泛函分析提纲

著者: 秦宇轩 (QIN Yuxuan)
最后更新于 2025-11-20

目录

这是一份泛函分析提纲（不是笔记!），仅包含我认为重要的结论。

参考书目:

1. 许全华《泛函分析讲义》。
2. 朱森《泛函分析讲义》（吉林大学内部教材）

1. 拓扑空间简介

TODO

2. 完备度量空间

定理 2.1 (Arzela-Ascoli 定理)

有很多版本，许全华上面的更深一些，不过这里只记录吉大讲义版本:

设 (X, d) 是**紧度量空间**，$E \subset C(X)$ 是一族连续函数，则 E 列紧等价于以下两个条件同时成立:

- E 中函数**一致有界**;
- E 中函数**同等连续**，即对任意 $\varepsilon > 0$，存在 δ 使得

$$\sup_{f \in E} \sup_{\substack{x, y \in X \\ d(x,y) < \delta}} |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

定理 2.2 (Montel 定理)

设 $\mathcal{F} := \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Hol}(\Omega)$ 是一列在区域 Ω 上一致有界的解析函数，则对任意**完全位于 Ω 内的有界区域** D（即 $\overline{D} \subset \Omega$），$\mathcal{F}$ 恒有子列在 D 上一致收敛。

证明. 要用 Arzela-Ascoli 定理。核心思想是利用 D 的有界性得出 $\overline{D}$ 的紧性，然后通过 Cauchy 积分公式得出 $\mathcal{F}$ 在 $\overline{D}$ 的某一个开覆盖上都同等连续，然后由紧性，可以抽有限次，得到一致收敛的子子子子子列。 □

如果需要举 “一致连续但不同等连续”…… 之类的例子，可以用这族函数 $\{f_n(x) := (-1)^n + x^n\}$，这族函数在 $C\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 中既一致有界又同等连续，但在 $C[-2, 2]$ 中这两个性质都不具备。详见朱森例 1.72.

3. 赋范空间、连续线性映射

定义 3.1 (等价的范数)

线性空间 X 上的两个范数 p_1, p_2 若诱导出相同的拓扑，则称这两个范数等价。

注解

等价范数保持紧性、线性空间的完备性。

定理 3.2 (有限维线性空间上的所有范数都等价)

如其名。

证明. 基本思想：范数等价是等价关系，只需证明所有范数和某一个范数等价即可。

通常做法是证明任意范数 p 和最大模范数 $\|\cdot\|_\infty$ 等价。设 $x \in \mathbb{K}^n$ 是任意向量。

- $p\left(\sum_{k\le n} x_k e_k\right) \le p\left(\sum_{k\le n} e_k\right) \cdot \max_k |x_k| = p\left(\sum_{k\le n} e_k\right) \cdot \|x\|_\infty$，则取 $C_1 = p(\sum e_k)$ 即可。
- 另一个方向要用到单位球面的紧性，注意 $p : (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty) \to [0, +\infty)$ 连续，则因单位球面紧，p 取到最小值 C_2，则

$$p(x) = \|x\|_\infty \, p\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) \ge C_2 \, \|x\|_\infty.$$

因为 $\frac{x}{\|x\|_\infty}$ 在单位球面上。

□

注解

1. 证明第二点中声称单位球面紧，当然可以通过欧氏空间的一般理论得到，但是下文提到的 Riesz 表示定理能给一种通用证明。
2. 因 $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ 完备且等价范数保持一些良好性质（参考上一个注解），知任何有限维赋范空间都是 Banach 空间，且有界闭集 $\Longleftrightarrow$ 紧集。

下面我们展示无穷维空间中两个不等价的范数：

设 $C([0,1])$ 表示 $[0,1]$ 上的全体实连续函数，$f \in C([0,1])$，定义 $\|f\|_\infty := \sup|f|$ 为最大模范数，容易证明这个范数完备。

再定义 L^1 范数 $\|f\|_1 := \int_0^1 |f|$，这个范数不完备。

定理 3.3 (Riesz 定理)

设 $(E, \|\cdot\|)$ 是赋范空间，则 E 有限维 $\iff$ 单位闭球 $\overline{B}(0,1)$ 紧。

命题 3.4 (Banach 空间中的子空间有限维 $\implies$ 闭)

命题 3.5 (E 是 Banach 空间 $\iff$ 绝对收敛级数都收敛)

3.1. 连续线性映射

定理 3.1.1 (连续 $\iff$ 有界)

设 $f : X \to Y$ 是赋范空间之间的线性映射，则 f 连续 $\iff$ f 有界。

证明.

