Jogos

Yvens Ian

Treinamento - 29 de maio de 2024

---

1 Jogos Imparciais

Definição 1. Dizemos que um jogo entre dois jogadores é **Imparcial** se os movimentos permitidos e vencer ou perder dependem somente do estado atual do jogo. Em outras palavras, a única diferença entre o jogador 1 e o jogador 2 é quem joga primeiro.

Além disso, assumiremos algumas coisas, que o jogo tem informação perfeita, ou seja, nenhuma informação sobre o jogo é omitida dos jogadores, que o jogo não possui empates e que o jogo termina quando algum jogador não puder mais jogar, com esse jogador sendo o perdedor.

Um modo de visualizar jogos imparciais é com grafos direcionados. Tome cada vértice para ser uma posição do jogo e ligue uma aresta de v para u se existe uma jogada na posição v que leva o jogo para a posição u.

Note que tal grafo não possui ciclos, pois, caso contrário, teríamos um jogo potencialmente infinito.

Definição 2. Uma posição perdedora de um jogo é uma posição na qual para qualquer jogada feita, caso o outro jogador jogue de maneira ótima, o jogador nessa posição sempre vai perder. Uma posição vencedora é uma posição na qual, caso o jogador jogue de maneira ótima, ele sempre vence o jogo.

Perceba que, por não ter empates, todo jogo imparcial pode ser definido a partir de posições vencedoras e perdedoras.

Podemos, então, pintar um vértice v do grafo do jogo de azul, se v for uma posição vencedora, e de vermelho caso seja perdedora. Se uma posição é vencedora, significa que há pelo menos uma jogada que leve o outro jogador para uma posição perdedora, ou seja, há uma aresta desse vértice para um vértice vermelho, e se uma posição é perdedora, significa que toda jogada leva o outro jogador para uma posição vencedora, ou seja, toda aresta (possivelmente nenhuma) leva para um vértice azul.

Teorema 3. *Para todo grafo de um jogo imparcial, podemos começar pintando o vértice com grau de saída igual a 0 de vermelho, afinal, ele é a posição perdedora "original", e a partir disso, conseguimos definir todas as posições vencedoras e perdedoras do grafo seguindo a pintura do parágrafo anterior.*

Outra forma de denotar os jogos imparciais é com conjuntos. Dado um jogo imparcial podemos denotá-lo como $G = \{G_1, G_2, \cdots, G_k\}$, onde $G_1, G_2, \cdots, G_k$ são os jogos que podemos chegar a partir de um movimento em G. Perceba que podemos construir todos os possíveis jogos como no grafo direcionado. Claramente a posição perdedora "original" seria o conjunto vazio $\{\}$.

Dados dois jogos imparciais, G e H, definimos sua soma $G + H$ como jogar ambos os jogos ao mesmo tempo. Dizemos que G é equivalente a H ($G \equiv H$), quando o segundo jogador vence no jogo $G + H$, ou seja, é um jogo perdedor. Perceba que essa definição é intuitiva, tendo em vista que para todo jogo $G + G$ o segundo jogador sempre vence, com a estratégia da simetria.

Denotemos por 0 o jogo que não possui mais jogadas válidas, ou seja, . Seja G um jogo qualquer, note que G é perdedor, se, e somente se, $G + 0$ é perdedor, portanto, um jogo é perdedor se, e somente se, $G \equiv 0$.

1.1 Nim

Exemplo 4. (Nim) Nesse jogo, há várias pilhas, cada uma com várias pedras. Um movimento de Nim consiste em remover qualquer quantidade positiva de pedras de qualquer pilha. Um jogador perde se não puder mais fazer movimentos, ou seja, quando todas as pilhas estão vazias.

Definição 5. (Nímeros) Definiremos um **nímero** $*n$ recursivamente como

$$*(n+1) = *n \cup \{*n\}, \quad \text{e} \quad *0 = \{\},$$

ou seja, $*0 = \{\}, *1 = \{\{\}\}, *2 = \{\{\{\}\}, \{\}\}$, etc.

Perceba, então, que um nímero $*n$ representa um jogo de Nim de uma torre que possui n pedras. Agora, para resolver o jogo de Nim precisamos de uma operação $+$ apropriada entre dois nímeros.

Proposição 6. *Dado um jogo $G = \{*a : a \in S\}$, temos que $G = *\operatorname{mex} S$, onde* mex *denota o menor elemento não negativo que não está no conjunto S.*

Demonstração. Defina $m = \operatorname{mex}(S)$. Devemos mostrar que o segundo jogador sempre ganha no jogo $G + *m$.

