抽象代数 II 翻译作业

译者：**秦宇轩**

学号：**10230325**

班级：数学与应用数学 2 班

最后编译于 2025-11-16

翻译说明

本文件为吉林大学数学与应用数学专业课 “抽象代数 II” 的翻译作业，以下是本文件的基本信息：

- 选择材料：翻译材料 2，即《**模的基本概念和同态同构定理**》；
- 排版引擎：Typst `0.14.0`；

本译文基本采用直译的方式，最大程度地保留原文件面貌，譬如诸命题、定理的编号均与原文件同。

我承诺本译文均由本人独立完成。

本文件源代码俱开源于 `https://github.com/YuxuanQin/jilin-univ-algebra-II`

命题 2.7: 令 $T : {}_R\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ 是加性函子，协变性任意。则

(i) 若 $0 : A \to B$ 是零映射，即对于任意 $a \in A$，作用为 $a \mapsto 0$ 的映射，则 $T(0) = 0$.

(ii) $T(\{0\}) = \{0\}$.

证明.

(i) 因为 T 是加性函子，同态集之间的函数 T_{AB} 自然是个同态，因此它保持恒同映射，也就是说，$T(0) = 0$.

(ii) 若 A 是左 R-模，则 $0 = 1_A$ 当且仅当 $A = \{0\}$【充分性显然，至于必要性，如果 $1_A = 0$，则对任意 $a \in A$，有 $a = 1_A(a) = 0(a) = 0$，所以 $A = \{0\}$】。由 (i)，我们得到 $T\left(1_{\{0\}}\right) = T(0) = 0$，所以 $T(\{0\}) = \{0\}$.

□

我们现在要说明，许多适用于交换群和向量空间的构造，都能被推广到任意环上的左模。如果某个左 R-模 S 被包含在一个更大的左 R-模 M 中，而且满足对任意 $s, s' \in S$、$r \in R$，$s + s'$ 和 rs 在 S 中各自的取值与在 M 中各自的取值相同，我们就说 S 是个**子模**。

定义: 设 M 是左 R-模，则 M 的子模 N 定义为 M 的一个关于数乘封闭的加性子群：对任意 $n \in N$ 和 $r \in R$ 有 $rn \in N$. 对右模有类似定义。

例子 2.8:

(i) $\mathbb{Z}$-模（即交换群）的子模就是子群，向量空间的子模就是子空间。

(ii) $\{0\}$ 和 M 都是模 M 的子模。若 M 的子模 $N \subseteq M$ 满足 $N \neq M$，则称其为**真子模**。此时记为 $N \subsetneq M$.

(iii) 若将环 R 视为自身的左模，则它的子模就是一个左理想；当 I 是真左理想时，它也是真子模。类似地，若将环 R 视为自身的右模，则它的子模就是右理想。

(iv) 若 R 是交换环，M 是 R-模且 $r \in R$，则

$$rM = \{rm : m \in M\}$$

是 M 的子模。这个例子有如下推广：若 J 是环 R 的理想，且 M 是 R-模，则

$$JM = \left\{ \sum_i j_i m_i : j_i \in J \ \text{ 且 } \ m_i \in M \right\}$$

是 M 的子模。

(v) 若 S 和 T 均是左模 M 的子模，则

$$S + T = \{s + t : s \in S \ \text{ 且 } \ t \in T\}$$

是个包含 S 和 T 的 M-子模。

(vi) 若 $(S_i)_{i \in I}$ 是左 R-模的一族子模，则 $\bigcap_{i \in I} S_i$ 仍是 M 的子模。

(vii) 若左 R-模 S 满足存在 $s \in S$ 使得 $S = \{rs : r \in R\}$，则称其为**循环的**。若 M 是 R-模，且 $m \in M$，则定义 $\boldsymbol{m}$ **生成的循环子模** $\langle m \rangle$ 为：

$$\langle m \rangle = \{rm : r \in R\}.$$

更一般地，若 X 是 R-模 M 的子集，则定义 X 中元素的全体 $\boldsymbol{R}$**-线性组合**为

$$\langle X \rangle = \left\{ \sum_{\text{有限}} r_i x_i : r_i \in R \ \text{ 且 } \ x_i \in X \right\}.$$

我们称 $\langle X \rangle$ 为 $\boldsymbol{X}$ **生成的子模**。第 66 页的练习 2.10 指出：$\langle X \rangle = \bigcap_{X \subseteq S} S$.