- f 连续，则在 0 附近小于 1，因 $f(0) = 0$，则存在 r，对任意 $x \in X$，有 $\left\|f\left(r \cdot \frac{x}{\|x\|}\right)\right\| < 1$，知 f 有界。
- 另一个方向显然。

□

所以，为了在研究中充分利用赋范线性空间上的几何信息，我们通常只考虑有界线性映射，记为 $\mathcal{B}(X, Y)$。

容易证明 Banach 空间和有界线性映射构成范畴，记为 **Ban**。

定理 3.1.2

设 E 是赋范空间，F 是 Banach 空间，U 有限维赋范空间，则

- $\mathcal{B}(E, F)$ 也是 Banach 空间；
- $\mathcal{L}(U, E) = \mathcal{B}(U, E)$；

证明.

- 第一点：不难；
- 第二点：有限维赋范空间上的所有范数都等价，外加三角不等式足矣。

□

3.2. L_p 空间

定义 3.2.1 (L_p 空间)

设 $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，若 $f : \Omega \to \mathbb{K}$ 满足

$$\int_\Omega |f|^p \, d\mu < \infty,$$

则称其为 p-方可积。

定义 $L_p(\Omega)$ 为在测度意义下相等的全体 p-方可积函数。

定义

$$\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

定理 3.2.2 (Holder 不等式)

设 $p, q \in (0, +\infty]$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$，若 $f \in L_p(\Omega), g \in L_q(\Omega)$，则 $fg \in L_r(\Omega)$ 且

$$\|fg\|_r \le \|f\|_p \, \|g\|_q.$$

注解

当 $p = q = 2$ 时，这个不等式告诉我们

$$\int |fg| \le \|f\|_2 \, \|g\|_2,$$

因此我们可以在 $L_2(\Omega)$ 上定义内积 $(f, g) := |\int fg| < \int |fg|$ 存在。

有了内积，就可以利用 Hilbert 空间的理论了，这可以算是 Fourier 分析的开端。

我们为什么研究 L_p 空间？

定理 3.2.3 ($\|\cdot\|_p$ 是个范数，再不济也能诱导一个度量)

- 当 $p \in [1, +\infty]$ 时，$\|\cdot\|_p$ 是 L_p 上的范数，记诱导出的度量为 d_p；
- 当 $p \in (0, 1)$ 时，$d_p(f, g) := \|f - g\|_p^p$ 是度量。

注解

这两个结论直接来源于 Минковский 不等式：
- For all $p \in [1, +\infty]$, we have $\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$;
- For all $p \in (0, 1)$, we have $\|f + g\|_p^p \le \|f\|_p^p + \|g\|_p^p$.

定理 3.2.4 (终极之梦)

对于任意 $p \in (0, +\infty]$，(L_p, d_p) 完备。

关于可分性

例. l_p 和 L_p 在 $p \in [1, +\infty)$ 时都可分。

4. Hilbert 空间

Hilbert 空间就是**完备内积空间**。由于配备了性质良好的内积，Hilbert 空间的对偶空间和其本身等距同构（Riesz 表示定理），这和普通的赋范向量空间不同，后者的对偶空间通常不同构于本身。

5. 拓扑向量空间

5.1. 基本定义

拓扑向量空间：加法和数乘在拓扑意义下连续的向量空间。

定义 5.1.1 (两种神秘集合)

设 E 是数域 $\mathbb{F}$ 上的向量空间，$A \subset E$ 是子集（不必是子空间!），则定义：

- **平衡集**：若取任意标量 $|\lambda| \leq 1$，对任意 $x \in A$ 有 $\lambda x \in A$，则称 A 平衡；
- **吸收集**：若取任意 $x \in A$，存在 $\alpha > 0$，对任意标量 $|\lambda| \leq \alpha$ 有 $\lambda x \in A$，则称 A 吸收。

注解

- 对任意集合，取内部保持凸性；
- 对于 0 附近的集合，取内部保持平衡性。

5.2. 半赋范空间

半赋范空间就是配备了**半范数拓扑**的**向量空间**，因此，本节所出现的空间不都是拓扑向量空间，请注意定义。

定义 5.2.1 (半范数)

