

# 抽象代数 II 翻译作业

译者：秦宇轩

学号：10230325

班级：数学与应用数学 2 班

最后编译于 2025-11-16

## 翻译说明

本文件为吉林大学数学与应用数学专业“抽象代数 II”的翻译作业，以下是本文件的基本信息：

- 选择材料：翻译材料 2，即《模的基本概念和同态同构定理》；
- 排版引擎：Typst 0.14.0；

本译文基本采用直译的方式，最大程度地保留原文件面貌，譬如诸命题、定理的编号均与原文件同。

我承诺本译文均由本人独立完成。

本文件源代码俱开源于 <https://github.com/YuxuanQin/jilin-univ-algebra-II>

---

**命题 2.7:** 令  $T : {}_R\mathbf{Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$  是加性函子，协变性任意。则

- (i) 若  $0 : A \rightarrow B$  是零映射，即对于任意  $a \in A$ ，作用为  $a \mapsto 0$  的映射，则  $T(0) = 0$ 。
- (ii)  $T(\{0\}) = \{0\}$ 。

证明。

- (i) 因为  $T$  是加性函子，同态集之间的函数  $T_{AB}$  自然是个同态，因此它保持恒同映射，也就是说， $T(0) = 0$ 。
- (ii) 若  $A$  是左  $R$ -模，则  $0 = 1_A$  当且仅当  $A = \{0\}$  【充分性显然，至于必要性，如果  $1_A = 0$ ，则对任意  $a \in A$ ，有  $a = 1_A(a) = 0(a) = 0$ ，所以  $A = \{0\}$ 】。由 (i)，我们得到  $T(1_{\{0\}}) = T(0) = 0$ ，所以  $T(\{0\}) = \{0\}$ 。

□

我们现在要说明，许多适用于交换群和向量空间的构造，都能被推广到任意环上的左模。如果某个左  $R$ -模  $S$  被包含在一个更大的左  $R$ -模  $M$  中，而且满足对任意  $s, s' \in S$ 、 $r \in R$ ， $s + s'$  和  $rs$  在  $S$  中各自的取值与在  $M$  中各自的取值相同，我们就说  $S$  是个子模。

**定义:** 设  $M$  是左  $R$ -模，则  $M$  的子模  $N$  定义为  $M$  的一个关于数乘封闭的加性子群：对任意  $n \in N$  和  $r \in R$  有  $rn \in N$ 。对右模有类似定义。

**例子 2.8:**

- (i)  $\mathbb{Z}$ -模（即交换群）的子模就是子群，向量空间的子模就是子空间。

(ii)  $\{0\}$  和  $M$  都是模  $M$  的子模。若  $M$  的子模  $N \subseteq M$  满足  $N \neq M$ , 则称其为**真子模**。此时记为  $N \subsetneq M$ 。

(iii) 若将环  $R$  视为自身的左模, 则它的子模就是一个左理想; 当  $I$  是真左理想时, 它也是真子模。类似地, 若将环  $R$  视为自身的右模, 则它的子模就是右理想。

(iv) 若  $R$  是交换环,  $M$  是  $R$ -模且  $r \in R$ , 则

$$rM = \{rm : m \in M\}$$

是  $M$  的子模。这个例子有如下推广: 若  $J$  是环  $R$  的理想, 且  $M$  是  $R$ -模, 则

$$JM = \left\{ \sum_i j_i m_i : j_i \in J \text{ 且 } m_i \in M \right\}$$

是  $M$  的子模。

(v) 若  $S$  和  $T$  均是左模  $M$  的子模, 则

$$S + T = \{s + t : s \in S \text{ 且 } t \in T\}$$

是个包含  $S$  和  $T$  的  $M$ -子模。

(vi) 若  $(S_i)_{i \in I}$  是左  $R$ -模的一族子模, 则  $\bigcap_{i \in I} S_i$  仍是  $M$  的子模。

(vii) 若左  $R$ -模  $S$  满足存在  $s \in S$  使得  $S = \{rs : r \in R\}$ , 则称其为**循环的**。若  $M$  是  $R$ -模, 且  $m \in M$ , 则定义  **$m$  生成的循环子模**  $\langle m \rangle$  为:

$$\langle m \rangle = \{rm : r \in R\}.$$

更一般地, 若  $X$  是  $R$ -模  $M$  的子集, 则定义  $X$  中元素的全体  **$R$ -线性组合**为

$$\langle X \rangle = \left\{ \sum_{\text{有限}} r_i x_i : r_i \in R \text{ 且 } x_i \in X \right\}.$$

我们称  $\langle X \rangle$  为  **$X$  生成的子模**。第 66 页的练习 2.10 指出:  $\langle X \rangle = \bigcap_{X \subseteq S} S$ 。

