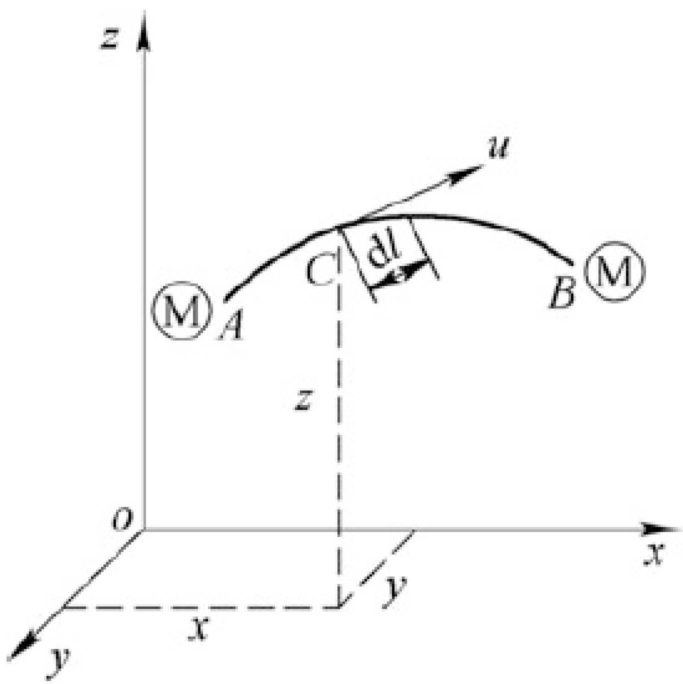
Chapitre 5

Dynamique des Fluides

5.1 CONCEPTS DE BASE D'ÉCOULEMENT DES FLUIDES

5.1.1 Ligne du cheminement d'écoulement & ligne de courant

- Trajectoires suivies par des particules individuelles de fluide sur une certaine période
- Direction de cheminement déterminée par les lignes de courant du fluide à chaque instant dans le temps



Après temps court, la particule M se déplace de A à B & la courbe AB est la ligne de cheminement de particule M

Si dl est déplacement court de M pendant un temps dt, alors :

$$v = \frac{dl}{dt}$$

Ses composantes sur les axes x, y et z sont:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt}, \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

où dx, dy, dz sont les projections de dl dans le système de coordonnées

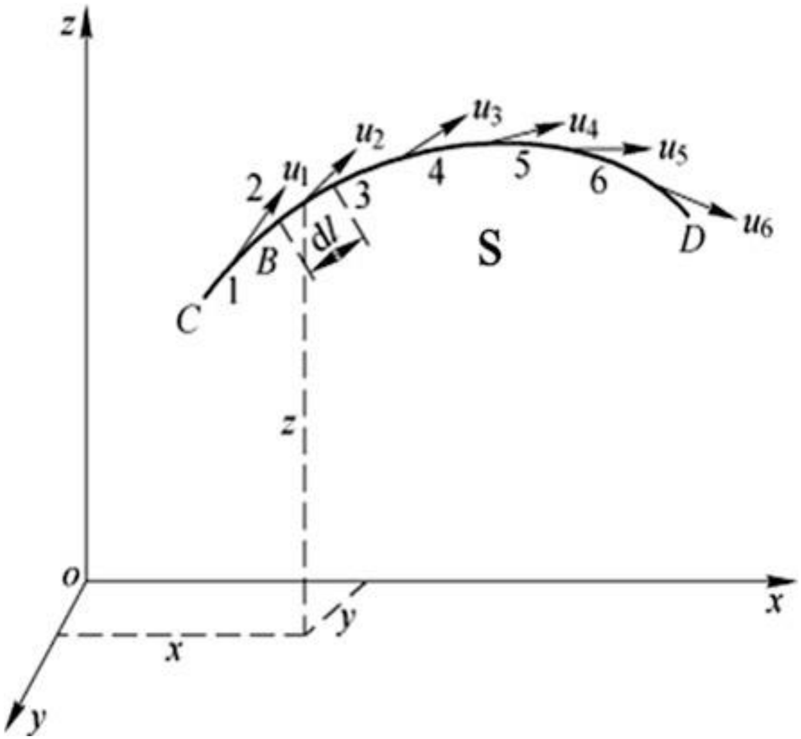
Par conséquent : $dt = \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}$