设 E 是 $\mathbb{F}$ 上的向量空间，且 $p : E \to \mathbb{F}$ 是线性泛函，若：

- **非负**：对任意 $x \in E$，有 $p(x) \geq 0$；
- **正定**：对任意 $x \in E, \lambda \in \mathbb{F}$，有 $p(\lambda x) = |\lambda|\ p(x)$；
- **三角不等式**；

则称 p 是一个半范数。

和范数一样，半范数能诱导拓扑，但是半范数的性质决定了诱导拓扑的性质不会很好，具体而言：

命题 5.2.2 (Hausdorff 等价于范数)

半范数 p 诱导的拓扑 Hausdorff，当且仅当 p 是范数。

正是如此，我们常常考虑一族半范数所诱导的拓扑，希望能得到 Hausdorff 拓扑。具体而言，考虑定义在 E 上的一族半范数 $\{p_i\}_{i \in I}$，定义这族半范数所诱导的拓扑为 τ：对任意 $O \subset E$，定义 $O \in \tau$ 当且仅当存在指标集 Λ 使得

$$O = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} B_i(x_i, r_i),$$

其中，$B_i(x_i, r_i)$ 是 p_i 诱导拓扑中的开球。

但是这样可能会得到不相容的开集：按定义，我们需要验证开集公理，任意并公理是显然的，问题出在有限交公理。

因此，我们需要对半范数族加一些限制。

定义 5.2.3 (定向半范数族诱导的拓扑)

如果 $\{p_i\}$ 是一族**定向的**半范数，则上文所述的联合拓扑良定义。

对于一般的半范数族，我们有办法让它成为定向族：

定义 5.2.4 (半范数族的定向化)

设 E 是向量空间，对 E 上一族（任意规模的）半范数 $\{p_i\}_{i\in I}$，我们可以加入一些新的半范数，使其成为一个定向集，具体构造如下：

对于任意有限子集 $J\subset I$，定义一个新的半范数 q_J，对 $x\in E$，令

$$q_{J(x)} := \max_{j\in J} p_j(x).$$

可以验证，这样的到的东西仍是半范数，并且是 $\{p_j\}_{j\in J}$ 的上界。

因此，我们得到了原族的定向化：

$$\{p_j\}\bigcup\{q_J : J\subset I \text{ 有限}\}.$$

定义 5.2.5 (一般半范数族诱导的拓扑)

指其定向化后诱导的拓扑。

注解

半范数族 $\{p_i\}$ 所诱导的拓扑 Hausdorff $\Longleftrightarrow$ $\{p_i\}$ 可分点，即对任意 $x\neq 0$，存在 p_i 使 $p_i(x)\neq 0$.

配合这个结论，Hahn-Banach 定理告诉我们，在 Hausdorff 局部凸空间中，非平凡的线性泛函足够多。

有了半范数族诱导的拓扑以后，我们的向量空间具备了双重结构，我们希望拓扑结构和代数结构相容，所幸的确如此：

定理 5.2.6 (半范数族诱导的拓扑结构与代数结构相容)

TODO

定义 5.2.7 (半赋范空间)

向量空间 E 配备一族半范数 $\{p_i\}$ 拓扑，就称为半赋范空间，记为 $(E,\{p_i\})$

定理 5.2.8 (半赋范空间的凸邻域基)

半赋范空间 $(E,\{p_i\})$ 的原点有一组凸邻域基。

证明. 我们可以直接写出来这组凸邻域基：原点附近的全体开球。 □

注解

半赋范空间的积仍然是半赋范空间。

证明. TODO □

5.3. 局部凸空间

上节提到，半赋范空间的原点具备凸邻域基，本节证明其逆命题也成立。

定义 5.3.1 (局部凸空间)

若拓扑向量空间 E 的原点有一组**凸邻域基**，则称其为**局部凸空间**。

定理 5.3.2 (局部凸空间有美妙的原点邻域基)

设 E 是局部凸空间，则其在原点处有一组**凸的平衡开邻域基**。

注解

有了这个性质，我们就能构造一族 Минковский 泛函，又因为 Минковский 泛函都是半范数，我们就得到了一族半范数，而这族半范数正好能诱导出我们需要的拓扑。

