1.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 5 & 9 & 1 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 19 \\ 5 \\ 34 \end{pmatrix}$$

a)
$$|8| > |5| + |2|$$
$$|9| > |5| + |1|$$
$$|7| > |4| + |2|$$

All diese Bedingungen sind erfüllt. Somit sollte das System mittels des Jacobi-Verfahren konvergieren.

b)
$$x_1 = \frac{19}{8} - \frac{5}{8}x_2 - \frac{2}{8}x_3$$
$$x_2 = \frac{5}{9} - \frac{5}{9}x_1 - \frac{1}{9}x_3$$
$$x_3 = \frac{34}{7} - \frac{4}{7}x_1 - \frac{2}{7}x_2$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5/8 & -2/8 \\ -5/9 & 0 & -1/9 \\ -4/7 & -2/7 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 19/8 \\ 5/9 \\ 34/7 \end{pmatrix}$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad x_1 = \begin{pmatrix} 0 & -5/8 & -2/8 \\ -5/9 & 0 & -1/9 \\ -4/7 & -2/7 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 19/8 \\ 5/9 \\ 34/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/8 \\ -8/9 \\ -2/7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 19/8 \\ 5/9 \\ 34/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/4 \\ -1/3 \\ 32/7 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = \begin{pmatrix} 121/84 \\ -101/84 \\ 11/3 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 435/224 \\ -493/756 \\ 429/98 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2.2098 \\ -0.6521 \\ 4.3776 \end{pmatrix}$$

c)
$$\|B\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 0 & -5/8 & -2/8 \\ -5/9 & 0 & -1/9 \\ -4/7 & -2/7 & 0 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max\left\{ 7/8, 6/9, 6/7 \right\} = \frac{7}{8} \Rightarrow$$

$\frac{7}{8}$ ist kleiner als 1, also ist die Kontraktionsbedingung erfüllt.

$$\|x^n - x^{n-1}\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 435/224 \\ -493/756 \\ 429/98 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 121/84 \\ -101/84 \\ 11/3 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 512/672 \\ 404/189 \\ 209/294 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max\left\{ \frac{512}{672}, \frac{404}{189}, \frac{209}{294} \right\} = \frac{512}{672}$$

$$\|x^n - \tilde{x}\|_\infty \leq \frac{\|B\|_\infty}{1 - \|B\|_\infty} \cdot \|x^n - x^{n-1}\|_\infty$$

$$\Rightarrow \|x^n - \tilde{x}\|_\infty \leq \frac{7/8}{1 - 7/8} \cdot \frac{512}{672}$$

$$\Rightarrow \|x^n - \tilde{x}\|_\infty \leq \underline{\underline{\frac{16}{3}}} \approx 5,\overline{3}$$

Der grösste absolute Fehler beträgt $\underline{\underline{5,\overline{3}}}$.

d) $\|x^1 - x^0\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 9/4 \\ -1/3 \\ 32/7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 5/4 \\ 2/3 \\ 11/7 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max\left\{\frac{5}{4}, \frac{2}{3}, \frac{11}{7}\right\} = 11/7$

$\|x^n - \tilde{x}\|_\infty = 10^{-4}$

$\Rightarrow \|x^n - \tilde{x}\|_\infty \leq \dfrac{\|B\|_\infty^n}{1 - \|B\|_\infty} \cdot \|x^1 - x^0\|_\infty$

$\Rightarrow 10^{-4} \leq \dfrac{\left(\frac{7}{8}\right)^n}{1 - \frac{7}{8}} \cdot \dfrac{11}{7}$ Laut Berechnung sind mindestens 88 Iterationen notwendig.

$\Rightarrow \dfrac{10^{-4}}{8} \leq \left(\frac{7}{8}\right)^n \cdot \dfrac{11}{7}$

$\Rightarrow \dfrac{\frac{10^{-4}}{8}}{\frac{11}{7}} \leq \left(\frac{7}{8}\right)^n \Rightarrow \log_{7/8}\left(\dfrac{\frac{10^{-4}}{8}}{\frac{11}{7}}\right) \leq n \Rightarrow \underline{\underline{n \geq 87.93}}$

e) $\|x_3 - x_2\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 495/224 \\ -493/756 \\ 429/98 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 121/84 \\ -101/84 \\ 11/3 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 517/672 \\ 59/108 \\ 209/294 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \dfrac{517}{672}$

$\Rightarrow 10^{-4} \leq \dfrac{\left(\frac{7}{8}\right)^n}{1 - \frac{7}{8}} \cdot \dfrac{517}{672}$

$\Rightarrow \log_{7/8}\left(\dfrac{\frac{10^{-4}}{8}}{\frac{517}{672}}\right) \leq n \Rightarrow \underline{\underline{n \geq 82.58}}$ Es sind 83 Iterationen notwendig.