金融工程原理

Pricing and Hedging with Binomial Tree or Monte Carlo

授课老师：秦聪

姓名：姚宇阳

班级：金融数学

学号：2107404006

2024 年 12 月 6 日

目录

Project: Pricing and Hedging

- Consider a European put option written on the 50ETF. The followings are detailed information:
  - Strike price : $K = S_0$ (pls quote the real data);
  - Maturity: $T = 1/12$;
  - Risk-free rate: $r = 2\%$;

- Answer the following questions by binomial tree or Monte Carlo simulation:
  (1) Estimate volatility of the 50ETF by standard method (pls use the past two-year data from the web);
  (2) Calculate this at-the-money put option (set $dt = 1$ day for both binomial tree and Monte Carlo)
  (3) Use Delta-hedging method to manage the risk, and in particular do the following three scenarios analysis:
    (i) No early exercise and $S_T > K$ (i.e., out of money);
    (ii) No early exercise and $S_T < K$ (i.e., in the money);

问题翻译

▶ 考虑一个以 50ETF 为标的的欧式看跌期权，它有如下详细信息：

- 行权价格：$K = S_0$，即为平价期权（要求引用真实数据）
- 到期日：$T = \frac{1}{12}$，即到期日为 3 个月
- 无风险利率：$r = 2\%$

利用二叉树或蒙特卡洛法，回答以下问题：

(1) 利用标准方法估计 50ETF 的波动率（要求使用互联网上过去两年的真实数据）；

(2) 计算这一平价看跌期权的价格（对二叉树或蒙塔卡罗法均假设 $dt = 1$ 天）；

(3) 利用 Delta 对冲的方法来管理风险并主要做如下情景分析：(i) 不提前行权且 $S_T > K$(i.e. 虚值期权) (ii) 不提前行权且 $S_T < K$(i.e. 实值期权)

1 波动率估计

1.1 标的资产 50ETF 简介

上证 50ETF 的投资目标是紧密跟踪上证 50 指数,最小化跟踪偏离度和跟踪误差,代码 510050。基金采取被动式投资策略，具体使用的跟踪指数的投资方法主要是完全复制法，追求实现与上证 50 指数类似的风险与收益特征。

上证 50 指数由上海证券交易所编制，指数简称为上证 50，代码 000016，基日为 2003 年 12 月 31 日，基点为 1000 点。2004 年 1 月 2 日正式发布并于上海证券交易所上市交易。

1.2 参数设定

参数	含义
m	样本容量（在此题中为 485）
p	看跌期权的价格
r	无风险利率
σ	历史波动率（年化）
σ_n	第 n-1 天到第 n 天的日波动率
S_i	标的资产第 i 天的收盘价格
Δt	时间间隔
T	到期日
u_i	连续复利下第 i 天的日收益率的值
u, d	股票价格上涨与下跌的幅度

1.3 模型搭建

在 https://cn.investing.com 上搜索并下载 50ETF2021 年 6 月 6 日至 2023 年 6 月 6 日每日开盘与收盘的价格，假定当日的收盘价为 50ETF 当天的价格。根据题目要求，利用标准方法计算 σ_n 值，主要步骤如下：

STEP ONE 根据股票价格历史数据计算出连续复利下的第 $n-i$ 天的收益率 u_{n-i}

STEP TWO 根据数理统计原理利用用方差的无偏估计计算 σ_n，即

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(u_{n-i}-\bar{u})^2 \tag{1}$$

其中 $\bar{u} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} u_{n-i}$

STEP THREE 利用 $\sigma_n = \sigma\sqrt{\Delta t}$ 计算出历史波动率 σ 的值

> 注 1
>
> **课件中给出了 σ_n 的简便计算公式，详细如下：**
>
> CHANGE 1 用 $u_i = \frac{(S_i - S_{i-1})}{S_{i-1}}$ 替代 u_i，即不考虑连续复利而是考虑离散情况;
>
> CHANGE 2 假设 $\bar{u} = 0$;
>
> CHANGE 3 计算 σ_n 时使用一般样本方差而不是修正样本方差，即用 m 替换 $m-1$
>
> 由于不明确使用场景，故本论文依然使用一般的方法进行求解