本节的主要目标是：若 E 是拓扑向量空间，则有 E 局部凸 $\iff$ E 半赋范。

半赋范推局部凸的那个方向，上一节已经证过。

现在假设 E 局部凸，我们要构造一族半范数，使得这族半范数诱导的拓扑和原来的拓扑一致。Минковский 构造了如下泛函：

定义 5.3.3 (Минковский 泛函)

设 E 是拓扑向量空间，Ω 是原点处的**凸平衡开邻域**，则称泛函 $p_\Omega : E \to \mathbb{R}$,

$$p_\Omega(x) := \inf\left\{\lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in \Omega\right\}$$

为对应于 Ω 的 Минковский 泛函。

注解

6. Baire 纲定理

定理 6.1 (开映射定理)

若 E, F 都是 Banach 空间，$u \in \mathcal{B}(E, F)$ 满足 $u(E) \subset F$ **不是**贫集，则以下两论断成立：

1. 存在 $r > 0$ 使得 $rB_F \subset u(B_E)$，进而得知 u 满；
2. u 开；

推论 6.1.1

满则自动开;

定理 6.2 (闭图像定理)

这是一个判断线性映射是否有界的定理。

若 E, F 是 Banach 空间，$u \in \mathcal{L}(E, F)$，则：u 有界 $\iff u(E)$ 闭。

注解

有了这个定理，为证某些线性算子连续（也就是有界），只需要证明其像闭。

7. Hahn-Banach 定理，弱拓扑、弱 $*$ 拓扑

强形式的 Hahn-Banach 定理 $\Longrightarrow$ 弱形式版本:

证明. 假设弱形式的前提成立，即 $(E, \|\cdot\|)$ 是赋范向量空间，$A \subset E$ 是子空间，且 $g \in \mathcal{B}(A, \mathbb{F})$，则现在要证明 g 有等范数延拓 $G \in \mathcal{B}(E, \mathbb{F})$，即 $\|G\| = \|g\|$。

为使用强版本的 Hahn-Banach 定理，考虑半范数 $p := \|g\| \, \|\cdot\|$（实际上是范数），显然对任意 $x \in A$ 有 $\|gx\| \leq p(x)$，所以根据强版本 Hahn-Banach 定理，g 有延拓 $G \in \mathcal{B}(E, \mathbb{F})$，且满足

$$\|G(x)\| \leq p(x) = \|g\| \, \|x\|.$$

这告诉我们 $\|G\| \leq \|g\|$.

注意到 $G|_A = g$，显然有 $\|G\| \geq \|g\|$，所以最终得到了 g 的等范数延拓 G，证毕。 □

利用 Hahn-Banach 定理，我们可以通过研究对偶空间来获得关于原空间的信息，具体的结论如下:

定理 7.1 (赋范空间到双对偶空间的等距嵌入)

设 E 是赋范空间，则对任意 $x \in E$，有

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in E^* \\ \|f\| \leq 1}} |f(x)|.$$

推论 7.1.1

上述定理实际上在说下面这个映射是等距嵌入:

$$E \to E^{**}, x \mapsto [\mathrm{ev}_x : f \mapsto f(x)].$$

证明. 只需要观察到 $\mathrm{ev}_x : E^* \to \mathbb{K}$ 满足

$$\|\mathrm{ev}_x\| = \sup_{\substack{f \in E^* \\ \|f\| \leq 1}} |\mathrm{ev}_x(f)|$$

即可。 □

这里，固定 $x \in E$，则对于任意 $f \in E^*$，有 $|\mathrm{ev}_x(f)| \le \|f\| \cdot \|x\|$，这意味着 ev_x 的确是**有界**线性泛函，故而也连续，即 $\mathrm{ev}_x \in E^{**}$ 是良定义的。

另外几个结论，可以作为 Hahn-Banach 定理应用的实例：

命题 7.2

对于任意非零元 $x_0 \in E$，存在 $f \in E^*$ 使得 $\|f\| = 1$，且

$$f(x_0) = \|x_0\|$$

证明. 定义 $\varphi : \mathbb{K}x_0 \to \mathbb{K}, kx_0 \mapsto k\,\|x_0\|$，这显然线性，且 $\|\varphi\| = 1$，$\varphi(x_0) = \|x_0\|$，则根据 Hahn-Banach 定理，存在 φ 的等范数延拓 $\Phi \in E^*$，容易验证这个 Φ 满足要求。 □

