

泛函分析提纲

著者: 秦宇轩 (QIN Yuxuan)

最后更新于 2025-11-12

目录

1. 拓扑空间简介	1
2. 完备度量空间	1
3. 赋范空间、连续线性映射	2
3.1. 连续线性映射	3
3.2. L_p 空间	3
4. Hilbert 空间	4
5. 拓扑向量空间	5
5.1. 基本定义	5
5.2. 半赋范空间	5
5.3. 局部凸空间	7
6. Baire 纲定理	7
7. Hahn-Banach 定理, 弱拓扑、弱*拓扑	8

这是一份泛函分析提纲（不是笔记!），仅包含我认为重要的结论。

参考书目：

- 许全华《泛函分析讲义》。
- 朱森《泛函分析讲义》（吉林大学内部教材）

1. 拓扑空间简介

TODO

2. 完备度量空间

定理 2.1 (Arzela-Ascoli 定理)

有很多版本，许全华上面的更深一些，不过这里只记录吉大讲义版本：

设 (X, d) 是紧度量空间， $E \subset C(X)$ 是一族连续函数，则 E 列紧等价于以下两个条件同时成立：

- E 中函数一致有界；
- E 中函数同等连续，即对任意 $\varepsilon > 0$ ，存在 δ 使得

$$\sup_{f \in E} \sup_{\substack{x, y \in X \\ d(x, y) < \delta}} |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

定理 2.2 (Montel 定理)

设 $\mathcal{F} := \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{Hol}(\Omega)$ 是一列在区域 Ω 上一致有界的解析函数，则对任意完全位于 Ω 内的有界区域 D （即 $\bar{D} \subset \Omega$ ）， \mathcal{F} 恒有子列在 D 上一致收敛。

证明. 要用 Arzela-Ascoli 定理。核心思想是利用 D 的有界性得出 \overline{D} 的紧性, 然后通过 Cauchy 积分公式得出 \mathcal{F} 在 \overline{D} 的某一个开覆盖上都同等连续, 然后由紧性, 可以抽有限次, 得到一致收敛的子子子子子列。□

如果需要举“一致连续但不同等连续”..... 之类的例子, 可以用这族函数 $\{f_n(x) := (-1)^n + x^n\}$, 这族函数在 $C[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 中既一致有界又同等连续, 但在 $C[-2, 2]$ 中这两个性质都不具备。详见朱森例 1.72.

3. 赋范空间、连续线性映射

定义 3.1 (等价的范数)

线性空间 X 上的两个范数 p_1, p_2 若诱导出相同的拓扑, 则称这两个范数等价。

注解

等价范数保持紧性、线性空间的完备性。

定理 3.2 (有限维线性空间上的所有范数都等价)

如其名。

证明. 基本思想: 范数等价是等价关系, 只需证明所有范数和某一个范数等价即可。

通常做法是证明任意范数 p 和最大模范数 $\|\cdot\|_\infty$ 等价。设 $x \in \mathbb{K}^n$ 是任意向量。

- $p\left(\sum_{k \leq n} x_k e_k\right) \leq p\left(\sum_{k \leq n} e_k\right) \cdot \max_k |x_k| = p\left(\sum_{k \leq n} e_k\right) \cdot \|x\|_\infty$, 则取 $C_1 = p(\sum e_k)$ 即可。
- 另一个方向要用到单位球面的紧性, 注意 $p: (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ 连续, 则因单位球面紧, p 取到最小值 C_2 , 则

$$p(x) = \|x\|_\infty p\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) \geq C_2 \|x\|_\infty.$$

因为 $\frac{x}{\|x\|_\infty}$ 在单位球面上。

□

注解

1. 证明第二点中声称单位球面紧, 当然可以通过欧氏空间的一般理论得到, 但是下文提到的 Riesz 表示定理能给一种通用证明。
2. 因 $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$ 完备且等价范数保持一些良好性质 (参考上一个注解), 知任何有限维赋范空间都是 Banach 空间, 且有界闭集 \iff 紧集。

下面我们展示无穷维空间中两个不等价的范数:

设 $C([0, 1])$ 表示 $[0, 1]$ 上的全体实连续函数, $f \in C([0, 1])$, 定义 $\|f\|_\infty := \sup|f|$ 为最大模范数, 容易证明这个范数完备。

