高等数学 A 习题课讲义

焦宇翔

https://yuxiangjiao.github.io

目录

§1. 实数与序列极限

什么是**实数**? 现代数学对于实数有着一套公理化的严格定义, 通常使用**Dedekind 分割**或者**Cauchy 完备化**. 但一切均从这些抽象定义出发就会带来诸多实践上的不便. 《高等数学》的一个主要目的是能够建立和应用**微积分**. 而建立微积分的重要基础是在四则运算之外需要引入**极限**的概念. 对于实数的公理化定义也是为了保证各种关于极限的操作符合直觉.

所以在这一门课中我们可以忽略掉公理化定义实数带来的各种不便性, 只需要朴素地将**实数集** $\mathbb{R}$认可为**有理数集** $\mathbb{Q}$（有限小数和无限循环小数构成的集合, 也是全体分数构成的集合）和**无理数集**（无限不循环小数构成的集合）的并, 并记得实数集具有 "可以取极限" 这一优秀性质也就足够了.

例 1.1 (书习题 1.1.1)**.** 证明 $\sqrt{3}$ 是无理数.

证明. 反证法. 假设 $\sqrt{3}$ 为有理数, 设 $\sqrt{3}=p/q$, 其中 p,q 是互质的整数. 那么满足 $p^2=3q^2$. 这说明 p 是 3 的倍数. 设 $p=3p_1$, 其中 p_1 为另一整数. 我们得到 $q^2=3p_1^2$. 这又说明 q 也是 3 的倍数. 这就与 p,q 互质矛盾. 从而我们知道 $\sqrt{3}$ 不是有理数. □

注 1.2 这种利用数论讨论整除性的方法是证明无理数的标准方法之一, 利用这一方法可以证明一般对于不是完全平方数的正整数 n, $\sqrt{n}$ 都是无理数.

例 1.3 (书习题 1.1.7 & 1.1.8)**.**
设 (a,b) 是一个开区间, 证明: (a,b) 中必同时有有理数和无理数.

证明. 先证存在有理数. 对于一个正整数 n, 我们总可以考虑集合 $A_n=\left\{\frac{k}{n}:k\in\mathbb{Z}\right\}\subset\mathbb{Q}$, 构成数轴上的一个 "网". 如果 $(a,b)\cap A_n$ 为空, 那么说明必存在一个 $k\in\mathbb{Z}$ 使得

$$\frac{k}{n}\leqslant a<b\leqslant\frac{k+1}{n}.$$

特别地, $b-a\leqslant 1/n$. 那么如果我们选取一个充分大的正整数 n 满足 $n>1/(b-a)$, 就可以知道 $A_n\cap(a,b)$ 非空, 从而找到一个 (a,b) 中的有理数.

无理数的情形其实是类似的, 上一题已经告诉我们 $\sqrt{3}$ 是无理数, 所以我们可以考虑一个由无理数构成的 "网" $A_n'=\left\{\frac{k}{n}+\sqrt{3}:k\in\mathbb{Z}\right\}$. 当 $n>1/(b-a)$ 时我们同样可以知道 $(a,b)\cap A_n'$ 不是空集. □

从这一例题也可以看出实数集 $\mathbb{R}$ 与有理数集 $\mathbb{Q}$ 在数轴上均是稠密的. 但两者就在于**完备性**. 如果把 $\mathbb{R}$ 看成完整的数轴, $\mathbb{Q}$ 的形状则可以想象成一个 "筛子"—"密集但处处是空隙". 而完备性就体现在允许我们求极限:

命题 1.4 $\mathbb{R}$ 上的单调有界序列有极限.

延伸 1.5 (完备性的一般表述: Cauchy 列的收敛性)

定义 1.6. 序列 $\{x_n\}$ 称为**Cauchy 列**如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N > 0$ 使得 $|x_m - x_n| < \varepsilon$ 对任意 $m, n > N$ 成立.

下述命题即为**实数集的 Cauchy 完备性**. 该性质也可以看作是从有理数集出发定义实数集的一种等价定义方式.

命题 1.7 $\mathbb{R}$ 上的 Cauchy 列有极限.

下述引理告诉我们可将单调有界序列的收敛性看作 Cauchy 完备性的特例.

引理 1.8 $\mathbb{R}$ 上的单调有界序列都是 Cauchy 列.

证明. 设 $\{x_n\}$ 是一个单调有界序列. 不妨设 $x_n \leqslant x_{n+1}$ 且对某个实数 C 有 $x_n \leqslant C$ 对所有 n 成立. 我们使用反证法, 假设 $\{x_n\}$ 不是 Cauchy 列. 那么存在一个 $\varepsilon > 0$ 使得对任意 $N > 0$ 都存在 $m > n > N$ 使得 $x_m - x_n \geqslant \varepsilon$.

我们取 $n_1 = 1$ 并归纳地选取 n_k 使得 $x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \geqslant \varepsilon$. 实际上, 假设 n_k 已经选好. 令 $N = n_k$, 那么我们可以找到 $m > n > n_k$ 使得 $x_m - x_n \geqslant \varepsilon$. 由序列单调性知 $x_m - x_{n_k} \geqslant x_m - x_n \geqslant \varepsilon$. 于是我们让 n_{k+1} 为这个 m 即可.

对于这个我们找出的序列, 我们可以知道

$$x_{n_{k+1}} - x_{n_1} = \sum_{i=1}^{k} (x_{n_{i+1}} - x_{n_i}) \geqslant \varepsilon k,$$

对任意正整数 k 都成立. 但另一方面, 根据序列的有界性, 上式左侧不超过 $C - x_1$. 当 k 充分大时我们得到矛盾. 从而单调有界序列一定是 Cauchy 列. □

下面这个例题说明了收敛序列、有界序列、Cauchy 列三者的关系, 也可以作为熟悉 $\varepsilon - N$ 语言的一个联系.

例 1.9. 设 $\{x_n\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的收敛序列 (极限存在的序列), 证明:

1. (书习题 1.3.3) $\{x_n\}$ 是一个有界序列.
2. $\{x_n\}$ 是一个 Cauchy 列.

证明. 1. 设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. 根据极限的定义, 存在 N 使得对任意 $n > N$ 都有 $|x_n - a| \leqslant 1$. 从而对 $n > N$ 都有 $|x_n| \leqslant |a| + 1$. 于是我们取

$$M = \max\left\{ |a| + 1, \max_{n \leqslant N} |x_n| \right\},$$

就有 $|x_n| \leqslant M$ 对所有 n 成立.

2. 设 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. 对任意 $\varepsilon > 0$, 根据极限的定义, 存在 N 使得对任意 $n > N$ 都有 $|x_n - a| < \varepsilon/2$. 那么对于任意 $m, n > N$, 由三角不等式, 有

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) - (x_m - a)| \leqslant |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon.$$

从而 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列.

□

作为熟悉 "$\varepsilon - N$ 语言" 的练习, 有如下关于极限的**Cauchy 命题**及其变形版本.

例 1.10. 设序列 a_n, b_n 满足 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$, 证明:

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \alpha$.

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n+1-k} = \alpha\beta$.

证明. (1) **想法:** *根据极限定义, 我们需要对每个 $\varepsilon > 0$ 找到 N 使得当 $n > N$ 时*

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - \alpha\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k - \alpha)\right| < \varepsilon.$$

我们已知序列 a_n 收敛于 α, 所以可以知道在上述和式中, 对于较大的 k, $|a_k - \alpha|$ 是较小的. 而对于较小的 k, 我们希望这些 k 的数量占比是很小的 (这一点可以在 n 很大时做到), 再结合序列的有界性给出估计. 这种估计方法在分析中是十分常见的: 对于 "好项" 给出精确的估计, 对 "坏项" 给出粗糙的估计, 最后结合 "坏项" 的占比很小根据想要的估计.

现在给出详细的证明. 由于收敛序列都是有界序列, 我们可以假设存在 $C > 0$ 使得 $|a_n - \alpha| < C$ 对所有 $n > 0$ 成立. 对任意 $\varepsilon > 0$, 由于 $\lim_{k\to\infty} a_k = \alpha$, 我们可以找到 $N_0 > 0$ 使得当 $k > N_0$ 时 $|a_k - \alpha| \leqslant \varepsilon/2$. 我们令 $N = \lceil 2\varepsilon^{-1} C N_0 \rceil$. 对于 $n > N$ 时, 我们有

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k - \alpha)\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|a_k - \alpha| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_0}|a_k - \alpha| + \frac{1}{n}\sum_{k=N_0+1}^{n}|a_k - \alpha|.$$

注意到

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_0}|a_k - \alpha| \leqslant \frac{N_0}{n}C < \frac{CN_0}{N} \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=N_0+1}^{n}|a_k - \alpha| \leqslant \frac{n - N_0}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

我们得到 $\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - \alpha\right| < \varepsilon$ 对任意 $n > N$ 成立.

(2) 这一题的想法与上一题相似. 我们需要注意到

$$|a_k b_{n+1-k} - \alpha\beta| = |(a_k b_{n+1-k} - a_k\beta) + (a_k\beta - \alpha\beta)| \leqslant |a_k|\cdot|b_{n+1-k} - \beta| + |\beta|\cdot|a_k - \alpha|.$$

所以只要 $|b_{n+1-k} - \beta|$ 和 $|a_k - \alpha|$ 都足够小, 那么 $|a_k b_{n+1-k} - \alpha\beta|$ 也就很小, 即为 "好项".

首先根据收敛序列的有界性, 我们可以取 $C>0$ 使得 $|a_n|,|b_n|,|\alpha|,|\beta|<C$. 对于任意 $\varepsilon>0$, 由于 $a_k\to\alpha$ 和 $b_k\to\beta$, 我们可以找到 $N_0>0$ 使得对任意 $k>N_0$ 有 $|a_k-\alpha|\leqslant\varepsilon/(4C)$ 和 $|b_k-\beta|\leqslant\varepsilon/(4C)$. 我们令 $N=\lceil 8\varepsilon^{-1}C^2N_0\rceil$. 对 $n\geqslant N$, 我们有

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_kb_{n+1-k}-\alpha\beta\right| &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(|a_k|\cdot|b_{n+1-k}-\beta|+|\beta|\cdot|a_k-\alpha|)\\ &\leqslant \frac{C}{n}\sum_{k=1}^{n}(|b_{n+1-k}-\beta|+|a_k-\alpha|)\\ &= \frac{C}{n}\sum_{n=1}^{N_0}(|b_k-\beta|+|a_k-\alpha|)+\frac{C}{n}\sum_{n=N_0+1}^{n}(|b_k-\beta|+|a_k-\alpha|)\\ &\leqslant \frac{4C^2N_0}{n}+\frac{2C(n-N_0)}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{4C}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

从而我们证明了上述极限.

(2)' 这一问还可以通过结合 (1) 和夹逼定理更直接地得到. 事实上, 根据 (1) 我们知道 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\alpha$. 我们令 $b'_n=b_n-\beta$, 那么我们只需证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_kb'_{n+1-k}=0.$$

我们又注意到 $\lim_{n\to\infty}b'_n=0$, 从而 $\lim_{n\to\infty}|b'_n|=0$. 于是根据 (1) 我们还知道

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|b'_{n+1-k}|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|b'_k|=0.$$

最后我们利用收敛序列的有界性, 选取 $C>0$ 使得 $|a_n|<C$. 那么

$$-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|b'_{n+1-k}|\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_kb'_{n+1-k}\leqslant C\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|b'_{n+1-k}|,$$

不等式两端极限均为 0, 从而由夹逼定理即得该极限.

□

注 1.11 证明中的 N_0 和 N 通常是根据最后放缩需要的大小凑出的, 如 (2) 中最后的放缩计算出一项为 $\frac{4C^2N_0}{n}$, 需要它不超过 $\frac{\varepsilon}{2}$, 所以我们选取 $N=\lceil 8\varepsilon^{-1}C^2N_0\rceil$.

实数完备性通常可以帮助我们证明序列的极限存在, 尤其在我们无法具体得知序列的极限时. 首要的一个例子就是关于 e 的定义, 即序列 $\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$ 的极限. 该序列极限的存在性就使用到了实数集的完备性. 事实上我们可以证明 e 不是有理数. 也就是说虽然这个序列的每一项都是有理数, 但该序列在 $\mathbb{Q}$ 上不存在极限, 这也一定程度上说明对于实数集完备性的使用在证明过程中是必不可少的一步.

延伸 1.12 (e 的无理性)

例 1.13 (书习题 1.3.9). 记 $S_n=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$, 证明 $\lim_{n\to\infty}S_n=e$.

证明. 注意到 $\{S_n\}$ 单调递增, 并且利用裂项可得

$$S_n = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 3 - \frac{1}{n} \leqslant 3.$$

从而 $\{S_n\}$ 有极限, 设该极限为 a. [书习题 1.3.8(4)]

我们有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \leqslant S_n.$$

于是 $\lim_{n\to\infty} S_n = a \geqslant e$.

为证明 $a \leqslant e$, 我们使用如下技巧: 对于每个固定的 n, 去证明 S_n 不大于 e. 此时我们将 e 看作极限

$$e = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+n}.$$

利用二项式展开, 我们可以发现

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+n} \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \frac{m+n}{m} \cdots \frac{m+n-(k-1)}{m} \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = S_n.$$

也就得到了 $S_n \leqslant \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+n} = e$. 从而 $\lim_{n\to\infty} S_n = e$. □

命题 1.14 e 为无理数.

证明. 我们使用反证法, 假设 $e = p/q$, 其中 $p, q \geqslant 2$ 为整数 (这里我们可以不要求互质, 但需要 $q \geqslant 2$). 我们利用前述极限. 注意到对 $n \geqslant q+1$, 有

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k!} + \sum_{k=q+1}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k!} + \frac{1}{q!} \sum_{k=q+1}^{n} \frac{1}{k(k-1)\cdots(q+1)} \\ &\leqslant 1 + \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k!} + \frac{1}{q!}\left(\frac{1}{q+1} + \sum_{k=q+2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}\right) \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k!} + \frac{1}{q!} \cdot \frac{2}{q+1}. \end{aligned}$$

记 $A = q!\left(1 + \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k!}\right)$ 为一个整数. 那么对 $n \geqslant q+1$, 有

$$A + \frac{1}{q+1} \leqslant q! S_n \leqslant A + \frac{2}{q+1}.$$

根据假设, $\lim_{n\to\infty} q! S_n = p \cdot (q-1)!$ 为一个整数. 但当 $q \geqslant 2$ 时, 区间 $[A + 1/(q+1), A + 2/(q+1)]$ 上没有整数, 矛盾. □

注 1.15 不同于例1.1, 这个证明是利用整数的离散性来证明一个数是无理数. 这依赖于例1.13所给出的一种收敛到 e 且速度较快的极限表达式. 事实上, 被 Liouville 所证明的第一个超越数的例子也用到了这种 "收敛速度快" 的想法.

与证明序列 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 极限存在类似的还有一些其他证明极限存在的例子, 通常都是使用完备性得到.

例 1.16 (书习题 1.3.8)**.** 证明下述序列极限存在:

(1) $x_n=\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

(2) $x_n=\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k+1}$.

(3) $x_n=\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$.

证明. (1) 显然 $\{x_n\}$ 单调递增. 为证明该序列有界, 只需注意到

$$x_n=1+\sum_{k=2}^n\frac{1}{k^2}\leqslant 1+\sum_{k=2}^n\frac{1}{k(k-1)}=1+\sum_{k=2}^n\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=2-\frac{1}{n}\leqslant 2.$$

(2) 显然 $\{x_n\}$ 单调递增. 为证明该序列有界, 只需注意到

$$x_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{2^k+1}\leqslant\sum_{k=1}^n\frac{1}{2^k}=1-\frac{1}{2^n}\leqslant 1.$$

(3) 注意到 $x_n\leqslant n\cdot\frac{1}{n}\leqslant 1$, 从而该序列有界. 同时

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}>0,$$

即该序列单调递增.

□

注 1.17 本题前两问体现了两个重要的估计求和式大小的方式, 一种是转化为可以进行裂项的求和, 一种是转化为等比数列求和. 本质目的都是转化为具有公式方便求和的式子进行估计.

在上述证明极限存在性的问题以外, 更多的一类问题是计算极限的取值. 常用的求极限的方式通常是从最基本的几个极限出发, 使用**极限的四则运算**和**夹逼定理**来得到一般序列极限. 一些困难的求极限问题则需要更巧妙的变形放缩或者其他技巧.