$\Rightarrow$ Équation différentielle de la ligne du cheminement

5.1 CONCEPTS DE BASE D'ÉCOULEMENT DES FLUIDES

5.1.1 Ligne du cheminement d'écoulement & ligne de courant

Lignes de courant : familles de courbes tangentes au vecteur vitesse de l'écoulement



Lignes d'écoulement & de courant coïncident en écoulement permanent ; ce qui n'est pas le cas en écoulement non permanent.

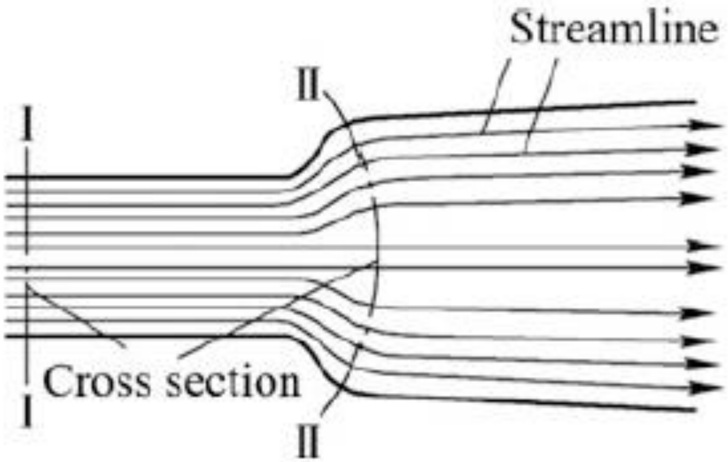
$\dfrac{dx}{v_x} = \dfrac{dy}{v_y} = \dfrac{dz}{v_z} \Rightarrow$ Équation différentielle de ligne de courant

Exemple 1

En admettant que les composantes de vitesse dans un champ d'écoulement sont $v_x = x + t$, $v_y = -y + t$, $v_z = 0$; trouver la ligne du cheminement de l'écoulement et la ligne de courant qui passe par le point $(-1, -1)$ quant $t = 0$.

5.1 CONCEPTS DE BASE D'ÉCOULEMENT DES FLUIDES

5.1.2 Section, vitesse & débit



- Région ou zone perpendiculaire à toutes les lignes de courant (volume de contrôle) est appelée section
- Section = surface plane si les ligne de courant sont parallèles; autrement, c'est une surface courbe avec diverses formes
- Vitesse du fluide dépend de sa position sur la section
- Débit passant à travers une section différentielle dA est:

$$dQ = v\,dA$$

Unité : m^3/s (L/s) ou débit massique kg/s

- Débit total est :

$$Q = \int_Q dQ = \int_A v dA$$

- Vitesse moyenne :

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{\int_A v dA}{A}$$

5.2 ÉQUATION DE CONTINUITÉ D'ÉCOULEMENT DE FLUIDE

5.2.1 Équation de continuité dans un système rectangulaire de coordonnées

Pour un écoulement compressible permanent en 3D :

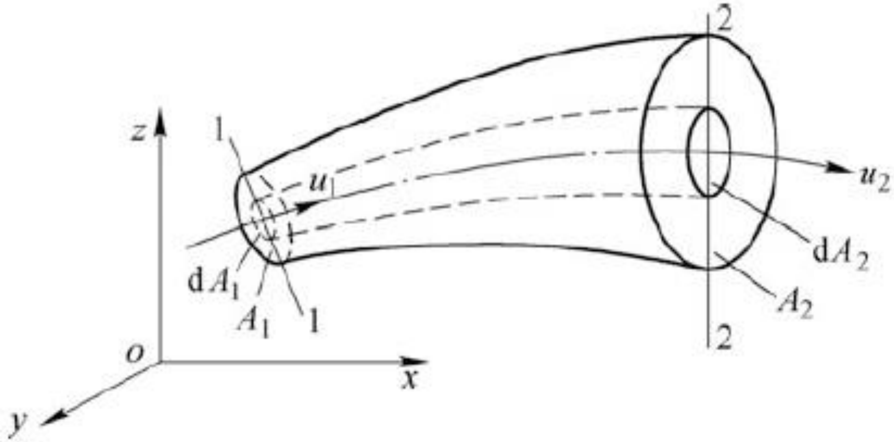
$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0$$

