数值计算方法：原理、算法和应用
Numerical Methods: Principles, Algorithms and Applications

授课教师：周铁

北京大学数学科学学院

2021 年 10 月 26 日

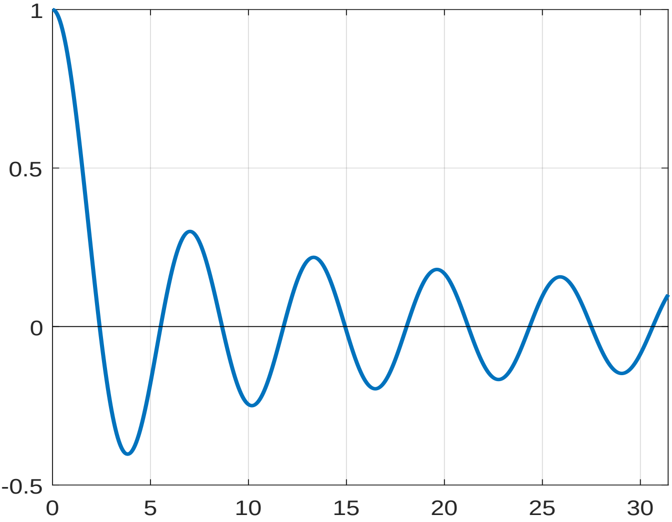
1. 非线性方程的数值解法
    - 二分法
    - 试位法
    - 不动点迭代法
    - Newton 迭代法
    - 割线迭代法
    - 逆二次插值法

找到单自变量实值函数 $y = f(x)$ 零点的最简单方法是利用数学软件画出其函数图像. 以第一类 Bessel 函数

$$J_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha}, \quad \alpha \geq 0$$

为例，它有很多零点，用 matlab 软件画出其函数图像就能大概知道其零点的大概位置，特别是包含零点的区间.

```
J0 = @(x) besselj(0,x);
x = 0:pi/50:10*pi;
y = J0(x);
plot(x,y,'-')
line([0 10*pi],[0 0],'color','black')
axis([0 10*pi -0.5 1.0])
grid on
```


1
0.5
0
-0.5
0
5
10
15
20
25
30

二分法 (Bisection Method)

定理

如果 $f(x) \in C[a,b]$，$f(a)f(b) < 0$，则在 (a,b) 中一定存在 $f(x)$ 的零点.

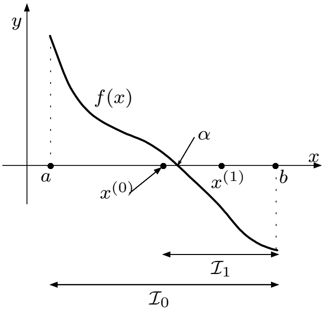
```
k = 0;
while abs(b-a) > eps * max(abs(a),abs(b))
x = (a + b)/2;
if sign(f(x)) == sign(f(b))
b = x;
else a = x;
end
k = k + 1;
end
root = (a+b)/2
```

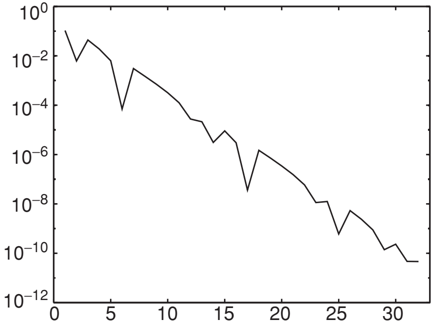
没有利用 $f(x)$ 的具体函数值，是”slow but sure” 的迭代方法.
不能计算偶数重的根.

用二分法计算 5 次 Legendre 多项式

$$p_5(x) = \frac{x}{8}(63x^4 - 70x^2 + 15)$$

在区间 $(0.6, 1)$ 中间的根.





左图：注意 $|x^{(1)} - \alpha| > |x^{(0)} - \alpha|$！右图：横坐标是迭代次数，纵坐标是绝对误差.

