泛函分析提纲

Author: 秦宇轩 (QIN Yuxuan)
最后更新于 2025-10-29

目录

这是一份泛函分析提纲（不是笔记！），仅包含我认为重要的结论。

参考书目：许全华《泛函分析讲义》。

1. 拓扑空间简介

TODO

2. 完备度量空间

TODO

3. 赋范空间、连续线性映射

定义 3.1 (等价的范数)

线性空间 X 上的两个范数 p_1, p_2 若诱导出相同的拓扑，则称这两个范数等价。

注解

等价范数保持紧性、线性空间的完备性。

定理 3.2 (有限维线性空间上的所有范数都等价)

如其名。

证明. 基本思想：范数等价是等价关系，只需证明所有范数和某一个范数等价即可。

通常做法是证明任意范数 p 和最大模范数 $\|\cdot\|_\infty$ 等价。设 $x \in \mathbb{K}^n$ 是任意向量。

- $p\left(\sum_{k\le n} x_k e_k\right) \le p\left(\sum_{k\le n} e_k\right) \cdot \max_k |x_k| = p\left(\sum_{k\le n} e_k\right) \cdot \|x\|_\infty$，则取 $C_1 = p(\sum e_k)$ 即可。

- 另一个方向要用到单位球面的紧性，注意 $p : (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty) \to [0, +\infty)$ 连续，则因单位球面紧，p 取到最小值 C_2，则

$$p(x) = \|x\|_\infty \, p\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) \geq C_2 \, \|x\|_\infty.$$

  因为 $\frac{x}{\|x\|_\infty}$ 在单位球面上。

□

注解

1. 证明第二点中声称单位球面紧，当然可以通过欧氏空间的一般理论得到，但是下文提到的 Riesz 表示定理能给一种通用证明。
2. 因 $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ 完备且等价范数保持一些良好性质（参考上一个注解），知任何有限维赋范空间都是 Banach 空间，且有界闭集 $\iff$ 紧集。

下面我们展示无穷维空间中两个不等价的范数：

设 $C([0,1])$ 表示 $[0,1]$ 上的全体实连续函数，$f \in C([0,1])$，定义 $\|f\|_\infty := \sup|f|$ 为最大模范数，容易证明这个范数完备。

再定义 L^1 范数 $\|f\|_1 := \int_0^1 |f|$，这个范数不完备。

定理 3.3 (Riesz 定理)

设 $(E, \|\cdot\|)$ 是赋范空间，则 E 有限维 $\iff$ 单位闭球 $\overline{B}(0,1)$ 紧。

3.1. 连续线性映射

定理 3.1.1 (连续 $\iff$ 有界)

设 $f : X \to Y$ 是赋范空间之间的线性映射，则 f 连续 $\iff$ f 有界。

证明.

- f 连续，则在 0 附近小于 1，因 $f(0) = 0$，则存在 r，对任意 $x \in X$，有 $\|f\left(r \cdot \frac{x}{\|x\|}\right)\| < 1$，知 f 有界。
- 另一个方向显然。

□

所以，为了在研究中充分利用赋范线性空间上的几何信息，我们通常只考虑有界线性映射，记为 $\mathcal{B}(X, Y)$。

容易证明 Banach 空间和有界线性映射构成范畴，记为 **Ban**。

定理 3.1.2

设 E 是赋范空间，F 是 Banach 空间，U 有限维赋范空间，则

- $\mathcal{B}(E, F)$ 也是 Banach 空间;
- $\mathcal{L}(U, E) = \mathcal{B}(U, E)$;

证明.

- 第一点：不难；
- 第二点：有限维赋范空间上的所有范数都等价，外加三角不等式足矣。

□

3.2. L_p 空间

定义 3.2.1 (L_p 空间)

设 $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间，若 $f : \Omega \to \mathbb{K}$ 满足

$$\int_\Omega |f|^p \, d\mu < \infty,$$

则称其为 p-方可积。

定义 $L_p(\Omega)$ 为在测度意义下相等的全体 p-方可积函数。

定义

$$\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

定理 3.2.2 (Holder 不等式)

设 $p, q \in (0, +\infty]$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$，若 $f \in L_p(\Omega), g \in L_q(\Omega)$，则 $fg \in L_r(\Omega)$ 且

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \, \|g\|_q.$$

注解

当 $p = q = 2$ 时，这个不等式告诉我们

$$\int |fg| \leq \|f\|_2 \, \|g\|_2,$$

因此我们可以在 $L_2(\Omega)$ 上定义内积 $(f, g) := |\int fg| < \int |fg|$ 存在。

有了内积，就可以利用 Hilbert 空间的理论了，这可以算是 Fourier 分析的开端。

我们为什么研究 L_p 空间?

