

---

## Chapitre 3

# **Statique des Fluides**

---

## 3.1 FORCES AGISSANT SUR UN FLUIDE

### 3.1.1 Force massique

- Force agissant sur toutes les particules conduisant à un certain champ de force
- Magnitude (grandeur) de force massique est proportionnelle à la masse du fluide ou au volume du fluide
- Lorsque le volume de particule du fluide tends vers zéro,  $\Delta V \rightarrow 0$

$$dF_m = dm \cdot a_m = dm(X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}).$$

$dF_m$  : force massique unitaire,  $dm$  : masse unitaire,  $a_m$  : accélération

### 3.1.2 Force superficielle

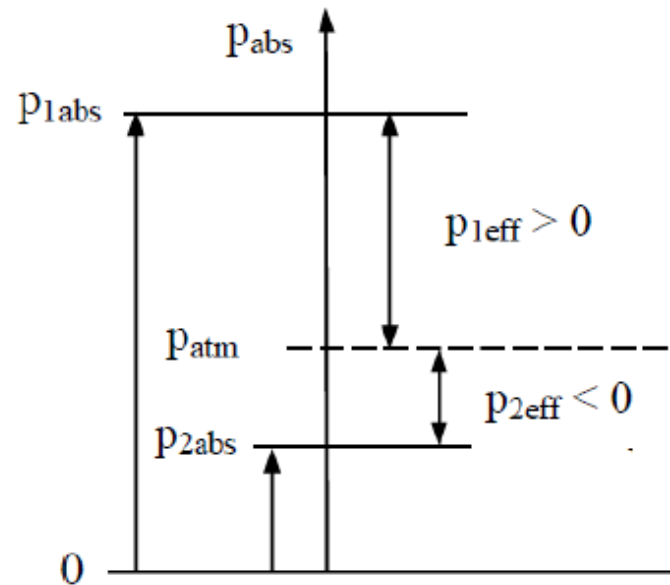
- Force agissant sur la surface de contact des particules du fluide par une couche adjacente du fluide ou un autre fluide
- Sa valeur est proportionnelle à la surface de contact
- Forces superficielles peuvent être divisées en 2 catégories : force normale perpendiculaire à la surface agissante (pression) & force de cisaillement pareille à la contrainte de cisaillement parallèle à la surface agissante

## 3.2 PRESSION ABSOLUE & PRESSION EFFECTIVE

- Par rapport à une référence, on a pression absolue ( $P_{abs}$ ) ou effective ( $P_{eff} = \text{jauge}$ ).
- Pression absolue, référence = 0
- Pression effective, référence =  $P_{atm}$
- Relation entre  $P_{atm}$ ,  $P_{abs}$  et  $P_{eff}$  :

$$P_{abs} = P_{atm} + P_{eff}$$

- $P_{abs}$  tjrs positive ou nulle (vide)
- $P_{eff}$  peut être positive, négative ou nulle
- Relation fondamentale de l'hydrostatique (en pression absolue ou pression effective):



## 3.2 MESURE DE PRESSION

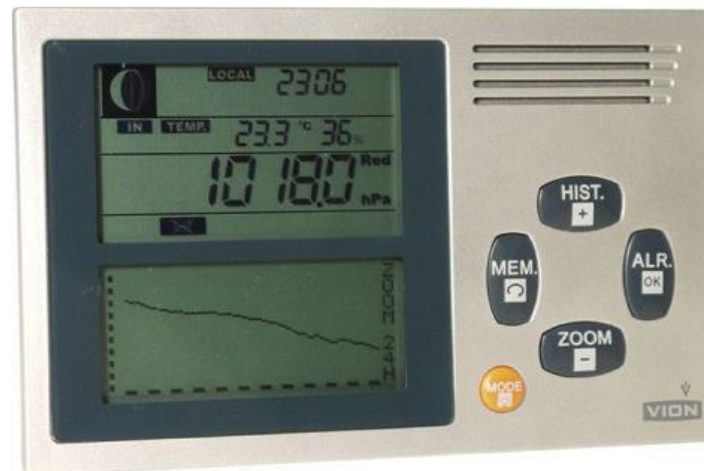
### 3.2.1 Pression atmosphérique (Baromètre)



Baromètre à mercure  
(expérience de Torricelli)