二分法的收敛性

记函数 $f(x)$ 在 (a,b) 区间中的惟一零点为 x_*. 上述二分法产生一个区间序列 $\{(a_n,b_n)\}_{n=1}^{\infty}$，它永远包含零点 x_*，并且有

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{b-a}{2^n}$$

第 n 次迭代值为 $x_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$，它满足

$$|x_n - x_*| \le \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}} \to 0, \quad n \to \infty$$

所以二分法是收敛的. 如果给定一个误差限 ϵ，要使 $|x_n - x_*| < \epsilon$，只要

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} < \epsilon \iff n > \log_2\left(\frac{b-a}{\epsilon}\right) - 1$$

如果希望 $|x_{n+p} - x_*| = |x_n - x_*|/10$，需要 $p = \log_2(10) - 1 \approx 2.32$.

定义

给定一个收敛数列 $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x_* \in \mathbb{R}$. 如果存在正整数 p, n_0 和一个实数 $C > 0$，使得

$$\frac{|x_{n+1} - x_*|}{|x_n - x_*|^p} \le C, \quad \forall n \ge n_0,$$

则称数列 $\{x_n\}$ 是 p 阶收敛的.
特别当 $p = 1$ 时，要使 $x_n \to x_*$，必须要求 $0 < C < 1$，此时称数列 $\{x_n\}$ 是 1 阶 (线性) 收敛的.

二分法的迭代数列 $\{x_n\}$，如果考虑最坏的情况，即每步的误差都达到上限

$$|x_n - x_*| = (b-a)/2^{n+1}, \forall n \ge 1$$

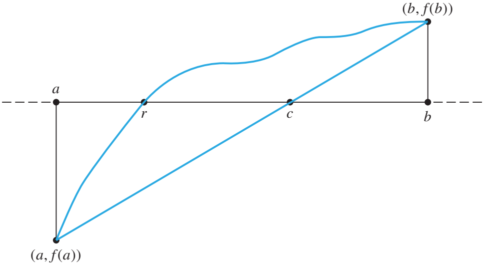
这就得出

$$\frac{|x_{n+1} - x_*|}{|x_n - x_*|} = \frac{1}{2}, \quad \forall n \ge 1$$

按照上面的定义，二分法大概是线性收敛的.

试位法 (false-position method)

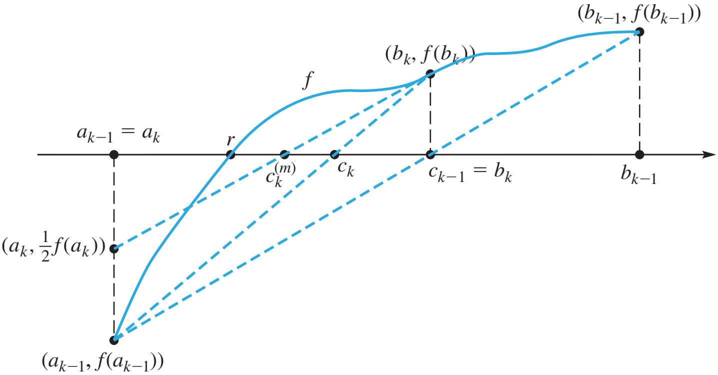
试位法又称为线性插值法，是二分法的改进. 它采用过 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ 两点的直线与横轴的交点作为 $f(x)$ 在 (a, b) 区间中零点的近似.



如图所示，不难得到

$$c = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)} = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$$

- 试位法从一个两端函数值异号且只含一个零点的区间 $[a_0, b_0]$ 开始，计算
$$x_0 = \frac{a_0 f(b_0) - b_0 f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)}$$
- 如果 $f(x_0)f(a_0) < 0$，则取 $[a_1, b_1] = [a_0, x_0]$；
- 如果 $f(x_0)f(b_0) < 0$，则取 $[a_1, b_1] = [x_0, b_0]$.
- 每次迭代也产生一个包含零点的区间 $[a_n, b_n]$ 和近似零点
$$x_n = \frac{a_n f(b_n) - b f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$
- 它不像二分法每次迭代就取区间中点，而是使用 $f(x)$ 在区间端点的函数值计算出新的近似零点.
- 如果 $f(x)$ 本身就是线性函数，显然使用一次试位法就可以找到零点位置. 二分法就没有这个性质.
- 试位法是整体线性收敛的.