Suponha que o primeiro jogador jogue em $*m$ e o leve para uma posição $*a$, pelas nossas definições, $a \in \{0, 1, \cdots, m-1\}$. Portanto, como m é $\operatorname{mex} S$, o segundo jogador pode levar G para a posição $*a$, e segue que o segundo ganha por simetria.

Agora, suponha que o primeiro jogador jogue em G. Se ele levar para uma posição $*a$, onde $a < m$, é análogo ao caso anterior. Suponha então que $a > m$, agora, basta o segundo jogador jogar em $*a$, levando para a posição $*d$, e ganhando por simetria. □

Definição 7. Definiremos a operação $\oplus$ (XOR/Ou Exclusivo) como a soma em binário sem "vai um", ou seja, se na representação binária de a o i-ésimo dígito é x e na de b o i-ésimo é y, então, na de $a \oplus b$, o i-ésimo dígito é $x + y \pmod 2$.

Exemplo 8.

$$22 \oplus 42 = 010110_2 \oplus 101010_2 = 111100_2 = 60.$$

Proposição 9. *É possível calcular a soma de dois jogos de Nim da seguinte forma*

$$*n + *m = *(n \oplus m).$$

Demonstração. Vamos mostrar por indução em $m + n$ que isso é verdade. Veja que $m + n = 0$ é trivial, pois $*0 + *0 = *0$.

Seja $n \oplus m = d$. Temos que mostrar que $*n + *m + *d = 0$, ou seja, o segundo jogador sempre ganha esse jogo.

Primeiro, suponha que o primeiro jogador jogue em $*n$ (para $*m$ é análogo), levando para $*a$, note que, pela hipótese,

$$*a + *m + *d = *(a \oplus m) + *d \neq 0,$$

pois $*d = *(n \oplus m) \neq *(a \oplus m)$, portanto, o primeiro jogador perde.

Suponha, agora, que o primeiro jogue em $*d$, levando para $*d'$. Considere a maior casa binária que difere em d e d', chame-a de i, essa casa é 1 em d e 0 em d', pois $d > d'$. Assim, algum dentre m e n também possui 1 em i, suponha sem perda de generalidade que seja m. Dessa forma, o segundo jogador pode levar $*m$ para o jogo $*a$, onde $a = (n \oplus d')$ pois o primeiro dígito de a que difere de m é o dígito i, logo, $m > a>$ Portanto, pela hipótese, o jogo se torna

$$*a + *n + *d' = *(a \oplus n) + d' = *(n \oplus n \oplus d') + d' = d' + d' = 0,$$

e o segundo jogador ganha. □

Veja, então, que conseguimos a estratégia vencedora de Nim. Para um jogo com pilhas $a_1, a_2, \cdots, a_n$, o primeiro jogador perde, se, e somente se,

$$a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_n = 0,$$

e a estratégia do vencedor é sempre mandar uma posição cujo XOR é 0 para seu adversário.

1.2 Quem Ganha um Jogo Imparcial Qualquer

Note que o jogo do Nim não tem nada de especial. Para qualquer jogo imparcial podemos fazer algo análogo e encontrar a estratégia vencedora. Vejamos, então, um teorema que generaliza essa ideia.

Teorema 10. *(Sprague–Grundy) Considere um estado v de um jogo imparcial e sejam v_i os estados alcançáveis a partir desse, onde $i \in \{1, 2, \ldots, k\}, k \geq 0$). Para esse estado, podemos atribuir um jogo equivalente de uma pilha de Nim, ou seja, um nímero, $*x$. O número x é chamado de valor Grundy ou valor Nim do estado v. Além disso, esse número pode ser encontrado recursivamente:*

$$x = mex\ \{x_1, \ldots, x_k\},$$

onde x_i é o valor Grundy do estado v_i.

Veja que, assim como no começo do material, podemos calcular todos os estados seguindo o grafo direcionado.

E, claro, se quiséssemos só as posições vencedoras, poderíamos fazer como no começo do material desde sempre, com o grafo completando o jogo, mas o teorema é bem mais útil. Pois, tendo uma equivalência com Nim, podemos somar jogos e tudo mais que vimos anteriormente.

Assim, se quisermos a estratégia de um jogo enorme e complexo, podemos dividi-lo em pequenos jogos, e calcular o XOR desses joguinhos.