例 1.18 (书习题 1.3.6)**.** 证明: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证明. 令 $x_n=\sqrt[n]{n}-1$, 只需证 $\lim_{n\to\infty}x_n=0$. 由于 $(1+x_n)^n=n$, 利用二项式展开, 我们得到 ($n\geqslant 2$ 时)

$$n=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}x_n^k\geqslant\frac{n(n-1)}{2}x_n^2.$$

这里放缩只留下 x_n^2 的项是因为我们希望放缩得到 x_n 是很小的, 但同时希望形式尽量简单. 由此不等式我们得到

$$0\leqslant x_n\leqslant\sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

由于 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{n-1}}=0$. 由夹逼定理知 $\lim_{n\to\infty}x_n=0$. □

例 1.19 (书习题 1.3.8)**.** 求下列极限:

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+3n^2-100}{4n^3-n+2}$;

(2) $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$;

(3) $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n}$.

证明. (1) 我们有

$$\frac{n^3+3n^2-100}{4n^3-n+2} = \frac{1+\frac{3}{n}-\frac{100}{n^3}}{4-\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}.$$

利用

$$\lim_{n\to\infty} 1+\frac{3}{n}-\frac{100}{n^3} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} 4-\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3} = 4,$$

和极限的四则运算知 $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+3n^2-100}{4n^3-n+2} = \frac{1}{4}$.

(2) 观察到 $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \to e^{-1}$, 所以上述极限应该为 $\lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0$. 为了证明的严谨性, 我们可以以这个答案为目标采取一些粗糙但容易得到的放缩. 由二项式展开, 我们有

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-n} \leqslant \left(1+\frac{n}{n-1}\right)^{-1} \leqslant \frac{1}{2}.$$

从而 $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} \leqslant 2^{-n}$. 由夹逼定理知 $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} = 0$.

(3) 观察到 $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} \to e^{-1}$, 所以上述极限应该为 $\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{1}{n}} = 1$. 同样为了得到严格的证明我们可以根据答案进行一些放缩. 一方面 $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \leqslant 1$ 给出了上界. 另一方面

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{-n} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{-(n^2-1)\cdot\frac{n}{n^2-1}} \geqslant e^{-\frac{n}{n^2-1}} \geqslant e^{-\frac{1}{n-1}}.$$

其中利用了序列 $\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$ 单调递增收敛到 e 从而 $\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n^2-1} \leqslant e$. 而 $e^{-\frac{1}{n-1}} \to 1$, 从而由夹逼定理知 $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n = 1$.

□

例 1.20 (书习题 1.9)**.** 求极限 $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{n^2})$.

证明. 注意到

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{(2-1)(2+1)}{2^2}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{n+1}{2n}.$$

从而该极限为 1/2. □

例 1.21. 计算如下极限:

(1) $\lim_{n\to\infty}(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$, 其中 $|a|<1$ 为给定实数.

(2) $\lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{1}{4}\cdots\cos\frac{1}{2^n}$.

证明. 这两个习题也都是使用裂项进行求极限

(1) 我们注意到 $(1-x^2)=(1+x)(1-x)$. 从而

$$(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})=\frac{1-a^2}{1-a}\cdot\frac{1-a^4}{1-a^2}\cdots\frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a^{2^n}}=\frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a}.$$

由于 $|a|<1$, 我们知道 $\lim_{n\to\infty}a^{2^{n+1}}=0$. 从而原序列极限为 $\frac{1}{1-a}$.

(2) 利用三角函数倍角公式 $\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x$, 我们有 $\cos x=\frac{\sin 2x}{2\sin x}$. 从而

$$\cos\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{1}{4}\cdots\cos\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\sin 1}{\sin\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}}{\sin\frac{1}{4}}\cdots\frac{\sin\frac{1}{2^{n-1}}}{\sin\frac{1}{2^n}}=\frac{\sin 1}{2^n\sin\frac{1}{2^n}}.$$

最后我们需要用到重要的函数极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, 特别地 $\lim_{n\to\infty}2^n\sin\frac{1}{2^n}=1$. 于是原序列极限为 $\sin 1$.

$\square$

§2. 序列极限、函数极限与连续函数 (一)

§2.i. 序列极限补充

此外, 还有一些通过迭代产生的序列求极限问题, 也是常见的题目类型.

例 2.1. 判断下列序列极限是否存在, 如果序列极限存在那么求极限值:

(1) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{1+x_n}$;

(2) $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2}^{x_n}$;

(3) $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$.

可以发现这一类问题的序列都是通过一个函数迭代产生的, 即给定一个 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 $f(x)$ 和序列的第一项 x_1, 然后序列通过 $x_{n+1} = f(x_n)$ 产生. 而且通常这一类问题中所给的函数 f 都是严格单调递增的, 即 $f(x) > f(y)$ 对所有 $x > y$ 成立. 这一类问题有着标准的套路.

首先可以证明这样的序列都是单调序列: 如果 $x_2 > x_1$ 则可以归纳法证明 $x_{n+1} > x_n$; 如果 $x_2 < x_1$ 则可以归纳法证明 $x_{n+1} < x_n$. 此后极限的存在性便归结为序列的有界性. 思路是我们先假定序列存在, 先把可能的极限值猜出来. 假设极限存在并且设极限为 a, 那么 a 必然满足

$$f(a) = a.$$

(这是因为序列 $\{x_n\}$ 和 $\{x_{n+1}\}$ 均收敛于 a, 而 $x_{n+1} = f(x_n)$, 从而 $a = f(a)$. 此处用到了 f 的连续性.)

如果序列是单调递增的, 那么这个极限值即为满足 $f(a) = a$ 且大于 x_1 的解中最小的一个; 如果序列是单调递减的, 那么这个极限值即为满足 $f(a) = a$ 且小于 x_1 的解中最大的一个; 如果满足上述条件的解 a 不存在的话, 那么说明序列发散到正无穷或者负无穷.

在满足上述条件的解存在时, 我们通常可以通过归纳法证明序列的有界性. 以单调递增的序列为例, 假设 a 为满足 $f(a) = a$ 且大于 x_1 的最小值, 那么我们可以通过归纳法结合 f 的单调性证明 $x_n < a$. 由此说明序列有界从而极限存在. 同时这一件事还额外帮助我们排除掉了极限的其他可能值.

上述例题中的三个问题分别为取 $f(x)$ 为 $1 + \frac{x}{1+x}$, $\sqrt{2}^x$ 和 $\frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})$. 我们以这三者为例来展现一下具体的证明过程.

解答. (1) 令 $f(x) = 1 + \frac{x}{1+x} = 2 - \frac{1}{1+x}$, 在 $x > 0$ 时为关于 x 的单调递增函数.*(想法: 计算出 $x_2 = f(x_1) = \frac{3}{2}$, 于是该序列是单调增的. 解方程 $f(x) = x$, 即 $x^2 - x - 1 = 0$, 得到 $x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. 由此猜出极限为 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.)*

现在我们利用数学归纳法证明对任意 $n \geqslant 2$, 都有 $x_n > x_{n-1}$ 且 $x_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 对 $n = 2$ 时直接验证即可. 对 $n \geqslant 3$ 时, 我们结合归纳假设和 f 的单调性可知

$$x_n = f(x_{n-1}) > f(x_{n-2}) = x_{n-1},$$
$$x_n = f(x_{n-1}) < f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

从而该序列单调递增有上界, 从而有极限. 设该极限为 a. 根据极限的性质和 f 的连续性可知,

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

于是 $a = f(a)$, 解出 $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 由于该序列位于区间 $[1, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$ 上, 从而极限为 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(2) 令 $f(x) = \sqrt{2}^x$, 在 $x > 0$ 时为关于 x 的单调递增函数. 其他证明过程与上题类似不再赘述, 唯一区别在于 $f(x) = x$ 有两个正根 $x = 2, 4$. 由于 $x_1 = \sqrt{2}$, 所以我们猜测极限是 2. 在证明序列有界的中我们需要归纳地证明 $x_n > x_{n-1}$ 和 $x_n < 2$, 由此帮助我们在计算极限时舍弃掉 4 这个解. 最终得到该序列极限为 2.

(3) 令 $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$, 该函数在 $x > 1$ 时是单调递增的. 由均值不等式, 我们知道 $x_2 = f(x_1) \geqslant 1$. 所以为了方便起见只考虑从 x_2 开始的这个序列.

如果 $x_1 = 1$ 则 x_n 均为 1, 自然极限为 1. 如果 $x_1 \neq 1$, 那么 $x_2 > 1$, 从而 $x_3 = f(x_2) < x_2$. 从而可以用归纳法证明该序列是单调递减的. 注意到 $f(x) = x$ 仅有一个正根 $x = 1$ 且 $x_n \geqslant 1$, 所以极限为 1.

□

最后, 我们提及一些序列发散的例子. 通常我们证明序列发散只需要找到两个收敛到不同极限的收敛子列即可. 或者我们不需要找到两个收敛子列, 只需要找到 $\{x_n\}$ 的两个不同子列 $\{x_{n_k}\}$ 和 $\{x_{n'_k}\}$ 以及 $a > b$ 使得

$$x_{n_k} \geqslant a > b \geqslant x_{n'_k}$$

对任意 k 成立即可. 但有时我们也可以使用一些巧妙的方法绕开上述相对麻烦的构造, 比如通过观察序列的形式给出极限所需要满足的一些特殊关系 (例如上述迭代产生的序列极限需要满足 $f(x) = x$), 然后导出矛盾.

例 2.2. 证明下述序列发散:

(1) $x_n = (-1)^n(1+\frac{1}{n})^n + \sin\frac{n\pi}{4}$;

(2) $x_n = \sin(\pi\sqrt{n})$;

(3) $x_n = \sin n$.

(4) $x_n = \sin(100n)$

证明. (1) 考虑 $n_k = 8k$, 可知 $x_{n_k} \to e$. 再考虑 $n'_k = 8k+2$, 可知 $x_{n'_k} \to e+1$. 从而该序列发散.

(2) 考虑 $n_k = k^2$, 那么 $x_{n_k} \to 0$. 为了让 $\sin(\pi\sqrt{n})$ 靠近 1, 我们需要 $\pi\sqrt{n}$ 靠近 $2k\pi + \frac{1}{2}\pi$, 也就希望 n 靠近 $(2k+\frac{1}{2})^2$. 我们选取 $n'_k = 4k^2 + 2k$., 从而

$$x_{n'_k} = \sin(\pi\sqrt{4k^2+2k}) = \sin(\pi(\sqrt{4k^2+k} - 2k)) \to \sin\frac{1}{2}\pi = 1.$$

(3) 最直接的想法也是构造 n_k 使得 n_k 靠近 $2k\pi-\frac{1}{2}\pi$, 再构造 n_k' 使得 $2k\pi+\frac{1}{2}\pi$, 这样两个子列有一致的距离. 事实上, 利用 $\pi>3$, 我们可以知道区间 $[2k\pi-2\pi/3, 2k\pi-\pi/3]$ 之中必存在一个整数 n_k. 再考虑区间 $[2k\pi+\pi/3, 2k\pi+2\pi/3]$, 这之中也必存在一个整数 n_k'. 那么

$$\sin n_k \leqslant -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} \leqslant \sin n_k'.$$

于是序列极限不存在.

(4) 我们依然期待构造 $100n$ 分别靠近 $2k\pi\pm\frac{1}{2}\pi$, 但和上一问的区别在于 $\{100n\}$ 这个序列相邻两项间隔过大无法施行上述证明. 一种方法当然是使用一些组合的方法证明 $\frac{100n}{\pi}$ 的小数部分在区间 $[0,1)$ 上实际上是稠密的, 详细叙述可参见Dirichlet 逼近定理.(证明很简单, 但大抵与高数课的主线内容无关?)

我们换一种证明方式. 假设序列收敛于 α. 由和角公式, 有

$$\sin(100(n+1)) = \sin(100n+100) = \sin(100n)\cos 100 + \cos(100n)\sin 100.$$

移项平方后得到关系式

$$[x_{n+1} - x_n\cos 100]^2 = \sin^2 100(1-x_n^2),$$

即

$$x_{n+1}^2 - 2x_n x_{n+1}\cos 100 + x_n^2 = \sin^2 100.$$

取极限得到

$$2\alpha^2(1-\cos 100) = 1-\cos^2 100.$$

从而 $\boxed{2\alpha^2 = 1+\cos 100}$. 但同时, 我们可以考虑 $\sin(100(n+2)) = \sin(100n+200)$. 进行上述和角公式的论述, 可以得到 $\boxed{2\alpha^2 = 1+\cos 200}$. 但是 $\cos 100 \neq \cos 200$, 我们得到矛盾.

□

§2.ii. 函数极限与连续函数 (一)

函数极限是通过 "ε-δ 语言" 定义的, 其描述的是当自变量趋于一个值时, 函数的取值随自变量的趋势.

定义 2.3. 对于一个实数 a 和半径 $r>0$, 我们定义**邻域**$U_r(a) := (a-r, a+r)$ 和**去心邻域**$U_r^0(a) := U_r(a)\setminus\{a\}$.

由于我们关心的是函数 $f(x)$ 在自变量 x 趋于 a 时的趋势, 所以我们实际上不要求 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有定义, 只需要 $f(x)$ 在 a 的某个去心邻域上有定义即可.

定义 2.4. 设函数 $f(x)$ 在 a 的某个去心邻域 $U_r^0(a)$ 上有定义, 如果存在实数 l 使得对任意 $\varepsilon>0$, 都存在 $\delta>0$ 使得

$$|f(x)-l| < \varepsilon, \quad \forall x\in U_\delta^0(a),$$

那么就称函数 $f(x)$**在 a 处极限存在并且收敛于 l**, 记为$l = \lim_{x\to a} f(x)$.

函数极限同时可以与序列极限联系起来, 表述为下述归结定理. 这个借助序列极限来描述函数极限的方式更能体现出函数极限是关于 “函数值随自变量变动趋势” 刻画.

定理 2.5 (归结定理)
设函数 $f(x)$ 在 a 的某个去心邻域 $U_r^0(a)$ 上有定义, 那么以下两条等价:

(a) $f(x)$ 在 a 处的极限存在且 $\lim_{x\to a} f(x) = l$;

(b) 对于任意序列 $\{x_n\} \subset U_r^0(a)$, 如果 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ 那么 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

证明. **(a) $\Longrightarrow$ (b):** $\{x_n\} \subset U_r^0(a)$ 为一个满足 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ 的序列. 对任意 $\varepsilon > 0$, 由函数极限的定义知存在 $\delta > 0$ 使得当 $x \in U_\delta^0(a)$ 时 $|f(x) - l| < \varepsilon$. 又由于 $x_n \to a$, 从而存在 $N > 0$ 使得 $n > N$ 时 $|x_n - a| < \delta$, 即 $x_n \in U_\delta^0(a)$. 从而 $n > N$ 时 $|f(x) - l| < \varepsilon$.

(b) $\Longrightarrow$ (a): 反证法, 假设 $f(x)$ 在 a 处不收敛于 l. 根据函数极限的定义 (的逆否命题), 存在 $\varepsilon > 0$ 使得对任意 $\delta > 0$, 都存在 $x \in U_\delta^0(a)$ 使得 $|f(x) - l| \geqslant \varepsilon$. 现在对每个正整数 $n \geqslant 1$, 取 $\delta_n = r/n$, 那么我们可以选取 $x_n \in U_{\delta_n}^0(a) \subset U_r^0(a)$ 使得 $|f(x_n) - l| \geqslant \varepsilon$. 注意到 $|x_n - a| \leqslant r/n$, 从而 $x_n \to a$. 但是 $|f(x_n) - l| \geqslant \varepsilon$ 对所有 n 成立, 于是 $\{f(x_n)\}$ 不收敛于 l. 这与 (b) 之假设矛盾. □

注 2.6 归结定理最常用的场景还是在于由此证明函数的在 a 处极限不存在, 即只需要构造两列不同的收敛于 a 的序列使得它们函数值有着不同的极限即可.

注 2.7 函数极限是关于 “函数变动趋势” 的最粗略刻画. 我们后续学到的函数的导数以及高阶导数都是在此基础上对这一趋势更精细的刻画.

例 2.8. (1) 证明极限 $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ 发散.

(2) 证明极限 $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$ 收敛.

证明. (1) 考虑序列 $x_n = 1/(n\pi) \to 0$, 那么 $\sin 1/x_n = 0$ 从而 $\sin 1/x_n \to 0$. 考虑序列 $x_n' = 1/(2n\pi + \pi/2) \to 0$, 那么那么 $\sin 1/x_n' = 1$ 从而 $\sin 1/x_n' \to 1$. 于是 $\sin\frac{1}{x}$ 在 0 处发散.

(2) 注意到 $|x\sin\frac{1}{x}| \leqslant |x|$. 对任意 $\varepsilon > 0$, 可以取去心邻域 $U_\varepsilon^0(0)$, 对于任意 $x \in U_\varepsilon^0(0)$ 都有 $|x\sin\frac{1}{x}| < \varepsilon$. 从而 $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$.

