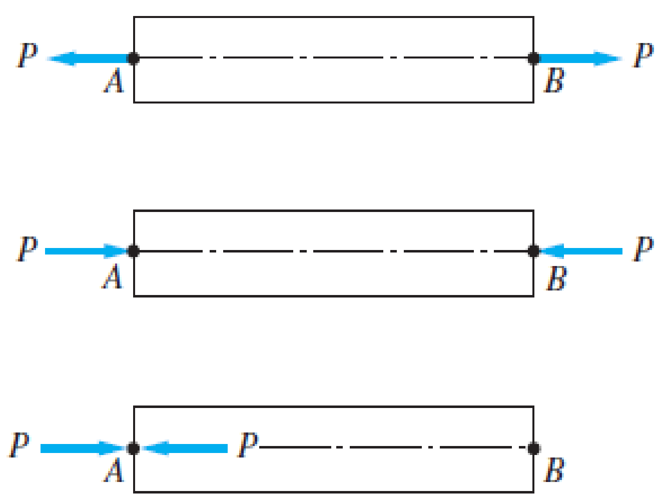
Chapitre 1
SYSTÈMES DE FORCES : OPÉRATIONS DE BASE

1 Équivalence des vecteurs

- 2 vecteurs égaux : même magnitude & même direction
- Équivalence $\Rightarrow$ interchangeabilité
  - 2 vecteurs équivalents peuvent interchangeables sans modifier le résultat
  - Égalité $\neq$ Équivalence : effets différents d'une force appliquée à des points différents d'un corps
- Vecteurs représentant quantités physiques classés en 3 types :
  - Vecteurs fixes : vecteurs équivalents ont mêmes magnitude, direction & point d'application
  - Vecteurs glissants : vecteurs équivalents ont mêmes magnitude, direction & ligne d'action
  - Vecteurs libres : vecteurs équivalents ont mêmes magnitude & direction

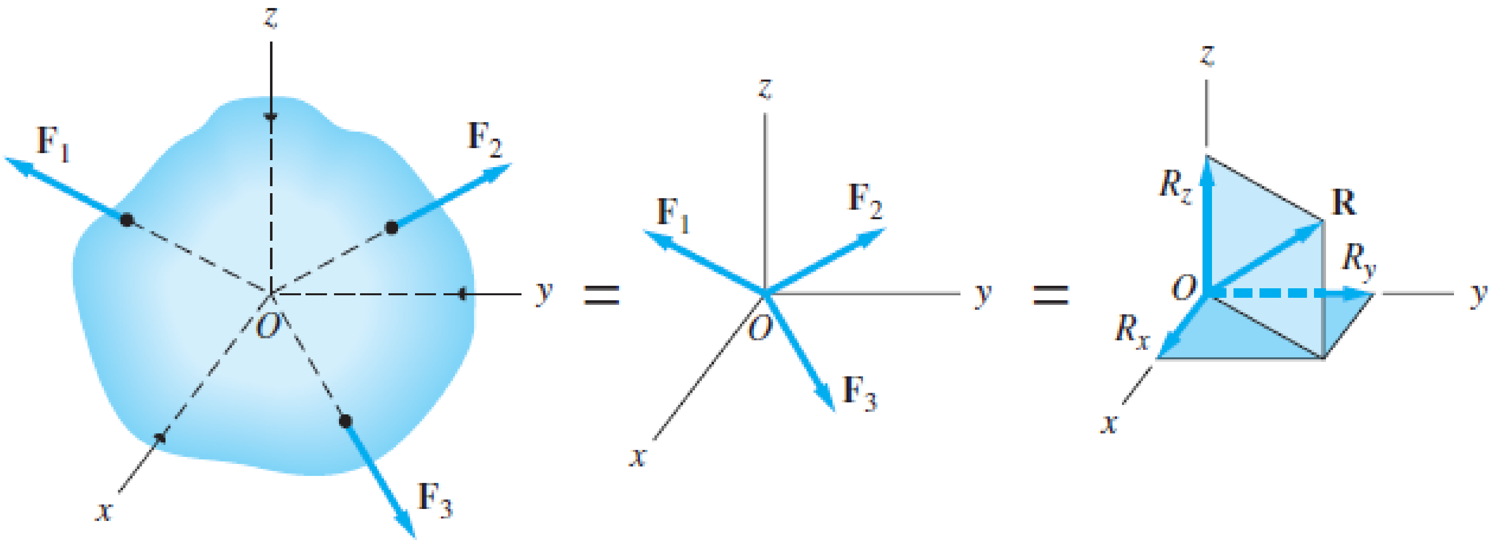
2 Force

- Force : terme désignant une interaction mécanique entre corps
- Peut affecter à la fois le mouvement & la déformation du corps
- Peut s'exercer :
  - Par contact : forces par contact sont distribuées sur une surface du corps
  - À distance : forces s'exerçant à distance sont distribuées sur un volume du corps
- Surface de contact souvent faible approximée par un point ⇒ force concentrée au point de contact
  - Point de contact : point d'application de la force
  - Ligne d'action d'une force concentrée : ligne passant par point d'application & parallèle à la force
- Force : vecteur fixe, peut produire
  - Tension
  - Compression
  - Aucun effet



3 Réduction du système de forces concourantes

- Remplacement d'un système de forces concurrentes par une force unique



$$\mathbf{R} = \Sigma\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \cdots$$

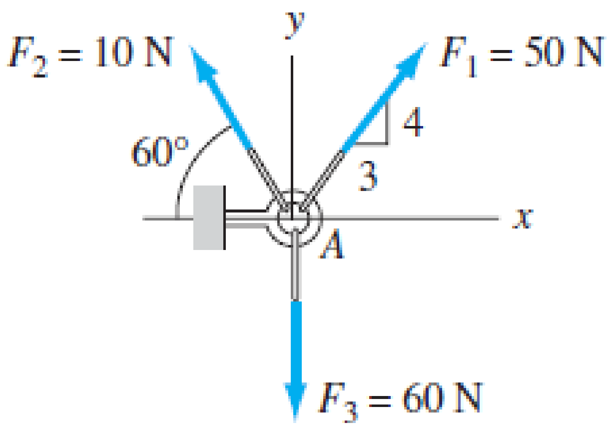
En composantes rectangulaires :

