

3.24

《机器学习基础》第4次作业

王宇哲 1800011828

T1

证. 考虑异或问题样本数据集 $D = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^4$

具体地,

$$x_1 = (1, 1), y_1 = 1$$

$$x_2 = (1, -1), y_2 = -1$$

$$x_3 = (-1, 1), y_3 = -1$$

$$x_4 = (-1, -1), y_4 = 1$$

(异或问题的一般形式是 $(0, 1) \rightarrow 1, (1, 1) \rightarrow 0,$ $(0, 0) \rightarrow 0, (1, 0) \rightarrow 1$, 与上述表述无本质

区别)

假设异或问题线性可分, 即

$$\exists H: w \cdot x + b = 0$$

$$s.t. \forall (x_i, y_i) \in D, \text{ 若 } y_i = 1, w \cdot x_i + b > 0$$

$$\text{若 } y_i = -1, w \cdot x_i + b < 0$$

设 $w = (w_1, w_2)^T$, 则有

$$\begin{cases} w \cdot x_1 + b = w_1 + w_2 + b > 0 & ① \\ w \cdot x_2 + b = w_1 - w_2 + b < 0 & ② \\ w \cdot x_3 + b = -w_1 + w_2 + b < 0 & ③ \\ w \cdot x_4 + b = -w_1 - w_2 + b > 0 & ④ \end{cases}$$

$$\text{由 } ①, b > -w_1 - w_2 \quad ⑤$$

$$\text{由 } ②, b < w_2 - w_1 \quad ⑥$$

$$\text{由 } ③, b < w_1 - w_2 \quad ⑦$$

$$\text{由 } ④, b > w_1 + w_2 \quad ⑧$$

$$⑤ + ⑥, \text{ 得 } b > 0$$

$$⑥ + ⑦, \text{ 得 } b < 0 \quad \text{矛盾!}$$

故不存在这样的 $H: w \cdot x + b = 0$

也即: 异或问题非线性可分