□

需要注意的是, $f(x)$ 在 a 处的极限与 $f(x)$ 在 a 处的取值 $f(a)$ 本身并无关系. 但我们认为表现良好的函数应该满足 $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ 这样的性质, 这样的函数图像在直观上看起来是 “连续的”. 借助函数极限由此我们给出了一个数学上严谨的 “连续性” 定义.

定义 2.9. 设函数 $f(x)$ 在 a 的某个邻域 $U_r(a)$ 上有定义, 如果满足 $f(x)$ 在 a 处极限存在并且 $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, 就称 **$f(x)$ 在 a 处连续**.

作为归结定理的推论, 函数的连续性也可以用序列极限来给出等价刻画.

推论 2.10

设函数 $f(x)$ 在 a 的某个邻域 $U_r(a)$ 上有定义, 那么以下两条等价:

(a) $f(x)$ 在 a 处连续;

(b) 对于任意序列 $\{x_n\} \subset U_r(a)$, 如果 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ 那么 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

例 2.11. 判断下列函数在各点处的连续性:

(1) Dirichlet 函数 $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

(2) Riemann 函数 $R(x) = \begin{cases} 1/q, & x = p/q \in \mathbb{Q}, \text{其中 } p, q \text{ 为互质整数}; \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

解答. (1) $D(x)$ 在任何点处均不连续. 反证法, 对于实数 a, 假设 $D(x)$ 在 a 处收敛于 l. 取 $\varepsilon = 1/2$, 那么存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $x \in U_\delta^0(a)$ 都有 $|D(x) - l| > 1/2$. 但根据有理数和无理数分别的稠密性, 我们可以找到有理数 $x_1 \in U_\delta^0(a)$ 和无理数 $x_2 \in U_\delta^0(a)$. 但是

$$1 = |D(x_1) - D(x_2)| \leqslant |D(x_1) - l| + |D(x_2) - l| < 1,$$

我们得到一个矛盾.

(2) 我们要证明 $R(x)$ 在有理点不连续, 在无理点连续. 首先考虑 a 为有理数的情形. 利用无理数的稠密性, 我们可以找到无理数序列 $x_n \to a$. 但此时 $R(x_n) = 0$ 收敛于 $0 \neq R(a)$, 从而 $R(x)$ 在有理数 a 处不连续.

现在取 a 为无理数, 我们证明任意 $\varepsilon > 0$, 总可以找到 $\delta > 0$ 使得对任意 $x \in U_\delta(a)$ 都有 $|R(x) - R(a)| < \varepsilon$, 也即 $|R(x)| < \varepsilon$. 注意到满足分母 $q \leqslant \varepsilon^{-1}$ 且在区间 $(a-1, a+1)$ 上的有理数 p/q 只有有限多个, 于是我们可以找到 $0 < \delta < 1$ 使得邻域 $U_\delta(a)$ 中不包含任何一个这样的有理数. 此时对任一 $x \in U_\delta(a)$, 要么 x 为无理数则 $R(x) = 0$, 从而满足 $|R(x)| < \varepsilon$; 要么 $x = p/q$ 为有理数且 $q > \varepsilon^{-1}$, 从而 $|R(x)| = 1/q < \varepsilon$ 满足要求.

□

§3. 函数极限与连续函数 (二)

§3.i. 函数极限的计算

例 3.1. (1) 设 k 为正整数, 证明 $\lim_{x\to+\infty} x^k/e^x = 0$.

(2) 设 $P(x) = a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0$ 为一个多项式, 令

$$f(x) = \begin{cases} P(1/x)e^{-1/|x|}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

证明 $f(x)$ 为连续函数.

证明. (1) 为了将指数函数 e^x 与幂函数 x^k 联系起来, 我们使用二项式展开. 为方便起见, 我们先将 e^x 放缩为 2^x. 注意到对 $x > 0$ 有 $e^x \geqslant 2^x$, 我们只需对 2^x 施行放缩. 由二项式展开, 我们有

$$2^x \geqslant 2^{[x]} \geqslant \frac{[x]([x]-1)\cdots([x]-k)}{(k+1)!}.$$

注意到 $[x] > x-1$, 从而对 $x > k+1$, 我们有

$$\frac{x^k}{e^x} \leqslant \frac{x^k}{2^x} \leqslant \frac{(k+1)!\cdot x^k}{[x]([x]-1)\cdots([x]-k)} \leqslant \frac{(k+1)!\cdot x^k}{(x-1)\cdots(x-k-1)}.$$

而右式在 $x \to +\infty$ 时极限为 0, 从而由夹逼定理知原极限为 0.

(2) 只需验证 0 点处的连续性. 由上述极限我们可知

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{y\to+\infty} P(y)e^{-y} = 0.$$

□

更一般地, 我们在形如对数函数、幂函数、指数函数的无穷大量之间总有量级估计

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\beta^x} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\beta^x}{x^x} = 0,$$

其中, $\alpha > 0, \beta > 1$. 结合上述量级估计和换元法, 我们可以计算出许多形式较为简单的函数极限 (分式型函数). 另外一类常见的极限是带有指数的函数极限, 通常方法可以利用取对数的方式将其化作分式型函数的极限问题.

例 3.2. 求极限 $\lim_{x\to 0+0} x^x$.

解答. 根据 e^x 的连续性, 我们有

$$\lim_{x\to 0+0} x^x = \lim_{x\to 0+0} e^{\ln x^x} = \exp\left(\lim_{x\to 0+0} x\ln x\right).$$

变量代换, 令 $x = 1/y$. 那么

$$\lim_{x\to 0+0} x\ln x = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{y}\ln\frac{1}{y} = \lim_{y\to+\infty} -\frac{\ln y}{y} = 0.$$

从而 $\lim_{x\to 0+0} x^x = e^0 = 1$. □

但许多求极限问题会形式更为复杂, 其中会出现分式与对数、三角函数、指数等混合的问题函数. 此时一种有效的方法是使用**等价无穷小量**化简函数.

我们以 $x \to 0$ 时的情况为例 (其他极限通常可以通过换元转化). 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x \to 0$ 时是两个**无穷小量**, 即 $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ 以及 $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. 我们称

- $f(x)$ 是 $g(x)$ 的**高阶无穷小量**, 如果 $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x) = 0$, 记为 $f(x) = o(g(x))$.
- $f(x)$ 是 $g(x)$ 的**等价无穷小量**, 如果 $\lim_{x\to 0} f(x)/g(x) = 1$, 记为 $f(x) \sim g(x)$.

此外还可以类似定义同阶无穷小量和低阶无穷小量, 但是在具体应用中不常用.

我们复杂函数的极限的主要思路是化简, 所以主要方法为

- 利用高阶无穷小量抹去不影响极限计算的复杂项;
- 利用等价无穷小量将复杂项化简为容易计算的单项式或多项式.

例 3.3 (常用的等价无穷小)

- (三角函数) $\sin x \sim \tan x \sim x$, $1 - \cos x \sim x^2/2$;
- (指数函数和对数函数) $e^x - 1 \sim x$, $\ln(1 + x) \sim x$;
- (幂函数) $(1 + x)^a - 1 \sim ax$.

但我们需要注意的是, 我们使用等价无穷小替换是一种记号上方便的方式, 并不能真正把两个函数看成同一个, 我们本质上还是使用的极限的乘除法运算. 这时就需要小心两个无穷小量作差的问题.

例 3.4 (等价无穷小量的差)
$\sin x$ 和 x 是等价无穷小, 当他们作差之后得到的是一个高阶无穷小. 实际上我们有 $x - \sin x \sim x^3/6$.

例 3.5. 计算极限 $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

解答. 我们有

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

□

例 3.6. 计算极限 $\lim_{x\to\infty} (\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x})^x$.

解答. 我们计算其取对数后的极限, 取对数并换元后得到

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left[\left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right)^x\right] = \lim_{x\to\infty} x \ln\left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\sin x + \cos x)}{x}.$$

然后我们注意到等价无穷小 (过程中不需要写这一步)

$$\ln(\sin x+\cos x)\sim \sin x+\cos x-1\sim x-\frac{x^2}{2}\sim x.$$

从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x+\cos x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\cos x-1}{x}\cdot\frac{\ln(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x-1}=1.$$

于是原极限为 e. □

例 3.7. 设 k 为正整数, $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 为非负实数. 求极限

(1) $\lim_{x\to 0+0}\sqrt[x]{\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_k^x}{k}}$;

(2) $\lim_{x\to +\infty}\sqrt[x]{\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_k^x}{k}}$.

解答. (1) 取对数后, 利用等价无穷小转化我们得到

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x}\ln\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_k^x}{k}=\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_k^x}{k}-1\right)\\ =&\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x}\cdot\frac{(a_1^x-1)+(a_2^x-1)+\cdots+(a_k^x-1)}{k}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_k}{k}.\end{aligned}$$

从而原极限为

$$\exp\left(\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_k}{k}\right)=\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}.$$

(2) 不妨假设 a_1 为其中最大的一个, 那么 $a_1^x\leqslant a_1^x+a_2^x+\cdots+a_k^x\leqslant ka_1^k$. 注意到

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[x]{\frac{a_1^x}{k}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[x]{\frac{ka_1^x}{k}}=a_1.$$

从而由夹逼定理知原极限为 $\max\{a_1,\cdots,a_k\}$.

□

§3.ii. 连续函数的性质

前面我们已经回顾过函数在一点处连续的定义和其相关的等价性质. 而验证函数是否在一点处连续基本就是求函数极限的问题, 我们不再赘述. 现在我们聚焦于在一个区间上处处连续的函数, 也就是通常所说的连续函数, 研究其所具有的整体性质.

通常我们关心一个在有界闭区间上连续的函数, 设 $[a,b]$ 是一个有界闭区间, 一个定义在 $[a,b]$ 上的函数称为**连续的**如果其在 (a,b) 上连续并且在 a 处右连续、在 b 处左连续. 在 $[a,b]$ 上连续的全体函数构成的空间我们记为 $C([a,b])$(或者间记为 $C[a,b]$). 这样的函数具有许多良好的性质:

定理 3.8

设 $f(x) \in C[a,b]$, 那么:

(1) **有界性** $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界函数;

(2) **最值存在性** 存在 $x_1, x_2 \in [a,b]$ 使得对任意 $x \in [a,b]$ 都有 $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$;

(3) **介值原理** 如果实数 η 介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间, 则存在 $x_0 \in [a,b]$ 使得 $f(x_0) = \eta$.

作为推论, 我们知道 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的取值也构成一个闭区间.

我们需要注意的是, 对于开区间上的连续函数, 有界性和最值存在性一般是不成立的. 例如函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 定义在区间 $(0,1)$ 上就是无界函数, 自然也不存在最值.

回忆我们曾经证明过极限存在的序列都是有界序列, 对连续函数也有类似结论.

例 3.9. (1) 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 假设极限 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 和 $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ 分别存在, 证明 $f(x)$ 为有界函数.

(2) 设 $f(x)$ 是开区间 (a,b) 上的连续函数, 假设极限 $\lim_{x\to a+0} f(x)$ 和 $\lim_{x\to b-0} f(x)$ 分别存在, 证明 $f(x)$ 在上有界.

证明. (1) 设 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = y_1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = y_2$. 取 $\varepsilon = 1$, 那么根据函数极限的定义知存在 $A > 0$ 使得 $x > A$ 时 $|f(x) - y_1| \leqslant 1$, 当 $x < -A$ 时 $|f(x) - y_2| \leqslant 1$. 由于 f 是连续函数, 从而 $f(x)$ 在闭区间 $[-A, A]$ 上是有界函数, 也即存在 $M > 0$ 使得 $|f(x)| \leqslant M$ 对任意 $x \in [-A, A]$ 成立. 于是我们知道

$$|f(x)| \leqslant \max\{|y_1| + 1, |y_2| + 1, M\}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

从而 $f(x)$ 为有界函数.

(2) <u>方法一</u>. 类比上一问的证明即可.

<u>方法二</u>. 构造闭区间 $[a,b]$ 上的函数 $\widetilde{f}(x)$ 为

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (a,b); \\ \lim\limits_{y\to a+0} f(y), & x = a; \\ \lim\limits_{y\to b-0} f(y), & x = b. \end{cases}$$

则 $\widetilde{f}(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 从而 $\widetilde{f}(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 特别地 $f(x)$ 有界.

□

注 3.10 对于 (1) 也可以用类似 (2) 的方法二的方法, 但我们需要一个换元将 $\mathbb{R}$ 变成有界区域. 我们使用一个常用的换元 $x = \tan y$, 其中 $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ 即可.

关于连续函数最常见的问题类型就是对介值原理的运用.

例 3.11. 设 $f:[a,b]\to[a,b]$ 为一个闭区间到自身的连续函数, 证明存在 $x_0\in[a,b]$ 使得 $f(x_0)=x_0$.

证明. 考虑 $g(x)=f(x)-x$, 则 $g(x)$ 也是连续函数. 注意到 $g(a)=f(a)-a\geqslant 0$ 并且 $g(b)=f(b)-b\leqslant 0$, 从而由介值原理知存在 $x_0\in[a,b]$ 使得 $f(x_0)=x_0$. □

例 3.12 (压缩映射的不动点)**.** 令 $0<c<1$ 为一个常数. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的函数, 满足 $|f(x)-f(y)|\leqslant c\cdot|x-y|$ 对任意 $x,y\in\mathbb{R}$ 成立. 证明存在唯一的 $x_0\in\mathbb{R}$ 使得 $f(x_0)=x_0$.

证明. 首先可以证明 $f(x)$ 是连续函数. 我们考虑连续函数 $g(x)=f(x)-x$.

根据介值原理, 我们只需要构造两个点 x_1 和 x_2 使得 $g(x_1)\leqslant 0$ 和 $g(x_2)\geqslant 0$. 对于 $x>y$, 我们注意到

$$g(x)-g(y)=(f(x)-f(y))-(x-y)\leqslant -(1-c)(x-y).$$

令 $g(0)=a$, 取 $x_1=\max\left\{0,-\frac{a}{1-c}\right\}$, 则 $g(x_1)\leqslant 0$. 取 $x_2=\min\left\{0,\frac{a}{1-c}\right\}$, 则 $g(x_2)\geqslant 0$. 这样根据介值原理可找到 $x_0\in[x_2,x_1]$ 使得 $g(x_0)$.

现在证明唯一性. 假设存在 $x_0\neq x_0'$ 均满足 $f(x)=x$. 根据条件有

$$|x_0-x_0'|=|f(x_0)-f(x_0')|\leqslant c|x_0-x_0'|<|x_0-x_0'|$$

矛盾. □

§4. 导数

首先我们回忆导数的定义

定义 4.1. 设函数 $f(x)$ 在 a 的邻域 $U_r(a)$ 上有定义. 如果极限

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

存在且收敛于 l, 我们就称**$f(x)$ 在 a 处可导**且称 **l 为 $f(x)$ 在 a 处的导数**, 记为 $f'(a)=l$.

例 4.2 (初等函数的导数)

- (幂函数) 对常数 $\alpha\in\mathbb{R}$, 有 $(x^\alpha)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$.
- (三角函数) $(\sin x)'=\cos x$, $(\cos x)'=-\sin x$, $(\tan x)'=1/\cos^2 x$.
- (指数函数和对数函数) $(e^x)'=e^x$, $(\ln x)'=1/x$.

但这些初等函数的导数均为通过定义计算而得的, 并非是导数自身的定义. 而函数在一点处的可导性和取值只取决于极限 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. 所以对于一些人为定义的函数, 特别是分段函数, 还是需要借助导数的定义来证明可导性和计算导数取值.

这里需要注意的要点是, **一个函数 $f(x)$ 即使可导, 其导数 $f'(x)$ 也未必是一个连续函数.** 参见下面这一例题.

例 4.3. 判断如下函数是否可导, 如果可导则求其导数:

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

解答. 在 $x\neq 0$ 处, 可以直接根据初等函数的导数结合导数的运算法则得到

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}.$$

在 $x=0$ 时, 根据定义可以得到

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

上述极限的存在性证明和计算我们已经在例2.8(2) 进行过. 这也说明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是可导的, 从而 $f(x)$ 处处可导. □

但上述例子中我们可以看到, 其导数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处是不连续的, 这是因为 $\cos\frac{1}{x}$ 这一项的出现, 在例2.8(1) 我们也曾经说明过这一类函数在 $x\to 0$ 时的发散性. 但 $f(x)$ 确实在 0 处是可导的, 这里的 $f'(0)$ 只能通过定义计算.