Pour un fluide incompressible, ρ = constante, écoulement permanent ou non

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

5.2 ÉQUATION DE CONTINUITÉ D'ÉCOULEMENT DE FLUIDE

5.2.2 Équation de continuité pour un faisceau d'écoulement & écoulement total



- Selon la loi de conservation de masse : débit entrant = débit sortant

$$dM_1 = dM_2$$

- À savoir,

$$\rho_1 v_1 dA_1 = \rho_2 v_2 dA_2$$

- Pour un fluide incompressible :

$$\rho_1 = \rho_2, \text{ alors :}$$

$$v_1 dA_1 = v_2 dA_2$$

$$dQ_1 = dQ_2$$

- Débit à travers une section d'écoulement est le même

5.2 ÉQUATION DE CONTINUITÉ D'ÉCOULEMENT DE FLUIDE

5.2.2 Équation de continuité pour un faisceau d'écoulement & écoulement total

- Équation de continuité pour l'écoulement total

  À travers une section,

$$\int_{A_1} \rho_1 v_1 dA_1 = \int_{A_2} \rho_2 v_2 dA_2$$

$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$$

$\rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2 \Rightarrow$ Équation de continuité de l'écoulement total

Pour des fluides incompressibles:

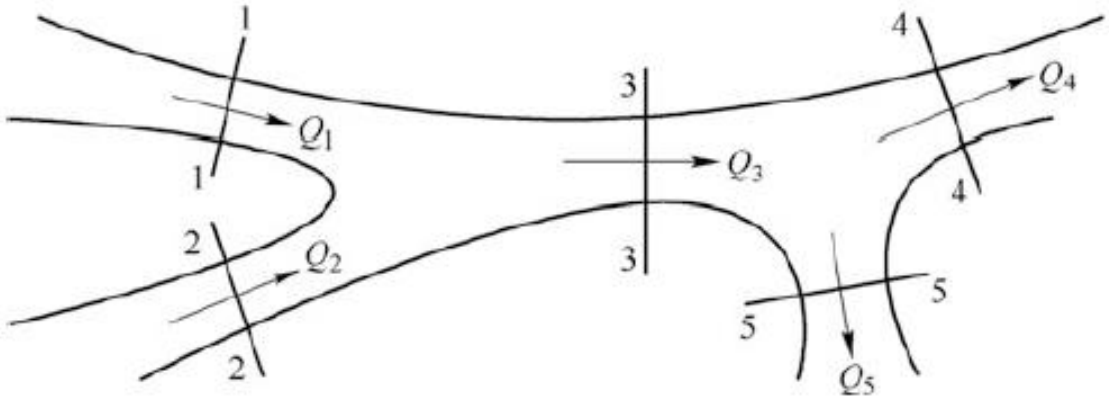
$$Q_1 = Q_2 \text{ ou } v_1 A_1 = v_2 A_2$$

Sections d'écoulement sont inversement proportionnelles aux vitesses dans un écoulement d'un fluide satisfaisant à l'équation de continuité

5.2 ÉQUATION DE CONTINUITÉ D'ÉCOULEMENT DE FLUIDE

5.2.2 Équation de continuité pour un faisceau d'écoulement & écoulement total

- Équation de continuité pour l'écoulement total



Pour la figure ci-dessus :

$$Q_3 = Q_1 + Q_2 \Rightarrow A_3 v_3 = A_1 v_1 + A_2 v_2$$

$$Q_4 + Q_5 = Q_1 + Q_2 \Rightarrow A_4 v_4 + A_5 v_5 = A_1 v_1 + A_2 v_2$$

5.2 ÉQUATION DE CONTINUITÉ D’ÉCOULEMENT DE FLUIDE

5.2.2 Équation de continuité pour un faisceau d’écoulement & écoulement total

Exemple 2

Un séparateur cyclonique de poussière a une entrée rectangulaire de dimensions 100 mm x 20 mm et la section du tuyau de succion est un cercle de 100 mm de diamètre. La vitesse à l’entrée est 12 m/s. Déterminer la vitesse dans le tuyau de succion.

