2. b)

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x^{(k+1)} = -(D+L)^{-1} \cdot R + (D+L)^{-1} \cdot b$$

$$= -\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ -\frac{5}{72} & \frac{1}{9} & 0 \\ -\frac{13}{252} & -\frac{2}{63} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ -\frac{5}{72} & \frac{1}{9} & 0 \\ -\frac{13}{252} & -\frac{2}{63} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 19 \\ 5 \\ 34 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{25}{72} & -\frac{1}{36} \\ 0 & -\frac{65}{252} & -\frac{17}{126} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 19/8 \\ -55/72 \\ 937/252 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5/8 & -1/4 \\ 0 & 25/72 & 1/36 \\ 0 & 65/252 & 17/126 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 19/8 \\ -55/72 \\ 937/252 \end{pmatrix}$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} 9/4 \\ -37/36 \\ 487/126 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 4135/2016 \\ -227/224 \\ 28'045/7056 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 227453/112896 \\ -1021505/1016064 \\ 14200439/3556224 \end{pmatrix}$$

c) Kontraktionsbedingung: $1 > \|B\|_\infty > \frac{7}{8}$ $\Rightarrow$ Bedingung erfüllt

$$\|x_n - \tilde{x}\|_\infty \leqslant \frac{\|B\|_\infty}{1 - \|B\|_\infty} \cdot \|x_n - x_{n-1}\|_\infty \leqslant \frac{\frac{7}{8}}{1 - \frac{7}{8}} \cdot \|x_3 - x_2\|_\infty \leqslant \frac{\frac{7}{8}}{1 - \frac{7}{8}} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1369/37632 \\ 8167/1016064 \\ 65759/3556224 \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

$$\leqslant \frac{\frac{7}{8}}{1 - \frac{7}{8}} \cdot \frac{1369}{37632} \leqslant \frac{1369}{5376} \leqslant \underline{\underline{0.2546}}$$

Der maximale absolute Fehler beträgt $\underline{\underline{0.2546}}$.

d) $\|x_n - \tilde{x}\|_\infty \leq \dfrac{\|B\|_\infty^n}{1 - \|B\|_\infty} \cdot \|x_1 - x_0\|_\infty$

$$\Rightarrow 10^{-4} \leq \frac{\frac{7}{8}^n}{1 - \frac{7}{8}} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 5/4 \\ 1/36 \\ 109/126 \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

$$\Rightarrow 10^{-4} \leq \frac{\frac{7}{8}^n}{1 - \frac{7}{8}} \cdot \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow 10^{-4} \cdot \frac{1}{8} \leq \frac{7}{8}^n \cdot \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{10^{-4} \cdot \frac{1}{8}}{\frac{5}{4}} \leq \frac{7}{8}^n$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{7}{8}} \left(\frac{10^{-4} \cdot \frac{1}{8}}{\frac{5}{4}} \right) \leq n$$

$$\Rightarrow 86.2189 \leq n$$

Laut der Berechnung sind mindestens 87 Iterationen notwendig.