所以对于一些分段函数的导数计算问题, 需要注意先计算其他点的导数然后对导数求极限得到临界点处的导数这一方法在逻辑上通常是有问题的. 但这一计算过程也不是完全错误的. 事实上, **如果 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上可导那么其导数 $f'(x)$ 在区间 (a,b) 上虽然未必连续但仍然满足介值原理.** 所以我们有如下命题

命题 4.4

如果函数 $f(x)$ 在 a 的邻域 $U_r(a)$ 上有定义且可导, 并且极限 $\lim_{x\to a} f'(x)$ 存在, 那么 $\lim_{x\to a} f'(x) = f'(a)$.

虽然有这一命题存在, 但对于分段函数我们还是建议从定义出发计算导数. 因为使用这种方法的前提是需要证明 $f(x)$ 的可导性, 这依然需要从定义出发进行证明.

与例4.3类似的是如下例题.

例 4.5. 令

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/|x|}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(1) 求 $f'(x)$;

(2) 对任意 $n \geqslant 1$, 证明 f 是 n 阶可导的并求 $f^{(n)}(0)$.

解答. 我们只给出证明概要, 事实上我们可以通过归纳法证明对任意 $n \geqslant 0$ 都存在多项式 $P_n(x), Q_n(x)$ 使得

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n(1/x)e^{-1/|x|}, & x > 0; \\ Q_n(1/x)e^{-1/|x|}, & x < 0. \end{cases}$$

在 $x > 0$ 和 $x < 0$ 时归纳法是容易证明的. 而在 $x = 0$ 处, 只需要利用例3.1中证明过的结论来得到

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = 0,$$

从而完成归纳法. □

注 4.6 这给出了一个在一点处各阶导数为 0 的无穷阶可导函数的例子. 这一类函数十分重要, 在之后接触到 Taylor 级数时我们还会遇到这一例子.

例4.3所给出的例子还对如下问题有所启发, 可以训练对于一些导数反常现象的直觉.

例 4.7. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上定义的函数且 $f'(0)$ 存在.

(1) 如果序列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 均收敛于 0 且 $x_n > 0, y_n < 0$, 证明

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = f'(0).$$

(2) 如果序列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 均收敛于 0 且 $x_n \neq y_n$ 均大于 0, 是否依然有上述极限成立?

解答. (1) 根据导数的性质有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = f'(0), \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(0)}{y_n - 0} = f'(0).$$

设 $a_n = \frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0}, b_n = \frac{f(y_n)-f(0)}{y_n-0}$, 那么

$$f(x_n) - f(y_n) = [f(x_n) - f(0)] - [f(y_n) - f(0)] = a_n x_n - b_n y_n.$$

由于 $x_n > 0, y_n < 0$, 我们知道

$$\frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = \frac{a_n x_n + b_n(-y_n)}{x_n + (-y_n)} \in [a_n, b_n].$$

由于 $a_n \to f'(0), b_n \to f'(0)$ 知原极限成立.

(2) 此情形该极限并不总是成立的. 以例4.3中的函数为例. 选取 $x_n = 1/(2n\pi+\pi/2), y_n = 1/(2n\pi - \pi/2)$. 那么

$$\frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n} = \frac{x_n^2 + y_n^2}{x_n - y_n} = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{2n\pi - \pi/2}{2n\pi + \pi/2} + \frac{2n\pi + \pi/2}{2n\pi - \pi/2}\right) \to -\frac{2}{\pi} \neq 0 = f'(0).$$

□

注 4.8 (a) 由于该题目中没有要求 $f(x)$ 在 $x \neq 0$ 处的可导性, 第二问有更简单的构造方式. 例如选取序列 x_n 并在 x_n 处修改函数 $f(x) = x^2$ 的值为零, 此时依然不影响在 0 处的可导性, 修改后的函数记作 $\widetilde{f}(x)$. 但是如果我们选取 y_n 十分靠近 x_n, 那么 $\widetilde{f}(y_n) - \widetilde{f}(x_n) = y_n^2$ 可以做到大于 $x_n - y_n$(例如 $x_n = 1/n, y_n = 1/n - 1/n^{10}$) 从而极限至少为 1.

(b) 如果我们假设 f 在 $\mathbb{R}$ 上的可导性, 中值定理可以找到 $\xi_n \in [y_n, x_n]$ 使得 $f'(\xi_n) = [f(x_n) - f(y_n)]/(x_n - y_n)$. 而且 $x_n \to 0, y_n \to 0$ 确实说明了 $\xi_n \to 0$. 但正因为一般导数并不具有连续性, 所以我们无法说明 $f'(\xi_n) \to f'(0)$. 这也是我们采用例4.3来尝试构造反例的原因.

导数的计算

一阶导数的计算常用的公式主要有两类:

- 函数四则运算的导数公式:
  - $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$;
  - $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
  - $[f(x)/g(x)]' = [f'(x)g(x) - f(x)g'(x)]/g(x)^2$.
- 一阶微分的形式不变性 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ 及其等价形式和衍生公式:
  - 复合函数求导的链式法则: $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$;
  - 反函数求导公式: $[f^{-1}(x)]' = 1/[f'(f^{-1}(x))]$;
  - 参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ 所决定的函数 $y = f(x)$ 满足 $f'(x) = y'(t)/x'(t)$;
  - 隐函数 $F(x, y) = 0$ 所决定的函数 $y = f(x)$ 的导数, 该导数可以通过对方程 $F(x, f(x)) \equiv 0$ 两侧同时求导, 利用复合函数求导公式得到关于 $f'(x)$ 的方程解出导数.

注 4.9 如果使用多元函数中偏导数的概念可以将隐函数求导公式的一般形式写作

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}f'(x)=0.$$

其中,$\partial F(x,y)/\partial x$ 和 $\partial F(x,y)/\partial y$ 为多元函数的**偏导数**. 简单来说, 以 $\partial F(x,y)/\partial x$ 为例, 就是将 y 看作参数后把 $F(x,y)$ 看成关于 x 的一元函数对 x 求导数.

例 4.10 (反三角函数的导数)

反函数求导公式的一个主要应用就是反三角函数的导数. 我们有

- $(\arcsin x)'=1/\sin'(\arcsin x)=1/\cos(\arcsin x)=1/\sqrt{1-x^2}$;
- $(\arccos x)'=1/\cos'(\arccos x)=-1/\sin(\arccos x)=-1/\sqrt{1-x^2}$;
- $(\arctan x)'=1/\tan'(\arctan x)=\cos^2(\arctan x)=1/(1+x^2)$.

这些反三角函数的求导最后一步需要用到反三角函数自身的值域. 这一点可能对求导结果的符号有影响, 需要小心.

例 4.11. 令 $f(x)=x^{x^x}$, 求 $f'(x)$.

解答. 首先将其化作指数函数与另一函数的复合, 即 $f(x)=e^{x^x\ln x}$. 令 $g(x)=x^x\ln x$, 那么 $f'(x)=e^{g(x)}g'(x)$. 为求 $g'(x)$, 我们有

$$g'(x)=(x^x)'\ln x+x^x(\ln x)'=(e^{x\ln x})'\ln x+x^{x-1}=e^{x\ln x}(\ln x+1)\ln x+x^{x-1}.$$

于是

$$f'(x)=x^{x^x}g'(x)=x^{x^x}\cdot x^x\cdot\left(\ln^2 x+\ln x+\frac{1}{x}\right).$$

□

例 4.12. 设函数 $y=f(x)$ 由下列参数方程决定, 求导数 $f'(x)$:

(1) $\begin{cases} x=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y=\arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}; \end{cases}$

(2) 设 $a>0$, $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t. \end{cases}$

解答. (1) 方法一. 注意到 $\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2+\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2=1$, 我们可以知道 $\sin x=\pm\sin y$. 实际上, 当 $t>0$ 时 $x,y\in(0,\pi/2)$ 从而 $x=y$. 当 $t<0$ 时 $x\in(0,\pi/2), y\in(-\pi/2,0)$ 从而 $x=-y$. 所以当 $t\neq 0$ 时 $f'(x)=\operatorname{sgn} t$, 当 $t=0$ 时 $f'(x)$ 不存在.

方法二. 直接求导有

$$x'(t) = -\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)' \sqrt{\frac{1+t^2}{t^2}} = \frac{\operatorname{sgn} t}{1+t^2},$$

$$y'(t) = \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)' \sqrt{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2}.$$

从而 $f'(x) = y'(t)/x'(t) = \operatorname{sgn} t$ 当 $t \neq 0$ 时.

(2) 直接求导有

$$x'(t) = -3a\sin t\cos^2 t, \quad y'(t) = 3a\cos t\sin^2 t.$$

从而 $y'(x) = y'(t)/x'(t) = -\tan t$.

□

高阶导数的计算

首先需要注意的一点是, 高阶导数并没有类似一阶微分的形式不变性的性质 (即高阶导数链式法则并不对). 例如我们考虑对复合函数 $f(g(x))$ 求二阶导数我们有

$$[f(g(x))]'' = [f'(g(x))g'(x)]' = f''(g(x))[g'(x)]^2 + f'(g(x))g''(x).$$

如果从微分的视角看, 如果令 $y = g(x)$, $z = f(y)$, 那么

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x})}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y})}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})}{\mathrm{d}x^2}\\ &= \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}y^2}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}.\end{aligned}$$

高阶导数链式法则的失效在实际应用中主要影响对于参数方程的高阶导数计算.

例 4.13. 设函数 $y = f(x)$ 由例4.12(2) 中的参数方程给出. 即给定常数 $a > 0$, 令 $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$ 求二阶导数 $f''(x)$.

解答. 根据 $y(t) = f(x(t))$ 对两侧关于 t 求二阶导数, 我们得到

$$y''(t) = [f(x(t))]'' = f''(x(t))[x'(t)]^2 + f'(x(t))x''(t).$$

首先我们可以计算出

$$x''(t) = (-3a\sin t\cos^2 t)' = -3a\cos^3 t + 6a\sin^2 t\cos t,$$

$$y''(t) = (3a\cos t\sin^2 t)' = -3a\sin^3 t + 6a\cos^2 t\sin t.$$

根据例4.12知 $f'(x(t)) = -\tan t$. 带入上式可得

$$\begin{aligned} f''(x(t)) = \frac{y''(t) - f'(x(t))x''(t)}{x'(t)^2} &= \frac{-3a\sin^3 t + 6a\cos^2 t\sin t - 3a\sin t\cos^2 t + 6a\sin^3 t}{(-3a\sin t\cos^2 t)^2}\\ &= \frac{-3a\sin t + 6a\sin t}{9a^2\sin^2 t\cos^4 t} = \frac{1}{3a\sin t\cos^4 t}.\end{aligned}$$

□

注 4.14 对于参数方程的另一种直接的计算方法是用反函数将 t 写成关于 x 的函数 $t=t(x)$, 然后直接研究函数 $f(x)=y=y(t(x))$. 利用复合函数求导和反函数求导可得. 这两种计算方式本质上是一样的.

对于更一般的高阶导数计算, 初等函数的 n 阶导数依然有直接的结果:

例 4.15 (初等函数的高阶导数)

- (幂函数) 对常数 $\alpha\in\mathbb{R}$, 有 $(x^\alpha)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\cdot x^{\alpha-n}$.
- (三角函数) $(\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\pi/2)$, $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\pi/2)$
- (指数函数和对数函数) $(e^x)^{(n)}=e^x$, $(\ln x)^{(n)}=(1/x)^{(n-1)}=(-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$.

但是复合函数的高阶导数结果已经十分复杂. 通常有函数间的四则运算的高阶导数有较好的表达式, 这其中主要的工具是对函数间乘法的高阶导数展开式, 即**Leibniz 公式**.

命题 4.16 (Leibniz 公式)
设 $f(x),g(x)$ 在区间 (a,b) 上 n 次可导, 那么 $f(x)g(x)$ 的 n 阶导数满足

$$[f(x)g(x)]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x).$$

然而这一公式在一般情形下得到的结果依然十分复杂, 我们通常也尽量避免直接使用这一公式. 但是当 $f(x)$ 和 $g(x)$ 中有一个为多项式时, 不妨 $f(x)$ 为一个 d-次多项式, 那么当 $k\geqslant d+1$ 时 $f^{(k)}(x)=0$. 此时右侧求和式只有较少几项, 便可以用来计算.

这引申出来一种技巧为 "化显为隐": 当我们需要求 $y=f(x)$ 的高阶导数时, 如果 $f(x)$ 具有一定的分式形式较为复杂, 我们可以通过将其转化为包含 x 和 y 的隐函数 $F(x,y)=0$. 理想情况下, 我们希望求和的每一项都形如 $P(x)\cdot y^{(m)}$, 其中 $P(x)$ 为一个多项式. 这样我们单独的每一项 $P(x)y^{(m)}$ 使用 *Leibniz* 公式可以得到一个较为简洁的求和, 且求和项只包含 x 的多项式与 y 的高阶导数的乘积, 由此可以给出关于 y 的高阶导数的递推关系. 我们在下列例题中可以具体感受.

例 4.17. 设 $f(x)=\arctan x$, 求 $f^{(n)}(0)$.

解答. 首先我们知道 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$. 令 $y=1/(1+x^2)$, 化作隐函数有

$$(1+x^2)y=1.$$

我们可以对该隐函数求 n 次导, 得到

$$(1+x^2)y^{(n)}+2nxy^{(n-1)}+n(n-1)y^{(n-2)}=0.$$

带入 $x=0$ 得到递推公式

$$y^{(n)}=-n(n-1)y^{(n-1)}.$$

结合 $y(0)=1$ 和 $y'(0)=0$ 可知

$$f^{(n)}(0)=y^{(n-1)}(0)=\begin{cases}0, & n\text{为偶数};\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!, & n\text{为奇数}.\end{cases}$$

□

注 4.18 对于形如 $f(x)=(1+\beta x^m)^\alpha$ 类的函数 (其中 m 为正整数, α,β 为实数) 在 $x=0$ 处的高阶导数可以通过 Taylor 展开快速得到结果. 其思路如下, 首先在 0 处考虑 $g(x)=(1+x)^\alpha$ 的 Taylor 展开 (严谨起见, 该展开在 $\{|x|<1\}$ 上收敛) 可以给出

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n.$$

那么对于 $f(x)=(1+\beta x^m)^\alpha$, 其有两种展开方式. 一方面根据 $f(x)$ 自身的 Taylor 展开有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

另一方面,

$$f(x)=g(\beta x^m)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\beta^k x^{km}.$$

对比 x^n 项的系数知,

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n\text{不是 } m \text{ 的倍数};\\ \dfrac{(km)!}{k!}\beta^k\cdot\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1), & n=km.\end{cases}$$

例 4.19

上例中 $y=1/(1+x^2)$ 即为 $m=2,\alpha=-1,\beta=1$ 的情形. 于是在 $n=2k$ 时有

$$y^{(n)}(0)=\frac{(2k)!}{k!}(-1)\cdot(-2)\cdots(-k)=(-1)^k(2k)!.$$

这一计算方式便于快速得到结果, 但如果对 Taylor 级数不够熟悉可能在证明严谨性上有所缺失, 可以用来作为检查答案正确性的辅助方法.

例 4.20. 设 $f(x)=(\arcsin x)^2$, 求 $f^{(n)}(0)$.

解答. 我们依然采用化为隐函数求递推的方式. 令 $y=(\arcsin x)^2$. 那么

$$y'=\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

平方之后带入 y, 则可以通过化作隐函数的方式消去不便处理的反三角函数. 也即

$$(y')^2=\frac{4(\arcsin x)^2}{1-x^2}=\frac{4y}{1-x^2}.$$

于是我们得到 $(y')^2(1-x^2)=4y$. 为去掉 $(y')^2$ 的项, 我们再求一次导数得到

$$2y'y''(1-x^2)-2x(y')^2=4y'.$$

即 $y''(1-x^2)-xy'=2$. 对隐函数两侧求 n 次导得到

$$y^{(n+2)}(1-x^2)-2nxy^{(n+1)}-n(n-1)y^{(n)}-xy^{(n+1)}-ny^{(n)}=0.$$

带入 $x=0$ 得到 $y^{(n+2)}(0)=n^2y^{(n)}(0)$. 结合 $y'(0)=0$ 和 $y''(0)=2$ 知

$$f^n(0)=y^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n\text{为奇数},\\ 2[(n-2)!!]^2, & n\text{为偶数}.\end{cases}$$

其中 $(n-2)!!=(n-2)(n-4)\cdots 2$.

□

注 4.21 本题更自然的想法是先求几阶导数试试看. 然后试图在各阶导数间建立联系, 化成隐函数消去反三角函数项, 并且让剩下的项只是关于 y 的导数的线性组合. 我们求导发现

$$y'=\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},\quad y''=2\left[\frac{1}{1-x^2}+\frac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}\right]=\frac{2(1+xy')}{1-x^2}.$$

此时也可以直接得到前述的隐函数方程.