定义: 如果左 R-模 M 可由有限集生成，也就是说，存在有限子集 $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ 使得 $M = \langle X \rangle$，则称 M 为**有限生成的**。

定义: 设 N 是左 R-模 M 的子模，则定义它们的商模为商群 M/N【回忆：M 是交换群且 N 是子群】，并配备如下数乘

$$r(m + N) = rm + N.$$

自然投影[1] $\pi : M \to M/N$ 定义为 $m \mapsto m + N$，容易看出这是个 R-映射。

商模定义中的数乘确是良定义的：若 $m + N = m' + N$，则 $m - m' \in N$。所以 $r(m - m') \in N$（因为 N 是子模），$rm - rm' \in N$，而且 $rm + N = rm' + N$.

[1]原文作 “The natural map”，因汉语无冠词，此处据文义略去 “The” 不翻，并补译为 “投影”

例子 2.9: 设 $N \subseteq M$ 是个仅仅是个加性子群，而非子模，则交换群 M/N 并不是 R-模。譬如域 k 上的向量空间 V。若 $a \in k$ 且 $v \in V$，则 $av = 0$ 当且仅当 $a = 0$ 或 $v = 0$【若 $a \neq 0$，则 $0 = a^{-1}(av) = (a^{-1}a)v = v$】。现在考虑 $\mathbb{Q}$，它是自身上的向量空间，但 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 并不是 $\mathbb{Q}$ 上的向量空间【注意在 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 中有 $2(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$，但诸因子均不为零】。

例子 2.10:

(i) 回忆：环 R 的加性子群 $J \subseteq R$ 是**双边理想**，若对任意 $x \in J$ 及 $r \in R$ 蕴含 $rx \in J$ 且 $xr \in J$. 若 $R = \mathrm{Mat}_2(k)$，即域 k 上的 2×2 矩阵环，则 $I = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} : a, b \in k \right\}$ 即是左理想，且 $I' = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in k \right\}$ 是右理想，但是它们都不是双边理想。

(ii) 若 J 是 R 的左（右）理想，则 R/J 是左（右）R-模。若 J 是双边理想，则 R/J 还是个环，乘法为

$$(r + J)(s + J) = rs + J.$$

这个乘法确是良定义的，若 $r + J = r' + J$ 且 $s + J = s' + J$，则 $rs + J = r's' + J$，因为

$$rs - r's' = rs + r's - r's' = (r - r')s + r'(s - s') \in J.$$

我们继续把交换群和向量空间中的定义推广到模上。

定义: 若 $f : M \to N$ 是左 R-模之间的 R-映射，则定义

***f* 的核:** $\ker f = \{m \in M : f(m) = 0\}$;

***f* 的像:** $\operatorname{im} f = \{n \in N : \exists m \in M \text{ 使得 } n = f(m)\}$;

***f* 的余核:** $\operatorname{coker} f = N / \operatorname{im} f$.

$\ker f$ 是 M 的子模、$\operatorname{im} f$ 是 N 的子模这两点都是常规验证。

定理 2.11（第一同构定理）: 若 $f : M \to N$ 是左 R-模之间的 R-映射，则有如下 R-同构：

$$\varphi : M / \ker f \to \operatorname{im} f$$

在对象层面定义为：

$$\varphi : m + \ker f \mapsto f(m).$$

证明. 视 M 和 N 均只为交换群，则群的第一同构定理告诉我们 $\varphi : M/\ker f \to \operatorname{im} f$ 是交换群间良定义的同构。但进一步，φ 还是一个 R-映射：若 $r \in R$ 且 $m \in M$，则 $\varphi(r(m + N)) = \varphi(rm + N) = f(rm)$;因为 f 是 R-映射，然而 $f(rm) = rf(m) = r\varphi(m + N)$，此即为所求。

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{nat}"'] \arrow[dr] & N \\
M/\ker f \arrow[r, dashed, "\varphi"'] & \operatorname{im} f \arrow[u, "\mathrm{inc}"']
\end{tikzcd}
$$