Baromètre à aiguille



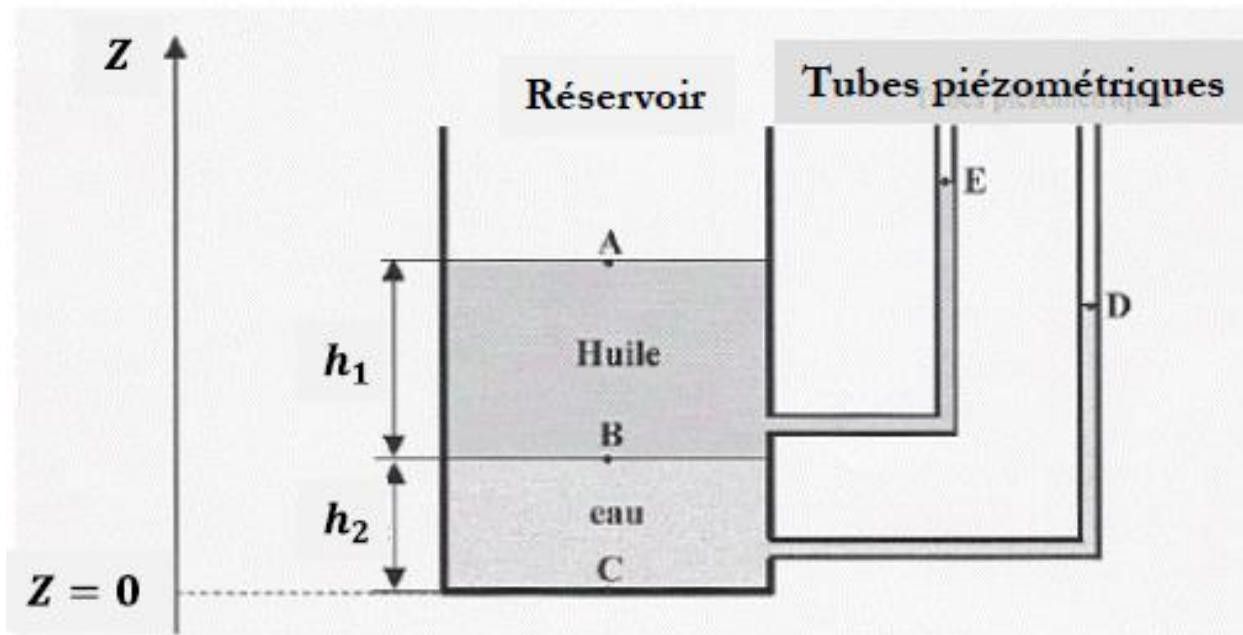
Baromètre électronique

## 3.2 MESURE DE PRESSION

### 3.2.2 Pression effective (Manomètres)

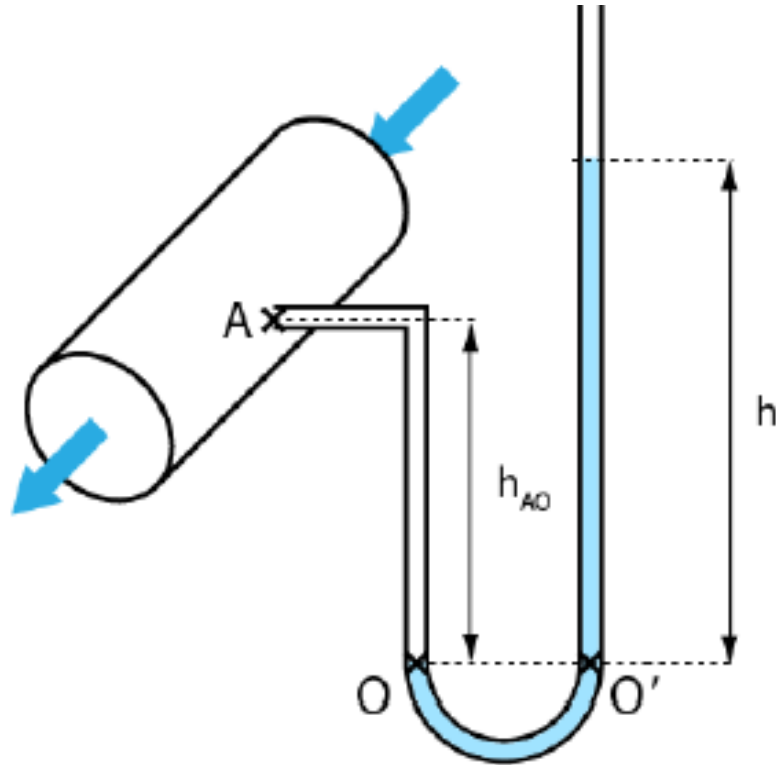


### 3.2.3 Pression des liquides (Tubes piézométriques)

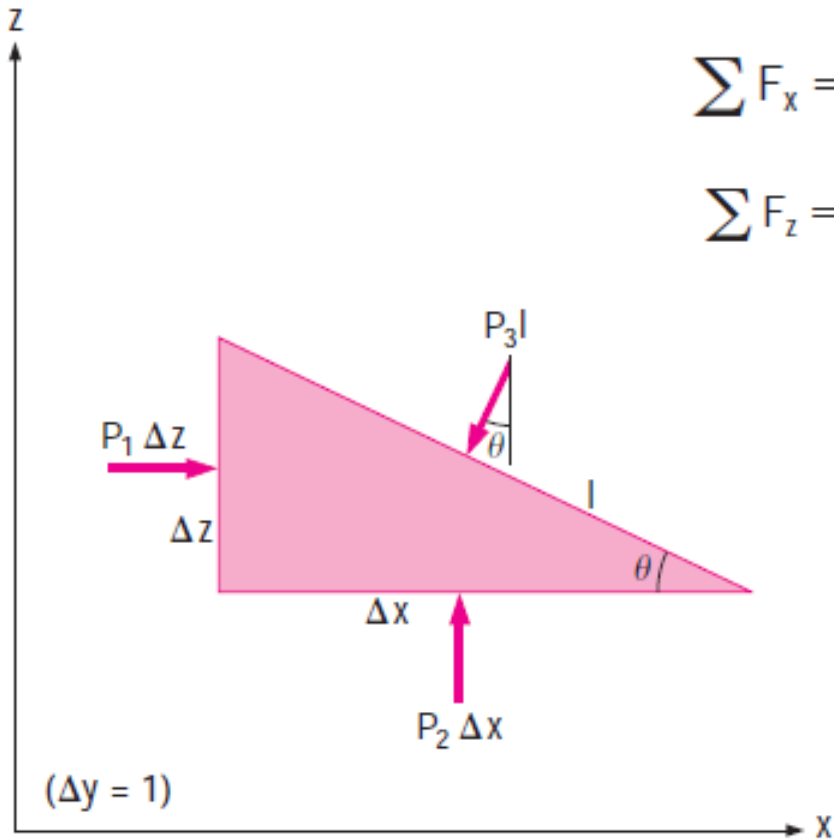


## 3.2 MESURE DE PRESSION

### 3.2.4 Pression des liquides (Tubes en U)



## 3.2 PRESSION EN UN POINT



$$\sum F_x = ma_x = 0:$$

$$P_1 \Delta z - P_3 l \sin \theta = 0$$

$$\sum F_z = ma_z = 0:$$

$$P_2 \Delta x - P_3 l \cos \theta - \frac{1}{2} \rho g \Delta x \Delta z = 0$$

$$W = mg = \rho g \Delta x \Delta z / 2$$

$$\Delta z = l \sin \theta \text{ \& } \Delta x = l \cos \theta$$

$$P_1 - P_3 = 0$$

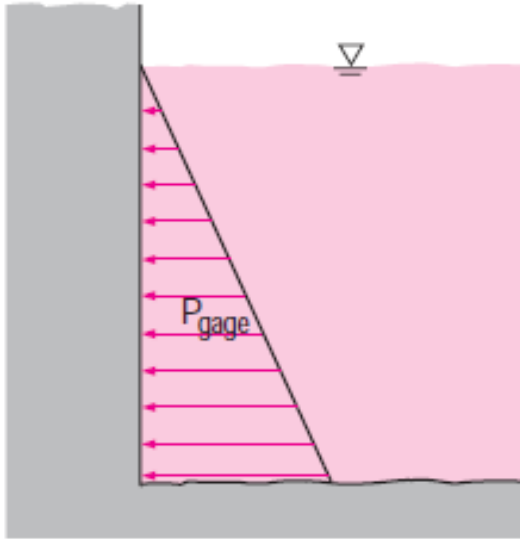
$$P_2 - P_3 - \frac{1}{2} \rho g \Delta z = 0$$

Lorsque  $\Delta z \rightarrow 0$ ,

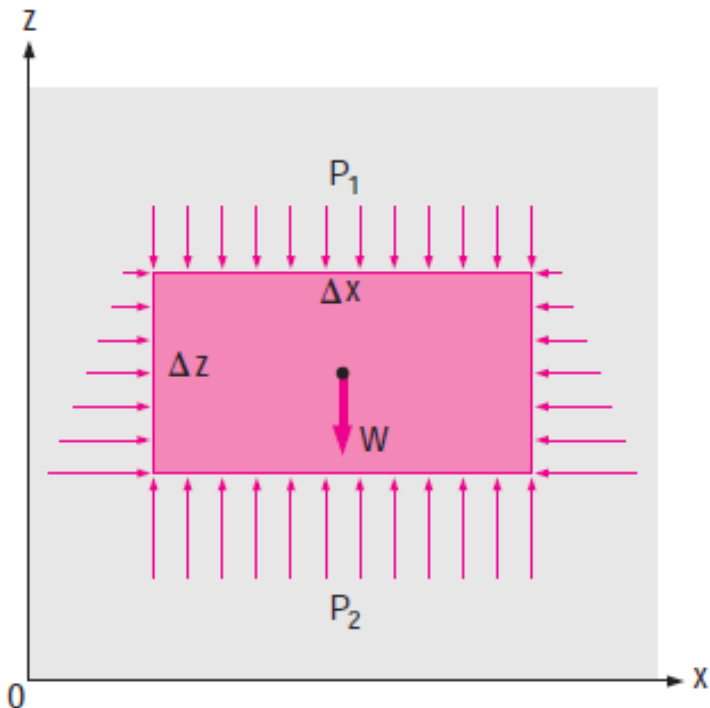
$$P_1 = P_2 = P_3 = P$$

La pression en un point dans un fluide est la même dans toutes les directions

## 3.2 VARIATION DE PRESSION AVEC LA PROFONDEUR



- Pression dans un fluide au repos :
  - ne change pas dans la direction horizontale (sur un même plan horizontal)
  - augmente avec la profondeur



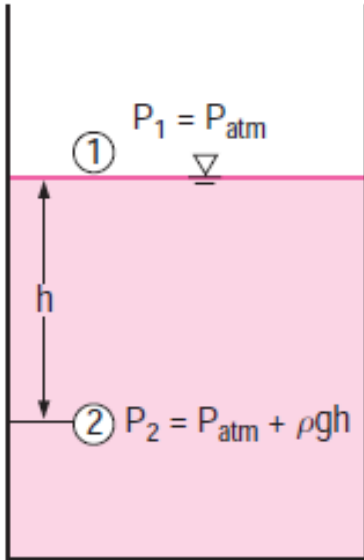
$$\sum F_z = ma_z = 0: \quad P_2 \Delta x - P_1 \Delta x - \rho g \Delta x \Delta z = 0$$

$$W = mg = \rho g \Delta x \Delta z$$

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \rho g \Delta z = \gamma_s \Delta z$$