§5. 不定积分

定义 5.1. 设 $f(x)$ 是区间 I 上定义的函数, 如果区间 I 上的函数 $F(x)$ 满足 $F'(x)=f(x)$, 就称 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个**原函数**.

注意到常数函数的导数为 0, 从而对于函数 $F(x)$, 有

$$F'(x)=[F(x)+C]',$$

其中, C 为一个常数. 由于一个区间上导数恒为 0 的函数只有常数函数, 所以我们知道一个函数的不同原函数之间两两相差一个常数函数. 给定一个 $f(x)$, 求出其原函数的一般表达式的过程称为**不定积分**, 记作

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C.$$

从定义的角度讲, 求不定积分就是求导的逆操作. 然而实践时求不定积分往往比求导困难得多, 甚至许多形式简单的函数的不定积分不具有显性表达式. 我们首先根据初等函数的求导公式总结一些基本的不定积分结果.

例 5.2 (基本积分表)

- 当 $\alpha\neq-1$ 时, $\int x^\alpha\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$; 当 $\alpha=-1$ 时, $\int x^\alpha\,\mathrm{d}x=\ln|x|+C$.
- $\int\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$; $\int\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$; $\int\sec^2 x\,\mathrm{d}x=\tan x+C$.
- $\int e^x\,\mathrm{d}x=e^x+C$; 一般地, 对 $a\neq1$ 有 $\int a^x=\frac{1}{\ln a}a^x+C$.
- $\int\frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\arcsin x+C$; $\int\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\arctan x+C$.

与求导不同, 两个函数做四则运算后得到的函数的原函数已经可以难以求解, 这给求不定积分带来了很大困难. 于是我们求不定积分的方法通常是通过化归的方式将问题转化为已知的不定积分结果. 乘法的求导法则和复合函数求导的链式法则为求不定积分带来了两类重要工具:

- **换元法**(对应求导的链式法则): 由于我们有 $[\varphi(\psi(t))]'=\varphi'(\psi(t))\psi'(t)$, 由此衍生出两种凑形式的换元方式
  - **第一类换元法**: 被积函数 $f(x)$ 形如 $\varphi'(\psi(x))\psi'(x)$ 的形式.
  - **第二类换元法**: 视 x 为 $\psi(t)$, 此时要求 $f(x)$ 具有 $\varphi'(x)\psi'(t)$ 的形式.

  第一类换元法又称**直接代换法**或者**凑微分法**, 需要凑出 $\psi(x)$ 的形式, 并使得剩余部分是关于 ψ 的函数; 第二类换元法又称**带入换元法**, 即带入 $x=\psi(t)$ 的形式, 但需要注意 t 的范围和 ψ 的可逆性, 此方式需要选取合适的 ψ 以起到化简的目的.

- **分部积分法**(对应乘法的求导法则): 由于我们有 $[\varphi(x)\psi(x)]'=\varphi'(x)\psi(x)+\varphi(x)\psi'(x)$, 从而有

  $$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)g(x)-\int g(x)f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

  此方法适用于 $g(x)f'(x)$ 的形式相较于 $f(x)g'(x)$ 更简单的情形.

第一类换元法. 借助凑微分 $\psi'(x)$ 来化简被积函数.

例 5.3. 计算不定积分:

(1) $\int \tan x \,\mathrm{d}x$;

(2) $\int \sin^3 x \,\mathrm{d}x$.

解答. (1) 我们有

$$\int \tan x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x} \,\mathrm{d}x = \int -\frac{\mathrm{d} \cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$$

(2) 方法一. 我们有

$$\int \sin^3 x \,\mathrm{d}x = \int -\sin^2 x \,\mathrm{d} \cos x = \int \cos^2 x - 1 \,\mathrm{d} \cos x = \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C.$$

方法二. 利用三倍角公式 $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$, 我们有

$$\int \sin^3 x \,\mathrm{d}x = \frac{3}{4} \int \sin x \,\mathrm{d}x - \frac{1}{4} \int \sin 3x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{12} \cos 3x - \frac{3}{4} \cos x + C.$$

其中, 最后一个等号用到了 $\int \sin 3x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \int \sin 3x \,\mathrm{d}3x = -\frac{1}{3} \cos 3x$.

□

例 5.4. 计算不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$.

解答. 首先变形被积函数为 $(x \cdot |x| \sqrt{1 - 1/x^2})^{-1}$. 此时我们利用函数 $\psi(x) = 1/x$ 做换元. 由于 $\psi'(x) = -1/x^2$, 我们得到

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = -\int \frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\sqrt{1-\psi(x)^2}} = -\arcsin \frac{1}{x} + C, \quad x > 0;$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\sqrt{1-\psi(x)^2}} = \arcsin \frac{1}{x} + C, \quad x < 0.$$

综合两种情况我们得到该不定积分为 $-\arcsin \frac{1}{|x|} + C$. □

例 5.5 (2023 高数 A 期中)**.** 求不定积分 $\int \frac{\arctan e^x}{e^x + e^{-x}} \,\mathrm{d}x$.

解答. 我们有

$$\int \frac{\arctan e^x}{e^x + e^{-x}} \,\mathrm{d}x = \int \frac{\arctan e^x}{1 + e^{2x}} \,\mathrm{d}e^x = \int \arctan e^x \,\mathrm{d}(\arctan e^x) = \frac{1}{2} (\arctan e^x)^2 + C.$$

□

第二类换元法. 借助带入换元 $x = x(t)$ 来化简被积函数, 常见于通过这种带入换元消除根号.

例 5.6. 求不定积分 $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解答. 换元 $x=\sin t$, 其中 $-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{2}$. 那么

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\int \cos t\,\mathrm{d}(\sin t)=\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t=\int \frac{\cos 2t+1}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4}(\sin 2t+2t)+C.$$

利用 $\sin 2t=2\sin t\cdot\cos t$, 带入 $t=\arcsin x$, 我们得到

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)+C.$$

□

例 5.7. 计算不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$.

解答. 换元 $x=\sec t$, 其中 $t\in[0,\pi]\setminus\{\pi/2\}$. 原积分化为

$$\int \frac{\cos t\,\mathrm{d}(\sec t)}{\sqrt{\sec^2 t-1}}=\int \frac{\cos t\cdot|\cos t|}{\sin t}\frac{\sin t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=\int \operatorname{sgn}(\cos t)\,\mathrm{d}t=\operatorname{sgn}(\cos t)\cdot t+C.$$

带入 $t=\arccos(1/x)$ 得到原积分为 $\operatorname{sgn}(x)\cdot\arccos(1/x)+C$. □

注 5.8 我们已经在例5.4中计算过该不定积分, 此处是采用第二换元法的另一种解法. 这一例展示了在出现形如 $\sqrt{x^2-a^2}$ 的项时可以使用三角换元 $x=a\sec t$. 与此类似的是对形如 $\sqrt{a^2-x^2}$ 的项换元 $x=a\sin t$ 和对形如 $\sqrt{a^2+x^2}$ 的项换元 $x=a\tan t$.

例 5.9. 求不定积分 $\int \frac{1}{1+\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$.

解答. 令 $\sqrt{x-1}=t$, 即 $x=1+t^2$, 其中 $t\geqslant 0$. 那么原积分变为

$$\int \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}\left(t^2+1\right)=\int \frac{2t}{1+t}\,\mathrm{d}t=\int (2-\frac{2}{1+t})\,\mathrm{d}t=2t-2\ln(1+t)+C.$$

带入 $t=\sqrt{x-1}$ 得到原积分为 $2\sqrt{x-1}-2\ln(1+\sqrt{x-1})+C$. □

例 5.10 (2023 高数 A 期中)**.** 设函数 $y=y(x)$ 满足方程 $y^2\cdot(x-y)=x^2$, 求不定积分

$$\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}x.$$

解答. 设 $x/y=t$, 那么我们得到 $x-y=t^2$. 由此得到参数表达式

$$x=\frac{t^3}{t-1},\quad y=\frac{t^2}{t-1}.$$

于是原不定积分化为

$$\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}x=\int \frac{(t-1)^2}{t^4}\,\mathrm{d}\left(\frac{t^3}{t-1}\right)=\int \frac{2t-3}{t^2}\,\mathrm{d}t=2\ln|t|+\frac{3}{t}+C.$$

带入 $t=x/y$ 得到原不定积分为 $2\ln|x/y|+3y/x+C$. □

分部积分法.

例 5.11. 求不定积分 $\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x$.

解答. 我们有

$$\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x = \int \sin x \,\mathrm{d}e^x = e^x \sin x - \int e^x \,\mathrm{d}(\sin x) = e^x \sin x - \int e^x \cos x \,\mathrm{d}x.$$

注意到出现 $\int e^x \cos x \,\mathrm{d}x$ 项, 我们再对其做分部积分得到

$$\int e^x \cos x \,\mathrm{d}x = \int \cos x \,\mathrm{d}e^x = e^x \cos x - \int e^x \,\mathrm{d}(\cos x) = e^x \cos x + \int e^x \sin x \,\mathrm{d}x.$$

带入第一个式子得到

$$\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C.$$

$\square$

注 5.12 如果熟悉复数的话此题还可以借助复数给出一种更直接的方式. 设 i 为虚数单位, 由 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ 知 $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$. 于是

$$\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2i} \int \left(e^{(1+i)x} - e^{(1-i)x}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{1+i} e^{(1+i)x} - \frac{1}{1-i} e^{(1-i)x} \right) + C.$$

化简后得到相同的结果.

例 5.13. 求不定积分 $\int \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^2} \,\mathrm{d}x$.

解答. 我们有

$$\int \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^2} \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2} \int \arctan x \,\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{1}{2} \left[\frac{\arctan x}{1+x^2} - \int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}(\arctan x) \right].$$

现在我们计算

$$\int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}(\arctan x) = \int \frac{1}{(1+x^2)^2} \,\mathrm{d}x.$$

换元 $x = \tan t$, 其中 $-\pi/2 < t < \pi/2$. 于是有

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2} \,\mathrm{d}x = \int \cos^4 t \,\mathrm{d}(\tan t) = \int \cos^2 t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}(\sin 2t + 2t) + C,$$

最后一个用到了我们在例5.6中计算的结果. 从而

$$\int \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^2} \,\mathrm{d}x = -\frac{\arctan x}{2(1+x^2)} + \frac{x}{4(1+x^2)} + \frac{1}{4} \arctan x + C.$$

$\square$

特定形式函数的不定积分. 某些具有特定形式的函数积分具有通用的求解方式, 但有时计算量会较大, 我们总结这几类求不定积分常见的函数.

- **有理函数的不定积分**: 一个有理函数 $R(x)$ 是指其可以写成 $R(x) = P(x)/Q(x)$ 的形式, 其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 都是多项式. 通过多项式的带余除法, 我们可以得到

$$R(x) = R_0(x) + \frac{P_0(x)}{Q(x)}$$

的形式, 其中 $R_0(x), P_0(x)$ 均为多项式且 $P_0(x)$ 的次数严格小于 $Q(x)$. 下面我们针对 $P_0(x)/Q(x)$ 的部分求其积分. 首先将 $Q(x)$ 在多项式范围内做因式分解, 其可以写成

$$Q(x) = c(x-x_1)^{\alpha_1}\cdots(x-x_k)^{\alpha_k}(x^2+a_1x+b_1x)^{\beta_1}\cdots(x^2+a_\ell x+b_\ell x)^{\beta_\ell}$$

的形式. 此时 $P_0(x)/Q(x)$ 可以写成**部分分式**的和, 即形如

$$\frac{A}{(x-x_i)^n}, \quad \frac{Ax+B}{(x^2+a_ix+b_i)^m}$$

的项的求和, 其中 $n \leqslant \alpha_i, m \leqslant \beta_i$. 每个部分分式上的系数 A, B 都是通过待定系数求解得到的. 实际操作时我们通常使用带入多项式的根的方式可以更快地确定系数, 这一方法将在下面的例题中具体展示. 而每一个独立的部分分式我们是有已知的积分结果的, 由此得到 $R(x)$ 的不定积分.

> **注 5.14** 如果在复数范围内进行 $Q(x)$ 的因式分解, 则可以保证 $Q(x)$ 分解为形如 $(x-z_1)^{\alpha_1}\cdots(x-z_k)^{\alpha_k}$ 的形式. 此时其部分分式的形式更简单, 积分计算会更简单, 但需要将一些复数计算的结果化简为实函数 (例如反三角函数) 的形式.

- **三角有理式的不定积分**: 三角有理式指的是一个形如 $f(x) = R(\sin x, \cos x)$ 的函数, 其中 R 是一个 (二元) 有理函数. 此时的通用方法是借助换元 $t = \tan(x/2)$ 和万能公式

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

将被积函数转化为有理函数, 划归为上一情形.

- **无理函数 (根式函数) 的不定积分**: 一般的无理函数并不总是可以在初等函数范畴积出来的. 即使是在最基本的情形 $f(x) = x^m(ax^n+b)^p$, 其中 m, n 为整数, p 为有理数, 不定积分 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 也仅在 $p, (m+1)/n, (m+1)/n+p$ 其中之一为整数这三种情况能积出来. 对应于后两种情况, 我们通常只需考虑

$$t = \sqrt[k]{ax^\ell+b} \quad \text{或} \quad t = \sqrt[k]{\frac{ax^\ell+b}{cx^\ell+d}}$$

这两类换元即可. 对于能够积出来的无理函数, 这两类换元已经足够将根式函数的积分转化为有理函数的积分了.

例 5.15. 令有理函数 $R(x)=\frac{x^3+1}{x^4-3x^3+3x^2-x}$.

(1) 将 $R(x)$ 写作部分分式的和;

(2) (2020 高数 B 期中) 求不定积分 $\int R(x)\,\mathrm{d}x$.

解答. (1) 记 $P(x)=x^3+1, Q(x)=x^4-3x^3+3x^2-x$, 那么 $R(x)=P(x)/Q(x)$. 首先对分母 $Q(x)$ 做因式分解得 $Q(x)=x(x-1)^3$. 从而 $R(x)$ 写作部分分式的和形如

$$R(x)=\frac{A}{x}+\frac{B_1}{x-1}+\frac{B_2}{(x-1)^2}+\frac{B_3}{(x-1)^3}.$$

此处可以直接通分比对系数计算, 但计算量较大, 我们采取另一方法. 注意到

$$P(x)=R(x)Q(x)=A\frac{Q(x)}{x}+B_1\frac{Q(x)}{x-1}+B_2\frac{Q(x)}{(x-1)^2}+B_3\frac{Q(x)}{(x-1)^3},$$

右式中除 $A\frac{Q(x)}{x}$ 以外其余三项均有因子 x, 而 $Q(x)/x=(x-1)^3$. 于是我们带入 $x=0$ 可以知道 $A(0-1)^3=P(0)=1$, 从而 $A=-1$. 类似地, 右式除 $B_3\cdot Q(x)/(x-1)^3=B_3x$ 以外均有因子 $(x-1)$. 带入 $x=1$ 得到 $B_3=P(1)=2$.

接下来我们依次计算 B_2,B_1. 计算 B_2 时我们利用已经算出的 $B_3=2$, 考虑

$$P(x)-2x=P(x)-B_3\frac{Q(x)}{(x-1)^3}=A\frac{Q(x)}{x}+B_1\frac{Q(x)}{x-1}+B_2\frac{Q(x)}{(x-1)^2},$$

此时等式两侧均为 $(x-1)$ 的倍数. 两侧约去 $(x-1)$ 后得到

$$x^2+x-1=\frac{P(x)-2x}{x-1}=A\frac{Q(x)}{x(x-1)}+B_1\frac{Q(x)}{(x-1)^2}+B_2\frac{Q(x)}{(x-1)^3},$$

类似之前计算 B_3 的方法我们此时带入 $x=1$ 可以计算出 $B_2=1$. 类似地我们可以计算出 $B_1=2$. 从而 $R(x)$ 的部分分式表达式为

$$R(x)=-\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}.$$

(2) 根据上述部分分式表达式可得

$$\int R(x)\,\mathrm{d}x=-\ln|x|+2\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+C.$$

□

例 5.16. 设 a,b 为非零实数, 求不定积分 $\int\frac{1}{a+b\cos x}\,\mathrm{d}x$.