$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \qquad R_z = \Sigma F_z$$

3 Réduction d'un système de forces concourantes

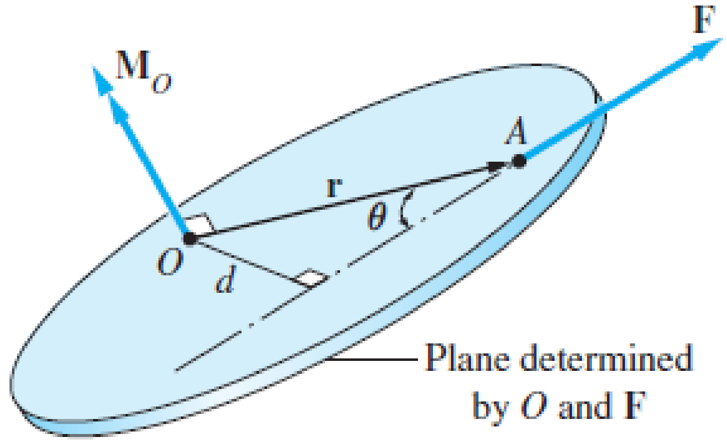
- Exemple 1

Déterminer la résultante de 3 forces concourantes de la figure ci-dessous



4 Moment d'une force par rapport à un point

- Définition



Soient une force $\mathbf{F}$ & un point O n'étant pas sur la ligne d'action de $\mathbf{F}$.

Soit un point A sur la ligne d'action de $\mathbf{F}$ & un vecteur de O à A nommé $\mathbf{r}$

Moment de force $\mathbf{F}$ par rapport à O, centre du moment est défini par :

$$\boxed{\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}}$$

- Interprétation géométrique

Magnitude de $\mathbf{M_o}$:

$$M_O = |\mathbf{M}_O| = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = rF\sin\theta$$

θ angle entre $\mathbf{F}$ & $\mathbf{r}$: $r\sin\theta = d$

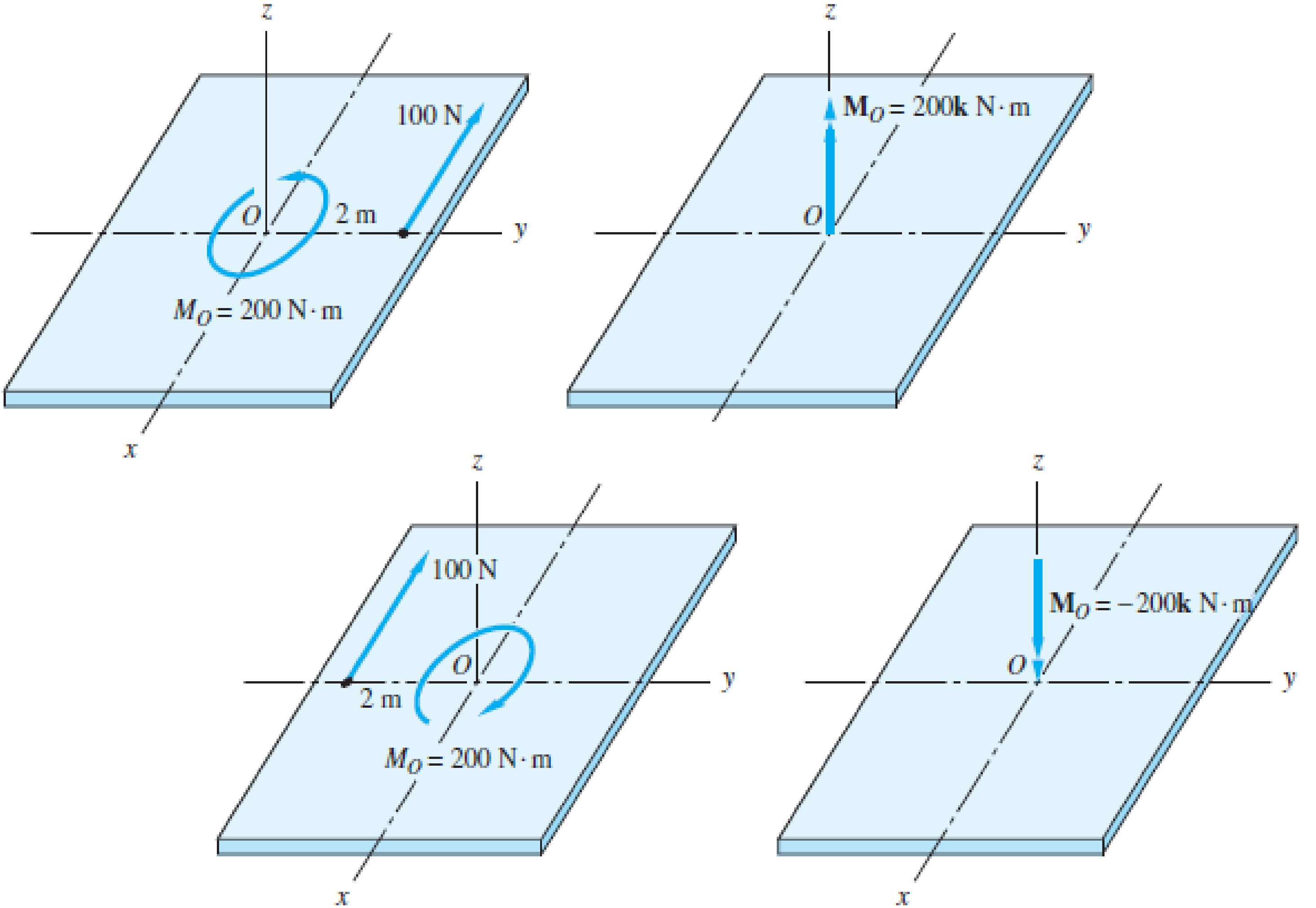
$$\boxed{M_O = Fd}$$

4 Moment d'une force par rapport à un point

- Interprétation géométrique

  Direction & signe du moment d'une force :