如果发现试位法迭代过程中一边的端点总保持不动，需要采用其它措施进行改进！

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{a_n f(b_n) - 2b_n f(a_n)}{f(b_n) - 2f(a_n)}, & \text{if } f(a_n)f(b_n) < 0 \\[2ex] \dfrac{2a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{2f(b_n) - f(a_n)}, & \text{if } f(a_n)f(b_n) > 0 \end{cases}$$

不动点迭代 (fixed-point iteration)

给定一个函数 $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，如果存在 $x_*\in\mathbb{R}$ 使得 $x_*=\varphi(x_*)$ 则称 x_* 为 φ 的一个**不动点** (fixed point).
给定 $x_0\in\mathbb{R}$，可以考虑用迭代序列

$$x_{n+1}=\varphi(x_n),\quad n=0,1,2\cdots \text{ (不动点迭代序列)} \tag{1}$$

计算不动点. 如果序列收敛并且函数 $\varphi(x)$ 连续，极限就是不动点. 计算函数零点的问题很容易转化为不动点迭代问题，例如：

非线性方程：$f(x)=x^3-x-1=0$
写成：$x=x^3-1$，　对应迭代 $x_{n+1}=\varphi_1(x_n)=x_n^3-1$;
写成：$x=\sqrt[3]{x+1}$　对应迭代 $x_{n+1}=\varphi_2(x_n)=\sqrt[3]{x_n+1}$;
写成：$x=1/(x^2-1)$　对应迭代 $x_{n+1}=\varphi_3(x_n)=1/(x_n^2-1)$;

关键是生成的迭代序列是否收敛!

定理 (不动点存在的充分条件)

如果 $\varphi(x) \in C[a, b]$，且 $\varphi(x) \in [a, b], \forall x \in [a, b]$，则必存在 $x_* \in [a, b]$ 是 $\varphi(x)$ 的不动点.

证明：记 $f(x) = x - \varphi(x)$.
由于 $a \leq \varphi(x) \leq b,\ \forall x \in [a, b]$，所以有

$$f(a) = a - \varphi(a) \leq 0, \quad f(b) = b - \varphi(b) \geq 0$$

不妨设 $f(a) < 0$, $f(b) > 0$，否则 a 或 b 就是 $f(x)$ 的零点.

现在 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且 $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. 利用连续函数的性质，必存在 $x_* \in (a, b)$ 使得 $f(x_*) = 0$，即 $\varphi(x_*) = x_*$.

□

定理 (不动点迭代全局收敛的充分条件)

如果 φ 是 $[a,b]$ 到自身的映射，并且存在 $L\in(0,1)$ 使得

$$|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|\le L|x_1-x_2|,\quad \forall\ x_1,x_2\in[a,b], \tag{2}$$

则 $\varphi(x)$ 必存在惟一的不动点 $x_*\in[a,b]$，并且 $\forall x_0\in[a,b]$，不动点迭代序列(1)必收敛到 x_*，同时还有误差估计

$$|x_n-x_*|\le\frac{L^n}{1-L}|x_1-x_0|.$$

证明：不等式(2)称为 Lipschitz 条件，其中的 L 称为 Lipschitz 常数.
利用不等式(2)不难证明 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 区间上 (一致) 连续.
由上一个定理，在 $[a,b]$ 区间中函数 $\varphi(x)$ 必然存在不动点.
设 x_*，$\tilde{x}_*\in[a,b]$ 都是 $\varphi(x)$ 的不动点. 由 Lipschitz 条件，

$$|x_*-\tilde{x}_*|=|\varphi(x_*)-\varphi(\tilde{x}_*)|\le L|x_*-\tilde{x}_*|,\quad L\in(0,1)$$

由此可得：$(1-L)|x_*-\tilde{x}_*|\le 0$. 因为 $0<L<1$，所以必有 $x_*=\tilde{x}_*$.