解答. 首先我们换元 $t=\tan\frac{x}{2}$, 也即 $x=2\arctan t$. 带入得到

$$\int\frac{1}{a+b\cos x}\,\mathrm{d}x=2\int\frac{1+t^2}{a(1+t^2)+b(1-t^2)}\,\mathrm{d}(\arctan t)=\int\frac{2\,\mathrm{d}t}{(a+b)+(a-b)t^2}.$$

根据 $(a+b)$ 与 $(a-b)$ 的符号我们分为以下四类:

(i) $|a|>|b|$, 此时 $(a+b)(a-b)>0$. 我们有

$$\int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(a+b)+(a-b)t^2}=\frac{2}{a+b}\int \frac{\mathrm{d}t}{1+\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}t\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right)+C.$$

注 5.17 该结果并不严谨, 因为换元 $t=\tan\frac{x}{2}$ 在 $x=k\pi$ 时无定义 (且不是单射), 该不定积分结果这只能给出 $x\in(-\pi,\pi)$ 的情形. 实际上严谨的结果为

$$\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right)+\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}\left\lfloor\frac{x+\pi}{2\pi}\right\rfloor+C.$$

(ii) $|a|<|b|$, 此时 $(a+b)(a-b)<0$. 我们有

$$\begin{aligned}\int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(a+b)+(a-b)t^2}&=\frac{2}{a+b}\int \frac{\mathrm{d}t}{1-\left(\sqrt{\frac{b-a}{a+b}}t\right)^2}\\&=\frac{1}{a+b}\int\left(\frac{1}{1+\sqrt{\frac{b-a}{a+b}}t}+\frac{1}{1-\sqrt{\frac{b-a}{a+b}}t}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+b}+t\sqrt{b-a}}{\sqrt{a+b}-t\sqrt{b-a}}\right|+C\\&=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{b+a\cos x+\sqrt{b^2-a^2}\sin x}{a+b\cos x}\right|+C.\end{aligned}$$

(iii) $a=b$, 此时

$$\int\frac{1}{a(1+\cos x)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2a\cos^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\tan\frac{x}{2}+C.$$

(iv) $a=-b$, 此时

$$\int\frac{1}{a(1-\cos x)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2a\sin^2\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{a}\cot\frac{x}{2}+C.$$

$\square$

注 5.18 此题的一个特殊情况是 Poisson 积分, 给定 $-1<r<1$, 我们有**Poisson 积分**

$$\int\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\,\mathrm{d}x=2\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\tan\frac{x}{2}\right)+C.$$

特别地, 该结果给出定积分

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\,\mathrm{d}x=\lim_{\theta\to\pi-0}2\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\tan\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{-\theta}^{\theta}=2\pi.$$

§6. 定积分

定积分的定义. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义.

1. 分割区间: 选取闭区间 $[a,b]$ 的一个**分割**$T=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b\}$. 记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$, 称 $\lambda(T):=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i$ 为 T 的**细度**.
2. 计算**Riemann 和**: 对于分割 T 给出的每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 选取介点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, 称
$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$
为 f 在区间 $[a,b]$ 上的一个 Riemann 和.
3. 取极限: 如果存在实数 I 满足
$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=I, \tag{6.1}$$
就称 f 在区间 $[a,b]$ 上**Riemann 可积**且称 I 为 f 在区间 $[a,b]$ 上的**Riemann 积分**或**定积分**, 记作
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=I.$$
这里我们需要强调极限(6.1)所具备的含义, 其要求该收敛针对不同分割和介点的选取具备一致性: 对任意 $\varepsilon>0$, 都存在 $\delta>0$ 使得对任意满足 $\lambda(T)<\delta$ 的分割 T 和任意相对于 T 的介点集 $\{\xi_i\}$, 都有
$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\varepsilon.$$

定理 6.1 (微积分基本定理)

设 $f(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 令 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数, 那么
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=F(x)\big|_a^b.$$

定积分的定义通常可以帮助我们计算一些和式性数列的极限, 一些具有特定形式的和式可以转化为函数的 Riemann 和然后根据定积分的定义可知极限为一个定积分.

例 6.2. 计算下列极限:

(1) (2020 高数 B 期中)$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+i^2}$;

(2) (2023 高数 A 期中)$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\ln(n+k)-\frac{n+1}{2n}\ln n$.

解答. (1) 我们有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+i^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n}}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right),$$

其中 $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$. 此时上述极限为函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的 Riemann 和的极限, 从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1=\frac{\ln 2}{2}.$$

(2) <u>最开始大脑卡壳写出的麻烦做法.</u> 首先我们将求和进行变形

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\ln(n+k)-\frac{n+1}{2n}\ln n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}(\ln(n+k)-\ln n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

为将右式化作 Riemann 和的形式, 我们考虑区间 $[0,1/2]$ 的划分 $x_k=k(k+1)/2n^2$,$1\leqslant k\leqslant n-1$ 和 $x_0=0,x_n=1/2$. 此时对 $1\leqslant k\leqslant n-1$ 均有 $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}=k/n^2$. 由于 $\Delta x_n=x_n-x_{n-1}=1/2n$, 从而

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\ln 2\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot\Delta x_k.\end{aligned}$$

现在我们选取介点 $\xi_k=k^2/2n^2\in[x_{k-1},x_k]$, 那么

$$\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=f(\xi_k),$$

其中 $f(x)=\ln(1+\sqrt{2x})$. 由于该分割的细度为 $(n-1)/n^2\to 0$, 从而原极限为

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2}\ln(1+\sqrt{2x})\,\mathrm{d}x&=\int_0^1\ln(1+t)\,\mathrm{d}\frac{t^2}{2}\\&=\frac{1}{2}\left(t^2\ln(1+t)\big|_0^1-\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}\ln(1+t)\right)\\&=\frac{1}{2}\left[\ln 2-\int_0^1\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)\,\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\ln 2-\left(\frac{1}{2}t^2-t+\ln(1+t)\right)\Big|_0^1\right]=\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

<u>正常的简洁做法.</u> 首先我们将求和进行变形

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\ln(n+k)-\frac{n+1}{2n}\ln n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}(\ln(n+k)-\ln n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

右式此时化作函数 $x\ln(1+x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的 Riemann 和, 从而极限为

$$\int_0^1 x\ln(1+x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+x)\,\mathrm{d}x^2=\frac{1}{2}\ln 2-\int_0^1\frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.$$

□

我们需要指出的是, 几乎只有这一类特殊的序列求极限问题才需要用到 Riemann 和的概念. 在这一类问题中, 将序列转化为 Riemann 和的方式被视为一种技巧.

Riemann 和自身作为一种符合直觉的概念, 其在公理化的微积分体系中的主要作用是明确函数 "可积性". 而如果我们已经限制在可积函数的范围内讨论问题, 例如在一些关于定积分的证明题中, Riemann 和本身并不是一个好用的对象, 我们也一般避免使用这一概念. 实际上, 对于这一类问题我们直接使用定积分的若干基本性质即可完成推导.

例 6.3 (定积分的性质)

- 区域划分:
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$
- 单调性: 如果在区间 $[a,b]$ 上满足 $f(x) \leqslant g(x)$, 那么
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$
- 不等式估计 (单调性的特例): 如果 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足 $m \leqslant f(x) \leqslant M$, 那么
$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$
- 三角不等式
$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

例 6.4 (2020 高数 C 期末). 设 f 是区间 (A,B) 上的连续函数, 证明对任意 (A,B) 内的两点 $a<b$ 都有
$$\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\mathrm{d}x = f(b)-f(a).$$

解答. 根据变量代换, 我们有
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\mathrm{d}x &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_{a+h}^{b+h} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\int_b^{b+h} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{a+h} f(x)\,\mathrm{d}x\right)\\ &= f(b)-f(a).\end{aligned}$$

其中最后一个等号利用到了 $f(x)$ 在 a,b 处的连续性: 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$ 使得对任意 $x\in U_\delta(a)$ 都有 $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$, 从而对任意 $|h|<\delta$ 都有
$$\left|\int_a^{a+h} f(x)\,\mathrm{d}x - hf(a)\right| = \left|\int_a^{a+h}[f(x)-f(a)]\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^{a+h}|f(x)-f(a)|\,\mathrm{d}x \leqslant |h|\varepsilon.$$

从而 $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(x)\,\mathrm{d}x = f(a)$, 对 b 处同理.(此步骤也可用积分中值定理代替.) □

注 6.5 此题还有一种看起来直接但并不正确的想法:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b)-f(a).\end{aligned}$$

我们要指出这一证法的三个等号均为错误的:

- 在一般情形, 求极限和积分这两个操作并不能交换顺序;
- 我们没有假定 $f(x)$ 是可导的;
- 即使 $f(x)$ 是可导的, 其导数也未必连续从而不能使用微积分基本定理. 实际上, **一个可导函数的导数未必是 Riemann 可积的**. 例如 $f(x)=x\sin\frac{1}{x}(x>0)$ 的导数是无界的, 从而并不是 Riemann 可积的.

例 6.6 (2021 高数 B 期中). 设 $f(x)$ 是闭区间 $[0,2\pi]$ 上的连续函数, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \to 0.$$

证明. 由于 $f(x)$ 是有界闭区间上的连续函数, 从而 $f(x)$ 是**一致连续**的: 对任意 $\varepsilon>0$ 都存在 $\delta>0$ 使得对任意 $x_1,x_2\in[0,2\pi]$ 满足 $|x_1-x_2|<\delta$ 都有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

我们选取 N 充分大使得 $2\pi/N<\delta$. 于是当 $|n|>N$ 时, 对任意 $1\leqslant k\leqslant n$ 我们都有

$$\left|\int_{2(k-1)\pi/|n|}^{2k\pi/|n|}\left[f(x)-f\left(\frac{2k\pi}{|n|}\right)\right]\sin nx\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{2\pi}{|n|}\varepsilon.$$

注意到

$$\int_{2(k-1)\pi/|n|}^{2k\pi/|n|} f\left(\frac{2k\pi}{|n|}\right)\sin nx\,\mathrm{d}x = f\left(\frac{2k\pi}{|n|}\right)\cdot\int_{2(k-1)\pi/|n|}^{2k\pi/|n|}\sin nx\,\mathrm{d}x = 0.$$

所以我们有

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\right|\leqslant\sum_{k=1}^{|n|}\left|\int_{2(k-1)\pi/|n|}^{2k\pi/|n|} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\right|\leqslant 2\pi\varepsilon,$$

对任意 $|n|>N$ 成立. 从而原极限为 0. □

注 6.7 此题实际上是 Fourier 变换中十分重要的Riemann-Lebesgue 引理的特殊形式. 在一般情形, 该结论只需要假设 $|f(x)|$ 的可积性即可成立.

变限定积分. 与变限定积分相关的主要问题就是对变限定积分进行求导, 微积分基本定理保证了这一类问题的本质就是复合函数求导. 设 $\varphi(x),\psi(x)$ 是两个可导的函数, $f(t)$ 是连续函数, 那么

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = [F(\psi(x))-F(\varphi(x))]' = f(\psi(x))\psi'(x)-f(\varphi(x))\varphi'(x),$$

其中 F 是 f 的一个原函数. 这一类问题基本就是求导练习, 只需关注清楚变量较多时各变量之间的从属关系即可.

例 6.8. 求函数 $G(x)=\int_x^{x^2}\left(e^t\int_0^t \sin z\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}t$ 的二阶导数.

解答. 我们有

$$G'(x)=2x\cdot e^{x^2}\int_0^{x^2}\sin z\,\mathrm{d}z-e^x\int_0^x\sin z\,\mathrm{d}z=2x(1-\cos x^2)e^{x^2}-e^x(1-\cos x).$$

从而

$$G''(x)=2e^{x^2}[(1-\cos x^2)+2x^2\sin x^2+2x^2(1-\cos x^2)]-e^x(1-\cos x+\sin x).$$

□

定积分的计算.

微积分基本定理的存在使得许多情形下定积分的计算的关键还是在于对被积函数的原函数的求解, 与计算不定积分类似, 我们也经常使用换元法和分部积分法.

- **换元法**: 计算 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 的定积分时, 考虑换元 $x=\psi(t)$, **我们要求** $\psi(t)$ **具有连续的导函数,** $\psi(\alpha)=a,\psi(\beta)=b$ **且对任意** $t\in[\alpha,\beta]$ **都有** $\psi(t)\in[a,b]$, 那么

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\psi(t))\psi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

- **分部积分法**: 与不定积分的分部积分基本相同, 即

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)g(x)|_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

例 6.9 (2023 高数 B 期中)**.** (1) 证明对 $x\in(-\pi/2,\pi/2)$ 都有

$$-1<\frac{4\sin x}{3+\sin^2 x}<1.$$

(2) 对 $x\in(-\pi/2,\pi/2)$ 求 $f'(x)$, 其中函数 $f(x)$ 为

$$f(x)=\arcsin\left(\frac{4\sin x}{3+\sin^2 x}\right).$$

(3) 证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4\cos^2 x+\sin^2 x}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{9}{4}\cos^2 x+2\sin^2 x}}.$$

解答. (1) 由 $1>\sin x$ 和 $1+\sin^2 x\geqslant 2\sin x$ 知 $3+\sin^2 x>4\sin x$. 另一个不等号同理.

(2) 我们有

$$f'(x)=\frac{3+\sin^2 x}{\sqrt{(3+\sin^2 x)^2-16\sin^2 x}}\cdot\frac{4\cos x(3-\sin^2 x)}{(3+\sin^2 x)^2}.$$

注意到 $(3+\sin^2 x)^2-16\sin^2 x=9-10\sin^2 x+\sin^4 x=(9-\sin^2 x)(1-\sin^2 x)=(9-\sin^2 x)\cos^2 x$, 我们可以化简得到

$$f'(x)=\frac{3-\sin^2 x}{3+\sin^2 x}\cdot\frac{4}{\sqrt{9-\sin^2 x}}.$$

(3) 令 $y=f(x)=\arcsin\left(\frac{4\sin x}{3+\sin^2 x}\right)$, 那么

$$4\cos^2 y+\sin^2 y=4-3\cdot\frac{16\sin^2 x}{(3+\sin^2 x)^2}=\frac{4[(3+\sin^2 x)^2-12\sin^2 x]}{(3+\sin^2 x)^2}=4\left(\frac{3-\sin^2 x}{3+\sin^2 x}\right)^2.$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{4\cos^2 y+\sin^2 y}}=\frac{2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{9-\sin^2 x}}=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{9}{4}\cos^2 x+2\sin^2 x}}.$$

由于 x 从 0 变动到 $\pi/2$ 时 $f(x)$ 也从 0 变动到 $\pi/2$, 从而

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{9}{4}\cos^2 x+2\sin^2 x}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}f(x)}{\sqrt{4\cos^2 f(x)+\sin^2 f(x)}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4\cos^2 x+\sin^2 x}}.$$

□

注 6.10 此结果的一般版本被称为椭圆积分的高斯定理, 对于任意 $a,b>0$ 有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\cos^2\theta+ab\sin^2\theta}}.$$

证明方法是考虑换元

$$\sin\varphi=\frac{2a\sin\theta}{(a+b)+(a-b)\sin^2\theta}.$$

本题即为 $a=2,b=1$ 的情形.

例 6.11 (2023 高数 A 期中). 令 $f(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{\pi-t}\,\mathrm{d}t$ 为定义在 $[0,\pi]$ 上的函数, 计算定积分 $\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x$.

解答. 我们有

$$\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x=xf(x)|_0^\pi-\int_0^\pi xf'(x)\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^\pi\frac{\sin x}{\pi-x}\,\mathrm{d}x-\int_0^\pi\frac{x\sin x}{\pi-x}\,\mathrm{d}x.$$

$$=\int_0^\pi(\pi-x)\frac{\sin x}{\pi-x}\,\mathrm{d}x=\int_0^\pi\sin x\,\mathrm{d}x=2.$$

□

例 6.12. 设 n 为正整数, 计算 $\int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x$.

解答. 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \,\mathrm{d}x &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \,\mathrm{d}(\cos x) = -\sin^{n-1} x \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,\mathrm{d}(\sin^{n-1} x)\\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

令 $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x$, 那么上式给出关系式 $I_n = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$, 即 $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. 带入 $I_0 = \pi/2$ 和 $I_1 = 1$, 我们得到结果:

$$I_n = \begin{cases} frac(n-1)!!n!!, & n\text{为奇数};\\ frac(n-1)!!n!!, & n\text{为偶数}.\end{cases}$$

□

例 6.13. 设 $F(x) = \int_0^x \sin \frac{1}{t} \,\mathrm{d}t$, 求 $F'(0)$.