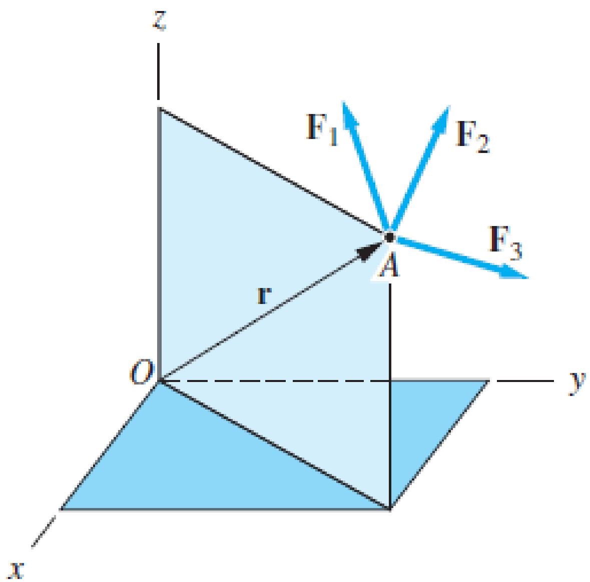
  - sens de rotation aiguilles montre : moment négatif
  - sens contraire aiguilles montre : moment positif



4 Moment d'une force par rapport à un point

- Principe des moments (théorème de Varignon)

Moment d'une force par rapport à un point = somme des moments de ses composantes par rapport à ce point



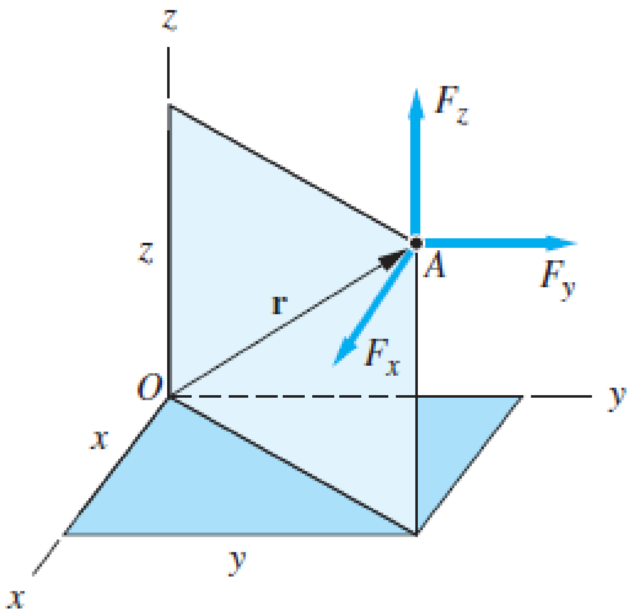
$$\mathbf{M}_O = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{F}_1) + (\mathbf{r} \times \mathbf{F}_2) + (\mathbf{r} \times \mathbf{F}_3)$$

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3) = \mathbf{r} \times \mathbf{R}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$$

4 Moment d'une force par rapport à un point

- Méthodes vectorielle & scalaire
  - Méthode vectorielle :
    - Écrire $\mathbf{F}$ sous forme vectorielle
    - Choisir $\mathbf{r}$ & l'écrire sous forme vectorielle
    - Utiliser le déterminant $\mathbf{r}$ x $\mathbf{F}$ pour évaluer $\mathbf{M_O}$



$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M}_O = (yF_z - zF_y)\mathbf{i} + (zF_x - xF_z)\mathbf{j} + (xF_y - yF_x)\mathbf{k}$$

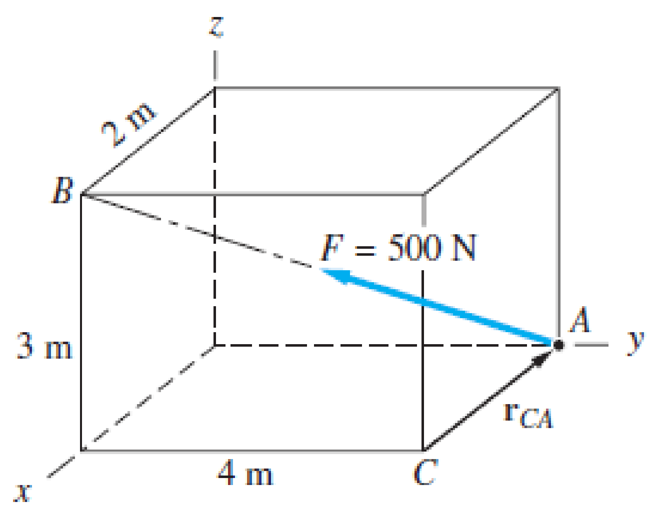
4 Moment d'une force par rapport à un point