再定义 L^1 范数 $\|f\|_1 := \int_0^1 |f|$, 这个范数不完备。

定理 3.3 (Riesz 定理)

设 $(E, \|\cdot\|)$ 是赋范空间, 则 E 有限维 \iff 单位闭球 $\overline{B}(0, 1)$ 紧。

命题 3.4 (Banach 空间中的子空间有限维 \implies 闭)

命题 3.5 (E 是 Banach 空间 \iff 绝对收敛级数都收敛)

3.1. 连续线性映射

定理 3.1.1 (连续 \iff 有界)

设 $f: X \rightarrow Y$ 是赋范空间之间的线性映射, 则 f 连续 $\iff f$ 有界。

证明.

- f 连续, 则在 0 附近小于 1, 因 $f(0) = 0$, 则存在 r , 对任意 $x \in X$, 有 $\|f(r \cdot \frac{x}{\|x\|})\| < 1$, 知 f 有界。
- 另一个方向显然。

□

所以, 为了在研究中充分利用赋范线性空间上的几何信息, 我们通常只考虑有界线性映射, 记为 $\mathcal{B}(X, Y)$ 。

容易证明 Banach 空间和有界线性映射构成范畴, 记为 **Ban**。

定理 3.1.2

设 E 是赋范空间, F 是 Banach 空间, U 有限维赋范空间, 则

- $\mathcal{B}(E, F)$ 也是 Banach 空间;
- $\mathcal{L}(U, E) = \mathcal{B}(U, E)$;

证明.

- 第一点: 不难;
- 第二点: 有限维赋范空间上的所有范数都等价, 外加三角不等式足矣。

□

3.2. L_p 空间

定义 3.2.1 (L_p 空间)

设 $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ 是一个测度空间, 若 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$ 满足

$$\int_{\Omega} |f|^p d\mu < \infty,$$

则称其为 p -方可积。

定义 $L_p(\Omega)$ 为在测度意义下相等的全体 p -方可积函数。

定义

$$\|f\|_p := \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

定理 3.2.2 (Holder 不等式)

设 $p, q \in (0, +\infty]$ 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, 若 $f \in L_p(\Omega), g \in L_q(\Omega)$, 则 $fg \in L_r(\Omega)$ 且

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

注解

当 $p = q = 2$ 时, 这个不等式告诉我们

$$\int |fg| \leq \|f\|_2 \|g\|_2,$$

因此我们可以在 $L_2(\Omega)$ 上定义内积 $(f, g) := \int fg$ 存在。

有了内积, 就可以利用 Hilbert 空间的理论了, 这可以算是 Fourier 分析的开端。

我们为什么研究 L_p 空间?

定理 3.2.3 ($\|\cdot\|_p$ 是个范数, 再不济也能诱导一个度量)

- 当 $p \in [1, +\infty]$ 时, $\|\cdot\|_p$ 是 L_p 上的范数, 记诱导出的度量为 d_p ;
- 当 $p \in (0, 1)$ 时, $d_p(f, g) := \|f - g\|_p^p$ 是度量。

注解

这两个结论直接来源于 Минковский 不等式:

- For all $p \in [1, +\infty]$, we have $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$;
- For all $p \in (0, 1)$, we have $\|f + g\|_p^p \leq \|f\|_p^p + \|g\|_p^p$.

定理 3.2.4 (终极之梦)

对于任意 $p \in (0, +\infty]$, (L_p, d_p) 完备。

关于可分性

例. l_p 和 L_p 在 $p \in [1, +\infty)$ 时都可分。

4. Hilbert 空间

Hilbert 空间就是完备内积空间。由于配备了性质良好的内积, Hilbert 空间的对偶空间和其本身等距同构 (Riesz 表示定理), 这和普通的赋范向量空间不同, 后者的对偶空间通常不同构于本身。

5. 拓扑向量空间

5.1. 基本定义

拓扑向量空间：加法和数乘在拓扑意义下连续的向量空间。

定义 5.1.1 (两种神秘集合)

