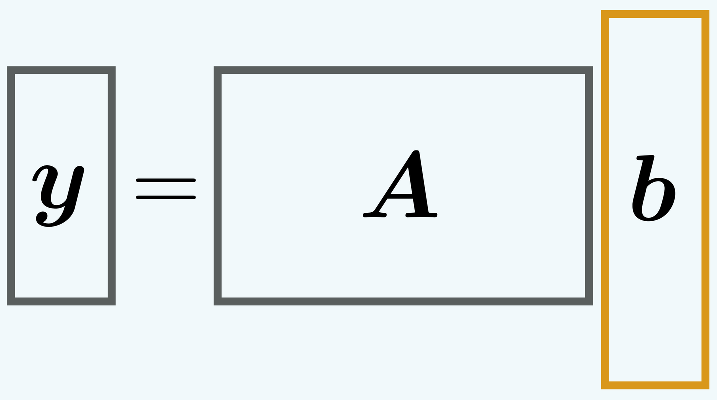
# 未知数が離散値をとる劣決定線形方程式の解き方
## A Method Solving Underdetermined Linear Equation with Discrete-Valued Unknown Variables

早川 諒，林 和則（システム科学専攻 数理システム論分野）

## 概要

式の数が変数の数よりも少ない**劣決定系の線形連立方程式**は一般には解を無数にもつため，ある未知ベクトル $\boldsymbol{b}$ をその次元よりも少ない線形観測 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}$ から推定することはできない．しかし，未知ベクトルが疎である場合，その性質を利用して推定を行えることが知られている．本研究では，**未知変数が離散値をとる**劣決定系の線形方程式を解くアルゴリズムを提案する．




## 1. 研究背景

未知ベクトル $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^N$ を
線形観測 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^M$ から再構成（推定）
連立方程式　　（$a_{ij}$：i.i.d. で平均 0，分散 $1/M$）

❖ $N=M$（変数の数＝式の数）の場合：解が一つに決定
❖ $N>M$（変数の数＞式の数）の場合：解が**無数に存在**

劣決定系 → ✓解の特別な性質を活用
✤スパース性（成分のほとんどが 0）
✤**離散性**（成分が離散値をとる）　など

**未知ベクトルが離散性をもつ問題の例**

- ✦ M2M (Machine-to-Machine) 通信におけるユーザ検出
- ✦ MIMO (Multiple-Input Multiple-Output) 信号検出
- ✦ FTN (Faster-than-Nyquist) 伝送

## 2. 提案アルゴリズム

❖ 未知ベクトル：$\boldsymbol{b}\in\{0,\pm1\}^N$
❖ 線形観測　：$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^M$

$\Pr(b_j=0)=p_0$,
$\Pr(b_j=1)=\Pr(b_j=-1)=(1-p_0)/2$

**SOAV (Sum-of-Absolute-Value) 最適化 [1]**

$\boldsymbol{b}$ は 0 を約 $p_0N$ 個もつ

$$\hat{\boldsymbol{b}}=\mathop{\arg\min}_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{R}^N}\ q_0\|\boldsymbol{s}\|_1+q_1\left(\|\boldsymbol{s}-\boldsymbol{1}\|_1+\|\boldsymbol{s}+\boldsymbol{1}\|_1\right)$$
$$\text{subject to}\quad \boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{s}$$

$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{1}$ は 0 を約 $(1-p_0)N/2$ 個もつ

AMP (Approximate Message Passing) アルゴリズム [2]のアイデアを応用

**提案アルゴリズム**
**(DAMP: Discreteness-aware AMP)**

① 初期化：$\boldsymbol{x}^{-1}=\boldsymbol{x}^0=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{z}^{-1}=\boldsymbol{0}$