- Méthodes vectorielle & scalaire
  - Méthode scalaire :
    - Convenable lorsque le bras du moment d peut être facilement déterminé

$$M_O = Fd$$

- Exemple 2

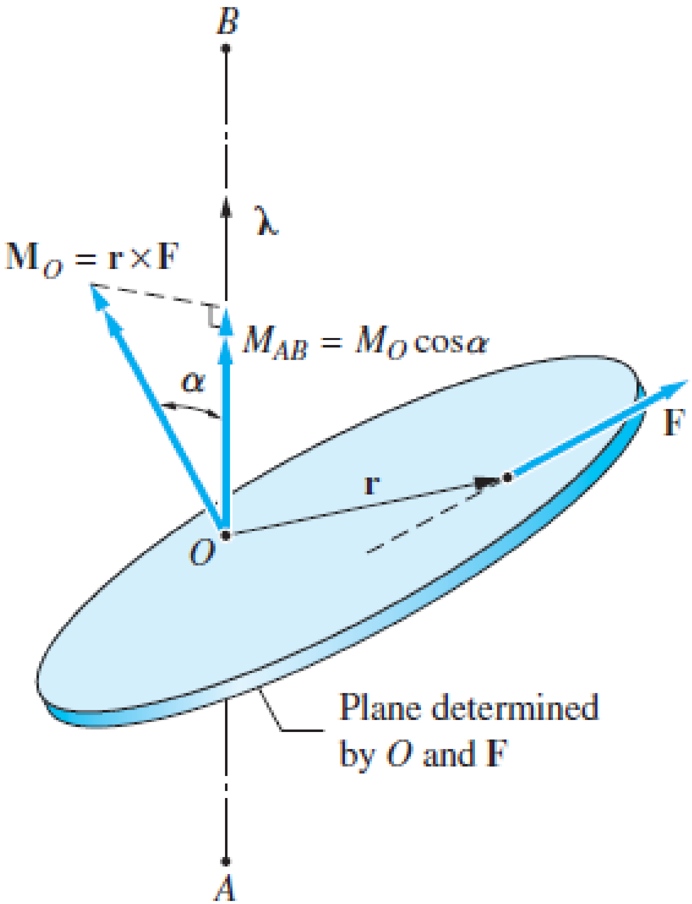
  Pour la figure ci-dessous, déterminer (1) moment de force **F** par rapport au point C, (2) la distance perpendiculaire entre C & la ligne d'action de **F**.



5 Moment d'une force par rapport à un axe

- Définition

Moment de force F par rapport à l'axe AB est la composante orthogonale de $\mathbf{M_o}$ le long de l'axe AB, où O est un point sur AB



$$M_{AB} = M_O \cos\alpha$$

$\boldsymbol{\alpha}$ angle entre $\boldsymbol{M_o}$ & $\boldsymbol{\lambda}$

Étant donné : $M_O \cos\alpha = \mathbf{M}_O \cdot \boldsymbol{\lambda}$

$$M_{AB} = \mathbf{M}_O \cdot \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\lambda}$$

$\boldsymbol{M_{AB}}$: moment de force F par rapport à l'axe AB

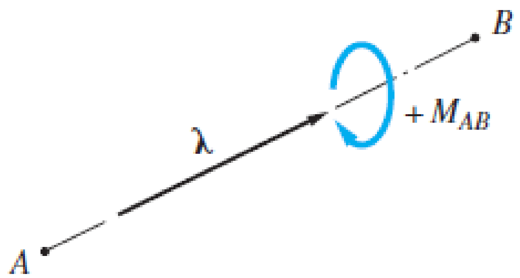
$\boldsymbol{M_o}$: moment de F par rapport à O, O étant un point sur AB

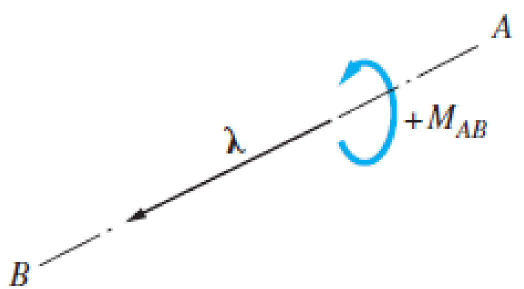
$\boldsymbol{\lambda}$: vecteur unité dirigé de A vers B

$\mathbf{r}$: vecteur position de O à n'importe quel point sur la ligne d'action de F

5 Moment d'une force par rapport à un axe

- Définition





$\boldsymbol{\lambda}$ détermine le sens positif de M_{AB} par la règle de la main droite

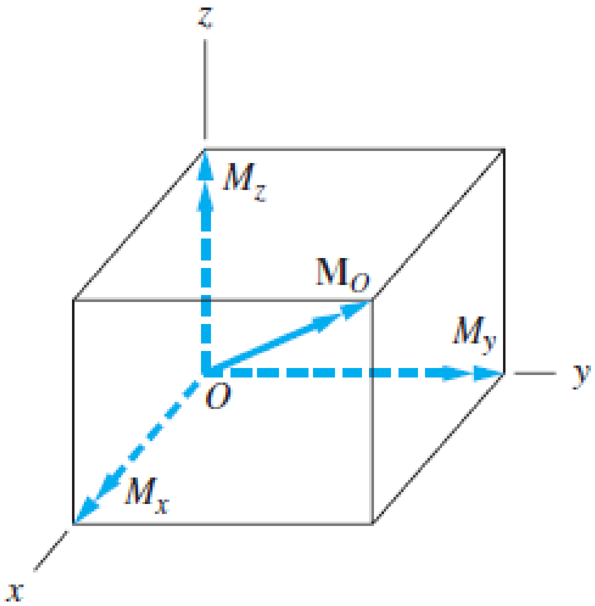
Moment de $\mathbf{F}$ par rapport à l'axe AB comme vecteur

$$\mathbf{M}_{AB} = M_{AB}\boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{r} \times \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{\lambda}$$

5 Moment d’une force par rapport à un axe

- Définition

Composantes rectangulaires de $\boldsymbol{M_o}$



$$M_x = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{i} \qquad M_y = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{j} \qquad M_z = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{k}$$

