Homework 3 说明

1 第一题

1. 本题需要分别证明硬间隔最大超平面的存在性和唯一性。存在性容易说明。唯一性需要分别说明 w 和 b 的唯一性，部分同学反证法证明完 w 的唯一性后，没有说明 b 的唯一性。

2. 本题需要严格证明，直接说利用 KKT 条件可得存在唯一性的同学扣了分数。

3. 本题的完整证明可参考李航《统计学习方法第二版》P117-118

2 第二题

1. 注意本题中目标函数里的松弛变量 ξ 带有平方，部分同学直接当成书上的情况。

2. 对偶形式中的优化变量应该只保留引入的拉格朗日乘子，原问题中的变量 w, b, ξ 都不应该出现。同样的，KKT 条件中带有原问题变量的等式也不应该放入对偶问题的约束条件中。

3. 题目要求给出优化问题时，注意 min 或 max 下面一定要写优化变量，如

$$\min_{\alpha}$$

否则会扣分。

4. 注意 min 和 max 不要写反了。

具体证明过程如下：

A: 该问题的拉格朗日函数为

$$L(w,b,\xi,\alpha,\mu) = \frac{1}{2}\|w\|^2 + C\sum_{i=1}^{N}\xi_i^2 - \sum_{i=1}^{N}\alpha_i(y_i(wx_i+b)-1+\xi_i) - \sum_{i=1}^{N}\mu_i\xi_i$$

$$\begin{cases} \nabla_w L = w - \sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i x_i = 0 \\ \nabla_b L = -\sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i = 0 \\ \nabla_{\xi_i} L = 2C\xi_i - \alpha_i - \mu_i = 0 \end{cases} \tag{1}$$

整理得 $L = -\frac{1}{2}\|w\|^2 + \sum_{i=1}^{N}\alpha_i - C\sum_{i=1}^{N}\xi_i^2$。将梯度条件带入整理得

$$\min_{w,b,\xi} L = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_i\alpha_j y_i y_j (x_i\cdot x_j) + \sum_{i=1}^{N}\alpha_i - \frac{1}{4C}\sum_{i=1}^{N}(\alpha_i+\mu_i)^2$$

对偶问题为对上式关于 α_i, μ_i 求极大。显然 μ_i 应取值为 0，故对偶问题为

$$\min_{\alpha} \quad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_i\alpha_j y_i y_j (x_i\cdot x_j) - \sum_{i=1}^{N}\alpha_i + \frac{1}{4C}\sum_{i=1}^{N}\alpha_i^2$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & \sum_{i=1}^{N}\alpha_i y_i = 0 \\ & \alpha_i \geq 0, \quad i = 1,2,\cdots,N. \end{aligned}$$