定理 3.2.3 ($\|\cdot\|_p$ 是个范数，再不济也能诱导一个度量)

- 当 $p \in [1, +\infty]$ 时，$\|\cdot\|_p$ 是 L_p 上的范数，记诱导出的度量为 d_p；
- 当 $p \in (0, 1)$ 时，$d_p(f, g) := \|f - g\|_p^p$ 是度量。

注解

这两个结论直接来源于 Минковский 不等式：
- For all $p \in [1, +\infty]$, we have $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$;
- For all $p \in (0, 1)$, we have $\|f + g\|_p^p \leq \|f\|_p^p + \|g\|_p^p$.

定理 3.2.4 (终极之梦)

对于任意 $p \in (0, +\infty]$，(L_p, d_p) 完备。

关于可分性

例. l_p 和 L_p 在 $p \in [1, +\infty)$ 时都可分。

4. Hilbert 空间

Hilbert 空间就是**完备内积空间**。由于配备了性质良好的内积，Hilbert 空间的对偶空间和其本身等距同构（Riesz 表示定理），这和普通的赋范向量空间不同，后者的对偶空间通常不同构于本身。

5. 拓扑向量空间

5.1. 基本定义

拓扑向量空间：加法和数乘在拓扑意义下连续的向量空间。

定义 5.1.1 (两种神秘集合)

设 E 是数域 $\mathbb{F}$ 上的向量空间，$A \subset E$ 是子集（不必是子空间！），则定义：

- **平衡集**：若取任意标量 $|\lambda| \leq 1$，对任意 $x \in A$ 有 $\lambda x \in A$，则称 A 平衡；
- **吸收集**：若取任意 $x \in A$，存在 $\alpha > 0$，对任意标量 $|\lambda| \leq \alpha$ 有 $\lambda x \in A$，则称 A 吸收。

注解

- 对任意集合，取内部保持凸性；
- 对于 0 附近的集合，取内部保持平衡性。

5.2. 半赋范空间

半赋范空间就是配备了**半范数拓扑**的**向量空间**，因此，本节所出现的空间不都是拓扑向量空间，请注意定义。

定义 5.2.1 (半范数)

设 E 是 $\mathbb{F}$ 上的向量空间，且 $p : E \to \mathbb{F}$ 是线性泛函，若：

- **非负**：对任意 $x \in E$，有 $p(x) \geq 0$；
- **正定**：对任意 $x \in E, \lambda \in \mathbb{F}$，有 $p(\lambda x) = |\lambda| \, p(x)$；
- 三角不等式；

则称 p 是一个半范数。

和范数一样，半范数能诱导拓扑，但是半范数的性质决定了诱导拓扑的性质不会很好，具体而言：

命题 5.2.2 (Hausdorff 等价于范数)

半范数 p 诱导的拓扑 Hausdorff，当且仅当 p 是范数。

正是如此，我们常常考虑一族半范数所诱导的拓扑，希望能得到 Hausdorff 拓扑。具体而言，考虑定义在 E 上的一族半范数 $\{p_i\}_{i\in I}$，定义这族半范数所诱导的拓扑为 τ：对任意 $O\subset E$，定义 $O\in\tau$ 当且仅当存在指标集 Λ 使得

$$O=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}B_i(x_i,r_i),$$

其中，$B_i(x_i,r_i)$ 是 p_i 诱导拓扑中的开球。

但是这样可能会得到不相容的开集：按定义，我们需要验证开集公理，任意并公理是显然的，问题出在有限交公理。

因此，我们需要对半范数族加一些限制。

定义 5.2.3 (定向半范数族诱导的拓扑)

如果 $\{p_i\}$ 是一族**定向的**半范数，则上文所述的联合拓扑良定义。

对于一般的半范数族，我们有办法让它成为定向族：

定义 5.2.4 (半范数族的定向化)