### 3.2 VARIATION DE PRESSION AVEC LA PROFONDEUR



$$P = P_{atm} + \rho gh$$

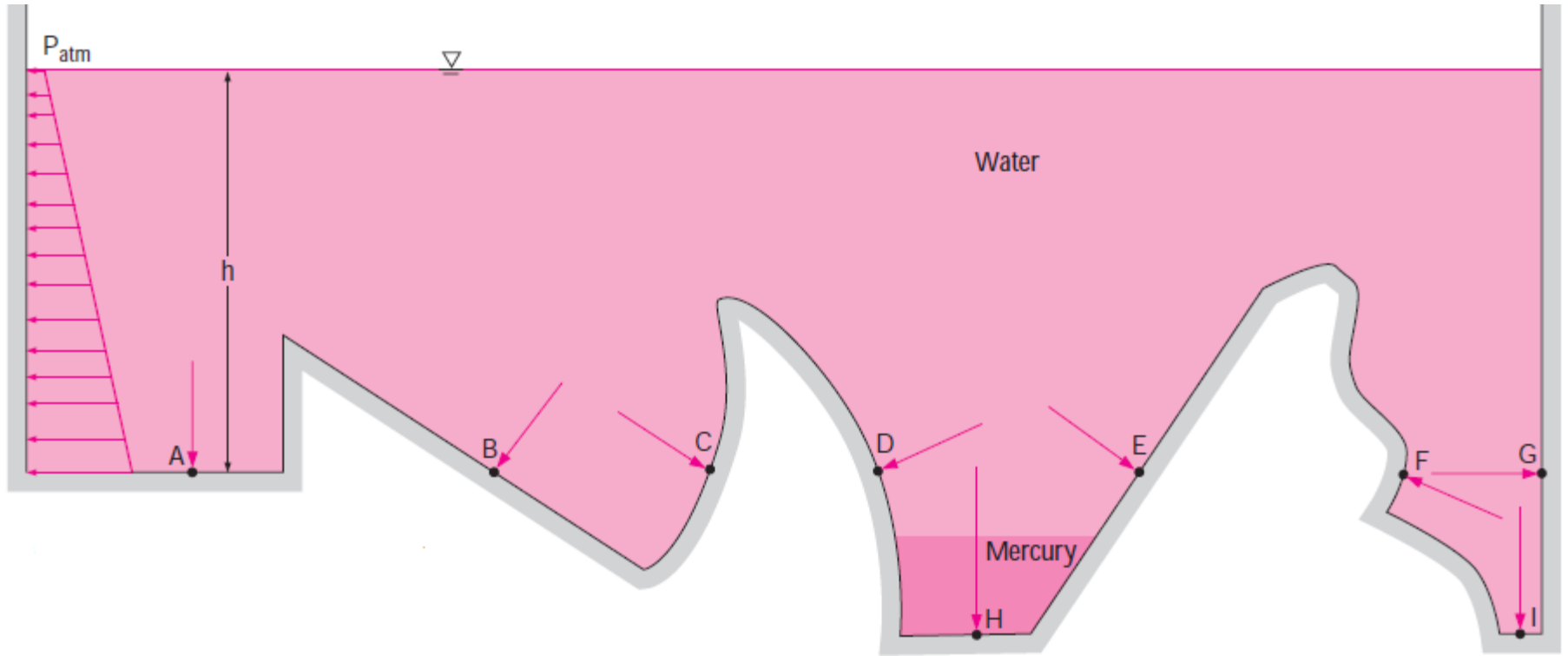
$$P_{gage} = \rho gh$$

Pour des fluides dont la masse volumique change avec l'élévation

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

$$\Delta P = P_2 - P_1 = - \int_1^2 \rho g \, dz$$

### 3.2 VARIATION DE PRESSION AVEC LA PROFONDEUR



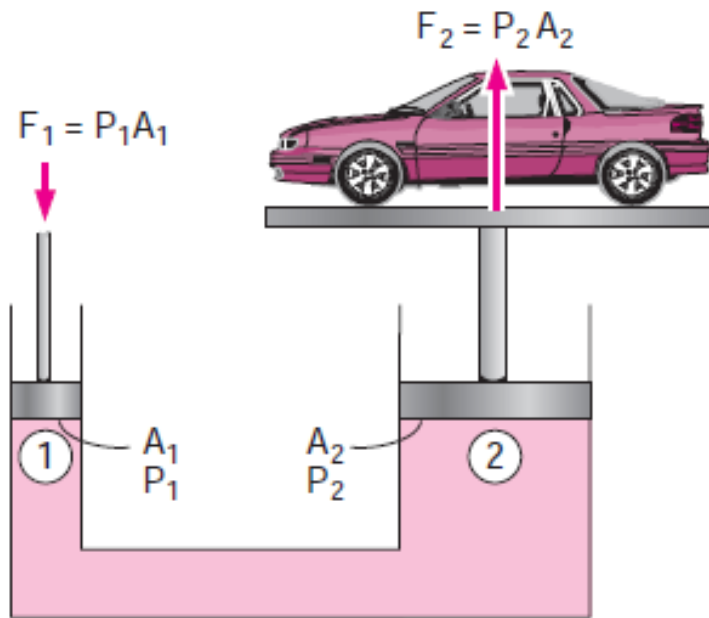
$$P_A = P_B = P_C = P_D = P_E = P_F = P_G = P_{atm} + \rho gh$$

$$P_H \neq P_I$$

## 3.2 VARIATION DE PRESSION AVEC LA PROFONDEUR

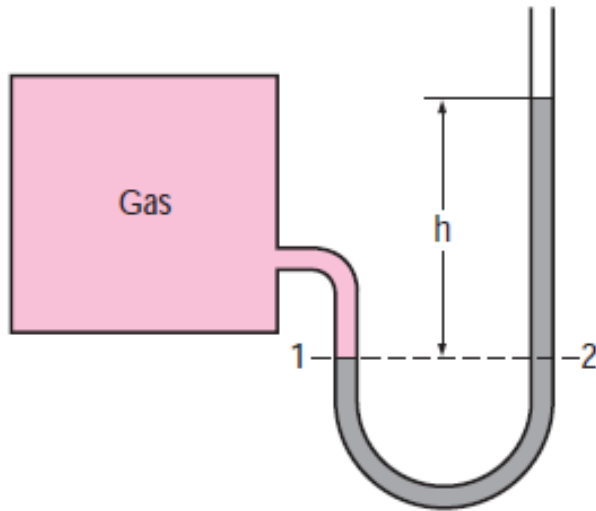
### ► Loi de Pascal (Blaise Pascal : 1623-1662) :

- pression appliquée à un fluide confiné augmente la pression partout dans le système par la même quantité
- force appliquée par un fluide est proportionnelle à la surface

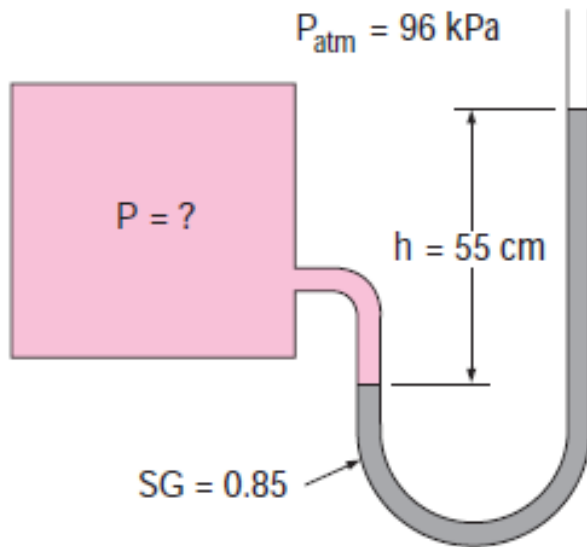


$$P_1 = P_2 \quad \rightarrow \quad \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad \rightarrow \quad \frac{F_2}{F_1} = \frac{A_2}{A_1}$$

### 3.3 MANOMÈTRES



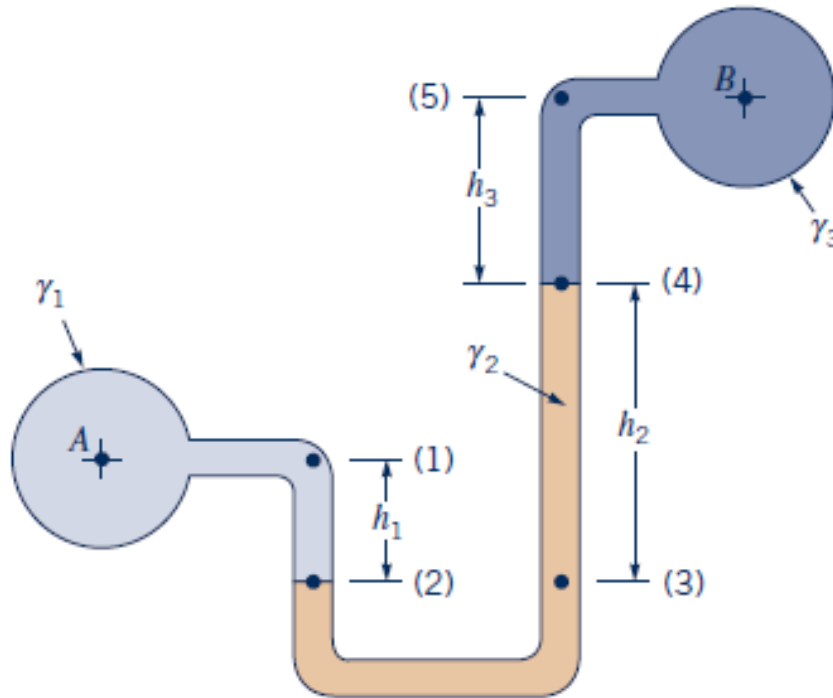
$$P_2 = P_{\text{atm}} + \rho gh$$



#### Exemple 1

Un manomètre est utilisé pour mesurer la pression dans une citerne. Le fluide a une densité de 0.85 et la colonne du manomètre a une hauteur de 55 cm. Si la pression atmosphérique locale est 96 kPa, calculer la pression absolue dans la citerne.