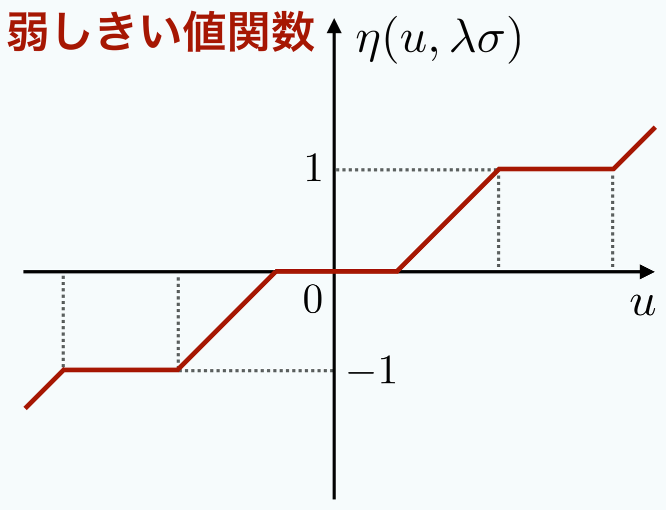
② $t=0,1,\ldots$ に対して以下を計算：

$t+1$ 回目の推定値　　$\lambda\ (>0)$：パラメータ

$$\boldsymbol{x}^{t+1}=\eta(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}^t+\boldsymbol{x}^t,\lambda\sigma_t),$$
$$\boldsymbol{z}^t=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^t+\frac{1}{\Delta}\boldsymbol{z}^{t-1}\langle\eta'(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}^{t-1}+\boldsymbol{x}^{t-1},\lambda\sigma_{t-1})\rangle$$

$\Delta=M/N$：観測率　$\langle\cdot\rangle$：平均　$\sigma_t^2=\frac{1}{N}\|\boldsymbol{x}^t-\boldsymbol{b}\|_2^2$：誤差

**弱しきい値関数** $\eta(u,\lambda\sigma)$




※ $\boldsymbol{b}$ は未知なので，実際は $\sigma_t^2$ の近似値を用いる

## 3. 状態発展法による理論解析

**状態発展法 [2]**　大システム極限 $(N,M\to\infty, M/N=\Delta)$ での誤差 $\{\sigma_t^2\}_{t=0,1,\ldots}$ の変化を計算

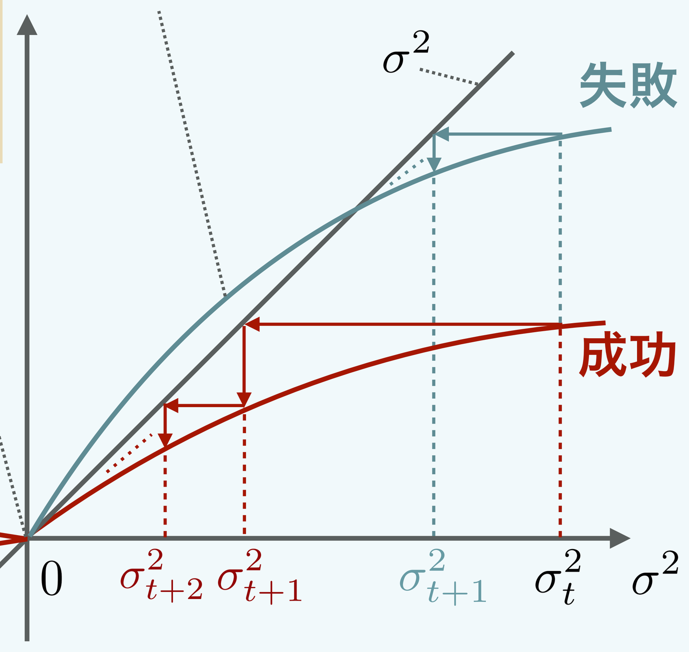
$$\sigma_{t+1}^2=\Psi(\sigma_t^2)$$
$$\Psi(\sigma^2)=\mathrm{E}\left[\left\{\eta\left(X+\frac{\sigma}{\sqrt{\Delta}}Z,\lambda\sigma\right)-X\right\}^2\right]$$