> 注 2
>
> **对于初学者，不太能直观理解连续复利下收益率的表达形式 u_i，故作如下推导：**
>
> 假设连续复利下的收益率为 u_i，第 i 天与第 $i-1$ 天的标的资产价格分别为 S_i, S_{i-1}，则 u_i 满足：
>
> $$e^{u_i} = 1 + \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}}$$
>
> 进而得到等式 $u_i = ln(\frac{S_i}{S_{i-1}})$

1.4 计算结果

```
clc;clear
opts = spreadsheetImportOptions("NumVariables", 1);

% 指定工作表和范围
opts.Sheet = "510050历史数据-2";
opts.DataRange = "B1:B487";

% 指定列名称和类型
```

```
opts.VariableNames = "s";
opts.VariableTypes = "double";

% 导入数据
tbl = readtable("/Users/yaoyuyang/Desktop/ ...
 校园学习/大二课程/金融工程/Homework 14/ ....
510050历史数据50etf.xlsx", opts, "UseExcel", false);

s = tbl.s;
clear opts tbl;

S = s(2:end);
m = 485;%样本天数
u = zeros(1,485);%收益率
for i = 1:485
u(i) = log(S(i)/S(i+1));%注意这里因为输入数据的顺序问题...
% u1表示的是最后一天的收益率了
end
ubar = sum(u)/m;
diffs = zeros(1,485);
for i = 1:485
diffs(i) = (u(i)-ubar).^2;
end
sigmans = sum(diffs)/(m-1);
sigman = sqrt(sigmans);
sigma = sigman*sqrt(252)
```

计算得日波动率为 1.18%，历史波动率为 18.8%。

2 期权价格计算

2.1 二叉树方法

2.1.1 二叉树方法及原理简述

STEP ONE 根据已知数据计算出波动率;

STEP TWO 根据波动率计算出 u、d 值，进一步计算出风险中性世界中的 p^* 值;

STEP THREE 构造二叉树;

STEP FORE 反推看跌期权在 0 时刻的价格 p。

对于 STEP ONE 涉及到波动率的计算，我们可以使用隐含波动率的方法估计它的值，也可以用历史波动率的方法计算，详细步骤在第一步中已经说明了;

对于 STEP TWO，涉及到部分参数的计算，p 的计算根据 Delta 对冲或复制的方法可以自然得到公式 $\mathrm{p} = \frac{e^{r\Delta t}-d}{u-d}$，问题的核心在于如何计算 u 和 d 的值，主要思想在于：首先二叉树是简化了股票价格波动的模型，本质上它也是在描述股票价格的波动；现实生活当中我们利用几何布朗运动模拟股票价格的波动，即 $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$，其中 W_t 为标准布朗运动。计算 u 和 d 的核心在于从二叉树反映出来的股票收益率的期望与方差应与从几何布朗运动反映出来的保持一致，进而得到下述两个式子:

$$e^{r\Delta t} = p^* \times u + (1-p^*) \times d \tag{2}$$

$$\sigma^2 \Delta t = p^*(u-1)^2 + (1-p^*)(d-1)^2 - (p^*(u-1) + (1-p^*)(d-1))^2 \tag{3}$$

等式 2和等式 3左边表示几何布朗运动计算得到的回报率，等式右边表示二叉树得到的回报率的期望与方差，加上考克斯、罗斯等选取的第三个等式 $ud = 1$，得到了 $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$