5.3 ÉQUATION DE BERNOULLI

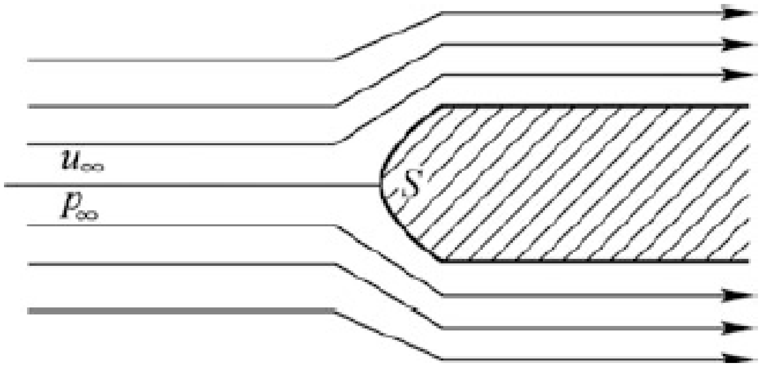
- Bernoulli (Daniel Bernoulli : 1700–1782) a démontré que

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = \text{constante}$$ le long d'une ligne de courant dans un fluide non visqueux

(z : pression hydrostatique, $\frac{p}{\gamma}$: pression statique, $\frac{v^2}{2g}$: pression dynamique)

À deux points d'une même ligne de courant :

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}$$



Exemple 3

Un écoulement autour d'un objet est montré à la figure ci-contre. La vitesse et la pression à l'infini en amont sont respectivement 4.2 m/s et 0 Pa. La vitesse de l'eau diminue suite à la résistance de l'objet et la vitesse de stagnation au point S est zéro. Déterminer la pression au point S.

5.3 ÉQUATION DE BERNOULLI

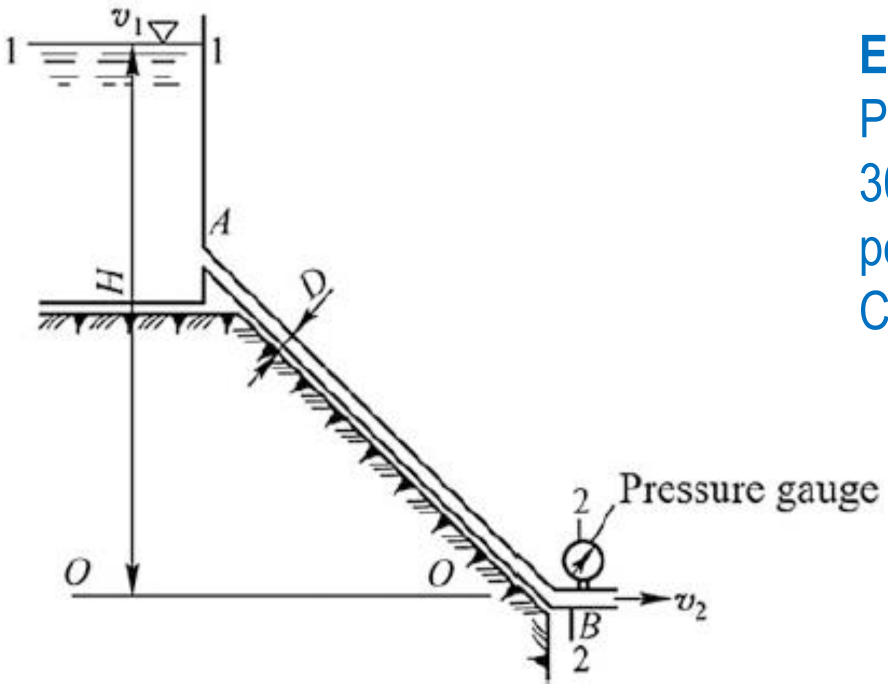
- Équation de Bernoulli dans un liquide incompressible visqueux en écoulement permanent :