$\square$

第二、第三同构定理都是第一同构定理的推论。

定理 2.12（第二同构定理）: 若 S 和 T 都是左 R-模 M 的子模，则有如下 R-同构：

$$S/(S\cap T) \to (S+T)/T.$$

证明. 若 $\pi : M \to M/T$ 是自然投影, 则 $\ker \pi = T$; 定义 $f = \pi|_S$ 使得 $f : S \to M/T$. 则对于

$$\ker f = S \cap T \quad \text{且} \quad \operatorname{im} f = (S+T)/T,$$

这是因为 $(S+T)/T$ 由 M/T 中全体有代表元在 S 中的余集组成。此时可用第一同构定理。 $\square$

定义: 若 $T \subseteq S \subseteq M$ 是左 R-模 M 的子模塔，则定义**余集扩大** $e : M/T \to M/S$ 为：

$$e : m + T \mapsto m + S$$

（e 确是良定义的，因为若 $m + T = m' + T$，则 $m - m' \in T \subseteq S$ 且 $m + S = m' + S$）。

定理 2.13（第三同构定理）: 若 $T \subseteq S \subseteq M$ 是左 R-模 M 的子模塔，则余集扩大 $e : M/T \to M/S$ 诱导如下 R-同构：

$$(M/T)/(S/T) \to M/S.$$

证明. 读者可自行验证 $\ker e = S/T$ 且 $\operatorname{im} e = M/S$，此时可用第一同构定理。 $\square$

若 $f : M \to N$ 是左 R-模之间的映射且 $S \subseteq N$，则读者可自行检验 $f^{-1}(S) = \{m \in M : f(m) \in S\}$ 是包含 $f^{-1}(\{0\}) = \ker f$ 的 M-子模。

定理 2.14（对应定理）: 若 T 是左 R-模 M 的子模，则 $\varphi : S \mapsto S/T$ 是双射：

$$\varphi : \{\text{中间子模 } T \subseteq S \subseteq M\} \to \{M/T \text{ 的子模}\}.$$

进一步有：$T \subseteq S \subseteq S'$ 当且仅当在 M/T 中有 $S/T \subseteq S'/T$.

证明. 因为模都是加性交换群，所以子模都是子群，因此群的对应定理告诉我们 φ 是保含入的单射：在 M 中有 $S \subseteq S'$ 当且仅当在 M/T 中有 $S/T \subseteq S'/T$. 进一步，φ 还是满的：若 $S^* \subseteq M/T$，则存在唯一一个满足 $S^* = S/T$ 的子模 $S \supseteq T$. 本证明剩下的部分就是群版本证明的重复，只需要验证子模的像与原像都还是子模就行。 $\square$

能应用对应定理的时候，我们通常不显式指出，而是悄悄地直接用了：对 M/T 的子模 S^* 而言，存在唯一一个中间子模 S 满足 $S^* = S/T$.

下面是一个环论版本的对应定理。

定理 2.15（环的对应定理）: 若 I 是环 R 的双边理想，则 $\varphi : J \mapsto J/I$ 是双射：

$$\varphi : \{\text{中间左理想 } I \subseteq J \subseteq R\} \to \{R/I \text{ 的左理想}\}.$$

进一步，在 R 中有 $I \subseteq J \subseteq J'$ 当且仅当在 R/I 中有 $J/I \subseteq J'/I$.

证明. 读者可自行补充一个类似于定理 2.14 的证明。 □

命题 2.16: 左 R-模 M 是循环模当且仅当存在左理想 I，使得 $M \cong R/I$.

证明. 若 M 是循环模，则存在 $m \in M$ 使得 $M = \langle m \rangle$. 定义 $f : R \to M$ 为 $f(r) = rm$. 则因 M 循环，有 f 满，且它的核是 R 的子模，即 $\ker f$ 等于某个左理想 I. 则由第一同构定理有 $R/I \cong M$.

反过来，R/I 确是循环的，它有生成元 $m = 1 + I$. □

定义: 若左 R-模 $M \neq \{0\}$ 没有非零真子模，即 $\{0\}$ 和 M 是 M 仅有的子模，则称 M 为**单模**（或**不可约模**）。

推论 2.17: 左 R-模 M 单当且仅当存在极大左理想 I 使得 $M \cong R/I$.

证明. 由对应定理立得。 □

举个例子：交换群 G 单，当且仅当存在素数 p 使得 G 是 p 阶循环群。极大左理想的存在性保证了单模的存在性。