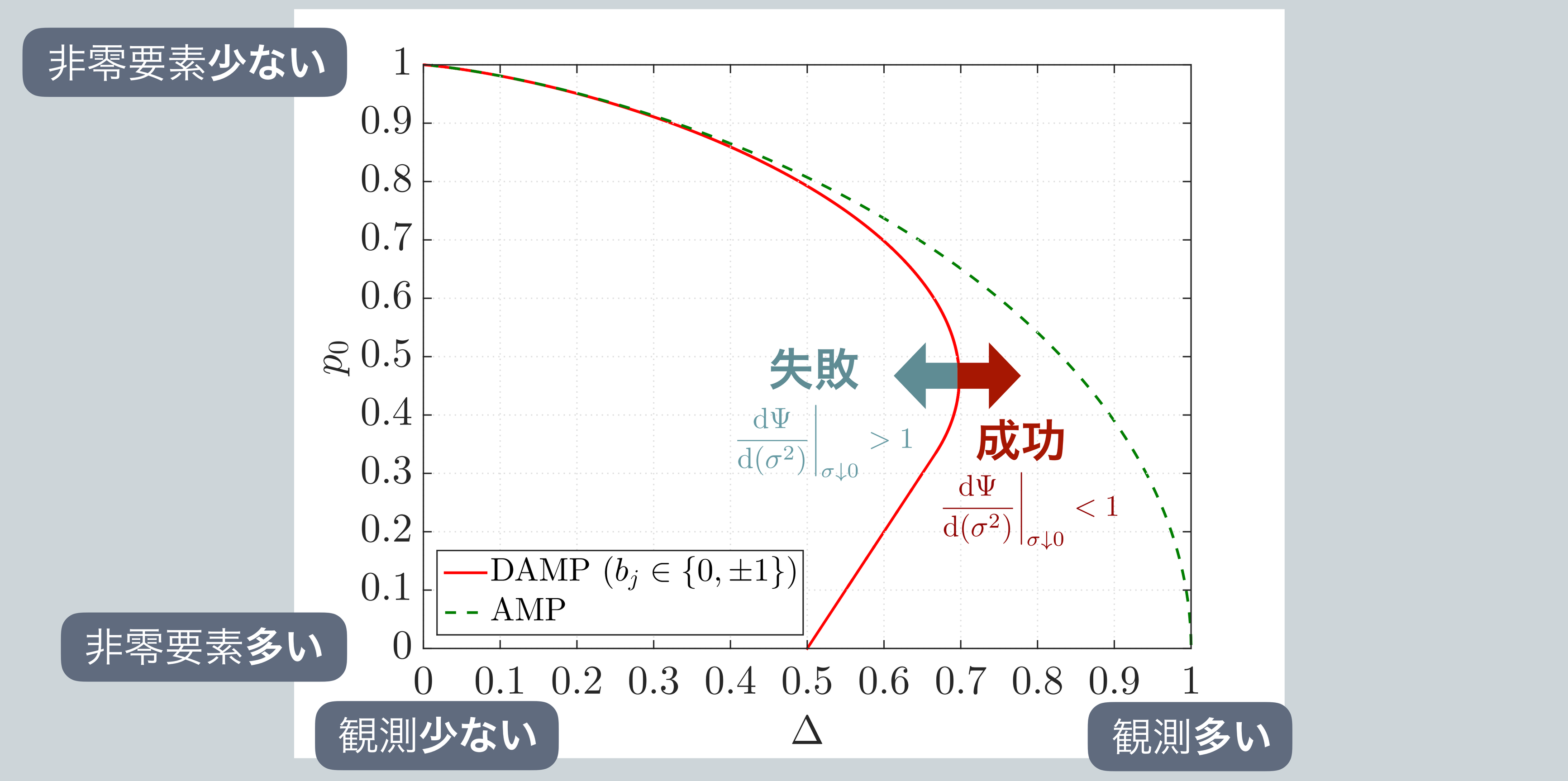
$\Pr(X=0)=p_0$,
$\Pr(X=1)=\Pr(X=-1)=(1-p_0)/2$,
$Z\sim\mathcal{N}(0,1)$

$\left.\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}(\sigma^2)}\right|_{\sigma\downarrow0}<1$ なら誤差が 0 に収束

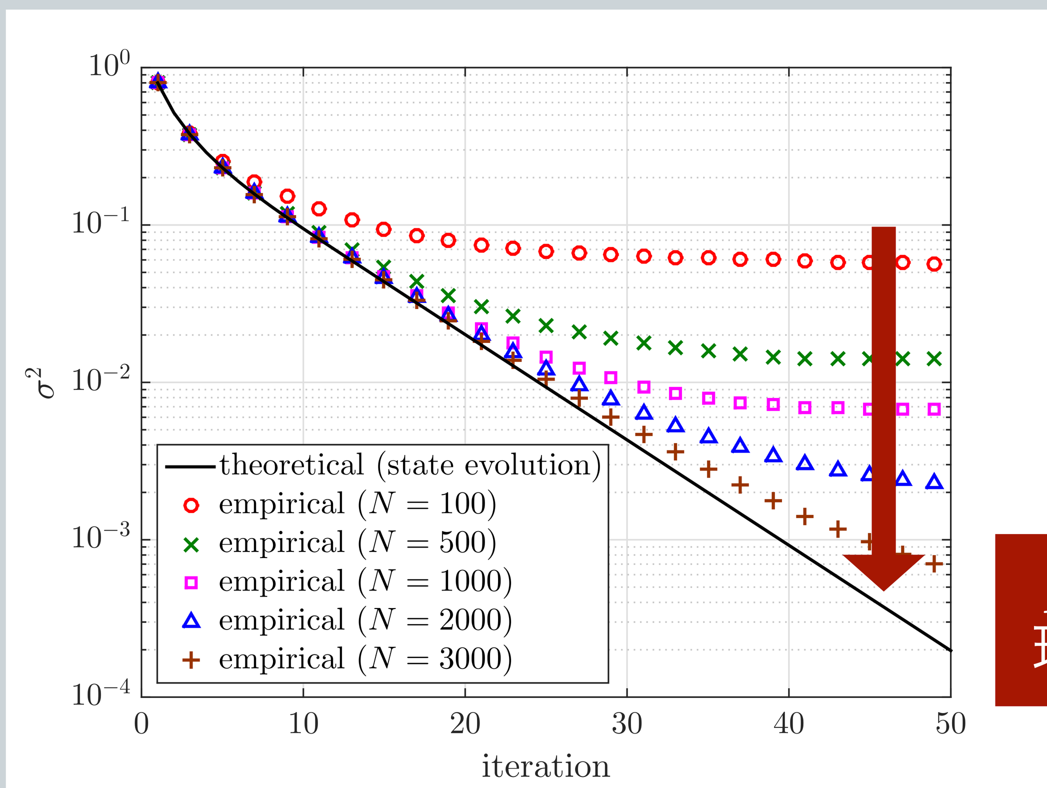
$\Psi(\sigma^2)$：上に凸 (concave)

