# 泛函分析提纲

Author: 秦宇轩 (QIN Yuxuan)
最后更新于 2025-10-21

## Contents



---

这是一份泛函分析提纲（不是笔记！），仅包含我认为重要的结论。

参考书目：许全华《泛函分析讲义》。

## 1. 拓扑空间简介

TODO

## 2. 完备度量空间

TODO

## 3. Hilbert 空间

Hilbert 空间就是**完备内积空间**。由于配备了性质良好的内积，Hilbert 空间的对偶空间和其本身等距同构（Riesz 表示定理），这和普通的赋范向量空间不同，后者的对偶空间通常不同构于本身。

## 4. 拓扑向量空间

### 4.1. 基本定义

拓扑向量空间：加法和数乘在拓扑意义下连续的向量空间。

> **Definition 4.1.1 (两种神秘集合)**
>
> 设 $E$ 是数域 $\mathbb{F}$ 上的向量空间，$A \subset E$ 是子集（不必是子空间！），则定义：
>
> - **平衡集**：若取任意标量 $|\lambda| \leq 1$，对任意 $x \in A$ 有 $\lambda x \in A$，则称 $A$ 平衡；
> - **吸收集**：若取任意 $x \in A$，存在 $\alpha > 0$，对任意标量 $|\lambda| \leq \alpha$ 有 $\lambda x \in A$，则称 $A$ 吸收。

> **Remark**
>
> - 对任意集合，取内部保持凸性；
> - 对于 0 附近的集合，取内部保持平衡性。

## 4.2. 半赋范空间

半赋范空间就是配备了**半范数拓扑**的**向量空间**，因此，本节所出现的空间不都是拓扑向量空间，请注意定义。

**Definition 4.2.1 (半范数)**

设 $E$ 是 $\mathbb{F}$ 上的向量空间，且 $p: E \to \mathbb{F}$ 是线性泛函，若：
- **非负**：对任意 $x \in E$，有 $p(x) \geq 0$；
- **正定**：对任意 $x \in E, \lambda \in \mathbb{F}$，有 $p(\lambda x) = |\lambda|\ p(x)$；
- 三角不等式；

则称 $p$ 是一个半范数。

和范数一样，半范数能诱导拓扑，但是半范数的性质决定了诱导拓扑的性质不会很好，具体而言：

**Proposition 4.2.2 (Hausdorff 等价于范数)**

半范数 $p$ 诱导的拓扑 Hausdorff，当且仅当 $p$ 是范数。

正是如此，我们常常考虑一族半范数所诱导的拓扑，希望能得到 Hausdorff 拓扑。具体而言，考虑定义在 $E$ 上的一族半范数 $\{p_i\}_{i\in I}$，定义这族半范数所诱导的拓扑为 $\tau$：对任意 $O \subset E$，定义 $O \in \tau$ 当且仅当存在指标集 $\Lambda$ 使得

$$O = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} B_i(x_i, r_i),$$

其中，$B_i(x_i, r_i)$ 是 $p_i$ 诱导拓扑中的开球。

但是这样可能会得到不相容的开集：按定义，我们需要验证开集公理，任意并公理是显然的，问题出在有限交公理。

因此，我们需要对半范数族加一些限制。

**Definition 4.2.3 (定向半范数族诱导的拓扑)**

如果 $\{p_i\}$ 是一族**定向的**半范数，则上文所述的联合拓扑良定义。

对于一般的半范数族，我们有办法让它成为定向族：

**Definition 4.2.4 (半范数族的定向化)**

设 $E$ 是向量空间，对 $E$ 上一族（任意规模的）半范数 $\{p_i\}_{i\in I}$，我们可以加入一些新的半范数，使其成为一个定向集，具体构造如下：

对于任意有限子集 $J \subset I$，定义一个新的半范数 $q_J$，对 $x \in E$，令

$$q_{J(x)} := \max_{j\in J} p_j(x).$$

可以验证，这样的到的东西仍是半范数，并且是 $\{p_j\}_{j\in J}$ 的上界。

因此，我们得到了原族的定向化：

$$\{p_j\} \bigcup \{q_J : J \subset I \text{ 有限}\}.$$

**Definition 4.2.5 (一般半范数族诱导的拓扑)**

指其定向化后诱导的拓扑。

**Remark**

半范数族 $\{p_i\}$ 所诱导的拓扑 Hausdorff $\iff \{p_i\}$ 可分点，即对任意 $x \neq 0$，存在 $p_i$ 使 $p_i(x) \neq 0$.