**定义:** 如果左  $R$ -模  $M$  可由有限集生成, 也就是说, 存在有限子集  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  使得  $M = \langle X \rangle$ , 则称  $M$  为**有限生成的**。

**定义:** 设  $N$  是左  $R$ -模  $M$  的子模, 则定义它们的商模为商群  $M/N$  【回忆:  $M$  是交换群且  $N$  是子群】, 并配备如下数乘

$$r(m + N) = rm + N.$$

**自然投影**<sup>1</sup>  $\pi : M \rightarrow M/N$  定义为  $m \mapsto m + N$ , 容易看出这是个  $R$ -映射。

商模定义中的数乘确是良定义的: 若  $m + N = m' + N$ , 则  $m - m' \in N$ 。所以  $r(m - m') \in N$  (因为  $N$  是子模),  $rm - rm' \in N$ , 而且  $rm + N = rm' + N$ 。

<sup>1</sup>原文作 “The natural map”, 因汉语无冠词, 此处据文义略去 “The” 不翻, 并补译为 “投影”

**例子 2.9:** 设  $N \subseteq M$  是个仅仅是个加性子群, 而非子模, 则交换群  $M/N$  并不是  $R$ -模。譬如域  $k$  上的向量空间  $V$ 。若  $a \in k$  且  $v \in V$ , 则  $av = 0$  当且仅当  $a = 0$  或  $v = 0$  【若  $a \neq 0$ , 则  $0 = a^{-1}(av) = (a^{-1}a)v = v$ 】。现在考虑  $\mathbb{Q}$ , 它是自身上的向量空间, 但  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  并不是  $\mathbb{Q}$  上的向量空间 【注意在  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  中有  $2(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ , 但诸因子均不为零】。

**例子 2.10:**

- (i) 回忆: 环  $R$  的加性子群  $J \subseteq R$  是**双边理想**, 若对任意  $x \in J$  及  $r \in R$  蕴含  $rx \in J$  且  $xr \in J$ 。若  $R = \text{Mat}_2(k)$ , 即域  $k$  上的  $2 \times 2$  矩阵环, 则  $I = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} : a, b \in k \right\}$  即是左理想, 且  $I' = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in k \right\}$  是右理想, 但是它们都不是双边理想。
- (ii) 若  $J$  是  $R$  的左 (右) 理想, 则  $R/J$  是左 (右)  $R$ -模。若  $J$  是双边理想, 则  $R/J$  还是个环, 乘法为

$$(r + J)(s + J) = rs + J.$$

这个乘法确是良定义的, 若  $r + J = r' + J$  且  $s + J = s' + J$ , 则  $rs + J = r's' + J$ , 因为

$$rs - r's' = rs + r's - r's' = (r - r')s + r'(s - s') \in J.$$

我们继续把交换群和向量空间中的定义推广到模上。

**定义:** 若  $f: M \rightarrow N$  是左  $R$ -模之间的  $R$ -映射, 则定义

**$f$  的核:**  $\ker f = \{m \in M : f(m) = 0\}$ ;

**$f$  的像:**  $\text{im } f = \{n \in N : \exists m \in M \text{ 使得 } n = f(m)\}$ ;

**$f$  的余核:**  $\text{coker } f = N / \text{im } f$ .

$\ker f$  是  $M$  的子模、 $\text{im } f$  是  $N$  的子模这两点都是常规验证。

**定理 2.11 (第一同构定理):** 若  $f: M \rightarrow N$  是左  $R$ -模之间的  $R$ -映射, 则有如下  $R$ -同构:

$$\varphi: M / \ker f \rightarrow \text{im } f$$

在对象层面定义为:

$$\varphi: m + \ker f \mapsto f(m).$$

证明. 视  $M$  和  $N$  均只为交换群, 则群的第一同构定理告诉我们  $\varphi: M / \ker f \rightarrow \text{im } f$  是交换群间良定义的同构。但进一步,  $\varphi$  还是一个  $R$ -映射: 若  $r \in R$  且  $m \in M$ , 则  $\varphi(r(m + \ker f)) = \varphi(rm + \ker f) = f(rm)$ ; 因为  $f$  是  $R$ -映射, 然而  $f(rm) = rf(m) = r\varphi(m + \ker f)$ , 此即为所求。

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{f} & N \\
 \text{nat} \downarrow & \searrow & \uparrow \text{inc} \\
 M/\ker f & \xrightarrow{\varphi} & \text{im } f
 \end{array}$$