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + h_L$$

h_L : perte de charge

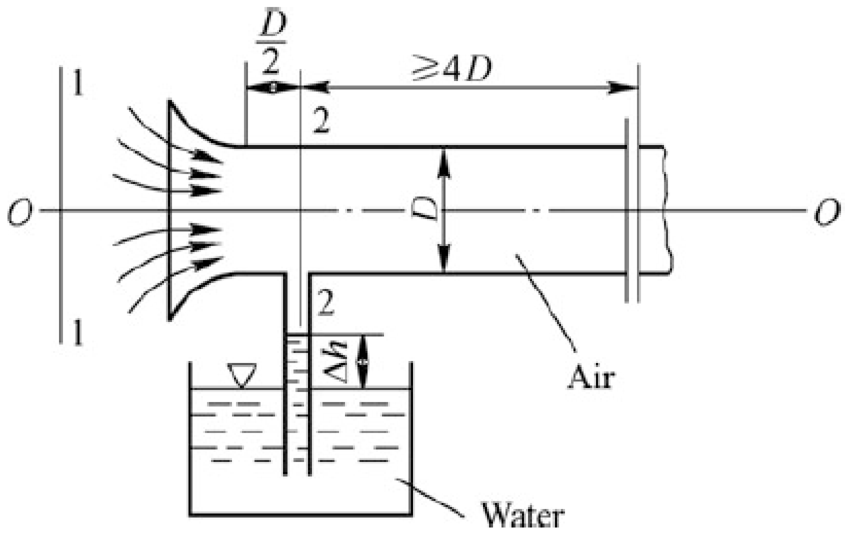
- Équation de Bernoulli avec entrée ou sortie d'énergie

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} \pm E = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + h_L$$



Exemple 4

Pour la figure ci-contre, le diamètre du tuyau D = 300 mm et le débit Q = 0.04 m^3/s. La pression au point B est 9.8 x 10^4 Pa et la hauteur H = 20 m. Calculer la perte de charge dans le tuyau AB.

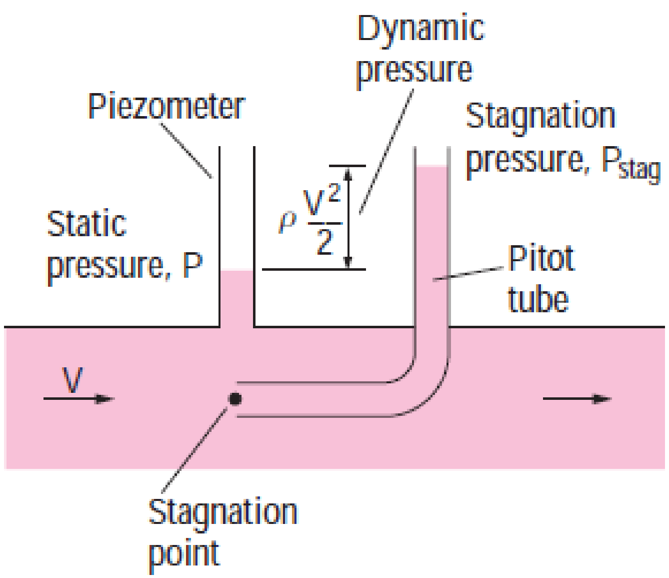


Exemple 5

Pour la figure ci-contre, le diamètre intérieur du tuyau est D = 0.3 m et le poids spécifique de l'air est 12.6 N/m^3, et Δh = 0.2 m. Déterminer le débit Q.

5.4 INSTRUMENTS DE MESURE DE VITESSE & DÉBIT

Instruments de mesure de vitesse et de débit en ingénierie sont inventés en termes de l'équation de Bernoulli. Parmi eux, figurent le **tube Pitot** et **tube Venturi**