在定理的条件下，不动点迭代产生的序列 $\{x_n\}$ 满足:

$$|x_n - x_*| = |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(x_*)| \leq L|x_{n-1} - x_*| \leq L^n|x_0 - x_*|, \quad L \in (0,1)$$

由此可得 $x_n \to x_* \ (n \to +\infty)$.
由于

$$|x_{n+1} - x_n| = |\varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})| \leq L|x_n - x_{n-1}|, \ n = 1, 2, \ldots$$

所以对任意正整数 n, m，有

$$\begin{aligned} |x_{n+m} - x_n| &\leq |x_{n+m} - x_{n+m-1}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq (L^{n+m-1} + L^{n+m-2} + \cdots + L^n)|x_1 - x_0| \\ &\leq \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

最后一个不等号用到了 $0 < L < 1$, $\sum_{k=0}^{\infty} L^k = 1/(1-L)$.
再令 $m \to +\infty$，就有 $x_{m+n} \to x_*$，就得到定理的完整证明. $\square$

定理 (不动点迭代局部收敛的充分条件)

如果 $\varphi(x)$ 在其不动点 x_* 的一个邻域内连续可微，并且 $|\varphi'(x_*)| < 1$，则只要迭代初值 x_0 离 x_* 充分近，序列(1)就收敛到 x_*，并且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_*}{x_n - x_*} = \varphi'(x_*).$$

证明：由于 $\varphi(x)$ 在 x_* 的一个邻域内连续可微，且 $|\varphi'(x_*)| < 1$，所以存在充分小的正数 δ 和 $L \in (0,1)$ 使得

$$|\varphi'(x)| \le L < 1, \quad \forall x \in [x_* - \delta, x_* + \delta]$$

所以对 $|x - x_*| \le \delta$ 有

$$\varphi(x) - \varphi(x_*) = \varphi'(\xi)(x - x_*), \quad \xi \in (x_* - \delta, x_* + \delta)$$

这就得到

$$|\varphi(x) - x_*| \le |\varphi'(\xi)||x - x_*| \le L\delta < \delta$$

这就说明 $\varphi(x)$ 是 $[x_* - \delta, x_* + \delta]$ 到自身的映射.

任取 $x_1, x_2 \in [x_* - \delta, x_* + \delta]$，都有

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \le |\varphi'(\xi)||x_1 - x_2| \le L|x_1 - x_2|$$

即在区间 $[x_* - \delta, x_* + \delta]$ 上满足不等式(2)(Lipschitz 条件).

现在已经满足了前面一个定理的条件，所以对于 $[x_* - \delta, x_* + \delta]$ 中的任意初值，不动点迭代序列 $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ 都收敛于 x_*.
而且

$$x_{n+1} - x_* = \varphi'(\xi_n)(x_n - x_*),\ \xi_n \text{ 介于 } x_n \text{ 与 } x_* \text{ 之间},$$

又因为 $x_n \to x_*$, $n \to +\infty$，所以有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_*}{x_n - x_*} = \varphi'(x_*).$$

由此可以看出，当 $0 < |\varphi'(x_*)| < 1$ 时，不动点迭代是线性收敛的. $\square$

定理 (不动点迭代的局部收敛阶)

如果 $\varphi(x)$ 在其不动点 x_* 的一个邻域内 p 阶连续可微，$p \in \mathbb{N}, p \geq 2$，而且有

$$\varphi'(x_*) = \varphi''(x_*) = \cdots = \varphi^{(p-1)}(x_*) = 0, \quad \varphi^{(p)}(x_*) \neq 0.$$

则不动点迭代序列(1)必局部 p 阶收敛到 x_*.