### 3.3 MANOMÈTRES

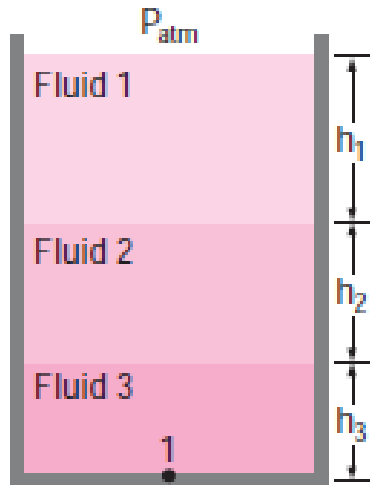


#### Exemple 2

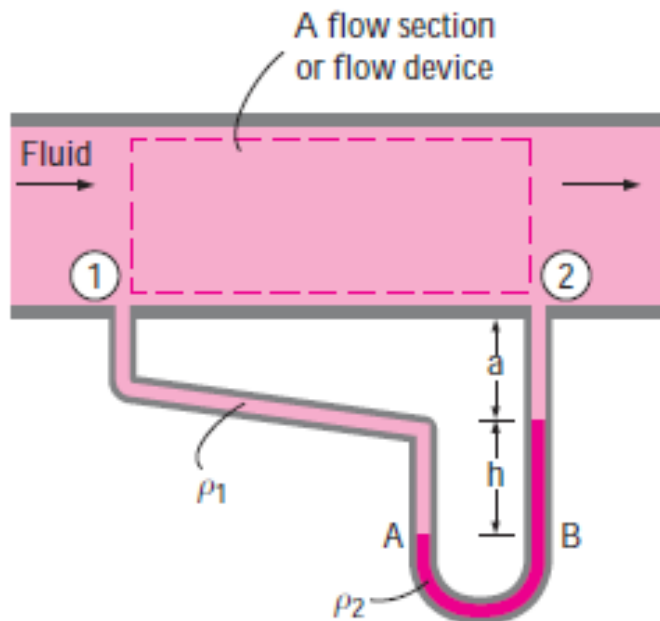
Pour la Figure ci-haut, déterminer la pression au point A et en déduire la différence de pression entre A et B.

### 3.3 MANOMÈTRES

Plusieurs problèmes en ingénierie et quelques manomètres impliquent multiples fluides non miscibles de différentes masses volumiques empilés les uns sur les autres.

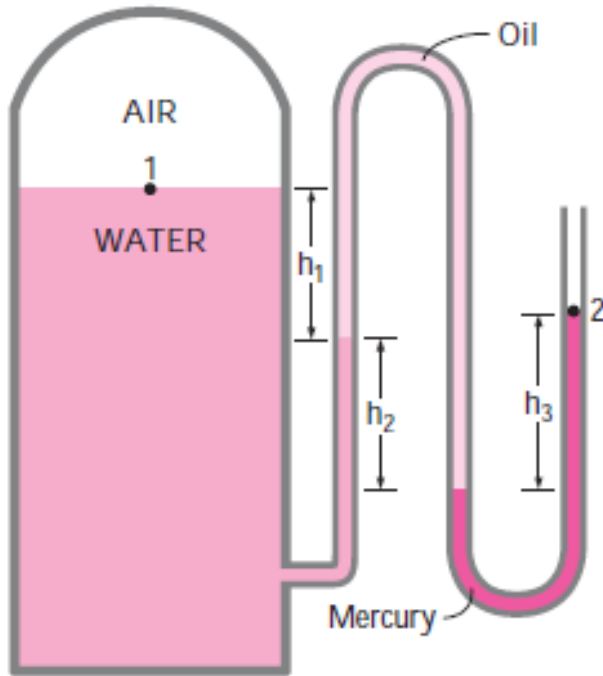


$$P_{atm} + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 + \rho_3 g h_3 = P_1$$



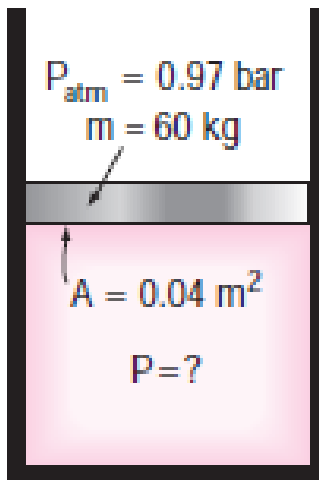
$$P_1 + \rho_1 g(a + h) - \rho_2 g h - \rho_1 g a = P_2$$

### 3.3 MANOMÈTRES



#### Exemple 3

Déterminer la pression dans la citerne si  $h_1 = 0.5$  m,  $h_2 = 0.2$  m,  $h_3 = 0.35$  m. Les masses volumiques de l'eau, de l'huile et du mercure sont respectivement  $1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $850 \text{ kg/m}^3$  et  $13600 \text{ kg/m}^3$ .



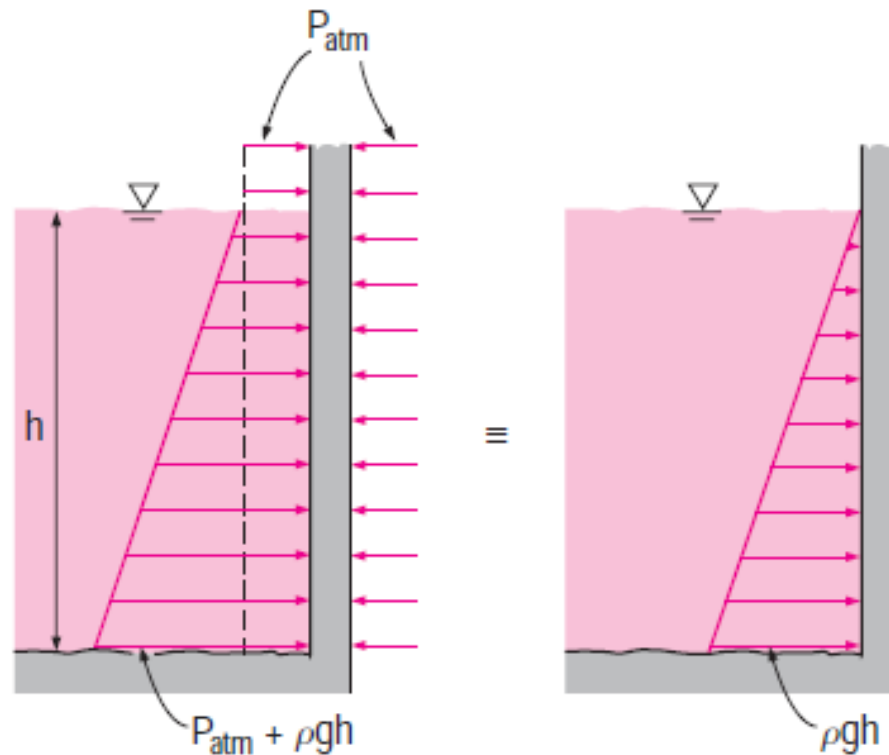
#### Exemple 4

Déterminer la pression dans le cylindre ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ). Si une chaleur est transférée au gaz et son volume double, est-ce que la pression à l'intérieur du cylindre va doubler?

### 3.4 FORCES HYDROSTATIQUES SUR DES SURFACES PLANES SUBMERGÉS

**Plaque exposée à un liquide** (vanne d'un barrage) :

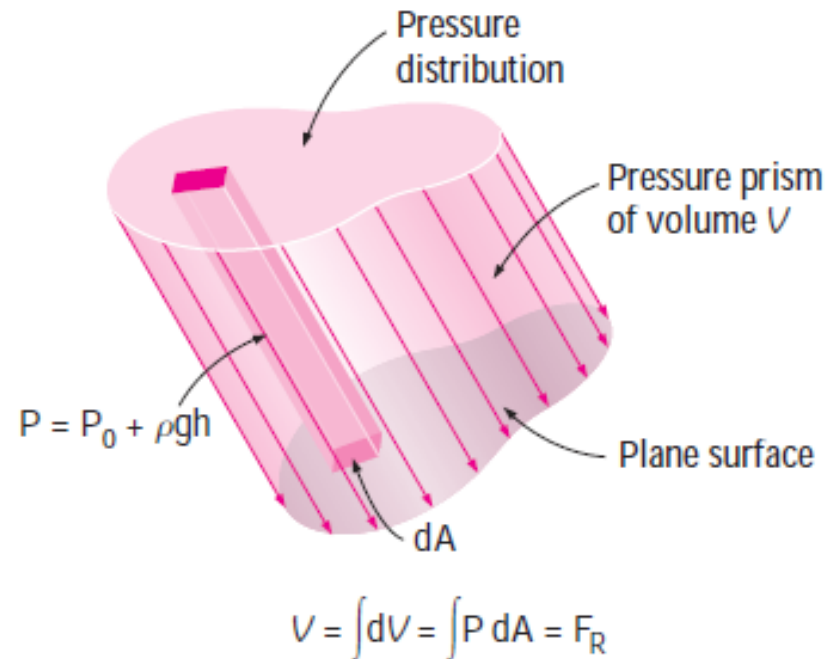
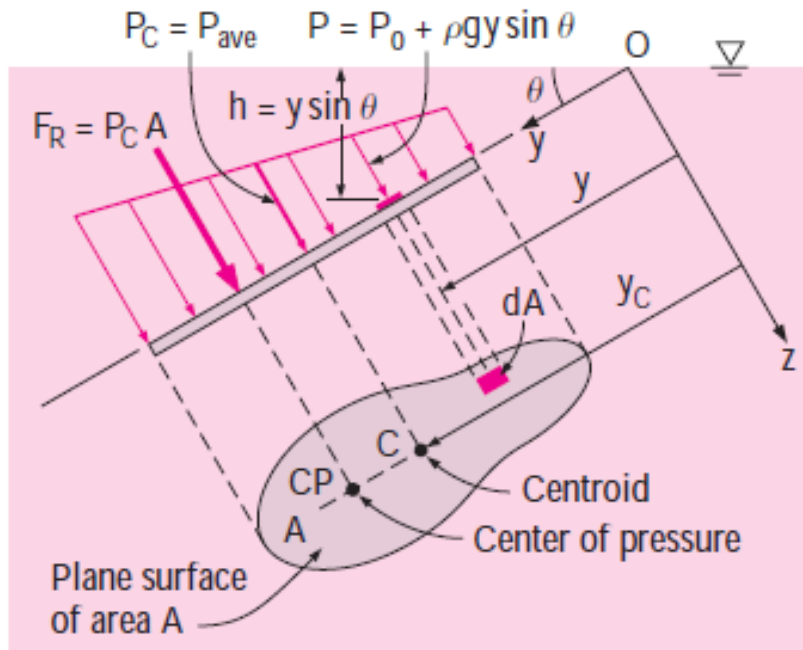
- ▶ forces hydrostatiques = un système de forces parallèles
- ▶ Autre face de plaque exposée à l'atmosphère et  $P_{\text{atm}}$  agit sur les deux faces de la plaque
- ▶ Résultante nulle de  $P_{\text{atm}} \Rightarrow$  existence de la jauge de pression seule





