第33回 信号処理シンポジウム
2018年11月6日～8日（東京電機大学 東京千住キャンパス）

スパース正則化を用いた凸最適化に基づく複素離散値ベクトル再構成

Complex Discrete-Valued Vector Reconstruction Based on Convex Optimization with Sparse Regularizers

早川 諒 † 林 和則 ‡
† 京都大学大学院 情報学研究科
‡ 大阪市立大学大学院 工学研究科

Ryo HAYAKAWA† Kazunori HAYASHI‡
†Graduate School of Informatics, Kyoto University
‡Graduate School of Engineering, Osaka City University

アブストラクト 本稿では，複素離散値ベクトルをその線形観測から再構成するための SCSR（Sum of Complex Sparse Regularizers）最適化問題を提案する．SCSR 最適化では，スパース正則化項の和を複素離散値ベクトルに対する正則化項として用いる．また，SCSR 最適化を重み付き SCSR 最適化に拡張し，重み付き SCSR 最適化とその目的関数のパラメータ更新を繰り返し行う手法も提案する．計算機シミュレーションにより提案手法の有効性を示す．

1 はじめに

MIMO（Multiple-Input Multiple-Output）信号検出 [1] を始めとして，通信システムにおいては複素離散値ベクトルをその線形観測から再構成する問題がよく現れる．とくに観測の数が不十分な劣決定の問題においては，LMMSE（Linear Minimum Mean-Square-Error）法などの線形の手法の特性は大きく劣化する．また，最尤推定に基づく手法は良い特性を達成可能であるが，問題のサイズに対して計算量が指数的に増大してしまう．そのため，大規模な離散値ベクトルの再構成においては低演算量な手法が必要となる．

低演算量なアプローチとして，確率伝播法や期待値伝播法のアイデアを応用した手法が提案されている [2–4]．これらのアルゴリズムの導出や理論解析においては大システム極限が仮定されており，有限サイズの問題に対しては特性が劣化する場合がある．一方で，実数領域における凸最適化に基づく手法 [5–7] も提案されているが，これらの手法を複素離散値ベクトルの再構成に利用する場合，実部と虚部の依存関係を陽に考慮することができない．

本稿では，実数領域における凸最適化に基づく手法の一つである SOAV（Sum of Absolute Values）最適化 [7] のアイデアを応用した複素離散値ベクトル再構成手法を提案する．提案最適化問題の SCSR（Sum of Complex Sparse Regularizers）最適化は複素数領域における最適化問題であり，スパース正則化項の和を複素離散値ベクトルに対する正則化項として用いる．さらに，SCSR 最適化を重み付き SCSR 最適化に拡張し，重み付き SCSR 最適化とその目的関数のパラメータ更新を繰り返し行う IW-SCSR（Iterative Weighted SCSR）を提案する．計算機シミュレーションにより，提案手法の SER（Symbol Error Rate）特性を評価する．

2 複素離散値ベクトル再構成

複素離散値ベクトル $\boldsymbol{x} = [x_1 \cdots x_N]^\mathsf{T} \in \mathcal{C}^N \subset \mathbb{C}^N$ をその線形観測 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^M$ から再構成する問題を考える．ここで，$\mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_L\}$ は未知ベクトル $\boldsymbol{x}$ の成分がとりうる値の集合である．未知ベクトル $\boldsymbol{x}$ の分布は $\Pr(x_n = c_\ell) = p_\ell$（$\sum_{\ell=1}^{L} p_\ell = 1$）で与えられるとする（$\ell = 1, \ldots, L$）．$\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{M \times N}$ は観測行列であり，$\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^M$ は平均 $\boldsymbol{0}$ で共分散行列 $\sigma_\mathrm{v}^2 \boldsymbol{I}_M$ の加法性雑音ベクトルである．

3 提案手法

提案 SCSR 最適化問題は

$$\underset{\boldsymbol{s} \in \mathbb{C}^N}{\text{minimize}} \sum_{\ell=1}^{L} q_\ell g_\ell (\boldsymbol{s} - c_\ell \boldsymbol{1}) + \lambda \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{s}\|_2^2 \quad (1)$$