证明：首先 $\varphi'(x_*) = 0$ 已经保证了 x_n 必局部收敛于 x_*. 利用 Taylor 展开公式，有

$$x_{n+1} - x_* = \varphi(x_n) - \varphi(x_*) = \frac{1}{p!}\varphi^{(p)}(\xi_n)(x_n - x_*)^p, \quad \xi_n \text{ 介于 } x_n \text{ 与 } x_* \text{ 之间.}$$

令 $n \to \infty$，$x_n \to x_* \Rightarrow \xi_n \to x_*$，所以有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x_*|}{|x_n - x_*|^p} = \frac{1}{p!}\left|\varphi^{(p)}(x_*)\right| > 0$$

这就证明了 p 阶收敛. □

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数存在且非零，可以写出在此点的切线方程为

$$l(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

线性函数 $l(x)$ 的零点为：

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

如果 $f(x)$ 在 x_1 处可导且 $f'(x_1)\neq 0$，则过此点切线的零点为：

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

这就得到 Newton 迭代法

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\quad f'(x_n)\neq 0,\quad n=0,1,2\cdots \tag{3}$$

Newton 迭代法可以写成不动点迭代的形式，对应的 $\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

定理 (Newton 法的收敛性与收敛速率)

设 $f(x)$ 在其零点 x_* 的某个开邻域内二次连续可微，且 $f'(x_*) \neq 0$，则存在正数 δ，当迭代初值 $x_0 \in (x_* - \delta, x_* + \delta)$ 时，由 Newton 迭代(3)产生的序列 $\{x_n\} \subset (x_* - \delta, x_* + \delta)$, $x_n \to x_*$，而且收敛速度至少是二阶的.

证明：由 $f'(x_*) \neq 0$ 和 $f(x)$ 在 x_* 附近一阶导数连续，必存在 $\delta_1 > 0$ 使得 $f'(x) \neq 0, \ \forall x \in [x_* - \delta_1, x_* + \delta_1]$. 记

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}, \quad x \in [x_* - \delta_1, x_* + \delta_1]$$

则 $f(x)$ 的零点 x_* 就是 $\varphi(x)$ 的不动点. 而且有

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \quad \Rightarrow \quad \varphi'(x_*) = 0$$

这就满足了不动点迭代局部收敛定理的条件 $|\varphi'(x_*)| < 1$.

根据不动点迭代的局部收敛定理，必存在 $\delta_2 \in (0, \delta_1]$，只要迭代初值 $x_0 \in [x_* - \delta_2, x_* + \delta_2]$，则 Newton 迭代产生的整个数列 $\{x_n\}$ 就都落在区间 $[x_* - \delta_2, x_* + \delta_2]$ 中，而且

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_*.$$

再研究一下收敛速度问题.

$$\varphi''(x) = \frac{f'(x)f''(x) + f(x)f'''(x)}{(f'(x))^2} - \frac{2f(x)(f''(x))^2}{(f'(x))^3} \Rightarrow \varphi''(x_*) = \frac{f''(x_*)}{f'(x_*)}$$

所以只要 $f'(x_*) \neq 0, f''(x_*) \neq 0$，就有 $\varphi''(x_*) \neq 0$，所以 2 阶收敛.
如果 $f'(x_*) \neq 0, f''(x_*) = 0$，就有 $\varphi''(x_*) = 0$，还会更高阶收敛. $\square$

- 需要强调的是，上述定理中的邻域可能很小，即迭代的初值可能要取到离零点很近才能保证收敛，所以 Newton 迭代法一般只是“局部”2 阶收敛的方法.

如果 x_* 是 $f(x)$ 的重根，即 $f'(x_*)=0$，并且知道重数 $m(m\geq 2)$，则有

$$
\begin{aligned}
& f(x)=(x-x_*)^m h(x), \quad h(x_*)\neq 0, \\
\Rightarrow & f'(x)=(x-x_*)^{m-1}[mh(x)+(x-x_*)h'(x)], \\
\Rightarrow & f''(x)=(x-x_*)^{m-2}[m(m-1)h(x)+2m(x-x_*)h'(x)+(x-x_*)^2h''(x)].
\end{aligned}
$$

于是 Newton 迭代法的不动点迭代函数 $\varphi(x)$ 满足

$$
\varphi'(x)=\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}=\frac{h(x)[m(m-1)h(x)+(x-x_*)(\cdots)]}{[mh(x)+(x-x_*)h'(x)]^2}.
$$

所以

$$
\varphi'(x_*)=1-\frac{1}{m}\neq 0,
$$

这表明对重根来说 Newton 迭代法只有线性收敛速率！

可以把 Newton 迭代法修改为:

$$x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2\cdots$$

此时的不动点迭代函数为

$$\varphi_1(x) = x - m\frac{f(x)}{f'(x)}$$

它就满足

$$\varphi_1'(x_*) = 0$$

因此，修改后的 Newton 迭代法至少具有二阶收敛性.