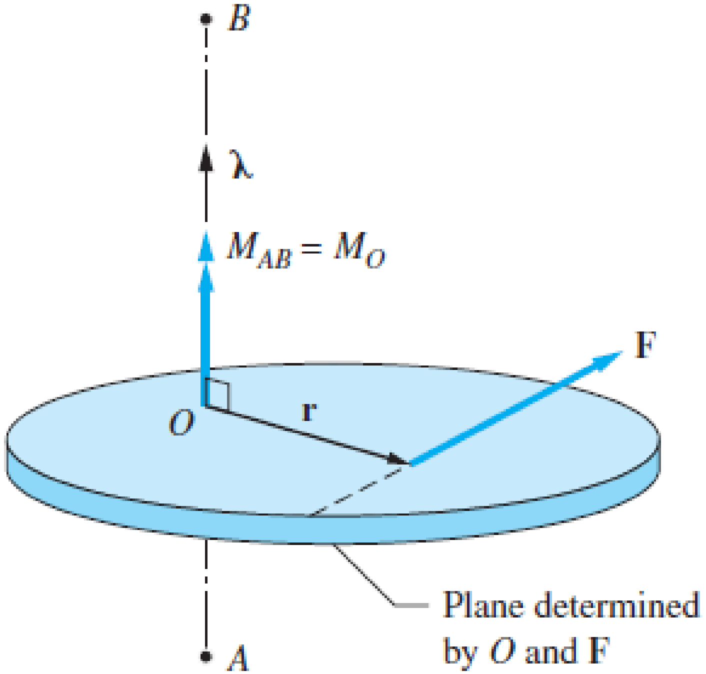
Composantes rectangulaires du moment d’une force par rapport à l’origine O sont égales aux moments de la force par rapport aux coordonnées des axes.

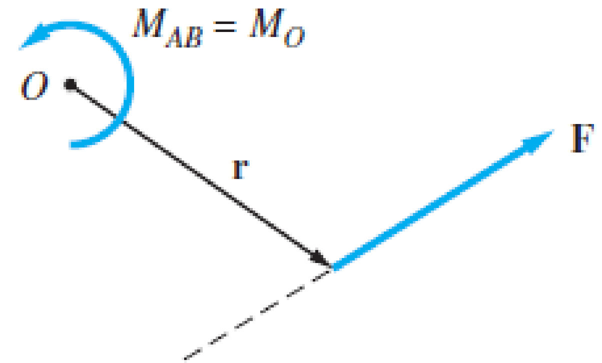
$$\mathbf{M}_O = M_x\mathbf{i} + M_y\mathbf{j} + M_z\mathbf{k}$$

5 Moment d'une force par rapport à un axe

- Définition

Cas spécial : axe du moment perpendiculaire à $\mathbf{F}$



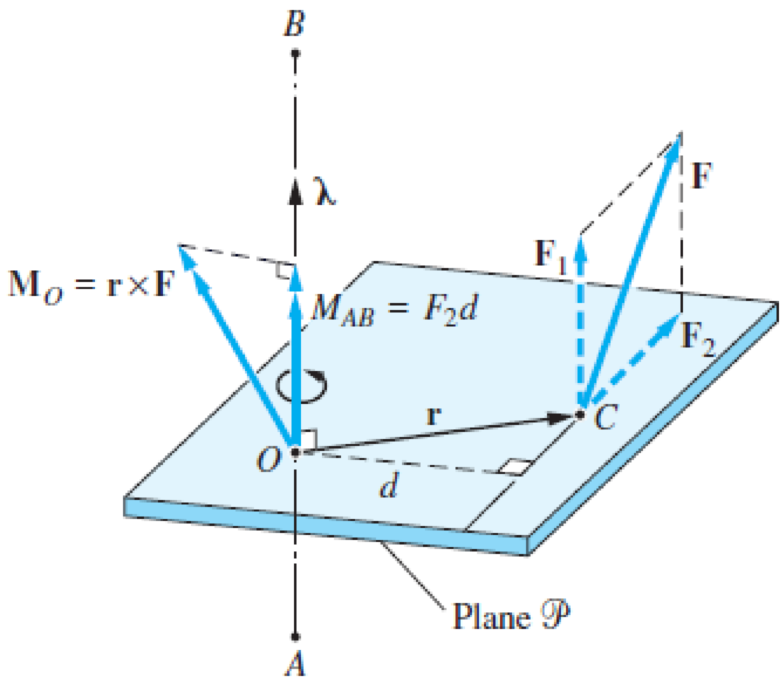


$$M_O = M_{AB}$$

5 Moment d'une force par rapport à un axe

- Interprétation géométrique

Cas spécial : axe du moment perpendiculaire à $\mathbf{F}$



$$M_{AB} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \cdot \boldsymbol{\lambda}$$

$$= \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 \cdot \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 \cdot \boldsymbol{\lambda}$$

Comme $\mathbf{r}$ x $\mathbf{F_1}$ perpendiculaire à $\boldsymbol{\lambda}$, $\mathbf{r}$ x $\mathbf{F_1} \cdot \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$

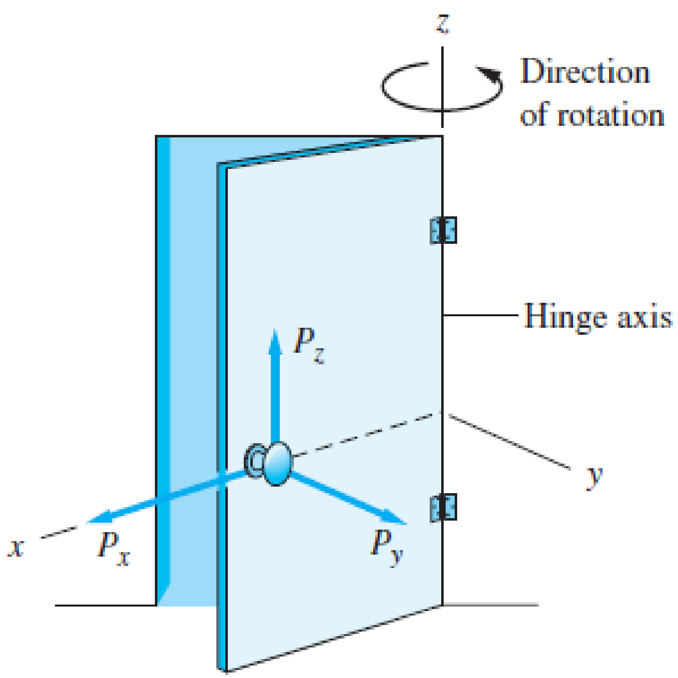
$$M_{AB} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 \cdot \boldsymbol{\lambda}$$