2 Exercícios

Exercício 1. *Há n pilhas de pedras com $1, 2, \cdots, n$ pedras em uma mesa. Arnaldo e Bernaldo jogam alternadamente escolhendo pilhas e removendo uma certa quantidade de pedras dela. Perde quem não puder mais jogar. Encontre em função de n quem possui a estratégia vencedora.*

Exercício 2. *(ICPC Brasil 2018 Adaptado) Ana e Banana jogam sobre um tabuleiro 6×6, com colunas e colunas numeradas de 1 a 6. O tabuleiro tem inicialmente n bolinhas divididas entre várias casinhas. Nesse jogo, em sua vez, uma jogadora pode pegar uma bolinha de alguma casa (x, y) e colocá-la em alguma casa $(x-u, y)$, $(x, y-u)$ ou $(x-u, y-u)$. Quem conseguir colocar uma peça na casa $(0, 0)$ primeiro ganha. Se Ana começa, encontre quem possui a estratégia vencedora em função de onde as bolinhas iniciam.*

Exercício 3. *Há uma escada composta por n degraus, numerados $1, 2, \ldots, n$. Inicialmente, cada degrau possui um certo número de bolas.*

Há dois jogadores que jogam alternadamente. Em cada jogada, um jogador escolhe um degrau k onde $k \neq 1$ e que possua pelo menos uma bola. Então, o jogador move qualquer quantidade de bolas do degrau k para o degrau $k-1$. Perde quem não puder mais mover.

Quem possui a estratégia vencedora?

Exercício 4. *(Misère Nim) Mesmas regras de Nim, mas quem tirar a última pedra* ***perde****.*

3 Problemas!

Problema 1. *(Teste Cone Sul 2014) Arnaldo e Bernaldo participam do seguinte jogo: eles têm duas pilhas de pedras. Eles jogam alternadamente, começando por Arnaldo. Em sua vez, o jogador deve realizar exatamente uma das seguintes operações:*

- *Retirar uma pedra de uma das pilhas;*
- *Retirar duas pedras de uma das pilhas;*
- *Retirar uma pedra de cada pilha;*
- *Retirar duas pedras de uma pilha e uma pedra da outra.*

O jogador que retirar a última pedra perde. Se inicialmente há 2014 pedras em uma pilha e 1000 pedras na outra pilha, qual dos jogadores consegue garantir sua vitória, não importando como o outro jogador jogue?

Problema 2. *(Lista Cone Sul 2016) Dois jogadores A e B jogam alternadamente em um polígono convexo com $n \geq 5$ lados. Em cada turno, o jogador correspondente tem que desenhar uma diagonal desse polígono que não intersecta nenhuma das diagonais desenhada anteriormente. Um jogador perde se, logo após ele fizer um movimento, um quadrilátero é formado de modo que suas duas diagonais não estejam desenhadas. Supondo que A sempre começa a jogar, determine, para cada inteiro positivo n, qual jogador possui estratégia vencedora.*

Problema 3. *(Rioplatense 2012) Dois jogadores A e B jogam um jogo em uma lista de números. Em cada rodada, o jogador escolhe um dos números $a \neq 0$ e pode trocá-lo por $a-1$ se a for ímpar ou por $a-1$ ou $a-2$ se a for par. Perde quem não pode mais jogar. Os jogadores jogam alternadamente, começando por A.*

Se eles jogam sobre a lista de números $1, 2, \cdots, n$, determine quem tem a estratégia vencedora.

Problema 4. *(Itália 2006) Alberto e Bárbara jogam o seguinte jogo. Inicialmente, há algumas pilhas de moedas sobre uma mesa. Cada jogador, por sua vez, começando com Albert, executa uma das duas seguintes jogadas:*

- *tire uma moeda de uma pilha arbitrária;*
- *selecione uma pilha e divida-a em duas pilhas não vazias.*

O vencedor é o jogador que retirar a última moeda da mesa. Determine qual jogador tem uma estratégia vencedora em relação ao estado inicial.

Problema 5. *(Cone Sul 2022) Ana e Beto jogam em um tabuleiro* 2022×2022*. Ana colore os lados de alguns quadrados do tabuleiro de vermelho, de forma que não haja um quadrado com dois lados vermelhos dividindo um vértice. Após isso, Bob deve colorir um caminho azul que conecta duas das quatro pontas do tabuleiro, seguindo os lados dos quadrados e não usando segmentos vermelhos. Se Beto conseguir, ele é o vencedor, caso contrário, Ana vence. Quem possui a estratégia vencedora?*

Problema 6. *(ISL 2009) Considere 2009 cartas, cada uma com um lado dourado e um lado preto, colocadas paralelamente numa mesa. Inicialmente, todas as cartas estão viradas com seu lado dourado para cima. Dois jogadores estão do mesmo lado da mesa, e jogam um jogo, jogando alternadamente. Cada turno consiste em escolher 50 cartas consecutivas, em que a mais a esquerda está com o lado dourado para cima, e virá-las. Um jogador perde se não pode mais jogar.*

a) O jogo necessariamente termina?

b) Existe uma estratégia vencedora para o jogador inicial?