设 E 是数域 \mathbb{F} 上的向量空间， $A \subset E$ 是子集（不必是子空间！），则定义：

- **平衡集**：若取任意标量 $|\lambda| \leq 1$ ，对任意 $x \in A$ 有 $\lambda x \in A$ ，则称 A 平衡；
- **吸收集**：若取任意 $x \in A$ ，存在 $\alpha > 0$ ，对任意标量 $|\lambda| \leq \alpha$ 有 $\lambda x \in A$ ，则称 A 吸收。

注解

- 对任意集合，取内部保持凸性；
- 对于 0 附近的集合，取内部保持平衡性。

5.2. 半赋范空间

半赋范空间就是配备了半范数拓扑的向量空间，因此，本节所出现的空间不都是拓扑向量空间，请注意定义。

定义 5.2.1 (半范数)

设 E 是 \mathbb{F} 上的向量空间，且 $p: E \rightarrow \mathbb{F}$ 是线性泛函，若：

- **非负**：对任意 $x \in E$ ，有 $p(x) \geq 0$ ；
- **正定**：对任意 $x \in E, \lambda \in \mathbb{F}$ ，有 $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ ；
- **三角不等式**；

则称 p 是一个半范数。

和范数一样，半范数能诱导拓扑，但是半范数的性质决定了诱导拓扑的性质不会很好，具体而言：

命题 5.2.2 (Hausdorff 等价于范数)

半范数 p 诱导的拓扑 Hausdorff，当且仅当 p 是范数。

正是如此，我们常常考虑一族半范数所诱导的拓扑，希望能得到 Hausdorff 拓扑。具体而言，考虑定义在 E 上的一族半范数 $\{p_i\}_{i \in I}$ ，定义这族半范数所诱导的拓扑为 τ ：对任意 $O \subset E$ ，定义 $O \in \tau$ 当且仅当存在指标集 Λ 使得

$$O = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} B_i(x_i, r_i),$$

其中， $B_i(x_i, r_i)$ 是 p_i 诱导拓扑中的开球。

但是这样可能会得到不相容的开集：按定义，我们需要验证开集公理，任意并公理是显然的，问题出在有限交公理。

因此，我们需要对半范数族加一些限制。

定义 5.2.3 (定向半范数族诱导的拓扑)

如果 $\{p_i\}$ 是一族**定向**的半范数, 则上文所述的联合拓扑良定义。

对于一般的半范数族, 我们有办法让它成为定向族:

定义 5.2.4 (半范数族的定向化)

设 E 是向量空间, 对 E 上一族 (任意规模的) 半范数 $\{p_i\}_{i \in I}$, 我们可以加入一些新的半范数, 使其成为一个定向集, 具体构造如下:

对于任意有限子集 $J \subset I$, 定义一个新的半范数 q_J , 对 $x \in E$, 令

$$q_J(x) := \max_{j \in J} p_j(x).$$

可以验证, 这样的到的东西仍是半范数, 并且是 $\{p_j\}_{j \in J}$ 的上界。

因此, 我们得到了原族的定向化:

$$\{p_j\} \cup \{q_J : J \subset I \text{ 有限}\}.$$

定义 5.2.5 (一般半范数族诱导的拓扑)

指其定向化后诱导的拓扑。

🗨 注解

半范数族 $\{p_i\}$ 所诱导的拓扑 Hausdorff $\iff \{p_i\}$ 可分点, 即对任意 $x \neq 0$, 存在 p_i 使 $p_i(x) \neq 0$.

配合这个结论, Hahn-Banach 定理告诉我们, 在 Hausdorff 局部凸空间中, 非平凡的线性泛函足够多。

有了半范数族诱导的拓扑以后, 我们的向量空间具备了双重结构, 我们希望拓扑结构和代数结构相容, 所幸确实如此:

定理 5.2.6 (半范数族诱导的拓扑结构与代数结构相容)

TODO

定义 5.2.7 (半赋范空间)

向量空间 E 配备一族半范数 $\{p_i\}$ 拓扑, 就称为半赋范空间, 记为 $(E, \{p_i\})$

定理 5.2.8 (半赋范空间的凸邻域基)