命题 7.3 (隔离)

设 M 是赋范线性空间 E 的真闭子空间，$x \in E \setminus M$，则存在 $f \in E^*$，使得以下条件同时成立：

- $f(x) = 1$;
- $f(M) = \mathbf{0}$;

证明. 定义 $f : M \oplus \mathbb{K}x \to \mathbb{K}, (m + kx) \mapsto k$, 这显然线性，至于有界性，只需注意

$$\begin{aligned}\|f\| &= \sup_{m,k}\left\{|\frac{f(m+kx)}{\|m+kx\|}|\right\} \\ &= \sup_{m,k}\left\{\frac{1}{\|x+\frac{m}{k}\|}\right\} \\ &= \frac{1}{\mathrm{dist}(x,M)}.\end{aligned}$$

因 M 闭，知 $\|f\|$ 有界。

利用 Hahn-Banach 定理，立刻得到 f 的延拓，即为所求。 □

利用上面的命题，我们可得如下结果，宗旨仍是通过研究对偶空间获得原空间的信息：

定理 7.4 (稠密 $\iff$ 话语权)

设 $M \subset E$ 是赋范线性空间的子空间，则以下两论断等价：

1. M 在 E 中稠密；
2. 对任意 $f \in E^*$，有 $f|_M = 0$ 蕴含 $f = 0$.

定义 7.5 (零化子)

我们顺势引入 “零化子”（annihilator） 的概念：对赋范线性空间 E 及其非空子空间 $M \subset E$，定义其零化子为

$$\mathrm{ann}_E(M) := M^0 := \{f \in E^* : f|_M = 0\}.$$

注解

有了这个定义，本定理可表述成：$M \subset E$ 稠密 $\iff \mathrm{ann}_E(M) = 0$.

也就是说，零化子刻画了子空间的**非稠密程度**，譬如对于最不稠密的子空间 $\{0\}$，我们有 $\mathrm{ann}_E(\{0\}) = E^*$，是全空间，所以 $\{0\}$ 必定非稠密。

定理 7.6 (X^* 可分 $\implies X$ 可分)

设 X 是 Banach 空间，则 X^* 可分 $\implies X$ 可分。

这个定理可以用来证明如下结果：

定理 7.7 (Banach 空间 E 自反 $\iff$ 它的对偶也自反)

如题

证明.
- ($\implies$) 容易；
- ($\impliedby$) 设 E^* 自反，即 $E^* = (E^*)^{**} = (E^{**})^*$，为证 $E = E^{**}$，可考虑证明 $\iota(E) \subset E^{**}$ 稠密且闭，这在任何拓扑空间中都蕴含 $\iota(E) = E^{**}$，其中 ι 是典范嵌入。
  - 根据定理 7.6，为证 $E \subset E^{**}$ 稠密，只需证明对任意 $f \in (E^{**})^*$，有 $f|_E = 0 \implies f = 0$。如果确有 $f|_E = 0$，则因 $E^* = (E^{**})^*$，得到 $f = 0$，所以 E 在 E^{**} 中稠密；
  - 因为 E 是 Banach 空间，E 在 E^{**} 中闭。

□

证明. 设 $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X^*$ 是一个可数稠密子集。按范数定义，存在一列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ 使得

$$\|f_n(x_n)\| \geq \frac{\|f_n\|}{2}.$$

令 $E := \{x_n\}$，我们将证明 E 是稠密的，从而证明 X 可分。

下面定义 E 的闭张开 $\vee E := \overline{\mathrm{span}\ E}$，按定义，$E$ 稠密 $\iff \vee E = X$。

反证法：若 $\vee E$ 真包含于 X，则根据命题 7.3，我们得到了 $f \in X^*$，且其满足
- $\|f\| = 1$;
- $f(\vee E) = 0$.