Problema 7. *(RioPlatense 2016) Ana e Beto jogam um contra o outro. Inicialmente, Ana escolhe um inteiro não negativo N e mostra para Beto. Depois Beto escreve uma sequência de* 2016 *números, dos quais* 1008 *são* 1 *e* 1008 *são* -1*. Depois disso, Ana deve dividir a sequência em vários blocos de termos consecutivos (cada termo em exatamente um bloco), e calcula a soma dos números de cada bloco. Finalmente, ela soma os quadrados dos números calculados. Se essa soma é igual a N , Ana ganha. Se não, Beto ganha. Determine todos os valores de N para os quais Ana consegue ganhar, não importando como o Beto jogue.*

Problema 8. *(Teste Cone Sul 2021) Há 2022 cartões dentro de uma caixa. Cada um desses cartões possui duas faces: uma preta e uma branca. Ana e Beto jogam o seguinte jogo: Ana coloca os 2022 cartões em fila (em alguns dos cartões a face de cima será preta e em outros a face de cima será branca). Após isso, Beto pode realizar movimentos, não mais do que 2022 vezes: ele escolhe um cartão, virando-o e virando o(s) seu(s) cartão(ões) vizinho(s) (se inicialmente a face de cima é preta, ele vira para a face branca e vice-versa). Beto ganha o jogo se ele conseguir que todos os cartões fiquem com as faces brancas para cima, caso contrário, Ana ganha o jogo. Algum dos dois jogadores possui uma estratégia vencedora? Justifique sua resposta.*

Problema 9. *(Rússia 2019) Pasha e Vova jogam o seguinte jogo, alternando movimentos; Pasha joga primeiro. Inicialmente, há um grande pedaço de massinha. A cada turno, Pasha corta um dos pedaços de massinha em três (do tamanho que ela quiser), e Vova junta dois pedaços existentes em um. Pasha ganha se em algum momento aparecer* 100 *pedaços de pesos iguais. Vova consegue previnir a vitória de Pasha?*

Problema 10. *(ICPC México 2024) Nas antigas terras de Granitus, dois arquitetos rivais, Alicius e Bobius, competem num concurso lendário. Há N torres de pedra espalhadas em uma planície cada uma variando em altura. Os arquitetos se revezam em um jogo: em cada turno, o jogador da vez deve escolher um número inteiro positivo X e retirar X pedras de cada torre que ainda possua pedras. O X escolhido não pode exceder o número de pedras da menor torre que ainda tenha pedras restantes. Um jogador perde o jogo quando não consegue fazer um movimento válido.*

Dadas as N torres de pedras, qual arquiteto vencerá se ambos jogarem de maneira otimizada? Alicius sempre faz o primeiro turno.

Problema 11. *(Putnam 2020) Sejam k e n inteiros tais que $1 \leq k < n$. Alice e Bob jogam um jogo com k pinos em uma reta de n buracos. No início do jogo, os pinos ocupam os k buracos mais a esquerda. Um movimento consiste em mover um único pino para qualquer buraco livre a sua direita. Os jogadores alternam movimentos, Alice joga primeiro. O jogo acaba quando os pinos estão nos k buracos mais a direita, de forma que quem quer que seja o próximo a jogar, não consiga, e, portanto, perca. Para que valores de n e k Alice tem uma estratégia vencedora?*

Problema 12. *(ISL 2017) Seja $p \geq 2$ um número primo. Eduardo e Fernando jogam o seguinte jogo alternando a vez: em cada movimento, o jogador atual escolhe um índice i do conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ que não foi escolhido antes por nenhum dos dois jogadores e então escolhe um elemento a_i do conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Eduardo começa. O jogo termina depois de todos os índices serem escolhidos. Então, o seguinte número é calculado:*

$$M = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \cdots + a_{p-1} 10^{p-1} = \sum_{i=0}^{p-1} a_i.10^i.$$

O objetivo de Eduardo é fazer M ser divisível por p, e o de Fernando é impedir isso. Prove que Eduardo possui a estratégia vencedora.

