9.1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10^{-4} & 0 & 10^{-4} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 20'000 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -10'000 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{cond}(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty = 3 \cdot 20001 = \underline{\underline{60'003}}$

b) $\tilde{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$, $\varepsilon > 0$, $\dfrac{\|\tilde{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = 0.01$

$\|\Delta b\|_\infty = \|b - \tilde{b}\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\varepsilon \end{pmatrix} \right\|_\infty = \varepsilon$

$\|b\|_\infty = 1$

$\Rightarrow \dfrac{\|\tilde{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leqslant \text{cond}(A) \cdot \dfrac{\|\Delta b\|_\infty}{\|b\|_\infty}$

$\Rightarrow 0.01 \leqslant 60'003 \cdot \dfrac{\varepsilon}{1}$

$\Rightarrow 0.01 \leqslant 60'003 \cdot \varepsilon$

$\Rightarrow \dfrac{0.01}{60'003} \leqslant \varepsilon \Rightarrow$ Die Abweichung (ε) darf höchstens $\dfrac{0.01}{60'003}$ sein, wenn die Abschätzung des relativen Fehlers höchstens 1% sein darf.

c) $A\tilde{x} = \tilde{b} \Rightarrow \tilde{x} = \begin{pmatrix} -0.99666683 \\ 1 \\ 0.99833342 \end{pmatrix}$, $Ax = b \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \dfrac{\|\tilde{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \dfrac{\left\| \begin{pmatrix} -0.997 \\ 1 \\ 0.998 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_\infty}{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_\infty} = \underline{\underline{0.003}} \Rightarrow$ Der tatsächliche Fehler beträgt 0.3%.

d) $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1+10^{-7} & 10^{-7} & 2+10^{-7} \\ 10^{-7} & 1+10^{-7} & 10^{-7} \\ 10^{-4}+10^{-7} & 10^{-7} & 10^{-4}+10^{-7} \end{pmatrix}$, $\|A - \tilde{A}\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} -10^{-7} & -10^{-7} & -10^{-7} \\ -10^{-7} & -10^{-7} & -10^{-7} \\ -10^{-7} & -10^{-7} & -10^{-7} \end{pmatrix} \right\|_\infty = 3 \cdot 10^{-7}$

$\Rightarrow \dfrac{\|x - \tilde{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leqslant \dfrac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) \cdot \frac{\|A - \tilde{A}\|_\infty}{\|A\|_\infty}} \cdot \left(\dfrac{\|A - \tilde{A}\|_\infty}{\|A\|_\infty} + \dfrac{\|b - \tilde{b}\|_\infty}{\|b\|_\infty} \right) \Rightarrow 0.01 \leqslant \dfrac{60'003}{1 - 60'003 \cdot \frac{3 \cdot 10^{-7}}{3}} \cdot$

$\left(\dfrac{3 \cdot 10^{-7}}{3} + \dfrac{\varepsilon}{1} \right) \Rightarrow \dfrac{0.01}{\frac{60'003}{1 - 60'000 \cdot \frac{3 \cdot 10^{-7}}{3}}} - \dfrac{3 \cdot 10^{-7}}{3} \leqslant \varepsilon \Rightarrow$ Die Abweichung (ε) darf höchstens $6.5658 \cdot 10^{-8}$ sein, damit der Fehler innerhalb des Erlaubten Bereiches liegt.