解答. 注意到 $\sin \frac{1}{t}$ 在 $t = 0$ 处并不连续, 我们无法使用之前的方法计算该变限积分在 $x = 0$ 处的导数, 我们尝试直接变形该积分. 用分部积分公式得到

$$F(x) = \int_0^x t^2 \,\mathrm{d}\cos\frac{1}{t} = t^2\cos\frac{1}{t}\Big|_0^x - \int_0^x 2t\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = x^2\cos\frac{1}{x} - 2\int_0^x t\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

注意到

$$\left|\int_0^x t\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_0^x \left|t\cos\frac{1}{t}\right| \,\mathrm{d}t\right| \leqslant x^2.$$

于是

$$F'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x} = \lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x} = 0.$$

□

然而, 有一些原函数难以求解的被积函数也能够计算定积分的值. 这经常依赖于函数和积分区域的对称性, 最基本的例子是对于 (可积的) 奇函数 $f(x)$ 总有

$$\int_{-T}^{T} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

更常见的例子来自含有三角函数的被积函数, 利用三角函数的诱导公式我们往往能找到被积函数的许多对称性, 利用这些对称性配对的方法消去被积函数中难以处理的三角函数化简被积函数也是一种常见的技巧.

例 6.14. 计算定积分

(1) $\int_{-1}^{1}\left(\frac{\sin^2 x}{1+e^x} + \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}\right)\mathrm{d}x$;

(2) (2020 高数 B 期中)$\int_{-1}^{1}\frac{x^2(1+\arcsin x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

解答. (1) 为了消去被积函数中较为难以处理的三角函数, 我们利用配对求和的方法. 令被积函数为 $f(x)$, 那么我们有

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} [f(x)+f(-x)]\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} \left(\frac{\sin^2 x}{1+e^x} + \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}} + \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}} + \frac{\cos^2 x}{1+e^x}\right) \mathrm{d}x$$

$$= \int_{0}^{1} \left(\frac{1}{1+e^x} + \frac{1}{1+e^{-x}}\right) \mathrm{d}x = \int_{0}^{1} 1\,\mathrm{d}x = 1.$$

(2) 此被积函数中的反三角函数是计算积分中较难处理的项, 但我们注意到函数

$$\frac{x^2 \arcsin x}{1+x^2}$$

是奇函数, 从而其在 $[-1,1]$ 上的积分为 0. 于是原积分值为

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} 1 - \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = (x-\arctan x)|_{-1}^{1} = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

□

例 6.15 (2022 高数 B 期中)**.** 对于 $x \in (-1,1)$, 令函数

$$f(x) = \int_{0}^{2\pi} \ln(1-2x\cos t + x^2)\,\mathrm{d}t.$$

(1) 证明 $2f(x) = f(x^2)$ 对任意 $x \in (-1,1)$ 成立;

(2) 证明 $f(x)$ 在区间 $(-1/2, 1/2)$ 上有界;

(3) 求 $f(x)$ 在 $x \in (-1,1)$ 上的显性表达式.

解答. (1) 由于 $\cos(t+\pi) = -\cos t$, 从而我们有

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{0}^{\pi} [\ln(1-2x\cos t + x^2) + \ln(1-2x\cos(t+\pi)+x^2)]\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{0}^{\pi} \ln[(1+x^2)^2 - 4x^2\cos^2 t]\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{0}^{\pi} \ln[1+x^4 - 2x^2(2\cos^2 t - 1)]\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{0}^{\pi} \ln(1+x^4-2x^2\cos 2t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} f(x^2). \end{aligned}$$

(2) 由于 $(1-|x|)^2 \leqslant 1-2x\cos t + x^2 \leqslant (1+|x|)^2$, 从而对任意 $x \in (-1/2, 1/2)$ 我们总有

$$-4\pi\ln 2 \leqslant f(x) \leqslant 4\pi \ln\frac{3}{2}.$$

(3) 反复利用 (1), 我们知道 $f(x) = f(x^{2^n})/2^n$ 对任意 $x \in (-1,1)$ 和正整数 n 成立. 固定 $x \in (-1,1)$, 由于 $\lim_{n\to\infty} x^{2^n} = 0$, 从而当 n 充分大时 $x^{2^n} \in (-1/2, 1/2)$. 利用上一问的有界性知对于充分大的 n 总有

$$-\frac{4\pi\ln 2}{2^n} \leqslant f(x) \leqslant \frac{4\pi\ln(3/2)}{2^n}.$$

令 n 趋于无穷, 根据夹逼定理知 $f(x)=0$. 从而 $f(x)$ 在 $x\in(-1,1)$ 上恒为 0.

□

注 6.16 (3) 也可以通过先计算 $f(0)=0$ 然后利用 $f(x^{2^n})\to f(0)$ 的方式得到. 本质上与我们的解法相同, 但需要注意的是这种方法需要先证明 $f(x)$ 的连续性.

注 6.17 此题的另一解法是考虑 $f'(x)$, 我们给出该方法的大致思路. 首先我们可以证明对 $x\in(-1,1)$ 有

$$f'(x)=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\ln(1-2x\cos t+x^2)]\,\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2x-2\cos t}{1-2x\cos t+x^2}\,\mathrm{d}t.$$

这里第一个等号利用到了求导与积分交换计算顺序, 我们要强调这一步是需要证明的而且证明并不平凡. 此时右式被积函数化作一个关于 t 的三角有理式, 根据上一节的技巧我们换元 $s=\tan\frac{t}{2}$ 可解出其原函数. 实际上, 右式与注5.18中的 Poisson 积分高度相关. 利用 Poisson 积分的结果, 我们有 ($x\neq 0$ 时)

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2x-2\cos t}{1-2x\cos t+x^2}\,\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{x}+\frac{x-\frac{1}{x}}{1-2x\cos t+x^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2\pi}{x}-\frac{2\pi}{x}=0.$$

由此知 $f'(x)\equiv 0$. 结合 $f(0)=0$ 知 $f(x)\equiv 0$.

定积分的应用.

定积分常见的应用是计算一些几何对象的长度/面积/体积等等.

例 6.18 (曲线弧长)

计算曲线弧长通常有以下公式:

- 一般方程 $y=f(x)$ 所给出的曲线弧长 $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$;
- 参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$ 所给出的曲线弧长 $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$;
- 极坐标方程 $r=r(\theta)$ 所给出的曲线弧长 $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[r'(\theta)]^2+r^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$.

例 6.19 (2021 高数 B 期中)**.** 计算抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 在 $(0,0)$ 到 $(1,1/2)$ 之间的曲线弧长.

解答. 由于 $f'(x)=x$. 根据弧长公式我们有

$$
\begin{aligned}
s&=\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}(\tan t)=\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\cos^3 t}\,\mathrm{d}t\\
&=\int_0^{\pi/4}\frac{1}{\cos^4 t}\,\mathrm{d}(\sin t)=\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{1}{(1-u^2)^2}\,\mathrm{d}u\\
&=\int_0^{\sqrt{2}/2}\frac{1}{4(1+u)^2}+\frac{1}{4(1-u)^2}+\frac{1}{4(1+u)}+\frac{1}{4(1-u)}\,\mathrm{d}u\\
&=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-u}-\frac{1}{1+u}+\ln(1+u)-\ln(1-u)\right]\Bigg|_0^{\sqrt{2}/2}\\
&=\frac{\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})}{2}.
\end{aligned}
$$

关于 $\sqrt{1+x^2}$ 的不定积分计算最快捷的方法是采用双曲换元, 见例7.16. □

例 6.20 (旋转体体积和侧面积)

考虑一条曲线绕 x 轴旋转构成的旋转体, 其体积和侧面积具有以下公式:

- 一般方程 $y=f(x)$ 所给出的旋转体体积 $V=\pi\int_\alpha^\beta f^2(x)\,\mathrm{d}x$;
- 一般方程 $y=f(x)$ 所给出的旋转体侧面积 $F=2\pi\int_\alpha^\beta f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$;
- 参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$ 给出的旋转体侧面积 $F=2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$;
- 极坐标方程 $r=r(\theta)$ 给出的旋转体侧面积 $F=2\pi\int_\alpha^\beta r\sin\theta\sqrt{[r'(\theta)]^2+r^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$.

例 6.21 (平面图形面积)

关于平面上曲线围成的区域面积我们有如下公式:

- 两条曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 夹出的曲边四边形面积 $S=\int_\alpha^\beta|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$;
- 极坐标方程 $r=r(\theta)$ 所围成图形面积 $S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

例 6.22 (2021 高数 B 期中)**.** 给定奇数 $n\geqslant 3$, 设 n 叶玫瑰线由极坐标方程 $r=\sin n\theta$ 给出, 求其围成的区域面积.

解答. 该极坐标方程仅在 $\theta\in[2k\pi/n,(2k+1)\pi/n]$ 有良定义, 其中 $k=0,\cdots,n-1$. 共 n 叶, 每一叶的面积相同, 从而总面积为

$$
S=\frac{n}{2}\int_0^{\pi/n}\sin^2 n\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{4}\int_0^{\pi/n}\frac{1-\cos 2n\theta}{2}\,\mathrm{d}(2n\theta)=\frac{\pi}{4}.
$$

此题主要需要小心定义域的问题, 直接在 $[0,2\pi]$ 上积分 $r^2(\theta)/2$ 得到的结果是不正确的. □

其他相关的证明题.

一个有用的工具是连续函数的积分中值定理. 虽然这一结论实际上就是连续函数的介值定理的直接推论, 且这一结论的多数使用场景可以直接被例6.3中关于积分的不等式估计所替代, 但一些时候直接使用这个结果还是可以期待简化证明的作用的.

定理 6.23

如果 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 那么存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\cdot(b-a).$$

例 6.24 (2020 高数 B 期中)**.** 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的可导函数且 $f'(x)$ 连续, 证明对于任意 $x\in[0,1]$ 都有

$$|f(x)|\leqslant\int_0^1|f(t)|\,\mathrm{d}t+\int_0^1|f'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

解答. 由于 $f'(x)$ 连续, 从而对任意 $[0,1]$ 上的实数 x,y 都有

$$|f(y)-f(x)|=\left|\int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_x^y|f'(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1|f'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

同时, 由于 $f(x)$ 的连续性知 $|f(x)|$ 也连续, 从而由积分中值定理知存在 $\xi\in[0,1]$ 使得

$$|f(\xi)|=\int_0^1|f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

结合前一不等式, 可知对任意 $x\in[0,1]$ 都有

$$|f(x)|\leqslant|f(\xi)|+|f(x)-f(\xi)|\leqslant\int_0^1|f(t)|\,\mathrm{d}t+\int_0^1|f'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

□

§7. 期中考试例题

说明. 此部分为 2024 年唐思远老师的《高等数学 A》课程作业, 内容是由部分往年高等数学课程考试题所构成的模拟练习. 但所有题目均来自往年考生的回忆版本, 与考场上的实际考试题可能有所出入. 同时这一部分的题目部分解答可能较为简略, 且可能有所错漏, 这些解答并不可视为考试的标准答案, 请谨慎参考.

模拟练习一.

例 7.1 (2022 高数 A 期中). 构造数列 $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ 使得下面两个极限同时成立:

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n - e^n) = 0$;

(2) $\lim_{n\to\infty}(f(a_n) - f(e^n)) \neq 0$, 其中 $f(x) = x\ln x$.

解答. 令 $a_n = e^n + b_n$, 那么要求 $b_n \to 0$. 我们让 $b_n \geqslant 0$, 那么

$$f(a_n) - f(e^n) = (e^n + b_n)\ln(e^n + b_n) - e^n \ln e^n \geqslant n(e^n + b_n) - ne^n \geqslant nb_n.$$

只需选取 $b_n = 1/n$ 即可. □

例 7.2 (2023 高数 A 期中). 确定实数 a, b 的取值使得 $\mathbb{R}$ 上的函数函数

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$$

连续.

解答. 计算可得

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & |x| > 1; \\ \dfrac{a+b+1}{2}, & x = 1; \\ \dfrac{a-b-1}{2}, & x = -1; \\ ax^2 + bx, & |x| < 1. \end{cases}$$

在 $x = \pm 1$ 处的连续性分别给出方程

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{a+b+1}{2} = a + b; \\ -1 = \dfrac{a-b-1}{2} = a - b. \end{cases}$$

解出 $a = 0, b = 1$. 经验证 f 此时确实连续. □

例 7.3 (2022 高数 A 期中). 是否存在实数序列 $\{a_n\}$ 同时满足

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$,

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n^n = 1.001$.

解答. 令 $b_n = a_n^n$, 那么 $a_n = b_n^{1/n}$. 可见只需取 $b_n \equiv 1.001$, 那么自然有 $b_n^{1/n} \to 1$. □

例 7.4 (2022 高数 A 期中)**.** 求 n 阶导数 $y^{(n)}$, 其中 $y = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$.

解答. 设 $y^{(n)} = (a_n x^2 + b_n x + c_n)e^{-x}$, 那么

$$a_{n+1} = -a_n, \quad b_{n+1} = -b_n + 2a_n, \quad c_{n+1} = -c_n + b_n.$$

计算出 $a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^{n+1}(2n-2), c_n = (-1)^n(n^2 - 3n + 6)$ 对 $n \geqslant 1$ 时. □

例 7.5 (2023 高数 C 期中)**.** (1) 令函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ln\left(2 + \cos\dfrac{1}{x}\right) & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

求 $f'(x)$ 并判断其各点处连续性, 探讨其间断点的类型;

(2) 设 $g(x)$ 是一个在 0 处可导的函数, 且其满足

$$|g(x)| \leqslant \ln(1 + |\arcsin x|)$$

对任意 $|x| < 1$ 成立. 证明 $|g'(0)| \leqslant 1$.

解答. (1) 在 $x \neq 0$ 时

$$f'(x) = 2x \ln\left(2 + \cos\frac{1}{x}\right) + \frac{\sin\frac{1}{x}}{2 + \cos\frac{1}{x}}.$$

在 $x = 0$ 处有

$$f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} x \ln\left(2 + \cos\frac{1}{x}\right) = 0.$$

在 0 处不连续, 是第二类间断点.

(2) 首先 $|g(0)| \leqslant 0$ 从而 $g(0) = 0$. 然后有

$$|g'(0)| = \lim_{x\to 0} \frac{|g(x)|}{|x|} \leqslant \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + |\arcsin x|)}{|x|} = \lim_{x\to 0} \frac{|\arcsin x|}{|x|} = 1.$$

□

例 7.6 (2021 高数 B 期中)**.** (1) 计算定积分 $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x} \,\mathrm{d}x$;

(2) 计算抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 在 $(0, 0)$ 到 $(1, 1/2)$ 之间的曲线弧长;

(3) 给定奇数 $n \geqslant 3$, 设 n 叶玫瑰线由极坐标方程 $r = \sin n\theta$ 给出, 求其围成的区域面积.

解答. (1) 我们有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}\sin x = \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big|_0^1 = \frac{\ln 2}{2}.$$

(2) 见例6.19.

(3) 见例6.19

□

例 7.7 (2022 高数 A 期中)**.** 设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数. 对 $x\in[a,b]$, 令

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

证明:

(1) $F(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数;

(2) $F(x)$ 是 (a,b) 上的可导函数且 $F'(x) = f(x)$.

解答. 此题即为微积分基本定理, 证明可直接使用积分中值定理或者关于定积分的不等式估计. 严格的书写过程可参见《高等数学》教材 134 页定理 2. □

例 7.8 (2020 高数 B 期中)**.** 求导数 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^3+1}^{2^x}\frac{\sin t}{t^4+2}\,\mathrm{d}t$.

解答. 结果为 $\frac{2^x\ln 2\sin 2^x}{2^{4x}+2} - \frac{3x^2\sin(x^3+1)}{(x^3+1)^4+2}$. □

例 7.9 (2022 高数 B 期中)**.** 求不定积分

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)(x-1)^5}}.$$

解答. 注意到原式可变形为

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{2}{x-1}}}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x-1}\right).$$

此时换元 $t = \sqrt[3]{1+\frac{2}{x-1}}$, 那么 $\frac{1}{x-1} = \frac{t^3-1}{2}$. 从而原积分为

$$-\int \frac{3t^2\,\mathrm{d}t}{2t} = -\frac{3}{4}t^2 + C = -\frac{3}{4}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{2}{3}} + C.$$

此题的换元可能需要尝试, 先尝试直接的 $t=\sqrt[3]{x+1}$ 或 $\sqrt[3]{x-1}$ 发不奏效后联想到需要做 $t = \sqrt[k]{\frac{ax^\ell+b}{cx^\ell+d}}$ 型换元, 见特定形式函数的不定积分中无理函数不定积分部分. □

例 7.10 (2022 高数 C 期中)**.** 计算定积分

$$\int_{-1}^{1}(1+x^7)(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

解答. 配对法, 原积分化为

$$\int_0^1[(1+x^7)(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+(1-x^7)(1-x^2)^{\frac{3}{2}}]\,\mathrm{d}x=2\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x.$$

换元 $x=\sin t$, 原积分值为

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,\mathrm{d}t=\frac{3\pi}{8}.$$

最后一个积分有多种算法, 一种方法可直接参见例6.12. □

例 7.11 (2022 高数 C 期中)**.** 设 $f(x)$ 是 $[0,T]$ 上的连续函数. 证明

$$\int_0^T f(t)\left(\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s\right)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2$$

解答. 令 $F(t)=\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s$, 那么由 f 的连续性知 $F'(t)=f(t)$. 利用分部积分, 左式化为

$$\int_0^T F'(t)F(t)\,\mathrm{d}t=[F(t)]^2|_0^T-\int_0^T F(t)\,\mathrm{d}F(t)=[F(T)]^2-\int_0^T F'(t)F(t)\,\mathrm{d}t.$$

从而

$$\int_0^T f(t)\left(\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s\right)\,\mathrm{d}t=\int_0^T F'(t)F(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}[F(T)]^2=\frac{1}{2}\left(\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2$$

□

例 7.12 (2021 高数 B 期中)**.** 设 $x_1>0$, 序列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right).$$

判断该序列极限是否存在, 如果序列极限存在则求极限值.