$\Psi(0)=0$



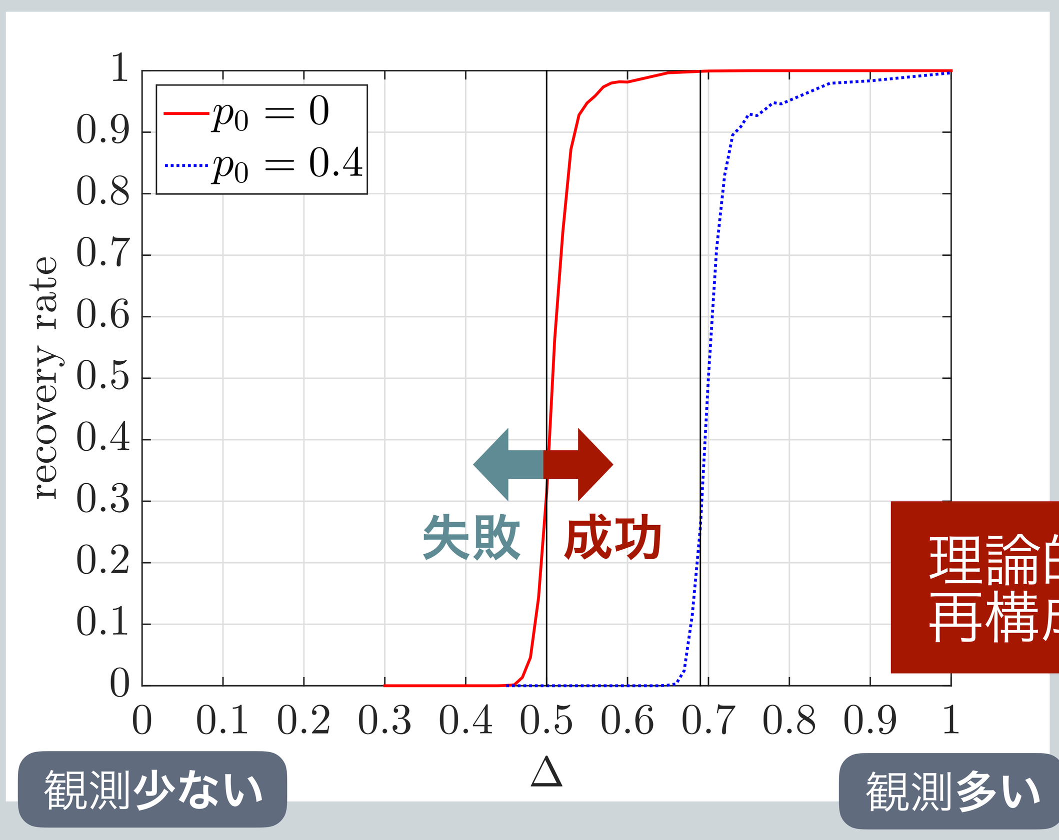




## 4. シミュレーション結果




$p_0=0.2$,
$\Delta=0.7$

$N$ が大きくなるにつれて理論的な特性に近づく




$N=1000$

理論的な境界を境にして再構成の成功率が急激に上昇


[1] M. Nagahara, "Discrete signal reconstruction by sum of absolute values," IEEE Signal Process. Lett., vol. 22, no. 10, pp.1575-1579, Oct. 2015.
[2] D. L. Donoho, A. Maleki, and A. Montanari, "Message-passing algorithms for compressed sensing," in Proc. Nat. Acad. Sci., vol. 106, no. 45, pp. 18914-18919, Nov. 2009.