□

第二、第三同构定理都是第一同构定理的推论。

**定理 2.12 (第二同构定理)** : 若  $S$  和  $T$  都是左  $R$ -模  $M$  的子模, 则有如下  $R$ -同构:

$$S/(S \cap T) \rightarrow (S + T)/T.$$

证明. 若  $\pi: M \rightarrow M/T$  是自然投影, 则  $\ker \pi = T$ ; 定义  $f = \pi|_S$  使得  $f: S \rightarrow M/T$ . 则对于

$$\ker f = S \cap T \quad \text{且} \quad \text{im } f = (S + T)/T,$$

这是因为  $(S + T)/T$  由  $M/T$  中全体有代表元在  $S$  中的余集组成。此时可用第一同构定理。 □

**定义:** 若  $T \subseteq S \subseteq M$  是左  $R$ -模  $M$  的子模塔, 则定义**余集扩大**  $e: M/T \rightarrow M/S$  为:

$$e: m + T \mapsto m + S$$

( $e$  确是良定义的, 因为若  $m + T = m' + T$ , 则  $m - m' \in T \subseteq S$  且  $m + S = m' + S$ )。

**定理 2.13 (第三同构定理)** : 若  $T \subseteq S \subseteq M$  是左  $R$ -模  $M$  的子模塔, 则余集扩大  $e: M/T \rightarrow M/S$  诱导如下  $R$ -同构:

$$(M/T)/(S/T) \rightarrow M/S.$$

证明. 读者可自行验证  $\ker e = S/T$  且  $\text{im } e = M/S$ , 此时可用第一同构定理。 □

若  $f: M \rightarrow N$  是左  $R$ -模之间的映射且  $S \subseteq N$ , 则读者可自行检验  $f^{-1}(S) = \{m \in M: f(m) \in S\}$  是包含  $f^{-1}(\{0\}) = \ker f$  的  $M$ -子模。

**定理 2.14 (对应定理)** : 若  $T$  是左  $R$ -模  $M$  的子模, 则  $\varphi: S \mapsto S/T$  是双射:

$$\varphi: \{\text{中间子模 } T \subseteq S \subseteq M\} \rightarrow \{M/T \text{ 的子模}\}.$$

进一步有:  $T \subseteq S \subseteq S'$  当且仅当在  $M/T$  中有  $S/T \subseteq S'/T$ .

证明. 因为模都是加性交换群, 所以子模都是子群, 因此群的对应定理告诉我们  $\varphi$  是保包含的单射: 在  $M$  中有  $S \subseteq S'$  当且仅当在  $M/T$  中有  $S/T \subseteq S'/T$ . 进一步,  $\varphi$  还是满的: 若  $S^* \subseteq M/T$ , 则存在唯一一个满足  $S^* = S/T$  的子模  $S \supseteq T$ . 本证明剩下的部分就是群版本证明的重复, 只需要验证子模的像与原像都还是子模就行。 □

能应用对应定理的时候，我们通常不显式指出，而是悄悄地直接用了：对  $M/T$  的子模  $S^*$  而言，存在唯一一个中间子模  $S$  满足  $S^* = S/T$ 。

下面是一个环论版本的对应定理。

**定理 2.15 (环的对应定理)**：若  $I$  是环  $R$  的双边理想，则  $\varphi: J \mapsto J/I$  是双射：

$$\varphi: \{\text{中间左理想 } I \subseteq J \subseteq R\} \rightarrow \{R/I \text{ 的左理想}\}.$$

进一步，在  $R$  中有  $I \subseteq J \subseteq J'$  当且仅当在  $R/I$  中有  $J/I \subseteq J'/I$ 。

证明. 读者可自行补充一个类似于定理 2.14 的证明。 □

**命题 2.16**: 左  $R$ -模  $M$  是循环模当且仅当存在左理想  $I$ ，使得  $M \cong R/I$ 。

证明. 若  $M$  是循环模，则存在  $m \in M$  使得  $M = \langle m \rangle$ . 定义  $f: R \rightarrow M$  为  $f(r) = rm$ . 则因  $M$  循环，有  $f$  满，且它的核是  $R$  的子模，即  $\ker f$  等于某个左理想  $I$ . 则由第一同构定理有  $R/I \cong M$ 。

反过来， $R/I$  确是循环的，它有生成元  $m = 1 + I$ . □

**定义**: 若左  $R$ -模  $M \neq \{0\}$  没有非零真子模，即  $\{0\}$  和  $M$  是  $M$  仅有的子模，则称  $M$  为**单模**（或**不可约模**）。

**推论 2.17**: 左  $R$ -模  $M$  单当且仅当存在极大左理想  $I$  使得  $M \cong R/I$ 。

证明. 由对应定理立得。 □

举个例子：交换群  $G$  单，当且仅当存在素数  $p$  使得  $G$  是  $p$  阶循环群。极大左理想的存在性保证了单模的存在性。