对于 STEP THREE 与 STEP FORE 的核心在于风险中性定价原理。

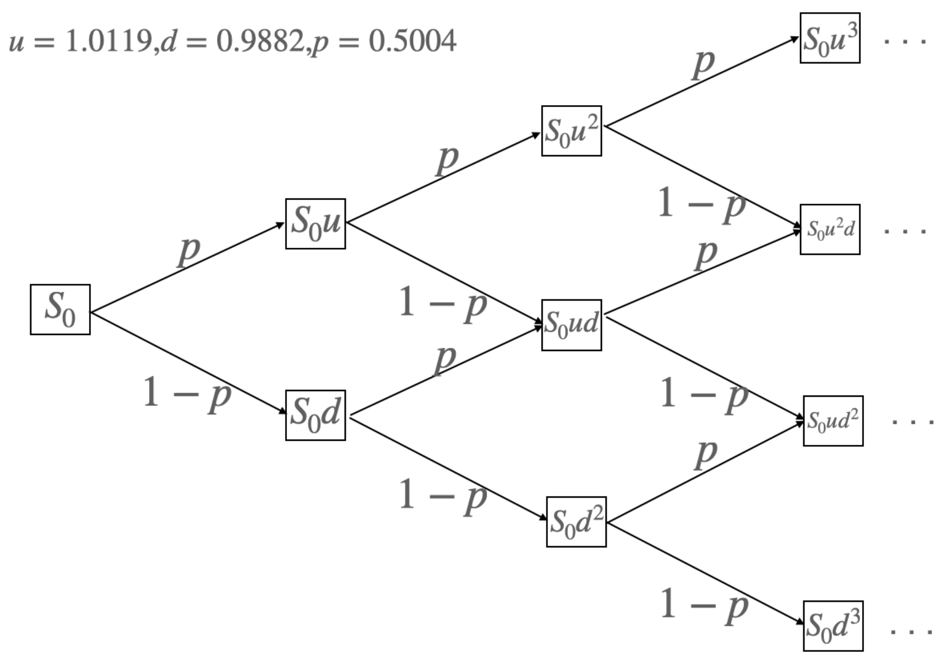
2.1.2 构造二叉树

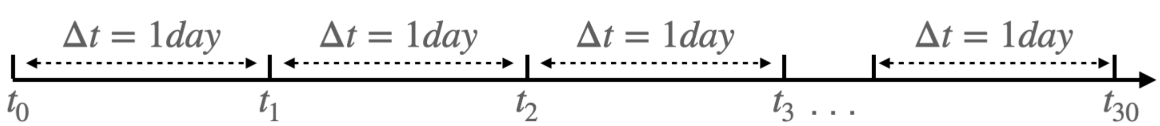
数据选取的时间为 2023 年 6 月 6 日，当天的 50ETF 的收盘价格为 2.52RMB，故而令 $S_0 = K = 2.52$。根据第一部分计算得到的波动率值，我们可以很容易计算出 $u = 1.0119, d = 0.9882, \mathrm{p} =$

0.5004，进而构造二叉树，有下图（简略图）所示二叉树. 利用二叉树计算出的看跌期权价格满足如下公式：

$$\mathrm{p} = e^{-rT}\sum_{j=0}^{n} C_n^j p^{*j}(1-p^*)^{n-j} f_T$$

$$i.e.\quad \mathrm{p} = e^{-rT}\sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!\times(n-j)!} p^{*j}(1-p^*)^{n-j}(K - Su^j d^{n-j})^+ \tag{4}$$





2.2 计算结果

计算得到看跌期权价格为 0.0617RMB，运行代码如下：

```
%参数输入
T=1/12;dt = 1/252;r=0.02;S0 = 2.52;K=2.52
U = exp(sigma*sqrt(dt))
D = exp(-sigma*sqrt(dt))
```

```
p = (exp(r*dt)-D)/(U-D)
step = 30;
ft = zeros(1,step+1);
et = zeros(1,step+1);
for i = 0:step
flag = K-S0*U^(i)*D^(step-i);
if flag>0
ft(i+1) = flag;
elseif flag<=0
ft(i+1) = 0;
end
et(i+1) = exp(-r*T)*factorial(step)*(p^i)*((1-p)^(step-i))*ft(i+1) ...
/(factorial(i)*factorial(step-i));
end
price = sum(et)
```

2.3 蒙特卡洛方法

2.3.1 蒙塔卡罗方法原理简述

核心思想在于风险中性定价方法，该方法叙述如下：

$$f_0 = E^*[e^{-rT} f_T] \tag{5}$$

其中，f_T 为关于标的资产价格 S_T 的函数，对于看跌期权而言，即为 $(K - S_T)^+$。利用期望的计算公式，可以将风险中性定价公式转化为：

$$f_0 = e^{-rT} \times \int_0^{\infty} (K - S_T)^+ G(S_T) dS_T = e^{-rT} \times \int_0^{K} (K - S_T) G(S_T) dS_T \tag{6}$$

其中 $G(S_T)$ 为股票价格的概率密度函数。

对于蒙特卡洛方法而言，其理论基础为大数定理，也就是利用频率近似概率，利用经验分布函数代替分布函数。因此问题转化为利用计算机软件模拟股票价格的波动进而得到 T 时刻的股价，通

过足够大量的模拟计算出期望值。基于此，风险中性定价公式可转化为：

$$f_0 = e^{-rT} \times \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(K - S_T)^+ \tag{7}$$