5.4.1 Tube de Pitot

Somme pression statique & pression dynamique = pression de stagnation

$$P_{stag} = P + \rho \frac{V^2}{2}$$

$$V = \sqrt{\frac{2(P_{stag} - P)}{\rho}}$$

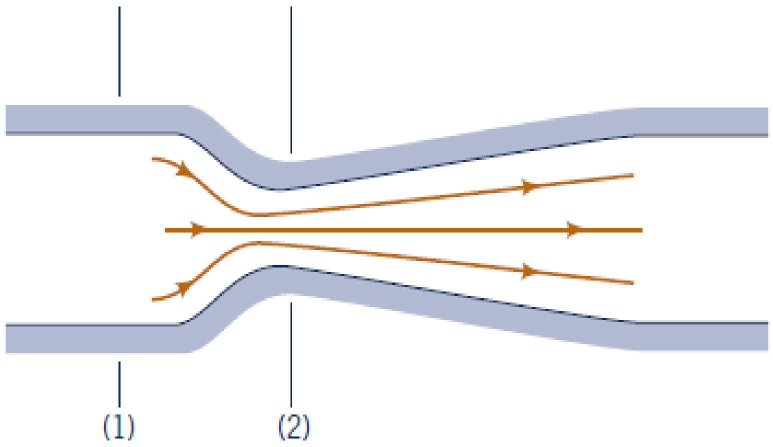
$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + h$$

$$z_1 = z_2 \ \& \ p_1 = p_2$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

5.4 INSTRUMENTS DE MESURE DE VITESSE & DÉBIT

5.4.2 Tube de Venturi



$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}$$

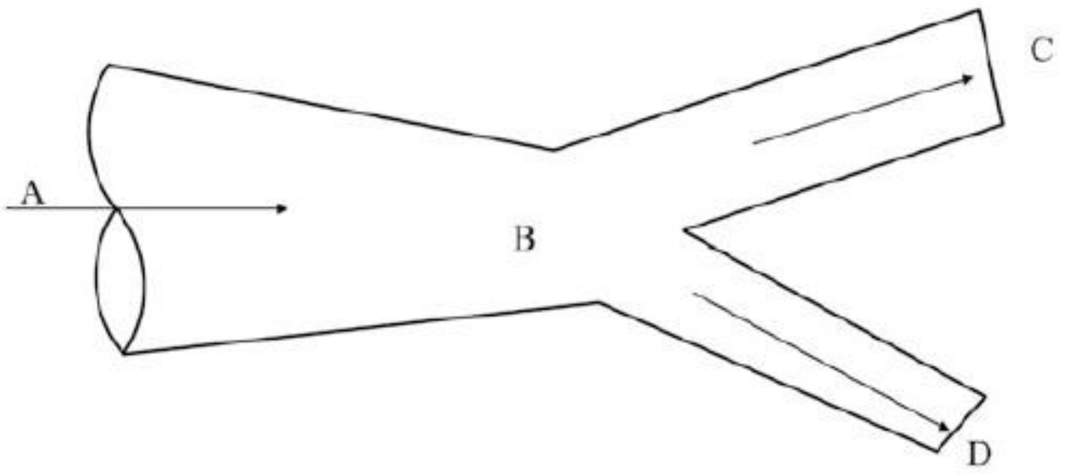
$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = \left(\frac{\pi d_1^2}{4} \Big/ \frac{\pi d_2^2}{4} \right) v_1 = \frac{d_1^2}{d_2^2} v_1$$