配合这个结论，Hahn-Banach 定理告诉我们，在 Hausdorff 局部凸空间中，非平凡的线性泛函足够多。

有了半范数族诱导的拓扑以后, 我们的向量空间具备了双重结构, 我们希望拓扑结构和代数结构相容，所幸的确如此：

**Theorem 4.2.6 (半范数族诱导的拓扑结构与代数结构相容)**

TODO

**Definition 4.2.7 (半赋范空间)**

向量空间 $E$ 配备一族半范数 $\{p_i\}$ 拓扑，就称为半赋范空间，记为 $(E, \{p_i\})$

**Theorem 4.2.8 (半赋范空间的凸邻域基)**

半赋范空间 $(E, \{p_i\})$ 的原点有一组凸邻域基。

*Proof.* 我们可以直接写出来这组凸邻域基：原点附近的全体开球。 □

**Remark**

半赋范空间的积仍然是半赋范空间。

*Proof.* TODO □

## 4.3. 局部凸空间

上节提到，半赋范空间的原点具备凸邻域基，本节证明其逆命题也成立。

**Definition 4.3.1 (局部凸空间)**

若拓扑向量空间 $E$ 的原点有一组**凸邻域基**，则称其为**局部凸空间**。

**Theorem 4.3.2 (局部凸空间有美妙的原点邻域基)**

设 $E$ 是局部凸空间，则其在原点处有一组**凸的平衡开邻域基**。

**Remark**

有了这个性质，我们就能构造一族 Минковский 泛函，又因为 Минковский 泛函都是半范数，我们就得到了一族半范数，而这族半范数正好能诱导出我们需要的拓扑。

本节的主要目标是：若 $E$ 是拓扑向量空间，则有 $E$ 局部凸 $\iff$ $E$ 半赋范。

半赋范推局部凸的那个方向，上一节已经证过。

现在假设 $E$ 局部凸，我们要构造一族半范数，使得这族半范数诱导的拓扑和原来的拓扑一致。Минковский 构造了如下泛函：

**Definition 4.3.3 (Минковский 泛函)**

设 $E$ 是拓扑向量空间，$\Omega$ 是原点处的**凸平衡开邻域**，则称泛函 $p_\Omega : E \to \mathbb{R}$,

$$p_\Omega(x) \coloneqq \inf\left\{\lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in \Omega\right\}$$

为对应于 $\Omega$ 的 Минковский 泛函。

**Remark**

# 5. Hahn-Banach 定理，弱拓扑、弱 $*$ 拓扑

强形式的 Hahn-Banach 定理 $\Longrightarrow$ 弱形式版本：

*Proof.* 假设弱形式的前提成立，即 $(E, \|\cdot\|)$ 是赋范向量空间，$A \subset E$ 是子空间，且 $g \in \mathcal{B}(A, \mathbb{F})$，则现在要证明 $g$ 有等范数延拓 $G \in \mathcal{B}(E, \mathbb{F})$，即 $\|G\| = \|g\|$。

为使用强版本的 Hahn-Banach 定理，考虑半范数 $p \coloneqq \|g\| \, \|\cdot\|$（实际上是范数），显然对任意 $x \in A$ 有 $\|gx\| \le p(x)$，所以根据强版本 Hahn-Banach 定理，$g$ 有延拓 $G \in \mathcal{B}(E, \mathbb{F})$，且满足

$$\|G(x)\| \le p(x) = \|g\| \, \|x\|.$$

这告诉我们 $\|G\| \le \|g\|$.

注意到 $G|_A = g$，显然有 $\|G\| \ge \|g\|$，所以最终得到了 $g$ 的等范数延拓 $G$，证毕。 $\square$