1. b) 1) Selbstabbildung: $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $F(x) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$F(x) \in [F_{min}, F_{max}] < [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$$F_{min} = F(0) = \frac{1}{221} \cdot (230 \cdot 0^4 + 18 \cdot 0^3 + 9 \cdot 0^2 - 9) = -\frac{9}{221} \approx -0{,}0407$$

$$F_{max} = F(0.5) \approx 0{,}0447$$

Der Bildbereich ist innerhalb des Intervalles

2) Kontraktion: $|F(x_1) - F(x_2)| \leq \alpha \cdot |x_1 - x_2|$

$$\alpha = \max |F'(x)|, \quad x \in [-1/2, 1/2]$$

$$= \max |F'(0.5)|$$

$$= |920 \cdot 0{,}5^3 + 54 \cdot 0{,}5^2 + 18 \cdot 0{,}5|$$

$$= \frac{275}{442} \approx \underline{\underline{0.6222}}$$

α ist kleiner als 1.

$\Rightarrow$ Die Bedingungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind erfüllt.

c) a-priori: $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot |x_1 - x_0| \leq 10^{-9}$

$$\Rightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{10^{-9}}{|x_1 - x_0|} \cdot (1-\alpha)\right)}{\ln(\alpha)} \qquad \alpha = \frac{275}{442}, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = -\frac{9}{221}$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{10^{-9}}{\frac{9}{221}} \cdot \left(1 - \frac{275}{442}\right)\right)}{\ln\left(\frac{275}{442}\right)}$$

$$\Rightarrow n \geq 38{,}376$$

Die Abschätzung besagt, dass die erforderliche Genauigkeit nach 39 Iterationen erreicht ist. Dieser Wert ist jedoch unrealistisch, weil der Wert bei dieser Iteration gemäss der Definition der a-posteriori-Abschätzung bereits viel genauer ist.