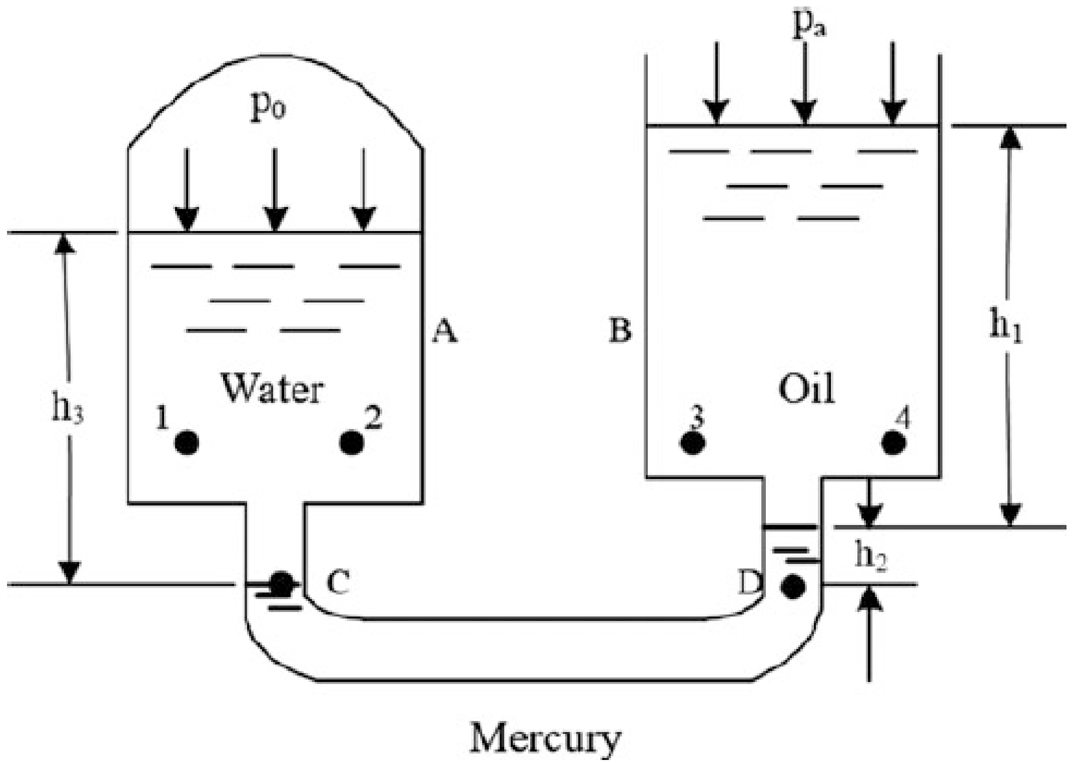
$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma} \right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma} \right) = \frac{v_1^2}{2g} \left(\frac{d_1^4}{d_2^4} - 1 \right)$$

$$Q = A_1 \sqrt{\frac{2\,(p_1 - p_2)}{\rho \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1 \right)}}$$

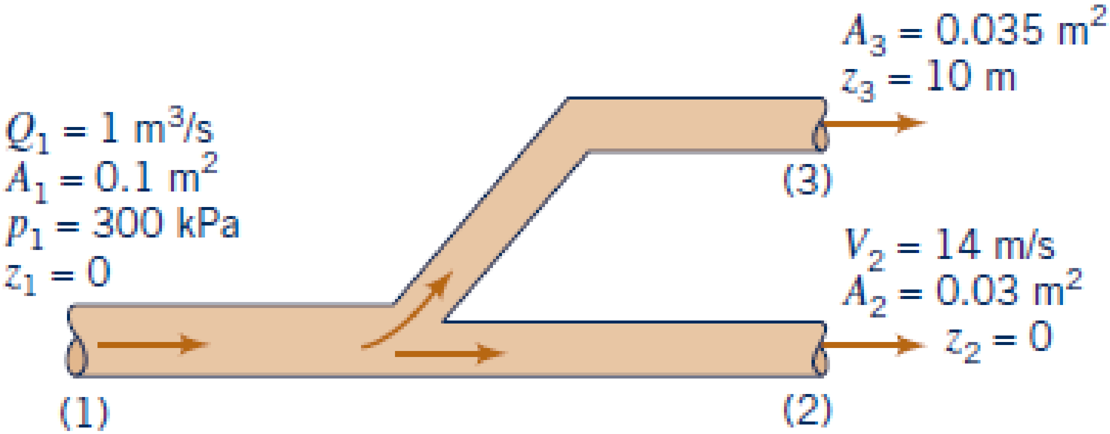
Exemple 6

On donne les dimensions suivantes : d_A = 45 cm, d_B = 30 cm, d_C = 20 cm, d_D = 15 cm, v_A = 2 m/s, v_C = 4 m/s. Calculer v_B et v_D





P_a = 98 kPa, h_1 = 1 m, h_2 = 0.2 m, poids volumique de l'huile (oil) = 7450 N/m^3, poids volumique du mercure (mercury) = 133 kN/m^3. Calculer la pression au point C



Si les effets de viscosité sont négligeables, calculer la pression à la section (2) et à la section (3)