但根的重数很多时候不太容易知道!

迭代停止准则

迭代法产生一个数列 $\{x_n\}$，$x_n \to x_*$，但是 x_* 并不知道，迭代过程什么时候停止?

1. 残差准则：$|f(x_n)| < \epsilon$ 实现 $f(x_n) \approx 0$；
2. 收敛准则：$|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$ 实现 $|x_n - x_*| \approx 0$.

一般要求二者同时成立.

当 x_* 不在 0 附近时，收敛准则也可以用相对误差

$$\frac{2|x_{n+1} - x_n|}{|x_{n+1}| + |x_n|} < \epsilon.$$

Newton 迭代法的应用：平方根的计算

对一些特殊的函数，Newton 迭代也可以整体收敛.

定理 (Newton 法的收敛性与收敛速率)

设 $f(x) \in C^2(\mathbb{R})$ 是严格单调上升的凸函数 ($f'' > 0$)，并且有一个零点 x_*. 则 Newton 迭代对任意初值 $x_0 \in \mathbb{R}$ 都收敛于 x_* 且收敛速度至少是 2 阶的.

设 $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$，要计算 $x_* = \sqrt{a}$.
显然 x_* 是方程 $f(x) = x^2 - a = 0$ 的正根. 用 Newton 迭代法求解，

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

```
a = 2; x1 = a; k = 0;
while abs(x1 - sqrt(a)) > eps
x2 = 0.5*(x1 + a/x1); x1 = x2
k = k + 1
end
```

非线性方程组的 Newton 迭代法

现在要数值求解非线性方程组

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ f_3(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{cases}$$

记 $x = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}, \quad F(x) = (f_1(x_1, x_2, x_3), f_2(x_1, x_2, x_3), f_3(x_1, x_2, x_3))^{\mathrm{T}}$,
则上述非线性方程组的向量形式为 $F(x) = 0$.
定义 $F(x)$ 的 Jacobi 矩阵为

$$F'(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

给定一个初始向量 $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}\right)^{\mathrm{T}}$，数值求解非线性方程组 $F(x) = 0$ 的 Newton 迭代公式就可以写为：

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} - [F'(x^{(n)})]^{-1} F(x^{(n)}), \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

当然，这个迭代法有意义需要 Jacobi 矩阵 $F'(x^{(n)})$ 可逆.
实际计算时并不直接计算 Jacobi 矩阵的逆，而是先解线性方程组

$$F'(x^{(n)}) \delta x^{(n)} = -F(x^{(n)})$$

得到 $\delta x^{(n)}$，然后令

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} + \delta x^{(n)}$$

定理

设 $F(x)$ 在其零点 x_* 的某个邻域内二次连续可微，且 $\det(F'(x_*)) \neq 0$，则存在正数 δ，当迭代初值 $\|x^{(0)} - x_*\| \leq \delta$ 时，由 Newton 迭代产生的序列 $\{x^{(n)}\}$ 都收敛于 x_*，而且收敛至少是 2 阶的.

割线迭代法

在 Newton 迭代法(3)式中用差商代替导数就得到割线迭代法

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{s_n}, \text{ 其中 } s_n = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}, \ n = 0, 1, 2 \cdots$$

割线法需要两个初值 x_0, x_1，每次迭代只计算函数值，不需要计算导数.