2.3.2 代码及结果分析

假设股票价格服从几何布朗运动，在风险中性世界中，S_T 满足如下公式：

$$dS_T = rS_T dt + \sigma S_T dW_t^* \tag{8}$$

其中 W_t^* 为标准布朗运动。考虑到股票价格恒正的特点，我们将公式进行简单转化得到如下公式：

$$dlnS_T = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW_T^* \tag{9}$$

将公式离散化并进行简单处理可得股票价格的如下递推公式：

$$S_{T+\Delta t} = S_T \times e^{(r-1/2\sigma^2)\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}} \tag{10}$$

下面我们将通过代码，将公式 10用代码的形式表示出来，代码如下：

```
%蒙特卡洛法
clc;clear;
dt = 1/252;S0 = 2.52;K = S0;r = 0.02;sigma = 0.188;
step = 30;
n = 1000000;
S = zeros(1,step);
ft = zeros(1,n);
et = zeros(1,n);
for i = 1:n
epsilon = randn;
S(1) = S0*exp((r-0.5*sigma^2)*dt+sigma*epsilon*sqrt(dt));
for j = 2:step
epsilon = randn;
S(j) = S(j-1)*exp((r-0.5*sigma^2)*dt+sigma*epsilon*sqrt(dt));
end
```

```
flag = K-S(30);
if flag>0
ft(i) = flag;
elseif flag<0
ft(i) = 0;
end
et(i) = exp(-r*t)*(1/n)*ft(i);
end
sum(et)
```

利用公式 7计算，可以得到看跌期权价格 p 约为 0.0623

3 基于 Delta 对冲的风险管理

本质上是要模拟股票价格的一条路径，呈现动态 Delta 对冲，假设对冲交易是每天进行一次。

本部分使用二叉树计算 Delta 值，用差分代替微分，使用向前或向后公式，$\Delta_+ = \frac{f(S+\Delta S)-f(S)}{\Delta S}$，$\Delta_- = \frac{f(S)-f(S-\Delta S)}{\Delta S}$。选取了较为简单的两种路径，即每一步价格均上升或每一步价格均下降，通过下述代码（仅展示实值情况），得到了交割时实值和虚值的两种情景分析。

假设进入了一份 50ETF 看跌期权的空头，由于现实中一张 50ETF 期权对应 10000 份的 50ETF 基金份额，而最初的单位期权 Delta 为 0.4945，因而整个交易组合的 Delta 为 4945，卖出期权获得的利润为 623 元。

可以看出，当价格一直上涨时，期权成为了一只深度虚值的期权，故而 Delta 值趋于 0；当价格一直下跌时，期权成为了一只深度实值的期权，故而 Delta 值趋于-1。

```
clc;clear;
%%实值期权情况
opts = spreadsheetImportOptions("NumVariables", 2);

% 指定工作表和范围
opts.Sheet = "Sheet1";
```

```
opts.DataRange = "B3:C32";

% 指定列名称和类型
opts.VariableNames = ["VarName2", "VarName3"];
opts.VariableTypes = ["double", "double"];

% 导入数据
tbl = readtable("/Users/yaoyuyang/Desktop/ 校园学习/ ...
大二课程/金融工程/Homework 14/Delta对冲数据处理.xlsx", ...
opts, "UseExcel", false);
Su = tbl.VarName2;
Sd = tbl.VarName3;
clear opts tbl

dt = 1/252;r=0.02;K = 2.52;sigma = 0.1880;
U = 1.0119;D = 0.9882;p = 0.5004;

f = zeros(1,29);
d = zeros(1,29);
u = zeros(1,29);

for i = 29:-1:1

T = i/365;
ft = zeros(1,i+1);
et = zeros(1,i+1);

for j = 0:i
flag = K-Su(i)*U^(j)*D^(i-j);
if flag>0
ft(j+1) = flag;
elseif flag<=0
```

```
ft(j+1) = 0;
end
et(j+1) = exp(-r*T)*factorial(i)*(p^j)*((1-p)^(i-j))*ft(j+1)/ ...
(factorial(j)*factorial(i-j));
end
u(i) = sum(et);

for j = 0:i
flag = K-Sd(i)*U^(j)*D^(i-j);
if flag>0
ft(j+1) = flag;
elseif flag<=0
ft(j+1) = 0;
end
et(j+1) = exp(-r*T)*factorial(i)*(p^j)*((1-p)^(i-j))*ft(j+1)/ ...
(factorial(j)*factorial(i-j));
end
d(i) = sum(et);

f(i) = u(i)-d(i);
end
temp = Su-Sd;
dS = temp(1:29)';
delta = f./dS;
```