此时，可以利用 $\mathcal{F}$ 了。由假设知存在 $\{n_k\}$ 使得 $f_{n_k} \to f$，这意味着 $\|f_{n_k} - f\| \to 0$。因 $\|f\| = 1$，进一步有 $\frac{f_{n_k}}{\|f_{n_k}\|} \to f$，但

$$\|\frac{f_{n_k}}{\|f_{n_k}\|} - f\| > \|\frac{f_{n_k}(x_{n_k})}{\|f_{n_k}\|} - f(x_{n_k})\| = \|\frac{f_{n_k}(x_{n_k})}{\|f_{n_k}\|} - 0\|,$$

最终，由 x_{n_k} 的定义，知最后的表达式 $> \frac{1}{2}$，这和我们刚才得到的结论矛盾。 □

注解

如果 X 自反，则 X^* 可分 $\iff X$ 可分，因为此时 $X^{**} = X$，然后就可以用定理 7.6。

关于自反空间，我们还有如下结果：

定理 7.8 (Pettis 定理)

自反性是闭可遗传的：自反 Banach 空间 X 的闭子空间 M 也是自反的。

8. Banach 空间的对偶理论

在本章中，我们研究对偶理论，所用符号如次：

1. $\iota : E \to E^{**}$ 是典范等距嵌入，$\iota(x)$ 简记为 $\hat{x}$；
2. 设 E 是 Banach 空间，定义标准配对 $\langle -, - \rangle : X^* \times X \to \mathbb{F}$ 为

$$\langle x^*, x \rangle := x^*(x),$$

   这个运算显然是双线性的；

8.1. 共轭算子

Banach 空间的共轭算子推广了 Hilbert 空间的概念，核心思想是用标准配对模拟内积

定理 8.1.1 (共轭算子)

对赋范空间 E 和 F，设 $u \in \mathcal{B}(E, F)$，则断言存在唯一的 $u^* \in \mathcal{B}(F^*, E^*)$ 满足：

1. $\langle u^*(f^*), x \rangle = \langle f^*, u(x) \rangle$.
2. $\|u^*\| = \|u\|$;

证明.

1. 存在性：直接定义 u^* 为拉回 $u^*(f^*) := f^* \circ u$ 即可；至于连续性，注意到

$$\|u^*(f^*)\| = \|f^* \circ u\| \leq \|f^*\| \, \|u\|$$

   上式不等式乃是熟知的一般性结果；
2. 唯一性简单；
3. 至于保范数，要用到 Hahn-Banach 定理，有点啰嗦，详见许全华定理 9.1.1。

□

注解

保范性告诉我们 $(-)^* : \mathcal{B}(E, F) \to \mathcal{B}(F^*, E^*)$ 是线性等距嵌入。（等距映射都是单射，所以叫嵌入）

当 E, F 均为 Banach 空间时，一切都变得更美妙了：

定理 8.1.2 (u 可逆 $\iff u^*$ 可逆)

当 E, F 均为 Banach 空间时，题目成立。

证明. 见吉大讲义命题 2.172。 □

8.2. 对零化子的研究

前面的定义 7.5 已经定义过零化子，现在来研究零化子的一般性质（以及为什么要研究这种东西）。本小节中，我们假设 X 是赋范线性空间，$E \subset X$ 非空。

Hahn-Banach 定理告诉我们，对于任意 $f \in E^*$，我们可以把他保范延拓成 $\tilde{f} \in X^*$，同时，通过取限制，对于任意 $\tilde{f} \in X^*$，我们可以得到一个 $\tilde{f}|_E \in E^*$，也就是说，我们得到下图：

$$\begin{tikzcd} E^* \arrow[rr, bend left, "\text{Hahn-Banach}"] & & X^* \arrow[ll, bend left, "\text{Restriction}"] \end{tikzcd}$$

所以，他们之间到底是什么关系？（**警告**：虽然我们都很想，但是这两个"对应"的复合不会是恒同，因为 Hahn-Banach 所提供的延拓不唯一。）

命题 8.2.1

$E^0 = \left(\overline{E}\right)^0$ 是 X^* 的子空间，理由：

$$\begin{aligned} E^0 &= \{f : f|_E = 0\}, \\ &= \{f : E \subset \ker f\}, \\ &= \left\{f : \overline{E} \subset \ker f\right\}, \text{ since } f \text{ is continuous} \\ &= \overline{E}^0. \end{aligned}$$

下面定义零化子：

定义 8.2.2 (零化子)

