(x)=0$$

对任意 $x\in(a,b)$ 成立, 证明 f 在 $[a,b]$ 上恒为零.

解答. 见例13.3. □

例 14.31 (2022 数分 III 期中)**.** 对 $n\geqslant 2$, 求 $\mathbb{R}^n$ 中一点 $P(p_1,\cdots,p_n)$ 到超平面 $a_1x_1+\cdots+a_nx_n+b=0$ 的距离的距离.

解答. 对于超平面上一点 $Q(x_1,\cdots,x_n)$, 有 $|PQ|^2=(p_1-x_1)^2+\cdots+(p_n-x_n)^2$. 利用 Lagrange 乘数法知极小值点满足: 存在 $\lambda\in\mathbb{R}$ 使得

$$(x_i-p_i)+\lambda a_i=0,\quad \forall 1\leqslant i\leqslant n.$$

乘 a_i 再求和得到

$$0=\lambda\sum_{i=1}^n a_i^2+\sum_{i=1}^n a_i(x_i-p_i)=\lambda\sum_{i=1}^n a_i^2+\left(-b-\sum_{i=1}^n a_ip_i\right),$$

由此解出 λ. 最后我们得到距离为

$$\left(\sum_{i=1}^n(p_i-x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{i=1}^n\lambda^2a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{|b+\sum_{i=1}^n a_ip_i|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}}.$$

□

例 14.32 (2023 高数 B 期末)**.** 令 $P(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数, 满足 $P(0)=0,P(1)=1$. 假设 $P(x)$ 在 $(0,1)$ 上可导且 $P'(x)>0$ 对任意 $x\in(0,1)$ 成立. 证明对任意实数 A,B 和正整数 n, 都存在 $\theta_0,\cdots,\theta_n\in(0,1)$ 使得

$$0<\theta_0<\cdots<\theta_n<1,$$

并且

$$(A+B)^n=\sum_{k=0}^n\frac{1}{f'(\theta_k)}\frac{n!}{k!(n-k)!}A^{n-k}B^k.$$

解答. 见例13.1及之后的注, 需要要求 A,B 为正. □

例 14.33 (2024 高数 B 期末). 设函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 定义为

$$f(x,y)=x^2+2xy\sin(x+y)-y^2.$$

证明: 存在 $\mathbb{R}^2$ 中点 $(0,0)$ 的开邻域 D 和 D 上连续可微的可逆变换 $x=x(u,v),y=y(u,v),(u,v)\in D$ 满足 $x(0,0)=0,y(0,0)=0$ 并且对于任意 $(u,v)\in D$ 有

$$f(x(u,v),y(u,v))=u^2-v^2.$$

解答. **想法.** 此题为例*13.10*的具体情形, 想法是将函数 f 做配方变为形式

$$f(x,y)=\varphi(x,y)^2-\psi(x,y)^2,$$

之后我们换元 $u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y)$ 即可. 这样换元的存在性和可微性则需要逆映射存在定理保证.

现在我们直接配方得到

$$f(x,y)=[x+y\sin(x+y)]^2-y^2(1+\sin^2(x+y)).$$

令 $\varphi(x,y)=x+y\sin(x+y)$, $\psi(x,y)=y\sqrt{1+\sin^2(x+y)}$, 那么 $\varphi(0,0)=\psi(0,0)=0$. 同时我们发现 φ,ψ 都是连续可微的, 且在 $(0,0)$ 处的 Jacobian 行列式为

$$\frac{\mathrm{D}(\varphi,\psi)}{\mathrm{D}(x,y)}=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

从而由**逆映射存在定理**, 存在 $(0,0)$ 的邻域 D 使得存在唯一的 D 上的连续可微函数组 $\begin{cases}x=x(u,v);\\y=y(u,v),\end{cases}$ 满足 $x(0,0)=0,y(0,0)=0$ 且满足

$$\begin{cases}\varphi(x(u,v),y(u,v))=u;\\ \psi(x(u,v),y(u,v))=v.\end{cases}$$

那么这一函数组就满足

$$f(x(u,v),y(u,v))=\psi(x,y)^2-\varphi(x,y)^2=u^2-v^2.$$

□

例 14.34 (2024 高数 B 期末). 设 $f(x)$ 是 $[-1,1]$ 上的 Riemann 可积函数, 假设实数 A 满足 $\lim_{x\to 0}f(x)=A$. 证明序列极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x=\pi A.$$

解答. 首先我们注意到

$$\int_{-1}^{1}\frac{nA}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-n}^{n}\frac{A}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=A[\arctan n-\arctan(-n)],$$

当 $n\to\infty$ 时极限为 πA. 从而我们只需证明极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}\frac{n(f(x)-A)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x=0.$$

为了估计上述式子, 我们依然采取分段估计法: 对于 x 接近 0 的部分我们利用 $|f(x)-A|$ 的绝对值很小从而贡献的积分很小; 对于 x 不靠近 0 的部分, 此时我们注意到分母 n^2x^2 相较于分子很大, 我们可以直接放缩.

对于任意 $\varepsilon>0$, 都存在 $\delta>0$ 使得当 $|x|<\delta$ 时 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 我们有

$$\int_{-1}^{1}\frac{n|f(x)-A|}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{-1}^{-\delta}+\int_{\delta}^{1}+\int_{-\delta}^{\delta}.$$

对于第三个部分, 我们有估计

$$\int_{-\delta}^{\delta}\frac{n|f(x)-A|}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon\int_{-\delta}^{\delta}\frac{n\,\mathrm{d}x}{1+n^2x^2}=\varepsilon[\arctan(\delta n)-\arctan(-\delta n)]<\pi\varepsilon.$$

对于前两个部分, 我们有 $\frac{n}{1+n^2x^2}\leqslant(\delta^2n)^{-1}$. 假设 $\int_{-1}^{1}|f(x)-A|\,\mathrm{d}x=M$ 是一个固定的正实数, 那么我们有

$$\int_{-1}^{-\delta}\frac{n|f(x)-A|}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x+\int_{\delta}^{1}\frac{n|f(x)-A|}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{M}{\delta^2}\frac{1}{n}.$$

结合这两者, 我们得到

$$\int_{-1}^{1}\frac{n|f(x)-A|}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x\leqslant\pi\varepsilon+\frac{M}{\delta^2}\frac{1}{n}.$$

此处严谨起见我们使用上极限的语言 (由于我们暂时不知道极限存在), 即让 n 趋于无穷我们可知

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}\frac{n|f(x)-A|}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x\leqslant\pi\varepsilon.$$

但这一结论是对任意 $\varepsilon>0$ 都成立的, 从而我们知道

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}\frac{n|f(x)-A|}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x\leqslant 0,$$

左侧是非负序列的极限, 于是得到其极限存在且为 0. 进而去掉绝对值符号, 由夹逼定理知

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}\frac{n(f(x)-A)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x=0.$$

□

注 14.35 最后一部分如果想绕开上极限的语言的话可以使用 "$\varepsilon-\delta$" 按照如下方式直接说明: 取 N 充分大满足 $N>\frac{M}{\delta^2\varepsilon}$, 那么当 $n>N$ 时 $M/(\delta^2n)<\varepsilon$, 从而我们有估计

$$\int_{-1}^{1}\frac{n|f(x)-A|}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x\leqslant(1+\pi)\varepsilon.$$

由定义知极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}\frac{n(f(x)-A)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x=0.$$