3.1 实值情况

时间	股票价格	Delta	股票买卖	股票费用	累计费用
0	2.52				
dt	2.49	-0.4945	-4945	-12315	-12315
2dt	2.46	-0.7445	-2500	-6152	-18467
3dt	2.43	-0.8709	-1264	-3073	-21540
4dt	2.40	-0.9347	-639	-1535	-23075
5dt	2.37	-0.9670	-323	-767	-23841
6dt	2.35	-0.9833	-163	-383	-24224
7dt	2.32	-0.9916	-83	-191	-24416
8dt	2.29	-0.9958	-42	-96	-24511
9dt	2.26	-0.9979	-21	-48	-24559
10dt	2.24	-0.9990	-11	-24	-24583
11dt	2.21	-0.9995	-5	-12	-24595
12dt	2.19	-0.9998	-3	-6	-24601
13dt	2.16	-0.9999	-1	-3	-24604
14dt	2.13	-1.0000	-1	-2	-24606
15dt	2.11	-1.0000	0	-1	-24607
16dt	2.08	-1.0001	0	0	-24607
17dt	2.06	-1.0001	0	0	-24607
18dt	2.04	-1.0001	0	0	-24608
19dt	2.01	-1.0001	0	0	-24608
20dt	1.99	-1.0001	0	0	-24608
21dt	1.96	-1.0001	0	0	-24608
22dt	1.94	-1.0001	0	0	-24608
23dt	1.92	-1.0001	0	0	-24608
24dt	1.90	-1.0001	0	0	-24608
25dt	1.87	-1.0001	0	0	-24608
26dt	1.85	-1.0001	0	0	-24608
27dt	1.83	-1.0001	0	0	-24609
28dt	1.81	-1.0001	0	0	-24609
29dt	1.79	-1.0001	0	0	-24609
30dt	1.77	-1.0000	0	0	-24609

3.2 虚值情况

时间	股票价格	Delta	股票买卖	股票费用	累计费用
0	2.52				
dt	2.55	-0.4945	-4945	-12610	-12610
2dt	2.58	-0.2454	2491	6428	-6182
3dt	2.61	-0.1222	1232	3217	-2965
4dt	2.64	-0.0610	611	1616	-1349
5dt	2.67	-0.0306	305	814	-535
6dt	2.71	-0.0154	152	412	-124
7dt	2.74	-0.0078	76	209	85
8dt	2.77	-0.0039	38	106	191
9dt	2.80	-0.0020	19	54	245
10dt	2.84	-0.0010	10	28	273
11dt	2.87	-0.0005	5	14	287
12dt	2.90	-0.0003	3	7	295
13dt	2.94	-0.0001	1	4	298
14dt	2.97	-0.0001	1	2	300
15dt	3.01	0.0000	0	1	301
16dt	3.05	0.0000	0	1	302
17dt	3.08	0.0000	0	0	302
18dt	3.12	0.0000	0	0	302
19dt	3.16	0.0000	0	0	302
20dt	3.19	0.0000	0	0	302
21dt	3.23	0.0000	0	0	302
22dt	3.27	0.0000	0	0	302
23dt	3.31	0.0000	0	0	302
24dt	3.35	0.0000	0	0	302
25dt	3.39	0.0000	0	0	302
26dt	3.43	0.0000	0	0	302
27dt	3.47	0.0000	0	0	302
28dt	3.51	0.0000	0	0	302
29dt	3.55	0.0000	0	0	302
30dt	3.59	0	0	0	302

4 困惑及反思

- 我所下载的两年一共仅有 486 个数据，级一年 243 个工作日，与 252 存在一定差异。首先每年节假日基本固定，出现这种情况的原因是什么？其次此时计算中使用 1/243 而不是 1/252 应该会使结果更加精确。

- 贴现时是否要考虑工作日啊？我的理解时不需要的。

- 在计算实值 Delta 时出现了 Delta 值小于-1 得情况，由于误差极小故一开始未做处理，但后续结果出现了不合理得地方。猜测是由于部分数据得四舍五入使得最后得计算结果出现了误差，但此时应如何看待并处理这些误差呢？这些误差是否会造成巨大得影响呢？这些都是深入学习需要关注的！