定理 (收敛性与收敛速率)

设 $f(x) \in C^2(B_\delta(x_*))$，$f'(x) \neq 0$, $x \in B_\delta(x_*) = [x_* - \delta, x_* + \delta]$. 如果初值 $x_0, x_1 \in B_\delta(x_*)$ 且充分靠近 x_*，则割线法的迭代序列收敛于零点 x_*，而且存在 $C > 0$ 使得

$$|x_{n+1} - x_*| \le C|x_n - x_*|^r, \quad n \ge n_0, \ r = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1.618.$$

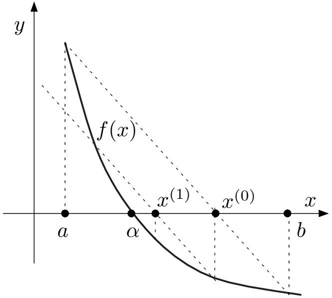
即割线法是局部**超线性收敛**的方法.

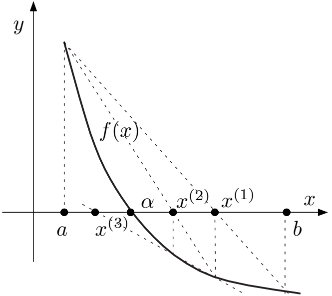
割线迭代法又称为“拟 Newton 法”，它也可以推广到非线性方程组.

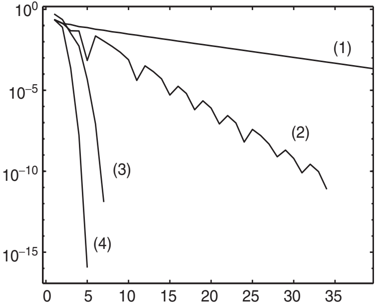
设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 区间中的有惟一零点，迭代法

$$x_0 = a - \frac{f(a)}{s}, \quad s = \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{s}, \quad n = 0, 1, 2\cdots$$

称为固定割线法.







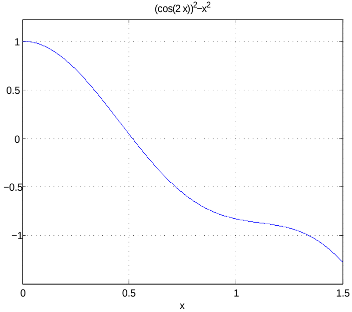


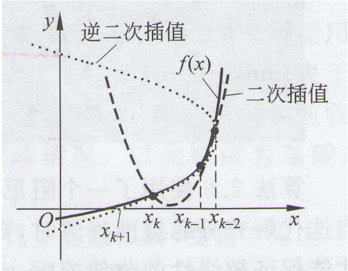
图: 收敛速率的比较：$f(x) = \cos^2(2x) - x^2$，$x \in [0, 1.5]$，零点 $x_* \approx 0.5149$，迭代初值 $x_0 = 0.75$ 或者 $x_0 = 0, x_1 = 0.75$. (1) 固定割线法，(2) 二分法，(3) 割线法，(4)Newton 法.

逆二次插值法

割线法用已有的两次迭代值得到下一次迭代值. 那为何从第三次迭代开始不用前面三次迭代值呢?
如果已经有三次迭代值及其函数值:

$$(x_{n-2}, y_{n-2}),\ (x_{n-1}, y_{n-1}),\ (x_n, y_n),$$

就可以用二次插值多项式 $p(x)$ 在局部近似 $f(x)$，并用 $p(x)$ 的零点作为下一次的迭代值.
这样做有个问题：插值多项式 $p(x)$ 很可能没有零点.



逆插值：把 y 当自变量考虑对反函数 $x=f^{-1}(y)$ 做插值，用插值数据

$$(y_{n-2},x_{n-2}),\ (y_{n-1},x_{n-1}),\ (y_n,x_n)$$

构造二次插值多项式 $x=P(y)$. 然后取 $x=P(0)$ 作为下一次的迭代值.

显然，逆二次插值法需要一个关键条件：y_{n-2},y_{n-1},y_n 要互异.