### 3.4 FORCES HYDROSTATIQUES SUR DES SURFACES PLANES SUBMERGÉS

Sur une plaque complètement submergée :



Pression absolue à n'importe quel point de la plaque est :

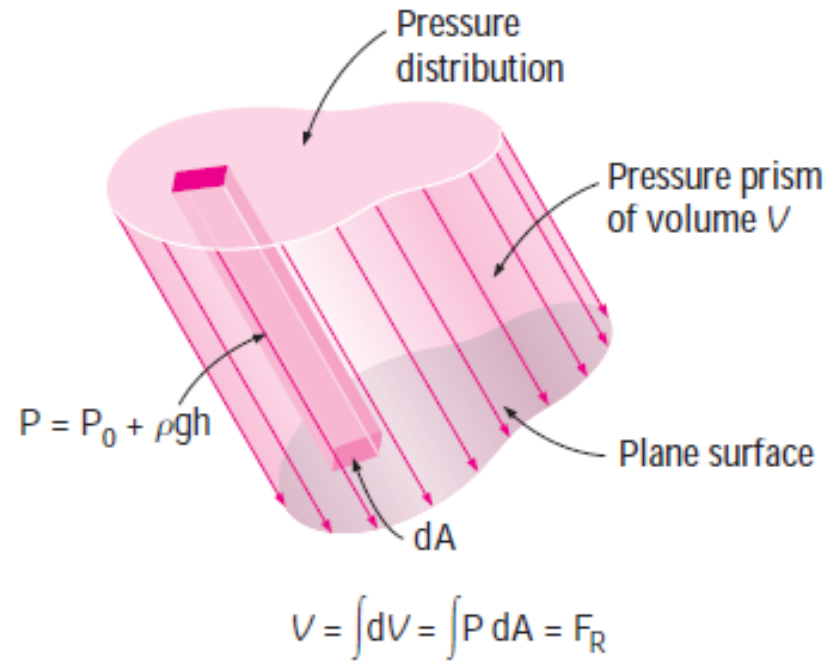
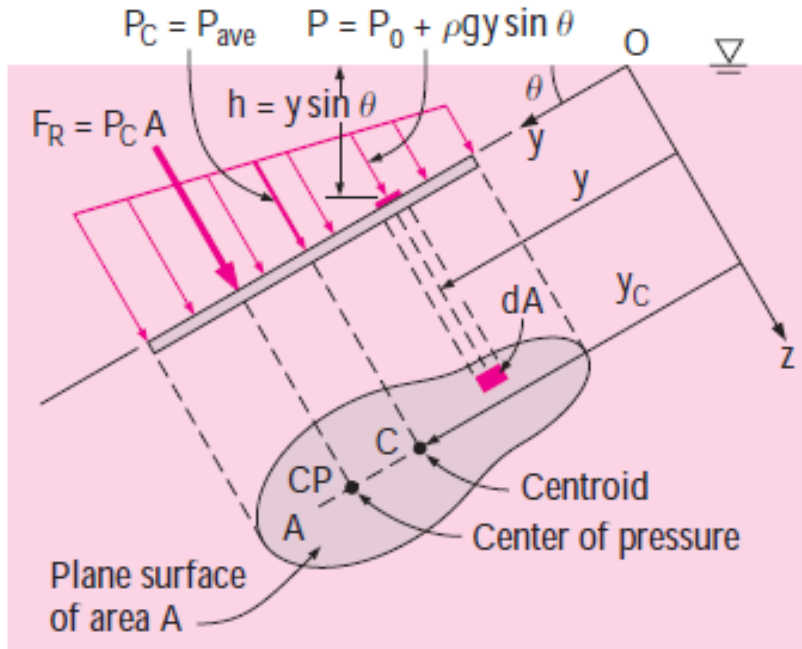
$$P = P_0 + \rho g h = P_0 + \rho g y \sin \theta$$

Force hydrostatique résultante agissant sur la plaque est :

$$F_R = \int_A P dA = \int_A (P_0 + \rho g y \sin \theta) dA = P_0 A + \rho g \sin \theta \int_A y dA$$

### 3.4 FORCES HYDROSTATIQUES SUR DES SURFACES PLANES SUBMERGÉES

Sur une plaque complètement submergée :

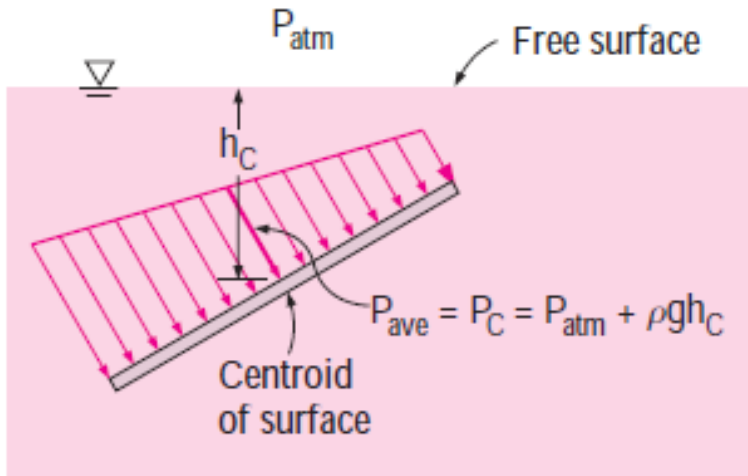


Coordonnée  $y$  du centroïde est :

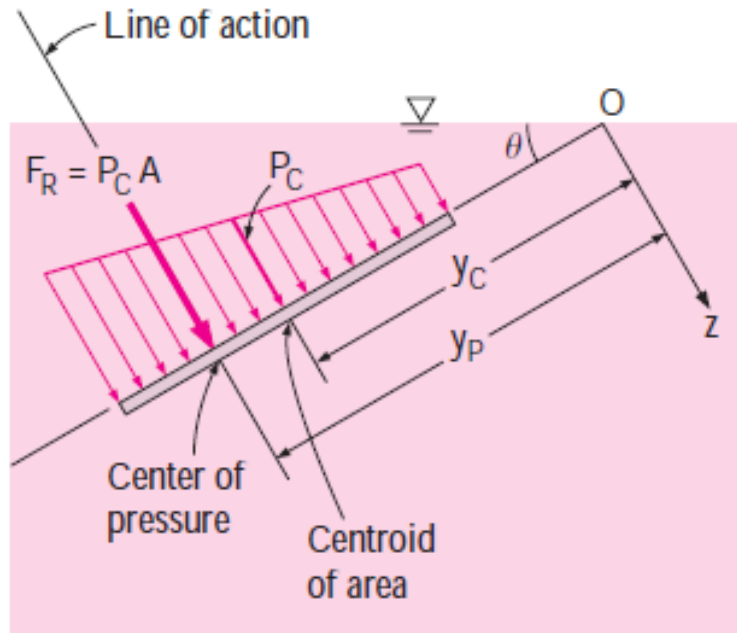
$$y_C = \frac{1}{A} \int_A y dA$$

### 3.4 FORCES HYDROSTATIQUES SUR DES SURFACES PLANES SUBMERGÉS

Sur une plaque complètement submergée :