半赋范空间 $(E, \{p_i\})$ 的原点有一组凸邻域基。

证明. 我们可以直接写出来这组凸邻域基: 原点附近的全体开球。

□

注解

半赋范空间的积仍然是半赋范空间。

证明. **TODO**

□

5.3. 局部凸空间

上节提到, 半赋范空间的原点具备凸邻域基, 本节证明其逆命题也成立。

定义 5.3.1 (局部凸空间)

若拓扑向量空间 E 的原点有一组凸邻域基, 则称其为局部凸空间。

定理 5.3.2 (局部凸空间有美妙的原点邻域基)

设 E 是局部凸空间, 则其在原点处有一组凸的平衡开邻域基。

注解

有了这个性质, 我们就能构造一族 Минковский 泛函, 又因为 Минковский 泛函都是半范数, 我们就得到了一族半范数, 而这族半范数正好能诱导出我们需要的拓扑。

本节的主要目标是: 若 E 是拓扑向量空间, 则有 E 局部凸 $\iff E$ 半赋范。

半赋范推局部凸的那个方向, 上一节已经证过。

现在假设 E 局部凸, 我们要构造一族半范数, 使得这族半范数诱导的拓扑和原来的拓扑一致。Минковский 构造了如下泛函:

定义 5.3.3 (Минковский 泛函)

设 E 是拓扑向量空间, Ω 是原点处的凸平衡开邻域, 则称泛函 $p_\Omega : E \rightarrow \mathbb{R}$,

$$p_\Omega(x) := \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{x}{\lambda} \in \Omega \right\}$$

为对应于 Ω 的 Минковский 泛函。

注解

6. Baire 纲定理

定理 6.1 (开映射定理)

若 E, F 都是 Banach 空间, $u \in \mathcal{B}(E, F)$ 满足 $u(E) \subset F$ 不是贫集, 则以下两论断成立:

1. 存在 $r > 0$ 使得 $rB_F \subset u(B_E)$, 进而得知 u 满;
2. u 开;

推论 6.1.1

满则自动开；

定理 6.2 (闭图像定理)

这是一个判断线性映射是否有界的定理。

若 E, F 是 Banach 空间, $u \in \mathcal{L}(E, F)$, 则: u 有界 $\iff u(E)$ 闭。

注解

有了这个定理, 为证某些线性算子连续 (也就是有界), 只需要证明其像闭。

7. Hahn-Banach 定理, 弱拓扑、弱 * 拓扑

强形式的 Hahn-Banach 定理 \implies 弱形式版本:

证明. 假设弱形式的前提成立, 即 $(E, \|\cdot\|)$ 是赋范向量空间, $A \subset E$ 是子空间, 且 $g \in \mathcal{B}(A, \mathbb{F})$, 则现在要证明 g 有等范数延拓 $G \in \mathcal{B}(E, \mathbb{F})$, 即 $\|G\| = \|g\|$ 。

为使用强版本的 Hahn-Banach 定理, 考虑半范数 $p := \|g\| \|\cdot\|$ (实际上是范数), 显然对任意 $x \in A$ 有 $\|gx\| \leq p(x)$, 所以根据强版本 Hahn-Banach 定理, g 有延拓 $G \in \mathcal{B}(E, \mathbb{F})$, 且满足

$$\|G(x)\| \leq p(x) = \|g\| \|x\|.$$

这告诉我们 $\|G\| \leq \|g\|$.

注意到 $G|_A = g$, 显然有 $\|G\| \geq \|g\|$, 所以最终得到了 g 的等范数延拓 G , 证毕。 \square

利用 Hahn-Banach 定理, 我们可以通过研究对偶空间来获得关于原空间的信息, 具体的结论如下:

定理 7.1 (赋范空间到双对偶空间的等距嵌入)

设 E 是赋范空间, 则对任意 $x \in E$, 有

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in E^* \\ \|f\| \leq 1}} |f(x)|.$$

推论 7.1.1

上述定理实际上在说下面这个映射是等距嵌入:

$$E \rightarrow E^{**}, x \mapsto [\text{ev}_x : f \mapsto f(x)].$$

证明. 只需要观察到 $\text{ev}_x : E^* \rightarrow \mathbb{K}$ 满足

$$\|\text{ev}_x\| = \sup_{\substack{f \in E^* \\ \|f\| \leq 1}} |\text{ev}_x(f)|$$