对赋范线性空间 E 及其非空子空间 $M \subset E$，定义其零化子为

$$\operatorname{ann}_E(M) := E^{\perp} := M^0 := \{f \in E^* : f|_M = 0\}.$$

是的，第一个符号是我自创的，第二个符号是许全华标准，第三个符号是吉大标准。

定义 8.2.3

对于 $F \subset X^*$ 非空，定义它的零化子（或称**预零化子**、下零化子）为

$$\operatorname{ann}_X^*(F) := F_{\perp} := {}^0F := \bigcap_{f \in F} \ker f.$$

请注意：现在对于对偶空间 E^*，我们有零化子和下零化子两种概念，一般来说，它们是不一样的，即 $\operatorname{ann}_{X^*} \neq \operatorname{ann}_X^*$，TODO：例子？

总结一下，我们现在有两种零化子：

$$\begin{tikzcd} \operatorname{sub}(X) \arrow[rr, bend left, "\operatorname{ann}_X(-)"] & & \operatorname{sub}(X^*) \arrow[ll, bend left, "\operatorname{ann}_X^*(-)"] \end{tikzcd}$$

这两个映射的方向正好相反，所以我们好奇如果复合它们，会发生什么。

引理 8.2.4 (两种零化子之间的关系)

设有赋范线性空间 X，$\iota : X \to X^{**}$ 是典范等距嵌入，$M \subset X$ 和 $G \subset X^*$ 均是闭子空间，则
1. $M = \mathrm{ann}_X^*(\mathrm{ann}_X(M))$；
2. $G \subset \mathrm{ann}_X(\mathrm{ann}_X^*(G))$；
3. 如 X 自反，则 2 取等；

证明.

1. 由 Hahn-Banach 定理，$x \notin M \iff \exists f \in X^*, f|_M = 0 \wedge f(x) \neq 0$，则取否有
$$x \in M \iff (f \in \mathrm{ann}_X(M) \Rightarrow f(x) = 0),$$
右边就是说 $x \in \mathrm{ann}_X^*(\mathrm{ann}_X(M))$.
2. 类似；
3. 类似；

□

8.3. 商空间和子空间的对偶空间

零化子能帮助我们研究**闭子空间** F^* 和 E^* 之间的关系。

在开始之前，我们必须定义商空间

定义 8.3.1 (商空间)

设 $F \subset E$ 是 **闭子空间**，则可在商空间 E/F 上定义范数，对于 $[x] \in E/F$，定义:
$$\|[x]\| := \inf\{\|y\| : y \sim x\} = \inf\{\|x + e\| : e \in E\}.$$
闭子空间对极限封闭，这样才能保证 $\|[x]\| = 0 \iff [x] = 0$.

定理 8.3.2 (对偶定理)

设 $F \subset E$ 是 **闭子空间**，则
1. $(E/F)^* \cong F^\perp$；
2. $F^* \cong E/F^\perp$；

这个定理可以用来证明一些维数相关的东西，譬如这题:

命题 8.3.3

设 X 是赋范线性空间，$E = \langle x_1, ..., x_n \rangle \subset X$ 是 n 维子空间，则 codim $E^\perp = n$.

证明. 按定义，codim $E^\perp = \dim(X^*/E^\perp)$，由对偶定理，这等于 $\dim E^* = n$（请注意有限维子空间都是闭的） □

另一个用到对偶定理的结果（和定理 7.8 对照着看）:

命题 8.3.4

设 X 是自反 Banach 空间，$M \subset X$ 是闭子空间，则 X/M 也是自反空间。

证明. 因 M 闭，由对偶定理 $(X/M)^* \cong M^\perp \subset X^*$.

另外，熟知 X^* 也是 Banach 空间，又 $M^\perp \subset X^*$ 是闭子空间，则 M 也是 Banach 空间。

由定理 7.7，X^* 也自反。最终，由 Pettis 定理（定理 7.8），得到 $M^\perp$ 也自反。

由于同构，$(X/M)^*$ 是 Banach 空间且自反，此时再用定理 7.7，得到 X/M 也自反！ $\square$

注解

这题很不错，我们总共用到了如下结论：

1. Banach 空间的闭子空间依然是 Banach 空间；
2. Banach 空间自反 $\iff$ 它的对偶空间也自反；
3. Banach 空间的自反性是闭传递的，也就是说，自反 Banach 空间的闭子空间依然是自反的。

本题的结论可以说加强了上述第三点：自反性是闭商传递的！