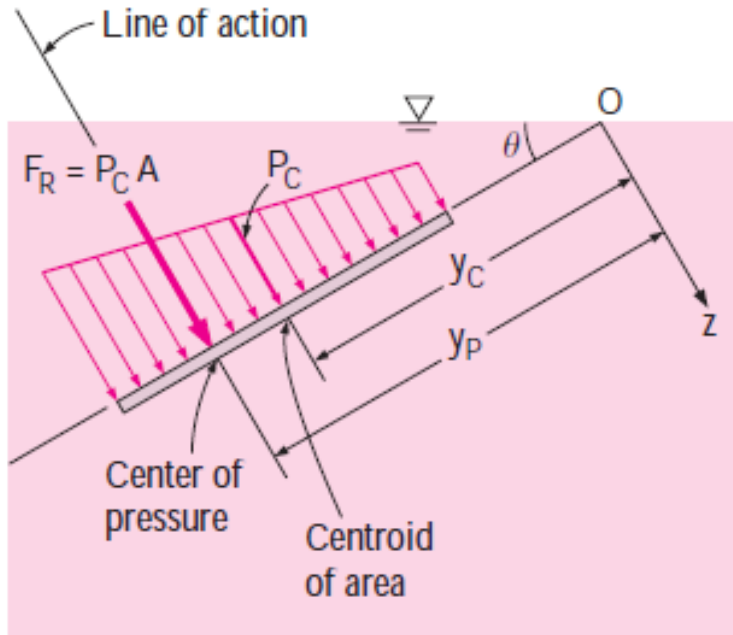
$$F_R = (P_0 + \rho g y_C \sin \theta) A = (P_0 + \rho g h_C) A = P_C A = P_{ave} A$$



- Grandeur de la force résultante agissant sur une surface plane d'une plaque complètement submergée dans un fluide homogène = produit de la pression au centroïde de la plaque & superficie de la plaque
- Point d'intersection entre ligne d'action de  $F_R$  & surface de la plaque → centre de pression

### 3.4 FORCES HYDROSTATIQUES SUR DES SURFACES PLANES SUBMERGÉS

Sur une plaque complètement submergée :



- Localisation verticale de ligne d'action est déterminée en égalant le moment de  $F_R$  & moment de la force de pression distribuée sur l'axe  $X$

$$y_P F_R = \int_A y P \, dA = \int_A y (P_0 + \rho g y \sin \theta) \, dA = P_0 \int_A y \, dA + \rho g \sin \theta \int_A y^2 \, dA$$

$$y_P F_R = P_0 y_C A + \rho g \sin \theta I_{xx, O}$$

$$I_{xx, O} = \int_A y^2 \, dA$$

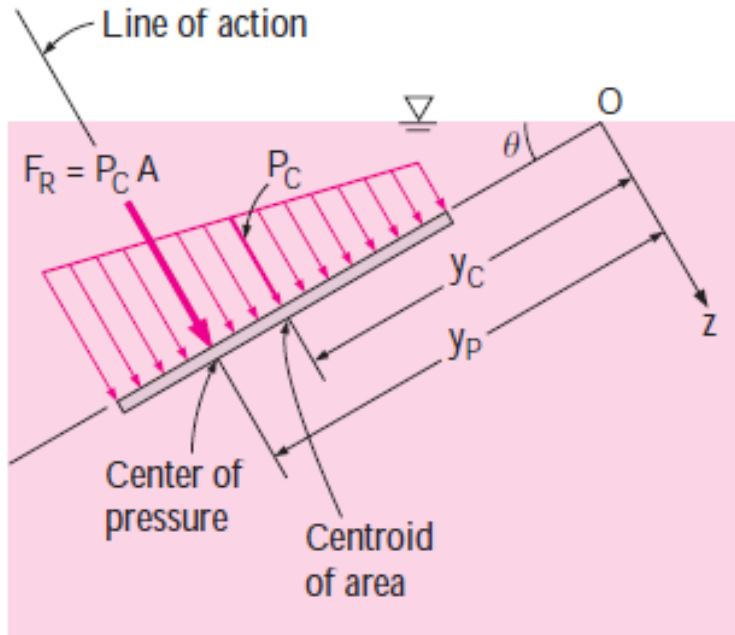
$I_{xx, O}$  : moment d'inertie

$$I_{xx, O} = I_{xx, C} + y_C^2 A$$

$I_{xx, C}$  : moment d'inertie

### 3.4 FORCES HYDROSTATIQUES SUR DES SURFACES PLANES SUBMERGÉS

Sur une plaque complètement submergée :



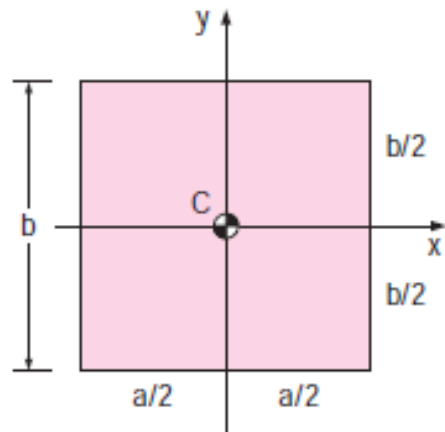
$$y_P = y_C + \frac{I_{xx, C}}{[y_C + P_0/(\rho g \sin \theta)]A}$$

$$y_P = y_C + \frac{I_{xx, C}}{y_C A}$$

$$P_0 = 0 \text{ (} P_{\text{atm}} \text{ ignorée)}$$

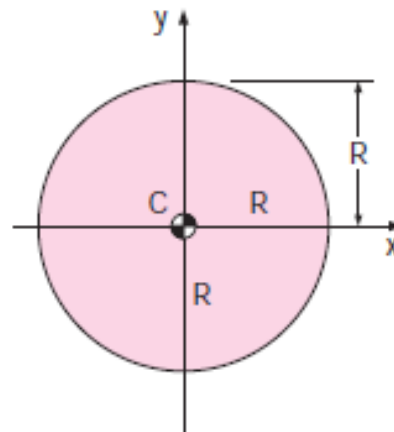
### 3.4 FORCES HYDROSTATIQUES SUR DES SURFACES PLANES SUBMERGÉS

Sur une plaque complètement submergée :