解答. 见例2.1(3), 过程书写方式可参见例2.1(1). □

模拟练习二.

例 7.13 (2023 高数 A 期中)**.** 计算下列极限:

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{n!}$;

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^3}+\frac{2}{(n+2)^3}+\cdots+\frac{n}{(2n)^3}$;

(3) $\lim_{x\to+\infty}\sin((\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})\pi)$;

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n k\ln(n+k)-\frac{n+1}{2n}\ln n$.

解答. (1) 0.

(2) 放缩, 每一项不超过 $\frac{1+2+\cdots+n}{(2n)^3}\leqslant\frac{n(n+1)}{16n^3}$, 夹逼定理知极限为 0.

(3) $\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}\to 1$, 由 sin 的连续性知极限为 0.

(4) 见例6.2(2).

□

例 7.14 (2022 高数 B 期中)**.** 计算下列极限:

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\sin\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{2n^k}\right)$;

(2) $\lim_{x\to 0}(1+\tan^2 x)^{1/\sin^2 x}$.

解答. (1) 和差化积 $|\sin x-\sin y|=2|\cos\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2}|\leqslant|x-y|$. 所以

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\sin\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{2n^k}\right)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\sin\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{n^k}\leqslant\frac{1}{2n}\to 0.$$

用转化为 Riemann 和的方法知 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\sin\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\sin x\,\mathrm{d}x=1-\cos 1$. 从而原极限为 $1-\cos 1$.

(2) 取对数得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\tan^2 x)}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{\sin^2 x}=1.$$

利用 e^x 的连续性知原极限为 e.

□

例 7.15 (2022 高数 B 期中)**.** (1) 令 $f(x)=x^{\sqrt{x}}$, 其中 $x>0$, 计算 $f'(x)$;

(2) 令 $f(x)=\int_0^{\sin x}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^3}}$, 其中 $|x|<\pi/2$;

(3) 计算 $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ 在 $x\neq\pm 1$ 处的 4 阶导数 $f^{(4)}(x)$.

解答. (1) $f'(x)=\frac{1}{2}x^{\sqrt{x}-1/2}(\ln x+2)$.

(2) $f'(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^3 x}}$.

(3) $f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$, 从而 $f^{(4)}(x)=\frac{1}{48}\left(\frac{1}{(x-1)^5}-\frac{1}{(x+1)^5}\right)$.

□

例 7.16 (2023 高数 A 期中)**.** (1) 计算定积分 $\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;

(2) 计算定积分 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\sin^2 x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$;

(3) 计算不定积分 $\int\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

解答. (1) 原积分值为

$$\int_0^1\frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t^2=\int_0^1 2\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)\,\mathrm{d}t=2\ln 2-1.$$

(2) 配对, 原积分值为

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin^2 x}{1+e^x}+\frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}\right)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

(3) 方法一. 换元 $x=\tan t$ 和 $u=\sin t$, 有

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}(\tan t)=\int\frac{1}{\cos^3 t}\,\mathrm{d}t&=\int\frac{1}{\cos^4 t}\,\mathrm{d}(\sin t)\\&=\int\frac{1}{(1-u^2)^2}\,\mathrm{d}u\\&=\int\frac{1}{4(1+u)^2}+\frac{1}{4(1-u)^2}+\frac{1}{4(1+u)}+\frac{1}{4(1-u)}\,\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1-u}-\frac{1}{1+u}+\ln(1+u)-\ln(1-u)\right]+C\\&=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+1}+\ln(\sqrt{1+x^2}+x)\right]+C.\end{aligned}$$

方法二. 此题更快的做法是采用双曲函数换元 $x=\sinh t$. 那么原积分为

$$\int\cosh^2 t\,\mathrm{d}t=\int\frac{\cosh 2t+1}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{\sinh 2t+2t}{4}+C=\frac{\sinh t\cdot\cosh t+t}{2}+C.$$

带入 $\sinh t=x,\cosh t=\sqrt{1+x^2}$ 和 $t=\ln(\sqrt{1+x^2}+x)$ 即可.

□

例 7.17 (2020 高数 C 期末)**.** 设 f 是区间 (A,B) 上的连续函数, 证明对任意 (A,B) 内的两点 $a<b$ 都有

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,\mathrm{d}x=f(b)-f(a).$$

解答. 见例6.4. □

例 7.18 (2020 高数 B 期中)**.** 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的可导函数且 $f'(x)$ 连续, 证明对于任意 $x\in[0,1]$ 都有

$$|f(x)|\leqslant\int_0^1|f(t)|\,\mathrm{d}t+\int_0^1|f'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

解答. 见例6.24. □

例 7.19 (2020 高数 B 期中)**.** 设函数 $f:[a,b]\to[a,b]$ 满足 $|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|$ 对任意 $x,y\in[a,b]$ 成立. 给定 $x_1\in[a,b]$ 并构造数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+f(x_n))$. 证明 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 极限存在.

解答. 此题基本纳入例2.1的框架, 但具体细节上稍有差异, 现给出本题的一个证明概要.

令 $g(x)=\frac{1}{2}(x+f(x))$, 那么 $g(x)$ 也是区间 $[a,b]$ 到自身的函数. 同时对任意 $x>y$ 有

$$g(x)-g(y)=\frac{1}{2}[(x-y)+(f(x)-f(y))]\geqslant\frac{1}{2}[(x-y)-(x-y)]\geqslant 0.$$

从而 $g(x)$ 是一个单调递增的函数. 注意到 $x_{n+1}=g(x_n)$, 我们分为如下三种情况:

- 如果 $x_2>x_1$, 那么可以归纳法证明 $x_{n+1}=g(x_n)\geqslant g(x_{n-1})=x_n$. 从而 $\{x_n\}$ 是一个单调递增序列且有上界 b, 从而 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 极限存在;
- 如果 $x_2<x_1$, 那么可以归纳法证明 $x_{n+1}=g(x_n)\leqslant g(x_{n-1})=x_n$. 从而 $\{x_n\}$ 是一个单调递减序列且有下界 a, 从而 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 极限存在;
- 如果 $x_2=x_1$, 那么序列为常值从而极限存在.

□

注 7.20 此题虽然可以证明 f 的连续性以及利用介值定理证明 f 存在不动点, 但这些是本题证明中不需要的. 因为该序列有自然的下界 a 和上界 b, 从而我们并不需要利用不动点来辅助证明序列的有界性, 这是此题相较于例2.1更简单的地方.

例 7.21 (2020 高数 B 期中)**.** 给定正整数 m, 令函数

$$f(x)=\begin{cases}x^m\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

求 $f'(x)$ 和 $f''(x)$. 并求出使得 $f''(x)$ 连续的 m.

解答. 当 $m=1$ 时 $f(x)$ 在 0 处不可导, 当 $m\geqslant 2$ 时,

$$f'(x)=\begin{cases}mx^{m-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{m-2}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

当 $m=2,3$ 时 $f'(x)$ 在 0 处不可导, 当 $m\geqslant 4$ 时,

$$f''(x)=\begin{cases}m(m-1)x^{m-2}\sin\dfrac{1}{x}-2(m-1)x^{m-3}\cos\dfrac{1}{x}-x^{m-4}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

当 $m\geqslant 5$ 时 $f''(x)$ 连续. □

其他练习题.

例 7.22 (2023 高数 B 期中)**.** (1) 证明对 $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ 都有

$$-1 < \frac{4\sin x}{3+\sin^2 x} < 1.$$

(2) 对 $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ 求 $f'(x)$, 其中函数 $f(x)$ 为

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{4\sin x}{3+\sin^2 x}\right).$$

(3) 证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4\cos^2 x + \sin^2 x}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{9}{4}\cos^2 x + 2\sin^2 x}}.$$

解答. 见例6.9. □

例 7.23 (2020 高数 B 期中)**.** 令 $f(x), g(x)$ 是两个 $[0,1]$ 上的连续函数, 且满足

$$f(0) = g(0), \quad \sin f(1) = \sin g(1), \quad \cos f(1) = \cos g(1),$$

并且对任意 $x \in [0,1]$ 都有

$$(\cos f(x) + \cos g(x))^2 + (\sin f(x) + \sin g(x))^2 \neq 0.$$

证明 $f(1) = g(1)$.

解答. 根据第一个条件我们可以知道 $f(1) - g(1) = 2k\pi$, 其中 k 为一个正整数. 现在假设 $k \neq 0$ 我们导出矛盾. 注意到 $f(x) - g(x)$ 为连续函数且 $f(0) - g(0) = 0$. 如果 $k > 0$, 由介值定理可以找到 $x_0 \in [0,1]$ 使得 $f(x_0) - g(x_0) = \pi$. 此时

$$\cos f(x_0) + \cos g(x_0) = 0, \quad \sin f(x_0) + \sin g(x_0) = 0$$

与第二个条件矛盾. 类似地, 如果 $k < 0$, 可以找到 $x_0 \in [0,1]$ 使得 $f(x_0) - g(x_0) = -\pi$, 亦矛盾. 从而 $f(1) = g(1)$. □

例 7.24 (2020 高数 A 期中)**.** 求下列极限:

(1) $\lim_{x\to 0+0} x^x$;

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x+\tan x}$;

(3) $\lim_{n\to\infty} \cos\frac{a}{2} \cdot \cos\frac{a}{4} \cdots \cos\frac{a}{2^n}$, 其中 $a \in (0,1)$;

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

解答. (1) 见例3.2.

(2) 极限为

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+\tan x}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}=\frac{1}{6}.$$

(3) 结果为 $\frac{\sin a}{a}$, 见例1.21(2).

(4) 取对数得到

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\ln 2+\sum_{k=1}^{n}\ln k-n\ln n\right).$$

由 Riemann 和技巧可知, 对任意 $\gamma\in(0,1)$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=[\gamma n]}^{n}\ln k-n\ln n\right)=\int_{\gamma}^{1}\ln x\,\mathrm{d}x=(x\ln x-x)|_{\gamma}^{1}=(\gamma-1)-\gamma\ln\gamma.$$

由于 $\lim_{\gamma\to 0+0}(\gamma-1)-\gamma\ln\gamma=-1<-\ln 2$, 我们可以选取 $\gamma_0>0$ 使得 $(\gamma_0-1)-\gamma_0\ln\gamma_0<-\ln 2$. 由于 $\ln k\leqslant\ln n$ 对 $k<[\gamma_0 n]$ 成立, 从而

$$n\ln 2+\sum_{k=1}^{n}\ln k-n\ln n\leqslant n\ln 2+\sum_{k=[\gamma_0 n]}^{n}\ln k-n\ln n\to-\infty.$$

由此知原极限为 0.

注 7.25 本题中选取 $\gamma>0$ 是为了规避 $\ln x$ 在无界处的积分, 算是一种放缩技巧. 而原题中的 2 可以替换为任意一个小于 e 的正实数, 我们总可以选取适当的 γ_0 来证明极限为 0. 事实上, 我们有**Stirling 公式**

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\cdot\frac{n^n}{e^n}.$$

□

例 7.26 (2020 高数 A 期中). (1) 设序列 $\{x_n\}$ 满足对任意正整数 k 都有

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+k}-x_n)=0,$$

问序列 $\{x_n\}$ 是否收敛?

(2) 设序列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty}x_n=l$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(x_1+2x_2+\cdots+nx_n)=\frac{l}{2}.$$

解答. (1) 不一定收敛. 考虑 $x_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$. 那么对固定的 k 都有 $x_{n+k}-x_n\leqslant\frac{k}{n}\to 0$. 但 $\{x_n\}$ 发散.

(2) 利用序列的有界性和序列收敛性的定义直接证明, 可完全类比例1.10的证明方法.

□

例 7.27 (2020 高数 A 期中)**.** (1) 给定 $a>0$, 令 $f(x)$ 是区间 $[0,2a]$ 上的连续函数满足 $f(0)=f(2a)$. 证明存在 $x_0\in[0,a]$ 使得 $f(x_0)=f(x_0+a)$.

(2) 是否存在函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是局部无界的, 即对任意 $x\in\mathbb{R}$ 和任意 $\varepsilon>0, M>0$, 都存在 $y\in\mathbb{R}$ 满足 $|y-x|<\varepsilon$ 且 $|f(y)|>M$?

解答. (1) 考虑连续函数 $g(x)=f(x)-f(x+a)$. 那么

$$g(0)=f(0)-f(a)=-(f(a)-f(2a))=-g(a).$$

由介值定理可知存在 x_0 使得 $g(x_0)=0$.

(2) 存在. 考虑函数

$$f(x)=\begin{cases} q, & x=p/q\in\mathbb{Q} \text{ 且 } p,q \text{ 互质;} \\ 0, & x\notin\mathbb{Q}, \end{cases}$$

利用有理数集在实数集中的稠密性即可.

□

例 7.28 (2020 高数 A 期中)**.** 给定闭区间 $[a,b]$, 设 $f:[a,b]\to[a,b]$ 为一个函数. 给定 $x_1\in[a,b]$, 定义数列 $x_{n+1}=f(x_n)$. 假设 $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$, 问极限 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 是否存在?

解答. 不一定存在. 只需要先随意选取一个两两不同的序列满足 $x_{n+1}-x_n\to 0$ 且 x_n 不收敛, 例如让序列 x_n 在 $[0,1]$ 内来回震荡, 但步长趋于 0. 然后我们选取函数 f 满足 $f(x_n)=x_{n+1}$ 即可.

一种显式的构造是将 $(0,1)$ 上的所有有理数选取出来, 规定

$$f\left(\frac{\ell}{2k-1}\right)=\frac{\ell+1}{2k-1},\quad \forall 1\leqslant\ell\leqslant 2k-3;$$

$$f\left(\frac{2k-2}{2k-1}\right)=\frac{2k-1}{2k};$$

$$f\left(\frac{\ell}{2k}\right)=\frac{\ell-1}{2k},\quad \forall 2\leqslant\ell\leqslant 2k-1;$$

$$f\left(\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2k+1}.$$

□

注 7.29 在不假设 f 的连续性的情况下, 函数 f 在此题目中几乎不起到任何限制条件. 此题原始版本应该要假设 f 的连续性的, 再次情形下此题的结论是肯定的. 但证明需要用到一些数学分析的内容 (早年的《高等数学 A》是教授数学分析的), 我们在此给出证明概要:

由于数列 $\{x_n\}$ 有界, 其具有收敛子列. 为证明数列本身收敛, 我们只需证明其任何一个收敛子列的极限均相同. 首先我们证明 $\{x_n\}$ 的任何一个收敛子列的极限均

为 $f(x)$ 的不动点. 假设 $\{x_{n_k}\}$ 为一个收敛子列且 $x_{n_k} \to \alpha$. 由函数的连续性知

$$x_{n_k+1} = f(x_{n_k}) \to f(\alpha).$$

但另一方面 $(x_{n_k+1} - x_{n_k}) \to 0$, 从而知 $f(\alpha) = \alpha$.

现在假设 $\{x_{n_k}\}$ 和 $\{x_{n'_k}\}$ 为任意两个收敛子列, 他们的极限分别为 α, β 且不妨假设 $\alpha \leqslant \beta$. 注意到 $(x_{n+1} - x_n) \to 0$, 从而 $[\alpha, \beta]$ 中的任何一个数都是 $\{x_n\}$ 中某个子列的极限. 进而由之前的推理知对任意 $x \in [\alpha, \beta]$ 都有 $f(x) = x$.

但此时如果序列中一项 $x_n \in [\alpha, \beta]$, 那么将导致对所有 $m \geqslant n$ 均有 $x_m = x_n$, 从而序列收敛. 于是我们可不妨设该序列中任何一项均不在 $[\alpha, \beta]$ 中. 但如果 $\alpha < \beta$, 那么任何一个数 $x \in (\alpha, \beta)$ 就不可能成为该序列子列的极限. 与前述讨论矛盾.

由此我们证明了 $\{x_n\}$ 的任何两个收敛子列的极限相同, 从而 x_n 收敛.