设 E 是向量空间，对 E 上一族（任意规模的）半范数 $\{p_i\}_{i\in I}$，我们可以加入一些新的半范数，使其成为一个定向集，具体构造如下：

对于任意有限子集 $J\subset I$，定义一个新的半范数 q_J，对 $x\in E$，令

$$q_{J(x)}:=\max_{j\in J}p_j(x).$$

可以验证，这样的到的东西仍是半范数，并且是 $\{p_j\}_{j\in J}$ 的上界。

因此，我们得到了原族的定向化：

$$\{p_j\}\bigcup\{q_J:J\subset I\text{ 有限}\}.$$

定义 5.2.5 (一般半范数族诱导的拓扑)

指其定向化后诱导的拓扑。

注解

半范数族 $\{p_i\}$ 所诱导的拓扑 Hausdorff $\iff\{p_i\}$ 可分点，即对任意 $x\neq 0$，存在 p_i 使 $p_i(x)\neq 0$.

配合这个结论，Hahn-Banach 定理告诉我们，在 Hausdorff 局部凸空间中，非平凡的线性泛函足够多。

有了半范数族诱导的拓扑以后，我们的向量空间具备了双重结构，我们希望拓扑结构和代数结构相容，所幸的确如此：

定理 5.2.6 (半范数族诱导的拓扑结构与代数结构相容)

TODO

定义 5.2.7 (半赋范空间)

向量空间 E 配备一族半范数 $\{p_i\}$ 拓扑，就称为半赋范空间，记为 $(E, \{p_i\})$

定理 5.2.8 (半赋范空间的凸邻域基)

半赋范空间 $(E, \{p_i\})$ 的原点有一组凸邻域基。

证明. 我们可以直接写出来这组凸邻域基：原点附近的全体开球。 □

注解

半赋范空间的积仍然是半赋范空间。

证明. TODO □

5.3. 局部凸空间

上节提到，半赋范空间的原点具备凸邻域基，本节证明其逆命题也成立。

定义 5.3.1 (局部凸空间)

若拓扑向量空间 E 的原点有一组**凸邻域基**，则称其为**局部凸空间**。

定理 5.3.2 (局部凸空间有美妙的原点邻域基)

设 E 是局部凸空间，则其在原点处有一组**凸的平衡开邻域基**。

注解

有了这个性质，我们就能构造一族 Минковский 泛函，又因为 Минковский 泛函都是半范数，我们就得到了一族半范数，而这族半范数正好能诱导出我们需要的拓扑。

本节的主要目标是：若 E 是拓扑向量空间，则有 E 局部凸 $\iff$ E 半赋范。

半赋范推局部凸的那个方向，上一节已经证过。

现在假设 E 局部凸，我们要构造一族半范数，使得这族半范数诱导的拓扑和原来的拓扑一致。Минковский 构造了如下泛函：

定义 5.3.3 (Минковский 泛函)

设 E 是拓扑向量空间，Ω 是原点处的**凸平衡开邻域**，则称泛函 $p_\Omega : E \to \mathbb{R}$,

$$p_\Omega(x) := \inf\left\{\lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in \Omega\right\}$$

为对应于 Ω 的 Минковский 泛函。

注解

6. Hahn-Banach 定理，弱拓扑、弱 $*$ 拓扑

强形式的 Hahn-Banach 定理 $\Longrightarrow$ 弱形式版本：

证明. 假设弱形式的前提成立，即 $(E, \|\cdot\|)$ 是赋范向量空间，$A \subset E$ 是子空间，且 $g \in \mathcal{B}(A, \mathbb{F})$，则现在要证明 g 有等范数延拓 $G \in \mathcal{B}(E, \mathbb{F})$，即 $\|G\| = \|g\|$。

为使用强版本的 Hahn-Banach 定理，考虑半范数 $p := \|g\| \, \|\cdot\|$（实际上是范数），显然对任意 $x \in A$ 有 $\|gx\| \le p(x)$，所以根据强版本 Hahn-Banach 定理，g 有延拓 $G \in \mathcal{B}(E, \mathbb{F})$，且满足

$$\|G(x)\| \le p(x) = \|g\| \, \|x\|.$$

这告诉我们 $\|G\| \le \|g\|$.

注意到 $G|_A = g$，显然有 $\|G\| \ge \|g\|$，所以最终得到了 g 的等范数延拓 G，证毕。 $\square$