即可。 \square

这里, 固定 $x \in E$, 则对于任意 $f \in E^*$, 有 $|\text{ev}_x(f)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$, 这意味着 ev_x 的确是有界线性泛函, 故也连续, 即 $\text{ev}_x \in E^{**}$ 是良定义的。

另外几个结论, 可以作为 Hahn-Banach 定理应用的实例:

命题 7.2

对于任意非零元 $x_0 \in E$, 存在 $f \in E^*$ 使得 $\|f\| = 1$, 且

$$f(x_0) = \|x_0\|$$

证明. 定义 $\varphi: \mathbb{K}x_0 \rightarrow \mathbb{K}, kx_0 \mapsto k\|x_0\|$, 这显然线性, 且 $\|\varphi\| = 1$, $\varphi(x_0) = \|x_0\|$, 则根据 Hahn-Banach 定理, 存在 φ 的等范数延拓 $\Phi \in E^*$, 容易验证这个 Φ 满足要求。□

命题 7.3 (隔离)

设 M 是赋范线性空间 E 的真闭子空间, $x \in E \setminus M$, 则存在 $f \in E^*$, 使得以下条件同时成立:

- $f(x) = 1$;
- $f(M) = 0$;

证明. 定义 $f: M \oplus \mathbb{K}x \rightarrow \mathbb{K}, (m + kx) \mapsto k$, 这显然线性, 至于有界性, 只需注意

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sup_{m,k} \left\{ \left| \frac{f(m+kx)}{\|m+kx\|} \right| \right\} \\ &= \sup_{m,k} \left\{ \frac{1}{\|x + \frac{m}{k}\|} \right\} \\ &= \frac{1}{\text{dist}(x, M)}. \end{aligned}$$

因 M 闭, 知 $\|f\|$ 有界。

利用 Hahn-Banach 定理, 立刻得到 f 的延拓, 即为所求。□

利用上面的命题, 我们可得如下结果, 宗旨仍是通过研究对偶空间获得原空间的信息:

定理 7.4 (稠密 \iff 话语权)

设 $M \subset E$ 是赋范线性空间的子空间, 则以下两论断等价:

1. M 在 E 中稠密;
2. 对任意 $f \in E^*$, 有 $f|_M = 0$ 蕴含 $f = 0$.

定理 7.5 (X^* 可分 $\implies X$ 可分)

设 X 是 Banach 空间, 则 X^* 可分 $\implies X$ 可分。

证明. 设 $\mathcal{F} = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X^*$ 是一个可数稠密子集. 按范数定义, 存在一系列 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ 使得

$$\|f_n(x_n)\| \geq \frac{\|f_n\|}{2}.$$

令 $E := \{x_n\}$, 我们将证明 E 是稠密的, 从而证明 X 可分。

下面定义 E 的闭张成 $\vee E := \overline{\text{span } E}$, 按定义, E 稠密 $\iff \vee E = X$ 。

反证法: 若 $\vee E$ 真包含于 X , 则根据命题 7.3, 我们得到了 $f \in X^*$, 且其满足

- $\|f\| = 1$;
- $f(\vee E) = 0$.

此时, 可以利用 \mathcal{T} 了。由假设知存在 $\{n_k\}$ 使得 $f_{n_k} \rightarrow f$, 这意味着 $\|f_{n_k} - f\| \rightarrow 0$ 。因 $\|f\| = 1$, 进一步有 $\frac{f_{n_k}}{\|f_{n_k}\|} \rightarrow f$, 但

$$\left\| \frac{f_{n_k}}{\|f_{n_k}\|} - f \right\| > \left\| \frac{f_{n_k}(x_{n_k})}{\|f_{n_k}\|} - f(x_{n_k}) \right\| = \left\| \frac{f_{n_k}(x_{n_k})}{\|f_{n_k}\|} - 0 \right\|,$$

最终, 由 x_{n_k} 的定义, 知最后的表达式 $> \frac{1}{2}$, 这和我们刚才得到的结论矛盾。

□

注解

如果 X 自反, 则 X^* 可分 $\iff X$ 可分, 因为此时 $X^{**} = X$, 然后就可以用定理 7.5。