Problema 13. *(EGMO 2015) Sejam m, n inteiros positivos tais que $m > 1$. Anastasia particiona os inteiros $1, 2, \ldots, 2m$ em m pares. Boris então escolhe um inteiro de cada par e calcula a soma desses inteiros escolhidos.*

Prove que Anastasia consegue selecionar os pares de forma que Boris não consegue fazer sua soma ser igual a n.

Problema 14. *(Rússia 2021) Cem sábios jogam o seguinte jogo. Eles estão esperando em uma fila em uma ordem fixa na frente de uma sala. Os sábios entram na sala um após o outro. Quando um sábio entra na sala, o seguinte ocorre - o guarda da sala escolhe dois números do conjunto $\{1, 2, 3\}$, e anuncia ao sábio da sala. Então, o sábio escolhe um dos dois números, diz para o guarda, e sai da sala, o próximo entra, e por aí vai. Durante o jogo, antes que um sábio escolha um número, o guarda diz quais foram os números escolhidos pelos últimos dois sábios. Durante o jogo, os sábios não podem conversar entre si. No fim, quando todos terminaram, o jogo é uma falha se a soma dos 100 números escolhidos é 200; caso contrário, é um sucesso. Prove que os sábios podem criar uma estratégia, na qual eles podem ganhar o jogo.*

Problema 15. *(RioPlatense 2014) Quico e Nhonho brincam com uma vara de tamanho $2n$ onde $n \leq 3$ é um inteiro. Quico corta a vara em $k \leq 2n$ pedaços de tamanho inteiro. Então, Nhonho deve rearranjar esses pedaços de forma que formem um hexágono de lados opostos de mesmo tamanho e ângulos iguais. As peças não podem ser divididas e todas devem ser usadas. Se Nhonho conseguir seu objetivo, ele ganha, caso contrário, Quico ganha. Determine, em função de k quem possui a estratégia vencedora.*

Problema 16. *(OBM 2014) Seja N um inteiro maior do que 2. Arnaldo e Bernaldo disputam o seguinte jogo: há N pedras em uma pilha. Na primeira jogada, feita por Arnaldo, ele deve tirar uma quantidade k de pedras da pilha com $1 \leq k < N$. Em seguida, Bernaldo deve retirar uma quantidade de pedras m da pilha com $1 \leq m \leq 2k$, e assim por diante, ou seja, cada jogador, alternadamente, tira uma quantidade de pedras da pilha entre 1 e o dobro da última quantidade de pedras que seu oponente tirou, inclusive. Ganha o jogador que tirar a última pedra.*

Para cada valor de N, determine qual jogador garante a vitória, independente de como o outro jogar, e explique qual é a estratégia vencedora para cada caso.

Problema 17. *(IMOSL 2015) Seja n um inteiro positivo. Dois jogadores A e B jogam um jogo no qual eles alternam escolhendo inteiros positivos $k \leq n$. As regras do jogo são:*

(i) Um jogador não pode escolher um número que já foi escolhido em algum turno anterior.

(ii) Um jogador não pode escolher um número consecutivo a nenhum número que esse jogador já escolheu anteriormente.

(iii) O jogo é um empate se todos os números forem escolhido; caso contrário, o jogador que não puder mais jogar perde.

O jogador A inicia. Determine o resultado do jogo, assumindo que ambos os jogadores joguem de maneira ótima.

Problema 18. *(IMOSL 2012) Jogadores A e B jogam um jogo com $N \geq 2012$ moedas e 2012 caixas arranjadas em um círculo. Inicialmente A distribui as moedas dentre as caixas de forma que haja ao menos 1 moeda em cada caixa. Então os dois fazem movimentos em ordem $B, A, B, A, \ldots$ seguindo as regras:*

a) Em cada movimento seu, B passa 1 moeda de toda caixa para uma caixa adjacente.

b) Em cada movimento seu, A escolhe várias moedas que não foram envolvidas na jogada anterior de B e que estejam em caixas diferentes. Ela passa todas essas moedas para caixas adjacentes.

O objetivo do jogador A é garantir que haja ao menos 1 moeda em cada caixa após cada movimento seu, independentemente de como B jogue e quantos movimentos são feitos. Encontre o menor N que garanta uma vitória para ele.