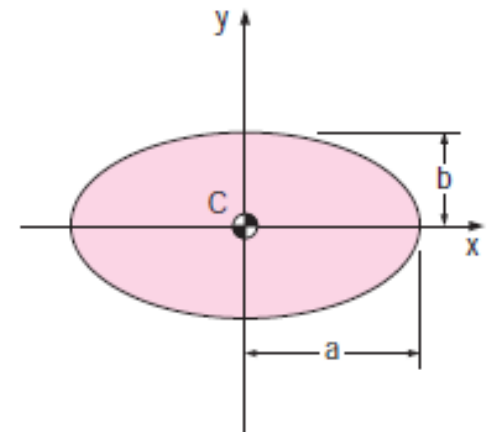
$$A = ab, I_{xx, C} = ab^3/12$$

(a) Rectangle



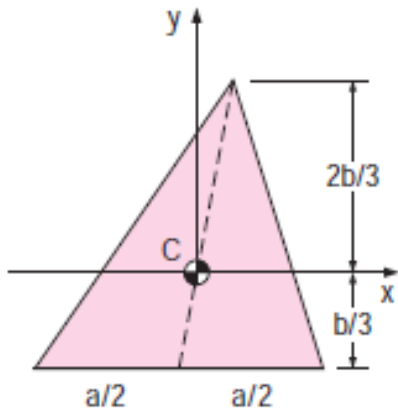
$$A = \pi R^2, I_{xx, C} = \pi R^4/4$$

(b) Circle



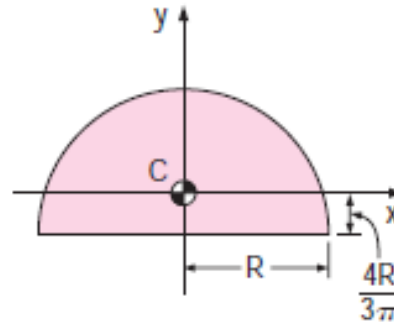
$$A = \pi ab, I_{xx, C} = \pi ab^3/4$$

(c) Ellipse



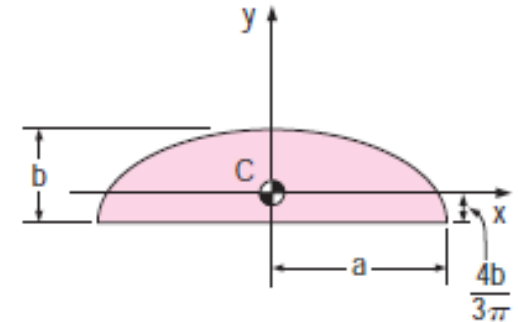
$$A = ab/2, I_{xx, C} = ab^3/36$$

(d) Triangle



$$A = \pi R^2/2, I_{xx, C} = 0.109757R^4$$

(e) Semicircle

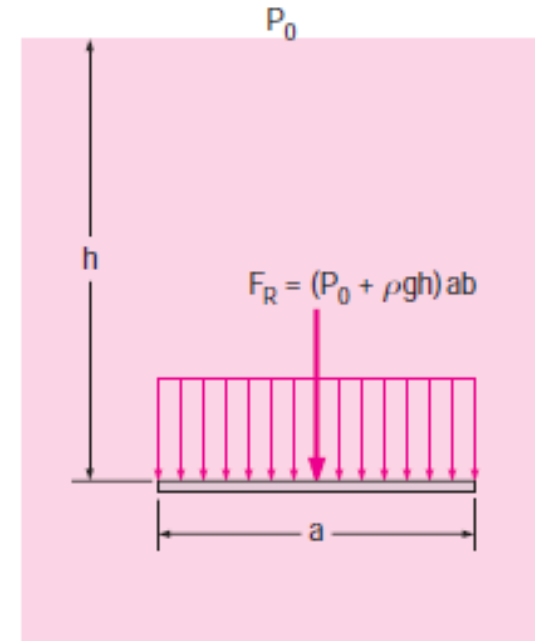
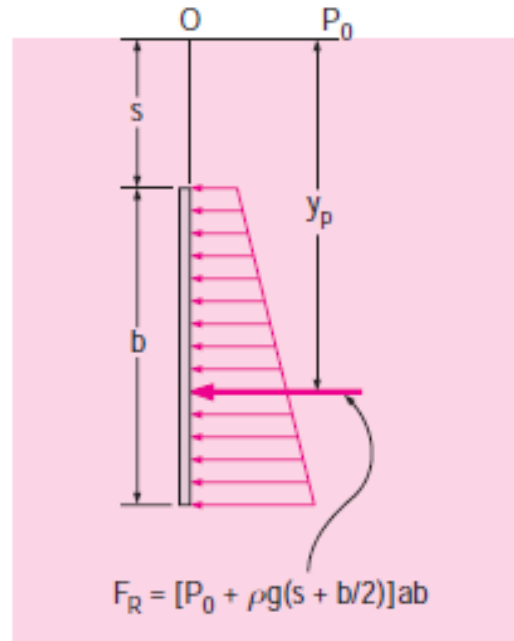
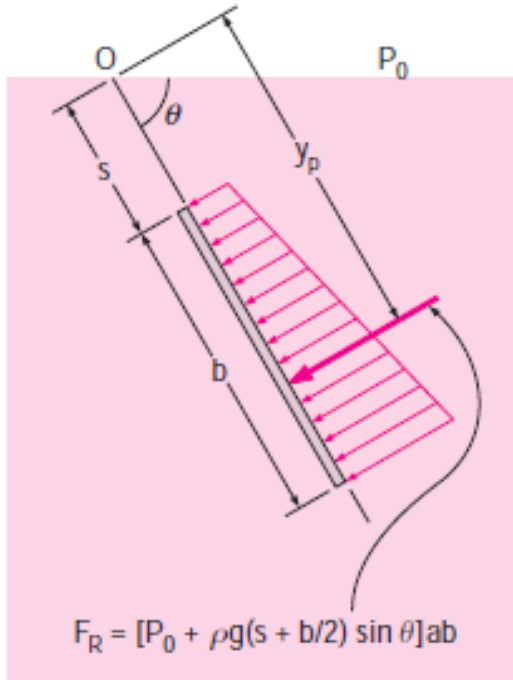


$$A = \pi ab/2, I_{xx, C} = 0.109757ab^3$$

(f) Semiellipse

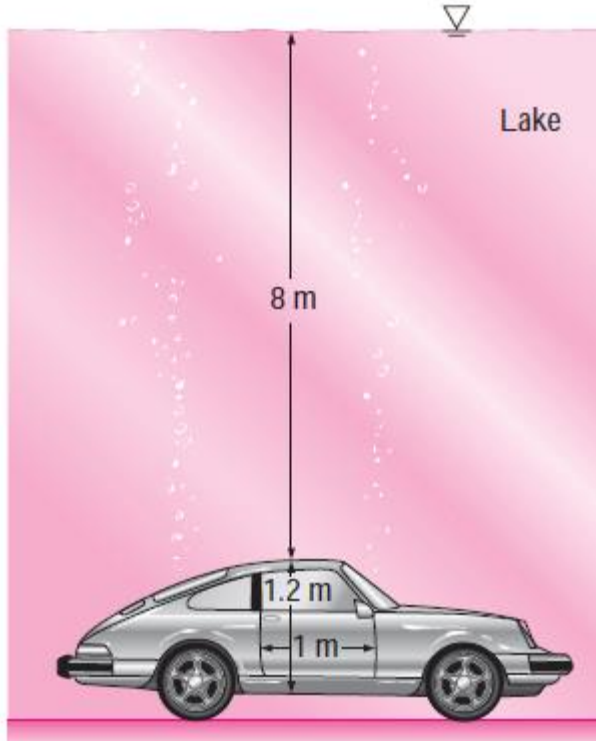
### 3.4 FORCES HYDROSTATIQUES SUR DES SURFACES PLANES SUBMERGÉES

Sur une plaque complètement submergée :



### 3.4 FORCES HYDROSTATIQUES SUR DES SURFACES PLANES SUBMERGÉES

Sur une plaque complètement submergée :

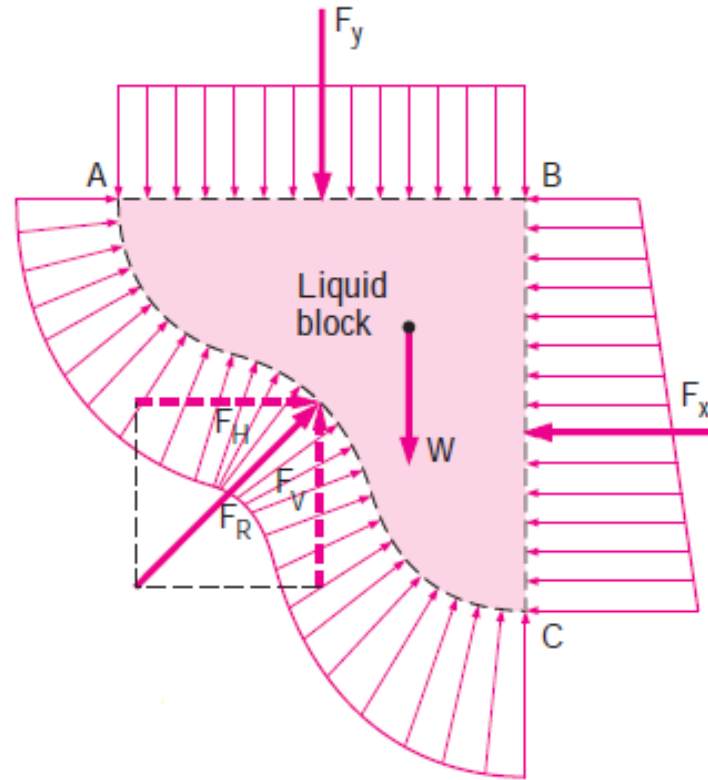
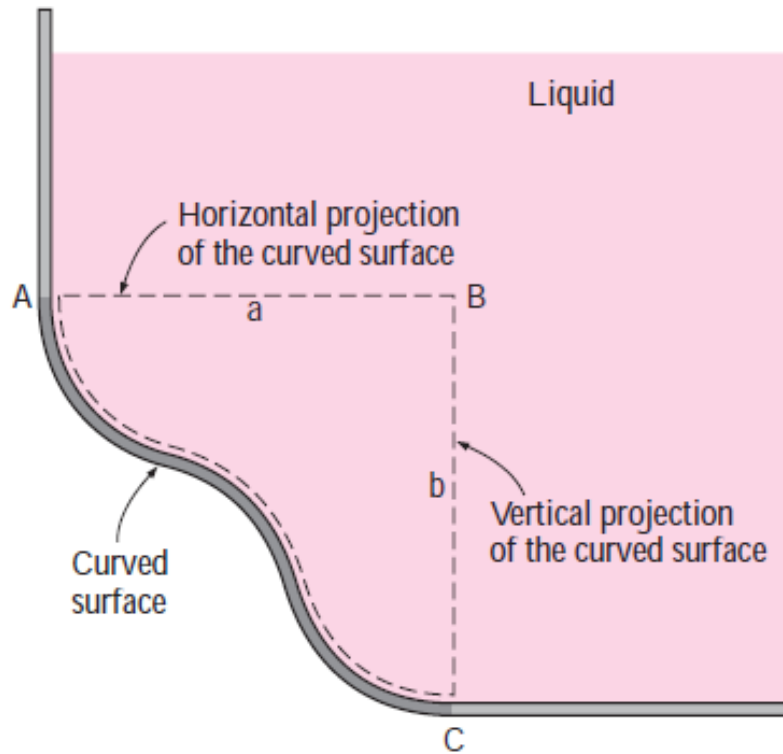


#### Exemple 5

Déterminer la force hydrostatique sur la porte & la localisation de la force résultante.