反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的二次 Lagrange 插值多项式为

$$\begin{aligned}P(y)=&\frac{(y-y_{n-1})(y-y_n)}{(y_{n-2}-y_{n-1})(y_{n-2}-y_n)}x_{n-2}+\\&+\frac{(y-y_{n-2})(y-y_n)}{(y_{n-1}-y_{n-2})(y_{n-1}-y_n)}x_{n-1}+\frac{(y-y_{n-2})(y-y_{n-1})}{(y_n-y_{n-2})(y_n-y_{n-1})}x_n.\end{aligned}$$

取 $x_{n+1}=P(0)$ 就得到如下的迭代法

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} = &\frac{f(x_{n-1})f(x_n)}{(f(x_{n-2})-f(x_{n-1}))(f(x_{n-2})-f(x_n))}x_{n-2}+\\
&+\frac{f(x_{n-2})f(x_n)}{(f(x_{n-1})-f(x_{n-2}))(f(x_{n-1})-f(x_n))}x_{n-1}+\\
&+\frac{f(x_{n-2})f(x_{n-1})}{(f(x_n)-f(x_{n-2}))(f(x_n)-f(x_{n-1}))}x_n,
\end{aligned}
$$

其中 $n=2,3,4,\cdots$，需要 3 个初值 x_0,x_1,x_2.

定理 (收敛性与收敛速率)

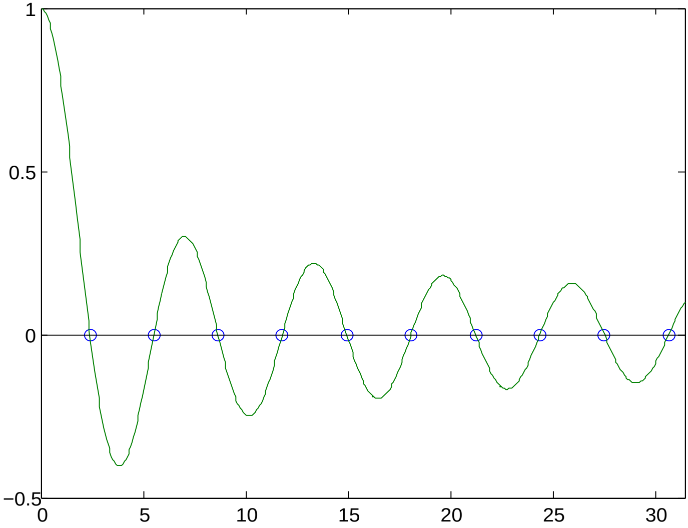
设 $f(x)$ 满足与割线法收敛定理类似的条件. 如果初值 x_0,x_1,x_2 充分靠近 $f(x)$ 的零点 x_*，则逆二次插值法迭代序列收敛于零点 x_*，而且存在常数 $C>0$ 使得

$$
|x_{n+1}-x_*| \le C|x_n-x_*|^r, \quad n\ge n_0,\ r\cong 1.839.
$$

成立，即逆二次插值法是局部**超线性收敛**的方法.

Matlab 中的 fzero 函数就是二分法与上述割线法和逆插值方法的结合.

```
J0 = @(x) besselj(0,x);
for n = 1:10
z(n) = fzero(J0,[(n-1) n]*pi);
end
x = 0:pi/50:10*pi;
y = J0(x);
plot(z,zeros(1,10),'o',x,y,'-')
line([0 10*pi],[0 0],'color','black')
axis([0 10*pi -0.5 1.0])
```


1
0.5
0
−0.5
0
5
10
15
20
25
30

参考书

1. Alfio Quarteroni, Riccardo Sacco, Fausto Saleri, Numerical Mathematics(2nd Edition), Springer, 2007.
2. Steven C. Chapra, Applied Numerical Methods with MATLAB for Engineers and Scientists, Third Edition, McGraw-Hill, 2012.
3. Walter Gander, Martin J. Gander, Felix Kwok, Scientific Computing: an introduction using Maple and MATLAB, Springer 2014.
4. Ward Cheney, David Kincaid, Numerical Mathematics and Computing (6th Edition), Thomson Brooks/Cole, 2008.