Avec $\mathbf{r}$ x $\mathbf{F_2} \cdot \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{F_2 d}$ ($\mathbf{d}$: distance perpendiculaire de O à la ligne d'action de $\mathbf{F_2}$

$$\boxed{M_{AB} = F_2 d}$$

5 Moment d’une force par rapport à un axe

➧ Interprétation géométrique



Caractéristiques physiques d’un moment de force par rapport à un axe :

– Force parallèle à l’axe du moment n’a de moment par rapport à cet axe

– Si ligne d’action de force intercepte l’axe du moment, la force n’a pas de moment par rapport à l’axe

– Moment d’une force proportionnelle à ses composantes ; c’est-à-dire perpendiculaire à l’axe du moment & bras du moment de cette composante

– Sens du moment est la directions dans laquelle la force tend à faire roter le corps

5 Moment d'une force par rapport à un axe

- Méthodes vectorielle & scalaire

Méthode vectorielle :

$$M_{AB} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \\ \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \end{vmatrix}$$

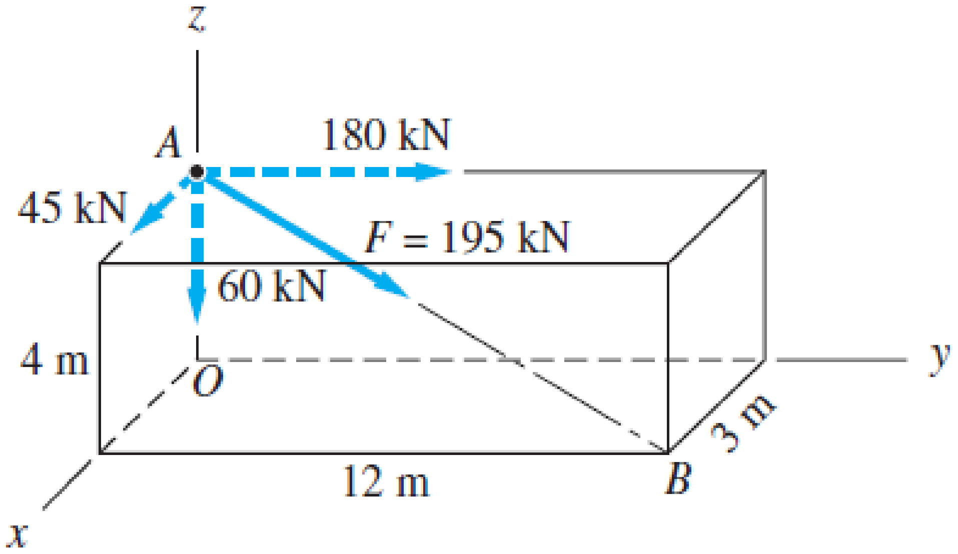
Méthode scalaire :

$$M_{AB} = F_2 d$$

5 Moment d'une force par rapport à un axe

- Exemple 3

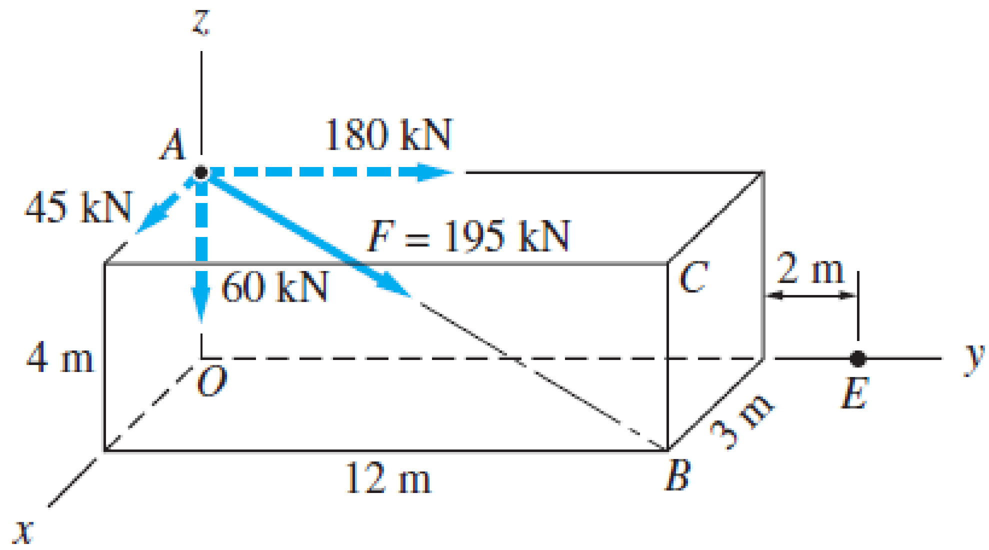
Pour la figure ci-dessous, (1) calculer les moments $\mathbf{M_x}$, $\mathbf{M_y}$, et $\mathbf{M_z}$ de $\mathbf{F}$ par la méthode scalaire ; et (2) le moment de $\mathbf{F}$ par rapport à O par la méthode vectorielle & vérifier que $\mathbf{M_o = M_x i + M_y j + M_z k}$.