で与えられる．ここで λ と $q_\ell \geq 0$（$\ell = 1, \ldots, L$）はパラメータである．関数 $g_\ell(\cdot)$ はスパース正則化の関数であり，本稿では $h_1(\boldsymbol{u}) = \|\boldsymbol{u}\|_1 = \sum_{n=1}^{N} \sqrt{\mathrm{Re}\{u_n\}^2 + \mathrm{Im}\{u_n\}^2}$ および $h_2(\boldsymbol{u}) = \|\mathrm{Re}\{\boldsymbol{u}\}\|_1 + \|\mathrm{Im}\{\boldsymbol{u}\}\|_1 = \sum_{n=1}^{N} (|\mathrm{Re}\{u_n\}| + |\mathrm{Im}\{u_n\}|)$ の 2 種類の正則化を考

える．$h_1(\cdot)$ は複素数の絶対値に基づく ℓ_1 正則化であり，$h_2(\cdot)$ は実部と虚部それぞれに ℓ_1 正則化を適用する．この正則化は $\boldsymbol{x} - c_\ell \mathbf{1}$ の成分のいくつかが 0 になることに基づいており，$\sum_{\ell=1}^{L} q_\ell g_\ell \left(\boldsymbol{s} - c_\ell \mathbf{1}\right)$ は複素離散値ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}^N$ に対する正則化と考えることができる．

関数 $g_\ell(\cdot)$ が $h_1(\cdot)$ や $h_2(\cdot)$ のように成分ごとの関数であると仮定し，SCSR 最適化 (1) を重み付き SCSR 最適化

$$\underset{\boldsymbol{s} \in \mathbb{C}^N}{\text{minimize}} \sum_{\ell=1}^{L} \sum_{n=1}^{N} q_{n,\ell} g_\ell \left(s_n - c_\ell\right) + \lambda \left\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{s}\right\|_2^2 \quad (2)$$

に拡張する．これにより，各シンボル s_n に異なる重み $q_{n,\ell}$ を用いることができるようになる．ADMM（Alternating Direction Method of Multipliers）[8,9] を用いて，重み付き SCSR 最適化問題の解に収束する点列が得られる．

提案手法の IW-SCSR では，重み付き SCSR 最適化 (2) とパラメータ $q_{n,\ell}$ の更新を繰り返し行う．このような繰り返しを用いるアプローチでは，一つ前の繰り返しで得られた推定値 $\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{pre}} = [\hat{x}_1^{\mathrm{pre}} \ \cdots \ \hat{x}_N^{\mathrm{pre}}]^{\mathsf{T}}$ を用いて $q_{n,\ell}$ を更新することができる．本稿では $q_{n,\ell} = d_{n,\ell}^{-1} \Big/ \sum_{\ell'=1}^{L} d_{n,\ell'}^{-1}$ を用いて更新を行う．ただし，$d_{n,\ell} = |\hat{x}_n^{\mathrm{pre}} - c_\ell|$ である．$d_{n,\ell}$ が小さい場合は対応する $q_{n,\ell}$ が大きくなるため，x_n の推定値が c_ℓ に近い値をとりやすくなる．

4 シミュレーション結果

計算機シミュレーションにより提案手法の特性を評価する．図 1 は，送信アンテナ数 $N = 50$，受信アンテナ数 $M = 30$ の相関のある MIMO 通信における SER 特性を示す．[10] と同様に，送受信側双方で半波長間隔の等間隔リニアアレーを用いるとする．また，$c_1 = 0, c_2 = 1 + j, c_3 = -1 + j, c_4 = -1 - j, c_5 = 1 - j$ とする．未知ベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\|\boldsymbol{x}\|_0 = 10$ を満たし，その非零成分は $1 + j, -1 + j, -1 - j, 1 - j$ のいずれかの値をランダムにとるとする．IW-SCSR のパラメータは $q_{n,1} = 0.8$ および $q_{n,2} = \cdots = q_{n,5} = 0.05$ と初期化し，スパース正則化の関数 $g_\ell(\cdot)$ は $g_1(\cdot) = h_1(\cdot)$ および $g_\ell(\cdot) = h_2(\cdot)$（$\ell = 2, \ldots, 5$）とする．パラメータ λ は $\mathrm{E}\left[\sum_{\ell=1}^{L} \sum_{n=1}^{N} q_{n,\ell} g_\ell \left(x_n - c_\ell\right)\right] \Big/ \mathrm{E}\left[\lambda \left\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\right\|_2^2\right] = 10$ となるように定める．‘LMMSE’ は線形の MMSE 法，‘IO-LAMA’ は近似メッセージ伝播法に基づく手法 [2]，‘EP-based algorithm’ は期待値伝播法に基づく手法 [4]，‘ℓ_1’ はスパース性のみを用いる ℓ_1 最適化を表す．‘IW-SCSR’ が提案手法であり，T はパラメータの更新回数を表す．パラメータの更新と重み付き SCSR 最適化を繰り返すことで大きく特性が改善され，$T = 5$ の場合には SNR（Signal-to-Noise Ratio）が高い領域で従来の手法よりも良い特性を達成可能であることがわかる．