### 3.5 FORCES HYDROSTATIQUES SUR DES SURFACES IMMERGÉES COURBÉES

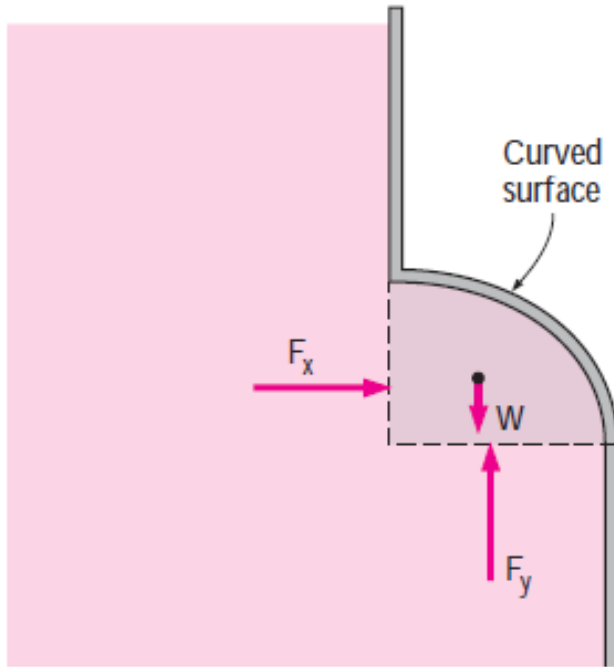


$F_H = F_x$  Composante horizontale de la force sur la surface courbée

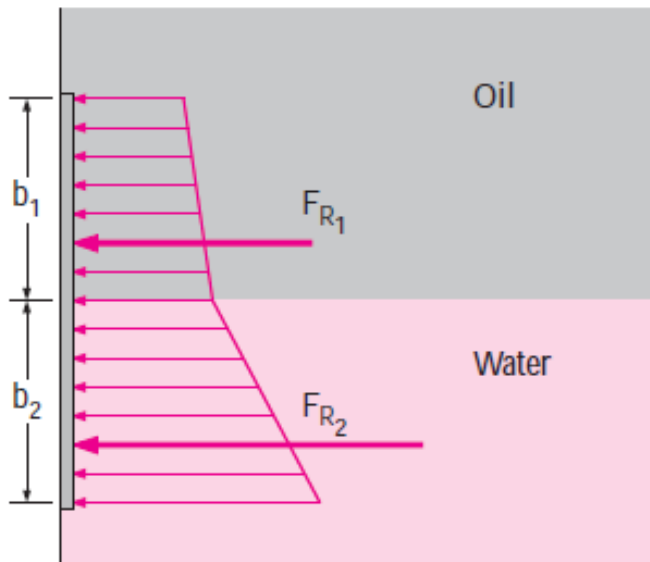
$F_V = F_y + W$  Composante verticale de la force sur la surface courbée

$$F_R = \sqrt{F_H^2 + F_V^2} \quad \tan \alpha = F_V / F_H$$

### 3.5 FORCES HYDROSTATIQUES SUR DES SURFACES IMMERGÉES COURBÉES



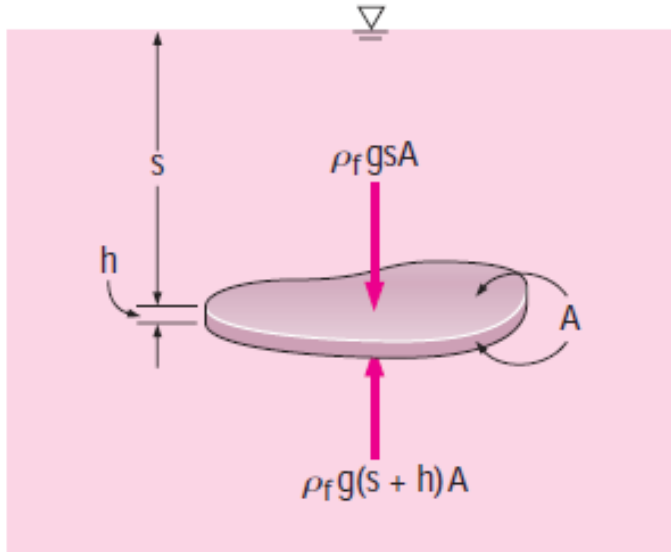
Dans le cas d'une surface courbée au-dessus du liquide, le poids du liquide est soustrait de la composante verticale de force hydrostatique (ils agissent en sens opposés)



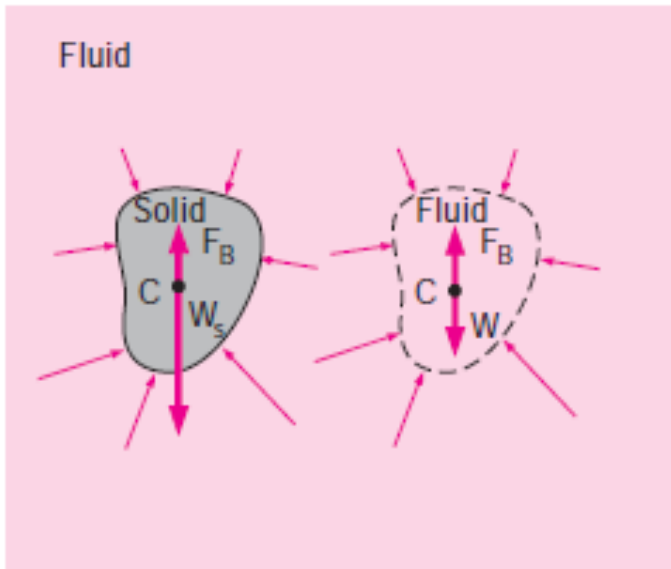
Lorsque la surface plane est en fluides multicouches :

$$F_R = \sum F_{R,i} = \sum P_{C,i} A_i$$

### 3.5 FLOTTABILITÉ & STABILITÉ



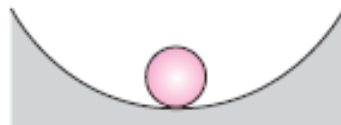
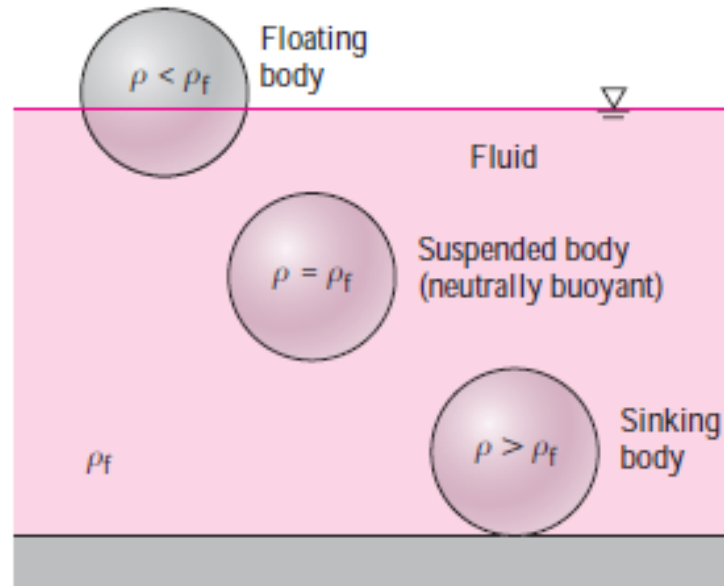
$$F_B = F_{\text{bottom}} - F_{\text{top}} = \rho_f g (s + h) A - \rho_f g s A = \rho_f g h A = \rho_f g V$$



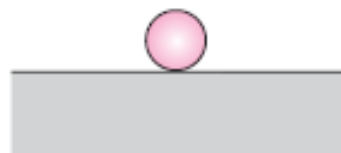
Force de flottabilité agissant sur un corps immergé dans un fluide est égale au poids du fluide déplacé par le corps, et agit à travers le centroïde du volume déplacé

$$F_B = W \rightarrow \rho_f g V_{\text{sub}} = \rho_{\text{ave, body}} g V_{\text{total}} \rightarrow \frac{V_{\text{sub}}}{V_{\text{total}}} = \frac{\rho_{\text{ave, body}}}{\rho_f}$$

### 3.5 FLOTTABILITÉ & STABILITÉ



(a) Stable



(b) Neutrally stable



(c) Unstable