5 Moment d'une force par rapport à un axe

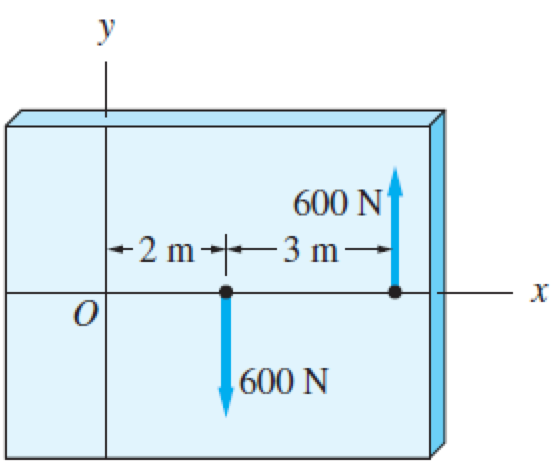
- Exemple 4

Pour la figure ci-dessous, (1) calculer le moment de **F** par rapport à l'axe CE ; et (2) exprimer le moment trouvé en (1) sous forme vectorielle.

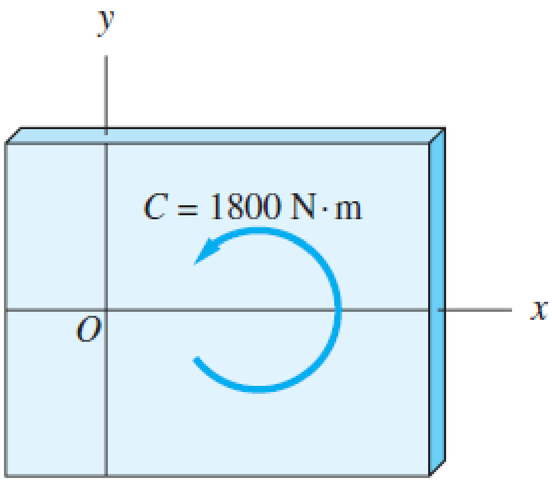


5 Moment d’une force par rapport à un axe

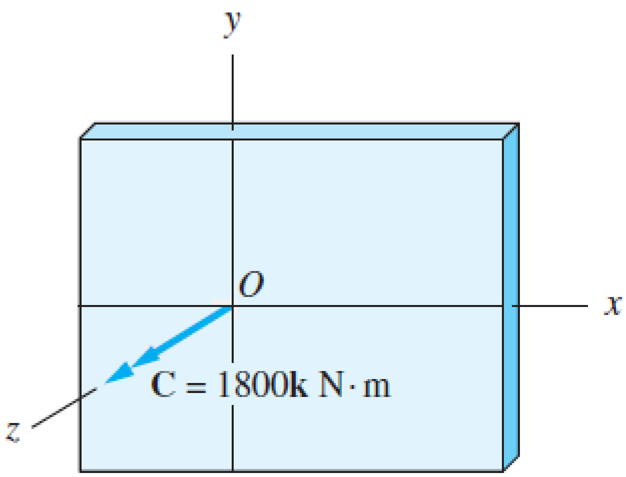
- Moment d’un couple



Couple



Moment d’un couple



Vecteur couple

- Résolution des couples

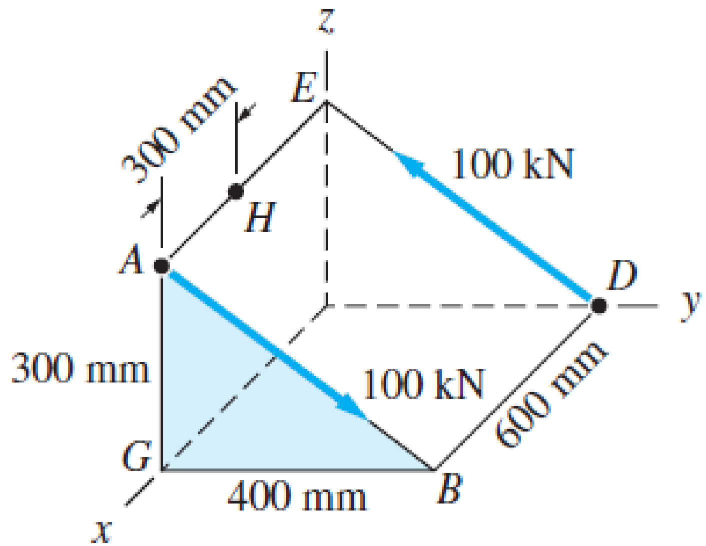
Moment d’un couple **C** par rapport à un axe AB avec **λ** vecteur unité dans la direction de l’axe :

$$M_{AB} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\lambda}$$

5 Moment d’une force par rapport à un axe

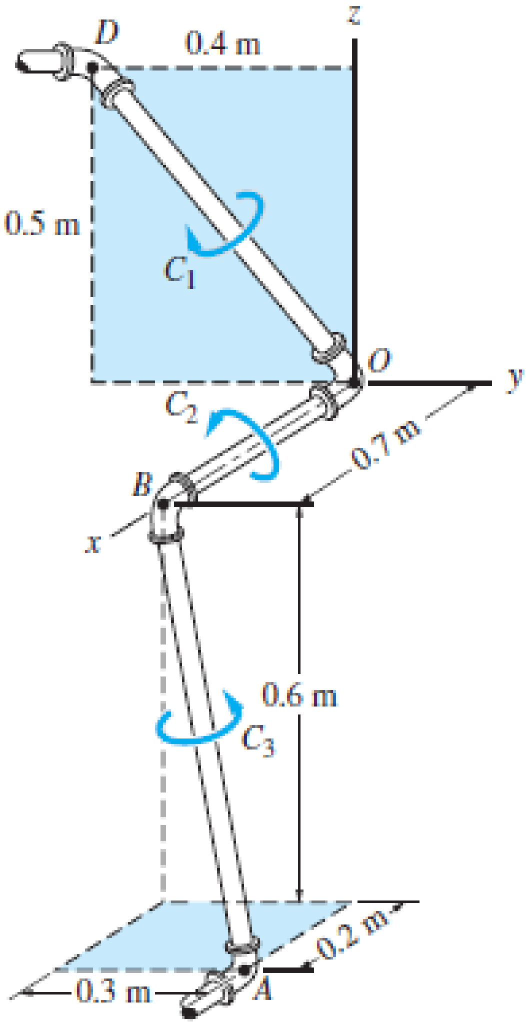
- Exemple 5

Pour le couple montré ci-dessous, calculer (1) le vecteur couple correspondant ; et (2) le moment du couple par rapport à l’axe GH.