Problema 19. *(IMOSL 2021) Um caçador e um coelho invisível jogam um jogo em um tabuleiro infinito. Primeiramente, o caçador colore as casas com uma quantidade finita de cores. O coelho secretamente escolhe uma casa para iniciar. A cada minuto, o coelho diz a cor da sua casa atual para o caçador, e move secretamente para uma casa adjacente que não foi visitada ainda (duas casas são adjacentes se divide uma aresta). O caçador ganha se após uma quantidade finita de movimentos:*

- *O coelho não pode se mover;*
- *Ou o caçador consegue determinar em qual casa o coelho iniciou.*

O caçador possui alguma estratégia vencedora?

Problema 20. *(IMOSL 2020) Os jogadores A e B jogam o seguinte jogo em um quadro que inicialmente contém 2020 cópias do número 1. Em toda rodada, o jogador A apaga dois números x e y do quadro, e então o jogador B escreve um número dentre $x + y$ e $|x - y|$ no quadro. O jogo acaba se ao fim de alguma rodada, uma das seguintes coisas acontece:*

1) Um dos números do quadro é maior que a soma de todos os outros;

2) Há somente zeros no quadro.

O jogador B então dá tantos biscoitos ao jogador A quanto há números no quadro. Jogador A quer a maior quantidade de biscoitos possível, enquanto B quer dar a menor quantidade possível. Determine a quantidade de biscoitos que A recebe se ambos jogam de forma ótima.

Problema 21. *(ELMO 2023) Para um conjunto S de inteiros positivos e um inteiro positivo n, considere o jogo de (n, S)-nim, o qual será descrito a seguir. Uma pilha começa com n melancias. Dois jogadores, Deric e Erek, alternam turnos comendo melancias da pilha, com Deric iniciando. Em todo turno, o número de melancias comidas deve ser um elemento de S. O último jogador que fizer um movimento ganha. Defina $f(S)$ como o conjunto de inteiros positivos n para os quais Deric tem a estratégia vencedora no (n, S)-nim.*

Seja T um conjunto de inteiros positivos. A sequência

$$T,\ f(T),\ f(f(T)),\ \ldots$$

deve ser eventualmente constante?

Problema 22. *(USATST 2020) Seja $\alpha \geq 1$ um número real. Hefesto e Poseidon jogam um jogo baseado em turnos em um tabuleiro infinito. Antes do jogo iniciar, Poseidon escolhe um número finito de casas para serem inundadas. Hefesto está construindo um dique, o qual é um subconjunto de arestas unitárias do tabuleiro (paredes) formando um caminho conexo ou ciclo que não se intersecta *.*

O jogo então inicia com Hefesto jogando primeiro. Em cada um dos turnos de Hefesto, ele adiciona uma ou mais paredes ao dique, contanto que o comprimento total do dique é no máximo $\alpha \cdot n$ após seu n-ésimo turno. Em cada um dos turnos de Poseidon, toda casa adjacente à uma casa inundada e que não possua paredes entre elas também é inundada. Hefesto ganha se o dique formar um ciclo fechado de forma que todas as casas inundadas estejam contidas no interior do ciclo — então parando a inundação e salvando o mundo. Para quais valores de α Hefesto garante a vitória em um número finito de movimentos não importando como Poseidon escolha as casas iniciais?

**Mais formalmente, devem existir pontos do reticulado $A_0, A_1, \ldots, A_k$, distintos dois a dois, exceto possivelmente $A_0 = A_k$, tal que o conjunto de paredes seja exatamente $\{A_0A_1, A_1A_2, \ldots, A_{k-1}A_k\}$. Uma vez construído um muro, ele não pode ser destruído; em particular, se o dique for um ciclo (ou seja, $A_0 = A_k$), então Hefesto não pode adicionar mais paredes. Como cada parede tem comprimento 1, o comprimento do dique é k.*

Problema 23. *(USATST 2023) Sejam m e n inteiros positivos fixos. Tsvety e Freyja jogam um jogo em um tabuleiro infinito. Tsvety escreveu secretamente um número real dentro de cada casa do tabuleiro de forma que a soma dos números dentro de cada retângulo $m \times n$ ou $n \times m$ é zero. Freyja quer descobrir todos esses números.*

A cada turno, Freyja pergunta a Tsvety sobre alguma casa do tabuleiro, e Tsvety revela o número escrito. Freyja ganha se, após uma quantidade finita de turnos ela conseguir deduzir o número escrito em cada casa do tabuleiro (Se isso nunca ocorrer, Freyja perde).

Em termos de m e n, encontre o menor número de questões que Freyja deve fazer para vencer, ou mostre que ela perde.