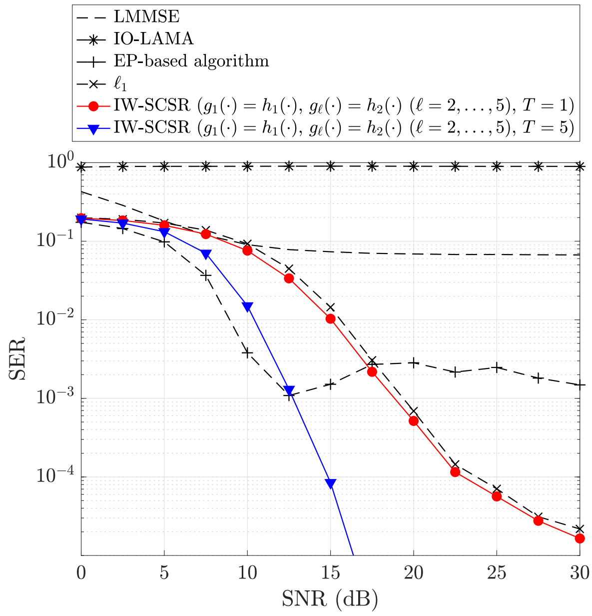

図 1: 相関のある MIMO 通信における SER 特性

謝辞 本研究の一部は，科学研究費補助金（研究課題番号 18K04148, 18H03765, 17J07055）及び，総務省の電波資源拡大のための研究開発における委託研究課題「IoT 機器増大に対応した有無線最適制御型電波有効利用基盤技術の研究開発」によるものです．

参考文献

[1] S. Yang and L. Hanzo, “Fifty years of MIMO detection: The road to large-scale MIMOs,” *IEEE Commun. Surveys Tuts.*, vol. 17, no. 4, pp. 1941–1988, Fourthquarter 2015.

[2] C. Jeon, R. Ghods, A. Maleki, and C. Studer, “Optimality of large MIMO detection via approximate message passing,” in *Proc. IEEE ISIT*, Jun. 2015.

[3] J. Céspedes, P. M. Olmos, M. Sánchez-Fernández, and F. Perez-Cruz, “Expectation propagation detection for high-order high-dimensional MIMO systems,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 62, no. 8, pp. 2840–2849, Aug. 2014.

[4] K. Takeuchi, “Rigorous dynamics of expectation-propagation-based signal recovery from unitarily invariant measurements,” in *Proc. IEEE ISIT*, Jun. 2017.

[5] P. H. Tan, L. K. Rasmussen, and T. J. Lim, “Constrained maximum-likelihood detection in CDMA,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 49, no. 1, pp. 142–153, Jan. 2001.

[6] A. Aïssa-El-Bey, D. Pastor, S. M. A. Sbaï, and Y. Fadlallah, “Sparsity-based recovery of finite alphabet solutions to underdetermined linear systems,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 61, no. 4, pp. 2008–2018, Apr. 2015.

[7] M. Nagahara, “Discrete signal reconstruction by sum of absolute values,” *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 22, no. 10, pp. 1575–1579, Oct. 2015.

[8] D. Gabay and B. Mercier, “A dual algorithm for the solution of nonlinear variational problems via finite element approximation,” *Comput. Math. Appl.*, vol. 2, no. 1, pp. 17–40, 1976.

[9] L. Li, X. Wang, and G. Wang, “Alternating direction method of multipliers for separable convex optimization of real functions in complex variables,” *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2015, 2015.

[10] R. Hayakawa and K. Hayashi, “Convex optimization-based signal detection for massive overloaded MIMO systems,” *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 16, no. 11, pp. 7080–7091, Nov. 2017.