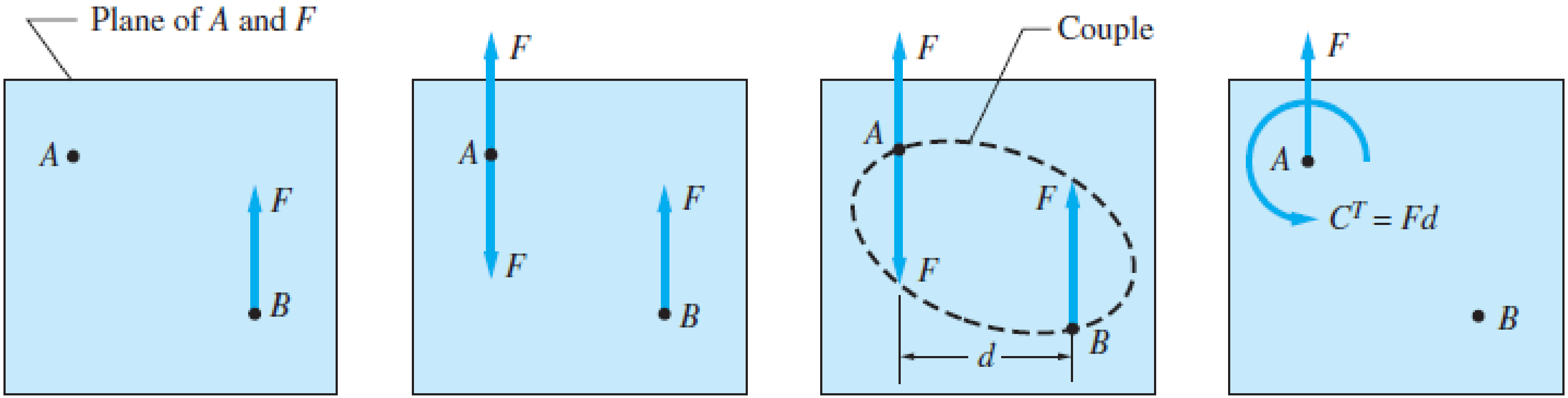
5 Moment d'une force par rapport à un axe

➧ Exemple 6



Une section d'un système de tuyaux est actionnée par 3 couple. Déterminer la magnitude du couple résultant $\mathbf{C}^{\mathrm{R}}$ & sa direction cosinus sachant que $\mathrm{C}_1 = 50\ \mathrm{N.m}$, $\mathrm{C}_2 = 90\ \mathrm{N.m}$ & $\mathrm{C}_3 = 140\ \mathrm{N.m}$

6 Changement de ligne d'action d'une force



Force originale

Forces égales & opposées introduites en A

Identification du couple

Système force-couple équivalent

Étapes pour transférer un couple

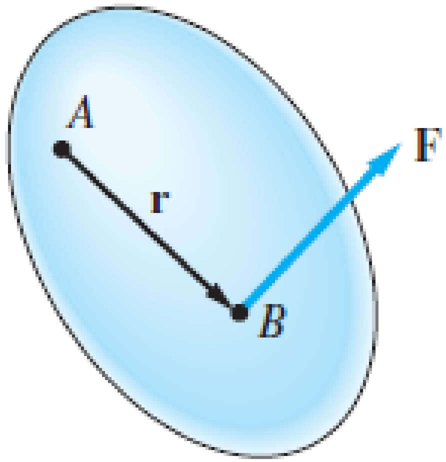
- Introduire 2 forces égales 7 opposées de magnitude $\mathbf{F}$ au point A qui sont parallèles à la force originale en B
- Identifier les 2 forces formant un couple de magnitude $\mathbf{C^T = Fd}$, où $\mathbf{d}$: distance entre les lignes d'action des forces à A & B. Troisième force & $\mathbf{C^T}$ constituent le système de force-couple

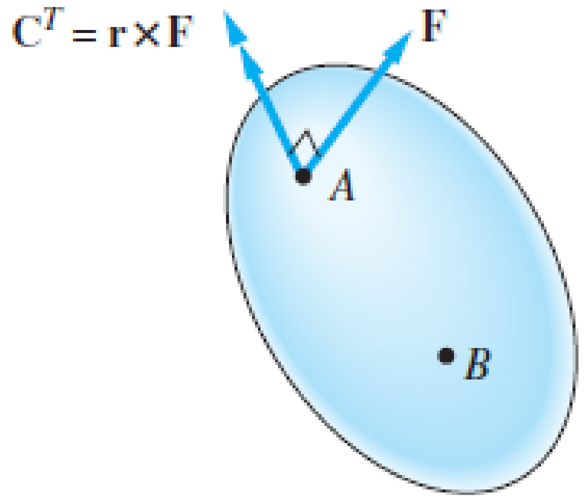
$\mathbf{C^T}$ est le couple de transfert.

Couple de transfert est égal au moment de force originale (agissant en B) concernant le transfert en A

6 Changement de ligne d'action d'une force

En terminologie vectorielle, ligne d'action de $\mathbf{F}$ peut être changée en une ligne parallèle à condition d'introduire le transfert de couple.





$\mathbf{r}$: vecteur du point de transfert A au point d'application B de la force originale
Prendre note qu'un couple est un vecteur libre pouvant être placé n'importe où.

6 Changement de ligne d'action d'une force

➧ Exemple 7

Pour la pièce d'une machine ci-dessous, remplacer la charge de 150 kN s'exerçant en A par (1) un système de force-couple équivalent par une force agissant en B ; et (2) deux forces horizontales, une agissant en B et une autre agissant en C.